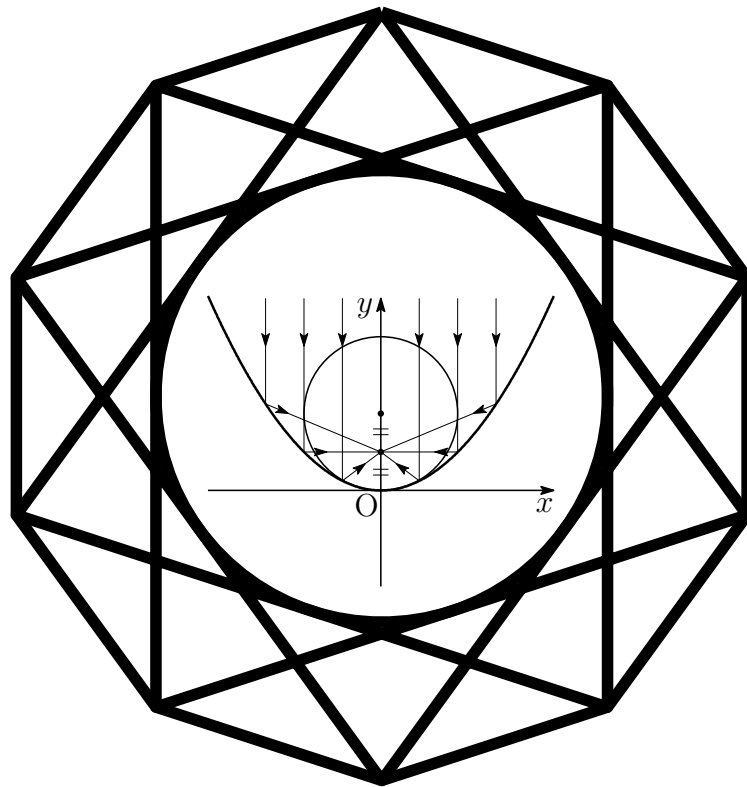


入試の軌跡

難関大学 文系

2011 - 2024

数 学



2024 年 8 月 11 日

Typed by L^AT_EX 2_ε

序

本書には、次の主な難関国立大学(文系)が実施した平成23年(2011年)度から令和6年(2024年)度までの一般前期試験問題(数学)・解答例をすべて掲載しました。

北海道大学 東北大学 東京大学 一橋大学 名古屋大学
京都大学 大阪大学 神戸大学 広島大学 九州大学

出題分野	
数学Ⅰ	数と式 2次関数 図形と計量 データの分析
数学Ⅱ	式と証明 複素数と方程式 図形と方程式 三角関数 指数関数と対数関数 微分法と積分法
数学A	場合の数と確率 整数の性質 図形の性質
数学B	平面上のベクトル 空間のベクトル 数列

本書は、パソコン・スマートフォン・電子黒板での使用を想定したICT教材です。

1. 解答は、図や解説を充実させ、自学自習ができるように配慮しました。
2. 電子黒板を利用される場合は、電子黒板のPDFブラウザをご使用ください。ファイルサイズに優れ、ハイパーリンク・拡大縮小・スワイプ・書き込みもスムーズに機能します。
3. パソコン(Adobe Reader)で読み込む際には、全画面表示(**[Ctrl]+L**)および描画領域に合わせる(**[Ctrl]+3**)と見やすくなります。ページスクロールには、(**[Ctrl]+▲**、**[Ctrl]+▼**)が利用でき、リンク(ジャンプ)先から戻る(**[Alt]+◀**)、進む(**[Alt]+▶**)も利用できます。なお、全画面表示を解除するには**[ESC]**。
4. スマートフォンでの使用も想定し、問題および解答には相互リンクを施しています。各問の解答の終わりにある■をクリックすると、各年度のトップページに戻ります。

上の3、4の機能をサポートするPDFブラウザとして、Adobe Readerをご使用ください(フリーソフト)。スマートフォンには、同アプリがインストールされていない場合が多いので、同アプリをインストールしてからご使用ください。

令和6年7月 西村 信一

目次

序	i
第0章 出題分野	1
0.1 数学 I	1
0.1.1 数と式 (数学 I)	1
0.1.2 2 次関数 (数学 I)	2
0.1.3 図形と計量 (数学 I)	4
0.1.4 データの分析 (数学 I)	6
0.2 数学 II	7
0.2.1 式と証明 (数学 II)	7
0.2.2 複素数と方程式 (数学 II)	9
0.2.3 図形と方程式 (数学 II)	11
0.2.4 三角関数 (数学 II)	16
0.2.5 指数関数と対数関数 (数学 II)	19
0.2.6 微分法と積分法 (数学 II)	21
0.3 数学 A	40
0.3.1 場合の数と確率 (数学 A)	40
0.3.2 整数の性質 (数学 A)	49
0.3.3 図形の性質 (数学 A)	55
0.4 数学 B	56
0.4.1 平面上のベクトル (数学 B)	56
0.4.2 空間のベクトル (数学 B)	58
0.4.3 数列 (数学 B)	63
第1章 北海道大学	71
出題分野	71
1.11 2011 年 (90 分)	72
1.12 2012 年 (90 分)	78
1.13 2013 年 (90 分)	81
1.14 2014 年 (90 分)	87
1.15 2015 年 (90 分)	93
1.16 2016 年 (90 分)	98
1.17 2017 年 (90 分)	103
1.18 2018 年 (90 分)	108
1.19 2019 年 (90 分)	112

1.20 2020 年 (90 分)	117
1.21 2021 年 (90 分)	122
1.22 2022 年 (90 分)	128
1.23 2023 年 (90 分)	132
1.24 2024 年 (90 分)	138
第 2 章 東北大学	143
出題分野	143
2.11 2011 年 (100 分)	144
2.12 2012 年 (100 分)	149
2.13 2013 年 (100 分)	156
2.14 2014 年 (100 分)	161
2.15 2015 年 (100 分)	166
2.16 2016 年 (100 分)	174
2.17 2017 年 (100 分)	179
2.18 2018 年 (100 分)	184
2.19 2019 年 (100 分)	189
2.20 2020 年 (100 分)	194
2.21 2021 年 (100 分)	199
2.22 2022 年 (100 分)	205
2.23 2023 年 (100 分)	211
2.24 2024 年 (100 分)	218
第 3 章 東京大学	227
出題分野	227
3.11 2011 年 (100 分)	228
3.12 2012 年 (100 分)	235
3.13 2013 年 (100 分)	240
3.14 2014 年 (100 分)	247
3.15 2015 年 (100 分)	253
3.16 2016 年 (100 分)	259
3.17 2017 年 (100 分)	265
3.18 2018 年 (100 分)	269
3.19 2019 年 (100 分)	275
3.20 2020 年 (100 分)	283
3.21 2021 年 (100 分)	290
3.22 2022 年 (100 分)	298
3.23 2023 年 (100 分)	307
3.24 2024 年 (100 分)	312

第4章 一橋大学	317
出題分野	317
4.11 2011 年 (120 分)	318
4.12 2012 年 (120 分)	325
4.13 2013 年 (120 分)	332
4.14 2014 年 (120 分)	340
4.15 2015 年 (120 分)	346
4.16 2016 年 (120 分)	355
4.17 2017 年 (120 分)	362
4.18 2018 年 (120 分)	369
4.19 2019 年 (120 分)	375
4.20 2020 年 (120 分)	381
4.21 2021 年 (120 分)	387
4.22 2022 年 (120 分)	394
4.23 2023 年 (120 分)	401
4.24 2024 年 (120 分)	407
第5章 名古屋大学	415
出題分野	415
5.11 2011 年 (90 分)	416
5.12 2012 年 (90 分)	421
5.13 2013 年 (90 分)	426
5.14 2014 年 (90 分)	431
5.15 2015 年 (90 分)	436
5.16 2016 年 (90 分)	443
5.17 2017 年 (90 分)	448
5.18 2018 年 (90 分)	455
5.19 2019 年 (90 分)	461
5.20 2020 年 (90 分)	467
5.21 2021 年 (90 分)	472
5.22 2022 年 (90 分)	478
5.23 2023 年 (90 分)	483
5.24 2024 年 (90 分)	489
第6章 京都大学	495
出題分野	495
6.11 2011 年 (120 分)	496
6.12 2012 年 (120 分)	502
6.13 2013 年 (120 分)	507

6.14	2014 年 (120 分)	513
6.15	2015 年 (120 分)	519
6.16	2016 年 (120 分)	524
6.17	2017 年 (120 分)	529
6.18	2018 年 (120 分)	536
6.19	2019 年 (120 分)	543
6.20	2020 年 (120 分)	550
6.21	2021 年 (120 分)	557
6.22	2022 年 (120 分)	562
6.23	2023 年 (120 分)	568
6.24	2024 年 (120 分)	574
第 7 章 大阪大学		581
	出題分野	581
7.11	2011 年	582
7.12	2012 年	588
7.13	2013 年	592
7.14	2014 年	595
7.15	2015 年	598
7.16	2016 年	602
7.17	2017 年	606
7.18	2018 年	610
7.19	2019 年	616
7.20	2020 年	620
7.21	2021 年	623
7.22	2022 年	627
7.23	2023 年	632
7.24	2024 年	636
第 8 章 神戸大学		641
	出題分野	641
8.11	2011 年 (80 分)	642
8.12	2012 年 (80 分)	648
8.13	2013 年 (80 分)	653
8.14	2014 年 (80 分)	657
8.15	2015 年 (80 分)	661
8.16	2016 年 (80 分)	666
8.17	2017 年 (80 分)	670
8.18	2018 年 (80 分)	674

8.19 2019 年 (80 分)	678
8.20 2020 年 (80 分)	682
8.21 2021 年 (80 分)	686
8.22 2022 年 (80 分)	690
8.23 2023 年 (80 分)	694
8.24 2024 年 (80 分)	700
第 9 章 広島大学	707
出題分野	707
9.11 2011 年 (120 分)	708
9.12 2012 年 (120 分)	715
9.13 2013 年 (120 分)	723
9.14 2014 年 (120 分)	729
9.15 2015 年 (120 分)	735
9.16 2016 年 (120 分)	742
9.17 2017 年 (120 分)	751
9.18 2018 年 (120 分)	757
9.19 2019 年 (120 分)	766
9.20 2020 年 (120 分)	773
9.21 2021 年 (120 分)	780
9.22 2022 年 (120 分)	789
9.23 2023 年 (120 分)	799
9.24 2024 年 (120 分)	808
第 10 章 九州大学	815
出題分野	815
10.112011 年 (120 分)	816
10.122012 年 (120 分)	822
10.132013 年 (120 分)	833
10.142014 年 (120 分)	840
10.152015 年 (120 分)	847
10.162016 年 (120 分)	852
10.172017 年 (120 分)	860
10.182018 年 (120 分)	866
10.192019 年 (120 分)	871
10.202020 年 (120 分)	875
10.212021 年 (120 分)	880
10.222022 年 (文系)	886
10.232023 年 (文系)	894

10.242024 年 (文系)	903
----------------------------	-----

第 0 章 出題分野

◀	出 題 分 野
数学 I	数と式 2 次関数 図形と計量 データの分析
数学 II	式と証明 複素数と方程式 図形と方程式 三角関数 指数関数と対数関数 微分法と積分法
数学 A	場合の数と確率 整数の性質 図形の性質
数学 B	平面上のベクトル 空間のベクトル 数列

0.1 数学 I

0.1.1 数と式 (数学 I)

◀	分野	I	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	北海道大学															
	東北大学															
	東京大学															
	一橋大学															
	名古屋大学															
	京都大学															
	大阪大学															
	神戸大学															
	広島大学															
	九州大学								2							

0.1.2 2次関数(数学I)

◀ 分野 I	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学	1							2						
東北大学			1										3	
東京大学		1												
一橋大学														
名古屋大学						1								2
京都大学			1						2					3
大阪大学									2					
神戸大学														
広島大学	1													
九州大学														

北大 2011 年 [1] 実数 x に対して $k \leq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す. たとえば, $[2] = 2$, $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $[-2.1] = -3$ である.

- (1) $n^2 - 5n + 5 < 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ.
- (2) $[x]^2 - 5[x] + 5 < 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ.
- (3) x は (2) で求めた範囲にあるものとする. $x^2 - 5[x] + 5 = 0$ を満たす x をすべて求めよ.

東北大 2011 年 [1] a を実数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 2次方程式 $x^2 - 2(a+1)x + 3a = 0$ が, $-1 \leq x \leq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ.
- (2) a が (1) で求めた範囲を動くとき, 放物線 $y = x^2 - 2(a+1)x + 3a$ の頂点の y 座標がとりうる値の範囲を求めよ.

東北大 2023 年 [3] a を実数とし, 2次関数 $f(x) = x^2 + 2ax - 3$ を考える. 実数 x が $a \leq x \leq a+3$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値および最小値を, それぞれ $M(a)$, $m(a)$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $M(a)$ を a を用いて表せ.
- (2) $m(a)$ を a を用いて表せ.
- (3) a がすべての実数を動くとき, $m(a)$ の最小値を求めよ.

東大 2012 年 [1] 座標平面上の点 (x, y) が次の方程式を満たす.

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき, x のとりうる最大の値を求めよ.

京大 2013 年 [1] a を 2 以上の実数とし, $f(x) = (x + a)(x + 2)$ とする. このとき $f(f(x)) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ.

京大 2024 年 [3] a は正の定数とする. 次の関数の最大値を求めよ.

$$f(x) = \left| x^2 - \left(ax + \frac{3}{4}a^2 \right) \right| + ax + \frac{3}{4}a^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

0.1.3 図形と計量 (数学I)

分野	I	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学									1				3		
東北大学															
東京大学															
一橋大学		2													
名古屋大学															
京都大学			2			2							5		
大阪大学															
神戸大学															
広島大学			3				2								
九州大学					3										

一橋大 2011 年 [2] 点 O を中心とする半径 r の円周上に, 2 点 A, B を $\angle AOB < \frac{\pi}{2}$ となるようにとり $\theta = \angle AOB$ とおく. この円周上に点 C を, 線分 OC が線分 AB と交わるようにとり, 線分 AB 上に点 D をとる. また, 点 P は線分 OA 上を, 点 Q は線分 OB 上を, それぞれ動くとする.

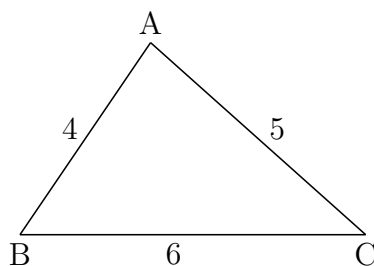
- (1) $CP + PQ + QC$ の最小値を r と θ で表せ.
- (2) $a = OD$ とおく. $DP + PQ + QD$ の最小値を a と θ で表せ.
- (3) さらに, 点 D が線分 AB 上を動くときの $DP + PQ + QD$ の最小値を r と θ で表せ.

京大 2012 年 [2] 正四面体 $OABC$ において, 点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる. ただし P, Q, R は四面体 $OABC$ の頂点とは異なるとする. $\triangle PQR$ が正三角形ならば, 3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ.

京大 2015 年 [2] 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものを求めよ.

- (a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である.
- (b) 半径 1 の円が内接する. ただし, 円が四角形に内接するとは, 円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう.

広大 2012 年 [3] 図のような 3 辺の長さをもつ三角形 ABC がある.



次の問いに答えよ.

- (1) $45^\circ < \angle B < 60^\circ$ を証明せよ.
- (2) $\angle A = 2\angle C$ を証明せよ.
- (3) $40^\circ < \angle C < 45^\circ$ を証明せよ.

九大 2014 年 [3] 鋭角三角形 $\triangle ABC$ について, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさを, それぞれ A , B , C とする. $\triangle ABC$ の重心を G , 外心を O とし, 外接円の半径を R とする.

- (1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を, それぞれ AD , OE とする. このとき,

$$AD = 2R \sin B \sin C, \quad OE = R \cos A$$

を証明せよ.

- (2) G と O が一致するならば $\triangle ABC$ は正三角形であることを証明せよ.
- (3) $\triangle ABC$ が正三角形でないとし, さらに OG が BC と平行であるとする. このとき,

$$AD = 3OE, \quad \tan B \tan C = 3$$

を証明せよ.

0.1.4 データの分析 (数学 I)

分野 I	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学														
東北大学														
東京大学														
一橋大学														
名古屋大学														
京都大学														
大阪大学														
神戸大学														
広島大学														1
九州大学														

広大 2024 年 1 A, B, C, D, E の 5 人が, それぞれゲーム α とゲーム β の 2 種類のゲームを行った. ゲーム α の得点を x , ゲーム β の得点を y で表す. 下の表はそれぞれのゲームにおける得点である. ただし, a, b は整数である. なお, 得点が負になることもあり得る.

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点 x の平均値は 7 であるとし, ゲーム β の得点 y の平均値を m とする. 次の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) p, q は実数で, $p \neq 0$ とする. ゲーム β の得点 y を $z = py + q$ により変換し, 新たな変数 z を作成する. z の分散を s_z^2 , 二つの変数 x, z の共分散を s_{xz} とする. このとき, s_z^2 と s_{xz} を p, q, m のうちの必要なものを用いて表せ. ただし, 変数 x と z の共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である.
- (3) 変数 x と (2) で作った変数 z の相関係数が $\frac{3}{4}$ であるとき, m と b の値を求めよ. また, p が正であるか負であるかを答えよ.

0.2 数学 II

0.2.1 式と証明 (数学 II)

◀ 分野 II	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学														
東北大学														
東京大学														
一橋大学														
名古屋大学														
京都大学					5				1・5		1			
大阪大学					1									
神戸大学		3									2			
広島大学														
九州大学									4					

京大 2019 年 [1] a は実数とする. x に関する整式 $x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2$ を整式 $x^3 + x^2 + x + 1$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とする. $R(x)$ の x の 1 次の項の係数が 1 のとき, a の値を定め, さらに $Q(x)$ と $R(x)$ を求めよ.

京大 2019 年 [5] 半径 1 の球面上の 5 点 A, B_1, B_2, B_3, B_4 は, 正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を底面とする四角錐をなしている. この 5 点が球面上を動くとき, 四角錐 $AB_1B_2B_3B_4$ の体積の最大値を求めよ.

京大 2021 年 [1] 10 進法で表された数 6.75 を 2 進法で表せ. また, この数と 2 進法で表された数 101.0101 との積として与えられる数を 2 進法および 4 進法で表せ.

阪大 2015 年 [1] 実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき, 不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ.

神戸大 2012 年 [3] 以下の問に答えよ.

(1) 正の実数 x, y に対して

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$$

が成り立つことを示し, 等号が成立するための条件を求めよ.

(2) n を自然数とする. n 個の正の実数 $a_1, \dots, a_n$ に対して

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

が成り立つことを示し, 等号が成立するための条件を求めよ.

神戸大 2021 年 [2] k, x, y, z を実数とする. k が以下の (1), (2), (3) のそれぞれの場合に, 不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 + k(xy + yz + zx) \geq 0$$

が成り立つことを示せ. また等号が成り立つのはどんな場合か.

(1) $k = 2$

(2) $k = -1$

(3) $-1 < k < 2$

九大 2019 年 [4] 0 でない 2 つの整式 $f(x), g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする.

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7$$

$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ.

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ.

0.2.2 複素数と方程式 (数学 II)

分野 II	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学												1	1	
東北大学									1					
東京大学													1	
一橋大学							3				3			3
名古屋大学					3							1		1
京都大学				1		5								
大阪大学														
神戸大学														
広島大学														
九州大学										3		3		

北大 2023 年 [1] $P(x)$ を x についての整式とし, $P(x)P(-x) = P(x^2)$ は x についての恒等式であるとする.

- (1) $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$ であることを示せ.
- (2) $P(x)$ が $x - 1$ で割り切れないならば, $P(x) - 1$ は $x + 1$ で割り切れることを示せ.
- (3) 次数が 2 である $P(x)$ をすべて求めよ.

東大 2023 年 [1] k を正の実数とし, 2 次方程式 $x^2 + x - k = 0$ の 2 つの実数解を α, β とする. k が $k > 2$ の範囲を動くとき,

$$\frac{\alpha^3}{1 - \beta} + \frac{\beta^3}{1 - \alpha}$$

の最小値を求めよ.

一橋大 2017 年 [3] $P(0) = 1$, $P(x+1) - P(x) = 2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ.

一橋大 2024 年 [3] $f(x)$ は x に関する 4 次多項式で 4 次の係数は 1 である. $f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると 1 余り, $(x-1)^2$ で割ると 2 余る. $f(x)$ を求めよ.

名大 2024 年 [1] 次の問いに答えよ.

- (1) 方程式 $x^3 - 3x^2 - 50 = 0$ の実数解を求めよ.
- (2) 実数 p, q が $p + q = pq$ を満たすとする. $X = pq$ とおくとき, $p^3 + q^3$ を X で表せ.
- (3) 条件

$$p^3 + q^3 = 50, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p < q$$

を満たす 0 でない実数の組 (p, q) をすべて求めよ.

京大 2016 年 [5] 実数を係数とする 3 次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に対し, 次の条件を考える.

- (イ) 方程式 $f(x) = 0$ の解であるすべての複素数 α に対し, α^3 もまた $f(x) = 0$ の解である.
- (ロ) 方程式 $f(x) = 0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ.

この 2 つの条件 (イ), (ロ) を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ.

九大 2020 年 [3] a, b, c を整数とし, i を虚数単位とする. 整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $f\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a, b を c を用いて表せ.
- (2) $f(1)$ を 7 で割ると 4 余り, $f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るとする. c の絶対値が 40 以下であるとき, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ.

九大 2022 年 [3] k を実数とし, 整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$$

で定める. 方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ は $x - 2$ で割り切れることを示せ.
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は負の実数解をもつことを示せ.
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ のすべての実数解が整数であり, すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする. このような k をすべて求めよ.

0.2.3 図形と方程式 (数学 II)

◀ 分野 II	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学	3									1				
東北大学					2			1		3	1	3		
東京大学	4	2	2・3		3	1		1	4		3	1		
一橋大学					2		4		2・4			3		
名古屋大学	3	1		1	1			1						
京都大学									3			4		
大阪大学		3	1	1					1				1	
神戸大学	2	1	2		1							2	1・3	
広島大学			4	1			2		4			2		4
九州大学			2・4	1			2				1・2			

東大 2012 年 [2] 実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし、座標平面上の 4 点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(t, 0)$ を考える. また線分 AB 上の点 D を $\angle ACO = \angle BCD$ となるように定める. t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ.

東大 2013 年 [2] 座標平面上の 3 点

$$P(0, -\sqrt{2}), \quad Q(0, \sqrt{2}), \quad A(a, \sqrt{a^2+1}) \quad (0 \leq a \leq 1)$$

を考える.

(1) 2つの線分の長さの差 $PA - AQ$ は a によらない定数であることを示し、その値を求めよ.

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする. 点 B から直線 $y = 2$ へ下ろした垂線と直線 $y = 2$ との交点を C とする. このとき、線分の長さの和

$$PA + AB + BC$$

は a によらない定数であることを示し、その値を求めよ.

東大 2015 年 [3]

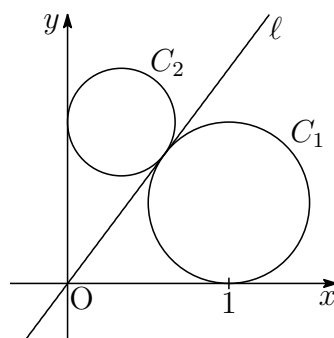
ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の3条件 (i), (ii), (iii) で定まる円 C_1 , C_2 を考える．

(i) 円 C_1 , C_2 は2つの不等式 $x \geq 0$, $y \geq 0$ で定まる領域に含まれる．

(ii) 円 C_1 , C_2 は直線 ℓ と同一点で接する．

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1 ，円 C_2 の半径を r_2 とする． $8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 ℓ の方程式と，その最小値を求めよ．



東大 2016 年 [1] 座標平面上の3点 $P(x, y)$, $Q(-x, -y)$, $R(1, 0)$ が鋭角三角形をなすための (x, y) についての条件を求めよ．また，その条件をみたす点 $P(x, y)$ の範囲を図示せよ．

一橋大 2017 年 [4] 正の実数 a, b, c は $a + b + c = 1$ を満たす．連立方程式

$$|ax + by| \leq 1, \quad |cx - by| \leq 1$$

の表す xy 平面の領域を D とする． D の面積の最小値を求めよ．

一橋大 2019 年 [2] 原点を O とする座標平面上の点 Q は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の部分を動く．点 Q と点 $A(2, 2)$ に対して

$$\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ}) \overrightarrow{OQ}$$

を満たす点 P の軌跡を求め，図示せよ．

一橋大 2019 年 [4] 原点を O とする座標平面上に，点 $(2, 0)$ を中心とする半径2の円 C_1 と，点 $(1, 0)$ を中心とする半径1の円 C_2 がある．点 P を中心とする円 C_3 は C_1 に内接し，かつ C_2 に外接する．ただし， P は x 軸上にないものとする． P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とするとき，三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ．

阪大 2013 年 [1] xy 平面において、点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

である。これを証明せよ。

阪大 2023 年 [1] a, b を実数とする。 θ についての方程式

$$\cos 2\theta = a \sin \theta + b$$

が実数解をもつような点 (a, b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

神戸大 2013 年 [2] a, b, c は実数とし、 $a < b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ が、辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

- (1) a を b, c を用いて表せ。
- (2) $b - a \geq 2$ が成り立つことを示せ。
- (3) 斜辺 AB の長さの最小値と、そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

神戸大 2015 年 [1] s, t を $s < t$ をみたす実数とする。座標平面上の 3 点 $A(1, 2)$, $B(s, s^2)$, $C(t, t^2)$ が一直線上にあるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) s と t の間の関係式を求めよ。
- (2) 線分 BC の中点を $M(u, v)$ とする。 u と v の間の関係式を求めよ。
- (3) s, t が変化するとき、 v の最小値と、そのときの u, s, t の値を求めよ。

神戸大 2022 年 [2] a を正の実数とし、円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = \sqrt{a}x - 2\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P, Q で交わっているとする。線分 PQ の中点を $R(s, t)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) s, t の値を a を用いて表せ。
- (3) a が (1) で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ。
- (4) t の値を s を用いて表せ。

神戸大 2023 年 [3] a を正の実数とする. 2 つの円

$$C_1 : x^2 + y^2 = a, \quad C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$$

が異なる 2 点 A, B で交わっているとする. 直線 AB が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ $(p, 0)$, $(0, q)$ とするとき, 以下の間に答えよ.

- (1) a のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) p, q の値を a を用いて表せ.
- (3) p, q の値が共に整数となるような a の値をすべて求めよ.

広大 2013 年 [4] 座標平面上で, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし, 2 点 $P(0, 1)$, $Q(s, 0)$ を考える. 2 点 P, Q を通る直線を ℓ とし, ℓ と C の交点のうち P ではないものを R とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 点 R の座標を s を用いて表せ.
- (2) x 座標と y 座標がともに有理数である点を有理点という. s が有理数のとき, R は有理点であることを示せ.

広大 2014 年 [1] 座標平面上で, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. C の外部にある点 $P(a, b)$ から C にひいた 2 本の接線と C との接点を H, H' とする. $\angle OPH = \theta$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) PH の長さ, および $\sin \theta$ を a, b を用いて表せ.
- (2) $HH' = OP$ となるような点 P の軌跡を求めよ.

広大 2017 年 [2] 座標平面上の 3 点

$$O(0, 0), \quad A(3, 0), \quad B(1, 2)$$

を考える. C を線分 OA 上にあり, $\angle OBC = 45^\circ$ を満たす点とする. また, P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする. 点 Q, R, P' を次により定める.

- (a) 点 P を通り傾きが 1 の直線と, 直線 AB の交点を Q とする.
- (b) 点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と, 直線 OB の交点を R とする.
- (c) 点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と, 直線 OA の交点を P' とする.

次の問いに答えよ.

- (1) 点 Q の座標を t を用いて表せ.
- (2) 点 R の座標を t を用いて表せ.
- (3) 点 P' の座標を t を用いて表せ.
- (4) 点 P' の x 座標を $f(t)$ とする. 数列 $\{t_n\}$ を

$$t_1 = 2, \quad t_{n+1} = f(t_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. 数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ.

九大 2021 年 [1] 座標平面上の 3 点 $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 2)$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 三角形 OAB に内接する円の中心の座標を求めよ.
- (2) 中心が第 1 象限にあり, x 軸と y 軸の両方に接し, 直線 AB と異なる 2 つの交点をもつような円を考える. この 2 つの交点を P, Q とするとき, 線分 PQ の長さの最大値を求めよ.

0.2.4 三角関数 (数学 II)

◀ 分野 II	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学			1						2	2	3			
東北大学		2		4							3			2
東京大学										3			4	3
一橋大学				3・4						2				
名古屋大学														
京都大学		5					4						3	
大阪大学				2				1		3				
神戸大学														
広島大学							1			2	4			
九州大学				3									2	

北大 2013 年 [1] $f(x) = \sqrt{2} \sin x \cos x + \sin x + \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) とする.

- (1) $t = \sin x + \cos x$ とおき, $f(x)$ を t の関数で表せ.
- (2) t の取り得る値の範囲を求めよ.
- (3) $f(x)$ の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ.

北大 2019 年 [2] x を正の実数とし, 座標平面上に 3 点 $A(x, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, 3)$ をとる. 直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする. ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする.

- (1) $\tan \theta$ を x で表せ.
- (2) $x > 0$ における $\tan \theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ.

北大 2020 年 [2] 関数

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta - \sin \theta + \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を考える.

- (1) $t = \sin \theta - \cos \theta$ とおく. $f(\theta)$ を t の式で表せ.
- (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ.
- (3) a を実数の定数とする. $f(\theta) = a$ となる θ がちょうど 2 個であるような a の範囲を求めよ.

北大 2021 年 [3] 実数 x に対して,

$$f(x) = \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 2 \sin^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + 4 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$$

とおく.

(1) $t = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$ とおく. $\sin^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$ と $\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$ をそれぞれ t の式で表せ.

(2) $0 \leq x \leq \pi$ のとき, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ.

東北大 2012 年 [2] 関数 $f(x)$ を $f(x) = \left| 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3} \cos x - \frac{5}{4} \right|$ と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $t = -\sin x + \sqrt{3} \cos x$ とおく. $f(x)$ を t の関数として表せ.

(2) x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.

(3) x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき, $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ. また, $f(x)$ が最大値をとる x は $60^\circ < x < 75^\circ$ を満たすことを示せ.

東北大 2014 年 [4] 実数 x, y に対して $A = 2 \sin x + \sin y$, $B = 2 \cos x + \cos y$ とおく.

(1) $\cos(x - y)$ を A, B を用いて表せ.

(2) x, y が $A = 1$ を満たしながら変化するとき, B の最大値と最小値, およびそのときの $\sin x, \cos x$ の値を求めよ.

一橋大 2014 年 [4] 半径 1 の球が直円錐に内接している. この直円錐の底面の半径を r とし, 表面積を S とする.

(1) S を r を用いて表せ.

(2) S の最小値を求めよ.

京大 2023 年 [3]

(1) $\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ の式として表せ.

(2) 半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さが 1.15 より大きいかな否かを理由を付けて判定せよ.

阪大 2014 年 [2] 次の問いに答えよ.

- (1) $\cos x + \cos y \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y に対して等式

$$\tan \frac{x+y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

が成り立つことを証明せよ.

- (2) $\cos x + \cos y + \cos z \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y, z に対して等式

$$\tan \frac{x+y+z}{3} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z}$$

は成り立つか. 成り立つときは証明し, 成り立たないときは反例を挙げよ.

阪大 2018 年 [1] 関数 $f(t) = (\sin t - \cos t) \sin 2t$ を考える.

- (1) $x = \sin t - \cos t$ とおくとき, $f(t)$ を x を用いて表せ.
 (2) t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を動くとき, $f(t)$ の最大値と最小値を求めよ.

阪大 2020 年 [3] 三角形 ABC において, 辺 AB の長さを c , 辺 CA の長さを b で表す. $\angle ACB = 3\angle ABC$ であるとき, $c < 3b$ を示せ.

九大 2014 年 [3] 鋭角三角形 $\triangle ABC$ について, $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさを, それぞれ A, B, C とする. $\triangle ABC$ の重心を G , 外心を O とし, 外接円の半径を R とする.

- (1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を, それぞれ AD, OE とする. このとき,

$$AD = 2R \sin B \sin C, \quad OE = R \cos A$$

を証明せよ.

- (2) G と O が一致するならば $\triangle ABC$ は正三角形であることを証明せよ.
 (3) $\triangle ABC$ が正三角形でないとし, さらに OG が BC と平行であるとする. このとき,

$$AD = 3OE, \quad \tan B \tan C = 3$$

を証明せよ.

0.2.5 指数関数と対数関数 (数学 II)

◀ 分野 II	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学														
東北大学	1								2					3
東京大学														2
一橋大学							1							
名古屋大学											2			
京都大学	5			4			2		1			1	1	4
大阪大学	1													
神戸大学														
広島大学	2	1												
九州大学														

東大 2024 年 [2] 以下の問いに答えよ．必要ならば， $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい．

- (1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ．
- (2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ．

一橋大 2017 年 [1] 実数 a, b は $a \geq 1, b \geq 1, a + b = 9$ を満たす．

- (1) $\log_3 a + \log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ．
- (2) $\log_2 a + \log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ．

名大 2021 年 [2] 4 つの実数を $\alpha = \log_2 3, \beta = \log_3 5, \gamma = \log_5 2, \delta = \frac{3}{2}$ とおく．以下の問いに答えよ．

- (1) $\alpha\beta\gamma = 1$ を示せ．
- (2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を小さい順に並べよ．
- (3) $p = \alpha + \beta + \gamma, q = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ とし， $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ とする．このとき $f\left(-\frac{1}{2}\right), f(-1)$ および $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ．

京大 2014 年 [4] 次の式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 次の不等式

$$a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ. ただし, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい.

京大 2019 年 [1] 次の各問に答えよ.

(1) a は実数とする. x に関する整式 $x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2$ を整式 $x^3 + x^2 + x + 1$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とする. $R(x)$ の x の 1 次項の係数が 1 のとき, a の値を定め, さらに $Q(x)$ と $R(x)$ を求めよ.

(2) 8.94^{18} の整数部分は何桁か. また最高位からの 2 桁の数字を求めよ. 例えば, 12345.6789 の最高位からの 2 桁は 12 を指す.

京大 2022 年 [1] $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ. ただし, $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい.

京大 2023 年 [1] 次の式の分母を有理化し, 分母に 3 乗根の記号が含まれない式として表せ.

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5}$$

京大 2024 年 [4] ある自然数を八進法, 九進法, 十進法でそれぞれ表したとき, 桁数がすべて同じになった. このような自然数で最大のものを求めよ. ただし, 必要なら次を用いてもよい.

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011, \quad 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$$

阪大 2011 年 [1] 実数の組 (x, y, z) で, どのような整数 l, m, n に対しても, 等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

広大 2011 年 [2] 次の問いに答えよ.

(1) $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ.

(2) p, q を異なる自然数とすると, $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ.

(3) $\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ.

0.2.6 微分法と積分法 (数学 II)

◀ 分野 II	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学	2	2・3	4	1	1	1・2	4	4	4	4	4		4	3
東北大学	4	1	4	1	4	2	2	3		1	4	2	4	1
東京大学	1	4	1	1・3	1・2	3	1	3・4	1・2	1	1	2	2	1
一橋大学	3	2・3	3	2		4		2・5	3	4	4・5	2	2	2
名古屋大学	1		2	3			1		1	1	1	3	1	
京都大学	3・4	1・3	4	2	1	1	1	1・2		1・2	2	3	5	5
大阪大学	2		3	3	2	2	1・2			1	1・3	3	2	1
神戸大学	1	2		1		2	1・2		1	1		1		3
広島大学	3	2	1	2	1・4	1	4	1・3		1	1	4	4	2
九州大学	1	2	4	1	1	1	1	1	2	1	3	1・4	1	1

北大 2012 年 [2] $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta) = 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta$$

を考える.

- (1) $x = \sin \theta$ とおく. $f(\theta)$ を x で表せ.
- (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ.

北大 2023 年 [4] q を実数とする. 座標平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $P: y = x^2 + q$ がある.

- (1) C と P に同じ点で接する傾き正の直線が存在するとき, q の値およびその接点の座標を求めよ.
- (2) (1) で求めた q の値を q_1 , 接点の y 座標を y_1 とするとき, 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ y \geq x^2 + q_1 \\ y \leq y_1 \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ.

東北大 2011 年 [4] 放物線 $y = x^2$ の 2 本の接線 l, m は垂直であるとする.

- (1) l の接点の座標が (a, a^2) で与えられるとき, l, m の交点の座標を a を用いて表せ.
- (2) l, m が y 軸に関して対称のとき, l, m および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

東北大 2014 年 [1] 曲線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ における接線を l_1 , 点 $Q(b, b^2)$ における接線を l_2 とする. ただし, $a < b$ とする. l_1 と l_2 の交点を R とし, 線分 PR , 線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする.

- (1) R の座標を a と b を用いて表せ.
- (2) S を a と b を用いて表せ.
- (3) l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ.

東北大 2022 年 [2] 実数 t の関数

$$F(t) = \int_0^1 |x^2 - t^2| dx$$

について考える.

- (1) $0 \leq t \leq 1$ のとき, $F(t)$ を t の整式として表せ.
- (2) $t \geq 0$ のとき, $F(t)$ を最小にする t の値 T と $F(T)$ の値を求めよ.

東北大 2024 年 [1] a を正の実数とし, $f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする. O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y = f(x)$ の頂点を A とする. 直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $P(p, f(p))$ とし, O から C へ引いた接線の接点を $Q(q, f(q))$ とする. ただし, $q > 0$ とする.

- (1) p, q の値を a を用いて表せ. また, $p > q$ であることを示せ.
- (2) 放物線 C の $q \leq x \leq p$ の部分, 線分 OP , および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく. S を a を用いて表せ.
- (3) (2) の S に対し, $S = \frac{2}{3}$ となるとき a の値を求めよ.

東大 2011 年 [1] x の 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が, 3 つの条件

$$f(1) = 1, \quad f(-1) = -1, \quad \int_{-1}^1 (bx^2 + cx + d) dx = 1$$

を全て満たしているとする. このような $f(x)$ の中で定積分

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{f''(x)\}^2 dx$$

を最小にするものを求め, そのときの I の値を求めよ. ただし, $f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す.

東大 2012 年 [4] 座標平面上の放物線 C を $y = x^2 + 1$ で定める. s, t は実数とし $t < 0$ を満たすとする. 点 (s, t) から放物線 C へ引いた接線を l_1, l_2 とする.

(1) l_1, l_2 の方程式を求めよ.

(2) a を正の実数とする. 放物線 C と直線 l_1, l_2 で囲まれる領域の面積が a となる (s, t) を全て求めよ.

東大 2013 年 [1] 関数 $y = x(x-1)(x-3)$ のグラフを C , 原点 O を通る傾き t の直線を ℓ とし, C と ℓ が O 以外に共有点をもつとする. C と ℓ の共有点を O, P, Q とし, $|\overrightarrow{OP}|$ と $|\overrightarrow{OQ}|$ の積を $g(t)$ とおく. ただし, それらの共有点の 1 つが接点である場合は, O, P, Q のうちの 2 つが一致して, その接点であるとする. 関数 $g(t)$ の増減を調べ, その極値を求めよ.

東大 2014 年 [1] 以下の問いに答えよ.

(1) t を実数の定数とする. 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める. このとき, 関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ.

(2) (1) の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする. t が $t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき, $g(t)$ の最小値を求めよ.

東大 2014 年 [3] 座標平面の原点を O で表す.

線分 $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上の点 P と, 線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-3 \leq x \leq 0$) 上の点 Q が, 線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く. このとき, 線分 PQ の通過する領域を D とする.

(1) s を $-3 \leq s \leq 2$ をみたす実数とするとき, 点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ.

(2) D を図示せよ.

東大 2015 年 [1] 以下の命題 A, B それぞれに対し, その真偽を調べよ. また, 真ならば証明を与え, 偽ならば反例を与えよ.

命題 A n が正の整数ならば, $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$ が成り立つ.

命題 B 整数 n, m, ℓ が $5n + 5m + 3\ell = 1$ をみたすならば, $10nm + 3m\ell + 3n\ell < 0$ が成り立つ.

東大 2015 年 [2] 座標平面上の 2 点 $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$ を考える. また, P を座標平面上の点とし, その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする. 次の条件 (i) または (ii) をみたす点 P の範囲を図示し, その面積を求めよ.

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで, 点 A, P, B をすべて通るものがある.

(ii) 点 A, P, B は同一直線上にある.

東大 2016 年 [3] 座標平面上の 2 つの放物線

$$A: y = x^2$$

$$B: y = -x^2 + px + q$$

が点 $(-1, 1)$ で接している. ここで, p と q は実数である. さらに, t を正の実数とし, 放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$, y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする.

(1) p と q の値を求めよ.

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする. ただし, A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める. $S(t)$ を求めよ.

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ.

東大 2017 年 [1] 座標平面において 2 つの放物線 $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ を考える. ただし, s, t は実数で, $0 < s, 0 < t < 1$ をみたすとする. 放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし, 放物線 B の $x \geq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする. A と B がただ 1 点を共有するとき, $\frac{Q}{P}$ の最大値を求めよ.

東大 2018 年 [3] $a > 0$ とし,

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく.

- (1) $x \geq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための, a についての条件を求めよ.
- (2) 次の 2 条件をみたす点 (a, b) の動きうる範囲を求め, 座標平面上に図示せよ.

条件 1: 方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ.

条件 2: さらに, 方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である.

東大 2018 年 [4] 放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ をみたす部分を C とする. 座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考える.

- (1) 点 P が C 上を動くとき,

$$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$$

をみたす点 Q の軌跡を求めよ.

- (2) 点 P が C 上を動き, 点 R が線分 OA 上を動くとき,

$$\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$$

をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.

東大 2019 年 [1] 座標平面の原点を O とし, $O, A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)$ を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする. 3 点 $P(p, 0), Q(0, q), R(r, 1)$ はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあり, 3 点 O, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする.

- (1) q と r を p で表し, p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) $\frac{CR}{OQ}$ の最大値, 最小値を求めよ.

