

令和 6 年 度
熊本県立第二高等学校
2 学期中間テスト問題
数学特論

時 間 60 分

令和 6 年 9 月 25 日 (水) 2 限目 実施

3 年 理数科

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は 3 ページあります。問題用紙、解答用紙の印刷不鮮明、乱丁等がないかを確認してください。
3. 解答用紙は、この冊子の中に 1 枚入っています。
4. 白紙の計算用紙が 1 枚入っています (回収しません)。
5. 問題は全部で 5 題あります。
6. 問題文に指示のない限り、計算過程を記入してください。

1 次の各問いに答えよ。答えのみを解答欄に記入せよ。(I: 各 4 点)

- (1) $a \neq 0$ とする. $y = ax^2 - 2ax + b$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値が 9, 最小値が 1 となるような a, b の値を求めよ.
- (2) 4 辺の長さが 3, 4, 5, 6 である四角形が円に内接するとき, 四角形の面積を求めよ.
- (3) 大, 中, 小の 3 個のさいころを同時に投げるとき, 出た目の最大値が 4 である確率を求めよ.
- (4) $[2x] - [x] = 4$ を満たす実数 x の範囲を求めよ. ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す.
- (5) 多項式 $P(x)$ を $x - 1$ で割ると 2 余り, $x^2 + x + 2$ で割ると $-3x + 1$ 余るとき, $P(x)$ を $(x - 1)(x^2 + x + 2)$ で割ったときの余りを求めよ.
- (6) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, θ の方程式 $\cos^2 \theta + \sin \theta + a = 0$ が解をもつような a の値の範囲を求めよ.
- (7) a を定数とする. 直線 $y = ax - a + 3$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積を最小にする a の値を求めよ.
- (8) 空間において原点を O とし, 3 点 A, B, C の位置ベクトルを $\overrightarrow{OA} = (3, 1, -2)$, $\overrightarrow{OB} = (4, 1, -3)$, $\overrightarrow{OC} = (5, 3, -3)$ とするとき, $\triangle ABC$ の面積を求めよ.
- (9) 座標空間に 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(1, 3, -3)$ がある. 四面体 $OABCD$ の体積を求めよ.
- (10) $z^5 - 1 = 0$ の解を利用して, $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$ の値を求めよ.

2 次の各問いに答えよ。(I: 各 5 点)

- (1) α を定数とする. 微分方程式 $y' = \alpha y \left(y' = \frac{dy}{dx} \right)$ の解が $y = Ce^{\alpha x}$ (C は定数) であることを証明せよ.
- (2) (1) の結論を利用して, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ であること証明せよ.

- (3) 放射性同位体の原子数は, 時間の経過により (原子の崩壊), その原子数は減少する. 原子数 N は時刻 t の減少関数で, その変化率は $\frac{dN}{dt} < 0$ で, N に比例し

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

であることが分かっている (崩壊定数 λ は物質の種類による固有の定数).

$t = 0$ のとき $N = N_0$, $t = T$ (T は半減期) のとき $N = \frac{1}{2}N_0$ であるとする

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$$

が成り立つことを (1) の結論を利用して証明せよ.

- (4) $\alpha \neq \beta$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とするとき, 微分方程式

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

の解は, $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$ (C_1, C_2 は定数) であることを証明せよ.

- (5) $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とするとき, 微分方程式

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

の解は, $y = (C_1 x + C_2) e^{\alpha x}$ (C_1, C_2 は定数) であることを証明せよ.

- (6) ばね定数 $k[\text{N/m}]$ のばねの一端が固定され, 他端に質量 $m[\text{kg}]$ のおもりが付けられ, なめらかな水平面を運動している. 自然長の位置を原点 O とし, ばねが伸びる向きを変位 $x[\text{m}]$ の正の向きとし, おもりの加速度を $a[\text{m/s}^2]$ とすると, 次式が成り立つ.

$$ma = -kx$$

このとき, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ より, $a = x''$ とおくと

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

となる. 初期条件が $t = 0$ のとき $x = A$, $v = \frac{dx}{dt} = 0$ とすると

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

であることを (2), (4) の結論を用いて証明せよ.

