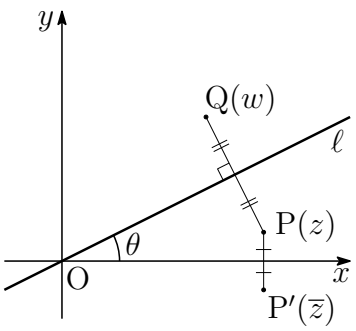
2023年12月3日 (日)

複素数平面上において，原点Oを通る偏角θの直線をℓとし，点$\mathrm{P}(z)$をℓに関して対称移動した点を$\mathrm{Q}(w)$とすると



$$\begin{aligned}\arg w &= \arg z + 2(\theta - \arg z) = -\arg z + 2\theta \\ &= \arg(\overline{z}) + 2\theta\end{aligned}$$

$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}' = \mathrm{OQ}$であるから，点$\mathrm{Q}(w)$は点$\mathrm{P}'(\overline{z})$を$2\theta$だけ回転した点であり，次式が成立する．

$$\boldsymbol{w = \overline{z}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} \quad \cdots (*)$$

また，ℓの傾きがmであるとき，$m = \tan\theta$とおくと

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

したがって，次式が成立する．

$$\boldsymbol{w = \frac{\overline{z}\{(1 - m^2) + 2mi\}}{1 + m^2}} \quad \cdots (**)$$

2年普通科2学期末考査数学 ② の3番は，$(*)$に$z = 2 + i$，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$を代入すると

$$\begin{aligned}w &= (2 - i)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= (2 - i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

また，$m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$を$(**)$に代入してもよい．

2023年12月4日(月)

$$\boldsymbol{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

証明 $f(x) = \cos x + i \sin x$ とおくと

$$f'(x) = -\sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x) = if(x)$$

$f'(x) - if(x) = 0$ であるから，両辺に e^{-ix} を掛けると

$$f'(x)e^{-ix} - if(x)e^{-ix} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{f(x)e^{-ix}\}' = 0$$

上の第2式を積分すると

$$f(x)e^{-ix} = C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$f(0) = 1$ であるから，これに $x = 0$ を代入すると，$C = 1$ となるから

$$f(x)e^{-ix} = 1 \quad \text{すなわち} \quad f(x) = e^{ix}$$

よって

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (*)$$

が成立する． **証終**

関連 $(*)$ を利用する問題が先日訪問した九大2023年理系4番で出題されています．

補足 $(*)$ に $x = \pi$ を代入すると

$$e^{i\pi} = -1$$

となり，非常に興味深い等式が得られます．

なお，$(*)$ を用いると，ド・モアブルの定理の n は整数でなくとも，複素数の範囲で成立します．また，次の課題に挑戦してみてください．

課題 次の値を求めよ．

$$i^i$$

ヒント：$f(x) = i$ をみたす x は無数に存在しますが，このとき，主値 $-\pi < x \leqq \pi$ に制限して計算します．(答は実数です．明日掲載します)

2023年12月5日 (火)

解答 $\cos x + i\sin x = e^{ix}$ に $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入すると

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}} \quad \text{よって} \quad i^i = (e^{\frac{i\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

補足 $e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.207879576\cdots$ となります.

先週実施された普通科用の期末試験問題を掲載しました．確率漸化式の問題です．理数科では既に習ったところです．チャレンジしてみてください．

第二高校2年普通科期末試験　数学 ①5番

どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く．さいころを投げ，出た目が1，2，3のときは文字列AAを書き，4のときは文字Bを，5のときは文字Cを，6のときは文字Dを書く．さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，Dをすでにある文字列の右側につなげて書いていく．

> たとえば，さいころを5回投げ，その出た目が順に2，5，6，3，4であったとすると，得られる文字列は
>
> AACDAAB
>
> となる．このとき，左から4番目の文字はD，5番目の文字はAである．

n を正の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字がAとなる確率を p_n とする．

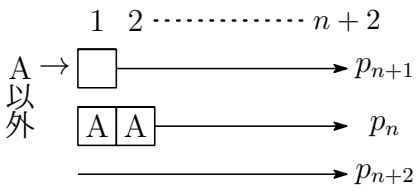
(1) p_1, p_2 を求めよ．

(2) p_{n+2} を p_n と p_{n+1} を用いて表せ．

(3) p_n を n の式で表せ．

解答　(1) $p_1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$，$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$

(2) 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率が p_n であるから，p_{n+2} は最初に出た目が 4，5，6 の場合と 1，2，3 の場合により



$$\boldsymbol{p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n \geqq 1)} \quad \cdots (*)$$

(3) $(*)$ より　$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$,

$$p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

第 1 式から　$p_{n+1} - p_n = (p_2 - p_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 2 式から　$p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = p_2 + \frac{1}{2}p_1 = 1$

上の 2 式から　$\boldsymbol{p_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad (n \geqq 1)}$

補足　本題は，東大理系 2015 年 2 番を一部改変したものです.

2023年12月6日 (水)

今回は確率漸化式の中で，マルコフ連鎖 (Markov chain) に関連する問題を紹介します．この確率過程は，未来の挙動が現在の値だけで決定され，過去の挙動と無関係であるという性質を持つ確率過程のことです．

例題 (2006年名大後期理学部より一部引用)

A，B2つの町がある．毎年1月1日に，A町の前年の住民のうち4割がB町に，B町の前年の住民のうち2割がA町に，それぞれ引っ越す（住民の数は十分に多く，引っ越す住民の割合は正確に4割，2割と見なしてよい）．それ以外には住民の移動はなく，A町，B町両方をあわせた住民の数は不変である．n 年後にA町とB町それぞれに住んでいる住民の数をそれぞれ $a_n,\ b_n$ とするとき，$a_{n+1},\ b_{n+1}$ を $a_n,\ b_n$ を用いて次のように表せる．

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.6a_n + 0.2b_n \\ b_{n+1} = 0.4a_n + 0.8b_n \end{cases}$$

上の2式から

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= a_n + b_n \\ 2a_{n+1} - b_{n+1} &= 0.4(2a_n - b_n) \end{aligned}$$

$a_1 = a$，$b_1 = b$ とすると

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= a + b \\ 2a_n - b_n &= (2a - b)\cdot(0.4)^{n-1} \end{aligned}$$

よって　$a_n = \dfrac{1}{3}\{(2a-b)\cdot(0.4)^{n-1}+(a+b)\}$,　$b_n = \dfrac{1}{3}\{(b-2a)\cdot(0.4)^{n-1}+2(a+b)\}$

2016年　名大理系

玉が2個ずつ入った2つの袋A，Bがあるとき，袋Bから玉を1個取り出して袋Aに入れ，次に袋Aから玉を1個取り出して袋Bに入れる，という操作を1回の操作と数えることにする．Aに赤玉が2個，Bに白玉が2個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋Bに入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

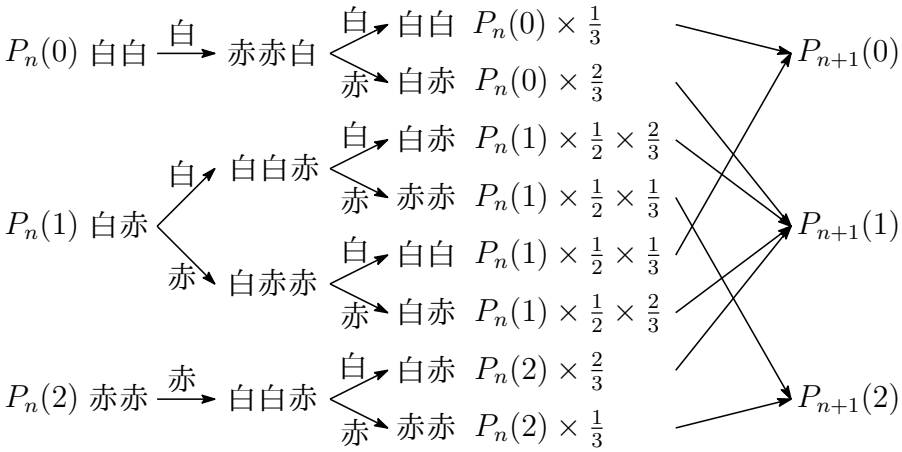
(1) $k = 0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ．

(2) $k = 0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ．

解答　(1) 定められた操作により，次の確率漸化式 $(*)$ を得る．

$$(*)\begin{cases} P_{n+1}(0)=\dfrac{1}{3}P_n(0)+\dfrac{1}{6}P_n(1) & \cdots ① \\ P_{n+1}(1)=\dfrac{2}{3}P_n(0)+\dfrac{2}{3}P_n(1)+\dfrac{2}{3}P_n(2) & \cdots ② \\ P_{n+1}(2)=\dfrac{1}{6}P_n(1)+\dfrac{1}{3}P_n(2) & \cdots ③ \end{cases}$$

B ⟶ A ⟶ B



$P_0(0)=1$，$P_0(1)=0$，$P_0(2)=0$ として，$(*)$ に $n=0$ を代入すると

$$\boldsymbol{P_1(0)=\frac{1}{3},\quad P_1(1)=\frac{2}{3},\quad P_1(2)=0}$$

(2) ①，③ より　$P_{n+1}(0)+P_{n+1}(2)=\dfrac{1}{3}\{P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)\}$

$$P_{n+1}(0)-P_{n+1}(2)=\frac{1}{3}\{P_n(0)-P_n(2)\}$$

したがって　$P_n(0)+P_n(2)=\dfrac{1}{3}\quad (n\geqq 1)$

$$P_n(0)-P_n(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\quad (n\geqq 1)$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{P_n(0)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\},\quad P_n(2)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$

② より　$P_{n+1}(1)=\dfrac{2}{3}\{P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)\}$　よって　$\boldsymbol{P_n(1)=\dfrac{2}{3}}$

着目　$P_{n+1}(0)$，$P_{n+1}(1)$，$P_{n+1}(2)$ が $P_n(0)$，$P_n(1)$，$P_n(2)$ によって定まる確率過程 (1 つ前の時点だけで決定する)

類題　九大文系 2012 年 4 番

2023 年 12 月 7 日 (木)

グラフを利用した確率の問題解法について紹介します.

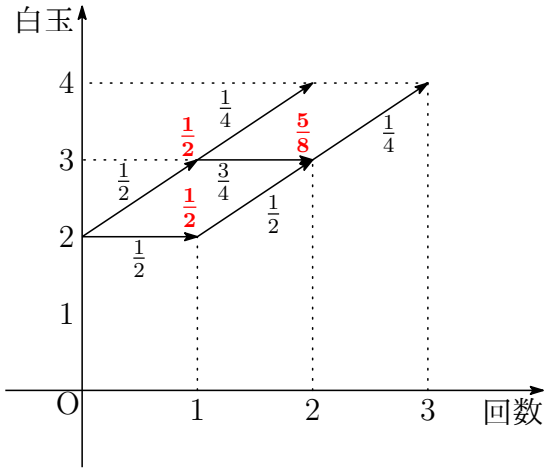
東北大 2001 年 文系 3 番

袋の中に赤の玉と白の玉が合計 4 個入っている．1 回の試行では袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，それが白であれば袋に戻し，赤の玉の場合は戻さずに別に用意した白の玉 1 個を袋に入れる．

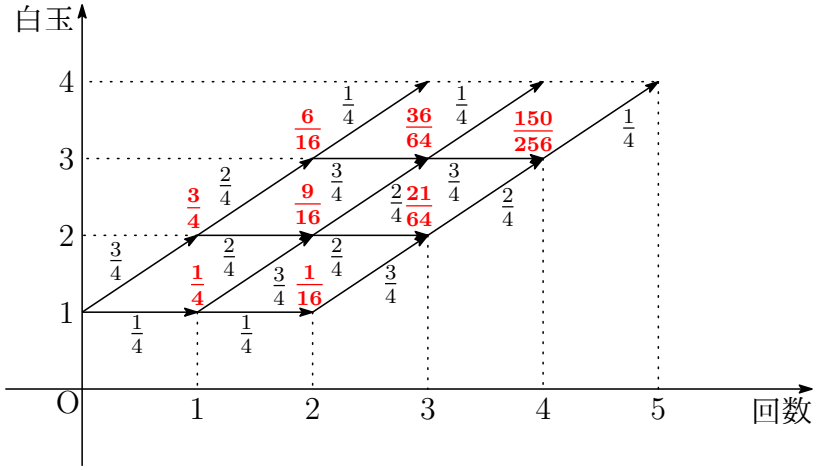
(1) 最初は赤の玉と白の玉が 2 個ずつであるとして，3 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ．

(2) 最初は赤の玉が 3 個，白の玉が 1 個であるとして，5 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ．

解答 (1) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{8}\right)\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{32}$



(2) $\left(\dfrac{6}{16}+\dfrac{36}{64}+\dfrac{150}{256}\right)\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{195}{512}$



確率問題は，計算に注意することが多いので，文字を使って計算すると，ミスが少なくなります．

2015 年 千葉大学文系

さいころを 5 回振るとき，初めの 4 回においては 6 の目が偶数回出て，しかも最後の 2 回においては 6 の目がちょうど 1 回出る確率を求めよ．ただし，6 の目が一度も出ない場合も 6 の目が出る回数を偶数回とみなす．

解答 さいころを 1 回振って 6 の目が出る確率を p，6 以外の目が出る確率を q とおく．

(i) 4 回目に 6 の目が出るとき，1 回目から 3 回目に 6 の目が 1 回または 3 回出て，5 回目に 6 以外の目が出る．このときの確率は

$$\left(\frac{3!}{1!2!}pq^2+p^3\right)pq=pq(p^3+3pq^2)$$

(ii) 4 回目に 6 の目が出ないとき，1 回目から 3 回目に 6 の目が出ないまたは 2 回出て，5 回目に 6 の目が出る．このときの確率は

$$\left(q^3+\frac{3!}{2!1!}p^2q\right)qp=pq(3p^2q+q^3)$$

(i)，(ii) から，求める確率は，$p=\dfrac{1}{6}$，$q=\dfrac{5}{6}$，$p+q=1$ により

$$\begin{aligned}pq(p^3+3pq^2)+pq(3p^2q+q^3)&=pq(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)\\&=pq(p+q)^3=\boldsymbol{\frac{5}{36}}\end{aligned}$$

2015 年 九大理系

袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

(1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。
(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。
(3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。
(4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

解答 (1) 求める確率は，2 回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2) 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

(3) 偶数回目の操作で青玉の個数は 1 個または 3 個であるから，2 回目の操作で青玉が 1 個である確率を p とすると，(1) の結果から

$$p = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p) = p^3(1-p) = \left(\frac{7}{9}\right)^3 \frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{686}{6561}}$$

(4) 青玉 3 個の状態から，2 回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$(1-p)qpp = p^2(1-p)q$$

4 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$p(1-p)qp = p^2(1-p)q$$

6 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$pp(1-p)q = p^2(1-p)q$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} 3 \times p^2(1-p)q + p^3(1-p) &= 2p^2(1-p) + p^3(1-p) \\ &= p^2(1-p)(2+p) \\ &= \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{25}{9} = \boldsymbol{\frac{2450}{6561}} \end{aligned}$$

研究

操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が 3 個とも青玉になることなしに，青玉の個数が 1 個である確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき

(2) で示したように奇数回目に青玉が 1 個になることはないから　$p_n = 0$

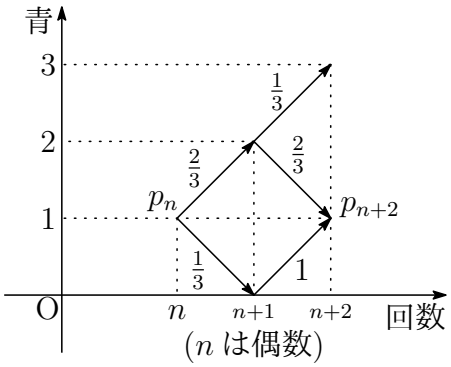
(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1\right) = \frac{7}{9}p_n$$

ゆえに　　$p_n = \left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$

n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2} \times \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$



(n は偶数)

補足　n が偶数のとき，$p_{n+2} = \dfrac{7}{9}p_n$ より，$\{p_n\}$ の公比 r は　$r^2 = \dfrac{7}{9}$

よって　　$p_n = p_0 r^n = 1\cdot(r^2)^{\frac{n}{2}} = \left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$

次のグラフを用いる問題は，**対称原理**を用いることができます．

東大理科 2008 年

白黒 2 種類のカードがたくさんある．そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作 (**A**) を考える．

(**A**) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる．

以下の問 (1)，(2) に答えよ．

(1) 最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

(2) 最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

解答　(1) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 4 枚とも同じ色になることなしに，白と黒のカードが 2 枚づつである確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき

奇数回目に 4 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　$\mathbf{0}$

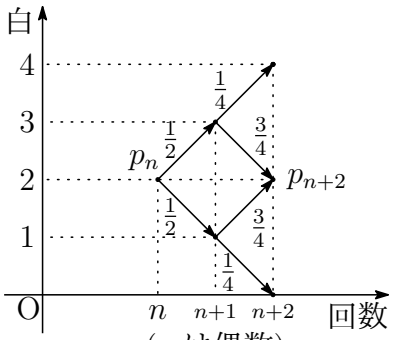
(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4}p_n$$

ゆえに　$p_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

求める確率は

$$p_{n-2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \times 2 = \mathbf{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$



(n は偶数)

(2) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 6 枚とも同じ色になることなしに，白のカードが 2 枚である確率を q_n とすると，対称性により白のカードが 4 枚である確率も q_n である．

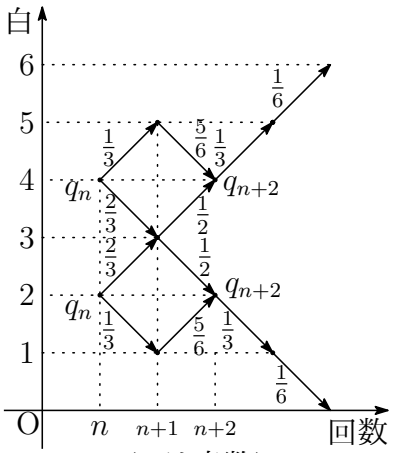
(i) n が奇数のとき　$q_1 = \dfrac{1}{2}$

$$q_{n+2} = q_n \times \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} + q_n\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{17}{18}q_n$$

ゆえに　$q_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

求める確率は，3 以上の奇数のとき

$$q_{n-2} \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} \times 2 = \mathbf{\frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}}$$



(n は奇数)

(ii) n が 1 または偶数のとき

6 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　$\mathbf{0}$

補足　確率漸化式とグラフを利用した確率の考え方は重要です．これらの考え方を利用すると，2023 年熊大で出題された問題は解けます．

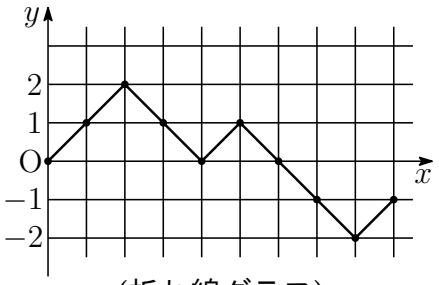
熊本大学　文系 2 番・理系 2 番 (共通)，医医 1 番

2023年12月8日 (金)

鏡像原理を用いる問題を2題 (九大文系・東大文系) 紹介します.

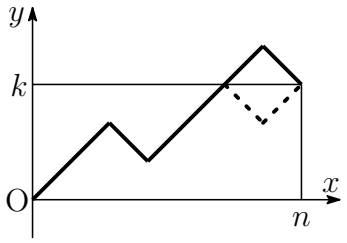
2002年 九大文系

平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という。与えられた格子点を第1番目とし，この点から右斜め $45°$，または右斜め $-45°$ の方向にもっとも近い第2番目の格子点をとり，この2点を線分で結ぶ。同様にして第2番目の格子点から第3番目の格子点をとり，第2番目と第3番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする。右図に原点Oと格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。



(折れ線グラフ)

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ。また，この必要十分条件がみたされているとき，原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。



(2) n は2以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n-2$ なる整数で，$n+k$ は偶数とする。原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも1つを通る折れ線グラフの数は，原点Oと格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の2倍に等しいことを示せ。

(3) コインを9回投げる。1回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i,\ T_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 9$，を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる。ただし，$T_0 = 0$ とする。$T_9 = 3$ が起きたとき，どの T_i $(i = 1, 2, \cdots, 7)$ も3にならない条件つき確率を求めよ。

解答 (1) 原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め $-45°$ の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．

$$\frac{n-k}{2}=\frac{n+k}{2}-k$$

であるから，$\dfrac{n+k}{2}$ が整数であればよい．したがって $n+k$ は偶数である．
逆に $n+k$ が偶数，すなわち $n+k=2m$ をみたす整数 m が存在するとき，折れ線グラフは，右斜め 45° の方向に m 回，右斜め $-45°$ の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む．

また，原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は　${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$

(2) 原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y=k$ と交わる格子点を $\mathrm{A}(a,\ k)$ とする $(0 \leqq a \leqq n-2)$．A と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数，A と格子点 $(n-1,\ k-1)$ を通る数は，直線 $y=k$ に関する対称性によりその数は等しくともに N とおく．また，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数はそれらの和で

$$N+N=2N$$

である．したがって，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数の 2 倍に等しい．

(3) 2 つの事象 A，B を $A: T_9=3$，$B:$ すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ とすると

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap \overline{B})}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(A)}$$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数は，(1) の結果より　${}_9\mathrm{C}_6$ (本)
したがって　　$P(A)=\dfrac{{}_9\mathrm{C}_6}{2^9}$
原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフで，少なくとも $(1,\ 3)$，$(2,\ 3)$，$\cdots$，$(7,3)$ を通る数は，(2) の結果から，O と $(8,\ 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍であるから，(1) の結果より　$2\times {}_8\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A\cap \overline{B})=\dfrac{2\times {}_8\mathrm{C}_6}{2^9}$

よって　　$P_A(B)=1-\dfrac{2\times {}_8\mathrm{C}_6}{{}_9\mathrm{C}_6}=1-\dfrac{2\times 8\cdot 7}{2\cdot 1}\times\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 7}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

解説

1 次元ランダム・ウォーク (Random walk)[離散型] の最も基本的なモデルである．右斜め 45°，または右斜め −45° の方向に格子点をとっていく確率がともに $\frac{1}{2}$ であるから，折れ線グラフの数に注目するとよい．

左下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフの総数を示したもので，パスカルの三角形を横に倒した配置になっている．右下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフで，すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ である数を示したものである．(3) の条件つき確率は，下の 2 つの表における原点と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数から $\quad \dfrac{\mathbf{28}}{\mathbf{84}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	9										1
	8									1	
	7								1		9
	6							1		8	
	5						1		7		36
	4					1		6		28	
	3				1		5		21		**84**
	2			1		4		15		56	
	1		1		3		10		35		126
	0	1		2		6		20		70	
	−1		1		3		10		35		126
	−2			1		4		15		56	
	−3				1		5		21		84
	−4					1		6		28	
	−5						1		7		36
	−6							1		8	
	−7								1		9
	−8									1	
	−9										1

折れ線グラフの数

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	3										**28**
	2			1		3		9		28	
	1		1		3		9		28		90
	0	1		2		6		19		62	
	−1		1		3		10		34		117
	−2			1		4		15		55	
	−3				1		5		21		83
	−4					1		6		28	
	−5						1		7		36
	−6							1		8	
	−7								1		9
	−8									1	
	−9										1

すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ の数

(1) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ である．また，(2) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいから，n のときはじめて k になるグラフの数は

$$ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n} \cdot {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} $$

これは，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの本数の $\dfrac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{k}{n}$ となる．

2019 年 東大文系

正八角形の頂点を反時計回りに A，B，C，D，E，F，G，H とする．また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある．点 P が最初に点 A にある．次の操作を 10 回繰り返す．

操作：コインを投げ，表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる．

例えば，点 P が点 H にある状態で，投げたコインの表が出れば点 A に移動させ，裏が出れば点 G に移動させる．以下の事象を考える．

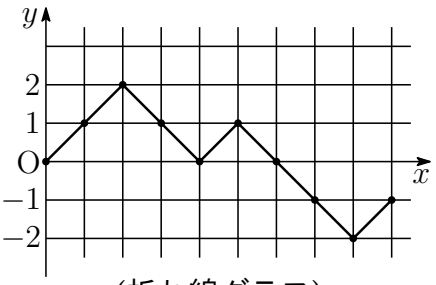
事象 S：操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある．

事象 T：1 回目から 10 回目の操作によって，点 P は少なくとも 1 回，点 F に移動する．

(1) 事象 S が起こる確率を求めよ．

(2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ．

解答 座標平面上の原点 O から右斜め 45°，または右斜め $-45°$ の方向に最も近い第 1 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ．同様にして第 1 番目の格子点から第 2 番目の格子点をとり，第 1 番目と第 2 番目を線分で結ぶ．以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする．右図は原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例である．



(折れ線グラフ)

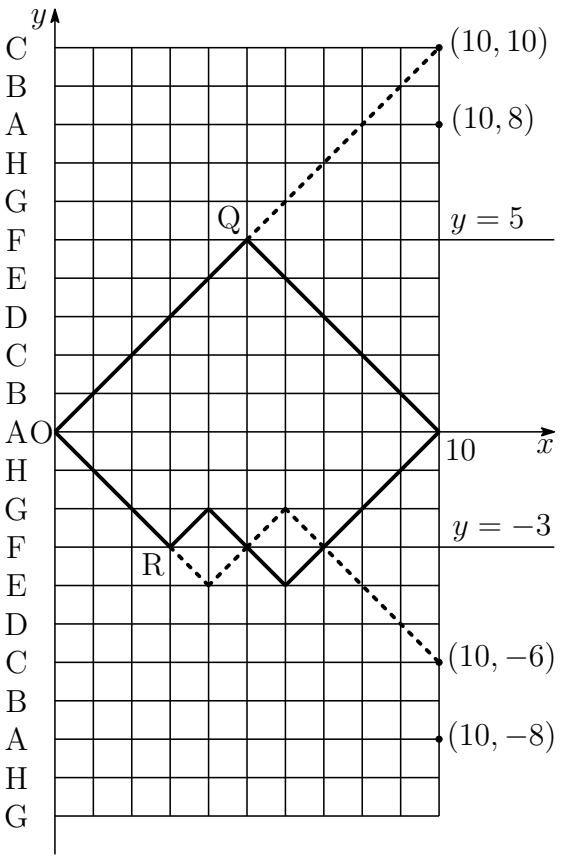
n を自然数，k を $|k| \leqq n$ を満たす整数とする．原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき ($n+k$ が偶数)，右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め $-45°$ の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ であるから，格子点 $(n,\ k)$ にある確率は

$$P_n(k) = \frac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}}{2^n}$$

(1) コインの表，裏により，格子点上の点 P がそれぞれ右斜め 45°，右斜め $-45°$ 方向の最も近い格子点に移動するものとする．格子点 $(n,\ k)$ にあるとき，$k \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \pmod 8$ を，それぞれ，A，B，C，D，E，F，G，H に対応させる．操作を 10 回行って点 P が点 A にあるとき，$k = 0, \pm 8$ であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} P_{10}(0) + P_{10}(8) + P_{10}(-8) &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+0}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+8}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10-8}{2}}}{2^{10}} \\ &= \frac{1}{2^{10}}({}_{10}\mathrm{C}_5 + {}_{10}\mathrm{C}_9 + {}_{10}\mathrm{C}_1) \\ &= \frac{1}{2^{10}}(252 + 10 + 10) = \boldsymbol{\frac{17}{64}} \end{aligned}$$

(2) 原点 O と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = 5$ と交わる点を Q とすると，点 Q と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 Q と点 $(10, 10)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい (鏡像原理)．同様に，原点 O と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = -3$ と交わる点を R とすると，点 R と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 R と点 $(10, -6)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい．よって，求める確率は



$$\begin{aligned} &P_{10}(8) + P_{10}(-8) \\ &\qquad + P_{10}(10) + P_{10}(-6) \\ &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_9}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_1}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{10}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{2^{10}} \\ &= \frac{10 + 10 + 1 + 45}{2^{10}} = \boldsymbol{\frac{33}{512}} \end{aligned}$$

2023年12月9日 (土)

前回に引き続き，確率をテーマに報告します．現行課程になって期待値が出題できなくなった影響で，確率漸化式に関する出題が増えています．確率漸化式と聞けば，一つ前の状態から現在の状態が定義されるマルコフ連鎖 (Markov chain) を思い浮かべることが多いと思います (初期条件と確率漸化式ですべての状態が決定する)．これと対称的な確率漸化式が**破産問題** (Gambler's Ruin Problem) です．入試では，マルコフ連鎖に関する出題率に対して，破産問題に関する出題率はその 1/10 もありません．九州地区では破産問題に関する出題があったは，2014 年の九工大前期試験 (情報工学部) だけです．入試問題に初めて登場したのは 2002 年東大理系後期試験です．

破産問題は，ギャンブルに関するものを例に挙げた方が，数学の問題として理解しやすいため，多少俗的な内容になりますが，ご寛恕のほどお願い申し上げます．

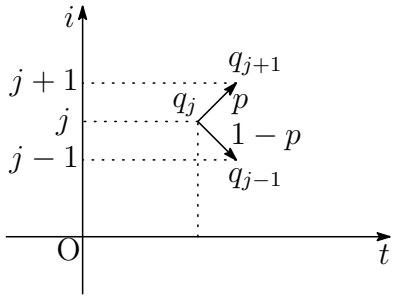
問題

P さんは所持金 i 万円で $(1 \leqq i \leqq 9)$，1 回のゲームで勝てば 1 万円増え，負ければ 1 万円減るゲームに参加する．P さんは所持金が 10 万円 (目標金額) になるか，所持金がなくなったときにゲームは終了する．1 回のゲームで P さんが勝つ確率を p $(0 < p < \frac{1}{2})$ とするとき，P さんの所持金がなくなる確率 q_i を求めよ．

考察 P さんが例えば 5 万円でこのゲームに参加した時点で，P さんが破産する確率 q_5 は決定している．ゲームの途中で所持金が増減しながら破産する確率が q_5 であるということで，何回目の試行で破産するというのではなく，そのときの所持金の状態が破産する確率を決定しているということである．具体的に言えば，所持金 4 万円という状態 (破産確率 q_4) は，確率 p で所持金 5 万という状態 (破産確率 q_5)，確率 $1-p$ で所持金 3 万という状態 (破産確率 q_3) に移行するから，q_4 は q_5 と q_3 によって決定するということである．

解答 ある時点で，P さんの所持金が j 万円であるとき $(1 \leqq j \leqq 9)$，その次には，確率 p で所持金 $j+1$ 万円，確率 $1-p$ で所持金 $j-1$ 万円の状態になるから，次の確率漸化式が成り立つ．

$$q_0 = 1, \quad q_{10} = 0$$
$$q_j = pq_{j+1} + (1-p)q_{j-1}$$



確率漸化式を書き直すと

$$pq_{j+1} - q_j + (1-p)q_{j-1} = 0$$

この確率漸化式の特性方程式は

$$px^2 - x + 1 - p = 0 \quad \text{すなわち} \quad (px - 1 + p)(x - 1) = 0$$

この方程式は異なる 2 つの解 $1,\ \dfrac{1-p}{p}$ をもつから，$\alpha = \dfrac{1-p}{p}$ とおくと，p_i は，定数 A，B を用いて

$$q_j = A + B\alpha^j$$

とおける．$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$ であるから

$$A + B = 1, \quad A + B\alpha^{10} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad A = \frac{\alpha^{10}}{\alpha^{10} - 1}, \quad B = -\frac{1}{\alpha^{10} - 1}$$

したがって $\quad q_j = \dfrac{\alpha^{10} - \alpha^j}{\alpha^{10} - 1} \quad$ よって $\quad \boldsymbol{q_i = \dfrac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1}} \quad \boldsymbol{(1 \leqq i \leqq 9)}$

参考 このゲームの期待値 (期待金額)E_i は

$$E_i = 10^5(1 - q_i) = \frac{10^5(\alpha^i - 1)}{\alpha^{10} - 1}$$

例えば，P の所持金が 5 万円のとき，破産する確率 q_5 および期待値 E_5 は (E_5 の 1 円未満は切り捨て)

p	q_5	E_5
0.40	0.88364	11636
0.41	0.86055	13945
0.42	0.83395	16605
0.43	0.80365	19635
0.44	0.76956	23044
0.45	0.73172	26828
0.46	0.69035	30965
0.47	0.64583	35417
0.48	0.59874	40126
0.49	0.54985	45015

このような不利なゲーム ($0 < p < \frac{1}{2}$) に時間をかけて参加するより，1 回勝負で 5 万円をかけることができるならば，1 回勝負の期待値の方が大きい．ギャンブラーが一発勝負に出るのは理論的でもある．

2014 年 九州工業大学前期 (情報工学部)

点 P は次の (i)，(ii)，(iii) の規則に従って数直線上を動く．

(i) 時刻 0 で，P は整数座標点 0 から 10 のいずれかの位置 i $(1 \leqq i \leqq 10)$ にある．

(ii) 時刻 t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ に位置 i $(1 \leqq i \leqq 9)$ にある P は，$t+1$ には確率 p $\left(0 < p < \dfrac{1}{2}\right)$ で位置 $i+1$ に，確率 $1-p$ で位置 $i-1$ に移動する．

(iii) 時刻 t に位置 0 または 10 にある P は，$t+1$ にもその位置に留まる．

以下の問いに答えよ．

(1) P が時刻 0 で位置 2 にあるとき，時刻 3 で位置 0 にある確率を求めよ．

(2) P が時刻 0 で位置 1 にあるとき，時刻 3 で位置 0 にある確率を求めよ．

時刻 0 で位置 i にある P が，いずれかの時刻で位置 0 に到達する確率を q_i とする．ただし，$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$ である．$1 \leqq i \leqq 9$ のとき，q_{i+1}，q_i，q_{i-1} の間には $q_i = pq_{i+1} + (1-p)q_{i-1}$ の関係が成り立つ．

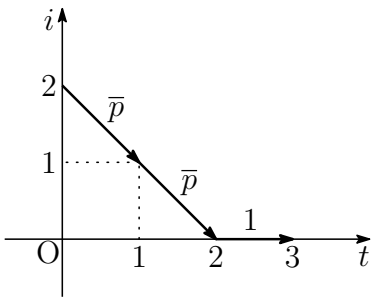
(3) $q_{i+1} - q_i = \boxed{\text{(a)}}(q_i - q_{i-1})$ である．空欄の (a) に入る適切な数または式を求めよ．

(4) q_i を q_1 と p を用いて表せ．

(5) q_1 を求め，q_i を p を用いて表せ．

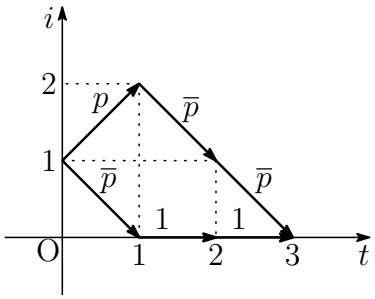
解答　(1) $\overline{p}=1-p$ とする．時刻と位置の変化は右図のようになる．求める確率は

$$\overline{p}\cdot\overline{p}\cdot 1=\overline{p}^2=\boldsymbol{(1-p)^2}$$



(2) $\overline{p}=1-p$ とする．時刻と位置の変化は右図のようになる．求める確率は

$$\begin{aligned}\overline{p}\cdot 1\cdot 1+p\cdot\overline{p}\cdot\overline{p}&=\overline{p}(1+p\overline{p})\\&=\boldsymbol{(1-p)(1+p-p^2)}\end{aligned}$$



(3) $q_i=pq_{i+1}+(1-p)q_{i-1}$ より

$$pq_{i+1}-q_i+(1-p)q_{i-1}=0$$

この確率漸化式の特性方程式は

$$pt^2-t+1-p=0\quad\text{これを解いて}\quad t=1,\ \frac{1-p}{p}$$

したがって，次の 2 式が成り立つ．

$$q_{i+1}-\frac{1-p}{p}q_i=q_i-\frac{1-p}{p}q_{i-1}\qquad\cdots①$$

$$q_{i+1}-q_i=\frac{1-p}{p}(q_i-q_{i-1})\qquad\cdots②$$

よって，求める空欄 (a) は　$\boldsymbol{\dfrac{1-p}{p}}$

(4) $\alpha = \dfrac{1-p}{p}$ とおくと，①，② より

$$q_{i+1} - \alpha q_i = q_1 - \alpha q_0, \quad q_{i+1} - q_i = \alpha^i (q_1 - q_0)$$

$q_0 = 1$ をこれに代入すると

$$q_{i+1} - \alpha q_i = q_1 - \alpha, \quad q_{i+1} - q_i = \alpha^i (q_1 - 1)$$

上の 2 式の辺々を引いて

$$(\alpha - 1) q_i = q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - \alpha)$$

ここで，$0 < p < \dfrac{1}{2}$ より

$$\alpha - 1 = \frac{1-p}{p} - 1 = \frac{1-2p}{p} > 0$$

したがって $\qquad q_i = \dfrac{q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - \alpha)}{\alpha - 1}$

よって $\qquad \boldsymbol{q_i = \dfrac{p}{1-2p}\left[q_1\left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^i - 1\right\} - \left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^i - \frac{1-p}{p}\right\}\right]}$

(5) $q_{10} = 0$ を (4) の結果に代入すると

$$q_1\left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1\right\} - \left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \frac{1-p}{p}\right\} = 0$$

ゆえに $\qquad \boldsymbol{q_1 = \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \frac{1-p}{p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1}}$

上式および (4) の結果から

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{(q_1 - 1)\alpha^i - q_1 + \alpha}{\alpha - 1} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1}\left\{\left(\frac{\alpha^{10} - \alpha}{\alpha^{10} - 1} - 1\right)\alpha^i - \frac{\alpha^{10} - \alpha}{\alpha^{10} - 1} + \alpha\right\} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1}\left\{\frac{(1-\alpha)\alpha^i}{\alpha^{10} - 1} + \frac{\alpha^{10}(\alpha - 1)}{\alpha^{10} - 1}\right\} \\ &= \frac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1} = \boldsymbol{\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1}} \end{aligned}$$

2002 年 東京大学 (理系) 後期

ランダムウォークの応用として，ギャンブラーの破産問題と呼ばれているものを考える．あるギャンブラーの最初の所持金を 2 ドルとする．1 回賭けを行うごとに，勝てば所持金が 1 ドル増え，負ければ 1 ドル失うものとする．所持金がなくなればギャンブラーは破産しそこで賭けは終わり，また，所持金が 5 ドルになれば賭けは終了する．1 回の賭けで勝つ確率を $\frac{2}{3}$，負ける確率を $\frac{1}{3}$ としたとき，このギャンブラーが破産して終了する確率はいくらとなるかを考えてみよう．この問題を数直線上で考えると，数直線上の位置 2 からスタートし，0 と 5 の間で $+$ 方向へ移動する確率が $\frac{2}{3}$，$-$ 方向へ移動する確率が $\frac{1}{3}$ のランダムウォークとなる．0 から 5 の間で $+$ 方向へ移動する確率が $\frac{2}{3}$，$-$ 方向へ移動する確率が $\frac{1}{3}$ のランダムウォークとなる．0 または 5 に達したときに賭けは終了する．
さて，ランダムウォークでは，状態の変化は確率的に定まり，その確率は一定である．すなわち，ある状態にある場合，それ以降の過程は時刻や履歴によらず確率的に定まる．したがって，ギャンブラーの破産確率は，単にそのときの所持金の額で決まる．これを $r(i)$ $(i = 0, 1, \cdots, 5)$ としよう．$r(i)$ は所持金が i であるときに，破産して終了する確率である．

(1) $r(2)$ を $r(1)$，$r(3)$ で表せ．

(2) このような関係式を各状態について表し，それらを用いて最初の所持金が 2 ドルのギャンブラーが破産して終了する確率を求めよ．

解答 (1) $\boldsymbol{r(2) = \frac{2}{3}r(3) + \frac{1}{3}r(1)}$

(2) 次の確率漸化式，すなわち，連立方程式を解けばよい．

$$\begin{aligned} &r(0) = 1, && r(1) = \frac{2}{3}r(2) + \frac{1}{3}r(0), \\ &r(2) = \frac{2}{3}r(3) + \frac{1}{3}r(1), && r(3) = \frac{2}{3}r(4) + \frac{1}{3}r(2), \\ &r(4) = \frac{2}{3}r(5) + \frac{1}{3}r(3), && r(5) = 0 \end{aligned}$$

$r(2) = x$ とおくと

$$\begin{aligned} r(1) &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\ r(3) &= \frac{3}{2}r(2) - \frac{1}{2}r(1) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6} \\ r(4) &= \frac{3}{2}r(3) - \frac{1}{2}r(2) = \frac{3}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}x = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} \\ r(5) &= \frac{3}{2}r(4) - \frac{1}{2}r(3) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{31}{24}x - \frac{7}{24} \end{aligned}$$

$r(5) = 0$ であるから　$x = \frac{7}{31}$　よって　$\boldsymbol{r(2) = \frac{7}{31}}$

補足 確率漸化式

$$r(i) = \frac{2}{3}r(i+1) + \frac{1}{3}r(i-1)$$

すなわち，$2r(i+1) - 3r(i) + r(i-1) = 0$ の特性方程式

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

の解が $1,\ \frac{1}{2}$ から，定数 A，B を用いて

$$r(i) = A + B\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

とおくと，$r(0) = 1$，$r(5) = 0$ であるから

$$A + B = 1, \quad A + \frac{1}{32}B = 0 \quad \text{ゆえに} \quad A = -\frac{1}{31}, \quad B = \frac{32}{31}$$

よって　$r(i) = -\frac{1}{31} + \frac{32}{31}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2^{5-i} - 1}{31}$　$(0 \leqq i \leqq 5)$

2023年12月10日 (日)

空間における直線の方程式

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}$ である直線の方程式は，媒介変数 t を用いて，次のように表される．

$$\boldsymbol{\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}}$$

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d} = (l,\ m,\ n)$ であるとき $(lmn \neq 0)$，点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は

$$(x,\ y,\ z) = (x_0,\ y_0,\ z_0) + t(l,\ m,\ n)$$

したがって

$$x - x_0 = lt, \quad y - y_0 = mt, \quad z - z_0 = nt$$

上の 3 式から t を消去することに次の直線の方程式を得る．

空間における直線の方程式

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d} = (l,\ m,\ n)$ である直線の方程式は $(lmn \neq 0)$

$$\boldsymbol{\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}}$$

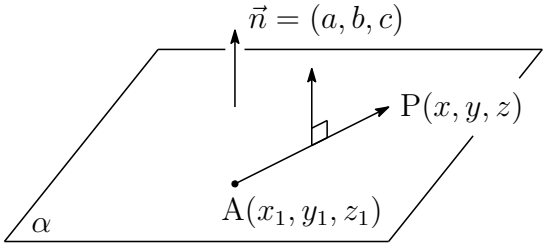
補足 たとえば，$n = 0$ のとき，方向ベクトル $\vec{d} = (l,\ m,\ 0)$ は，xy 平面に平行 (z 軸と垂直) であるから，直線の方程式は，次のように表される．

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}, \quad z = z_1$$

空間における平面の方程式

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，ベクトル $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ に垂直な平面 α 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とする．P が A に一致しないとき，$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ である．すなわち

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0 \quad \cdots ①$$



が成り立つ．P が A に一致するときも，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0}$ より ① が成り立つ．

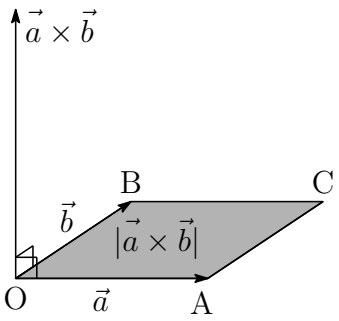
この等式を成分で表した次の式が，平面 α を表す方程式である．

$$\boldsymbol{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0}$$

2023年12月11日(月)

ベクトルの外積

空間のベクトルでは，空間特有の演算として，**外積**というものを考えることができます．ここでは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積を $\vec{a}\times\vec{b}$ と表します．外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は，$\vec{a}$ にも $\vec{b}$ にも垂直なベクトルで，その向きは，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の角度 θ でまわるとき，右ねじの進む向きと定めます．右ねじとは時計回りにまわすと奥に進むねじです．また，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ は，図のように $\vec{a}$ と $\vec{b}$ でできる平行四辺形 OACB の面積です．また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の少なくとも一方が $\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行の時はその外積は $\vec{0}$ と定めます．



確認 座標空間において，x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを，それぞれ $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ とする．このとき

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_1=\vec{0},\quad \vec{e}_2\times\vec{e}_2=\vec{0},\quad \vec{e}_3\times\vec{e}_3=\vec{0},$$
$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3,\quad \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1,\quad \vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2$$

が成り立つ．これらの外積の順序を交換すると

$$\vec{e}_2\times\vec{e}_1=-\vec{e}_3,\quad \vec{e}_3\times\vec{e}_2=-\vec{e}_1,\quad \vec{e}_1\times\vec{e}_3=-\vec{e}_2$$

発見 ベクトルの外積には，内積と同じように，次の性質があります．

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c},\qquad (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$
$$(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$$

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ は，次のようにかける．

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3,\quad \vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3$$

上の性質を利用して外積の成分表示を求めると

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)\times(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e}_3\end{aligned}$$

結論 2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ の外積の成分表示は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr$ とすると，$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ と $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{b_1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} \end{vmatrix} \right)$$

と表記できる．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

したがって，次式が成立する．

$$\boldsymbol{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta} \tag{1}$$

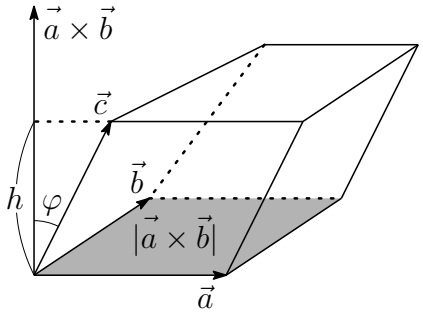
よって，$\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は，前ページの図のように $\vec{a}$ と $\vec{b}$ でできる平行四辺形 OACB の面積と等しい．

$\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を φ $(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$ とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\cos\varphi$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}||\cos\varphi|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\varphi|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とすると，四面体 OABC の体積 V は

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

また，対称性により

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c})\cdot\vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a})\cdot\vec{b}|$$

が成立する．

2023年12月12日 (火)

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，ベクトル $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ に垂直な平面 α の方程式

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

を整理し，$-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$ とおくと

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{2}$$

となる．このとき，ベクトル $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ は平面 α の**法ベクトル**という．

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，平面 α に垂直な直線を ℓ とすると，ℓ の方向ベクトルが $\vec{n}$ であるから

$$\ell : (x,\ y,\ z) = (x_0,\ y_0,\ z_0) + t(a,\ b,\ c) \tag{3}$$
$$= (x_0 + at,\ y_0 + bt,\ z_0 + ct) \tag{4}$$

ℓ と α の交点を Q とし，(4) を (2) に代入すると

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$$
$$(a^2 + b^2 + c^2)t + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0$$

t について解くと

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0}{a^2 + b^2 + c^2} = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0}{|\vec{n}|^2}$$

(3) より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\vec{n}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = t\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = |t||\vec{n}|$$

$|t| = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\vec{n}|^2}$ であるから，これを上の第 2 式に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

点と平面の距離

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離は

$$\boldsymbol{\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

前ページの結論から，次のように書くこともできる．

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を平面 α 上の任意の点とし，$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ を α の法ベクトルとすると，点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 α の距離は

$$h=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\vec{n}|} \tag{5}$$

3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3,\ z_3)$ について

$$\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とする．26 ページの (1) から，△ABC の面積を S とすると

$$|\vec{n}|=2S$$

点 D から平面 ABC に引いた垂線の長さ h は

$$h=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{2S}$$

したがって，四面体 ABCD の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

四面体 ABCD の体積

四面体 ABCD の体積 V は

$$\boldsymbol{V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}$$

次の問題を考えてみてください．

2018 年 熊大理系 1 番

t を実数とする。空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$，$\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ について，∠BAC が直角であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) t の値を求めよ。

(2) D から A，B，C を通る平面に垂線を下ろし，A，B，C を通る平面との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ を求めよ。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

解答 2018 年 熊大理系 1 番

2023年12月13日 (水)

東北大 2022 文系 4 番

xyz 空間内の点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}(\sqrt{6},-\sqrt{3},\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 OABC を考える．3 点 OAB を含む平面からの距離が 1 の点のうち，点 O に最も近く，x 座標が正のものを H とする．

(1) H の座標を求めよ．

(2) 3 点 OAB を含む平面と点 C の距離を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

解答　(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$\vec{a}=(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}),\quad \vec{b}=(-\sqrt{3},\ 0,\ 1)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{3}\\0&1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\sqrt{3}&1\\1&-\sqrt{3}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1&\sqrt{2}\\-\sqrt{3}&0\end{vmatrix}\right)$$
$$=(\sqrt{2},-4,\ \sqrt{6})$$

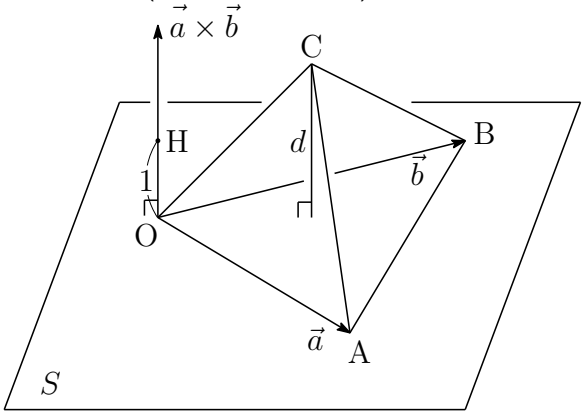
であり，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-4)^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{6}$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ と平行な単位ベクトルの 1 つは

$$\vec{n}=\frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{2},-4,\ \sqrt{6})=\left(\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{1}{2}\right)$$

x 成分に注意すると　$\mathbf{H}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$



(2) 3点OABを含む平面をSとすると，Sの法線ベクトルは$\vec{a}\times\vec{b}$である．S上の任意の点をP$(x,\ y,\ z)$とすると，$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$であるから，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$より

$$S:\sqrt{2}x-4y+\sqrt{6}z=0$$

点C$(\sqrt{6},-\sqrt{3},\ \sqrt{2})$と平面$S$の距離$d$は

$$d=\frac{|\sqrt{2}\sqrt{6}-4(-\sqrt{3})+\sqrt{6}\sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-4)^2+(\sqrt{6})^2}}=\frac{|8\sqrt{3}|}{2\sqrt{6}}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

(3) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$であるから

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-4)^2+(\sqrt{6})^2}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}=\sqrt{6}$$

求める四面体のOABCの体積をVとすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot d=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot2\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{3}}$$

別解 $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{6},-\sqrt{3},\ \sqrt{2})$とすると

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}&=(\sqrt{2},-4,\ \sqrt{6})\cdot(\sqrt{6},-\sqrt{3},\ \sqrt{2})\\&=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=8\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって，求める四面体の体積をVとすると

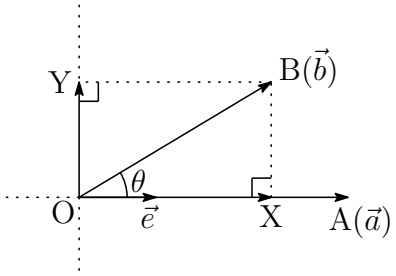
$$V=\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=\frac{1}{6}|8\sqrt{3}|=\boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{3}}$$

補足 △OABの面積は次の公式を用いてもよい．

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{|\overrightarrow{\mathbf{OA}}|^{\mathbf{2}}|\overrightarrow{\mathbf{OB}}|^{\mathbf{2}}-(\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OB}})^{\mathbf{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{6\cdot4-0^2}=\sqrt{6}$$

2023年12月14日 (木)

3点O，A，Bについて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする．Bから直線OAに垂線BXを下ろし，Bから直線OAに垂直な直線に垂線BYを下ろす．このとき，次の2式が成立する．



$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}}$$

証明 第1式は自明．

$\vec{a}$と同じ向きの単位ベクトルを$\vec{e}$とすると　$\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\vec{b}$と$\vec{e}$のなす角をθとすると$(|\vec{e}|=1)$

$$\vec{b}\cdot\vec{e}=|\vec{b}||\vec{e}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta)\vec{e}$であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(\vec{b}\cdot\vec{e})\vec{e}=\left(\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

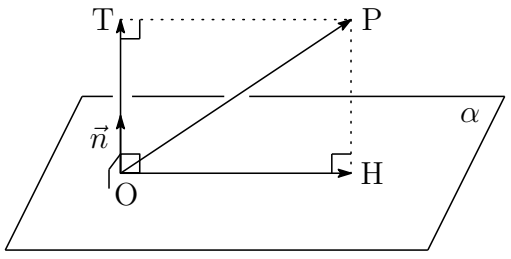
証終

補足 $\vec{a}$と平行な単位ベクトルを$\vec{e}$とすると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(\vec{b}\cdot\vec{e})\vec{e}}$$

空間ベクトルの直交分解

原点Oを含む平面αに点Pから垂線PHを下ろし，原点Oを通り，平面αに垂直な直線に垂線PTとする．αの単位法ベクトルを$\vec{n}$とすると，次の2式が成立する．



$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OT}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n})\vec{n}}$$

北大文系 2021 年 2 番

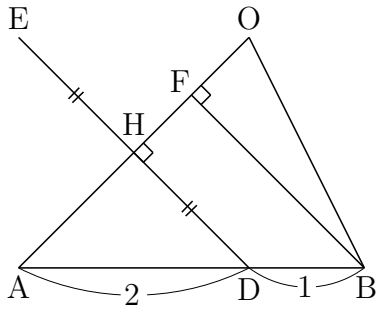
三角形 OAB において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，直線 OA に関して点 D と対称な点を E，点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=20|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ となるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ．

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\dfrac{6}{4^2}\vec{a}=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}\vec{a}}$



(2) 点 D は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$$

点 D から直線 OA に垂線 DH を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}}{3|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2\cdot6}{4^2}\right)\vec{a}=\frac{7}{12}\vec{a}$$

H は線分 DE の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\cdot\frac{7}{12}\vec{a}-\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})=\boldsymbol{\frac{5\vec{a}-4\vec{b}}{6}}$$

(3) (1)，(2) の結果を $9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=20|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ に代入すると

$$9\left|\frac{5\vec{a}-4\vec{b}}{6}\right|=20\left|\frac{3}{8}\vec{a}\right|\quad\text{ゆえに}\quad|5\vec{a}-4\vec{b}|=5|\vec{a}|$$

$|5\vec{a}-4\vec{b}|^2=25|\vec{a}|^2$ より　$25|\vec{a}|^2-40\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2=25|\vec{a}|^2$

したがって　$|\vec{b}|^2=\dfrac{5}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{5}{2}\cdot6=15$　よって　$\boldsymbol{|\vec{b}|=\sqrt{15}}$

九大文系 2022 年 2 番

座標空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 1,\ 2),\ \mathrm{P}(4,\ 0,-1)$$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2) 点 P から平面 α に垂線を下ろし，その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを求めよ。

(3) 平面 α に関して点 P と対称な点 P′ の座標を求めよ。

解答　(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,\ 2)$

$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ であるから

$$x+y=0,\ \ 2x+y+2z=0 \quad \text{ゆえに} \quad y=-x,\ \ z=-\frac{1}{2}x$$

$\vec{n}=\left(x,-x,-\dfrac{1}{2}x\right)$，$|\vec{n}|^2=1$ であるから

$$x^2+x^2+\frac{1}{4}x^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2=4$$

$x>0$ に注意して　$x=\dfrac{2}{3}$　よって　　$\boldsymbol{\vec{n}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}$

別解 $\vec{a}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=(2,\ 1,\ 2)$ より

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0&1\\2&2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\right)=(2,-2,-1),$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$$

よって，求める単位ベクトル $\vec{n}$ は，x 成分に注意して

$$\vec{n}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{1}{3}(2,-2,-1)=\boldsymbol{\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \vec{n}$ とし，P から直線 ON に引いた垂線の交点を T とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OT}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OT}} = (\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{n})\vec{n} \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (4,\ 0, -1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{n} = 3$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = (2, -2, -1), \quad |\overrightarrow{\mathrm{OT}}| = 3 \qquad (**)$$

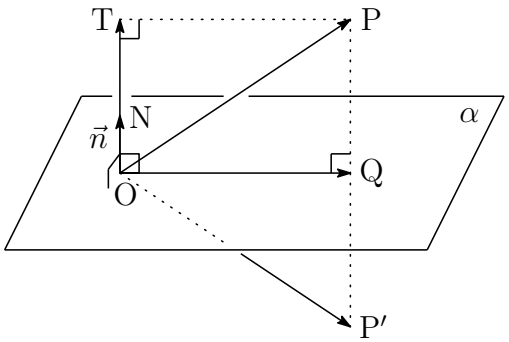
$\mathrm{PQ} = |\overrightarrow{\mathrm{OT}}|$ であるから　$\mathbf{PQ = 3}$

(3) $(*)$ の第 1 式と $(**)$ の第 1 式により，

$$(4,\ 0, -1) = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + (2, -2, -1) \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (2,\ 2,\ 0)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + (-\overrightarrow{\mathrm{OT}}) = (0,\ 4,\ 1) \quad \text{よって} \quad \mathbf{P'(0,\ 4,\ 1)}$$



2023年12月15日 (金)

内分・外分に関する問題は，平面幾何の手法で求めることができます．解法のポイントは問題の切り口を広げ過ぎず，相似な図形を考えたり，補助線を引くなど構造的には平面幾何の問題として考えればよさそうです．

内積などの計量的な問題にこそベクトル本来のよさがあると思います．

2021年 筑波大文系

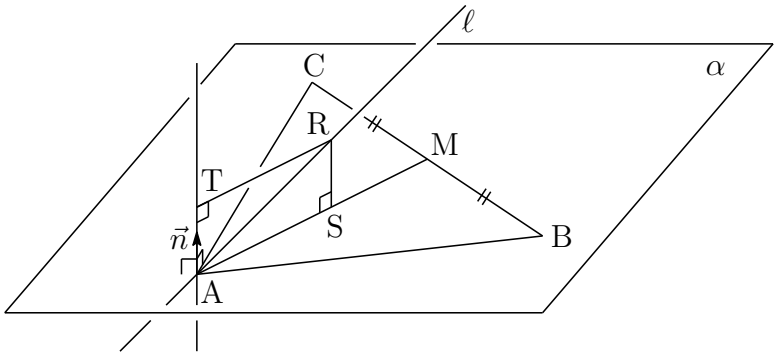
Oを原点とする座標空間において，3点A$(-2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面をαとする．2点P$(0,\ 5,\ 5)$，Q$(1,\ 1,\ 1)$をとる．点Pを通り$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$に平行な直線を$\ell$とする．直線$\ell$上の点Rから平面$\alpha$に下ろした垂線と$\alpha$の交点をSとする．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$(ただし$k$は実数)とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) kを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}$を成分で表せ．

(2) 点Sが△ABCの内部または周上にあるようなkの値の範囲を求めよ．

(1)はその典型例です．αの法ベクトルを$\vec{n}$とし，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\overrightarrow{\mathrm{AT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AT}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\quad\text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$



$\vec{n}=(-1,\ 2,\ 2)$とすると
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(2,\ 5,\ 5)+k(1,\ 1,\ 1),\\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n}&=18+3k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AS}}&=(2,\ 5,\ 5)+k(1,\ 1,\ 1)-\frac{18+3k}{9}(-1,\ 2,\ 2)\\&=\left(\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{3}}\right)\mathbf{(4,\ 1,\ 1)}\end{aligned}$$

空間のベクトルでは，次のことを知っておくと便利です．

$$\vec{a} \perp \vec{b} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}, \quad \vec{b} \perp \vec{a} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}, \quad \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \perp \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

また，平面 α 上の 2 つの単位ベクトル $\vec{e},\ \vec{f}$ が直交し，α の単位法ベクトルを $\vec{n}$ とすると，任意のベクトル $\vec{v}$ は，次のように表されることも知っておくとよいと思います．

$$\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{e})\vec{e} + (\vec{v}\cdot\vec{f})\vec{f} + (\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{n}$$

2020 年 京都大学理系

k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A，B，C，D が次の関係式を満たしている．

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2},\\
&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{\sqrt{6}}{4},\\
&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k.
\end{aligned}$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

解答 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく．

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ より，2 つのベクトル $\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ は垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{2}$ より

$$|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2 \pm 1 \quad (\text{複号同順})$$

直交する 2 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$ を次のようにおく．

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}+\vec{b}), \quad \vec{f} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|} = \vec{a}-\vec{b}$$

$\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e} - (\vec{c}\cdot\vec{f})\vec{f}$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ より

$$\begin{aligned}
&\vec{c}\cdot\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},\\
&\vec{c}\cdot\vec{f} = \vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0
\end{aligned}$$

したがって，ベクトル $\vec{c}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e})$ は，$\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である．

$$\left|\sqrt{2}\vec{c}+\vec{e}\right|^2=2|\vec{c}|^2+2\sqrt{2}\,\vec{c}\cdot\vec{e}+|\vec{e}|^2=2+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1=1$$

$\vec{g}=\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e}$ とおくと，3 つの単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$，$\vec{g}$ は互いに直交する．

$$\vec{d}\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{d}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{\sqrt{3}}k,\quad \vec{d}\cdot\vec{f}=\vec{d}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,$$
$$\vec{d}\cdot\vec{g}=\vec{d}\cdot(\sqrt{2}\,\vec{c}+\vec{e})=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}k$$

$\vec{d}=(\vec{d}\cdot\vec{e})\vec{e}+(\vec{d}\cdot\vec{f})\vec{f}+(\vec{d}\cdot\vec{g})\vec{g}$ より　$\vec{d}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\vec{e}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)\vec{g}$

$|\vec{d}|^2=1$ であるから　$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}k\right)^2=1$

整理すると　$8k^2+2\sqrt{6}k-\dfrac{3}{2}=0$　これを解いて　$k=\dfrac{-\sqrt{6}\pm3\sqrt{2}}{8}$

条件より，$k>0$ であるから　$\boldsymbol{k=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$

2023 年の出題傾向 (空間のベクトル)

2023 年度の主要大学での空間のベクトルに関する出題は次のとおりです．出題頻度も高く，対策が必要な分野です．

- 正射影に関する問題

  北大理系 2 番，東北大理系 5 番，東工大 5 番，神戸大理系 4 番，九大理系 3 番，九大文系 3 番，熊大医 2 番，熊大文系 3 番，宮崎大 3 番

- 四面体に関する問題

  神戸大理系 4 番，宮崎大 3 番，東北大理系 5 番

2023年12月16日 (土)

東工大 2023年

xyz 空間の4点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 1)$，C$(-1,\ 1,\ -1)$，D$(-1,\ 0,\ 0)$ を考える．

(1) 2直線 AB，BC から等距離にある点全体のなす図形を求めよ．

(2) 4直線 AB，BC，CD，DA に共に接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ．

解答　(1) 点 P$(x,\ y,\ z)$ から2直線 AB，BC にそれぞれ垂線 $\mathrm{PH_1},\ \mathrm{PH_2}$ を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(1,\ \frac{y+z}{2},\ \frac{y+z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{(\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(\frac{x+z}{2},\ 1,\ \frac{x+z}{2}\right)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}=\left(x-1,\ \frac{y-z}{2},-\frac{y-z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{H_2P}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH_2}}=\left(\frac{x-z}{2},\ y-1,-\frac{x-z}{2}\right)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{H_2P}}|^2$ であるから

$$(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2=(y-1)^2+\frac{1}{2}(x-z)^2$$
$$2\{(x-1)^2-(y-1)^2\}+(y-z)^2-(x-z)^2=0$$
$$2(x-y)(x+y-2)-(x-y)(x+y-2z)=0$$
$$(x-y)(x+y+2z-4)=0 \quad \cdots ①$$

よって　　**2平面 $\boldsymbol{x-y=0,\ x+y+2z-4=0}$**

(2) 点 P$(x,\ y,\ z)$ から2直線 CD，DA にそれぞれ垂線 $\mathrm{PH_3},\ \mathrm{PH_4}$ を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\left(-1,\ \frac{y-z}{2},-\frac{y-z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH_4}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{(\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DA}}=(x,\ 0,\ 0)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{H_3P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_3}} = \left(x+1,\ \frac{y+z}{2},\ \frac{y+z}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{H_4P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OH_4}} = (0,\ y,\ z)$$

球面の中心を P，半径を R とすると，次を満たせばよい．

$$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_2P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_4P}}|^2 = R^2 \qquad (*)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_4P}}|$ より　$(x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(y+z)^2 = y^2 + z^2$

$$(\sqrt{2}x + y - z + \sqrt{2})(\sqrt{2}x - y + z + \sqrt{2}) = 0 \quad \cdots ②$$

$|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{H_3P}}|^2$ より　$(x-1)^2 + \dfrac{1}{2}(y-z)^2 = (x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(y+z)^2$

$$x = -\frac{1}{2}yz \quad \cdots ③$$

③ を ①，② にそれぞれ代入することにより

$$y(y-4)(z+2)(z-2) = 0$$
$$(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2}) = 0$$

$(*)$ を満たすとき，次を解けばよい．

$$\begin{cases} y(y-4)(z+2)(z-2) = 0 \\ (y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2}) = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2}yz \\ R^2 = y^2 + z^2 \end{cases}$$

上の第 1 式と第 2 式から

$$y = 0,\ 4 \text{ のとき } z = \pm\sqrt{2},\ \ y = \pm\sqrt{2} \text{ のとき } z = \pm 2$$

これらを第 3 式と第 4 式に代入して

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{(0,\ 0, \pm\sqrt{2}),\ \ R = \sqrt{2}} \\ \boldsymbol{(\mp 2\sqrt{2},\ 4, \pm\sqrt{2}),\ \ R = 3\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{(\mp\sqrt{2}, \pm\sqrt{2},\ 2),\ \ R = \sqrt{6}} \\ \boldsymbol{(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, -2),\ \ R = \sqrt{6}} \end{array} \quad \text{(複号同順)}$$

2023年12月17日 (日)

東北大理系 2013 年

四面体 OABC において，OA = OB = OC = 1 とする．∠AOB = 60°，∠BOC = 45°，∠COA = 45° とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) CH の長さを求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

解答 (1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})$ は平面 OAB 上のベクトルで $\vec{a}$ に垂直．

これと平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{\vec{c}(\vec{a}-2\vec{b})}{\sqrt{3}}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\right|^2=\frac{2}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})-\frac{2\sqrt{2}}{3}(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+|\vec{c}|^2$$

$$=\frac{2}{9}\cdot3-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}+1=\frac{1}{3}\quad\text{よって}\quad \mathrm{CH}=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(3) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$

2023年12月18日(月)

東工大 2006年

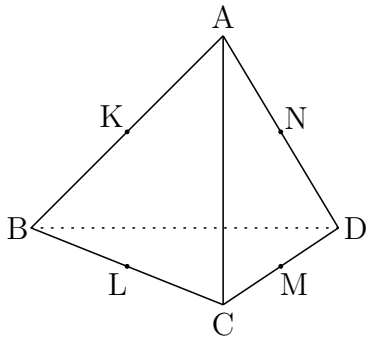
空間内の四面体ABCDを考える．辺AB，BC，CD，DAの中点を，それぞれK，L，M，Nとする．

(1) $4\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{LN}=|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2$ を示せ．ここに $|\overrightarrow{AC}|$ はベクトル $\overrightarrow{AC}$ の長さを表す．

(2) 四面体ABCDのすべての面が互いに合同であるとする．このとき
$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$，$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ を示せ．

(3) 辺ACの中点をPとし，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{6}$ とする．
(2)の仮定のもとで，四面体PKLNの体積を求めよ．

解答 (1)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MK}&=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AM}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC})\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{LN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AL}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\\&=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC})\end{aligned}$$



したがって
$$\begin{aligned}4\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{LN}&=2\overrightarrow{MK}\cdot2\overrightarrow{LN}\\&=-(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC})\\&=-(|\overrightarrow{DB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)=|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2\end{aligned}$$

(2) $AC\neq BD$ と仮定すると，$\triangle ABD\equiv ACD$ であるから

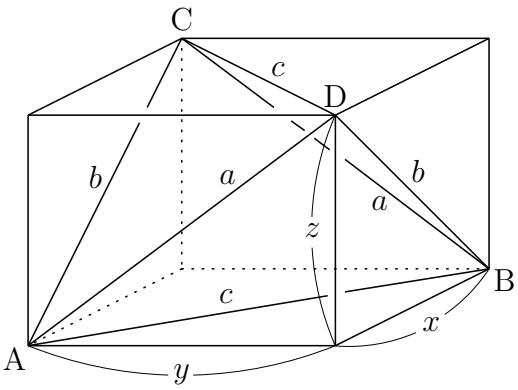
$$AB=AC,\quad BD=CD \tag{$*$}$$

また，$\triangle ABC\equiv\triangle BCD$ であるから

$$AD=CD,\quad AB=BD \tag{$**$}$$

$(*)$ の第1式および $(**)$ の第2式から，$AC=BD$ となり，矛盾
したがって，$AC=BD$ であるから，$\triangle ABD\equiv ACD$ より　$AB=CD$
さらに，$\triangle ABC\equiv\triangle ACD$ より　$BC=AD$
よって　$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$，$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$

(3) (2) の仮定から，四面体 ABCD は等面四面体である．$a = \mathrm{DA}$，$b = \mathrm{DB}$，$c = \mathrm{DC}$ とすると，直方体の縦，横，高さがそれぞれ x，y，z で



$$y^2 + z^2 = a^2$$
$$z^2 + x^2 = b^2$$
$$x^2 + y^2 = c^2$$

を満たすものが唯一存在する．実際

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad y^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

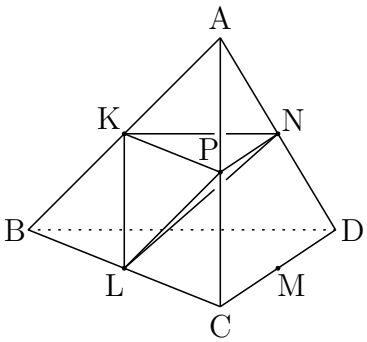
したがって，等面四面体はこの直方体に埋め込まれる．等面四面体の体積を V とすると[1](直方体から 4 つの直角四面体を除く)

$$V = xyz - 4 \cdot \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{3}xyz$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

$a = \mathrm{DA} = \mathrm{BC} = \sqrt{5}$，$b = \mathrm{DB} = \mathrm{CA} = \sqrt{6}$，$c = \mathrm{DC} = \mathrm{AB} = \sqrt{3}$ より

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(6 + 3 - 5)(3 + 5 - 6)(5 + 6 - 3)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

K，P，N は AB，AC，AD の中点であるから，中点連結定理により，平面 KPN と平面 BCD は平行である．また，四面体 AKPN の体積は，四面体 ABCD の体積の $\dfrac{1}{2^3}$ であるから，その体積は



$$\frac{1}{8}V$$

△KPN に注目すると，四面体 AKPN と四面体 PKLN の体積は等しいから，求める体積は

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}}$$

類題 九大理系 2020 年 3

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (pp.11-12)

2023年12月19日 (火)

平面上の点Fと Fを通らない直線 ℓ について，点Pから ℓ に引いた垂線を PH とするとき

$$e = \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}} \quad (e \text{ は } \textbf{離心率})$$

の値が一定であるような点Pの軌跡 C は，2次曲線であることを示す．Fは2次曲線の**焦点**，ℓ は**準線**という．

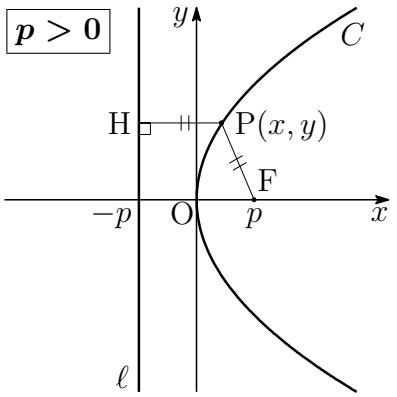
(I) $e = 1$ のとき，$\mathrm{F}(p,\ 0)$，$\ell : x = -p$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{H}(-p,\ y)$ であるから，このとき，$\mathrm{PF}^2 = \mathrm{PH}^2$ により

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

したがって

$$C : y^2 = 4px$$

よって，$e = 1$ のとき，C は**放物線**である．



(II) $e \neq 1$ のとき，$\mathrm{F}(ae,\ 0)$，$\ell : x = \dfrac{a}{e}$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると $(a \neq 0)$，$\mathrm{H}\left(\dfrac{a}{e},\ y\right)$ であるから，このとき，$\mathrm{PF}^2 = e^2\mathrm{PH}^2$ により

$$(x-ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

整理すると

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = (1-e^2)a^2 \tag{1}$$

$(1-e^2)a^2 \neq 0$ に注意して

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1 \tag{2}$$

(i) $0 < e < 1$ のとき，$(1-e^2)a^2 = b^2$ とおくと，(2) より

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(|a| > |b|,\ e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a|}\right)$$

よって，$0 < e < 1$ のとき，C は**楕円**である．

(ii) $1 < e$ のとき，$(1-e^2)a^2 = -b^2$ とおくと，(2) より

$$C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}\right)$$

よって，$1 < e$ のとき，C は**双曲線**である．

前ページの (2) で示した

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$$

は，x 軸，y 軸，原点に関して対称であるから，上式の焦点，準線は，次の 2 組である．

$$\mathrm{F}(ae,\ 0),\ \ell : y = \frac{a}{e} \quad \text{および} \quad \mathrm{F}'(-ae,\ 0),\ \ell' : y = -\frac{a}{e}$$

前ページの (1) より，$y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2)$ を利用すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{FP}^2 &= (x-ae)^2 + y^2 = (x-ae)^2 + (1-e^2)(a^2-x^2) \\
&= e^2x^2 - 2aex + a^2 = (ex-a)^2, \\
\mathrm{F'P}^2 &= (x+ae)^2 + y^2 = (x+ae)^2 + (1-e^2)(a^2-x^2) \\
&= e^2x^2 2aex + a^2 = (ex+a)^2
\end{aligned}$$

したがって

$$\mathbf{FP} = |\boldsymbol{ex} - \boldsymbol{a}|, \quad \mathbf{F'P} = |\boldsymbol{ex} + \boldsymbol{a}|$$

(i) $0 < e < 1$ のとき (楕円)，$a > 0$ とすると，$-a \leqq x \leqq a$ より

$$\mathrm{FP} = a - ex, \quad \mathrm{F'P} = a + ex \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{FP + F'P = 2}\boldsymbol{a}$$

(補足) $\mathrm{FP} = e\mathrm{PH},\ \mathrm{F'P} = e\mathrm{PH'}$ より

$$\mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = e(\mathrm{PH} + \mathrm{PH'}) = e\mathrm{HH'} = e{\cdot}\frac{2a}{e} = 2a$$

(ii) $1 < e$ のとき (双曲線)，$a > 0$ とすると，$x \leqq -a,\ a \leqq x$ より

$x \leqq -a$ のとき　$\mathrm{FP} = -ex + a, \quad \mathrm{F'P} = -ex - a$

$a \leqq x$ のとき　$\mathrm{FP} = ex - a, \quad \mathrm{F'P} = ex + a$

よって　　$\mathbf{|FP - F'P| = 2}\boldsymbol{a}$

(補足) $\mathrm{FP} = e\mathrm{PH},\ \mathrm{F'P} = e\mathrm{PH'}$ より

$$\mathrm{FP} \sim \mathrm{F'P} = e(\mathrm{PH} \sim \mathrm{PH'}) = e\mathrm{HH'} = e{\cdot}\frac{2a}{e} = 2a$$

2023年12月20日 (水)

複素数平面において，z から $\dfrac{1}{z}$ への変換を**反転**といいます．反転については，教科では扱っていませんが，大学入試問題では，次の1次分数式変換 (メビウス変換) に関連する出題が少なくありません．

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は複素数})$$

メビウス変換は，平行移動 $z \to z+\alpha$，拡縮 $z \to cz$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成変換です ($\alpha,\ c$ は複素数)．反転について理解しておく必要があります．

2019年 九大理系

a，b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が虚軸全体を動くとき

$$w=\frac{az+b}{cz+1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の3条件が満たされているとする。

(ア) $z=i$ のときに $w=i$ となり，$z=-i$ のときに $w=-i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a，b，c の値を求めよ。さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ。

解答　　$C : w = \dfrac{az+b}{cz+1} \quad \cdots (*)$

条件 (ア) により　　$i = \dfrac{ai+b}{ci+1}, \quad -i = \dfrac{a(-i)+b}{c(-i)+1}$

ゆえに　　$b+c+(a-1)i = 0, \quad b+c-(a-1)i = 0$

上の 2 式から　　$a = 1, \quad b = -c$

これを $(*)$ に代入すると　$w = \dfrac{z-c}{cz+1} \cdots ①$　ゆえに　$z = -\dfrac{w+c}{cw-1}$

点 z は虚軸全体を動くから，$z+\overline{z} = 0$ より　$-\dfrac{w+c}{cw-1} - \dfrac{\overline{w}+\overline{c}}{\overline{c}\,\overline{w}-1} = 0$

整理すると　　$(c+\overline{c})|w|^2 + (|c|^2-1)(w+\overline{w}) - (c+\overline{c}) = 0 \quad \cdots ②$

条件 (イ) に注意すると，① により　$c \neq 0$

さらに，c は純虚数ではないから　$c+\overline{c} \neq 0$

$k = \dfrac{|c|^2-1}{c+\overline{c}} \cdots ③$ とおいて (k は実数)，② に適用すると

$$|w|^2 + k(w+\overline{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w+k|^2 = k^2+1$$

条件 (イ) により　$k^2+1 = 1$　ゆえに　$k = 0$　よって　$|w| = 1 \quad \cdots (**)$

また，③ により　$|c|^2 - 1 = 0$　ゆえに　$c = \pm 1$

(i) $c = 1$ のとき，① により

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2z}{z+1}$$

$z = 0$ のとき，$w = -1$ となり，条件 (ウ) に反する．

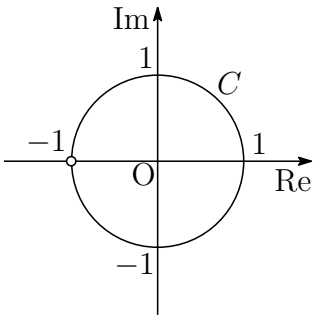
(ii) $c = -1$ のとき，① により

$$w = \frac{z+1}{-z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2}{-z+1} \neq 0$$

これは，条件 (ウ) を満たす．

よって　　$\boldsymbol{a = 1,\ b = 1,\ c = -1}$

$(**)$ および $w \neq -1$ により，C の概形は右の図のようになる．



補足 $z = i\tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $w = \dfrac{z+1}{-z+1}$ に代入すると

$$w = \frac{i\tan\theta + 1}{-i\tan\theta + 1} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ より，w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある．

解説 一般に，1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は複素数},\ ad - bc \neq 0)$$

は，拡縮 (回転)kz，平行移動 $z + \alpha$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成変換である．
特に反転に関して，次の性質がある [2]．

- 原点を通らない円は，原点を通らない円に移る．
- 原点を通る円は，原点を通らない直線に移る．
- 原点を通らない直線は，原点を通る円から原点を除いた図形に移る．
- 原点を通る直線は，原点を通る直線から原点を除いた図形に移る．

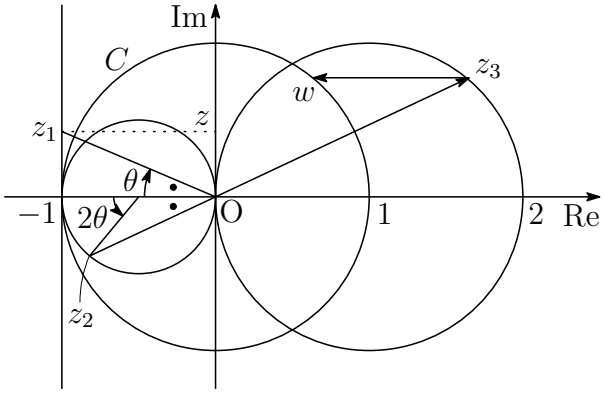
次の変換 (平行移動，反転，拡縮，平行移動)

$$f_1(z) = z - 1, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = -2z, \quad f_4(z) = z - 1$$

について，合成変換 $f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ は $\quad f(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$

$z = i\tan\theta$，$z_1 = f_1(z)$，$z_2 = f_2(z_1)$，$z_3 = f_3(z_2)$，$w = f_4(z_3)$ とすると

$$z_2 = f_2 \circ f_1(z) = \frac{1}{i\tan\theta - 1} = \frac{-\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$
$$= -\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$



[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf 3 の解説を参照．

2023年12月21日 (木)

2017年 東大理系

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする．

(1) α を0でない複素数とし，点 α と原点Oを結ぶ線分の垂直二等分線を L とする．点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から1点を除いたものになる．この円の中心と半径を求めよ．

(2) 1の3乗根のうち，虚部が正であるものを β とする．点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ．

解答 (1) 点 $\alpha\neq 0$ とOを結ぶ線分の垂直二等分線 L の方程式は $|z|=|z-\alpha|$

$w=\dfrac{1}{z}$ より，$z=\dfrac{1}{w}$ $(w\neq 0)$ であるから

$$\left|\frac{1}{w}\right|=\left|\frac{1}{w}-\alpha\right| \quad \text{ゆえに} \quad \left|\frac{w}{\alpha}\right|\left|\frac{1}{w}\right|=\left|\frac{w}{\alpha}\right|\left|\frac{1}{w}-\alpha\right|$$

したがって $\quad \left|w-\dfrac{1}{\alpha}\right|=\dfrac{1}{|\alpha|}$ $\quad$ よって，w は中心 $\boldsymbol{\dfrac{1}{\alpha}}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{|\alpha|}}$ の円

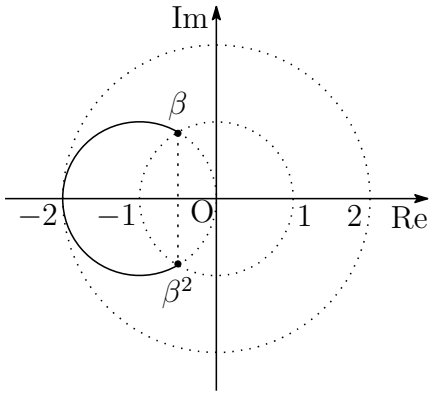
(2) $\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ であるから，2点 β，β^2 を結ぶ線は，点 -1 と原点Oを結ぶ線分の垂直二等分であるから，(1) の結果から

$$|w+1|=1 \quad \cdots ①$$

z は，点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くから

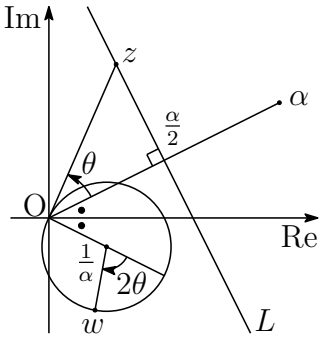
$$\frac{1}{2}\leqq |z|\leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad 1\leqq |w|\leqq 2 \quad \cdots ②$$

したがって，点 w の軌跡は，①，② の共通部分で下の図の実線部分．



解説 L 上の点 z は

$$z = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha i}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$



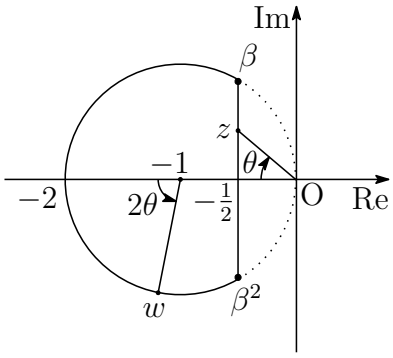
$w = \dfrac{1}{z}$ により

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+i\tan\theta} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+i\sin\theta} \\ &= \frac{1}{\alpha}(2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{1}{\alpha}(1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta) \end{aligned}$$

点 w は点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を中心とし，半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円周上にある．$-\pi < 2\theta < \pi$ であるから，点 w の表す軌跡はこの円から原点 O を除いたものになる．

また，点 β と β^2 を結ぶ線分上の点 z は

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$



$w = \dfrac{1}{z}$ により

$$\begin{aligned} w &= -\frac{2}{1-i\tan\theta} = -\frac{2\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \\ &= -2(\cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta) \\ &= -1 - (\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \end{aligned}$$

2023年12月22日 (金)

総和記号 Σ(シグマ) を用いて

$$\sum_{k=1}^{n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

と表すように，総乗記号 Π(パイ：π の大文字) を用いて

$$\prod_{k=1}^{n} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

と表記することも覚えておくと便利です.

