令和５年度　一橋大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
商・経済・法・社会学部　数 I・II・A・B　令和 5 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4 5

1 n を 2 以上 20 以下の整数，k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする．

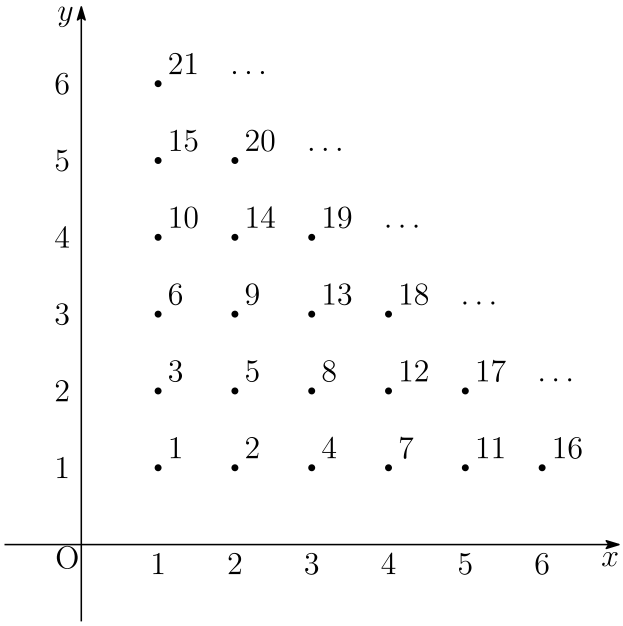
$$ {}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1} = 2({}_{n}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n}\mathrm{C}_{k+1}) $$

が成り立つような整数の組 $(n,\ k)$ を求めよ．

2 a を正の実数とする．2 つの曲線 $C_1 : y = x^3 + 2ax^2$ および $C_2 : y = 3ax^2 - \dfrac{3}{a}$ の両方に接する直線が存在するような a の範囲を求めよ．

3 原点を O とする座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(-3,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{C}(4,\ 5,\ 1)$ がある．P は $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right| \leqq 36$ を満たす点である．4 点 O，A，B，P が同一平面上にないとき，四面体 OABP の体積の最大値を求めよ．

4 xy 平面上で，x 座標と y 座標がともに正の整数であるような各点に，下の図のような番号をつける．点 $(m,\ n)$ につけた番号を $f(m,\ n)$ とする．たとえば，$f(1,\ 1)=1$，$f(3,\ 4)=19$ である．



(1) $f(m,\ n)+f(m+1,\ n+1)=2f(m,\ n+1)$ が成り立つことを示せ．

(2) $f(m,\ n)+f(m+1,\ n)+f(m,\ n+1)+f(m+1,\ n+1)=2023$ となるような整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ．

5 A，B，C の 3 人が，A，B，C，A，B，C，A，$\cdots$ という順番にさいころを投げ，最初に 1 を出した人を勝ちとする．だれかが 1 を出すか，全員が n 回ずつ投げたら，ゲームを終了する．A，B，C が勝つ確率 P_{A}，P_{B}，P_{C} をそれぞれ求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ ${}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1} = 2({}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_{k+1})$ より

$$\begin{aligned}
\frac{(n+2)!}{(k+1)!(n-k+1)!} &= 2\left\{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!}\right\} \\
(n+2)(n+1) &= 2\{(k+1)k + (n-k+1)(n-k)\} \\
(2k-n)^2 &= n+2
\end{aligned}$$

$n+2$ は 4 以上 22 以下の平方数となるから，$n+2 = 2^2,\ 3^2,\ 4^2$

$$k = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}, \quad n = 2,\ 7,\ 14$$

$1 \leqq k \leqq n-1$ であることに注意すると

$$\boldsymbol{(n,\ k) = (7,\ 2),\ (7,\ 5),\ (14,\ 5),\ (14,\ 9)}$$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $y = x^3 + 2ax^2$ より　　$y' = 3x^2 + 4ax$

C_1 上の点 $(t,\ t^3 + 2at^2)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 + 2at^2) = (3t^2 + 4at)(x - t)$$