東大 2019 年 [2] O を原点とする座標平面において、点 $A(2, 2)$ を通り、線分 OA と垂直な直線を l とする。座標平面上を点 $P(p, q)$ が次の 2 つの条件をみたしながら動く。

$$\text{条件 1: } 8 \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \leq 17$$

条件 2: 点 O と直線 l の距離を c とし、点 $P(p, q)$ と直線 l の距離を d とする
とき $cd \geq (p-1)^2$

このとき、 P が動く領域を D とする。さらに、 x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。

- (1) D を図示し、その面積を求めよ。
- (2) $\cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

東大 2020 年 [1] $a > 0, b > 0$ とする。座標平面上の曲線

$$C: y = x^3 - 3ax^2 + b$$

が、以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1: C は x 軸に接する。

条件 2: x 軸と C で囲まれた領域 (境界は含まない) に、 x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

東大 2021 年 [1] a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

東大 2022 年 [2] $y = x^3 - x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする。 C 上の点 $P(\alpha, \alpha^3 - \alpha)$ を通り、点 P における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ とする。 C と ℓ は相異なる 3 点で交わるとする。

- (1) α のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) C と ℓ の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を β, γ とする。ただし $\beta < \gamma$ とする。 $\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 \neq 0$ となることを示せ。
- (3) (2) の β, γ を用いて、

$$u = 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1}$$

と定める。このとき、 u のとりうる値の範囲を求めよ。

東大 2023 年 [2] 座標平面上の放物線 $y = 3x^2 - 4x$ を C とおき、直線 $y = 2x$ を ℓ とおく．実数 t に対して、 C 上の点 $P(t, 3t^2 - 4t)$ と ℓ の距離を $f(t)$ とする．

- (1) $-1 \leq a \leq 2$ の範囲の実数 a に対し、定積分

$$g(a) = \int_{-1}^a f(t) dt$$

を求めよ．

- (2) a が $0 \leq a \leq 2$ の範囲を動くとき、 $g(a) - f(a)$ の最大値および最小値を求めよ．

東大 2024 年 [1] 座標平面上で、放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $Q(-\cos \theta, \sin \theta)$ を通り、点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2 + y^2 = 1$ と共通の接線を持っている．ただし、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．

- (1) a, b, c を $s = \sin \theta$ を用いて表せ．
 (2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ．
 (3) $A \geq \sqrt{3}$ を示せ．

一橋大 2011 年 [3] xy 平面上に放物線 $C: y = -3x^2 + 3$ と 2 点 $A(1, 0)$, $P(0, 3p)$ がある．線分 AP と C は、 A とは異なる点 Q を共有している．

- (1) 定数 p の存在する範囲を求めよ．
 (2) S_1 を、 C と線分 AQ で囲まれた領域とし、 S_2 を、 C 、線分 QP 、および y 軸とで囲まれた領域とする． S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ．

一橋大 2012 年 [2] a を 0 以上の定数とする．関数 $y = x^3 - 3a^2x$ のグラフと方程式 $|x| + |y| = 2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ．

一橋大 2012 年 [3] 原点を O とする xy 平面上に、放物線 $C: y = 1 - x^2$ がある． C 上に 2 点 $P(p, 1 - p^2)$, $Q(q, 1 - q^2)$ を $p < q$ となるようにとる．

- (1) 2 つの線分 OP , OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を、 p と q の式で表せ．
 (2) $q = p + 1$ であるとき S の最小値を求めよ．
 (3) $pq = -1$ であるとき S の最小値を求めよ．

一橋大 2013 年 [3] 原点を O とする xy 平面上に、放物線 $C: y = 1 - x^2$ がある。 C 上に 2 点 $P(p, 1 - p^2)$, $Q(q, 1 - q^2)$ を $p < q$ となるようにとる。

- (1) 2 つの線分 OP , OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を, p と q の式で表せ。
- (2) $q = p + 1$ であるとき S の最小値を求めよ。
- (3) $pq = -1$ であるとき S の最小値を求めよ。

一橋大 2014 年 [2] $0 < t < 1$ とし, 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線を l とする。 C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし, C と l と直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。 $S_1 + S_2$ の最小値を求めよ。

一橋大 2016 年 [4] a を実数とし, $f(x) = x^3 - 3ax$ とする。 区間 $-1 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。 M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

一橋大 2018 年 [2] $-1 \leq t \leq 1$ とし, 曲線 $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ 上の点 $\left(t, \frac{t^2 - 1}{2}\right)$ における接線を l とする。 半円 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \leq 0$) と l で囲まれた部分の面積を S とする。 S のとりうる値の範囲を求めよ。

一橋大 2018 年 [5] a を実数とし, $f(x) = x - x^3$, $g(x) = a(x - x^2)$ とする。 2 つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ は $0 < x < 1$ の範囲に共有点を持つ。

- (1) a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。

一橋大 2019 年 [3] $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とする。 また, α は 1 より大きい実数とする。 曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(\alpha, f(\alpha))$ における接線と x 軸の交点を Q とする。 点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを ℓ とする。

- (1) ℓ と C の接点の x 座標を α の式で表せ。
- (2) $\alpha = 2$ とする。 ℓ と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

一橋大 2020 年 [4] $x > 0$ に対し

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} |t - x| dt$$

と定める。 $F(x)$ の最小値を求めよ。

一橋大 2021 年 [4] $k > 0$ とする. 円 C を $x^2 + (y-1)^2 = 1$ とし, 放物線 S を $y = \frac{1}{k}x^2$ とする.

- (1) C と S が共有点をちょうど 3 個持つときの k の範囲を求めよ.
- (2) k が (1) の範囲を動くとき, C と S の共有点のうちで x 座標が正の点を P とする. P における S の接線と S と y 軸とによって囲まれる領域の面積の最大値を求めよ.

一橋大 2021 年 [5] サイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とするとき,

$$\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c) dx = 0$$

となる確率を求めよ.

一橋大 2022 年 [2] $0 \leq \theta < 2\pi$ とする. 座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $Q(1, 3 \sin 2\theta)$ が三角形をなすとき, $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ.

一橋大 2023 年 [2] a を正の実数とする. 2 つの曲線 $C_1 : y = x^3 + 2ax^2$ および $C_2 : y = 3ax^2 - \frac{3}{a}$ の両方に接する直線が存在するような a の範囲を求めよ.

一橋大 2024 年 [2] a, b を実数とする. 曲線 $C : y = x^2$ と曲線 $C' : y = -x^2 + ax + b$ はある点を共有しており, その点におけるそれぞれの接線は直交している. C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ.

京大 2011 年 [3] 実数 a が変化するとき, 3 次関数 $y = x^3 - 4x^2 + 6x$ と直線 $y = x + a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか. a の値によって分類せよ.

京大 2011 年 [4] xy 平面上で, 連立不等式

$$\begin{cases} |x| \leq 2, \\ y \geq x, \\ y \leq \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2 \end{cases}$$

を満たす領域の面積を求めよ.

京大 2012 年 [1] 2 つの曲線 $y = x^4$ と $y = x^2 + 2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ.

京大 2012 年 [3] 実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

京大 2013 年 [4] α, β を実数とする. xy 平面内で, 点 $(0, 3)$ を中心とする円 C と放物線

$$y = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$$

が点 $P(\sqrt{3}, 0)$ を共有し, さらに P における接線が一致している. このとき以下の問に答えよ.

(1) α, β の値を求めよ.

(2) 円 C , 放物線 $y = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

京大 2014 年 [2] t を実数とする. $y = x^3 - x$ のグラフ C へ点 $P(1, t)$ から接線を引く.

(1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ.

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき, $P(1, t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする. $S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ.

京大 2015 年 [1] 直線 $y = px + q$ が, $y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが, $y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフとは交わらないような (p, q) の範囲を図示し, その面積を求めよ.

京大 2016 年 [1] xy 平面内の領域

$$x^2 + y^2 \leq 2, \quad |x| \leq 1$$

で, 曲線 $C: y = x^3 + x^2 - x$ の上側にある部分の面積を求めよ.

京大 2017 年 [1] 曲線 $y = x^3 - 4x + 1$ を C とする. 直線 l は C の接線であり, 点 $P(3, 0)$ を通るものとする. また, l の傾きは負であるとする. このとき, C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

京大 2018 年 [1] a は正の実数とし, 座標平面内の点 (x_0, y_0) は 2 つの曲線

$$C_1: y = |x^2 - 1|, \quad C_2: y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり, $|x_0| \neq 1$ を満たすとする. C_1 と C_2 が (x_0, y_0) で共通の接線をもつとき, C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ.

京大 2018 年 [2] 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において、辺 BC 上に B とは異なる点 P を取り、線分 AP の垂直 2 等分線が辺 AB, 辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q, R とする.

(1) 線分 QR の長さを $\sin \angle BAP$ を用いて表せ.

(2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ.

京大 2020 年 [1] a を負の実数とする. xy 平面上で曲線 $C: y = |x|x - 3x + 1$ と直線 $\ell: y = x + a$ のグラフが接するときの a の値を求めよ. このとき, C と ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ.

京大 2020 年 [2] x の 2 次関数で, そのグラフが $y = x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ. ただし, 2 つの関数のグラフがある点で直交するとは, その点が 2 つのグラフの共有点であり, かつ接線どうしが直交することをいう.

京大 2021 年 [2] 定積分 $\int_{-1}^1 \left| x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right| dx$ を求めよ.

京大 2022 年 [3] xy 平面上の 2 直線 L_1, L_2 は直交し, 交点の x 座標は $\frac{3}{2}$ である. また, L_1, L_2 はともに $C: y = \frac{x^2}{4}$ に接している. このとき, L_1, L_2 および C で囲まれる図形の面積を求めよ.

京大 2023 年 [5] 整式 $f(x)$ が恒等式

$$f(x) + \int_{-1}^1 (x-y)^2 f(y) dy = 2x^2 + x + \frac{5}{3}$$

を満たすとき, $f(x)$ を求めよ.

京大 2023 年 [5] 整式 $f(x)$ が恒等式

$$f(x) + \int_{-1}^1 (x-y)^2 f(y) dy = 2x^2 + x + \frac{5}{3}$$

を満たすとき, $f(x)$ を求めよ.

京大 2024 年 [5] 関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフの $x > 1$ の部分を C とする. このとき, 下の条件を満たすような正の実数 a, b について, 座標平面の点 (a, b) が動く領域の面積を求めよ.

「 C と直線 $y = ax + b$ は二つの異なる共有点を持つ.」

阪大 2011 年 [2] 実数の組 (p, q) に対し, $f(x) = (x - p)^2 + q$ とおく.

- (1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り, しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ.
- (2) 実数の組 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ に対して, $f_1(x) = (x - p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x - p_2)^2 + q_2$ とおく. 実数 α, β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ.

- (3) 長方形 $R : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ を考える. また, 4 点 $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする. 実数の組 (p, q) を, 放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき, R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする. R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.

阪大 2013 年 [3] 曲線 $y = x^2 + x + 4 - |3x|$ と直線 $y = mx + 4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ.

阪大 2014 年 [3] 関数 $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は, $x = 0$ のとき極大値 M をとり, $x = \alpha$ のとき極小値 m をとるとする. ただし $\alpha \neq 0$ とする. このとき, p, q, r, s を α, M, m で表せ.

阪大 2015 年 [2] 直線 $\ell : y = kx + m$ ($k > 0$) が円 $C_1 : x^2 + (y - 1)^2 = 1$ と放物線 $C_2 : y = -\frac{1}{2}x^2$ の両方に接している. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) k と m を求めよ.
- (2) 直線 ℓ と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

阪大 2016 年 [2] 曲線 $C: y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - 2x$ を考える.

- (1) C と直線 $L: y = -x + t$ が異なる 4 点で交わるような t の値の範囲を求めよ.
- (2) C と L が異なる 4 点で交わるとし, その交点を x 座標が小さいものから順に P_1, P_2, P_3, P_4 とするとき,

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}| + |\overrightarrow{P_3P_4}|}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = 4$$

となるような t の値を求めよ.

- (3) t が (2) の値をとるとき, C と線分 P_2P_3 で囲まれる図形の面積を求めよ.

阪大 2017 年 [1] b, c を実数, q を正の実数とする. 放物線 $P: y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき, 放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ.

阪大 2017 年 [2] 実数 x, y, z が

$$x + y + z = 1, \quad x + 2y + 3z = 5$$

を満たすとする.

- (1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ の最小値を求めよ.
- (2) $z \geq 0$ のとき, xyz が最大となる z の値を求めよ.

阪大 2020 年 [1] a を $0 \leq a < 2\pi$ を満たす実数とする. 関数

$$f(x) = 2x^3 - (6 + 3\sin a)x^2 + (12\sin a)x + \sin^3 a + 6\sin a + 5$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ はただ 1 つの極大値をもつことを示し, その極大値 $M(a)$ を求めよ.
- (2) $0 \leq a < 2\pi$ における $M(a)$ の最大値とそのときの a の値, 最小値とそのときの a の値をそれぞれ求めよ.

阪大 2021 年 [1] a を実数とする. C を放物線 $y = x^2$ とする.

- (1) 点 $A(a, -1)$ を通るような C の接線は, ちょうど 2 本存在することを示せ.
- (2) 点 $A(a, -1)$ から C に 2 本の接線を引き, その接点を P, Q とする. 直線 PQ の方程式は $y = 2ax + 1$ であることを示せ.
- (3) 点 $A(a, -1)$ と直線 $y = 2ax + 1$ の距離を L とする. a が実数全体を動くとき, L の最小値とそのときの a の値を求めよ.

阪大 2021 年 [3] 整数 a, b, c に関する次の条件 (*) を考える.

$$\int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \quad \cdots (*)$$

- (1) 整数 a, b, c が (*) および $a \neq b$ をみたすとき, c^2 を a, b を用いて表せ.
- (2) $c = 3$ のとき, (*) および $a < b$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ.
- (3) 整数 a, b, c が (*) および $a \neq b$ をみたすとき, c は 3 の倍数であることを示せ.

阪大 2022 年 [3] 以下の問いに答えよ.

- (1) 実数 α, β に対し,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{(\alpha - \beta)^3}{6}$$

が成り立つことを示せ.

- (2) a, b を $b > a^2$ を満たす定数とし, 座標平面上に点 $A(a, b)$ をとる. さらに, 点 A を通り, 傾きが k の直線を ℓ とし, 直線 ℓ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積を $S(k)$ とする. k が実数全体を動くとき, $S(k)$ の最小値を求めよ.

阪大 2023 年 [2] 正の実数 a, x に対して,

$$y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^3 + a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$$

とする.

- (1) $t = \log_2 x$ とするとき, y を a, t を用いて表せ.
- (2) x が $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ の範囲を動くとき, y の最大値 M を a を用いて表せ.

阪大 2024 年 [1] 曲線 $y = |x^2 - 1|$ を C , 直線 $y = 2a(x + 1)$ を ℓ とする. ただし, a は $0 < a < 1$ を満たす実数とする.

- (1) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ.
- (2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる a の値を求めよ.

九大 2011 年 [1] 放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き, 交点を H とする. ただし, $t > 1$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) H の座標を t を用いて表せ.
- (2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y = x$ との交点の座標を R とするとき, 三角形 PRH の面積を t を用いて表せ.
- (3) $x \geq 1$ の範囲において, 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき, S_1 を t を用いて表せ.
- (4) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする. $S_1 = S_2$ であるとき, t の値を求めよ.

九大 2012 年 [2] 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ を考える. 曲線 $C: y = f(x)$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $t \geq 0$ のとき, 曲線 C は傾きが t である接線を 2 本持つことを示せ.
- (2) (1)において, 傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を, それぞれ $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ とする (ただし $p < q$). このとき, 点 P と点 Q は点 $A(-1, 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ.
- (3) $t \geq 0$ のとき, 2 点 P, Q の間の距離の最小値を求めよ. また, 最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ.

九大 2015 年 ① 座標平面上の2つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

を考える．ただし， a, b は実数とする．

- (1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるための a, b に関する条件を求めよ．

以下， a, b が (1) の条件を満たすとし， C_1 と C_2 で囲まれる面積が9であるとする．

- (2) b を a を用いて表せ．

- (3) a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ．

九大 2016 年 ① 座標平面において， x 軸上に3点 $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ ($0 < \alpha < \beta$) があり，曲線 $C : y = x^3 + ax^2 + bx$ が x 軸とこの3点で交わっているものとする．ただし， a, b は実数である．このとき，以下の問いに答えよ．

- (1) 曲線 C と x 軸で囲まれた2つの部分の面積の和を S とする． S を α と β の式で表せ．
- (2) β の値を固定して， $0 < \alpha < \beta$ の範囲で α を動かすとき， S を最小とする α を β の式で表せ．

九大 2017 年 ① 定数 $a < 1$ に対し，放物線 $C_1 : y = 2x^2 + 1$, $C_2 : y = -x^2 + a$ を考える．以下の問いに答えよ．

- (1) 放物線 C_1, C_2 の両方に接する2つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ．
- (2) C_1 と (1) で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積を S_1 , C_2 と (1) で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき， $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

九大 2019 年 ② k を実数とする．3次関数 $y = x^3 - kx^2 + kx + 1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする．このとき， k の値を求めよ．

九大 2020 年 [1] $a \geq 0$ とする. 2 つの放物線 $C_1: y = x^2$, $C_2: y = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ.
- (2) a が (1) で求めた範囲を動くとき, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S の最大値を求めよ.

九大 2021 年 [3] a を正の実数とし, 放物線

$$C: y = -x^2 - 2ax - a^3 + 10a$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 放物線 C と直線 $\ell: y = 8x + 6$ が接するような a の値を求めよ.
- (2) a が (1) で求めた値のとき, 放物線 C , 直線 ℓ , y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

九大 2022 年 [1] a を $-3 < a < 13$ をみたす実数とし, 次の曲線 C と直線 ℓ が接しているとする.

$$C: y = |x^2 + (3-a)x - 3a|, \quad \ell: y = -x + 13$$

以下の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの図形のうち, 点 $(a, 0)$ が境界線上にある図形の面積を求めよ.

九大 2022 年 [4] 定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

$f(x)$ を整式とする． $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び， $f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \dots \textcircled{1}$$

で定義する．定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる．定積分は次の性質 (A)，(B)，(C) をもつ．

$$(A) \int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$$

$$(B) a \leq c \leq b \text{ のとき, } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(C) 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) \geq h(x)$ ならば，

$$\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$$

ただし， $f(x)$ ， $g(x)$ ， $h(x)$ は整式， k ， l は定数である．

以下， $f(x)$ が区間 $0 \leq x \leq 1$ 上で増加関数になる場合を考える． n を自然数とする．定積分の性質 ア を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかる． $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式 ② と定積分の性質 イ より次の不等式が成り立つ．

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \dots \textcircled{3}$$

よって， n を限りなく大きくすると， S_n は $\int_0^1 f(x) dx$ に限りなく近づく．

- (1) 関数 $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるとき,

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことと定積分の定義 ① を用いて, 性質 (A) で $k = l = 1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

を示せ.

- (2) 定積分の定義 ① と, 関数の増減と導関数の関係を用いて, 次を示せ.

$$a < b \text{ のとき, 区間 } a \leq x \leq b \text{ において } g(x) > 0 \text{ ならば, } \int_a^b g(x) dx > 0$$

- (3) (A), (B), (C) のうち, 空欄 ア に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ. また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで, 不等式 ② を示せ.

- (4) (A), (B), (C) のうち, 空欄 イ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ. また, 不等式 ③ を示せ.

九大 2023 年 1 a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする. xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を, 次のように定める.

$$C : y = |(x - 3)(x + 3)|, \quad \ell : y = a$$

曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち, $y \geq a$ の領域にある部分の面積を S_1 , $y \leq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする. $S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ.

九大 2024 年 1 2 つの放物線

$$C_1 : y = 2x^2, \quad C_2 : y = 2x^2 - 8x + 16$$

の両方に接する直線を ℓ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) 2 つの放物線 C_1 , C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ.

0.3 数学 A

0.3.1 場合の数と確率 (数学 A)

◀ 分野 A	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学	4	4	2	4*	4		3	3		3		4	3	1・4
東北大学	3	3*	3	2	3		4	2	4		2	1	1	
東京大学		3	4				3		3	2	2	4	3	4
一橋大学				5	3	3		3	5	5	5	5	5	5
名古屋大学	2	2				2			3		3	2	3	3
京都大学	1		5		3	2	5	5	4	5	3		1	2
大阪大学		1	2					2				2		
神戸大学	3		3		3	3	3	3		3			2	2
広島大学		4*	5*	5		4	3	4	2	3	3	3	1	
九州大学	4*	4	3*	4*	3	3	3	4	1	4			4	4

「*」は旧課程の内容 (期待値) を含む。

北大 2020 年 [3] n を 2 以上の自然数とする. 1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い, 出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする.

- (1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ.
- (2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ.

北大 2023 年 [3] n を 2 以上の自然数とする. 1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に $a_1, a_2, \dots, a_n$ とし,

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく. また, K_n のとりうる値の最小値を q_n とする.

- (1) $K_2 = 5$ となる確率を求めよ.
- (2) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ.
- (3) q_n を求めよ. また, $K_n = q_n$ となるための $a_1, a_2, \dots, a_n$ に関する必要十分条件を求めよ.

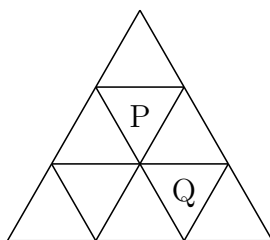
東北大 2022 年 [1] K を 3 より大きな奇数とし, $l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 (l, m, n) の個数 N を考える. ただし, たとえば, $K=5$ のとき, $(l, m, n)=(1, 1, 3)$ と $(l, m, n)=(1, 3, 1)$ とは異なる組とみなす.

- (1) $K=99$ のとき, N を求めよ.
- (2) $K=99$ のとき, l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 (l, m, n) の個数を求めよ.
- (3) $N > K$ を満たす最小の K を求めよ.

東北大 2023 年 [1] 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った, 中の見えない袋がある. 玉はすべて, 色が区別できる他には違いはないものとする. A, B の 2 人が, A から交互に, 袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う. ただし取り出した玉は袋の中には戻さない. A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし, その時点でゲームを終了する. B が白玉を取り出したら B の勝ちとし, その時点でゲームを終了する. 袋から玉がなくなったら引き分けとし, ゲームは終了する.

- (1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ.
- (2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ.

東大 2012 年 [3] 図のように, 正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り, 部屋 P, Q を定める. 1 つの球が部屋 P を出発し, 1 秒ごとに, そのままその部屋にとどまることなく, 辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する. 球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ.



東大 2013 年 [4] A, B の 2 人がいる. 投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり, 最初は A がそのコインを持っている. 次の操作を繰り返す.

- (i) A がコインを持っているときは, コインを投げ, 表が出れば A に 1 点を与え, コインは A がそのまま持つ. 裏が出れば, 両者に点を与えず, A はコインを B に渡す.
- (ii) B がコインを持っているときは, コインを投げ, 表が出れば B に 1 点を与え, コインは B がそのまま持つ. 裏が出れば, 両者に点を与えず, B はコインを A に渡す.

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で, 2 点を獲得した方の勝利とする. たとえば, コインが表, 裏, 表, 表と出た場合, この時点で A は 1 点, B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる.

A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ.

東大 2017 年 [3] 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という. 格子点上を次の規則 (a), (b) に従って動く点 P を考える.

- (a) 最初に, 点 P は原点 O にある.
- (b) ある時刻で点 P が格子点 (m, n) にあるとき, その 1 秒後の点 P の位置は, 隣接する格子点 $(m+1, n)$, $(m, n+1)$, $(m-1, n)$, $(m, n-1)$ のいずれかであり, また, これらの点に移動する確率は, それぞれ $\frac{1}{4}$ である.

(1) 最初から 1 秒後の点 P の座標を (s, t) とする. $t - s = -1$ となる確率を求めよ.

(2) 点 P が, 最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ.

東大 2019 年 [3] 正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする. また, 投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある. 点 P が最初に点 A にある. 次の操作を 10 回繰り返す.

操作: コインを投げ, 表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ, 裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる.

例えば, 点 P が点 H にある状態で, 投げたコインの表が出れば点 A に移動させ, 裏が出れば点 G に移動させる. 以下の事象を考える.

事象 S : 操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある.

事象 T : 1 回目から 10 回目の操作によって, 点 P は少なくとも 1 回, 点 F に移動する.

(1) 事象 S が起こる確率を求めよ.

(2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ.

東大 2024 年 [4] n を 5 以上の奇数とする. 平面上の点 O を中心とする円をとり, それに内接する正 n 角形を考える. n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ. ただし, どの 4 点も等確率で選ばれるものとする. 選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ.

一橋大 2014 年 [5] 数直線上の点 P を次の規則で移動させる. 一枚の硬貨を投げて, 表が出れば P を $+1$ だけ移動させ, 裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる. P は初め原点にあるとし, 硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする.

(1) $a_3 = 0$ となる確率を求めよ.

(2) $a_4 = 1$ となる確率を求めよ.

(3) $n \geq 3$ のとき, $a_n = n - 3$ となる確率を n を用いて表せ.

一橋大 2015 年 [3] n を 4 以上の整数とする. 正 n 角形の 2 つの頂点を無作為に選び, それらを通る直線を l とする. さらに, 残りの $n - 2$ 個の頂点から 2 つの頂点を無作為に選び, それらを通る直線を m とする. 直線 l と m が平行になる確率を求めよ.

一橋大 2016 年 [3] 硬貨が 2 枚ある. 最初は 2 枚とも表の状態で置かれている. 次の操作を n 回行ったあと, 硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ.

[操作] 2 枚とも表, または 2 枚とも裏のときには, 2 枚の硬貨両方を投げる.
表と裏が 1 枚ずつのときには, 表になっている硬貨だけを投げる.

一橋大 2020 年 [5] n を正の整数とする. 1 枚の硬貨を投げ, 表が出れば 1 点, 裏が出れば 2 点を得る. この試行を繰り返し, 点の合計が n 以上になったらやめる. 点の合計がちょうど n になる確率を p_n で表す.

- (1) p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ.
- (2) $|p_{n+1} - p_n| < 0.01$ を満たす最小の n を求めよ.

一橋大 2021 年 [5] サイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とするとき,

$$\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c) dx = 0$$

となる確率を求めよ.

一橋大 2024 年 [5] n を 3 以上の奇数とする. 円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相異なる 3 点を選んだとき, その 3 点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ.

京大 2013 年 [5] 投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する. 数直線上に石を置き, この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し, 裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する.

- (1) 石が座標 x の点にあるとする. 2 回硬貨を投げたとき, 石が座標 x の点にある確率を求めよ.
- (2) 石が原点にあるとする. n を自然数とし, $2n$ 回硬貨を投げたとき, 石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ.

京大 2020 年 [5] 縦 4 個, 横 4 個のマスのそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく. このマスの横の並びを行といい, 縦の並びを列という. どの行にも, どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ. 下図はこのような入れ方の 1 例である.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

阪大 2011 年 [1] 実数の組 (x, y, z) で、どのような整数 l, m, n に対しても、等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

阪大 2013 年 [2] 1 個のさいころを 3 回投げる試行において、1 回目に出る目を a 、2 回目に出る目を b 、3 回目に出る目を c とする.

(1) $\log_{\frac{1}{4}}(a+b) > \log_{\frac{1}{2}}c$ となる確率を求めよ.

(2) $2^a + 2^b + 2^c$ が 3 の倍数となる確率を求めよ.

阪大 2018 年 [2] 1 個のさいころを 3 回投げる試行において、1 回目に出る目を a 、2 回目に出る目を b 、3 回目に出る目を c とする.

(1) $\int_a^c (x-a)(x-b) dx = 0$ である確率を求めよ.

(2) a, b が 2 以上かつ $2 \log_a b - 2 \log_a c + \log_b c = 1$ である確率を求めよ.

阪大 2022 年 [2] n を 2 以上の自然数とし、1 個のさいころを n 回投げて出る目の数を順に

$X_1, X_2, \dots, X_n$ とする. $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小公倍数を L_n 、最大公約数を G_n とするとき、以下の問いに答えよ.

(1) $L_2 = 5$ となる確率および $G_2 = 5$ となる確率を求めよ.

(2) L_n が素数でない確率を求めよ.

(3) G_n が素数でない確率を求めよ.

九大 2012 年 [4] いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき、次の試行 T を考える.

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ、その後、
箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる.

最初に箱 A に黒玉が 3 個、箱 B に白玉が 2 個入っているとき、以下の問いに答えよ.

- (1) 試行 T を 1 回行ったときに、箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ.
- (2) 試行 T を 2 回行ったときに、箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ.
- (3) 試行 T を 3 回行ったときに、箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ.

九大 2013 年 [3] 横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して、以下の操作 L と操作 R を考える.

L: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する.

R: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する.

たとえば、表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに、3 の目が出た場合は、裏裏表表裏裏 となる.

以下、「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする.

- (1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき、表が 1 枚となる確率を求めよ.
- (2) 最初の状態から L, R の順に操作を行うとき、表の枚数の期待値を求めよ.
- (3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となる確率を求めよ.

九大 2015 年 [3] 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている．次の操作を考える．

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる．袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう．

この操作を 4 回繰り返す．もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ．

九大 2016 年 [3] 袋の中に，赤玉が 15 個，青玉が 10 個，白玉が 5 個入っている．袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える．

(操作) コインが点 (x, y) にあるものとする．赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x + 1, y)$ に移動，青玉を取り出したときには点 $(x, y + 1)$ に移動，白玉を取り出したときには点 $(x - 1, y - 1)$ に移動し，取り出した球は袋に戻す．

最初に原点 $(0, 0)$ にコインを置き，この操作を繰り返して行う．指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする．このとき，以下の問いに答えよ．

- (1) 操作を n 回繰り返したとき，白玉を 1 度だけ取り出したとする．このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ．
- (2) 操作を n 回繰り返したとき，到達点となり得る点の個数を求めよ．
- (3) 座標平面上の 4 点 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える．操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または边上にある確率を P_n とする． P_3 を求めよ．
- (4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ．

九大 2018 年 [4] 3つの部品 a, b, c からなる製品が多数入った箱がある. 製品を 1 つ取り出したとき, 部品 a, b, c が不良品である確率について次のことがわかっている.

- 部品 a が不良品である確率は p である.
- 部品 a が不良品でないとき, 部品 b が不良品である確率は q である.
- 部品 a が不良品であるとき, 部品 b も不良品である確率は $3q$ である.
- 部品 b が不良品でないとき, 部品 c が不良品である確率は r である.
- 部品 b が不良品であるとき, 部品 c も不良品である確率は $5r$ である.

ただし, $0 < p < 1$, $0 < q < \frac{1}{3}$, $0 < r < \frac{1}{5}$ である. 以下の問いに答えよ.

- (1) 製品を 1 つ取り出したとき, 部品 a, b の少なくとも一方が不良品である確率を p, q を用いて表せ.
- (2) 製品を 1 つ取り出したとき, 部品 c が不良品である確率を p, q, r を用いて表せ.
- (3) 製品を 1 つ取り出したところ部品 c が不良品であった. このとき, 部品 b も不良品である確率を p, q を用いて表せ.

九大 2019 年 [1] 表に 3, 裏に 8 が書かれた硬貨がある. この硬貨を 10 回投げるとき, 出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

九大 2020 年 [4] 4 個のサイコロを同時に投げるとき, 出る目すべての積を X とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ.
- (2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ.
- (3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ.

0.3.2 整数の性質 (数学 A)

分野 A	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学						4	1							
東北大学						3	3							
東京大学	2			4	1	4	4				4	3		
一橋大学	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
名古屋大学		3	3			3	3	2						
京都大学			3			3		3		3	5			
大阪大学		2				1					3			3
神戸大学				2					2		1	3		
広島大学		5										1		
九州大学		3		2	4	4	4	2		3				3

北大 2016 年 [4] x, y を自然数とする.

- (1) $\frac{3x}{x^2 + 2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ.
- (2) $\frac{3x}{x^2 + 2} + \frac{1}{y}$ が自然数であるような組 (x, y) をすべて求めよ.

北大 2017 年 [1] 自然数の 2 乗となる数を平方数という.

- (1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1) + a = (n+k)^2$ が成り立つとき,

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ.

- (2) $n(n+1) + 7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ.

東北大 2016 年 [3] ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている. 出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ, ネジが全部で 54 個あった. 残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として, 可能性のある組 (l, m, n) をすべて求めよ.

東大 2016 年 [4] 以下の問いに答えよ．ただし，(1) については，結論のみを書けばよい．

- (1) n を正の整数とし， 3^n を 10 で割った余りを a_n とする． a_n を求めよ．
- (2) n を正の整数とし， 3^n を 4 で割った余りを b_n とする． b_n を求めよ．
- (3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ．

東大 2017 年 [4] $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい．

- (1) a_1, a_2 の値を求めよ．
- (2) $n \geq 2$ とする．積 $a_1 a_n$ を， a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ．
- (3) a_n は自然数であることを示せ．
- (4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

東大 2021 年 [4] 以下の問いに答えよ．

- (1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする． K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば， A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ．
- (2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする．このとき， $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$ ， $B = {}_aC_b$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ．
- (3) a, b は (2) の通りとし，さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする． ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ．
- (4) ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ．

東大 2022 年 [3] 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n^2 + n(n+2) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_{2022} を 3 で割った余りを求めよ.
- (2) $a_{2022}, a_{2023}, a_{2024}$ の最大公約数を求めよ.

一橋大 2011 年 [1]

- (1) 自然数 x, y は, $1 < x < y$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{3}$$

をみたす. x, y の組をすべて求めよ.

- (2) 自然数 x, y, z は, $1 < x < y < z$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5}$$

をみたす. x, y, z の組をすべて求めよ.

一橋大 2012 年 [1] 1 つの角が 120° の三角形がある. この三角形の 3 辺の長さ x, y, z は $x < y < z$ を満たす整数である.

- (1) $x + y - z = 2$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ.
- (2) $x + y - z = 3$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ.
- (3) a, b を 0 以上の整数とする. $x + y - z = 2^a 3^b$ を満たす x, y, z の組の個数を a と b の式で表せ.

一橋大 2013 年 [1] $3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013$ を満たす正の整数 p, q の組をすべて求めよ.

一橋大 2014 年 [1] $a - b - 8$ と $b - c - 8$ が素数となるような素数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

一橋大 2015 年 [1] n を 2 以上の整数とする. n 以下の正の整数のうち, n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す. たとえば

$$E(2) = 1, \quad E(3) = 2, \quad E(4) = 2, \quad \dots, \quad E(10) = 4, \quad \dots$$

である.

(1) $E(1024)$ を求めよ.

(2) $E(2015)$ を求めよ.

(3) m を正の整数とし, p と q を異なる素数とする. $n = p^m q^m$ のとき $\frac{E(n)}{n} \geq \frac{1}{3}$ が成り立つことを示せ.

一橋大 2016 年 [1] $6 \cdot 3^{3x} + 1 = 7 \cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ.

一橋大 2017 年 [2] 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 \\ y^2 = zx + 7 \\ z^2 = xy + 7 \end{cases}$$

を満たす整数の組 (x, y, z) で $x \leq y \leq z$ となるものを求めよ.

一橋大 2018 年 [1] 正の整数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す. たとえば

$$S(3) = 3, \quad S(10) = 1 + 0 = 1, \quad S(516) = 5 + 1 + 6 = 12$$

である.

(1) $n \geq 10000$ のとき, 不等式 $n > 30S(n) + 2018$ を示せ.

(2) $n = 30S(n) + 2018$ を満たす n を求めよ.

一橋大 2019 年 [1] p を自然数とする. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. 数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ.

一橋大 2020 年 [1] 以下の問いに答えよ.

(1) 10^{10} を 2020 で割った余りを求めよ.

(2) 100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるもののうち, 2020 で割り切れるものの個数を求めよ.

一橋大 2021 年 [1] 1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ.

一橋大 2022 年 [1] $2^a 3^b + 2^c 3^d = 2022$ を満たす 0 以上の整数 a, b, c, d の組を求めよ.

一橋大 2023 年 [1] n を 2 以上 20 以下の整数, k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする.

$${}_{n+2}C_{k+1} = 2({}_nC_{k-1} + {}_nC_{k+1})$$

が成り立つような整数の組 (n, k) を求めよ.

一橋大 2024 年 [1] $\sum_{k=1}^m k(n-2k) = 2024$ を満たす正の整数の組 (m, n) を求めよ.

九大 2014 年 [2] 以下の問いに答えよ.

- (1) 任意の自然数 a に対し, a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ.
- (2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると, a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ.
- (3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ.

九大 2015 年 [4] 以下の問いに答えよ.

- (1) n が正の偶数のとき, $2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ.
- (2) p を素数とし, k を 0 以上の整数とする. $2^{p-1} - 1 = p^k$ を満たす p, k の組をすべて求めよ.

九大 2016 年 [4] 自然数 n に対して, 10^n を 13 で割った余りを a_n とおく. a_n は 0 から 12 までの整数である. 以下の問いに答えよ.

- (1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ.
- (2) $a_1, a_2, \dots, a_6$ を求めよ.
- (3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ.
 - (i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる.
 - (ii) N を十進数で表示して, 最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる.
 - (iii) N は 13 で割り切れる.

九大 2017 年 [4] 以下の問いに答えよ.

- (1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ.
- (2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ.
- (3) 225 との最大公約数が 15 であり, かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ.

九大 2018 年 [2] 以下の問いに答えよ.

- (1) n を自然数とすると, 2^n を 7 で割った余りを求めよ.
- (2) 自然数 m は, 2 進法で 101 が 6 回連続する表示

$$101101101101101101_{(2)}$$

をもつとする. m を 7 で割った余りを求めよ.

九大 2024 年 [3] 以下の問いに答えよ.

- (1) 自然数 a, b が $a < b$ をみたすとき, $\frac{b!}{a!} \geq b$ が成り立つことを示せ.
- (2) $2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ.
- (3) $a! + b! = 2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

0.3.3 図形の性質 (数学 A)

分野	A	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学															
東北大学							4							2	
東京大学															
一橋大学															
名古屋大学															
京都大学		4							4						
大阪大学															
神戸大学															
広島大学										4					
九州大学					3		2								

東北大 2016 年 [4] 鋭角三角形 $\triangle ABC$ において、頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。
- (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。

京大 2018 年 [4] 四面体 ABCD は $AC = BD$, $AD = BC$ を満たすとし、辺 AB の中点を P, 辺 CD の中点を Q とする。

- (1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。
- (2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき、2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

0.4 数学B

0.4.1 平面上のベクトル (数学B)

◀ 分野 B	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学		1		3	3	3	2				2		2	
東北大学	2	4		3		1	1			4				
東京大学							2		2					
一橋大学			2			5*				3				
名古屋大学														
京都大学			2								1			
大阪大学	3				3							1	3	
神戸大学									3					
広島大学	4		2		3						2			
九州大学	3							3					3	2

東大 2017 年 [2] 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている．点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ．

一橋大 2013 年 [2] 平面上の 4 点 O, A, B, C が

$$OA = 4, \quad OB = 3, \quad OC = 2, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$$

を満たすとき， $\triangle ABC$ の面積の最大値を求めよ．

一橋大 2016 年 [5] 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく， $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度は 60° である．このとき

$$r = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|}{|2\vec{a} + \vec{b}|}$$

のとりうる値の範囲を求めよ．

一橋大 2020 年 [3] 半径 1 の円周上に 3 点 A, B, C がある．内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ の最大値と最小値を求めよ．

京大 2013 年 [2] 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ．

京大 2021 年 [1] $\triangle OAB$ において $OA = 3$, $OB = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ とする. $\triangle OAB$ の垂心を H とするとき, $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.

九大 2023 年 [3] 点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \quad \vec{n} = (b, d)$$

に対して, $D = ad - bc$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D = 0$ であることを示せ. 以下, $D \neq 0$ であるとする.

(2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}$, $\vec{w}$ で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ.

(3) 座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して

$$r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$$

を満たす実数 r と s を $\vec{q}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ を用いて表せ.

0.4.2 空間のベクトル (数学B)

分野	B	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学				3						1					
東北大学				2					4				4		
東京大学															
一橋大学		4	4	4		4		5	4				4	3	4
名古屋大学											2			2	
京都大学		2			3	4	4	3			4	4		2	1
大阪大学									3	3		2			2
神戸大学				1	3		1		1			3			
広島大学					3		3							3	3
九州大学			1	1		2				3	2	4	2		

一橋大 2011 年 [4] a, b, c を正の定数とする. 空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある.

- (1) 辺 AB を底辺とすると, $\triangle ABC$ の高さを a, b, c で表せ.
- (2) $\triangle ABC$, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の面積をそれぞれ S, S_1, S_2, S_3 とする. ただし, O は原点である. このとき, 不等式

$$\sqrt{3}S \geq S_1 + S_2 + S_3$$

が成り立つことを示せ.

- (3) (2) の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ.

一橋大 2015 年 [4] xyz 空間において, 原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き, 点 $(0, 0, \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く.

- (1) 線分 PQ の長さの最小値と, そのときの点 P, Q の座標を求めよ.
- (2) 線分 PQ の長さの最大値と, そのときの点 P, Q の座標を求めよ.

一橋大 2018 年 [4] p, q を正の実数とする. 原点を O とする座標空間内の 3 点 $P(p, 0, 0)$, $Q(0, q, 0)$, $R(0, 0, 1)$ は $\angle PRQ = \frac{\pi}{6}$ を満たす. 四面体 $OPQR$ の体積の最大値を求めよ.

京大 2011 年 [2] 四面体 $OABC$ において, 点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする. $\vec{OA} \perp \vec{BC}$, $\vec{OB} \perp \vec{AC}$, $|\vec{OA}| = 2$, $|\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 3$, $|\vec{AB}| = \sqrt{7}$ のとき, $|\vec{OH}|$ を求めよ.

京大 2014 年 [3] 座標空間における次の 3 つの直線 l , m , n を考える.

l は点 $A(1, 0, -2)$ を通り, ベクトル $\vec{u} = (2, 1, -1)$ に平行な直線である.

m は点 $B(1, 2, -3)$ を通り, ベクトル $\vec{v} = (1, -1, 1)$ に平行な直線である.

n は点 $C(1, -1, 0)$ を通り, ベクトル $\vec{w} = (1, 2, 1)$ に平行な直線である.

P を l 上の点として, P から m , n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q , R とする. このとき, $PQ^2 + PR^2$ を最小にするような P と, そのときの $PQ^2 + PR^2$ を求めよ,

京大 2015 年 [4] xyz 空間の中で, $(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える. 点 Q が $(0, 0, 2)$ 以外の S 上の点を動くとき, 点 Q と点 $P(1, 0, 2)$ の 2 点を通る直線 ℓ と平面 $z = 0$ との交点を R とおく. R の動く範囲を求め, 図示せよ.

京大 2016 年 [4] 四面体 $OABC$ が次の条件を満たすならば, それは正四面体であることを示せ.

条件: 頂点 A , B , C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る.

ただし, 四面体のある頂点の対面とは, その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう.

京大 2017 年 [3] 座標空間において原点 O と点 $A(0, -1, 1)$ を通る直線を l とし, 点 $B(0, 2, 1)$ と点 $C(-2, 2, -3)$ を通る直線を m とする. l 上の 2 点 P , Q と, m 上の点 R を $\triangle PQR$ が正三角形となるようにとる. このとき, $\triangle PQR$ の面積が最小となるような P , Q , R の座標を求めよ.

京大 2020 年 [4] k を正の実数とする. 座標空間において, 原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A , B , C , D が次の関係式を満たしている.

$$\begin{aligned}\vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \vec{OC} \cdot \vec{OD} = \frac{1}{2}, \\ \vec{OA} \cdot \vec{OC} &= \vec{OB} \cdot \vec{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \vec{OA} \cdot \vec{OD} &= \vec{OB} \cdot \vec{OD} = k.\end{aligned}$$

このとき, k の値を求めよ. ただし, 座標空間の点 X , Y に対して, $\vec{OX} \cdot \vec{OY}$ は, $\vec{OX}$ と $\vec{OY}$ の内積を表す.

京大 2021 年 [4] 空間の 8 点

$$O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 2, 0), C(0, 2, 0)$$

$$D(0, 0, 3), E(1, 0, 3), F(1, 2, 3), G(0, 2, 3)$$

を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える. 点 O, 点 F, 辺 AE 上の点 P, および辺 CG 上の点 Q の 4 点が同一平面上にあるとする. このとき, 四角形 OPFQ の面積 S を最小にするような点 P および点 Q の座標を求めよ. また, そのときの S の値を求めよ.

京大 2023 年 [2] 空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 点 D, P, Q を次のように定める. 点 D は $\vec{OD} = \vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC}$ を満たし, 点 P は線分 OA を 1:2 に内分し, 点 Q は線分 OB の中点である. さらに, 直線 OD 上の点 R を, 直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める. このとき, 線分 OR の長さ と 線分 RD の長さの比 OR:RD を求めよ.

京大 2024 年 [1] 四面体 OABC が次を満たすとする.

$$OA = OB = OC = 1, \quad \angle COA = \angle COB = \angle ACB, \quad \angle AOB = 90^\circ$$

このとき, 四面体 OABC の体積を求めよ.

阪大 2019 年 [3] 座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

を考える. S_1 と S_2 の共通部分を C とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち, 半径が最小となる球面の方程式を求めよ.
- (2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち, 半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ.

阪大 2024 年 [2] 座標空間内の直線 ℓ と z 軸はねじれの位置にあるとする. ℓ と z の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ.