2016年 九大理系

以下の問いに答えよ。

(1) θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

解答　(1) ド・モアブルの定理により

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad \frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の辺々を加えると

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

$(*)$ の辺々を引くと

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
$$\cos 2x = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1$$
$$\cos 3x = \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$t = z + \dfrac{1}{z}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1}{2}t, \quad \cos 2x = \frac{1}{2}t^2 - 1, \quad \cos 3x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

これらを $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ に代入すると

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) = 1$$

整理すると　$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$　ゆえに　$(t-1)(t+2)(t-2) = 0$

これを解いて　$t = 1, -2,\ 2$　したがって　$\cos x = \dfrac{1}{2},\ -1,\ 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$\boldsymbol{x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi}$

(3) (1) の結果から

$$\sin^2 n\theta = \left\{-\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\right\}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$$

$\theta = 20^\circ$ とすると，$z^{18} = 1$ であるから

$$(z^2 - 1)(z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1) = 0$$

$z^2 \neq 1$ であるから　$z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1 = 0$

また，$z \neq 0$ であるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) = -1$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4}\sin^2 n\theta &= \sum_{n=1}^{4}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)\right\} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

別解 $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$ および $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ により

$$\begin{aligned}&\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ \\ =&\frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ}{2}\end{aligned}$$

方程式 $\cos 3\theta + \dfrac{1}{2} = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の解は　$\theta = 40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

ここで，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるから，方程式

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \frac{1}{2} = 0 \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

の解と係数の関係により　$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

補足 また，解と係数の関係により　$\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\dfrac{1}{8}$

参考 $\theta=\dfrac{\pi}{n}$，$\alpha=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ とおくと

$$z^n-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)$$

また　$z^n-1=(z-1)\sum_{k=1}^{n}z^{n-k}$　ゆえに　$\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)=\sum_{k=1}^{n}z^{n-k}$　$\cdots(*)$

$(*)$ は，z に関する恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})&=\prod_{k=1}^{n-1}(1-\cos 2k\theta-i\sin 2k\theta)=\prod_{k=1}^{n-1}(2\sin^2 k\theta-2i\sin k\theta\cos k\theta)\\
&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}(\sin k\theta-i\cos k\theta)\\
&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)\right\}\\
&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\times(\cos 0-i\sin 0)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\\
(\text{右辺})&=n
\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$

たとえば，$n=9$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9}=\frac{9}{256}$

したがって　$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\dfrac{3}{16}$　$\cdots$①

同様に，$n=18$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{17}\sin\frac{k\pi}{18}=\frac{9}{2^{16}}$

したがって　$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\cdots\sin 80^\circ=\dfrac{3}{256}$　$\cdots$②

さらに，①，② から　$\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\dfrac{1}{16}$

2023年12月23日 (土)

2016年 東北大理系

多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき，係数 $a_0, \ldots, a_7$ をすべて求めよ．

(2) $0 < \theta < \pi$ に対して，

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$$

が成り立つことを示せ．

(3) (1) で求めた $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7$ を用いて，多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える．$\theta = \dfrac{\pi}{7}$ として，$k = 1, 2, 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく．このとき，$Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し，$x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ．

解答 (1) $$(x+i)^7-(x-i)^7=\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}i^k-\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}(-i)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{7}\{i^k-(-i)^k\}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}$$

ここで $$i^k=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^k=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}$$
$$(-i)^k=\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)^k=\cos\frac{k\pi}{2}-i\sin\frac{k\pi}{2}$$

上の 2 式より，$i^k-(-i)^k=2i\sin\dfrac{k\pi}{2}$ であるから

$$(x+i)^7-(x-i)^7=2i\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}\sin\frac{k\pi}{2}$$
$$P(x)=\frac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}=\sum_{k=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$P(x)=\sum_{k=0}^{7}a_k x^{7-k}$ であるから　$a_k={}_7\mathrm{C}_k\sin\dfrac{k\pi}{2}$　$(k=0,1,2,\ldots,7)$

よって　$\boldsymbol{a_0=0,\ a_1=7,\ a_2=0,\ a_3=-35,}$
$\boldsymbol{a_4=0,\ a_5=21,\ a_6=0,\ a_7=-1}$

(2) $P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$ より

$$P\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\right)^7-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\right)^7\right\}$$
$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\left\{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7\right\}$$
$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\left\{(\cos7\theta+i\sin7\theta)-(\cos7\theta-i\sin7\theta)\right\}=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}$$

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，(2) の結果から　$P\left(\dfrac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right)=0$　$(k=1,2,3)$

$P(x)=Q(x^2)$ であるから　$Q\left(\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}\right)=0$　$(k=1,2,3)$

$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ $(k=1,2,3)$ は 3 次方程式 $a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7=0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_3}{a_1}=-\frac{-35}{7}=\mathbf{5}$$

2023年12月24日(日)

2011年 熊大文系

四角形ABCDにおいて，

$$\mathrm{AB}=a,\quad \mathrm{BC}=b,\quad \mathrm{CD}=c,\quad \mathrm{DA}=d,\quad \mathrm{AC}=x,\quad \mathrm{BD}=y$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$，$\cos D$ を a，b，c，d，x，y を用いて表せ。

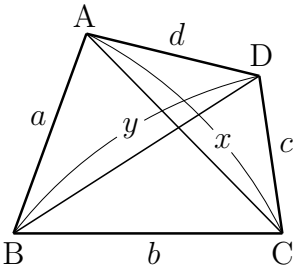
(2) 四角形ABCDが円に内接するとき，

$$xy=ac+bd$$

が成り立つことを示せ。

解答　(1) 余弦定理により

$$\cos \boldsymbol{A}= \frac{\boldsymbol{a^2+d^2-y^2}}{\boldsymbol{2ad}}$$
$$\cos \boldsymbol{B}= \frac{\boldsymbol{a^2+b^2-x^2}}{\boldsymbol{2ab}}$$
$$\cos \boldsymbol{C}= \frac{\boldsymbol{b^2+c^2-y^2}}{\boldsymbol{2bc}}$$
$$\cos \boldsymbol{D}= \frac{\boldsymbol{c^2+d^2-x^2}}{\boldsymbol{2cd}}$$



(2) 四角形 ABCD が円に内接するとき，$B+D=180^\circ$ より　$\cos B+\cos D=0$

(1) の結果をこれに代入して

$$\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}+\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}=0$$

したがって　$(ab+cd)x^2=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$

$$x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \quad \cdots ①$$

同様に，$\cos A+\cos C=0$ に (1) の結果を代入して

$$\frac{a^2+d^2-y^2}{2ad}+\frac{b^2+c^2-y^2}{2bc}=0$$

したがって　$(ad+bc)y^2=bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)$

$$y^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \quad \cdots ②$$

①，② より　$x^2y^2=(ac+bd)^2$　よって　$xy=ac+bd$

トレミーの定理

複素数平面上に 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) をとる．このとき次式が成り立つ．

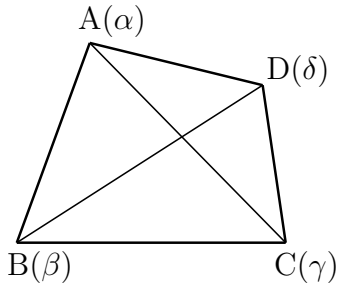
$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$$

したがって

$$|\alpha-\beta||\gamma-\delta|+|\alpha-\delta||\beta-\gamma|\geqq|\alpha-\gamma||\beta-\delta|$$

よって，次の定理 (トレミーの定理) が成り立つ．

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}\geqq\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\quad\cdots(*)$$



とくに，$(*)$ で等号が成立するとき，正の実数 k を用いて

$$k(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$$

ゆえに
$$\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\delta-\gamma}=-k$$

したがって
$$\arg\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}+\arg\frac{\beta-\gamma}{\delta-\gamma}=\pi$$
$$\angle\delta\alpha\beta+\angle\beta\gamma\delta=\pi$$

すなわち
$$\angle\mathrm{DAB}+\angle\mathrm{BCD}=\pi$$

よって，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるときに限る．

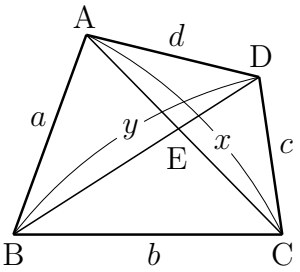
2023年12月25日(月)

トレミーの定理とブラマーグプタの公式に関連する周辺公式を解説します.

円に内接する四角形ABCDにおいて,

$$\mathrm{AB}=a,\quad \mathrm{BC}=b,\quad \mathrm{CD}=c,\quad \mathrm{DA}=d,$$
$$\mathrm{AC}=x,\quad \mathrm{BD}=y$$

とすると,次が成り立つ.



(1) $$\cos A=\frac{d^2+a^2-b^2-c^2}{2(da+bc)},\qquad \cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

(2) $$x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd},\qquad y^2=\frac{(bd+ca)(ba+cd)}{bc+da}$$

(3) $$xy=ac+bd$$ (トレミーの定理)

(4) $2s=a+b+c+d$ とすると,四角形ABCDの面積を S,外接円の半径を R とすると(ブラマーグプタの公式)

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

(5) ACとBDの交点をEとするとき

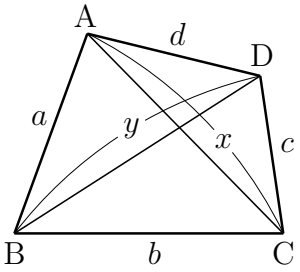
$$\mathrm{EA}:\mathrm{EB}:\mathrm{EC}:\mathrm{ED}=da:ab:bc:cd$$

(6) $\theta=\angle\mathrm{AED}$ とするとき

$$\cos\theta=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$$

証明 (1) 余弦定理により

$$y^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos A$$
$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$



このとき，$\cos C = -\cos A$ であるから

$$d^2 + a^2 - 2da\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

よって $\quad \cos A = \dfrac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(da + bc)}$

上式から $\quad \cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$

補足 $\cos B$ は $\cos A$ の結果を $a \to b,\ b \to c,\ c \to d,\ d \to a$ とすればよい.

(2) 余弦定理により $\quad x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B$

これに (1) の結果を代入すると

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

上式から $\quad y^2 = \dfrac{(bd + ca)(ba + cd)}{bc + da}$

(3) (2) の結果から $\quad x^2y^2 = (ac + bd)^2 \quad$ よって $\quad xy = ac + bd$

(4) (1) の結果から

$$1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b - c + d)(a - b + c + d)}{2(ad + bc)}$$
$$1 - \cos A = \frac{-(a - d)^2 + (b + c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b + c - d)(-a + b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

したがって $\quad \sin^2 A = (1 + \cos A)(1 - \cos A)$

$$= \frac{(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2d)}{4(ad + bc)^2}$$
$$= \frac{4(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}{(ad + bc)^2}$$

$\sin A = \sin C$ より $\quad S = \dfrac{1}{2}ad\sin A + \dfrac{1}{2}bc\sin C = \dfrac{1}{2}(ad + bc)\sin A$

$$= \frac{1}{2}(ad + bc) \times \frac{2\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}{ad + bc}$$
$$= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

$y=\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$，$\sin A=\dfrac{2S}{ad+bc}$ であるから，正弦定理により

$$R=\frac{y}{2\sin A}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

(5) $\triangle\mathrm{EDA}\backsim\triangle\mathrm{ECB}$ より　$\mathrm{EA}:\mathrm{EB}=\mathrm{ED}:\mathrm{EC}=d:b$

$\triangle\mathrm{EAB}\backsim\triangle\mathrm{EDC}$ より　$\mathrm{EA}:\mathrm{ED}=\mathrm{EB}:\mathrm{EC}=a:c$

よって　$\mathrm{EA}:\mathrm{EB}:\mathrm{EC}:\mathrm{ED}=da:ab:bc:cd$

(6) (2)，(3)，(5) の結果から

$$\mathrm{AE}^2=\left(\frac{ad}{ad+bc}x\right)^2=\frac{a^2d^2}{(ad+bc)^2}\times\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}=\frac{a^2d^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$\mathrm{ED}^2=\left(\frac{cd}{ab+cd}y\right)^2=\frac{c^2d^2}{(ab+cd)^2}\times\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}=\frac{c^2d^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED}=\frac{ad}{ad+bc}x\times\frac{cd}{ab+cd}y=\frac{acd^2xy}{(ad+bc)(ab+cd)}=\frac{acd^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)}$$

これらを $2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED}\cos\theta=\mathrm{AE}^2+\mathrm{ED}^2-d^2$ に代入して整理すると

$$\frac{2acd^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)}\cos\theta=\frac{acd^2}{(ad+bc)(ab+cd)}(a^2+c^2-b^2-d^2)$$

よって　$\cos\theta=\dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$

(4) の別解　(6) の結果から

$$1+\cos\theta=\frac{(a+c)^2-(b-d)^2}{2(ac+bd)}=\frac{(a-b+c+d)(a+b+c-d)}{2(ac+bd)}$$

$$1-\cos\theta=\frac{(b+d)^2-(a-c)^2}{2(ac+bd)}=\frac{(-a+b+c+d)(a+b-c+d)}{2(ac+bd)}$$

$2s=a+b+c+d$ であるから

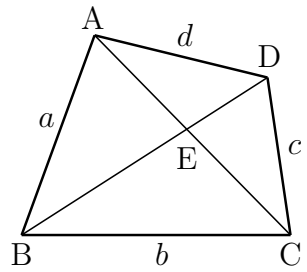
$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\\&=\frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}{4(ac+bd)^2}\\&=\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ac+bd)^2}\end{aligned}$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{1}{2}(ac+bd)\times\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ac+bd}\\&=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\end{aligned}$$

補足　たとえば，(1)，(6) から得られた

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$
$$\cos\angle\mathrm{BEC} = \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$$



の符号から，これらの角の大きさに関する次の性質が分かる．

$$\text{i)}\ \begin{cases} \angle\mathrm{ABC}\text{ が鋭角} & \Longleftrightarrow & a^2+b^2 > c^2+d^2 \\ \angle\mathrm{ABC}\text{ が直角} & \Longleftrightarrow & a^2+b^2 = c^2+d^2 \\ \angle\mathrm{ABC}\text{ が鈍角} & \Longleftrightarrow & a^2+b^2 < c^2+d^2 \end{cases}$$

$$\text{ii)}\ \begin{cases} \angle\mathrm{BEC}\text{ が鋭角} & \Longleftrightarrow & a^2+c^2 > b^2+d^2 \\ \angle\mathrm{BEC}\text{ が直角} & \Longleftrightarrow & a^2+c^2 = b^2+d^2 \\ \angle\mathrm{BEC}\text{ が鈍角} & \Longleftrightarrow & a^2+c^2 < b^2+d^2 \end{cases}$$

$d=0$ とすると，四角形 ABCD は三角形 ABC に退化し，$\angle\mathrm{ABC}=B$，$\angle\mathrm{BEC}=A$ となり，$\cos B$，$\cos A$ は余弦定理に一致する．

また，i)，ii) から，三角形 ABC における関係式を得る．

同様に，ブラマーグプタの公式

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \qquad (2s=a+b+c+d)$$

において，$d=0$ とすると，次のヘロンの公式を得る．

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (2s=a+b+c)$$

なお，数学 I で扱ったヘロンの公式の証明は，次のとおりです．
△ABC の面積 S を，3 辺の長さ a，b，c で表してみよう．

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2} = \frac{1}{2}bc\cdot\frac{1}{2bc}\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\{(b+c+a)(b+c-a)\}\{(a+b-c)(a-b+c)\}}
\end{aligned}$$

ここで，$a+b+c=2s$ とおくと

$$b+c-a=2(s-a),\quad a+b-c=2(s-c),\quad a-b+c=2(s-b)$$

よって

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

以上から，次の**ヘロンの公式**が成り立つ．
△ABC の面積 S は

$2s=a+b+c$ とすると　　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

2023年12月26日 (火)

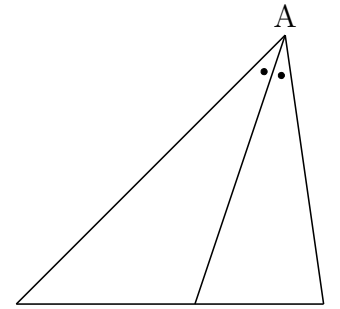
次の公式はよく扱われます.

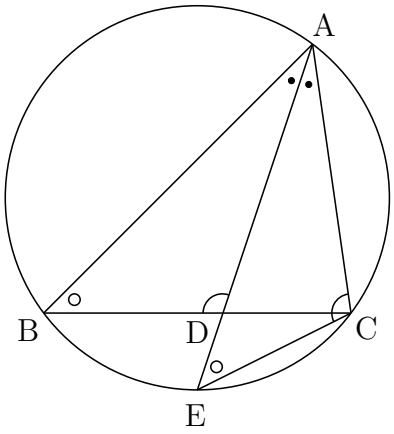
角の二等分線に関する公式

△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

$$\mathbf{AD^2 = AB{\cdot}AC - BD{\cdot}DC}$$

証明 右下の図のように △ABC の外接円と AD の延長との交点を E とする.





△ABD ∽ △AEC より

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AD} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AB{\cdot}AC} = \mathrm{AD{\cdot}AE}$$

AE = AD + DE より

$$\mathrm{AB{\cdot}AC} = \mathrm{AD}(\mathrm{AD} + \mathrm{DE}) = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD{\cdot}DE}$$

方べきの定理により，AD·DE = BD·DC であるから

$$\mathrm{AB{\cdot}AC} = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD{\cdot}DC} \quad \text{よって} \quad \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB{\cdot}AC} - \mathrm{BD{\cdot}DC}$$

証終

中線定理 (パップスの定理)

△ABC の辺 BC の中点を M とするとき，等式

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

が成り立つ.

証明 $\angle\mathrm{AMB} = \theta$ とすると，$\angle\mathrm{AMC} = 180^\circ - \theta$．△ABM および △AMC に余弦定理を適用すると，MC = BM より

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2 - 2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}\cos\theta \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AM}^2 + \mathrm{MC}^2 - 2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{MC}\cos(180^\circ - \theta)\\ &= \mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2 + 2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}\cos\theta \end{aligned}\tag{2}$$

(1)，(2) の辺々を加えると

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

証終

2023年12月27日 (水)

今回は，証明問題について紹介します．証明問題の多くは，三角比，三角関数，数列の分野から多く出題され，教科書に載っている内容がそのまま問われていることも少なくありません．

2020年 宮崎大

数学的帰納法を用いて，自然数 n に対する次の等式を証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

2010年 九大文系

以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

(1) 和 $1+2+\cdots+n$ を n の多項式で表せ。

(2) 和 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ を n の多項式で表せ。

(3) 和 $1^3+2^3+\cdots+n^3$ を n の多項式で表せ。

2014年 大分大学医学部

数列の和について次の一連の問いに答えなさい．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ を示しなさい．

(2) 多項式 $(k+1)^3-k^3$ の展開を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示しなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示しなさい．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めなさい．結果は因数分解すること．

一般には，次の定理が知られています．

ファウルハーバー (Faulhaber) の定理

i を 0 以上の整数とすると　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^i = \frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j \binom{i+1}{j} B_j n^{i+1-j}$

ただし，$\binom{i+1}{j}$ は 2 項係数 ${}_{i+1}\mathrm{C}_j$ とする．(B_j はベルヌーイ数)

証明は，次のサイトにあります．

http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2014.pdf

2017 年九大文系

$\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

2012 年 大分大

$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ が無理数であることを示せ．

2013 年 鹿児島大

m，n が自然数ならば，$\dfrac{m}{n} \neq \sqrt{2}$ である．このことを証明せよ．

2011 年 福岡教育大

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを示せ．

2018 年 佐賀大

1, 4, 9, 16 のように，自然数の 2 乗で表せる数を平方数という．n を平方数でない自然数とするとき，$\sqrt{n}$ は無理数であることを示せ．

2014 年 九大文系

鋭角三角形 △ABC について，△ABC の重心を G，外心を O とする．G と O が一致するならば △ABC は正三角形であることを証明せよ。

2011 年 大分大学

次の問いに答えよ．

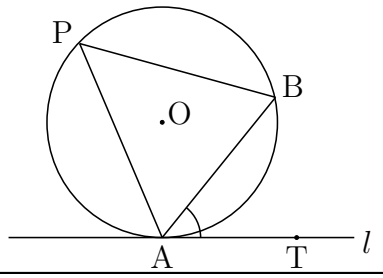
(1) 正弦定理の証明をせよ．ただし，鋭角三角形の場合だけの証明でよい．

(2) 実数 x_i，y_i，$i = 1, 2, \cdots n$ に対して次の不等式を証明せよ．ただし，n は自然数である．

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$

2013 年 宮崎大学

右図のような点 O を中心とする円において，弦 AB と点 A における接線 l とのなす角 ∠BAT は，その角内にある弧 AB に対する円周角 ∠APB に等しいことを証明せよ．ただし，∠BAT は鋭角とする．



2018 年 鹿児島大

$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y)$ を示せ．

2013 年 佐賀大

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき，等式 $\dfrac{1}{2}\tan\theta = \dfrac{1}{2\tan\theta} - \dfrac{1}{\tan 2\theta}$ を示せ．

大分大 2021 年

ベクトル $\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}$ の大きさは 1 であることを示しなさい．

2012 年 長崎大

平面 ABC 上に点 H をとり，s，t，u を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ とおく．このとき，$s + t + u = 1$ となることを示せ．

2016 年 長崎大

右の図 2 を参考にして，三角形 OPQ において $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}$ とおくとき，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ．

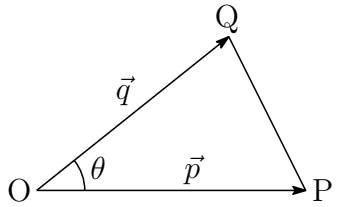


図 2

2011 年 大分大

x の三次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフはある点に関して対称であることを証明せよ．ここに，a，b，c，d は定数で $a \neq 0$ とする．

2011 年 九州工業大学工学部

実数 α，β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\beta - x)(x - \alpha)\, dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

を示せ．

2020 年 熊大理系

α，β を複素数とし，複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β) とする。△OAB の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

2020 年 福岡教育大学

複素数 z が $z \neq 1$ をみたしているとき，

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}\{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}\}$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で示せ．

2016 年 九大理系

θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

2023年12月28日 (水)

マークシート (共通テスト) 対策

先ず，受験対策が遅れた生徒がやってはいけない受験勉強は，共通テストやセンター試験の過去問だけに取り組む勉強法です．確かに過去問から学ぶことも確かに勉強であるのですが，大学入試センターは過去の出題と類似した問題は出題しません．その徹底ぶりには毎年感心させられます．書店に平積みにしてあるお買い得な教学社の赤本や河合塾の黒本だけを勉強した受験生は，本番では全く報われません．

受験対策を完璧に仕上げることは不可能です．限られた時間の中で効率的な対策は，過去問が載っていない共通テスト対策本をやり上げた方が有効な勉強法のように思います．

また共通テストは解法不問の試験で，基本公式以外に色々な計算テクニックを活用することも大切だと思います．

ブラマーグプタの公式など，難解な証明を載せていますが，証明法を覚えなくとも，使い方をマスターしてください．

- 対数に関する公式

$$\log_a \boldsymbol{b} = \log_{a^n} \boldsymbol{b^n}, \quad \log_a \boldsymbol{M} \log_b \boldsymbol{N} = \log_a \boldsymbol{N} \log_b \boldsymbol{M}$$

- 等比数列の和の公式

  初項 a，末項 l，公比 r の等比数列の和 S は

$$\boldsymbol{S = \frac{rl - a}{r - 1}}$$

- 角の二等分線に関する公式

  △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

$$\mathbf{AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC}$$

- オイラー線に関する性質

  三角形の垂心 H，重心 G，外心 O は同一直線 (オイラー線) 上にあり，G は線分 HO を 2 : 1 に内分する点である．

- トレミーの定理

  円に内接する四角形 ABCD において，AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, AC $= x$, BD $= y$ とすると

$$\boldsymbol{xy = ac + bd}$$

- ヘロンの公式

  △ABC の面積 S は，三辺の長さを $a,\ b,\ c$ とすると

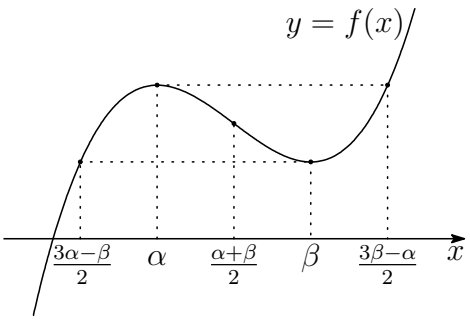
$$\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \qquad \boldsymbol{(2s=a+b+c)}$$

- ブラマーグプタの公式

  円に内接する四角形の面積 S は，四辺の長さを $a,\ b,\ c,\ d$ とすると

$$\boldsymbol{S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}} \qquad \boldsymbol{(2s=a+b+c+d)}$$

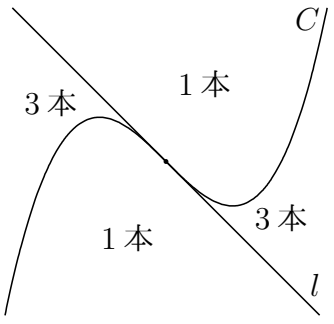
- 3 次関数 $y=f(x)$ について，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき $(\alpha<\beta)$，変曲点の x 座標は $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である．



  とくに，数列 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2},\ \alpha,\ \dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \beta,\ \dfrac{3\beta-\alpha}{2}$ は，等差数列をなす．また次式が成立する．

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2},\quad f(\alpha)=f\left(\frac{3\beta-\alpha}{2}\right),\quad f(\beta)=f\left(\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)$$

- 3 次関数のグラフ C 上の変曲点 $(y''=0)$ における接線 l とそのグラフにより，平面上の点 P から C に引ける引ける接線の本数は下の図のようになる．P が変曲点を除く C および l 上にあるとき 2 本，変曲点では l のみの 1 本である．



- 不定積分の公式

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

- 定積分の公式 1

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

- 定積分の公式 2

  $f(x)$ を 3 次以下の多項式とすると

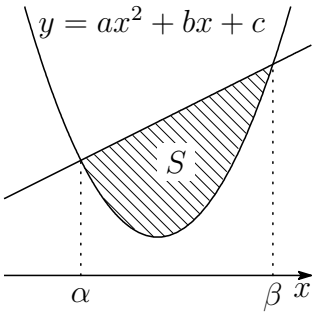
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}$$

  $f(x)-g(x)$ が 3 次以下の多項式で，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$ のとき

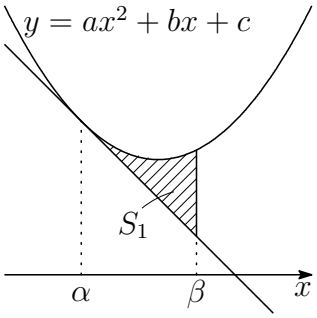
$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \frac{2}{3}(b-a)\left\{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$$

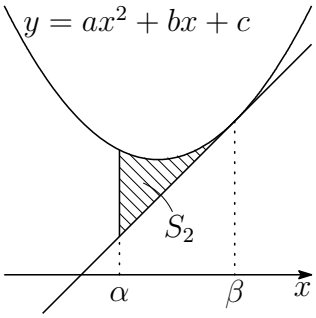
- 放物線と直線で囲まれた面積

$$S = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$



- 放物線の接線と面積に関する公式

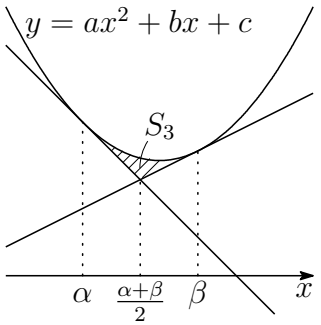




  S_1，S_2 は，a の符号に関係なく　$\dfrac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3$

- 放物線の 2 接線と面積に関する公式

  $f(x)=ax^2+bx+c$ とする．放物線 $y=f(x)$ と $x=\alpha,\ \beta$ における 2 接線と囲まれ部分の面積 S_3 は



$$\boldsymbol{S_3=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3}$$

  2 接線の交点の x 座標が $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である．
  また，2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線と放物線で囲まれた部分の面積の $\dfrac{1}{2}$ である．

- サラスの公式

  (1) 座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\,0)$，$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(c,\ d)$ を頂点とする三角形の面積 S は

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}|ad-bc|}$$

  (2) 座標空間における 4 点 $\mathrm{O}(0,\,0,\,0)$，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3,\ z_3)$ を頂点とする四面体の体積 V は

$$\boldsymbol{V=\frac{1}{6}|x_1(y_2z_3-y_3z_2)+y_1(z_2x_3-x_3z_2)+z_1(x_2y_3-x_3y_2)|}$$

- 垂直なベクトル

  平行でない 2 つの $\vec{a}$，$\vec{b}$ について

$$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a},\qquad \vec{b}\perp\vec{a}-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}}$$

- 角の二等分線を表すベクトル

  $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，$\angle\mathrm{O}$ の二等分線に平行なベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{v}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}+\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}}$$

  また，$\angle\mathrm{O}$ の二等分線と辺 AB との交点を C とすると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{v}}$$

- $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，点 B から直線 OA に垂線 BH を引くと

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}}$$

- 三角形 OAB の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}}$$

- $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，三角形 OAB の面積を S とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = y_1\vec{a} + y_2\vec{b}$$

のとき，三角形 PQR の面積 S' は

$$\boldsymbol{S' = |x_1y_2 - x_2y_1|S}$$

- $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ に対して

$$\boldsymbol{\vec{n} = (y_1z_2 - y_2z_1,\ z_1x_2 - z_2x_1,\ x_1y_2 - x_2y_1)}$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に垂直である．また，三角形 OAB の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}|\vec{n}|}$$

2023年12月29日 (金)

北大 2014 文系 2 番

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 以下が成立するように，実数 $s,\ t\ (s > t)$ を定めよ．

$$\begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 一般項 a_n を求めよ．

解答 (1) 与えられた漸化式

$$(*) \begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を変形すると，ともに

$$a_{n+2} = (s + t)a_{n+1} - sta_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

これが $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$ に一致するから

$$s + t = 1, \quad st = -3 \quad \cdots (**)$$

s，t を解とする 2 次方程式は　　$x^2 - x - 3 = 0$

これを解いて　　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$s > t$ であるから　$\boldsymbol{s = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad t = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}}$

(2) $a_1 = 1$，$a_2 = 1$ および $(*)$，$(**)$ より

$$a_{n+1} - sa_n = t^{n-1}(a_2 - sa_1) = t^{n-1}(1 - s) = t^n$$
$$a_{n+1} - ta_n = s^{n-1}(a_2 - ta_1) = s^{n-1}(1 - t) = s^n$$

上の 2 式から $(s \neq t)$

$$(s - t)a_n = s^n - t^n \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{s^n - t^n}{s - t}$$

これに (1) の結果を代入すると

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}}$$

解説 $\alpha,\ \beta \neq 0$ とする．漸化式 $a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0 \cdots (*)$ から

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n), \quad a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

$\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は初項 $a_2 - \beta a_1$，公比 α の等比数列．

$\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は初項 $a_2 - \alpha a_1$，公比 β の等比数列．

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1), \quad a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_1 - \alpha a_0)$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$(\alpha - \beta)a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) - \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき $\qquad a_n = \dfrac{(a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} - (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$

$$a_n = \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta}\alpha^{n-1} + \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha}\beta^{n-1}$$

ii) $\alpha = \beta$ のとき

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}$$

$n \geqq 2$ のとき $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}\right)$

$$\frac{a_n}{\alpha^n} - \frac{a_1}{\alpha} = \left(\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}\right)(n-1)$$

$$a_n = \left\{\left(\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}\right)(n-1) + \frac{a_1}{\alpha}\right\}\alpha^n$$

上式は，$n = 1$ のときも成り立つ．

i)，ii) より，$(*)$ は，次の形で表すことができる．

$\alpha \neq \beta$ のとき $\qquad \boldsymbol{a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}} \qquad (A,\ B$ は定数$)$

$\alpha = \beta$ のとき $\qquad \boldsymbol{a_n = (Cn + D)\alpha^n} \qquad (C,\ D$ は定数$)$

上の 2 式の指数 n，$n-1$ はどちらでもよい．たとえば，第 2 式を

$$a_n = (Cn + D)\alpha^{n-1} \quad (C,\ D \text{ は定数})$$

とおいてもよい．

2019 年 熊大文系・理系

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。

(2) $b_n = \dfrac{3}{a_n - 2} + 1$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $a_n > \dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

解答 (1) $a_1 \neq 2$ であるから，第 $m+1$ 項で初めて $a_{m+1} = 2$ になると仮定すると，漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n} + 1 \cdots (*)$ に $n = m$ を代入すると

$$2 = \frac{2}{a_m} + 1 \quad \text{すなわち} \quad a_m = 2$$

第 m 項ですでに $a_m = 2$ となり，矛盾を生じる．
よって，すべての自然数 n に対して　$a_n \neq 2$

(2) $b_n = \dfrac{3}{a_n - 2} + 1 \cdots (**)$ より　$b_n = \dfrac{a_n + 1}{a_n - 2}$　これと $(*)$ により

$$a_{n+1} + 1 = \frac{2}{a_n} + 2 = \frac{2(a_n + 1)}{a_n}$$
$$a_{n+1} - 2 = \frac{2}{a_n} - 1 = \frac{-(a_n - 2)}{a_n}$$

上の 2 式から　$\dfrac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 2} = -2 \cdot \dfrac{a_n + 1}{a_n - 2}$　すなわち　$b_{n+1} = -2b_n$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{a_1 + 1}{a_1 - 2} = \dfrac{1+1}{1-2} = -2$，公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n = b_1 \cdot (-2)^{n-1} = \boldsymbol{(-2)^n}$$

補足 $\{a_n\}$ の特性方程式 $x = \dfrac{2}{x} + 1$ の解が $2, -1$ であるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n + 1}{a_n - 2}\right\}$ は等比数列である．

(3) (∗∗) より　$b_n - 1 = \dfrac{3}{a_n - 2}$　　ゆえに　$a_n - 2 = \dfrac{3}{b_n - 1}$

上式および (2) の結果から　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{3}{(-2)^n - 1} + 2}$

(4) (3) の結果を $a_n > \dfrac{5}{2}$ に代入すると

$$\frac{3}{(-2)^n - 1} + 2 > \frac{5}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{(-2)^n - 1} > \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

したがって　$0 < (-2)^n - 1 < 6$　ゆえに　$1 < (-2)^n < 7$

これを満たす自然数 n は　　$\boldsymbol{n = 2}$

分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について，以下に述べる．
$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．
$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots (***)$$
$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

したがって $\quad \dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \dfrac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha} \left(\dfrac{r\alpha + s}{r\beta + s} \right)^{n-1}$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+\dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

例えば，大分大学 2001 年の漸化式[3]

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{2a_n}{3a_n+5}$$

の特性方程式 $x=\dfrac{2x}{3x+5}$ の解が $0,-1$ であるから

$$a_{n+1}+1=\frac{5(a_n+1)}{3a_n+5}$$

したがって　$\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n}{a_n+1}$　ゆえに　$\dfrac{a_n}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

よって　$a_n=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}}{4\cdot 5^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}$

次に，宮崎大学 2003 年の漸化式[4]

$$a_1=\frac{q}{p}\ (p>q>0),\quad a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

の特性方程式 $x=\dfrac{1}{2-x}$，すなわち $x^2-2x+1=0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

ゆえに　$\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{\frac{q}{p}-1}-(n-1)$　よって　$a_n=\dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2001.pdf 1
[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2003.pdf 12

2023年12月30日 (土)

2015年 東工大2015年

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．また数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定める．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

解答 (1) 数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は

$$x = \frac{4x - 9}{x - 2} \quad \text{すなわち} \quad (x-3)^2 = 0$$

この方程式の解が $x = 3$ であるから

$$a_{n+1} - 3 = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} - 3 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_{n+1} - 3} = \frac{1}{a_n - 3} + 1$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n - 3}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1 - 3}$，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n - 3} = \frac{1}{a_1 - 3} + (n-1) = \frac{2n-1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = \frac{6n-1}{2n-1}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(6k-1)}{2k-1} \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left(3k+1+\frac{1}{2k-1}\right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{2}n(n+1)+n+\frac{1}{2k-1}\right\} \\ &= 3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n-1} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \leqq \sum_{k=1}^{n}$

すなわち $\displaystyle\frac{n}{2n-1} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \leqq n \quad \cdots ②$

② を ① に代入すると，次式から明らか．

$$3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{(n+1)(2n-1)} \leqq b_n \leqq 3+\frac{4}{n+1} \quad \cdots (*)$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{(n+1)(2n-1)}\right\}=3, \quad \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n+1}\right)=3$

上の 2 式から，$(*)$ にはさみうちの原理を適用すると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \mathbf{3}$

2023年12月31日(日)

相加平均・相乗平均

正の2数 $a,\ b$ の相加平均は $\dfrac{a+b}{2}$，相乗平均は $\sqrt{ab}$ です．
例えば，$a=4$，$b=9$ について

$$\frac{a+b}{2}=\frac{4+9}{2}=6.5,\quad \sqrt{ab}=\sqrt{4\cdot 9}=6$$

このように，相加平均が相乗平均より大きいことが分かります．このことは，次式からも分かります．

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$$

とくに，相加平均 = 相乗平均 となるとき，

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=0\quad\Longleftrightarrow\quad(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0\quad\Longleftrightarrow\quad a=b$$

2 正数の相加平均・相乗平均

正の2数 $a,\ b$ について，次式が成立する

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}\qquad(\text{等号は } a=b \text{ のときに限る})$$

上式は，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ で活用することが多い．

例1 $a>0$ のとき，$9a+\dfrac{1}{4a}$ の最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

解答 正の2数 $9a,\ \dfrac{1}{4a}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$9a+\frac{1}{4a}\geqq 2\sqrt{9a\cdot\frac{1}{4a}}=2\sqrt{\frac{9}{4}}=3$$

最小値は3，このときの a の値は

$$9a=\frac{1}{4a}\quad\text{すなわち}\quad 36a^2=1\quad a>0\text{ に注意して}\quad a=\frac{1}{6}$$

例 2 4 正数 $a,\ b,\ c,\ d$ について，相乗平均の大小関係により

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}, \quad c+d \geqq 2\sqrt{cd} \qquad (*)$$

さらに，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$(a+b)+(c+d) \geqq 2\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{cd}} \quad \text{ゆえに} \quad a+b+c+d \geqq 4\sqrt[4]{abcd} \quad (**)$$

$(**)$ で等号が成立するのは，$(*)$ より $a=b,\ c=d$，$(**)$ の第 1 式から $ab=cd$ であるから　$a=b=c=d$

4 正数の相加平均・相乗平均

正の 4 数 $a,\ b,\ c,\ d$ について，次式が成立する

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd} \qquad (\text{等号は } a=b=c=d \text{ のときに限る})$$

例 3 正の 3 数 $a,\ b,\ c$ について，$m=\dfrac{a+b+c}{3}$ とし，4 正数 $a,\ b,\ c,\ m$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a+b+c+m \geqq 4\sqrt[4]{abcm} \quad \text{ゆえに} \quad m \geqq \sqrt[4]{abcm} \qquad (*)$$

上の第 2 式の両辺を 4 乗すると

$$m^4 \geqq abcm \quad \text{ゆえに} \quad m^3 \geqq abc \quad \text{よって} \quad \frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

上式において，等号が成立するとき，$(*)$ の第 1 式から

$$a=b=c=m$$

これから，次が成立する．

3 正数の相加平均・相乗平均

正の 3 数 $a,\ b,\ c$ について，次式が成立する

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc} \qquad (\text{等号は } a=b=c \text{ のときに限る})$$

例 4 $x>0$ のとき，$x^2+\dfrac{2}{x}$ の最小値とそのときの x の値

解答 $x^2+\dfrac{2}{x}=x^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x} \geqq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}}=3$　よって，最小値は 3

そのときの x の値は　$x^2=\dfrac{1}{x}$　これを解いて　$x=1$

2024年1月1日 (月)

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ のとき

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

等号が成立するのは, $a=b=c=d$ のときに限ることを利用する.

$a_i>0\ (i=1,2,\cdots,8)$ について

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8) &\geqq 4(\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}+\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8})\\ &\geqq 4\cdot 2\sqrt{\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}}\\ &= 8\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}\end{aligned}$$

等号が成立するのは

$$a_1=a_2=a_3=a_4,\quad a_5=a_6=a_7=a_8,\quad \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}=\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}$$

すなわち，$a_1=a_2=\cdots=a_8$ のときに限る.

これを繰り返すことにより，$n=2^k$ (k は自然数) のとき

$$A_n \geqq G_n$$

が成立することがわかる.

次に，$n=p+q$ ($p,\ q$ は2以上自然数) が成立するとき，$A_p \geqq G_p$ が成立することを示す．ここで

$$A_p=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_p}{p},\quad G_p=\sqrt[p]{a_1a_2\cdots a_p}$$

とすると，$a_1+a_2+\cdots+a_p=pA_p,\ a_1a_2\cdots a_p={G_p}^p$ である.

n 個の正数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots, a_p,\ \overbrace{A_p,\ A_p,\ \cdots, A_p}^{q\text{ 個}}$$

の相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_p)+qA_p}{n} \geqq \sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_p){A_p}^q} \quad \text{ゆえに} \quad A_p \geqq \sqrt[n]{{G_p}^p{A_p}^q}$$

両辺を n 乗すると $(n=p+q)$

$${A_p}^{p+q} \geqq {G_p}^p{A_p}^q \quad \text{ゆえに} \quad {A_p}^p \geqq {G_p}^p \quad \text{すなわち} \quad A_p \geqq G_p$$

等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots a_p$ のときに限る．

よって，2 以上のすべての自然数 p について，上の結果は成立する．

相加平均・相乗平均・調和平均の大小関係

定理 1 n 個の正数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の相加平均 A_n，相乗平均 G_n，調和平均 H_n

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$
$$G_n = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$
$$\frac{1}{H_n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

について，$A_n \geqq G_n \geqq H_n$ が成立する．
等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限る．

証明 $A_n \geqq G_n$ が成り立つから n 個の整数 $\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2},\ \cdots,\ \dfrac{1}{a_n}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H_n} \geqq \frac{1}{G_n}$$

したがって　　$A_n \geqq G_n \geqq H_n$

なお，等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限る．　　**証終**

2024年1月2日 (火)

1とn個の$1+\dfrac{1}{n}$の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+1}\left\{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} > \sqrt[n+1]{1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

両辺を$n+1$乗すると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$とすると，数列$\{a_n\}$は単調増加列である．

また，1と$n+1$個の$\dfrac{n}{n+1}$の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+2}\left\{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\right\} > \sqrt[n+2]{1\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

両辺を$n+2$乗すると

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

上式の逆数をとると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$とすると，数列$\{b_n\}$は単調減少列である．したがって

$$2=a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}<\cdots<b_2<b_1=4$$

また，$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$であるから　$0<b_n-a_n=\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{4}{n}$

はさみうちの原理により　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

この極限値を**ネイピア数**といい，$\boldsymbol{e}$ ($\fallingdotseq 2.71828\cdots$) で表す．

2023年12月4日 (月) に示した等式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

や3学期に扱う正規分布の確率密度関数でも登場する非常に重要な定数 (無理数) である．

2024年1月3日 (水)

名大文系 2002 年

n を自然数とするとき，3 つの数 $a=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}-1$，$b=1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$，$c=\dfrac{1}{5n}$ の大きさを比較せよ．

解答 5 つの正数 $1+\dfrac{1}{n},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}+1+1+1+1\right)>\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{n}\right)1^4}$$

$$\frac{1}{5n}>\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1 \qquad (*)$$

$n>1$ のとき，5 つの正数 $1-\dfrac{1}{n},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{n}+1+1+1+1\right)>\sqrt[5]{\left(1-\frac{1}{n}\right)1^4}$$

$$1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}>\frac{1}{5n} \qquad (**)$$

$(**)$ は $n=1$ のときも成立するから，$(*)$, $(**)$ より，自然数 n について

$$1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}>\frac{1}{5n}>\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b>c>a}$$

2024年1月4日 (木)

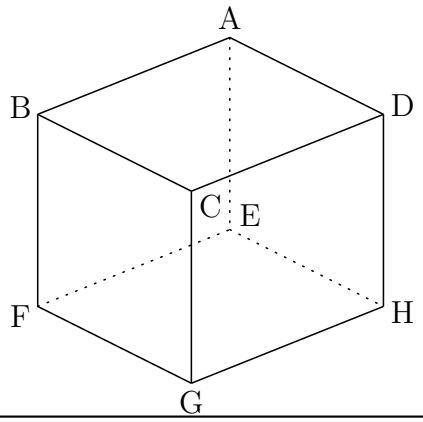
名大文系 2002 年

下図のような1辺の長さが4の立方体 ABCD-EFGH がある．辺 AB 上に点 P を BP = 3 となるように取り，辺 BC 上に点 Q を取る．また，B から △PFQ へ垂線 BK を下ろす．BQ の長さを a として，以下の問いに答えよ．

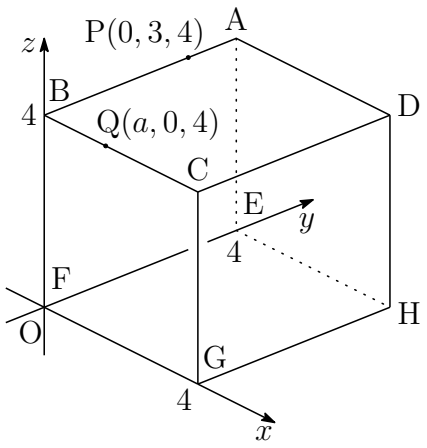
(1) a を用いて △PFQ の面積を表せ．

(2) a を用いて BK の長さを表せ．

(3) BK の長さは $\dfrac{\sqrt{30a}}{5}$ 以下であることを示せ．



解答　(1) 立方体 ABCD-EFGH を右の図のように，点 F を原点 O とする座標空間にとると



$$\overrightarrow{\mathrm{FP}} = (0,\ 3,\ 4), \quad \overrightarrow{\mathrm{FQ}} = (a,\ 0,\ 4)$$

したがって

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{PFQ} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{FQ}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FQ}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{25(a^2+16) - 16^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{25a^2+144}}\end{aligned}$$

発展　ベクトル積 (外積) を利用すると[5]，$\overrightarrow{\mathrm{FP}} \times \overrightarrow{\mathrm{FQ}} = (12,\ 4a, -3a)$ より

$$\triangle \mathrm{PFQ} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{FP}} \times \overrightarrow{\mathrm{FQ}}| = \frac{1}{2}\sqrt{25a^2+144}$$

(2) 三角錐 BPQF の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6}\cdot \mathrm{BP}\cdot \mathrm{BQ}\cdot \mathrm{BF} = \frac{1}{6}\cdot 3\cdot a\cdot 4 = 2a$$

$\dfrac{1}{3}\triangle \mathrm{PFQ}\cdot \mathrm{BK} = V$ であるから

$$\mathrm{BK} = \frac{3V}{\triangle \mathrm{PFQ}} = \frac{3\cdot 2a}{\frac{1}{2}\sqrt{25a^2+144}} = \boldsymbol{\frac{12a}{\sqrt{25a^2+144}}}$$

(3) $0 < a \leqq 4$ のとき，(2) の結果から

$$\frac{\sqrt{30a}}{5}\cdot\frac{1}{\mathrm{BK}} = \frac{\sqrt{30a}}{5}\cdot\frac{\sqrt{25a^2+144}}{12a} = \frac{1}{2\sqrt{30}}\sqrt{25a + \frac{144}{a}} \quad \cdots (*)$$

ここで，$25a$ と $\dfrac{144}{a}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$25a + \frac{144}{a} \geqq 2\sqrt{25a\cdot\frac{144}{a}} = 120 \quad \cdots (**)$$

$(**)$ で等号が成立するとき　$25a = \dfrac{144}{a}$　すなわち　$a = \dfrac{12}{5}$　$(0 < a \leqq 4)$

$(*)$，$(**)$ より　$\dfrac{\sqrt{30a}}{5}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{BK}} \geqq \dfrac{1}{2\sqrt{30}}\sqrt{120} = 1$　よって　$\mathrm{BK} \leqq \dfrac{\sqrt{30a}}{5}$

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

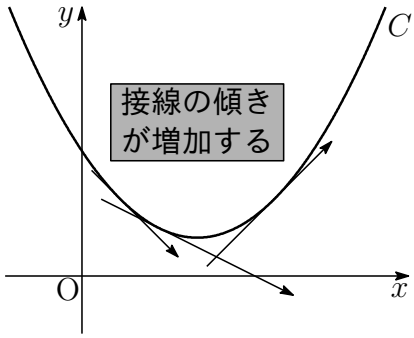
2024年1月5日 (金)

3次方程式の実数解の個数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は x の関数である．この関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，さらに微分して得られる導関数を，関数 $y=f(x)$ の**第2次導関数**といい，$\boldsymbol{y''}$，$\boldsymbol{f''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)}$ などの記号で表す．さらに，$f''(x)$ の導関数を $y=f(x)$ の**第3次導関数**といい，$\boldsymbol{y'''}$，$\boldsymbol{f'''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3y}{dx^3}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)}$ などの記号で表す．

関数 $f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ の正負が何を表すか調べてみよう．

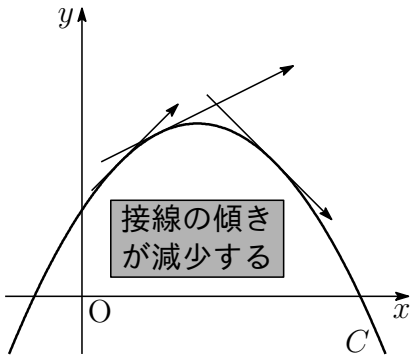
関数 $y=f(x)$ のグラフを C とする．$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数であるから，$f'(x)$ の値の増減は $f''(x)$ の符号で調べることができる．また，$f'(x)$ の値の増減は，接線の傾きの増減を表す．



よって，次のことがいえる．

$f''(x)>0$ である区間では，$f'(x)$ の値は増加する．すなわち，曲線 C の接線の傾きが増加する．

$f''(x)<0$ である区間では，$f'(x)$ の値は減少する．すなわち，曲線 C の接線の傾きが減少する．



一般に，ある区間で，x の値が増加すると曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが増加するとき，曲線はこの区間で**下に凸**であるという．また，接線の傾きが減少するとき，曲線はこの区間で**上に凸**であるという．

上で調べたことをまとめると，次のことがいえる．

$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸

関数 $f(x)$ が第2次導関数 $f''(x)$ をもつとき

1　$f''(x)>0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸である．

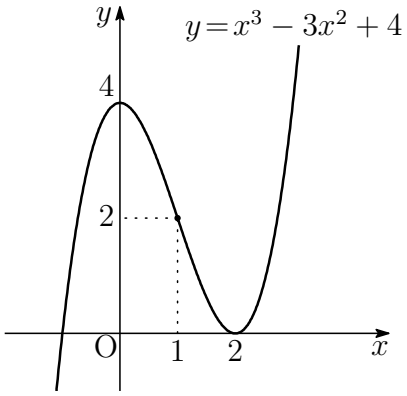
2　$f''(x)<0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は上に凸である．

例 1 曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ の凹凸

$$y' = 3x^2 - 6x$$
$$y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

y'' の符号により，この曲線の凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	2	下に凸



［終］

例 1 の曲線では，点 $(1,\ 2)$ を境目として曲線の凹凸が入れ替わる．このように，曲線の凹凸が入れ替わる境目の点を**変曲点**という．

とくに 3 次関数のグラフには変曲点がただ 1 つ存在し，変曲点に関して 3 次関数のグラフは対称である (後で証明)．

変曲点について，次のことが成り立つ．

曲線 $y = f(x)$ の変曲点

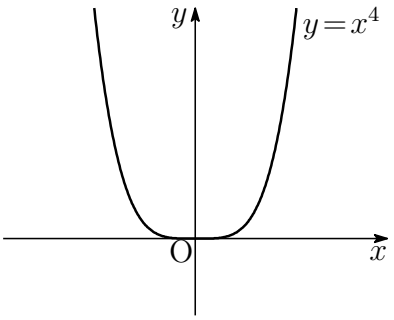
$f''(a) = 0$ のとき，$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，
点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y = f(x)$ の変曲点である．

点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点ならば $f''(a) = 0$ である．
しかし，$f''(a) = 0$ でも，点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点であるとは限らない．

例 2 $f(x) = x^4$ を考える．$f'(x) = 4x^3$，$f''(x) = 12x^2$ より，曲線 $y = f(x)$ の凹凸は，下の表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	下に凸	2	下に凸

よって，$f''(0) = 0$ でも，原点 $(0,\ 0)$ はこの曲線の変曲点ではない．



2024年1月6日 (土)

定理 2 2次関数 $f(x)$ の x^2 の係数が a であるとき，$x=k$ を極として展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^2 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明 $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$ より

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^2+bk+c+(2ak+b)(x-k)+a(x-k)^2 \\ &= ax^2+bx+c=f(x) \end{aligned}$$

［証終］

例えば，定理 2 において，$f'(k)=0$ のとき，$k=-\dfrac{b}{2a}$ であるから

$$f(k)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

このとき，$f(x)$ は平方完成の式となる．

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

定理 3 3次関数 $f(x)$ の x^3 の係数が a であるとき，$x=k$ を極として展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2}f''(k)(x-k)^2+a(x-k)^3 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c, \quad f''(x)=6ax+2b$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^3+bk^2+ck+d+(3ak^2+2bk+c)(x-k) \\ &\quad +\frac{1}{2}(6ak+2b)(x-k)^2+a(x-k)^3 \\ &= ax^3+bx^2+cx+d=f(x) \end{aligned}$$

［証終］

n 次多項式についても数学 III で学習する部分積分法を使って証明できる [6] ．

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

定理 4 3次関数 $C : y = f(x)$ のグラフは変曲点 $\mathrm{M}(k,\ f(k))$ に関して対称である．

証明 変曲点を $\mathrm{M}(k,\ f(k))$ とすると，$f''(k) = 0$ であるから

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x-k) + a(x-k)^3 \quad (a \text{ は } f(x) \text{ の } x^3 \text{の係数}) \tag{6}$$

C 上の2点 $\mathrm{A}(k+t,\ f(k+t))$，$\mathrm{B}(k-t,\ f(k-t))$ について (t は任意の定数)

$$\begin{aligned}(k+t) + (k-t) &= 2k,\\ f(k+t) + f(k-t) &= \{f(k) + f'(k)t + at^3\} + \{f(k) - f'(k)t - at^3\}\\ &= 2f(k)\end{aligned}$$

したがって，A，B の中点は変曲点 M である．よって，C は変曲点 M に関して対称である． **証終**

補足 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のとき，$f''(x) = 6ax + 2b$ より $\quad k = -\dfrac{b}{3a}$ $\qquad$ 終

次に，3次関数 $f(x)$ の増減を (6) を利用して調べてみる．$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = f'(k) + 3a(x-k)^2 \tag{7}$$

(i) $f'(k) = 0$ または $f'(k)$ が a と同符号であるとき ($f(x)$ は極値をもたない)

$f(x)$ は単調増加または単調減少であるから，このとき，3次方程式 $f(x) = 0$ の実数解は1個である．

(ii) $f'(k)$ が a と異符号であるとき ($f(x)$ は極大値と極小値をもつ)

$$f'(k) = -3as^2 \tag{8}$$

とおくと ($s > 0$)，(6)，(7) は

$$\begin{aligned}f(x) &= f(k) - 3as^2(x-k) + a(x-k)^3 \qquad (9)\\ f'(x) &= -3as^2 + 3a(x-k)^2 = 3a(x-k+s)(x-k-s)\end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると，$x = k \pm s$ であるから，$f(x)$ の極値は

$$f(k+s) = f(k) - 2as^3, \quad f(k-s) = f(k) + 2as^3 \tag{10}$$

上の2式および (8) より

$$\begin{aligned}f(k+s)f(k-s) &= f(k)^2 - 4a^2s^6 = g(k)^2 - 4a^2\left\{-\frac{f'(k)}{3a}\right\}^3\\ &= f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a}\end{aligned}$$

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数について

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}>0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 1 個}$$

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}=0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 2 個}$$

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}<0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 3 個}$$

(i)，(ii) より，3 次方程式の実数解の個数について，次の定理が成立する．

3 次方程式の実数解の個数

定理 5 3 次方程式 $f(x)=0$ の x^3 の係数を a，$f''(x)=0$ の解を k とすると

$$f'(k)=0 \quad \text{または} \quad f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}>0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 1 個}$$

$$f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}=0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 2 個}$$

$$f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}<0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 3 個}$$

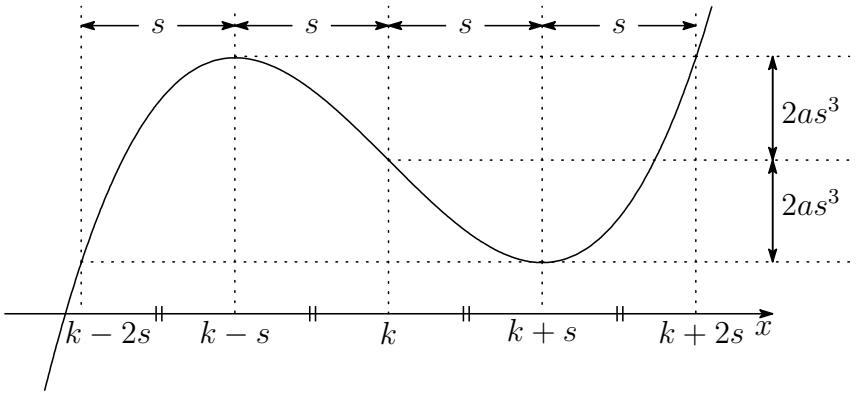
また，(9) に $x=k-2s,\ k+2s$ を代入すると

$$f(k-2s)=f(k)-2as^3,\quad f(k+2s)=f(k)+2as^3$$

したがって，上の 2 式と (10) より，次が成立する．

$$f(k-2s)=f(k+s),\quad f(k+2s)=f(k-s)$$

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ について，グラフの概形は次のようになる．
$(k,\ f(k))$ は変曲点，$f(k-s)$ は極大値，$f(k+s)$ は極小値である．



s は (8) より　　$s=\sqrt{-\dfrac{f'(k)}{3a}}$

2024年1月7日 (日)

積分公式 1

93 ページの定理 3 の関数 $f(x)$ について，次の定積分を考える．$k,\ t$ は任意の定数とする．

$$\begin{aligned}\int_k^{k+t} f(x)\,dx &= \int_k^{k+t} \{f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2}f''(k)(x-k)^2+a(x-k)^3\}\,dx \\ &= \left[\, f(k)(x-k)+\frac{f'(k)}{2}(x-k)^2+\frac{f''(k)}{6}(x-k)^3+\frac{a}{4}(x-k)^4 \,\right]_k^{k+t} \\ &= f(k)t+\frac{f'(k)}{2}t^2+\frac{f''(k)}{6}t^3+\frac{a}{4}t^4 \qquad (11)\end{aligned}$$

(11) の t を $-t$ に置き換えると

$$\int_k^{k-t} f(x)\,dx = -f(k)t+\frac{f'(k)}{2}t^2-\frac{f''(k)}{6}t^3+\frac{a}{4}t^4 \qquad (12)$$

(11)−(12) より

$$\int_{k-t}^{k+t} f(x)\,dx = 2t\left\{f(k)+\frac{f''(k)t^2}{6}\right\} \qquad (13)$$

また，定理 3 の等式に $x=k+t,\ k-t$ をそれぞれ代入すると

$$f(k+t) = f(k)+f'(k)t+\frac{f''(k)}{2}t^2+at^3$$

$$f(k-t) = f(k)-f'(k)t+\frac{f''(k)}{2}t^2-at^3$$

上の 2 式の辺々をそれぞれ加えると

$$f(k+t)+f(k-t) = 2f(k)+f''(k)t^2 \qquad (14)$$

(13) と (14) から $f''(k)t^2$ を消去すると

$$\int_{k-t}^{k+t} f(x)\,dx = \frac{1}{3}t\{f(k-t)+4f(k)+f(k+t)\}$$

$k=\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ t=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ とおくと，次の積分公式が成立する．

定理 6 $f(x)$ を 3 次以下の多項式とするとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\left\{f(\alpha)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\beta)\right\}$$

とくに，$f(\alpha)=f(\beta)=0$ のとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{2}{3}(\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

2024年1月8日 (月)

3次関数のグラフと接線

3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ の表す曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 ℓ の方程式を $y=g(x)$ とすると

$$g(x)=f(p)+f'(p)(x-p)$$

定理3にしたがって，$x=p$ を極として，$f(x)$ を展開すると

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+a(x-p)^3$$

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，C と ℓ の共有点の x 座標は，3次関数 $y=h(x)$ の x 軸との共有点の x 座標と等しい．

$$h(x)=\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+a(x-p)^3$$

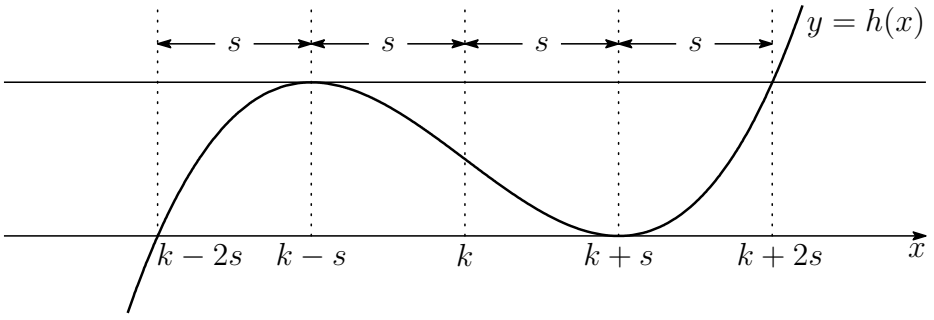
$f''(x)=6ax+2b$ より，変曲点の x 座標を k とすると，$f''(k)=0$ より

$$6ak+2b=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=-3ak, \quad f''(x)=6a(x-k)$$

$f''(p)=6a(p-k)$ であるから，$h(x)$ は

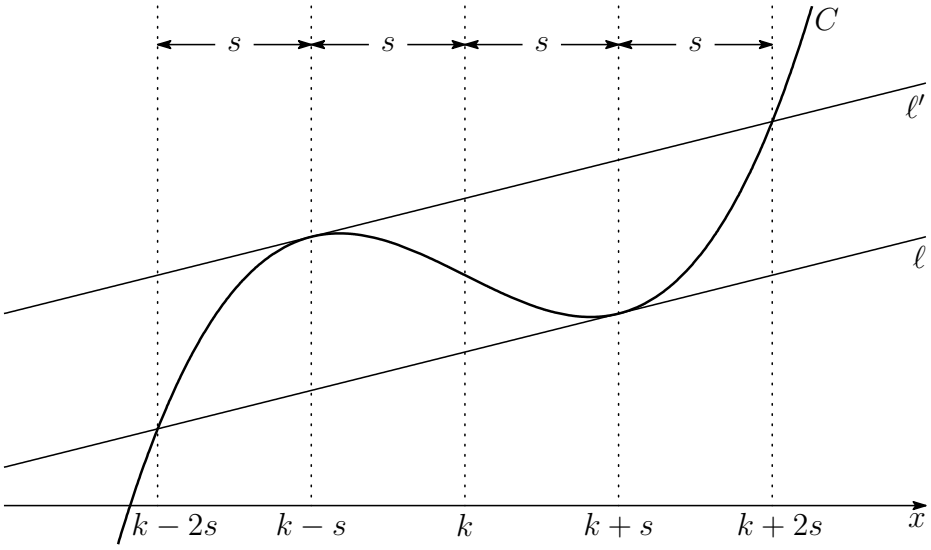
$$\begin{aligned} h(x)&=\frac{1}{2}\cdot 6a(p-k)(x-p)^2+a(x-p)^3 \\ &=a(x-p)^2\{3(p-k)+(x-p)\}=a(x-p)^2\{x-(3k-2p)\} \end{aligned}$$

$y=h(x)$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標は　$x=p,\ 3k-2p$
$p=k+s$ とおくと，これらの共有点の x 座標は，それぞれ　$x=k+s,\ k-2s$
$s>0$ のとき，$y=h(x)$ のグラフの概形は，次のようになる (p.95 を参照)．



変曲点の x 座標を基準に考えると分かりやすい．接点の x 座標が変曲点の x 座標より s だけ大きければ，もう一方の共有点の x 座標は変曲点の x 座標より $2s$ だけ小さい．逆に，接点の x 座標が変曲点の x 座標より s だけ小さければ，もう一方の共有点の x 座標は変曲点の x 座標より $2s$ だけ大きい．

ℓ と平行な C の接線を ℓ' とすると，これらのグラフの概形は，次のようになる．
なお，C と 2 接線 $\ell,\ \ell'$ との位置関係は C が極値をもたいない場合にも成立する．



定理 4 で述べたように，3 次関数 $y=f(x)$ のグラフは変曲点に関して対称である．
このことからも変曲点に関して対称な 2 点における接線が平行であることを証明できる．変曲点の x 座標 k を極として $f(x)$ を展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^3$$

これを微分すると　　$f'(x)=f'(k)+3a(x-k)^2$
変曲点に関して対称な 2 点 $(k+s,\ f(k+s)),\ (k-s,\ f(k-s))$ における接線の傾きは

$$f'(k+s)=f'(k-s)=f'(k)+3as^2$$

よって，ℓ と ℓ' は平行である．
ℓ は，点 $(k+s,\ f(k)+f'(k)s+as^3)$ を通り，傾き $f'(k)+3as^2$ の直線

$$\begin{aligned} y&=(f'(k)+3as^2)(x-k-s)+f(k)+f'(k)s+as^3\\ &=f(k)-2as^3+(f'(k)+3as^2)(x-k)\end{aligned}$$

C と ℓ の方程式　　$C:y=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^3$
$\ell:y=f(k)-2as^3+(f'(k)+3as^2)(x-k)$

上の 2 式から y を消去して整理すると

$$2as^3-3as^2(x-k)+a(x-k)^3=0 \quad \text{ゆえに} \quad a(x-k-s)^2(x-k+2s)=0$$

したがって，C と ℓ は $x=k-2s$ で交わる．
s を $-s$ に置き換えたものが ℓ' であるから，C と ℓ' は $x=k+2s$ で交わる．　終

2024年1月9日 (火)

積分公式2

次の定積分を求める.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx &= \int_\alpha^\beta \{(x-\beta)-(\alpha-\beta)\}(x-\beta)^2\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{(x-\beta)^3-(\alpha-\beta)(x-\beta)^2\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{4}(x-\beta)^4-\frac{1}{3}(\alpha-\beta)(x-\beta)^3\ \right]_\alpha^\beta \\ &= 0-\left\{\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^4-\frac{1}{3}(\alpha-\beta)^4\right\} \\ &= \frac{1}{12}(\alpha-\beta)^4=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \qquad (15)\end{aligned}$$

(15) の α と β を入れ替えると

$$\int_\beta^\alpha (x-\beta)(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

上式の左辺の上端と下端を入れ替えて書き替えると

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \qquad (16)$$

(15) は，次のように書くこともできる.

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \qquad (17)$$

(16) および (17) より，次式を得る.

定理 7 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

例えば，定理 7 により

$$S=\int_{-2}^1 (x-1)^2(x+2)\,dx=\int_{-2}^1 (x+2)(1-x)^2\,dx=\frac{1}{12}\{1-(-2)\}^4=\frac{27}{4}$$

数学 III の部分積分法を利用すると，次を証明できる [7].

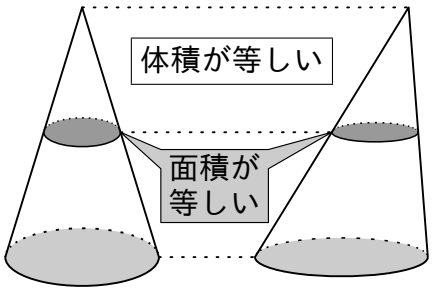
$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

2024年1月10日 (水)

カヴァリエリの原理

底面積も高さも等しい2つの立体を，底面に平行な同じ高さの平面で切ったとき，2つの切り口の面積がいつも等しいならば，2つの立体の体積は等しい．

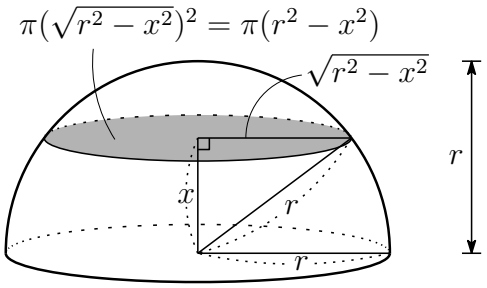


球の体積 V を求める式の説明

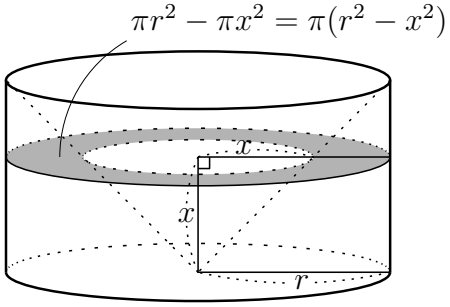
半径が r の半球を P，下の右図のように直円柱から円錐をくりぬいてできるすり鉢(ばち)型の立体を Q とする．ただし，直円柱と円錐について，底面の半径と高さはすべて r とする．2つの立体を底面から高さ x のところで，底面に平行な平面で切ったときの切り口の面積は，ともに $\pi(r^2-x^2)$ である．よって，半球 P と立体 Q の体積は等しい．半径が r の球の体積 V は，P の体積の2倍であるから

$$V = 2\times(\text{立体 } Q \text{ の体積}) = 2\times\left(\pi r^2\times r - \frac{1}{3}\times\pi r^2\times r\right) = 2\times\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

半球 P

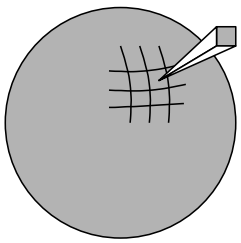


立体 Q



球の表面積を求める式の説明

球の表面を細かく分け，1つの面を底面とし，球の中心を頂点とする角錐状の立体を考える．球の表面の分割を非常に多くすることにより，球の体積 V は，次のように考えられる．



V = 角錐の体積の総和

$$= \frac{1}{3}\times(\text{角錐の底面積の総和})\times(\text{角錐の高さ})$$

$$= \frac{1}{3}\times(\text{球の表面積})\times(\text{球の半径}) = \frac{1}{3}Sr$$

ここで，$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを使うと，$S = 4\pi r^2$ が得られる．

2024年1月11日 (木)

n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m \mid n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x, y) と表記すると

$$(x, y) \mid x, \quad (x, y) \mid y$$

が成り立つ.

ユークリッドの互除法

2整数 a，b について $(a > b > 0)$，a を b で割ったときの商を q，余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = (b, c)$$

$$c = 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = b$$

証明 $c \neq 0$ のとき，$a = bq + c$ より　$(b, c) \mid a$　また，$(b, c) \mid b$ であるから，(b, c) は a と b の公約数，したがって

$$(b, c) \mid (a, b) \quad \cdots ①$$

同様に，$c = a - bq$ より　$(a, b) \mid c$　また，$(a, b) \mid b$ であるから，(a, b) は b と c の公約数，したがって

$$(a, b) \mid (b, c) \quad \cdots ②$$

① より $(b, c) \leqq (a, b)$，　② より $(a, b) \leqq (b, c)$　よって　$(a, b) = (b, c)$

$c = 0$ のとき，自明.　**証終**

補足 さらに，b を c で割った余りが d であるとき　$(b, c) = (c, d)$

すなわち　$(a, b) = (b, c) = (c, d)$

2つの整数 $a_1,\ a_2$ について $(a_1 > a_2 > 0)$，a_1 を a_2 で割った余りを a_3，さらに，a_2 を a_3 で割った余りを a_4，順次，a_k を a_{k+1} で割った余りを a_{k+2} とすると

$$(a_1, a_2) = (a_2, a_3) = (a_3, a_4) = \cdots = (a_k, a_{k+1}) = (a_{k+1}, a_{k+2}) = \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから，互除法を繰り返すことにより，a_1 と a_2 の最小公倍数を求めることができる.

鹿児島大学 2015 年

1 次不定方程式

$$37x + 32y = 1$$

の整数解を 1 組求めよ.

解答 ユークリッドの互除法により

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 6 & 1 \\ \hline 2 &) 5 &) 32 &) 37 \\ & 4 & 30 & 32 \\ \hline & 1 & 2 & 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrrr} & 2 & & 6 & & 1 \\ \hline d &) & c &) & b &) & a \\ & & & & & & \\ \hline & & 1 & & d & & c \end{array}$$

$a = 37$，$b = 32$，$c = 5$，$d = 2$ とおくと

$$\begin{cases} a = b + c \\ b = 6c + d \\ c = 2d + 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} c = a - b \\ d = b - 6c \\ 1 = c - 2d \end{cases}$$

$(*)$ の 3 式から $c,\ d$ を消去すると

$$1 = c - 2(b - 6c) = -2b + 13c = -2b + 13(a - b) = 13a - 15b$$

したがって　$37{\cdot}13 + 32{\cdot}(-15) = 1$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y) = (13, -15)}$

別解 $37x + 32y = 1 \cdots (*)$ より，$37 \equiv 5,\ \ 32 \equiv 0 \pmod{32}$ であるから

$$5x \equiv 1 \pmod{32} \quad \text{ゆえに} \quad 13{\cdot}5x \equiv 13 \pmod{32}$$

すなわち　$x \equiv 13 \pmod{32}$　これを満たす整数 x の 1 つは　13

$(*)$ より，$5x + 32(x + y) = 1$ であるから

$$5 \times 13 + 32(13 + y) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 64 + 32(13 + y) = 0$$

これを解いて　$y = -15$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y) = (13, -15)}$

琉球大学 (農・教育学部)2023 年

$2023x + 374y = 17$ を満たす整数 $x,\ y$ の組を 1 つ求めよ.

解答 $2023x + 374y = 17$ より　$119x + 22y = 1$

ユークリッドの互除法により

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 2 & 5 \\ \hline 4 &) 9 &) 22 &) 119 \\ & 8 & 18 & 110 \\ \hline & 1 & 4 & 9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrrr} & 2 & 2 & 5 \\ \hline d &) c &) b &) a \\ & & & \\ \hline & 1 & d & c \end{array}$$

$a = 119$，$b = 22$，$c = 9$，$d = 4$ とおくと

$$\begin{cases} a = 5b + c \\ b = 2c + d \\ c = 2d + 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} c = a - 5b \\ d = b - 2c \\ 1 = c - 2d \end{cases}$$

$(*)$ の 3 式から $c,\ d$ を消去すると

$$1 = c - 2(b - 2c) = -2b + 5c = -2b + 5(a - 5b) = 5a - 27b$$

したがって　$119{\cdot}5 + 22{\cdot}(-27) = 1$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y) = (5, -27)}$

別解 $119x + 22y = 1 \cdots (*)$ より，$119 \equiv 9,\ 22 \equiv 0 \pmod{22}$ であるから

$$9x \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 5{\cdot}9x \equiv 5 \pmod{22}$$

すなわち　$x \equiv 5 \pmod{22}$　これを満たす整数 x の 1 つは　5

$(*)$ より，$9x + 22(5x + y) = 1$ であるから

$$9{\cdot}5 + 22(25 + y) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 44 + 22(25 + y) = 0$$

これを解いて　$y = -27$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y) = (5, -27)}$

2024年1月12日 (金)

宮崎大学 2023 年

次の各問に答えよ.

(1) $a = 2023$，$b = 1742$ とする．このとき

$$\frac{1}{ab} = \frac{m}{a} + \frac{n}{b}$$

となる整数の組 $(m,\ n)$ で，$1 \leqq n \leqq 2000$ を満たすものをすべて求めよ.

(2) p を 3 以上の素数とする．このとき

$$(p-1)! \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right)$$

は p の倍数であることを示せ.