すなわち　　$y = (3t^2 + 4at)x - 2t^3 - 2at^2$

この接線と C_2 の方程式から y を消去して整理すると

$$3ax^2 - (3t^2 + 4at)x + 2t^3 + 2at^2 - \frac{3}{a} = 0$$

このとき，係数について　$(3t^2 + 4at)^2 - 4{\cdot}3a\left(2t^3 + 2at^2 - \frac{3}{a}\right) = 0$

$$8a^2t^2 = 9t^4 + 36$$

上式おいて，$t \neq 0$ であるから　　$a^2 = \frac{1}{8}\left(9t^2 + \frac{36}{t^2}\right)$

相加平均・相乗平均の大小関係より　$9t^2 + \frac{36}{t^2} \geqq 2\sqrt{9t^2{\cdot}\frac{36}{t^2}} = 36$

したがって　$a^2 \geqq \frac{1}{8}{\cdot}36$　$a > 0$ に注意して　$\boldsymbol{a \geqq \frac{3}{\sqrt{2}}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right| \leqq 36$ より $\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}\right| \leqq 6$

A$(-3,\ 2,\ 0)$，B$(1,\ 5,\ 0)$，C$(4,\ 5,\ 1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}$ とおくと

$$\mathrm{D}\left(\frac{4}{3},\ \frac{9}{2},\ \frac{1}{3}\right), \quad |\overrightarrow{\mathrm{DP}}| \leqq 6$$

D から平面 OAB，すなわち，xy 平面まで距離は $\dfrac{1}{3}$

P は D を中心とする半径 6 の球面上とその内部であるから，P から xy 平面までの距離の最大値は

$$6+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$$

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|-3\cdot5-2\cdot1|=\dfrac{17}{2}$ より，求める四面体 OABP の最大値は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\frac{19}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{19}{3}=\boldsymbol{\frac{323}{18}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $f(1,\ j)=\dfrac{1}{2}j(j+1)$ より，$0 \leqq k \leqq j-1$ に対して

$$f(1+k,\ j-k)=f(1,\ j)-k=\frac{1}{2}j(j+1)-k$$

$1+k=m$，$j-k=n$ とすると，$k=m-1,\ j=m+n-1$ より

$$f(m,\ n)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)-m+1$$

したがって

$$\begin{aligned}
f(m,\ n)+f(m+1,\ n+1) &= \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)-m+1 \\
&\quad +\frac{1}{2}(m+n+2)(m+n+1)-m \\
&= (m+n)^2+(m+n)-2m+2 \\
&= 2\left\{\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)-m+1\right\} \\
&= 2f(m,\ n+1)
\end{aligned}$$

(2) 与えらた等式に (1) の結論を適用すると

$$\begin{aligned}
f(m+1,\ n)+3f(m,\ n+1) &= 2023 \\
2(m+n)(m+n+1)-4m+3 &= 2023 \\
(m+n)^2-m+n &= 1010 \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

したがって
$$\{2(m+n)-1\}^2=4041-8n<4041$$
$$\{2(m+n)+1\}^2=4041+8m>4041$$

$63^2=3869,\ 65^2=4225$ より

$$2(m+n)-1 \leqq 63, \quad 2(m+n)+1 \geqq 65 \quad \text{ゆえに} \quad m+n=32$$

これを ① に代入すると　$-m+n=-14$　よって　$\boldsymbol{m=23,\ n=9}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ で A，B，C がそれぞれ勝つ確率を $P_{\mathrm{A}}(k)$，$P_{\mathrm{B}}(k)$，$P_{\mathrm{C}}(k)$ とすると

$$P_{\mathrm{A}}(k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3}$$
$$P_{\mathrm{B}}(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{5}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3}$$
$$P_{\mathrm{C}}(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{25}{216}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3} = \frac{1}{1-\frac{125}{216}}\left\{1-\left(\frac{125}{216}\right)^{n}\right\} = \frac{216}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\} \text{ より}$$

$$P_{\mathrm{A}} = \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{A}}(k) = \frac{1}{6}\cdot\frac{216}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\} = \boldsymbol{\frac{36}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}}$$
$$P_{\mathrm{B}} = \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{B}}(k) = \frac{5}{36}\cdot\frac{216}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\} = \boldsymbol{\frac{30}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}}$$
$$P_{\mathrm{C}} = \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{C}}(k) = \frac{25}{216}\cdot\frac{216}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\} = \boldsymbol{\frac{25}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}}$$

■