- 3 k を整数とすると、 x の方程式 $x^2 - k^2 = 12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ。
(C : 10 点)

- 4 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ と円 $C_2 : (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$ とに点 P から接線を引く。P から C_1 の接点までの距離と C_2 の接点までの距離との比が $1 : 2$ になるとする。このとき、P の軌跡を求めよ。
(C : 10 点)

- 5 関数 $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 2 \sin x - 2\sqrt{3} \cos x$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = t$ とおいて、 y を t の式で表せ。
(C : 10 点)
- (2) $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ のとき、 y の最大値および最小値を求めよ。

1(答えのみ記入せよ.) I 問題 (各 4 点)

(1)		(6)	
(2)		(7)	
(3)		(8)	
(4)		(9)	
(5)		(10)	

2(途中の計算も書け.) I 問題 (各 5 点)

(1)	(2)
-----	-----

(3)	(4)
(5)	(6)

3

(途中の計算も書け.) C 問題 (10 点)

4

(途中の計算も書け.) C 問題 (10 点)

5

(途中の計算も書け.) C 問題 (10 点)

1 40点(各4点)

(1)	$(a, b) = (2, 3), (-2, 7)$	(6)	$-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$
(2)	$6\sqrt{10}$	(7)	$a = 2$
(3)	$\frac{37}{216}$	(8)	$\frac{3}{2}$
(4)	$\frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}$	(9)	$\frac{1}{3}$
(5)	$x^2 - 2x + 3$	(10)	$\frac{5}{16}$

(1) $f(x) = ax^2 - 2ax + b = a(x-1)^2 - a + b$ ($0 \leq x \leq 3$) とおくと、条件から

$$a > 0, f(3) = 9, f(1) = 1 \quad \text{または} \quad a < 0, f(3) = 1, f(1) = 9$$

$$a > 0, 3a + b = 9, -a + b = 1 \quad \text{または} \quad a < 0, 3a + b = 1, -a + b = 9$$

これを解いて $(a, b) = (2, 3), (-2, 7)$

(2) $s = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5 + 6) = 9$ より

$$S = \sqrt{(9-3)(9-4)(9-5)(9-6)} = \sqrt{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 6\sqrt{10}$$

ブラマーグプタの公式

円に内接する四角形の4辺の長さが a, b, c, d のとき、四角形の面積 S は $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ とすると

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

とくに、 $d = 0$ とすると三角形の面積公式(ヘロンの公式)となる。

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(3) 出た目が4以下の確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^3$, 出た目が3以下の確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^3$

$$\text{求める確率は} \quad \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{37}{216}$$

(4) $[2x - 4] = [x] = a$ とおくと (a は整数)

$$a \leq 2x - 4 < a + 1, \quad a \leq x < a + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

上の第1式から $\frac{a+4}{2} \leq x < \frac{a+5}{2} \quad \dots \textcircled{2}$

(i) a が奇数のとき ①, ②より

$$a + 1 = \frac{a+5}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a = 3$$

$a = 3$ を ①, ②に代入して

$$3 \leq x < 4, \quad \frac{7}{2} \leq x < 4 \quad \text{すなわち} \quad \frac{7}{2} \leq x < 4$$

(ii) a が偶数のとき ①, ②より

$$a = \frac{a+4}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a = 4$$

$a = 4$ を ①, ②に代入して

$$4 \leq x < 5, \quad 4 \leq x < \frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad 4 \leq x < \frac{9}{2}$$

(i), (ii) より $\frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}$

(5) 条件から、 $P(x)$ を $(x-1)(x^2+x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $a(x^2+x+2) - 3x + 1$ とおくと

$$P(x) = (x-1)(x^2+x+2)Q(x) + a(x^2+x+2) - 3x + 1$$

$$P(1) = 2 \text{ より } 4a - 2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = 1$$

$$\text{求める余りは } 1(x^2+x+2) - 3x + 1 = x^2 - 2x + 3$$

(6) $x = \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと $a = x^2 - x - 1$ ($-1 \leq x \leq 1$)

$$f(x) = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \text{ とすると}$$

$$f(x) \text{ は最大値 } f(-1) = 1, \text{ 最小値 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} \text{ をとる.}$$

$$\text{よって} \quad -\frac{5}{4} \leq a \leq 1$$

- (7) 直線 $y = ax - a + 3$, 放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積を S とし, これらの共有点の x 座標を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(ax - a + 3) - x^2\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

α, β は 2 次方程式

$$x^2 = ax - a + 3 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - ax + a - 3 = 0$$

の解であるから, 解と係数の関係から $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a - 3$

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= a^2 - 4(a - 3) = (a - 2)^2 + 8 \end{aligned}$$

よって, S は $a = 2$ のとき, 最小値 $S = \frac{1}{6}(\sqrt{8})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ をとる.