解答　(1) ユークリッドの互除法により

$$\begin{array}{rrrr} & 5 & 6 & 1 \\ \hline 56 &) 281 &) 1742 &) 2023 \\ & 280 & 1686 & 1742 \\ \hline & 1 & 56 & 281 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrrr} & 5 & 6 & 1 \\ \hline d &) \ c \ &) \ b \ &) \ a \\ & & & \\ \hline & 1 & d & c \end{array}$$

$c = 281$，$d = 56$ とおくと

$$\begin{cases} a = b + c \\ b = 6c + d \\ c = 5d + 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} c = a - b \\ d = b - 6c \\ 1 = c - 5d \end{cases}$$

$(*)$ の 3 式から $c,\ d$ を消去すると

$$1 = c - 5(b - 6c) = -5b + 31c = -5b + 31(a - b) = 31a - 36b$$

したがって　$\dfrac{1}{ab} = \dfrac{31a - 36b}{ab} = \dfrac{-36}{a} + \dfrac{31}{b} = \dfrac{m}{a} + \dfrac{n}{b}$

$$\frac{m + 36}{a} = \frac{31 - n}{b} \quad \text{ゆえに} \quad b(m + 36) = a(31 - n)$$

$a,\ b$ は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$\begin{cases} m + 36 = ak \\ 31 - n = bk \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} m = -36 + 2023k \\ n = 31 - 1742k \end{cases}$$

$1 \leqq n \leqq 2000$ を満たす整数 k は　$k = 0, -1$

よって，求める整数の組 $(m,\ n)$ は

$$\boldsymbol{(m,\ n) = (-36,\ 31),\ (-2059,\ 1773)}$$

(2) p は 3 以上の素数 (奇素数) であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は整数より

$$(p-1)! \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right) \qquad (*)$$

$$= (p-1)! \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k}\right) = p \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$$

$(p-1)!$ は $k,\ p-k$ を因数にもつから，$\dfrac{(p-1)!}{k(p-k)}$ は整数である．

よって，$(*)$ は p の倍数である．

2024年1月13日 (土)

九大理系 2015 年

以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3) p，q を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす p，q の組をすべて求めよ。

解答　(1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n-1\equiv 4^{\frac{n}{2}}-1\equiv 1^{\frac{n}{2}}-1\equiv 0 \pmod 3$$

よって，2^n-1 は 3 の倍数である．

(2) n が自然数のとき，2^n-1 は奇数である．

i) $n=1$ のとき，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である．

ii) $n\geqq 2$ のとき

$$2^n+1=1(2^n-1)+2$$

上式より，2^n+1 を 2^n-1 で割った余りは 2.
2^n-1 を 2 で割った余りは 1 であるから，ユークリッドの互除法により，2^n+1 と 2^n-1 の最大公約数は 1 である．

よって，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である．

(3) $2^{p-1}-1=pq^2$　(p, q は異なる素数)　$\cdots(*)$

$(*)$ について，$p=2$ のとき　　$1=2q^2$

これを満たす素数 q は存在しない．

$p\neq 2$ となり，p は奇素数であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数である．

(1) の結果から，$2^{p-1}-1$ は 3 の倍数であるから，pq^2 は 3 を因数にもつ．

i) $p=3$ のとき，$(*)$ より　　$3=3q^2$

q は素数であるから，不適．

ii) $q=3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{p-1}-1=9p \quad \text{ゆえに} \quad (2^{\frac{p-1}{2}}+1)(2^{\frac{p-1}{2}}-1)=9p$$

i) より，奇素数 p は $p\geqq 5$ であること，(2) の結果から，$2^{\frac{p-1}{2}}+1$ と $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ は互いに素であることに注意して

$$\text{(A)}\begin{cases}2^{\frac{p-1}{2}}+1=9\\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1=p\end{cases}\quad \text{または}\quad \text{(B)}\begin{cases}2^{\frac{p-1}{2}}+1=p\\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1=9\end{cases}$$

(A) を解いて，$p=7$.　(B) の第 2 式を満たす奇素数 p は存在しない．

よって　　$\boldsymbol{(p,\ q)=(7,\ 3)}$

2024年1月14日 (日)

九大理系 2015 年

袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から1個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉1個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる。袋に入っている3個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を1枚もらう。

(1) 2回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3) 8回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4) 8回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど1枚である確率を求めよ。

解答 (1) 求める確率は，2 回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2) 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

(3) 偶数回目の操作で青玉の個数は 1 個または 3 個である．青玉 1 個の状態からその後の 2 回目の操作で青玉が 1 個となる確率を p とすると

$$p = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{7}{9}$$

8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p) = p^3(1-p) = \left(\frac{7}{9}\right)^3 \frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{686}{6561}}$$

(4) 青玉 3 個の状態から，2 回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$(1-p)qpp = p^2(1-p)q$$

4 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$p(1-p)qp = p^2(1-p)q$$

6 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$pp(1-p)q = p^2(1-p)q$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} 3 \times p^2(1-p)q + p^3(1-p) &= 2p^2(1-p) + p^3(1-p) \\ &= p^2(1-p)(2+p) \\ &= \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{25}{9} = \boldsymbol{\frac{2450}{6561}} \end{aligned}$$

2024年1月15日(月)

名大文系2003年

n を自然数とするとき，$m \leqq n$ で m と n の最大公約数が1となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする．

(1) $f(15)$ を求めよ．

(2) $p,\ q$ を互いに異なる素数とする．このとき $f(pq)$ を求めよ．

解答 (1) 15と互いに素である数は

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13,\ 14$$

の8個であるから $\quad \boldsymbol{f(15)=8}$

別解 15以下の自然数について，$15=3\times5$ より

$$3\text{の倍数の個数は}\quad \frac{15}{3}$$
$$5\text{の倍数の個数は}\quad \frac{15}{5}$$
$$15\text{の倍数の個数は}\quad \frac{15}{15}$$

よって

$$f(15)=15-\frac{15}{3}-\frac{15}{5}+\frac{15}{15}=\boldsymbol{8}$$

(2) pq 以下の自然数について

$$p\text{の倍数の個数は}\quad \frac{pq}{p}$$
$$q\text{の倍数の個数は}\quad \frac{pq}{q}$$
$$pq\text{の倍数の個数は}\quad \frac{pq}{pq}$$

よって

$$f(pq)=pq-\frac{pq}{p}-\frac{pq}{q}+\frac{pq}{pq}=\boldsymbol{(p-1)(q-1)}$$

補足 1から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または φ 関数 (phi function) という[8]．本題は，これに因んだ出題である．

[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (pp.4-8)

2024年1月16日 (火)

一橋大 2015 年

n を 2 以上の整数とする．n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す．たとえば

$$E(2)=1,\quad E(3)=2,\quad E(4)=2,\quad \cdots,\quad E(10)=4,\quad \cdots$$

である．

(1) $E(1024)$ を求めよ．

(2) $E(2015)$ を求めよ．

(3) m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする．$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n}\geqq\dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ．

解答 (1) $1024=2^{10}$ であるから $\quad E(1024)=1024\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{512}$

(2) $2015=5\times13\times31$ であるから

$$\begin{aligned}E(2015)&=2015-\left(\frac{2015}{5}+\frac{2015}{13}+\frac{2015}{31}\right.\\&\qquad\left.-\frac{2015}{5\cdot13}-\frac{2015}{13\cdot31}-\frac{2015}{31\cdot5}+\frac{2015}{5\cdot13\cdot31}\right)\\&=2015\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{31}\right)\\&=4\times12\times30=\mathbf{1440}\end{aligned}$$

(3) $n = p^m q^m$ であるから

$$E(n) = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{p \cdot q}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

したがって $\quad \dfrac{E(n)}{n} = \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\left(1 - \dfrac{1}{q}\right)$

p，q は異なる素数であるから，一般性を失うことなく $p < q$ とすると

$$p \geqq 2, \quad q \geqq 3$$

であるから

$$1 - \frac{1}{p} \geqq \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{1}{q} \geqq \frac{2}{3}$$

よって $\quad \dfrac{E(n)}{n} = \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\left(1 - \dfrac{1}{q}\right) \geqq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

補足 $p_1,\ p_2, \cdots, p_l$ を素数，$k_1,\ k_2, \cdots, k_l$ を正の整数とすると

$$n = {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} \cdots {p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$E(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right)$$

本題の $E(n)$ はオイラー (Euler) の $\varphi(n)$ 関数である [9]．

[9] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf [1] を参照．

2024年1月17日 (水)

佐賀大 2017 年

1 から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を $\varphi(n)$ とする．ただし，自然数 a と b が互いに素であるとは，a と b の最大公約数が 1 になることである．

(1) $\varphi(10)$ を求めよ．

(2) p を素数，k を自然数とするとき，$\varphi(p^k)$ を求めよ．

(3) $\varphi(100)$ を求めよ．

(4) $\varphi(1500)$ を求めよ．

解答　(1) 1 から 10 までの自然数のうち，10 と互いに素である数は

$$1,\ \ 3,\ \ 7,\ \ 9$$

よって　　$\boldsymbol{\varphi(10) = 4}$

(2) 1 から p^k までの自然数のうち (p は素数)，p^k と互いに素でない数は，p の倍数の $\dfrac{p^k}{p}$ 個であるから

$$\varphi(p^k) = p^k - \frac{p^k}{p} = \boldsymbol{p^k - p^{k-1}}$$

(3) $100 = 2^2 \times 5^2$

1 から 100 までの自然数の中で，2 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ A, B とすると

$$n(A) = \frac{100}{2} = 50, \quad n(B) = \frac{100}{5} = 20, \quad n(A \cap B) = \frac{100}{10} = 10$$

ゆえに　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 50 + 20 - 10 = 60$

よって　$\varphi(100) = 100 - n(A \cup B) = 100 - 60 = \boldsymbol{40}$

(4) $1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$

1 から 1500 までの自然数の中で，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ X，Y，Z とすると

$$n(X) = \frac{1500}{2} = 750, \quad n(Y) = \frac{1500}{3} = 500, \quad n(Z) = \frac{1500}{5} = 300$$
$$n(X \cap Y) = \frac{1500}{6} = 250, \quad n(Y \cap Z) = \frac{1500}{15} = 100$$
$$n(Z \cap X) = \frac{1500}{10} = 150, \quad n(X \cap Y \cap Z) = \frac{1500}{30} = 50$$

したがって

$$\begin{aligned} n(X \cup Y \cup Z) &= n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(Y \cap Z) \\ &\qquad - n(Z \cap X) + n(X \cap Y \cap Z) \\ &= 750 + 500 + 300 - 250 - 100 - 150 + 50 = 1100 \end{aligned}$$

よって　　$\varphi(1500) = 1500 - n(X \cup Y \cup Z) = 1500 - 1100 = \boldsymbol{400}$

解説

1 から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または φ 関数 (phi function) という．(2) の結果から，p を素数，k を自然数とするとき，次式が成り立つ．

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

定理 1

p，q を素数，k，l を自然数，$n = p^k q^l$ とするとき

$$\varphi(n) = \varphi(p^k)\varphi(q^l) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

証明 1 から n までの自然数のうちで，p，q，pq で割り切れる個数は，それぞれ $\dfrac{n}{p}$，$\dfrac{n}{q}$，$\dfrac{n}{pq}$ であるから，p または q で割り切れる個数は

$$\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq}$$

よって
$$\varphi(n) = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$
$$= p^k q^l\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \varphi(p^k)\varphi(q^l)$$

証終

補題 $\varphi(90) = \varphi(9)\varphi(10)$ を示せ．

証明 10 行 9 列の数の並びについて，第 i 行第 j 列を $9i + 10j$ とすると，次のページの表 1 のようになる．また，$9i + 10j$ を 90 で割った余り (ただし割り切れるときは，便宜上 90 とする) を求めると，表 2 のようになる．

表 2 からもわかるように，$9i + 10j$ $(1 \leqq i \leqq 10,\ 1 \leqq j \leqq 9)$ の値は，法 90 について，どの 2 つも合同ではない．仮に，$1 \leqq i, i' \leqq 10,\ 1 \leqq j, j' \leqq 9$ に対して

$$9i + 10j \equiv 9i' + 10j' \quad \text{すなわち} \quad 9(i - i') \equiv 10(j' - j) \pmod{90}$$

が成立するとき
$$9(i - i') \equiv 0 \pmod{10}$$
$$10(j' - j) \equiv 0 \pmod{9}$$

$-9 \leqq i - i' \leqq 9$，$-8 \leqq j' - j \leqq 8$ であるから　$i = i'$，　$j = j'$

したがって，表 2 には，1 から 90 までの自然数が 90 個並ぶ．

$9i + 10j$ の値 (表 1)

i \ j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	19	29	39	49	59	69	79	89	99
2	28	38	48	58	68	78	88	98	108
3	37	47	57	67	77	87	97	107	117
4	46	56	66	76	86	96	106	116	126
5	55	65	75	85	95	105	115	125	135
6	64	74	84	94	104	114	124	134	144
7	73	83	93	103	113	123	133	143	153
8	82	92	102	112	122	132	142	152	162
9	91	101	111	121	131	141	151	161	171
10	100	110	120	130	140	150	160	170	180

$9i + 10j$ を 90 で割った余り (表 2)

i \ j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	19	29	39	49	59	69	79	89	9
2	28	38	48	58	68	78	88	8	18
3	37	47	57	67	77	87	7	17	27
4	46	56	66	76	86	6	16	26	36
5	55	65	75	85	5	15	25	35	45
6	64	74	84	4	14	24	34	44	54
7	73	83	3	13	23	33	43	53	63
8	82	2	12	22	32	42	52	62	72
9	1	11	21	31	41	51	61	71	81
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90

$90 = 9 \times 10$ で 9 と 10 は互いに素であるから，1 から 90 までの自然数のうち，90 と互いに素である数は 9 または 10 と互いに素である．

表 2 の 1 から 90 までの自然数のうち，9 と互いに素でない数は，すべて 3 列目，6 列目，9 列目に並び，それ以外の列数は $\varphi(9)$．また，1 から 90 までの自然数のうち，10 と互いに素でない数は，すべて 2 行目，4 行目，5 行目，6 行目，8 行目，10 行目に並び，それ以外の行数は $\varphi(10)$．そこで，これらの数を除いた，すなわち互いに素であるものを残したものが左下の表である．さらに，これらの数の間を詰めて並べたものが右下の表で，数字が書かれた列数は $\varphi(9)$，数字が書かれた行数は $\varphi(10)$．

よって，$\varphi(90) = \varphi(9)\varphi(10)$ が成り立つ．

19	29		49	59		79	89	
37	47		67	77		7	17	
73	83		13	23		43	53	
1	11		31	41		61	71	

19	29	49	59	79	89			
37	47	67	77	7	17			
73	83	13	23	43	53			
1	11	31	41	61	71			

証終

補題の証明を一般化することにより，次の定理を得る．

定理 2

自然数 m，n が互いに素であるとき，次式が成り立つ．

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

定理 3

$p_1,\ p_2,\cdots,p_l$ を素数，$k_1,\ k_2,\cdots,k_l$ を自然数とすると

$$n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

証明 定理 2 の乗法的性質を用いると

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi({p_1}^{k_1})\varphi({p_2}^{k_2})\cdots\varphi({p_l}^{k_l})\\ &= {p_1}^{k_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right){p_2}^{k_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots{p_l}^{k_l}\left(1-\frac{1}{p_l}\right)\\ &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)\end{aligned}$$

証終

定理 4 フェルマー・オイラーの定理 (Fermat-Euler Theorem)

自然数 n と互いに素である自然数 a について，次式が成り立つ．

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

証明 n 以下の自然数で n と互いに素である数を

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_{\varphi(n)} \tag{1}$$

とする．これらに n と互いに素である自然数 a を掛けた数

$$ar_1,\ ar_2,\ \cdots,\ ar_{\varphi(n)} \tag{2}$$

は，どの 2 つも法 n について合同でない．$ar_i \equiv ar_j$ と仮定すると，$a(r_i - r_j) \equiv 0$ より，$r_i \equiv r_j$．ゆえに，法 n に関して，(1) と (2) は順序を無視すると一致する．したがって，(1) をすべて掛け合わせたものと (2) をすべて掛け合わせたものは合同である．すなわち

$$\begin{aligned} & a^{\varphi(n)}r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)} \equiv r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)} && \pmod{n}\\ \text{ゆえに}\quad & r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)}(a^{\varphi(n)}-1) \equiv 0 && \pmod{n}\\ \text{よって}\quad & a^{\varphi(n)} \equiv 1 && \pmod{n}\end{aligned}$$

とくに，n が素数 p のとき (フェルマーの小定理) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ **証終**

定理 5

自然数 n と互いに素である自然数 a について

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数 e(**位数**) は，$\varphi(n)$ の約数である．

証明 $\varphi(n)$ が e で割り切れないと仮定し，$\varphi(n)$ を e で割った商を q，余りを r とすると

$$\varphi(n) = eq + r \quad (0 < r < e)$$

したがって $$a^{\varphi(n)} = a^{eq+r} = (a^e)^q a^r$$

$a^{\varphi(n)} \equiv 1$，$a^e \equiv 1 \pmod{n}$ であるから

$$a^r \equiv 1 \pmod{n}$$

これは，e の最小性に反する． **証終**

例 1 素数 13 を法とする剰余系から 0 を除いた数 n の位数 e を調べる．

n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}	n^{11}	n^{12}
1											1
2	4	8	3	**6**	12	**11**	9	5	10	**7**	1
3	9	1									1
4	3	12	9	10	1						1
5	12	8	1								1
6	10	8	9	**2**	12	**7**	3	5	4	**11**	1
7	10	5	9	**11**	12	**6**	3	8	4	**2**	1
8	12	5	1								1
9	3	1									1
10	9	12	3	4	1						1
11	4	5	3	**7**	12	**2**	9	8	10	**6**	1
12	1										1

したがって

n	1	**2**	3	4	5	**6**	**7**	8	9	10	**11**	12
e	1	12	3	6	4	12	12	4	3	6	12	2

これらの位数は $\varphi(13) = 12$ の約数である．

素数 p について，$a^e \equiv 1$ となる位数 e が $p-1$ に等しいとき，a を法 p の**原始根**という．このとき

$$1,\ a,\ a^2,\ \cdots,\ a^{p-2}$$

は法 p に関して，どの 2 つも合同ではない．

実際，$1 \leqq i < j \leqq p-1$ のとき $a^i \equiv a^j \pmod{p}$ とすると

$$a^i(a^{j-i}-1) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad a^{j-i} \equiv 1 \pmod{p}$$

$1 \leqq j-i \leqq p-2$ であるから，a が法 p の原始根であることに反する． ■

余談 時計の長針が 12 時を指しているとき k 時間ごとに時刻を確認するとき，k が 12 と互いに素である，すなわち，$k = 1,\ 5,\ 7,\ 11$ のとき，長針が 1〜12 のすべての時刻を指すことを経験的に知っている．

九九の計算で，10 と互いに素である 1，3，7，9 の段の答が法 10 に関する剰余系をなすことを知っている (一位の数に 1〜9 までのすべての数が現れる)．

整数の集合を法 m に関して合同であるものを分類すると，m 個の類 (クラス) に分かれる．これらの類を**剰余類**といい，この各類から一つずつ元を取り出した組を**剰余系**という．例えば，$m = 5$ のとき，$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$\{5,\ 6,\ 7, -2, -1\}$ などがその剰余系をなす．法 m に関する剰余類のうち，m と互いに素である剰余類を**既約剰余類**という．例えば，$m = 12$ のとき，$\{1,\ 5,\ 7,\ 11\}$ はその**既約剰余系**をなす．

例 1 の結果から，13 の原始根は 2，6，7，11 である．13 の原始根の一つを a とすると，a は例 1 の表の n，n^5，n^7，n^{11} の列に現れる．a が n^5 の列にあるとき

$$\{n^5,\ (n^5)^2,\ (n^5)^3,\ (n^5)^4,\ (n^5)^5,\ (n^5)^6,\ (n^5)^7,\ (n^5)^8,\ (n^5)^9,\ (n^5)^{10},\ (n^5)^{11}\}$$

このとき，$n^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ であるから，次のとおり，a は

$$\{n^5,\ n^{10},\ n^3,\ n^8,\ n,\ n^6,\ n^{11},\ n^4,\ n^9,\ n^2,\ n^7,\ 1\}$$

仮に a が例 1 の表の n^3 の列にあるとすると

$$\{n^3,\ (n^3)^2,\ (n^3)^3,\ (n^3)^4,\ (n^3)^5,\ (n^3)^6,\ (n^3)^7,\ (n^3)^8,\ (n^3)^9,\ (n^3)^{10},\ (n^3)^{11}\}$$

このとき，$\{1,\ n^3,\ n^6,\ n^9\}$ となり，a が原始根であることに反する．

n	n^5	n^7	n^{11}
2	6	11	7
6	2	7	11
7	11	6	2
11	7	2	6

素数 13 の原始根の個数は，例 1 の表の n^7，n^{11} の列にある元の個数で，$13-1=12$ の既約剰余系の元の個数である．一般に，素数 p の原始根の個数は $\varphi(p-1)$ に等しい．

2024年1月18日 (木)

広大理系 2016 年

数列

$$x_n = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を考える．この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, $\cdots$ であるが，各項の下 1 桁をみると，1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, $\cdots$ となっており，2 から循環が始まり循環の周期は 4 である．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は，あるところから循環する．循環が始まるところと，循環の周期を求めよ．ここで，1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすことにする．たとえば，2 の下 2 桁は 02 とする．

(2) 4 の倍数で，25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ．

(3) 8 の倍数で，125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ．

(4) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は，あるところから循環する．循環が始まるところと，循環の周期を求めよ．ここで，2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい．

解答 (1) $x_n = 2^n$ の下 2 桁は，次のようになる．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_n	02	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
x_n	96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

よって，**04** から循環が始まり循環の周期は **20** である．

(2) 25 で割って 1 余る 2 桁の数は　26, 51, 76

A は 4 の倍数であるから　　$\boldsymbol{A = 76}$

別解 $4x \equiv 1 \pmod{25}$ を満たす整数 x は

$$24x \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad -x \equiv 6 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv -6 \pmod{25}$$

$x = 25k - 6$ であるから (k は整数)　$4x = 100k - 24$

A は 2 桁の自然数であるから，$k = 1$ を代入して　$\boldsymbol{A = 76}$

(3) 125 で割って 1 余る 3 桁の自然数は

$$126,\ 251,\ 376,\ 501,\ 626,\ 751,\ 876$$

B は 8 の倍数であるから　　$\boldsymbol{B = 376}$

別解 $8y \equiv 1 \pmod{125}$ を満たす整数 y は

$$120y \equiv 15 \quad \text{ゆえに} \quad -5y \equiv 15 \pmod{125}$$

$24y \equiv 3,\quad -25y \equiv 75 \pmod{125}$ であるから

$$24y - 25y \equiv 3 + 75 \quad \text{ゆえに} \quad y \equiv -78 \pmod{125}$$

$y = 125j - 78$ であるから (j は整数)　$8y = 1000j - 624$

B は 3 桁の自然数であるから，$j = 1$ を代入して　$\boldsymbol{B = 376}$

(4) 循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 m に対して

$$2^{m+e} - 2^m = 1000M \ (M \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad 2^{m-3}(2^e - 1) = 125M$$

2^{m-3} は整数であるから，これを満たす最小の m は　3

したがって，循環の始まりは　2^3　すなわち　**008**

$2^e - 1$ は 125 で割り切れるから　　$2^e \equiv 1 \pmod{125}$

これを満たす最小の自然数 e は 100 であるから，求める周期は　**100**

解説

1 から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または φ 関数 (phi function) といい，以下の定理が成り立つ．

定理 1

$p_1,\ p_2, \cdots, p_l$ を素数，$k_1,\ k_2, \cdots, k_l$ を自然数とすると

$$n = {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} \cdots {p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_l}\right)$$

フェルマー・オイラーの定理 (Fermat-Euler Theorem)

自然数 n と互いに素である自然数 a について，次式が成り立つ．

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

証明 http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6 を参照)．

定理 2

自然数 n と互いに素である自然数 a について

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数 e(位数) は，$\varphi(n)$ の約数である．

証明 $\varphi(n)$ が e で割り切れないと仮定し，$\varphi(n)$ を e で割った商を q，余りを r とすると

$$\varphi(n) = eq + r \quad (0 < r < e)$$

したがって $\qquad a^{\varphi(n)} = a^{eq+r} = (a^e)^q a^r$

$a^{\varphi(n)} \equiv 1$，$a^e \equiv 1 \pmod{n}$ であるから

$$a^r \equiv 1 \pmod{n}$$

これは，e が位数であることに反する． **証終**

別解 (1)

循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 n に対して

$$2^{n+e}-2^n=100N\ (N\text{ は整数})\quad \text{ゆえに}\quad 2^{n-2}(2^e-1)=25N$$

2^{n-2} は整数であるから，これを満たす最小の n は　2
したがって，循環の始まりは　2^2　すなわち　**04**
2^e-1 は 25 で割り切れるから　　$2^e\equiv 1\pmod{25}$　$\cdots$①
$25=5^2$ より，$\varphi(25)=25\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=20$ であるから，フェルマー・オイラーの定理により

$$2^{20}\equiv 1\pmod{25}$$

① を満たす最小の自然数 e(位数) は，20 の約数であるから，法 25 について

$$2^1\equiv 2,\quad 2^2\equiv 4,\quad 2^4\equiv 16,\quad 2^5\equiv 7,\quad 2^{10}\equiv 7^2\equiv -1$$

よって，求める周期 (位数) は　　**20**

別解 (4)

循環の周期を e とすると (e は自然数)，整数 m に対して

$$2^{m+e}-2^m=1000M\ (M\text{ は整数})\quad \text{ゆえに}\quad 2^{m-3}(2^e-1)=125M$$

2^{m-3} は整数であるから，これを満たす最小の m は　3
したがって，循環の始まりは　2^3　すなわち　**008**
2^e-1 は 125 で割り切れるから　　$2^e\equiv 1\pmod{125}$　$\cdots$②
$125=5^3$ より，$\varphi(125)=125\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=100$ であるから，フェルマー・オイラーの定理により

$$2^{100}\equiv 1\pmod{125}$$

② を満たす最小の自然数 e(位数) は，100 の約数であるから，法 125 について

$$\begin{aligned}&2^1\equiv 2,\quad 2^2\equiv 4,\quad 2^4\equiv 16,\quad 2^5\equiv 32,\\&2^{10}\equiv 32^2\equiv 1024\equiv 24,\quad 2^{20}\equiv 24^2\equiv 576\equiv -24,\\&2^{25}\equiv -24\cdot 32\equiv -768\equiv -43,\quad 2^{50}\equiv (-43)^2\equiv 1849\equiv -1\end{aligned}$$

よって，求める周期 (位数) は　　**100**

2024年1月19日 (金)

p が素数のとき

$$\varphi(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1$$

整数 a が p と互いに素であるとき，フェルマー・オイラーの定理から次が成り立つ．

フェルマーの小定理

p を素数，a と p が互いに素であるとき

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

証明 p を素数とする．2項定理により

$$(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{j=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_j a^{p-j} b^j$$

${}_p\mathrm{C}_j$ $(1 \leqq j \leqq p-1)$ は p の倍数であるから，a，b が整数であるとき

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

上式から

$$a^p \equiv (\overbrace{1+1+\cdots+1}^{a\text{ 個}})^p \equiv \overbrace{1^p+1^p+\cdots+1^p}^{a\text{ 個}} \equiv a \pmod{p}$$

したがって

$$a(a^{p-1}-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

a と p は互いに素であるから

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{よって} \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

証終

2024年1月20日 (土)

拡縮を用いた求積法

楕円は円を拡縮したものであることに着目する.

2021年 大分大

曲線 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ が2点 $\mathrm{A}(\sqrt{6},\ 6k)$, $\mathrm{B}(3,\ 3\sqrt{2}k)$ を通る. ただし, $a>0$, $b>0$, $k>0$ とする.

(1) a の値を求め, b を k を用いて表しなさい.

(2) 原点Oと点Aを通る直線 ℓ_1, 曲線 C, および x 軸で囲まれた図形の面積を k を用いて表しなさい.

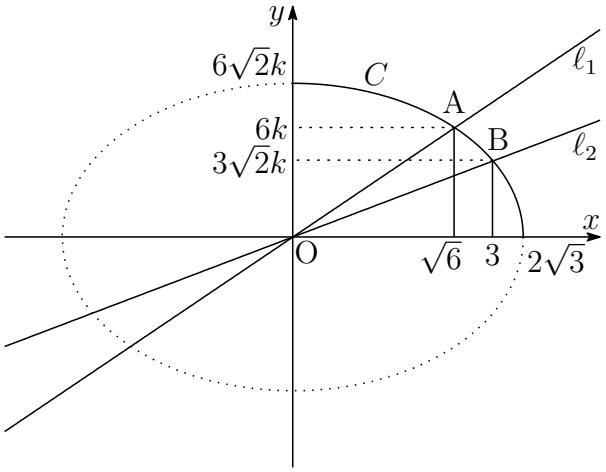
(3) 原点Oと点Bを通る直線 ℓ_2, 曲線 C, および x 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を k を用いて表しなさい.

解答 (1) 2点 $\mathrm{A}(\sqrt{6},\ 6k)$, $\mathrm{B}(3,\ 3\sqrt{2}k)$ は曲線 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ 上の点であるから $(a>0,\ b>0,\ k>0)$

$$\frac{6}{a^2}+\frac{36k^2}{b^2}=1, \quad \frac{9}{a^2}+\frac{18k^2}{b^2}=1$$

上の2式から $a^2=12,\ b^2=72k^2$ よって $\boldsymbol{a=2\sqrt{3},\ b=6\sqrt{2}k}$

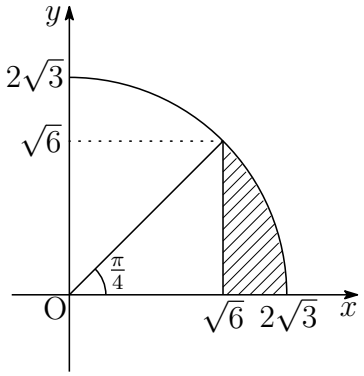
(2) (1)の結果から $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{72k^2}=1$ ゆえに $y=\sqrt{6}k\sqrt{12-x^2}$



求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 6k+\sqrt{6}k\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx$$

$\displaystyle\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積に等しいから



$$\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\sqrt{6})^2$$
$$= \frac{3}{2}\pi - 3$$

よって，求める面積は

$$S = 3\sqrt{6}k + \sqrt{6}k\left(\frac{3}{2}\pi - 3\right) = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{6}k\pi}$$

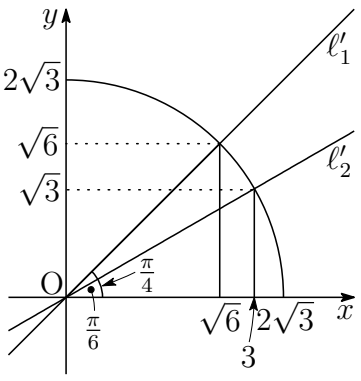
(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{2}k)^2\cdot 3 + \pi\int_3^{3\sqrt{2}} (\sqrt{6}k\sqrt{12-x^2})^2\,dx$$
$$= 18k^2\pi + 6k^2\pi\int_3^{3\sqrt{2}} (12-x^2)\,dx$$
$$= 18k^2\pi + 6k^2\pi\left[\,12x - \frac{x^3}{3}\,\right]_3^{3\sqrt{2}} = \boldsymbol{48(2\sqrt{3}-3)k^2\pi}$$

補足 $C,\ \ell_1,\ \ell_2$ を x 軸を元に，y 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{6}k}$ 倍に拡大したものを，それぞれ $C',\ \ell_1',\ \ell_2'$ とすると

$$C' : x^2+y^2 = 12\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0) \quad \ell_1' : y = x, \quad \ell_2' : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$\ell_1',\ \ell_2'$ の偏角はそれぞれ $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{6}$ である (これらの偏角がいわゆる有名角となるように作問されているため，本題の面積や回転体の体積を高校数学の範囲で求めることができる)．$\ell_1',\ C'$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S' とし，$\ell_2',\ C'$ および x で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V' とすると



$$S' = \frac{1}{2}\pi(2\sqrt{3})^2\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$$
$$V' = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2\cdot 3 + \pi\int_3^{2\sqrt{3}} (12-x^2)\,dx$$
$$= 8\pi(2\sqrt{3}-3)$$

よって　$S = \sqrt{6}kS', \quad V = (\sqrt{6}k)^2V'$

2024年1月21日(日)

2015年 大分大

曲線 $C : 4x^2+9y^2=36\ (x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ が第1象限にある．点Pにおける曲線 C の接線を ℓ とする．

(1) y_1 の値を求めなさい．

(2) 接線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標を求めなさい．

(4) 曲線 C，接線 ℓ，x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

解答　(1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ は $C : 4x^2+9y^2=36$ 上の点であるから

$$4\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+{y_1}^2=36 \quad \text{ゆえに} \quad {y_1}^2=1$$

Pは第1象限にあるから，$y_1>0$ に注意して　$\boldsymbol{y_1=1}$

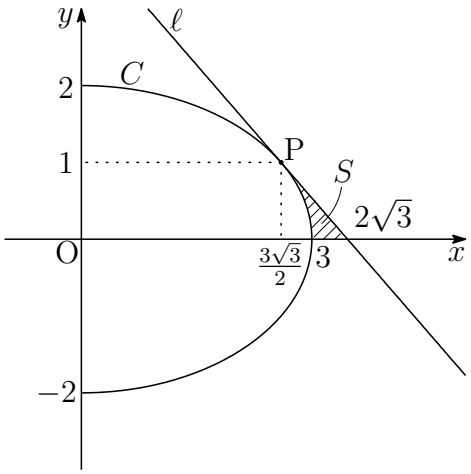
(2) (1)の結果から，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$ における C の接線 ℓ は

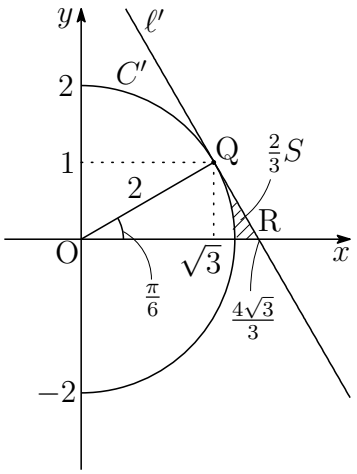
$$4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}x+9\cdot 1y=36 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{2\sqrt{3}x+3y=12}$$

(3) (2)で求めた ℓ の方程式に $y=0$ を代入すると

$$2\sqrt{3}x=12 \qquad \text{よって，求める } x \text{ 座標は} \qquad \boldsymbol{x=2\sqrt{3}}$$

(4) 曲線 C および接線 ℓ を y 軸をもとに x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ だけ縮小したものを，それぞれ C'，ℓ' とすると，C'，ℓ'，x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{2}{3}S$ である．





したがって，右上の図から

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S &= \triangle \mathrm{OQR} - \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot 1 - \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}}$

2006 年 九工大 [工]

$m > 0$ とする．曲線 $C : x^2 + 3y^2 = 3$ $(x \geqq 0)$ と直線 $L_m : y = mx - 1$ の 2 つの共有点を $\mathrm{A}(0, -1)$，$\mathrm{B}_m(p,\ q)$ とおく．次に答えよ．

(1) p，q を m を用いて表せ．

(2) 2 点 A，B_m の間の距離を $f(m)$ とする．$f(m)$ の最大値とそのときの m の値 m_0 を求めよ．

(3) (2) で求めた m_0 に対して，曲線 C と線分 AB_m の囲む図形の面積 S を求めよ．

解答　(1)　$x^2+3y^2=3\cdots①$，$y=mx-1\cdots②$ から，y を消去すると

$$x^2+3(mx-1)^2=3 \quad \text{したがって} \quad x=0,\ \frac{6m}{m^2+1}$$

ゆえに　$\boldsymbol{p=\dfrac{6m}{3m^2+1}}$　　これを ② に代入して　$\boldsymbol{q=\dfrac{3m^2-1}{3m^2+1}}$

(2)　(1) の結果から

$$\{f(m)\}^2=\left(\frac{6m}{3m^2+1}\right)^2+\left(\frac{3m^2-1}{3m^2+1}-1\right)^2=\frac{(6m)^2+(6m^2)^2}{(3m^2+1)^2}$$
$$=\frac{-8+4(3m^2+1)+4(3m^2+1)^2}{(3m^2+1)^2}$$

$t=\dfrac{1}{3m^2+1}$，$g(t)=\{f(m)\}^2$ とおくと $\left(0<t<\dfrac{1}{3}\right)$

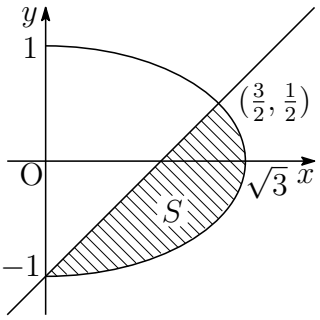
$$g(t)=-8t^2+4t+4=-8\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{2}$$

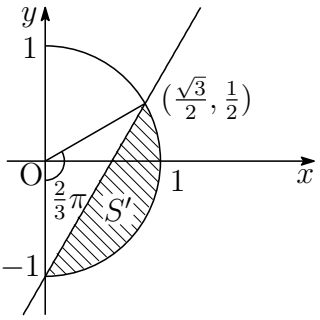
したがって，$g(t)$ は，$t=\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{2}$ をとるから，$f(m)$ は

$$\frac{1}{3m^2+1}=\frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad m=1 \text{ のとき最大}$$

よって　$f(m)$ の**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$，$\boldsymbol{m_0=1}$

(3)　(1)，(2) の結果から，求める図形の面積を S とし (左下の図)，これを y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍縮小した図形の面積を S' とする (右下の図).





したがって　　$S'=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\cdot1^2\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

よって　　$S=\sqrt{3}\,S'=\sqrt{3}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi-\dfrac{3}{4}}$

2024年1月22日(月)

2016年 九工大 [工]

$a<0$，bを実数とする．楕円$C:x^2+4y^2=4$と直線$l:y=ax+b$が異なる2個の共有点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$を持つとし，lに平行な直線mが第1象限の点AにおいてCと接しているとする．次に答えよ．

(1) bの値の範囲をaを用いて表せ．

(2) 直線mの方程式をaを用いて表せ．

(3) x_2-x_1をa，bを用いて表せ．

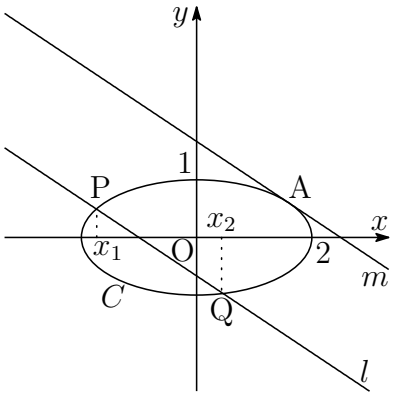
(4) 三角形APQの面積Sをa，bを用いて表せ．

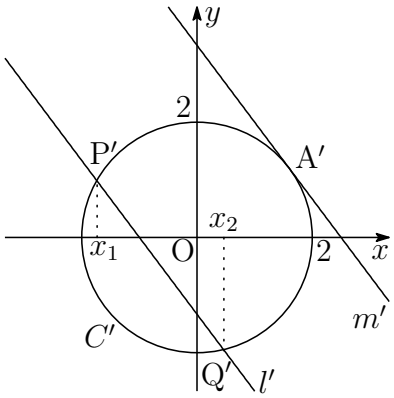
(5) bが(1)で求めた範囲を動くとき，(4)で求めたSの最大値を求めよ．

解答　(1) C，lをx軸をもとにy軸方向に2倍に拡大した図形をそれぞれ

$$C':x^2+y^2=4,\quad l':2ax-y+2b=0$$

とする．また，これらの曲線上に2点$\mathrm{P}'(x_1,\ 2y_1)$，$\mathrm{Q}'(x_2,\ 2y_2)$をとる．





l'とC'が異なる2個の共有点を持てばよいので

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}<2\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{-\sqrt{4a^2+1}<b<\sqrt{4a^2+1}}$$

(2) l'に平行な直線m'が第1象限の点A'においてC'と接しているとする．
このとき，(1)と同様にして

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}=2\qquad\text{ゆえに}\quad |b|=\sqrt{4a^2+1}$$

bの符号に注意して　$b=\sqrt{4a^2+1}$　$\cdots$①　よって　$\boldsymbol{y=ax+\sqrt{4a^2+1}}$

(3) C' と l' の方程式から y を消去すると　$x^2+(2ax+2b)^2=4$

すなわち　　$(4a^2+1)x^2+8abx+4b^2-4=0 \quad \cdots(*)$

方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$x_1+x_2=-\frac{8ab}{4a^2+1},\quad x_1x_2=\frac{4b^2-4}{4a^2+1} \quad \cdots(**)$$

したがって　　$(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$$=\left(-\frac{8ab}{4a^2+1}\right)^2-4\times\frac{4b^2-4}{4a^2+1}$$

$$=\frac{16(4a^2-b^2+1)}{(4a^2+1)^2}$$

$x_1<x_2$ および (1) の結果に注意して　$\boldsymbol{x_2-x_1=\dfrac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}}$

(4) (2) の結果から，m' の方程式は　$y=2ax+2\sqrt{4a^2+1} \quad \cdots$②

A$'$ の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，x_0 は $(*)$ の重解である．

このとき，① に注意して

$$x_0=-\frac{8ab}{2(4a^2+1)}=-\frac{8a\sqrt{4a^2+1}}{2(4a^2+1)}=-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}$$

これを ② に代入することにより

$$y_0=2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}\right)+2\sqrt{4a^2+1}=\frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}$$

よって，$\mathrm{A}'\left(-\dfrac{4a}{\sqrt{4a^2+1}},\ \dfrac{2}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$ から直線 $l':2ax-y+2b=0$ までの距離を d とすると，(1) の結果に注意して

$$d=\frac{\left|2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}\right)-\frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}+2b\right|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{2|\sqrt{4a^2+1}-b|}{\sqrt{4a^2+1}}=2\left(1-\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$$

(3) の結果から

$$\mathrm{P'Q'}=\sqrt{1+(2a)^2}\,|x_2-x_1|=\sqrt{4a^2+1}\times\frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}$$

$$=\frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}}=4\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2+1}}$$

したがって

$$\triangle \mathrm{A'P'Q'} = \frac{1}{2}\mathrm{P'Q'}\cdot d = 4\left(1-\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2+1}}$$

$S = \dfrac{1}{2}\triangle \mathrm{A'P'Q'}$ であるから

$$\boldsymbol{S = 2\left(1-\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2+1}}}$$

(5) (1) の結果から，$t = \dfrac{b}{\sqrt{4a^2+1}}$ とすると　$-1 < t < 1$

$f(t) = S^2$ とおくと　　$f(t) = 4(1-t)^2(1-t^2) = -4(t-1)^3(t+1)$

これを微分すると　　$f'(t) = -8(t-1)^2(2t+1)$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大 $\frac{27}{4}$	↘	

よって，求める S の最大値は　$\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

別解 (5) で求めた $f(t)=4(1-t)^3(1+t)$ について，$-1<t<1$ であるから，$1-t>0$，$1+t>0$ より

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\left(\frac{1-t}{3}\right)+\frac{1}{4}(1+t)\geqq\left(\frac{1-t}{3}\right)^{\frac{3}{4}}(1+t)^{\frac{1}{4}}$$

この両辺を 4 乗すると

$$\frac{1}{16}\geqq\frac{(1-t)^3(1+t)}{27}\quad\text{ゆえに}\quad f(t)\leqq\frac{27}{4}$$

上式において，等号が成立するとき

$$\frac{1-t}{3}=1+t\quad\text{すなわち}\quad t=-\frac{1}{2}$$

したがって，$f(t)$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{27}{4}$ をとる．

よって，求める S の最大値は $\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

補足 $1-t$，$1-t$，$1-t$，$3(1+t)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3}{2}=\frac{3(1-t)+3(1+t)}{4}\geqq\sqrt[4]{(1-t)^3\cdot3(1+t)}$$

この両辺を 4 乗すると

$$\frac{81}{16}\geqq3(1-t)^3(1+t)\quad\text{ゆえに}\quad f(t)\leqq\frac{27}{4}$$

上式において，等号が成立するとき　$1-t=3(1+t)$　すなわち　$t=-\dfrac{1}{2}$

参考 S が最大となるとき，△A′P′Q′ は正三角形である．

一般に，円に内接する三角形の面積が最大となる三角形は正三角形である．実際，辺 BC に対し，直線 BC から最も遠くなるように A を取ると面積は最大になる。このとき，△ABC は AB = AC の鋭角二等辺三角形である．円の半径を R とし，$B = C = \theta$ とすると，$A = \pi - 2\theta$．このとき正弦定理により

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2R\sin\theta \quad \cdots ③$$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}(2R\sin\theta)^2\sin(\pi - 2\theta)$

$$= 2R^2\sin^2\theta\sin 2\theta = 4R^2\sin^3\theta\cos\theta$$

$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ であるから

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{\sin^2\theta}{3}\right) + \frac{1}{4}\cos^2\theta \geqq \left(\frac{\sin^2\theta}{3}\right)^{\frac{3}{4}}(\cos^2\theta)^{\frac{1}{4}}$$

両辺を平方して　$\dfrac{1}{16} \geqq \dfrac{\sin^3\theta\cos\theta}{3\sqrt{3}}$　ゆえに　$\sin^3\theta\cos\theta \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

上式において，等号が成立するのは

$$\frac{\sin^2\theta}{3} = \cos^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2\theta = 3 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

このとき $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ となる．したがって，円に内接する三角形は面積が最大となるとき正三角形である．このことに注意すると，二等辺三角形 A′P′Q′ は面積が最大のとき正三角形であるから，$R = 2$ より

$$\mathrm{P'Q'} = 2\sqrt{3}$$

(4) で求めた $\mathrm{P'Q'} = 4\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4a^2+1}}$ と上式により

$$\frac{b^2}{4a^2+1} = \frac{1}{4}$$

A′ は第 1 象限の点であるから，$b > 0$ のとき，二等辺三角形 A′P′Q′ は鈍角三角形である．ゆえに $b < 0$ より

$$\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}} = -\frac{1}{2}$$

2024年1月23日 (火)

2017年 鹿児島大

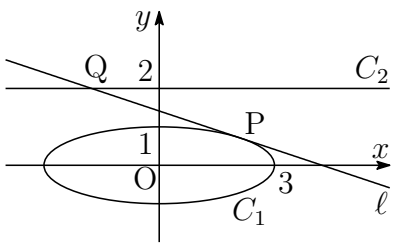
Oを原点とする座標平面において，C_1 を曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}+y^2=1$，C_2 を直線 $y=2$ とする．点Pは第1象限にある C_1 上のある点とし，点Pにおける C_1 の接線を ℓ，この接線 ℓ と C_2 との交点をQとおく．次の各問いに答えよ．

(1) 点Pの座標を $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表すとき，接線 ℓ の方程式，および点Qの座標を θ を用いて求めよ．

(2) △POQの面積を最小にする点Pの座標，および接線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) (2)のとき，曲線 C_1 で囲まれた図形と △POQ との共通部分の面積を求めよ．

解答　(1) $C_1:\dfrac{x^2}{3^2}+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線 ℓ の方程式は



$$\frac{(3\cos\theta)x}{3^2}+(\sin\theta)y=1$$

すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{x\cos\theta}{3}+y\sin\theta=1}$

上式に $y=2$ を代入すると

$$\frac{x\cos\theta}{3}+2\sin\theta=1 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta}$$

よって，点Qの座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta},\ 2\right)}$

(2) 3点O，$\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta},\ 2\right)$ を頂点とする三角形の面積を $f(\theta)$ とすると $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\left|3\cos\theta\cdot 2-\sin\theta\cdot\frac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta}\right|$$
$$=\frac{3}{2\cos\theta}(2-\sin\theta)=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{\cos\theta}-\tan\theta\right)$$

したがって　$f'(\theta)=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)=\dfrac{3(2\sin\theta-1)}{2\cos^2\theta}$

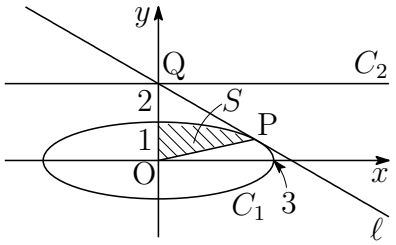
θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	極小	↗	

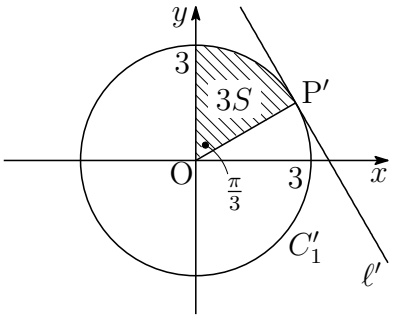
$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$f(\theta)$ は最小となるから，このとき　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$

また，ℓ は (1) の結果から　$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2\sqrt{3}}}+\dfrac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}=\mathbf{1}$

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\mathrm{P}\left(3\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2)$.

求める面積を S とし，C_1 および OP を x 軸を元に y 軸方向に3倍に拡大したものをそれぞれ C_1'，OP′ とすると，$\mathrm{P}'\left(3\cos\dfrac{\pi}{6},\ 3\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.





OP′ と y 軸の正の向きのなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$3S=\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\frac{\pi}{3}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{S=\frac{\pi}{2}}$$

2024年1月24日 (水)

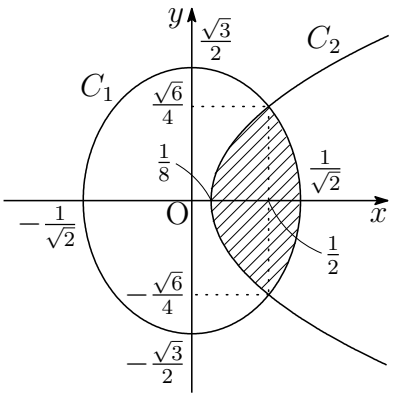
2009年 長崎大

楕円 $C_1 : 6x^2+4y^2=3$ と曲線 $C_2 : 8x-8y^2=1$ について，次の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点において，C_1 と C_2 の接線は直交することを証明せよ．

(2) $x>0$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答 (1) $\begin{cases} 6x^2+4y^2=3 & \cdots ① \\ 8x-8y^2=1 & \cdots ② \end{cases}$



①，② から y^2 を消去すると

$$12x^2+8x-7=0$$
$$(2x-1)(6x+7)=0$$

② より，$x=y^2+\dfrac{1}{8}\geqq\dfrac{1}{8}$ であるから

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$$

したがって，C_1 と C_2 の交点は $\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$

① を x で微分すると $12x+8yy'=0$ すなわち $y'=-\dfrac{3x}{2y}$

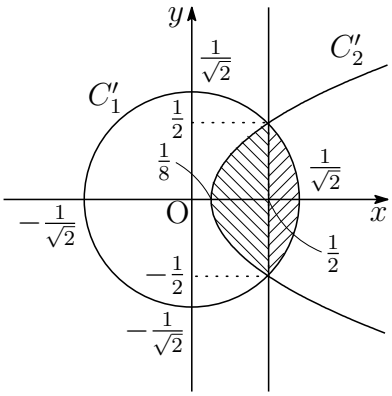
② を x で微分すると $8-16yy'=0$ すなわち $y'=\dfrac{1}{2y}$

C_1，C_2 の交点における接線の傾きを，それぞれ m_1，m_2 とすると

$$m_1m_2=-\frac{3\cdot\frac{1}{2}}{2\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}\times\frac{1}{2\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}=-1$$

よって，C_1 と C_2 の交点において，C_1 と C_2 の接線は直交する．

(2) C_1，C_2 を x 軸をもとに y 軸方向に $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 倍に縮小したものを，それぞれ C_1'，C_2' とすると



$$C_1' : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}, \quad C_2' : x = \frac{3}{2}y^2 + 1$$

C_1' と領域 $x \geqq \dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は

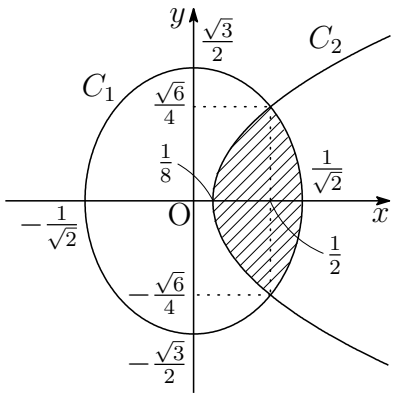
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

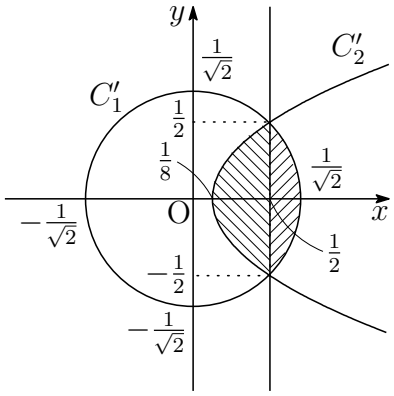
C_2' と領域 $x \leqq \dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は $\quad \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{4}$

よって，求める面積を S とすると

$$S = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\right\} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{16}\pi}$$

確認 $C_1,\ C_2,\ C_1',\ C_2'$ の図は次のようになる．





2024年1月25日 (木)

2020年 宮大医

原点をOとする座標平面上に2つの曲線

$$C_1 : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \ (y \geqq 0), \quad C_2 : \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1 \ (x > 0)$$

がある．C_1 と y 軸との交点をE，C_2 と x 軸との交点をFとする．また，C_1 と C_2 は1点で交わる．その交点をGとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 点Gの座標を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = x\sqrt{x^2-6} - 6\log|x+\sqrt{x^2-6}|$ の導関数を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(3) 2つの曲線 C_1，C_2 および2つの線分OE，OFで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答 (1) $C_1 : \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1 \ (y \geqq 0)$，$C_2 : \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{2} = 1 \ (x > 0)$

上の2式を連立して解くと $\quad x^2 = \dfrac{27}{4}, \ \ y^2 = \dfrac{1}{4}$

$x > 0, \ y \geqq 0$ に注意して $\quad \mathrm{G}\left(\dfrac{\boldsymbol{3\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}, \ \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right)$

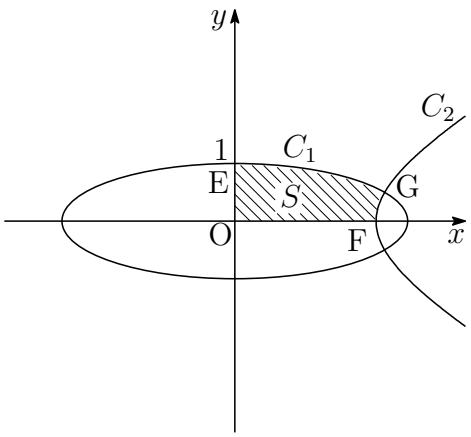
(2) $f(x) = x\sqrt{x^2-6} - 6\log|x+\sqrt{x^2-6}|$ より

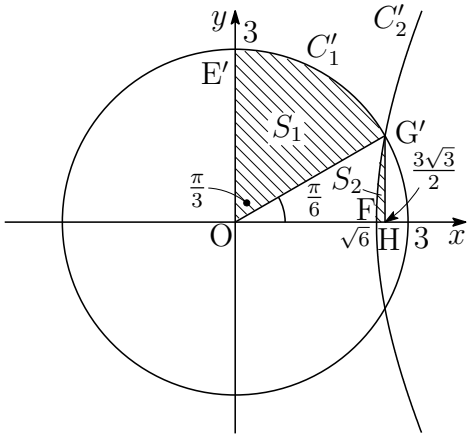
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x^2-6} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-6}} - 6\cdot\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-6}}}{x+\sqrt{x^2-6}} \\ &= \sqrt{x^2-6} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-6}} - \frac{6}{\sqrt{x^2-6}} = \boldsymbol{2\sqrt{x^2-6}} \end{aligned}$$

(3) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において C_1，C_2 を x 軸を元に y 軸方向に 3 倍に拡大したものをそれぞれ C_1'，C_2' とすると

$$C_1' : \frac{x^2}{9} + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + y^2 = 9 \ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

$$C_2' : \frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = \sqrt{3}\sqrt{x^2 - 6} \ (x \geqq 0)$$





このとき，G の移る点を $\mathrm{G}'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ とすると，OG' の偏角は $\dfrac{\pi}{6}$

上の図の斜線部分の面積を S_1，S_2 とすると　$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 3^2 \cdot \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}\pi$

$$S_2 = \sqrt{3}\int_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \sqrt{x^2-6}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} f'(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\ f(x)\ \Big]_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\ x\sqrt{x^2-6} - 6\log|x+\sqrt{x^2-6}|\ \Big]_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} - 3\log 2\right)$$

G' から x 軸に垂線 $\mathrm{G}'\mathrm{H}$ を引くと　$\triangle \mathrm{OG}'\mathrm{H} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

したがって　　$3S = S_1 + \triangle \mathrm{OG}'\mathrm{H} - S_2$

$$= \frac{3}{2}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} - 3\log 2\right)$$

$$= 3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 2\right)$$

よって　　$\boldsymbol{S = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\log 2}$

2024年1月26日 (金)

2011年 熊大医

楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 4$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 $y = x + b$ が楕円 C と異なる2つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2) (1) における2つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。

解答 (1) $C : x^2 + 4y^2 = 4$ および直線 $l : y = x + b$ を x 軸を元に y 軸方向に2倍に拡大した図形を，それぞれ，$C' : x^2 + y^2 = 4$，$l' : y = 2x + 2b$ とする．C と l が異なる2つの交点をもつとき，C' と l' は異なる2つの交点をもつから

$$\frac{|2b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} < 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\sqrt{5} < b < \sqrt{5}}$$

別解 $x^2 + 4y^2 = 4 \cdots ①$，$y = x + b \cdots ②$ とおく．

①，② から y を消去して整理すると

$$5x^2 + 8bx + 4(b^2 - 1) = 0 \quad \cdots ③$$

この方程式の判別式を D とすると

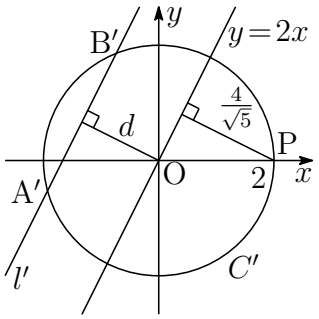
$$D/4 = (4b)^2 - 5 \cdot 4(b^2 - 1) = 4(5 - b^2)$$

①，② が異なる2つの交点をもつとき，$D > 0$ であるから

$$5 - b^2 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\sqrt{5} < b < \sqrt{5}}$$

(2) C' と l' の交点を A′，B′ とし，△PAB，△PA′B′ の面積を，それぞれ，S，S' とすると，$S'=2S$ が成り立つ．S' が最大となるとき，S は最大となるから，S' を最大にする b の値を求めればよい．

原点 O から l' までの距離を d とすると



$$d=\frac{|2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{A'B'}=2\sqrt{2^2-d^2}=\frac{4\sqrt{5-b^2}}{\sqrt{5}}$$

S' を最大にする b は，右の図から

$$0<b<\sqrt{5}$$

の範囲で調べればよい．P から l' に引いた垂線の長さを h とすると

$$h=\frac{2b}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{2b+4}{\sqrt{5}}$$

$$S'=\frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\cdot h=\frac{4}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}$$

$$S=\frac{1}{2}S'=\frac{2}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}=\frac{2}{5}\sqrt{(b+2)^2(5-b^2)}$$

したがって，関数

$$f(b)=(b+2)^2(5-b^2)\quad(0<b<\sqrt{5})$$

を最大にする b の値を求めればよい．

$$f'(b)=-2(b+2)(2b^2+2b-5)$$

$0<b<\sqrt{5}$ に注意して $f'(b)=0$ を解くと　$b=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$

$f(b)$ の増減は，右のようになる．よって，求める b の値は

b	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{5}\,)$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		↗	極大	↘	

$$\boldsymbol{b=\frac{-1+\sqrt{11}}{2}}$$

2024年1月27日 (土)

2007年 広大理系

$0 < b < a$ を満たす定数 $a,\ b$ に対し，2つの楕円

$$A : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad B : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

を考える．また $\alpha,\ \beta$ は

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす0と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(2) 2つの楕円 $A,\ B$ の第1象限にある交点の座標を求めよ．

(3) 楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち，
$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S を $a,\ b,\ \beta$ を用いて表せ．

解答 (1) $0 < b < a$，$\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より $\left(0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

したがって　$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0$

$0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$

(2) 2つの楕円の方程式の辺々を引くと $(0 < b < a)$

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)(x^2 - y^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+y)(x-y) = 0$$

楕円 $A,\ B$ の第1象限の交点であるから，$y = x > 0$ を A に代入して

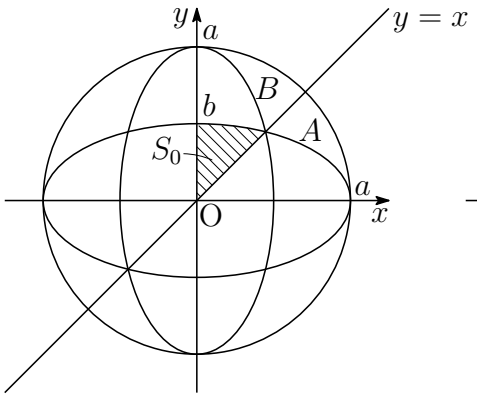
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

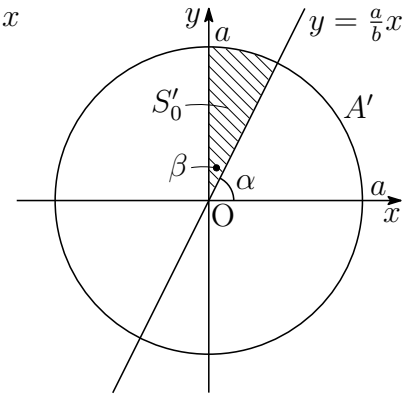
よって，交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}$

(3) 求める図形の面積で，$l : y = x$ の上側の部分の面積を S_0 とする．
A および l を x 軸を元に y 軸方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍だけ拡大したものは

$$A' : x^2 + y^2 = a^2, \quad l' : y = \frac{a}{b}x$$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{b}$ より，l と x 軸とのなす角 (偏角) は α である．
$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ より，右下の図の斜線部分の面積 S_0' は　$S_0' = \dfrac{1}{2}a^2\beta$





$S = 2S_0$，$S_0 = \dfrac{b}{a}S_0'$ であるから　$S = 2\cdot\dfrac{b}{a}S_0' = 2\cdot\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{1}{2}a^2\beta = \boldsymbol{ab\beta}$

2024年1月28日 (日)

東北大 2009 文系 3 番

袋の中に青玉が7個，赤玉が3個入っている．袋から1回につき1個ずつ玉を取り出す．一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ．

(1) 4回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ．

(2) 8回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ．

(3) 赤玉がちょうど8回目ですべて取り出される確率を求めよ．

解答 (1) 求める確率は $\dfrac{7}{10}\times\dfrac{6}{9}\times\dfrac{5}{7}\times\dfrac{3}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

別解 青玉7個，赤玉3個の計10個を取り出す場合の総数は (10個の玉を取り出して一列に並べる場合の総数)

$$\frac{10!}{7!3!}=120\ (\text{通り})$$

取り出した玉を一列に並べたとき，1番目から4番目までが青青青赤で，5番目以降に青4個，赤2個が並ぶ場合の総数は

青	青	青	赤						

$$\frac{6!}{4!2!}=15\ (\text{通り})\quad \text{求める確率は}\quad \frac{15}{120}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

(2) 取り出した玉を一列に並べたとき，9番目と10番目が青で，1番目から8番目までに青5個と赤3個を並べる場合の総数は

								青	青

$$\frac{8!}{5!3!}=56\ (\text{通り})\quad \text{求める確率は}\quad \frac{56}{120}=\boldsymbol{\frac{7}{15}}$$

(3) 取り出した玉を一列に並べたとき，8番目が赤，9番目と10番目が青で，1番目から7番目までに青5個と赤2個を並べる場合の総数は

							赤	青	青

$$\frac{7!}{5!2!}=21\ (\text{通り})\quad \text{求める確率は}\quad \frac{21}{120}=\boldsymbol{\frac{7}{40}}$$

2024年1月29日 (月)

鹿児島大 2023年1番 (3)

1個のサイコロを3回投げるとき，出る目の和が7以上である確率を求めよ．

解答 起こりうる場合の総数は　6^3 (通り)

出た目の和が6以下の場合の数は　${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ (通り)

これは，下の図のように ◯ と | が交互に6個並んだ6個のしきり (|) から，3個のしきりを選び，それらのしきりによって区切られた ◯ の個数を左から順に，1回目から3回目に出た目の数と考える．

◯| ◯ | ◯ | ◯ | ◯ | ◯ |

したがって，出た目の和が6以下である確率は　$\dfrac{20}{6^3} = \dfrac{5}{54}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{5}{54} = \boldsymbol{\dfrac{49}{54}}$

補足 出た目の和が6となる場合の数は　${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ (通り)

6個の ◯ とその間の5個のしきり (|) から，2個のしきりを選び，それらのしきりによって区切られた ◯ の個数を左から順に，1回目から3回目に出た目の数と考える．

鹿児島大 2023年5番

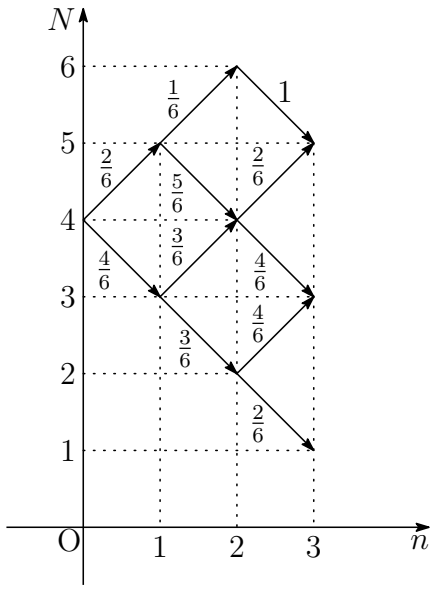
袋に赤玉4個と白玉2個が入っている．無作為に玉を1個取り出して，それが赤玉であれば白玉と，白玉であれば赤玉と取り換えて袋に戻すという操作を考える．この操作を2回繰り返したあと袋にある赤玉の数を X とし，一方，3回繰り返したあと袋にある白玉の数を Y とする．

(1) 確率 $P(X = 4)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) 確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ．

解答　(1) n 回繰り返した後の袋の中にある赤玉の個数が N である確率を $p_n(N)$ とすると



$$p_1(3)=\frac{4}{6},\ p_1(5)=\frac{2}{6}$$
$$p_2(2)=p_1(3)\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{36}$$
$$p_2(4)=p_1(3)\cdot\frac{3}{6}+p_1(5)\cdot\frac{5}{6}=\frac{22}{36}$$
$$p_2(6)=p_1(5)\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36}$$
$$p_3(1)=p_2(2)\cdot\frac{2}{6}=\frac{24}{216}$$
$$p_3(3)=p_2(2)\cdot\frac{4}{6}+p_2(4)\cdot\frac{4}{6}=\frac{136}{216}$$
$$p_3(5)=p_2(4)\cdot\frac{2}{6}+p_2(6)\cdot 1=\frac{56}{216}$$

$P(X=4)=p_2(4)$ であるから　$P(X=4)=\dfrac{22}{36}=\boldsymbol{\dfrac{11}{18}}$

(2) $P(X=N)=p_2(N)$ であるから $(N=2,4,6)$

X	2	4	6	計
P	$\frac{6}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{18}$	1

したがって　$E(X)=2\cdot\dfrac{6}{18}+4\cdot\dfrac{11}{18}+6\cdot\dfrac{1}{18}=\boldsymbol{\dfrac{31}{9}}$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$
$$=2^2\cdot\frac{6}{18}+4^2\cdot\frac{11}{18}+6^2\cdot\frac{1}{18}-\left(\frac{31}{9}\right)^2=\boldsymbol{\frac{101}{81}}$$

(3) $E(Y=N)=p_3(6-N)$ であるから $(N=1,3,5)$

Y	1	3	5	計
P	$\frac{7}{27}$	$\frac{17}{27}$	$\frac{3}{27}$	1

したがって　$E(Y)=1\cdot\dfrac{7}{27}+3\cdot\dfrac{17}{27}+5\cdot\dfrac{3}{27}=\boldsymbol{\dfrac{73}{27}}$

2024年1月30日 (火)

積分公式

$$\int \boldsymbol{f(x)e^{kx}\,dx} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k}}\left\{\boldsymbol{f(x)} - \frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\boldsymbol{k}} + \frac{\boldsymbol{f''(x)}}{\boldsymbol{k^2}} - \frac{\boldsymbol{f'''(x)}}{\boldsymbol{k^3}} + \cdots\right\}\boldsymbol{e^{kx}} + \boldsymbol{C}$$

証明 $f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\varphi_k'(x) &= \frac{1}{k}\left\{f'(x) - \frac{f''(x)}{k} + \frac{f'''(x)}{k^2} - \cdots\right\}\\ &= -\left\{-\frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\}\\ &= f(x) - \left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\}\\ &= f(x) - k\varphi_k(x)\end{aligned}$$

よって $\quad \{\varphi_k(x)e^{kx}\}' = \varphi_k'(x)e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx}$

$$= \{f(x) - k\varphi_k(x)\}e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx} = f(x)e^{kx}$$

したがって

$$\begin{aligned}\int f(x)e^{kx}\,dx &= \varphi_k(x)e^{kx} + C \qquad (C \text{ は積分定数})\\ &= \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\}e^{kx} + C\end{aligned}$$

証終

とくに，$k = \pm 1$ のとき

$$\int \boldsymbol{f(x)e^{x}\,dx} = \boldsymbol{\{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\}e^{x} + C}$$

$$\int \boldsymbol{f(x)e^{-x}\,dx} = \boldsymbol{-\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\}e^{-x} + C}$$

例題

不定積分 $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ を求めよ.

解答 $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = \{x^2 - (x^2)' + (x^2)''\}e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

発展 前ページの結論から，$f(x)$ が何回でも微分可能であるとき

$$\int f(x)e^{kx}\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{(-k)^{n+1}}e^{kx} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

k を ki に置き換えると

$$\int f(x)e^{kxi}\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{(-ki)^{n+1}}e^{kxi} + C \qquad (*)$$

このとき $\quad e^{kxi} = \cos kx + i\sin kx,$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(-ki)^{n+1}} &= \frac{i^{n+1}}{k^{n+1}} = \frac{1}{k^{n+1}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\\ &= \frac{1}{k^{n+1}}\left(\cos\frac{n+1}{2}\pi + i\sin\frac{n+1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

$(*)$ の実部を比較すると

$$\begin{aligned}\int f(x)\cos kx\,dx &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n+1}}\cos\left(kx + \frac{n+1}{2}\pi\right) + C\\ &= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n}}\sin\left(kx + \frac{n}{2}\pi\right) + C\end{aligned}$$

同様に，$(*)$ の虚部を比較すると

$$\begin{aligned}\int f(x)\sin kx\,dx &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n+1}}\sin\left(kx + \frac{n+1}{2}\pi\right) + C\\ &= -\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n}}\cos\left(kx + \frac{n}{2}\pi\right) + C\end{aligned}$$

注意 $\sin\left(\theta + \dfrac{n}{2}\pi\right)$，$\cos\left(\theta + \dfrac{n}{2}\pi\right)$ は，$\sin\theta \to \cos\theta \to -\sin\theta \to -\cos\theta \to \sin\theta$ の順に巡回するから，例えば次のように計算する．

$$\begin{aligned}\int x^4\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}\Bigg\{x^4\sin 2x + \frac{4x^3}{2}\cos 2x + \frac{12x^2}{2^2}(-\sin 2x)\\ &\qquad + \frac{24x}{2^3}(-\cos 2x) + \frac{24}{2^4}\sin 2x\Bigg\} + C\\ &= \left(\frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}\right)\sin 2x + \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right)\cos 2x + C\end{aligned}$$

2024年1月31日 (水)

前ページで示した積分公式

$$\begin{aligned}
&\int f(x)\cos kx\,dx \\
&\quad= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^n}\sin\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)+C \\
&\quad= \frac{1}{k}\Bigg\{f(x)\sin kx+\frac{f'(x)}{k}\cos kx+\frac{f''(x)}{k^2}(-\sin kx)+\frac{f^{(3)}(x)}{k^3}(-\cos kx) \\
&\qquad+\frac{f^{(4)}(x)}{k^4}\sin kx+\frac{f^{(5)}(x)}{k^5}\cos kx+\frac{f^{(6)}(x)}{k^6}(-\sin kx)+\frac{f^{(7)}(x)}{k^7}(-\cos kx)+\cdots\Bigg\}+C
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
&\int f(x)\sin kx\,dx \\
&\quad= -\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^n}\cos\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)+C \\
&\quad= \frac{1}{k}\Bigg\{f(x)(-\cos kx)+\frac{f'(x)}{k}\sin kx+\frac{f''(x)}{k^2}\cos kx+\frac{f^{(3)}(x)}{k^3}(-\sin kx) \\
&\qquad+\frac{f^{(4)}(x)}{k^4}(-\cos kx)+\frac{f^{(5)}(x)}{k^5}\sin kx+\frac{f^{(6)}(x)}{k^6}\cos kx+\frac{f^{(7)}(x)}{k^7}(-\sin kx)+\cdots\Bigg\}+C
\end{aligned}$$

は，$\sin\theta\to\cos\theta\to-\sin\theta\to-\cos\theta\to\sin\theta$ の順に巡回することに注意する．
特に，$f(x)=1$ としたとき

$$\int\cos kx\,dx=\frac{1}{k}\sin kx+C,\qquad\int\sin kx\,dx=-\frac{1}{k}\cos kx+C$$

であることに注意すると覚えやすい．

教科書 (第 5 章練習 10) では

$$\begin{aligned}\int (x^2+1)\sin x\,dx &= \int (x^2+1)(-\cos x)'\,dx \\ &= (x^2+1)(-\cos x) + \int 2x\cos x\,dx \\ &= -(x^2+1)\cos x + 2\int x(\sin x)'\,dx \\ &= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right) \\ &= -(x^2+1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C \\ &= \boldsymbol{(1-x^2)\cos x + 2x\sin x + C}\end{aligned}$$

として計算しているが，公式を用いると

$$\begin{aligned}\int (x^2+1)\sin x\,dx &= (x^2+1)(-\cos x) + (x^2+1)'\sin x + (x^2+1)''\cos x + C \\ &= (x^2+1)(-\cos x) + 2x\sin x + 2\cos x + C \\ &= \boldsymbol{(1-x^2)\cos x + 2x\sin x + C}\end{aligned}$$

琉球大学 2014 年

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$ を求めよ.

解答 まず

$$\begin{aligned}\int x\cos 2x &= \frac{1}{2}\left\{x\sin 2x + \frac{(x)'}{2}\cos 2x\right\} + C \\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx = \left[\,\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$

2024年2月1日 (木)

2021 年 東北大理系

以下の問いに答えよ.

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ. ただし, e は自然対数の底とする.

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ.

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ. 必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい.

解答　(1) $I_k(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!}e^x\,dx$ とすると (k は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned} I_k(a) &= -\int_0^a \left\{\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}\right\}' e^x\,dx \\ &= -\left[\ \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}e^x\ \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}(e^x)'\,dx \\ &= \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} + I_{k+1}(a) \end{aligned}$$

$I_k(a)-I_{k+1}(a)=\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}$ より，正の整数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1}\{I_k(a)-I_{k+1}(a)\}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$I_0(a)-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}$$

$I_0(a)=\displaystyle\int_0^a e^x\,dx=e^a-1$ であるから

$$e^a-1-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\quad \text{ゆえに}\quad e^a=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+I_n(a) \qquad (*)$$

よって　$e^a=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}+\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$

(2) $0\leqq x\leqq a$ において，$1\leqq e^x\leqq e^a$ であるから

$$\frac{(a-x)^n}{n!}\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^a$$

したがって

$$\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq e^a\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx$$

$$-\left[\ \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\ \right]_0^a\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq -e^a\left[\ \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\ \right]_0^a$$

よって　$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

(3) (2) の結果から　　$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq I_n(a) \leqq \dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

(∗) から　　$I_n(a) = e^a - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$

上の 2 式に $a = 1$ を代入すると

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqq I_n(1) \leqq \frac{e}{(n+1)!}, \quad I_n(1) = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (**)$$

(∗∗) の第 1 式から，$I_n(1) > 0$

(∗∗) の第 2 式から，$I_n(1)$ は単調減少列である．

(∗∗) の第 1 式に $n = 5,\ 6$ を代入すると

$$10^{-3} < \frac{1}{720} = \frac{1}{6!} < I_5(1) < \frac{e}{6!},$$
$$\frac{1}{7!} < I_6(1) < \frac{e}{7!} = \frac{3}{5040} < 10^{-3}$$

上の 2 式から　　$I_6(1) < 10^{-3} < I_5(1)$

したがって，不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n は　　$\boldsymbol{n = 6}$

解説 a を定数，n を自然数とする．$f(x)$ を n 回微分可能な関数とし

$$J_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt$$

とおくと

$$\begin{aligned} J_k(x) &= -\int_a^x \left\{ \frac{(x-t)^k}{k!} \right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$J_k(x) - J_{k+1}(x) = \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ であるから，$n \geqq 2$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n-1} \{J_k(x) - J_{k+1}(x)\} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$$J_1(x) - J_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$J_1(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ であるから

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_n(x)$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると，$J_n(x)$ は

$$\frac{(x-a)^n}{n!} M \text{ と } \frac{(x-a)^n}{n!} m$$

の間の値をとるから，この積分区間を I とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c), \qquad c \in I$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．$n = 1$ のとき，平均値の定理により，上式は成立する．したがって，すべての自然数について上式は成立する．

2024年2月2日 (金)

2021 年 阪大理系

n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ をみたす実数とする．

(1) $x \geqq t$ のとき，不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\, dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ をみたすような実数 $p,\ q$ の値を求めよ．

解答　(1)　$f(x)=\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)$，$g(x)=f(x)+\dfrac{(x-t)^2}{2}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}=-\frac{1}{xt}(x-t)$$
$$g'(x)=f'(x)+x-t=-\frac{1}{xt}(x-t)+x-t$$
$$=\frac{(xt-1)(x-t)}{xt}$$

$x\geqq t$ において $(t\geqq 1)$，$f(x)$ は単調減少，$g(x)$ は単調増加である．
$f(t)=0$，$g(t)=0$ であるから，$x\geqq t$ において

$$f(x)\leqq 0,\quad g(x)=f(x)+\frac{(x-t)^2}{2}\geqq 0$$

したがって　　$-\dfrac{(x-t)^2}{2}\leqq f(x)\leqq 0$

よって，$x\geqq t$ のとき $(t\geqq 1)$，次式が成立する．

$$-\frac{(x-t)^2}{2}\leqq \log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\leqq 0$$

別解 (部分積分法を用いた証明法)

$$\log x-\log t=\int_t^x\frac{1}{u}\,du=\int_t^x(u-x)'\frac{1}{u}\,du$$
$$=\left[\,(u-x)\frac{1}{u}\,\right]_t^x-\int_t^x(u-x)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$
$$=\frac{1}{t}(x-t)-\int_t^x\frac{x-u}{u^2}du$$

したがって　　$\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)=-\displaystyle\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du$　　(A)

$1\leqq t\leqq x$ であるから　$0\leqq\displaystyle\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du\leqq\int_t^x(x-u)\,du$

$$-\frac{(x-t)^2}{2}=\int_t^x(u-x)\,du\leqq-\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du\leqq 0\qquad\text{(B)}$$

(A)，(B) により，(1) の不等式が導かれる．

(2) (1) で示した不等式により

$$-\int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{(x-t)^2}{2}\,dx \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} (\log x - \log t)\,dx - \frac{1}{t}\int_t^{t+\frac{1}{n}} (x-t)\,dx \leqq 0$$

$$-\left[\ \frac{(x-t)^3}{6}\ \right]_t^{t+\frac{1}{n}} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{t}\left[\ \frac{(x-t)^2}{2}\ \right]_t^{t+\frac{1}{n}} \leqq 0$$

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

(3) (2) で不等式において，$t = 1 + \dfrac{k}{n}$ とすると

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq 0$$

辺々に $-n$ を掛けると

$$0 \leqq \log\left(1+\frac{k}{n}\right) - n\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x\,dx + \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n^2}$$

上式について，$k=0$ から $k=n-1$ までの総和をとると

$$0 \leqq \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right) - n\int_1^2 \log x\,dx + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n}$$

$p = \displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$ とおくと

$$p = \int_1^2 \log x\,dx = \left[\ x(\log x - 1)\ \right]_1^2 = 2\log 2 - 1$$

$a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ より　$0 \leqq a_n - pn + \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n}$　$\cdots(*)$

$-q = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ とおくと

$$q = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\ \log(1+x)\ \right]_0^1 = -\frac{\log 2}{2}$$

$(*)$ において，$n \longrightarrow \infty$ とすると，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - pn - q) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$$

よって　　$\boldsymbol{p = 2\log 2 - 1,\ \ q = -\dfrac{\log 2}{2}}$

2024年2月3日 (土)

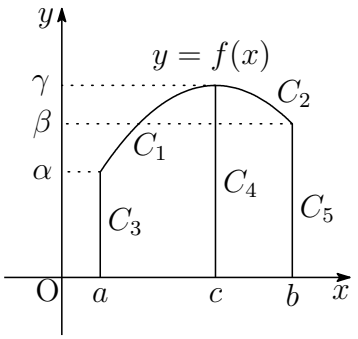
次の回転体の体積について，円筒形に区分して考えると積分の意味が理解できる．

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および2直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに1回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

証明 $y = f(x)$ のグラフを単調増加または単調減少の区間に分けて証明する．例えば，右の図のように $y = f(x)$ は $a \leqq x \leqq c$ で単調増加，$c \leqq x \leqq b$ では単調減少とする．このとき，それぞれの区間で逆関数が存在することから



$$C_1 : x = g_1(y)\ (\alpha \leqq y \leqq \gamma),$$
$$C_2 : x = g_2(y)\ (\beta \leqq y \leqq \gamma)$$

とおき，さらに次のようにおく．

$$C_3 : x = a\ (0 \leqq y \leqq \alpha),\quad C_4 : x = c\ (0 \leqq y \leqq \gamma),\quad C_5 : x = b\ (0 \leqq y \leqq \beta)$$

x 軸と C_1, C_3, C_4 で囲まれた部分および C_2, C_4, C_5 で囲まれた部分をそれぞれ y 軸の回りに1回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^\gamma c^2\,dy - \int_0^\alpha a^2\,dy - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2\,dy \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \int_a^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \Big[\, x^2 f(x) \,\Big]_a^c + 2\int_a^c xf(x)\,dx = 2\int_a^c xf(x)\,dx \\
\frac{V_2}{\pi} &= \int_0^\beta b^2\,dy + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2\,dy - \int_0^\gamma c^2\,dy \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \int_b^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \Big[\, x^2 f(x) \,\Big]_b^c - 2\int_b^c xf(x)\,dx = 2\int_c^b xf(x)\,dx
\end{aligned}$$

よって　$V = V_1 + V_2 = 2\pi \displaystyle\int_a^c xf(x)\,dx + 2\pi \int_c^b xf(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$

一般に，単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る．　**証終**

2024年2月4日 (日)

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

一般に，$a \leqq x \leqq b$ において $f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq 0$ である2曲線 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ および2直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積を S，その重心の y 座標を h とすると

$$hS = \int_a^b \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \times \{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

$\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$ は微小区間の面積，$\dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$ はその重心を表す．
この図形を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

よって，上の2式から　　$\boldsymbol{V = 2\pi hS}$
回転体の体積は，(回転による重心の軌跡の長さ) × (面積) である．

例題

曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれ部分を y 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V

解 1 (基本的な積分法) 曲線 $y = \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ および $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ の部分をそれぞれ C_1，C_2 とする．C_1 および C_2 を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると，$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ より

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^1 x^2\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$$
$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^1 x^2\, dy = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$$

したがって

$$\frac{V}{\pi} = \frac{V_2}{\pi} - \frac{V_1}{\pi} = \int_\pi^0 x^2 \cos x\, dx$$
$$= \Big[\, x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \,\Big]_\pi^0 = 2\pi$$

よって　　$V = \boldsymbol{2\pi^2}$

解 2 (バウムクーヘン型求積法)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 2\pi \Big[-x\cos x + \sin x \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{2\pi^2}$$

解 3 (パップス・ギュルダンの定理)

$$S = \int_0^{\pi} \sin x = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = 2$$

図形の重心は直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 上にあるから

$$V = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \boldsymbol{2\pi^2}$$

九工大 2022 年後期

原点を O とする座標平面上の曲線 $y = x^3$ $(x \geqq 0)$ を C とし，直線 $y = ax$ $(a > 0)$ を l とする．さらに，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ を通り l と垂直に交わる直線を m とし，l と m の交点を Q とする．次に答えよ．

(1) 直線 m の式を a と t を用いて表せ．

(2) 線分 PQ の長さを a と t を用いて表せ．

(3) 線分 OQ の長さ s を a と t を用いて表せ．

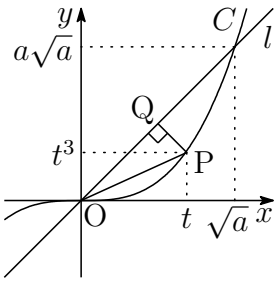
(4) 直線 l と曲線 C で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(5) a が変化するとき，$\dfrac{V}{a^3}$ の最大値を求めよ．

解答 (1) m は点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{a}$ の直線であるから

$$y - t^3 = -\frac{1}{a}(x - t)$$

よって $\quad \boldsymbol{y = -\dfrac{x}{a} + \dfrac{t}{a} + t^3}$



(2) PQ は点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ と直線 $l : ax - y = 0$ の距離であるから

$$\mathrm{PQ} = \frac{|\boldsymbol{at - t^3}|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2 + 1}}}$$

(3) $\mathrm{OQ}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{PQ}^2$ であるから

$$\mathrm{OQ}^2 = (t^2+t^6) - \frac{(at-t^3)^2}{a^2+1} = t^2\left\{1+t^4 - \frac{(a-t^2)^2}{a^2+1}\right\} = \frac{t^2(at^2+1)^2}{a^2+1}$$

$a>0$ より　　$s = \mathrm{OQ} = \boldsymbol{\dfrac{t(at^2+1)}{\sqrt{a^2+1}}}$

(4) (3) の結果を微分すると　$\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3at^2+1}{\sqrt{a^2+1}}$

C と l の交点を $\mathrm{R}(\sqrt{a},\ a\sqrt{a})$ とし，$s_0 = \mathrm{OR}$ とおくと

s	$0 \longrightarrow s_0$
t	$0 \longrightarrow \sqrt{a}$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{s_0} \mathrm{PQ}^2\,ds = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{(at-t^3)^2}{a^2+1}\cdot\frac{ds}{dt}\,dt = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{(at-t^3)^2}{a^2+1}\cdot\frac{3at^2+1}{\sqrt{a^2+1}}\,dt \\ &= \frac{1}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sqrt{a}} \{3at^8 + (1-6a^2)t^6 + (3a^3-2a)t^4 + a^2t^2\}\,dt \\ &= \frac{1}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{3}at^9 + \frac{1}{7}(1-6a^2)t^7 + \frac{1}{5}(3a^3-2a)t^5 + \frac{1}{3}a^2t^3\right]_0^{\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{8a^{\frac{7}{2}}(a^2+1)}{105} = \frac{8a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}}$

(5) (4) の結果から　$\dfrac{V}{a^3} = \dfrac{8\pi}{105}\sqrt{\dfrac{a}{a^2+1}} = \dfrac{8\pi}{105\sqrt{a+\frac{1}{a}}}$

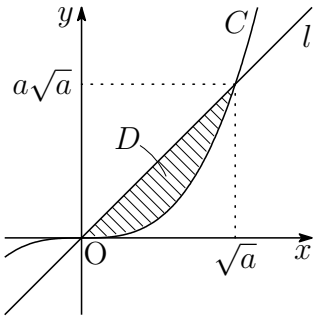
$a>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{a}}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\dfrac{V}{a^3} \leqq \dfrac{8\pi}{105\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi$　　よって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi}$

補足 $0 \leqq x \leqq \sqrt{a}$ において，$C : y = x^3$ と $l : y = ax$ で囲まれた図形 D の面積を S とすると

$$S = \int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3)\,dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{4}$$



D を y 軸，x 軸のまわりにそれぞれ 1 回転してできる立体の体積 $V_1,\ V_2$ は

$$V_1 = 2\pi \int_0^{\sqrt{a}} x(ax - x^3)\,dx = 2\pi \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{4\pi a^{\frac{5}{2}}}{15},$$
$$V_2 = \pi \int_0^{\sqrt{a}} \{(ax)^2 - (x^3)^2\}\,dx = \pi \left[\frac{a^2x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{4\pi a^{\frac{7}{2}}}{21}$$

D の重心を $\mathrm{G}(h_1,\ h_2)$ とすると，パップス・ギュルダンの定理により [10]

$$V_1 = 2\pi h_1 S, \quad V_2 = 2\pi h_2 S \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{G}\left(\frac{8\sqrt{a}}{15},\ \frac{8a\sqrt{a}}{21} \right)$$

G と直線 $l : ax - y = 0$ の距離 d は $\quad d = \dfrac{16a\sqrt{a}}{105\sqrt{a^2+1}}$

D を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi dS = 2\pi \cdot \frac{16a\sqrt{a}}{105\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}$$

別解 領域 D の微小区間 $[t,\ t+\Delta t]$ の面積 ΔS とその重心 G は

$$\Delta S = (at - t^3)\Delta t, \quad \mathrm{G}\left(t,\ \frac{at + t^3}{2} \right)$$

G と直線 $l : ax - y = 0$ の距離 d は $(0 \leqq t \leqq \sqrt{a})$ $\quad d = \dfrac{at - t^3}{2\sqrt{a^2+1}}$

$$S = 2\pi \int_0^{\sqrt{a}} \frac{at - t^3}{2\sqrt{a^2+1}} \cdot (at - t^3)\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \int_0^{\sqrt{a}} (t^6 - 2at^4 + a^2t^2)\,dt$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \left[\frac{t^7}{7} - \frac{2a}{5}t^5 + \frac{a^2}{3}t^3 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}$$

[10] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

2024年2月5日 (月)

2022 年 長崎大学

曲線 $C : y = e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線を l とする．ただし，$0 < t < 1$ である．以下の問いに答えよ．

(1) l の方程式を求めよ．また，l と y 軸との交点を Q とし，l と x 軸との交点を R とする．このとき，2 点 Q，R の座標を，それぞれ求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ および $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を，それぞれ求めよ．

(3) l と x 軸および y 軸で囲まれた図形を D_1 とし，これを y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V_1(t)$ とする．同様に，C と l および y 軸で囲まれた図形を D_2 とし，これを y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V_2(t)$ とする．このとき，$V_1(t)$ と $V_2(t)$ を，それぞれ t を用いて表せ．

(4) $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ とするとき，$V(t)$ の最小値，およびそのときの t の値を求めよ．

解答 (1) $C : y = e^x$ を微分すると　$y' = e^x$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線 l は

$$y - e^t = e^t(x - t)$$

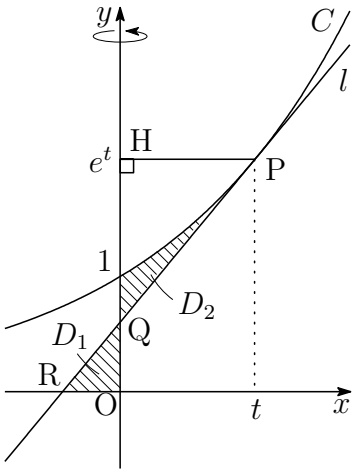
すなわち　$\boldsymbol{y = e^t(x - t + 1)}$

$x = 0$ のとき，$y = e^t(1 - t)$ であるから

$$\mathbf{Q}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{e^t(1 - t)})$$

$y = 0$ のとき，$x = t - 1$ であるから

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{t - 1},\ \mathbf{0})$$



(2) 部分積分法により

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int (x)' \log x\,dx = x\log x - \int dx \\ &= \boldsymbol{x(\log x - 1) + C_1} \quad (\boldsymbol{C_1}\text{は積分定数}),\\ \int (\log x)^2\,dx &= \int (x)'(\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x(\log x - 1) + C_2 \\ &= \boldsymbol{x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\} + C_2} \quad (\boldsymbol{C_2}\text{は積分定数})\end{aligned}$$

別解 $t=\log x$ とおくと，$x=e^t$，$\dfrac{dx}{dt}=e^t$ であるから

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx=\int e^t t\,dt &= e^t\{t-(t)'\}+C_1\\ &= e^t(t-1)+C_1\\ &= x(\log x-1)+C_1,\\ \int (\log x)^2\,dx=\int e^t t^2\,dt &= e^t\{t^2-(t^2)'+(t^2)''\}+C_2\\ &= e^t(t^2-2t+2)+C_2\\ &= x\{(\log x)^2-2\log x+2\}+C_2\end{aligned}$$

ここでは，次の積分公式を利用している[11]．

$$\int e^{px}f(x)\,dx=\frac{e^{px}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

$$\int e^{x}f(x)\,dx=e^x\left\{f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\cdots\right\}+C$$

[11] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7 を参照)

(3) $V_1(t)$，$V_2(t)$ の体積は，前ページの図から $(C : x = \log y)$

$$
\begin{aligned}
V_1(t) &= \frac{1}{3}\pi \mathrm{OR}^2 \cdot \mathrm{OQ} \\
&= \frac{\pi}{3}(1-t)^2 \cdot e^t(1-t) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}e^t(1-t)^3}, \\
V_2(t) &= \frac{1}{3}\pi \mathrm{PH}^2 \cdot \mathrm{QH} - \pi \int_1^{e^t} (\log y)^2 \, dy \\
&= \frac{\pi}{3}t^2 \cdot \{e^t - e^t(1-t)\} - \pi \Big[\, y\{(\log y)^2 - 2\log y + 2\} \, \Big]_1^{e^t} \\
&= \frac{\pi}{3}e^t t^3 - \pi\{e^t(t^2 - 2t + 2) - 2\} \\
&= \boldsymbol{\pi\left\{e^t\left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\right) + 2\right\}}
\end{aligned}
$$

別解 バウムクーヘン型の求積法を用いると[12]，D_2 を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 $V_2(t)$ は，$C : y = e^x$，$l : y = e^t x + (1-t)e^t$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{V_2(t)}{2\pi} &= \int_0^t x\{e^x - e^t x - (1-t)e^t\} \, dx \\
&= \Big[\, e^x(x-1) - \frac{1}{3}e^t x^3 - \frac{1}{2}(1-t)e^t x^2 \, \Big]_0^t \\
&= e^t\left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t - 1\right) + 1
\end{aligned}
$$

(4) (3) の結果から

$$
\begin{aligned}
V(t) = V_1(t) + V_2(t) &= \frac{\pi}{3}e^t(1-t)^3 + \pi\left\{e^t\left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\right) + 2\right\} \\
&= \pi\left\{e^t\left(t - \frac{5}{3}\right) + 2\right\}, \\
V'(t) &= e^t\left(t - \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$0 < t < 1$ における $V(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘	極小	↗	

よって，$V(t)$ は $\boldsymbol{t = \frac{2}{3}}$ のとき，最小値 $V\left(\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\pi(2 - e^{\frac{2}{3}})}$ をとる．

[12] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2016.pdf 2

2024年2月6日 (火)

2022年 長崎大学医学部

自然数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_1^e (\log x)^n \, dx$ とする．ただし，e は自然対数の底であり，無理数である．以下の問いに答えよ．

(1) I_1, I_2 の値を，それぞれ求めよ．また，I_{n+1} を I_n を用いて表せ．

(2) a および b を有理数とする．$a + be = 0$ ならば $a = 0$ かつ $b = 0$ であることを，背理法を用いて証明せよ．

(3) すべての n に対して，$I_n = A_n + B_n e$ (A_n, B_nは有理数) と表すことができる．このことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(4) (3) における A_n に対して，$C_n = \dfrac{A_n}{(-1)^{n+1} n!}$ とする．このとき，C_n および A_n を，それぞれ n を用いて表せ．

(5) (3) における B_n は，$B_n = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i {}_n\mathrm{P}_i$ であることを数学的帰納法を用いて証明し，I_5 の値を求めよ．
ただし，${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (r は $r \leqq n$ の自然数) であり，$0! = 1$ とする．

解答 (1) $I_n = \displaystyle\int_1^e (\log x)^n \, dx$ より (n は自然数)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^e \log x \, dx = \Big[\, x(\log x - 1) \, \Big]_1^e = \boldsymbol{1}, \\
I_2 &= \int_1^e (\log x)^2 \, dx = \Big[\, x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\} \, \Big]_1^e = \boldsymbol{e - 2}, \\
I_{n+1} &= \int_1^e (x)'(\log x)^{n+1} \, dx \\
&= \Big[\, x(\log x)^{n+1} \, \Big]_1^e - (n+1) \int_1^e (\log x)^n \, dx \\
&= \boldsymbol{e - (n+1) I_n}
\end{aligned}
$$

(2) $a+be=0$ について ($a,\ b$ は有理数)，$b\neq 0$ とすると

$$e=-\frac{a}{b}$$

上式の左辺は無理数，右辺は有理数であるから，不合理.

$b=0$ であるから，これを $a+be=0$ に代入すると　$a=0$

よって，$a+be=0$ ならば ($a,\ b$ は有理数)，$a=0$ かつ $b=0$

(3) $(*)$　$I_n=A_n+B_ne$ ($A_n,\ B_n$は有理数)

［1］$n=1$ のとき，$I_1=1+0\cdot e$ より，$(*)$ は成立する.

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立する，すなわち，

$$I_k=A_k+B_ke\ (A_k,\ B_k\text{は有理数})$$

であると仮定すると，(1) で示した漸化式により

$$\begin{aligned}I_{k+1}&=e-(k+1)I_k=e-(k+1)(A_k+B_ke)\\&=-(k+1)A_k+\{1-(k+1)B_k\}e\end{aligned}$$

これから

$$A_{k+1}=-(k+1)A_k,\quad B_{k+1}=1-(k+1)B_k \qquad (**)$$

とおくと，$A_{k+1},\ B_{k+1}$ は有理数であるから，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する.

［1］,［2］により，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する.