広大 2023 年 [3] 空間内の 6 点 A, B, C, D, E, F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり, 四角形 ABCD は正方形であるとする. $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{AE}$ とおくと, 次の問いに答えよ.

- (1) 内積 $\vec{b} \cdot \vec{d}$, $\vec{b} \cdot \vec{e}$, $\vec{d} \cdot \vec{e}$ の値を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{AF} = p\vec{b} + q\vec{d} + r\vec{e}$ を満たす実数 p, q, r の値を求めよ.
- (3) 辺 BE を 1 : 2 に内分する点を G とする. また, $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対し, 辺 CF を $t : (1 - t)$ に内分する点を H とする. t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき, $\triangle AGH$ の面積が最小となる t の値とそのときの $\triangle AGH$ の面積を求めよ. 必要ならば, $\triangle AGH$ の面積 S について

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2 |\overrightarrow{AH}|^2 - (\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH})^2}$$

が成り立つことを用いてよい.

広大 2024 年 [3] 座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 2, -1)$ に対し, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ.
- (2) 点 O, A, B を通る平面を α とする. 点 C から平面 α に下した垂線と平面 α の交点を M とする. 点 M の座標を求めよ.
- (3) 点 M を (2) で定めた点とする. 点 D を直線 CM 上の点であって

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$$

となるものとする. ただし, 点 D は点 C とは異なる点である. このとき, 点 D の座標を求めよ.

- (4) 点 D を (3) で定めた点とする. 三角形 CAD の面積 S を求めよ.

九大 2012 年 [1] 原点を O とする座標空間に, 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 2)$, $C(-2, 1, 3)$ がある. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\triangle ABC$ において, $\angle B$ は $\frac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ.
- (2) 点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする. 点 H の座標を求めよ.
- (3) $\triangle OAH$ の面積を求めよ.

九大 2015 年 [2] 1 辺の長さが 1 である正四面体 $OABC$ を考える. 辺 OA の中点を P , 辺 OB を $2:1$ に内分する点を Q , 辺 OC を $1:3$ に内分する点を R とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ.
- (2) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ の内積 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ を求めよ.
- (3) 三角形 PQR の面積を求めよ.

九大 2022 年 [2] 座標空間内の 4 点

$$O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(2, 1, 2), P(4, 0, -1)$$

を考える. 3 点 O, A, B を通る平面を α とし, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直であり, x 成分が正であるような, 大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ.
- (2) 点 P から平面 α に垂線を下ろし, その交点を Q とおく. 線分 PQ の長さを求めよ.
- (3) 平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ.

0.4.3 数列 (数学 B)

分野	B	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
北海道大学					2	2				3		1	2		2
東北大学						1				3	2				4
東京大学		3			2	4	2		2		4				
一橋大学		5		5		5	2					2		4	
名古屋大学				1		2		2	3	2	3				
京都大学													2	4	
大阪大学							3	3			2				
神戸大学						2			2		2				1
広島大学				3	4	2・5			2	1・3	4			2	
九州大学		2	4												

北大 2014 年 [2] 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) 以下が成立するように, 実数 s, t ($s > t$) を定めよ.

$$\begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 一般項 a_n を求めよ.

東北大 2015 年 [1] 次の性質をもつ数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $a_n + a_{n+2}$ を a_{n+1} を用いて表せ.

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

東北大 2019 年 [3] 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式によって定める.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2}a_n = 2a_{n+1}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) すべての正の整数 n について, a_n は正であることを示せ.
- (2) 一般項 a_n を求めよ.

東北大 2024 年 [4] n を正の整数とする. 2 つの整数 a_n, b_n を条件

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

により定める. ここで, $\sqrt{2}$ は無理数なので, このような整数の組 (a_n, b_n) はただ 1 つに定まる.

- (1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いてそれぞれ表せ. さらに, b_4, b_5, b_6 の値をそれぞれ求めよ.
- (2) 等式

$$(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

が成り立つことを数学的に帰納法を用いて表せ.

- (3) $n \geq 2$ のとき, $b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2$ を求めよ.
- (4) $pb_6 - qb_5 = 1, 0 \leq p \leq 100, 0 \leq q \leq 100$ をすべて満たす整数 p, q の組 (p, q) を 1 組求めよ.

東大 2014 年 [2] a を自然数 (すなわち 1 以上の整数) の定数とする.

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して, 次の操作 $(*)$ を考える.

$(*)$ 袋 U から球を 1 個取り出し,

(i) 取り出した球が白球のときは, 袋 U の中身が白球 a 個, 赤球 1 個となるようにする.

(ii) 取り出した球が赤球のときは, その球を袋 U へ戻すことなく, 袋 U の中身はそのままにする.

はじめに袋 U の中に, 白球が $a+2$ 個, 赤球が 1 個入っているとする. この袋 U に対して操作 $(*)$ を繰り返し行う.

たとえば, 1 回目の操作で白球が出たとすると, 袋 U の中身は白球 a 個, 赤球 1 個となり, さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると, 袋 U の中身は白球 a 個のみとなる.

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする. ただし, 袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする.

(1) p_1, p_2 を求めよ.

(2) $n \geq 3$ に対して p_n を求めよ.

東大 2015 年 [4] 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し, 次のように左から順に文字を書く. コインを投げ, 表が出たときは文字列 AA を書き, 裏が出たときは文字 B を書く. さらに繰り返しコインを投げ, 同じ規則に従って, AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく. たとえば, コインを 5 回投げ, その結果が順に表, 裏, 裏, 表, 裏であったとすると, 得られる文字列は

AABBAAB

となる. このとき, 左から 4 番目の文字は B, 5 番目の文字は A である.

(1) n を正の整数とする. n 回コインを投げ, 文字列を作るとき, 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ.

(2) n を 2 以上の整数とする. n 回コインを投げ, 文字列を作るとき, 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で, かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ.

東大 2016 年 [2] A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する. 以下の方式で試合を行い, 2 連勝したチームが出た時点で, そのチームを優勝チームとして大会は終了する.

- (a) 1 試合目で A と B が対戦する.
- (b) 2 試合目で, 1 試合目の勝者と, 1 試合目で待機していた C が対戦する.
- (c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は, k 試合目の勝者と, k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する. ここで k は 2 以上の整数とする.

なお, すべての対戦において, それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で, 引き分けはないものとする.

- (1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ.
- (2) n を 2 以上の整数とする. ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ.
- (3) m を正の整数とする. 総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ.

東大 2018 年 [2] 数列 $a_1, a_2, \dots$ を

$$a_n = \frac{2n C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める.

- (1) a_7 と 1 の大小を調べよ.
- (2) $n \geq 2$ とする. $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ.
- (3) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ.

一橋大 2011 年 [5] A と B の 2 人が, 1 個のサイコロを次の手順により投げ合う.

1 回目は A が投げる.

1, 2, 3 の目が出たら, 次の回には同じ人が投げる.

4, 5 の目が出たら, 次の回には別の人が投げる.

6 の目が出たら, 投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない.

- (1) n 回目に A がサイコロを投げる確率 a_n を求めよ.
- (2) ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率 p_n を求めよ.
- (3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n を求めよ.

一橋大 2016 年 [2] θ を実数とし、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \cos \theta, \quad a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. すべての n について $a_n = \cos(n-1)\theta$ が成り立つとき, $\cos \theta$ を求めよ.

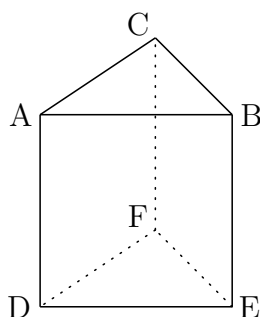
名大 2013 年 [1] 3人でジャンケンをする. 各人はグー, チョキ, パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする. 負けた人は脱落し, 残った人で次回のジャンケンを行い (アイコのときは誰も脱落しない), 勝ち残りが1人になるまでジャンケンを続ける. このとき各回の試行は独立とする. 3人でジャンケンを始め, ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に2人が残っている確率を p_n , 3人が残っている確率を q_n とおく.

- (1) p_1, q_1 を求めよ.
- (2) p_n, q_n がみたす漸化式を導き, p_n, q_n の一般項を求めよ.
- (3) ちょうど n 回目で1人の勝ち残りが決まる確率を求めよ.

京大 2022 年 [2] 下図の三角柱 ABC-DEF において, A を始点として, 辺に沿って頂点を n 回移動する. すなわち, この移動経路

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n \quad (\text{ただし } P_0 = A)$$

において, $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ はすべて辺であるとする. また, 同じ頂点を何度通ってもよいものとする. このような移動経路で, 終点 P_n が A, B, C のいずれかとなるものの総数 a_n を求めよ.



京大 2023 年 [4] 数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たしている.

$$a_1 = 3, \quad a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1) \cdot 2^n \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ である.

阪大 2017 年 [3] 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく. b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ.
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく. 数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ.
- (4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ.

阪大 2020 年 [2] 円周を 3 等分する点を時計回りに A, B, C とおく. 点 Q は A から出発し, A, B, C を以下のように移動する. 1 個のさいころを投げて, 1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し, 2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し, その他の目が出た場合は移動しない. さいころを n 回投げたあとに Q が A に位置する確率を p_n とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) p_2 を求めよ.
- (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ.
- (3) p_n を求めよ.

神戸大 2024 年 [1] 各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める. a_1 は関数

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 10x \quad (x \geq 0)$$

が最小値をとるときの x の値とする. a_{n+1} は関数

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 10a_n x \quad (x \geq 0)$$

が最小値をとるときの x の値とする. 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_{10} a_n$ で定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) a_1 と b_1 を求めよ.
- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ.
- (3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ.
- (4) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (5) $\frac{a_1 a_2 a_3}{100}$ の値を求めよ.

九大 2012 年 4 いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える．

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，
箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる．

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ．

- (1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ．
- (2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ．
- (3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ．

第 1 章 北海道大学

出題分野 (2011-2024) 90 分

北海道大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	数と式													
	2 次関数	1						2						
	図形と計量							1				3		
	データの分析													
II	式と証明													
	複素数と方程式											1	1	
	図形と方程式	3								1				
	三角関数			1					2	2	3			
	指数関数と対数関数													
	微分法と積分法	2	2・3	4	1	1	1・2	4	4	4	4	4	4	3
A	場合の数と確率	4	4	2	4	4		3	3		3		4	3
	整数の性質						4	1						
	図形の性質													
B	平面上のベクトル		1		3	3	3	2				2		2
	空間のベクトル			3						1				
	数列				2	2				3		1	2	2
	確率分布と統計													

数字は問題番号

1.11 2011年(90分)

出題分野 1 2 3 4

1 実数 x に対して $k \leq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す. たとえば, $[2] = 2$, $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $[-2.1] = -3$ である.

- (1) $n^2 - 5n + 5 < 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ.
- (2) $[x]^2 - 5[x] + 5 < 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ.
- (3) x は (2) で求めた範囲にあるものとする. $x^2 - 5[x] + 5 = 0$ を満たす x をすべて求めよ.

2 a を正の実数, b と c を実数とし, 2 点 $P(-1, 3)$, $Q(1, 4)$ を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C とおく. C 上の 2 点 P , Q における C の接線をそれぞれ l_1 , l_2 とする.

- (1) b の値を求め, c を a で表せ.
- (2) l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ.
- (3) 放物線 C と接線 l_1 , l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ.

3 a , b を実数とし, xy 平面上の 3 直線を $l: x + y = 0$, $l_1: ax + y = 2a + 2$, $l_2: bx + y = 2b + 2$ で定める.

- (1) 直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る. P の座標を求めよ.
- (2) 直線 l , l_1 , l_2 によって三角形がつくられるための a , b の条件を求めよ.
- (3) a , b は (2) で求めた条件を満たすものとする. 点 $(1, 1)$ が (2) の三角形の内部にあるような a , b の範囲を求め, それを ab 平面上に図示せよ.

- 4 n を 2 以上の自然数, q と r を自然数とする. 1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉, 1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する. これら白玉と赤玉を, 1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は q 個ずつ, 赤玉は r 個ずつ配分しておく. たとえば, 1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている. これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する. 1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す. 同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する. このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし, n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする.

- (1) s_2 を求めよ.
- (2) s_3 と a_3 を求めよ.
- (3) s_4 と a_4 を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad n^2 - 5n + 5 < 0 \text{ より } \frac{5 - \sqrt{5}}{2} < n < \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \dots (*)$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad 1 &= \frac{5 - \sqrt{9}}{2} < \frac{5 - \sqrt{5}}{2} < \frac{5 - \sqrt{4}}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} &= \frac{5 + \sqrt{4}}{2} < \frac{5 + \sqrt{5}}{2} < \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = 4 \end{aligned}$$

よって, $(*)$ を満たす自然数 n は **2, 3**

$$\text{別解 } f(n) = n^2 - 5n + 5 = \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \text{ とおくと}$$

$$f(2) = f(3) = -1 < 0, \quad f(1) = f(4) = 1 > 0$$

$f(n) < 0$ を満たす自然数 n は **2, 3**

$$(2) \quad [x]^2 - 5[x] + 5 < 0 \text{ について, (1) の結果を利用して } [x] = 2, 3$$

$$\text{ゆえに } [x] = 2 \text{ のとき } 2 \leq x < 3, \quad [x] = 3 \text{ のとき } 3 \leq x < 4$$

$$\text{よって } \mathbf{2 \leq x < 4}$$

$$(3) \quad (2) \text{ の結果から, } 2 \leq x < 4 \text{ における方程式 } x^2 - 5[x] + 5 = 0 \text{ の解を求める.}$$

$$(i) \quad 2 \leq x < 3 \text{ のとき, } [x] = 2 \text{ であるから}$$

$$x^2 - 5 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \pm\sqrt{5}$$

$$2 \leq x < 3 \text{ より, } x = \sqrt{5}$$

$$(ii) \quad 3 \leq x < 4 \text{ のとき, } [x] = 3 \text{ であるから}$$

$$x^2 - 10 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \pm\sqrt{10}$$

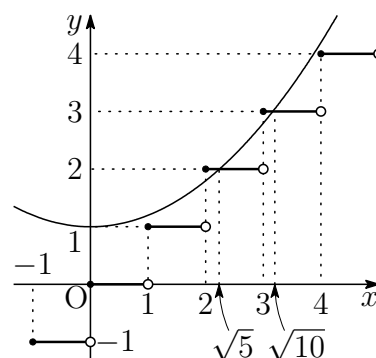
$$3 \leq x < 4 \text{ より, } x = \sqrt{10}$$

$$\text{よって } \mathbf{x = \sqrt{5}, \sqrt{10}}$$

$$\text{補足 } x^2 - 5[x] + 5 = 0 \text{ の解は, } \frac{1}{5}x^2 + 1 = [x] \text{ より}$$

$$y = \frac{1}{5}x^2 + 1, \quad y = [x]$$

のグラフの交点の x 座標である.



- 2 (1) $C: y = ax^2 + bx + c$ 上に 2 点 $P(-1, 3)$, $Q(1, 4)$ があるから

$$a - b + c = 3, \quad a + b + c = 4$$

上の 2 式から $b = \frac{1}{2}, \quad c = -a + \frac{7}{2}$

- (2) (1) の結果から $C: y = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} - a$ ゆえに $y' = 2ax + \frac{1}{2}$

C 上の点 $P(-1, 3)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y - 3 = \left(-2a + \frac{1}{2}\right)(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad y = \left(-2a + \frac{1}{2}\right)x - 2a + \frac{7}{2}$$

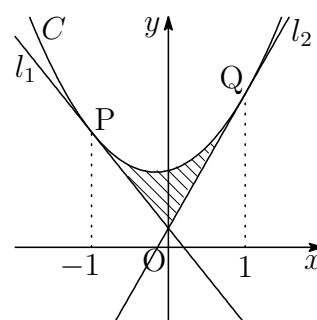
C 上の点 $Q(1, 4)$ における接線 l_2 の方程式は

$$y - 4 = \left(2a + \frac{1}{2}\right)(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = \left(2a + \frac{1}{2}\right)x - 2a + \frac{7}{2}$$

l_1, l_2 の方程式から、求める交点の座標は $\left(0, -2a + \frac{7}{2}\right)$

- (3) C と l_1, y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし、
 C と l_2, y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

$$\begin{aligned} S_1 &= a \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx = a \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{a}{3}, \\ S_2 &= a \int_0^1 (x-1)^2 dx = a \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$



$S_1 + S_2 = 1$ であるから $\frac{a}{3} + \frac{a}{3} = 1$ よって $a = \frac{3}{2}$

補足 C と直線 PQ で囲まれた図形の面積を S_0 とすると、 C の x^2 の係数 a および 2 点 P, Q の x 座標から

$$S_0 = \frac{a}{6} (1+1)^3 = \frac{4}{3}a$$

このとき、 C と l_1, l_2 で囲まれた図形の面積¹ は $\frac{1}{2}S_0 = \frac{2}{3}a$ ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf [4] を参照

3 (1) $l_1: ax + y = 2a + 2$ より $y = -a(x - 2) + 2$

したがって, l_1 は, 点 $(2, 2)$ を通り, 傾き $-a$ の直線である.
よって, 求める点 P の座標は **(2, 2)**

別解 $l_1: ax + y = 2a + 2$ より $(x - 2)a + y - 2 = 0$

a の値によらず, 成立する恒等式であるから

$$x - 2 = 0, \quad y - 2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = 2, \quad y = 2$$

よって, 求める点 P の座標は **(2, 2)**

(2) (1) と同様に, $l_2: bx + y = 2b + 2$ から $y = -b(x - 2) + 2$

したがって, l_2 は, 点 $(2, 2)$ を通り, 傾き $-b$ の直線である.

また, $l: x + y = 0$ ($y = -x$) より, l の傾きは -1 で, 点 P を通らないことに注意すると, 3 直線 l, l_1, l_2 によって三角形が作られるとき, これらの 3 直線は, 互いに平行でないから

$$-a \neq -b \quad \text{かつ} \quad -a \neq -1 \quad \text{かつ} \quad -b \neq -1$$

よって **$a \neq b, a \neq 1, b \neq 1$**

(3) $l: x + y = 0, l_1: ax + y = 2a + 2$ の交点の x 座標を x_1 とし, $l: x + y = 0, l_2: bx + y = 2b + 2$ の交点の x 座標を x_2 とすると, (2) の結果に注意して

$$x_1 = \frac{2(a+1)}{a-1}, \quad x_2 = \frac{2(b+1)}{b-1}$$

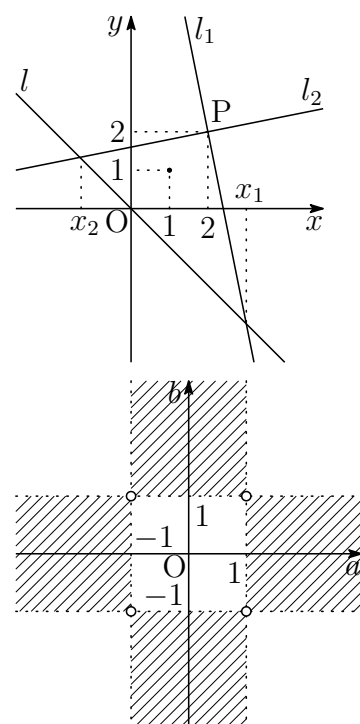
条件を満たすとき, $x_1 x_2 < 0$ であるから

$$x_1 x_2 = \frac{4(a+1)(b+1)}{(a-1)(b-1)} < 0$$

したがって, a, b の満たす不等式は

$$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1) < 0$$

よって, 点 (a, b) の満たす領域は, 右の図の斜線部分で境界線は含まない.



補足 $(a+1)(a-1) \leq 0$ のとき $(b+1)(b-1) \geq 0$ (複号同順) ■

- 4 (1) 1 番目の箱から 2 番目の箱に玉を移す場合の総数であるから

$$s_2 = q + r$$

- (2) 2 番目の箱から 3 番目の箱に玉を移す場合の総数は $q + r + 1$ であるから,
(1) の結果から

$$s_3 = s_2(p + q + 1) = (q + r)(q + r + 1)$$

a_3 は, 1 番目の箱から 2 番目の箱, さらに 2 番目の箱から 3 番目の箱に 1 個ずつ玉を移す 2 回の操作のうち, 1 回目は白玉または赤玉を移し, 2 回目は白玉が移る場合の総数である.

1 回目が白玉の場合の総数は $q(q + 1)$

1 回目が赤玉の場合の総数は rq

よって $a_3 = q(q + 1) + rq = q(q + r + 1)$

- (3) 3 番目の箱から 4 番目の箱に玉を移す場合の総数は $q + r + 1$ であるから,
(2) の結果から

$$s_4 = s_3(p + q + 1) = (q + r)(q + r + 1)^2$$

3 番目の箱の白玉が $q + 1$ 個となる場合の総数が a_3 通りであるから, 白玉が q 個となる場合の総数が $(s_3 - a_3)$ 通りある. したがって

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3(q + 1) + (s_3 - a_3)q = a_3 + qs_3 \\ &= q(q + r + 1) + q \cdot (q + r)(q + r + 1) \\ &= q(q + r + 1)^2 \end{aligned}$$



1.12 2012年(90分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 $m > 0, n > 0, 0 < x < 1$ とする. $\triangle OAB$ の辺 OA を $m:n$ に内分する点を P , 辺 OB を $n:m$ に内分する点を Q とする. また, 線分 AQ を $1:x$ に外分する点を S , 線分 BP を $1:x$ に外分する点を T とする.

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}, \vec{b}, m, n, x$ で表せ.

(2) 3点 O, S, T が一直線上にあるとき, x を m, n で表せ.

- 2 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta) = 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta$$

を考える.

(1) $x = \sin \theta$ とおく. $f(\theta)$ を x で表せ.

(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ.

- 3 xy 平面上に3点 $A(a, b), B(a+3, b), C(a+1, b+2)$ がある. 不等式 $y \geq x^2$ の表す領域を D , 不等式 $y \leq x^2$ の表す領域を E とする.

(1) 点 C が領域 D に含まれ, 点 A と点 B が領域 E に含まれるような a, b の条件を連立不等式で表せ.

(2) (1) で求めた条件を満たす点 (a, b) の領域 F を ab 平面上に図示せよ.

(3) (2) で求めた領域 F の面積を求めよ.

- 4 A と B の2チームが試合を行い, どちらかが先に k 勝するまで試合を繰り返す. 各試合で A が勝つ確率を p , B が勝つ確率を q とし, $p+q=1$ とする. A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく.

(1) P_2 を p と q で表せ.

(2) P_3 を p と q で表せ.

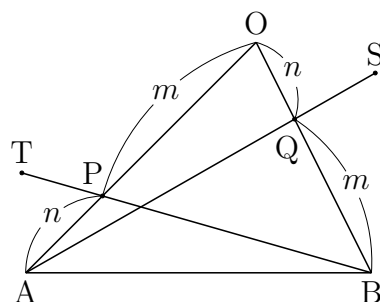
(3) $\frac{1}{2} < q < 1$ のとき, $P_3 < P_2$ であることを示せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{n}{m+n} \vec{b}$$

S は AQ を $1:x$ に外分する点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \frac{-x\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} \left(-x\vec{a} + \frac{n}{m+n} \vec{b} \right) \end{aligned}$$



(2) $\overrightarrow{OT}$ は, $\overrightarrow{OS}$ の m と n , $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を入れ替えたものであるから

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{1-x} \left(\frac{m}{m+n} \vec{a} - x\vec{b} \right)$$

$\overrightarrow{OS} // \overrightarrow{OT}$ であるから ($0 < x < 1$)

$$-x : \frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n} : (-x) \quad \text{よって} \quad x = \frac{\sqrt{mn}}{m+n}$$

$$\begin{aligned} \boxed{2} \quad (1) \quad f(\theta) &= 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta \\ &= 4(1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta + 3\sqrt{2}(1 - 2 \sin^2 \theta) - 4 \sin \theta \\ &= -8 \sin^3 \theta - 6\sqrt{2} \sin^2 \theta + 3\sqrt{2} \\ &= -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

(2) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より, $-1 \leq x \leq 1$. $g(x) = f(\theta)$ とおくと

$$g(x) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$$

$$g'(x) = -24x^2 - 6\sqrt{2}x = -24x \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

したがって, $g(x)$ の増減表は

x	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	1
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$8 - 3\sqrt{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	$-8 - 3\sqrt{2}$

$$g(0) - g(-1) = 3\sqrt{2} - (8 - 3\sqrt{2}) = 2(3\sqrt{2} - 4) = 2(\sqrt{18} - 4) > 0$$

よって $x = 0$ すなわち $\theta = 0$ のとき 最大値 $3\sqrt{2}$

$x = 1$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき 最小値 $-8 - 3\sqrt{2}$

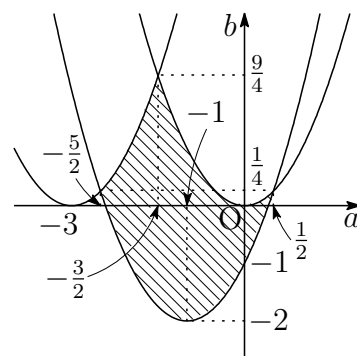
- 3 (1) 点 $C(a+1, b+2)$ は領域 $D: y \geq x^2$ に含まれるから

$$b+2 \geq (a+1)^2$$

$$\text{ゆえに } b \geq (a+1)^2 - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

2点 $A(a, b)$, $B(a+3, b)$ は $E: y \leq x^2$ に含まれるから

$$b \leq a^2 \quad \cdots \textcircled{2}, \quad b \leq (a+3)^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$



- (2) F は, ①~③ を同時に満たす右の図の斜線部分で, 境界線を含む.

- (3) 求める領域 F の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} [(a+3)^2 - \{(a+1)^2 - 2\}] da + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} [a^2 - \{(a+1)^2 - 2\}] da \\ &= \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} 4 \left(a + \frac{5}{2} \right) da - \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} 2 \left(a + \frac{1}{2} \right) da \\ &= \left[2 \left(a + \frac{5}{2} \right)^2 \right]_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} - \left[\left(a + \frac{1}{2} \right)^2 \right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} = 6 \end{aligned}$$

■

- 4 (1) A が B に 2 勝する直前の勝敗は, 1 勝 0 敗と 1 勝 1 敗であるから

$$P_2 = (p + {}_2C_1 pq)p = p^2(1 + 2q)$$

- (2) A が B に 3 勝する直前の勝敗は, 2 勝 0 敗, 2 勝 1 敗, 2 勝 2 敗であるから

$$P_3 = (p^2 + {}_3C_1 p^2 q + {}_4C_2 p^2 q^2)p = p^3(1 + 3q + 6q^2)$$

- (3) (1),(2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{P_2 - P_3}{p^2} &= 1 + 2q - p(1 + 3q + 6q^2) \\ &= 1 + 2q - (1 - q)(1 + 3q + 6q^2) \\ &= 3q^2(2q - 1) \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} < q < 1$ より, $2q - 1 > 0$ であるから

$$P_2 - P_3 > 0 \quad \text{よって} \quad P_3 < P_2$$

■

1.13 2013 年 (90 分)

出題分野 1 2 3 4

1 $f(x) = \sqrt{2} \sin x \cos x + \sin x + \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) とする.

- (1) $t = \sin x + \cos x$ とおき, $f(x)$ を t の関数で表せ.
- (2) t の取り得る値の範囲を求めよ.
- (3) $f(x)$ の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ.

2 次の規則に従って座標平面を動く点 P がある. 2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする.

- (i) X が 4 の倍数ならば, 点 P は x 軸方向に -1 動く.
- (ii) X を 4 で割った余りが 1 ならば, 点 P は y 軸方向に -1 動く.
- (iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば, 点 P は x 軸方向に $+1$ 動く.
- (iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば, 点 P は y 軸方向に $+1$ 動く.

たとえば, 2 と 5 が出た場合には $2 \times 5 = 10$ を 4 で割った余りが 2 であるから, 点 P は x 軸方向に $+1$ 動く.

以下のいずれの問題でも, 点 P は原点 $(0, 0)$ を出発点とする.

- (1) 2 個のサイコロを 1 回投げて, 点 P が $(1, 0)$ にある確率を求めよ.
- (2) 2 個のサイコロを 1 回投げて, 点 P が $(0, 1)$ にある確率を求めよ.
- (3) 2 個のサイコロを 3 回投げて, 点 P が $(2, 1)$ にある確率を求めよ.

3 空間ベクトル $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を考える. $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ で, $\vec{b}$ は xy 平面上にあり, その y 成分は正とする. また, $\vec{a} \cdot \vec{b} = p$ とおく.

- (1) $|p| < 1$ であることを示せ. また, p を用いて $\vec{b}$ の成分を書け.
- (2) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ は相異なり,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} = p$$

をみたすとする. $\vec{c}$ の z 成分が正のとき, p を用いて $\vec{c}$ と $\vec{d}$ の成分表示を書け.

- (3) 上の条件に加えて $\vec{c} \cdot \vec{d} = p$ であるとき p の値を求めよ.

4 実数 t が $0 \leq t < 8$ をみたすとき，点 $P(t, t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ を考える．

- (1) 点 P から放物線 $y = x^2$ に2本の異なる接線が引けることを示せ．
- (2) (1)での2本の接線の接点を Q および R とする．線分 PQ , PR と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．

解答例

1 (1) $t = \sin x + \cos x$ より

$$t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad f(x) &= \sqrt{2} \sin x \cos x + \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{t^2 - 1}{2} + t = \frac{t^2}{\sqrt{2}} + t - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad 0 \leq x \leq 2\pi \text{ より} \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$(3) \quad g(t) = f(x) \text{ とおくと} \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{3}{4} \sqrt{2}$$

$$\text{最大値 } g(\sqrt{2}) = \frac{3}{2} \sqrt{2}, \quad \text{最小値 } g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{4} \sqrt{2}$$

$$t = \sqrt{2} \text{ のとき, } \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \text{ より} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき, } \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \text{ より} \quad x = \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$$

$$\text{よって} \quad x = \frac{\pi}{4} \text{ で最大値 } \frac{3}{2} \sqrt{2}, \quad x = \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi \text{ で最小値 } -\frac{3}{4} \sqrt{2} \quad \blacksquare$$

2 (1) 2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を 4 で割った余りから

(i) 点 P が x 軸方向に -1 動く確率は $\frac{15}{36}$

(ii) 点 P が y 軸方向に -1 動く確率は $\frac{5}{36}$

(iii) 点 P が x 軸方向に $+1$ 動く確率は $\frac{12}{36}$

(iv) 点 P が y 軸方向に $+1$ 動く確率は $\frac{4}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

よって, 求める確率は $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

(2) よって, 求める確率は $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

(3) 3 回投げて, (iii) が 2 回, (iv) が 1 回起こる確率であるから

$${}_3C_2 \left(\frac{12}{36} \right)^2 \cdot \frac{4}{36} = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

$\blacksquare$

- 3 (1) $\vec{a} = (1, 0, 0)$. $\vec{b}$ は xy 平面上にあるから, $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$ とおく ($b_2 > 0$).

$$|\vec{b}|^2 = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = p \text{ より } b_1^2 + b_2^2 = 1, b_1 = p \text{ ゆえに } b_2 = \sqrt{1-p^2}$$

$b_2 > 0$ であるから

$$1-p^2 > 0 \text{ ゆえに } |p| < 1 \text{ よって } \vec{b} = (p, \sqrt{1-p^2}, 0)$$

- (2) $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ とおくと ($c_3 > 0$), $\vec{a} \cdot \vec{c} = p$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = p$, $|\vec{c}|^2 = 1$ より

$$c_1 = p, \quad c_1 p + c_2 \sqrt{1-p^2} = p, \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \quad (*)$$

(*) の第1式を第2式に代入すると

$$p^2 + c_2 \sqrt{1-p^2} = p \text{ ゆえに } c_2 = \frac{p-p^2}{\sqrt{1-p^2}} = p \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}$$

$c_1 = p$ および上式を (*) 第3式に代入すると

$$p^2 + \frac{p^2(1-p)}{1+p} + c_3^2 = 1 \text{ ゆえに } c_3^2 = \frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}$$

$$c_3 > 0 \text{ であるから } \vec{c} = \left(p, p \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}, \sqrt{\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}} \right)$$

$\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ とおくと, $\vec{a} \cdot \vec{d} = p$, $\vec{b} \cdot \vec{d} = p$, $|\vec{d}|^2 = 1$ であるから, 同様の計算により

$$d_1 = p, \quad d_2 = p \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}, \quad d_3^2 = \frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}$$

条件により, $\vec{c} \neq \vec{d}$ であるから

$$\vec{d} = \left(p, p \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}, -\sqrt{\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}} \right)$$

- (3) (2) の結果を $\vec{c} \cdot \vec{d} = p$ に代入すると

$$p^2 + \frac{p^2(1-p)}{1+p} - \frac{(1-p)(1+2p)}{1+p} = p$$

整理すると $3p^2 - 2p - 1 = 0$ ゆえに $(p-1)(3p+1) = 0$

$|p| < 1$ に注意して, これを解くと $p = -\frac{1}{3}$ ■

- 4 (1) 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $Q(q, q^2)$ における接線は、 $y' = 2x$ より

$$y - q^2 = 2q(x - q) \quad \text{ゆえに} \quad y = 2qx - q^2$$

同様に C 上の点 $R(r, r^2)$ における接線は

$$y = 2rx - r^2$$

上の 2 式から、上の 2 接線の交点 P の座標は

$$P\left(\frac{q+r}{2}, qr\right)$$

$P(t, t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ であるから $(0 \leq t < 8)$

$$q + r = 2t, \quad qr = t^3 - 8t^2 + 15t - 56 \quad \cdots (*)$$

q, r を解とする x に関する 2 次方程式は

$$x^2 - 2tx + t^3 - 8t^2 + 15t - 56 = 0 \quad \cdots (**)$$

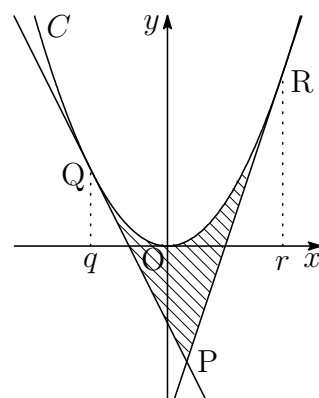
この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-t)^2 - (t^3 - 8t^2 + 15t - 56) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 56 \\ &= (8-t)(t^2 - t + 7) = (8-t) \left\{ \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \right\} > 0 \end{aligned}$$

したがって、2 次方程式 $(**)$ は異なる 2 つの実数解 q, r をもつ ($q < r$)、すなわち、点 P から放物線 $y = x^2$ に 2 本の異なる接線が引ける。

- (2) $S(t)$ は、上の図の斜線部分の面積であるから、 $t = \frac{q+r}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_q^t \{x^2 - (2qx - q^2)\} dx + \int_t^r \{x^2 - (2rx - r^2)\} dx \\ &= \int_q^t (x - q)^2 dx + \int_t^r (x - r)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - q)^3 \right]_q^t + \left[\frac{1}{3}(x - r)^3 \right]_t^r \\ &= \frac{1}{3}(t - q)^3 - \frac{1}{3}(t - r)^3 \\ &= \frac{1}{24}(r - q)^3 + \frac{1}{24}(r - q)^3 = \frac{1}{12}(r - q)^3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (*) \text{ より } \quad (r-q)^2 &= (q+r)^2 - 4qr \\ &= (2t)^2 - 4(t^3 - 8t^2 + 15t - 56) \\ &= 4(8-t)(t^2 - t + 7) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad r-q = 2\sqrt{(8-t)(t^2 - t + 7)}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S(t) &= \frac{1}{12} \{2\sqrt{(8-t)(t^2 - t + 7)}\}^3 \\ &= \frac{2}{3} \{(8-t)(t^2 - t + 7)\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

補足 $S(t) = \frac{1}{3} \triangle PQR$ である ².



²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf [4] を参照

1.14 2014 年 (90 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 2つの放物線 $C_1 : y = -x^2 + \frac{3}{2}$, $C_2 : y = (x - a)^2 + a$ ($a > 0$) がある. 点 $P_1 \left(p, -p^2 + \frac{3}{2} \right)$ における C_1 の接線を l_1 とする.

- (1) C_1 と C_2 が共有点を持たないための a に関する条件を求めよ.
- (2) l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式と, l_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を a, p を用いて表せ.
- (3) C_1 と C_2 が共有点を持たないとする. (2) で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が l_1 と垂直になるとき, p を求めよ.

- 2 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 以下が成立するように, 実数 s, t ($s > t$) を定めよ.

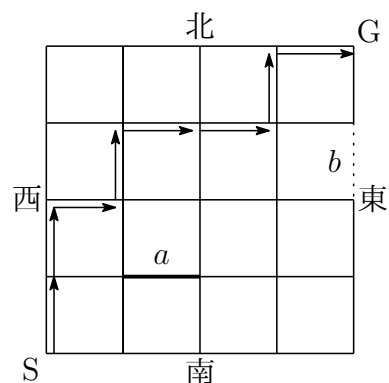
$$\begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 一般項 a_n を求めよ.

- 3 $\triangle ABC$ を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし, その外接円の中心を O とする. 正の実数 p に対して, BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし, 線分 AD と $\triangle ABC$ の外接円との交点で A と異なる点を X とする.

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OC}$, p を用いて表せ.
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OX}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, p を用いて表せ.

- 4 図のような格子状の道路がある．S 地点を出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える．ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする．たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる．



- (1) a を通り抜ける経路は何通りあるか．
- (2) a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか．
- (3) すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ．

解答例

- 1 (1) $C_1: y = -x^2 + \frac{3}{2}$, $C_2: y = (x-a)^2 + a$ ($a > 0$) から y を消去すると

$$-x^2 + \frac{3}{2} = (x-a)^2 + a \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - 2ax + a^2 + a - \frac{3}{2} = 0$$

C_1, C_2 が共有点をもたないとき, 上の第2式の係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 2\left(a^2 + a - \frac{3}{2}\right) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+3)(a-1) > 0$$

$a > 0$ に注意して $a > 1$

- (2) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}$, $g(x) = (x-a)^2 + a$ とおくと

$$f'(x) = -2x, \quad g'(x) = 2(x-a)$$

$P_2(q, g(q))$ とおくと, $f'(p) = g'(q)$ であるから

$$-2p = 2(q-a) \quad \text{ゆえに} \quad q = a-p, \quad g(q) = p^2 + a$$

したがって $P_2(a-p, p^2 + a)$

l_2 は点 $P_2(a-p, p^2 + a)$ を通り, 傾き $-2p$ の直線であるから

$$y - (p^2 + a) = -2p(x - a + p)$$

ゆえに $y = -2px - p^2 + 2ap + a$

- (3) $P_1\left(p, -p^2 + \frac{3}{2}\right)$, $P_2(a-p, p^2 + a)$ より

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(a-2p, 2p^2 + a - \frac{3}{2}\right)$$

$f'(p) = -2p$ より, l_1 の方向ベクトルを

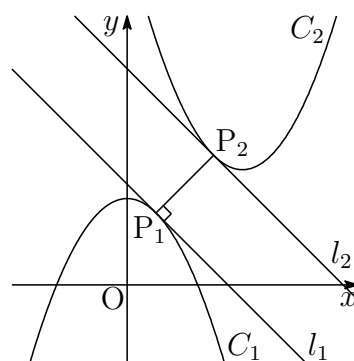
$$\vec{v} = (1, -2p)$$

とすると, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$ であるから

$$1(a-2p) - 2p\left(a-2p, 2p^2 + a - \frac{3}{2}\right) = 0$$

したがって $(2p-1)(2p^2 + p + a) = 0$

$$a > 1 \text{ より } 2p^2 + p + a = 2\left(p + \frac{1}{4}\right)^2 + a - \frac{1}{8} > 0 \quad \text{よって} \quad p = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$



2 (1) 与えられた漸化式

$$(*) \begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を変形すると、ともに

$$a_{n+2} = (s+t)a_{n+1} - sta_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

これが $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$ に一致するから

$$s+t=1, \quad st=-3 \quad \dots (**)$$

s, t を解とする2次方程式は $x^2 - x - 3 = 0$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$s > t \text{ であるから } s = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad t = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 1$ および $(*)$, $(**)$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - sa_n &= t^{n-1}(a_2 - sa_1) = t^{n-1}(1 - s) = t^n \\ a_{n+1} - ta_n &= s^{n-1}(a_2 - ta_1) = s^{n-1}(1 - t) = s^n \end{aligned}$$

上の2式から ($s \neq t$)

$$(s-t)a_n = s^n - t^n \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{s^n - t^n}{s-t}$$

これに (1) の結果を代入すると

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{13}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^n \right\}$$

■

- $$\text{OC} : \text{OD} = \frac{1}{2} : \left(p + \frac{1}{2}\right) = 1 : (2p + 1)$$

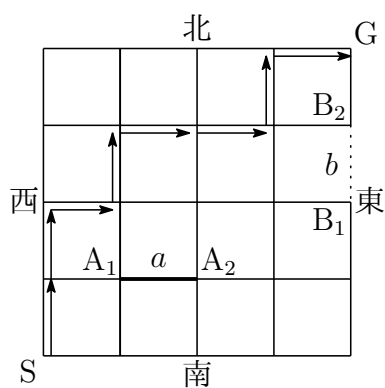
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OD} \quad (0 < t < 1) \\ &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t(2p+1)\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{\text{OX}}|^2 = (1-t)^2 |\overrightarrow{\text{OA}}|^2 + t^2 (2p+1)^2 |\overrightarrow{\text{OC}}|^2$$

$$1 = (1 - t)^2 + t^2(2p + 1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad t\{(2p^2 + 2p + 1)t - 1\} = 0$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{\text{OX}} = \frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1} \overrightarrow{\text{OA}} + \frac{2p+1}{2p^2+2p+1} \overrightarrow{\text{OC}}$$

- $$\frac{2!}{1!1!} = 2 \text{ (通り)}$$

$$\frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ (通り)}$$
$$2 \times 10 = \mathbf{20} \text{ (通り)}$$


(2) a, b を通り抜ける事象を, それぞれ A, B とする.

b を通り抜ける経路 ($S \rightarrow B_1, B_2 \rightarrow G$) の総数を $n(B)$ とすると

$$n(B) = \frac{6!}{4!2!} \times 1 = 15 \quad (\text{通り})$$

a と b を通り抜ける経路 ($S \rightarrow A_1, A_2 \rightarrow B_1, B_2 \rightarrow G$) の総数を $n(A \cap B)$ とすると

$$n(A \cap B) = \frac{2!}{1!1!} \times \frac{3!}{2!1!} \times 1 = 6 \quad (\text{通り})$$

a を通り抜けずに b を通り抜ける経路の総数を $n(\bar{A} \cap B)$ とすると

$$n(\bar{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 15 - 6 = 9 \quad (\text{通り})$$

(3) a を通り抜ける経路の総数を $n(A)$ とすると, (1) の結果から $n(A) = 20$

a を通り b を通り抜けいない経路の総数を $n(A \cap \bar{B})$ とすると

$$n(A \cap \bar{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 6 = 14 \quad (\text{通り})$$

a または b を通り抜ける経路の総数を $n(A \cup B)$ とすると

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 15 - 6 = 29 \quad (\text{通り})$$

すべての経路の総数を $n(U)$ とすると

$$n(U) = \frac{8!}{4!4!} = 70 \quad (\text{通り})$$

a も b も通り抜けいない経路の総数を $n(\bar{A} \cap \bar{B})$ とすると

$$n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 70 - 29 = 41 \quad (\text{通り})$$

S から G に到達するまでの時間 X とその確率 P は

$$(i) \ A \cap B \text{ のとき } X = 2 \times 6 + 1 + 8 = 21, \ P = \frac{6}{70}$$

$$(ii) \ \bar{A} \cap B \text{ のとき } X = 2 \times 7 + 8 = 22, \ P = \frac{9}{70}$$

$$(iii) \ A \cap \bar{B} \text{ のとき } X = 2 \times 7 + 1 = 15, \ P = \frac{14}{70}$$

$$(iv) \ \bar{A} \cap \bar{B} \text{ のとき } X = 2 \times 8 = 16, \ P = \frac{41}{70}$$

よって, 求める期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= 21 \cdot \frac{6}{70} + 22 \cdot \frac{9}{70} + 15 \cdot \frac{14}{70} + 16 \cdot \frac{41}{70} \\ &= 15 + \frac{6 \cdot 6 + 7 \cdot 9 + 1 \cdot 41}{70} = 17 \quad (\text{分}) \end{aligned}$$



1.15 2015 年 (90 分)

出題分野 1 2 3 4

1 2つの放物線

$$C_1: y = x^2, \quad C_2: y = -(x-1)^2$$

がある. a は 0 でない実数とし, C_1 上の 2 点 $P(a, a^2)$, $Q(-2a, 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を ℓ とする.