- (8) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1), \overrightarrow{AC} = (2, 2, -1)$ より $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -1, 2)$

$$\text{よって} \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{3}{2}$$

- (9) $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{OC} = (1, 3, -3)$ より, 求める四面体の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{CO}| = \frac{1}{6} |-1 + 3| = \frac{1}{3}$$

$$(10) \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \text{ に } n = 5 \text{ を代入して } \frac{5}{16}$$

証明 $\theta = \frac{\pi}{n}, \alpha = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ とおくと

$$z^n - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \alpha^k)$$

$$\text{また} \quad z^n - 1 = (z - 1) \sum_{k=1}^n z^{n-k} \quad \text{ゆえに} \quad \prod_{k=1}^{n-1} (z - \alpha^k) = \sum_{k=1}^n z^{n-k} \quad \cdots (*)$$

(*) は, z に関する恒等式であるから, $z = 1$ を代入すると

$$(\text{左辺}) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \cos 2k\theta - i \sin 2k\theta) = \prod_{k=1}^{n-1} (2 \sin^2 k\theta - 2i \sin k\theta \cos k\theta)$$

$$= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1} (\sin k\theta - i \cos k\theta)$$

$$= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} - k\theta \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - k\theta \right) \right\}$$

$$= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \times (\cos 0 - i \sin 0) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta$$

$$(\text{右辺}) = n$$

$$\text{よって} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\text{別証} \quad (*) \text{ に } z = 1 \text{ を代入すると} \quad \prod_{k=1}^n (1 - \alpha^k) = n \quad \text{ゆえに} \quad \prod_{k=1}^n |1 - \alpha^k| = n$$

$$\begin{aligned} |1 - \alpha^k| &= |1 - (\cos 2k\theta + i \sin 2k\theta)| = |2 \sin^2 k\theta - 2i \sin k\theta \cos k\theta| \\ &= 2 \sin k\theta |\sin k\theta - i \cos k\theta| = 2 \sin k\theta \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin k\theta = n \quad \text{よって} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

証終

2 30 点 (各 5 点)

(1) $y' - \alpha y = 0$ の両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y'e^{-\alpha x} + y(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})' = 0$$

これを積分すると $ye^{-\alpha x} = C$ よって $y = Ce^{\alpha x}$ (C は定数)

(2) $y = \cos x + i \sin x$ とおき, x で微分すると

$$y' = -\sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x) = iy$$

これを解いて $y = Ce^{ix}$ (C は定数)

$x = 0$ のとき $y = 1$ であるから $1 = C$ よって $y = e^{ix}$

したがって $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

(3) (1) の結論を利用して $N = Ce^{-\lambda t}$

$t = 0$ のとき $N = N_0$ であるから, $C = N_0$ より

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \dots \textcircled{1}$$

また, $t = T$ のとき $N = \frac{1}{2}N_0$ より $\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T}$

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad N = N_0 (e^{-\lambda})^t = N_0 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \right\}^t = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

(4) 与式から $(y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) = 0$ 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(y' - \beta y)'e^{-\alpha x} + (y' - \beta y)(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{(y' - \beta y)e^{-\alpha x}\}' = 0$$

これを積分すると

$$(y' - \beta y)e^{-\alpha x} = A_1 \quad \text{ゆえに} \quad y' - \beta y = A_1 e^{\alpha x} \quad (A_1 \text{ は定数})$$

となる. 同様にして $y' - \alpha y = A_2 e^{\beta x}$ (A_2 は定数)

よって, 上の 2 式から, y' を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

(5) 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha x})'' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})'' = 0$$

これを 2 回積分すると

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

別解 (4) で示した $y' - \beta y = A_1 e^{\alpha x}$ に $\beta = \alpha$ を代入し, 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y'e^{-\alpha x} - \alpha y e^{-\alpha x} = A_1 \quad \text{すなわち} \quad (y e^{-\alpha x})' = A_1$$

これを x について積分すると

$$y e^{-\alpha x} = A_1 x + A_2 \quad \text{よって} \quad y = (A_1 x + A_2)e^{\alpha x} \quad (A_1, A_2 \text{ は定数})$$