(4) $(**)$ の第 1 式の両辺を $(-1)^{k+1}(k+1)!$ で割ると

$$\frac{A_{k+1}}{(-1)^k(k+1)!}=\frac{A_k}{(-1)^kk!}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{A_n}{(-1)^nn!}=\frac{A_1}{(-1)^11!}$$

$A_1=1$ であるから　$A_n=\boldsymbol{(-1)^{n+1}n!}$　また　$C_n=\dfrac{A_n}{(-1)^{n+1}n!}=\mathbf{1}$

(5) (#)　$B_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i {}_n\mathrm{P}_i$

［1］$n = 1$ のとき，$I_1 = 1 + 0 \cdot e$ より，$B_1 = 0$

(#) より　$B_1 = 1 + \sum_{i=1}^{1} (-1)^i {}_1\mathrm{P}_i = 1 + (-1) = 0$

よって，$n = 1$ のとき，(#) は成立する．

［2］$n = k$ のとき，(#) が成立する，すなわち

$$B_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i {}_k\mathrm{P}_i$$

が成り立つと仮定すると，(∗∗) の第 2 式から

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= 1 - (k+1)B_k \\ &= 1 - (k+1)\left\{1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i {}_k\mathrm{P}_i\right\} \\ &= 1 + (-1)^1 {}_{k+1}\mathrm{P}_1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} {}_{k+1}\mathrm{P}_{i+1} \\ &= 1 + (-1)^1 {}_{k+1}\mathrm{P}_1 + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^i {}_{k+1}\mathrm{P}_i = 1 + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i {}_{k+1}\mathrm{P}_i \end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも (#) は成立する．

［1］, ［2］より，すべての自然数 n について，(#) は成立する．

(4) および上の結果を用いて

$$\begin{aligned} I_5 = A_5 + B_5 e &= (-1)^6 5! + \left\{1 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^i {}_5\mathrm{P}_i\right\} e \\ &= 120 + (1 - 5 + 20 - 60 + 120 - 120)e \\ &= \boldsymbol{120 - 44e} \end{aligned}$$

補足 $I_1 = 1,\ I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ より

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}I_{n+1} - \frac{(-1)^n}{n!}I_n = \frac{(-1)^{n+1}e}{(n+1)!}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}I_{k+1} - \frac{(-1)^k}{k!}I_k\right\} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}e}{(k+1)!}$$

$$\frac{(-1)^n}{n!}I_n + 1 = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!}$$

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!}$ であるから

$$\begin{aligned} I_n &= (-1)^{n+1}n! + (-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k e}{k!} \\ &= (-1)^{n+1}n! + e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!} \\ &= (-1)^{n+1}n! + e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} = (-1)^{n+1}n! + e\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立する．よって

$$A_n = (-1)^{n+1}n!,\quad B_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k$$

$t = \log x$ とおくと，$x = e^t$，$\dfrac{dx}{dt} = e^t$ であるから (**??**ページの**??**を参照)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e (\log x)^n\,dx = \int_0^1 e^t t^n\,dt = \Big[\ e^t\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(t^n)^{(k)}\ \Big]_0^1 \\ &= \Big[\ e^t\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k t^{n-k} + e^t(-1)^n n!\ \Big]_0^1 \\ &= e\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k + (-1)^{n+1}n! \end{aligned}$$

2024年2月7日 (水)

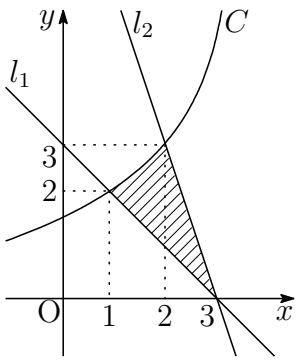
2015年九大後期数学科

座標平面上で，$y=3-\log_2(3-x)$ $(x<3)$，$y=3-x$ および $y=9-3x$ で囲まれた領域を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) S を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) 座標平面において，S を原点のまわりに1回転したときに S が通過する領域を T とし，T を x 軸のまわりに1回転してできる立体を V とする．T を座標平面上に図示し，V の体積を求めよ．

解答　(1) 領域 S は，右の図の斜線部分で，これを x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を V_1 とすると



$$V_1=\pi\int_1^2\{3-\log_2(3-x)\}^2\,dx+\frac{1}{3}\cdot\pi 3^2\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot\pi 2^2\cdot 3$$

ここで，$t=3-\log_2(3-x)$ $(1\leqq x\leqq 2)$ とおくと

$$x=3-2^{3-t},\quad \frac{dx}{dt}=2^{3-t}\log 2$$

x	$1\longrightarrow 2$
t	$2\longrightarrow 3$

$$\begin{aligned}\int_1^2\{3-\log_2(3-x)\}^2\,dx&=(\log 2)\int_2^3 t^2 2^{3-t}\,dt\\&=\left[-2^{3-t}\left\{t^2+\frac{2t}{\log 2}+\frac{2}{(\log 2)^2}\right\}\right]_2^3\\&=-1+\frac{2}{\log 2}+\frac{2}{(\log 2)^2}\end{aligned}$$

したがって　$V_1=\pi\left\{-1+\dfrac{2}{\log 2}+\dfrac{2}{(\log 2)^2}\right\}+\dfrac{1}{3}\cdot\pi 3^2\cdot 1-\dfrac{1}{3}\cdot\pi 2^2\cdot 3$

よって　$\boldsymbol{V_1=2\pi\left\{-1+\dfrac{1}{\log 2}+\dfrac{1}{(\log 2)^2}\right\}}$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx = \frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C$$

$$\int a^{px+q}f(x)\,dx = \frac{a^{px+q}}{p\log a}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p\log a} + \frac{f''(x)}{(p\log a)^2} - \frac{f'''(x)}{(p\log a)^3} + \cdots\right\} + C$$

$$\int e^{-x+q}f(x)\,dx = -e^{-x+q}\left\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\right\} + C$$

$$\int a^{-x+q}f(x)\,dx = -\frac{a^{-x+q}}{\log a}\left\{f(x) + \frac{f'(x)}{\log a} + \frac{f''(x)}{(\log a)^2} + \frac{f'''(x)}{(\log a)^3} + \cdots\right\} + C$$

上の公式により

$$\begin{aligned}\int t^2 2^{3-t}\,dt &= -\frac{2^{3-t}}{\log 2}\left\{t^2 + \frac{(t^2)'}{\log 2} + \frac{(t^2)''}{(\log 2)^2}\right\} + C \\ &= -\frac{2^{3-t}}{\log 2}\left\{t^2 + \frac{2t}{\log 2} + \frac{2}{(\log 2)^2}\right\} + C\end{aligned}$$

(2) $l_1 : y = 3 - x$ $(x + y - 3 = 0)$ と原点との距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$l_2 : y = 9 - 3x$ と曲線 $C : y = 3 - \log_2(3 - x)$ の交点は $(2,\ 3)$
この交点と原点との距離 d_2 は

$$d_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

原点を中心とする 2 つの同心円で，半径が d_1，d_2 の円をそれぞれ C_1，C_2 とする．T は，C_1 の外部かつ C_2 の内部にある領域である．
よって，T を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = \frac{4}{3}\pi({d_2}^3 - {d_1}^3) = \frac{4}{3}\pi\left(13\sqrt{13} - \frac{27\sqrt{2}}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{52\sqrt{13} - 27\sqrt{2}}{3}\pi}$$

2024年2月8日 (木)

2002 年 九大理系

次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数 x，y に対して，不等式

$$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2) a，b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) a，b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $\displaystyle M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。

解答 (1) y を固定して，$h(x) = x\log x - (\log y + 1)x + y$ とおくと

$$\begin{aligned} h'(x) &= \log x + 1 - (\log y + 1) \\ &= \log x - \log y \end{aligned}$$

$h'(x) = 0$ とすると　$x = y$

$h(x)$ の増減表は，右のようになる．

x	0	$\cdots$	y	$\cdots$
$h'(x)$	／	$-$	0	$+$
$h(x)$	／	↘	0	↗

$h(x) \geqq 0$ であるから　$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$

また，等号が成り立つのは，$x = y$ のときに限る．

(2) 閉区間 $[a,\ b]$ で $f(x) > 0$，$g(x) > 0$ であるから，(1) の結果より

$$f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x) \geqq 0$$

したがって

$$\int_a^b \{f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x)\}\,dx \geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b \{-f(x) + g(x)\}\,dx = 0$ を上式に代入すると

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つ．

(3) $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ より　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b M\,dx$

したがって，(2) の結果に $g(x) = M$ を代入して成り立ち，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log M\,dx = \log M\int_a^b f(x)\,dx$$

上式の両辺を $b - a > 0$ で割ると

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \log M \times \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = M\log M$$

が成り立つ．

解説

(1) の結果 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ について，x と y を入れ換えた

$$y\log y - y\log x - y + x \geqq 0$$

の両辺を y で割ると

$$\log y - \log x - 1 + \frac{x}{y} \geqq 0$$

ここで，$a_k > 0,\ p_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ に対し，

$$M = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n$$
$$f(x) = \log M - \log x - 1 + \frac{x}{M}$$

とおくと，$x > 0$ について $f(x) \geqq 0$ が成り立つ．また，等号が成り立つのは，$x = M$ のときに限る．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} p_k f(a_k) &= \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\log M - \log a_k - 1 + \frac{a_k}{M}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \log M - p_k \log a_k - p_k + \frac{p_k a_k}{M}\right) \\
&= \log M - \sum_{k=1}^{n} \log {a_k}^{p_k} - 1 + \frac{M}{M} \\
&= \log M - \log \left({a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}\right)
\end{aligned}$$

$p_k f(a_k) \geqq 0\ (k = 1, 2, \cdots n)$ であるから (等号が成り立つのは，$a_k = M$ のとき)

$$\log M - \log \left({a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}\right) \geqq 0$$

したがって

$$\boldsymbol{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n \geqq {a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき)．

とくに，$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$$

1997 年 大阪大学 (理系) 後期

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^ne^{1-x}$ と，その定積分 $a_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を考える．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上で $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ．

(2) a_1 を求めよ．$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ．

解答 (1) $f_n(x)$ を微分すると　$f_n'(x)=x^{n-1}(n-x)e^{1-x}$

$0<x<1$ において $f_n'(x)>0$ であるから，$f_n(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調増加である．よって，$f_n(0)=0$，$f_n(1)=1$ より　$0\leqq f_n(x)\leqq 1$

$f_n(x)$ は，つねには 0 または 1 ではないので

$$\int_0^1 0\,dx<\int_0^1 f_n(x)\,dx<\int_0^1 1\,dx \quad \text{よって} \quad 0<a_n<1$$

(2) $a_1=\displaystyle\int_0^1 xe^{1-x}=\left[-(x+1)e^{1-x}\right]_0^1=\boldsymbol{e-2}$

また　$a_n=\displaystyle\int_0^1 x^ne^{1-x}\,dx=\int_0^1 x^n(-e^{1-x})'\,dx$

$$=\left[-x^ne^{1-x}\right]_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}\,dx=\boldsymbol{-1+na_{n-1}}$$

(3) (2) の結果から，$n\geqq 2$ のとき　$\dfrac{a_n}{n!}-\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=-\dfrac{1}{n!}$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{a_k}{k!}-\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right\}=-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$

したがって　$\dfrac{a_n}{n!}-a_1=-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$　よって　$\boldsymbol{\dfrac{a_n}{n!}=e-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}$

(4) (3) の結果から　$a_n=n!e-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$

$n!e$ が整数であれば，上式において，右辺は整数となり，$0<a_n<1$ に反し，矛盾を生じる．よって，$n!e$ は整数とならない．■

$e = \dfrac{q}{p}$ を有理数 (p，q は自然数) と仮定すると，$p!e$ は整数となり，前ページ (4) の結論に反する．よって，e は無理数である．

オイラーは，このことについて，次のエレガントな証明 (1744 年) を与えている．

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{は無理数である．}$$

証明 n を自然数とすると

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$

であるから

$$\begin{aligned} n!e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n} \leqq 1 \end{aligned}$$

したがって $\qquad 0 < n!e - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!} < 1$

ここで，$e = \dfrac{q}{p}$ を有理数 (p，q は自然数) と仮定すると，$n = p$ のとき $n!e - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!}$ は整数となり，上式に反する． **証終**

補足

実数を有理数と無理数に分類するように，複素数を**代数的数**と**超越数**に分類する．代数的数とは，有理数を係数とする代数方程式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n = 0 \quad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \text{は有理数})$$

の解で表されるものをいい，超越数とは，代数的数でない複素数をいう．

たとえば，$-2 + x^2 = 0$，$1 + x^2 = 0$ などの解 $\pm\sqrt{2}$，$\pm i$ は代数的数である．有理数は 1 次の代数方程式の解であるから，有理数は代数的数である．この対偶をとると，実数の超越数は無理数であることがわかる．

1873 年にエルミート (Hermite) により，e は超越数であることが証明された．

有理数における整数の存在は限られたものであるように，複素数における代数的数の存在は限られたものであることが知られている．つまり複素数のほとんどが超越数であるが (その割合を極限でいえば 1)，われわれがこれまでに知り得た超越数は，e，π などのごく僅かである．

2003 大阪大学 (理系) 後期

π を円周率とする．次の積分について考える．

$$I_0 = \pi \int_0^1 \sin \pi t \, dt, \quad I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^n \sin \pi t \, dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(1) n が自然数であるとき，不等式

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x \quad (x > 0)$$

が成立することを数学的帰納法により示せ．これを用いて，不等式

$$I_0 + uI_1 + u^2 I_2 + \cdots + u^n I_n < \pi e^{\pi u} \quad (u > 0)$$

が成立することを示せ．

(2) I_0，I_1 の値を求めよ．また，漸化式

$$I_{n+1} = \frac{4n+2}{\pi} I_n - I_{n-1} \quad (n = 1, 2 \cdots)$$

が成立することを示せ．

(3) π が無理数であることを背理法により証明しよう．π が無理数でないとし，正の整数 p，q によって $\pi = \dfrac{p}{q}$ として表されると仮定する．$A_0 = I_0$，$A_n = p^n I_n$ とおくとき，A_0，A_1，A_2，$\cdots$ は正の整数になることを示せ．さらに，これから矛盾を導け．

解答 (1) $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} < e^x \quad (x > 0) \quad \cdots$(A) とおく．

$n = 1$ のとき，$\displaystyle\int_0^x 1 \, dt < \int_0^x e^t \, dt$ より $x < e^x - 1$ となり (A) は成り立つ．

$n = k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると，$x > 0$ に対して

$$\int_0^x \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) dt < \int_0^x e^t \, dt$$

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x - 1$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x$$

よって，$n = k + 1$ のときも (A) は成り立つ．
したがって，すべての自然数 n について (A) は成り立つ．

$0<t<1$ において $0<t^j(1-t)^j\sin\pi t<1$ であるから

$$\sum_{j=0}^{k}u^jI_j=\sum_{j=0}^{k}u^j\cdot\frac{\pi^{j+1}}{j!}\int_0^1 t^j(1-t)^j\sin\pi t\,dt$$
$$<\pi\sum_{j=0}^{k}\frac{(\pi u)^j}{j!}\int_0^1 dt<\pi e^{\pi u}$$

よって　$I_0+uI_1+u^2I_2+\cdots+u^nI_n<\pi e^{\pi u}\quad(u>0)$

(2)　$$I_0=\pi\int_0^1\sin\pi t\,dt=\Big[\ -\cos\pi t\ \Big]_0^1=\mathbf{2}$$

$$I_1=\pi^2\int_0^1 t(1-t)\sin\pi t\,dt=-\pi\int_0^1 t(1-t)(\cos\pi t)'\,dt$$
$$=-\pi\Big[\ t(1-t)\cos\pi t\ \Big]_0^1+\pi\int_0^1(1-2t)\cos\pi t\,dt$$
$$=\int_0^1(1-2t)(\sin\pi t)'\,dt$$
$$=\Big[\ (1-2t)\sin\pi t\ \Big]_0^1-\int_0^1(-2)\sin\pi t\,dt$$
$$=-\frac{2}{\pi}\Big[\ \cos\pi t\ \Big]_0^1=\frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{\pi}}$$

$g_n(t)=\{t(1-t)\}^n$ とおくと　$g_{n+1}(t)=\{t(1-t)\}^{n+1}$

$$g'_{n+1}(t)=(n+1)(1-2t)g_n(t)\quad\cdots①$$
$$g''_{n+1}(t)=(n+1)\{-2g_n(t)+(1-2t)g'_n(t)\}$$
$$=(n+1)\{-2g_n(t)+(1-2t)\cdot n(1-2t)g_{n-1}(t)\}$$
$$=-2(n+1)g_n(t)+n(n+1)\{1-4t(1-t)\}g_{n-1}(t)$$
$$=-2(n+1)g_n(t)+n(n+1)\{g_{n-1}(t)-4g_n(t)\}$$
$$=-2(n+1)(2n+1)g_n(t)+n(n+1)g_{n-1}(t)\quad\cdots②$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt &= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 g_{n+1}(t)(\cos\pi t)'\,dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\Big[\, g_{n+1}(t)\cos\pi t \,\Big]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 g'_{n+1}(t)\cos\pi t\,dt \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g'_{n+1}(t)(\sin\pi t)'\,dt \\ &= \frac{1}{\pi^2}\Big[\, g'_{n+1}(t)\sin\pi t \,\Big]_0^1 - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g''_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

① より $g'_{n+1}(0) = g'_{n+1}(1) = 0$ であるから

$$\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g''_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt$$

これに ② を代入すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = \frac{2(n+1)(2n+1)}{\pi^2}&\int_0^1 g_n(t)\sin\pi t\,dt \\ -\frac{n(n+1)}{\pi^2}&\int_0^1 g_{n-1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

上式の両辺に $\dfrac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = \frac{4n+2}{\pi}\cdot\frac{\pi^{n+1}}{n!}&\int_0^1 g_n(t)\sin\pi t\,dt \\ -\frac{\pi^n}{(n-1)!}&\int_0^1 g_{n-1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

よって　　$I_{n+1} = \dfrac{4n+2}{\pi}I_n - I_{n-1}$

(3) 正の整数 p，q によって，$\pi = \dfrac{p}{q}$ と表されると仮定すると，

$$A_0 = I_0 = 2,\quad A_1 = pI_1 = p\cdot\frac{4}{\pi} = 4q$$

(3) の結果の両辺に p^{n+1} を掛けると

$$p^{n+1}I_{n+1} = (4n+2)q\cdot p^n I_n - p^2\cdot p^{n-1}I_{n-1}$$

ゆえに　　$A_{n+1} = (4n+2)qA_n - p^2A_{n-1}$　$\cdots$③

A_0，A_1 は整数であるから，③ により，A_n $(n = 0, 1, \cdots)$ は整数である．
また，I_n の定義により，$I_n > 0$ であるから，A_n は自然数である．

(1) の結果において，$u = p$ とすると

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n < \pi e^{\pi p}$$

$\pi e^{\pi p}$ は定数であるから，$\pi e^{\pi p}$ を超える自然数 n が存在し，上式より

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n < n \quad \cdots④$$

また，A_n $(n = 0, 1, \cdots)$ は自然数であるから

$$n + 1 \leqq A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad \cdots⑤$$

このとき，④ は ⑤ に反する．よって，π は無理数である．

補足

π の無理性は，1761 年にランベルト (Lambert) によって証明され，その超越性は，1882 年にリンデマン (Lindemann) によって証明された．

解説

阪大の π の無理性の証明は，漸化式による誘導問題になっている．漸化式を利用しない次の解法もある．

問題に与えられた

$$I_0 = \pi\int_0^1 \sin\pi t\,dt,\quad I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\sin\pi t\,dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

に対して，$J_n = u^n\pi^n I_n$ とおくと $(n = 0, 1, 2\cdots)$

$$J_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 u^n(\pi t)^n(\pi - \pi t)^n\sin\pi t\cdot\pi\,dt$$

$\theta = \pi t$ とすると

$$J_n = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} u^n\theta^n(\pi-\theta)^n \sin\theta\, d\theta \quad \cdots ①$$

$0 < \theta < \pi$ のとき $0 < \theta(\pi-\theta) < \pi^2$，したがって

$$0 < u^n\theta^n(\pi-\theta)^n \sin\theta < u^n\pi^{2n} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$0 < J_n < \frac{(u\pi^2)^n}{n!}\pi \quad \cdots ③$$

ここで，$a = u\pi^2$，$m = [2a]+1$ とすると

$$\frac{(u\pi^2)^n}{n!} = \frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{m+1}\cdot\frac{a}{m+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n} < \frac{a^m}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$$

上式により，u に対して n を十分大きくとれば，③ より

$$0 < J_n < 1 \quad \cdots ④$$

次に

$$f(\theta) = \frac{1}{n!}u^n\theta^n(\pi-\theta)^n \quad \cdots ⑤$$

とおくと，① から

$$J_n = \int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\, d\theta \quad \cdots ⑥$$

部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\, d\theta &= \Big[-f(\theta)\cos\theta\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(\theta)\cos\theta\, d\theta \\ &= f(\pi) + f(0) + \int_0^{\pi} f'(\theta)\cos\theta\, d\theta \\ \int_0^{\pi} f'(\theta)\cos\theta\, d\theta &= \Big[\, f'(\theta)\sin\theta\,\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f''(\theta)\sin\theta\, d\theta \\ &= -\int_0^{\pi} f''(\theta)\sin\theta\, d\theta\end{aligned}$$

ゆえに $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\, d\theta = f(\pi) + f(0) - \int_0^{\pi} f''(\theta)\sin\theta\, d\theta$

したがって，この部分積分を順次行うと，$f^{(2n+2)}(\theta) = 0$ であるから

$$\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\, d\theta = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)) \quad \cdots ⑦$$

$f(\pi-\theta) = f(\theta)$ であるから，合成関数の微分律により

$$f^{(j)}(\theta) = (-1)^j f^{(j)}(\pi-\theta)$$

上式より，$f^{(2k)}(\pi)=f^{(2k)}(0)$ であるから，⑥，⑦ より

$$J_n=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(0) \quad \cdots ⑧$$

⑤ の $(\pi-\theta)^n$ を展開すると

$$f(\theta)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k u^n \pi^{n-k}\theta^{n+k}$$

ゆえに　　$f^{(k)}(0)=0 \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$

$$f^{(n+k)}(0)=(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k\frac{(n+k)!}{n!}u^n\pi^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

自然数 p，q を用いて，$\pi=\dfrac{p}{q}$ と表されると仮定すると，$u=q$ のとき

$$u^n\pi^{n-k}=q^n\left(\frac{p}{q}\right)^{n-k}=p^{n-k}q^k$$

このとき，$f^{(i)}(0)$ は整数であるから $(i=0,1,2,\cdots,2n)$，⑧ より J_n は整数となり，④ に反する．したがって，π は無理数である．

2006 京都大学 (理系) 後期

$\tan 1^\circ$ は有理数か．

解答 $\tan 1^\circ$ を有理数と仮定する．88 以下の整数 n に対して，$\tan n^\circ$ が有理数ならば

$$\tan(n+1)^\circ=\frac{\tan n^\circ+\tan 1^\circ}{1-\tan n^\circ\tan 1^\circ}$$

より，$\tan(n+1)^\circ$ は有理数である．したがって，数学的帰納法により，$1\leqq n\leqq 89$ の自然数 n について，$\tan n^\circ$ は有理数となる．

このとき，$\tan 30^\circ$ は無理数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，上の結論に反する．

よって，$\tan 1^\circ$ は無理数である．■

2024年2月9日 (金)

2003年 九大理系

xy 平面上で，　　$x = r(t)\cos t,\ \ y = r(t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$
で表される曲線を C とする。

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ。

(2) 一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積は $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t\,dt$ と表せることを示せ。

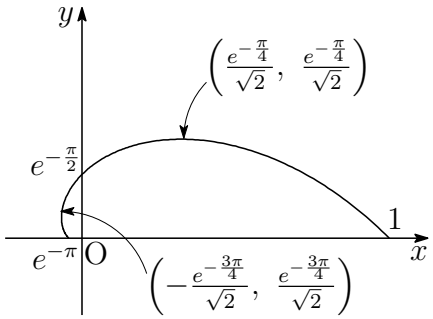
解答　(1) $x = e^{-t}\cos t$，$y = e^{-t}\sin t$ を t で微分すると

$$x' = -e^{-t}(\sin t + \cos t) = -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y' = -e^{-t}(\sin t - \cos t) = -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

x，y の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
x'		$-$	0	$+$	
x	1	↘	$-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↗	$-e^{-\pi}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↘	0



x は $t = \dfrac{3\pi}{4}$ で最小値 $-\dfrac{\boldsymbol{e^{-\frac{3\pi}{4}}}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$ をとり，y は $t = \dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\dfrac{\boldsymbol{e^{-\frac{\pi}{4}}}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$ をとる．

したがって，C の概形は右の図のようになる．

$$
\begin{aligned}
(2)\ \int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t \, dt &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{(r(t))^3\}' \sin^2 t \cos t \, dt \\
&= \frac{1}{3} \Big[\{r(t)\}^3 \sin^2 t \cos t \Big]_0^{\pi} \\
&\qquad - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 (\sin^2 t \cos t)' \, dt \\
&= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t) \, dt \\
&= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \{2 \sin t (1 - \sin^2 t) - \sin^3 t\} \, dt \\
&= \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt
\end{aligned}
$$

(3) $y_1 = e^{-t}\sin t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $y_2 = e^{-t}\sin t \quad \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq t \leqq \pi\right)$,

$\alpha = -\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$, $\beta = e^{-\pi}$ とおくと

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{\alpha}^{1} {y_1}^2\,dx - \pi\int_{\alpha}^{\beta} {y_2}^2\,dx \\ &= \pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} y^2\frac{dx}{dt}\cdot dt - \pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} y^2\frac{dx}{dt}\cdot dt \\ &= -\pi\int_{0}^{\pi} y^2\frac{dx}{dt}dt = -\int_{0}^{\pi}(r(t)\sin t)^2\{r(t)\cos t\}'dt \\ &= -\pi\int_{0}^{\pi}(r(t))^2\sin^2 t\cdot\{r'(t)\cos t - r(t)\sin t\}\,dt \\ &= -\pi\int_{0}^{\pi}(r(t))^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt + \pi\int_{0}^{\pi}(r(t))^3\sin^3 t\,dt \end{aligned}$$

これに (2) の等式を適用すると

$$\begin{aligned} V &= -\pi\int_{0}^{\pi}(r(t))^3\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)dt + \pi\int_{0}^{\pi}(r(t))^3\sin^3 t\,dt \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_{0}^{\pi}(r(t))^3\sin t\,dt = \frac{2\pi}{3}\int_{0}^{\pi} e^{-3t}\sin t\,dt \end{aligned}$$

極方程式による曲線の回転体の体積

極方程式 $r = r(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{0}^{\pi}\{r(\theta)\}^3\sin\theta\,d\theta}$$

2009 京都大学 (理系) 前期

xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r = 2 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ により表される曲線を C とする．C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

解答 $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{0}^{\pi}(2+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2\pi}{3}\left[\ -\frac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\ \right]_{0}^{\pi} = \frac{40}{3}\pi$

2024年2月10日 (土)

2002年 九大理系

平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている。ただし，e は自然対数の底である。原点を O，点 $(0,\ 1)$ を M とする。t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したとき点 P が描く曲線を C とする。時刻 t において，曲線 C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 x，y に対して y を x を用いて表せ。

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ。

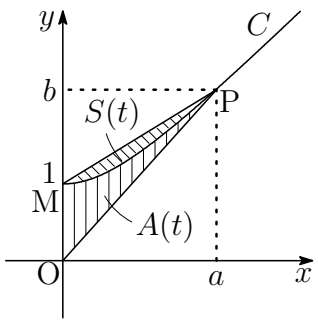
(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ。

解答　(1) $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$，$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ より　$y+x=e^t$，$y-x=e^{-t}$

ゆえに　　$(y+x)(y-x)=e^t\cdot e^{-t}$　したがって　$y^2-x^2=1$

$y>0$ であるから　　$\boldsymbol{y=\sqrt{x^2+1}}$

(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，区間 $[0,\ a]$ における曲線 C および直線 $\mathrm{OP}: y=\dfrac{b}{a}x$ について，(1) の結果から，$b=\sqrt{a^2+1}$ であるから



$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}-\frac{b}{a}x&=\frac{a\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{a^2+1}}{a}\\&=\frac{(a^2-x^2)}{a(a\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{a^2+1})}\geqq 0\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}A(t)&=\int_0^a\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{b}{a}x\right)dx\\&=\frac{1}{2}\left[\ x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{b}{a}x^2\ \right]_0^a\\&=\frac{1}{2}\left\{a\sqrt{a^2+1}+\log(a+\sqrt{a^2+1})-ab\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{ab+\log(a+b)-ab\right\}=\frac{1}{2}\log(a+b)\\&=\frac{1}{2}\log\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{t}{2}}\end{aligned}$$

$A(t)+S(t)=\dfrac{1}{2}a$ であるから　$S(t)=\dfrac{1}{2}a-A(t)=\boldsymbol{\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}-\dfrac{t}{2}}$

(3) $f(t)=A(t)-S(t)$ とおくと　$f(t)=t-\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}$

ゆえに　$f'(t)=1-\dfrac{e^t+e^{-t}}{4}=-\dfrac{e^{-t}}{4}(e^{2t}-4e^t+1)$

$f'(t)=0$ を解くと $(t\geqq 0)$

$t=\log(2+\sqrt{3})$

よって，右の増減表により

t	0	$\cdots$	$\log(2+\sqrt{3})$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	極大	↘

$\boldsymbol{t=\log(2+\sqrt{3})}$ **で最大**

2024年2月11日 (日)

定型問題の1つであるアステロイド (astroid)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

が半径 a の円内をその 1/4 の半径を持つ円が滑ることなく転がるとき，内円の円周上の任意の一点の軌跡であることは入試問題でもよく取り上げられています．また，アステロイドが接線群の包絡線としても出題されています．今回は入試問題に出題される接線群の包絡線について解説します．

2016年 大分大医医

中心が原点Oで半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する．円 C_2 上の点Pは最初に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ にあるとする．円 C_2 の中心をBとするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表しなさい．

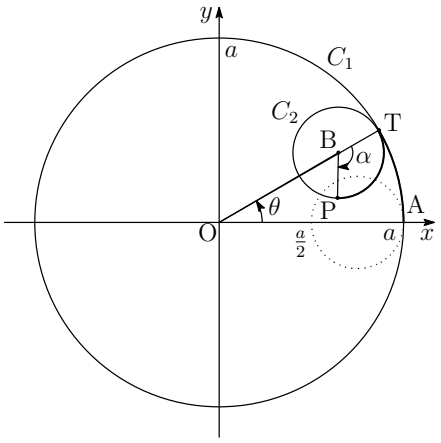
(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，動点Pが移動する距離を求めなさい．

解答 (1) C_1 と C_2 の接点をT，$\alpha = \angle\mathrm{PBT}$ とする．C_1 および C_2 上の弧について，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから

$$a\theta = \frac{a}{4} \times \alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 4\theta$$

BT の x 軸のなす角が θ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \frac{a}{4}(\cos(\theta-\alpha), \sin(\theta-\alpha)) \\ &= \frac{a}{4}(\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta)) \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)}\end{aligned}$$



(2) $\mathrm{OB} = \mathrm{OT} - \mathrm{BT} = a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{3}{4}a$，$\angle \mathrm{AOB} = \theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \\ &= \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta - \sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{3}{4}a(\sin\theta + \sin 3\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{4}a(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

したがって $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{9}{8}a^2(1 - \cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta)$

$$= \frac{9}{8}a^2(1 - \cos 4\theta) = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta$$

求める距離を s とすると，$\dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$ の周期が $\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して

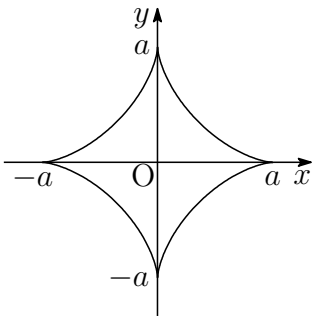
$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}a|\sin 2\theta|\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2\theta\,d\theta = \left[-3a\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{6a}$$

解説 (2) の結果は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$$

となり，その軌跡はアストロイドである．



$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) = a\left(-3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cos\theta\right)$$

$$= 3a\sin\theta\cos\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$= \frac{3}{2}a\sin 2\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

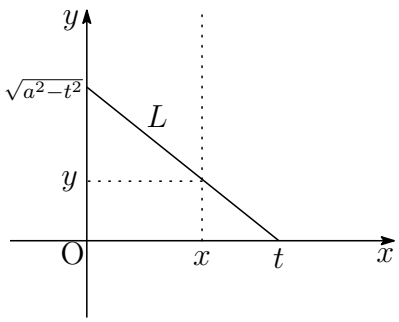
ゆえに $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2} = \dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$

アストロイド (astroid) の x 軸および y 軸に関する対称性により

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}a\sin 2\theta\, d\theta = 3a\Big[-\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \end{aligned}$$

補足 アステロイドは，次の線分 L の接線群の包絡線である．

長さ a の線分 L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，L の包絡線 (L の通る領域と通らない領域の境界線) を求める．
右の図のように L が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にあるとき，L 上の点 $(x,\ y)$ について



$$y = -\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}x + \sqrt{a^2-t^2} \quad \cdots(*)$$

が成立する．ここで，x を固定し，y を t の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}x - \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{a^2x - t^3}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$
これを $(*)$ に代入すると

$$y = -x^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$$

したがって　$\begin{aligned} y^2 &= x^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2 \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \end{aligned}$

よって　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

一般に，L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，上式は成立する．

2024年2月12日(月)

2011年 阪大理系2番

実数θが動くとき，xy平面上の動点$\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$および$\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$を考える．$\theta$が$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，平面内で線分PQが通過する部分をDとする．Dをx軸のまわりに1回転してできる立体の体積Vを求めよ．

解答 2点$\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$を通る直線の方程式は$\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{x}{8\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \sin\theta - \frac{x}{8}\tan\theta \quad \cdots ①$$

この直線上のxを固定し，yが極値をとる点では，$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$であるから

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \frac{x}{8\cos^2\theta} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 8\cos^3\theta \quad \cdots ②$$

②を①に代入すると

$$y = \sin\theta - \frac{8\cos^3\theta}{8}\tan\theta \quad \text{ゆえに} \quad y = \sin^3\theta \quad \cdots ③$$

②，③より，直線PQの包絡線は，$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$のときも成立することに注意して

$$(*)\begin{cases} x = 8\cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$(*)$から，θを消去すると

$$y = \left\{1 - \left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leqq x \leqq 8)$$

$x = 8t$とおくと　$\dfrac{dx}{dt} = 8$

x	$0 \longrightarrow 8$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^8 y^2\,dx = \int_0^8 \left\{1 - \left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3 dx = 8\int_0^1 (1 - t^{\frac{2}{3}})^3\,dt \\ &= 8\int_0^1 (1 - 3t^{\frac{2}{3}} + 3t^{\frac{4}{3}} - t^2)\,dt \\ &= 8\left[\, t - \frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}t^3 \,\right]_0^1 = \frac{128}{105}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{128}{105}\pi}$

別解 $(*)$ より　$\dfrac{dx}{d\theta} = -24\cos^2\theta\sin\theta$

x	$0 \longrightarrow 8$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^8 y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6\theta(-24\cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta)^3\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - 3\cos^4\theta + 3\cos^6\theta - \cos^8\theta)\sin\theta\,d\theta \\
&= 24\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{3}{5}\cos^5\theta - \frac{3}{7}\cos^7\theta + \frac{1}{9}\cos^9\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{105}
\end{aligned}$$

補足 $t = \sin^2\theta$ とおくと　$\dfrac{dt}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$\cos\theta = (1-t)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^3\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= 12\int_0^1 t^3(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= 12\cdot\frac{3!\cdot\frac{1}{2}!}{(3+\frac{1}{2}+1)!}(1-0)^{3+\frac{1}{2}+1} \\
&= 12\cdot\frac{3!\cdot\frac{1}{2}!}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!} = \frac{128}{105}
\end{aligned}$$

2024年2月13日 (火)

2014年 名大理系

実数 t に対して2点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える．t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分PQが通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ．

解答 2点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線は

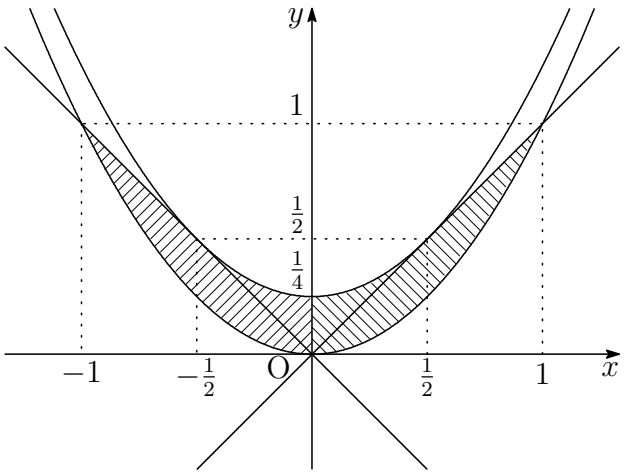
$$y - t^2 = \frac{(t+1)^2 - t^2}{(t+1) - t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (2t+1)x - t^2 - t \quad \cdots ①$$

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2t - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = t + \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

①，② から t を消去すると　　$y = x^2 + \dfrac{1}{4} \quad \cdots (*)$

$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき，線分 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ が通過してできる図形は，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む．



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_0^1 (x-x^2)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(x^2+\frac{1}{4}\right) - x \right\} dx \\ &= \int_0^1 x(1-x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} + \left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S = \dfrac{5}{12}}$

2024年2月14日 (水)

2014年 東大文系

座標平面の原点をOで表す.
線分 $y=\sqrt{3}\,x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点Pと，線分 $y=-\sqrt{3}\,x$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点Qが，線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く．このとき，線分PQの通過する領域を D とする.

(1) s を $-3 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ.

(2) D を図示せよ.

解答　(1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leqq p \leqq 2, -3 \leqq q \leqq 0)$,

$$\mathrm{OP}=2p, \quad \mathrm{OQ}=-2q$$

$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ であるから　$2p+(-2q)=6$　ゆえに　$q=p-3$

したがって　$0 \leqq p \leqq 2,\ -3 \leqq p-3 \leqq 0$　すなわち　$0 \leqq p \leqq 2$

2点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y-\sqrt{3}p=\frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x-p)$$

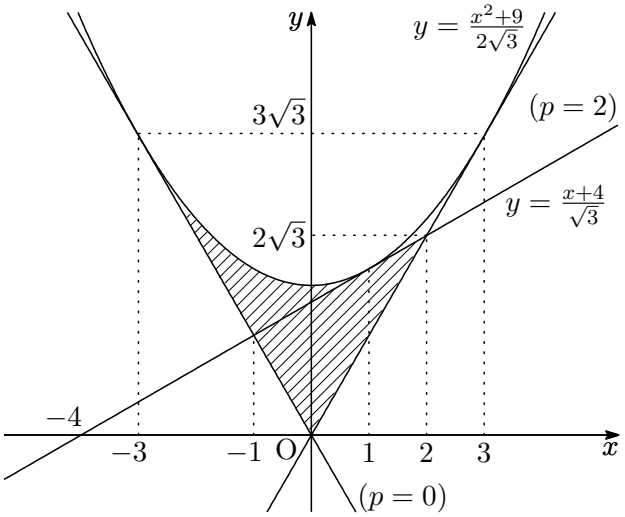
すなわち　$y=\dfrac{(2p-3)x-2p^2+6p}{\sqrt{3}}$　$\cdots$①

直線①の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dp}=0$ であるから

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-4p+6)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=2p-3 \quad \cdots②$$

①，②から p を消去すると　$y=\dfrac{x^2+9}{2\sqrt{3}}$　$\cdots(*)$

D は，$0 \leqq p \leqq 2$ のとき，2点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分PQ(直線①)が通過する領域であるから，$(*)$ が直線PQの包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む.



よって，$0 \leqq s \leqq 2$ をみたす点 $(s,\ t)$ が D にあるとき

$$\textbf{−3} \leqq \boldsymbol{s} \leqq \textbf{0 のとき} \quad -\sqrt{\textbf{3}}\boldsymbol{s} \leqq \boldsymbol{t} \leqq \frac{\boldsymbol{s^2+9}}{\boldsymbol{2\sqrt{3}}}$$

$$\textbf{0} \leqq \boldsymbol{s} \leqq \textbf{1 のとき} \quad \sqrt{\textbf{3}}\boldsymbol{s} \leqq \boldsymbol{t} \leqq \frac{\boldsymbol{s^2+9}}{\boldsymbol{2\sqrt{3}}}$$

$$\textbf{1} \leqq \boldsymbol{s} \leqq \textbf{2 のとき} \quad \sqrt{\textbf{3}}\boldsymbol{s} \leqq \boldsymbol{t} \leqq \frac{\boldsymbol{s+4}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$$

(2) 領域 D は (1) で示した領域.

2024年2月15日 (木)

2014年 東大理系

座標平面の原点をOで表す.
線分 $y=\sqrt{3}\,x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点Pと，線分 $y=-\sqrt{3}\,x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点Qが，線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く．このとき，線分PQの通過する領域を D とする.

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ.

(2) D を図示せよ.

解答　(1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leqq p \leqq 2, -2 \leqq q \leqq 0)$,

$$\mathrm{OP}=2p, \quad \mathrm{OQ}=-2q$$

$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ であるから　$2p+(-2q)=6$　ゆえに　$q=p-3$

したがって　$0 \leqq p \leqq 2,\ -2 \leqq p-3 \leqq 0$　すなわち　$1 \leqq p \leqq 2$

2点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y-\sqrt{3}p=\frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x-p)$$

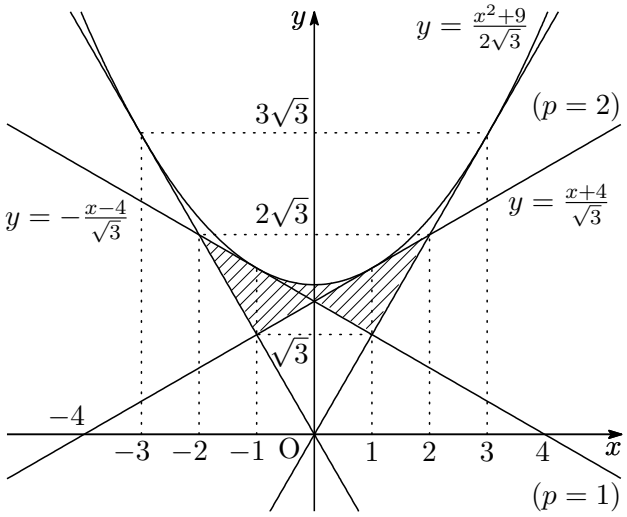
すなわち　$y=\dfrac{(2p-3)x-2p^2+6p}{\sqrt{3}}$　$\cdots$①

直線①の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dp}=0$ であるから

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-4p+6)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=2p-3 \quad \cdots②$$

①，②から p を消去すると　$y=\dfrac{x^2+9}{2\sqrt{3}}$　$\cdots(*)$

D は，$1 \leqq p \leqq 2$ のとき，2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分 PQ(直線 ①) が通過する領域であるから，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む.



よって，$0 \leqq s \leqq 2$ をみたす点 $(s,\ t)$ が D にあるとき

$$\boldsymbol{0 \leqq s \leqq 1 \text{ のとき}} \quad \boldsymbol{-\frac{s-4}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}}$$

$$\boldsymbol{1 \leqq s \leqq 2 \text{ のとき}} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s+4}{\sqrt{3}}}$$

(2) 領域 D は (1) で示した領域.

2024年2月16日 (金)

2023年 京大理系

Oを原点とするxyz空間において，点Pと点Qは次の3つの条件(a)，(b)，(c)を満たしている．

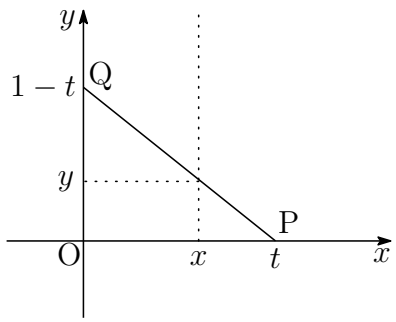
(a) 点Pはx軸上にある．

(b) 点Qはyz平面上にある．

(c) 線分OPと線分OQの長さの和は1である．

点Pと点Qが条件(a)，(b)，(c)を満たしながらくまなく動くとき，線分PQが通過してできる立体の体積を求めよ．

解答 (1) $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1-t)$とするとき$(0 \leqq t \leqq 1)$，PQの包絡線(PQの通過する領域と通過しない領域の境界線)を求める．



PQ上の点$(x,\ y)$について

$$y = \left(1 - \frac{1}{t}\right)x + 1 - t \quad \cdots(*)$$

が成立する．ここで，xを固定し，yをtの関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{t^2} - 1$$

点$(x,\ y)$が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$であるから　$t = \sqrt{x}$

これを$(*)$に代入すると

$$y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)x + 1 - \sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2$$

求める回転体の体積を V とすると，y 軸に関する対称性に注意して

$$\frac{V}{2\pi}=\int_0^1 y^2\,dx=\int_0^1(1-\sqrt{x}\,)^4\,dx$$

$u=1-\sqrt{x}$ とおくと　$x=(1-u)^2$　ゆえに　$\dfrac{dx}{du}=-2(1-u)$

x	0	$\longrightarrow$	1
u	1	$\longrightarrow$	0

したがって　$\dfrac{V}{2\pi}=\displaystyle\int_1^0 u^4\cdot\{-2(1-u)\}\,du=2\int_0^1 u^4(1-u)\,du$

$$=2\int_0^1(u^4-u^5)\,du=2\left[\,\frac{u^5}{5}-\frac{u^6}{6}\,\right]_0^1=\frac{1}{15}$$

よって　$V=\boldsymbol{\dfrac{2}{15}\pi}$

別解[13]　$\dfrac{V}{2\pi}=\displaystyle\int_1^0 u^4\cdot\{-2(1-u)\}\,du=2\int_0^1 u^4(1-u)\,du=2\cdot\frac{4!1!}{6!}(1-0)^6=\frac{1}{15}$

[13] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

2024年2月17日 (土)

今回は入試問題に出題される法線群の包絡線について解説します.

放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ に引ける接線の本数は，領域 $y>\dfrac{x^2}{2}$ の点からは 0 本，$y=\dfrac{x^2}{2}$ 上の点からは 1 本，領域 $y<\dfrac{x^2}{2}$ の点からは 2 本引ける．一方，放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ に引ける法線の本数は簡単ではない．放物線 $C_1:y=\dfrac{x^2}{2}$ に引ける法線の本数は，C_1 の法線群の包絡線 $C_2:y=1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ に引ける接線の本数に等しい．C_1 に引ける法線の本数は

- 領域 $y>1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ の点からは C_1 に 3 本
- 曲線 $y=1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ $(x\neq 0)$ 上の点からは C_1 に 2 本，点 $(0,\ 1)$ からは C_1 に 1 本
- 領域 $y<1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ の点からは C_1 に 1 本

である．これに関する問題が次です.

2009 年 九大理系

曲線 $C_1:y=\dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする。ただし，$b\neq a$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近づく。A の座標を a で表せ。

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，(1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　(1) $y=\dfrac{x^2}{2}$ を微分すると　$y'=x$

点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線の方向ベクトルは $(1,\ a)$ であるから，A における法線の方程式は

$$1(x-a)+a\left(y-\frac{a^2}{2}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+ay=a+\frac{a^3}{2} \qquad \cdots ①$$

同様にして $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の方程式は　$x+by=b+\dfrac{b^3}{2}$　$\cdots ②$

①，② から x を消去すると

$$(b-a)y=b-a+\frac{b^3-a^3}{2} \quad b\neq a \text{ より} \quad y=1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x+a\left(1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}\right)=a+\frac{a^3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{ab(a+b)}{2}$$

したがって，R の座標は　$\left(-\dfrac{ab(a+b)}{2},\ 1+\dfrac{a^2+ab+b^2}{2}\right)$

よって，$b\to a$ による R の極限の点 A の座標は　$\boldsymbol{\left(-a^3,\ 1+\dfrac{3}{2}a^2\right)}$

(2)　(1) の結果から

$$x=-a^3,\ \ y=1+\frac{3}{2}a^2$$

とおくと，第 1 式から　$a=-x^{\frac{1}{3}}$

これを第 2 式に代入すると　$y=1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

上式が C_2 の方程式であり，C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{2}=1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \quad \text{ゆえに} \quad x^2-3x^{\frac{2}{3}}-2=0$$

$x^{\frac{1}{3}}=t\cdots ③$ とおくと　$x=t^3\cdots ③'$

$$t^6-3t^2-2=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t^2+1)^2(t^2-2)=0$$

したがって　$t=\pm\sqrt{2}$　　③′ より　$x=\pm 2\sqrt{2}$

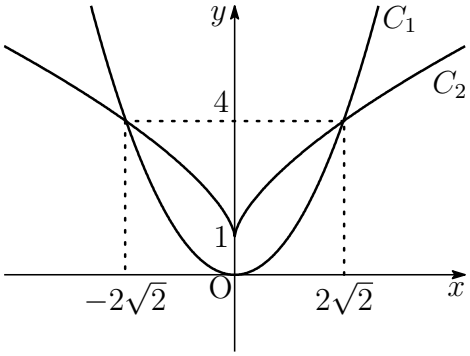
これを C_1 の方程式に代入して　$y=4$

よって，C_1 と C_2 の交点の座標は　　$\boldsymbol{(\pm 2\sqrt{2},\ 4)}$

$C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ について　$y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，$y'' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

ゆえに　$y'' < 0$　したがって　C_2 は上に凸の曲線である．

したがって，C_1，C_2 の概形は，次のようになる．



補足

C_2 上の点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ について，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \left(-a^3,\ \frac{3}{2}a^2\right) = \frac{3}{2}a^2\left(-\frac{2}{3}a,\ 1\right)$$

$a \to 0$ とすると，C_2 の尖点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ における接線は，y 軸に平行な直線となる．尖点 (cusp) は，曲線上の可微分でない点であり，接線が定まらないのが一般的である ($y = |x|$ の尖点 $(0,\ 0)$ など)．

(3) C_1，C_2 は y 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left\{\left(1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{x^2}{2}\right\} dx \\ &= 2\left[\ x + \frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{6}\ \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{88\sqrt{2}}{15}} \end{aligned}$$

解説

(2) で求めた C_2 は，C_1 の法線群の包絡線である．一般に $C_1 : y = f(x)$ とすると，2 点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$ における法線の方程式は $(u \neq t)$，それぞれ

$$(x-t)+f'(t)(y-f(t))=0, \quad (x-u)+f'(u)(y-f(u))=0$$

であり，これから

$$x+f'(t)y=t+f'(t)f(t) \quad \cdots ①, \quad x+f'(u)y=u+f'(u)f(u) \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$\begin{aligned}\{f'(u)-f'(t)\}y &= u-t+f'(u)f(u)-f'(t)f(t)\\ &= u-t+f'(u)\{f(u)-f(t)\}+f(t)\{f'(u)-f'(t)\}\end{aligned}$$

$u \neq t$ であるから，両辺を $u-t$ で割ると

$$\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}y=1+f'(u)\cdot\frac{f(u)-f(t)}{u-t}+f(t)\cdot\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}$$

$u \to t$ とすると　　$f''(t)y=1+\{f'(t)\}^2+f(t)f''(t)$

$f''(t) \neq 0$ のとき　　$y=f(t)+\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを ① に代入すると　$x=t-\dfrac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

よって，t を変数として次の $(x,\ y)$ が描く軌跡が C_2 である．

$$x=t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}, \qquad y=f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

上で求めた $(x,\ y)$ は P における曲率円 (接触円) の中心でもある．P における曲率円とは，曲線上の 3 点 P，Q，R について，Q，R が曲線上を P に限りなく近づくときに占める極限の位置の円である．その中心を**曲率中心**という．

C_1 上の 3 点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$，$\mathrm{R}(v,\ f(v))$ とする $(t<u<v)$．3 点 P，Q，R を通る円を $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2-r^2=0$ とすると

$$\begin{aligned}(t-c_1)^2+\{f(t)-c_2\}^2-r^2&=0\\ (u-c_1)^2+\{f(u)-c_2\}^2-r^2&=0\\ (v-c_1)^2+\{f(v)-c_2\}^2-r^2&=0\end{aligned}$$

ここで，$g(s)=(s-c_1)^2+\{f(s)-c_2\}^2-r^2$ とおくと　　$g(t)=g(u)=g(v)=0$

$g(t) = g(u)$ であるから，ロル (Rolle) の定理により

$$g'(t_1) = 0 \quad (t < t_1 < u)$$

を満たす t_1 が存在する．同様に，$g(u) = g(v)$ であるから

$$g'(t_2) = 0 \quad (u < t_2 < v)$$

を満たす t_2 が存在する．$g'(t_1) = g'(t_2)$ であるから，さらにロルの定理を用いると

$$g''(t_3) = 0 \quad (t_1 < t_3 < t_2)$$

を満たす t_3 が存在する．Q，R が P に限りなく近づくとき，$u \to t$，$v \to t$ となるから，上の諸式において

$$g(t) = 0, \quad g'(t) = 0, \quad g''(t) = 0$$

$g'(s)$，$g''(s)$ は

$$g'(s) = 2(s - c_1) + 2f'(s)\{f(s) - c_2\}$$
$$g''(s) = 2 + 2f''(s)\{f(s) - c_2\} + 2\{f'(s)\}^2$$

$g'(t) = 0$，$g''(t) = 0$ であるから

$$(t - c_1) + f'(t)\{f(t) - c_2\} = 0, \quad 1 + \{f'(t)\}^2 + f''(t)\{f(t) - c_2\} = 0$$

上の第 2 式から　　$c_2 - f(t) = \dfrac{1 + \{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを第 1 式に代入すると　　$c_1 - t = -\dfrac{f'(t)(1 + \{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

上の 2 式を $g(t) = 0$ に代入することにより，曲率円の半径 r は

$$r^2 = \frac{(1 + \{f'(t)\}^2)^3}{\{f''(t)\}^2} \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{(1 + \{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}$$

よって，曲線の P における曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は

$$c_1 = t - \frac{f'(t)(1 + \{f'(t)\}^2)}{f''(t)}, \qquad c_2 = f(t) + \frac{1 + \{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ の描く軌跡を**縮閉線**といい，曲線の法線群の包絡線と一致することがわかる．

曲線の弧長 s に対する接線の向きの変化率を曲率といい，曲率 κ は，次式で定義される．

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

点 $(x,\ y)$ における接線が，x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$y' = \tan\theta$$

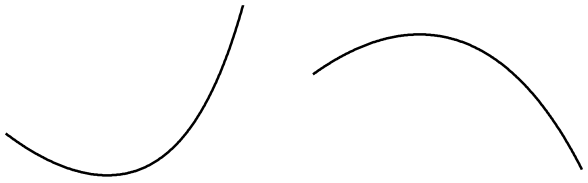
これを θ について，微分することにより

$$y''\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (y')^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1+(y')^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$ であるから，$\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$ より

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = \frac{y''}{1+(y')^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{y''}{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

曲率 κ の逆数 $\dfrac{1}{\kappa}$ を曲率半径という．曲率円の半径は曲率半径の絶対値に等しい．
$\kappa > 0$ すなわち $y'' > 0$ のとき下に凸，$\kappa < 0$ すなわち $y'' <$ のとき上に凸である．
変曲点は曲率の符号が変わる点であり，頂点は曲率が極値をとる点である．



$\kappa > 0$　　$\kappa < 0$

2024年2月18日 (日)

2008 年 長崎大理系

放物線 $y=x^2$ 上に，x 座標が t である点 $\mathrm{P}(t)$ をとる．ただし，$t \geqq 0$ とする．$h \neq 0$ とし，放物線の $\mathrm{P}(t)$ における法線と，$\mathrm{P}(t+h)$ における法線を考える．$h \to 0$ とするとき，この 2 法線の交点の x 座標の極限値を $u(t)$，y 座標の極限値を $v(t)$ とする．さらに $(u(t),\ v(t))$ を点 $\mathrm{Q}(t)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u(t)$ と $v(t)$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Q}(t)$ が上の放物線上にあるとき，t の値と $\mathrm{Q}(t)$ の座標を求めよ．

(3) 上の放物線，曲線 $x=u(t)$，$y=v(t)$，および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答 (1) $y=x^2$ を微分すると　　$y'=2x$

放物線上の点 $(t,\ t^2)$ における法線の方程式は

$$1(x-t)+2t(y-t^2)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+2ty=t+2t^3 \quad \cdots ①$$

$s \neq t$ とする．放物線上の点 $(s,\ s^2)$ における法線の方程式は

$$x+2sy=s+2s^3 \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$2(s-t)y=s-t+2(s^3-t^3) \quad \text{ゆえに} \quad y=s^2+st+t^2+\frac{1}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x+2t\left(s^2+st+t^2+\frac{1}{2}\right)=t+2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad x=-2st(s+t)$$

2 直線 ①，② の交点の座標は　$\left(-2st(s+t),\ s^2+st+t^2+\dfrac{1}{2}\right)$

この点を $s \longrightarrow t$ とした極限の点が $(u(t),\ v(t))$ であるから

$$u(t)=\lim_{s \to t}\{-2st(s+t)\}=\boldsymbol{-4t^3}$$

$$v(t)=\lim_{s \to t}\left(s^2+st+t^2+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{3t^2+\frac{1}{2}}$$

(2) Q(t) が放物線 $y=x^2$ 上にあるから

$$3t^2+\frac{1}{2}=(-4t^3)^2 \quad \text{整理すると} \quad 32t^6-6t^2-1=0$$

ゆえに $(2t^2-1)(4t^2+1)^2=0$ $t \geqq 0$ に注意して $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

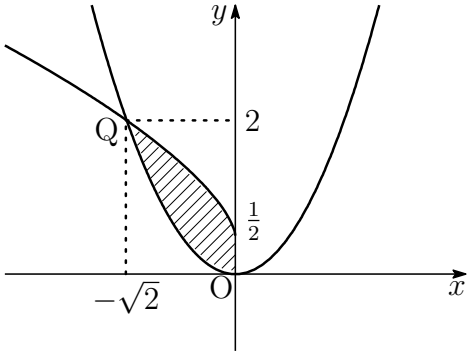
よって $\mathbf{Q(-\sqrt{2},\ 2)}$

(3) (1) の結果から $x=-4t^3$, $y=3t^2+\dfrac{1}{2}$

ゆえに $2x=(-2t)^3$, $y=\dfrac{3}{4}(-2t)^2+\dfrac{1}{2}$

上の 2 式から t を消去すると $y=\dfrac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$

求める面積は，下の図の斜線部分である．



この面積を S とすると

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}-x^2\right)dx$$
$$=\left[\ \frac{9x(2x)^{\frac{2}{3}}}{20}+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\ \right]_{-\sqrt{2}}^{0}=\boldsymbol{\frac{11}{15}\sqrt{2}}$$

解説 曲線 $y=\dfrac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$ を放物線 $y=x^2$ の法線群の包絡線という．

2024年2月19日 (月)

2017年 九大後期工学部

座標平面上の曲線 $C : y = \sqrt{x}\ (x \geqq 0)$ を考える．C 上の異なる2点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{p})$，$\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{q})\ (p > 0,\ q > 0)$ における，それぞれの法線 ℓ_1，ℓ_2 を考える．法線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 R の座標を p と q で表せ．

(2) q が p に限りなく近づくとき，線分 RP の長さの極限値を p で表せ．

解答　(1) $f(x) = \sqrt{x}$ とおくと　　$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{p})$ における法線 ℓ_1 の方程式は，$-\dfrac{1}{f'(p)} = -2\sqrt{p}$ より

$y - \sqrt{p} = -2\sqrt{p}(x - p)$　すなわち　$y = -2\sqrt{p}\,x + (2p+1)\sqrt{p}$　$\cdots$①

同様に，C 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{q})$ における法線 ℓ_2 の方程式は

$$y = -2\sqrt{q}\,x + (2q+1)\sqrt{q} \quad \cdots ②$$

①，② から y を消去すると

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{p} - \sqrt{q})x &= (2p+1)\sqrt{p} - (2q+1)\sqrt{q} \\ &= 2(p\sqrt{p} - q\sqrt{q}) + \sqrt{p} - \sqrt{q} \end{aligned}$$

2点 P，Q は異なるので，$\sqrt{p} - \sqrt{q} \neq 0$ であるから

$$x = \frac{p\sqrt{p} - q\sqrt{q}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}} + \frac{1}{2} = p + \sqrt{pq} + q + \frac{1}{2}$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned} y &= -2\sqrt{p}\left(p + \sqrt{pq} + q + \frac{1}{2}\right) + (2p+1)\sqrt{p} \\ &= (-2\sqrt{pq} - 2q)\sqrt{p} = -2\sqrt{pq}(\sqrt{p} + \sqrt{q}) \end{aligned}$$

よって，点 R の座標は

$$\boldsymbol{\left(p + \sqrt{pq} + q + \frac{1}{2},\ -2\sqrt{pq}(\sqrt{p} + \sqrt{q})\right)}$$

(2) q が p に限りなく近づいたとき，点 R の極限の位置は，(1) の結果から

$$\left(3p+\frac{1}{2},\ -4p\sqrt{p}\right)$$

このとき，RP の長さは

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(3p+\frac{1}{2}-p\right)^2+(-4p\sqrt{p}-\sqrt{p})^2}\\ =&\sqrt{\left(2p+\frac{1}{2}\right)^2+4p\left(2p+\frac{1}{2}\right)^2}\\ =&\left(2p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+4p}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1+4p)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

解説 q が p に限りなく近づくとき，点 R の極限の位置は，C 上の点 P における曲率中心である．このとき線分 RP の長さは曲率円 (接触円) の半径に等しい．

一般に，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における曲率中心 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は

$$x=t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)},\qquad y=f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

となる．したがって

$$\mathrm{RP}=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}\quad\cdots(*)$$

実際，本題の関数 $f(x)=\sqrt{x}$ について

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$(*)$ より，(2) の RP の長さ，すなわち，$x=p$ における曲率半径は

$$\mathrm{RP}=\left(1+\frac{1}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}\times 4p\sqrt{p}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}\times(4p)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(1+4p)^{\frac{3}{2}}$$

あるいは，$g(x)=f^{-1}(x)=x^2\ (x\geqq 0)$ とおくと

$$g'(x)=2x,\quad g''(x)=2$$

であるから，$g(x)$ の $x=\sqrt{p}$ における曲率半径は

$$\frac{(1+\{g'(\sqrt{p})^2\})^{\frac{3}{2}}}{|g''(\sqrt{p})|}=\frac{\{1+(2\sqrt{p}\,)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2}=\frac{1}{2}(1+4p)^{\frac{3}{2}}\quad\cdots(**)$$

一般に，$g(x)=f^{-1}(x)$ のとき，$f(g(x))=x$ であるから

$$f'(g(x))g'(x)=1,\quad f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)=0$$

上の 2 式から　　$f'(g(x))=\dfrac{1}{g'(x)},\qquad f''(g(x))=-\dfrac{g''(x)}{\{g'(x)\}^3}$

これらを $(*)$ に適用すると，$x=\sqrt{p}$ における $g(x)$ の曲率半径 $(**)$ を得る．

2024年2月20日 (火)

2021年度から大学入試共通テストに移行したが，数学的な問題の本質は何も変化していない．問題の核心を理解していれば，見かけや形式に惑わされることなく解答できると思います．そのためには，問題の本質を理解することが重要だと思います．

例えば，毎年どこかの大学で出題される不等式の証明問題について，ただ解くだけでなく，その不等式ができた背景について理解することも大切だと思います．

今年も東北大と阪大で定番の部分積分法・テイラー展開に関する問題が出題されました[14]．

2021年 東北大理系

以下の問いに答えよ．

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ．

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ．必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい．

[14] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (pp.14-15)

解答　(1)　$I_k(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!}e^x\,dx$ とすると (k は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned} I_k(a) &= -\int_0^a \left\{\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}\right\}' e^x\,dx \\ &= -\left[\ \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}e^x\ \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}(e^x)'\,dx \\ &= \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} + I_{k+1}(a) \end{aligned}$$

$I_k(a)-I_{k+1}(a)=\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}$ より，正の整数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1}\{I_k(a)-I_{k+1}(a)\}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$I_0(a)-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}$$

$I_0(a)=\displaystyle\int_0^a e^x\,dx=e^a-1$ であるから

$$e^a-1-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\quad \text{ゆえに}\quad e^a=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+I_n(a) \qquad (*)$$

よって　$e^a=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}+\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$

(2)　$0\leqq x\leqq a$ において，$1\leqq e^x\leqq e^a$ であるから

$$\frac{(a-x)^n}{n!}\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^a$$

したがって

$$\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq e^a\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx$$

$$-\left[\ \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\ \right]_0^a\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq -e^a\left[\ \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\ \right]_0^a$$

よって　$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

(3) (2) の結果から　　$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq I_n(a) \leqq \dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

(∗) から　　$I_n(a) = e^a - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$

上の 2 式に $a = 1$ を代入すると

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqq I_n(1) \leqq \frac{e}{(n+1)!}, \quad I_n(1) = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (**)$$

(∗∗) の第 1 式から，$I_n(1) > 0$

(∗∗) の第 2 式から，$I_n(1)$ は単調減少列である．

(∗∗) の第 1 式に $n = 5,\ 6$ を代入すると

$$10^{-3} < \frac{1}{720} = \frac{1}{6!} < I_5(1) < \frac{e}{6!},$$
$$\frac{1}{7!} < I_6(1) < \frac{e}{7!} = \frac{3}{5040} < 10^{-3}$$

上の 2 式から　　$I_6(1) < 10^{-3} < I_5(1)$

したがって，不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n は　　$\boldsymbol{n = 6}$

解説 a を定数，n を自然数とする．$f(x)$ を n 回微分可能な関数とし

$$J_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt$$

とおくと

$$\begin{aligned} J_k(x) &= -\int_a^x \left\{ \frac{(x-t)^k}{k!} \right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$J_k(x) - J_{k+1}(x) = \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ であるから，$n \geqq 2$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n-1} \{J_k(x) - J_{k+1}(x)\} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$$J_1(x) - J_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$J_1(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ であるから

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_n(x)$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると，$J_n(x)$ は

$$\frac{(x-a)^n}{n!} M \ \text{と} \ \frac{(x-a)^n}{n!} m$$

の間の値をとるから，この積分区間を I とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c), \qquad c \in I$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．$n = 1$ のとき，平均値の定理により，上式は成立する．したがって，すべての自然数について上式は成立する．

2024年2月21日 (水)

2021年 阪大理系

n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ をみたす実数とする．

(1) $x \geqq t$ のとき，不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\, dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ をみたすような実数 $p,\ q$ の値を求めよ．

解答　(1)　$f(x)=\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)$，$g(x)=f(x)+\dfrac{(x-t)^2}{2}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}=-\frac{1}{xt}(x-t)$$
$$g'(x)=f'(x)+x-t=-\frac{1}{xt}(x-t)+x-t$$
$$=\frac{(xt-1)(x-t)}{xt}$$

$x\geqq t$ において $(t\geqq 1)$，$f(x)$ は単調減少，$g(x)$ は単調増加である．
$f(t)=0$，$g(t)=0$ であるから，$x\geqq t$ において

$$f(x)\leqq 0,\quad g(x)=f(x)+\frac{(x-t)^2}{2}\geqq 0$$

したがって　　$-\dfrac{(x-t)^2}{2}\leqq f(x)\leqq 0$

よって，$x\geqq t$ のとき $(t\geqq 1)$，次式が成立する．

$$-\frac{(x-t)^2}{2}\leqq \log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\leqq 0$$

別解 (部分積分法を用いた証明法)

$$\log x-\log t=\int_t^x\frac{1}{u}\,du=\int_t^x(u-x)'\frac{1}{u}\,du$$
$$=\left[\,(u-x)\frac{1}{u}\,\right]_t^x-\int_t^x(u-x)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$
$$=\frac{1}{t}(x-t)-\int_t^x\frac{x-u}{u^2}du$$

したがって　　$\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)=-\displaystyle\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du$　　(A)

$1\leqq t\leqq x$ であるから　$0\leqq\displaystyle\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du\leqq\int_t^x(x-u)\,du$

$$-\frac{(x-t)^2}{2}=\int_t^x(u-x)\,du\leqq-\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du\leqq 0\qquad\text{(B)}$$

(A)，(B) により，(1) の不等式が導かれる．

(2) (1) で示した不等式により

$$-\int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{(x-t)^2}{2}\,dx \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} (\log x - \log t)\,dx - \frac{1}{t}\int_t^{t+\frac{1}{n}} (x-t)\,dx \leqq 0$$

$$-\left[\ \frac{(x-t)^3}{6}\ \right]_t^{t+\frac{1}{n}} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{t}\left[\ \frac{(x-t)^2}{2}\ \right]_t^{t+\frac{1}{n}} \leqq 0$$

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

(3) (2) で不等式において，$t = 1 + \dfrac{k}{n}$ とすると

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq 0$$

辺々に $-n$ を掛けると

$$0 \leqq \log\left(1+\frac{k}{n}\right) - n\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x\,dx + \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n^2}$$

上式について，$k=0$ から $k=n-1$ までの総和をとると

$$0 \leqq \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right) - n\int_1^2 \log x\,dx + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n}$$

$p = \displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$ とおくと

$$p = \int_1^2 \log x\,dx = \left[\ x(\log x - 1)\ \right]_1^2 = 2\log 2 - 1$$

$a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ より　$0 \leqq a_n - pn + \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n}$　$\cdots(*)$

$-q = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ とおくと

$$q = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\ \log(1+x)\ \right]_0^1 = -\frac{\log 2}{2}$$

$(*)$ において，$n \longrightarrow \infty$ とすると，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - pn - q) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$$

よって　　$\boldsymbol{p = 2\log 2 - 1,\ \ q = -\dfrac{\log 2}{2}}$

2024年2月22日 (木)

今回は，パップス・ギュルダンの定理について解説します．これと関連する問題を京大・九大・阪大・東大の過去問から解説します．

2020年 京大特色

ブラマンジェという型にはめて作るフランス由来のお菓子がある．ここではブラマンジェが，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上の関数

$$y = \sum_{n=0}^{N} \frac{s(2^n x)}{2^n}$$

のグラフと x 軸で囲まれた領域を直線 $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに1回転してできる立体として与えられているとする．ただし，ここで N は自然数，$s(x)$ は x から最も近い整数までの距離とする．

(1) ブランマンジェの体積を計算し，N を用いて表せ．

(2) (1) で求めた体積の $N \to \infty$ の極限を求めよ．

ただし，計算の際にパップス・ギュルダンの定理を証明無しに使ってもよい．ここでパップス・ギュルダンの定理とは次のものである．

> 面積 S の平面図形 A が，それと同一平面上の直線 l の一方の側 (直線 l を含む) のみにあるとき，その図形 A を直線 l の周りに1回転させてできる立体の体積は，(回転による A の重心の移動距離) $\times S$ となる．

また面積 S の平面図形 A が，区間 $a \leqq x \leqq b$ 上で，$\varphi(x) \leqq \psi(x)$ となる連続関数 $\varphi(x),\ \psi(x)$ を用いて

$$A = \{(x,\ y)\,|\,a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$$

と表せたとき，A の重心の座標は

$$\left(\frac{1}{S}\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx,\ \frac{1}{S}\int_a^b \frac{\psi(x)^2 - \varphi(x)^2}{2}\,dx\right)$$

であることを証明無しに使ってもよい．

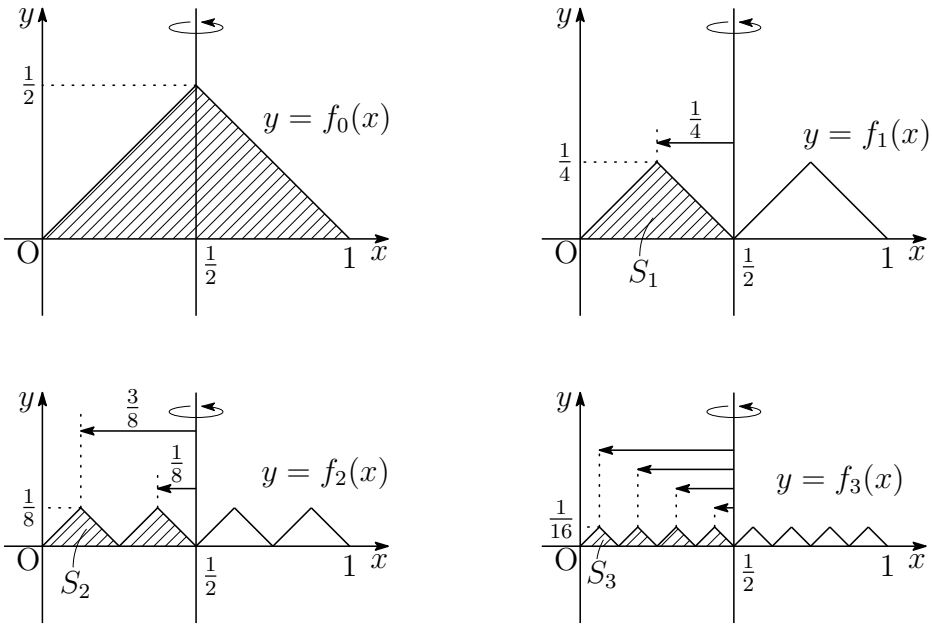
解答　(1) $s(x)$ は x から最も近い整数までの距離であるから　$0 \leqq s(x) \leqq \dfrac{1}{2}$

$f_n(x) = \dfrac{s(2^n x)}{2^n}$ とおくと，$0 \leqq s(2^n x) \leqq \dfrac{1}{2}$ より　$0 \leqq f_n(x) \leqq \dfrac{1}{2^{n+1}}$

$s(2^n(1-x)) = s(2^n - 2^n x) = s(-2^n x) = s(2^n x)$ より　$f_n(1-x) = f_n(x)$

したがって，$f_n(x)$ のグラフは直線 $x = \dfrac{1}{2}$ に関して対称である．

$n = 0, 1, 2, 3$ について，$y = f_n(x)$ のグラフは次のようになる．



$y = f_n(x)$ を直線 $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_n とする．

$$V_0 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{24}$$

例えば，V_3 は $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の区間にある 4 つの三角形 $\left(\text{面積 } S_3 = \dfrac{1}{256}\right)$ を $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転させると

$$V_3 = 2\pi S_3 \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{7}{16}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{256} \cdot 1 = \frac{\pi}{128}$$

V_n $(n \geqq 1)$ は $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の区間にある 2^{n-1} 個の三角形 $\left(\text{面積 } S_n = \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)$ を $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転させると

$$V_n = 2\pi S_n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{(2^{n-1})^2}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+4}}$$

したがって

$$V = V_0 + \sum_{n=1}^{N} V_n$$
$$= \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{32} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{5\pi}{48} - \frac{\pi}{2^{N+4}}}$$

(2) (1) の結果から

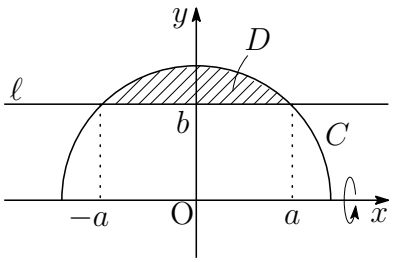
$$\lim_{N \to \infty} V = \boldsymbol{\frac{5\pi}{48}}$$

補足 $y = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{s(2^n x)}{2^n}$ は連続関数であるが，至るところで微分不可能な曲線 (**高木曲線**) として有名である．

2024年2月23日 (金)

パップス・ギュルダンの定理[15]の応用例をもう1つ解説します.

半円 $C : x^2+y^2=a^2+b^2$ $(y \geqq 0)$ と直線 $\ell : y=b$ $(b \geqq 0)$ で囲まれた領域を D とし，D を x 軸のまわりに1回転させた回転体の体積を V とすると



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{a} (y^2-b^2)\,dx \\ &= \pi \int_{-a}^{a} (a^2-x^2)\,dx = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a^3} \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

V は，b に関係なく (C の半径に関係なく)，a の値により決定する．球の体積の公式と関連して覚えるとよい．実際，a が C の半径と一致するとき，球の体積である．

D の面積を S とすると，パップス・ギュルダンの定理により，D の重心は

$$\left(0,\ \frac{V}{2\pi S}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(0,\ \frac{2a^3}{3S}\right) \qquad (*)$$

この結果を使うと，次の問題を積分せずに求めることができます.

2012年 九大理系

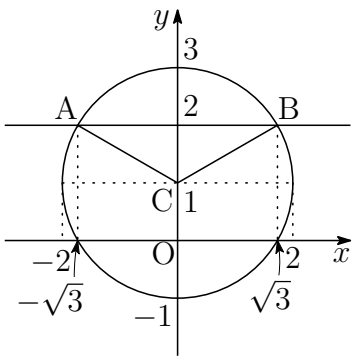
円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ.

[15] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6)

解答 D_1，D_2 の領域を次のようにとる．

$$D_1 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ y \geqq 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．
右図において，$\angle \mathrm{ACB} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_2 = \pi\cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

D_1 の重心 G_1 は，$(*)$ の重心を y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである．また D_2 の重心 G_2 は，図形の対称性に注意すると

$$\mathrm{G}_1\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{S_1}+1\right), \quad \mathrm{G}_2(0,\ 1)$$

よって，求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= 2\pi S_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{S_1}+1\right) + 2\pi S_2\cdot 1 \\ &= 2\pi\left(2\sqrt{3}+S_1+S_2\right) \\ &= 2\pi\left(2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right) \\ &= \boldsymbol{2\pi\left(3\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

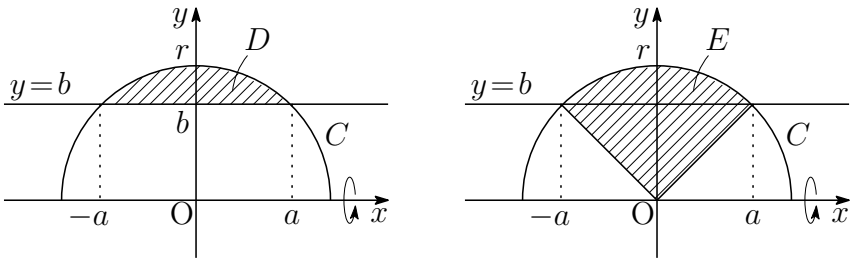
2024年2月24日 (土)

次の結果は，求積問題おいて利用する場面が多く，非常に便利です.

三日月形・扇形の回転体の体積

下の図の斜線部分 D, E を x 軸の周りに 1 回転された回転体の体積をそれぞれ V_D，V_E とすると

$$\boldsymbol{V_D=\frac{4}{3}\pi a^3},\qquad \boldsymbol{V_E=\frac{4}{3}\pi r^2 a}$$



証明 V_D は (A) で証明済 (a だけで求まることが面白い).

E の下側の三角形の面積は ab，重心は $\left(0,\ \dfrac{2b}{3}\right)$ であるから，パップス・ギュルダンの定理により

$$\begin{aligned} V_E &= V_D + 2\pi\cdot ab\cdot\frac{2b}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3 + \frac{4}{3}\pi ab^2 \\ &= \frac{4}{3}\pi(a^2+b^2)a = \frac{4}{3}\pi r^2 a \end{aligned}$$

別証 (定積分を用いる解法)

$$\begin{aligned} \frac{V_E}{2\pi} &= \int_0^a \left\{(r^2-x^2)-\left(\frac{b}{a}x\right)^2\right\}dx = \left[\ r^2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{b^2}{3a^2}x^3\ \right]_0^a \\ &= r^2a-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{3}ab^2 = r^2a-\frac{1}{3}(a^2+b^2)a \\ &= r^2a-\frac{1}{3}r^2a = \frac{2}{3}r^2a \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_E=\frac{4}{3}\pi r^2 a}$　　**証終**

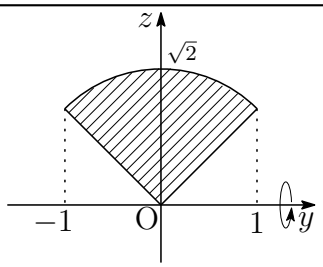
喜劇アニメ「トムとジェリー」で猫のトムが投げ飛ばされて，壁にトムの輪郭が残る場面を小さい頃よく目にしました．数学の回転の体積も壁にできた輪郭を利用して計算することも可能です．次の阪大の問題では，円すいを回転させて yz 平面 (壁) にできた輪郭 (扇形) を回転させた立体の体積として求めることができます.