- (1) ℓ の方程式を a で表せ.
- (2) C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ.
- (3) C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点 R, S をもつとする. 線分 PQ の長さ と線分 RS の長さが等しくなるとき, a の値を求めよ.

2 p は 0 でない実数とし

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある.

- (1) $b_n = p^n a_n$ とする. b_{n+1} を b_n, n, p で表せ.
- (2) 一般項 a_n を求めよ.

3 平面において, 一直線上にない 3 点 O, A, B がある. O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる. O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる. ベクトル $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ は $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるとする.

- (1) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}$ を示せ.
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ のなす角を α とする. ただし, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする. このときベクトル $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ のなす角が $\pi - \alpha$ であることを示せ.
- (3) $\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}$ を示せ.

4 ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える.

- (1) 番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ.
- (2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い, 4 枚連続しては並ばない確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) 2点 $P(a, a^2)$, $Q(-2a, 4a^2)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{4a^2 - a^2}{-2a - a} = -a$$

$$C_1: y = x^2 \text{ より } y' = 2x$$

C_1 と接線 ℓ の接点を M とすると, M の x 座標は (実は, P と Q の x 座標の中央)

$$2x = -a \quad \text{ゆえに} \quad x = -\frac{a}{2}$$

ℓ は点 $M\left(-\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$ を通り, 傾き $-a$ の直線であるから

$$y - \frac{a^2}{4} = -a\left(x + \frac{a}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -ax - \frac{a^2}{4}$$

- (2) $C_2: y = -(x-1)^2$ と ℓ の方程式から y を消去すると

$$-(x-1)^2 = -ax - \frac{a^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - (a+2)x + 1 - \frac{a^2}{4} = 0 \quad \cdots (*)$$

上の2次方程式(*)の判別式 D は

$$D = (a+2)^2 - 4\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = 2a(a+2)$$

C_2 と ℓ は異なる2つの共有点をもつから, $D > 0$ より

$$2a(a+2) > 0 \quad \text{これを解いて} \quad a < -2, 0 < a$$

- (3) $PQ = RS$ が成立するとき, 2点 P, Q の x 座標の差と2点 R, S の x 座標の差が等しいから

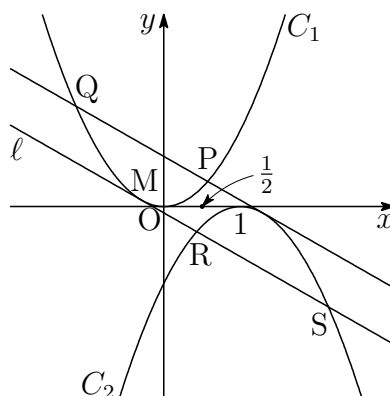
$$|-2a - a| = \frac{a+2+\sqrt{D}}{2} - \frac{a+2-\sqrt{D}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |3a| = \sqrt{D}$$

$$\text{両辺を平方すると} \quad 9a^2 = 2a(a+2) \quad a \neq 0 \text{ に注意して} \quad a = \frac{4}{7}$$

補足 C_1 と C_2 は点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ に関して対称である. $PQ = RS$ が成立するとき, 直線

$PQ: y = -ax + 2a^2$ と ℓ は点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ に関して対称となる. 直線 PQ および ℓ の x 切片は, それぞれ $2a, -\frac{a}{4}$ で, その中央が $\frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{2a + \left(-\frac{a}{4}\right)}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{4}{7}$$



2 (1) $a_{n+1} = \frac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1}$ より $p^{n+1}a_{n+1} = p^n a_n - (-p)^{n+1}$

$$b_n = p^n a_n \text{ より } b_{n+1} = b_n - (-p)^{n+1}$$

(2) $b_1 = pa_1 = p \cdot 1 = p$, (1) の結果から $b_{n+1} - b_n = -(-p)^{n+1}$

(i) $-p \neq 1$, すなわち, $p \neq -1$ のとき, $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) &= - \sum_{k=1}^{n-1} (-p)^{k+1} \\ b_n - p &= - \frac{(-p)^2 \{1 - (-p)^{n-1}\}}{1 - (-p)} \\ b_n &= \frac{p + (-p)^{n+1}}{1 + p} \end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから $b_n = \frac{p + (-p)^{n+1}}{1 + p}$

(ii) $-p = 1$, すなわち, $p = -1$ のとき, $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) &= - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ b_n - (-1) &= -(n-1) \\ b_n &= -n \end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから $b_n = -n$

(i),(ii) から, 一般項 a_n は

$$a_n = \frac{b_n}{p^n} = \begin{cases} \frac{1 - (-p)^n}{(1 + p)p^{n-1}} & (p \neq -1) \\ (-1)^{n-1}n & (p = -1) \end{cases}$$



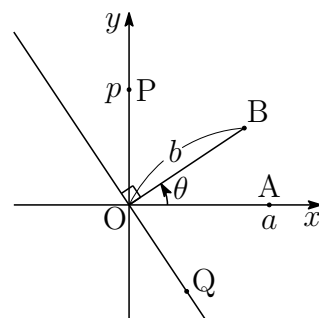
- 3** (1) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ は $\overrightarrow{AB}$ と垂直で, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OQ}$ であるから

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}$

- (2) $a, b, p > 0$, $q \neq 0$ とし, $\alpha = |\theta|$ を満たす θ をとる. 条件から, 一般性を失うことなく

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (a, 0), \quad \overrightarrow{OP} = (0, p), \\ \overrightarrow{OB} &= (b \cos \theta, b \sin \theta) \\ \overrightarrow{OQ} &= (q \sin \theta, -q \cos \theta) \end{aligned}$$



とおくことができる. このとき

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = bp \sin \theta, \quad \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} = aq \sin \theta$$

これを (1) の結果に代入すると $bp \sin \theta = aq \sin \theta$

$$0 < |\theta| < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } bp = aq \quad \cdots (*)$$

$a, b, p > 0$ であるから, (*) より $q > 0$

$$p = |\overrightarrow{OP}|, \quad q = |\overrightarrow{OQ}|, \quad 0 < |\theta| < \frac{\pi}{2} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= -pq \cos \theta = -|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos |\theta| \\ &= -|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \alpha \\ &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos(\pi - \alpha) \end{aligned}$$

上式より, $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角は $\pi - \alpha$

補足 $\overrightarrow{OQ} = (-q' \sin \theta, q' \cos \theta)$ において (1) の結果に代入すると

$$bp \sin \theta = -aq' \sin \theta \quad \text{ゆえに} \quad bp = -aq' \quad \text{これより} \quad q' = -|\overrightarrow{OQ}|$$

$$\text{このとき} \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = pq' \cos \theta = |\overrightarrow{OP}| (-|\overrightarrow{OQ}|) \cos |\theta| = -|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \alpha$$

$$(3) (*) \text{ より } |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OQ}| \quad \text{よって} \quad \frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}$$

■

- 4 (1) 52 枚のカードの並べ方は $52!$ 通り. 番号 7 のカードをひとまとめにする, 番号 7 以外の 48 枚のカードとひとまとめにしたカードの並べ方は

$$(48 + 1)! = 49! \text{ (通り)}$$

ひとまとめにした番号 7 のカードの並べ方は $4!$ (通り)

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{49! \cdot 4!}{52!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{1}{5525}$$

- (2) 4 枚の番号 7 のカードを 2 枚ずつ 2 組に分ける方法は $\frac{{}^4C_2}{2!} = 3$ (通り)

番号 7 のカードを 2 枚ずつにした 2 組のカードの並べ方は

$$2! \cdot 2! = 4 \text{ (通り)}$$

番号 7 以外の 48 枚のカードと 2 組のカードの並べ方は

$$(48 + 2)! = 50! \text{ (通り)}$$

このとき, 番号 7 の 4 枚が連続して並ばないので, (1) の結果を用いて

$$\frac{50! \cdot 3 \cdot 4 - 49! \cdot 4!}{52!} = \frac{50 \cdot 3 \cdot 4 - 4!}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{(25 - 1)4!}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{24}{5525}$$



1.16 2016年(90分)

出題分野 1 2 3 4

1 a, b, c を実数とし,

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とおく. 曲線 $C: y = f(x)$ 上に異なる2点 $P(s, f(s)), Q(t, f(t))$ がある.

- (1) P における C の接線の方程式を求めよ.
- (2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を s, t, a の関係式として求めよ.
- (3) (2) の条件のもとで, 線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ.

2 $f(x) = |x(x-2)| + |(x-1)(x-4)| + 3x - 10$ ($-2 \leq x \leq 4$) とおく.

- (1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ. グラフと x 軸との2つの交点の x 座標 α, β ($\alpha < \beta$) の値も求めよ.
- (2) (1) の α, β に対して, 定積分 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ の値を求めよ.

3 $\triangle ABC$ が, $AB = 2, AC = 1 + \sqrt{3}, \angle ACB = 45^\circ$ をみたすとする.

- (1) $\beta = \angle ABC$ とおくとき, $\sin \beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ.
- (2) (1) の β の値をすべて求めよ.
- (3) $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とする. $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるとき, $\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ をみたす実数 s, t を求めよ.

4 x, y を自然数とする.

- (1) $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ.
- (2) $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数であるような組 (x, y) をすべて求めよ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ より $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
 曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(s, f(s))$ における接線の方程式は

$$y - f(s) = f'(s)(x - s)$$

$$\text{ゆえに} \quad y - (s^3 + as^2 + bs + c) = (3s^2 + 2as + b)(x - s)$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{y = (3s^2 + 2as + b)x - 2s^3 - as^2 + c}$$

- (2) $f'(s) = f'(t)$ より $3s^2 + 2as + b = 3t^2 + 2at + b$

$$\text{ゆえに} \quad (s - t)(3s + 3t + 2a) = 0$$

$$s \neq t \text{ より, } s - t \neq 0 \text{ であるから} \quad \mathbf{3s + 3t + 2a = 0}$$

- (3) (2) の結果から, $s + t = -\frac{2a}{3}$ より

$$\begin{aligned} f(s) + f(t) &= s^3 + as^2 + bs + c + t^3 + at^2 + bt + c \\ &= s^3 + t^3 + a(s^2 + t^2) + b(s + t) + 2c \\ &= (s + t)^3 - 3st(s + t) + a\{(s + t)^2 - 2st\} + b(s + t) + 2c \\ &= \left(-\frac{2a}{3}\right)^3 - 3st\left(-\frac{2a}{3}\right) + a\left\{\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 - 2st\right\} + b\left(-\frac{2a}{3}\right) + 2c \\ &= \frac{4a^3}{27} - \frac{2}{3}ab + 2c, \\ f\left(-\frac{a}{3}\right) &= \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c \\ &= \frac{2a^3}{27} - \frac{1}{3}ab + c \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{s+t}{2} = -\frac{a}{3}, \quad \frac{f(s)+f(t)}{2} = f\left(-\frac{a}{3}\right)$$

よって, $P(s, f(s))$, $Q(t, f(t))$ の中点は, C 上の点 $\left(-\frac{a}{3}, f\left(-\frac{a}{3}\right)\right)$ と一致する. ■

2 (1) $f(x) = |x(x-2)| + |(x-1)(x-4)| + 3x - 10 \quad (-2 \leq x \leq 4)$

(i) $-2 \leq x \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-2) + (x-1)(x-4) + 3x - 10 = 2x^2 - 4x - 6 \\ &= 2(x+1)(x-3) = 2(x-1)^2 - 8 \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$f(x) = -x(x-2) + (x-1)(x-4) + 3x - 10 = -6$$

(iii) $1 \leq x \leq 2$ のとき

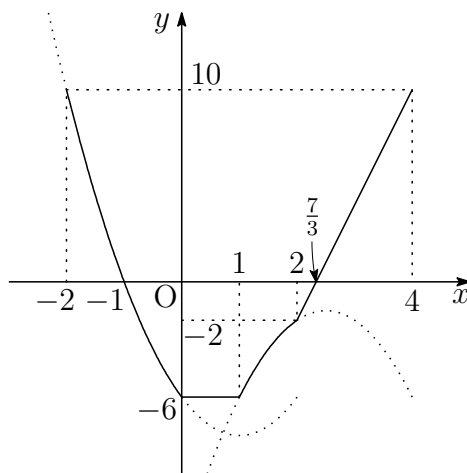
$$\begin{aligned} f(x) &= -x(x-2) - (x-1)(x-4) + 3x - 10 = -2x^2 + 10x - 14 \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(iv) $2 \leq x \leq 4$ のとき

$$f(x) = x(x-2) - (x-1)(x-4) + 3x - 10 = 6x - 14$$

(i)~(iv) より, $y = f(x)$ のグラフは下の図のようになる.

グラフと x 軸との交点の x 座標 α, β ($\alpha < \beta$) は $\alpha = -1, \beta = \frac{7}{3}$



$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{-1}^0 (2x^2 - 4x - 6) dx + \int_0^1 (-6) dx \\ &\quad + \int_1^2 (-2x^2 + 10x - 14) dx + \int_2^{\frac{7}{3}} (6x - 14) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x \right]_{-1}^0 - 6 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 14x \right]_1^2 \\ &\quad + \left[3x^2 - 14x \right]_2^{\frac{7}{3}} = -\frac{10}{3} - 6 - \frac{11}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{40}{3} \end{aligned}$$

■

- 3** (1) $b = 1 + \sqrt{3}$, $c = 2$, $B = \beta$, $C = 45^\circ$ を正弦定理を適用すると

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{\sin \beta} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \beta = \frac{(1 + \sqrt{3}) \sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{したがって} \quad \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta = 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- (2) (1) の結果から, $0 < \beta < 180^\circ$ に注意して $\beta = 75^\circ, 105^\circ$

- (3) $\triangle ABC$ は鋭角三角形であるから, (2) の結果から $B = 75^\circ$

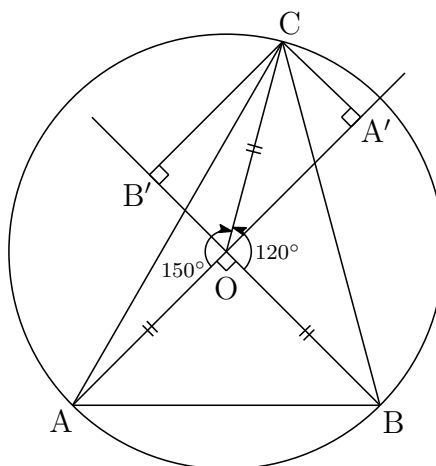
$$\text{ゆえに} \quad A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

$$OA = OB = OC, \quad OA \perp OB.$$

$\vec{OC}$ の $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ となす角はそれぞれ 150° , 120° である.

点 C から直線 OA , OB に垂線 CA' , CB' を引くと

$$\vec{OA'} = (\cos 150^\circ) \vec{OA}, \quad \vec{OB'} = (\cos 120^\circ) \vec{OB}$$



$$\vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'} \quad \text{より} \quad \vec{OC} = (\cos 150^\circ) \vec{OA} + (\cos 120^\circ) \vec{OB}$$

$$\text{よって} \quad s = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad t = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

補足 $|\vec{OA}| = |\vec{OC}|$ であるから ³

$$\vec{OA'} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OA}|^2} \vec{OA} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OA}| |\vec{OC}|} \vec{OA} = (\cos 150^\circ) \vec{OA}$$

³http://kumamoto.s12.xrea.com/N/HKdai/HKdai_ri_2016.pdf [5] の補足を参照.

- 4 (1) $\frac{3x}{x^2+2}$ は自然数であるから

$$\frac{3x}{x^2+2} \geq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x-2) \leq 0$$

x は自然数であるから, $x = 1, 2$. このとき, $\frac{3x}{x^2+2} = 1$

よって, 求める自然数 x は $\mathbf{x = 1, 2}$

- (2) (1) の結果から, 自然数 x について, $0 < \frac{3x}{x^2+2} \leq 1$

また, 自然数 y について, $0 < \frac{1}{y} \leq 1$ ゆえに $0 < \frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} \leq 2$

(i) $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} = 2$ のとき $\frac{3x}{x^2+2} = 1, \quad \frac{1}{y} = 1$

(1) の結果を利用して $(x, y) = (1, 1), (2, 1)$

(ii) $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} = 1$ のとき $\frac{1}{y} = 1 - \frac{3x}{x^2+2} \quad \cdots (*)$

$0 < \frac{1}{y} < 1$ であるから, $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3x}{x^2+2} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2) > 0 \\ (x-3)^2 \leq 7 \end{cases}$$

これを満たす自然数 x は $x = 3, 4, 5$

これらを (*) に代入して

x	3	4	5
y	$\frac{11}{2}$	3	$\frac{9}{4}$

(i), (ii) より, 求める自然数 (x, y) の組は

$$\mathbf{(x, y) = (1, 1), (2, 1), (4, 3)}$$



1.17 2017 年 (90 分)

出題分野 1 2 3 4

1 自然数の 2 乗となる数を平方数という.

(1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1) + a = (n+k)^2$ が成り立つとき,

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n(n+1) + 7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ.2 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. 円 C の内部に点 A がある. 点 C の周上を 2 点 P, Q が条件 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$ を満たしながら動く. 線分 PQ の中点を R とする. また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $|\vec{a}| = r$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ とする. ただし, $0 < r < 1$ とする.(1) $|\overrightarrow{AR}|^2$ を内積 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を用いて表せ.(2) 直線 OA 上の点 B で, $|\overrightarrow{BR}|^2$ が 2 点 P, Q の位置によらず一定であるものを求めよ. また, このときの $|\overrightarrow{BR}|^2$ の値を r を用いて表せ.3 正四面体 $ABCD$ の頂点を移動する点 P がある. 点 P は, 1 秒ごとに, 隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{a}{3}$ で移るか, もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる. 初め頂点 A にいた点 P が, n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする. ただし, $0 < a < 1$ とし, n は自然数とする.(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ.(2) 確率 p_n を求めよ.4 a, b を実数とし, 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \int_{-1}^1 f(t) dt$$

を満たすとする.

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ.(2) 関数 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲で極大値を持つとする. このような a, b が満たす条件を求めよ. また, 点 $P(a, b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad n(n+1) + a = (n+k)^2 \quad \cdots (*) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a &= (n+k)^2 - n(n+1) \\ &= k^2 + n(2k-1) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

n, k は自然数であるから, $n \geq 1, 2k-1 > 0$ より

$$a \geq k^2 + 1(2k-1) \quad \text{ゆえに} \quad a \geq k^2 + 2k - 1 \quad \cdots (**)$$

(2) $(*)$ において, $a = 7$ であるから, このとき, $(**)$ により

$$7 \geq k^2 + 2k - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (k+4)(k-2) \leq 0$$

これを満たす自然数 k は $1, 2$

$$\textcircled{1} \text{ より, } n = \frac{7-k^2}{2k-1} \text{ であるから}$$

$$k=1 \text{ のとき } n=6, \quad k=2 \text{ のとき } n=1$$

よって, 求める自然数 n は $1, 6$



- 2** (1) $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AQ} = \vec{q} - \vec{a}$ について, $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$, $|\vec{a}| = r$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{q} - \vec{a}) \\ &= \vec{p} \cdot \vec{q} - (\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + r^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

R は 2 点 P, Q の中点であるから, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q})$ より ($|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AR}|^2 &= \left| \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} \right|^2 = \left| \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) - \vec{a} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{p} + \vec{q}|^2 - (\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{4}(|\vec{p}|^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2) - (\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + r^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q} - (\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + r^2\end{aligned}$$

① から, $-(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + r^2 = -\vec{p} \cdot \vec{q}$ を上式に代入すると

$$|\overrightarrow{AR}|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q} - \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q}$$

- (2) 点 B は直線 OA 上の点であるから, $\overrightarrow{OB} = t\vec{a}$ とおくと (t は実数)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BR}|^2 &= \left| \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OB} \right|^2 = \left| \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) - t\vec{a} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{p} + \vec{q}|^2 - t(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + t^2|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 + \vec{p} \cdot \vec{q}) - t(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} + r^2t^2\end{aligned}$$

① より, $(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{a} = \vec{p} \cdot \vec{q} + r^2$ を上式に代入すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BR}|^2 &= \frac{1}{2}(1 + \vec{p} \cdot \vec{q}) - t(\vec{p} \cdot \vec{q} + r^2) + r^2t^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - t \right) \vec{p} \cdot \vec{q} + \frac{1}{2} + (t^2 - t)r^2\end{aligned}$$

上式が, 2 点 P, Q の位置によらず一定であるとき

$$\frac{1}{2} - t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{2}$$

よって, B は線分 OA の中点で, $|\overrightarrow{BR}|^2 = \frac{1}{2} - \frac{r^2}{4}$

■

- 3** (1) 点 P が n 秒後に頂点 A にいる確率が p_n であるから、点 P が n 秒後に頂点 B, C, D いる確率は等しく

$$\frac{1-p_n}{3}$$

であるから、点 P が $n+1$ 秒後に A にいる確率は

$$p_{n+1} = (1-a)p_n + 3 \times \frac{a}{3} \cdot \frac{1-p_n}{3}$$

よって
$$p_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{3}a\right)p_n + \frac{a}{3}$$

(2) (1) の結果から
$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = \left(1 - \frac{4}{3}a\right)\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{4}$, 公比 $1 - \frac{4}{3}a$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{4}\right) \\ p_n &= \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^{n-1} \left(1 - a - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^n \end{aligned}$$

■

4 (1) $k = \int_{-1}^1 f(t) dt$ とおくと, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + k$ より

$$\begin{aligned} k &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{3}t^3 - at^2 + (a^2 - b)t + k \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{2}(a^2 - b)t^2 + kt \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{2}{3}a + 2k \end{aligned}$$

ゆえに $k = \frac{2}{3}a$ したがって $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \frac{2}{3}a \cdots (*)$

よって $f(0) = \frac{2}{3}a$

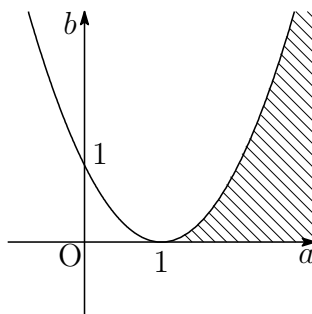
(2) (*) から $f'(x) = x^2 - 2ax + a^2 - b = (x - a)^2 - b$

2 次方程式 $f'(x) = 0$ が $x > 1$ において, 異なる 2 つの実数解をもつから

$$a > 1, \quad f'(a) = -b < 0, \quad f'(1) = (1 - a)^2 - b > 0$$

ゆえに $a > 1, \quad b > 0, \quad b < (a - 1)^2$

よって, 点 $P(a, b)$ の存在範囲は, 下図の斜線部分で境界線を含まない.



1.18 2018年(90分)

出題分野 1 2 3 4

1 $t > 1$ とする. $\triangle ABC$ において $AB = \sqrt{t^2 + 1}$, $BC = t - 1$, $AC = \sqrt{2}$ とし, 点 O を $\triangle ABC$ の外心とする.

- (1) $\angle ACB$ の大きさを求めよ.
- (2) 直線 CO と直線 AB が垂直に交わるときの t の値を求めよ.

2 a と b は実数とし, 関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を m とする.

- (1) m を a と b で表せ.
- (2) $a + 2b \leq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ. また, このときの m の値を求めよ.

3 赤色, 青色, 黄色のサイコロが1つずつある. この3つのサイコロを同時に投げる. 赤色, 青色, 黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R , B , Y とし, 自然数 s , t , u を $s = 100R + 10B + Y$, $t = 100B + 10Y + R$, $u = 100Y + 10R + B$ で定める.

- (1) s , t , u のうち少なくとも2つが500以上となる確率を求めよ.
- (2) $s > t > u$ となる確率を求めよ.

4 p を実数とする. 関数 $y = x^3 + px^2 + x$ のグラフ C_1 と関数 $y = x^2$ のグラフ C_2 は, $x > 0$ の範囲に共有点を2個もつとする.

- (1) このような p の値の範囲を求めよ.
- (2) C_1 と C_2 の $x > 0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α , β ($\alpha < \beta$) とし, $0 \leq x \leq \alpha$ と $\alpha \leq x \leq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1 , S_2 とする. $S_1 = S_2$ となるような p の値を求めよ. また, このときの S_1 の値を求めよ.

解答例

- 1 (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると, $a = t - 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{t^2 + 1}$ より

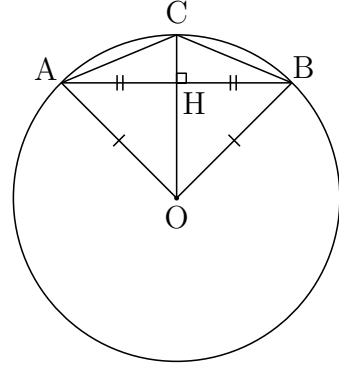
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(t-1)^2 + 2 - (t^2 + 1)}{2(t-1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{-2(t-1)}{2\sqrt{2}(t-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\angle ACB = 135^\circ$

- (2) 直線 CO と直線 AB が垂直であるとき, その交点を H とすると, H は線分 AB の中点であるから, 右の図から

$$BC = AC \quad \text{ゆえに} \quad t - 1 = \sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad t = 1 + \sqrt{2}$$



- 2 (1) $f(x) = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b \quad (0 \leq x \leq 1)$

(i) $1 \leq -\frac{a}{2}$ すなわち $a \leq -2$ のとき, $m = f(1) = a + b + 1$

(ii) $0 \leq -\frac{a}{2} \leq 1$ すなわち $-2 \leq a \leq 0$ のとき, $m = f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + b$

(iii) $-\frac{a}{2} \leq 0$ すなわち $0 \leq a$ のとき, $m = f(0) = b$

(i)~(iii) より
$$m = \begin{cases} a + b + 1 & (a \leq -2) \\ -\frac{a^2}{4} + b & (-2 \leq a \leq 0) \\ b & (0 \leq a) \end{cases}$$

- (2) $a + 2b \leq 2$ より, $t = 2 - a - 2b$ とおくと ($t \geq 0$) $b = -\frac{a}{2} + 1 - \frac{t}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$

これを (1) の結果に代入し, 整理すると

$$m = \begin{cases} \frac{a}{2} + 1 - \frac{t}{2} & (a \leq -2) \\ -\frac{1}{4}(a+1)^2 + \frac{5}{4} - \frac{t}{2} & (-2 \leq a \leq 0) \\ -\frac{a}{2} + 1 - \frac{t}{2} & (0 \leq a) \end{cases}$$

t を固定すると, m は a の関数で, $a = -1$ のとき最大値 $\frac{5}{4} - \frac{t}{2}$ をとる.

これがさらに最大となるのは, $t = 0$ のときで最大値 $\frac{5}{4}$.

このとき, ① から $b = \frac{3}{2}$. よって $a = -1$, $b = \frac{3}{2}$, $m = \frac{5}{4}$

- 3** (1) $s = 100R + 10B + Y$ について, s が 500 以上であることと R が 5 または 6 であることは同値. 同様に, t, u がそれぞれ 500 以上であることと, B, Y がそれぞれ 5 または 6 であることは同値である.

$$s, t, u \text{ のうち丁度 2 つが 500 以上である確率は } {}_3C_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$$

$$s, t, u \text{ の 3 つが 500 以上である確率は } \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

- (2) $s > t$ となるとき $s - t = 100(R - B) + 10(B - Y) + Y - R > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$

$$t > u \text{ となるとき } t - u = 100(B - Y) + 10(Y - R) + R - B > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

上の 2 式の百の位の係数に注目すると, $R - B \geq 0$ かつ $B - Y \geq 0$ であることが $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を満たすための必要条件である.

- (i) $R - B > 0, B - Y > 0$, すなわち, $R > B > Y$ のとき, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を満たす. このときの確率は

$$\frac{{}_6C_3}{6^3} = \frac{20}{6^3}$$

- (ii) $R - B = 0, B - Y > 0$, すなわち, $R = B > Y$ のとき, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を満たす. このときの確率は

$$\frac{{}_6C_2}{6^3} = \frac{15}{6^3}$$

- (iii) $R - B > 0, B - Y = 0$, すなわち, $R > B = Y$ のとき, $\textcircled{2}$ を満たさない.

- (iv) $R - B = 0, B - Y = 0$, すなわち, $R = B = Y$ のとき, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を満たさない.

$$(i) \sim (iv) \text{ より, 求める確率は } \frac{20}{6^3} + \frac{15}{6^3} = \frac{35}{216}$$



- 4 (1) $C_1: y = x^3 + px^2 + x$, $C_2: y = x^2$ の 2 式から, y を消去して整理すると

$$x\{x^2 + (p-1)x + 1\} = 0$$

条件を満たすとき, 2 次方程式

$$x^2 + (p-1)x + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

の係数について

$$D = (p-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = (p+1)(p-3) > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

2 次方程式 (*) の 2 つの解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\alpha + \beta = -p + 1 > 0, \quad \alpha\beta = 1 \quad \cdots (**)$$

① および上式から $p < -1$

$$(2) S_1 = \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta) dx, \quad S_2 = - \int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta) dx$$

$S_1 = S_2$ より, $S_1 - S_2 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta) dx + \int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \int_0^\beta x(x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= - \int_0^\beta x^2(\beta-x) dx + \alpha \int_0^\beta x(\beta-x) dx \\ &= -\frac{1}{12}\beta^4 + \alpha \cdot \frac{1}{6}\beta^3 = \frac{\beta^3}{12}(2\alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

$0 < \alpha < \beta$ であるから $\beta = 2\alpha$ (**) の第 2 式により $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \sqrt{2}$

さらに (**) の第 1 式により $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = -p + 1$ ゆえに $p = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta) dx = \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-2\alpha) dx \\ &= - \int_0^\alpha x^2(\alpha-x) dx + 2\alpha \int_0^\alpha x(\alpha-x) dx \\ &= -\frac{1}{12}\alpha^4 + 2\alpha \cdot \frac{1}{6}\alpha^3 = \frac{1}{4}\alpha^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

補足 $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ ■

1.19 2019年(90分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 p を負の実数とする. 座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $P(p, -1, 2)$ があり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする. また, 点 P から平面 α に垂線を下ろし, α との交点を Q とする.

(1) $\overrightarrow{OQ} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ となる実数 a, b を p を用いて表せ.

(2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ.

- 2 x を正の実数とし, 座標平面上に 3 点 $A(x, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, 3)$ をとる. 直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする. ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする.

(1) $\tan \theta$ を x で表せ.

(2) $x > 0$ における $\tan \theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ.

- 3 n を自然数とする. 数列 $2, 1, 2, 1, 1$ のように各項が 1 または 2 の有限数列 (項の個数が有限である数列) を考える. 各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする. 例えば, $n = 1$ のときは, 1 項からなる数列 1 のみである. したがって, $s_1 = 1$ となる. $n = 2$ のときは, 1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列 $1, 1$ の 2 つである. したがって, $s_2 = 2$ となる.

(1) s_3 を求めよ.

(2) $n \geq 3$ のとき, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ.

(3) 3 以上のすべての n に対して $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α, β の組 (α, β) を 1 組求めよ.

(4) s_n を求めよ.

- 4 実数 a, b, c に対し, 関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ を考える. 1 次関数 $g(x)$ があり, $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は, すべての x に対し等式 $f(x) = f'(x)g(x) - 6x$ を満たしているとする.

(1) b と c を a で表せ.

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつように, a の値の範囲を定めよ.

解答例

- 1** (1) $\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 0)$ および $\overrightarrow{OB} = (2, -2, 1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (2, 1, -2)$$

とおく. $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\vec{n}$ とすると (a, b, c は実数)

$$\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} -a + 2b + 2c = p \\ 2a - 2b + c = -1 \\ b - 2c = 2 \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad a = \frac{p+2}{3}, \quad b = \frac{4(p+2)}{9}, \quad c = \frac{2p-5}{9}$$

- (2) $\overrightarrow{OQ} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ であるから, 条件を満たすとき

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a + b \leq 1$$

$$(1) \text{ の結果から } \frac{p+2}{3} \geq 0, \quad \frac{4(p+2)}{9} \geq 0, \quad \frac{p+2}{3} + \frac{4(p+2)}{9} \leq 1$$

$$\text{これを解いて} \quad -2 \leq p \leq -\frac{5}{7}$$

補足 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき, ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

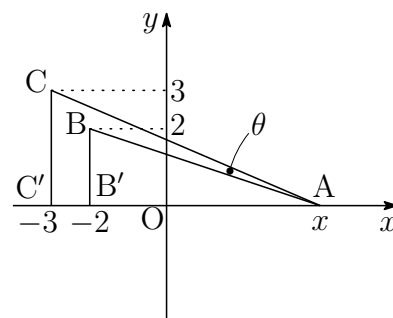
は, $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する. このベクトルを, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積と言い, $\vec{a} \times \vec{b}$ で表す⁴. ■

⁴<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2004.pdf> (p.10 を参照)

- 2 (1) 2点 B, C から x 軸にそれぞれ垂線 BB' , CC' を下ろし, $\beta = \angle BAB'$, $\gamma = \angle CAC'$ とすると

$$\tan \beta = \frac{2}{x+2}, \quad \tan \gamma = \frac{3}{x+3},$$

$$\theta = \gamma - \beta$$



したがって

$$\begin{aligned} \tan \theta = \tan(\gamma - \beta) &= \frac{\tan \gamma - \tan \beta}{1 + \tan \gamma \tan \beta} = \frac{\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}}{1 + \frac{3}{x+3} \cdot \frac{2}{x+2}} \\ &= \frac{3(x+2) - 2(x+3)}{(x+2)(x+3) + 6} = \frac{x}{x^2 + 5x + 12} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $f(x) = \frac{1}{x + \frac{12}{x} + 5} \quad (x > 0) \quad \dots \textcircled{1}$

$x > 0$, $\frac{12}{x} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x + \frac{12}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{12}{x}} = 4\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

②において, 等号が成立するとき

$$x = \frac{12}{x} \quad \text{すなわち} \quad x = 2\sqrt{3}$$

①, ② から $f(x) \leq \frac{1}{4\sqrt{3} + 5} = \frac{4\sqrt{3} - 5}{23}$

よって, $x = 2\sqrt{3}$ のとき, 最大値 $\frac{4\sqrt{3} - 5}{23}$ をとる. ■

- 3** (1) 条件を満たす数列は、次の 3 通り.

$$\{1, 1, 1\}, \quad \{1, 2\}, \quad \{2, 1\}$$

よって $s_3 = 3$

- (2) 数列の和が n となる数列の個数 s_n は、その数列の末項が 1 となる個数は s_{n-1} であり、末項が 2 となる個数は s_{n-2} であるから

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$$

- (3) $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2}) \cdots (*)$ より

$$s_n - (\alpha + \beta)s_{n-1} + \alpha\beta s_{n-2} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(2) の結果から $s_n - s_{n-1} - s_{n-2} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の係数を比較して $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1 \quad \cdots (**)$

$\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ を解とする 2 次方程式は $x^2 - x - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$

これを解いて $\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- (4) $(*)$ より $s_{n+1} - \alpha s_n = \beta^{n-1}(s_2 - \alpha s_1) = \beta^{n-1}(2 - \alpha)$

ここで、 β は、方程式 $\textcircled{3}$ の解であるから $\beta^2 - \beta - 1 = 0$

上式および $(**)$ により $2 - \alpha = 1 + \beta = \beta^2$

したがって $s_{n+1} - \alpha s_n = \beta^{n+1}$

同様に $s_{n+1} - \beta s_n = \alpha^{n+1}$

上の 2 式から $s_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}$$



- 4 (1) $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 3x^2 - 6ax + b$ について

$$f(x) = f'(x)g(x) - 6x \quad \cdots (*)$$

を満たす1次関数 $g(x)$ は, $f(x)$ の x^3 の項の係数に注意して

$$g(x) = \frac{x}{3} + k \quad (k \text{ は定数})$$

とおける. 上の諸式を (*) に代入すると

$$\begin{aligned} x^3 - 3ax^2 + bx + c &= (3x^2 - 6ax + b) \left(\frac{x}{3} + k \right) - 6x \\ &= x^3 + (3k - 2a)x^2 + \left(\frac{b}{3} - 6ak - 6 \right)x + bk \end{aligned}$$

上式の両辺の x^2 , x の項の係数および定数項を比較して

$$-3a = 3k - 2a, \quad b = \frac{b}{3} - 6ak - 6, \quad c = bk$$

$$\text{整理すると} \quad k = -\frac{a}{3} \cdots \text{①}, \quad b = -9ak - 9 \cdots \text{②}, \quad c = bk \cdots \text{③}$$

$$\text{①を②に代入すると} \quad b = 3a^2 - 9$$

$$\text{これと①を③に代入すると} \quad c = -a^3 + 3a$$

- (2) (1)の結果から $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2 - 9 = 3(x - a)^2 - 9$

上式より, $f'(x) = 0$ は異なる2つの実数解をもち, それらを α, β とすると, 解と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{3a^2 - 9}{3} = a^2 - 3$$

$$\text{このとき, } (*) \text{ より} \quad f(\alpha) = -6\alpha, \quad f(\beta) = -6\beta$$

3次方程式 $f(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつとき,

$$f(\alpha)f(\beta) < 0$$

を満たせばよいから

$$-6\alpha \cdot (-6\beta) = 36\alpha\beta = 36(a^2 - 3) < 0$$

これを解いて

$$-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$$



1.20 2020 年 (90 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 k を正の実数とする．座標平面上に直線 $\ell: y = kx + 1$ と放物線 $C: y = x^2$ がある． ℓ と C の交点のうち x 座標の小さい方を P ，大きい方を Q とする．さらに，線分 PQ の垂直二等分線を m とし， m と C の交点のうち x 座標の小さい方を R ，大きい方を S とする．

- (1) 線分 PQ の中点 M の座標を k を用いて表せ．
- (2) k が正の実数を動くとき，線分 RS の中点 N の y 座標が最小となる k の値を求めよ．また，そのときの P と Q の座標を求めよ．

- 2 関数

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta - \sin \theta + \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を考える．

- (1) $t = \sin \theta - \cos \theta$ とおく． $f(\theta)$ を t の式で表せ．
- (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ．
- (3) a を実数の定数とする． $f(\theta) = a$ となる θ がちょうど 2 個であるような a の範囲を求めよ．

- 3 n を 2 以上の自然数とする．1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする．

- (1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ．
- (2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ．

- 4 座標平面上に 2 つの放物線 $C_1: y = 2x^2$ と $C_2: y = -x^2 + 2x - \frac{19}{8}$ がある．

- (1) C_1 と C_2 の両方に接する直線をすべて求めよ．
- (2) (1) で求めた直線のうち傾きが負であるものを ℓ とする． C_1 , x 軸および ℓ が囲む部分の面積を求めよ．

解答例

- 1 (1) $\ell: y = kx + 1$ と $C: y = x^2$ の方程式から y を消去して、整理すると

$$x^2 - kx - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = k^2 + 4 > 0$$

したがって、2次方程式 $(*)$ の異なる2つの実数解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = k \quad \text{ゆえに点 M の } x \text{ 座標} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{k}{2}$$

点 M は ℓ 上であるから、その y 座標は $y = k \cdot \frac{k}{2} + 1 = \frac{k^2}{2} + 1$

よって、点 M の座標は $\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2 + 2}{2}\right)$

- (2) P, Q の垂直二等分線 m は、点 M $\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2 + 2}{2}\right)$ を通り、傾き $-\frac{1}{k}$ の直線であるから、その方程式は

$$y - \frac{k^2 + 2}{2} = -\frac{1}{k} \left(x - \frac{k}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad m: y = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2 + 3}{2}$$

上の第2式と C の方程式から y を消去して、整理すると

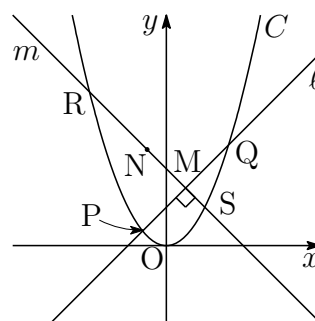
$$x^2 + \frac{1}{k}x - \frac{k^2 + 3}{2} = 0 \quad \cdots (**)$$

この方程式の判別式を D' とすると

$$D' = \left(\frac{1}{k}\right)^2 - 4 \cdot 1 \left(-\frac{k^2 + 3}{2}\right) = \frac{1}{k^2} + 2(k^2 + 3) > 0$$

したがって、2次方程式 $(**)$ の異なる2つの実数解を x_1, x_2 とすると

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{k} \quad \text{ゆえに N の } x \text{ 座標は} \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2k}$$



点 N は m 上であるから、その y 座標は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{k} \left(-\frac{1}{2k} \right) + \frac{k^2 + 3}{2} = \frac{1}{2k^2} + \frac{k^2 + 3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + k^2 + 3 \right) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{k^2} + k^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{k^2} \cdot k^2} = 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

②において、等号が成立するとき ($k > 0$)

$$\frac{1}{k^2} = k^2 \quad \text{すなわち} \quad k = 1$$

上式および ①, ② より, $k = 1$ のとき, 点 N の y 座標は, 最小値

$$\frac{1}{2}(2 + 3) = \frac{5}{2}$$

をとる. このとき, (*) は $x^2 - x - 1 = 0$ これを解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

P, Q は直線 $\ell: y = x + 1$ 上の点であるから, P, Q の条件により

$$P \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right), \quad Q \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

■

2 (1) $t = \sin \theta - \cos \theta$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1 - \sin 2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2\theta = 1 - t^2$$

$$\text{よって} \quad f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - t^2) - t = -\frac{1}{\sqrt{2}}t^2 - t + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2) $t = \sin \theta - \cos \theta$ より ($0 \leq \theta \leq \pi$)

$$t = \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{ゆえに} \quad -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$(1) \text{の結果から} \quad f(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$t = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{12} \text{ のとき, 最大値 } \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$t = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ のとき, 最小値 } -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) t = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \text{ より } (0 \leq \theta \leq \pi)$$

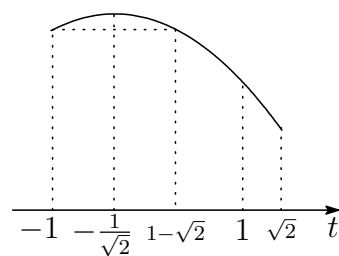
$1 \leq t < \sqrt{2}$ に対する θ は 2 個

$$g(t) = f(\theta) \text{ とおくと } (-1 \leq t \leq \sqrt{2})$$

$$g(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$g(-1) = g(1 - \sqrt{2}) = 1, \quad g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$g(1) = -1, \quad g(\sqrt{2}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$



よって、求める a の範囲は $-\frac{3\sqrt{2}}{2} < a \leq -1, 1 \leq a < \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ■

3 (1) 出る目が $\{3, 6\}$ である確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{2^n}{6^n}$

出る目が $\{6\}$ である確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{6^n}$

3 または 6 である確率からすべて 6 である確率を引けばよいから

$$\frac{2^n}{6^n} - \frac{1}{6^n} = \frac{2^n - 1}{6^n}$$

(2) 最大公約数が偶数である確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^n = \frac{3^n}{6^n}$

最大公約数が 3 である確率は $\frac{2^n - 1}{6^n}$

最大公約数が 5 である確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{6^n}$

求める確率は、これらの余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n - 1}{6^n} + \frac{1}{6^n} \right) = \frac{6^n - 3^n - 2^n}{6^n}$$

■

- 4 (1) $C_1: y = 2x^2$ と $C_2: y = -x^2 + 2x - \frac{19}{8}$ に接する直線を $y = ax + b$ とおく.
この直線と C_1, C_2 のそれぞれの方程式と y を消去して整理すると

$$2x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 + (a - 2)x + b + \frac{19}{8} = 0$$

このとき, これらの方程式の係数について

$$a^2 + 8b = 0, \quad (a - 2)^2 - 4\left(b + \frac{19}{8}\right) = 0 \quad (\text{A})$$

上の 2 式から b を消去して整理すると $3a^2 - 8a - 11 = 0$

ゆえに $(a + 1)(3a - 11) = 0$ これを解いて $a = -1, a = \frac{11}{3}$

(A) の第 1 式より $(a, b) = \left(-1, -\frac{1}{8}\right), \left(\frac{11}{3}, -\frac{121}{72}\right)$

よって, 求める直線は $y = -x - \frac{1}{8}, y = \frac{11}{3}x - \frac{121}{72}$

- (2) (1) の結果から, 直線 ℓ の方程式は

$$y = -x - \frac{1}{8}$$

これと $C_1: y = 2x^2$ の共有点の x 座標は

$$2x^2 = -x - \frac{1}{8} \quad \text{ゆえに} \quad (4x + 1)^2 = 0$$

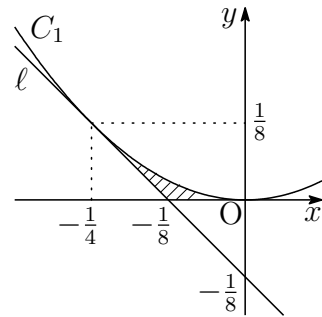
これを解いて $x = -\frac{1}{4}$

3 点 $\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{128}$$

よって, 求める面積は ⁵

$$\int_{-\frac{1}{4}}^0 2x^2 dx - \frac{1}{128} = \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_{-\frac{1}{4}}^0 - \frac{1}{128} = \frac{1}{384}$$



⁵http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf (p.6 の補足)

1.21 2021 年 (90 分)

出題分野 1 2 3 4

1 初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で表される数列 $\{a_n\}$ がある.(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.(2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ を求めよ.2 三角形 OAB において, 辺 AB を 2:1 に内分する点を D, 直線 OA に関して点 D と対称な点を E, 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とし, $|\vec{a}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ を満たすとする.(1) $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ.(2) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ.(3) $9|\overrightarrow{OE}| = 20|\overrightarrow{OF}|$ となるとき, $|\vec{b}|$ の値を求めよ.3 実数 x に対して,

$$f(x) = \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 2 \sin^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + 4 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$$

とおく.