(6) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおき, $\alpha = i\omega$, $\beta = -i\omega$ とすると, (4) の結論から

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t},$$

$$x' = i\omega(C_1 e^{i\omega t} - C_2 e^{-i\omega t})$$

初期条件から $C_1 + C_2 = A$, $C_1 - C_2 = 0$ ゆえに $C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$

$x = \frac{A}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ となり, これに (2) の結論を適用すると

$$x = A \cos \omega t = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

3 10点 (熊大理系 2012 年)

整数解を m とすると $m^2 - k^2 = 12$

$$|m|^2 - |k|^2 = 12$$

ゆえに $(|m| + |k|)(|m| - |k|) = 12$

ここで, $|m| + |k| = (|m| - |k|) + 2|k|$ および上式の偶奇性により,
 $|m| + |k|$, $|m| - |k|$ はともに偶数であるから

$$\begin{cases} |m| + |k| = 6 \\ |m| - |k| = 2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |m| = 4, \quad |k| = 2$$

よって $k = \pm 2$

4 10点 (熊大理系 2004 年)

C_1, C_2 の中心をそれぞれ O, A とし, P から C_1, C_2 に引いた接線の接点を, それぞれ Q, R とする.

P の座標を (x, y) とすると, P に関する条件は

$$PQ : PR = 1 : 2$$

これより $2PQ = PR$

$$\text{すなわち} \quad 4PQ^2 = PR^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\triangle OQP, \triangle ARP$ において, $\angle OQP = 90^\circ$,
 $\angle ARP = 90^\circ$ であるから

$$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = x^2 + y^2 - 1$$

$$PR^2 = AP^2 - AR^2 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 5$$

上の 2 式を ①に代入して, 整理すると

$$4(x^2 + y^2 - 1) = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 5$$

$$3x^2 + 3y^2 + 4x + 8y - 19 = 0$$

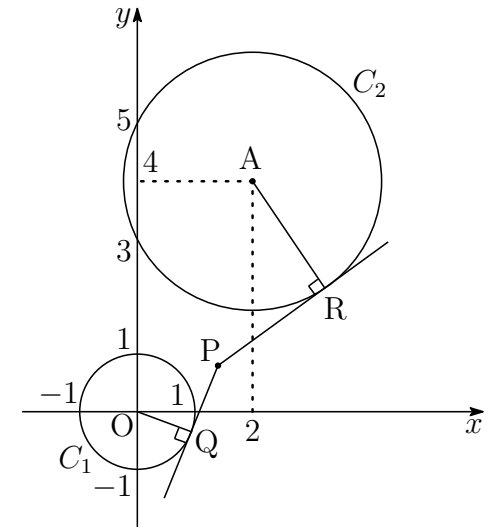
$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{77}{9} \quad \dots \textcircled{2}$$

C_1, C_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とすると $r_1 = 1, r_2 = \sqrt{5}$

$OA = 2\sqrt{5}$ より, $r_1 + r_2 < OA$ であるから, 2 円 C_1, C_2 は互いに外部にある.

よって, 点 P は円 ②上にある.

したがって, 求める軌跡は, 点 $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{77}}{3}$ の円である.



5 10 点 (熊大理系 2010 年)

$$(1) \quad t = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$x - \frac{\pi}{3} = \theta$ とおくと $t = 2 \sin \theta \cdots \textcircled{1}$ であるから

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x &= 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin \left\{ 2 \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{6} \right\} \\ &= 2 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos 2\theta \\ &= 2(1 - 2 \sin^2 \theta) = 2 - (2 \sin \theta)^2 = 2 - t^2 \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad 2 \sin x - 2\sqrt{3} \cos x = 2(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 2t$$

$$\text{よって} \quad y = (2 - t^2) + 2t = -\boldsymbol{t^2} + \boldsymbol{2t} + \boldsymbol{2}$$

$$(2) \quad \textcircled{1} \text{より } 0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ のとき} \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$$

$$(1) \text{の結果から} \quad y = -(t - 1)^2 + 3$$

よって

$$t = 1 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \left(x = \frac{\pi}{2} \right) \text{ のとき} \quad \text{最大値 } \mathbf{3}$$

$$t = -\sqrt{3} \quad \text{すなわち} \quad \theta = -\frac{\pi}{3} (x = 0) \text{ のとき} \quad \text{最小値 } \mathbf{-2\sqrt{3} - 1}$$