2013 年 阪大理系

xyz 空間内の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0) を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする．円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答 右の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積であるから

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{8}{3}\pi$$



2017 年 東大理系

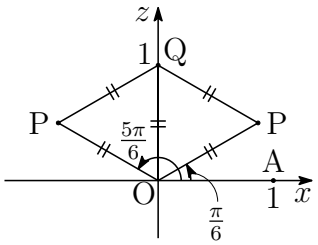
点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす．また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく．ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

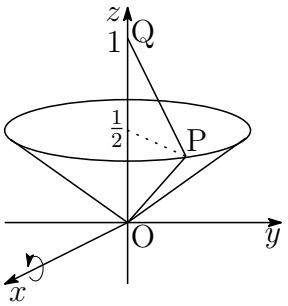
解答 (1) θ が最大または最小となるのは，zx 平面上において，P が右の図で示した位置にあるときである．$x = \cos\theta$ であるから

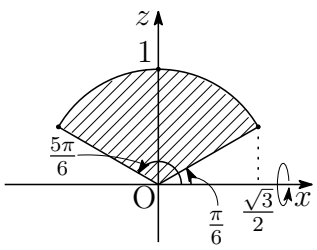
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{6}}, \quad \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上の点 (0, 0, 1) にあるとき，辺 OP は左図の円錐面を描く．点 Q を平面 $x = 0$ を動かす，すなわち，OQ を平面 $x = 0$ 上で O を中心に回転させると，この円錐面が zx 平面を通過してできる zx 平面に描く輪郭は右図の斜線部分になる．よって，求める K の体積 V は

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$

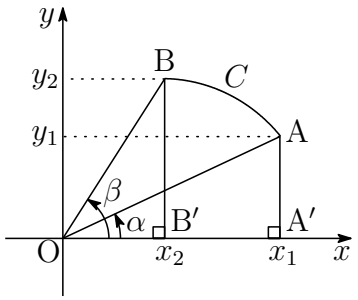




2024年2月25日 (日)

今回は，極方程式による曲線で囲まれた部分の面積について報告をします．まず，下の図のようにOを極とする曲線Cと線分OA，OBで囲まれた部分の面積に関する公式の証明から行います．

$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$とし，$C$上の$\theta = \alpha,\ \beta$に対応する点を，それぞれA，Bとし，A，Bから$x$軸に垂線AA′，BB′を引く．$S_A = \triangle \mathrm{OAA'}$，$S_B = \triangle \mathrm{OBB'}$とし，曲線$C$，$x$軸，2直線AA′，BB′で囲まれた領域$D_C$の面積を$S_C$，曲線$C$，2直線OA，OBで囲まれた領域$D$の面積を$S$とすると



$$
\begin{aligned}
S_C &= \int_{x_2}^{x_1} y\,dx = \int_{\beta}^{\alpha} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\ r^2\sin\theta\cos\theta\ \Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}(r\cos\beta)(r\sin\beta) + \frac{1}{2}(r\cos\alpha)(r\sin\alpha) + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta = -S_B + S_A + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$S = S_C + S_B - S_A = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta}$

2015年 宮大医

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$を満たす$\theta$について，$r(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta}$とするとき，座標平面上で円$x^2+y^2 = \{r(\theta)\}^2$と直線$y = (\tan\theta)x$は2つの交点をもつ．そのうち，$x$座標が正であるものをPとし，Pの$x$座標を$f(\theta)$，$y$座標を$g(\theta)$とする．$\theta$を$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$の範囲で動かしたときの点Pの軌跡を$C$とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(\theta)$，$g(\theta)$を求めよ．

(2) $g(\theta)$の最大値を求めよ．

(3) 曲線Cとx軸，直線$x = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答　(1)　$f(\theta) = x = r(\theta)\cos\theta = \boldsymbol{\sqrt{2\cos 2\theta}\,\cos\theta}$

$g(\theta) = y = r(\theta)\sin\theta = \boldsymbol{\sqrt{2\cos 2\theta}\,\sin\theta}$

(2)　(1) の結果から

$$\{g(\theta)\}^2 = 2\cos 2\theta \sin^2\theta = 2(1-2\sin^2\theta)\sin^2\theta$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ より，$t = \sin^2\theta$，$h(t) = \{g(\theta)\}^2$ とおくと

$$h(t) = 2(1-2t)t = -4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}\right)$$

したがって，$h(t)$ の最大値は　$h\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$

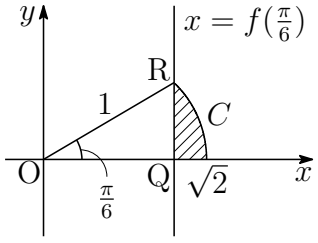
$g(\theta) \geqq 0$ であるから，$h(t)$ が最大のとき，$g(\theta)$ は最大となる．

よって，$g(\theta)$ の最大値は

$$t = \frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき，最大値 } \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3)　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき　$r\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{3}} = 1$

右の図において



$$\mathrm{OR} = r\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{RQ} = \mathrm{OR}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

求める面積を S とすると，図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{r(\theta)\}^2\,d\theta - \triangle\mathrm{ORQ} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 2\theta\,d\theta - \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{RQ} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \sin 2\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}} \end{aligned}$$

2024年2月26日(月)

2013年 宮大医

$-1<x<1$ で定義される関数 $f(x)=2x+\sqrt{5-5x^2}$ について，座標平面上の曲線 $C:y=f(x)$ を考える．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 曲線 C は上に凸であることを示し，$f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点のうち，原点Oとの距離が最大となる点をA，最小となる点をBとするとき，A，Bの座標をそれぞれ求めよ．

(3) (2)で求めた点A，Bについて，線分OA，線分OB，および曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

解答　(1) $g(x)=\sqrt{5-5x^2}$ $(-1<x<1)$ とおくと　$g(x)>0$

$\{g(x)\}^2=5-5x^2$ を微分すると

$$2g(x)g'(x)=-10x \quad \text{ゆえに} \quad g(x)g'(x)=-5x \quad \cdots ①$$

さらに，① を微分すると

$$\{g'(x)\}^2+g(x)g''(x)=-5 \quad \text{ゆえに} \quad g''(x)=-\frac{5+\{g'(x)\}^2}{g(x)}<0$$

$f(x)=2x+g(x)$ であるから　　$f''(x)=g''(x)<0$

したがって，曲線 $C:y=f(x)$ は上に凸である．

① より $g'(x)=-\dfrac{5x}{g(x)}$ であるから　$f'(x)=2-\dfrac{5x}{g(x)}=\dfrac{2g(x)-5x}{g(x)}$

$f'(x)=0$ のとき　　$2g(x)=5x>0$

両辺を平方すると　$\{2\sqrt{5-5x^2}\}^2=25x^2$　　$x>0$ より　$x=\dfrac{2}{3}$

$f''(x)<0$ であるから　最大値 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2\times\dfrac{2}{3}+\sqrt{5-5\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\mathbf{3}$

(2) C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ 2x+g(x))$，$h(x)=\mathrm{OP}^2$ とすると $(-1<x<1)$

$$\begin{aligned} h(x)&=x^2+\{2x+g(x)\}^2 \\ &=x^2+4x^2+4xg(x)+\{g(x)\}^2=5+4xg(x) \end{aligned}$$

これを微分すると

$$h'(x) = 4g(x) + 4xg'(x) = 4g(x) + 4x\cdot\frac{-5x}{g(x)}$$
$$= 4\cdot\frac{\{g(x)\}^2 - 5x^2}{g(x)} = 4\cdot\frac{5 - 5x^2 - 5x^2}{g(x)} = \frac{20(1-2x^2)}{g(x)}$$

$h(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	(5)	↘	$5-2\sqrt{5}$	↗	$5+2\sqrt{5}$	↘	(5)

P が $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，原点 O との距離が最大となり，

$x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，原点 O との距離が最小となる．

$g\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ であるから

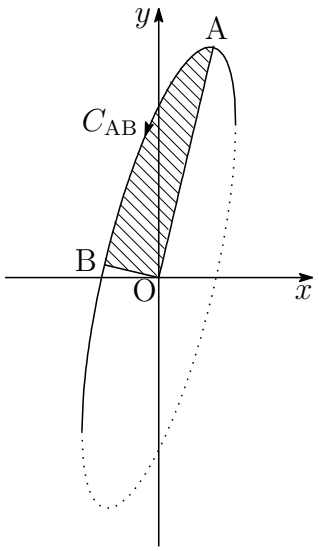
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

よって　$\mathbf{A}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathbf{B}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2}\right)$

(3) $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2x+g(x)}{x}$ とおいて，これを x で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{g'(x)}{x} - \frac{g(x)}{x^2}$$
$$\left(1+\tan^2\theta\right)\frac{d\theta}{dx} = -\frac{5}{g(x)} - \frac{g(x)}{x^2}$$
$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\frac{d\theta}{dx} = -\frac{5x^2 + (5-5x^2)}{x^2 g(x)}$$
$$r^2\frac{d\theta}{dx} = -\frac{5}{g(x)} \qquad (r^2 = x^2 + y^2)$$

C 上の A から B への経路を C_{AB}，求める面積を S とすると



$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_{C_{\mathrm{AB}}} r^2\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{5}{g(x)}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{5}{\sqrt{5-5x^2}}\,dx \\
&= \sqrt{5}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

x	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
φ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$x = \sin\varphi$ とおくと　$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi$

よって　$S = \sqrt{5}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{4}\pi}$

2027年2月27日 (火)

2010年 東大理系

O を原点とする座標平面上の曲線

$$C : y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

と，その上の相異なる2点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ を考える．

(1) P_i $(i = 1, 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y = x$ との交点を，それぞれ H_i $(i = 1, 2)$ とする．このとき $\triangle \mathrm{OP_1H_1}$ と $\triangle \mathrm{OP_2H_2}$ の面積は等しいことを示せ．

(2) $x_1 < x_2$ とする．このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 $\mathrm{P_1O}$，$\mathrm{P_2O}$ とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ．

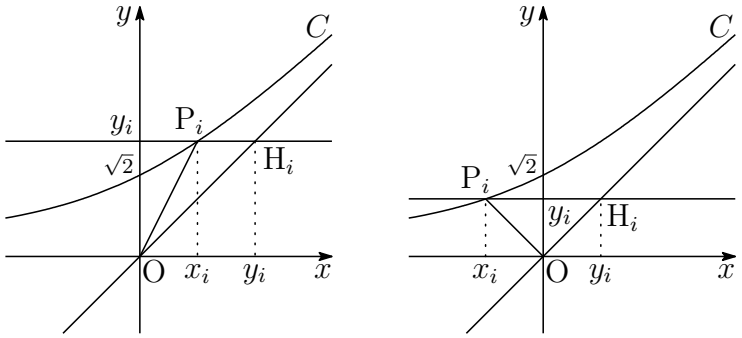
解答　(1) $y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ において，$\left|\dfrac{1}{2}x\right|<\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ より　$y>0$

C の方程式から，$y-\dfrac{1}{2}x=\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ の両辺を平方すると

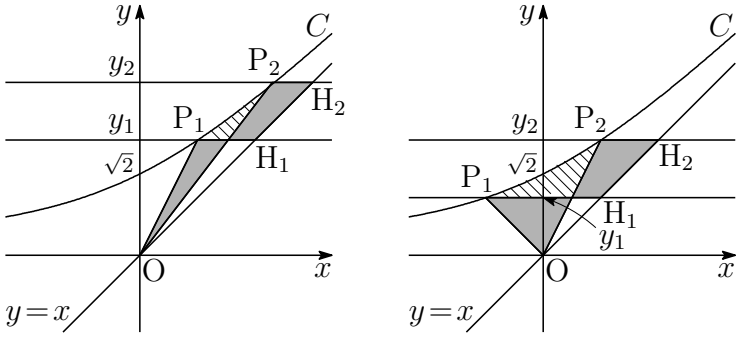
$$\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{1}{4}x^2+2 \quad \text{整理すると} \quad (y-x)y=2 \quad \cdots(*)$$

$\mathrm{P}_i(x_i,\ y_i)$ より，$\mathrm{H}_i(y_i,\ y_i)$ であるから $(i=1,2)$，$(*)$ により

$$\triangle \mathrm{OP}_i\mathrm{H}_i=\frac{1}{2}(y_i-x_i)y_i=1 \quad \text{よって} \quad \triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1=\triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$$



(2) (1) の結果から，下の図の 2 箇所の塗りつぶした部分の面積は等しい．



求める面積は，曲線 C と 3 直線 $y=x$，$y=y_1$，$y=y_2$ で囲まれた部分の面積である．このとき，C の方程式は，$(*)$ より

$$x=y-\frac{2}{y} \quad (y>0)$$

したがって，求める面積を S とすると

$$S=\int_{y_1}^{y_2}\left\{y-\left(y-\frac{2}{y}\right)\right\}dy=\Big[\ 2\log y\ \Big]_{y_1}^{y_2}=\boldsymbol{2\log\dfrac{y_2}{y_1}}$$

別解 C 上を点 P_2 から点 P_1 に向かう経路を C_1(回転角の向きに経路をとる) とし，C_1 の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し，$r = \mathrm{OP}$，OP と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

これらを θ について微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

したがって

$$x\frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}y = r\cos\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right) - \left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)r\sin\theta = r^2 \qquad (*)$$

ゆえに $\quad S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{C_1} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{y_2}^{y_1}\left(x - \frac{dx}{dy}y\right)dy$

C の方程式は，$x = y - \dfrac{2}{y}$ であるから

$$x - \frac{dx}{dy}y = \left(y - \frac{2}{y}\right) - \left(1 + \frac{2}{y^2}\right)y = -\frac{4}{y}$$

よって，求める面積を S とすると

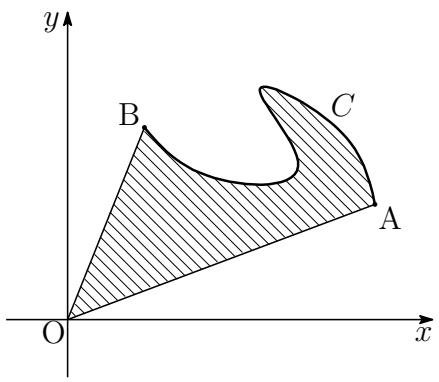
$$S = \frac{1}{2}\int_{C_1} r^2\,d\theta = -2\int_{y_2}^{y_1}\frac{dy}{y} = -2\Big[\ \log y\ \Big]_{y_2}^{y_1} = \mathbf{2\log\frac{y_2}{y_1}}$$

補足 極方程式の面積の公式 $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$ は，次のガウス・グリーンの定理に含まれることが，$(*)$ からも分かる．

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



極方程式の面積の公式

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

において，θ は極方程式の偏角でなければならないが，ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$

は，1 変数関数の曲線の面積に関する定理で θ が偏角でなくてもよいし，様々な曲線について適用できる．例えば，8 月 28 日 (土) のレポートで紹介した九大理系 2010 年のサイクロイド

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

について

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a\sin t$$

であるから

$$\begin{aligned} x(t)y'(t) - x'(t)y(t) &= a(t - \sin t)\cdot a\sin t - a(1 - \cos t)\cdot a(1 - \cos t) \\ &= a^2(t\sin t + 2\cos t - 2) \end{aligned}$$

求める面積 S[問題 (2)] は，積分区間に注意して

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\}\, dt \\ &= \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi} (-t\sin t - 2\cos t + 2)\, dt \\ &= \frac{a^2}{2}\Big[\, t\cos t - 3\sin t + 2t \,\Big]_{0}^{2\pi} = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

また，鹿児島大学 2017 年の楕円

$$x = 3\cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

の面積 S[問題 (3)] は (θ は楕円の偏角ではない)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (xy' - x'y)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \{3\cos\theta(\sin\theta)' - (3\cos\theta)'\sin\theta\}\, d\theta \\ &= \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2024年2月28日 (水)

ガウス・グリーンの定理は，非常に強力な計算法である．熊大はこれまで発展的な解法を使った答案についても減点されることなく採点されている．バウムクーヘン型の求積法や外積を用いた面積などこれまでの熊大入試連絡会でも示されている．次の (2) はガウス・グリーンの定理を用いた解法が実は一番簡単である．答案には，定理の名前を書かずにさりげなく解答すればよいと個人的には思う．

2021 年 熊大医

媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C : x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

を考える。

(1) 点 M の座標を $(0,\ 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して，MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。

(2) (1) の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。Q における C の接線を ℓ とするとき，曲線 C と接線 ℓ および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3) (2) の D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答　(1) 媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C : x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \qquad (*)$$

は，$(**)$ $x = \sqrt{y^2+1}$ である．C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と $\mathrm{M}(0,\ 1)$ の距離は

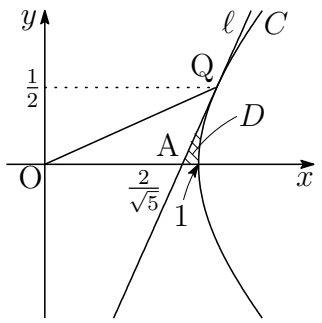
$$\mathrm{MP}^2 = x^2 + (y-1)^2 = y^2 + 1 + (y-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

MP が最小となるとき，$y = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad e^{2t} - e^t - 1 = 0$$

$e^t > 0$ に注意して　$e^t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　よって　$\boldsymbol{t_0 = \log \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(2) $y=\dfrac{1}{2}$ を (**) を代入して　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$



$x^2-y^2=1$ であるから

$$2x-2yy'=0 \quad \text{ゆえに} \quad yy'=x$$

C 上の点 Q における接線 ℓ の傾きは

$$\frac{1}{2}y'=\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y'=\sqrt{5}$$

したがって，ℓ の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=\sqrt{5}\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=\sqrt{5}x-2$$

ℓ と x 軸の交点を A とすると　$\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right)$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ であるから

$$x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}y=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cdot\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})-\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\cdot\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})=1$$

求める領域 D は，上の図の斜線部分であるから，その面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{t_0}dt-\triangle\mathrm{OAQ}\\&=\frac{1}{2}t_0-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}\end{aligned}$$

(3) (省略)

2024年2月29日 (木)

2024年 熊大理系・医医

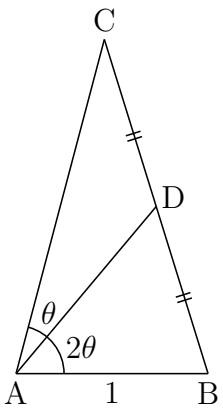
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ とする。AB = 1，∠BAC = 3θ である △ABC について，辺 BC の中点を D としたとき，∠BAD = 2θ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) AC = 2 cos θ であることを示せ。

(2) BC を cos θ を用いて表せ。

(3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

解答　(1) BD = CD より，△ABD = △ACD であるから



$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin 2\theta = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin\theta$$

したがって　　$\mathrm{AB}\sin 2\theta = \mathrm{AC}\sin\theta$

AB = 1 より

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{AB}\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$$

(2) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos 3\theta \\ &= 1^2 + (2\cos\theta)^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cos\theta\cdot(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ &= -16\cos^4\theta + 16\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{BC} = \sqrt{-16\cos^4\theta + 16\cos^2\theta + 1}}$

(3) (2) の結果から

$$\mathrm{BC}^2 = -16\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + 5$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ に注意して

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

2024年3月1日 (金)

2024 年 熊大理系

e を自然対数の底とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = e^x$ 上の点 $(a,\ e^a)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接線の傾きを p，y 切片を q とする。q を p の式で表せ。

(3) (2) で求めた p の式を $f(p)$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線 ℓ_1 および点 $(e,\ f(e))$ における接線 ℓ_2 の方程式を求めよ。

(4) (3) で求めた 2 本の接線 ℓ_1，ℓ_2 および曲線 $y = f(x)$ によって囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 (1) $y = e^x$ を微分すると　$y' = e^x$

したがって，曲線 $y = e^x$ 上の点 $(a,\ e^a)$ における接線の方程式は

$$y - e^a = e^a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = e^a x + e^a(1 - a)}$$

(2) (1) の結果から　$p = e^a,\ \ q = e^a(1 - a)$

$e^a = p,\ a = \log p$ より　　$\boldsymbol{q = p(1 - \log p)}$

(3) (2) の結果から　$f(x) = x(1 - \log x)$　これを微分すると　$f'(x) = -\log x$

$y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y - a(1 - \log a) = -(x - a)\log a \quad \text{ゆえに} \quad y = -x\log a + a$$

$\ell_1,\ \ell_2$ は，上式の a にそれぞれ $1,\ e$ を代入したものであるから

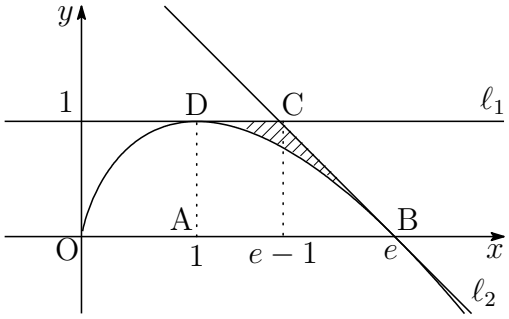
$$\boldsymbol{\ell_1 : y = 1, \quad \ell_2 : y = -x + e}$$

(4) $f''(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$ から，$\ell_1,\ \ell_2$ は曲線 $y = f(x)$ の上側にある．ここで

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int x(1 - \log x)\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'(1 - \log x)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}(1 - \log x) - \int \frac{x^2}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)dx \\ &= x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\log x\right) + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

求める面積を S とすると，下の図から

$$
\begin{aligned}
S &= \text{台形 ABCD} - \int_1^e f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\{(e-2)+(e-1)\} - \left[\, x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log x\right) \,\right]_1^e \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{4}(e^2-4e+3)}
\end{aligned}
$$



2024年3月2日 (土)

2024 年 熊大理系

平面上に点 O を中心とする半径 2 の円 D がある。円 D の周上に異なる 3 点 A，B，C をとる。ただし，直線 AB，BC，CA は点 O を通らないとする。2 点 A，B における円 D のそれぞれの接線の交点を P とする。同様に，2 点 B，C における円 D のそれぞれの接線の交点を Q，2 点 C，A における円 D のそれぞれの接線の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{4+\vec{a}\cdot\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$ が成り立つことを示せ。

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\sqrt{3}$ のとき，線分 OP の長さを求めよ。

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=-2\sqrt{3}$ かつ $\vec{b}\cdot\vec{c}=2$ のとき，△PQR の面積を求めよ。

解答　(1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$0<\angle\mathrm{AOB}<\pi$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$ より

$$-4<\vec{a}\cdot\vec{b}<4 \quad \cdots ①$$

$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ であるから

$$\vec{a}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0, \quad \vec{b}\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{p}=4,\ \vec{b}\cdot\vec{p}=4$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は，1 次独立であるから，$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とすると (x，y は実数)

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=4\\ \vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=4\end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases}4x+(\vec{a}\cdot\vec{b})y=4\\ (\vec{a}\cdot\vec{b})x+4y=4\end{cases}$$

① に注意してこれを解くと　　$x=y=\dfrac{4}{4+\vec{a}\cdot\vec{b}}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{4+\vec{a}\cdot\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$ が成立する．

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=2(4+\vec{a}\cdot\vec{b})$ であるから，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{|\vec{a}+\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$$

したがって　　$\mathrm{OP}=\dfrac{8}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{8}{\sqrt{8+2\vec{a}\cdot\vec{b}}}=\dfrac{8}{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}$

$$=\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\boldsymbol{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

(3) 与えられた条件より，$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\cdot 2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\angle \mathrm{AOB}=\angle \mathrm{AOC}=150^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \angle \mathrm{QPR}=\angle \mathrm{QRP}=30^\circ$$

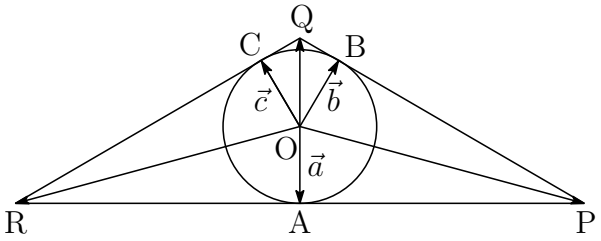
(2) と同様に　　$\mathrm{OQ}=\dfrac{8}{\sqrt{8+2\vec{b}\cdot\vec{c}}}=\dfrac{8}{\sqrt{8+2\cdot 2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

△QRP は，PQ = RQ の二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AQ}=\mathrm{OA}+\mathrm{OQ}=2+\frac{4}{\sqrt{3}},$$
$$\mathrm{PR}=2\mathrm{AP}=2\sqrt{3}\mathrm{AQ}$$

よって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{AQ}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AQ}\cdot 2\sqrt{3}\mathrm{AQ}=\sqrt{3}\mathrm{AQ}^2$$
$$=\sqrt{3}\left(2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\mathbf{16}+\frac{\mathbf{28}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$



2024年3月3日 (日)

2024 年 熊大文系

数列 $\{a_n\}$ は $0 < a_n < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan a_n = n$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\cos^2 a_n$ を n の式で表せ。

(2) $\tan(a_{n+1} - a_n)$ を n の式で表せ。

(3) $\dfrac{\tan(a_{n+1} - a_n)}{\cos^2 a_n} > \dfrac{9}{10}$ を満たす n の最小値を求めよ。

解答　(1) $\tan a_n = n$ より　　$\cos^2 a_n = \dfrac{1}{1 + \tan^2 a_n} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{1 + n^2}}$

(2) $\tan a_n = n$ より

$$\begin{aligned}\tan(a_{n+1} - a_n) &= \frac{\tan a_{n+1} - \tan a_n}{1 + \tan a_{n+1} \tan a_n} \\ &= \frac{(n+1) - n}{1 + (n+1)n} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{1 + n + n^2}}\end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から　　$\dfrac{\tan(a_{n+1} - a_n)}{\cos^2 a_n} = \dfrac{1 + n^2}{1 + n + n^2}$

$\dfrac{\tan(a_{n+1} - a_n)}{\cos^2 a_n} > \dfrac{9}{10}$ のとき　$\dfrac{1 + n^2}{1 + n + n^2} > \dfrac{9}{10}$

したがって　　$n(9 - n) < 1$

n は自然数より，$n(9 - n)$ は整数であるから

$$n(9 - n) \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 9 - n \leqq 0$$

これを解いて　$n \geqq 9$　　よって，求める最小の n は　$\boldsymbol{n = 9}$

2024年3月4日 (月)

2024 年 熊大文系

1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a+b$ が 3 の倍数になる確率を求めよ。

(2) a^2+b^2 が 4 の倍数になる確率を求めよ.

(3) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ が 12 の倍数になる確率を求めよ。

解答 (1) 法 3 について

$$1 \equiv 1,\ \ 2 \equiv 2,\ \ 3 \equiv 0,\ \ 4 \equiv 1,\ \ 5 \equiv 2,\ \ 6 \equiv 0 \pmod 3$$

したがって，$a+b \equiv 0 \pmod 3$ となる確率は

$$\frac{2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 2}{6^2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

(2) 法 4 について

$$1^2 \equiv 1,\ \ 2^2 \equiv 0,\ \ 3^2 \equiv 1,\ \ 4^2 \equiv 0,\ \ 5^2 \equiv 1,\ \ 6^2 \equiv 0 \pmod 4$$

したがって，$a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 3$ となる確率は

$$\frac{3^2}{6^2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

(3) $N=a^3+a^2b+ab^2+b^3=(a+b)(a^2+b^2)$ とおく.
$a^2-a=a(a-1)$ より，$a^2 \equiv a \pmod 2$ であるから

$$a^2+b^2 \equiv a+b \pmod 2$$

上式から，$a+b \equiv 0 \pmod 2 \Longrightarrow N \equiv 0 \pmod 4$
法 3 について，$0^2 \equiv 0,\ \ 1^2 \equiv 1,\ 2^2 \equiv 1 \pmod 3$ であるから

$$a^2+b^2 \equiv 0 \Longrightarrow a \equiv 0,\ b \equiv 0 \Longrightarrow a+b \equiv 0 \pmod 3$$

したがって，N が 12 の倍数になる $a,\ b$ の条件は，$a+b$ が 2 の倍数かつ 3 の倍数，すなわち，6 の倍数であり，求める $a,\ b$ の組は次の 6 組である.

$$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{6}{6^2}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$

2024年3月5日 (火)

2024年 熊大文系

a を実数とし，座標平面上の円 $x^2+y^2=8$ を C_1，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2+a$ を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の共有点の個数が4個のとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) C_1 と C_2 の共有点の個数が2個であるような a の最小値を求め，そのときの共有点P，Qの座標を求めよ。ただし，Pの x 座標はQの x 座標より小さいとする。

(3) a が(2)で求めた値であるとき，直線PQの下側で，C_1 と C_2 によって囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　(1) C_1 と C_2 が接する次の場合を考える．

(i) C_1 の半径が $2\sqrt{2}$ であるから，$a=-2\sqrt{2}$ とすると

$$C_1 : x^2+y^2=8, \quad C_2 : y=\frac{1}{4}x^2-2\sqrt{2}$$

上の 2 式から x^2 を消去すると

$$y^2-8+4(y+2\sqrt{2})=0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+2\sqrt{2})(y-2\sqrt{2}+4)=0$$

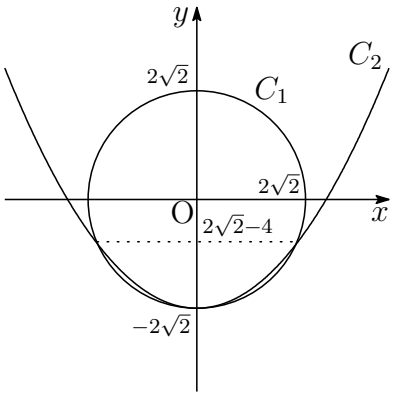
これらの共有点の y 座標 $-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}-4$ が $-2\sqrt{2} \leqq y \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす．このとき，左下の図のように C_1，C_2 は 3 点を共有する．

(ii) $C_1 : x^2+y^2=8$ と $C_2 : y=\dfrac{1}{4}x^2+a$ の 2 式から，x^2 を消去すると

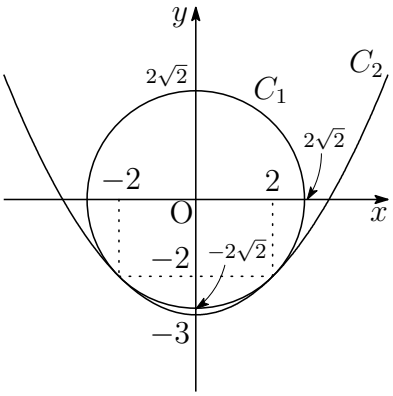
$$y^2+4y-4a-8=0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+2)^2=4a+12$$

よって，$4a+12=0$，すなわち，$a=-3$ のとき，重解 $y=-2$ をもつ．このとき，右下の図のように C_1，C_2 は 2 点 $(\pm 2, -2)$ で接する．

(i) $\underline{a=-2\sqrt{2}}$



(ii) $\underline{a=-3}$



したがって，C_1 と C_2 の共有点が 4 個となる a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-3<a<-2\sqrt{2}}$$

(2) (1) の図 (ii) から分かるように，求める a の最小値は　$\boldsymbol{a=-3}$

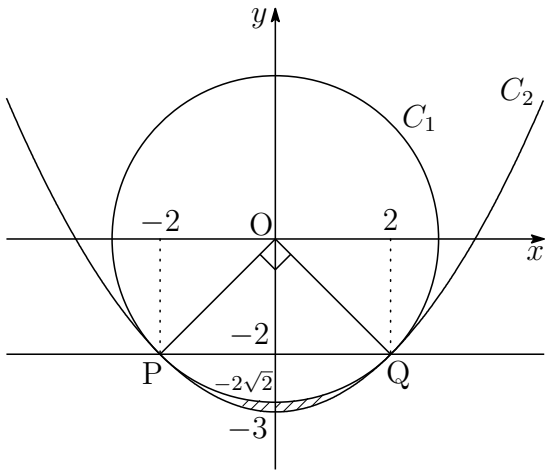
よって　　$\mathbf{P(-2,-2),\ Q(2,-2)}$

(3) 求める面積を S とすると

$$S = \int_{-2}^{2} \left\{ -2 - \left(\frac{1}{4}x^2 - 3 \right) \right\} dx - \left\{ \frac{1}{4} \cdot \pi (2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \right\}$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{-2}^{2} (x+2)(x-2)\, dx - (2\pi - 4)$$

$$= \frac{1}{24}(2+2)^3 - 2\pi + 4 = \boldsymbol{\frac{20}{3} - 2\pi}$$



2024年3月6日 (水)

2024年 九大理系

a を実数とし，座標空間内の3点 $\mathrm{P}(-1,\ 1,-1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $a \neq -1,\ a \neq 1$ のとき，3点P，Q，Rは一直線上にないことを示せ。

(2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき，三角形PQRの面積の最大値を求めよ。

解答　(1) 3点 $\mathrm{P}(-1,\ 1,-1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (2,\ 0,\ 2), \quad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = (a+1,\ a^2-1,\ a^3+1)$$

3点P，Q，Rが一直線上にあると仮定すると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の y 成分から

$$a^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \pm 1$$

これは，$a \neq -1,\ a \neq 1$ に反する．

よって，3点P，Q，Rは一直線上にない．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = 8$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = 2(a^3+a+2)$

点 R から直線 PQ に垂線 RH を引くと

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PH}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{2(a^3+a+2)}{8}(2,\ 0,\ 2) \\
&= \left(\frac{a^3}{2}+\frac{a}{2}+1,\ 0,\ \frac{a^3}{2}+\frac{a}{2}+1\right), \\
\overrightarrow{\mathrm{RH}} &= \overrightarrow{\mathrm{PH}} - \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left(-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{2},\ 1-a^2,\ \frac{a}{2}-\frac{a^3}{2}\right) \\
&= (1-a^2)\left(-\frac{a}{2},\ 1,\ \frac{a}{2}\right)
\end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ より，$1-a^2 > 0$ であるから

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{RH}}| &= (1-a^2)\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-a^2)\sqrt{2+a^2} \\
\triangle\mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{RH}}| = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-a^2)\sqrt{2+a^2} \\
&= (1-a^2)\sqrt{2+a^2}
\end{aligned}$$

ここで，$t = 1-a^2$ とおくと　$0 < t \leqq 1$

$$\triangle\mathrm{PQR} = t\sqrt{3-t} = \sqrt{3t^2-t^3}$$

$f(t) = 3t^2-t^3$ とおくと　$f'(t) = 6t-3t^2 = 3t(2-t) > 0$

$f(t)$ は単調増加であるから，$t=1$，すなわち，$a=0$ のとき，△PQR の面積は，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ をとる．

補足 (外積を用いる解法)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}} &= (2(1-a^2),\ 2a(1-a^2), -2(1-a^2)) \\ &= 2(1-a^2)(1,\ a, -1)\end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ に注意して

$$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}| = (1-a^2)\sqrt{2+a^2}$$

(面積公式を用いる解法)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= 2^2 + 0^2 + 2^2 = 8, \\ |\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 &= (a+1)^2 + (a^2-1)^2 + (a^3+1)^2 \\ &= (a+1)^2\{1 + (a-1)^2 + (a^2-a+1)^2\} \\ &= (a+1)^2(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3), \\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= 2(a+1) + 0 + 2(a^3+1) \\ &= 2(a+1)(a^2 - a + 2)\end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8\cdot(a+1)^2(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3) - \{2(a+1)(a^2-a+2)\}^2} \\ &= (a+1)\sqrt{2(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3) - (a^2-a+2)^2} \\ &= (a+1)\sqrt{a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 2} \\ &= (a+1)\sqrt{(a-1)^2(a^2+2)} \\ &= (a+1)(1-a)\sqrt{a^2+2} \\ &= (1-a^2)\sqrt{2+a^2}\end{aligned}$$

2024年3月7日 (木)

2024 年 九大理系

自然数 $m,\ n$ に対して

$$I(m,\ n)=\int_1^e x^m e^x(\log x)^n\,dx$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $I(m+1,\ n+1)$ を $I(m,\ n+1)$，$I(m,\ n)$，m，n を用いて表せ。

(2) すべての自然数 m に対して，$\lim_{n\to\infty} I(m,\ n)$ が成り立つことを示せ。

解答　(1) $I(m,\ n)=\int_1^e x^m e^x(\log x)^n\,dx$ より ($m,\ n$ は自然数)

$$\begin{aligned}
&I(m+1,\ n+1)\\
&\quad=\int_1^e (e^x)'x^{m+1}(\log x)^{n+1}\,dx\\
&\quad=\Big[\ e^x x^{m+1}(\log x)^{n+1}\ \Big]_1^e\\
&\qquad\quad-\int_1^e e^x\left\{e^x(m+1)x^m(\log x)^{n+1}+x^{m+1}(n+1)(\log x)^n\frac{1}{x}\right\}dx\\
&\quad=e^{m+e+1}\\
&\qquad\quad-(m+1)\int_1^e x^m e^x(\log x)^{n+1}\,dx-(n+1)\int_1^e x^m e^x(\log x)^n\,dx\\
&\quad=\boldsymbol{e^{m+e+1}-(m+1)I(m,\ n+1)-(n+1)I(m,\ n)}
\end{aligned}$$

(2) $1\leqq x\leqq e$ において，$0\leq x^m e^x(\log x)^n\geqq 0$ であるから ($m,\ n$ は自然数)

$$I(m,\ n)=\int_1^e x^m e^x(\log x)^n\,dx\geqq 0$$

上式および (1) の結果から

$$0\leqq(n+1)I(m,\ n)\leqq e^{m+e+1}-(m+1)I(m,\ n+1)\leqq e^{m+e+1}$$

したがって　　$0\leqq I(m,\ n)\leqq\dfrac{e^{m+e+1}}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{m+e+1}}{n+1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} I(m,\ n)=0$$

別解 $1 \leqq x \leqq e$ において，$0 \leqq x^m e^x (\log x)^n \leqq e^{m+e} (\log x)^n$ であるから

$$0 \leqq I(m,\ n) \leqq e^{m+e} \int_1^e (\log x)^n \, dx$$

$x = e^t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt} = e^t$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$0 \leqq \int_1^e (\log x)^n \, dx = \int_0^1 t^n e^t \, dt = \int_0^{1-\frac{1}{n}} t^n e^t \, dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 t^n e^t \, dt$$

$$\leqq e \int_0^{1-\frac{1}{n}} t^n \, dt + e \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dt$$

$$= \frac{e}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{e}{n}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \right\}^{-1} = \frac{1}{e}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{e}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{e}{n} \right\} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^e (\log x)^n \, dx = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} I(m,\ n) = \mathbf{0}$$

2024年3月8日 (金)

2024 年 九大文系

2 つの放物線

$$C_1 : y = 2x^2, \quad C_2 : y = 2x^2 - 8x + 16$$

の両方に接する直線を ℓ とする．以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $C_1,\ C_2$ と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答 (1) $y = 2x^2$ を微分すると　　$y' = 4x$

C_1 上の点 $(t,\ 2t^2)$ における接線の方程式は

$$y - 2t^2 = 4t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 4tx - 2t^2 \quad \cdots ①$$

C_2 と直線 ① の方程式から y を消去すると

$$2x^2 - 8x + 16 = 4tx - 2t^2$$

整理すると　　$x^2 - 2(t + 2) + t^2 + 8 = 0 \quad \cdots ②$

C_2 と直線 ① が接するから，② の係数について

$$D/4 = (t + 2)^2 - (t^2 + 8) = 4t - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 1$$

求める直線 ℓ の方程式は，$t = 1$ を ① に代入して　　$\boldsymbol{y = 4x - 2}$

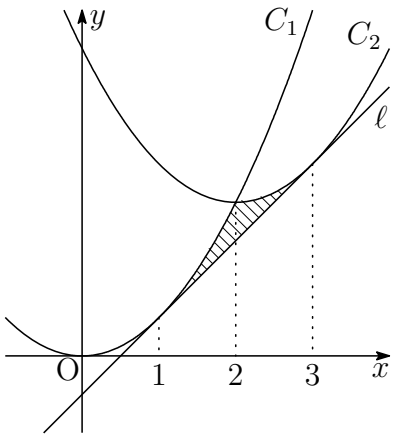
(2) $t=1$ より，C_1 と ℓ の接点の x 座標は　$x=1$

また，② の係数から，C_2 と ℓ の接点の x 座標は

$$x=-\frac{-2(t+2)}{2\cdot 1}=t+2=1+2=3$$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_1^2\{2x^2-(4x-2)\}\,dx+\int_2^3\{(2x^2-8x+16)-(4x-2)\}\,dx\\&=\int_1^2 2(x-1)^2\,dx+\int_2^3 2(x-3)^2\,dx\\&=\frac{2}{3}\Big[\ (x-1)^3\ \Big]_1^2+\frac{2}{3}\Big[\ (x-3)^2\ \Big]_2^3=\mathbf{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$



2024年3月9日 (土)

2024 年 九大文系

座標平面上の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ を考える。点 B は第 1 象限にあり，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{10}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を求めよ。

(2) $s,\ t$ を正の実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす点 C を考える。三角形 OAC と三角形 OBC の面積が等しく，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 4$ が成り立つとき，s，t の値を求めよ。

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 5$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2,\ 1)$ より $\quad |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{5}$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の偏角を α とすると

$$(2,\ 1) = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|(\cos\alpha,\ \sin\alpha) = (\sqrt{5}\cos\alpha,\ \sqrt{5}\sin\alpha)$$

点 B が第 1 象限の点であることから，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ とすると

$$\begin{aligned} b_1 &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{10}\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{5}\cos\alpha - \sqrt{5}\sin\alpha = 2 - 1 = 1, \\ b_2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{10}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{5}\sin\alpha + \sqrt{5}\cos\alpha = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

よって $\quad \mathbf{B(1,\ 3)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s(2,\ 1) + t(1,\ 3) = (2s + t,\ s + 3t)$ より $(s,\ t > 0)$

$$\triangle\mathrm{OAC} = \frac{1}{2}|2\cdot(s + 3t) - 1\cdot(2s + t)| = \frac{5}{2}|t| = \frac{5}{2}t$$

$$\triangle\mathrm{OBC} = \frac{1}{2}|1\cdot(s + 3t) - 3\cdot(2s + t)| = \frac{5}{2}|s| = \frac{5}{2}s$$

$\triangle\mathrm{OAC} = \triangle\mathrm{OBC}$ より，$s = t$ であるから $\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (3s,\ 4s)$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 4$ より $\quad \sqrt{(3s)^2 + (4s)^2} = 5s = 4 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{s = t = \frac{4}{5}}$

2024年3月10日 (日)

2024年 東大理系

座標空間内の点 $\mathrm{A}(0, -1, 1)$ をとる．xy 平面上の点 P が次の条件 (i)，(ii)，(iii) をすべて満たすとする．

(i) P は原点 O と異なる．

(ii) $\angle\mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii) $\angle\mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ．

解答 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ とおく．条件 (i) より　$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

条件 (ii) から

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \cos\angle\mathrm{AOP} \leqq \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} = \cos\angle\mathrm{OAP} \geqq \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

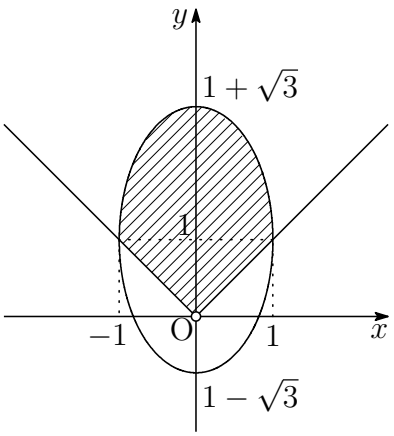
$$\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leqq -\frac{1}{2}, \quad \frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

上式から，$y \geqq 0$ に注意して，整理すると

$$y \geqq |x|, \quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{3} \leqq 1$$

条件 (i) より　$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$

P の取り得る範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含む．ただし，O は除く．



2024年3月11日(月)

2024年 東大理系

次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ をみたす実数 α で，$f'(\tan\alpha)=0$ となるものを求めよ．

(2) (1) で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ．必要ならば，$0.69<\log 2<0.7$ であることを用いてよい．

解答　(1)　$x=\tan\theta$ とすると $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt=\int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}\,dt \\ &=x\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt-x\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{aligned} \tag{$*$}$$

これを微分すると

$$f'(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$t=\tan\varphi$ とすると　$\dfrac{dt}{d\varphi}=\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$

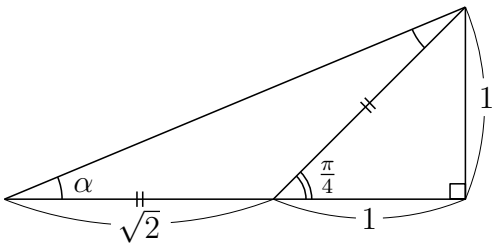
$$\begin{aligned} f'(\tan\theta)&=\int_0^\theta \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}-\int_\theta^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \\ &=\int_0^\theta d\varphi-\int_\theta^{\frac{\pi}{4}} d\varphi=2\theta-\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$f'(\tan\alpha)=0$ とすると

$$2\alpha-\frac{\pi}{4}=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{8}}$$

(2) (1) の結果から

$$\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \boldsymbol{\sqrt{2}-1}$$



(3) $(*)$ より，$x = \tan\theta$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= x\Big[\ \varphi\ \Big]_0^{\theta} - \frac{1}{2}\Big[\ \log(1+t^2)\ \Big]_0^{x} + \frac{1}{2}\Big[\ \log(1+t^2)\ \Big]_x^{1} - x\Big[\ \varphi\ \Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= x\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \log\frac{\sqrt{2}}{1+x^2} \qquad (**) \end{aligned}$$

(2) の結果から，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

$(**)$ より

$$f(0) = \frac{1}{2}\log 2$$

$$f(\sqrt{2}-1) = \log\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

$\log 2 < 0.7$ より

$$f(1) - f(0) = \frac{\pi}{4} - \log 2 = \frac{\pi - 4\log 2}{4} > \frac{\pi - 4\times 0.7}{4} > 0$$

よって　最大値 $\boldsymbol{f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2}$,

最小値 $\boldsymbol{f(\sqrt{2}-1) = \log\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$

2024年3月12日 (火)

2024年 東大理系

座標平面上を次の規則 (i)，(ii) に従って1秒ごとに動く点Pを考える．

(i) 最初に，Pは点 $(2,\ 1)$ にいる．

(ii) ある時点でPが点 $(a,\ b)$ にいるとき，その1秒後にはPは

- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で y 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=-x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点

にいる．

以下の問いに答えよ．ただし，(1) については，結論のみを書けばよい．

(1) Pがとりうる点の座標をすべて求めよ．

(2) n を正の整数とする．最初から n 秒後にPが点 $(2,\ 1)$ にいる確率と，最初から n 秒後にPが点 $(-2,-1)$ にいる確率は等しいことを示せ．

(3) n を正の整数とする．最初から n 秒後にPが点 $(2,\ 1)$ にいる確率を求めよ．

解答 (1) $\mathbf{(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (-1,\ 2),\ (-2,\ 1),}$
$\mathbf{(-2,-1),\ (-1,-2),\ (1,-2),\ (2,-1)}$

(2) P が n 秒後に点 $(a,\ b)$ にいる確率を $P_n(a,\ b)$ とすると，規則 (ii) より，確率漸化式

$$P_{n+1}(j,\ k) = \frac{1}{3}P_n(j,-k) + \frac{1}{3}P_n(-j,\ k) + \frac{1}{6}P_n(k,\ j) + \frac{1}{6}P_n(-k,-j) \tag{A}$$

が成立する $(j,k = \pm1, \pm2,\ j \neq k)$.

(A) において，$j,\ k$ をそれぞれ $-j, -k$ に置き換えると

$$P_{n+1}(-j,-k) = \frac{1}{3}P_n(-j,\ k) + \frac{1}{3}P_n(j,-k) + \frac{1}{6}P_n(-k,-j) + \frac{1}{6}P_n(k,j) \tag{B}$$

(A)，(B) の右辺がそれぞれ等しいから，自然数 n について

$$P_n(j,\ k) = P_n(-j,-k) \qquad (j,k = \pm1, \pm2,\ j \neq k) \tag{C}$$

が成立する．したがって，$P_n(2,\ 1) = P_n(-2,-1)$ が成立する．

(3) (C) より，$P_n(-j,\ k) = P_n(j,-k),\ P_n(-k,-j) = P_n(k,\ j)$ であるから，これらを (A) に代入すると

$$P_{n+1}(j,\ k) = \frac{2}{3}P_n(j,-k) + \frac{1}{3}P_n(k,\ j) \tag{D1}$$

(D1) は (C) に注意しながら，次にように書き直すことができる．

$$P_{n+1}(k,\ j) = \frac{2}{3}P_n(k,-j) + \frac{1}{3}P_n(j,\ k) \tag{D2}$$

$$P_{n+1}(j,-k) = \frac{2}{3}P_n(j,\ k) + \frac{1}{3}P_n(k,-j) \tag{D3}$$

$$P_{n+1}(k,-j) = \frac{2}{3}P_n(k,j) + \frac{1}{3}P_n(j,-k) \tag{D4}$$

(D1)，(D4) より

$$P_{n+1}(j,\ k) + P_{n+1}(k,-j) = P_n(k,\ j) + P_n(j,-k) \tag{E1}$$

$$P_{n+1}(j,\ k) - P_{n+1}(k,-j) = -\frac{1}{3}\{P_n(k,\ j) - P_n(j,-k)\} \tag{E2}$$

(D2)，(D3) より

$$P_{n+1}(k,\ j) + P_{n+1}(j,-k) = P_n(j,\ k) + P_n(k,-j) \tag{E3}$$

$$P_{n+1}(k,\ j) - P_{n+1}(j,-k) = -\frac{1}{3}\{P_n(j,\ k) - P_n(k,-j)\} \tag{E4}$$

ここで

$$a_n = P_n(j,\ k) + P_n(k,-j), \quad b_n = P_n(j,\ k) - P_n(k,-j),$$
$$c_n = P_n(k,\ j) + P_n(j,-k), \quad d_n = P_n(k,\ j) - P_n(j,-k)$$

とおくと，(E1)〜(E4) より

$$a_{n+1} = c_n, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{3}d_n, \quad c_{n+1} = a_n, \quad d_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n$$

これから

$$a_{n+1} + c_{n+1} = a_n + c_n, \qquad b_{n+1} + d_{n+1} = -\frac{1}{3}(b_n + d_n),$$
$$a_{n+1} - c_{n+1} = -(a_n - c_n), \qquad b_{n+1} - d_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - d_n)$$

上の 4 つの漸化式から

$$a_n + c_n = a_1 + c_1, \qquad b_n + d_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(b_1 + d_1),$$
$$a_n - c_n = (-1)^{n-1}(a_1 - c_1), \qquad b_n - d_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(b_1 - d_1)$$

$j = 2,\ k = 1$ とすると

$$P_1(-2,\ 1) = P_1(2,-1) = \frac{1}{3}, \quad P_1(1,\ 2) = P_1(-1,\ 2) = \frac{1}{6},$$
$$P_1(2,\ 1) = P_1(-1,\ 2) = P_1(-2,-1) = P_1(1,-2) = 0$$

このとき，$a_1 = b_1 = 0,\ c_1 = \dfrac{1}{2},\ d_1 = -\dfrac{1}{6}$ であるから

$$a_n = \frac{1}{4}\{1 + (-1)^n\}, \quad b_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n\{1 + (-1)^n\}$$

したがって，自然数 n について

$$P_n(2,\ 1) = \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \boldsymbol{\frac{1}{8}\{1 + (-1)^n\}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

注意 $P_0(2,\ 1) = 1$，$P_0(-2,-1) = 0$ であるから，$n = 0$ のとき (C) は成立しないから，$n \geqq 1$ で $P_n(2,\ 1)$ を求める．

別解 最初から n 秒後に P が

$$\begin{array}{ll}
\text{点 } (2,\ 1) \text{ または点 } (-2,-1) \text{ にいる確率を} & p_n \\
\text{点 } (1,\ 2) \text{ または点 } (-1,-2) \text{ にいる確率を} & q_n \\
\text{点 } (-1,\ 2) \text{ または点 } (1,-2) \text{ にいる確率を} & r_n \\
\text{点 } (-2,\ 1) \text{ または点 } (2,-1) \text{ にいる確率を} & s_n
\end{array}$$

とおくと，条件 (ii) から，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \frac{2}{3}r_n + \frac{1}{3}s_n, \quad q_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \frac{2}{3}s_n, \\
r_{n+1} &= \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, \quad s_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
(p_{n+1} + q_{n+1}) + (r_{n+1} + s_{n+1}) &= (p_n + q_n) + (r_n + s_n) \\
(p_{n+1} + q_{n+1}) - (r_{n+1} + s_{n+1}) &= -\{(p_n + q_n) - (r_n + s_n)\} \\
(p_{n+1} - q_{n+1}) + (r_{n+1} - s_{n+1}) &= -\frac{1}{3}\{(p_n - q_n) + (r_n - s_n)\} \\
(p_{n+1} - q_{n+1}) - (r_{n+1} - s_{n+1}) &= \frac{1}{3}\{(p_n - q_n) - (r_n - s_n)\}
\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
(p_n + q_n) + (r_n + s_n) &= (p_0 + q_0) + (r_0 + s_0) \\
(p_n + q_n) - (r_n + s_n) &= (-1)^n\{(p_0 + q_0) - (r_0 + s_0)\} \\
(p_n - q_n) + (r_n - s_n) &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n (p_0 - q_0) + (r_0 - s_0) \\
(p_n - q_n) - (r_n - s_n) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \{(p_0 - q_0) - (r_0 - s_0)\}
\end{aligned}$$

$p_0 = 1,\ q_0 = r_0 = s_0 = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
2(p_n + q_n) &= 1 + (-1)^n \\
2(p_n - q_n) &= \{1 + (-1)^n\}\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

よって，求める確率は (n は自然数)

$$\frac{1}{2}p_n = \boldsymbol{\frac{1}{8}\{1 + (-1)^n\}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

2024年3月13日 (水)

2024年 東大理系

$f(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 4\sqrt{2}$ とおく．$0 < t < 4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，この点において放物線 $y = f(x)$ と共通の接線を持ち，x 軸上に中心をもつ円を C_t とする．

(1) 円 C_t の中心の座標を $(c(t),\ 0)$，半径を $r(t)$ とおく．$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ．

(2) 実数 a は $0 < a < f(3)$ を満たすとする．円 C_t が点 $(3,\ a)$ を通るような実数 t は $0 < t < 4$ の範囲にいくつあるか．

解答　(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は

$$x-t+f'(t)\{y-f(t)\}=0$$

この直線が点 $(c(t),\ 0)$ を通るから

$$c(t)-t-f'(t)f(t)=0 \quad \text{ゆえに} \quad c(t)=t+f'(t)f(t)$$

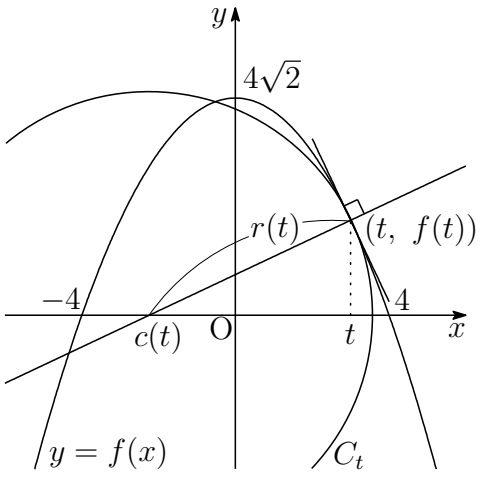
2 点 $(c(t),\ 0)$, $(t,\ f(t))$ 間の距離 $r(t)$ は，上の結果から

$$\begin{aligned} r(t)^2 &= (t-c(t))^2+f(t)^2 \\ &= \{f'(t)f(t)\}^2+f(t)^2=\{f'(t)^2+1\}f(t)^2 \end{aligned}$$

$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x^2-16)$ より，$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ であるから

$$c(t)=t+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}(t^2-16)\right\}=\boldsymbol{\frac{t^3}{4}-3t},$$

$$\begin{aligned} r(t)^2 &= \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+1\right\}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}(t^2-16)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{16}(t^2+2)(t^2-16)^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2} \end{aligned}$$



(2) $f(3)=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ より，$0<a<f(3)$ を満たすから

$$0<a^2<\frac{49}{8}$$

(1) の結果から，円 C_t の方程式は

$$C_t:\left(x-\frac{t^3}{4}+3t\right)^2+y^2=\frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2$$

点 $(3,\ a)$ は C_t 上にあるから

$$\left(3-\frac{t^3}{4}+3t\right)^2+a^2=\frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2$$

a^2 について解くと　　$a^2=-\dfrac{3}{8}t^4+\dfrac{3}{2}t^3+3t^2-18t+23$

$g(t)=-\dfrac{3}{8}t^4+\dfrac{3}{2}t^3+3t^2-18t+23$ とおくと $(0<t<4)$

$$\begin{aligned}g'(t)&=-\frac{3}{2}t^3+\frac{9}{2}t^2+6t-18\\&=-\frac{3}{2}(t^3-3t^2-4t+12)=-\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3)\end{aligned}$$

$g(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	(23)	↘	5	↗	$\frac{49}{8}$	↘	(-1)

$g(t)=a^2$ の実数解 t の個数は

$$\begin{cases}0<a^2<5 \text{ のとき} & 1\text{個}\\ a^2=5 \text{ のとき} & 2\text{個}\\ 5<a^2<\dfrac{49}{8} \text{ のとき} & 3\text{個}\end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases}\boldsymbol{0<a<\sqrt{5}} \text{ のとき} & \boldsymbol{1}\text{個}\\ \boldsymbol{a=\sqrt{5}} \text{ のとき} & \boldsymbol{2}\text{個}\\ \boldsymbol{\sqrt{5}<a<\dfrac{7}{4}\sqrt{2}} \text{ のとき} & \boldsymbol{3}\text{個}\end{cases}$$

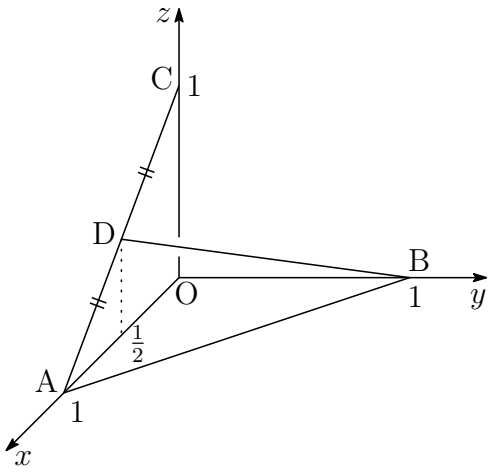
2024年3月14日 (木)

2024年 東大理系

座標空間内に3点A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)をとり，Dを線分ACの中点とする．三角形ABDの周および内部をx軸のまわりに1回転させて得られる立体の体積を求めよ．

解答 3直線AB，BD，ACの方程式は

$$\text{直線AB}: x+y=1,\ z=0,$$
$$\text{直線BD}: x=\frac{y-1}{-2}=z,$$
$$\text{直線AC}: z+x=1,\ y=0$$

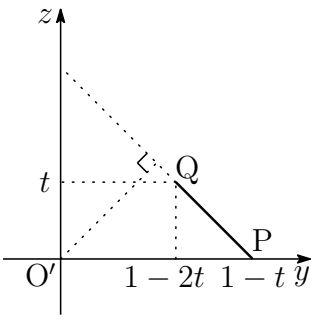


3直線AB，BD，ACと平面$x=t$との交点をそれぞれP，Q，Rとすると

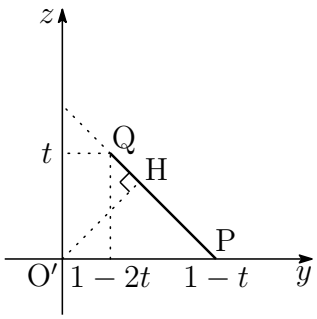
$$\mathrm{P}(t,\ 1-t,\ 0) \quad (0 \leqq t \leqq 1),$$
$$\mathrm{Q}(t,\ 1-2t,\ t) \quad (0 \leqq t \leqq \tfrac{1}{2}),$$
$$\mathrm{R}(t,\ 0,\ 1-t) \quad (\tfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1)$$

△ABDの平面$z=t$による断面は次のようになる．

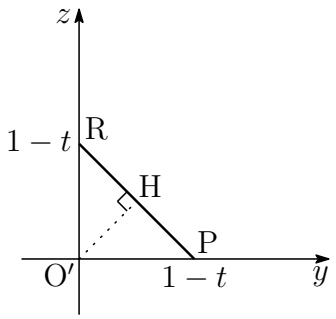
(i) $0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$



(ii) $\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$



(iii) $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$



直線PQとx軸との距離をO′Hとすると，図(i)〜図(iii)より

$$\mathrm{O'H}=\frac{\mathrm{O'P}}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{O'P}=1-t,\quad \mathrm{O'Q}=\sqrt{(1-2t)^2+t^2}$$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{3}} (\mathrm{O'P}^2 - \mathrm{O'Q}^2)\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 (\mathrm{O'P}^2 - \mathrm{O'H}^2)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} (2t - 4t^2)\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{2}(t-1)^2\,dt \\ &= \left[\ t^2 - \frac{4}{3}t^3\ \right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[\ \frac{1}{6}(t-1)^3\ \right]_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

したがって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi}{9}}$

2024年3月15日 (金)

2024 年 熊大理学部後期

正の整数 n に対して 2 つの定積分を

$$I_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\sin 2x\,dx, \quad J_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\cos 2x\,dx$$

とおく。

(1) I_n と J_n の値を n で表せ。

(2) 曲線 $y = e^{-x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2n\pi)$ と x 軸とで囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_n とおく。V_n を n で表せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。

解答 (1) $e^{-2x}\sin 2x$，$e^{-2x}\cos 2x$ を微分すると

$$(e^{-2x}\sin 2x)' = -2e^{-2x}\sin 2x + 2e^{-2x}\cos 2x$$
$$(e^{-2x}\cos 2x)' = -2e^{-2x}\sin 2x - 2e^{-2x}\cos 2x$$

上の 2 式の辺々の和および差をとると

$$\{e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)\}' = -4e^{-2x}\sin 2x$$
$$\{e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)\}' = 4e^{-2x}\cos 2x$$

上の結果を利用すると

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\sin 2x\,dx \\ &= -\frac{1}{4}\Big[\, e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x) \,\Big]_0^{2n\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi})}, \\ J_n &= \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\cos 2x\,dx \\ &= \frac{1}{4}\Big[\, e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x) \,\Big]_0^{2n\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi})} \end{aligned}$$

別解 $e^{2ix}=\cos 2x+i\sin 2x$ であるから

$$\begin{aligned}J_n+iI_n&=\int_0^{2n\pi}e^{-2x}e^{2ix}\,dx=\int_0^{2n\pi}e^{-2(1-i)x}\,dx\\&=\frac{1}{-2(1-i)}\Big[\,e^{-2(1-i)x}\,\Big]_0^{2n\pi}=-\frac{1+i}{4}\Big[\,e^{-2x}e^{2ix}\,\Big]_0^{2n\pi}\\&=\frac{1+i}{4}(1-e^{-4n\pi})\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\pi}&=\int_0^{2n\pi}(e^{-x}\sin x)^2\,dx=\int_0^{2n\pi}e^{-2x}\sin^2 x\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2n\pi}e^{-2x}\,dx-\frac{1}{2}\int_0^{2n\pi}e^{-2x}\cos 2x\,dx\\&=-\frac{1}{4}\Big[\,e^{-2x}\,\Big]_0^{2n\pi}-\frac{1}{2}J_n\\&=\frac{1}{4}(1-e^{-4n\pi})-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(1-e^{-4n\pi})=\frac{1}{8}(1-e^{-4n\pi})\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_n=\dfrac{\pi}{8}(1-e^{-4n\pi})}$

(3) (2) の結果から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

2024年3月16日 (土)

2024 年 熊大理学部後期

数列 $\{a_n\}$ は条件

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{n} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

を満たすとする。

(1) $a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示せ。

(2) $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ。

(3) n が奇数のとき，(2) の b_n を求めよ。

(4) n を 3 以上の自然数とするとき，a_n を求めよ。ただし，次の記号を用いてもよい。

$$k!! = \begin{cases} k \cdot (k-2) \cdot (k-4) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 & (k \text{ が偶数のとき}) \\ k \cdot (k-2) \cdot (k-4) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 & (k \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

解答 (1) 条件

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{n} + a_n \qquad (*)$$

より，$a_n > 0,\ a_{n+1} > 0$ のとき　　$a_{n+2} > 0$

$a_1 > 0,\ a_2 > 0$ であるから，自然数 n について　$a_n > 0$

(2) $(*)$ の両辺を $a_{n+1} \neq 0$ で割ると

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{n} + \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{b_n}} \qquad (**)$$

(3) $(**)$ より

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{b_n}} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{nb_n}{b_n + n} \end{aligned}$$

上式から，$b_n = 1$ のとき　$b_{n+2} = 1$

$b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} = 1$ であるから，n が奇数のとき　$\boldsymbol{b_n = 1}$

(4) (2)，(3) の結果から，k を自然数とすると

$$b_{2k-1}=1,\quad b_{2k}=\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{b_{2k-1}}=\frac{2k}{2k-1}=\frac{4k^2}{2k(2k-1)}$$

したがって

$$b_{2k-1}b_{2k}=\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}\cdot\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}=\frac{2k}{2k-1}$$

上の第 2 式から，$n\geqq 2$ のとき，$a_1=1$ より

$$a_{2n-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{4k^2}{2k(2k-1)}=\frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-2)!}$$

$$a_{2n}=b_{2n-1}a_{2n-1}=\frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-2)!}$$

これらは，$n=1$ のときも成立するから

$$a_{2n-1}=a_{2n}=\boldsymbol{\frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-2)!}}\quad(n=1,2,\cdots)$$

2024年3月17日 (日)

2024 年 熊大理学部後期

四面体 OABC について，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 D を

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

で定める。点 E を線分 OD の中点とする。3 点 A，B，C を通る平面を α とする。

(1) 点 E が平面 α 上にあるかどうかを判定せよ。

(2) 点 O を通り α と平行な平面を β とする。2 点 C，D を通る直線と平面 β との交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(3) △ABC の重心を G とする。3 点 O，A，G を通る平面と，2 点 E，F を通る直線との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ.

解答　(1) E は線分 OD の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{12}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

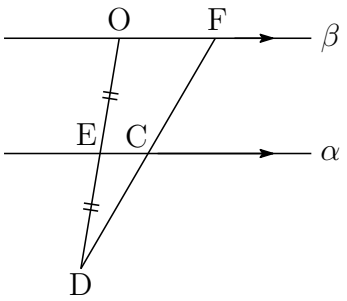
$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数について

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=1$$

よって，点 E は平面 α 上にある.

(2) E は OD の中点であり，2 点 E，C は平面 α 上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=2\overrightarrow{\mathrm{EC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2\overrightarrow{\mathrm{OE}}\\&=2\vec{c}-2\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{12}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)\\&=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}}\end{aligned}$$



(3) 直線 EF 上の点 H は，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + k\overrightarrow{\mathrm{OF}} \\ &= (1-k)\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right) + k\left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - k\right)\vec{a} + \left(\frac{5}{12} - \frac{5}{4}k\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}k\right)\vec{c} \qquad (*)\end{aligned}$$

平面 OAG 上の点は，実数 $s,\ t$ を用いて

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OG}} = s\vec{a} + \frac{t}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \left(s + \frac{t}{3}\right)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c}$$

H が平面 OAG 上の点であるとき ($\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ は 1 次独立)

$$\frac{1}{3} - k = s + \frac{t}{3}, \quad \frac{5}{12} - \frac{5}{4}k = \frac{t}{3}, \quad \frac{1}{4} + \frac{5}{4}k = \frac{t}{3}$$

これを解いて　　$k = \dfrac{1}{15},\ \ s = -\dfrac{1}{15},\ \ t = 1$

$k = \dfrac{1}{15}$ を $(*)$ に代入すると　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}}$

2024年3月18日(月)

2024年 東大理系

2以上の整数で，1とそれ自身以外に正の約数をもたない数を素数という．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=x^3+10x^2+20x$ とする．$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

(2) a，b を整数の定数とし，$g(x)=x^3+ax^2+bx$ とする．$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は3個以下であることを示せ．

解答　(1) $f(x)=x(x^2+10x+20)$ より，$f(n)$ が素数となるのは，次の場合である．

- $n=p$ のとき (p は素数)

$$p^2+10p+20=1 \quad \text{ゆえに} \quad p(p+10)=-19$$

これを満たす素数 p は存在しない．

- $n=-q$ のとき (q は素数)

$$q^2-10q+20=-1 \quad \text{ゆえに} \quad (q-3)(q-7)=0$$

これを解いて　$q=3,\ 7$　すなわち　$n=-3,-7$

- $n=1$ のとき，$f(1)=1(1^2+10\cdot1+20)=31$
$f(1)$ は素数であるから，$n=1$ は条件を満たす．
- $n=-1$ のとき，$f(-1)=-1\cdot\{(-1)^2+10\cdot(-1)+20\}=-11$
$f(-1)$ は素数でないから，$n=-1$ は条件を満たさない．

以上の結果から　　$\boldsymbol{n=-3,-7,\ 1}$

(2) $g(x)=x(x^2+ax+b)$ より ($a,\ b$ は整数)，$h(x)=x^2+ax+b$ とおくと，$g(n)$ が素数となるのは，(i)〜(iv) の場合である．

(i) $n=p$ のとき (p は素数)，$h(p)=1$

(ii) $n=-q$ のとき (q は素数)，$h(-q)=-1$

(iii) $n=1$ のとき，$h(1)$ は素数

(iv) $n=-1$ のとき，$-h(-1)$ は素数

［A］(i)，(ii) を満たす素数 $p,\ q$ がともに存在すると仮定すると

$$p^2+ap+b=1,\quad q^2-aq+b=-1$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$p^2-q^2+a(p+q)=2 \quad \text{ゆえに} \quad (p+q)(p-q+a)=2$$

$p+q\geqq 4$，$p-q+a$ は整数であるから，上の第 2 式を満たす素数 $p,\ q$ は存在しない．よって，(i) と (ii) は同時に成立しない．

［B］(i) を満たす異なる素数 $p_1,\ p_2$ が存在すると仮定すると

$$h(x)-1=(x-p_1)(x-p_2)$$

$x=-1$ を上式に代入すると

$$h(-1)-1=(-1-p_1)(-1-p_2)>0 \quad \text{ゆえに} \quad -h(-1)<-1$$

このとき，(iv) は成立しない

［C］(ii) を満たす異なる素数 $q_1,\ q_2$ が存在すると仮定すると

$$h(x)+1=(x+q_1)(x+p_2)$$

$x=-1$ を上式に代入すると

$$h(-1)+1=(-1-p_1)(-1-p_2)>0 \quad \text{ゆえに} \quad -h(-1)<1$$

このとき，(iv) は成立しない

［A］〜［C］から，$g(n)$ が素数となる整数 n の個数は 3 個以下である．

2024年3月19日 (火)

2024年 東大文系

座標平面上で，放物線$C : y = ax^2+bx+c$が2点$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$を通り，点Pと点Qのそれぞれにおいて円$x^2+y^2=1$と共通の接線を持っている．ただし，$0^\circ < \theta < 90^\circ$とする．

(1) $a,\ b,\ c$を$s=\sin\theta$を用いて表せ．

(2) 放物線Cとx軸で囲まれた図形の面積Aをsを用いて表せ．

(3) $A \geqq \sqrt{3}$を示せ．

解答 (1) 2点$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$は$C : y = ax^2+bx+c$上の点であるから$(0^\circ < \theta < 90^\circ)$

$$\sin\theta = a(\pm\cos\theta)^2 + b(\pm\cos\theta) + c$$

したがって　$b=0$,　$\sin\theta = a\cos^2\theta + c$　$\cdots$①

$f(x)=ax^2+c$とおくと　　$f'(x)=2ax$

$\vec{v}=(1,\ f'(\cos\theta))$とすると，$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$であるから，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$より

$$1\cdot\cos\theta + (2a\cos\theta)\cdot\sin\theta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{2\sin\theta} \quad \cdots ②$$

②を①に代入すると

$$\sin\theta = -\frac{\cos^2\theta}{2\sin\theta} + c \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{2\sin^2\theta+\cos^2\theta}{2\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta+1}{2\sin\theta}$$

$s=\sin\theta$より　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2s},\ \ b=0,\ \ c=\dfrac{s^2+1}{2s}}$

(2) (1) の結果から，曲線 C の方程式は $(0<s<1)$

$$y=-\frac{1}{2s}x^2+\frac{s^2+1}{2s}=-\frac{1}{2s}(x+\sqrt{s^2+1})(x-\sqrt{s^2+1})$$

よって，求める図形の面積 A は

$$\begin{aligned}A&=-\frac{1}{2s}\int_{-\sqrt{s^2+1}}^{\sqrt{s^2+1}}(x+\sqrt{s^2+1})(x-\sqrt{s^2+1})\,dx\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2s}(2\sqrt{s^2+1})^3=\boldsymbol{\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，相加平均・相乗平均の大小関係により [16]

$$\begin{aligned}A&=\frac{2}{3}\left(\frac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(s^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(s^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\\&\geqq\frac{2}{3}\left(3\sqrt[3]{s^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\cdot3^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}\end{aligned}$$

上式において等号が成立するのは　$s^{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}$　すなわち　$s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[16] http://kumamoto.s12.xrea.com/2022/sigaidai_2022.pdf 3

2024年3月20日 (水)

2024年 東大文系

以下の問いに答えよ．必要ならば，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい．

(1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

(2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ．

解答　(1) $5^n > 10^{19}$ より　$\log_{10} 5^n > 19$

$$n(1 - \log_{10} 2) > 19 \quad \text{これを解いて} \quad n > \frac{19}{1 - \log_{10} 2} \quad \cdots ①$$

$\dfrac{3}{10} < \log_{10} 2 < \dfrac{31}{100}$ より，$\dfrac{69}{100} < 1 - \log_{10} 2 < \dfrac{7}{10}$ であるから

$$27\frac{1}{7} = \frac{190}{7} < \frac{19}{1 - \log_{10} 2} < \frac{1900}{69} = 27\frac{37}{69}$$

したがって，① を満たす最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 28}$

(2) 数列 $\{5^m + 4^m\}$ は単調増加列であるから，(1) の結果から，$5^m + 4^m > 10^{19}$ を満たす最小の自然数 m は，28 以下である．

$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 < 0.7$，$0.3 < \log_{10} 2$ より

$$\begin{aligned} \log_{10} 5^{27} &= 27 \log_{10} 5 < 27 \times 0.7 = 18.9 = 18 + 3 \times 0.3 \\ &< \log_{10} 10^{18} + 3 \log_{10} 2 = \log_{10}(8 \times 10^{18}), \\ \log_{10} 4^{27} &= 27 \log_{10} 4 < 27 \times 0.62 = 16.74 < \log_{10} 10^{17} \end{aligned}$$

$5^{27} < 8 \times 10^{18}$，$4^{27} < 10^{17}$ であるから

$$5^{27} + 4^{27} < 8 \times 10^{18} + 10^{17} = 8.1 \times 10^{18} < 10^{19}$$

よって，求める最小の自然数 m は　$\boldsymbol{m = 28}$

2024年3月21日 (木)

2024年 東大文系

座標平面上に2点 O(0, 0)，A(0, 1) となる．x 軸上の2点 P(p, 0)，Q(q, 0) が，次の条件 (i)，(ii) をともに満たすとする．

(i) $0 < p < 1$ かつ $p < q$

(ii) 線分 AP の中点を M とするとき，$\angle \mathrm{OAP} = \angle \mathrm{PMQ}$

(1) q を p を用いて表せ．

(2) $q = \dfrac{1}{3}$ となる p の値を求めよ．

(3) △OAP の面積を S，△PMQ の面積を T とする．$S > T$ となる p の範囲を求めよ．

解答 (1) $\angle \mathrm{OAP} = \theta$ とおくと $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$，$\tan\theta = p$ より

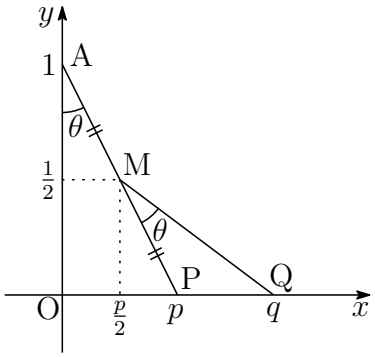
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2p}{1-p^2}$$

上式から直線 MQ の傾きは

$$-\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = -\frac{1}{\tan 2\theta} = -\frac{1-p^2}{2p}$$

点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通る直線 MQ の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1-p^2}{2p}\left(x - \frac{p}{2}\right)$$



この直線が点 Q(q, 0) を通るから

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1-p^2}{2p}\left(q - \frac{p}{2}\right)$$

q について解くと　　$\boldsymbol{q = \dfrac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}}$

(2) (1) の結果に $q=\dfrac{1}{3}$ を代入すると

$$\frac{1}{3}=\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)} \quad \text{整理すると} \quad 3p^3-2p^2-9p+2=0$$

したがって　　$(p-2)(3p^2+4p-1)=0$

$0<p<1$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{p=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}}$

(3) (1) の結果により

$$S=\triangle \mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\cdot p\cdot 1=\frac{p}{2}$$

$$T=\triangle \mathrm{PMQ}=\frac{1}{2}(q-p)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(q-p)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}-p\right\}=\frac{p(p^2+1)}{8(1-p^2)}$$

$S>T$ より $(0<p<1)$　$\dfrac{p}{2}>\dfrac{p(p^2+1)}{8(1-p^2)}$　ゆえに　$5p^2<3$

よって　　$\boldsymbol{0<p<\dfrac{\sqrt{15}}{5}}$

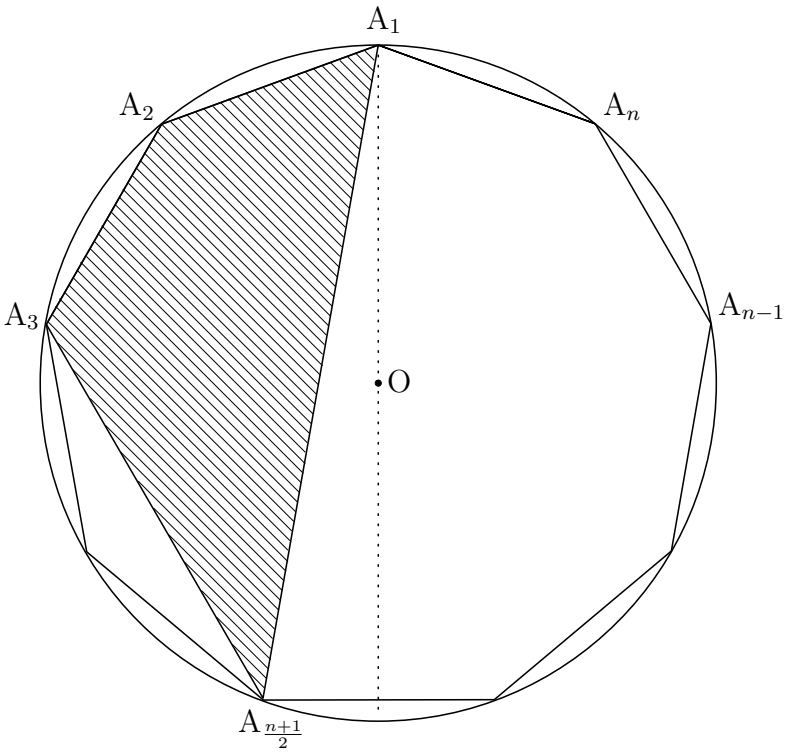
2024年3月22日 (金)

2024年 東大文系

n を5以上の奇数とする．平面上の点Oを中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える．n 個の頂点からの4点を同時に選ぶ．ただし，どの4点も等確率で選ばれるものとする．選んだ4点を頂点とする四角形がOを内部に含む確率 p_n を求めよ．

解答 n 個の頂点を反時計回りに $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ をとる (n は5以上の奇数)．

2点 $\mathrm{A}_\ell, \mathrm{A}_m$ について，$\ell \equiv m \pmod{n}$ のとき，これらの2点は同一の点する．



$i < j < k < l \leqq i + \frac{n-1}{2}$ とし，点 A_i に対して3点 $\mathrm{A}_j, \mathrm{A}_k, \mathrm{A}_l$ をとると，四角形 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k\mathrm{A}_l$ は ($n \geqq 7$)，その内部にOを含まない．i の選び方 n 通りに対して，3点 $\mathrm{A}_j, \mathrm{A}_k, \mathrm{A}_l$ の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3$ 通りあるから

$$1 - p_n = n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3 \,/\, {}_n\mathrm{C}_4$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3 \,/\, {}_n\mathrm{C}_4 \\ &= 1 - n \times \frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)}{3\cdot 2\cdot 1} \times \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\ &= \frac{n+1}{2(n-2)} \end{aligned}$$

$p_5 = 1$ であるから，上式は $n = 5$ のときも成立する．

よって　　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{n+1}{2(n-2)}}$

2024年3月23日 (土)

2024年 熊大医医

n 個の袋 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ がある。$A_k(1 \leqq k \leqq n)$ の中には白玉が k 個，黒玉が $n-k$ 個入っている。次の (操作) を考える．

(操作)

(操作 1)　n 個の袋から 1 つの袋を選び，それを A とおく。
(操作 2)　次の試行を s 回繰り返す。袋 A から無作為に玉を 1 個取り出し，玉の色を調べてから取り出した玉を袋 A に戻す。

以下の問いに答えよ。

(1) $s=2$ とする。(操作) を行うとき，白玉がちょうど 1 回取り出される確率を n を用いて表せ。

(2) $s=100$ とする。(操作 1) を行った結果，$A=A_k$ であった。このとき，(操作 2) で白玉がちょうど t 回取り出される条件付き確率を $p(t)$ とする。$n=3k$ が成り立つとき，$p(t)$ を最大にする t の値を求めよ．

(3) $s=10$ とする。(操作) を行うとき，白玉がちょうど 3 回取り出される確率を q_n とする。このとき，$\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ．

解答　(1) 袋 A_k から白玉，黒玉が取り出される確率は，それぞれ $\dfrac{k}{n}$，$1-\dfrac{k}{n}$ である $(k=1,2,\cdots,n)$．求める確率は，2 回の試行で白玉が 1 回，黒玉が 1 回取り出される確率であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{k}{n}\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)&=\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{n}\cdot k^2\right)\\&=\frac{2}{n^2}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n-1)}{3n^2}}\end{aligned}$$

(2) $A = A_k$ のとき，s 回の試行で白玉がちょうど t 回取り出される確率 $p(t)$ は

$$p(t) = {}_s\mathrm{C}_t \left(\frac{k}{n}\right)^t \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{s-t} \qquad (*)$$

上式に $n = 3k$ を代入すると

$$p(t) = {}_{100}\mathrm{C}_t \left(\frac{1}{3}\right)^t \left(\frac{2}{3}\right)^{100-k} = \frac{100!}{t!(100-t)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

これから
$$\begin{aligned} \frac{p(t+1)}{p(t)} - 1 &= \frac{t!(100-t)!}{(t+1)!(99-t)!} \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{100-t}{2(t+1)} - 1 = \frac{98-3t}{2(t+1)} \end{aligned}$$

ゆえに　$p(0) < p(1) < \cdots < p(32) < p(33) > p(34) > \cdots > p(100)$

よって，求める t の値は　　$\boldsymbol{t = 33}$

(3) $(*)$ に $s = 10$，$t = 3$ を代入した $p(3)$ を利用して

$$q_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(3) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {}_{10}\mathrm{C}_3 \left(\frac{k}{n}\right)^3 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^7$$

したがって [17]

$$\lim_{n\to\infty} q_n = {}_{10}\mathrm{C}_3 \int_0^1 x^3(1-x)^7\,dx = {}_{10}\mathrm{C}_3 \frac{3!7!}{11!}(1-0)^{11} = \boldsymbol{\frac{1}{11}}$$

[17] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf 1

2024年3月24日 (日)

2024 年 熊大医医

k を実数とし，$f(x)=\sin^2 x-\cos x-1+k$ とおく。曲線 $y=f(x)\left(0\leqq x\leqq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸の共有点の個数が k の値によってどのように変わるか調べよ。

(2) 曲線 C と x 軸の共有点が 2 個以上あるような k に対し，$g(k)$ を

$$g(k)=\int_{p_1}^{p_2} f(x)\sin x\,dx$$

と定める。ただし，p_1，p_2 はそれぞれ，曲線 C と x 軸の共有点の x 座標のうち 1 番小さいもの，2 番目に小さいものとする。$g(k)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　(1) $f(x)=\sin^2 x-\cos x-1+k\ \left(0\leqq x\leqq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ より

$$\begin{aligned} f(x)&=-\cos^2 x-\cos x+k\\ &=-\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$(*)$ $t=\cos x$ とし $(-1\leqq t\leqq 1)$，関数

$$\varphi(t)=-t^2-t+k=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{1}{4}$$

とすると

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\varphi(t)$	k	↗	$k+\frac{1}{4}$	↘	k	↘	$k-2$

$f(x)=0$ が解をもつのは，$k-2\leqq 0\leqq k+\frac{1}{4}$ のときである．

$0\leqq x\leqq \dfrac{3\pi}{2}$ より，t $(-1\leqq t\leqq 1)$ の値に対する $(*)$ を満たす x の個数は

$t=-1$ のとき 1 個，$-1<t\leqq 0$ のとき 2 個，$0<t\leqq 1$ のとき 1 個

したがって

$0<k-2$ のとき	0 個
$k-2\leqq 0<k$ のとき	1 個
$k=0$ のとき	3 個
$k<0<k+\frac{1}{4}$ のとき	4 個
$k+\frac{1}{4}=0$ のとき	2 個
$k+\frac{1}{4}<0$ のとき	0 個

よって　　$\boldsymbol{2 < k}$ のとき　　**0 個**
$\boldsymbol{0 < k \leqq 2}$ のとき　　**1 個**
$\boldsymbol{k = 0}$ のとき　　**3 個**
$\boldsymbol{-\frac{1}{4} < k < 0}$ のとき　**4 個**
$\boldsymbol{k = -\frac{1}{4}}$のとき　　**2 個**
$\boldsymbol{k < -\frac{1}{4}}$のとき　　**0 個**

(2) (1) の結果から，$f(x) = 0$ の解の個数が 2 個以上であるとき

$$-\frac{1}{4} \leqq k \leqq 0 \quad \cdots ①$$

$f(x) = \varphi(t)$，$t = \cos x$ より，$\alpha = \cos p_1$，$\beta = \cos p_2$ とおくと

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \varphi(t) = -(t-\alpha)(t-\beta)$$

$(*)$ より，$\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$ であるから

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_{p_1}^{p_2} f(x)\sin x\,dx = -\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\,dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)(t-\beta)\,dt = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3 \end{aligned}$$

$\varphi(t) = 0$ の解と係数の関係により　　$\alpha + \beta = -1,\ \alpha\beta = -k \quad \cdots ②$

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 4k$$

①，② より，$\alpha = \cos p_1 \leqq 0,\ \beta = \cos p_2 \leqq 0$ であるから，前頁の t に対する x の値に注意すると

$$\frac{\pi}{2} \leqq p_1 < p_2 \leqq \pi \quad \text{ゆえに} \quad \cos p_2 < \cos p_1$$

$\alpha - \beta > 0$ であるから　$\alpha - \beta = \sqrt{1+4k}$　ゆえに　$g(k) = \dfrac{1}{6}(1+4k)^{\frac{3}{2}}$

① より　　最大値 $\boldsymbol{g(0) = \dfrac{1}{6}}$，最小値 $\boldsymbol{g\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 0}$

2024年3月25日(月)

2024年 熊大医医

m を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $k^2-\ell^2=3^m$ を満たす自然数の組 $(k,\ \ell)$ の個数を m を用いて表せ。

(2) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x で3の倍数でないものを m を用いて表せ。

(3) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x の個数を m を用いて表せ。

解答 (1) $k^2-\ell^2=3^m$ より　$(k+\ell)(k-\ell)=3^m$

$k+\ell>k-\ell$ より，自然数 $m_1,\ m_2$ を用いて

$$k+\ell=3^{m_1},\quad k-\ell=3^{m_2}\qquad (m_1+m_2=m,\ m_1>m_2\geqq 0)$$

とすると，$3^{m_1}\equiv 1,\ \ 3^{m_2}\equiv 1\ \pmod 2$ に注意して

$$k=\frac{3^{m_1}+3^{m_2}}{2},\quad \ell=\frac{3^{m_1}-3^{m_2}}{2}\qquad (*)$$

$0\leqq m_2\leqq\left[\frac{m-1}{2}\right]$ であるから，求める自然数 $(k,\ \ell)$ の組の個数は

$$\left[\frac{m-1}{2}\right]+1=\left[\frac{\boldsymbol{m+1}}{\boldsymbol{2}}\right]$$

(2) 2つの整数 $a,\ b$ の最大公約数を $\gcd(a,\ b)$ とする．x は3の倍数でないから，ユークリッドの互除法により

$$\gcd(x,\ x+3^m)=\gcd(x,\ 3^m)=1$$

x が3の倍数でないとき，x と $x+3^m$ は互いに素である．

$\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数であるとき，整数 $k,\ \ell$ を用いて

$$x+3^m=k^2,\quad x=\ell^2\quad \text{ゆえに}\quad (k+\ell)(k-\ell)=3^m$$

したがって，$(*)$ を得る．このとき，$x=\ell^2$ より，ℓ は3の倍数でないから

$$(m_1,\ m_2)=(m,\ 0),\ (0,\ m)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{x=\left(\frac{3^m-1}{2}\right)^2}$$

(3) x が 3^m を約数にもつとき，$x = 3^m A$ とおくと ($A > 0$ は整数)

$$\sqrt{x(x+3^m)} = \sqrt{3^m A(3^m A + 3^m)} = 3^m\sqrt{A}\sqrt{A+1}$$

$(A,\ A+1) = (A,\ 1) = 1$ より，上式が整数のとき，$\sqrt{A}$，$\sqrt{A+1}$ は整数であるから，次式より，これを満たす整数 x は存在しない．

$$1 = (\sqrt{A+1})^2 - (\sqrt{A})^2 = (\sqrt{A+1}+\sqrt{A})(\sqrt{A+1}-\sqrt{A})$$

$x = 3^j B_j$ ($B_j > 0$ は 3 で割り切れない) とすると ($j = 0, 1, \cdots, m-1$)

$$\sqrt{x(x+3^m)} = \sqrt{3^j B(3^j B_j + 3^m)} = 3^j\sqrt{B_j(B_j + 3^{m-j})}$$

このとき，$\sqrt{B_j(B_j+3^{m-j})}$ は整数であるから，(2) の結論より

$$B_j = \left(\frac{3^{m-j}-1}{2}\right)^2 \quad \text{すなわち} \quad x = 3^j B_j \quad (j = 0, 1, \cdots, m-1)$$

よって，求める x の個数は　　$\boldsymbol{m}$ (個)

2024年3月26日 (火)

2024年 京大文系

四面体OABCが次を満たすとする．

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1,\quad \angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{ACB},\quad \angle\mathrm{AOB}=90^\circ$$

このとき，四面体OABCの体積を求めよ．

解答 $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$, $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ であるから，Oを座標空間の原点とし，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t,\ u)$ とおく $(u>0,\ s^2+t^2+u^2=1\cdots①)$．

$\cos\angle\mathrm{COA}=\cos\angle\mathrm{COB}=\cos\angle\mathrm{ACB}$ であるから

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}\tag{A}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(s,\ t,\ u)$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(1-s,-t,-u)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(-s,\ 1-t,-u)$ を代入すると

$$s=t=\frac{-s(1-s)-t(1-t)+u^2}{\sqrt{(1-s)^2+t^2+u^2}\sqrt{s^2+(1-t)^2+u^2}}$$

$s=t$ を① および上式に代入すると

$$2t^2+u^2=1,\quad t=\frac{2t^2+u^2-2t}{2t^2+u^2-2t+1}\tag{$*$}$$

$(*)$ の2式から u を消去すると

$$t=\frac{1-2t}{2-2t}\quad \text{整理すると}\quad 2t^2-4t+1=0$$

$(*)$ の第1式から，$|t|\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に注意して

$$t=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\quad \text{ゆえに}\quad u^2=1-2t^2=2\sqrt{2}-2$$

$u>0$ より　　$u=\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

よって，四面体OABCの体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot u=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-2}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}}{\boldsymbol{6}}$$

2024年3月27日 (水)

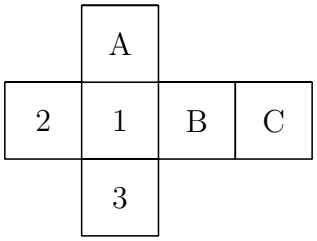
2024年 京大文系

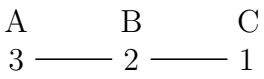
n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_3 を求めよ．

(2) p_4 を求めよ．

解答 (1) 次の立方体の展開図において，1，2，3の面を異なる色で塗り，残りのA，B，Cの面を順番に塗るとき，A，B，Cはそれぞれ3，2，1と同じ色で塗ることになる．