(1) $t = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$ とおく. $\sin^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$ と $\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$ をそれぞれ t の式で表せ.(2) $0 \leq x \leq \pi$ のとき, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ.

4 k を $k > -1$ を満たす実数とする. 直線 $\ell : y = (1 - k)x + k$ および放物線 $C : y = x^2$ を考える. C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1 とし, C と ℓ と直線 $x = 2$ の 3 つで囲まれた部分の面積を S_2 とする.

- (1) S_1 を k を用いて表せ.
- (2) S_2 を k を用いて表せ.
- (3) k が $k > -1$ を満たしながら動くとき, $S_2 - S_1$ の最大値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \text{ より } a_1 = S_1 = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1 + 7) = 3$$

$$\begin{aligned} n > 1 \text{ のとき } a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) - \frac{1}{6}n(n-1)(2n+5) \\ &= n(n+2) \end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから $a_n = n(n+2)$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

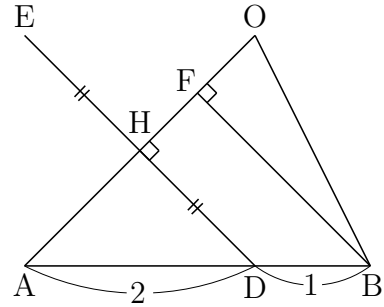
■

2 (1) $\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{6}{4^2} \vec{a} = \frac{3}{8} \vec{a}$

- (2) 点 D は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b})$$

点 D から直線 OA に垂線 DH を引くと



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \frac{\overrightarrow{OD} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{a}}{3|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2 \cdot 6}{4^2} \right) \vec{a} = \frac{7}{12} \vec{a} \end{aligned}$$

H は線分 DE の中点であるから, $\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}}{2}$ より

$$\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \frac{7}{12} \vec{a} - \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{5\vec{a} - 4\vec{b}}{6}$$

- (3) (1), (2) の結果を $9|\overrightarrow{OE}| = 20|\overrightarrow{OF}|$ に代入すると

$$9 \left| \frac{5\vec{a} - 4\vec{b}}{6} \right| = 20 \left| \frac{3}{8} \vec{a} \right| \quad \text{ゆえに} \quad |5\vec{a} - 4\vec{b}| = 5|\vec{a}|$$

$$|5\vec{a} - 4\vec{b}|^2 = 25|\vec{a}|^2 \quad \text{より} \quad 25|\vec{a}|^2 - 40\vec{a} \cdot \vec{b} + 16|\vec{b}|^2 = 25|\vec{a}|^2$$

$$\text{したがって} \quad |\vec{b}|^2 = \frac{5}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15 \quad \text{よって} \quad |\vec{b}| = \sqrt{15} \quad \blacksquare$$

3 (1) $t = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ より

$$\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin^2\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) &= \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - t^2 \\ \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2t^2\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{3}t + 2(1 - t^2) + 4(1 - 2t^2) \\ &= -10t^2 + \sqrt{3}t + 6\end{aligned}$$

$$f(x) = 0 \text{ のとき } 10t^2 - \sqrt{3}t - 6 = 0$$

$$(5t + 2\sqrt{3})(2t - \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{これを解いて } t = -\frac{2\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ より } (0 \leq x \leq \pi) \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{5} < -\frac{1}{2} \text{ に注意すると } \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} \text{ であるから}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \quad \text{よって} \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

■

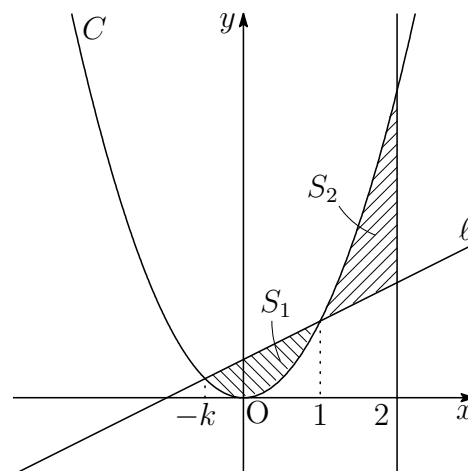
- 4 (1) $C: y = x^2$ と $\ell: y = (1-k)x + k$ の
共有点の x 座標は

$$x^2 = (1-k)x + k$$

$$\text{ゆえに } (x-1)(x+k) = 0$$

これを解いて $x = 1, -k$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-k}^1 \{(1-k)x + k - x^2\} dx \\ &= - \int_{-k}^1 (x+k)(x-1) dx \\ &= \frac{1}{6}(1+k)^3 \end{aligned}$$



- (2) S_2 は右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^2 \{x^2 - (1-k)x - k\} dx \\ &= \int_1^2 (x-1)(x+k) dx \\ &= \int_1^2 \{(x-1)^2 + (k+1)(x-1)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{k+1}{2}(x-1)^2 \right]_1^2 = \frac{3k+5}{6} \end{aligned}$$

- (3) $f(k) = S_2 - S_1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{3k+5}{6} - \frac{1}{6}(1+k)^3 = -\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{2}{3} \\ f'(k) &= -\frac{1}{2}k^2 - k = -\frac{1}{2}k(k+2) \end{aligned}$$

$f(k)$ の増減表は ($k > -1$)

k	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(k)$		$+$	0	$-$
$f(k)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって, $S_2 - S_1$ は, $k = 0$ のとき最大値 $\frac{2}{3}$ をとる. ■

1.22 2022年(90分)

出題分野 1 2 3 4

1 k を実数の定数とし,

$$f(x) = x^3 - (2k - 1)x^2 + (k^2 - k + 1)x - k + 1$$

とする.

- (1) $f(k - 1)$ の値を求めよ.
- (2) $|k| < 2$ のとき, 不等式 $f(x) \geq 0$ を解け.

2 $\{a_n\}$ を $a_1 = -15$ および

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{5} - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたす数列とする.

- (1) a_n が最小となる自然数 n をすべて求めよ.
- (2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) $\sum_{k=1}^n a_k$ が最小となる自然数 n をすべて求めよ.

3 $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ である直角三角形 ABC において, その内接円の中心を O, 半径を r とおく. また $a = BC$ とする.

- (1) r を a で表せ.
- (2) 次の条件をみたす負でない整数 k, ℓ, m, n の組を一つ求めよ.

$$OA : OB = 1 : k + \sqrt{\ell}, \quad OA : OC = 1 : m + \sqrt{n}$$

4 箱の中に1文字ずつ書かれたカードが10枚ある. そのうち5枚にはA, 3枚にはB, 2枚にはCと書かれている. 箱から1枚ずつ, 3回カードを取り出す試行を考える.

- (1) カードを取り出すごとに箱に戻す場合, 1回目と3回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ.
- (2) 取り出したカードを箱に戻さない場合, 1回目と3回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ.
- (3) 取り出したカードを箱に戻さない場合, 2回目に取り出したカードの文字がCであるとき, 1回目と3回目に取り出したカードの文字が一致する条件つき確率を求めよ.

解答例

1 (1) $f(x) = x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2 - k + 1)x - k + 1$ より

$$\begin{aligned} f(k-1) &= (k-1)^3 - (2k-1)(k-1)^2 + (k^2 - k + 1)(k-1) - k + 1 \\ &= (k-1)^2\{(k-1) - (2k-1)\} + (k-1)\{(k^2 - k + 1) - 1\} \\ &= -k(k-1)^2 + k(k-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から, $f(x)$ は $x - k + 1$ を因数にもつから

$$f(x) = (x - k + 1)(x^2 - kx + 1)$$

$$|k| < 2 \text{ より } x^2 - kx + 1 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{4 - k^2}{4} > 0$$

したがって, 不等式 $f(x) \geq 0$ を解くと $x \geq k - 1$ ■

2 (1) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}(n - 10)$ より

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{10} = a_{11} < a_{12} < \cdots$$

a_n が最小となる自然数 n は $n = 10, 11$

(2) 与えられた漸化式から, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{5} - 2\right) \\ &= -15 + \frac{1}{10}n(n-1) - 2(n-1) \\ &= \frac{1}{10}(n^2 - 21n - 130) = \frac{1}{10}(n+5)(n-26) \end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから $a_n = \frac{1}{10}(n+5)(n-26)$

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくと $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

(2) の結果から $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{10}(n+6)(n-25)$

$$S_1 > S_2 > \cdots > S_{25} = S_{26} < S_{27} < \cdots$$

$\sum_{k=1}^n a_k$ が最小となる自然数 n は $n = 25, 26$ ■

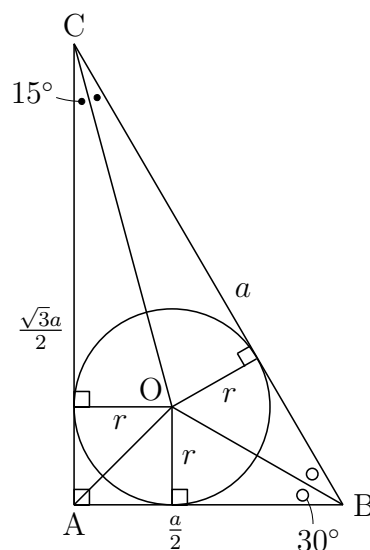
3 (1) $\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA = \triangle ABC$ より

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot r + \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$(1 + 2 + \sqrt{3})ar = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

したがって

$$r = \frac{\sqrt{3}a}{2(3 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}a$$



(2) $\triangle OAB$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{OA}{\sin 30^\circ} = \frac{OB}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{よって } OA : OB = \sin 30^\circ : \sin 45^\circ = \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : \sqrt{2}$$

$\triangle OAC$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{OA}{\sin 15^\circ} = \frac{OC}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{よって } OA : OC = \sin 15^\circ : \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : 1 + \sqrt{3}$$

したがって $(k, \ell, m, n) = (0, 2, 1, 3)$ ■

- 4 (1) 2 回連続して同じ文字のカードを取り出す確率として求めてもよい.

$$\left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{25 + 9 + 4}{100} = \frac{19}{50}$$

- (2) 1 回目と 3 回目を 1 回目と 2 回目として, 2 回連続して同じカードを取り出す確率として求めてもよい.

$$\frac{{}_5P_2}{{}_{10}P_2} + \frac{{}_3P_2}{{}_{10}P_2} + \frac{{}_2P_2}{{}_{10}P_2} = \frac{20 + 6 + 2}{90} = \frac{14}{45}$$

- (3) 2 回目に取り出したカード C を 1 回目に取り出したとして (条件下), 2 回連続して同じ文字のカードを取り出す確率として求めてもよい.

$$\frac{{}_5P_2}{{}_9P_2} + \frac{{}_3P_2}{{}_9P_2} = \frac{20}{72} + \frac{6}{72} = \frac{13}{36}$$



1.23 2023年(90分)

出題分野 ① ② ③ ④

- ① $P(x)$ を x についての整式とし, $P(x)P(-x) = P(x^2)$ は x についての恒等式であるとする.

- (1) $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$ であることを示せ.
- (2) $P(x)$ が $x-1$ で割り切れないならば, $P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れることを示せ.
- (3) 次数が2である $P(x)$ をすべて求めよ.

- ② 三角形 OAB は辺の長さが $OA = 3$, $OB = 5$, $AB = 7$ であるとする. また, $\angle AOB$ の2等分線と直線 AB との交点を P とし, 頂点 B における外角の2等分線と直線 OP との交点を Q とする.

- (1) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ. また, $|\overrightarrow{OP}|$ の値を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ. また, $|\overrightarrow{OQ}|$ の値を求めよ.

- ③ n を2以上の自然数とする. 1個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に $a_1, a_2, \dots, a_n$ とし,

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく. また, K_n のとりうる値の最小値を q_n とする.

- (1) $K_2 = 5$ となる確率を求めよ.
- (2) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ.
- (3) q_n を求めよ. また, $K_n = q_n$ となるための $a_1, a_2, \dots, a_n$ に関する必要十分条件を求めよ.

- ④ q を実数とする. 座標平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $P: y = x^2 + q$ がある.

- (1) C と P に同じ点で接する傾き正の直線が存在するとき, q の値およびその接点の座標を求めよ.
- (2) (1) で求めた q の値を q_1 , 接点の y 座標を y_1 とするとき, 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ y \geq x^2 + q_1 \\ y \leq y_1 \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ.

解答例

- 1 (1) (*) $P(x)P(-x) = P(x^2)$ に $x = 0$ を代入すると

$$P(0)^2 = P(0) \quad \text{ゆえに} \quad P(0)\{P(0) - 1\} = 0$$

よって $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$

- (2) (*) に $x = 1$ を代入すると

$$P(1)P(-1) = P(1) \quad \text{ゆえに} \quad P(1)\{P(-1) - 1\} = 0$$

$P(x)$ が $x - 1$ で割り切れないから, $P(1) \neq 0$ より

$$P(-1) - 1 = 0$$

$Q(x) = P(x) - 1$ とおくと, $Q(-1) = 0$ であるから, $Q(x)$, すなわち, $P(x) - 1$ は $x + 1$ で割り切れる.

- (3) $P(x)$ の最高次 (2 次) の係数を a とすると ($a \neq 0$), (*) の 4 次の係数を比較すると

$$a \cdot a = a \quad \text{ゆえに} \quad a = 1$$

- (i) $P(0) = 0$ のとき, $P(x) = x^2 + bx$ とし, (*) に適用すると

$$(x^2 + bx)(x^2 - bx) = x^4 + bx^2 \quad \text{ゆえに} \quad -b^2 = b$$

これを解いて $b = 0, -1$ すなわち $P(x) = x^2, x^2 - x$

- (ii) $P(0) = 1$ のとき, $P(x) = x^2 + cx + 1$ とし, (*) に適用すると

$$(x^2 + cx + 1)(x^2 - cx + 1) = x^4 + cx^2 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2 - c^2 = c$$

これを解いて $c = 1, -2$ すなわち $P(x) = x^2 + x + 1, x^2 - 2x + 1$

よって $P(x) = x^2, x^2 - x, x^2 + x + 1, x^2 - 2x + 1$ ■

- 2** (1) OP は $\angle AOB$ の二等分線であるから $AP : PB = OA : OB = 3 : 5$

したがって $\overrightarrow{\text{OP}} = \frac{5}{8}\overrightarrow{\text{OA}} + \frac{3}{8}\overrightarrow{\text{OB}}$

$$AP = 7\frac{3}{8}, \quad PB = 7\frac{5}{8} \text{ より}$$

$$OP^2 = OA \cdot OB - AP \cdot PB = 3 \cdot 5 - \frac{7 \cdot 3}{8} \cdot \frac{7 \cdot 5}{8} = 3 \cdot 5 \left(1 - \frac{7^2}{8^2} \right) = \frac{15^2}{8^2}$$

よって $|\overrightarrow{\text{OP}}| = \frac{15}{8}$

- (2) 下の図のように OB の延長上に、 $BC = 7$ となる点 C をとると、(1) の結果から、 k, l を用いて、 $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ で表す。

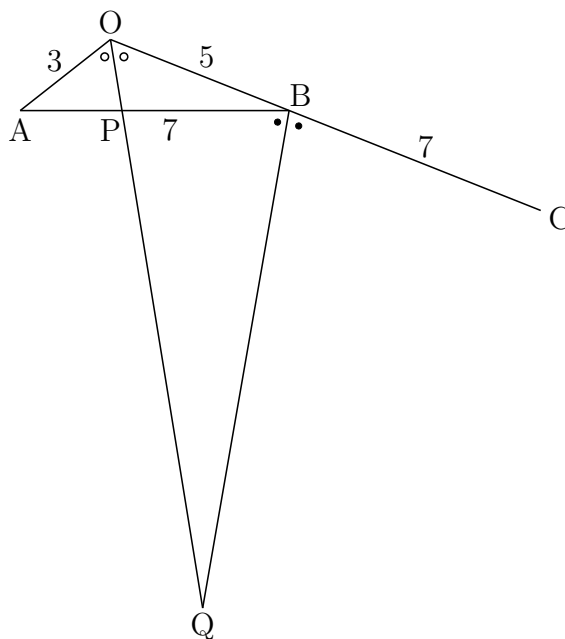
$$\overrightarrow{OQ} = 8k\overrightarrow{OP} = 5k\overrightarrow{OA} + 3k\overrightarrow{OB},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + l(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OB} + l\left\{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \frac{7}{5}\overrightarrow{OB}\right\} \\ &= l\overrightarrow{OA} + \left(\frac{2}{5}l + 1\right)\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は 1 次独立であるから, 上の 2 式から

$$5k = l, \quad 3k = \frac{2}{5}l + 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = 1, \quad l = 5$$

$$\overrightarrow{OQ} = 8\overrightarrow{OP} \text{ であるから } |\overrightarrow{OQ}| = 8|\overrightarrow{OP}| = 8 \cdot \frac{15}{8} = \mathbf{15}$$

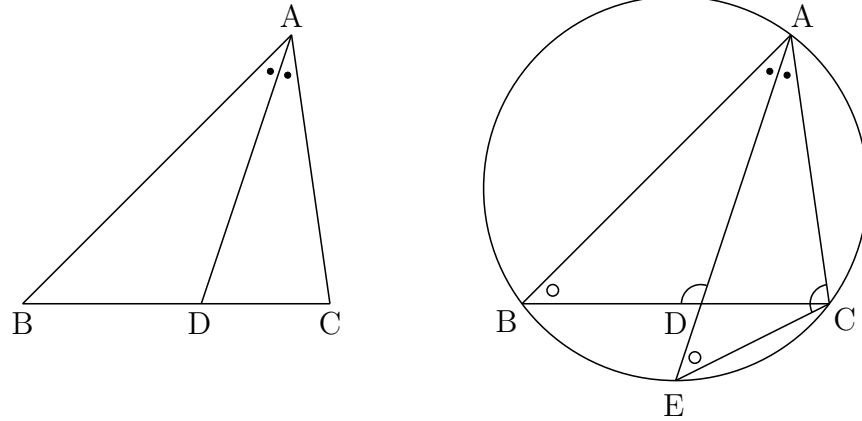


三角形の角の二等分線に関する公式

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

証明 右下の図のように $\triangle ABC$ の外接円と AD の延長との交点を E とする.



$\triangle ABD \sim \triangle AEC$ より

$$AB : AD = AE : AC \quad \text{ゆえに} \quad AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

$AE = AD + DE$ より

$$AB \cdot AC = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

方べきの定理により, $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ であるから

$$AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC \quad \text{よって} \quad AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC \quad \blacksquare$$

3 $K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$ より

$$\begin{aligned} K_n &= |a_1 - 1| + |a_2 - a_1| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| + |6 - a_n| \\ &\geq |(a_1 - 1) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (6 - a_n)| = 5 \end{aligned} \quad (*)$$

したがって $q_n = 5 \cdots$ ①

$a_1 - 1 \geq 0, 6 - a_n \geq 0$ より, (*)において等号が成立するとき,

$$a_2 - a_1 \geq 0, \cdots, a_n - a_{n-1} \geq 0$$

$$\text{すなわち} \quad 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq 6 \quad (\text{A})$$

$a_1 - 1, a_2 - a_1, \cdots, a_n - a_{n-1}, 6 - a_n$ の $n + 1$ 個から 5 個取る重複組合せは

$${}_{n+1}H_5 = (n+1)+5-1C_5 = {}_{n+5}C_5$$

$K_n = 5$ となる確率 $P(K_n = 5)$ は

$$P(K_n = 5) = \frac{{}_6H_n}{6^n} = \frac{{}_{6+n-1}H_n}{6^n} = \frac{{}_{n+5}C_5}{6^n} \quad (**)$$

$$(1) \quad (**) \text{ に } n = 2 \text{ を代入して } P(K_2 = 5) = \frac{{}_7C_5}{6^2} = \frac{7}{12}$$

$$(2) \quad (**) \text{ に } n = 3 \text{ を代入して } P(K_3 = 5) = \frac{{}_8C_5}{6^3} = \frac{7}{27}$$

補足 $a_1 - 1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, 6 - a_3$ の 4 個から 5 個取る重複組合せは⁶

$${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = 56$$

例えば, $a_1 - 1$ を 2 個, $a_3 - a_2$ を 3 個取るとき

$$a_1 - 1 = 2, a_2 - a_1 = 0, a_3 - a_2 = 3, 6 - a_3 = 0$$

$$\text{このとき} \quad a_1 = a_2 = 3, a_3 = 6$$

6			
5			
4			
3			
2			
1			
	a_1	a_2	a_3

$$(3) \quad \text{① より } q_n = 5$$

(A) より, 求める必要十分条件は

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq 6$$

■

⁶http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Kdai/Kdai_ri.2022.pdf [2] は関連問題.

- 4 (1) C と P の方程式から x を消去し, y について整理すると

$$y^2 + y - q - 1 = 0$$

この 2 次方程式は重解をもつから, 係数について

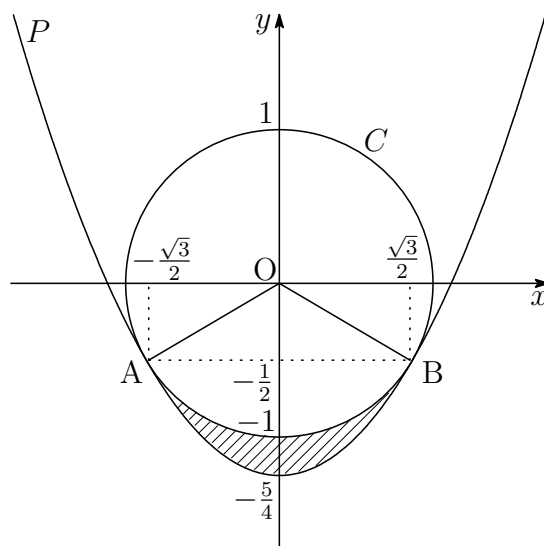
$$1^2 - 4 \cdot 1(-q - 1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad q = -\frac{5}{4}$$

$$\text{このとき} \quad y = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{よって} \quad \text{接点} \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

- (2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} - \left(x^2 - \frac{5}{4} \right) \right\} dx - (\text{扇形 OAB} - \triangle \text{OAB}) \\ &= - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dx - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{3})^3 - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$



1.24 2024年(90分)

出題分野 1 2 3 4

1 次の問いに答えよ.

- (1) 自然数 m, n について, $2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数を求めよ.
- (2) 6912 の正の約数のうち, 12 で割り切れないものの総和を求めよ.

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について考える.

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - \frac{3^{n+1}}{n(n+1)}$$

- (1) $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくとき, b_{n+1} を b_n と n の式で表せ.
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

3 a を 0 でない実数とする. C を $y = -x^3 + x^2$ で表される曲線, ℓ を $y = a$ で表される直線とし, C と ℓ は共有点をちょうど 2 つもつとする.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) C と ℓ の共有点の x 座標をすべて求めよ.
- (3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ.

4 各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある. 「1」, 「2」, 「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり, 残りの 5 つの面には「0」が書かれている. このさいころを水平な床面に投げて, 出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える. 最初の持ち点は 0 点とし, この試行を繰り返す. 例えば, 3 回の試行を行ったとき, 出た面に書かれた数が「0」, 「2」, 「3」であれば, 持ち点は 5 となる. なお, さいころが水平な床面にあるとき, さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ. また, さいころを投げるとき, 各面が出ることは同様に確からしいとする.

- (1) この試行を 2 回行ったとき, 持ち点が 1 である確率を求めよ.
- (2) この試行を 4 回行ったとき, 持ち点が 10 以下である確率を求めよ.

解答例

1 (1) $2^m \cdot 3^n$ の約数は

$$2^j \cdot 3^k \quad (j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

よって、求める約数の個数は $(m+1)(n+1)$

(2) $6912 = 2^8 \cdot 3^3$ であるから、6912 の正の約数は

$$2^j \cdot 3^k \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 8, \quad k = 0, 1, 2, 3)$$

よって、6912 の正の約数の総和は

$$\begin{aligned} (1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^8)(1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) &= \frac{2^9 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \\ &= 511 \times 40 = 20440 \end{aligned}$$

6912 の約数のうち、12 で割り切れる数の総和は

$$\begin{aligned} (2^2 + 2^3 + \dots + 2^8)(3^1 + 3^2 + 3^3) &= \frac{2 \cdot 2^8 - 2^2}{2 - 1} \cdot \frac{3 \cdot 3^3 - 3^1}{3 - 1} \\ &= 508 \times 39 = 19812 \end{aligned}$$

よって、求める総和は $20440 - 19812 = 628$

補足 初項 a ，公比 r ，末項 ℓ の等比数列の和 S は ($\ell = ar^{n-1}$)

$$S = \frac{r\ell - a}{r - 1} = \frac{a - r\ell}{1 - r}$$

■

$$\boxed{2} \quad (1) \quad a_{n+1} = 3a_n - \frac{3^{n+1}}{n(n+1)} \text{ より } \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ より } b_1 = 1, \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

(2) (1)の結果から, $n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$\text{これから} \quad b_n - b_1 = \frac{1}{n} - 1$$

上式は, $n = 1$ のときも成立する. これに $b_1 = 1$ を代入すると

$$b_n - 1 = \frac{1}{n} - 1 \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{n} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{3^n}{n}$$



- 3 (1) $y = -x^3 + x^2$ を微分すると $y' = -3x^2 + 2x = -x(3x - 2)$
 $y' = 0$ とすると $x = 0, \frac{2}{3}$ したがって, y の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{27}$	$\searrow$

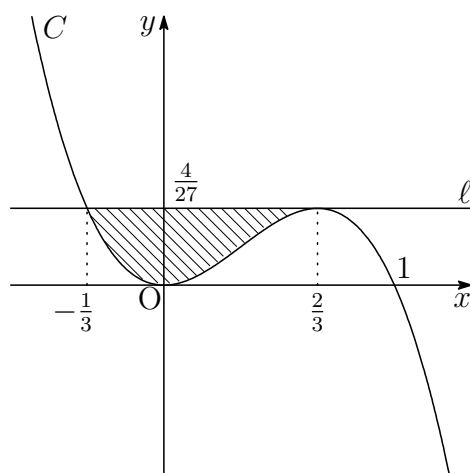
C と直線 $y = a$ (a は定数) がちょうど 2 点を共有する a の値は ($a \neq 0$)

$$a = \frac{4}{27}$$

- (2) (1) の増減表から求める共有点の x 座標は $x = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

- (3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{4}{27} - (-x^3 + x^2) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} - x \right)^2 dx \\ &= \frac{1!2!}{(3+1)!} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right)^{3+1} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$



補足 次の公式⁷に $m = 1$, $n = 2$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$ を代入.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

⁷<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> の [1] を参照.

- 4 (1) $p = \frac{1}{8}$, $q = \frac{5}{8}$ とおく.

持ち点が1, すなわち, 「1」が1回, 「0」が1回出る確率は

$${}_2C_1pq = 2pq = 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$$

- (2) 持ち点が11, すなわち, 「2」が1回, 「3」が3回出る確率は

$${}_4C_1p \cdot p^3 = 4p^4$$

持ち点が12, すなわち, 「3」が4回出る確率は p^4

以上から, 試行を4回行って得点が11以上になる確率は

$$4p^4 + p^4 = 5p^4 = 5 \times \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{5}{4096}$$

求める確率は, この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{5}{4096} = \frac{4091}{4096}$$



第 2 章 東北大学

出題分野 (2011-2024) 100 分

◀	東北大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	数と式														
	2 次関数			1										3	
	図形と計量														
	データの分析														
II	式と証明														
	複素数と方程式									1					
	図形と方程式					2			1		3	1	3		
	三角関数		2		4							3			2
	指数関数と対数関数	1								2					3
	微分法と積分法	4	1	4	1	4	2	2	3		1	4	2	4	1
A	場合の数と確率	3	3	3	2	3		4	2	4		2	1	1	
	整数の性質						3	3							
	図形の性質						4							2	
B	平面上のベクトル	2	4		3		1	1			4				
	空間のベクトル			2					4				4		
	数列					1				3	2				4
	確率分布と統計														

数字は問題番号

2.11 2011年(100分)

出題分野 1 2 3 4

1 以下の問いに答えよ.

(1) 実数 x に関する連立不等式

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2 \cdot 3^x + a3^{-x} \leq 1 \end{cases}$$

が解をもつような実数 a の範囲を求めよ.(2) $x \geq -1$ を満たすすべての実数 x に対し不等式

$$3^x + a3^{-x} \geq a$$

が成り立つような実数 a の範囲を求めよ.2 三角形 OAB の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を C とする. 動点 D は $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$ ($x \geq 1$) を満たすとし, 直線 CD と直線 OB の交点を E とする.(1) 実数 y を $\overrightarrow{OE} = y\overrightarrow{OB}$ で定めるとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

(2) 三角形 OAB の面積を S , 三角形 ODE の面積を T とするとき, $\frac{S}{T}$ の最大値と, そのときの x を求めよ.

3 先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり, 玉の入った箱がある. 箱の中には最初, 赤玉 3 個, 白玉 7 個, 全部で 10 個の玉が入っている. 先生がサイコロをふって, 1 の目が出たら A が, 2 または 3 の目が出たら B が, その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う. 取り出した玉は箱の中に戻さず, 取り出した生徒のものとする. この操作を 2 回続けて行うものとして, 以下の問いに答えよ. ただし, サイコロの 1 から 6 の目が出る確率は等しいものとし, また, 箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする.

(1) A が 2 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ.

(2) B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ.

4 放物線 $y = x^2$ の 2 本の接線 l, m は垂直であるとする.(1) l の接点の座標が (a, a^2) で与えられるとき, l, m の交点の座標を a を用いて表せ.(2) l, m が y 軸に関して対称のとき, l, m および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad (*) \begin{cases} x \geq -1 \\ 2 \cdot 3^x + a3^{-x} \leq 1 \end{cases}$$

(*) の第 1 式から, $t = 3^x$ とおくと $t \geq \frac{1}{3}$

(*) の第 2 式を t を用いて表すと

$$2t + \frac{a}{t} \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq -2t^2 + t$$

$$f(t) = -2t^2 + t \text{ おくと } f(t) = -2 \left(t - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{8}$$

$$t \geq \frac{1}{3} \text{ における } f(t) \text{ の最大値は } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

$$\text{よって, } a \leq f(t) \text{ が解をもつとき } a \leq \frac{1}{9}$$

$$(2) \quad (1) \text{ と同様に, } t = 3^x \text{ とおくと } (x \geq -1) \quad t \geq \frac{1}{3}$$

不等式 $3^x + a3^{-x} \geq a$ を t を用いて表すと

$$t + \frac{a}{t} \geq a \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - at + a \geq 0$$

$$g(t) = t^2 - at + a \text{ とおくと } g(t) = \left(t - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} + a \quad \cdots (**)$$

$$t \geq \frac{1}{3} \text{ における } g(t) \text{ の最小値を } m \text{ とすると, } (**) \text{ が成立する条件は } m \geq 0$$

$$(i) \quad \frac{a}{2} \leq \frac{1}{3}, \text{ すなわち, } a \leq \frac{2}{3} \text{ のとき } m = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} \geq 0$$

$$(ii) \quad \frac{1}{3} \leq \frac{a}{2}, \text{ すなわち, } \frac{2}{3} \leq a \text{ のとき } m = g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + a \geq 0$$

$$\text{したがって (i) のとき } -\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{2}{3}, \quad (ii) \text{ のとき } \frac{2}{3} \leq a \leq 4$$

$$\text{よって, 求める } a \text{ の値の範囲は } -\frac{1}{6} \leq a \leq 4$$

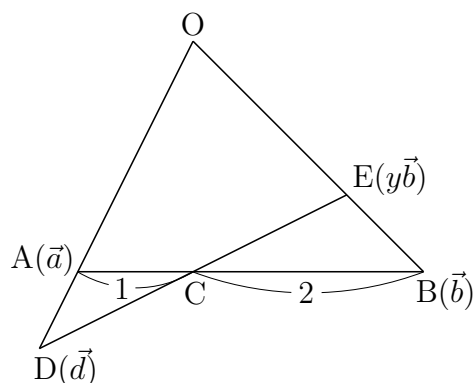


- 2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とすると

$$\overrightarrow{OD} = x\vec{a}, \quad \overrightarrow{OE} = y\vec{b}$$

点CはDEを $s : 1-s$ に内分する点
とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= (1-s)\overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{OE} \\ &= (1-s)x\vec{a} + sy\vec{b} \end{aligned}$$



点CはABを1:2に内分する点であるから $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$$\text{したがって } (1-s)x = \frac{2}{3}, \quad sy = \frac{1}{3}$$

$$\text{上の2式から } 1-s = \frac{2}{3x}, \quad s = \frac{1}{3y} \quad \text{ゆえに } \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

別解 $\triangle OAB$ および直線DEについて、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{OD}{DA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BE}{EO} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-y}{y} = 1$$

$$\text{したがって } \frac{1-y}{y} = \frac{2(x-1)}{x} \quad \text{よって} \quad \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

- (2) $a = OA$, $b = OB$, $\theta = \angle AOB$ とすると $OD = xa$, $OE = yb$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta, \quad T = \frac{1}{2}xa \cdot yb \sin \theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{S}{T} = \frac{1}{xy}$$

2正数 $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{y}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$3 = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{xy} \leq \frac{9}{8}$$

$$\text{上式で等号が成立するとき } \frac{2}{x} = \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{2}{3}$$

よって、 $x = \frac{4}{3}$ のとき、最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。 ■

- 3** (1) サイコロは 2 回とも 1 の目が出て、A が 2 回とも赤玉を取り出す確率であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{540}$$

- (2) 1 回目の操作で B が赤玉を取り出す確率を $P(X)$ とすると

$$P(X) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

2 回目の操作で B が赤玉を取り出す確率を $P(Y)$ とすると

$$P(Y) = \frac{2}{6} \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \right) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

2 回の操作で B が 2 回とも赤玉を取り出す確率を $P(X \cap Y)$ とすると

$$P(X \cap Y) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{135}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(X \cup Y) &= P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{135} = \frac{26}{135} \end{aligned}$$

注意 非復元試行でも、1 回目、2 回目の操作で赤玉を取り出す確率はともに $\frac{3}{10}$

解説 箱の中に赤玉が r 個、白玉が w 個あるとき、赤玉を取り出す確率 p は

$$p = \frac{r}{r+w}$$

取り出した玉を戻さない (非復元試行) とき、箱の中に残る赤玉の個数が $r-1$ 個になる確率が p で、赤玉の個数が r 個になる確率は $1-p$ である。したがって、次の試行で赤玉を取り出す確率は

$$\begin{aligned} p \times \frac{r-1}{r+w-1} + (1-p) \times \frac{r}{r+w-1} &= \frac{r-p}{r+w-1} \\ &= \frac{(r+w)p-p}{r+w-1} = p \end{aligned}$$

よって、赤玉が取り出される確率は、何回目であっても不変である。 ■

- 4 (1) $C: y = x^2$ より $y' = 2x$

C 上の点 (a, a^2) における接線 l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

m は C 上の点 (b, b^2) における接線とすると, m の方程式は

$$y = 2bx - b^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$a \neq b$ に注意して, ①, ② を解くと $x = \frac{a+b}{2}, y = ab \quad \cdots (*)$

l と m は垂直であるから $2a \cdot 2b = -1$ ゆえに $b = -\frac{1}{4a}$

これを $(*)$ に代入して $x = \frac{4a^2 - 1}{8a}, y = -\frac{1}{4}$

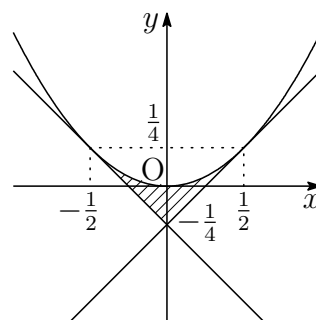
よって, 求める交点の座標は $\left(\frac{4a^2 - 1}{8a}, -\frac{1}{4}\right)$

- (2) 2 直線 l, m は y 軸に関して対称であるから, その交点は y 軸上にあるから

$$4a^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \pm \frac{1}{2}$$

したがって, 2 接線 l, m の方程式は

$$y = \pm x - \frac{1}{4}$$



求める面積は, 右の図の斜線部分であるから, その面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ x^2 - \left(x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

よって $S = \frac{1}{12}$



2.12 2012 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 a を正の実数とし, $a \neq \frac{1}{2}$ とする. 曲線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ と $Q(a, a^2)$ をとる. 点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし, 点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする. l と m の交点が C 上にあるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) 2 直線 l, m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ.

- 2 関数 $f(x)$ を $f(x) = \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} \right|$ と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ とおく. $f(x)$ を t の関数として表せ.
- (2) x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき, $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ. また, $f(x)$ が最大値をとる x は $60^\circ < x < 75^\circ$ を満たすことを示せ.

- 3 袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている. これらのカードをよくかきまぜて取り出していく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $N = 4$ とする. 袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す. ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする. 4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする. $X = 1, X = 2, X = 3, X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ. また, X の期待値を求めよ.
- (2) $N = 3$ とし, n は自然数とする. 袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, それらのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す. カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする. p_n と q_n を求めよ.

- 4 平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ を満たすとする. ただし, 記号 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す. 以下の問いに答えよ.

- (1) 実数 p , q に対して, $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく. このとき, 次の条件

$$|\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \quad p > 0$$

を満たす実数 p , q を求めよ.

- (2) 平面上のベクトル $\vec{x}$ が

$$-1 \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq 1, \quad 1 \leq \vec{b} \cdot \vec{x} \leq 2$$

を満たすとき, $|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ.

解答例

- 1 (1) 2 直線 l, m の交点が $C: y = x^2$ 上にあるから、この交点を $R(b, b^2)$ とする. 2 点 $Q(a, a^2)$, $R(b, b^2)$ を通る直線の方程式は

$$y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a)$$

すなわち $y = (a + b)x - ab \quad \dots (*)$

$y = x^2$ より, $y' = 2x$ であるから, 点 Q における接線の傾きは $2a$
 C の $Q(a, a^2)$ における接線と直線 QR は垂直であるから

$$2a(a + b) = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

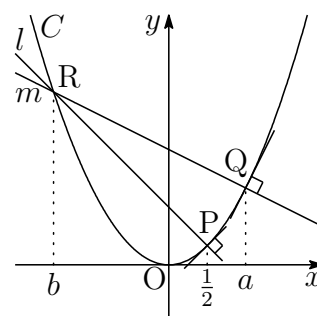
同様に, C の $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ における接線と直線 PR は垂直であるから

$$2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + b \right) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = -\frac{3}{2}$$

これを ① に代入すると

$$2a \left(a - \frac{3}{2} \right) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (a - 1)(2a - 1) = 0$$

$a \neq \frac{1}{2}$ に注意して, これを解くと $a = 1$



(2) 直線 l の方程式は, (*) に $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ を代入して

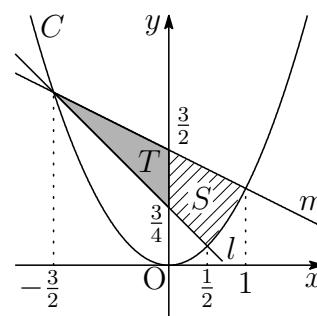
$$y = -x + \frac{3}{4}$$

直線 m の方程式は, (*) に $a = 1$, $b = -\frac{3}{2}$ を代入して

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

C と l で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-x + \frac{3}{4} - x^2 \right) dx \\ &= - \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right)^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



C と m で囲まれた図形の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - x^2 \right) dx \\ &= - \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left(x + \frac{3}{2} \right) (x - 1) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{3}{2} \right)^3 = \frac{125}{48} \end{aligned}$$

2直線 l , m と曲線 C で囲まれた図形のうちで, y 軸の右側の部分の面積を S , 左側の部分の面積を T とすると

$$S + T = S_2 - S_1, \quad T = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) = \frac{9}{16}$$

$$\text{よって} \quad S = S_2 - S_1 - T = \frac{125}{48} - \frac{4}{3} - \frac{9}{16} = \frac{17}{24}$$

■

2 (1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ より

$$t^2 = \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 3\cos^2 x$$

$$\text{ゆえに} \quad t^2 - 1 = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} \right| \\ &= \left| (t^2 - 1) + t - \frac{5}{4} \right| = \left| t^2 + t - \frac{9}{4} \right| \end{aligned}$$

(2) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x + 120^\circ)$, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ より

$$-1 \leq t \leq \sqrt{3}$$

(3) $g(t) = t^2 + t - \frac{9}{4} = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$ とおくと $(-1 \leq t \leq \sqrt{3})$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) \leq g(t) \leq g(\sqrt{3}) \quad \text{すなわち} \quad -\frac{5}{2} \leq g(t) \leq \frac{3}{4} + \sqrt{3}$$

$$\frac{5}{2} - \left(\frac{3}{4} + \sqrt{3}\right) = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{48}}{4} > 0 \text{ であるから}$$

$$0 \leq |g(t)| \leq \frac{5}{2} \quad \text{よって} \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$$

次に, $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ のとき $120^\circ \leq x + 120^\circ \leq 210^\circ$

$t = 2\sin(x + 120^\circ) = -\frac{1}{2}$, すなわち, $\sin(x + 120^\circ) = -\frac{1}{4}$ を満たす x は

$$(\sqrt{3} - 1)^2 - \frac{1}{2} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{48}}{2} > 0 \text{ より}$$

$$\sqrt{3} - 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad 0 > -\frac{1}{4} > -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

したがって $\sin 180^\circ > \sin(x + 120^\circ) > \sin 195^\circ$

ゆえに $180^\circ < x + 120^\circ < 195^\circ$ よって $60^\circ < x < 75^\circ$ ■

- 3** (1) A から取り出されたカードを順に, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とし, これを用いた B からの取り出し方は $4!$ 通りある.