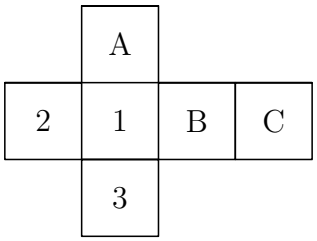


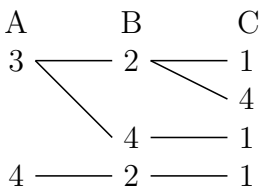
3色を1〜3に対応させる方法が3!通りあるから，求める確率は

$$\frac{3!}{3^6}=\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{243}}$$

(2) 次の立方体の展開図において，1，2，3の面を異なる色で塗り，残りのA，B，Cの面を順番に塗るとき，次の規則に従う．

- Aは1，2以外の色で塗る．
- Bは1，3，A以外の色で塗る．
- Cは2，3，A，B以外の色で塗る．





1〜4の色で展開図の面を塗る方法は上の樹形図で示した4通あり，4色を1〜4に対応させる方法が4!通りあるから，求める確率は

$$\frac{4\cdot 4!}{4^6}=\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{128}}$$

2024年3月28日 (木)

2024年 京大文系

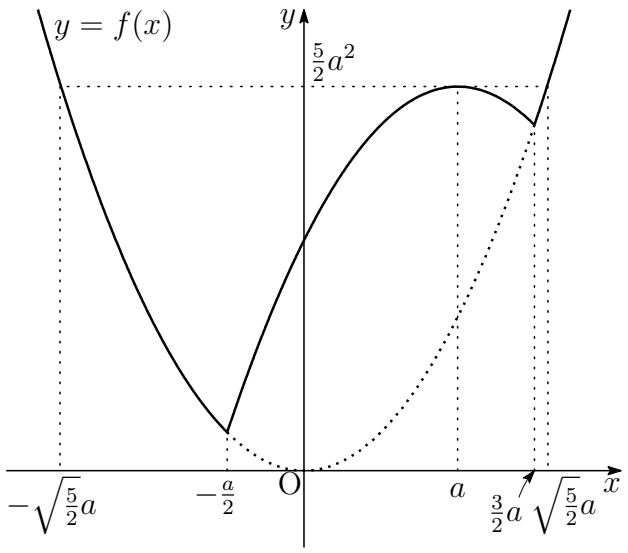
a は正の定数とする．次の関数の最大値を求めよ．

$$f(x)=\left|x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)\right|+ax+\frac{3}{4}a^2 \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

解答 $x^2-\left(ax+\dfrac{3}{4}a^2\right)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}a\right)$ より

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \left(x\leqq -\dfrac{a}{2},\ \dfrac{3}{2}a\leqq x\right) \\ -x^2+2ax+\dfrac{3}{2}a^2 & \left(-\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}a\right) \end{cases}$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



(i) $0\leqq t\leqq \dfrac{a}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(t)-f(-t)&=\left(-t^2+2at+\frac{3}{2}a^2\right)-\left\{-(-t)^2+2a(-t)+\frac{3}{2}a^2\right\} \\ &=4at\geqq 0 \end{aligned}$$

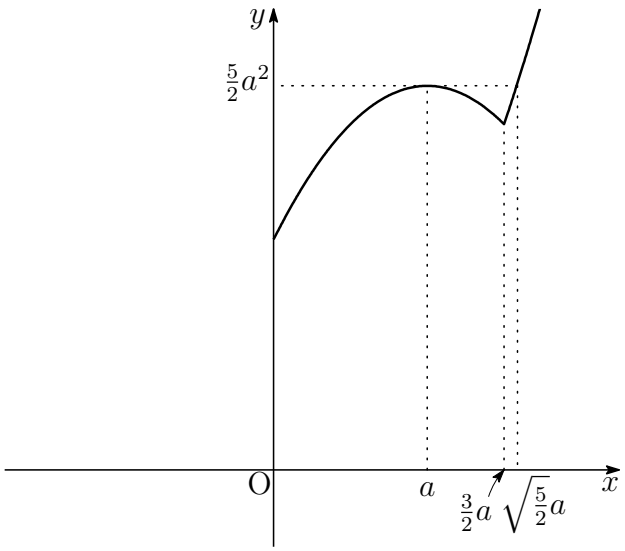
(ii) $\dfrac{a}{2} \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}a$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) - f(-t) &= \left(-t^2 + 2at + \frac{3}{2}a^2\right) - (-t)^2 \\ &= -2t^2 + 2at + \frac{3}{2}a^2 \\ &= -2\left(t + \frac{a}{2}\right)\left(t - \frac{3}{2}a\right) \geqq 0 \end{aligned}$$

(iii) $\dfrac{3}{2}a \leqq t$ のとき

$$f(t) - f(-t) = t^2 - (-t)^2 = 0$$

(i)〜(iii) より，$f(x)$ の最大値は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で求めるとよい．



したがって

$1 < a$ のとき，最大値 $f(1) = \dfrac{3}{2}a^2 + 2a - 1$

$a \leqq 1 < \sqrt{\dfrac{5}{2}}a$，すなわち，**$\sqrt{\dfrac{2}{5}} < a \leqq 1$ のとき，最大値 $f(a) = \dfrac{5}{2}a^2$**

$\sqrt{\dfrac{5}{2}}a \leqq 1$，すなわち，**$0 < a \leqq \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ のとき，最大値 $f(1) = 1$**

2024年3月29日 (金)

2024年 京大文系

ある自然数を八進法，九進法，十進法でそれぞれ表したとき，桁数がすべて同じになった．このような自然数で最大のものを求めよ．ただし，必要なら次を用いてもよい．

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011, \quad 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$$

解答 八進法および十進法でそれぞれ表記された数の桁数が同じである最大の自然数を求めればよい．八進法で表記された n 桁の最大数

$$\overbrace{7\cdots7}^{n\text{桁}}{}_{(8)} = 8^n - 1 \tag{$*$}$$

と 10 進法で表記された n 桁の最小数 10^{n-1} について，次式を満たす．

$$8^n - 1 \geqq 10^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad 8^n > 10^{n-1} \tag{A}$$

上の第 2 式から　　$\log_{10} 8^n > n - 1$

$$(1 - 3\log_{10} 2)n < 1 \quad \text{ゆえに} \quad n < \frac{1}{1 - 3\log_{10} 2} \tag{B}$$

$0.3010 < \log_{20} 2 < 0.3011$ より

$$\frac{1}{11} < 0.0967 < 1 - 3\log_{10} 2 < 0.097 < \frac{1}{10}$$

$$10 < \frac{1}{1 - 3\log_{10} 2} < 11$$

したがって，(B) を満たす最大の整数 n は　　$n = 10$

$n = 10$ を (A) の第 1 式に代入すると

$$8^{10} - 1 \geqq 10^9$$

$(*)$ により，求める最大の自然数は　　$\boldsymbol{8^{10} - 1}$

2024年3月30日 (土)

2024年 京大文系

関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフの $x>1$ の部分を C とする．このとき，下の条件を満たすような正の実数 a，b について，座標平面の点 $(a,\ b)$ が動く領域の面積を求めよ．

「C と直線 $y=ax+b$ は二つの異なる共有点を持つ.」

解答 $y=x^2-4x+5$ と $y=ax+b$ から y を消去すると

$$x^2-4x+5=ax+b \quad \text{ゆえに} \quad x^2-(a+4)x-b+5=0$$

この2次方程式が $x>1$ の範囲で異なる2つの実数解をもつための $a,\ b$ の条件を求めればよい．$f(x)=x^2-(a+4)x-b+5$ とおくと

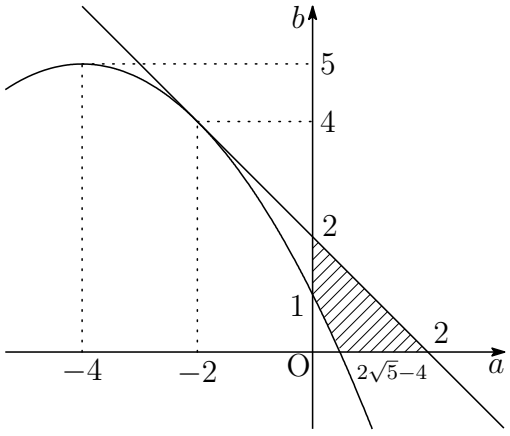
$$f(x)=\left(x-\frac{a+4}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(a+4)^2-b+5$$

a，b が正であることと条件を満たすとき

$$a>0, \quad b>0, \quad f(1)=-a-b+2>0, \quad -\frac{1}{4}(a+4)^2-b+5<0$$

すなわち　　$a>0, \quad b>0, \quad b<-a+2, \quad b>-\frac{1}{4}(a+4)^2+5$

これらの不等式の満たす領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



よって，求める斜線部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 - \int_0^{2\sqrt{5}-4} \left\{ -\frac{1}{4}(a+4)^2 + 5 \right\} da \\ &= 2 + \left[\frac{1}{12}(a+4)^3 - 5a \right]_0^{2\sqrt{5}-4} \\ &= \boldsymbol{\frac{50-20\sqrt{5}}{3}} \end{aligned}$$

2024年3月31日(日)

2016年 神戸大理系

極方程式で表されたxy平面上の曲線$r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$を$C$とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線C上の点を直交座標$(x,\ y)$で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$となる点，および$\dfrac{dy}{d\theta}=0$となる点の直交座標を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}$を求めよ．

(3) 曲線Cの概形をxy平面上にかけ．

(4) 曲線Cの長さを求めよ．

解答　(1) $r=1+\cos\theta$より

$$\begin{cases} x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

これらをθについて微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta}&=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &=-\sin\theta(1+2\cos\theta), \\ \frac{dy}{d\theta}&=-\sin\theta\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta \\ &=-(1-\cos^2\theta)+(1+\cos\theta)\cos\theta \\ &=(1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta) \end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{dx}{d\theta}=0\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$の解は　$\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　　$\boldsymbol{(2,\ 0),\ (0,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$

また，$\dfrac{dy}{d\theta}=0\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$の解は　$\theta=\pi,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\frac{3}{4},\ \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \dfrac{(1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)}$

$$= \frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)} \cdot \frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta}$$

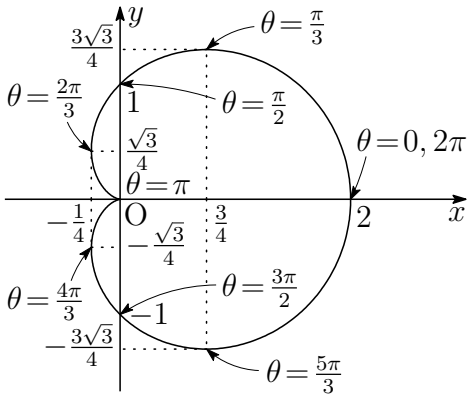
$$= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta}$$

よって $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta\to\pi} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} = \frac{0}{1+1} \cdot \frac{1+2}{1-2} = \mathbf{0}$

(3) $f(\theta)=1+\cos\theta$ とすると，$f(2\pi-\theta)=r(\theta)$．C は x 軸に関して対称であるから，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における C の増減を調べる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta})$		$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	
(x,y)	$(2,0)$	$\cdots$	$(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4})$	$\cdots$	$(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$	$\cdots$	$(0,0)$

上の増減表および (2) の結果から，C の概形は次のようになる．



(4) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta$$

ゆえに $\quad\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

$r=1+\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2&=(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2\\&=2(1+\cos\theta)=4\cos^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

よって，曲線 C の長さを l とすると

$$\begin{aligned}\frac{l}{2}&=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta\\&=\int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\left[\,4\sin\frac{\theta}{2}\,\right]_0^{\pi}=4\end{aligned}$$

よって $\quad l=\mathbf{8}$

補足 曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ は，カージオイド (cardioid) または心臓形という．

解説

C の x 軸の上側の部分と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\, r^2\sin\theta\cos\theta \,\Big]_{0}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\, \frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \,\Big]_{0}^{\pi} = \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

C の x 軸の上側の部分を x 軸のまわりに 1 回転した回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y^2\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y^2\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} (r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\Big[\, r^3\sin^2\theta\cos\theta \,\Big]_{0}^{\pi} + \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\Big[\, -\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4 \,\Big]_{0}^{\pi} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

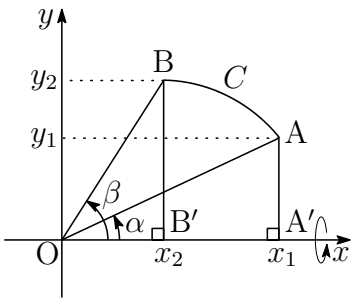
よって　　$V = \dfrac{8}{3}\pi$

曲線 $r = f(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の弧長 l，x 軸と囲まれた部分の面積 S，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$l = \int_{0}^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta, \quad S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\,d\theta, \quad V = \frac{2\pi}{3}\int_{0}^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta$$

極方程式と面積

$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から x 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．$S_A = \triangle \mathrm{OAA'}$，$S_B = \triangle \mathrm{OBB'}$ とし，曲線 C，x 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域 D_C の面積を S_C，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域 D の面積を S とすると



$$
\begin{aligned}
S_C &= \int_{x_2}^{x_1} y\,dx = \int_{\beta}^{\alpha} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\, r^2\sin\theta\cos\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -S_B + S_A + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$S = S_C + S_B - S_A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta$

極方程式と x 軸の周りの回転体の体積

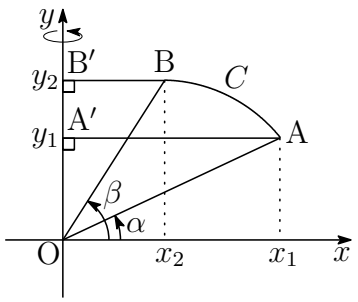
次に $\triangle \mathrm{OAA'}$，$\triangle \mathrm{OBB'}$ を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると

$$
\begin{aligned}
V_C &= \pi\int_{x_2}^{x_1} y^2\,dx = \pi\int_{\beta}^{\alpha} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} (r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\Big[\, r^3\sin^2\theta\cos\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -V_B + V_A + \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$V = V_C + V_B - V_A = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta$

極方程式と y 軸の周りの回転体の体積

$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から y 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．曲線 C，y 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域を D_C とし，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域を D とする．△OAA′，△OBB′ を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると



$$
\begin{aligned}
V_C &= \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^2\cos^2\theta(r'\sin\theta + r\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} (r^3)'\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\Big[\, r^3\cos^2\theta\sin\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} - \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(-2\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta)d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= V_B - V_A + \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$V = V_C + V_A - V_B = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta$

極方程式の計量

- 弧長 l　　$\boldsymbol{l = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$
- 面積 S　　$\boldsymbol{S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta}$
- x 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi)}$$

- y 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right)}$$

2024年4月1日 (月)

2024年 京大理系

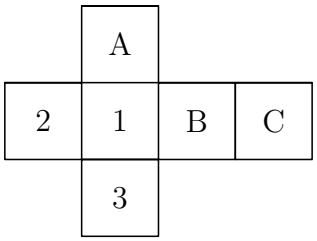
n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

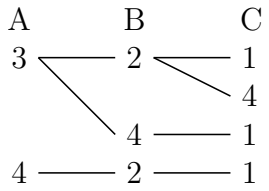
(1) p_4 を求めよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

解答 (1) 次の立方体の展開図において，1，2，3 の面を異なる色で塗り，残りの A，B，C の面を順番に塗るとき，次の規則に従う．

- A は 1，2 以外の色で塗る．
- B は 1，3，A 以外の色で塗る．
- C は 2，3，A，B 以外の色で塗る．





1〜4 の色で展開図の面を塗る方法は上の樹形図で示した 4 通あり，4 色を 1〜4 に対応させる方法が 4! 通りあるから，求める確率は

$$\frac{4\cdot 4!}{4^6} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{128}}$$

(2) n 個の色で 6 面をすべて異なる色で塗る確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_6}{n^6} = \prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right) \tag{A}$$

この確率と p_n の大小関係について

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_6}{n^6} \leqq p_n \leqq 1 \tag{B}$$

(A) から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}_n\mathrm{P}_6}{n^6} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right) = 1 \tag{C}$$

(B)，(C) からはさみうちの原理により $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = 1}$

2024年4月2日 (火)

2024年 京大理系

$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)| = 3$ を満たす複素数 y に対して，$z = \dfrac{x+y}{2}$ とする．このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ．

解答 $|w| = 1$ とすると，$|y-(8+6i)| = 3$ より　$y = 8+6i+3w$

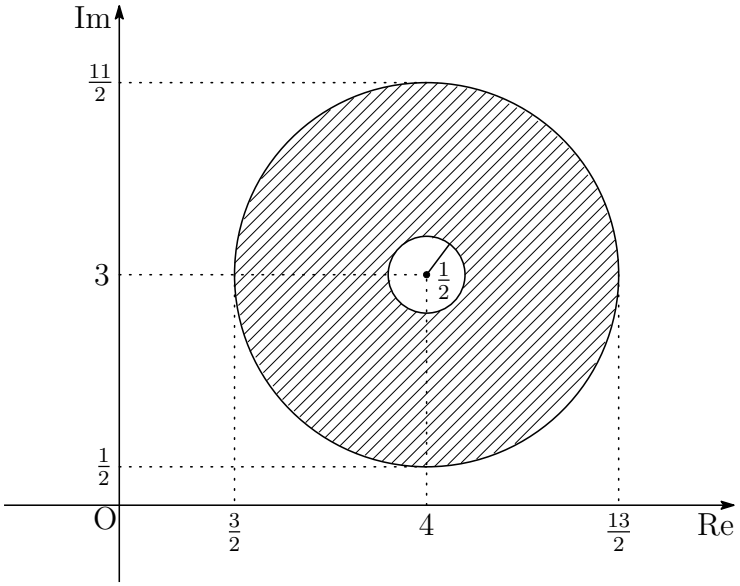
上式を $z = \dfrac{x+y}{2}$ に代入すると　$z = 4+3i+\dfrac{3}{2}w+\dfrac{x}{2}$

$|x| \leqq 2$ より，$\left|\dfrac{x}{2}\right| \leqq 1$ であるから

$$\frac{1}{2} \leqq \left|\frac{3}{2}w\right| - \left|\frac{x}{2}\right| \leqq \left|\frac{3}{2}w+\frac{x}{2}\right| \leqq \left|\frac{3}{2}w\right| + \left|\frac{x}{2}\right| \leqq \frac{5}{2}$$

したがって，z の方程式および表す領域は，図の斜線部分で境界を含む．

$$z = 4+3i+rw \quad \left(\frac{1}{2} \leqq r \leqq \frac{5}{2}\right)$$



また，領域の表す面積は

$$\pi\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \mathbf{6\pi}$$

2024年4月3日 (水)

2024年 京大理系

座標空間の4点O，A，B，Cは同一平面上にないとする．線分OAの中点をP，線分ABの中点をQとする．実数x，yに対して，直線OC上の点Xと，直線BC上の点Yを次のように定める．

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=x\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BY}}=y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき，直線QYと直線PXがねじれの位置にあるためのx，yに関する必要十分条件を求めよ．

解答 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OX}}=x\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BY}}=y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$より　$\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=y(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=(1-y)\vec{b}+y\vec{c}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{QY}}&=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-y)\vec{b}+y\vec{c}-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\vec{b}+y\vec{c},\\
\overrightarrow{\mathrm{PX}}&=\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a},\\
\overrightarrow{\mathrm{QY}}\times\overrightarrow{\mathrm{PX}}&=\left\{-\frac{1}{2}\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\vec{b}+y\vec{c}\right\}\times\left(x\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\\
&=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}y\right)\vec{a}\times\vec{b}+x\left(\frac{1}{2}-y\right)\vec{b}\times\vec{c}+\frac{1}{2}(x-y)\vec{c}\times\vec{a},\\
\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}
\end{aligned}$$

直線QYと直線PXがねじれの位置にあるためのx，yに関する必要十分条件は

$$(\overrightarrow{\mathrm{QY}}\times\overrightarrow{\mathrm{PX}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\neq 0\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{2}(x-y)(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\neq 0$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$は1次独立であるから，$(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\neq 0$に注意して

$$\frac{1}{2}(x-y)\neq 0\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{x\neq y}$$

2024年4月4日 (木)

2024年 京大理系

与えられた自然数 a_0 に対して，自然数からなる数列 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots$ を次のように定める．

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_nが偶数のとき)\\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_nが奇数のとき)\end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1) $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

(2) $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{10}$ がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

解答　(1) 条件を満たすとき，$n=0,1,2$ について

$$a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{2}$$

が成立するから　　$a_{n+1}+1=\dfrac{3}{2}(a_n+1)$

$$a_n=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n-1 \qquad (n=0,1,2,3) \qquad (*)$$

$(a_0+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$ が偶数となる最小の自然数 a_0 を求めるとよいから

$$a_0+1=2^4 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_0=15}$$

(2) $(*)$ と同様に，条件を満たすとき

$$a_n=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n-1 \qquad (n=0,1,\cdots,10)$$

$(a_0+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$ が偶数となる最小の自然数 a_0 を求めるとよいから

$$a_0+1=2^{11} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_0=2047}$$

2024年4月5日 (金)

2024年 京大理系

a は $a \geqq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の4つの不等式が表す領域を D_a とする．

$$x \geqq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y, \quad y \leqq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leqq a$$

次の問いに答えよ．

(1) D_a の面積 S_a を求めよ．

(2) $\lim_{a \to \infty} S_a$ を求めよ．

解答　(1) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ に $y=a$ を代入すると $(a \geqq 1)$

$$a=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^x)^2-2ae^x+1=0$$

$a \geqq 1$ に注意して，e^x について解くと　　$e^x=a\pm\sqrt{a^2-1}$

$x \geqq 0$ のとき，$e^x \geqq 1$ であるから，$(a+\sqrt{a^2-1})(a-\sqrt{a^2-1})=1$ より

$$e^x=a+\sqrt{a^2-1} \quad \text{ゆえに} \quad x=\log(a+\sqrt{a^2-1})$$

$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ に $y=a$ を代入すると $(a \geqq 1)$

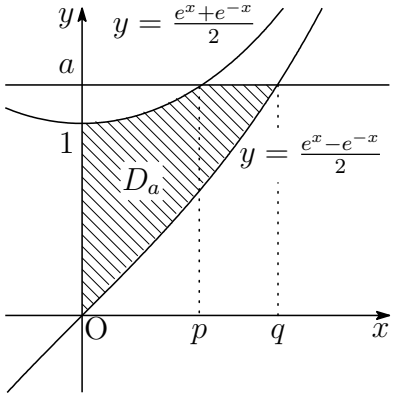
$$a=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^x)^2-2ae^x-1=0$$

$e^x>0$ に注意して，x について解くと

$$e^x=a+\sqrt{a^2+1} \quad \text{ゆえに} \quad x=\log(a+\sqrt{a^2+1})$$

$p=\log(a+\sqrt{a^2-1})$，$q=\log(a+\sqrt{a^2+1})$ とおくと

$$e^p=a+\sqrt{a^2-1}, \quad e^{-p}=a-\sqrt{a^2-1}$$
$$e^q=a+\sqrt{a^2+1}, \quad e^{-q}=-a+\sqrt{a^2+1}$$



したがって，D_a の面積 S_a は

$$\begin{aligned}
S_a &= \int_0^p \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx+\int_p^q \left(a-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx \\
&= \left[-e^{-x}\right]_0^p+\left[\ ax-\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ \right]_p^q \\
&= 1+a(q-p)+\frac{e^p-e^{-p}}{2}-\frac{e^q+e^{-q}}{2} \\
&= \boldsymbol{1+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a-\sqrt{a^2-1}}+\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+1}}
\end{aligned}$$

(2) まず

$$\lim_{a\to\infty}(\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+1})=\lim_{a\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2+1}}=0 \qquad \text{(A)}$$

$\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\dfrac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\dfrac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2-1}}$ より

$$1<\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2-1}}$$

したがって

$$0<a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}<\frac{a}{2}\log\frac{a^2+1}{a^2-1} \qquad (*)$$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\frac{a}{2}\log\frac{a^2+1}{a^2-1}&=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{a^2-1}\log\left(1+\frac{2}{a^2-1}\right)^{\frac{a^2-1}{2}}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a-\frac{1}{a}}=0 \qquad (**)\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{a\to\infty}a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=0 \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) から

$$\lim_{a\to\infty}S_a=\lim_{a\to\infty}\left(1+a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a-\sqrt{a^2-1}}+\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+1}\right)=\mathbf{1}$$

2024年4月6日 (土)

2024 年 京大理系

自然数 k に対して，$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする．n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする．また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする．次を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{N_n}$$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高位の数字は 2 である．

解答 $a_k = 2^{\sqrt{k}}$ について a_k の整数部分が n 桁であるとき

$$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$$

上式の辺々の常用対数をとると　$n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10} 2 < n$

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 \leqq k < \left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2$$

$[x]$ を x を超えない最大の整数とすると，整数 k の範囲は

$$\left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right] + 1 \leqq k \leqq \left[\left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2\right]$$

したがって

$$N_n = \left[\left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right]$$

a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるとき

$$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 2 \times 10^{n-1}$$

上式の辺々の常用対数をとると　$n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10} 2 < \log_{10} 2 + n - 1$

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 \leqq k < \left(1 + \frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2$$

このとき，整数 k の範囲は

$$\left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right] + 1 \leqq k \leqq \left[\left(1 + \frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right]$$

したがって

$$L_n = \left[\left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]$$

$x-1<[x]\leqq x$ であるから，$x-y-1<[x]-[y]<x-y+1$ より

$$\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-1<N_n<\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2+1,$$
$$\left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-1<L_n<\left(1+\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2+1$$

前の 2 式をそれぞれ整理すると

$$\frac{2n-1}{(\log_{10}2)^2}-1<N_n<\frac{2n-1}{(\log_{10}2)^2}+1,$$
$$\frac{2n-2}{\log_{10}2}<L_n<\frac{2n-2}{\log_{10}2}+2$$

上の 2 式をそれぞれ $2n$ で割ると

$$\frac{1-\frac{1}{2n}}{(\log_{10}2)^2}-\frac{1}{2n}<\frac{N_n}{2n}<\frac{1-\frac{1}{2n}}{(\log_{10}2)^2}+\frac{1}{2n},$$
$$\frac{1-\frac{1}{n}}{\log_{10}2}<\frac{L_n}{2n}<\frac{1-\frac{1}{n}}{\log_{10}2}+\frac{1}{n}$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{2n}=\frac{1}{(\log_{10}2)^2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{2n}=\frac{1}{\log_{10}2}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{2n}\cdot\frac{2n}{N_n}=\frac{1}{\log_{10}2}\cdot(\log_{10}2)^2=\mathbf{\log_{10}2}$$

2024年4月7日 (日)

2024 年 鹿児島大学

次の関数を考える．

$$y = 4\sin^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

また，$x = \sin\theta - \cos\theta$ とする．

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) y を x の関数で表せ．

(3) y の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

解答 (1) $x = \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7}{4}\pi$ であるから $\qquad \boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}}$

(2) $x^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$ より $\quad \sin\theta\cos\theta = \dfrac{1-x^2}{2}$

$$\begin{aligned} y &= 4\sin^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta \\ &= 4(\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta) + 3\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta \\ &= 4x\left(1 + \frac{1-x^2}{2}\right) + 3\sqrt{2}\cdot\frac{1-x^2}{2} \\ &= \boldsymbol{-2x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + 6x + \frac{3\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$y' = -6x^2 - 3\sqrt{2}x + 6 = -3(x + \sqrt{2})(2x - \sqrt{2})$$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{7\sqrt{2}}{2}$	↗	$\frac{13\sqrt{2}}{4}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\theta = \dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{13}{12}\pi$

$x = -\sqrt{2}$ のとき　$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$　すなわち　$\theta = \dfrac{7}{4}\pi$

よって　　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{13}{12}\pi}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\dfrac{13}{4}\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{\theta = \dfrac{7}{4}\pi}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{7}{2}\sqrt{2}}$

2024年4月8日 (月)

2024年 鹿児島大学

$c \geqq 3$ である実数 c に対して，x の2次方程式

$$x^2 - 2(c+1)x + c^2 - 2c + 9 = 0 \quad \cdots ①$$

を考える．

(1) 2次方程式 ① は，c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつことを示せ．

(1) の結果を用いて，次のように数列 $\{a_n\}$ を定める．$a_1 = 3$ とする．$c = a_1$ のときの方程式 ① の実数解のうち，a_1 より大きい方を a_2 とおく．次に $a_2 > 3$ が成り立つことに注意して，$c = a_2$ のときの方程式 ① の実数解のうち，a_2 より大きい方を a_3 とおく．これを繰り返す．すなわち，$3 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$ が成り立ち，2次方程式

$$x^2 - 2(a_n+1)x + {a_n}^2 - 2a_n + 9 = 0 \quad \cdots ②$$

の実数解のうち，大きい方が a_{n+1} である．

(2) $n \geqq 2$ とする．2次方程式 ② の実数解のうち，小さい方は a_{n-1} であることを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2 \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

(4) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定めるとき，数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解答　(1) $f(x)=x^2-2(c+1)x+c^2-2c+9$ とおくと $(c \geqq 3)$

$$f(c)=-4c+9=-4(c-3)-3<0$$

$f(x)$ の x^2 の係数が正であるから，$f(x)=0$ は，c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつ．

(2) 2 次方程式

$$x^2-2(a_n+1)x+{a_n}^2-2a_n+9=0 \quad \cdots ②$$

の実数解のうち，大きい方が a_{n+1} であるから，2 次方程式

$$x^2-2(a_{n-1}+1)x+{a_{n-1}}^2-2a_{n-1}+9=0 \qquad (n \geqq 2)$$

の解が a_n であるから

$${a_n}^2-2(a_{n-1}+1)a_n+{a_{n-1}}^2-2a_{n-1}+9=0$$

上式を変形すると

$${a_{n-1}}^2-2(a_n+1)a_{n-1}+{a_n}^2-2a_n+9=0 \quad \cdots ③$$

③ から，a_{n-1} は 2 次方程式 ② の解である．

2 次方程式 ② の 2 つの解 $a_{n+1},\ a_{n-1}$ は，(1) の結論から　$a_{n-1}<a_n<a_{n+1}$

(3) 2 次方程式 ② の解と係数の関係により

$$a_{n+1}+a_{n-1}=2(a_n+1) \quad \text{よって} \quad a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2$$

(4) $a_1=3$ を ② に代入すると　　$x^2-8x+12=0$

これを解いて　$x=2,\ 6$　ゆえに　$a_2=6$

(3) の結果から　　$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}+2$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ をこれに適用すると　$b_n=b_{n-1}+2$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_2-a_1=6-3=3$，公差 2 の等差数列であるから

$$b_n=3+2(n-1)=\boldsymbol{2n+1}$$

$n>1$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=n^2+2$

上式は $n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n=n^2+2}$

2024年4月9日 (火)

2024年 鹿児島大学

座標空間において，点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 4)$，点 $\mathrm{B}(3,\ -2,\ 5)$ を通る直線を l，点 $\mathrm{C}(3,\ 2,\ 2)$，点 $\mathrm{D}(4,\ 3,\ 0)$ を通る直線を m とする．

(1) 2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を，0° と 180° の間の範囲で答えよ．

(2) 直線 l，m が交わるか交わらないか調べよ．

(3) 直線 l，m の両方と交わり，両方と直交する直線を n とする．n と l の交点，および n と m の交点を求めよ．

解答　(1) A$(2,\ 0,\ 4)$，B$(3, -2,\ 5)$，C$(3,\ 2,\ 2)$，D$(4,\ 3,\ 0)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1, -2,\ 1), \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (1,\ 1, -2) \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を θ とすると $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|} = \frac{1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = -\frac{1}{2}$$

したがって　　$\boldsymbol{\theta = 120^\circ}$

(2) $(*)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 3(1,\ 1,\ 1)$

l 上の点 A$(2,\ 0,\ 4)$，m 上の点 C$(3,\ 2,\ 2)$ について　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 2, -2)$

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{CD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3 \neq 0$$

したがって，直線 l，m は交わらない．

(3) n と l，n と m の交点をそれぞれ P，Q とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおけるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2,\ 0,\ 4) + s(1, -2.\ 1) = (2+s, -2s,\ 4+s)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (3,\ 2,\ 2) + t(1,\ 1, -2) = (3+t,\ 2+t,\ 2-2t)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-s+t+1,\ 2s+t+2,\ -s-2t-2)$$

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{CD}})//\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから

$$-s+t+1 = 2s+t+2 = -s-2t-2$$

これを解いて　　$s = -\dfrac{1}{3},\ \ t = -1$

したがって　　$\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$，　$\mathrm{Q}(2,\ 1,\ 4)$

よって　　n と l の交点は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{11}{3}}\right)$

n と m の交点は　$\boldsymbol{(2,\ 1,\ 4)}$

2024年4月10日 (水)

2024年 鹿児島大学

袋の中に $-1,\ 0,\ 1$ が書かれたカードがそれぞれ1枚，1枚，m 枚ずつ入っている．ただし，m は自然数である．この袋の中から無作為に2枚同時に取り出す．取り出されたカードに書かれた数字をそれぞれ X，Y とする．ただし，$X \leqq Y$ とする．

(1) $m = 2$ のとき，確率 $P(X \geqq 0)$ を求めよ．

(2) $m = 9$ のとき，確率 $P(Y = 1)$ を求めよ．

(3) XY の期待値 $E(XY)$ が正となるような m のうち，最小のものを求めよ．

解答 (1) $m=2$ より，$-1,\ 0,\ 1,\ 1$ の 4 枚のカードから 2 枚取り出すとき，$X \geqq 0$ となるのは，$0,\ 1,\ 1$ の 3 枚のうち 2 枚を取り出す確率であるから

$$P(X \geqq 0) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \frac{3}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) $m=9$ より，$-1,\ 0,\ \overbrace{1,\ \cdots,\ 1}^{9\text{ 枚}}$ の 11 枚のカードから 2 枚取り出すとき，$Y=0$ となるのは，$-1,\ 0$ の 2 枚のうち 2 枚を取り出す確率で

$$P(Y=0) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2} = \frac{1}{55}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$P(Y=1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \frac{1}{55} = \boldsymbol{\frac{54}{55}}$$

(3) $-1,\ 0,\ \overbrace{1,\ \cdots,\ 1}^{m\text{ 枚}}$ の $m+2$ 枚のカードから 2 枚取り出すとき，XY が正となるのは，$m \geqq 2$ であることが必要であるから

$$P(X=Y=1) = \frac{{}_m\mathrm{C}_2}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2} = \frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$$
$$P(X=0,\ Y=1) = \frac{1\cdot{}_m\mathrm{C}_1}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2} = \frac{2m}{(m+2)(m+1)}$$
$$P(X=-1,\ Y=1) = \frac{1\cdot{}_m\mathrm{C}_1}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2} = \frac{2m}{(m+2)(m+1)}$$
$$P(X=-1,\ Y=0) = \frac{1\cdot 1}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2} = \frac{2}{(m+2)(m+1)}$$

上の結果から，XY の確率分布表は次のようになる．

XY	-1	0	1	計
確率	$\frac{2m}{(m+2)(m+1)}$	$\frac{2m+2}{(m+2)(m+1)}$	$\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$	1

したがって

$$E(XY) = -1\cdot\frac{2m}{(m+2)(m+1)} + 1\cdot\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$$
$$= \frac{m(m-3)}{(m+2)(m+1)}$$

よって，$E(XY)>0$ となる最小の整数 m は　　$\boldsymbol{m=4}$

2024年4月11日 (木)

2024年 鹿児島大学

座標平面上で，放物線Cが次の方程式で与えられている．

$$C : 4x - 4y^2 - 3 = 0$$

原点Oから放物線Cに引いた接線で，傾きが正のものをlとする．また，直線lと放物線Cとの共有点をAとする．

(1) 直線lの方程式，およびAの座標を求めよ．

(2) 直線lと点Aで接する円で，放物線Cとの共有点が2個であるものを求めよ．

(3) 放物線C，直線lおよびx軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答　(1) $C : 4x - 4y^2 - 3 = 0$ より　$x = y^2 + \dfrac{3}{4}$　ゆえに　$\dfrac{dx}{dy} = 2y$

逆関数定理により　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{2y}$

点 A の座標を $\left(a^2 + \dfrac{3}{4},\ a\right)$ とおくと，点 A における接線 l の方程式は，

その傾き $\dfrac{1}{2a}$ が正であることに注意して

$$l : y - a = \frac{1}{2a}\left\{x - \left(a^2 + \frac{3}{4}\right)\right\} \qquad (a > 0)$$

l は原点 O を通るから

$$-a = -\frac{1}{2a}\left(a^2 + \frac{3}{4}\right) \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = \frac{3}{4}$$

$a > 0$ より，$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから　$\boldsymbol{l : y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}}$，$\mathbf{A}\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)$

(2) C 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における法線の方程式は

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -\sqrt{3}(x - 2)$$

この法線上に接する円の中心があるから，その中心を $\mathrm{T}(t + 2, -\sqrt{3}t)$ とし，C 上の点 $\mathrm{P}\left(y^2 + \dfrac{3}{4},\ y\right)$ とし，次の関数を考える．

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \mathrm{TP}^2 - \mathrm{TA}^2 \\
&= \left(y^2 - t - \frac{5}{4}\right)^2 + (y + \sqrt{3}t)^2 - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= \left(y^2 - \frac{3}{4}\right)\left(y^2 - 2t - \frac{7}{4}\right) + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + 2\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left\{\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y^2 - 2t - \frac{7}{4}\right) + \left(y + 2\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\
&= \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left\{\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{4}\right) - 2t\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\
&= \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left\{\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2t\right\}
\end{aligned}$$

$\varphi(y)=0$ が異なる 2 つの解をもてばよいから

$$\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2t=0$$

が重解 $\left(y\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ または $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解にもつときであるから

$$t=0 \quad \text{または} \quad t=\frac{3}{2}$$

求める円の半径を r とすると

$$r^2=\mathrm{TA}^2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

中心 $\mathrm{T}(t+2,-\sqrt{3}t)$ より，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2+y^2=1,\quad \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=16}$$

補足 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a<s<t$ とし，C 上に 3 点

$$\mathrm{A}\left(a^2+\frac{3}{4},\ a\right),\ \mathrm{S}\left(s^2+\frac{3}{4},\ s\right),\ \mathrm{T}\left(t^2+\frac{3}{4},\ t\right)$$

をとる．3 点 A，S，T を通る円を考え，その中心を $(p,\ q)$，半径を r とし，関数

$$f(y)=\left(y^2+\frac{3}{4}-p\right)^2+(y-q)^2-r^2$$

を考えると，次式が成立する．

$$f(a)=f(s)=f(t)=0 \qquad (*)$$

$f(y)$ の第 1 次導関数および第 2 次導関数を求めると

$$\begin{aligned} f'(y)&=4y\left(y^2+\frac{3}{4}-p\right)+2(y-q),\\ f''(y)&=4\left(y^2+\frac{3}{4}-p\right)+4y\cdot 2y+2\\ &=12y^2+5-4p \end{aligned}$$

$(*)$ にロルの定理を適用すると (ロルの定理は平均値の定理の一部)

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0 \qquad (a < c_1 < s < c_2 < t)$$

を満たす $c_1,\ c_2$ が存在する．上式にさらにロルの定理を適用すると

$$f''(c_3) = 0 \qquad (c_1 < c_3 < c_2)$$

を満たす c_3 が存在する．ここで，$t \to a$ とすると，次式が成立する．

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0$$

したがって

$$4a\left(a^2 + \frac{3}{4} - p\right) + 2(a - q) = 0, \quad 12a^2 + 5 - 4p = 0$$

これを解いて

$$p = 3a^2 + \frac{5}{4}, \quad q = -4a^3 \quad \cdots ①$$

$f(a) = 0$ であるから

$$\left(a^2 + \frac{3}{4} - 3a^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (a + 4a^3) - r^2 = 0$$

整理すると

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{4}(1 + 4a^2)^2 + a^2(1 + 4a^2)^2 \quad \cdots ② \\ &= \frac{1}{4}(1 + 4a^2)^3 \end{aligned}$$

これから，C 上の点 A における接触円 S_1 の中心および半径は

$$\text{中心 } \left(3a^2 + \frac{5}{4}, -4a^3\right), \text{ 半径 } \frac{1}{2}(1 + 4a^2)^{\frac{3}{2}}$$

補足 接触円 (曲率円) の中心を曲率中心といい，半径を曲率半径という．また，曲率中心は，C の A における法線上の点である．点 A で接する円の半径が曲率半径よりも大きいとき，円と C の共有点の個数は 3 個ある．また，点 A で接する円の半径が曲率半径よりも小さいときは，距離 2 乗関数を用いて確認する必要がある．

①，② により，$f(y)$ は

$$\begin{aligned}
f(y) &= \left(y^2+\frac{3}{4}-3a^2-\frac{5}{4}\right)^2+(y+4a^3)^2-\frac{1}{4}(1+4a^2)^2-a^2(1+4a^2)^2\\
&= \left(y^2-3a^2-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}+2a^2\right)^2+(y+4a^3)^2-(a+4a^3)^2\\
&= (y^2-a^2)(y^2-5a^2-1)+(y+8a^3+a)(y-a)\\
&= (y-a)\{(y+a)(y^2-5a^2-1)+(y+8a^3+a)\}\\
&= (y-a)(y^3+ay^2-5a^2y+3a^3)\\
&= (y-a)^3(y+3a)
\end{aligned}$$

$f(y)=0$ の解は 2 個であるから，S_1 は C と異なる 2 点を共有する．C の y 座標が $y<-3a,\ a<y$ のとき，C は S_1 の外部にあり，C の y 座標が $-3a<y<a$ のとき，C は S_1 の内部にある．

また，C の A における法線と x 軸の交点を B とすると　B$(2,\ 0)$
C の x 軸に関する対称性から，B を中心とする半径 BA の円 S_2 も異なる接点を 2 個もつこが分かるが，これ以外に共有点を持たないことを距離 2 乗関数を使って示す必要がある．

$$\mathrm{BA}^2=\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2=1$$

C 上の点 $\mathrm{P}\left(y^2+\dfrac{3}{4},\ y\right)$ をとり，次の関数 $g(y)$ を考える．

$$\begin{aligned}
g(y) &= \mathrm{BP}^2-\mathrm{BA}^2=\left(y^2+\frac{3}{4}-2\right)^2+y^2-1\\
&= \left(y^2-\frac{5}{4}\right)^2+y^2-1=y^4-\frac{3}{2}y^2+\frac{9}{16}\\
&= \left(y^2-\frac{3}{4}\right)^2=\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

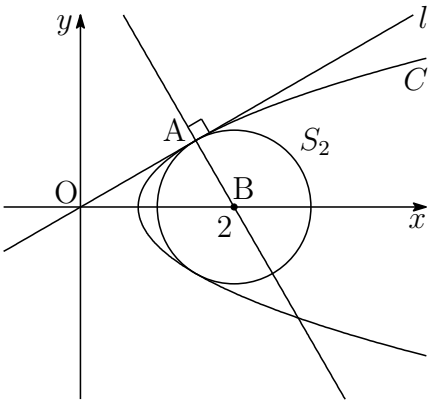
$g(y)=0$ の解は 2 個であるから，S_2 と C は異なる 2 点を共有する．
よって，求める円の方程式は

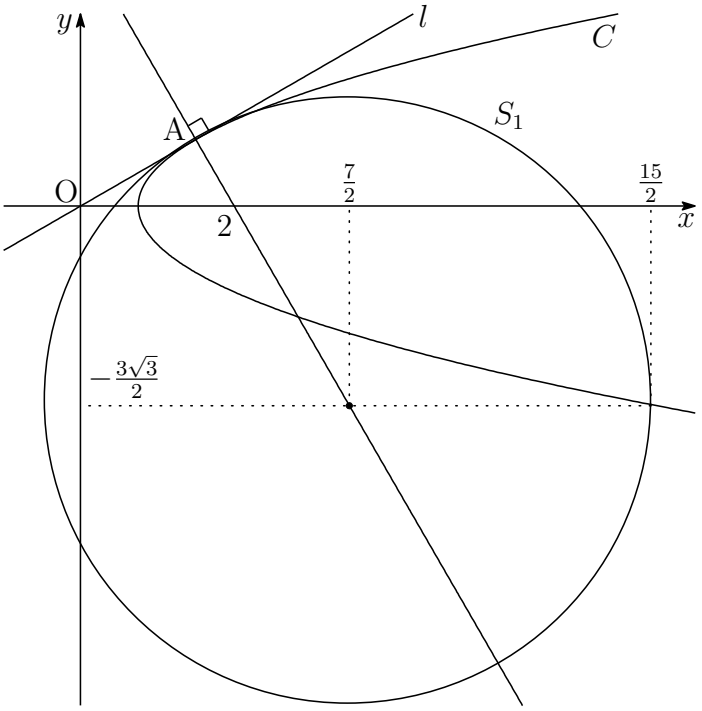
$$\boldsymbol{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=16,\quad (x-2)^2+y^2=1}$$

(3) $C : x = y^2 + \dfrac{3}{4}$, $l : x = \sqrt{3}y$ の方程式から，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(y^2 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}y \right) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 dy$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}}$$





2024年4月12日 (金)

2024年 鹿児島大学

n を自然数とし，次の整式を考える．

$$f(x) = x^{6n} + x^{3n} - 2,$$
$$g(x) = x^2 + x + 1, \qquad h(x) = x^2 - x + 1$$

(1) 方程式 $g(x) = 0$ の解は $x^3 - 1 = 0$ を満たし，方程式 $h(x) = 0$ の解は $x^3 + 1 = 0$ を満たすことを示せ．

ここで，$f(x)$ を2次式で割ると，商が $(6n-2)$ 次式，余りが1次以下の整式になることに注意すると

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad q(x) \text{ は } (6n-2) \text{ 次式},$$
$$r(x) \text{ は1次以下の整式}$$

と書ける．

(2) $r(x) = 0$，つまり $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

(3) $f(x)$ が $h(x)$ で割り切れるならば，n は偶数であることを示せ．

(4) $n = 1$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ のすべての虚数解を極形式で答えよ．

解答 (1) $g(x)=0,\ h(x)=0$ の解をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると

$$g(\alpha)=0,\quad h(\beta)=0$$

$x^3-1=(x-1)g(x),\ x^3+1=(x+1)h(x)$ であるから

$$\alpha^3-1=(\alpha-1)g(\alpha)=0,\quad \beta^3+1=(\beta+1)h(\beta)=0$$

よって，方程式 $g(x)=0$ の解は $x^3-1=0$ を満たし，方程式 $h(x)=0$ の解は $x^3+1=0$ を満たす.

(2) (1) の結論から，$\alpha^3=1$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha)&=\alpha^{6n}+\alpha^{3n}-2\\ &=(\alpha^3)^{2n}+(\alpha^3)^n-2=1^{2n}+1^n-2=0 \end{aligned}$$

因数定理により，$f(x)$ は $g(x)$ を因数にもつ，すなわち，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる.

別解 $f(x)$ が x^2+x+1 を因数にもつことを示す.

$$\begin{aligned} x^{6n}+x^{3n}-2&=(x^{3n}+2)(x^{3n}-1)\\ &=(x^{3n}+2)(x^3-1)\sum_{k=1}^{n}x^{3(k-1)}\\ &=(x^{3n}+2)(x-1)(x^2+x+1)\sum_{k=1}^{n}x^{3(k-1)} \end{aligned}$$

(3) (1) の結論より，$\beta^3=-1$ であるから

$$\begin{aligned} f(\beta)&=\beta^{6n}+\beta^{3n}-2=(\beta^3)^{2n}+(\beta^3)^n-2\\ &=(-1)^{2n}+(-1)^n-2=(-1)^n-1 \end{aligned}$$

上式より，$f(\beta)=0$ となるのは，n が偶数のときであり，このとき，$f(x)$ は $h(x)$ を因数にもつ.

(4) $n=1$ のとき　$f(x)=x^6+x^3-2=(x^3+2)(x^3-1)$

$f(x)=0$ のとき　$x^3=-2$　または　$x^3=1$

$f(x)=0$ の解を次式で表す.

$$x=r(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

(i) $x^3=-2$ のとき，方程式は

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=2(\cos\pi+i\sin\pi)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3=2,\quad 3\theta=\pi+2k\pi\quad (k\text{ は整数})$$

したがって　$r=\sqrt[3]{2},\quad \theta=\dfrac{2k+1}{3}\pi\quad (k=0,1,2)$

(ii) $x^3=1$ のとき，方程式は

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=1(\cos 0+i\sin 0)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3=1,\quad 3\theta=2k\pi\quad (k\text{ は整数})$$

したがって　$r=1,\quad \theta=\dfrac{2k}{3}\pi\quad (k=0,1,2)$

(i)，(ii) から，$f(x)=0$ のすべての虚数解を表記すると

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k+1}{3}\pi+i\sin\frac{2k+1}{3}\pi\right)\quad (k=0,2)},$$
$$\boldsymbol{\cos\frac{2k}{3}\pi+i\sin\frac{2k}{3}\pi\quad (k=1,2)}$$

2024年4月13日 (土)

2024年 東京工業大学

xy 平面上の曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ に，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ $(a > 0)$ で接する円のうち，y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく．a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C，とくに S_1 の中心を P とする．

(1) 点 P の座標を求めよ．

(2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

解答　(1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ より　$y'=x$

$\mathrm{T}_a\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ における曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の接ベクトルは　$(1,\ a)$

これを $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた単位法ベクトルは　$\left(-\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$

S_a の中心を P_a，半径を r_a とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{T}_a\mathrm{P}_a}=r_a\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

これから

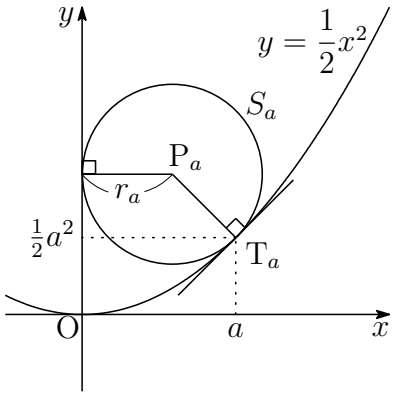
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}_a}&=\overrightarrow{\mathrm{OT}_a}+\overrightarrow{\mathrm{T}_a\mathrm{P}_a}\\&=\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)+r_a\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_a}$ の x 成分は r_a であるから

$$r_a=a+r_a\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\quad\text{ゆえに}\quad r_a=a\sqrt{1+a^2}\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}_a}&=\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)+a\sqrt{1+a^2}\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\\&=\left(a^3+a-a^2\sqrt{1+a^2},\ a\sqrt{1+a^2}-\frac{1}{2}a^2\right)\qquad(*)\end{aligned}$$



P は $a=1$ のときの P_a であるから，$(*)$ に $a=1$ を代入して

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{2-\sqrt{2},\ \sqrt{2}-\frac{1}{2}}\right)$$

(2) $(*)$ から　　$C : (x,\ y) = \left(a^3 + a - a^2\sqrt{1+a^2},\ a\sqrt{1+a^2} - \dfrac{1}{2}a^2\right)$

$$\frac{dx}{da} = 3a^2 + 1 - 2a\sqrt{1+a^2} - \frac{a^3}{\sqrt{1+a^2}}$$
$$\frac{dy}{da} = \sqrt{1+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} - a$$

点 P における曲線 C の接ベクトルは，上の 2 式に $a = 1$ を代入して

$$\left(\frac{dx}{da},\ \frac{dy}{da}\right) = \left(4 - \frac{5}{2}\sqrt{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

よって，点 P における曲線 C の接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{da}}{\frac{dx}{da}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1}{4 - \frac{5}{2}\sqrt{2}} = \mathbf{1 + \sqrt{2}}$$

2024年4月14日 (日)

2024年 東京工業大学

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$，$g(t)$ が次の6つの条件を満たしているとする．

$$f'(t) = -f(t)g(t), \quad g'(t) = \{f(t)\}^2,$$
$$f(t) > 0, \quad |g(t)| < 1, \quad f(0) = 1, \quad g(0) = 0.$$

このとき，

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2, \quad q(t) = \log \frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく．

(1) $p'(t)$ を求めよ．

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ．

(3) $\lim_{t\to\infty} g(t)$ を求めよ．

(4) $f(T) = g(T)$ となる正の実数 T に対して，媒介変数表示された平面曲線 $(x,\ y) = (f(t),\ g(t))$ $(0 \leqq t \leqq T)$ の長さを求めよ．

解答　(1) $(*)$　$f'(t)=-f(t)g(t),\quad g'(t)=f(t)^2$ より

$$2f'(t)f(t)=-2f(t)^2g(t)=-2g'(t)g(t)$$

したがって　　$2f(t)f'(t)+2g(t)g'(t)=0$

これを t について積分すると

$$f(t)^2+g(t)^2=C_1 \qquad (C_1\text{は積分定数})$$

$f(0)=1$，$g(0)=0$ より，$C_1=1$ であるから

$$(**)\quad p(t)=f(t)^2+g(t)^2=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p'(t)=0}$$

(2) $f(t)^2+g(t)^2=1$，$g'(t)=-f(t)^2$ から $f(t)^2$ を消去すると

$$g'(t)=1-g(t)^2$$

$|g(t)|<1$ より，$g(t)\neq\pm1$ に注意して

$$\frac{g'(t)}{1+g(t)}+\frac{g'(t)}{1-g(t)}=2$$

両辺を t について積分すると

$$\log\left|\frac{1+g(t)}{1-g(t)}\right|=2t+C_2 \qquad (C_2\text{は積分定数})$$

$|g(t)|<1$，$g(0)=0$ より，$C_2=0$ であるから

$$q(t)=\log\frac{1+g(t)}{1-g(t)}=2t \quad \text{ゆえに} \quad q'(t)=2$$

したがって，$q'(t)$ は定数である．

(3) (2) の結果から

$$\frac{1+g(t)}{1-g(t)}=e^{2t} \quad \text{ゆえに} \quad g(t)=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}=\mathbf{1}$

(4) $f'(t) = -f(t)g(t)$ および (3) で求めた $g(t)$ より

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = 1 - \frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}$$

$f(t) > 0$ に注意して，両辺を t について成分すると

$$\log f(t) = t - \log(1+e^{2t}) + \log C_3 \quad (C_3\text{は積分定数})$$

したがって　　$\log f(t) = \log \dfrac{C_3 e^t}{1+e^{2t}}$　　ゆえに　$f(t) = \dfrac{C_3 e^t}{1+e^{2t}}$

$f(0) = 1$ より，$C_3 = 2$ であるから　　$f(t) = \dfrac{2e^t}{1+e^{2t}}$

$f(T) = g(T)$ とすると　$\dfrac{2e^T}{1+e^{2T}} = \dfrac{1-e^{2T}}{1+e^{2T}}$

$$2e^T = 1 - e^{2T} \quad \text{ゆえに} \quad e^T = 1+\sqrt{2} \quad \cdots ①$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned} f'(t)^2 + g'(t)^2 &= f(t)^2 g(t)^2 + f(t)^4 \\ &= f(t)^2\{g(t)^2 + f(t)^2\} \\ &= f(t)^2 \end{aligned}$$

求める弧長を L とすると，$f(t) > 0$ であるから

$$L = \int_0^T \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt = \int_0^T f(t)\, dt = \int_0^T \frac{2e^t}{1+e^{2t}}\, dt$$

$u = e^t$ とおくと　$\dfrac{du}{dt} = e^t$　① により

t	$0 \longrightarrow T$
u	$1 \longrightarrow 1+\sqrt{2}$

$$L = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{1+u^2}\, du$$

$u = \tan\theta$ とおくと　$\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

u	$1 \longrightarrow 1+\sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{3}{8}\pi$

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} \frac{2}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \Big[\, 2\theta \,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

2024年4月15日(月)

2024年 東京工業大学

xy 平面上に，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$，$\mathrm{C}(-a,\ 0)$ (ただし $0 < a < b$) をとる．点 A，B を通る直線を ℓ とし，点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする．さらに，点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし，点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする．以下，$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1}，点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする．

(1) 点 A_n，C_n の座標を求めよ．

(2) $\triangle \mathrm{CBA}_n$ の面積 S_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}$ を求めよ．

解答　(1) $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$，$\mathrm{A}_0=\mathrm{A}$，$\mathrm{C}_0=\mathrm{C}$ とおくと

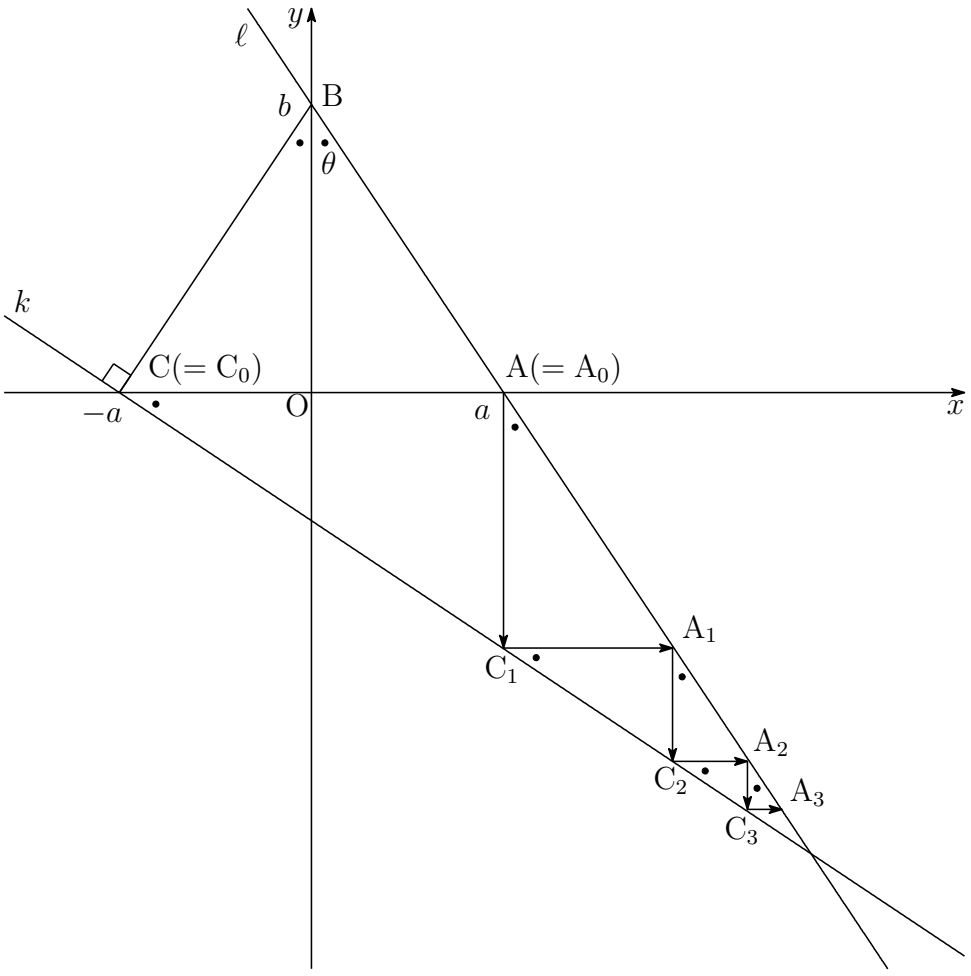
$$\mathrm{C}_0\mathrm{A}_0=2a, \qquad \mathrm{A}_0\mathrm{C}_1=\mathrm{C}_0\mathrm{A}_0\tan\theta=2a\tan\theta,$$
$$\mathrm{C}_1\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_0\mathrm{C}_1\tan\theta=2a\tan^2\theta, \qquad \mathrm{A}_1\mathrm{C}_2=\mathrm{C}_1\mathrm{A}_1\tan\theta=2a\tan^3\theta$$

これから

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}=(2a\tan^2\theta,-2a\tan\theta), \qquad \overrightarrow{\mathrm{C}_0\mathrm{C}_1}=(2a,-2a\tan\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=(\tan^2\theta)\overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}}=(\tan^2\theta)\overrightarrow{\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{C}_n}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}+\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}=(a,\ 0)+\frac{1-\tan^{2n}\theta}{1-\tan^2\theta}(2a\tan^2\theta,-2a\tan\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OC}_0}+\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{C}_k\mathrm{C}_{k+1}}=(-a,\ 0)+\frac{1-\tan^{2n}\theta}{1-\tan^2\theta}(2a,-2a\tan\theta)$$



前の 2 式について $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ とすると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}_n} &= (a,\ 0) + \frac{b^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\left(\frac{2a^3}{b^2}, -\frac{2a^2}{b}\right) \\
&= (a,\ 0) + \frac{2a^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}(a, -b) \\
&= \left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\right), \\
\overrightarrow{\mathrm{OC}_n} &= (-a,\ 0) + \frac{b^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\left(2a, -\frac{2a^2}{b}\right) \\
&= (-a,\ 0) + \frac{2ab}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}(b, -a) \\
&= \left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2ab^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\right)
\end{aligned}$$

よって，求める座標は

$$\mathbf{A}_n\left(\frac{\boldsymbol{a(b^2+a^2)}}{\boldsymbol{b^2-a^2}} - \frac{\boldsymbol{2a^3}}{\boldsymbol{b^2-a^2}}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{2n}}, -\frac{\boldsymbol{2a^2b}}{\boldsymbol{b^2-a^2}}\left\{\boldsymbol{1}-\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{2n}}\right\}\right)$$

$$\mathbf{C}_n\left(\frac{\boldsymbol{a(b^2+a^2)}}{\boldsymbol{b^2-a^2}} - \frac{\boldsymbol{2ab^2}}{\boldsymbol{b^2-a^2}}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{2n}}, -\frac{\boldsymbol{2a^2b}}{\boldsymbol{b^2-a^2}}\left\{\boldsymbol{1}-\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{2n}}\right\}\right)$$

(2) 点 A_n の x 座標を x_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n &= \triangle\mathrm{ABC} \times \frac{x_n}{a} = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b \times \frac{1}{a}\left\{\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\} \\
&= \boldsymbol{ab}\left\{\frac{\boldsymbol{b^2+a^2}}{\boldsymbol{b^2-a^2}} - \frac{\boldsymbol{2a^2}}{\boldsymbol{b^2-a^2}}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{2n}}\right\}
\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{BC} = \mathrm{BA}$ であるから

$$\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BA}} = \frac{x_n}{a} = \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - \frac{2a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}$$

$0 < a < b$ より，$0 < \dfrac{a}{b} < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}} = \frac{\boldsymbol{b^2+a^2}}{\boldsymbol{b^2-a^2}}$$

2024年4月16日 (火)

2024年 東京工業大学

n を正の整数とし，$C_1, \ldots, C_n$ を n 枚の硬貨とする．各 $k = 1, \ldots, n$ に対し，硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k，裏が出る確率を $1 - p_k$ とする．この n 枚の硬貨を同時に投げ，表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功，というゲームを考える．

(1) $p_k = \dfrac{1}{3}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 X_n を求めよ．

(2) $p_k = \dfrac{1}{2(k+1)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ．

(3) $n = 3m$ (m は正の整数) で，$k = 1, \ldots, 3m$ に対して

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{3m} & (k = 1, \ldots, m) \\ \dfrac{2}{3m} & (k = m+1, \ldots, 2m) \\ \dfrac{1}{m} & (k = 2m+1, \ldots, 3m) \end{cases}$$

とする．このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき，$\lim_{m \to \infty} Z_{3m}$ を求めよ．

解答　(1) 与えられた条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$X_1=\frac{1}{3},\quad X_{n+1}=\frac{2}{3}X_n+\frac{1}{3}(1-X_n)=\frac{1}{3}X_n+\frac{1}{3}$$

$X_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(X_n-\dfrac{1}{2}\right)$, $X_1-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$ より

$$X_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{X_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}$$

別解 1　成功しない確率を $\overline{X_n}$ とすると

$$X_n=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}{}_n\mathrm{C}_{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2k-1}$$

$$\overline{X_n}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}{}_n\mathrm{C}_{2k}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2k}$$

$$X_n+\overline{X_n}=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^n,\quad -X_n+\overline{X_n}=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^n$$

上の 2 式から　　$\boldsymbol{X_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}$

別解 2　次の関数を考える．

$$\varphi_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\{p_kx+(1-p_k)\}$$

$C_1,C_2,\ldots,C_n$ の中で表が j 回出た確率は $\varphi_n(x)$ の x^j の係数に等しい．

$\varphi_n(x)$ は，偶関数 $\dfrac{\varphi_n(x)+\varphi_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\dfrac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{2}$ の和である．

$$\varphi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)+\varphi_n(-x)}{2}+\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{2}$$

したがって，成功する確率，すなわち，奇関数 $\dfrac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$\begin{aligned}X_n&=\frac{\varphi_n(1)-\varphi_n(-1)}{2}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1-2p_k)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1-2\cdot\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}\end{aligned}$$

(2) 与えられた条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$Y_1 = \frac{1}{4}, \quad Y_{n+1} = (1 - p_{n+1})Y_n + p_{n+1}(1 - Y_n)$$

$p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ であるから

$$Y_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}Y_n + \frac{1}{2(n+2)} \quad \text{ゆえに} \quad (n+2)Y_{n+1} - (n+1)Y_n = \frac{1}{2}$$

$n > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+2)Y_{k+1} - (k+1)Y_k\} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}$

したがって $(n+1)Y_n - 2Y_1 = \dfrac{1}{2}(n-1)$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから $\boldsymbol{Y_n = \dfrac{n}{2(n+1)}}$

別解 次の関数を考える．

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\{p_k x + (1 - p_k)\}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $f_n(x)$ の x^j の係数に等しい．
$f_n(x)$ は，偶関数 $\dfrac{f_n(x) + f_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\dfrac{f_n(x) - f_n(-x)}{2}$ の和である．

$$f_n(x) = \frac{f_n(x) + f_n(-x)}{2} + \frac{f_n(x) - f_n(-x)}{2}$$

したがって，成功する確率，すなわち，奇関数 $\dfrac{f_n(x) - f_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{f_n(1) - f_n(-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1 - 2p_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left\{1 - 2\cdot\frac{1}{2(k+1)}\right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = \boldsymbol{\frac{n}{2(n+1)}} \end{aligned}$$

(3) 次の関数を考える.

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \prod_{k=1}^{n} \{p_k x + (1-p_k)\} \\ &= \prod_{k=1}^{m} \left\{ \frac{1}{3m}x + \left(1 - \frac{1}{3m}\right) \right\} \prod_{k=m+1}^{2m} \left\{ \frac{2}{3m}x + \left(1 - \frac{2}{3m}\right) \right\} \\ &\qquad \times \prod_{k=2m+1}^{3m} \left\{ \frac{1}{m}x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{3m}x + \left(1 - \frac{1}{3m}\right) \right\}^m \left\{ \frac{2}{3m}x + \left(1 - \frac{2}{3m}\right) \right\}^m \left\{ \frac{1}{m}x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \right\}^m \end{aligned}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ の中で表が j 回出た確率は $g_n(x)$ の x^j の係数に等しい.

$g_n(x)$ は，偶関数 $\dfrac{g_n(x) + g_n(-x)}{2}$ と奇関数 $\dfrac{g_n(x) - g_n(-x)}{2}$ の和である.

したがって，成功する確率，すなわち，奇関数 $\dfrac{g_n(x) - g_n(-x)}{2}$ の係数の和

$$\begin{aligned} Z_{3m} &= \frac{g_n(1) - g_n(-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^m \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^m \left(1 - \frac{2}{m}\right)^m \right\} \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^m = \lim_{m\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{3m}\right)^{-\frac{3m}{2}} \right\}^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^m = \lim_{m\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{4}{3m}\right)^{-\frac{3m}{4}} \right\}^{-\frac{4}{3}} = e^{-\frac{4}{3}}$$

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{2}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{m}\right)^{-\frac{m}{2}} \right\}^{-2} = e^{-2}$$

よって

$$\lim_{m\to\infty} Z_{3m} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{4}{3}} e^{-2}\right) = \boldsymbol{\frac{1 - e^{-4}}{2}}$$

2024年4月17日 (水)

2024年 東京工業大学

整数の組 $(a,\ b)$ に対して2次式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える．方程式 $f(x)=0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n=1$ となる正の整数 n が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

解答 $f(x)=x^2+ax+b$

$f(x)=0$ のすべて解 α について，$\alpha^n=1$ より (n は整数)

$$|\alpha^n|=|\alpha|^n=1 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|=1$$

(i) $f(x)=0$ が実数解をもつとき，$(x)=0$ の解 $\alpha,\ \beta$ は

$$\alpha=\pm1,\ \beta=\pm1 \quad (\text{複号任意})$$

解と係数の関係により　　$\alpha+\beta=-a, \quad \alpha\beta=b$

したがって　　$(a,\ b)=(2,\ 1),\ (-2,\ 1),\ (0,-1)$

(ii) $f(x)=0$ が虚数解 $\alpha,\ \overline{\alpha}$ をもつとき，解と係数の関係により

$$\alpha+\overline{\alpha}=-a, \quad \alpha\overline{\alpha}=b \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(\alpha)=-\frac{a}{2}, \quad |\alpha|^2=b$$

$|\alpha|=1,\ -1<\mathrm{Re}(\alpha)<1$ であるから

$$b=1, \quad -1<-\frac{a}{2}<1$$

a は整数であるから　$a=-1,\ 0,\ 1$

- $(a,\ b)=(-1,\ 1)$ のとき，$x^2-x+1=0$ を解いて

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

- $(a,\ b)=(0,\ 1)$ のとき，$x^2+1=0$ を解いて

$$x=\pm i=\cos\frac{\pi}{2}\pm i\sin\frac{\pi}{2}$$

- $(a,\ b)=(1,\ 1)$ のとき，$x^2+x+1=0$ を解いて

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\frac{2}{3}\pi\pm i\sin\frac{2}{3}\pi$$

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{(a,\ b)=(\pm2,\ 1),\ (\pm1,\ 1),\ (0,\pm1)}$

2024年4月18日 (木)

2024年 九工大前期

自然数 n は定数とする．関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^n},$$
$$g(x) = \frac{5}{12}x^4 + \left(\frac{1}{3}e^3 - 2\right)x - \log x + \int_e^x (f(t) + xt^2)\,dt$$

につて，次に答えよ．ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $h(x) = 3x^3 - 2 - \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で増加することを示せ．また，$x > 0$ の範囲で方程式 $h(x) = 0$ を解け．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい．

(3) $e^{(\pi^n)}$ と $\pi^{(e^n)}$ の大小関係を調べよ．必要であれば，$e < \pi$ を用いてよい．

(4) $g(x)$ が最小になるときの x の値を求めよ．

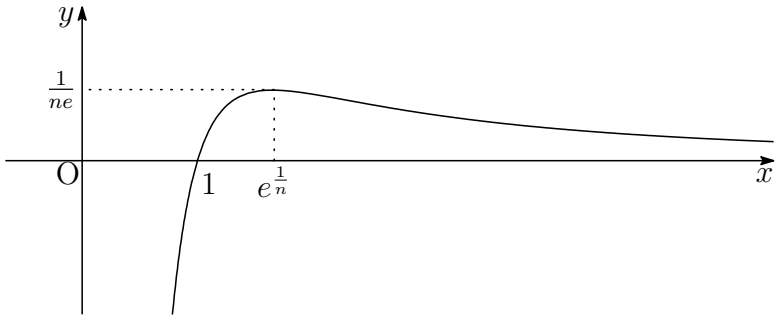
(5) $g(x)$ の最小値を求めよ．

解答　(1)　$h(x) = 3x^3 - 2 - \dfrac{1}{x}$ より　$h'(x) = 9x^2 + \dfrac{1}{x^2} > 0$

$h(x)$ は $x > 0$ で増加し，$h(1) = 0$ より，$x > 0$ における解は　$\boldsymbol{x = 1}$

(2)　$f(x) = \dfrac{\log x}{x^n}$ より　$f'(x) = \dfrac{1 - n\log x}{x^{n+1}}$

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{ne}$	↘



(3)　(2) の結果から，$e^{\frac{1}{n}} < x$ の範囲で $f(x)$ は単調減少であるから

$$f(e) > f(\pi) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{e^n} > \frac{\log \pi}{\pi^n}$$

したがって　$\pi^n \log e > e^n \log \pi$　よって　$\boldsymbol{e^{(\pi^n)} > \pi^{(e^n)}}$

(4) $\displaystyle\int_e^x (f(t)+xt^2)\,dt = \int_e^x f(t)\,dt + x\int_e^x t^2\,dt$ であるから

$$\int_e^x (f(t)+xt^2)\,dt = \int_e^x f(t)\,dt + x\left[\ \frac{t^3}{3}\ \right]_e^x$$
$$= \int_e^x f(t)\,dt + \frac{x^4}{3} - \frac{1}{3}e^3 x$$

$g(x) = \dfrac{5}{12}x^4 + \left(\dfrac{1}{3}e^3 - 2\right)x - \log x + \displaystyle\int_e^x (f(t)+xt^2)\,dt$ より

$$g(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x - \log x + \int_e^x f(t)\,dt \qquad (*)$$

これを x について微分すると　$g'(x) + h(x) + f(x)$

$0 < x < 1$　において　$h(x) < 0,\ f(x) < 0$ より　$g'(x) < 0$
$1 < x$　　において　$h(x) > 0,\ f(x) > 0$ より　$g'(x) > 0$

$h(1) = f(1) = 0$ より　$g'(1) = h(1) + f(1) = 0$
よって　　$g(x)$ は，$\boldsymbol{x = 1}$ で最小.

(5) $n = 1$ のとき

$$\int_e^1 f(t)\,dt = \int_e^1 \frac{\log t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ (\log t)^2\ \right]_e^1 = -\frac{1}{2}$$

$n > 1$ のとき

$$\int_e^1 f(t)\,dt = \int_e^1 t^{-n}\log t\,dt = \frac{1}{-n+1}\int_e^1 (t^{-n+1})'\log t\,dt$$
$$= \frac{1}{-n+1}\left[\ t^{-n+1}\log t\ \right]_e^1 - \frac{1}{-n+1}\int_e^1 t^{-n}\,dt$$
$$= -\frac{e^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{(-n+1)^2}\left[\ t^{-n+1}\ \right]_e^1$$
$$= -\frac{e^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1-e^{-n+1}}{(-n+1)^2} = \frac{ne^{-n+1}-1}{(n-1)^2}$$

$x = 1$ のとき $\dfrac{3}{4}x^4 - 2x - \log x = -\dfrac{5}{4}$，$(*)$ より

$n = 1$ のとき　　最小値 $g(1) = -\dfrac{5}{4} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{7}{4}}$

$n > 1$ のとき　　最小値 $g(1) = \boldsymbol{-\dfrac{5}{4} + \dfrac{ne^{-n+1}-1}{(n-1)^2}}$

2024年4月19日 (金)

2024年 九工大前期

$a>0,\ b>0,\ 0<t<1$ とする．曲線

$$C:\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

は3直線

$$l_1:y=x,\quad l_2:y=-x+2,\quad l_3:y=-t$$

に接しているとし，C と l_1 と接点を P とする．次に答えよ．

(1) $a,\ b$ を t を用いて表せ．

(2) 点 P の座標を t を用いて表せ．

(3) l_2 と l_3 の交点を Q とする．直線 PQ が点 $(1,\ 0)$ を通るとき，t の値を求めよ．

(4) 曲線 C の媒介変数表示を $x=1+a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ とし，点 P の座標を $(1+a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ と表す．t が (3) で求めた値のとき，β $(0\leqq\beta<2\pi)$ を求めよ．

(5) t は (3) で求めた値とし，曲線 C の $y\geqq 0$ の部分を C_1 とする．2直線 l_1，l_2 と曲線 C_1 で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

解答　(1) C と l_1 から y を消去すると　$\dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$

$$(a^2+b^2)x^2-2b^2x+b^2(1-a^2)=0 \qquad (*)$$

上式は，係数について　$(-b^2)^2-(a^2+b^2)\cdot b^2(1-a^2)=0$

$a>0,\ b>0$ に注意して整理すると　$a^2+b^2=1$　$\cdots$①

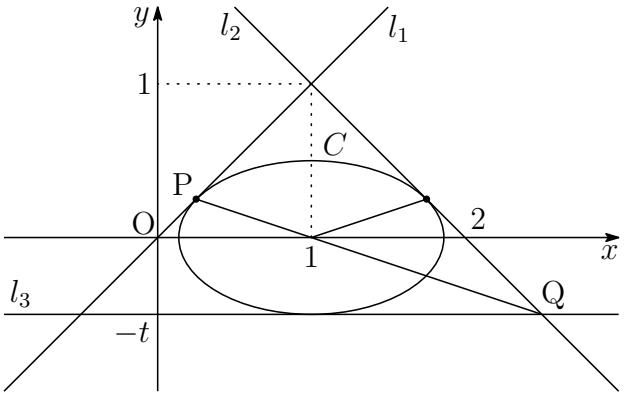
C と l_3 が接するから　$-b=-t$　$\cdots$②

$a>0,\ b>0$ であるから，①，② より　$\boldsymbol{a=\sqrt{1-t^2},\ b=t}$

(2) (1) の結果を $(*)$ に代入すると　$x^2-2t^2x+t^4=0$

$(x-t^2)^2=0$　これを解いて　$x=t^2$

P は l_1 上の点であるから　$\boldsymbol{\mathrm{P}(t^2,\ t^2)}$



(3) $l_2: y=-x+2$ 上の点 Q の y 座標が $-t$ であるから

$-t=-x+2$　ゆえに　$x=t+2$

$\mathrm{P}(t^2,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+2,-t)$ より，直線 PQ の傾きは $(0<t<1)$

$$\frac{-t-t^2}{(t+2)-t^2}=\frac{t(t+1)}{(t+1)(t-2)}=\frac{t}{t-2}$$

点 $\mathrm{Q}(t+2,-t)$ を通り，傾き $\dfrac{t}{t-2}$ の直線は

$$y+t=\frac{t}{t-2}(x-t-2)$$

点 $(1,\ 0)$ はこの直線上の点であるから

$t=\dfrac{t}{t-2}(-t-1)$　これを解いて　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$

(4) (3) の結果を (1) の結果に代入すると　$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

したがって　　$x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$　　(**)

(3) の結果を (2) の結果に代入すると　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$

条件から　　$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}\sin\beta=\dfrac{1}{4}$

すなわち　　$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\beta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\beta<2\pi$ より　$\boldsymbol{\beta=\dfrac{5}{6}\pi}$

(5) $C,\ l_1,\ l_2$ が直線 $x=1$ に関して対称であるから，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ すると，

C と l_2 の接点を P' とすると　$\mathrm{P}'\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha,\ \dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)$

4 点 $(1,\ 0)$，$(1+a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$，$(1,\ 1)$，$(1+a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ を頂点とする四角形の面積を S_1 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(**) より (ガウス・グリーン定理[18])

$$\begin{aligned}x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y&=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\theta-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\cdot\frac{1}{2}\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$\mathrm{A}(1,\ 0)$ とすると，AP′，AP，C_1 で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)d\theta\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi\end{aligned}$$

よって，求める面積は　$S_1-S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi=\boldsymbol{\dfrac{(6-\pi)\sqrt{3}}{12}}$

[18] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf 5

2024年4月20日 (土)

2024年 九工大前期

次に答えよ.

(1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ とする．z^9 と $z^3+\overline{z}^3$ を求めよ．ただし，i は虚数単位を表し，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す.

(2) $k=1,2,3,4$ に対して，$8\cos^3\dfrac{2k\pi}{9}-6\cos\dfrac{2k\pi}{9}+1$ を求めよ.

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{9}+\cos\dfrac{4\pi}{9}+\cos\dfrac{8\pi}{9}$ と $\cos\dfrac{2\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{9}$ を求めよ.

(4) $k=1,2,4$ に対して，$\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ は無理数であることを示せ.

(5) $\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ は有理数, $a\neq 0$) の解とはならないことを示せ.

解答 (1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ より　$z^9=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=\mathbf{1}$

$$z^3=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\qquad \overline{z}^3=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$$

よって　$z^3+\overline{z}^3=2\cos\dfrac{2\pi}{3}=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$

(2) $z^3=\cos\dfrac{2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k\pi}{3}$，$\overline{z}^3=\cos\dfrac{2k\pi}{3}-i\sin\dfrac{2k\pi}{3}$ より

$$z^3+\overline{z}^3=2\cos\frac{2k\pi}{3}=\begin{cases}-1 & (k=1,2,4)\\ 2 & (k=3)\end{cases}$$

$z^3+\overline{z}^3=(z+\overline{z})^3-3z\overline{z}(z+\overline{z})$，$z+\overline{z}=2\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ より

$$\left(2\cos\frac{2k\pi}{9}\right)^3-3\left(2\cos\frac{2k\pi}{9}\right)=2\cos\frac{2k\pi}{3}$$

よって

$$8\cos^3\frac{2k\pi}{9}-6\cos\frac{2k\pi}{9}+1=1+2\cos\frac{2k\pi}{3}=\begin{cases}\mathbf{0} & \boldsymbol{(k=1,2,4)}\\ \mathbf{3} & \boldsymbol{(k=3)}\end{cases}$$

(3) (2) の結果から，$\cos\dfrac{2k\pi}{9}$，$\cos\dfrac{4k\pi}{9}$，$\cos\dfrac{8k\pi}{9}$ は，3 次方程式

$$8x^3-6x+1=0 \qquad (*)$$

の解であるから，解と係数の関係により

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=\mathbf{0},\quad \cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{8\pi}{9}=\mathbf{-\frac{1}{8}}$$

(4) $\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ が有理数であると仮定し $(k=1,2,4)$

$$\cos\frac{2k\pi}{9}=\frac{p}{q}\quad (p,\ q\text{ は互いに素である整数})$$

とおくと，これが方程式 $(*)$ の解であるから

$$8\left(\frac{p}{q}\right)^3-6\left(\frac{p}{q}\right)+1=0\quad\text{ゆえに}\quad q^3=p(6q^2-8p^2)$$

上の第 2 式から，q が p を因数にもち，仮定に反するので矛盾.

よって，$k=1,2,4$ のとき，$\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ は無理数である.

(5) $8x^3-6x+1$ を ax^2+bx+c で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $rx+s$ とすると，a，b，c が有理数であるとき，$Q(x)$ は有理数を係数とする 1 次式，r，s は有理数である．

$$8x^3-6x+1=(ax^2+bx+c)Q(x)+rx+s \qquad (**)$$

(4) の結論から，$8x^3-6x+1=0$ の解を α とする (α は無理数)．
α が $ax^2+bx+c=0$ の解であると仮定すると，$(**)$ により

$$8\alpha^3-6\alpha+1=(a\alpha^2+b\alpha+c)Q(\alpha)+r\alpha+s$$

このとき

$$r\alpha+s=0 \qquad (\mathrm{A})$$

を得る．

(i) $r\neq 0$ とき

$$\alpha=-\frac{s}{r}$$

このとき，α が無理数であることに矛盾する．

(ii) $r=0$ のとき，(A) より，$s=0$ となる．このとき，$(**)$ より

$$8x^3-6x+1=(ax^2+bx+c)Q(x)$$

となる．$Q(x)=lx+m$ とおくと (l, m は有理数)，3 次方程式

$$8x^3-6x+1=0$$

が有理数の解 $-\dfrac{m}{l}$ をもち，矛盾．

よって，$\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は，有理数を係数とする 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解とはならない．

2024年4月21日 (日)

2024 年 九工大前期

n は自然数とする．A と B の 2 種類の文字のみを用いて，B が連続しないように n 個並べた文字列全体の集合を X_n とする．X_n の 2 つの部分集合

$$S_n = \{x \,|\, x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が A}\},$$
$$T_n = \{x \,|\, x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が B}\}$$

の要素の個数をそれぞれ a_n，b_n とおく．例えば，$n = 1$ のとき，$X_1 = \{\text{A, B}\}$，$S_1 = \{\text{A}\}$，$T_1 = \{\text{B}\}$ より，$a_1 = 1$，$b_1 = 1$ である．また，$n = 2$ のとき，$X_2 = \{\text{AA, AB, BA}\}$，$S_2 = \{\text{AA, BA}\}$，$T_2 = \{\text{AB}\}$ より，$a_2 = 2$，$b_2 = 1$ である．次に答えよ．

(1) $a_3,\ b_3,\ a_4,\ b_4$ を求めよ．

(2) a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n と b_n を用いて表せ．

(3) $a_n \geqq 100$ と $b_n \geqq 100$ をともにみたす最小の n を求めよ．

(4) 自然数 a，b と $c = a + b$ に対して，

$$L = \{d \,|\, d \text{ は } a,\ b \text{ の公約数}\}, \quad R = \{d \,|\, d \text{ は } a,\ c \text{ の公約数}\}$$

とする．$L \subset R$ と $L \supset R$ がともに成り立つこと (つまり $L = R$) を示せ．また，すべての自然数 m に対して，a_m と b_m は互いに素であることを数学的帰納法により示せ．

(5) $r_n = \dfrac{a_n}{a_n + b_n}$ とする．ある関数 $f(x)$ により等式 $r_{m+1} = f(r_m)$ がすべての自然数 m について成立する．$f(x)$ をひとつ求めよ．また，極限値 $\lim\limits_{m\to\infty} r_m$ を求めよ．

解答　(1) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，次の漸化式が成立する．

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n \qquad (n = 1, 2, \cdots) \qquad (*)$$

$a_2 = 2$，$b_2 = 1$ であるから，順次，$n = 2,\ 3$ を代入すると

$$\boldsymbol{a_3 = 3,\ \ b_3 = 2,\ \ a_4 = 5,\ \ b_4 = 3}$$

(2) $(**)$ より　　$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + b_n,\ b_{n+1} = a_n}$

(3) $(**)$ より，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は自然数の数列で

$$a_{n+1} - a_n = b_n > 0, \quad b_{n+1} = a_n$$

であるから，これらは単増加列である．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
b_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

よって，条件をともにみたす最小の n は　$\boldsymbol{n = 12}$

(4) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m \,|\, n$ と表記する．

(A) $d \in L$ について，$d \,|\, a$，$d \,|\, b$ であるから

$$a = pd, \quad b = qd$$

となる整数 $p,\ q$ が存在するから

$$c = a + b = pd + qd = (p + q)d \quad \text{ゆえに} \quad d \,|\, c$$

$d \,|\, a$，$d \,|\, c$ であるから，$d \in R$　したがって　$L \subset R$

(B) $d \in R$ について，$d \,|\, a$，$d \,|\, c$ であるから

$$a = rd, \quad c = sd$$

となる整数 $r,\ s$ が存在するから

$$b = c - a = sd - rd = (s - r)d \quad \text{ゆえに} \quad d \,|\, b$$

$d \,|\, a$，$d \,|\, b$ であるから，$d \in L$　したがって　$R \subset L$

(A)，(B) から　$L = R$

$L_n = \{d \,|\, d \text{ は } a_n,\ b_n \text{の公約数}\}$ とすると，前の結論により

$$\begin{aligned} L_n &= \{d \,|\, d \text{ は } a_n,\ a_n + b_n \text{の公約数}\} \\ &= \{d \,|\, d \text{ は } b_{n+1},\ a_{n+1} \text{の公約数}\} = L_{n+1} \end{aligned}$$

$L_1 = \{1\}$ であるから，すべての自然数 n について　$L_n = \{1\}$
よって，すべての自然数 m に対して，a_m と b_m は互いに素である．

(5) $r_n = \dfrac{a_n}{a_n + b_n}$ より　$\dfrac{1}{r_n} = 1 + \dfrac{b_n}{a_n}$

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{(a_n + b_n) + a_n} \\ &= \frac{1 + \frac{b_n}{a_n}}{1 + \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)} = \frac{\frac{1}{r_n}}{1 + \frac{1}{r_n}} = \frac{1}{r_n + 1} \end{aligned}$$

したがって　　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x+1}}$

$f(x) = x$ とすると　　$\dfrac{1}{x+1} = x \quad \cdots ①$

$x(x+1) = 1$　整理すると　$x^2 + x - 1 = 0$

この 2 次方程式の解を

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

とおくと，① に注意して

$$r_{n+1} - \alpha = \frac{1}{r_n + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} = -\frac{r_n - \alpha}{(\alpha + 1)(r_n + 1)} = -\frac{\alpha(r_n - \alpha)}{r_n + 1}$$

同様に　　$r_{n+1} - \beta = -\dfrac{\beta(r_n - \beta)}{r_n + 1}$

$\{r_n\}$ について，明らかに $r_n > 0$ であるから，$r_n - \beta \neq 0$ より

$$\frac{r_{n+1} - \alpha}{r_{n+1} - \beta} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} \cdot \frac{r_1 - \alpha}{r_1 - \beta}$$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha = \boldsymbol{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$

2024年4月22日(月)

2024年 九工大後期

$x > -1$ の範囲で定義された関数 $g(x)$ を $g(x) = x - \log(x+1)$ とする．ただし，対数は $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ を底とする自然対数とする．また，a $(0 < a < 1)$ を定数とし，2つの曲線 $y = ag(x)$，$y = g(ax)$，および $x = t$ $(t > 0)$ によって囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．次に答えよ．

(1) 曲線 $y = g(x)$ は x 軸に接することを示せ．

(2) $\lim_{x \to -1+0} \dfrac{g(x)}{x}$，$\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x}$，および $\lim_{x \to \infty} g'(x)$ を調べよ．

(3) $x > -1$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を $f(x) = ag(x) - g(ax)$ とする．このとき，$x > -1$ において，$f(x) \geqq 0$ であることを示せ．

(4) $\lim_{t \to \infty} tS''(t) = \dfrac{3}{4}$ となる a の値を求めよ．

(5) a を (4) で求めた値とする．0 でない実数 b に対して，
$2\log(ab+1) = \log(b+1)$ が成り立つとする．このとき，b の値を求めよ．

(6) (4) と (5) で求めた a と b に対して，$S(b)$ を求めよ．

解答　(1)　$g(x)=x-\log(x+1)$ より　$g'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$　$\cdots$①

$$g(0)=0,\quad g'(0)=0 \qquad (*)$$

よって，曲線 $y=g(x)$ は原点で x 軸と接する．

(2)　$\lim\limits_{x\to-1+0}g(x)=\infty$ より　　$\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{g(x)}{x}=\boldsymbol{-\infty}$

$\dfrac{g(x)}{x}=1-\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ より

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left\{1-\log(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=1-\log e=\mathbf{0}$$

① より　$\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)=\mathbf{1}$

別解　$(*)$ を利用すると

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=\mathbf{0}$$

(3)　① より

$$\begin{aligned}f'(x)&=ag'(x)-ag'(ax)=a\left(1-\frac{1}{x+1}\right)-a\left(1-\frac{1}{ax+1}\right)\\&=a\left(\frac{1}{ax+1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{a(1-a)x}{(x+1)(ax+1)}\end{aligned}$$

$0<a<1$ であるから，$x>-1$ における $f(x)$ の増減表は

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	最小	↗

$f(0)=ag(0)-g(0)=0$ であるから，$x>-1$ において　$f(x)\geqq 0$

(4) 2 曲線 $y = ag(x)$，$y = g(ax)$，および $x = t$ $(t > 0)$ によって囲まれた図形の面積 $S(t)$ は，(3) の結果から

$$S(t) = \int_0^t \{ag(x) - g(ax)\}\,dx = \int_0^t f(x)\,dx$$

上式より，$S'(t) = f(t)$ であるから

$$S''(t) = f'(t) = \frac{a(1-a)t}{(t+1)(at+1)}$$

これから

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} tS''(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{a(1-a)t^2}{(t+1)(at+1)} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{a(1-a)}{\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(a+\frac{1}{t}\right)} = 1-a\end{aligned}$$

$\lim_{t\to\infty} tS''(t) = \dfrac{3}{4}$ のとき　$1 - a = \dfrac{3}{4}$　よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{4}}$

(5) $a = \dfrac{1}{4}$ を $2\log(ab+1) = \log b$ に代入すると

$$2\log\left(\frac{1}{4}b + 1\right) = \log(b+1) \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{4}b+1\right)^2 = b+1$$

整理すると　$b^2 - 8b = 0$　これを解いて　$\boldsymbol{b = 8}$

(6) $f(x) = ag(x) - g(ax)$，$g(x) = x - \log(x+1)$ より

$$\begin{aligned}f(x) &= a\{x - \log(x+1)\} - \{ax - \log(ax+1)\} \\ &= -a\log(x+1) + \log(ax+1)\end{aligned}$$

$a = \dfrac{1}{4}$，$b = 8$ であるから

$$\begin{aligned}S(b) &= \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b \{-a\log(x+1) + \log(ax+1)\}\,dx \\ &= \left[-a(x+1)\{\log(x+1) - 1\} + \frac{1}{a}(ax+1)\{\log(ax+1) - 1\}\right]_0^b \\ &= -a(b+1)\{\log(b+1) - 1\} - a + \frac{1}{a}(ab+1)\{\log(ab+1) - 1\} + \frac{1}{a} \\ &= -\frac{9}{4}(\log 9 - 1) - \frac{1}{4} + 12(\log 3 - 1) + 4 = \boldsymbol{\frac{15}{2}\log 3 - 6}\end{aligned}$$

2024年4月23日 (火)

2024年 九工大後期

n を自然数とする．関数 $f(x)$ に対して，$f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ を n 回微分することによって得られる第 n 次導関数とする．また，$f^{(0)}(x) = f(x)$ とし，e は自然対数の底とする．次に答えよ．

(1) $g(x)$ と $h(x)$ を何回でも微分可能な関数とし，$f(x) = g(x)h(x)$ とする．このとき，$n = 1, 2, \cdots$ に対して，

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i g^{(i)}(x) h^{(n-i)}(x)$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示せ．ただし，$i \geqq 1$ に対して，${}_n\mathrm{C}_i$ は n 個のものから i 個とった組合せの総数を表し，${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ とする．

(2) b を定数とし，$F(x) = e^{\frac{1}{2}bx^2}$ とする．このとき，$F^{(1)}(x)$ を求めよ．

(3) $F(x)$ を (2) で与えられた関数とする．このとき，$k = 0, 1, \cdots$ に対して，$F^{(2k+1)}(0)$ と $F^{(2k)}(0)$ を求めよ．

(4) a，b を定数とし，$f(x) = e^{ax+\frac{1}{2}bx^2}$ とする．このとき，$f^{(7)}(0)$ を求めよ．

解答　(1) $f(x)=g(x)h(x)$ とするとき，$n=1,2,\cdots$ に対して，次式を示す．

$$f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(n-i)}(x) \tag{A}$$

［1］$n=1$ のとき，$f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$ より，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$f^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(k-i)}(x)$$

これを微分すると

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x)&=\sum_{i=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_i\{g^{(i+1)}(x)h^{(k-i)}(x)+g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)\}\\
&=g^{(k+1)}(x)h(x)+\sum_{i=0}^{k-1}{}_k\mathrm{C}_i g^{(i+1)}(x)h^{(k-i)}(x)\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)+g(x)h^{(k+1)}(x)\\
&=g^{(k+1)}(x)h(x)+\sum_{i=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_{i-1} g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)+g(x)h^{(k+1)}(x)\\
&=g^{(k+1)}(x)h(x)+\sum_{i=1}^{k}({}_k\mathrm{C}_{i-1}+{}_k\mathrm{C}_i) g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)\\
&\qquad+g(x)h^{(k+1)}(x)\\
&={}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1} g^{(k+1)}(x)h(x)+\sum_{i=1}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)\\
&\qquad+{}_{k+1}\mathrm{C}_0 g(x)h^{(k+1)}(x)\\
&=\sum_{i=0}^{k+1}{}_{k+1}\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n に対して，(A) が成立する．

(2) $F(x)=e^{\frac{1}{2}bx^2}$ より　$F^{(1)}(x)=e^{\frac{1}{2}bx^2}\left(\dfrac{1}{2}bx^2\right)'=\boldsymbol{bxe^{\frac{1}{2}bx^2}}$

(3) $F^{(1)}(x)=bxF(x)$ であるから，(1) の結論を適用して計算すると

$$\begin{aligned}F^{(n+1)}(x)&=\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i(bx)^{(i)}F^{(n-i)}(x)\\&=bxF^{(n)}(x)+bnF^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

これに $x=0$ を代入すると

$$F^{(n+1)}(0)=bnF^{(n-1)}(0)\qquad(*)$$

(2) の結果より $F^{(1)}(0)=0$ を得る．$(*)$ に $n=2k$ を適用すると

$$F^{(2k+1)}(0)=\boldsymbol{0}\qquad(k=0,1,\cdots)$$

$(*)$ に $n=2j-1$ を代入すると　$F^{(2j)}(0)=b(2j-1)F^{(2j-2)}(0)$
$F^{(0)}(0)=1$ より，$F^{(2j)}(0)\neq0$ に注意して $(j=1,2,\cdots)$

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{F^{(2j)}(0)}{F^{(2j-2)}(0)}=\prod_{j=1}^{k}\frac{b}{2}\cdot\frac{2j(2j-1)}{j}$$

$$F^{(2k)}(0)=\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{k}}\frac{\boldsymbol{(2k)!}}{\boldsymbol{k!}}$$

別解 $F(x)$ は偶関数であるから　$F(x)=\dfrac{F(x)+F(-x)}{2}$

$$F^{(n)}(x)=\frac{F^{(n)}(x)+(-1)^nF^{(n)}(-x)}{2}$$

$n=2k+1$，$x=0$ を代入すると　$\boldsymbol{F^{(2k+1)}(0)=0}$

(4) $f(x)=e^{ax}F(x)$ であるから，(1)，(3) の結論を利用すると

$$\begin{aligned}f^{(7)}(x)&=\sum_{i=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_i(e^{ax})^{(i)}F^{(7-i)}(x)\\&=\sum_{i=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_ia^ie^{ax}F^{(7-i)}(x),\\f^{(7)}(0)&=\sum_{i=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_ia^iF^{(7-i)}(0)\\&={}_7\mathrm{C}_1aF^{(6)}(0)+{}_7\mathrm{C}_3a^3F^{(4)}(0)\\&\qquad+{}_7\mathrm{C}_5a^5F^{(2)}(0)+{}_7\mathrm{C}_7a^7F^{(0)}(0)\\&=\boldsymbol{105ab^3+105a^3b^2+21a^5b+a^7}\end{aligned}$$

2024年4月24日 (水)

2024年 九工大後期

箱Aには数字の1が記入されたカードと数字の2が記入されたカードがそれぞれ1枚ずつ，合計2枚入っている．箱Bには数字が記入されたカードが合計4枚入っている．これらの箱の1つに対して次の試行を行う．

> 箱からカード1枚を無作為に取り出し，カードの数字を調べてから箱に戻す．これを3回繰り返し，調べた3つの数の和を X とする．

次に答えよ．

(1) 箱Aに対する試行で，$X = 5$ となる確率を求めよ．

(2) 箱Bには数字の1が記入されたカードが1枚と数字の2が記入されたカードが3枚入っているとする．このとき，箱Bに対する試行で，$X = 5$ となる確率を求めよ．

(3) 箱Bには数字の1が記入されたカードが1枚と数字の2が記入されたカードが3枚入っているとする．このとき，箱Aと箱Bのいずれか1つを無作為に選択して試行を行ったところ，$X = 5$ であった．試行が行われた箱が箱Bである条件付き確率を求めよ．

(4) 箱Bを空にし，以下の手順を4回繰り返すことにより，箱Bに合計4枚のカードを入れる．この箱Bに対して試行を行ったところ，$X = 5$ であった．このとき，箱Bの中身が数字の1が記入されたカードが1枚と数字の2が記入されたカードが3枚である条件付き確率を求めよ．

> (手順)
>
> 箱Aからカード1枚を無作為に取り出し，カードの数字を調べてから，箱Aに戻し，調べた数字を白紙のカードに記入し，その記入したカードを箱Bに入れる．

解答 (1) 箱 A に対する試行で，$X=5$ となるのは，数字の 1 が 1 回，数字の 2 が 2 回である確率は

$$\frac{3!}{1!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(2) 箱 B に対する試行で，$X=5$ となるのは，数字の 1 が 1 回，数字の 2 が 2 回である確率は

$$\frac{3!}{1!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\boldsymbol{\frac{27}{64}}$$

(3) (1)，(2) の結果から，求める条件付き確率は

$$\frac{\dfrac{27}{64}}{\dfrac{3}{8}+\dfrac{27}{64}}=\boldsymbol{\frac{9}{17}}$$

(4) (i) 箱 B に数字の 1 が 3 枚，数字の 2 が 1 枚のとき，$X=5$ となる確率は

$$\frac{3!}{1!2!}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{64}$$

(ii) 箱 B に数字の 1 が 2 枚，数字の 2 が 2 枚のとき，$X=5$ となる確率は

$$\frac{3!}{1!2!}\left(\frac{2}{4}\right)^1\left(\frac{2}{4}\right)^2=\frac{24}{64}$$

箱 B に数字の 1 が 3 枚，2 枚，1 枚となる場合の確率は，それぞれ

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{2^4}=\frac{1}{4},\quad \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2^4}=\frac{3}{8},\quad \frac{{}_4\mathrm{C}_1}{2^4}=\frac{1}{4}$$

よって，(i)，(ii) および (2) の結果から，求める条件付き確率は

$$\frac{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{27}{64}}{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{9}{64}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{24}{64}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{27}{64}}=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

2024年4月25日 (木)

2024年 九工大後期

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．次に答えよ．

(1) $-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，$y = [x]$ のグラフをかけ．

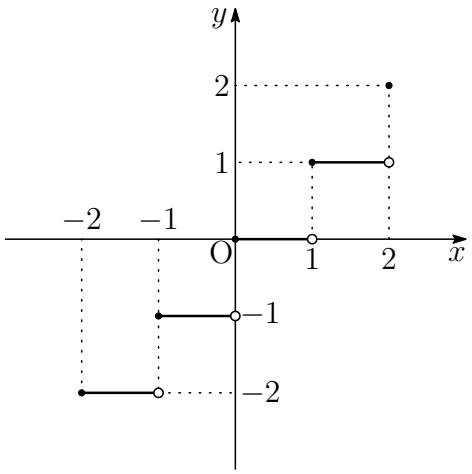
(2) a，b を実数とする．このとき，すべての実数 x に対して，$x + a < [x]$ が成り立つような a の最大値を求めよ．また，すべての実数 x に対して，$[x] \leqq x + b$ が成り立つような b の最小値を求めよ．

(3) $[x] - 3x + 3 = 0$ の解を求めよ．ただし，(2) を利用してもよい．

(4) $x^2 - 6[x] + 5 = 0$ の解を求めよ．

(5) $[x^2] - 6x + 5 = 0$ の解を求めよ．ただし，必要ならば $\sqrt{5} = 2.236\cdots$ を利用してもよい．

解答　(1) $-2 \leqq x \leqq 2$ における $y=[x]$ のグラフは次のとおり．ただし，(・) は含み，(○) は含まない．



(2) $x-1<[x] \leqq x$ であるから，a の最大値は $\boldsymbol{-1}$，b の最小値は $\boldsymbol{0}$

(3) $[x]=3x-3$ であるから

$$x-1<3x-3 \leqq x \quad \text{これを解くと} \quad \frac{2}{3}<x \leqq \frac{3}{2}$$

$x=\dfrac{1}{3}[x]+1$ に注意して　$\boldsymbol{x=\dfrac{4}{3}}$

(4) $[x]=\dfrac{x^2+5}{6}$ であるから　$x-1<\dfrac{x^2+5}{6} \leqq x$

$$\begin{cases} x^2-6x+11>0 \\ x^2-6x+5 \leqq 0 \end{cases} \quad \text{これを解くと} \quad 1 \leqq x \leqq 5$$

$x=\sqrt{6[x]-5}$ に注意して　$\boldsymbol{x=1,\ \sqrt{7},\ \sqrt{13},\ \sqrt{19},\ 5}$

(5) $(*)$ $[x^2]=6x-5$ であるから　$x^2-1<6x-5\leqq x^2$

$$\begin{cases} x^2-6x+4<0 \\ x^2-6x+5\geqq 0 \end{cases}$$

これを解くと　$3-\sqrt{5}<x\leqq 1,\ \ 5\leqq x<3+\sqrt{5}$

(i) $3-\sqrt{5}<x<1$ のとき，$[x^2]=0$ であるから，$(*)$ より

$$0=6x-5 \quad \text{これを解くと} \quad x=\frac{5}{6}$$

(ii) $x=1$ は $(*)$ を満たす.

(iii) $5\leqq x<3+\sqrt{5}$ のとき，$25\leqq x^2<14+\sqrt{180}$ より，$[x^2]=25,\ 26,\ 27$

$[x^2]=25$ のとき　$25=6x-5$　ゆえに　$x=5$ (適する)

$[x^2]=26$ のとき　$26=6x-5$　ゆえに　$x=\dfrac{31}{6}=5+\dfrac{1}{6}$ (適する)

$$\left(5+\frac{1}{6}\right)^2=25+\frac{5}{3}+\frac{1}{36}=26+\frac{2}{3}+\frac{1}{36}=26+\frac{25}{36}$$

$[x^2]=27$ のとき　$27=6x-5$　ゆえに　$x=\dfrac{16}{3}=5+\dfrac{1}{3}$ (不適)

$$\left(5+\frac{1}{3}\right)^2=25+\frac{10}{3}+\frac{1}{9}=28+\frac{4}{9}$$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{6},\ 1,\ 5,\ \dfrac{31}{6}}$

2024年4月26日 (金)

2024年 九大後期

xyz 空間内の点A，B，C，Dの座標をそれぞれ $(2,\ 1,\ 0)$，$(9,\ 0,\ 0)$，$(6,\ 9,\ 0)$，$(5,\ 8,\ 2\sqrt{2})$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点A，B，Cを通る円の半径を求めよ．

(2) (1) で求めた円の周上を移動する点をEとする．三角形ABEの面積が25となるときの点Eの座標を求めよ．ただし，点Eの x 座標は y 座標より大きいとする．

(3) 点A，B，D，および (2) で求めた点Eを通る球面上を移動する点をPとする．ただし，点Pの z 座標は正とする．四面体ABEPの体積が最大となるときの体積 V を求めよ．また，四面体ABEPの体積が $\dfrac{3}{5}V$ を保つように点Pが移動したときの，点Pが描く図形の方程式を求めよ．

解答　(1) 3 点 A(2, 1, 0)，B(9, 0, 0)，C(6, 9, 0) を通る円の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,\quad z=0 \qquad (*)$$

とおくと，これらの 3 点がこの円周上の点であるから

$$\begin{cases} 2a+b+c+5=0 & \cdots ① \\ 9a+c+81=0 & \cdots ② \\ 6a+9b+c+117=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ − ①，③ − ② を行い，それぞれ整理すると

$$a+2b+28=0,\quad -a+3b+12=0$$

上の 2 式から　$a=-12,\ \ b=-8$　これを ① に代入して　$c=27$
したがって　　$x^2+y^2-12x-8y+27=0,\quad z=0$

$$(x-6)^2+(y-4)^2=5^2,\quad z=0$$

よって，求める円の半径は　　**5**

(2) $\mathrm{AB}=\sqrt{(9-2)^2+(0-1)^2}=5\sqrt{2}$
$E=\angle\mathrm{AEB}$ とおくと，正弦定理により

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sin E}=2\cdot 5 \qquad \text{ゆえに}\quad \sin E=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ④$$

$\alpha=\mathrm{BE}$，$\beta=\mathrm{AE}$ とおくと，条件および余弦定理により

$$\frac{1}{2}\alpha\beta\sin E=50,\quad (5\sqrt{2})^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos E$$

したがって　　$\alpha\beta=50\sqrt{2},\quad \alpha^2+\beta^2=50+100\sqrt{2}\cos E \quad \cdots ⑤$
④，⑤ より，$E=45^\circ$ であるから　$\alpha^2+\beta^2=150$
$\alpha^2,\ \beta^2$ を解とする 2 次方程式は

$$t^2-150t+(50\sqrt{2})^2=0 \quad \text{ゆえに}\quad (t-50)(t-100)=0$$

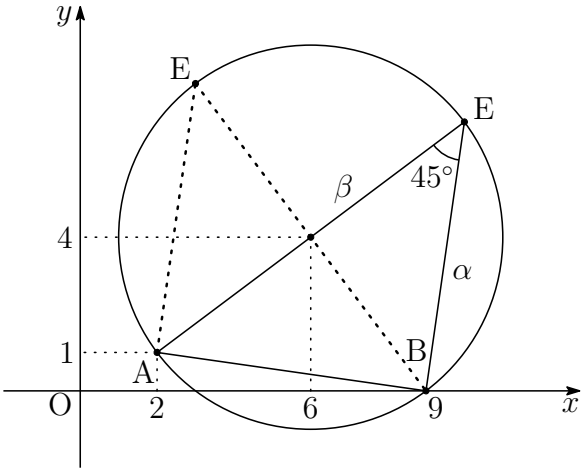
したがって　　$(\alpha,\ \beta)=(5\sqrt{2},\ 10),\ (10,\ 5\sqrt{2})$

(i) $(\alpha,\ \beta) = (5\sqrt{2},\ 10)$ のとき，△ABE は AB = BE の直角二等辺三角形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 90° 回転させたものであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BE}} \\ &= (2,\ 1,\ 0) + (7, -1,\ 0) + (1,\ 7,\ 0) = (10,\ 7,\ 0)\end{aligned}$$

(ii) $(\alpha,\ \beta) = (10,\ 5\sqrt{2})$ のとき，△ABE は AB = AE の直角二等辺三角形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 90° 回転させたものであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ &= (2,\ 1,\ 0) + (1,\ 7,\ 0) = (3,\ 8,\ 0)\end{aligned}$$



点 E の x 座標は y 座標より大きいから，(i)，(ii) より　**E(10, 7, 0)**

(3) 点 A，B，D，および (2) で求めた点 E を通る球面の方程式は，$(*)$ に注意して

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 8y + dz + 27 = 0$$

とおける．これが点 $\mathrm{E}(5,\ 8,\ 2\sqrt{2})$ を通るから

$$5^2 + 8^2 + (2\sqrt{2})^2 - 12\cdot 5 - 8\cdot 8 + 2\sqrt{2}d + 27 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad d = 0$$

すなわち，球面の方程式は　$(x-6)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 5^2$

点 P が $(6,\ 4,\ 5)$ のとき，四面体 ABPE の体積は最大値 V をとる．よって，条件を満たすとき，点 P は球面および平面 $z = 3$ の交線上にあるから

$$\boldsymbol{(x-6)^2 + (y-4)^2 = 4^2,\quad z = 3}$$

2024年4月27日 (土)

2024 年 九大後期

x を実数として，次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_{n+2} = xa_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = x$$

(1) $x = 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $x = -2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) x を変数とみると，すべての自然数 $n = 1, 2, \cdots$ について，$a_n(x)$ が x に関する n 次式であること，および x^n の係数が 1 であることを示せ．

(4) すべての自然数 $n = 1, 2, \cdots$ について，x に関する n 次方程式 $a_n(x) = 0$ は，-2 より大きく 2 より小さい異なる n 個の実数解をもち，これらの解は $a_{n+1}(x) = 0$ の解と交互に並ぶことを示せ．ここで，解が交互に並ぶとは，$a_n(x) = 0$ の解を値が小さい順に $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ と記述し，$a_{n+1}(x) = 0$ の解を値が小さい順に $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{n+1}$ と記述するとき，

$$c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < \cdots < c_n < b_n < c_{n+1}$$

となることを意味する．ただし，n 次方程式 $f(x) = 0$ は n 個の解 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n$ をもち，$f(x)$ はある実数 k を用いて

$$f(x) = k(x - d_1)(x - d_2)\cdots(x - d_n)$$

と表せるという事実を用いてよい．

解答 (1) $x=2$ より　$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n,\quad a_0=1,\ a_1=2$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}-a_n=a_2-a_1=1$$

$n \geqq 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=0}^{n-1}$

$$a_n-a_0=n \quad \text{ゆえに} \quad a_n=n+1$$

$n=0$ のときも上式は成立するから　$\boldsymbol{a_n=n+1}$

(2) $x=-2$ より　$a_{n+2}=-2a_{n+1}-a_n,\quad a_0=1,\ a_1=-2$

$$(-1)^{n+2}a_{n+2}-(-1)^{n+1}a_{n+1}=(-1)^{n+1}a_{n+1}-(-1)^n a_n$$

これから　$(-1)^{n+1}a_{n+1}-(-1)^n a_n=(-1)^1 a_1-a_0=1$

$n \geqq 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\{(-1)^{k+1}a_{k+1}-(-1)^k a_k\}=\sum_{k=0}^{n-1}$

$$(-1)^n a_n-a_0=n \quad \text{ゆえに} \quad (-1)^n a_n=n+1$$

上の第 2 式は，$n=0$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n=(-1)^n(n+1)}$

(3) $(*)$　$a_n(x)$ が x に関する n 次式であること，および x^n の係数が 1 である．

［1］$n=1$ のとき，$a_1=x$ より，$(*)$ は成立する．

［2］$n \leqq k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$a_{k+1}=xa_k+a_{k-1}$$

上式より，$n \leqq k+1$ のとき，$(*)$ が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

(4) (1)，(2) の結果から，$x=\pm 2$ は n 次方程式 $a_n(x)=0$ の解ではない．

$a_{n+2}-xa_{n+1}+a_n=0$ より，t に関する特性方程式

$$t^2-xt+1=0$$

$x \neq \pm 2$ のとき，特性方程式の異なる 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=x,\quad \alpha\beta=1,\quad a_1=\alpha+\beta,\quad a_0=\alpha\beta$$

漸化式は　　$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

これから　　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

したがって　　$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^n(a_1-\alpha a_0)=\beta^{n+1}$

同様に　　$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^n(a_1-\beta a_0)=\alpha^{n+1}$

上の 2 式から　　$a_n=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$

$a_n=0$ とすると，$\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}=0$ であるから，$\alpha\beta=1$ より

$$\alpha^{2(n+1)}=1 \quad \text{これを解くと} \quad \alpha=\cos\frac{k\pi}{n+1}+i\sin\frac{k\pi}{n+1}$$

$\alpha\beta=1$ より　$\beta=\cos\dfrac{k\pi}{n+1}-i\sin\dfrac{k\pi}{n+1}$

$\alpha\neq\beta$ に注意すると

$$x=\alpha+\beta=2\cos\frac{k\pi}{n+1} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

このとき　$b_k=2\cos\dfrac{n+1-k}{n+1}\pi=-2\cos\dfrac{k\pi}{n+1} \quad (k=1,2,\cdots,n)$

同様に　　$c_k=-2\cos\dfrac{k\pi}{n+2} \quad (k=1,2,\cdots,n+1)$

$(k+1)(n+1)-k(n+2)=n-k+1>0$ より　$\dfrac{k+1}{n+2}-\dfrac{k}{n+1}>0$

したがって　　$0<\dfrac{k}{n+2}<\dfrac{k}{n+1}<\dfrac{k+1}{n+2}<1$

$$0<\frac{k}{n+2}\pi<\frac{k}{n+1}\pi<\frac{k+1}{n+2}\pi<\pi$$

ゆえに　　$\cos\dfrac{k}{n+2}\pi>\cos\dfrac{k}{n+1}\pi>\cos\dfrac{k+1}{n+2}\pi$

$$-2\cos\frac{k}{n+2}\pi<-2\cos\frac{k}{n+1}\pi<-2\cos\frac{k+1}{n+2}\pi$$

$c_k<b_k<c_{k+1}$ であるから $(k=1,2,\cdots,n)$

$$c_1<b_1<c_2<b_2<\cdots<c_n<b_n<c_{n+1}$$

別解 $a_n(x)=0$ の解を値が小さい順に $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ と記述し，$a_{n+1}(x)=0$ の解を値が小さい順に $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{n+1}$ と記述するとき，

$$-2<c_1<b_1<c_2<b_2<\cdots<c_n<b_n<c_{n+1}<2 \qquad \text{(A)}$$

とする．

［1］$n=1$ のとき，漸化式から

$$a_1(x)=x,\quad a_2(x)=xa_1(x)-a_0(x)=x\cdot x-1=x^2-1$$

このとき　$b_1=0,\ c_1=-1,\ c_2=1$　ゆえに　$c_1<b_1<c_2$

よって，$n=1$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n\leqq k$ のとき，(A) が成立すると仮定する．このとき，(3) の結論に注意すると

$$a_k(x)=\prod_{j=1}^{k}(x-b_j),\quad a_{k+1}=\prod_{j=1}^{k+1}(x-c_j)$$

とおける．これを漸化式に適用すると

$$a_{k+2}(x)=x\prod_{j=1}^{k+1}(x-c_j)-\prod_{j=1}^{k}(x-b_j)$$

上式に $x=c_i,\ c_{i+1}$ を代入すると $(i=1,2,\cdots,k)$

$$a_{k+2}(c_i)=-\prod_{j=1}^{k}(c_i-b_j)=-(-1)^{k-i+1}\prod_{j=1}^{k}|c_i-b_j|$$

$$a_{k+2}(c_{i+1})=-\prod_{j=1}^{k}(c_{i+1}-b_j)=-(-1)^{k-i}\prod_{j=1}^{k}|c_{i+1}-b_j|$$

したがって　　$a_{k+2}(c_i)a_{k+2}(c_{i+1})<0$

また，(1)，(2) の結果から

$$a_{k+2}(2)=k+3,\quad a_{k+2}(-2)=(-1)^{k+2}(k+3)$$

同様に，$a_{k+2}(c_1),\ a_{k+2}(c_{k+1})$ を求めると

$$a_{k+2}(c_1)=(-1)^{k+1}\prod_{j=1}^{k}|c_1-b_j|$$

$$a_{k+2}(c_{k+1})=-\prod_{j=1}^{k}|c_{k+1}-b_j|$$

したがって　$a_{k+2}(-2)a_{k+2}(c_1) < 0, \quad a_{k+2}(c_{k+1})a_{k+2}(2) < 0$

$a_{k+2}(x)$ は $k+2$ 次式であるから，$k+2$ 個の開区間

$$(-2,\ c_1),\ (c_1,\ c_2),\ (c_2,\ c_3),\ \cdots (c_k,\ c_{k+1}),\ (c_{k+1},\ 2)$$

のそれぞれに $a_{k+2}(x) = 0$ となる x が 1 個ずつ存在する．これらの解を小さい順に $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{k+2}$ とおくと

$$-2 < d_1 < c_1 < d_2 < c_2 < \cdots < d_{n+1} < c_{n+1} < d_{n+2} < 2$$

よって，$n = k+2$ のとき，(A) が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について題意は成立する．

2024年4月28日(日)

2024年 九大後期

n は自然数とし，$z_0 = 1$ とする．さいころを n 回投げて以下の規則により複素数 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$ を定める．

(a) さいころを投げて k 回目に奇数が出たとき $z_k = z_{k-1}$ とおく．

(b) さいころを投げて k 回目に偶数 $2m$ $(m = 1, 2, 3)$ が出たとき，$z_k = i^m z_{k-1}$ とおく．ただし，i は虚数単位とする．

以下の問いに答えよ．

(1) z_n が正の実数となる確率を P_n とおき，z_n が負の実数となる確率を Q_n とおく．$P_1,\ Q_1,\ P_2,\ Q_2$ を求めよ．

(2) (1) で定めた P_n と Q_n を考える．すべての n について $P_n + 3Q_n = 1$ が成立することを示せ．

(3) (1) で定めた P_n を求めよ．

解答 (1) z_n が $1, -1, i, -i$ になる確率をそれぞれ $P_n,\ Q_n,\ R_n,\ S_n$ とおくと，次の確率漸化式が成立する $(n = 0, 1, \cdots)$.

$$P_0 = 1,\ Q_0 = 0,\ R_0 = 0,\ S_0 = 0$$
$$P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{6}S_n \quad \cdots ①$$
$$Q_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{6}S_n \quad \cdots ②$$
$$R_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{2}R_n + \frac{1}{6}S_n$$
$$S_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{2}S_n$$

$P_n + Q_n + R_n + S_n = 1$ より，$R_n + S_n = 1 - P_n - Q_n$ を ①，② に代入して整理すると

$$P_0 = 1, \quad Q_0 = 0, \quad P_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{6}, \quad Q_{n+1} = \frac{1}{3}Q_n + \frac{1}{6}$$

したがって

$$P_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(P_n - \frac{1}{4}\right), \quad Q_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(Q_n - \frac{1}{4}\right)$$

$\left\{P_n - \frac{1}{4}\right\}$, $\left\{Q_n - \frac{1}{4}\right\}$ は，ともに公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$P_n - \frac{1}{4} = \left(P_0 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$Q_n - \frac{1}{4} = \left(Q_0 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(0 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって　　$P_n = \frac{1}{4}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}, \quad Q_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \quad \cdots (*)$

したがって　　$\boldsymbol{P_1 = \frac{1}{2},\ Q_1 = \frac{1}{6},\ P_2 = \frac{1}{3},\ Q_2 = \frac{2}{9}}$

(2) $(*)$ より

$$P_n + 3Q_n = \frac{1}{4}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} + 3 \times \frac{1}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 1$$

(3) $(*)$ より　　$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{4}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$

2024年4月29日(月)

2024年 九大後期

曲線$C : y = (1-x^2)^2$と，曲線C上の点$\mathrm{P}(k,\ (1-k^2)^2)$を考える．ただし，$k$は正の実数とする．また点Pにおける曲線$C$の接線を$\ell$とする．以下の問いに答えよ．

(1) 接線ℓの方程式を求めよ．

(2) $k \neq 1$とする．点Pおよび点Pとは異なる1点でのみ曲線Cと接線ℓが交わるとき，kの値を求めよ．

(3) kが(2)で求めた値のとき，曲線Cと接線ℓで囲まれた図形の面積Sを求めよ．

解答　(1) $f(x)=(1-x^2)^2$ とおくと　$f'(x)=4x(x^2-1)$　$\cdots$①

$C:y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(k,\ f(k))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=f(k)+f'(k)(x-k)\\ &=(1-k^2)^2+4k(k^2-1)(x-k)\\ &=(k^2-1)^3(4kx-3k^2-1)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\ell:y=(k^2-1)(4kx-3k^2-1)}$

(2) ① を順次微分すると

$$f^{(2)}(x)=12x^2-4,\quad f^{(3)}(x)=24x,\quad f^{(4)}(x)=24$$

4 次関数 $f(x)$ を $x=k$ を極として展開すると

$$\begin{aligned} f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(k)(x-k)^2\\ +\frac{1}{3!}f^{(3)}(k)(x-k)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(k)(x-k)^4\end{aligned}$$

C と ℓ の方程式に注意して

$$\begin{aligned} &f(x)-\{f(k)+f'(k)(x-k)\}\\ &\quad=\frac{1}{2!}f^{(2)}(k)(x-k)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(k)(x-k)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(k)(x-k)^4\\ &\quad=\frac{1}{2}(12k^2-4)(x-k)^2+\frac{1}{6}\cdot24k(x-k)^3+\frac{1}{24}\cdot24(x-k)^4\\ &\quad=(x-k)^2\{(6k^2-2)+4k(x-k)+(x-k)^2\}\\ &\quad=(x-k)^2\{(x-k)^2+4k(x-k)+6k^2-2\}\end{aligned}$$

C と ℓ の共有点が 2 個であるとき，2 次方程式

$$(x-k)^2+4k(x-k)+6k^2-2=0 \qquad (*)$$

が「k 以外の重解をもつ」または「k と k 以外の解をもつ」場合がある．

(i) $(*)$ が重解をもつとき，係数について

$$D/4=(2k)^2-(6k^2-2)=-2k^2+2=0 \quad \text{ゆえに} \quad k=\pm 1$$

$k>0, k\neq 1$ であるから，これを満たす k は存在しない．

(ii) $(*)$ が k を解にもつとき，$6k^2-2=0\cdots$②

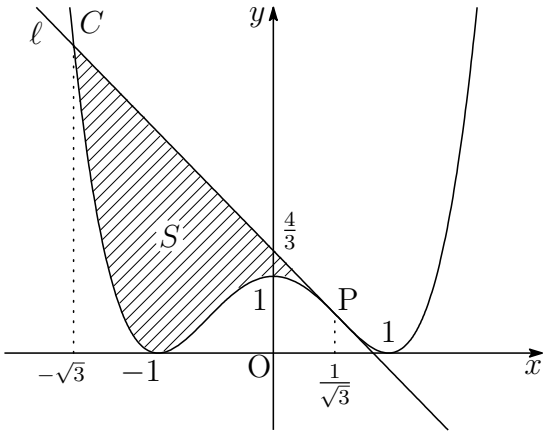
$$\begin{aligned} f(x)-\{f(k)+f'(k)(x-k)\} &= (x-k)^2\{(x-k)^2+4k(x-k)\} \\ &= (x-k)^3(x+3k) \qquad (**) \end{aligned}$$

② および $k>0$ より，$k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3) C と ℓ の位置関係に注意すると，$(**)$ より，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-3k}^{k}(x-k)^3(x+3k)\,dx = \int_{-3k}^{k}(x+3k)(k-x)^3\,dx \\ &= \frac{1!3!}{(1+3+1)!}\{k-(-3k)\}^{1+3+1} = \frac{3!}{5!}(4k)^5 \\ &= \frac{256}{5}k^5 = \frac{256}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 = \boldsymbol{\frac{256}{45\sqrt{3}}} \end{aligned}$$



補足　定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[19]．

[19] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf 1

2024年4月30日 (火)

2024年 九大後期

実数 x，y と虚数単位 i を用いて表される複素数 $z = x + yi$ に対して，z の絶対値を $|z|$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) 複素数平面上の領域

$$E = \left\{ z \,|\, \left| \frac{z-1-i}{z+1+i} \right| \leqq 1 \right\}$$

を複素数平面上に図示せよ．

(2) 複素数 $\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{4}$ を極形式で表せ．

(3) 複素数平面上の領域

$$D_0 = \left\{ z \,|\, \left| z - \sqrt{2} - \sqrt{6} \right| \leqq 2 \right\}$$

を考える．また，(2) の複素数 α と領域 D_0 を用いて領域 D_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を次式で定義する．

$$D_n = \{ z \,|\, z = \alpha^n w, \quad w \in D_0 \}$$

さらに領域 D_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ と (1) の領域 E の共通領域の面積を s_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする．s_1 を求めよ．

(4) (3) で求めた s_n に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ を求めよ．

解答　(1)　$\beta = 1 + i$ とおくと，$\left|\dfrac{z-\beta}{z+\beta}\right| \leqq 1$ より

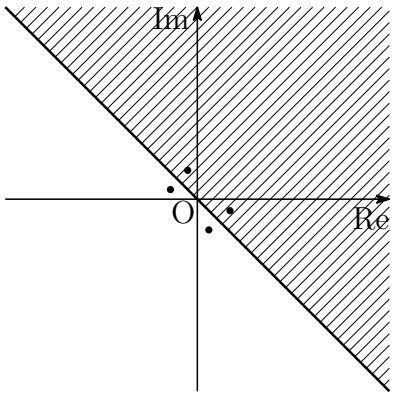
$$|z-\beta|^2 \leqq |z+\beta|^2 \quad \text{整理すると} \quad \overline{\beta}z + \beta\overline{z} \geqq 0$$

したがって　　$\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{\beta}\right) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{z}{\beta} + \overline{\left(\dfrac{z}{\beta}\right)}\right\} \geqq 0$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \arg\dfrac{z}{\beta} \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\arg\beta = \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\arg\beta - \frac{\pi}{2} \leqq z \leqq \arg\beta + \frac{\pi}{2} \quad \text{よって} \quad -\frac{\pi}{4} \leqq z \leqq \frac{3}{4}\pi$$

よって，領域 E は図の斜線部分で境界線を含む.



別解　$\overline{\beta}z + \beta\overline{z} \geqq 0$ に $z = x + yi$，$\beta = 1 + i$ を代入すると

$$(1-i)(x+yi) + (1+i)(x-yi) \geqq 1 \quad \text{整理すると} \quad x + y \geqq 0$$

(2) $\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)}$

(3) 領域 $D_0,\ E,\ D_n$ をそれぞれ $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた領域を $\tilde{D}_0,\ \tilde{E},\ \tilde{D}_n$ とする．

$\tilde{D}_n$ の中心を a_n，半径を r_n とすると $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$\begin{aligned} a_n &= (\sqrt{2}+\sqrt{6})\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\alpha^n \\ &= (1+\sqrt{3})(1-i)\cdot 2^{-\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{2n}{3}\pi + i\sin\frac{2n}{3}\pi\right) \\ r_n &= 2|\alpha|^n = 2\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^n = 2\cdot 2^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

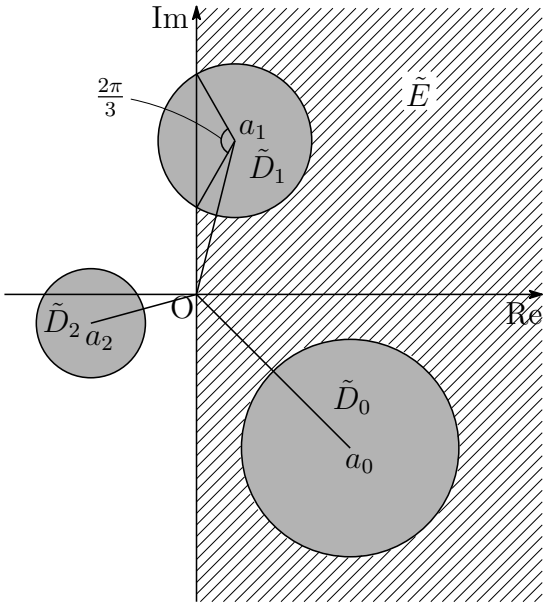
したがって

$$a_1 = (1+\sqrt{3})(1-i)\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left\{1+\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}i\right\}2^{-\frac{1}{2}}$$

$\mathrm{Re}(a_1) = 2^{-\frac{1}{2}}, \quad r_1 = 2\cdot 2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

s_1 は $\tilde{D}_1$ と $\tilde{E}$ の共通領域の面積に等しいから

$$s_1 = \frac{1}{2}r_1^2\left(\frac{4}{3}\pi + \sin\frac{2}{3}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



(4) a_n と r_n について

$$\frac{a_n}{r_n} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1-i)\left(\cos\frac{2n}{3}\pi + i\sin\frac{2n}{3}\pi\right)$$

(i) $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a_n}{r_n}\right) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) > 1$$

したがって，$\tilde{D}_n$ は $\tilde{E}$ に含まれる．s_n は D_n の面積に等しい．s_0 と s_n の相似比は $1 : 2^{-\frac{n}{2}}$ であるから

$$s_0 = 4\pi, \quad s_n = s_0\left(2^{-\frac{n}{2}}\right)^2 = s_0 \cdot 2^{-n}$$

(ii) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，(3) の結果に注意して

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a_n}{r_n}\right) = \frac{1}{2}$$

s_1 と s_n の相似比は $1 : 2^{\frac{1}{2}(1-n)}$ であるから

$$s_n = s_1 \cdot 2^{1-n}$$

(iii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{r_n} &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1-i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= -\frac{(1+\sqrt{3})^2}{4} - \frac{1}{2}i \\ \mathrm{Re}\left(\frac{a_n}{r_n}\right) &= -\frac{(1+\sqrt{3})^2}{4} = -\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < -1\end{aligned}$$

このとき，$\tilde{E}$ は $\tilde{D}_n$ を含まない．

(i)〜(iii) より，s_n は $\tilde{D}_n$ と $\tilde{E}$ の共通領域の面積に等しいから

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} s_n &= (s_0 + s_1) \times \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} \\ &= \left(4\pi + \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{8}{7} \\ &= \boldsymbol{\frac{128\pi + 12\sqrt{3}}{21}}\end{aligned}$$

2024年5月1日 (水)

2024年 一橋大学

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k(n-2k) = 2024$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ.

解答

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} k(n-2k) &= n\sum_{k=1}^{m} k - 2\sum_{k=1}^{m} k^2 \\ &= n\cdot\frac{1}{2}m(m+1) - 2\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2) = 2024\end{aligned}$$

$2024 = 2^3\cdot 11\cdot 23$ であるから

$$m(m+1)(3n-4m-2) = 2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$$

連続する 2 数 $m,\ m+1$ の一方は奇数 $1,\ 3,\ 11,\ 23$ であることに注意すると，次の ①〜⑥ の場合が考えられる．

	m	$m+1$	$3n-4m-2$
①	1	2	$2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 23$
②	2	3	$2^3\cdot 11\cdot 23$
③	3	2^2	$2^2\cdot 11\cdot 23$
④	11	$2^2\cdot 3$	$2^2\cdot 23$
⑤	$2\cdot 11$	23	$2^3\cdot 3$
⑥	23	$2^3\cdot 3$	$2\cdot 11$

①〜⑥ をそれぞれ解くと

$$(m,\ n) = (1,\ 2026),\ (2,\ 678),\ (3,\ 342),\ (11,\ 46),\ (22,\ 38),\ \left(23,\ \frac{116}{3}\right)$$

n は自然数であるから，⑥ は不適．

よって，求める $(m,\ n)$ の組は，次の 5 つである．

$$\boldsymbol{(m,\ n) = (1,\ 2026),\ (2,\ 678),\ (3,\ 342),\ (11,\ 46),\ (22,\ 38)}$$

2024年5月2日 (木)

2024年 一橋大学

a，bを実数とする．曲線$C : y = x^2$と曲線$C' : y = -x^2 + ax + b$はある点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線は直交している．CとC'で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ．

解答 $C : y = x^2$ と $C' : y = -x^2 + ax + b$ の共有点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$.

$$x^2 = -x^2 + ax + b \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - ax - b = 0 \qquad (*)$$

解と係数の関係から，上の第 2 式より

$$\alpha + \beta = \frac{a}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{2}$$

$C,\ C'$ の方程式をそれぞれ微分すると　$y' = 2x,\ \ y' = -2x + a$

それぞれの交点における接線が直交しているから，$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式

$$2x(-2x + a) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - ax - \frac{1}{2} = 0 \qquad (**)$$

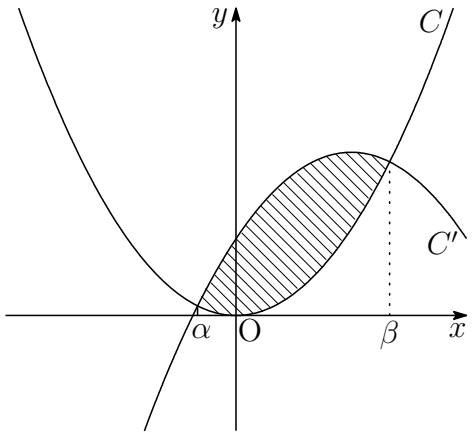
$(*)$ と $(**)$ は一致するから，定数項を比較して　$b = \dfrac{1}{2},\ \ \alpha\beta = -\dfrac{1}{4}$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{a^2}{4} + 1$$

C と C' で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S = \int_\alpha^\beta \{(-x^2 + ax + b) - x^2\}\,dx = -2\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx$$
$$= -2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^{\frac{3}{2}} \geqq \frac{1}{3}$$

よって，求める面積の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$



2024年5月3日 (金)

2024年 一橋大学

$f(x)$ は x に関する4次多項式で4次の係数は1である．$f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると1余り，$(x-1)^2$ で割ると2余る．$f(x)$ を求めよ．

解答 (x) の x^4 の係数が 1 であることと $f(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りが 1 であるから，$f(x)$ を次のようにおける ($p,\ q$ は定数).

$$f(x) = (x+1)^2\{(x-1)^2 + p(x-1) + q\} + 1 \qquad (*)$$

上式を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \{(x-1)^2 + 4(x-1) + 4\}\{(x-1)^2 + p(x-1) + q\} + 1 \\ &= (x-1)^4 + (p+4)(x-1)^3 + (4p+q+4)(x-1)^2 \\ &\qquad + 4(p+q)(x-1) + 4q + 1 \\ &= (x-1)^2\{(x-1)^2 + (p+4)(x-1) + (4p+q+4)\} \\ &\qquad + 4(p+q)x - 4p + 1 \end{aligned}$$

また，$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが 2 であるから

$$4(p+q) = 0,\ -4p + 1 = 2 \quad \text{これを解いて} \quad p = -\frac{1}{4},\ q = \frac{1}{4}$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2\left\{(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}\right\} + 1 \\ &= (x^2+2x+1)\left(x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}\right) + 1 \\ &= \boldsymbol{x^4 - \frac{1}{4}x^2 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}} \end{aligned}$$

2024年5月4日 (土)

2024年 一橋大学

実数 a，b は $-1 < a < 1$，$-1 < b < 1$ を満たす．座標空間内に4点 $\mathrm{A}(a, -1, -1)$，$\mathrm{B}(-1,\ b, -1)$，$\mathrm{C}(-a,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{D}(1, -b,\ 1)$ をとる．

(1) A，B，C，D がひし形の頂点となるとき，a と b の関係を表す式を求めよ．

(2) a，b が (1) の等式を満たすとき，A，B，C，D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ．

解答　(1) 4 点 $\mathrm{A}(a,-1,-1)$，$\mathrm{B}(-1,\ b,-1)$，$\mathrm{C}(-a,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{D}(1,-b,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1-a,\ 1+b,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2a,\ 2,\ 2),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-a,\ 1-b,\ 2)$$

上式より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成立する．
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$ を満たせばよいから

$$(-1-a)^2+(1+b)^2=(1-a)^2+(1-b)^2+2^2$$

整理すると　　$\boldsymbol{b=1-a}$
$-1<b<1$ であるから

$$-1<1-a<1\quad \text{ゆえに}\quad 0<a<2$$

$-1<a<1$ に注意して　よって　　$\boldsymbol{0<a<1,\ b=1-a}$

(2) $-1<b<1$ であるから，(1) の結果より

$$-1<1-a<1\quad \text{ゆえに}\quad 0<a<2$$

$-1<a<1$ に注意して　　$0<a<1\quad \cdots ①$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1-a,\ 2-a,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-a,\ a,\ 2)$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2(2-a,\ 1+a,-1+a-a^2)$
四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S^2}{4}&=(2-a)^2+(1+a)^2+(-1+a-a^2)^2\\&=a^4-2a^3+5a^2-4a+6\end{aligned}$$

$f(a)=\dfrac{S^2}{4}$ とおき，これを微分すると

$$\begin{aligned}f'(a)&=4a^3-6a^2+10a-4\\&=2(2a-1)(a^2-a+2)\\&=2(2a-1)\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right\}\end{aligned}$$

① の範囲で増減を考えると

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき，S の最小値は

$$2\sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{\frac{81}{16}} = \mathbf{\frac{9}{2}}$$

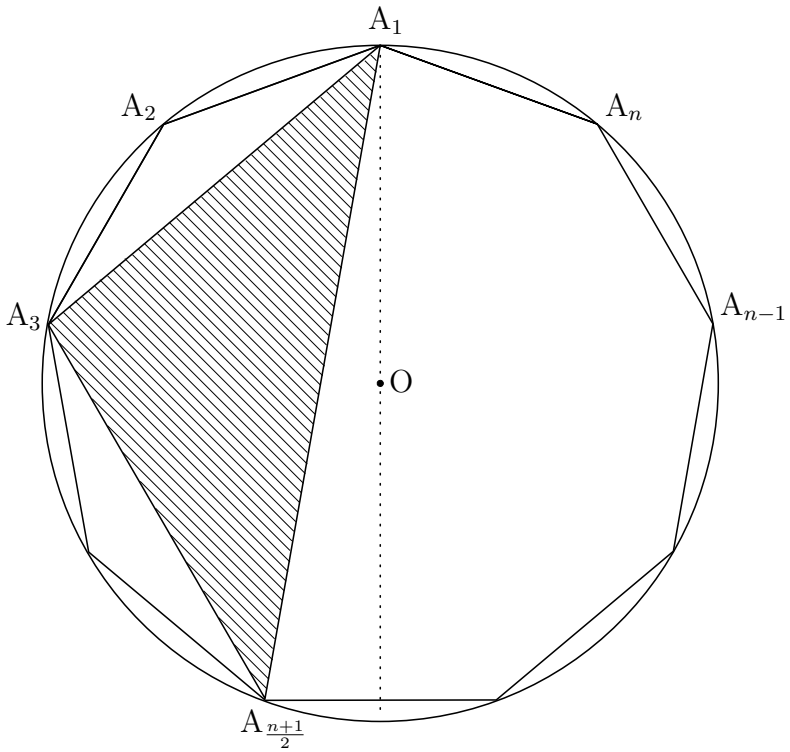
2024年5月5日 (日)

2024年 一橋大学

n を3以上の奇数とする．円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相異なる3点を選んだとき，その3点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ．

解答 n 個の頂点を反時計回りに $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ をとる (n は 3 以上の奇数).

2 点 $\mathrm{A}_\ell, \mathrm{A}_m$ について，$\ell \equiv m \pmod{n}$ のとき，これらの 2 点は同一の点する.



$i < j < k \leqq i + \frac{n-1}{2}$ とし，点 A_i に対して 2 点 $\mathrm{A}_j, \mathrm{A}_k$ をとると，三角形 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ は ($n \geqq 5$)，その内部に O を含まない．i の選び方 n 通りに対して，2 点 $\mathrm{A}_j, \mathrm{A}_k$ の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りあるから

$$1 - p_n = n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2 \,/\, {}_n\mathrm{C}_3$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2 \,/\, {}_n\mathrm{C}_3 \\ &= 1 - n \times \frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2} - 1\right)}{2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{n+1}{4(n-2)} \end{aligned}$$

$p_3 = 1$ であるから，上式は $n = 3$ のときも成立する.

よって　　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{n+1}{4(n-2)}}$

2024年5月6日(月)

2024年 名大理系

関数 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ から C にちょうど2本の接線を引くことができるとする．そのような実数 t の値の範囲を求めよ．

(3) (2)において，C の2つの接点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とする．$\alpha,\ \beta$ がともに整数であるような組 $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ．

解答　(1)　$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{x-2}{2x\sqrt{x}}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{-x+6}{4x^2\sqrt{x}}$$

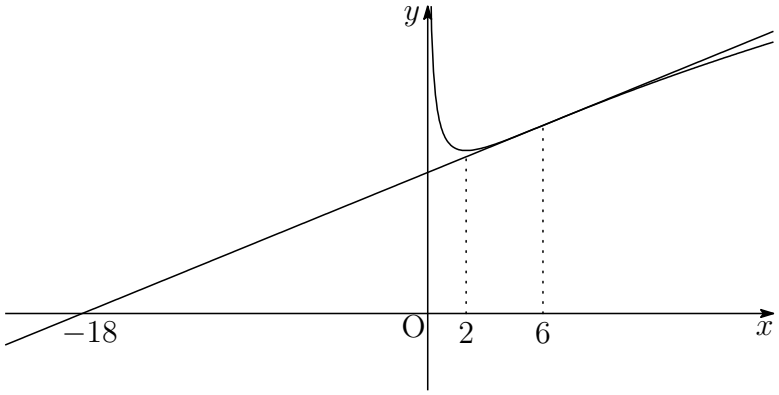
x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{8}{\sqrt{6}}$	$\nearrow$

よって，**極小値 $\boldsymbol{f(2)=2\sqrt{2}}$ をとる.**

(2)　(1) の結果から，$y=f(x)$ 上の変曲点 $(6,\ f(6))$ における接線の方程式は

$$y-\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{1}{3\sqrt{6}}(x-2)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{1}{3\sqrt{6}}(x+18)$$

$y=f(x)$ のグラフの凹凸から，t の値の範囲は　$\boldsymbol{t<-18}$



別解　(3) の 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta$ がともに正であるから

$$D=(t+6)^2-4\cdot1\cdot(-2t)=t^2+20t+36=(t+18)(t+2)>0,$$
$$\alpha+\beta=-(t+6)>0,\quad \alpha\beta=-2t>0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{t<-18}$

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y=\frac{\alpha-2}{2\alpha\sqrt{\alpha}}(x-\alpha)+\sqrt{\alpha}+\frac{2}{\alpha}\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{(\alpha-2)x+\alpha^2+6\alpha}{2\alpha\sqrt{\alpha}}$$

この直線が点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ を通るから

$$(\alpha-2)t+\alpha^2+6\alpha=0\quad \text{ゆえに}\quad \alpha^2+(t+6)\alpha-2t=0$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(\beta,\ f(\beta))$ における接線についても，同様の結果を得る．2 次方程式

$$x^2+(t+6)x-2t=0 \qquad (*)$$

の解が $\alpha,\ \beta$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-(t+6),\quad \text{ゆえに}\quad t=-(\alpha+\beta+6)$$

$\alpha,\ \beta$ がともに整数であるから，t は整数である．$(*)$ より

$$(x-2)t=-x^2-6x$$

上式から，$x\neq 2$ であることに注意して

$$t=\frac{-x^2-6x}{x-2}=-x-8-\frac{16}{x-2}$$

$x,\ t$ は整数であるから $(x>0)$

x	1	3	4	6	10	18
t	7	-27	-20	-18	-20	-27

$t<-18,\ \alpha<\beta$ であることに注意して

$$t=-27 \text{ のとき}\quad (\alpha,\ \beta)=(3,\ 18)$$
$$t=-20 \text{ のとき}\quad (\alpha,\ \beta)=(4,\ 10)$$

よって　　$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(3,\ 18),\ (4,\ 10)}$

補足 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-(t+6),\quad \alpha\beta=-2t$

上の 2 式から t を消去して整理すると

$$\alpha\beta-2(\alpha+\beta)-12=0\quad \text{ゆえに}\quad (\alpha-2)(\beta-2)=16$$

$0<\alpha<\beta$ を満たす整数 $(\alpha,\ \beta)$ は

$$(\alpha-2,\ \beta-2)=(1,\ 16),\ (2,\ 8)$$

よって　　$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(3,\ 18),\ (4,\ 10)}$

2024年5月7日 (火)

2024年 名大理系

c を 1 より大きい実数とする．また，i を虚数単位として，$\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく．複素数 z に対して，

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c, \quad Q(z) = -\alpha^7 z^3 + 3\alpha^6 z^2 + (c+2)\alpha z - c$$

と定める．

(1) 方程式 $P(z) = 0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ．

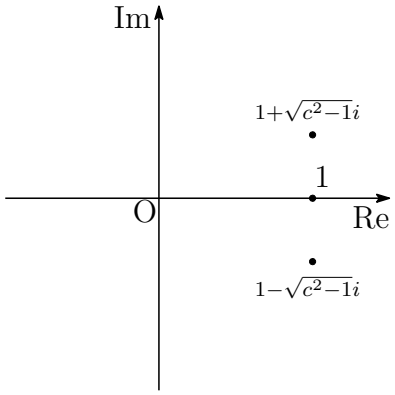
(2) 方程式 $Q(z) = 0$ を満たす複素数 z のうち実部が最大のものを求めよ．

(3) 複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z) = 0$，$Q(z) = 0$ が共通解 β を持つとする．そのときの c の値と β を求めよ．

解答　(1)

$$\begin{aligned} P(z) &= z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c \\ &= z(z^2 - 3z + 2) + c(z-1) \\ &= z(z-1)(z-2) + c(z-1) \\ &= (z-1)\{z(z-2) + c\} \\ &= (z-1)(z^2 - 2z + c) \end{aligned}$$

$P(z) = 0$ とすると $(c > 1)$　　$\boldsymbol{z = 1,\ 1 \pm \sqrt{c-1}\, i}$



(2) $\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ より，$\alpha^4 = -1$ であるから

$$\begin{aligned} Q(z) &= -\alpha^7 z^3 + 3\alpha^6 z^2 + (c+2)\alpha z - c \\ &= \alpha^3 z^3 - 3\alpha^2 z^2 + (c+2)\alpha z - c \\ &= P(\alpha z) \end{aligned}$$

$Q(z) = 0$ より，$P(\alpha z) = 0$ であるから，(1) の結果を利用して

$$\alpha z = 1,\ 1 \pm \sqrt{c-1}\, i \quad \text{ゆえに} \quad z = \overline{\alpha},\ \overline{\alpha}(1 \pm \sqrt{c-1}\, i)$$

これを計算すると

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \\ \overline{\alpha}(1 \pm \sqrt{c-1}\, i) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(1 \pm \sqrt{c-1}\, i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \mp \sqrt{c-1}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{c-1})i \end{aligned}$$

(複号同順)

よって，$Q(z) = 0$ の解のうち実部が最大のものは

$$\boldsymbol{\frac{1 + \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} i}$$

(3) (2) で示したように，$Q(z)=0$ の解は，$P(z)=0$ の解を複素数平面上で原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものであるから，これらの共通解 β は

$$\beta = 1+\sqrt{c-1}\,i = \frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}\,i$$

したがって　$1 = \dfrac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}$,　$\sqrt{c-1} = \dfrac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}$

ゆえに　　$\sqrt{c-1} = \sqrt{2}-1$　すなわち　$\boldsymbol{c = 4-2\sqrt{2}}$

$$\boldsymbol{\beta = 1+(\sqrt{2}-1)i}$$

別解　$\beta = 1+\sqrt{c-1}\,i$，$\arg\beta = \dfrac{\pi}{8}$ であるから

$$\frac{\mathrm{Im}(\beta)}{\mathrm{Re}(\beta)} = \sqrt{c-1} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c = 4-2\sqrt{2}}$$

2024年5月8日 (水)

2024年 名大理系

座標空間の3点 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ 3)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{C}(4,\ 0,\ 1)$ の定める平面を H とする．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (s,\ t \text{ は非負の実数})$$

を満たすすべての点Pからなる領域を K とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(2) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ から平面Hに下した垂線の足をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

(3) 領域 K 上の点Pに対して，線分QP上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (r は非負の実数) を満たす点Rが存在することを示せ．

(4) 領域 K において原点Oからの距離が最小となる点Sの座標を求めよ．

解答　(1) A(3, 1, 3)，B(4, 2, 2)，C(4, 0, 1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 1, -1), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1, -1, -2)$$

したがって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2,\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 0$$

(1) の結果および $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -4$ より

$$1 + 3s + 2t = 0, \quad -4 + 2s + 6t = 0$$

これを解いて　$s = -1,\ t = 1$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ および (2) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}) - (-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= (s+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

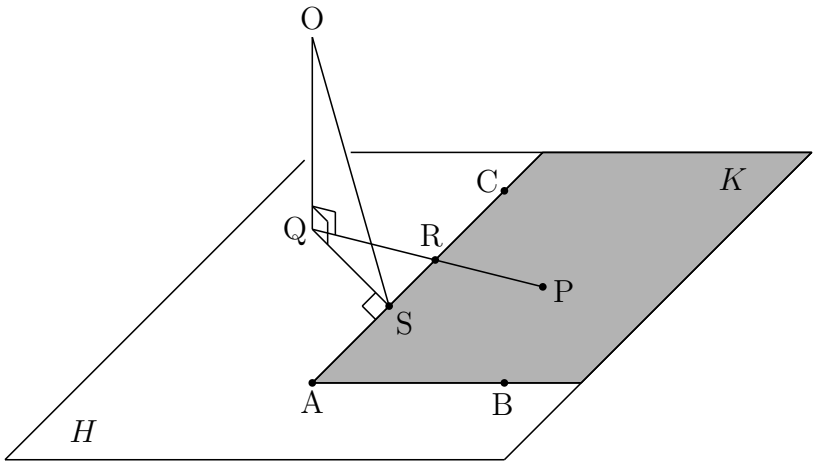
線分 QP 上の点を R とすると，$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = k\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であるから $(0 \leqq k \leqq 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}} &= \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + k\overrightarrow{\mathrm{QP}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + k\{(s+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\} \\ &= \{k(s+1) - 1\}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \{k(t-1) + 1\}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

R が直線 AC 上にあるとき，$k = \dfrac{1}{s+1}$ に注意して $(0 \leqq k \leqq 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{s+t}{s+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$r = \dfrac{s+t}{s+1}$ であるから ($s,\ t$ は非負の実数)，r は非負の実数である．



(4) (3) の結果に注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = -2 + 6 = 4,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{4}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AS}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= (3,\ 1,\ 3) + \frac{2}{3}(1, -1, -2) = \left(\frac{11}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{S}\left(\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right)$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $(s \geqq 0,\ t \geqq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+s^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\
&\qquad +2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2st\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= 19+3s^2+6t^2+2s-8t+4st \\
&= 6t^2+4(s-2)t+3s^2+2s+19 \\
&= 6\left\{t+\frac{1}{3}(s-2)\right\}^2+\frac{7}{3}(s+1)^2+14
\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるとき

$$t+\frac{1}{3}(s-2)=0, \quad s=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=\frac{2}{3}$$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

よって　$\mathbf{S}\left(\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right)$

2024年5月9日 (木)

2024年 名大理系

袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている．すべての玉に対する赤玉の割合を p $(0 \leqq p \leqq 1)$ とする．袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す操作を行う．試行を n 回行うとき，赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく．

(1) $n \geqq 2$ に対して，$f(1)$ と $f(2)$ を求めよ．

(2) $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して，等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\, dx$$

を示せ．

(3) 自然数 k に対して，定積分

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\, dx$$

を求めよ．

解答　(1) n 回の試行で赤玉を k 回取り出す確率を $P_n(k)$ とすると

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

したがって

$$f(1) = 1 - P_n(0) = \boldsymbol{1 - (1-p)^n}$$
$$f(2) = 1 - P_n(0) - P_n(1) = \boldsymbol{1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}}$$

(2) 等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

を変形すると $(k = 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\int_0^p (x^k)'(1-x)^{n-k}\,dx \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\Big[\, x^k(1-x)^{n-k} \,\Big]_0^p \\ &\qquad - \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}(-1)\,dx \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} + \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}\,dx \\ &= P_n(k) + f(k+1) \end{aligned}$$

$f(k) - f(k+1) = P_n(k)$ が成立するから $(k = 1, 2, \cdots n-1)$

$$\sum_{j=1}^{k-1}\{f(j) - f(j+1)\} = \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j)$$
$$f(1) - f(k) = \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j)$$
$$1 - (1-p)^n - f(k) = \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j)$$
$$1 - (1-p)^n - \sum_{j=1}^{k-1} P_n(j) = f(k)$$

$k = n$ のときも成立するから　$f(k) = 1 - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$

(3) (2) で示した結果において，$f(k)$ を $f_n(k)$ とおくと

$$f_n(k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

上式において，n, k をそれぞれ $2k+1$, $k+1$ とおくと，$p = \dfrac{1}{2}$ のとき，$f_{2k+1}(k+1) = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2} = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx$$

よって $$\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx = \frac{(k!)^2}{2(2k+1)!}}$$

別解 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)\,dx$ において，$x = 1-y$ とおくと $\dfrac{dy}{dx} = -1$

x	$0 \longrightarrow \frac{1}{2}$
y	$1 \longrightarrow \frac{1}{2}$

$$I = \int_1^{\frac{1}{2}} (1-y)^k y^k(-1)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 y^k(1-y)^k\,dy$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 x^k(1-x)^k\,dx$$

したがって

$$2I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^k(1-x)^k\,dx$$
$$= \int_0^1 x^k(1-x)^k\,dx = \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}$$

よって $$\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx = \frac{(k!)^2}{2(2k+1)!}}$$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[20] .

[20] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf 1

2024年5月10日 (金)

2024年 名大文系

次の問いに答えよ.

(1) 方程式 $x^3 - 3x^2 - 50 = 0$ の実数解を求めよ.

(2) 実数 p, q が $p + q = pq$ を満たすとする. $X = pq$ とおくとき, $p^3 + q^3$ を X で表せ.

(3) 条件

$$p^3 + q^3 = 50, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p < q$$

を満たす 0 でない実数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ.

解答　(1) $x^3-3x^2-50=(x-5)(x^2+2x+10)$

3 次方程式 $x^3-3x^2-50=0$ の解は　$x=5,\ -1\pm 3i$

よって，求める実数解は　$\boldsymbol{x=5}$

(2) $X=pq=p+q$ より

$$\begin{aligned} p^3+q^3&=(p+q)^3-3pq(p+q)\\ &=X^3-3X\cdot X=\boldsymbol{X^3-3X^2}\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ より　$p+q=pq$

$X=pq=p+q$ とおくと，$p^3+q^3=50$ より，(2) の結果を利用すると

$$X^3-3X^2=50\quad\text{ゆえに}\quad X^3-3X^2-50=0$$

X は実数であるから，(1) の結果より　$X=pq=p+q=5$

したがって，$p,\ q$ を解とする 2 次方程式は

$$t^2-5t+5=0\quad\text{これを解いて}\quad t=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

$p<q$ より　　$\boldsymbol{p=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2},\quad q=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$

2024年5月11日 (土)

2024年 名大文系

t を 0 でない実数として，x の関数 $y = -x^2 + tx + t$ のグラフを C とする．

(1) C 上において y 座標が最大となる点 P の座標を求めよ．

(2) P と点 O(0, 0) を通る直線を ℓ とする．ℓ と C が P 以外の共有点 Q を持つために t が満たすべき条件を求めよ．また，そのとき，点 P の座標を求めよ．

(3) t は (2) の条件を満たすとする．A$(-1, -2)$ として，$X = \dfrac{1}{4}t^2 + t$ とおくとき，$\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AQ}^2$ を X で表せ．また，$\mathrm{AP} < \mathrm{AQ}$ となるために t が満たすべき条件を求めよ．

解答　(1) $C : y = -x^2 + tx + t$ より　$y = -\left(x - \dfrac{t}{2}\right)^2 + \dfrac{t^2}{4} + t$

よって，点 P の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4} + t\right)}$

(2) 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4} + t\right)$ を通る直線 ℓ の方程式は $(t \neq 0)$

$$y = \frac{\frac{t^2}{4} + t}{\frac{t}{2}}x \quad \text{すなわち} \quad y = \left(\frac{t}{2} + 2\right)x$$

ℓ と C の方程式から y を消去すると

$$\left(\frac{t}{2} + 2\right)x = -x^2 + tx + t \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)\left(x - \frac{t}{2}\right) = 0$$

これを解いて　$x = -2,\ \dfrac{t}{2}$　このとき　$\dfrac{t}{2} \neq -2$ に注意して　$t \neq -4$

$x = -2$ を ℓ の方程式に代入して　$\mathrm{Q}\boldsymbol{(-2, -t-4)}$　$\boldsymbol{(t \neq 0, -4)}$

(3) $\mathrm{A}(-1, -2)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4} + t\right)$，$\mathrm{Q}(-2, -t-4)$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AQ}^2 &= \left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{t^2}{4} + t + 2\right)^2 - \left\{(-2+1)^2 - (-t-2)^2\right\} \\
&= \left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{t^2}{4} + t + 2\right)^2 - 1 - 4\left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{t^2}{4} + t + 2\right)^2 - 3\left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 - 1
\end{aligned}$$

ここで，$X = \dfrac{t^2}{4} + t$，$\left(\dfrac{t}{2} + 1\right)^2 = X + 1$ であるから

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AQ}^2 &= (X+2)^2 - 3(X+1) - 1 \\
&= X^2 + X = \boldsymbol{X(X+1)}
\end{aligned}$$

$\mathrm{AP} < \mathrm{AQ}$ より，$\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AQ}^2 < 0$ であるから　$-1 < X < 0$

$$-1 < \frac{t^2}{4} + t < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+2)^2 > 0 \ \text{ かつ } \ t(t+4) < 0$$

よって　$\boldsymbol{-4 < t < 0,\ \ t \neq -2}$

2024年5月12日 (日)

2024年 名大文系

n を自然数とする．表と裏が出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを n 回投げ，以下のように得点を決める．

- 最初に数直線上の原点に石を置き，コインを投げて表なら2，裏なら3だけ数直線上を正方向に石を移動させる．コインを k 回投げた後の石の位置を a_k とする．
- $a_n \neq 2n+2$ の場合は得点を0，$a_n = 2n+2$ の場合は得点を $a_1+a_2+\cdots+a_n$ とする．

たとえば，$n=3$ のとき，投げたコインが3回とも表のときは得点は0，投げたコインが3回とも表のときは得点は0，投げたコインが順に裏，裏，表のときは得点は $3+6+8=17$ である．

(1) n 回のうち裏の出る回数を r とするとき，a_n を求めよ．

(2) $n=4$ とする．得点が0でない確率および25である確率をそれぞれ求めよ．

(3) $n=9$ とする．得点が100である確率および奇数である確率をそれぞれ求めよ．

解答　(1) 裏の出る回数が r のとき，表の出る回数は $n-r$ であるから

$$a_n = 3r + 2(n-r) = \boldsymbol{2n + r}$$

(2) $a_0 = 0,\ a_k - a_{k-1} = 2 + \varepsilon_k$ (ε_kは 0 または 1) とおくと $(k = 1, 2, \cdots, n)$

$$\sum_{k=1}^{j}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{j}(2 + \varepsilon_k) \quad \text{ゆえに} \quad a_j = 2j + \sum_{k=1}^{j}\varepsilon_k \qquad \text{(A)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_j &= 2\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\varepsilon_k \\ &= n(n+1) + \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)\varepsilon_j \end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

$n = 4$ を (A) に代入すると，$a_4 = 8 + \sum_{k=1}^{4}\varepsilon_k$

$n = 4$ のとき　得点が 0 でないのは，$a_4 = 2{\cdot}4 + 2 = 10$ であるから

$$8 + \sum_{k=1}^{4}\varepsilon_k = 10 \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{4}\varepsilon_k = 2 \quad \cdots ①$$

上の第 2 式から，$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4)$ の組の総数は　${}_4\mathrm{C}_2$　(通り)

よって，得点が 0 でない確率は　　${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$

$\sum_{j=1}^{4} a_j = 25$ のとき　　$4{\cdot}5 + 4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 25$

したがって　　$4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 5 \quad \cdots ②$

①，② から　　$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4) = (1,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1,\ 0)$

よって，求める確率は　　$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$

(3) 得点が 0 でないとき，(A) から

$$2n+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k = 2n+2 \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k = 2 \qquad (*)$$

このときの得点は，(B) である．これに $n=9$，$\displaystyle\sum_{j=1}^{9} a_j = 100$ を適用して

$$9\varepsilon_1+8\varepsilon_2+7\varepsilon_3+6\varepsilon_4+5\varepsilon_5+4\varepsilon_6+3\varepsilon_7+2\varepsilon_8+\varepsilon_9 = 10 \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ を満たす $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_9)$ を同時に満たすのは次の 4 組.

$$\varepsilon_1=\varepsilon_9=1,\ a_j=0\ (j\neq 1,9)$$
$$\varepsilon_2=\varepsilon_8=1,\ a_j=0\ (j\neq 2,8)$$
$$\varepsilon_3=\varepsilon_7=1,\ a_j=0\ (j\neq 3,7)$$
$$\varepsilon_4=\varepsilon_6=1,\ a_j=0\ (j\neq 4,6)$$

よって，得点が 100 である確率は $\quad 4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \boldsymbol{\dfrac{1}{128}}$

また，(B) は法 2 について

$$n(n+1)+\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)\varepsilon_j \equiv \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_5+\varepsilon_7+\varepsilon_9 \pmod 2$$

これが奇数であるとき，$\varepsilon_1,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_5,\ \varepsilon_7,\ \varepsilon_9$ の 1 だけが 1 で他が 0，同時に $\varepsilon_2,\ \varepsilon_4,\ \varepsilon_6,\ \varepsilon_8$ の 1 だけが 1 で他が 0 である確率であるから

$$5\times 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \boldsymbol{\frac{5}{128}}$$

2024年5月13日(月)

2024年 阪大理系

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos\frac{x}{3} \quad (x \geqq 0)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は，ただ1つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) における実数解を a_n とおくとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．

解答　(1)　$f_n(x) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{nx} + \cos\dfrac{x}{3}$ を微分すると $(x \geqq 0)$

$$f_n'(x) = -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin x$$

$x \geqq 0$ のとき，$-\dfrac{n}{2}e^{nx} \leqq -\dfrac{n}{2}$，$-\dfrac{1}{3}\sin x \leqq \dfrac{1}{3}$ であるから

$$f_n'(x) \leqq -\frac{n}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(n - \frac{2}{3}\right) < 0$$

したがって，$f_n(x)$ は単調減少.

また，$f_n(0) = \dfrac{3}{2} > 0$，$f_n\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{\frac{3n}{2}\pi} < 0$ であるから，方程式

$$f_n(x) = 0$$

は，ただ 1 つの実数解 $x \in \left(0,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$ をもつ.

(2)　$f_n(a_n) = 0$ より　$1 - \dfrac{1}{2}e^{na_n} + \cos\dfrac{a_n}{3} = 0$

$$e^{na_n} = 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) \quad \text{ゆえに} \quad na_n = \log 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) \qquad (*)$$

$a_n \in \left(0,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$ であるから，$\log 2 < \log 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) < \log 4$ に注意して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right) = \mathbf{0}$$

これを $(*)$ に代入して　$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \mathbf{\log 4}$

2024年5月14日 (火)

2024年 阪大理系

α，β を複素数とし，複素数 z に対して

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

とおく．α，β は

$$|f(1) - 3| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(i) - 1| \leqq 3$$

を満たしながら動く．ただし，i は虚数単位である．

(1) $f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

(2) $f(1+i) = 0$ であるとき，α，β の値を求めよ．

解答　(1)　　$|f(1)-3| \leqq 1$　かつ　$|f(i)-1| \leqq 3$

上の 2 式に $f(z)=z^2+\alpha z+\beta$ をそれぞれ代入して整理すると

$$|\alpha+\beta-2| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad |\alpha i+\beta-2| \leqq 3$$

$w_1=\alpha+\beta-2$，$w_2=\alpha i+\beta-2$ とおくと　$|w_1| \leqq 1,\ |w_2| \leqq 3$

$\alpha,\ \beta$ を $w_1,\ w_2$ で表すと

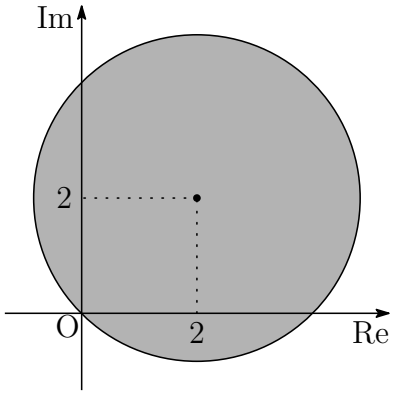
$$\alpha=\frac{1}{2}(1+i)(w_1-w_2), \quad \beta=\frac{1}{2}(1-i)w_1+\frac{1}{2}(1+i)w_2+2 \qquad (*)$$

$f(1+i)=(1+i)^2+\alpha(1+i)+\beta=(1+i)\alpha+\beta+2i$ に $(*)$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(1+i) &= \frac{1}{2}(1+i)^2(w_1-w_2)+\frac{1}{2}(1-i)w_1+\frac{1}{2}(1+i)w_2+2+2i \\ &= \frac{1}{2}(1+i)w_1+\frac{1}{2}(1-i)w_2+2+2i \end{aligned} \qquad (**)$$

$$\left|\frac{1}{2}(1+i)w_1\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|w_1| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left|\frac{1}{2}(1-i)w_2\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|w_2| \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

したがって，$f(1+i)$ は中心 $2+i$，半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ の円の内部で境界線を含む.



(2)　$(**)$ より

$$\frac{1}{2}(1+i)w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right), \quad \frac{1}{2}(1-i)w_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

ゆえに　　$w_1=-1,\ w_2=-3i$

これを $(*)$ に代入して　　$\boldsymbol{\alpha=-2+i,\ \beta=3-i}$

2024年5月15日 (水)

2024年 阪大理系

空間内の2直線ℓ，mはねじれの位置にあるとする．ℓとmの両方に直交する直線がただ1つ存在することを示せ．

解答 2 直線 $\ell,\ m$ の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\ \vec{b}$ とする．ℓ と m は平行ではないから，$\vec{a},\ \vec{b}$ の両方に垂直なベクトルを $\vec{n}$ とし，2 直線 $\ell,\ m$ 上の定点をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{n})$，$\mathrm{B}(\beta_1\vec{a}+\beta_2\vec{b}+\beta_3\vec{n})$ とする．

ℓ を含み，$\vec{n}$ に平行な平面 S のベクトル方程式は，媒介変数 $s_1,\ s_2$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s_1\vec{a}+s_2\vec{n}&=\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{n}+s_1\vec{a}+s_2\vec{n}\\&=(s_1+\alpha_1)\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+(s_2+\alpha_3)\vec{n}\end{aligned}$$

m を含み，$\vec{n}$ に平行な平面 T のベクトル方程式は，媒介変数 $t_1,\ t_2$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t_1\vec{b}+t_2\vec{n}&=\beta_1\vec{a}+\beta_2\vec{b}+\beta_3\vec{n}+t_1\vec{b}+t_2\vec{n}\\&=\beta_1\vec{a}+(t_1+\beta_2)\vec{b}+(t_2+\beta_3)\vec{n}\end{aligned}$$

S と T の共通部分は

$$(s_1+\alpha_1)\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+(s_2+\alpha_3)\vec{n}=\beta_1\vec{a}+(t_1+\beta_2)\vec{b}+(t_2+\beta_3)\vec{n}\qquad(*)$$

これを整理すると

$$(s_1+\alpha_1-\beta_1)\vec{a}+(-t_1+\alpha_2-\beta_2)\vec{b}+(s_2-t_2+\alpha_3-\beta_3)\vec{n}=\vec{0}$$

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{n}$ は，1 次独立であるから

$$s_1+\alpha_1-\beta_1=0,\quad -t_1+\alpha_2-\beta_2=0,\quad s_2-t_2+\alpha_3-\beta_3=0$$

上の第 1 式，第 2 式から

$$s_1=\beta_1-\alpha_1,\quad t_1=\alpha_2-\beta_2$$

このとき，2 直線 $\ell,\ m$ 上の 2 定点 P，Q をそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s_1\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t_1\vec{b}$$

とおくと，2 平面 $S,\ T$ の共通部分は，$(*)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s_2\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t_2\vec{n}\quad\text{ゆえに}\quad\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(s_2-t_2)\vec{n}$$

よって，ℓ と m の両方に直交する直線 PQ がただ 1 つ存在する．

2024年5月16日 (木)

2024年 阪大理系

$a > 1$ とする．xy 平面において，点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径1の円を C とする．

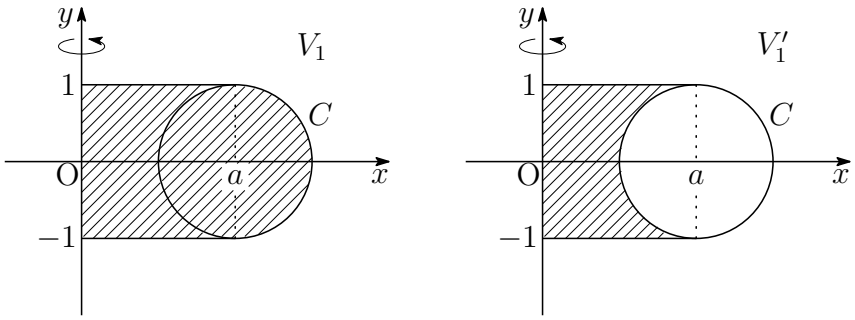
(1) 円 C の $x \geqq 0$ の部分と y 軸および2直線 $y = 1$，$y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_2 とする．(1) における V_1 について，$V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ．

解答　(1) 円 $C : (x-a)^2+y^2=1$ より　$x^2=-(y+1)(y-1)-a^2+2ax$

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi}&=-\int_{-1}^{1}(y+1)(y-1)\,dy-a^2\int_{-1}^{1}dy+2a\int_{-1}^{1}x\,dy\\&=\frac{1}{6}\cdot 2^3-2a^2+2a\left(2a+\frac{\pi}{2}\right)\qquad(*)\\&=\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_1=\pi\left(\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\right)}$



(2) 右上の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1' とすると，$(*)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1'}{\pi}&=\frac{1}{6}\cdot 2^3-2a^2+2a\left(2a-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{4}{3}+2a^2-\pi a\end{aligned}$$

$V_2=V_1-V_1'$ であるから　　$V_2=2\pi^2 a$

上式および (1) の結果を $V_1=2V_2$ に代入すると

$$\pi\left(\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\right)=2\times 2\pi^2 a$$

整理すると　　$2a^2-3\pi a+\dfrac{4}{3}=0\quad\cdots①$

$f(a)=2a^2-3\pi a+\dfrac{4}{3}$ とすると　$f(1)=\dfrac{10}{3}-3\pi<0$

2 次方程式 $f(a)=0$ は 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつことに注意して，① を解くと

$$\boldsymbol{a=\frac{9\pi+\sqrt{81\pi^2-96}}{12}}$$

2024年5月17日 (金)

2024年 阪大理系

自然数 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ のうち，n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする．

(1) 自然数 $a,\ b,\ c$ および相異なる素数 $p,\ q,\ r$ に対して，等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(n)$ が n が約数となる5以上100以下の自然数 n をすべて求めよ．

解答　(1) $n=p^aq^br^c$ とする．

n 以下の自然数で p，q，r で割り切れる数の個数は，それぞれ

$$\frac{n}{p},\quad \frac{n}{q},\quad \frac{n}{r}$$

n 以下の自然数で pq，qr，rp で割り切れる数の個数は，それぞれ

$$\frac{n}{pq},\quad \frac{n}{qr},\quad \frac{n}{rp}$$

n 以下の自然数で pqr で割り切れる数の個数は

$$\frac{n}{pqr}$$

したがって[21]

$$\begin{aligned} f(n) &= n-\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}+\frac{n}{r}\right)+\left(\frac{n}{pq}+\frac{n}{qr}+\frac{n}{rp}\right)-\frac{n}{pqr} \\ &= n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right) \qquad (*) \\ &= p^aq^br^c\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right) \\ &= p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1) \end{aligned}$$

(2) 次の (i)〜(iv) を考える．

(i) $n=p^a$ のとき (p は素数，a は自然数)

$$f(n)=n-\frac{n}{p}=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\quad \text{ゆえに}\quad \frac{n}{f(n)}=\frac{p}{p-1}$$

上の第 2 式は整数で，p と $p-1$ はそれぞれ互いに素であるから

$$p-1=1\quad \text{ゆえに}\quad p=2$$

(ii) $n=p^aq^b$ のとき (p, q は素数 ($p<q$)，a, b は自然数)

$$f(n)=n-\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)+\frac{n}{pq}=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

したがって　$\dfrac{n}{f(n)}=\dfrac{pq}{(p-1)(q-1)}$

上式は整数で，p と $p-1$，q と $q-1$ はそれぞれ互いに素であるから

$$p-1=1,\quad q-1=p\quad \text{ゆえに}\quad p=2,\quad q=3$$

[21] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6(定理 3) を参照)

(iii) $n = p^a q^b q^c$ のとき ($p,\ q,\ r$ は素数 $(p < q < r)$，$a,\ b,\ c$ は自然数)，$(*)$ より

$$\frac{n}{f(n)} = \frac{pqr}{(p-1)(q-1)(r-1)}$$

上式は整数で，p と $p-1$，q と $q-1$，r と $r-1$ はそれぞれ互いに素，$q-1,\ r-1$ はともに偶数であるから，上式は条件を満たさない．

(iv) n が 4 つ以上の素因数をもつとき，$n \geqq 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7 = 210$ となり，n が 100 以下の自然数であることに反する．

(i)〜(iv) より，求める 5 以上 100 以下の自然数 n は，整数 $a,\ b$ を用いて

$$n = 2^a 3^b \qquad (a \geqq 1,\ \ b \geqq 0)$$

で与えられる．これを満たす整数 $(a,\ b)$ の組は，次の 13 組

$$\begin{aligned}(a,\ b) =& (3,\ 0),\ (4,\ 0),\ (5,\ 0),\ (6,\ 0),\\ & (1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1),(5,\ 1),\\ & (1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (3,\ 2),\\ & (1,\ 3)\end{aligned}$$

よって，求める n は

$$\boldsymbol{n = 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 32,\ 36,\ 48,\ 54,\ 64,\ 72,\ 96}$$

2024年5月18日 (土)

2024年 阪大文系

曲線 $y = |x^2 - 1|$ を C，直線 $y = 2a(x + 1)$ を ℓ とする．ただし，a は $0 < a < 1$ を満たす実数とする．

(1) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ．

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた2つの部分の面積が等しくなる a の値を求めよ．

解答　(1) 曲線 C は　$y=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x \leqq -1,\ 1 \leqq x) \\ -x^2+1 & (-1 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$

C と $\ell : y=2a(x+1)$ の共有点は，次の (i)，(ii) の場合に分けて求める．

(i) 曲線 $y=x^2-1$ と直線 ℓ の共有点の共有点の x 座標は

$$x^2-1=2a(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-1-2a)=0$$

$0<a<1$ より，$1<1+2a$ に注意して　$x=-1,\ 1+2a$

(ii) 曲線 $y=-x^2+1$ と直線 ℓ の共有点の共有点の x 座標は

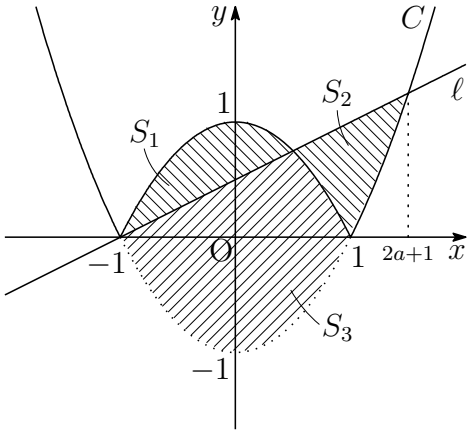
$$-x^2+1=2a(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-1+2a)=0$$

$0<a<1$ より，$-1<1-2a<1$ に注意して　$x=-1,\ 1-2a$

求める共有点の座標は (i)，(ii) の結果を ℓ に代入して

$$\boldsymbol{(-1,\ 0),\ (1+2a,\ 4a(1+a)),\ (1-2a,\ 4a(1-a))}$$

(2) 下の図のように，それぞれの斜線部分の面積を $S_1,\ S_2,\ S_3$ とする．



$S_1=S_2$ であるから，$S_1+S_3=S_2+S_3$ を利用する．

$$S_1+S_3=2\times\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{8}{3},$$
$$S_2+S_3=\frac{1}{6}\{(2a+1)-(-1)\}^3=\frac{4}{3}(a+1)^3$$

したがって　$\dfrac{4}{3}(a+1)^3=\dfrac{8}{3}$　これを解いて　$\boldsymbol{a=\sqrt[3]{2}-1}$

2024年5月19日(日)

2024年 阪大文系

素数を小さい順に並べて得られる数列を

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

とする.