α だけが一致する場合, B の取り出し方は, 次の 2 通り.

$$\alpha\gamma\delta\beta, \quad \alpha\delta\beta\gamma$$

一致する組が ${}_4C_1$ 通りあるから $P(X=1) = \frac{{}_4C_1 \times 2}{4!} = \frac{1}{3}$

α, β だけが一致する場合, B の取り出し方は, $\alpha\beta\delta\gamma$ の 1 通り.

一致する組が ${}_4C_2$ 通りあるから $P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \times 1}{4!} = \frac{1}{4}$

3 つが一致する場合はないので $P(X=3) = 0$

4 つとも一致する場合は 1 通りであるから $P(X=4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

また, 期待値は $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{24} = 1$

- (2) 袋 A, B にカードが 3 枚ずつ残っているとき, 取り出したカードの数字が一致する確率は $\frac{1}{3}$ である. n 回目で初めてカードの数字が一致する確率であるから

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

袋 A, B にカードが 2 枚ずつ残っているとき, 取り出したカードの数字が一致する確率は $\frac{1}{2}$ である. このとき, m 回目で初めてカードの数字が一致する確率を r_m とすると

$$r_m = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$q_1 = q_2 = 0$, q_n は ($n \geq 3$)

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^{n-2} p_k r_{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1}{\frac{4}{3} - 1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$



4 (1) $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ より

$$|\vec{c}|^2 = p^2|\vec{a}|^2 + 2pq\vec{a}\cdot\vec{b} + q^2|\vec{b}|^2, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = p|\vec{a}|^2 + q\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2}, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \text{ より}$$

$$p^2 - pq + q^2 = 1, \quad p - \frac{1}{2}q = 0$$

上の第 2 式から, $q = 2p \cdots \textcircled{1}$. これを第 1 式に代入すると

$$p^2 - p \cdot 2p + (2p)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3p^2 = 1$$

$$p > 0 \text{ に注意して} \quad p = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \textcircled{1} \text{ より} \quad q = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(2) (1) \text{ の結果から} \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a} + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{c}$$

$$1 \leq \vec{b}\cdot\vec{x} \leq 2 \text{ より}$$

$$1 \leq -\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{c}\cdot\vec{x} \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad 2 \leq -\vec{x}\cdot\vec{a} + \sqrt{3}\vec{x}\cdot\vec{c} \leq 4$$

$$|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \text{ より} \quad \vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a} + (\vec{x}\cdot\vec{c})\vec{c}$$

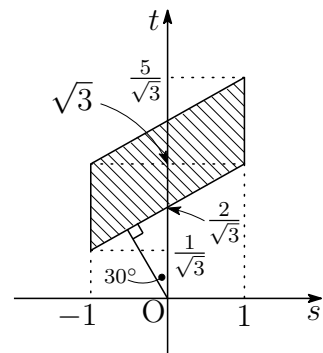
$$s = \vec{x}\cdot\vec{a}, \quad t = \vec{x}\cdot\vec{c} \text{ とおくと} \quad (*) \begin{cases} -1 \leq s \leq 1 \\ 2 \leq -s + \sqrt{3}t \leq 4 \end{cases}$$

$$\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{c} \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{x}|^2 = s^2 + t^2$$

(*) より, 点 (s, t) の表す領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含む. したがって, $|\vec{x}|$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cos 30^\circ \leq |\vec{x}| \leq \sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\text{よって} \quad 1 \leq |\vec{x}| \leq \frac{2\sqrt{21}}{3}$$



2.13 2013年(100分)

出題分野 1 2 3 4

1 a を実数とする．以下の問いに答えよ．

- (1) 2次方程式 $x^2 - 2(a+1)x + 3a = 0$ が、 $-1 \leq x \leq 3$ の範囲に2つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．
- (2) a が (1) で求めた範囲を動くとき、放物線 $y = x^2 - 2(a+1)x + 3a$ の頂点の y 座標がとりうる値の範囲を求めよ．

2 四面体 $OABC$ において、 $OA = OB = OC = 1$ とする．
 $\angle AOB = 60^\circ$ ， $\angle BOC = 45^\circ$ ， $\angle COA = 45^\circ$ とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ， $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ， $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく．点 C から面 OAB に垂線を引き、その交点を H とする．

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．
- (2) CH の長さを求めよ．
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ．

3 A ， B の2人が、サイコロを1回ずつ交互に投げるゲームを行う．自分の出したサイコロの目を合計して先に6以上になった方を勝ちとし、その時点でゲームを終了する． A から投げ始めるものとし、以下の問いに答えよ．

- (1) B がちょうど1回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ．
- (2) B がちょうど2回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ．
- (3) B がちょうど2回投げて、その時点でゲームが終了していない確率を求めよ．

4 t は $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数とする．放物線 $y = x^2$ ，直線 $x = 1$ ，および x 軸とで囲まれた図形を A ，放物線 $y = 4(x-t)^2$ と直線 $y = 1$ とで囲まれた図形を B とする． A と B の共通部分の面積を $S(t)$ とする．

- (1) $S(t)$ を求めよ．
- (2) $0 \leq t \leq 1$ における $S(t)$ の最大値を求めよ．

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 3a$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a - 1)^2 - a^2 + a - 1, \\ -a^2 + a - 1 &= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0 \quad \dots (*) \end{aligned}$$

したがって, $f(x) = 0$ は, 異なる 2 つの実数解をもつ.

この解が $-1 \leq x \leq 3$ の範囲にある条件は

$$-1 < a + 1 < 3, \quad f(-1) \geq 0, \quad f(3) \geq 0$$

$$\text{したがって} \quad -2 < a < 2, \quad 5a + 3 \geq 0, \quad -3a + 3 \geq 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -\frac{3}{5} \leq a \leq 1$$

- (2) (*) より, 放物線の頂点の y 座標を $g(a)$ とすると

$$g(a) = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{5} \leq a \leq 1 \text{ のとき, } g(a) \text{ は}$$

$$\text{最大値 } g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}, \quad \text{最小値 } g\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{49}{25}$$

$$\text{よって, 求める } y \text{ 座標のとり得る値の範囲は } -\frac{49}{25} \leq y \leq -\frac{3}{4} \quad \blacksquare$$

- 2 (1) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - |\vec{a}|^2\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b})$ は平面 OAB 上のベクトルで $\vec{a}$ に垂直.

これと平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{|\vec{a} - 2\vec{b}|} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{\sqrt{|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2}} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{\sqrt{3}}, \\ \vec{c} \cdot \vec{e} &= \frac{\vec{c}(\vec{a} - 2\vec{b})}{\sqrt{3}} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$\vec{OH} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{a} + (\vec{c} \cdot \vec{e})\vec{e}$ であるから

$$\vec{OH} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$(2) (1) \text{の結果から} \quad \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \left| \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} \right|^2 = \frac{2}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}) - \frac{2\sqrt{2}}{3}(\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}) + |\vec{c}|^2 \\ &= \frac{2}{9} \cdot 3 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{2} + 1 = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad CH = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

別解 $\overrightarrow{CH}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ と垂直であることに注意して

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} \right\} \cdot \overrightarrow{CH} = -\vec{c} \cdot \overrightarrow{CH} = -\vec{c} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} \right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}) + |\vec{c}|^2 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad CH = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(3) \triangle OAB = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{四面体 OABC の体積は} \quad \frac{1}{3} \triangle OAB \cdot CH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{12}$$

3 (1) A は 6 以外の目が出て, B が 6 の目が出る確率であるから

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

(2) 一方の 1 回目, 2 回目に出た目をそれぞれ j, k とする. A が 2 回投げて A が勝っていないとき, A の 2 回の目の出方は, 表の × 印の示す 10 通り. このとき, B がちょうど 2 回投げて B が勝つ目の出方は, 表の ○ 印の示す 20 通り. よって, 求める確率は

$$\frac{10}{6^2} \times \frac{20}{6^2} = \frac{25}{162}$$

$j \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	×	×	×	×	○	○
2	×	×	×	○	○	○
3	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○	○
6						

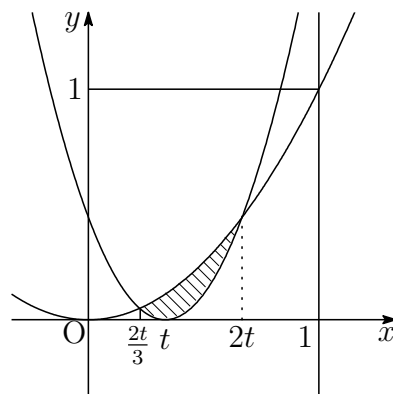
(3) A, B ともに 2 回の目の出方は, 表の × 印の示す 10 通り. よって, 求める確率は

$$\left(\frac{10}{36} \right)^2 = \frac{25}{324}$$

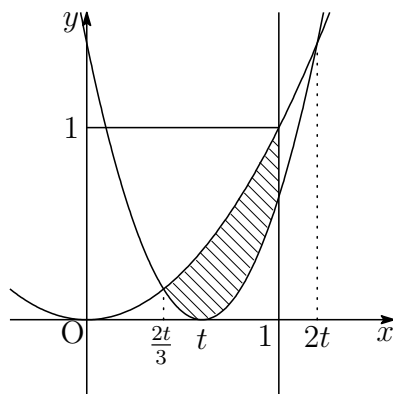
- 4 (1) 2つの放物線 $y = x^2$, $y = 4(x - t)^2$ の共有点の x 座標は

$$x^2 = 4(x - t)^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{2t}{3}, 2t$$

$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき



$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき



(i) $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\frac{2t}{3}}^{2t} \{x^2 - 4(x - t)^2\} dt \\ &= -3 \int_{\frac{2t}{3}}^{2t} \left(x - \frac{2t}{3}\right) (x - 2t) dt \\ &= -3 \left(-\frac{1}{6}\right) \left(2t - \frac{2t}{3}\right)^3 = \frac{32}{27} t^3 \end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\frac{3t}{2}}^1 \{x^2 - 4(x - t)^2\} dt \\ &= \int_{\frac{3t}{2}}^1 (-3x^2 + 8tx - 4t^2) dt \\ &= \left[-x^3 + 4tx^2 - 4t^2x \right]_{\frac{3t}{2}}^1 \\ &= \frac{32}{27} t^3 - 4t^2 + 4t - 1 \end{aligned}$$

よって

$$S(t) = \begin{cases} \frac{32}{27} t^3 & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right) \\ \frac{32}{27} t^3 - 4t^2 + 4t - 1 & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right) \end{cases}$$

$$(2) \ 0 < t < \frac{1}{2} \text{ のとき } S'(t) = \frac{32}{9}t^2 > 0$$

$$\frac{1}{2} < t < 1 \text{ のとき } S'(t) = \frac{32}{9}t^2 - 8t + 4 = \frac{4}{9}(4t - 3)(2t - 3)$$

したがって、 $S(t)$ の増減表は、次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{3}{4}$	...	1
$S'(t)$		+		+	0	-	
$S(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{5}{27}$

よって、求める最大値は $S\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$



2.14 2014 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

1 曲線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ における接線を l_1 , 点 $Q(b, b^2)$ における接線を l_2 とする. ただし, $a < b$ とする. l_1 と l_2 の交点を R とし, 線分 PR , 線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする.

- (1) R の座標を a と b を用いて表せ.
- (2) S を a と b を用いて表せ.
- (3) l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ.

2 1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ, 合計 10 個ある.

- (1) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す. 書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ.
- (2) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す. 書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ.
- (3) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す. 1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と, 4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ.

3 t を正の実数とする. 三角形 OAB の辺 OA を $2:1$ に内分する点を M , 辺 OB を $t:1$ に内分する点を N とする. 線分 AN と線分 BM の交点を P とする.

- (1) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および t を用いて表せ.
- (2) 直線 OP は線分 BM と直交し, かつ $\angle AOB$ の二等分線であるとする. このとき, 辺 OA と辺 OB の長さの比と t の値を求めよ.

4 実数 x, y に対して $A = 2 \sin x + \sin y$, $B = 2 \cos x + \cos y$ とおく.

- (1) $\cos(x - y)$ を A, B を用いて表せ.
- (2) x, y が $A = 1$ を満たしながら変化するとき, B の最大値と最小値, およびそのときの $\sin x, \cos x$ の値を求めよ.

解答例

- 1 (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$
 点 $P(a, a^2)$ における接線の方程式は

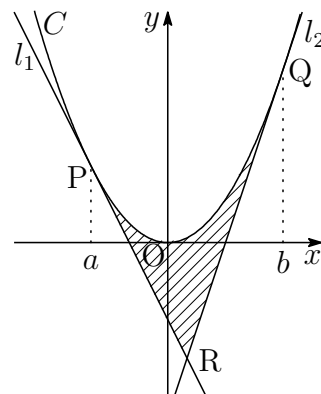
$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

ゆえに $y = 2ax - a^2 \quad \cdots \textcircled{1}$

同様に、点 $Q(b, b^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2bx - b^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $R\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$



- (2) 求める面積 S は、図の斜線部分の面積であるから ¹

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \{x^2 - (2bx - b^2)\} dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[\frac{(x-b)^3}{3} \right]_{\frac{a+b}{2}}^b \\ &= \frac{1}{24}(b-a)^3 - \frac{1}{24}(a-b)^3 = \frac{1}{12}(b-a)^3 \end{aligned}$$

- (3) 直線 ①, ② が直交するから

$$2a \times 2b = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{4b}$$

これを (2) の結果に代入すると $S = \frac{1}{12} \left(b + \frac{1}{4b}\right)^3$

$a < b$ より、 $b > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係により

$$b + \frac{1}{4b} \geq 2\sqrt{b \times \frac{1}{4b}} = 1$$

よって、求める S の最小値は $\frac{1}{12} \cdot 1^3 = \frac{1}{12}$ ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf 4 を参照

- 2 (1) 10 個の玉から 2 個取り出す場合の総数は ${}_{10}C_2 = 45$ (通り)
書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは、2 と 5 を 1 個ずつ取り出す
場合であるから

$$2 \times 2 = 4 \text{ (通り)}$$

$$\text{よって、求める確率は } \frac{4}{45}$$

- (2) 10 個の玉から 4 個取り出す場合の総数は ${}_{10}C_4 = 210$ (通り)
書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは、 $\{1, 4, 5, 5\}$, $\{2, 2, 5, 5\}$
の組合せであるから

$$2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ (通り)}$$

$$\text{よって、求める確率は } \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$$

- (3) 10 個の玉から 6 個の玉を順序を付けて取り出す場合の総数は

$${}_{10}P_6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \text{ (通り)}$$

- (i) 1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数が異なるとき、前半 3
個が ${}_5P_3 \cdot 2^3$ 通りで後半 3 個が $3!$ 通りであるから

$${}_5P_3 \cdot 2^3 \times 3! = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ (通り)}$$

- (ii) 1 個目から 3 個目までと、4 個目から 6 個目までが $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 2, 3\}$
の組合せであるとき、1, 2, 3, 4 が区別されることと前半 3 個と後半
3 個の組換えに注意して

$$3! \cdot 2^3 \times 3! \times 2 = 2^6 \cdot 3^2 \text{ (通り)}$$

補足 前半 $\{2, 2, 3\}$, 後半 $\{1, 3, 4\}$ について、前半の「3」の取り出し方は
2 通り、後半の「1, 4」の取り出し方は 2^2 通りあるから、 $3! \cdot 2 \times 3! \cdot 2^2$
通りと考えてもよい。

- (iii) 1 個目から 3 個目までと、4 個目から 6 個目までが $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 2, 5\}$
の組合せであるとき、1, 2, 4, 5 が区別されることと前半 3 個と後半
3 個の組換えに注意して

$$3! \cdot 2^3 \times 3! \times 2 = 2^6 \cdot 3^2 \text{ (通り)}$$

- (i)~(iii) から、求める確率は

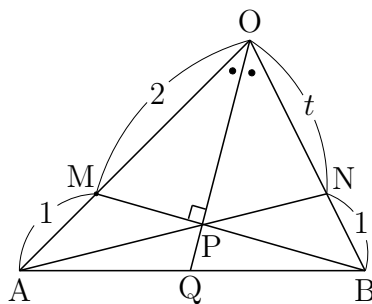
$$\frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 + 2^6 \cdot 3^2 + 2^6 \cdot 3^2}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{2}{3 \cdot 5^2} = \frac{2}{75}$$



3 (1) $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ とおくと
 $\vec{OB} = \frac{t+1}{t}\vec{ON}$, $\vec{OA} = \frac{3}{2}\vec{OM}$ より

$$\vec{OP} = x\vec{OA} + \frac{t+1}{t}y\vec{ON},$$

$$\vec{OP} = \frac{3}{2}x\vec{OM} + y\vec{OB}$$



点Pは、直線ANおよび直線BM上の点であるから

$$x + \frac{t+1}{t}y = 1, \quad \frac{3}{2}x + y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{2}{t+3}, \quad y = \frac{t}{t+3}$$

よって
$$\vec{OP} = \frac{2}{t+3}\vec{OA} + \frac{t}{t+3}\vec{OB}$$

(2) (1)の結果から $AQ : QB = t : 2$

また、線分OQは $\angle AOB$ の二等分線であるから

$$OA : OB = AQ : QB \quad \text{ゆえに} \quad OA : OB = t : 2$$

$\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ とおくと ($|\vec{a}| : |\vec{b}| = t : 2$), (1)の結果から

$$\vec{OP} = \frac{1}{t+3}(2\vec{a} + t\vec{b}), \quad \vec{BM} = \vec{OM} - \vec{OB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{3}(2\vec{a} - 3\vec{b})$$

$\vec{OP} \perp \vec{BM}$ であるから

$$(2\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4|\vec{a}|^2 + 2(t-3)\vec{a} \cdot \vec{b} - 3t|\vec{b}|^2 = 0$$

$|\vec{a}| = \frac{t}{2}|\vec{b}|$ に注意して、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$t^2|\vec{b}|^2 + t(t-3)|\vec{b}|^2 \cos \theta - 3t|\vec{b}|^2 = 0$$

$$t(t-3)(1 + \cos \theta)|\vec{b}|^2 = 0$$

$t > 0$, $1 + \cos \theta \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ であるから $t = 3$

よって $OA : OB = 3 : 2$ ■

- 4 (1) $A = 2 \sin x + \sin y$, $B = 2 \cos x + \cos y$ より

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (2 \sin x + \sin y)^2 + (2 \cos x + \cos y)^2 \\ &= 5 + 4(\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= 5 + 4 \cos(x - y) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \cos(x - y) = \frac{A^2 + B^2 - 5}{4}$$

- (2) $A = 1$ のとき, ① から $B^2 = 4 + 4 \cos(x - y)$

$$-1 \leq \cos(x - y) \leq 1 \text{ であるから}$$

$$0 \leq B^2 \leq 8 \quad \text{ゆえに} \quad -2\sqrt{2} \leq B \leq 2\sqrt{2}$$

$$B = \pm 2\sqrt{2} \text{ のとき, } \cos(x - y) = 1 \text{ であるから,}$$

$$x - y = 2n\pi$$

とおくと (n は整数), $y = x - 2n\pi$ より, $A = 1$ であるから

$$A = 2 \sin x + \sin(x - 2n\pi) = 3 \sin x = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin x = \frac{1}{3},$$

$$B = 2 \cos x + \cos(x - 2n\pi) = 3 \cos x$$

$$\sin x = \frac{1}{3} \text{ より, } \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{よって} \quad \sin x = \frac{1}{3}, \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ のとき, } B \text{ の最大値 } 2\sqrt{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{3}, \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ のとき, } B \text{ の最小値 } -2\sqrt{2} \quad \blacksquare$$

2.15 2015年(100分)

出題分野 1 2 3 4

1 次の性質をもつ数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $a_n + a_{n+2}$ を a_{n+1} を用いて表せ.
- (2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

2 $t > 0$ を実数とする. 座標平面において, 3点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $P(t, \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える.

- (1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ.
- (2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ.
- (3) 辺 AB , BP , PA の中点をそれぞれ M , Q , R とおく. t が (1) で求めた範囲を動くとき, 三角形 ABP を線分 MQ , QR , RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と, そのときの t の値を求めよ.

3 サイコロを3回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし, x の2次方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \quad \cdots (*)$$

を考える.

- (1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ.
- (2) 方程式 $(*)$ が実数でない2つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ.

4 $a > 0$ を実数とする. 関数 $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ の $0 \leq t \leq 1$ における最大値を $M(a)$ とする.

(1) $M(a)$ を求めよ.

(2) 実数 $x > 0$ に対し, $g(x) = M(x)^2$ とおく. xy 平面において, 関数 $y = g(x)$ のグラフに点 $(s, g(s))$ で接する直線が原点を通るとき, 実数 $s > 0$ とその接線の傾きを求めよ.

(3) a が正の実数全体を動くとき,

$$k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$$

の最小値を求めよ.

解答例

$$\begin{aligned} \text{①} \quad (1) \quad & a_1 = 3, a_{n+1} > a_n \\ & a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad \cdots \text{①} \\ \text{①から} \quad & a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} a_{n+2} + a_{n+2}^2 = 3(a_{n+1} + a_{n+2}) \quad \cdots \text{②} \end{aligned}$$

② - ① より

$$\begin{aligned} & a_{n+2}^2 - a_n^2 - 2a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 3(a_{n+2} - a_n) \\ & (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} - 3) = 0 \end{aligned}$$

 $a_{n+2} > a_{n+1} > a_n$ より, $a_{n+2} - a_n \neq 0$ であるから

$$a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} - 3 = 0 \quad \text{よって} \quad a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} + 3$$

別解 ① より $a_{n+1}^2 - (2a_n + 3)a_{n+1} + a^2 - 3a_n = 0$

$$\text{これを } a_{n+1} \text{ について解くと} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 3 \pm \sqrt{24a_n + 9}}{2}$$

$$\text{① は } a_{n+1}, a_n \text{ の対称式より} \quad a_n = \frac{2a_{n+1} + 3 \pm \sqrt{24a_{n+1} + 9}}{2}$$

 $a_{n+1} > a_n \geq 3$ であるから

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3 + \sqrt{24a_n + 9}}{2}, \quad a_n = \frac{2a_{n+1} + 3 - \sqrt{24a_{n+1} + 9}}{2}$$

第1式から $a_{n+2} = \frac{2a_{n+1} + 3 + \sqrt{24a_{n+1} + 9}}{2}$. これと第2式を加える.(2) (1)の結果から $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 3$ ゆえに $b_{n+1} = b_n + 3$ ①に $n = 1$ を代入すると

$$9 - 6a_2 + a_2^2 = 3(3 + a_2) \quad \text{ゆえに} \quad a_2(a_2 - 9) = 0$$

 $a_2 > a_1 = 3$ に注意して, これを解くと $a_2 = 9$ $\{b_n\}$ は $b_1 = a_2 - a_1 = 9 - 3 = 6$, 公差3の等差数列であるから

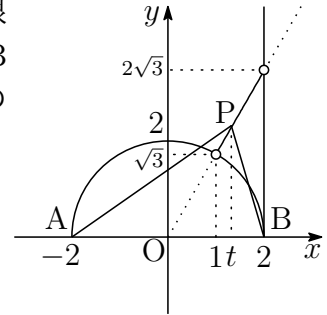
$$b_n = 6 + 3(n - 1) \quad \text{すなわち} \quad b_n = 3n + 3$$

(3) (2)の結果から $a_{n+1} - a_n = 3n + 3$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (3k + 3) \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{3}{2}n(n + 1)$$

これは, $n = 1$ のときも成立するから $a_n = \frac{3}{2}n(n + 1)$ ■

- 2 (1) $t > 0$ より, $P(t, \sqrt{3}t)$ は直線 $y = \sqrt{3}x$ の第 1 象限の点である. 右の図のように $\angle PAB$ は鋭角. $\angle APB$ が鋭角となるときの P は原点を中心とする半径 2 の円の外部にあるから



$$OP > 2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{t^2 + (\sqrt{3}t)^2} > 2$$

$$\text{これを解いて } (t > 0) \quad t > 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\angle PBA \text{ が鋭角となるのは, } P \text{ の } x \text{ 座標に注目して} \quad t < 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \triangle ABP \text{ が鋭角三角形となる } t \text{ の範囲は} \quad 1 < t < 2$$

- (2) $\overrightarrow{AP} = (t+2, \sqrt{3}t)$ に垂直で点 $B(2, 0)$ を通る直線の方程式は

$$(t+2)(x-2) + \sqrt{3}ty = 0$$

$$\overrightarrow{BP} = (t-2, \sqrt{3}t) \text{ に垂直で点 } A(-2, 0) \text{ を通る直線の方程式は}$$

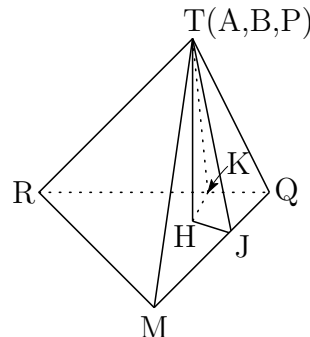
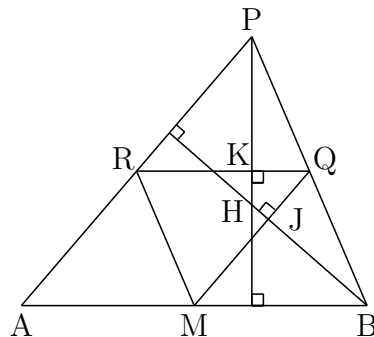
$$(t-2)(x+2) + \sqrt{3}ty = 0$$

$$\triangle ABP \text{ の垂心は上の 2 本の直線の交点であるから} \quad \left(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$$

- (3) (2) で求めた $\triangle PAB$ の垂心を H , 直線 BH と直線 QM の交点を J , 直線 PH と直線 QR の交点を K とおく. M, Q, R はそれぞれ辺 AB, BP, PA の中点であるから, 中点連結定理により

$$MQ \parallel PA, \quad QR \parallel AB \quad \text{ゆえに} \quad HJ \perp MQ, \quad HK \perp QR$$

A, B, P が重なる四面体の頂点を T とすると, 平面 THJ は直線 MQ と垂直, 平面 THK は直線 QR と垂直である. これら 2 平面の交線 TH は, 直線 MQ および直線 QR に垂直であるから, TH は平面 MQR と垂直である.



$A(-2, 0)$, $P(t, \sqrt{3}t)$ の中点 R の座標は $\left(\frac{-2+t}{2}, \frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$
 K の x 座標は P の x 座標と等しく, y 座標は R の y 座標と等しいから

$$K\left(t, \frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad TK = PK = \frac{\sqrt{3}t}{2}$$

$1 < t < 2$ に注意して

$$\begin{aligned} HK &= \left| \frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t} \right| = \frac{|5t^2-8|}{2\sqrt{3}t}, \\ TH &= \sqrt{TK^2 - HK^2} \\ &= \sqrt{\frac{3t^2}{4} - \frac{(5t^2-8)^2}{12t^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}t} \sqrt{(t^2-1)(4-t^2)} \end{aligned}$$

$$\triangle PAB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3}t = 2\sqrt{3}t \quad \text{ゆえに} \quad \triangle MQR = \frac{1}{4} \triangle PAB = \frac{\sqrt{3}t}{2}$$

四面体 $TMQR$ の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \triangle MQR \cdot TH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}t}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}t} \sqrt{(t^2-1)(4-t^2)} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(t^2-1)(4-t^2)} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{-\left(t^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} \end{aligned}$$

よって, $t^2 = \frac{5}{2}$, すなわち, $t = \frac{\sqrt{10}}{2}$ のとき, V は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる. ■

- 3** (1) 2 次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \cdots (*)$ が実数解をもつとき,

$$p_2^2 - 4 \cdot 2p_1 \cdot 2p_3 = p_2^2 - 16p_1p_3 \geq 0$$

p_1, p_2, p_3 はそれぞれ 6 以下の自然数であるから, 上式を満たすとき

$$p_2 = 4, 5 \text{ のとき } (p_1, p_3) = (1, 1)$$

$$p_2 = 6 \text{ のとき } (p_1, p_3) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{2 \times 1 + 3}{6^3} = \frac{5}{216}$$

- (2) 2 次方程式 $(*)$ の解 α, β と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{2p_3}{2p_1} = \frac{p_3}{p_1} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3 = p_1$$

このとき, 2 次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_1 = 0$ が複素数解をもつとき

$$p_2^2 - 4 \cdot 2p_1 \cdot 2p_1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_2 < 4p_1$$

上式を満たすとき

$$p_1 = p_3 = 1 \text{ のとき } p_2 = 1, 2, 3$$

$$p_1 = p_3 = 2, 3, 4, 5, 6 \text{ のとき } p_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{3 + 5 \cdot 6}{6^3} = \frac{11}{72}$$



- 4 (1) $a > 0$, $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ ($0 \leq t \leq 1$) より ($a > 0$)

$$f'(t) = -12t^2 + a + 3 = -12 \left(t + \sqrt{\frac{a+3}{12}} \right) \left(t - \sqrt{\frac{a+3}{12}} \right)$$

$$b = \sqrt{\frac{a+3}{12}} \text{ とおくと } f(t) = -4t^3 + 12b^2t, \quad f'(t) = -12(t+b)(t-b)$$

t	0	...	b	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	0	$\nearrow$	$8b^3$	$\searrow$

- (i) $b \leq 1$, すなわち, $0 < a \leq 9$ のとき

$$M(a) = 8b^3 = 8 \left(\sqrt{\frac{a+3}{12}} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9} (a+3)^{\frac{3}{2}}$$

- (ii) $1 \leq b$, すなわち, $9 \leq a$ のとき

$$M(a) = f(1) = a - 1$$

$$(i), (ii) \text{ より } M(a) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{9} (a+3)^{\frac{3}{2}} & (0 < a \leq 9) \\ a - 1 & (9 \leq a) \end{cases}$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{27} (x+3)^3 & (0 < x \leq 9) \\ (x-1)^2 & (9 \leq x) \end{cases}$$

$y = g(x)$ 上の点 $(s, g(s))$ における接線の方程式は

$$y - g(s) = g'(s)(x - s)$$

この直線が原点を通るとき $g(s) = sg'(s)$

- (i) $0 < s \leq 9$ のとき, $g'(s) = \frac{1}{9}(s+3)^2$ であるから

$$\frac{1}{27}(s+3)^3 = s \cdot \frac{1}{9}(s+3)^2 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{3}{2}$$

- (ii) $9 \leq s$ のとき, $g'(s) = 2(s-1)$ であるから

$$(s-1)^2 = s \cdot 2(s-1) \quad \text{ゆえに} \quad s = -1$$

これは, $9 \leq s$ に反するので, 不適

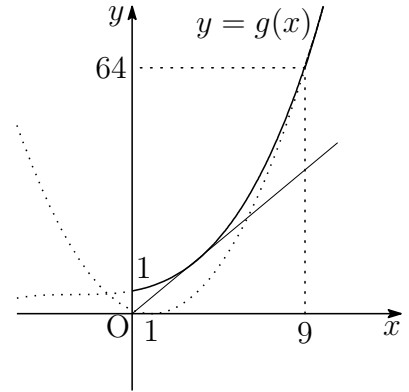
$$(i), (ii) \text{ より } s = \frac{3}{2}, \quad \text{接線の傾きは } g' \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{3}{2} + 3 \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$(3) \quad k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{M(a)^2}{a}} = \sqrt{\frac{g(a)}{a}}$$

$\frac{g(a)}{a}$ は $y = g(x)$ 上の点 $(a, g(a))$ と原点を結ぶ直線の傾きを表す.

(2) の結果および $y = g(x)$ のグラフの概形から, k の最小値は

$$k = \sqrt{g'\left(\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$



別解

$$\frac{g(a)}{a} = \begin{cases} \frac{1}{27a}(a+3)^3 & (0 < a \leq 9) \\ \frac{1}{a}(a-1)^2 & (9 \leq a) \end{cases}$$

(i) $0 < a \leq 9$ のとき, $a = b^3$ とおくと, $0 < b \leq 3^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{1}{27a}(a+3)^3 = \frac{1}{27b^3}(b^3+3)^3 = \left(\frac{b^3+3}{3b}\right)^3 = \left(\frac{b^2}{3} + \frac{1}{b}\right)^3$$

ここで, $b > 0$ のとき, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{b^2}{3} + \frac{1}{b} = \frac{b^2}{3} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{3} \cdot \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{2b}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

上式において, 等号が成立するとき, $0 < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{2}{3}}$ に注意して

$$\frac{b^2}{3} = \frac{1}{2b} \quad \text{すなわち} \quad b = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

したがって, $a = \frac{3}{2}$ のとき, k は最小値 $\sqrt{\frac{g\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}$ をとる.

(ii) $9 \leq a$ のとき

$$\frac{1}{a}(a-1)^2 = a + \frac{1}{a} - 2 > a - 2 \geq 7 \quad \text{ゆえに} \quad k > \sqrt{7}$$

(i), (ii) より, 求める最小値は $\frac{3}{2}$



2.16 2016年(100分)

出題分野 ① ② ③ ④

- ① 平面上で原点 O と 3 点 $A(3, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-1, 1)$ を考える. 実数 s, t に対し, 点 P を

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) s, t が条件

$$-1 \leq s \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad -1 \leq s + t \leq 1$$

を満たすとき, 点 $P(x, y)$ の存在する範囲 D を図示せよ.

- (2) 点 P が (1) で求めた範囲 D を動くとき, 内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$ の最大値を求め, そのときの P の座標を求めよ.

- ② 放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $y = -2|x| + k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ.
- (2) a, b を実数とする. 関数 $y = -2|x - a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 (a, b) 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ.
- (3) (2) で求めた領域 D の面積を求めよ.

- ③ ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている. 出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ, ネジが全部で 54 個あった. 残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として, 可能性のある組 (l, m, n) をすべて求めよ.

- ④ 鋭角三角形 $\triangle ABC$ において, 頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす. これらの垂線は垂心 H で交わる. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 四角形 $BCEF$ と $AFHE$ が円に内接することを示せ.
- (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ.

解答例

1 (1) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ より $(x, y) = s(3, 1) + t(1, 2) = (3s + t, s + 2t)$

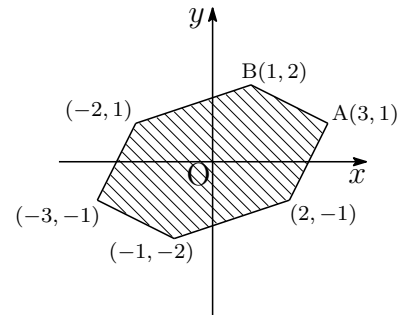
$$x = 3s + t, \quad y = s + 2t \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{2x - y}{5}, \quad t = \frac{-x + 3y}{5}$$

これらを $-1 \leq s \leq 1, -1 \leq t \leq 1, -1 \leq s + t \leq 1$ に代入すると

$$-1 \leq \frac{2x - y}{5} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{-x + 3y}{5} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{2x - y}{5} + \frac{-x + 3y}{5} \leq 1$$

それぞれの式を整理すると

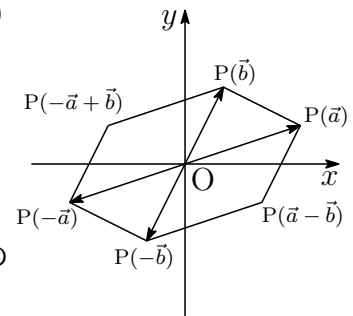
$$\begin{cases} 2x - 5 \leq y \leq 2x + 5 \\ \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$$



領域 D は右の図の斜線部分で境界線を含む.

補足 $-1 \leq s \leq 1, -1 \leq t \leq 1, -1 \leq s + t \leq 1$ より

$$\begin{aligned} s, t \geq 0 \quad &\text{のとき} \quad 0 \leq s + t \leq 1 \\ s, t \leq 0 \quad &\text{のとき} \quad -1 \leq s + t \leq 0 \\ st \leq 0 \quad &\implies \quad -1 \leq s + t \leq 1 \end{aligned}$$



に注意して次の場合分けにより, $P(s\vec{a} + t\vec{b})$ の描く領域を求めることもできる.

- (i) $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ のとき, $0 \leq s + t \leq 1$ であるから, 3 点 $O, P(\vec{a}), P(\vec{b})$ を頂点する三角形の周および内部.
 - (ii) $0 \leq s \leq 1, -1 \leq t \leq 0$ のとき, 4 点 $O, P(\vec{a}), P(-\vec{b}), P(\vec{a} - \vec{b})$ を頂点する平行四辺形の周および内部.
 - (iii) $-1 \leq s \leq 0, 0 \leq t \leq 1$ のとき, 4 点 $O, P(-\vec{a}), P(\vec{b}), P(-\vec{a} + \vec{b})$ を頂点する平行四辺形の周および内部.
 - (iv) $-1 \leq s \leq 0, -1 \leq t \leq 0$ のとき, $-1 \leq s + t \leq 0$ であるから, 3 点 $O, P(-\vec{a}), P(-\vec{b})$ を頂点する三角形の周および内部.
- (2) $\vec{OP} \cdot \vec{OC} = k$ とおくと $-x + y = k$

ゆえに, 直線 $y = x + k$ が領域 D と共有点をもつとき, 切片 k のとり得る値の最大値を求めればよい. したがって

点 $P(-2, 1)$ において, 最大値 3



- 2 (1) 放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ と関数 $y = -2|x| + k$ のグラフは、ともに y 軸に関して対称である。したがって、 C と直線 $y = -2x + k$ が $x \geq 0$ において共有点をもてばよい。2式から y を消去して

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2x + k \quad \text{これを解いて} \quad x = 2 \pm \sqrt{4 - 2k}$$

$4 - 2k \geq 0$, すなわち, $k \leq 2$ のとき, 解 $2 + \sqrt{4 - 2k} \geq 0$ をもつ。

よって, 求める実数 k の範囲は $k \leq 2$

$$(2) y = -2|x - a| + b = \begin{cases} -2(x - a) + b & (x \geq a) \\ 2(x - a) + b & (x \leq a) \end{cases}$$

関数 $y = -2|x - a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど4個もつとき, $x < a$ および $a < x$ の範囲でそれぞれ2個ずつ共有点をもつ。

(i) $x > a$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2(x - a) + b \quad \text{ゆえに} \quad (x - 2)^2 + 4a + 2b - 4 = 0$$

$g(x) = (x - 2)^2 + 4a + 2b - 4$ とおくと, $g(x) = 0$ が $x > a$ の範囲に異なる2つ実数解をもつとき, $a < 2$, $g(a) > 0$, $g(2) < 0$ より

$$\begin{cases} a < 2 \\ (a - 2)^2 + 4a + 2b - 4 > 0 \\ 4a + 2b - 4 < 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} a < 2 \\ b > -\frac{1}{2}a^2 \\ b < -2a + 2 \end{cases}$$

(ii) $x < a$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 = 2(x - a) + b \quad \text{ゆえに} \quad (x + 2)^2 - 4a + 2b - 4 = 0$$

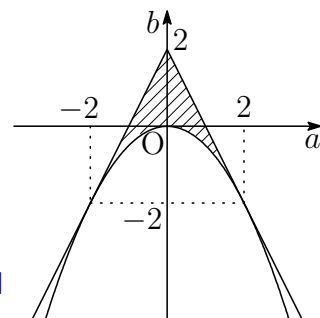
$h(x) = (x + 2)^2 - 4a + 2b - 4$ とおくと, $h(x) = 0$ が $x < a$ の範囲に異なる2つ実数解をもつとき, $a > -2$, $h(a) > 0$, $h(-2) < 0$ より

$$\begin{cases} a > -2 \\ (a + 2)^2 - 4a + 2b - 4 > 0 \\ -4a + 2b - 4 < 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} a > -2 \\ b > -\frac{1}{2}a^2 \\ b < 2a + 2 \end{cases}$$

(i), (ii) の結果から, 領域 D は下の図の斜線部分で境界線を含まない。

(3) 領域 D の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 \left\{ -2a + 2 - \left(-\frac{1}{2}a^2 \right) \right\} da \\ &= \int_0^2 (a - 2)^2 da = \left[\frac{1}{3}(a - 2)^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



3 l, m, n は非負の整数. $7l + 9m + 12n = 54 \cdots (*)$

$7 \equiv 1, 9 \equiv 12 \equiv 54 \equiv 0 \pmod{3}$ であるから, $(*)$ より

$$l \equiv 0 \pmod{3}$$

上式および $(*)$ から $l = 0, 3, 6$

(i) $l = 0$ を $(*)$ に代入して簡単にすると $3m + 4n = 18 \cdots \textcircled{1}$

$3 \equiv 18 \equiv 0, 4 \equiv 1 \pmod{3}$ であるから

$$n \equiv 0 \pmod{3}$$

上式および $\textcircled{1}$ から $n = 0, 3$ ゆえに $(m, n) = (6, 0), (2, 3)$

(ii) $l = 3$ を $(*)$ に代入して簡単にすると $3m + 4n = 11 \cdots \textcircled{2}$

$3 \equiv 0, 4 \equiv 1, 11 \equiv 2 \pmod{3}$ であるから

$$n \equiv 2 \pmod{3}$$

上式および $\textcircled{2}$ から $n = 2$ ゆえに $(m, n) = (1, 2)$

(iii) $l = 6$ を $(*)$ に代入して簡単にすると $3m + 4n = 4 \cdots \textcircled{3}$

$3 \equiv 0, 4 \equiv 1 \pmod{3}$ であるから

$$n \equiv 1 \pmod{3}$$

上式および $\textcircled{3}$ から $n = 1$ ゆえに $(m, n) = (0, 1)$

(i)~(iii) より $(l, m, n) = (0, 6, 0), (0, 2, 3), (3, 1, 2), (6, 0, 1)$ ■

- 4 (1) $\angle BEC = \angle BFC$ より, 四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する.
 $\angle AEH = 90^\circ$, $\angle AFH = 90^\circ$ であるから, $\angle AEH + \angle AFH = 180$ より, 四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する.

- (2) $\triangle HCE$ と $\triangle HBF$ において

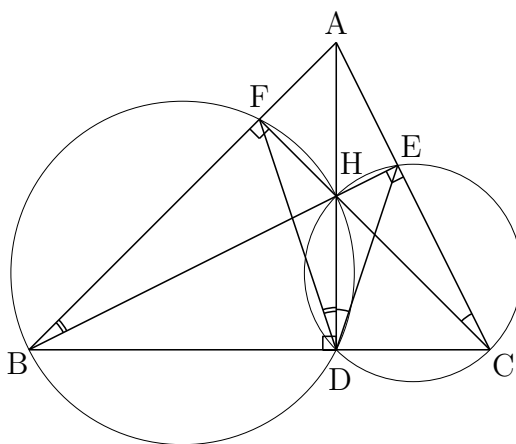
$$\begin{aligned}\angle CHE &= \angle BHF \quad (\text{対頂角}), \\ \angle HEC &= \angle HFB \quad (H \text{ は } \triangle ABC \text{ の垂心})\end{aligned}$$

したがって $\triangle HCE \sim \triangle HBF$ ゆえに $\angle HCE = \angle HBF \dots \textcircled{1}$

四角形 ECDH の対角の和が 180° であるから四角形 ECDH は円に内接し,
 円周角の定理により $\angle HCE = \angle HDE \dots \textcircled{2}$

四角形 FBDH の対角の和が 180° であるから四角形 FBDH は円に内接し,
 円周角の定理により $\angle HBF = \angle HDF \dots \textcircled{3}$

①, ②, ③ より $\angle HDE = \angle HDF$ よって $\angle ADE = \angle ADF$



2.17 2017 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 s を正の実数とする. 鋭角三角形 ABC において, 辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし, 辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする. 線分 CD と線分 AE の交点を F とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ とするとき, α と β を求めよ.
- (2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする. FG の長さが最大となるときの s を求めよ.

- 2 p, q を実数とする. 関数 $f(x) = x^2 + px + q$ の $-1 \leq x \leq 2$ における最小値が 0 以上となる点 (p, q) 全体からなる領域を D とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) pq 平面上に領域 D を図示せよ.
- (2) D の点 (p, q) で $q \leq 5$ を満たすものの全体のなす図形の面積を求めよ.

- 3 a を 3 で割り切れない正の整数とする. a を 3 で割ったときの商を b , 余りを c とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $c = 2$ のとき, $2a + 1 = as + 3t$ を満たす負でない整数 s, t を b を用いて表せ.
- (2) n を $n \geq 2a - 2$ を満たす整数とする. このとき $n = as + 3t$ を満たす負でない整数 s, t が存在することを示せ.

- 4 A 君と B 君はそれぞれ, 0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている. 2 人は, 自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする. 取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし, 0 が含まれている場合は残りの 2 枚のカードに書かれた数の合計とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して, しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ.
- (2) A 君の得点が整数でなく, かつ, B 君の得点より大きい確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) $\triangle ABE$ と直線 CD について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{s}{1} \cdot \frac{s+3}{3} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$$

したがって $AF : FE = s(s+3) : 3$

点 E は線分 BC を $s : 3$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= \frac{s(s+3)}{s(s+3)+3} \overrightarrow{AE} = \frac{s(s+3)}{s(s+3)+3} \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}}{s+3} \\ &= \frac{s}{s^2+3s+3} (3\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{3s}{s^2+3s+3} \overrightarrow{AB} + \frac{s^2}{s^2+3s+3} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \alpha = \frac{3s}{s^2+3s+3}, \quad \beta = \frac{s^2}{s^2+3s+3}$$

- (2) $\triangle AFC : \triangle AEC = AF : AE$, $\triangle AEC : \triangle ABC = EC : BC$ であるから

$$\triangle AFC = \frac{AF}{AE} \triangle AEC = \frac{s(s+3)}{s(s+3)+3} \triangle AEC,$$

$$\triangle AEC = \frac{EC}{BC} \triangle ABC = \frac{3}{s+3} \triangle ABC$$

$$\text{上の2式から} \quad \triangle AFC = \frac{s(s+3)}{s(s+3)+3} \cdot \frac{3}{s+3} \triangle ABC = \frac{3s}{s^2+3s+3} \triangle ABC$$

$$\triangle AFC = \frac{1}{2} AC \cdot FG \text{ であるから}$$

$$FG = \frac{2\triangle AFC}{AC} = \frac{6s}{s^2+3s+3} \cdot \frac{\triangle ABC}{AC}$$

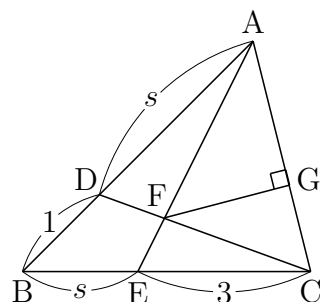
$s > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係を用いて

$$\frac{s^2+3s+3}{s} = s + \frac{3}{s} + 3 \geq 2\sqrt{s \cdot \frac{3}{s}} + 3 = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\text{したがって} \quad FG = \frac{6s}{s^2+3s+3} \cdot \frac{\triangle ABC}{AC} \leq \frac{6}{2\sqrt{3}+3} \cdot \frac{\triangle ABC}{AC}$$

FG が最大となる、すなわち、上式において等号が成立するとき

$$s = \frac{3}{s} \quad \text{よって} \quad s = \sqrt{3}$$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad f(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

$-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値を m とする.

(i) $2 \leq -\frac{p}{2}$, すなわち, $p \leq -4$ のとき

$$m = f(2) = 2p + q + 4 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geq -2p - 4$$

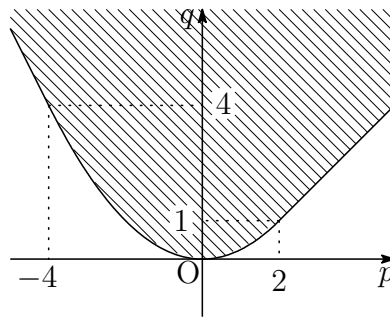
(ii) $-1 \leq -\frac{p}{2} \leq 2$, すなわち, $-4 \leq p \leq 2$ のとき

$$m = f\left(-\frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2}{4} + q \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geq \frac{p^2}{4}$$

(iii) $-\frac{p}{2} \leq -1$, すなわち, $2 \leq p$ のとき

$$m = f(-1) = -p + q + 1 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geq p - 1$$

よって, 点 (p, q) の満たす領域 D は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



(2) (1) の境界線 $q = -2p - 4$ および $q = p - 1$ 上で $q = 5$ となるときの, それぞれの座標は $\left(-\frac{9}{2}, 5\right)$, $(6, 5)$ である. 3点 $\left(-\frac{9}{2}, 5\right)$, $(-4, 5)$, $(-4, 4)$ を頂点とする直角三角形の面積を S_1 , 3点 $(6, 5)$, $(2, 5)$, $(2, 1)$ を頂点とする直角三角形の面積を S_2 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^2 \left(5 - \frac{p^2}{4}\right) dp + S_1 + S_2 \\ &= \left[5p - \frac{p^3}{12}\right]_{-4}^2 + \frac{1}{4} + 8 = \frac{129}{4} \end{aligned}$$

■

$$\boxed{3} \quad (1) \quad 2a + 1 = as + 3t \quad \cdots \textcircled{1}$$

$c = 2$ のとき, $a \geq 2$ であるから (s, t は非負整数)

$$2a + 1 = as + 3t \geq as \quad \text{ゆえに} \quad s \leq 2 + \frac{1}{a} < 3$$

すなわち $s = 0, 1, 2 \quad \cdots \textcircled{2}$

$c = 2$ より, $a \equiv 2 \pmod{3}$ であるから, これを $\textcircled{1}$ に適用すると

$$2 \cdot 2 + 1 \equiv 2s \quad \text{ゆえに} \quad 2s \equiv 5 \quad \text{すなわち} \quad s \equiv 1 \pmod{3}$$

上式と $\textcircled{2}$ より, $s = 1$. これを $\textcircled{1}$ に代入して整理すると

$$3t = a + 1 \quad \text{右辺は3の倍数であるから} \quad t = \frac{a+1}{3}$$

$$a = 3b + 2 \text{ であるから} \quad t = \frac{(3b+2)+1}{3} = b + 1$$

補足 $2s \equiv 5 \pmod{3}$ の両辺を2倍すると ($4 \equiv 1, 10 \equiv 1 \pmod{3}$)

$$4s \equiv 10 \quad \text{ゆえに} \quad s \equiv 1 \pmod{3}$$

$$(2) \quad n = as + 3t \quad \cdots (*)$$

(*) を満たす非負整数 s, t が存在するとき

$$n + 3 = as + 3(t + 1)$$

を満たす非負整数 s, t が存在する. したがって, $n = 2a - 2, 2a - 1, 2a$ について, (*) を満たす非負整数 s, t を示せばよい.

(i) $a \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$2a - 2 = a \cdot 0 + 3 \cdot \frac{2(a-1)}{3},$$

$$2a - 1 = a \cdot 1 + 3 \cdot \frac{a-1}{3},$$

$$2a = a \cdot 2 + 3 \cdot 0$$

(ii) $a \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$2a - 2 = a \cdot 1 + 3 \cdot \frac{a-2}{3},$$

$$2a - 1 = a \cdot 0 + 3 \cdot \frac{2(a-2)+3}{3},$$

$$2a = a \cdot 2 + 3 \cdot 0$$

(i), (ii) より, $n \geq 2a - 2$ について, (*) を満たす非負整数 s, t は存在する. ■

- 4 (1) 得点が 3 点となるのは, $\{0, 1, 2\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}$ の 3 通り.

このうち, 0 を取り出さないのが 2 通り.

よって, A, B の少なくとも一方が 0 を取り出す確率は

$$\left(\frac{3}{20}\right)^2 - \left(\frac{2}{20}\right)^2 = \frac{9-4}{400} = \frac{1}{80}$$

- (2) 0 から 5 の 6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき, 次の 20 通り.

得点	組合せ	場合の数
2	$\{1, 2, 3\}$	1
$\frac{7}{3}$	$\{1, 2, 4\}$	1
$\frac{8}{3}$	$\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}$	2
3	$\{0, 1, 2\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}$	3
$\frac{10}{3}$	$\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}$	2
$\frac{11}{3}$	$\{2, 4, 5\}$	1
4	$\{0, 1, 3\}, \{3, 4, 5\}$	2
5	$\{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}$	2
6	$\{0, 1, 5\}, \{0, 2, 4\}$	2
7	$\{0, 2, 5\}, \{0, 3, 4\}$	2
8	$\{0, 3, 5\}$	1
9	$\{0, 4, 5\}$	1

A 君が B 君の得点より大きくなる (勝つ) のは, 次の場合である.

$$\text{A 君が } \frac{7}{3} \text{ 点で勝つ確率は } \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$$

$$\text{A 君が } \frac{8}{3} \text{ 点で勝つ確率は } \frac{2}{20} \times \frac{1+1}{20} = \frac{4}{400}$$

$$\text{A 君が } \frac{10}{3} \text{ 点で勝つ確率は } \frac{2}{20} \times \frac{1+1+2+3}{20} = \frac{14}{400}$$

$$\text{A 君が } \frac{11}{3} \text{ 点で勝つ確率は } \frac{1}{20} \times \frac{1+1+2+3+2}{20} = \frac{9}{400}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{400} + \frac{4}{400} + \frac{14}{400} + \frac{9}{400} = \frac{28}{400} = \frac{7}{100}$$



2.18 2018年(100分)

出題分野 ① ② ③ ④

① xy 平面における2つの放物線 $C: y = (x - a)^2 + b$, $D: y = -x^2$ を考える.

- (1) C と D が2点で交わり, その2交点の x 座標の差が1となるように実数 a, b が動くとき, C の頂点 (a, b) の軌跡を図示せよ.
- (2) 実数 a, b が(1)の条件を満たすとき, C と D の2交点を結ぶ直線は, 放物線 $y = -x^2 - \frac{1}{4}$ に接することを示せ.

② n を2以上, a を1以上の整数とする. 箱の中に, 1から n までの番号札がそれぞれ1枚ずつ, 合計 n 枚入っている. この箱から, 1枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す. ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする.

- (1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ.
- (2) $p(2)$ を求めよ.
- (3) $p(n - 1)$ を求めよ.

③ 実数 a は $0 < a < 4$ を満たすとする. xy 平面の直線 $l: y = ax$ と曲線

$$C: y = \begin{cases} -x^2 + 4x & (x < 4 \text{ のとき}) \\ 9a(x - 4) & (x \geq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える. C と l で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とおく.

- (1) C と l の交点の座標を求めよ.
- (2) $S(a)$ を求めよ.
- (3) $S(a)$ の最小値を求めよ.

④ 空間内に四面体 $ABCD$ がある. 辺 AB の中点を M , 辺 CD の中点を N とする. t を0でない実数とし, 点 G を

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (t - 2)\overrightarrow{GC} + t\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

を満たす点とする.

- (1) $\overrightarrow{DG}$ を $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ で表せ.
- (2) 点 G は点 N と一致しないことを示せ.
- (3) 直線 NG と直線 MC は平行であることを示せ.

解答例

- 1 (1) C と D の方程式から y を消去して整理すると $2x^2 - 2ax + a^2 + b = 0$

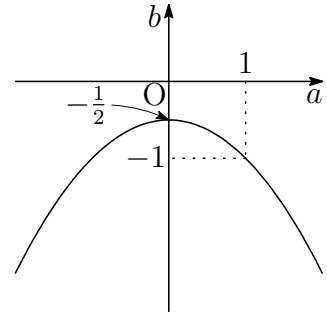
$$2 \text{ 交点の } x \text{ 座標は } x = \frac{a \pm \sqrt{-a^2 - 2b}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

2 交点の x 座標の差が 1 であるから

$$\frac{a + \sqrt{-a^2 - 2b}}{2} - \frac{a - \sqrt{-a^2 - 2b}}{2} = 1$$

$$\text{ゆえに } \sqrt{-a^2 - 2b} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{よって } b = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} \quad (\text{右図})$$



- (2) 2 交点の x 座標を α, β とすると ($\alpha < \beta$) とすると, ①, ② より

$$\alpha = \frac{a-1}{2}, \quad \beta = \frac{a+1}{2} \quad \dots (*)$$

2 交点は D 上の点であるから, $A(\alpha, -\alpha^2), B(\beta, -\beta^2)$ とする.

$$2 \text{ 点 } A, B \text{ を通る直線 } l \text{ の方程式は } y + \alpha^2 = \frac{-\beta^2 + \alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$$

$$\text{ゆえに } y = -(\alpha + \beta)x + \alpha\beta \quad (*) \text{ により } l: y = -ax + \frac{a^2 - 1}{4}$$

直線 l と放物線 $y = -x^2 - \frac{1}{4}$ の方程式から y を消去すると

$$-ax + \frac{a^2 - 1}{4} = -x^2 - \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 0$$

よって, C と D の 2 交点を結ぶ直線は, 放物線 $y = -x^2 - \frac{1}{4}$ に接する.

補足 C, D の交点を通る放物線・直線の方程式は (k は定数)

$$(x - a)^2 - y + b + k(x^2 + y) = 0$$

$k \neq -1$ のとき放物線, $k = -1$ のとき直線となるから, $k = -1$ より

$$(x - a)^2 - y + b - (x^2 + y) = 0 \quad \text{すなわち} \quad y = -ax + \frac{a^2}{2} + \frac{b}{2}$$

これに (1) の結果を代入すると, 直線 l の方程式を得る. ■

- 2 (1) $p(1)$ は、1回で札の和が n 以上になる、すなわち、1回目に n の番号札を取り出す確率であるから

$$p(1) = \frac{1}{n}$$

$p(n)$ は、 n 回目で初めて札の和が n 以上になる、すなわち、1回目から $n-1$ 回目まで1の番号札を取り出す確率であるから (n 回目は任意の札)

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{n^{n-1}}$$

- (2) 1回目が k の札を取り出すとすると ($k = 1, 2, \dots, n-1$), 2回目が $n-k$ 以上の札取り出す $k+1$ 通り. したがって

$$\begin{aligned} p(2) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{1}{2}n(n-1) + (n-1) \right\} \\ &= \frac{1}{2n^2} (n-1)(n+2) \end{aligned}$$

- (3) $n-2$ 回目まですべて1の番号札または1回だけ2の番号札である.

- (i) $n-2$ 回目まですべて1の番号札で、 $n-1$ 回目に2以上の番号札を取り出す確率は

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^{n-1}}$$

- (ii) $n-2$ 回目までに k 回目だけが2の番号札 ($k = 1, 2, \dots, n-2$), それ以外は1の目である確率は ($n-1$ 回目は任意の札)

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \times (n-2) = \frac{n-2}{n^{n-2}}$$

- (i), (ii) より, 求める確率は

$$\frac{n-1}{n^{n-1}} + \frac{n-2}{n^{n-2}} = \frac{n^2 - n - 1}{n^{n-1}}$$

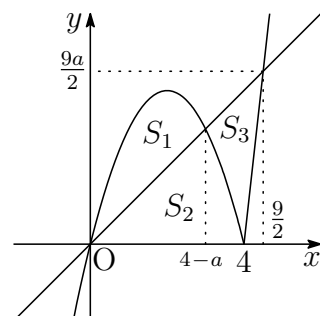


- 3 (1) $x < 4$ のとき $\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = ax \end{cases}$
 $0 < a < 4$ により, $4 - a < 0$ に注意して

$$(0, 0) \quad (4 - a, a(4 - a))$$

$$x \geq 4 \text{ のとき } \begin{cases} y = 9a(x - 4) \\ y = ax \end{cases}$$

$$\text{これを解いて } \left(\frac{9}{2}, \frac{9a}{2} \right)$$



- (2) (1) の図の面積を S_1, S_2, S_3 とすると, 交点の x 座標に注意して

$$S_1 = \frac{1}{6}(4-a)^3, \quad S_1 + S_2 = \frac{1}{6} \cdot 4^3 = \frac{32}{3}, \quad S_2 + S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{9a}{2} = 9a$$

よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} S(a) &= S_1 + S_3 = 2S_1 - (S_1 + S_2) + (S_2 + S_3) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6}(4-a)^3 - \frac{32}{3} + 9a \\ &= -\frac{a^3}{3} + 4a^2 - 7a + \frac{32}{3} \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から

$$S'(a) = -a^2 + 8a - 7 = -(a-1)(a-7)$$

したがって, $0 < a < 4$ における増減表は次のようになる.

a	(0)	...	1	...	(4)
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, 求める最小値は $S(1) = \frac{22}{3}$



4 (1) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (t-2)\overrightarrow{GC} + t\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ より

$$(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DG}) + (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DG}) + (t-2)(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DG}) - t\overrightarrow{DG} = \vec{0}$$

整理すると $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + (t-2)\overrightarrow{DC} - 2t\overrightarrow{DG} = \vec{0}$

$t \neq 0$ に注意して $\overrightarrow{DG} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + (t-2)\overrightarrow{DC}}{2t}$

(2) N は辺 CD の中点であるから $\overrightarrow{DN} = \frac{\overrightarrow{DC}}{2}$

これと (1) の結果から

$$\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DN} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + (t-2)\overrightarrow{DC}}{2t} - \frac{\overrightarrow{DC}}{2}$$

したがって $\overrightarrow{NG} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC}}{2t} \quad \dots \textcircled{1}$

点 G と点 N が一致すると仮定すると

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{DC} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}}{2}$$

このとき、点 C は辺 AB の中点となり、不適。

(3) 点 M は辺 AB の中点であるから、 $\overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}}{2}$ より

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} - \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}}{2} = \frac{2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}}{2}$$

上式および ① より $\overrightarrow{MC} = -t \cdot \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC}}{2t} = -t\overrightarrow{NG}$

よって、直線 NG と直線 MC は平行である。 ■

2.19 2019 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 a, b, c を実数とし, a は 0 でないとする. xy 平面上の直線 $y = ax$ と放物線 $y = x^2 + a$ が相異なる 2 点 $P(b, ab), Q(c, ac)$ で交わっているとする. $c = b^2, b < 0$ のとき, a と b を求めよ.

- 2 a を 1 ではない正の実数, n を正の整数とする. 次の不等式を考える.

$$\log_a(x - n) > \frac{1}{2} \log_a(2n - x)$$

- (1) $n = 6$ のとき, この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ.
 (2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ.

- 3 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式によって定める.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2}a_n = 2a_{n+1}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) すべての正の整数 n について, a_n は正であることを示せ.
 (2) 一般項 a_n を求めよ.

- 4 n を 2 以上の整数とする. 金貨と銀貨を含む n 枚の硬貨を同時に投げ, 裏が出た金貨は取り去り, 取り去った金貨と同じ枚数の銀貨を加えるという試行の繰り返しを考える. 初めは n 枚すべてが金貨であり, n 枚すべてが銀貨になった後も試行を繰り返す. k 回目の試行の直後に, n 枚の硬貨のなかに金貨が j 枚だけ残る確率を $P_k(j)$ ($0 \leq j \leq n$) で表す.

- (1) $P_1(j)$ を求めよ.
 (2) $P_k(j)$ ($k \geq 2$) を求めよ.
 (3) $n = 3$ とする. 2 回目の試行の直後では金貨が少なくとも 1 枚残るが, 3 回目の試行の直後には 3 枚すべてが銀貨になる確率を求めよ.

解答例

- 1 $y = ax$ と $y = x^2 + a$ から y を消去して整理すると $x^2 - ax + a = 0$
この2次方程式の解が b, c であるから, 解と係数の関係により

$$b + c = a, \quad bc = a \quad \cdots (*)$$

$c = b^2$ を上の2式に代入すると

$$b + b^2 = a, \quad b^3 = a \quad \cdots (**)$$

(**) から a を消去して整理すると $b(b^2 - b - 1) = 0$

$b < 0$ であるから $b^2 - b - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$

$b < 0$ に注意して $\textcircled{1}$ を解くと $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$\textcircled{1}$ より, $b^2 = b + 1$. これを (**) の第1式に代入して

$$a = b + (b + 1) = 2b + 1 = 2 \times \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 = 2 - \sqrt{5}$$



2 (1) $n = 6$ より $\log_a(x-6) > \frac{1}{2}\log_a(12-x) \cdots (*)$

真数は正であるから

$$x-6 > 0, 12-x > 0 \quad \text{すなわち} \quad 6 < x < 12 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(i) $a > 1$ のとき, $(*)$ より $(x-6)^2 > 12-x$

ゆえに $(x-3)(x-8) > 0$ すなわち $x < 3, 8 < x \cdots \textcircled{2}$

よって, ①, ② を同時に満たす整数 x は **9, 10, 11**

(ii) $0 < a < 1$ のとき, $(*)$ より $(x-6)^2 < 12-x$

ゆえに $(x-3)(x-8) < 0$ すなわち $3 < x < 8 \cdots \textcircled{3}$

よって, ①, ③ を同時に満たす整数 x は **7**

(2) $\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x) \cdots (**)$

真数は正であるから

$$x-n > 0, 2n-x > 0 \quad \text{すなわち} \quad n < x < 2n \quad \cdots \textcircled{4}$$

(i) $a > 1$ のとき, $(**)$ より $(x-n)^2 > (2n-x)$

ゆえに $x^2 + (1-2n)x + n^2 - 2n > 0$

$f(x) = x^2 + (1-2n)x + n^2 - 2n$ とおくと

$$f(x) = \left(x - n + \frac{1}{2}\right)^2 - n - \frac{1}{4}$$

$$f(n) = -n < 0, \quad f(2n) = n^2 > 0 \quad (n \text{ は正の整数})$$

これから, ④ と 2 次不等式 $f(x) > 0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(2n-1) = n(n-2) > 0 \quad \text{すなわち} \quad n > 2$$

(ii) $0 < a < 1$ のとき, $(**)$ より $(x-n)^2 < 2n-x$

ゆえに $x^2 + (1-2n)x + n^2 - 2n < 0$

同様に, ④ と 2 次不等式 $f(x) < 0$ を満たす整数 x が存在するとき

$$f(n+1) = -n+2 < 0 \quad \text{すなわち} \quad n > 2$$

(i), (ii) より, 求める n についての必要十分条件は **$n > 2$** ■

$$\boxed{3} \quad (1) \quad (*) \quad a_{n+2}a_n = 2a_{n+1}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

自然数 n について, $a_n > 0$, $a_{n+1} > 0$ と仮定すると, $(*)$ より

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}^2}{a_n} > 0$$

$a_1 = 1 > 0$, $a_2 = 3 > 0$ より, すべての自然数 n について, a_n は正である.

$$(2) \quad (*) \text{ より } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

数列 $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ は初項 $\frac{a_2}{a_1}$, 公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{n-1} \cdot \frac{a_2}{a_1} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

したがって, $n \geq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 3^{n-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから $a_n = 3^{n-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$ ■

- 4 (1) $P_1(j)$ は, n 枚の金貨を同時に投げ, j 枚が裏である確率により

$$P_1(j) = {}_nC_j \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-j} = \frac{{}_nC_j}{2^n}$$

- (2) 1 枚の硬貨が k 回の試行で, 金貨である確率を p とすると

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k}$$

$P_k(j)$ は k 回の試行で, n 枚の金貨のうち丁度 j 枚が金貨となる確率

$$P_k(j) = {}_nC_j p^j (1-p)^{n-j} = \frac{{}_nC_j}{2^{kj}} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-j}$$

- (3) 次の場合に分けて求める.

- (i) 2 回目の試行の直後に金貨が 3 枚残り, 3 回目の試行で残り 3 枚の金貨がすべて裏である確率は

$$P_2(3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{{}_3C_3}{2^{2 \cdot 3}} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)^{3-3} \times \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^9}$$

- (ii) 2 回目の試行の直後に金貨が 2 枚残り, 3 回目の試行で残り 2 枚の金貨がすべて裏である確率は

$$P_2(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{{}_3C_2}{2^{2 \cdot 2}} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)^{3-2} \times \frac{1}{2^2} = \frac{9}{2^8}$$

- (iii) 2 回目の試行の直後に金貨が 1 枚残り, 3 回目の試行で残り 1 枚の金貨が裏である確率は

$$P_2(1) \times \frac{1}{2} = \frac{{}_3C_1}{2^{2 \cdot 1}} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)^{3-1} \times \frac{1}{2} = \frac{27}{2^7}$$

- (i)~(iii) により, 求める確率は

$$\frac{1}{2^9} + \frac{9}{2^8} + \frac{27}{2^7} = \frac{127}{512}$$



2.20 2020年(100分)

出題分野 1 2 3 4

1 a を $-2 \leq a \leq 3$ を満たす実数とする. 次の性質をもつ関数 $f(x)$ を考える.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < -2 \text{ のとき}) \\ (x-a)(x+2) & (-2 \leq x \leq a \text{ のとき}) \\ 2(x-a)(x-3) & (a \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x > 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とおく.

- (1) $S(a)$ を求めよ.
- (2) $S(a)$ が最大となる a の値を求めよ. また, $S(a)$ が最小となる a の値を求めよ.

2 n を正の整数, a, b を 0 以上の整数とする.

- (1) $n \geq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ.
- (2) 不等式 $2^n + n^2 + 8 \geq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ.
- (3) 等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす a, b, n の組 (a, b, n) をすべて求めよ.

3 a を 0 でない実数とする. xy 平面において, 円 $C: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$, 直線 $L: -4x + 3y + a = 0$, 直線 $M: 3x + 4y - 7a = 0$ を考える.

- (1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ.
- (2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ.
- (3) 集合 $\{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } L \text{ の共有点}\} \cup \{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } M \text{ の共有点}\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ.

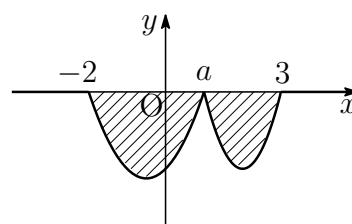
4 6 枚の硬貨を同時に投げて, 表がでた硬貨が s 枚, 裏がでた硬貨が t 枚であったとき, ベクトル $\vec{p} = (x, y)$ を $\vec{p} = s(2, -1) + t(-1, 2)$ で定める.

- (1) $x + y$ の値を求めよ.
- (2) $\vec{p} = (0, 6)$ となる確率を求めよ.
- (3) $\vec{p}$ と $\vec{q} = (3, 1)$ のなす角が $\frac{\pi}{6}$ 以下となる確率を求めよ.

解答例

1 (1) $S(a)$ は右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned}
 S(a) &= - \int_{-2}^a (x-a)(x+2) dx \\
 &\quad - \int_a^3 2(x-a)(x-3) dx \\
 &= \frac{1}{6}(a+2)^3 + \frac{1}{3}(3-a)^3 \\
 &= -\frac{1}{6}a^3 + 4a^2 - 7a + \frac{31}{3}
 \end{aligned}$$



(2) (1) の結果から $S'(a) = -\frac{1}{2}a^2 + 8a - 7$

$S'(a) = 0$ とすると $a = 8 \pm 5\sqrt{2}$

a	-2	...	$8 - 5\sqrt{2}$	...	3
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$	$\frac{125}{3}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\frac{125}{6}$

よって $S(a)$ が最大となる a の値は $a = -2$

$S(a)$ が最小となる a の値は $a = 8 - 5\sqrt{2}$

■

2 (1) $2^n + n^2 + 8 < 3^n \quad \dots (*)$

[1] $n = 3$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = 2^3 + 3^2 + 8 = 25, \quad (*) \text{ の右辺} = 3^3 = 27$$

したがって、このとき、 $(*)$ は成立する.

[2] $n = k$ のとき、すなわち、 $2^k + k^2 + 8 < 3^k$ であると仮定すると

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\} &> 3(2^k + k^2 + 8) - 2^{k+1} - (k+1)^2 - 8 \\ &= 2^k + 2k^2 - 2k + 15 \\ &= 2^k + k^2 + (k-1)^2 + 14 > 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad 2^{k+1} + (k+1)^2 + 8 < 3^{k+1}$$

したがって、 $n = k+1$ のときも $(*)$ は成立する.

[1], [2] より、 $n \geq 3$ に対して、 $(*)$ が成立する.

(2) (1) の結果に注意すると

$$2^n + n^2 + 8 \geq 3^n \quad \dots (**)$$

を満たす $n \geq 3$ の整数は存在しないから、 $n = 1, 2$ について調べればよい.

- $n = 1$ のとき、 $2^1 + 1^2 + 8 \geq 3^1$ より、 $(**)$ は成立する.
- $n = 2$ のとき、 $2^2 + 2^2 + 8 \geq 3^2$ より、 $(**)$ は成立する.

よって $n = 1, 2$

(3) (1) の結果から、 $n \geq 3$ のとき $3^n - (2^n + n^2 + 8) > 0$

また、与えられた等式から $3^n - (2^n + n^2 + 8) = -an - b$

上の2式から $-an - b > 0$ ゆえに $an + b < 0 \quad \dots (A)$

a, b は0以上の整数であるから、 $n \geq 3$ のとき、 (A) を満たす (a, b, n) は存在しない. したがって、 $n = 1, 2$ について調べればよい.

(i) $n = 1$ のとき $2^1 + 1^2 + 8 = 3^1 + a + b$ ゆえに $a + b = 8 \quad \dots \textcircled{1}$

(ii) $n = 2$ のとき $2^2 + 2^2 + 8 = 3^2 + 2a + b$ ゆえに $2a + b = 7 \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より $(a, b, n) = (j, 8 - j, 1) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 8),$
 $(a, b, n) = (k, 7 - 2k, 2) \quad (k = 0, 1, 2, 3)$



- 3** (1) 円 $C: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ より $(x - a)^2 + (y - 2)^2 = a^2$
 円 C は、中心 $(a, 2)$ 、半径 $|a|$ の円である。

$L: -4x + 3y + a = 0$, $M: 3x + 4y - 7a = 0$ の交点は
 これらの 2 式を連立して解くと (a, a)
 これが円 $C: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ 上にあるから

$$(a - a)^2 + (a - 2)^2 = a^2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1$$

- (2) C の中心 $(a, 2)$ から直線 $L: -4x + 3y + a = 0$ の距離を d_1 とすると

$$d_1 = \frac{|-4a + 6 + a|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|-3a + 6|}{5}$$

C と L が異なる 2 つの共有点をもつとき、 $d_1 < |a|$ であるから

$$\frac{|-3a + 6|}{5} < |a| \quad \text{ゆえに} \quad (3a - 6)^2 < (5a)^2$$

したがって $(a + 3)(4a - 3) > 0$ これを解いて $a < -3$, $\frac{3}{4} < a$

- (3) C の中心 $(a, 2)$ から直線 $M: 3x + 4y - 7a = 0$ の距離を d_2 とすると

$$d_2 = \frac{|3a + 8 - 7a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-4a + 8|}{5}$$

C と M が異なる 2 つの共有点をもつとき、 $d_2 < |a|$ であるから

$$\frac{|-4a + 8|}{5} < |a| \quad \text{ゆえに} \quad (4a - 8)^2 < (5a)^2$$

したがって $(a + 8)(9a - 8) > 0$ これを解いて $a < -8$, $\frac{8}{9} < a$

(2) の結果および上式の不等号を等号にした、すなわち、 $a = -3$, $\frac{3}{4}$, -8 , $\frac{8}{9}$ のとき、それぞれ円と直線が 1 点を共有する (1 点で接する)。

- (i) C と L が 2 点を共有し、 C と M が 1 点を共有するのは $a = -8$, $\frac{8}{9}$
 (ii) C と L が 1 点を共有し、 C と M が 2 点を共有する a は存在しない。
 (iii) (1) の結果から、 $a = 1$ のとき、 C と L は 2 点を共有し、同時に C と M も 2 点を共有する。このとき、その 1 点は C , L , M によって共有されるので、 $a = 1$ は条件を満たす。

(i)~(iii) から、求める a の値は $a = -8, \frac{8}{9}, 1$ ■

- 4 (1) $\vec{p} = (x, y)$, $\vec{p} = s(2, -1) + t(-1, 2)$ より

$$\vec{p} = (2s - t, -s + 2t) \quad \text{よって} \quad x + y = s + t = 6$$

- (2) $\vec{p} = (0, 6)$ のとき

$$2s - t = 0, \quad -s + 2t = 6 \quad \text{これを解いて} \quad s = 2, \quad t = 4$$

表が2枚, 裏が4枚でる確率であるから

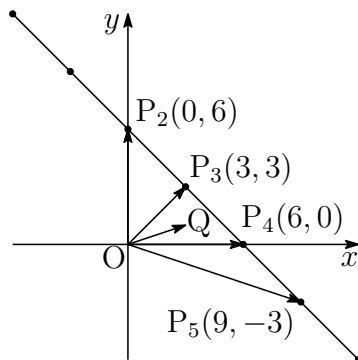
$$\frac{6!}{2!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$$

- (3) $t = 6 - s$ であるから

$$\begin{aligned} \vec{p} &= s(2, -1) + (6 - s)(-1, 2) \\ &= (3s - 6, 12 - 3s) \end{aligned}$$

$0 \leq s \leq 6$ に対する $\vec{p}$ の終点を P_s とし,
O を始点とする $\vec{q}$ の終点を Q とすると

$$\begin{aligned} P_0(-6, 12), \quad P_1(-3, 9), \quad P_2(0, 6), \\ P_3(3, 3), \quad P_4(6, 0), \quad P_5(9, -3), \\ P_6(12, -6), \quad Q(3, 1) \end{aligned}$$



$\vec{q} = (3, 1)$ の偏角を θ とすると ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) $\tan \theta = \frac{1}{3}$

$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$, $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから $\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{6}$

P_2, P_3, P_4, P_5 の偏角は順に $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0, -\theta$

ゆえに $\angle QOP_2 = \frac{\pi}{2} - \theta > \frac{\pi}{3}$, $\angle QOP_3 = \frac{\pi}{4} - \theta < \frac{\pi}{6}$

$\angle QOP_4 = \theta < \frac{\pi}{6}$, $\angle QOP_5 = 2\theta > \frac{\pi}{6}$

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{\pi}{6}$ 以下となる点は P_3, P_4

したがって, $s = 3$ と $s = 4$ となる確率であるから

$$\frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \frac{6!}{4!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{35}{64}$$

■

2.21 2021 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

1 a, b を実数とする. 曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 (a, b) の領域を図示せよ.

2 正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち, 直角三角形であるものの個数を求めよ.
- (2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち, 直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ.
- (3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち, 次の条件 (*) を満たすものの個数を求めよ.

(*) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる.

3 平面において, 2 つの点 O, A の間の距離が 1 であるとし, 点 O と点 A を中心とする 2 つの円をそれぞれ C_1, C_2 とする. C_1, C_2 は 2 点 P, Q において交わり, $\angle OPA = \frac{\pi}{3}$ であるとし, C_2 の半径 r は $r < 1$ を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) C_1 の半径を求めよ.
- (2) $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき, $\angle PAO$ の大きさを求めよ.
- (3) $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき, 円 C_1 の内部と円 C_2 の内部との共通部分の面積を求めよ.

4 以下の問いに答えよ.

- (1) 3 次関数 $y = x^3 + x^2$ のグラフと 2 次関数 $y = x^2 + 4x + 16$ のグラフの共通接線 (どちらのグラフにも接する直線) は 2 本ある. それらの方程式を求めよ.
- (2) (1) で求めた 2 本の共通接線と 2 次関数 $y = x^2 + 4x + 16$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

1 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ とおくと、曲線 $y = f(x)$ は、点 $(0, 1)$ を通る.

$a < 0$ のとき、上に凸の放物線 $y = f(x)$ は x 軸の正の部分と共有点をもつ.

したがって、 $a \geq 0$ であることが必要である.

[1] $a = 0$ のとき、直線 $y = bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないから

$$b \geq 0$$

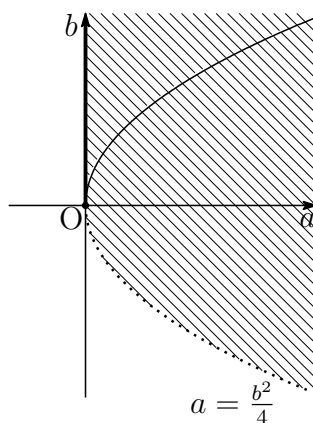
[2] $a > 0$ のとき、 $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + 1 - \frac{b^2}{4a}$ より、放物線 $y = f(x)$ の頂点に着目すると、条件を満たすのは、次の (i) または (ii) である.

$$(i) -\frac{b}{2a} \leq 0$$

$$(ii) -\frac{b}{2a} > 0, 1 - \frac{b^2}{4a} > 0$$

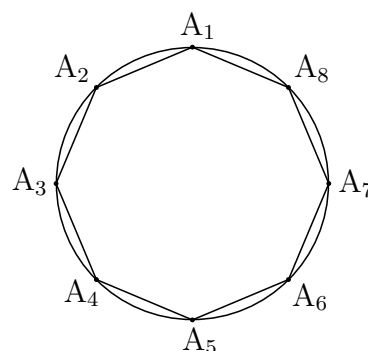
すなわち (i) $b \geq 0$ (ii) $b < 0, a > \frac{b^2}{4}$

[1], [2] より、求める領域は、下の図の斜線部分で、点線部分は含まない.



- 2 (1) 直角三角形の斜辺は, A_1A_5 , A_2A_6 , A_3A_7 , A_4A_8 の 4 通りあり, それぞれの斜辺に対する頂点の選び方が 6 通りある. よって, 求める個数は

$$4 \times 6 = 24 \text{ (個)}$$



- (2) A_1 を挟む 2 辺が等しい二等辺三角形で直角三角形でないものが $\triangle A_1A_2A_8$, $\triangle A_1A_4A_6$ の 2 個あるから, 二等辺三角形で直角三角形でないものの総数は

$$2 \times 8 = 16 \text{ (個)}$$

- (1) と上の結果から, 直角三角形または二等辺三角形であるものの個数は

$$24 + 16 = 40 \text{ (個)}$$

3 個の頂点を結んでできる三角形の総数は ${}_8C_3 = 56$ (個)

よって, 求める個数は $56 - 40 = 16$ (個)

- (3) 直角三角形の斜辺となるのは, A_1A_5 , A_2A_6 , A_3A_7 , A_4A_8 であるから, 直角三角形とならないのは, A_1 と A_5 , A_2 と A_6 , A_3 と A_7 , A_4 と A_8 をともに含まない場合である. 直角三角形とならない 4 点の選び方は

$$\{A_1, A_5\}, \{A_2, A_6\}, \{A_3, A_7\}, \{A_4, A_8\}$$

の 4 組からそれぞれ 1 つずつ選ぶ場合の数 2^4 (個)

よって, 求める場合の数は

$${}_8C_4 - 2^4 = 70 - 16 = 54 \text{ (個)}$$

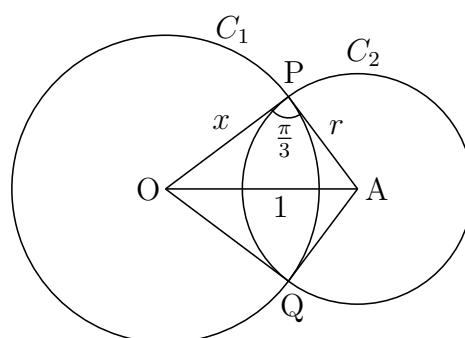


- 3** (1) $OA = 1$, $AP = r$ ($r < 1$), $\angle OPA = \frac{\pi}{3}$ であるから, $OP = x$ とおいて, $\triangle OAP$ に余弦定理を適用すると

$$1^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - rx + r^2 - 1 = 0$$

$r < 1$ より, この方程式が正・負の解をもつことに注意して

$$x = \frac{r + \sqrt{4 - 3r^2}}{2}$$



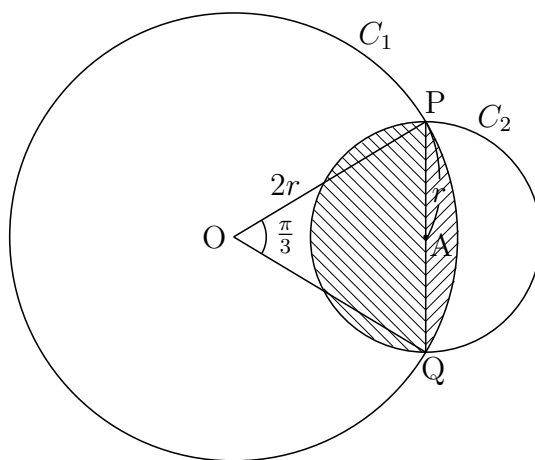
- (2) (1) の結果に $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入すると $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\theta = \angle PAO$ とおいて, 正弦定理に適用すると

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} = 1 \quad \text{よって} \quad \theta = \angle PAO = \frac{\pi}{2}$$

- (3) $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (2) の結果から, 求める面積は

$$\frac{\pi}{2} r^2 + \frac{1}{2} (2r)^2 \left(\frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) = r^2 \left(\frac{7}{6} \pi - \sqrt{3} \right) = \frac{7\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$



4 (1) $y = x^3 + x^2$ より $y' = 3x^2 + 2x$

$y = x^3 + x^2$ 上の点 $(t, t^3 + t^2)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 + t^2) = (3t^2 + 2t)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 \quad (*)$$

この直線と放物線 $y = x^2 + 4x + 16$ が接するから、これらの方程式から y を消去した 2 次方程式

$$x^2 + 4x + 16 = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2$$

すなわち、2 次方程式

$$x^2 - (3t^2 + 2t - 4)x + 2t^3 + t^2 + 16 = 0 \quad (**)$$

が重解をもつから、その係数について

$$(3t^2 + 2t - 4)^2 - 4 \cdot 1(2t^3 + t^2 + 16) = 0$$

これを整理すると

$$9t^4 + 4t^3 - 24t^2 - 16t - 48 = 0$$

$$(t + 2)(t - 2)(9t^2 + 4t + 12) = 0$$

$$9t^2 + 4t + 12 = (t + 2)^2 + 8(t^2 + 1) > 0 \text{ に注意して解くと } t = \pm 2$$

求める 2 接線は、 $t = 2, -2$ をそれぞれ $(*)$ に代入して

$$y = 16x - 20, \quad y = 8x + 12$$

(2) $(**)$ より、放物線 $y = x^2 + 4x + 16$ と接線 $(*)$ の接点の x 座標は

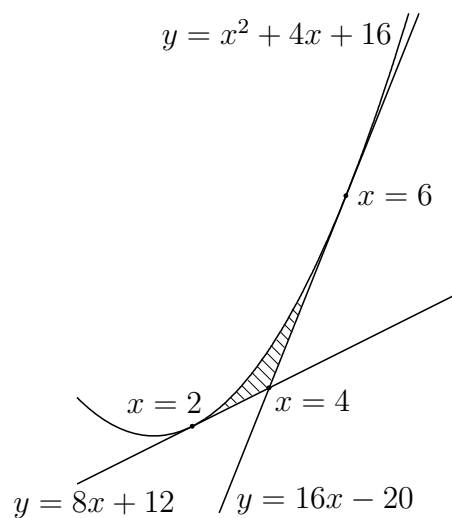
$$x = \frac{3t^2 + 2t - 4}{2}$$

したがって、 $t = 2$ のとき $x = 6$, $t = -2$ のとき $x = 2$

また、2 接線の交点の x 座標は

$$16x - 20 = 8x + 12 \quad \text{これを解いて} \quad x = 4$$

以上の結果から，求める面積は下の図の斜線部分である．



求める面積を S とすると²

$$\begin{aligned}
 S &= \int_2^4 \{(x^2 + 4x + 16) - (8x + 12)\} dx \\
 &\quad + \int_4^6 \{(x^2 + 4x + 16) - (16x - 20)\} dx \\
 &= \int_2^4 (x - 2)^2 dx + \int_4^6 (x - 6)^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}(x - 2)^3 \right]_2^4 + \left[\frac{1}{3}(x - 6)^3 \right]_4^6 = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

■

²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf (p.6 を参照)

2.22 2022 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 K を 3 より大きな奇数とし, $l + m + n = K$ を満たす正の奇数の組 (l, m, n) の個数 N を考える. ただし, たとえば, $K = 5$ のとき, $(l, m, n) = (1, 1, 3)$ と $(l, m, n) = (1, 3, 1)$ とは異なる組とみなす.