(1) p_{15} の値を求めよ.

(2) $n \geqq 12$ のとき，不等式 $p_n > 3n$ が成り立つことを示せ.

解答　(1) k を 0 以上整数とすると，整数

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5$$

について，素数を調べると

$k=0$ のとき，素数は $6k+2=2,\ 6k+3=3,\ 6k+5=5$

$k \geqq 1$ のとき，素数は $6k+1,\ 6k+5$ のどちらかである．

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
$6k+1$	7	13	19		31	37	43			61	67	$\cdots$
$6k+5$	11	17	23	29		41	47	53	59		71	$\cdots$

したがって

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_k	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47

よって　　$\boldsymbol{p_{15}=47}$

(2) (1) の表から，$p_{12}=37>3\cdot12$，$p_{13}=41>3\cdot13$

$a_{2k}=6k+1$，$a_{2k+1}=6k+5$ とすると $(k \geqq 6)$

$$a_{2k}=6k+1>3\cdot2k,\quad a_{2k+1}=6k+5>3(2k+1)$$

したがって　　$a_n>3n$　　$(n \geqq 12)$

$n \geqq 12$ のとき，$p_n \geqq a_n$ であるから　　$p_n>3n$

2024年5月20日(月)

2024年 神戸大理系

c を正の実数とする．各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．a_1 は関数

$$y = x + \sqrt{c - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \sqrt{c}\,)$$

が最大値をとるときの x の値とする．a_{n+1} は関数

$$y = x + \sqrt{a_n - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \sqrt{a_n}\,)$$

が最大値をとるときの x の値とする．数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_2 a_n$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) a_1 を c を用いて表せ．

(2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を n と c を用いて表せ．

解答　(1) $\vec{u}=(1,\ 1)$，$\vec{v}=(x,\ \sqrt{c-x^2})$ とすると，$\vec{u}\cdot\vec{v}\leqq|\vec{u}||\vec{v}|$ であるから

$$x+\sqrt{c-x^2}\leqq\sqrt{2}\sqrt{c}$$

上式において，等号が成立するのは $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ向きのときであるから

$$x=\sqrt{c-x^2}\qquad\text{これを解いて}\quad a_1=x=\sqrt{\boldsymbol{\frac{c}{2}}}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n}{2}}\quad\text{ゆえに}\quad\log a_{n+1}=\frac{1}{2}\log a_n-\frac{1}{2}$$

$b_n=\log a_n$ より　　$\boldsymbol{b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}}$

(3) $b_1=\log_2 a_1=\log_2\sqrt{\frac{c}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 c-\frac{1}{2}$

(2) の結果から　　$b_{n+1}+1=\frac{1}{2}(b_n+1)$

$\{b_n+1\}$ は初項 $\frac{1}{2}(\log_2 c+1)$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n+1=\frac{1}{2}(\log_2 c+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって　　$\boldsymbol{b_n=(\log_2 c+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

2024年5月21日 (火)

2024年 神戸大理系

a，b，c は実数で，$a \neq 0$ とする．放物線 C と直線 ℓ_1, ℓ_2 をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c$$
$$\ell_1 : y = -3x + 3$$
$$\ell_2 : y = x + 3$$

で定める．ℓ_1，ℓ_2 がともに C に接するとき，以下の問いに答えよ．

(1) b を求めよ．また c を a を用いて表せ．

(2) C が x 軸と異なる2点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) C と ℓ_1 の接点を P，C と ℓ_2 の接点を Q，放物線 C の頂点を R とする．a が (2) の条件を満たしながら動くとき，△PQR の重心 G の軌跡を求めよ．

解答　(1) ℓ_1，ℓ_2 がともに C に接するとき

$$C' : y = ax^2 + (b+1)x + c$$
$$\ell_1' : y = -2x + 3$$
$$\ell_2' : y = 2x + 3$$

とすると，ℓ_1'，ℓ_2' はともに C' に接する．ℓ_1'，ℓ_2' は y 軸対称より，C' も y 軸対称であるから

$$b + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = -1}$$

C' と ℓ_1' から y を消去して，整理すると

$$ax^2 + 2x + c - 3 = 0 \qquad (*)$$

上の 2 次方程式は重解をもつから，係数について

$$D/4 = 1^2 - a(c-3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c = \frac{1}{a} + 3}$$

(2) (1) の結果から C の方程式は　$y = ax^2 - x + \dfrac{1}{a} + 3$

C は x 軸と 2 点で交わるから，係数について

$$D = (-1)^2 - 4a\left(\frac{1}{a} + 3\right) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 + 4a < 0$$

上の第 2 式の両辺に $\dfrac{1}{a^2}$ を掛けると

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + 4\right) < 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-4 < \frac{1}{a} < 0}$$

(3) C' と ℓ_1' の接点を P′，C' と ℓ_2' の接点を Q′ とする．

P′ の x 座標は，$(*)$ から　$x = -\dfrac{2}{2a} = -\dfrac{1}{a}$

Q′ は P′ と y 軸対称であるから，その x 座標は　$x = \dfrac{1}{a}$

P と P′，Q と Q′ の x 座標は一致するから

$$C : y = ax^2 - x + \frac{1}{a} + 3 = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{3}{4a} + 3$$

これより，3 点 P，Q，R の座標を得る．

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{a},\ \frac{3}{a} + 3\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{a} + 3\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{1}{2a},\ \frac{3}{4a} + 3\right)$$

したがって，△PQR の重心 G の座標は　$\left(\dfrac{1}{6a},\ \dfrac{19}{12a} + 3\right)$

(2) の結果から　$-\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{6a} < 0$

$$\frac{19}{12a} + 3 = \frac{19}{2}\cdot\frac{1}{6a} + 3$$

よって，点 G の軌跡は　**直線 $\boldsymbol{y = \dfrac{19}{2}x + 3}$ $\left(\boldsymbol{-\dfrac{2}{3} < x < 0}\right)$**

2024年5月22日 (水)

2024年 神戸大理系

n を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1) 1個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n を小さい順に3つ求めよ．

(2) 1個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$ であるような n を小さい順に3つ求めよ．

(3) 1個のサイコロを3回投げて出た目の積が160の約数となる確率を求めよ．

解答　(1) サイコロの目 1, 2, 3, 4, 5, 6 の最小公倍数は　60
よって，求める 3 つの数は　**60，120，180**

(2) n の約数となるサイコロの目の集合を A とし，A の大きさ (要素の個数) を $|A|$ とする．$1 \in A$，$2 \notin A \Rightarrow 6 \notin A$，$3 \notin A \Rightarrow 6 \notin A$，$\{2,\ 3\} \subset A \Rightarrow 6 \in A$ に注意すると，$|A| = 5$ となる A は次の 2 通り．

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\} \quad \text{または} \quad A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$$

これを満たす n を小さい順に 3 つ求めると　**12，24，30**

(3) $160 = 2^5 \cdot 5$ より　$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$
このとき，5 の目が出るのは 1 回まで，3 回とも 4 の目は出ない．

- 5 の目が出ないときの確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{26}{216}$$

- 5 の目が 1 回出るときの確率は

$${}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{27}{216}$$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{26}{216} + \frac{27}{216} = \frac{\mathbf{53}}{\mathbf{216}}$$

2024年5月23日 (木)

2024年 神戸大理系

1辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形ABCDを底面にもち，高さが1である直方体ABCD-EFGHを，頂点の座標がそれぞれ

$$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{D}(0,-1,\ 0)$$
$$\mathrm{E}(1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{F}(0,\ 1,\ 1),\ \mathrm{G}(-1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{H}(0,-1,\ 1)$$

になるように xyz 空間におく．以下の問に答えよ．

(1) 直方体ABCD-EFGHを直線AEのまわりに1回転してできる回転体を X_1 とし，また直線ABのまわりに1回転してできる回転体を X_2 とする．X_1 の体積 V_1 と X_2 の体積 V_2 を求めよ．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ とする．平面 $x = t$ と線分EFの共有点の座標を求めよ．

(3) 直方体ABCD-EFGHを x 軸のまわりに1回転してできる回転体を X_3 とする．X_3 の体積 V_3 を求めよ．

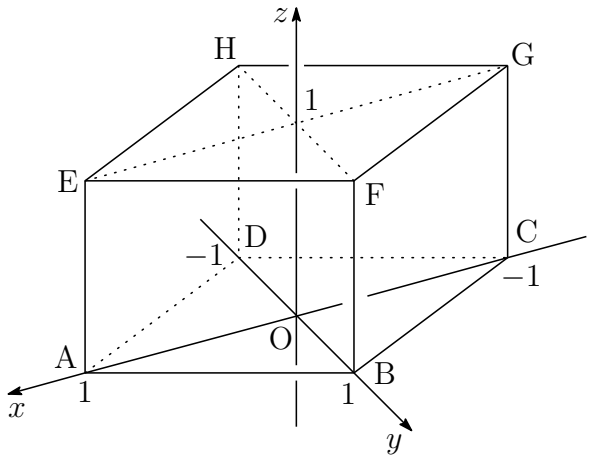
解答　(1) 直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体 X_1 の体積 V_1 は

$$V_1 = \pi \mathrm{AC}^2 \cdot \mathrm{AE} = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = \boldsymbol{4\pi}$$

A$(1,\ 0,\ 0)$，B $(0,\ 1,\ 0)$，H$(0, -1,\ 1)$ より　$\mathrm{AB} = \sqrt{2}$，$\mathrm{AH}^2 = 3$

直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体 X_2 の体積 V_2 は

$$V_2 = \pi \mathrm{AH}^2 \cdot \mathrm{AB} = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = \boldsymbol{3\sqrt{2}\pi}$$



(2) 直線 EF の方程式は　$x + y = 1,\ z = 1$

これと平面 $x = t$ との共有点の座標は　$(t,\ 1 - t,\ 1)$

$0 \leqq t \leqq 1,\ 0 \leqq 1 - t \leqq 1$ であるから，この共有点は線分 EF 上にある．

よって，平面 $x = t$ と線分 EF との共有点の座標は　$\boldsymbol{(t,\ 1 - t,\ 1)}$

(3) x 軸上の点 $(t,\ 0,\ 0)$ と (2) の共有点 $(t,\ 1 - t,\ 1)$ との距離を d とすると

$$d^2 = (t-1)^2 + 1$$

したがって，求める回転体 X_3 の体積 V_3 は

$$\frac{V_3}{2\pi} = \int_0^1 d^2\, dt = \int_0^1 \{(t-1)^2 + 1\}\, dt$$
$$= \left[\frac{1}{3}(t-1)^3 + t \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{V_3 = \dfrac{8}{3}\pi}$

2024年5月24日 (金)

2024年 神戸大理系

0以上の実数xに対して，

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\frac{1}{1+u^2}\,du$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$を満たす実数$\alpha$に対して，$f(\tan\alpha)$を求めよ．

(2) xy平面上で，次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

$$0\leqq x\leqq 1,\quad 0\leqq y\leqq 1,\quad f(x)+f(y)\leqq f(1)$$

またその領域の面積を求めよ．

解答　(1)　$u=\tan\theta$ とすると　$\dfrac{du}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

u	$0 \longrightarrow \tan\alpha$
θ	$0 \longrightarrow \quad \alpha$

$$f(\tan\alpha)=\frac{1}{2}\int_{-\tan\alpha}^{\tan\alpha}\frac{1}{1+u^2}\,du=\int_0^{\tan\alpha}\frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\alpha}d\theta=\boldsymbol{\alpha}$$

(2)　$x=\tan\theta_1$，$y=\tan\theta_2$ とすると，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$　$\cdots$①

$$0\leqq\theta_1\leqq\frac{\pi}{4},\quad 0\leqq\theta_2\leqq\frac{\pi}{4}$$

次に，$f(x)+f(y)\leqq f(1)$ を (1) の結論に適用すると

$$\theta_1+\theta_2\leqq\frac{\pi}{4}\qquad\text{(A)}$$

$x=y=1$，すなわち，$\theta_1=\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$ とすると，(A) に反するから

$$0\leqq xy<1\quad\cdots②$$

(A) から　　$\tan(\theta_1+\theta_2)\leqq\tan\dfrac{\pi}{4}$

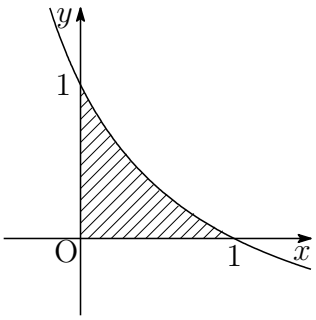
$$\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}\leqq 1\quad\text{ゆえに}\quad\frac{x+y}{1-xy}\leqq 1$$

①，② に注意して，上の第 2 式を y について解くと

$$0\leqq y\leqq\frac{-x+1}{x+1}=\frac{2}{x+1}-1\qquad(0\leqq x\leqq 1)$$

求める面積は，下の図の斜線部分であるから

$$\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-1\right)dx=\Big[\,2\log(x+1)-x\,\Big]_0^1=\boldsymbol{2\log 2-1}$$



2024年5月25日 (土)

2024年 神戸大文系

各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．a_1 は関数

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 10x \qquad (x \geqq 0)$$

が最小値をとるときの x の値とする．a_{n+1} は関数

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 10a_n x \qquad (x \geqq 0)$$

が最小値をとるときの x の値とする．数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_{10} a_n$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) a_1 と b_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(4) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $\dfrac{a_1 a_2 a_3}{100}$ の値を求めよ．

解答　(1) $y=\dfrac{1}{3}x^3-10x$ を微分すると　$y'=x^2-10$

$x \geqq 0$ における増減は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{10}$	$\cdots$
y'		$\cdots$	0	$\cdots$
y	0	↘	最小	↗

よって　　$a_1=\boldsymbol{\sqrt{10}}$,　　$b_1=\log_{10} a_1=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) $y=\dfrac{1}{3}x^3-10a_nx$ を微分すると　$y'=x^2-10a_n$

$x \geqq 0$ における増減は，次のようになる $(a_n>0)$.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{10a_n}$	$\cdots$
y'		$\cdots$	0	$\cdots$
y	0	↘	最小	↗

よって　　$\boldsymbol{a_{n+1}=\sqrt{10a_n}}$

(3) (2) の結果から

$$\log_{10} a_{n+1}=\log_{10}\sqrt{10a_n}=\frac{1}{2}\log_{10} a_n+\frac{1}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}}$

(4) (3) の結果から　$b_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(b_n-1)$

したがって，$\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=-\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ である．

$$b_n-1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{b_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(5) (4) の結果から　$b_1+b_2+b_2=3-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{17}{8}$

$$\log_{10} a_1+\log_{10} a_2+\log_{10} a_3=\frac{17}{8}\quad \text{ゆえに}\quad a_1a_2a_3=10^{\frac{17}{8}}$$

よって　　$\dfrac{a_1a_2a_3}{100}=\dfrac{10^{\frac{17}{8}}}{10^2}=\boldsymbol{10^{\frac{1}{8}}}$

2024年5月26日 (日)

2024年 東北大理系

a を正の実数とし，$f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする．O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = f(x)$ の頂点を A とする．直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする．ただし，$q > 0$ とする．

(1) p，q の値を a を用いて表せ．また，$p > q$ であることを示せ．

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく．S を a を用いて表せ．

(3) (2) の S に対し，$S = \dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ．

解答　(1)　$C : y = (x)$ について，$f(x) = (x-a)^2 + 3a^2$ より，頂点 A は　$(a,\ 3a^2)$

直線 OA の傾きは $3a$ であるから，その方程式は　$y = 3ax$

これと $C : y = x^2 - 2ax + 4a^2$ から y を消去すると

$$x^2 - 2ax + 4a^2 = 3ax \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)(x-4a) = 0$$

点 P は点 A と異なるから，点 P の x 座標 p は　$\boldsymbol{p = 4a}$

$f'(x) = 2x - 2a$ より C 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線は

$$y = (2q - 2a)(x - q) + q^2 - 2aq + 4a^2$$

すなわち　　$y = 2(q-a)x - q^2 + 4a^2$

これが原点を通るから $(q > 0,\ a > 0)$

$$-q^2 + 4a^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q = 2a}$$

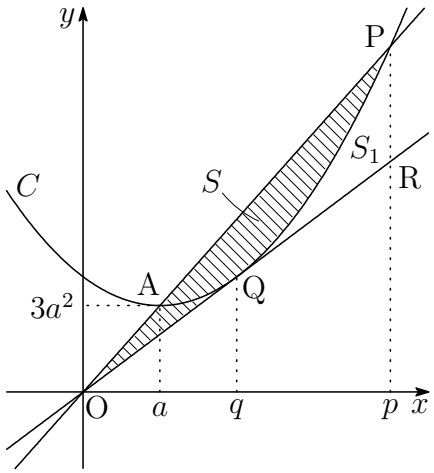
$p = 4a,\ q = 2a$ であるから $(a > 0)$　　$p > q$

(2)　曲線 $C : y = f(x)$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線 $y = 2ax$ および直線 $x = p$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする．このとき [22]

$$f(x) = f(q) + f'(q)(x-q) + (x-q)^2$$

であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_q^p \{f(x) - f(q) - f'(q)(x-q)\}\,dx \\ &= \int_q^p (x-q)^2\,dx = \frac{1}{3}(p-q)^3 \\ &= \frac{1}{3}(4a-2a)^3 = \frac{8}{3}a^3 \end{aligned}$$



接線 OQ と直線 $x = p$ の交点を R とすると

$\mathrm{P}(4a,\ 12a^2)$，$\mathrm{R}(4a,\ 8a^2)$ より

$$\begin{aligned} S &= \triangle \mathrm{OPR} - S_1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4a(12a^2 - 8a^2) - \frac{8}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{16}{3}a^3} \end{aligned}$$

(3)　$S = \dfrac{2}{3}$ を (2) の結果に代入すると　$\dfrac{16}{3}a^3 = \dfrac{2}{3}$　これを解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

[22] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

別解 直線 $x=2a$ と直線 OP の交点を Q′ とすると　$\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$，$\mathrm{Q}'(2a,\ 6a^2)$

$$\triangle \mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}p\cdot \mathrm{QQ}'=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 2a^2=4a^3$$

C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は，1/6 公式により

$$\frac{1}{6}(p-q)^3=\frac{1}{6}(4a-2a)^3=\frac{4}{3}a^3$$

よって，求める面積は　$S=4a^2+\dfrac{4}{3}a^3=\boldsymbol{\dfrac{16}{3}a^3}$

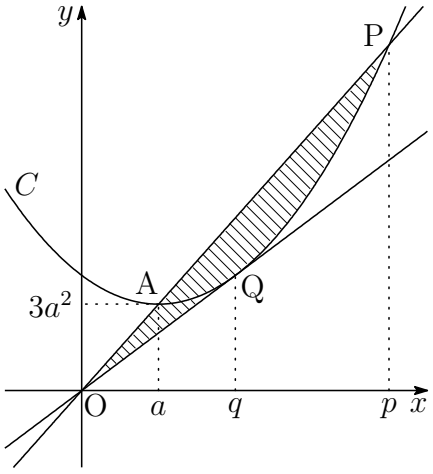
解説　　$xy'-y=x(2x-2a)-(x^2-2ax+4a^2)$

$$=(x-2a)^2+4a(x-2a)$$

求める面積 S は (ガウス・グリーンの定理の系)

$$S=\frac{1}{2}\int_{2a}^{4a}(xy'-y)\,dx=\frac{1}{2}\int_{2a}^{4a}\{(x-2a)^2+4a(x-2a)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ \frac{1}{3}(x-2a)^3+2a(x-2a)^2\ \right]_{2a}^{4a}=\boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}$$



補足 解説の公式は，ガウス・グリーンの定理

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}\,dt$$

の変数 t を x に変更したものである．このとき，積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる．例えば，C と線分 OQ，OA で囲まれた部分の面積 S' を求める場合は次のようになる．

$$S'=\frac{1}{2}\int_{2a}^{a}(xy'-y)\,dx=\frac{1}{2}\int_{2a}^{a}\{(x-2a)^2+4a(x-2a)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ \frac{1}{3}(x-2a)^3+2a(x-2a)^2\ \right]_{2a}^{a}=\frac{5}{6}a^3$$

2024年5月27日(月)

2024年 東北大理系

以下の問いに答えよ.

(1) t を $t>1$ を満たす実数とする．正の実数 x が2つの条件

(a) $x>\dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$

(b) $x \geqq 2\log_t x$

をともに満たすとする．このとき，不等式

$$x+1>2\log_t(x+1)$$

を示せ.

(2) $n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ.

解答　(1) $x \geqq 2\log_t x$ より　$x+1 \geqq 2\log_t x + 1 = 2\log_t \sqrt{t}x$　$\cdots$①

$x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$ より $(t>1)$，$(\sqrt{t}-1)x > 1$ であるから

$$\sqrt{t}x - (x+1) = (\sqrt{t}-1)x - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{t}x > x+1 \quad \cdots②$$

①，② から　　$x+1 > 2\log_t(x+1)$

(2) (1) の結論に $t=2$ を代入すると，$x > \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ のとき

$$x \geqq 2\log_2 x \quad \Longrightarrow \quad x+1 > 2\log_2(x+1)$$

これから，$x > \sqrt{2}+1$ のとき　$2^x \geqq x^2$　$\Longrightarrow$　$2^{x+1} > (x+1)^2$　$\cdots(*)$

$(*)$ より，$2^N \geqq N^2$ $(N \geqq 3)$ を満たす自然数 N が存在するならば，$n > N$ であるすべての自然数 n について，次が成立する．

$$2^n > n^2$$

$n \leqq 2\log_2 n$ を変形すると　　$2^n \leqq n^2$　$\cdots(**)$

したがって，$(**)$ を満たす n は $n \leqq N$ に限られる．

$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ について，2^n と n^2 の値を調べると，下の表から　$N = 4$

n	1	2	3	4
2^n	2	4	8	16
n^2	1	4	9	16

よって，$(**)$ を満たす n は　　$\boldsymbol{n = 2,\ 3,\ 4}$

2024年5月28日 (火)

2024年 東北大理系

n を2以上の整数とする．それぞれA，A，Bと書かれた3枚のカードから無作為に1枚抜き出し，カードをもとに戻す試行を考える．この試行を n 回繰り返し，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ，n 文字の文字列を作る．作った文字列内にAAAの並びがある場合は不可とする．また，作った文字列内にBBの並びがある場合も不可とする．これらの場合以外は可とする．たとえば $n=6$ のとき，文字列AAAABAやABBBAAやABBABBやBBBAAAなどは不可で，文字列BABAABやBABABAなどは可である．作った文字列が可でかつ右端の2文字がAAである確率を p_n，作った文字列が可でかつ右端の2文字がBAである確率を q_n，作った文字列が可でかつ右端の文字がBである確率を r_n とそれぞれおく．

(1) $p_2,\ q_2,\ r_2$ をそれぞれ求めよ．また，$p_{n+1},\ q_{n+1},\ r_{n+1}$ を $p_n,\ q_n,\ r_n$ を用いてそれぞれ表せ．

(2) $p_n+2q_n+2r_n$ を n を用いて表せ．

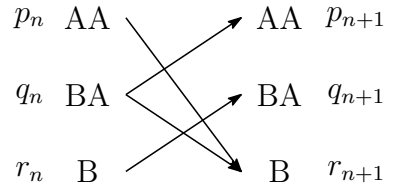
(3) $p_n+iq_n-(1+i)r_n$ を n を用いて表せ．ただし，i は虚数単位である．

(4) $p_n=r_n$ を満たすための，n の必要十分条件を求めよ．

解答　(1) $p_2=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$,　$q_2=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$,　$r_2=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

求める漸化式は，次のようになる．

$$\boldsymbol{p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n}$$
$$\boldsymbol{q_{n+1}=\frac{2}{3}r_n}$$
$$\boldsymbol{r_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n}$$



(2) (1) の結果から

$$p_{n+1}+2q_{n+1}+2r_{n+1}=\frac{2}{3}(p_n+2q_n+2r_n)$$

数列 $\{p_n+2q_n+2r_n\}$ は $p_2+2q_2+2r_2=\dfrac{4}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n+2q_n+2r_n=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\boldsymbol{2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

(3) (1) の結果から

$$p_{n+1}+iq_{n+1}-(1+i)r_{n+1}=-\frac{1}{3}(1+i)\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\}$$

数列 $\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\}$ は $p_2+iq_2-(1+i)r_2=\dfrac{2}{9}$，公比 $-\dfrac{1+i}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n+iq_n-(1+i)r_n=\boldsymbol{\frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}}$$

(4) (3) の結果についてその共役複素数を考えると

$$p_n-iq_n-(1-i)r_n=\frac{2}{9}\left(-\frac{1-i}{3}\right)^{n-2}$$

上式と (3) の結果の辺々を加えると

$$\begin{aligned}2(p_n-r_n)&=\frac{2}{9}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}\right\}\\&=\frac{4}{9}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\cos\frac{n-2}{4}\pi\end{aligned}$$

$p_n=q_n$ のとき，整数 k を用いて　$\dfrac{n-2}{4}\pi=\dfrac{2k-1}{2}\pi$　ゆえに　$n=4k$

よって，求める必要十分条件は　$\boldsymbol{n}$ **は 4 の倍数**

2024年5月29日 (水)

2024年 東北大理系

xyz 空間において，点 $\mathrm{P}_1(3, -1,\ 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $\mathrm{P}_2(5,\ 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える．

(1) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ．

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ．この交わりは円となる．この円を C とし，その中心を P_3 とする．C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ．

(3) (2) の円 C に対し，C を含む平面を H とする．xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ．

(4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ．また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ．

解答　(1) $\mathrm{P}_1(3,-1,\ 1)$, $\mathrm{P}_2(5,\ 0,-1)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=(2,\ 1,-2)$

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\mathbf{3}$$

(2) $d_1=\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$，$d_2=\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ とし，C の半径を r とすると

$$d_1+d_2=3,\quad {d_1}^2+r^2=5,\quad {d_2}^2+r^2=2 \qquad (*)$$

$(*)$ の第 2 式，第 3 式から r^2 を消去し，第 1 式を代入すると

$${d_1}^2-{d_2}^2=(d_1+d_2)(d_1-d_2)=3\quad \text{ゆえに}\quad d_1-d_2=1$$

$d_1,\ d_2$ の連立方程式を解いて　$d_1=2,\ d_2=1$　$(*)$ から　$\boldsymbol{r=1}$

P_3 は線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を $2:1$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=(3,-1,\ 1)+\frac{2}{3}(2,\ 1,-2)=\left(\frac{13}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

よって　　$\mathbf{P_3}\left(\boldsymbol{\frac{13}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}}\right)$

(3) xy 平面，H はそれぞれベクトル $\vec{v}=(0,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=(2,\ 1,-2)$ に垂直であるから，求めるベクトルと平行なベクトルは

$$\vec{v}\times\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=(-1,\ 2,\ 0)$$

$|\vec{v}\times\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}|=\sqrt{5}$ より，求める単位ベクトルは　$\pm\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\boldsymbol{(-1,\ 2,\ 0)}$

(4) (3) で求めた単位ベクトルの 1 つを $\vec{e_1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ 2,\ 0)$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$ と (3) で求めたベクトルの両方に垂直なベクトルは

$$(2,\ 1,-2)\times(-1,\ 2,\ 0)=(4,\ 2,\ 5)$$

これと平行な単位ベクトルの 1 つを $\vec{e_2}=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}(4,\ 2,\ 5)$ とする．

C の半径は 1 であるから，C 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ は，媒介変数 θ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}+(\cos\theta)\vec{e_1}+(\sin\theta)\vec{e_2} \qquad (**)$$

P_3 の z 座標が負であるから，$\sin\theta=-1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{d=\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}}$

$\sin\theta=-1,\ \cos\theta=0$ により　$\mathbf{Q}\left(\dfrac{65-4\sqrt{5}}{15},-\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15},-\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$

解説 $\mathrm{P}_1(3, -1,\ 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 の方程式は

$$S_1 : (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

$\mathrm{P}_2(5,\ 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 の方程式は

$$S_2 : (x-5)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$$

S_1 および S_2 の方程式の辺々の差をとり整理すると，C を含む平面

$$H : 2x + y - 2z - 9 = 0$$

を得る．このとき，H の法ベクトル $\vec{n} = (2,\ 1, -2)$ は $\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$ と平行である．
また，直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ をとると，媒介変数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}} = t\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \quad \text{ゆえに} \quad (x-3,\ y+1,\ z-1) = t(2,\ 1, -2)$$

これから t を介して，次の直線 ℓ の方程式を得る．

$$\ell : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2} = t$$

ℓ と H の交点 P_3 は

$$x = 2t + 3, \quad y = t - 1, \quad z = -2t + 1 \tag{A}$$

を H に代入すると

$$2(2t+3) + t - 1 - 2(-2t+1) - 9 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3}$$

これを (A) に代入すると，$\mathrm{P}_3\left(\dfrac{13}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ を得る．
また，点 $\mathrm{P}_1(3, -1,\ 1)$ と平面 H の距離は，点と平面の距離の公式により

$$\frac{|2\cdot 3 + (-1) - 2\cdot 1 - 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2$$

直線の方程式

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{v} = (a,\ b,\ c)$ の直線 ℓ の方程式は

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = t \qquad (t \text{ は媒介変数})$$

点と平面の距離

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $H : ax+by+cz+d=0$ の距離 h は

$$\boldsymbol{h=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

証明 平面 H の法ベクトルは　$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$

点 P を通り，方向ベクトルが $\vec{n}$ の直線の方程式が ℓ であるから

$$x=at+x_1,\quad y=bt+y_1,\quad z=ct+z_1$$

ℓ と H の交点を $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とし，そのときの t の値を t_0 とすると

$$x_2=at_0+x_1,\quad y_2=bt_0+y_1,\quad z_2=ct_0+z_1 \qquad (*)$$

Q は H 上の点であるから

$$a(at_0+x_1)+b(bt_0+y_1)+c(ct_0+z_1)+d=0$$

これを t_0 について解くと　$t_0=-\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}$

$(*)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(at_0,\ bt_0,\ ct_0)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|t_0|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\left|-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$　証終

補足 3 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ を通る平面の法ベクトルを

$$\vec{n}=(a,\ b,\ c)=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とする．平面 ABC 上の任意の点を $\mathrm{T}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ より

$$a(x-a_1)+b(y-b_1)+c(z-c_1)=0$$

点 $\mathrm{D}(d_1,\ d_2,\ d_3)$ から平面 ABC までの距離 h は

$$h=\frac{|a(d_1-a_1)+b(d_2-a_2)+c(d_3-a_3)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$$

△ABC の面積は $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ より [23]，四面体 ABCD の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cdot\frac{|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\boldsymbol{\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}$$

[23] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10)

2024年5月30日 (木)

2024年 東北大理系

$x \geqq 2$ を満たす実数 x に対し，

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく．必要ならば，$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であることと，および，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい．

(1) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき，関数 $g(x)$ $(x \geqq 2)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し，$g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ $(x \geqq 2)$ の増減と極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を調べ，$y = f(x)$ $(x \geqq 2)$ のグラフの概形を xy 平面上に描け．ただし，(2) の α を用いてよい．グラフの凹凸は調べなくてよい．

(4) $2 \leqq m < n$ を満たす整数 $m,\ n$ の組 $(m,\ n)$ に対して，等式

$$(*) \quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする．このような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

解答　(1)　$xf(x)=\log(2x-3)$ の両辺を微分すると

$$f(x)+xf'(x)=\frac{2}{2x-3}$$

両辺に $x(2x-3)$ を掛けると

$$x(2x-3)f(x)+x^2(2x-3)f'(x)=2x$$

したがって　　$g(x)=x^2(2x-3)f'(x)=2x-x(2x-3)f(x)$
$$=\boldsymbol{2x-(2x-3)\log(2x-3)}$$

(2)　(1) の結果から　$g'(x)=-2\log(2x-3)$

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	4	↘

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\{2x-(2x-3)\log(2x-3)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}(2x-3)\left\{\frac{2x}{2x-3}-\log(2x-3)\right\}=-\infty$$

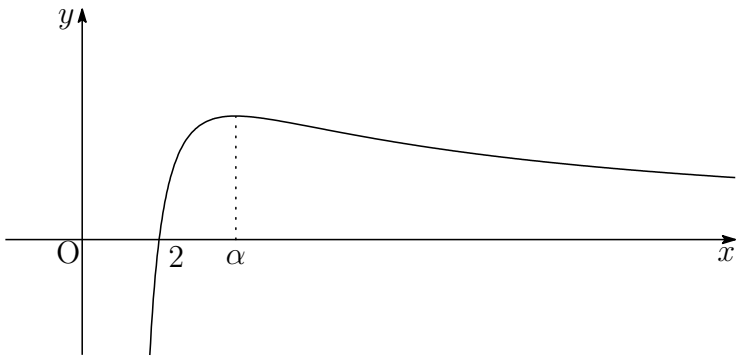
よって　　$g(\alpha)=0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在する.

(3)　$x>2$ のとき，$f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号と一致するから

x	2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	極大	↘

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(2x-3)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}\cdot\frac{\log(2x-3)}{2x-3}=0$$

したがって，グラフの概形は次のようになる.



(4) $f(x)=\dfrac{\log(2x-3)}{x}$ より　$e^{f(x)}=(2x-3)^{\frac{1}{x}}$

$h(x)=(2x-3)^{\frac{1}{x}}$ とすると $(x\geqq 2)$，$h(x)$ は $x=\alpha$ で極大値をとる．

$3^4=81,\ 5^3=125$ より　$3^4<5^3$　ゆえに　$3^{\frac{1}{3}}<5^{\frac{1}{4}}$

$5^5=3125,\ 7^4=2401$ より　$5^5>7^4$　ゆえに　$5^{\frac{1}{4}}>7^{\frac{1}{5}}$

$9^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}$ より　$h(6)=h(3)$　ゆえに　$3^{\frac{1}{3}}<5^{\frac{1}{4}}>7^{\frac{1}{5}}>9^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}$

すなわち　$h(3)<h(4)>h(5)>h(6)=h(3)$　$\cdots$①

2 整数 $m,\ n\ (2\leqq m<n)$ が

$$(2m-3)^n=(2n-3)^n\quad \text{すなわち}\quad h(m)=h(n)$$

を満たすとき，$2<m<\alpha$ であるから $(3<\alpha<5)$，① より

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(3,\ 6)}$$

2024年5月31日 (金)

2024年 東北大理系

xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C : x^2 + y^2 = 1$ および円板 $D : x^2 + y^2 \leqq 1$ を考える．D を底面とし点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を K とする．$\mathrm{A}(0, -1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$ とする．xyz 空間内の平面 $H : z = x$ を考える．すなわち，H は zx 平面上の直線 $z = x$ と線分 AB をともに含む平面である．K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする．$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，円 C 上の点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする．

(1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく．$r(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2) 円錐 K の側面のうち，曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分，線分 PA，および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく．θ と実数 h が条件 $0 \leqq \theta < \theta + h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta + h) - S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta + h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 円錐 K の側面のうち，円 C の $x \geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく．T を求めよ．必要であれば $\tan\dfrac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい．

解答　(1) $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (\cos\theta,\ \sin\theta, -1)$

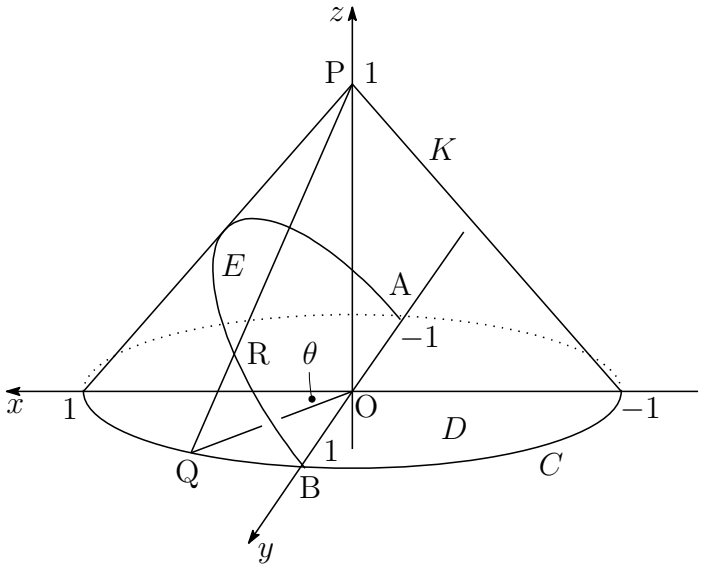
$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とすると (t は媒介変数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (0,\ 0,\ 1) + t(\cos\theta,\ \sin\theta, -1)\\ &= (t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1-t)\end{aligned}$$

R は平面 $z = x$ 上の点であるから

$$t\cos\theta = 1 - t \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{1+\cos\theta}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{2}$ であるから　　$r(\theta) = |t||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}}$

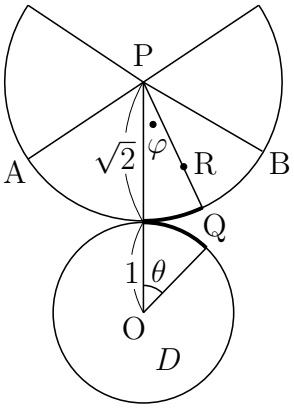


(2) 右の図の展開図において，PR の偏角を φ とし，これと D 上の偏角 θ について

$$\theta = \sqrt{2}\varphi$$

であるから，$\tilde{r}(\varphi) = r(\theta)$ とすると

$$\tilde{r}(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{1+\cos\sqrt{2}\varphi}$$



θ と φ の変換に注意して

$$S(\theta)-S(\theta+h)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi \qquad \text{(A)}$$

$\tilde{r}(\varphi)=r(2\varphi)$，$\tilde{r}(\varphi)$ は $0\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ において，単調増加であるから

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)^2 d\varphi\leqq\frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi\leqq\frac{1}{2}\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}\left(\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}\right)^2 d\varphi$$

したがって　$\dfrac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}\leqq\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\theta+h}{\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi\leqq\dfrac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$ (B)

(A)，(B) から次式が成立する．

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}\leqq S(\theta+h)-S(\theta)\leqq\frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 展開図において，半径 $\sqrt{2}$ で中心角 $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ の扇形の面積を S_1 とし，線分 PR が通過する部分の面積を S_2 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\tilde{r}(\varphi)^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r(\theta)^2\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}\right)^2 d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

$u=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とすると　$\dfrac{du}{d\theta}=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1+u^2}{2}$

θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
u	$0\longrightarrow 1$

$\cos\theta=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ より，$\dfrac{1}{1+\cos\theta}=\dfrac{1+u^2}{2}$ であるから

$$S_2=\sqrt{2}\int_0^1\left(\frac{1+u^2}{2}\right)^2\frac{2du}{1+u^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1(1+u^2)\,du=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって　$T=S_1-S_2=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

補足 (2) の結果から，$S'(\theta)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}=\frac{1}{2}r(\theta)^2$ でもよい．

2024年6月1日 (土)

2024年 東北大文系

$a,\ b,\ d$ を正の実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ d)$ が次の条件をすべて満たすとする．

$$\angle \mathrm{OAD} = 15^\circ, \quad \angle \mathrm{OBD} = 75^\circ, \quad \mathrm{AB} = 6$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\tan 75^\circ$ の値を求めよ．

(2) $a,\ b,\ d$ の値をそれぞれ求めよ．

(3) 2点 O，D を直径の両端とする円を C とする．線分 AD と C の交点のうち D と異なるものを P とする．また，線分 BD と C の交点のうち D と異なるものを Q とする．このとき，方べきの定理

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD} = \mathrm{AO}^2, \quad \mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD} = \mathrm{BO}^2$$

を示せ．

(4) (3) の点 P，Q に対し，積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}$ の値を求めよ．

解答　(1) 加法定理により

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \mathbf{2+\sqrt{3}}$$

(2) (1) の結果から　$\tan 15^\circ = \dfrac{1}{\tan 75^\circ} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

$a = d\tan 75^\circ = d(2+\sqrt{3})$，$b = d\tan 15^\circ = d(2-\sqrt{3})$

これらを $\mathrm{AB} = a - b = 6$ に代入すると

$$2\sqrt{3}d = 6 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{d = \sqrt{3}}$$

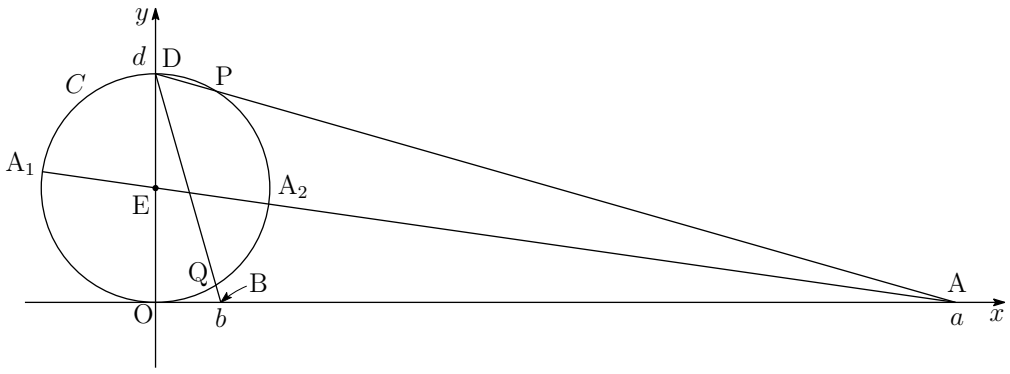
よって　$a = \sqrt{3}(2+\sqrt{3}) = \mathbf{2\sqrt{3}+3}$，　$b = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = \mathbf{2\sqrt{3}-3}$

(3) C の中心を E とし，その半径を $r = \mathrm{OE}$ とし，直線 AE と C の 2 つの交点を $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$ とすると，方べきの定理により

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD} = \mathrm{AA_1}\cdot\mathrm{AA_2} = (\mathrm{AE}+r)(\mathrm{AE}-r) = \mathrm{AE}^2 - r^2$$
$$= \mathrm{AE}^2 - \mathrm{OE}^2 = \mathrm{OA}^2$$

同様に，直線 BE との交点を $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$ とすると

$$\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD} = \mathrm{BB_1}\cdot\mathrm{BB_2} = (\mathrm{BE}+r)(\mathrm{BE}-r) = \mathrm{BE}^2 - r^2$$
$$= \mathrm{BE}^2 - \mathrm{OE}^2 = \mathrm{OB}^2$$



(4) (3) の結論の 2 式の辺々を掛けると　$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD}\times\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD} = \mathrm{AO}^2\cdot\mathrm{BO}^2$

したがって　$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ} = \dfrac{\mathrm{AO}^2\cdot\mathrm{BO}^2}{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BD}} = \dfrac{a^2b^2}{\sqrt{(a^2+d^2)(b^2+d^2)}}$

$d^2 = 3$，$a+b = 4\sqrt{3}$，$ab = 3$ より，$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 42$

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ} = \frac{(ab)^2}{\sqrt{(ab)^2 + (a^2+b^2)d^2 + d^4}} = \frac{3^2}{\sqrt{3^2 + 42\cdot 3 + 3^2}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

2024年6月2日 (日)

2024 年 東北大文系

n を正の整数とする．2 つの整数 $a_n,\ b_n$ を条件

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

により定める．ここで，$\sqrt{2}$ は無理数なので，このような整数の組 $(a_n,\ b_n)$ はただ 1 つに定まる．

(1) $a_{n+1},\ b_{n+1}$ を $a_n,\ b_n$ を用いてそれぞれ表せ．さらに，$b_4,\ b_5,\ b_6$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 等式

$$(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

が成り立つことを数学的に帰納法を用いて表せ．

(3) $n \geqq 2$ のとき，${b_{n+1}}{b_{n-1}} - {b_n}^2$ を求めよ．

(4) $pb_6 - qb_5 = 1,\ 0 \leqq p \leqq 100,\ 0 \leqq q \leqq 100$ をすべて満たす整数 $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ を 1 組求めよ．

解答　(1) $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ より $(a_n,\ b_n$ は整数$)$　$a_1 = 1,\ b_1 = 1$

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n \\ &= (1+\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\ &= a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

したがって　$(*)\begin{cases} \boldsymbol{a_{n+1} = a_n + 2b_n} \\ \boldsymbol{b_{n+1} = a_n + b_n} \end{cases}$

$(a_1,\ b_1) = (1,\ 1)$ より，順次，$n = 1, 2, 3, 4, 5$ を $(*)$ に代入すると

$$(a_2,\ b_2) = (3,\ 2),\ \ (a_3,\ b_3) = (7,\ 5),\ \ (a_4,\ b_4) = (17,\ 12),$$
$$(a_5,\ b_5) = (41,\ 29),\ \ (a_6,\ b_6) = (99,\ 70)$$

よって　　$\boldsymbol{b_4 = 12,\ \ b_5 = 29,\ \ b_6 = 70}$

(2)　　(A)　　$(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$

［1］$n = 1$ のとき，$a_1 = 1,\ b_1 = 1$ となり，(A) が成立する．

［2］$n = k$ のとき，

$$(1-\sqrt{2})^k = a_k - b_k\sqrt{2}$$

が成立すると仮定すると，$(*)$ に注意して

$$\begin{aligned} (1-\sqrt{2})^{k+1} &= (1-\sqrt{2})(a_k - b_k\sqrt{2}) \\ &= a_k + 2b_k - (a_k + b_k)\sqrt{2} = a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

(3) $a_n + b_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n$，$a_n - b_n\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^n$ の辺々の掛けると

$${a_n}^2 - 2{b_n}^2 = (-1)^n$$

$(*)$ の第 2 式より　$a_n = b_{n+1} - b_n$　これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n + 2b_n \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+2} - 2b_{n+1} = b_n$$

したがって　　$\begin{aligned} {a_n}^2 - 2{b_n}^2 &= (b_{n+1} - b_n)^2 - 2{b_n}^2 \\ &= b_{n+1}(b_{n+1} - 2b_n) - {b_n}^2 \\ &= b_{n+1}b_{n-1} - {b_n}^2 \end{aligned}$

よって　　$\boldsymbol{b_{n+1}b_{n-1} - {b_n}^2 = (-1)^n}$

(4) (3) の結果に $n=5$ を代入すると　$b_6b_4-{b_5}^2=(-1)^5$

$$12b_6-29b_5=-1 \quad \text{ゆえに} \quad b_6\cdot(-12)-b_5\cdot(-29)=1$$

$b_6\cdot 29-b_5\cdot 70=0$ を上の第 2 式の辺々に加えると

$$b_6\cdot 17-b_5\cdot 41=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(p,\ q)=(17,\ 41)}$$

別解 1 (ユークリッドの互除法)

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2\ )\ 5 &) & 12 &) & 29\ )\ 70 \\ & 4 & 10 & 24 & 58 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}$$

$b_6=70,\ b_5=29$ であり，$p=12,\ q=5,\ r=2$ とおくと

$$b_6=2b_5+p,\quad b_5=2p+q,\quad p=2q+r,\quad q=2r+1$$

$1=q-2r$ に $r=p-2q,\ q=b_5-2p,\ p=b_6-2b_5$ を順次代入すると

$$\begin{aligned} 1&=q-2r=q-2(p-2q)\\ &=-2p+5q=-2p+5(b_5-2p)\\ &=-12p+5b_5=-12(b_6-2b_5)+5b_5\\ &=29b_5-12b_6 \end{aligned}$$

したがって　$b_6\cdot(-12)-b_5\cdot(-29)=1$

$b_6\cdot 29-b_5\cdot 70=0$ を上式の辺々に加えると

$$b_6\cdot 17-b_5\cdot 41=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(p,\ q)=(17,\ 41)}$$

別解 2 (合同式)　$70p-29q=1$ について，$70\equiv 12,\ 29\equiv 0 \pmod{29}$ より

$$\begin{aligned} 70p-29q\equiv 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 12p\equiv 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 36p\equiv 7p\equiv 3 \pmod{29}\\ &\Longleftrightarrow \quad 28p=-p\equiv 12 \quad \Longleftrightarrow \quad p\equiv 17 \pmod{29} \end{aligned}$$

$p=17$ を $70p-29q=1$ に代入することにより　$q=41$

よって　　$\boldsymbol{(p,\ q)=(17,\ 41)}$

2024年6月3日 (月)

2024 年 北大理系

t を実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ および $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ を考える．

(1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ．

(2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ．ただし，x 軸，y 軸との共有点がある場合は，それらの座標を求め，図中に記せ．

解答　(1) 点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ と点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ が一致するとき

$$\begin{cases} \cos 2t = \sin t \\ \cos t = \sin 2t \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} (\sin t + 1)(2\sin t - 1) = 0 \\ \cos t(2\sin t - 1) = 0 \end{cases}$$

$\sin t + 1 = 0 \implies \cos t = 0$ に注意して　$\sin t = \dfrac{1}{2}, -1$

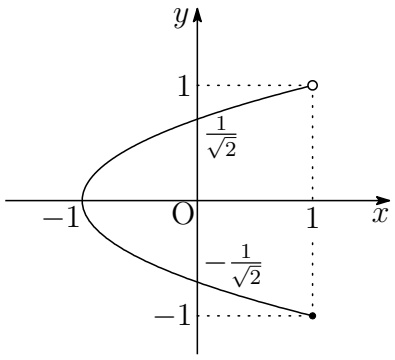
よって　　$\boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \ \dfrac{5}{6}\pi + 2n\pi,\ \ \dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi}$

(2) $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ について，$0 < t < 2\pi$ のとき

$$-1 \leqq \cos t < 1, \quad \cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$

よって，求める軌跡の方程式は　$x = 2y^2 - 1 \quad (-1 \leqq y < 1)$

したがって，点 P の描く軌跡は，下の図の実線部分で ○ は含まない．



2024年6月4日 (火)

2024年 北大理系

各面に1つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある.「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ1つずつあり，残りの5つの面には「0」が書かれている．このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える．最初の持ち点は0点とし，この試行を繰り返す．例えば，3回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は5となる．なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ．また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする．

(1) この試行をn回行ったとき，持ち点が2以下である確率を求めよ．ただし，nは2以上の自然数とする．

(2) この試行を4回行って持ち点が10以上であったときに，さらにこの試行を2回行って持ち点が17点以上である条件付き確率を求めよ．

解答　(1) $p=\dfrac{1}{8},\ q=\dfrac{5}{8}$ とおく．

持ち点が 0，すなわち，「0」が n 回出る確率は　　q^n

持ち点が 1，すなわち，「1」が 1 回，「0」が $n-1$ 回出る確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1} = npq^{n-1} $$

持ち点が 2，すなわち，「2」が 1 回，「0」が $n-1$ 回，または，「1」が 2 回，「0」が $n-2$ 回出る確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2} = npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2} $$

よって，求める確率は

$$ \begin{aligned} &q^n + npq^{n-1} + \left\{ npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2} \right\} \\ &= \left\{ q^2 + 2npq + \frac{n(n-1)}{2}p^2 \right\} q^{n-2} \\ &= \left(\frac{25}{8^2} + \frac{10n}{8^2} + \frac{n^2-n}{2\cdot 8^2} \right) \cdot \frac{5^{n-2}}{8^{n-2}} = \boldsymbol{\frac{(n^2+19n+50)\cdot 5^{n-2}}{2\cdot 8^n}} \end{aligned} $$

(2) 持ち点が 10，すなわち，「1」が 1 回，「3」が 3 回，または，「2」が 2 回，「3」が 2 回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_1 p\cdot p^3 + {}_4\mathrm{C}_2 p^2\cdot p^2 = 10p^4 $$

持ち点が 11，すなわち，「2」が 1 回，「3」が 3 回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_1 p\cdot p^3 = 4p^4 $$

持ち点が 12，すなわち，「3」が 4 回出る確率は　p^4

以上から，試行を 4 回行って得点が 10 以上になる確率は

$$ 10p^4 + 4p^4 + p^4 = 15p^4 $$

試行を 4 回行って持ち点が 10 以上で，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上となるのは，次の場合である．

(i) 4 回行って持ち点が 11 で，さらに「3」が 2 回出る確率は

$$ 4p^4 \times p^2 = 4p^6 $$

(ii) 4 回行って持ち点が 12 で，さらに「2」が 1 回，「3」が 1 回，または「3」が 2 回出る確率は

$$ p^4 \times ({}_2\mathrm{C}_1 p\cdot p + p^2) = 3p^6 $$

求める条件付き確率は　$\dfrac{4p^6+3p^6}{15p^4} = \dfrac{7}{15}p^2 = \dfrac{7}{15}\left(\dfrac{1}{8}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{7}{960}}$

2024年6月5日 (水)

2024年 北大理系

次の問いに答えよ.

(1) α を実数とする. 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$\alpha_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots$ を次の関係式で定める.

$$f_1(x) = 3x$$
$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ.

解答　(1)　$a_1=\alpha$，　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ より　　$a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$

$\{a_n-2\}$ は初項 $a_1-2=\alpha-2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n-2=(\alpha-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a_n=2+\frac{\alpha-2}{2^{n-1}}}$$

(2)　$a_n=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと，$f_1(x)=3x$ より

$$a_1=\int_0^1 3t\,dt=\left[\ \frac{3}{2}t^2\ \right]_0^1=\frac{3}{2}$$

$f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x$ より $(n=1,2,3,\cdots)$

$$\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt=\int_0^1 (n+2)t^{n+1}\,dt+a_n\int_0^1 t\,dt$$

$$a_{n+1}=\left[\ t^{n+2}\ \right]_0^1+\frac{1}{2}a_n\left[\ t^2\ \right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}a_n+1$$

したがって，(1) の結果に $\alpha=\dfrac{3}{2}$ を代入すると

$$a_n=2-\frac{1}{2^n}$$

$n\geqq 1$ のとき　$f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)x$

上式に $n=0$ を代入すると $f_1(x)=3x$ となるから，次式が成立する．

$$\boldsymbol{f_n(x)=(n+1)x^n+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)x\quad (n=1,2,3,\cdots)}$$

2024年6月6日 (木)

2024年 北大理系

三角形OABが，$|\overrightarrow{OA}| = 3$，$|\overrightarrow{AB}| = 5$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 10$ をみたしているとする．三角形OABの内接円の中心をIとし，この内接円と辺OAの接点をHとする．

(1) 辺OBの長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{OI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

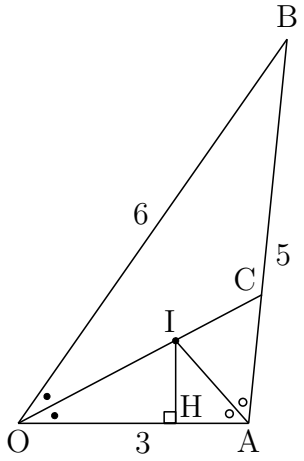
(3) $\overrightarrow{HI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

解答 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ より　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$
$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=5$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=10$ を上式に代入すると

$$5^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\cdot10+3^2 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{OB}|^2=36$$

$|\overrightarrow{OB}|>0$ であるから　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{OB}|=6}$

(2) $\angle O$ の二等分線 OI と AB の交点を C とすると



$$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=3:6=1:2$$

ゆえに　$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}\times\dfrac{1}{1+2}=5\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$
AI は $\angle$A の二等分線であるから

$$\mathrm{OI}:\mathrm{IC}=\mathrm{OA}:\mathrm{AC}=3:\frac{5}{3}=9:5$$

したがって

$$\overrightarrow{OI}=\frac{9}{9+5}\overrightarrow{OC}=\frac{9}{14}\cdot\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{6\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{14}}$$

(3) (2) の結果から

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{6|\overrightarrow{OA}|^2+3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{14}=\frac{6\cdot3^2+3\cdot10}{14}=6$$
$$\overrightarrow{OH}=\frac{(\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OA})}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}=\frac{6}{3^2}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$$

したがって

$$\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OH}=\frac{6\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{14}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-10\overrightarrow{OA}+9\overrightarrow{OB}}{42}}$$

補足 △OAB の内接円の辺 AB との接点を J とし，$x=\mathrm{OH}$ とすると

$$\mathrm{HA}=\mathrm{AJ}=3-x,\quad \mathrm{JB}=5-(3-x)=x+2$$

したがって　　$\mathrm{OB}=x+(x+2)=2x+2$
$\mathrm{OB}=6$ より　$2x+2=6$　ゆえに　$\mathrm{OH}=2$

2024年6月7日 (金)

2024 年 北大理系

関数

$$f(x) = x\log(x+2) + 1 \qquad (x > -2)$$

を考える．$y = f(x)$ で表される曲線を C とする．C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを ℓ とする．ただし，$\log t$ は t の自然対数である．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ．

(3) C と ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答　(1)　$f(x)=x\log(x+2)+1$ を微分すると　$f'(x)=\log(x+2)+\dfrac{x}{x+2}$

C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)\quad \text{ゆえに}\quad y=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$$

この直線が原点を通るとき，$f(t)-tf'(t)=0$ より

$$t\log(t+2)+1-t\left\{\log(t+2)+\frac{t}{t+2}\right\}=0$$

整理すると　　$t^2-t-2=0$　ゆえに　$(t+1)(t-2)=0$

これを解いて　$t=-1,\ 2$

このとき　$f'(-1)=-1<0,\quad f'(2)=2\log 2+\dfrac{1}{2}>0$

よって，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=\left(2\log 2+\dfrac{1}{2}\right)x}$

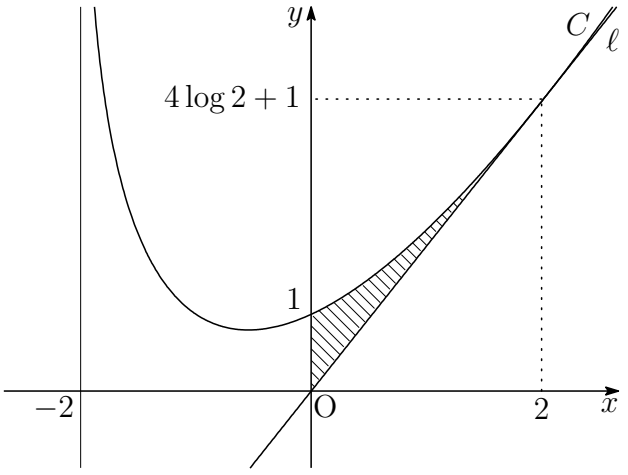
(2)　$f'(x)=\log(x+2)+1-\dfrac{2}{x+2}$ を微分すると $(x>-2)$

$$f''(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}>0$$

したがって，C は下に凸である．

(3)　求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^2\{x\log(x+2)+1\}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(4\log 2+1)\\&=\frac{1}{2}\int_0^2(x^2-4)'\log(x+2)\,dx+\Big[\ x\ \Big]_0^2-(4\log 2+1)\\&=\frac{1}{2}\Big[\ (x^2-4)\log(x+2)\ \Big]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2(x-2)\,dx+1-4\log 2\\&=2\log 2-\frac{1}{4}\Big[\ (x-2)^2\ \Big]_0^2+1-4\log 2=\boldsymbol{2-2\log 2}\end{aligned}$$



別解 (ガウス・グリーンの定理の系)

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) &= x\left\{\log(x+2) + \frac{x}{x+2}\right\} - \{x\log(x+2)+1\} \\ &= \frac{x^2}{x+2} - 1 = x - 3 + \frac{4}{x+2} \end{aligned}$$

求める面積 S は (積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_2^0 (xy' - y)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_2^0 \left(x - 3 + \frac{4}{x+2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\log(x+2)\ \right]_2^0 \\ &= \mathbf{2 - 2\log 2} \end{aligned}$$

補足 別解の公式は，ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\}\,dt$$

の変数 t を x に変更したものである.

2024年6月8日 (土)

2024年 北大文系

次の問いに答えよ.

(1) 自然数 $m,\ n$ について，$2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数を求めよ.

(2) 6912 の正の約数のうち，12 で割り切れないものの総和を求めよ.

解答　(1) $2^m \cdot 3^n$ の約数は

$$2^j \cdot 3^k \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, m, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

よって，求める約数の個数は　$\boldsymbol{(m+1)(n+1)}$

(2) $6912 = 2^8 \cdot 3^3$ であるから，6912 の正の約数は

$$2^j \cdot 3^k \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, 8, \quad k = 0, 1, 2, 3)$$

よって，6912 の正の約数の総和は

$$\begin{aligned}(1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8)(1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) &= \frac{2^9 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \\ &= 511 \times 40 = 20440\end{aligned}$$

6912 の約数のうち，12 で割り切れる数の総和は

$$\begin{aligned}(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8)(3^1 + 3^2 + 3^2) &= \frac{2 \cdot 2^8 - 2^2}{2 - 1} \cdot \frac{3 \cdot 3^2 - 3^1}{3 - 1} \\ &= 508 \times 39 = 19812\end{aligned}$$

よって，求める総和は　$20440 - 19812 = \boldsymbol{628}$

補足　初項 a，公比 r，末項 ℓ の等比数列の和 S は $(\ell = ar^{n-1})$

$$\boldsymbol{S = \frac{r\ell - a}{r - 1} = \frac{a - r\ell}{1 - r}}$$

2024年6月9日 (日)

2024 年 北大文系

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について考える.

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - \frac{3^{n+1}}{n(n+1)}$$

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n の式で表せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

解答　(1) $a_{n+1}=3a_n-\dfrac{3^{n+1}}{n(n+1)}$ より　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より　$\boldsymbol{b_1=1,\ \ b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}}$

(2) (1) の結果から，$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$$

これから　　$b_n-b_1=\dfrac{1}{n}-1$

上式は，$n=1$ のときも成立する．これに $b_1=1$ を代入すると

$$b_n-1=\frac{1}{n}-1\quad\text{ゆえに}\quad b_n=\frac{1}{n}$$

したがって　$\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{n}$　よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{3^n}{n}}$

2024年6月10日(月)

2024年 北大文系

a を0でない実数とする．C を $y=-x^3+x^2$ で表される曲線，ℓ を $y=a$ で表される直線とし，C と ℓ は共有点をちょうど2つもつとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) C と ℓ の共有点の x 座標をすべて求めよ．

(3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答　(1) $y=-x^3+x^2$ を微分すると　$y'=-3x^2+2x=-x(3x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ \dfrac{2}{3}$　したがって，y の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{27}$	$\searrow$

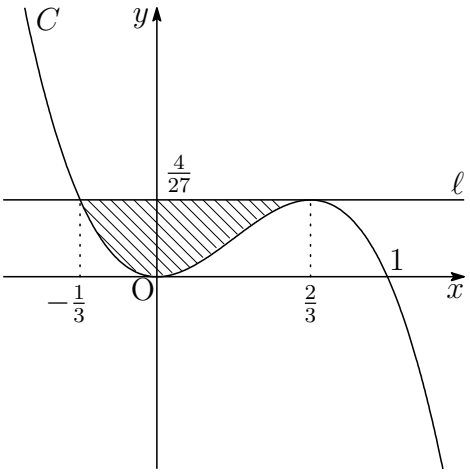
C と直線 $y=a$ (a は定数) がちょうど 2 点を共有する a の値は

$$\boldsymbol{a=\frac{4}{27}}$$

(2) (1) の増減表から求める共有点の x 座標は　$\boldsymbol{x=-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}}$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{4}{27}-(-x^3+x^2)\right\}dx\\&=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-x\right)^2dx\\&=\frac{1!2!}{(3+1)!}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{3+1}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}\end{aligned}$$



補足　次の公式[24] に $m=1$，$n=2$，$\alpha=-\dfrac{1}{3}$，$\beta=\dfrac{2}{3}$ を代入．

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

[24] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

2024年6月11日 (火)

2024年 筑波大

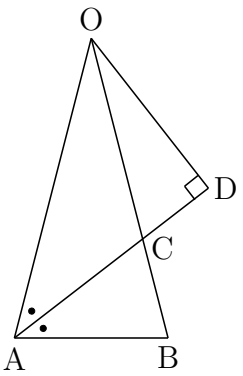
△OABにおいて，OA = OB = 4，AB = 2とする．∠OABの二等分線と線分OBの交点をCとし，点Oから直線ACに垂線ODを引く．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) △BCDの面積を求めよ．

解答　(1) AC は ∠OAB の二等分線であるから



$$\mathrm{OC} : \mathrm{CB} = \mathrm{OA} : \mathrm{AB} = 2 : 1$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{2}{3}\vec{b}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$,　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2$,　$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2$

$$2^2 = 4^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 4^2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 14$$

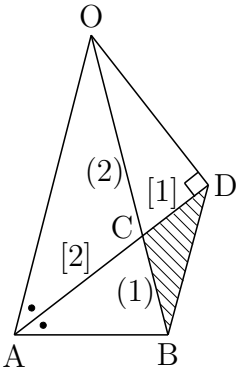
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に平行なベクトルを $\vec{v} = 2\vec{b} - 3\vec{a}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\vec{v} = -\vec{a}\cdot(2\vec{b} - 3\vec{a}) = -2\vec{a}\cdot\vec{b} + 3|\vec{a}|^2 = -2\cdot 14 + 3\cdot 4^2 = 20$$
$$|\vec{v}|^2 = 4|\vec{b}|^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{a}|^2 = 4\cdot 4^2 - 12\cdot 14 + 9\cdot 4^2 = 40$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{20}{40}(2\vec{b} - 3\vec{a}) = \dfrac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{a})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{a} + \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{a}) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{3}(2\vec{b} - 3\vec{a})$,　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{a})$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\mathrm{AC} : \mathrm{CD} = 2 : 1$,　$\mathrm{OC} : \mathrm{CB} = 2 : 1$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCD} = \frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{6}\triangle\mathrm{OAB}$$

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2\cdot 4^2 - 14^2} = \sqrt{15}$$

よって　$\triangle\mathrm{BCD} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}\sqrt{15}}$

2024年6月12日 (水)

2024年 筑波大

以下の問いに答えよ.

(1) $x > 1$, $y > 1$ のとき, 不等式

$$\log_x y + \log_y x \geqq 2$$

が成り立つことを示せ.

(2) 座標平面において, 連立不等式

$$x > 1, \quad y > x, \quad \log_x y + \log_y x < \frac{5}{2}$$

の表す領域を図示せよ.

(3) (2) の領域の中で $x^2 + y^2 < 12$ を満たす部分に境界線を含めた図形を D とする. D の面積を求めよ.

解答　(1) $x>1,\ y>1$ のとき　$\log_x y>0$

相加平均・相乗平均の大小関係から

$$\log_x y+\log_y x=\log_x y+\frac{1}{\log_x y}$$
$$\geqq 2\sqrt{\log_x y\cdot\frac{1}{\log_x y}}=2$$

(2) 連立不等式

$$x>1,\quad y>x,\quad \log_x y+\log_y x<\frac{5}{2} \qquad (*)$$

の第3式について　$\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}<\dfrac{5}{2}$

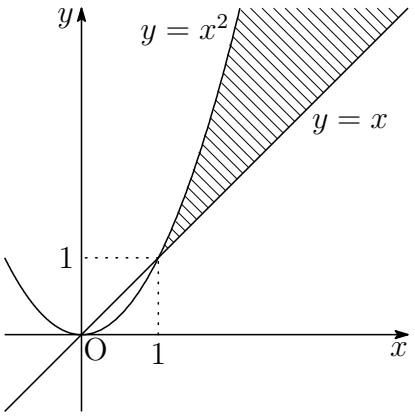
$2(\log_x y)^2-5\log_x y+2<0$　ゆえに　$(\log_x y-2)(2\log_x y-1)<0$

$y>x>1$ であるから，$\log_x y>1$ より　　$1<\log_x y<2$

$\log_x x<\log_x y<\log_x x^2$　ゆえに　$x<y<x^2$

$(*)$ の連立不等式は　　$1<x<y<x^2$

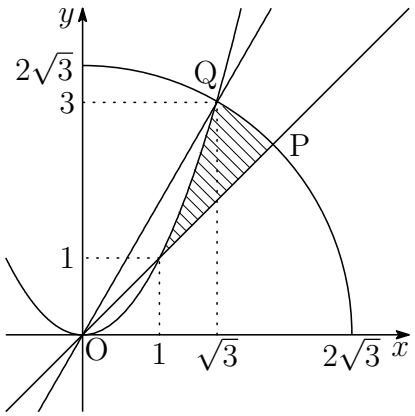
よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線は含まない.



(3) 第1象限において，$y=x,\ y=x^2$ と円 x^2+y^2 との交点をそれぞれP，Qとすると　Q$(\sqrt{3},\ 3)$

領域 D は下の図の斜線部分 (境界線を含む) で，その面積を S とすると，$\angle \mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$ より

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{12}+\int_0^1(x-x^2)\,dx-\int_0^{\sqrt{3}}(\sqrt{3}x-x^2)\,dx\\&=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\frac{\pi}{12}+\int_0^1 x(1-x)\,dx-\int_0^{\sqrt{3}}x(\sqrt{3}-x)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}(1-0)^3-\frac{1}{6}(\sqrt{3}-0)^3\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$



別解 $y=x^2$ にガウス・グリーンの定理の系を適用する．

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}(xy'-y)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}x^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

補足 別解の公式は，ガウス・グリーンの定理

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}\,dt$$

の変数 t を x に変更したものである．

2024年6月13日 (木)

2024 年 筑波大

$f(x) = x(x+1)(x-1)$ とする．座標平面において，曲線 $y = f(x)$ を C とし，曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を L とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 L の方程式を t を用いて表せ．

(2) $t \neq 0$ のとき，直線 L と曲線 C の共有点で，点 $(t,\ f(t))$ とは異なるものを $(a,\ f(a))$ とする．a を t を用いて表せ．また，t が 0 を除いた実数を動くとき，$f'(t)f'(a)$ の最小値を求めよ．

(3) 次の条件 (A) を満たすような実数 t の範囲を求めよ．

(A) 曲線 C 上の点 $(s,\ f(s))$ における接線が直線 L と直交するような実数 s が存在する．

解答　(1)　$f(x)=x(x+1)(x-1)=x^3-x$ より　$f'(x)=3x^2-1$

曲線 $C:y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 L の方程式は

$$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=(3t^2-1)x-2t^3}$$

(2)　C と L の方程式から，y を消去すると

$$x^3-x=(3t^2-1)x-2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x-t)^2(x+2t)=0$$

L と C の共有点で $(t,\ f(t))$ と異なる点の x 座標 a は $(t\neq 0)$　$\boldsymbol{a=-2t}$

$$\begin{aligned} f'(t)f'(a)&=f'(t)f'(-2t)=(3t^2-1)(12t^2-1)\\ &=36t^4-15t^2+1=36\left(t^2-\frac{5}{24}\right)^2-\frac{9}{16}\end{aligned}$$

よって，$f'(t)f'(a)$ は $t^2=\dfrac{5}{24}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{9}{16}}$ をとる．

(3)　C 上の 2 点 $(s,\ f(s)),\ (t,\ f(t))$ におけるそれぞれの接線が直交するとき，$f'(s)f''(t)=-1$ より

$$(3s^2-1)(3t^2-1)=-1$$

したがって　$3s^2=\dfrac{3t^2-2}{3t^2-1}=\dfrac{(3t^2-2)(3t^2-1)}{(3t^2-1)^2}\geqq 0$

$3t^2-1\neq 0,\ 3t^2-2<3t^2-1$ に注意して

$$3t^2-1<0 \quad \text{または} \quad 3t^2-2\geqq 0$$

よって　$\boldsymbol{t\leqq -\dfrac{\sqrt{6}}{3},\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{3}<t<\dfrac{\sqrt{3}}{3},\quad \dfrac{\sqrt{6}}{3}\leqq t}$

補足　3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ について，$C:y=f(x)$ の変曲点の x 座標を p とすると，$f''(p)=0$ より，$b=-3ap$

$$f''(t)=6at+2b=6a(t-p)$$

$f(x)$ を $x=t$ を極として展開すると [25]

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2+a(x-t)^3$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x)-\{f(t)+f'(t)(x-t)\}&=3a(t-p)(x-t)^2+a(x-t)^2\\ &=a(x-t)^2(x-3p+2t)\end{aligned}$$

よって，C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線と C の共有点の x 座標は

$$x=t,\ 3p-2t$$

[25] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

2024年6月14日 (金)

2024 年 筑波大

座標平面において，媒介変数表示

$$x = -t\left(t - \frac{3}{2}\right), \quad y = \sin \pi t \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

で表される曲線を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 t \sin \pi t \, dt$ を求めよ．

(2) 実数 a に対し，曲線 C と直線 $x = a$ の共有点の個数を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答　(1)

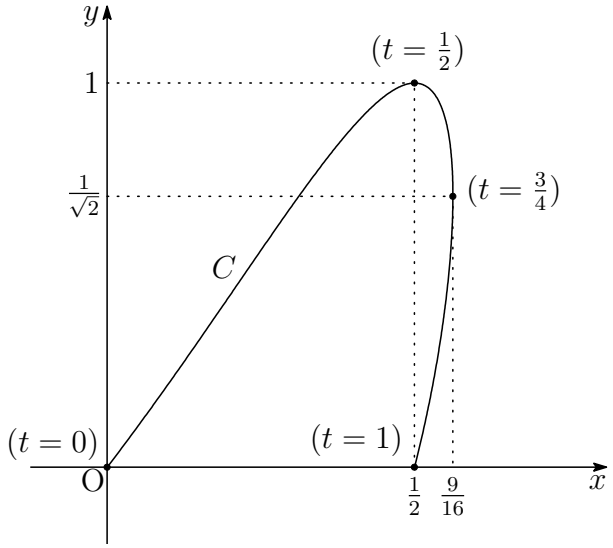
$$\begin{aligned}\int_0^1 t\sin\pi t\,dt &= \int_0^1 t\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)'dt\\ &= \left[\,t\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)-\left(-\frac{1}{\pi^2}\sin\pi t\right)\,\right]_0^1\end{aligned}$$

(2)　$x=-t\left(t-\dfrac{3}{2}\right)$, $y=\sin\pi t$ より $(0\leqq t\leqq 1)$

$$\frac{dx}{dt}=-2t+\frac{3}{2},\quad \frac{dy}{dt}=\pi\cos\pi t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
(x,y)	$(0,\ 0)$		$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$		$\left(\frac{9}{16},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$		$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

したがって，C のグラフの概形は次のようになる．



よって，曲線 C と直線 $x=a$ の共有点の個数は

$$\begin{cases}\boldsymbol{a<0,\ \dfrac{9}{16}<a} & \text{のとき}\quad \mathbf{0}\text{個}\\ \boldsymbol{0\leqq a<\dfrac{1}{2},\ a=\dfrac{9}{16}} & \text{のとき}\quad \mathbf{1}\text{個}\\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq a<\dfrac{9}{16}} & \text{のとき}\quad \mathbf{2}\text{個}\end{cases}$$

(3) $x=f(t)=-t\left(t-\dfrac{3}{2}\right)$, $y=g(t)=\sin\pi t$ とし $(0\leqq t\leqq 1)$，求める面積を S とすると，(1) の結果に注意して

$$\begin{aligned}S&=\int_{f(0)}^{f\left(\frac{3}{4}\right)}y\,dx-\int_{f(1)}^{f\left(\frac{3}{4}\right)}y\,dx=\int_{f(0)}^{f(1)}y\,dx=\int_0^1 y\frac{dx}{dt}dt\\&=\int_0^1\sin\pi t\cdot\left(-2t+\frac{3}{2}\right)dt\\&=-2\int_0^1 t\sin\pi t\,dt+\frac{3}{2}\int_0^1\sin\pi t\,dt\\&=-2\cdot\frac{1}{\pi}+\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{\pi}}\end{aligned}$$

補足 (ガウス・グリーンの定理[26]) $x=f(t)=-t\left(t-\dfrac{3}{2}\right)$, $y=g(t)=\sin\pi t$ とし $(0\leqq t\leqq 1)$，求める面積を S とすると (偏角の向きが正となるように積分区間をとる)

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_1^0\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\,dt\\&=-\frac{1}{2}\int_1^0\{f(t)g(t)\}'\,dt+\int_1^0 f(t)g'(t)\,dt\end{aligned}$$

ここで

$$\int_1^0\{f(t)g(t)\}'\,dt=\Big[\,f(t)g(t)\,\Big]_1^0=0,$$

$$\begin{aligned}\int_1^0 f(t)g'(t)\,dt&=\int_1^0\left(-t^2+\frac{3}{2}t\right)(\sin\pi t)'\,dt\\&=\Big[\left(-t^2+\frac{3}{2}t\right)\sin\pi t-\left(-2t+\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)\\&\qquad+(-2)\left(-\frac{1}{\pi^2}\sin\pi t\right)\Big]_1^0=\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

よって　　$S=\dfrac{1}{\pi}$

[26] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf 5

2024年6月15日 (土)

2024年 筑波大

a と b は実数の定数とする．関数

$$f(x) = (1 - 2x^2)\cos 2x + 2x \sin 2x + a\cos^2 x + b\int_a^x t \sin 2t \, dt$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $a = 8\pi^2$, $b = -4\pi$ のとき，$0 < x < \dfrac{3}{2}\pi$ において $f(x)$ が極値をとる x の値をすべて求めよ．

(2) 次の条件 (B) を満たす a，b を求めよ．

(B) $0 < x < \dfrac{3}{2}\pi$ において，$f(x)$ は極値をとらない．

解答　(1) 関数

$$f(x) = (1-2x^2)\cos 2x + 2x\sin 2x + a\cos^2 x + b\int_a^x t\sin 2t\,dt$$

を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x\cos 2x - 2(1-2x^2)\sin 2x + 2\sin 2x + 4x\cos 2x \\ &\qquad - 2a\cos x\sin x + bx\sin 2x \\ &= (4x^2 + bx - a)\sin 2x \qquad (*) \end{aligned}$$

$a = 8\pi^2$，$b = -4\pi$ を $(*)$ に代入すると

$$f'(x) = (4x^2 - 4\pi x - 8\pi^2)\sin 2x = 4(x+\pi)(x-2\pi)\sin 2x$$

したがって，$0 < x < \dfrac{3}{2}\pi$ における $f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$(\frac{3}{2}\pi)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

よって，極値をとる x の値は　　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$

(2) $0 < x < \dfrac{3}{2}\pi$ において，$(*)$ の $f'(x)$ の符号は，常に $f'(x) \leqq 0$ または $f'(x) \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned} 4x^2 + bx - a &= 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x-\pi) \\ &= 4x^2 - 6\pi x + 2\pi^2 \end{aligned}$$

よって，上式の係数を比較して　$\boldsymbol{a = -2\pi^2,\ b = -6\pi}$

2024年6月16日 (日)

2024 年 筑波大

定数 α は実数でない複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ は純虚数であることを示せ．

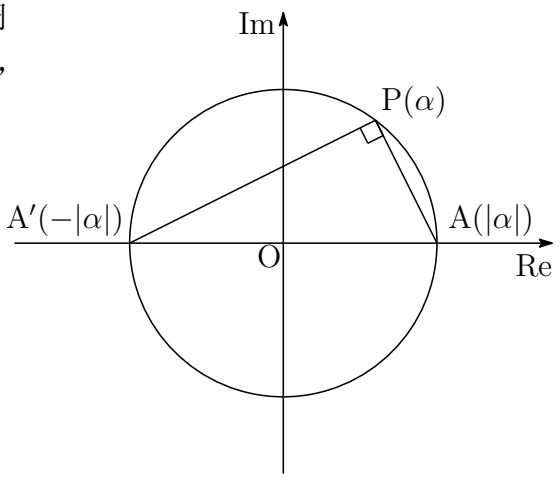
(2) 純虚数 β で，$\dfrac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるものがただ一つ存在することを示せ．

(3) 複素数 z を $\dfrac{z - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるように動かすとき，$|z|$ が最小となる z を α を用いて表せ．

解答　(1) O を中心とする点 $\mathrm{P}(\alpha)$ を通る円周上に 2 点 $\mathrm{A}(|\alpha|)$，$\mathrm{A}'(-|\alpha|)$ をとると，$\angle \mathrm{APA}' = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\arg \frac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|} = \pm \frac{\pi}{2}$$

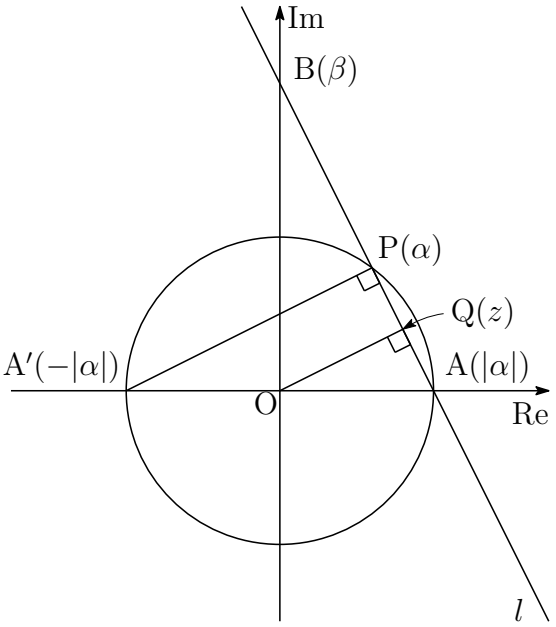
よって，$\dfrac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ は純虚数である．



(2) 点 $\mathrm{A}(|\alpha|)$ を通り，直線 $\mathrm{A}'\mathrm{P}$ に垂直な直線 l と虚軸との交点 $\mathrm{B}(\beta)$ とすると，$\mathrm{A}'\mathrm{P} \perp \mathrm{AB}$ より，

$$\frac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|} = \pm \frac{\pi}{2}$$

よって，$\dfrac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となる β がただ一つ存在する．



(3) $\dfrac{z - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるとき，z は l 上の点で，$|z|$ が最小となるのは，$\mathrm{A}(|\alpha|)$，$\mathrm{P}(\alpha)$ の中点であるから

$$\boldsymbol{z = \frac{|\alpha| + \alpha}{2}}$$