- (1) $K = 99$ のとき, N を求めよ.
- (2) $K = 99$ のとき, l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 (l, m, n) の個数を求めよ.
- (3) $N > K$ を満たす最小の K を求めよ.

- 2 実数 t の関数

$$F(t) = \int_0^1 |x^2 - t^2| dx$$

について考える.

- (1) $0 \leq t \leq 1$ のとき, $F(t)$ を t の整式として表せ.
- (2) $t \geq 0$ のとき, $F(t)$ を最小にする t の値 T と $F(T)$ の値を求めよ.

- 3 a, b を正の実数とし, xy 平面上の直線 $\ell: ax + by - 2 = 0$ を考える.

- (1) 直線 ℓ と原点の距離が 2 以上であり, 直線 ℓ と直線 $x = 1$ の交点の y 座標が 2 以上であるような点 (a, b) のとりうる範囲 D を求め, ab 平面上に図示せよ.
- (2) 点 (a, b) が (1) で求めた範囲 D を動くとする. このとき, $3a + 2b$ を最大にする a, b の値と, $3a + 2b$ の最大値を求めよ.

- 4 xyz 空間内の点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$, $B(-\sqrt{3}, 0, 1)$, $C(\sqrt{6}, -\sqrt{3}, \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 $OABC$ を考える. 3 点 OAB を含む平面からの距離が 1 の点のうち, 点 O に最も近く, x 座標が正のものを H とする.

- (1) H の座標を求めよ.
- (2) 3 点 OAB を含む平面と点 C の距離を求めよ.
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ.

解答例

- 1** (1) l, m, n は正の奇数であるから

$$l = 2a + 1, \quad m = 2b + 1, \quad n = 2c + 1 \quad (a, b, c \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

とおくと, $l + m + n = 99$ のとき

$$2a + 1 + 2b + 1 + 2c + 1 = 99 \quad \text{ゆえに} \quad a + b + c = 48$$

これを満たす組 (a, b, c) の個数は

$${}_3\text{H}_{48} = {}_{3+48-1}\text{C}_{48} = {}_{50}\text{C}_2 = \frac{50 \cdot 49}{2} = \mathbf{1225} \text{ (個)}$$

- (2) l, m, n の中に同じ奇数を 2 つだけ含む組は

$$(i) \quad l = m \neq n \quad (ii) \quad m = n \neq l \quad (iii) \quad n = l \neq m$$

の 3 つの場合がある. (i) について

$$2a + 1 = 2b + 1 \neq 2c + 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = b \neq c, \quad a + b + c = 48$$

$b = a$ より, $c = 48 - 2a \neq a$ であるから

$$a \geq 0, \quad 48 - 2a \geq 0, \quad 48 - 2a \neq a$$

a は 16 を除く 0 以上 24 以下の整数で 24 組ある.

(ii), (iii) の場合も (i) の場合と同様にそれぞれ 24 組ある.

また, $l = m = n$ が等しい同じ奇数を含む組が 1 組ある.

よって, 求める個数は $24 \times 3 + 1 = \mathbf{73}$ (個)

- (3) $K = 2k + 3$ とおき (k は 1 以上の整数), N を求める. (1) と同様に

$$2a + 1 + 2b + 1 + 2c + 1 = 2k + 3 \quad \text{ゆえに} \quad a + b + c = k$$

$$\text{したがって} \quad N = {}_3\text{H}_k = {}_{3+k-1}\text{C}_k = {}_{k+2}\text{C}_2 = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

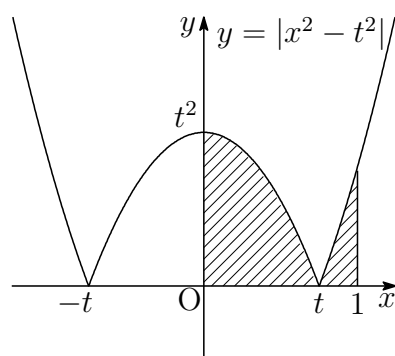
$$N > K \text{ より} \quad \frac{(k+2)(k+1)}{2} > 2k + 3 \quad \text{ゆえに} \quad k(k-1) > 4$$

これを満たす最小の k が 3 であるから, 求める K は $2 \cdot 3 + 3 = \mathbf{9}$ ■

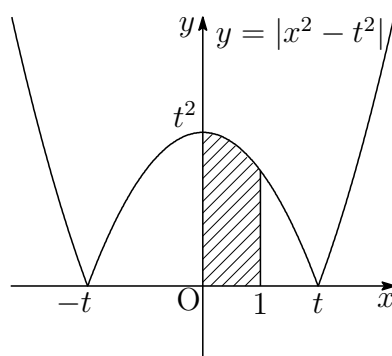
2 (1) $0 \leq t \leq 1$, $F(t) = \int_0^1 |x^2 - t^2| dx$ より

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t (t^2 - x^2) dx + \int_t^1 (x^2 - t^2) dx \\ &= \left[t^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^t + \left[\frac{x^3}{3} - t^2 x \right]_t^1 \\ &= \frac{4}{3} t^3 - t^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 1$ のとき



$1 \leq t$ のとき



(2) $1 \leq t$ のとき

$$F(t) = \int_0^1 (t^2 - x^2) dx = \left[t^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = t^2 - \frac{1}{3}$$

$1 \leq t$ において, $F(t)$ は単調増加であるから, $t \geq 0$ における最小値は $0 \leq t \leq 1$ で調べればよい. (1) の結果から

$$F'(t) = 4t^2 - 2t = 2t(2t - 1)$$

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$F'(t)$		-	0	+	
$F(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

よって $T = \frac{1}{2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

■

- 3 (1) $\ell: ax + by - 2 = 0$ ($a > 0, b > 0$) と原点の距離が2以上であるから

$$\frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq 2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 \leq 1$$

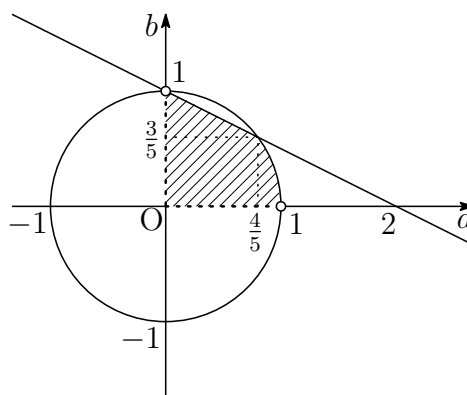
ℓ と直線 $x = 1$ の交点の y 座標は

$$a + by - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{2-a}{b}$$

この y 座標が2以上であるから $\frac{2-a}{b} \geq 2$ ゆえに $b \leq -\frac{a}{2} + 1$
 以上の結果から、点 (a, b) の表す不等式は、次のようになる。

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \leq -\frac{a}{2} + 1 \\ a^2 + b^2 \leq 1 \end{cases}$$

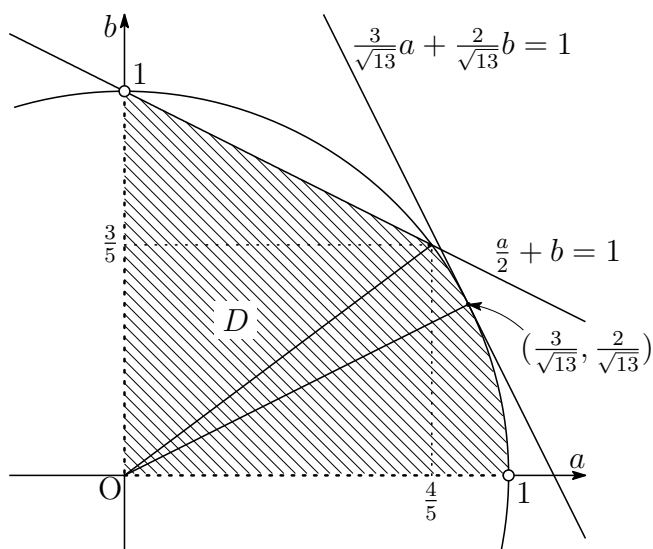
D の表す領域は、下の図の斜線部分である。ただし、点線部分と $\circ$ は含まない。



$a^2 + b^2 = 1$ の接点は、直線 $b = \frac{2}{3}a$ との交点であるから

$$a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad b = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

原点と点 $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ を結ぶ直線の傾きが $\frac{3}{4}$ であるから, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ に注意すると, $3a + 2b$ は, $a = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{13}}$ のとき, 最小値 $\sqrt{13}$ をとる.



- 4 (1) $\vec{OA} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ と $\vec{OB} = (-\sqrt{3}, 0, 1)$ に垂直なベクトルの1つは
 $(\sqrt{2}, -4, \sqrt{6})$

であり, このベクトルの大きさは

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-4)^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{6}$$

したがって, これと平行な単位ベクトルは

$$\vec{n} = \frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{2}, -4, \sqrt{6}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$$x \text{ 成分に注意すると } \mathbf{H}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

- (2) (1) で求めた単位ベクトル $\vec{n}$ を用いると, 求める距離は $|\vec{OC} \cdot \vec{n}|$
 $\vec{OC} = (\sqrt{6}, -\sqrt{3}, \sqrt{2})$ より

$$\begin{aligned}\vec{OC} \cdot \vec{n} &= \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} + (-\sqrt{3}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって, 求める距離は $2\sqrt{2}$

- (3) $\triangle OAB$ の面積は

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{6 \cdot 4 - 0^2} = \sqrt{6}$$

よって, 求める体積は

$$\frac{1}{3} \triangle OAB |\vec{OC} \cdot \vec{n}| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

補足 2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき,
 ベクトル

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

は, $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する. このベクトルを, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積と言い,
 $\vec{a} \times \vec{b}$ で表す³. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張る平行四辺形の面積に等しい. ■

³<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2004.pdf> (p.10 を参照)

2.23 2023 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った、中の見えない袋がある。玉はすべて、色が区別できる他には違いはないものとする。A, B の 2 人が、A から交互に、袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中には戻さない。A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし、その時点でゲームを終了する。B が白玉を取り出したら B の勝ちとし、その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし、ゲームは終了する。

- (1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。
- (2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ。

- 2 平面上の半径 1 の円 C の中心 O から距離 4 だけ離れた点 L をとる。点 L を通る円 C の 2 本の接線を考え、この 2 本の接線と円 C の接点をそれぞれ M , N とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 LMN の面積を求めよ。
- (2) 三角形 LMN の内接円の半径 r と、三角形 LMN の外接円の半径 R をそれぞれ求めよ。

- 3 a を実数とし、2 次関数 $f(x) = x^2 + 2ax - 3$ を考える。実数 x が $a \leq x \leq a + 3$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値および最小値を、それぞれ $M(a)$, $m(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $M(a)$ を a を用いて表せ。
- (2) $m(a)$ を a を用いて表せ。
- (3) a がすべての実数を動くとき、 $m(a)$ の最小値を求めよ。

- 4 関数 $f(x)$ に対して、座標平面上の 2 つの点 $P(x, f(x))$, $Q(x+1, f(x)+1)$ を考える。実数 x が $0 \leq x \leq 2$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形の面積を S とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = -2|x-1| + 2$ に対して、 S の値を求めよ。
- (2) 関数 $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ に対して、曲線 $y = f(x)$ の接線で、傾きが 1 のものの方程式を求めよ。
- (3) 設問 (2) の関数 $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ に対して、 S の値を求めよ。

解答例

- 1** (1) 赤玉4個，白玉5個の計9個を取り出す場合の総数は(9個の玉を取り出して一列に並べる場合の総数)

$$\frac{9!}{4!5!} = 126 \text{ (通り)}$$

ゲームが引き分けとなるのは，次の1通り．

白	赤	白	赤	白	赤	白	赤	白
---	---	---	---	---	---	---	---	---

よって，求める確率は $\frac{1}{126}$

- (2) Aが勝つのは，次の場合である．

赤								
---	--	--	--	--	--	--	--	--

白	赤	赤						
---	---	---	--	--	--	--	--	--

白	赤	白	赤	赤				
---	---	---	---	---	--	--	--	--

白	赤	白	赤	白	赤	赤		
---	---	---	---	---	---	---	--	--

これらの総数は

$$\frac{8!}{3!5!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{4!}{1!3!} + \frac{2!}{2!} = 56 + 15 + 4 + 1 = 76$$

よって，求める確率は $\frac{76}{126} = \frac{38}{63}$



- 2 (1) 円 C と OL の交点を A, B とし, OL と MN の交点を H とする.
 方べきの定理により $LA \cdot LB = LM^2$

$$5 \cdot 3 = LM^2 \quad \text{ゆえに} \quad LM = \sqrt{15}$$

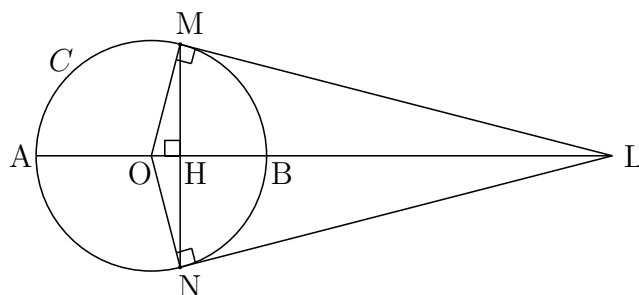
$$OL \cdot MH = OM \cdot LM \quad \text{より} \quad 4MH = 1 \cdot \sqrt{15} \quad \text{ゆえに} \quad MH = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$LH = OL - OH = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$MN = 2 \cdot MH = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\triangle LMN \text{ の面積を } S \text{ とすると} \quad S = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot LH = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{15}{4} = \frac{15\sqrt{15}}{16}$$



- (2) $\triangle LMN$ の周の長さを $2s$ とすると

$$2s = \sqrt{15} + \sqrt{15} + \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{5\sqrt{15}}{4}$$

$$S = rs \quad \text{より} \quad \frac{15\sqrt{15}}{16} = r \cdot \frac{5\sqrt{15}}{4} \quad \text{よって} \quad r = \frac{3}{4}$$

M, N は OL を直径とする円周上の点である.

したがって, $\triangle LMN$ の外接円の半径 R は

$$2R = OL = 4 \quad \text{よって} \quad R = 2$$



$$\boxed{3} \quad (1) \quad f(x) = x^2 + 2ax - 3 \text{ より } f(x) = (x+a)^2 - a^2 - 3$$

定義域 $a \leq x \leq a+3$ の中央は $a + \frac{3}{2}$

$$(i) \quad -a \leq a + \frac{3}{2}, \text{ すなわち, } a \geq -\frac{3}{4} \text{ のとき}$$

$$M(a) = f(a+3) = 3a^2 + 12a + 6$$

$$(ii) \quad a + \frac{3}{2} \leq -a, \text{ すなわち, } a \leq -\frac{3}{4} \text{ のとき}$$

$$M(a) = f(a) = 3a^2 - 3$$

$$(i), (ii) \text{ より } M(a) = \begin{cases} 3a^2 + 12a + 6 & \left(a \geq -\frac{3}{4}\right) \\ 3a^2 - 3 & \left(a \leq -\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$$(2) \quad (i) \quad a \leq -a \leq a+3, \text{ すなわち, } -\frac{3}{2} \leq a \leq 0 \text{ のとき}$$

$$m(a) = f(-a) = -a^2 - 3$$

$$(ii) \quad -a \leq a, \text{ すなわち, } a \geq 0 \text{ のとき}$$

$$m(a) = f(a) = 3a^2 - 3$$

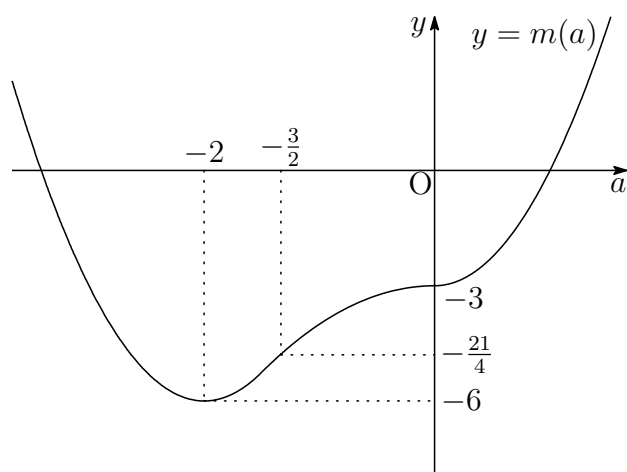
$$(iii) \quad a+3 \leq -a, \text{ すなわち, } a \leq -\frac{3}{2} \text{ のとき}$$

$$m(a) = f(a+3) = 3a^2 + 12a + 6$$

$$(i) \sim (iii) \text{ より } m(a) = \begin{cases} 3a^2 + 12a + 6 & \left(a \leq -\frac{3}{2}\right) \\ -a^2 - 3 & \left(-\frac{3}{2} \leq a \leq 0\right) \\ 3a^2 - 3 & (0 \leq a) \end{cases}$$

(3) (2) の結果から $3a^2 + 12a + 6 = 3(a + 2)^2 - 6$

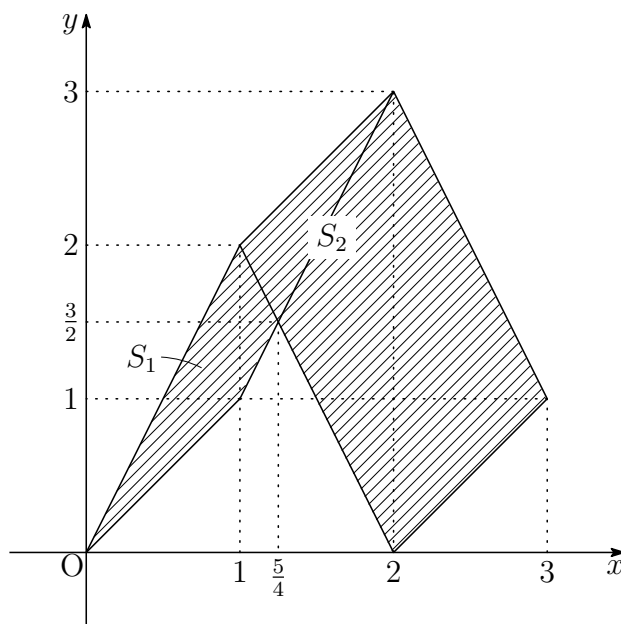
よって, 求める最小値は $m(-2) = -6$



- 4 (1) 線分 PQ が通過してできる図形は、下の図の斜線部分で境界線を含む。
下の図の S_1 , S_2 の面積は

$$S_1 = \frac{1}{2}(2-1) \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8} \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3-1) = 3$$

よって $S = S_1 + S_2 = \frac{5}{8} + 3 = \frac{29}{8}$



- (2) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ を微分すると $f'(x) = x-1$

$$f'(x) = 1 \text{ を解くと } x = 2 \quad \text{このとき} \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

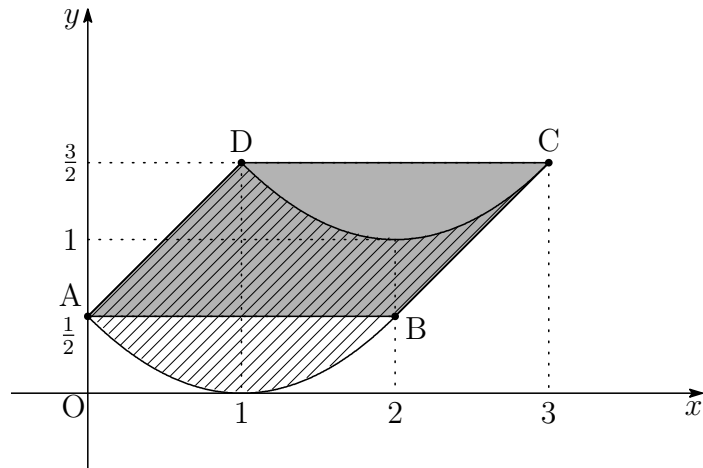
求める接線は、点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ を通り、傾き 1 の直線であるから

$$y - \frac{1}{2} = x - 2 \quad \text{すなわち} \quad y = x - \frac{3}{2}$$

(3) 線分 PQ が通過してできる図形は，下の図の斜線部分で境界線を含む．

この斜線部分の面積 S は，カバリエリの原理により，下の図の平行四辺形 ABCD の面積に等しいから

$$S = 2$$



2.24 2024年(100分)

出題分野 1 2 3 4

1 a を正の実数とし、 $f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする。O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y = f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $P(p, f(p))$ とし、O から C へ引いた接線の接点を $Q(q, f(q))$ とする。ただし、 $q > 0$ とする。

- (1) p, q の値を a を用いて表せ。また、 $p > q$ であることを示せ。
- (2) 放物線 C の $q \leq x \leq p$ の部分、線分 OP, および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。 S を a を用いて表せ。
- (3) (2) の S に対し、 $S = \frac{2}{3}$ となるとき a の値を求めよ。

2 a, b, d を正の実数とし、 xy 平面上の点 $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $D(0, d)$ が次の条件をすべて満たすとする。

$$\angle OAD = 15^\circ, \quad \angle OBD = 75^\circ, \quad AB = 6$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $\tan 75^\circ$ の値を求めよ。
- (2) a, b, d の値をそれぞれ求めよ。
- (3) 2 点 O, D を直径の両端とする円を C とする。線分 AD と C の交点のうち D と異なるものを P とする。また、線分 BD と C の交点のうち D と異なるものを Q とする。このとき、方べきの定理

$$AP \cdot AD = AO^2, \quad BQ \cdot BD = BO^2$$

を示せ。

- (4) (3) の点 P, Q に対し、積 $AP \cdot BQ$ の値を求めよ。

3 以下の問いに答えよ.

(1) t を $t > 1$ を満たす実数とする. 正の実数 x が 2 つの条件

$$(a) \ x > \frac{1}{\sqrt{t} - 1}$$

$$(b) \ x \geq 2 \log_t x$$

をともに満たすとする. このとき, 不等式

$$x + 1 > 2 \log_t (x + 1)$$

を示せ.

(2) $n \leq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ.

4 n を正の整数とする. 2 つの整数 a_n, b_n を条件

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$$

により定める. ここで, $\sqrt{2}$ は無理数なので, このような整数の組 (a_n, b_n) はただ 1 つに定まる.

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いてそれぞれ表せ. さらに, b_4, b_5, b_6 の値をそれぞれ求めよ.

(2) 等式

$$(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n \sqrt{2}$$

が成り立つことを数学的に帰納法を用いて表せ.

(3) $n \geq 2$ のとき, $b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2$ を求めよ.

(4) $pb_6 - qb_5 = 1, 0 \leq p \leq 100, 0 \leq q \leq 100$ をすべて満たす整数 p, q の組 (p, q) を 1 組求めよ.

解答例

- 1 (1) $C: y = (x-a)^2 + 3a^2$ について, $f(x) = (x-a)^2 + 3a^2$ より, 頂点 A は $(a, 3a^2)$
 直線 OA の傾きは $3a$ であるから, その方程式は $y = 3ax$
 これと $C: y = x^2 - 2ax + 4a^2$ から y を消去すると

$$x^2 - 2ax + 4a^2 = 3ax \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)(x-4a) = 0$$

点 P は点 A と異なるから, 点 P の x 座標 p は $p = 4a$

$f'(x) = 2x - 2a$ より C 上の点 $Q(q, f(q))$ における接線は

$$y = (2q - 2a)(x - q) + q^2 - 2aq + 4a^2$$

すなわち $y = 2(q - a)x - q^2 + 4a^2$

これが原点を通るから ($q > 0, a > 0$)

$$-q^2 + 4a^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q = 2a$$

$p = 4a, q = 2a$ であるから ($a > 0$) $p > q$

- (2) 曲線 $C: y = f(x)$ と $Q(q, f(q))$ における接線 $y = 2ax$ および直線 $x = p$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする. このとき⁴

$$f(x) = f(q) + f'(q)(x - q) + (x - q)^2$$

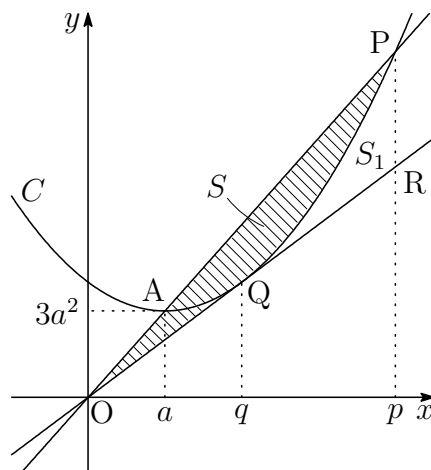
であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_q^p \{f(x) - f(q) - f'(q)(x - q)\} dx \\ &= \int_q^p (x - q)^2 dx = \frac{1}{3}(p - q)^3 \\ &= \frac{1}{3}(4a - 2a)^3 = \frac{8}{3}a^3 \end{aligned}$$

接線 OQ と直線 $x = p$ の交点を R とすると
 $P(4a, 12a^2), R(4a, 8a^2)$ より

$$\begin{aligned} S &= \triangle OPR - S_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4a(12a^2 - 8a^2) - \frac{8}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3 \end{aligned}$$

- (3) $S = \frac{2}{3}$ を (2) の結果に代入すると $\frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3}$ これを解いて $a = \frac{1}{2}$



⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

別解 直線 $x = 2a$ と直線 OP の交点を Q' とすると $Q(2a, 4a^2)$, $Q'(2a, 6a^2)$

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} p \cdot QQ' = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 2a^2 = 4a^3$$

C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は, $1/6$ 公式により

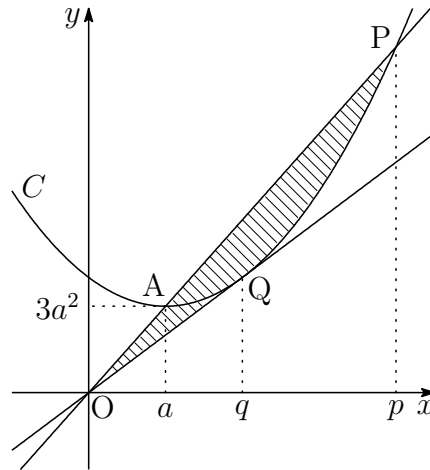
$$\frac{1}{6}(p - q)^3 = \frac{1}{6}(4a - 2a)^3 = \frac{4}{3}a^3$$

$$\text{よって, 求める面積は } S = 4a^2 + \frac{4}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3$$

解説 $xy' - y = x(2x - 2a) - (x^2 - 2ax + 4a^2)$
 $= (x - 2a)^2 + 4a(x - 2a)$

求める面積 S は (ガウス・グリーンの定理の系)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{2a}^{4a} (xy' - y) dx = \frac{1}{2} \int_{2a}^{4a} \{(x - 2a)^2 + 4a(x - 2a)\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x - 2a)^3 + 2a(x - 2a)^2 \right]_{2a}^{4a} = \frac{16}{3}a^3 \end{aligned}$$



補足 解説の公式は, ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt$$

の変数 t を x に変更したものである. このとき, 定義域は動径の偏角が正の向きになるようにとる. 例えば, C と線分 OQ, OA で囲まれた部分の面積 S' を求める場合は次のようになる.

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} \int_{2a}^a (xy' - y) dx = \frac{1}{2} \int_{2a}^a \{(x - 2a)^2 + 4a(x - 2a)\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x - 2a)^3 + 2a(x - 2a)^2 \right]_{2a}^a = \frac{5}{6}a^3 \end{aligned}$$



2 (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } \tan 15^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$a = d \tan 75^\circ = d(2 + \sqrt{3}), \quad b = d \tan 15^\circ = d(2 - \sqrt{3})$$

これらを $AB = a - b = 6$ に代入すると

$$2\sqrt{3}d = 6 \quad \text{ゆえに} \quad d = \sqrt{3}$$

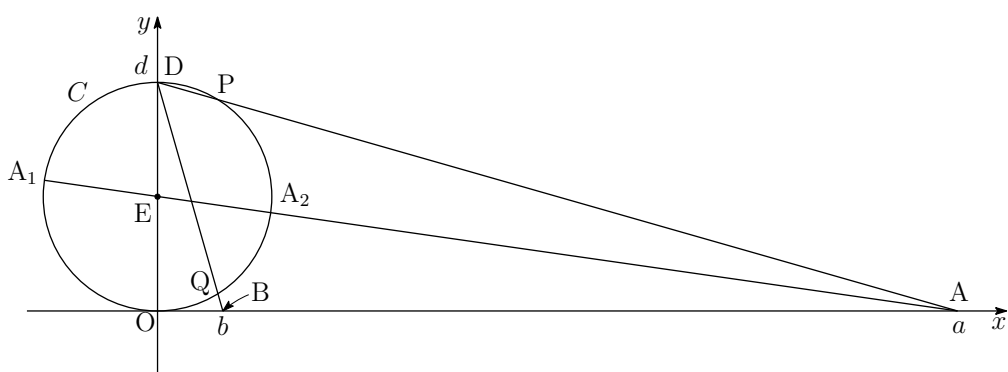
$$\text{よって } a = \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 3, \quad b = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$$

(3) C の中心を E とし、その半径を $r = OE$ とし、直線 AE と C の2つの交点を A_1, A_2 とすると、方べきの定理により

$$\begin{aligned}AP \cdot AD &= AA_1 \cdot AA_2 = (AE + r)(AE - r) = AE^2 - r^2 \\ &= AE^2 - OE^2 = AO^2\end{aligned}$$

同様に、直線 BE と C の2つの交点を B_1, B_2 とすると

$$\begin{aligned}BQ \cdot BD &= BB_1 \cdot BB_2 = (BE + r)(BE - r) = BE^2 - r^2 \\ &= BE^2 - OE^2 = BO^2\end{aligned}$$



(4) (3) の結論の2式の辺々を掛けると $AP \cdot AD \times BQ \cdot BD = AO^2 \cdot BO^2$

$$\text{したがって } AP \cdot BQ = \frac{AO^2 \cdot BO^2}{AD \cdot BD} = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{(a^2 + d^2)(b^2 + d^2)}}$$

$$d^2 = 3, \quad a + b = 4\sqrt{3}, \quad ab = 3 \text{ より, } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 42$$

$$AP \cdot BQ = \frac{(ab)^2}{\sqrt{(ab)^2 + (a^2 + b^2)d^2 + d^4}} = \frac{3^2}{\sqrt{3^2 + 42 \cdot 3 + 3^2}} = \frac{3}{4}$$

■

3 (1) $x \geq 2 \log_t x$ より $x + 1 \geq 2 \log_t x + 1 = 2 \log_t \sqrt{t}x \quad \dots \textcircled{1}$

$x > \frac{1}{\sqrt{t}-1}$ より ($t > 1$), $(\sqrt{t}-1)x > 1$ であるから

$$\sqrt{t}x - (x+1) = (\sqrt{t}-1)x - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{t}x > x+1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から $x+1 > 2 \log_t(x+1)$

(2) (1) の結論に $t = 2$ を代入すると, $x > \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ のとき

$$x \geq 2 \log_2 x \implies x+1 > 2 \log_2(x+1)$$

これから, $x > \sqrt{2}+1$ のとき $2^x \geq x^2 \implies 2^{x+1} > (x+1)^2 \quad \dots (*)$

(*) より, $2^N \geq N^2$ ($N \geq 3$) を満たす自然数 N が存在するならば, $n > N$ であるすべての自然数 n について, 次が成立する.

$$2^n > n^2$$

$n \leq 2 \log_2 n$ を変形すると $2^n \leq n^2 \quad \dots (**)$

したがって, (**) を満たす n は $n \leq N$ に限られる.

$n = 1, 2, 3, 4$ について, 2^n と n^2 の値を調べると, 下の表から $N = 4$

n	1	2	3	4
2^n	2	4	8	16
n^2	1	4	9	16

よって, (**) を満たす n は $n = 2, 3, 4$



4 (1) $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ より (a_n, b_n は整数) $a_1 = 1, b_1 = 1$

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^n \\ &= (1 + \sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\ &= a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{したがって } (*) \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

$(a_1, b_1) = (1, 1)$ より, 順次, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} (a_2, b_2) &= (3, 2), \quad (a_3, b_3) = (7, 5), \quad (a_4, b_4) = (17, 12), \\ (a_5, b_5) &= (41, 29), \quad (a_6, b_6) = (99, 70) \end{aligned}$$

$$\text{よって } b_4 = 12, \quad b_5 = 29, \quad b_6 = 70$$

$$(2) \quad (A) \quad (1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

[1] $n = 1$ のとき, $a_1 = 1, b_1 = 1$ となり, (A) が成立する.

[2] $n = k$ のとき,

$$(1 - \sqrt{2})^k = a_k - b_k\sqrt{2}$$

が成立すると仮定すると, $(*)$ に注意して

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{2})^{k+1} &= (1 - \sqrt{2})(a_k - b_k\sqrt{2}) \\ &= a_k + 2b_k - (a_k + b_k)\sqrt{2} = a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, (A) は成立する.

(3) $a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n, a_n - b_n\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n$ の辺々の掛けると

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$$

$(*)$ の第2式より $a_n = b_{n+1} - b_n$ これを $(*)$ の第1式に代入すると

$$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n + 2b_n \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+2} - 2b_{n+1} = b_n$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } a_n^2 - 2b_n^2 &= (b_{n+1} - b_n)^2 - 2b_n^2 \\ &= b_{n+1}(b_{n+1} - 2b_n) - b_n^2 \\ &= b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって } b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2 = (-1)^n$$

(4) (3) の結果に $n = 5$ を代入すると $b_6 b_4 - b_5^2 = (-1)^5$

$$12b_6 - 29b_5 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b_6 \cdot (-12) - b_5 \cdot (-29) = 1$$

$b_6 \cdot 29 - b_5 \cdot 70 = 0$ を上の第 2 式の辺々に加えると

$$b_6 \cdot 17 - b_5 \cdot 41 = 1 \quad \text{よって} \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{17}, \mathbf{41})$$

別解 1 (ユークリッドの互除法)

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 2 \overline{) 5} \quad 12 \overline{) 29} \quad 70 \\ \underline{4} \quad \underline{10} \quad \underline{24} \quad \underline{58} \\ 1 \quad 2 \quad 5 \quad 12 \end{array}$$

$b_6 = 70$, $b_5 = 29$ であり, $p = 12$, $q = 5$, $r = 2$ とおくと

$$b_6 = 2b_5 + p, \quad b_5 = 2p + q, \quad p = 2q + r, \quad q = 2r + 1$$

$1 = q - 2r$ に $r = p - 2q$, $q = b_5 - 2p$, $p = b_6 - 2b_5$ を順次代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= q - 2r = q - 2(p - 2q) \\ &= -2p + 5q = -2p + 5(b_5 - 2p) \\ &= -12p + 5b_5 = -12(b_6 - 2b_5) + 5b_5 \\ &= 29b_5 - 12b_6 \end{aligned}$$

したがって $b_6 \cdot (-12) - b_5 \cdot (-29) = 1$

$b_6 \cdot 29 - b_5 \cdot 70 = 0$ を上式の辺々に加えると

$$b_6 \cdot 17 - b_5 \cdot 41 = 1 \quad \text{よって} \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{17}, \mathbf{41})$$

別解 2 (合同式) $70p - 29q = 1$ について, $70 \equiv 12$, $29 \equiv 0 \pmod{29}$ より

$$\begin{aligned} 70p - 29q &\equiv 1 &\iff 12p &\equiv 1 &\iff 36p &\equiv 7p &\equiv 3 \pmod{29} \\ &&\iff 28p &= -p &\equiv 12 &\iff p &\equiv 17 \pmod{29} \end{aligned}$$

$p = 17$ を $70p - 29q = 1$ に代入することにより $q = 41$

よって $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{17}, \mathbf{41})$ ■

第 3 章 東京大学

出題分野 (2011-2024) 100 分

◀ 東京大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	数と式													
	2次関数		1											
	図形と計量													
	データの分析													
II	式と証明													
	複素数と方程式												1	
	図形と方程式	4	2	2・3		3	1		1	4		3	1	
	三角関数									3			4	3
	指数関数と対数関数													2
	微分法と積分法	1	4	1	1・3	1・2	3	1	3・4	1・2	1	1	2	2
A	場合の数と確率		3	4			3		3	2	2	4	3	4
	整数の性質	2			4	1	4	4			4	3		
	図形の性質													
B	平面上のベクトル						2		2					
	空間のベクトル													
	数列	3			2	4	2		2		4			
	確率分布と統計													

数字は問題番号

3.11 2011 年(100 分)

出題分野 1 2 3 4

1 x の 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が, 3 つの条件

$$f(1) = 1, \quad f(-1) = -1, \quad \int_{-1}^1 (bx^2 + cx + d) dx = 1$$

を全て満たしているとする. このような $f(x)$ の中で定積分

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{f''(x)\}^2 dx$$

を最小にするものを求め, そのときの I の値を求めよ. ただし, $f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す.

2 実数 x の小数部分を, $0 \leq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし, これを記号 $\langle x \rangle$ で表す. 実数 a に対して, 無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように順次定める.

$$(i) \quad a_1 = \langle a \rangle$$

$$(ii) \quad \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ.

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ.

- 3 p, q を 2 つの正の整数とする. 整数 a, b, c で条件

$$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p, \quad b \leq c \leq a$$

を満たすものを考え, このような a, b, c を $[a, b; c]$ の形に並べたものを (p, q) パターンと呼ぶ. 各 (p, q) パターン $[a, b; c]$ に対して

$$w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$$

とおく.

- (1) (p, q) パターンのうち, $w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ.
また, $w([a, b; c]) = p$ となる (p, q) パターンの個数を求めよ.

以下 $p = q$ の場合を考える.

- (2) s を p 以下の整数とする. (p, p) パターンで $w[a, b; c] = -p + s$ となるものの個数を求めよ.

- 4 座標平面上の 1 点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる. 放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $Q(\alpha, \alpha^2), R(\beta, \beta^2)$ を, 3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき, $\triangle PQR$ の重心 $G(X, Y)$ の軌跡を求めよ.

解答例

1 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ より

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ -a + b - c + d = -1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 (bx^2 + cx + d) dx = 1 \text{ より } \quad \frac{2}{3}b + 2d = 1$$

$$\text{これと } (*) \text{ の第2式を連立すると } \quad b = -\frac{3}{4}, \quad d = \frac{3}{4}$$

$$f(x) \text{ から } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$b = -\frac{3}{4} \text{ より, } f''(x) = 3 \left(2ax - \frac{1}{2} \right) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{f''(x)\}^2 dx = 9 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(2ax - \frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= 9 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(4a^2x^2 - 2ax + \frac{1}{4} \right) dx \\ &= 9 \left[\frac{4a^2}{3}x^3 - ax^2 + \frac{x}{4} \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = 9 \left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a + \frac{3}{8} \right) \\ &= \frac{27}{2} \left(a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} \right) = \frac{27}{2} \left\{ \left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{16} \right\} \\ &= \frac{27}{2} \left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{81}{32} \end{aligned}$$

したがって, $a = -\frac{1}{4}$ のとき, I は最小値 $\frac{81}{32}$ をとる.

(*) の第1式より, $c = \frac{5}{4}$ であるから, このとき

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$$

■

2 (1) $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \text{ より } \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2}+1 \rangle = \sqrt{2}-1$$

よって $a_n = \sqrt{2} - 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$

(2) $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - m = a$ (m は自然数) であるから

$$a^2 + ma - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$$

$a \geq 0$ であるから $a = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \quad \dots (*)$

$a \geq \frac{1}{3}$ であるから, $\frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \geq \frac{1}{3}$ より

$$\sqrt{m^2 + 4} \geq m + \frac{2}{3} \quad \text{両辺を平方して整理すると} \quad m \leq \frac{8}{3}$$

m は自然数であるから $m = 1, 2 \quad (*)$ より $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \sqrt{2}-1$ ■

3 (1) $w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$ より, $w([a, b; c]) = -q$ となるとき

$$p - q - (a + b) = -q \quad \text{ゆえに} \quad p = a + b$$

$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ より, 上式を満たすのは $a = p, b = 0$

$b \leq c \leq a$ より, $0 \leq c \leq p$ であるから, 求める個数は $p + 1$ (個)

$w([a, b; c]) = p$ となるとき

$$p - q - (a + b) = p \quad \text{ゆえに} \quad q = -a - b$$

$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ より, 上式を満たすのは $a = 0, b = -q$

$b \leq c \leq a$ より, $-q \leq c \leq 0$ であるから, 求める個数は $q + 1$ (個)

(2) $p = q$ より, $w([a, b; c]) = -(a + b)$

$w([a, b; c]) = -p + s$ となるとき

$$-(a + b) = -p + s \quad \text{ゆえに} \quad b = -a + p - s$$

これを $-p \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ に代入して

$$-p \leq -a + p - s \leq 0 \leq a \leq p \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} 0 \leq a \leq p \\ p - s \leq a \leq 2p - s \end{cases}$$

ここで, $m = \max(0, p - s)$, $M = \min(p, 2p - s)$ とおくと

$$m = \frac{p - s + |p - s|}{2}, \quad M = \frac{3p - s - |p - s|}{2}$$

$s \leq p$ であるから, $|p - s| = p - s$ より

$$m = p - s, \quad M = p$$

求める個数を $f(s)$ とする.

(i) $m > M$ のとき $p - s > p$

すなわち $s < 0$ のとき $f(s) = 0$

(ii) $m \leq M$ のとき $p - s \leq p$

すなわち, $0 \leq s \leq p$ のとき

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{a=m}^M (a - b + 1) = \sum_{a=p-s}^p \{a - (-a + p - s) + 1\} \\ &= \sum_{a=p-s}^p (2a - p + s + 1) = 2 \sum_{a=p-s}^p a + (-p + s + 1) \sum_{a=p-s}^p 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \{(p - s) + p\} \{p - (p - s) + 1\} \\ &\quad + (-p + s + 1) \{p - (p - s) + 1\} \\ &= (2p - s)(s + 1) + (-p + s + 1)(s + 1) \\ &= (p + 1)(s + 1) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad f(s) = \begin{cases} 0 & (s < 0) \\ (p + 1)(s + 1) & (0 \leq s \leq p) \end{cases}$$



4 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ とする $\triangle PQR$ の重心が $G(X, Y)$ であるから

$$3X = \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \quad 3Y = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 3X - \frac{1}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 3Y - \frac{1}{4} \end{cases}$$

条件により, $PQ^2 = PR^2$ であるから

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \\ \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= 0 \\ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$Q \neq R$ より, $\alpha - \beta \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 1 + (\alpha + \beta) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ (\alpha + \beta) \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{2}\right) &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{1}{2} \quad \cdots (**) \end{aligned}$$

(*) より, α, β は 2 次方程式の解で, これらは異なる 2 つの実数であるから

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2}{2} > \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$$

これを (**) に代入すると $\frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$

ここで, $t = \alpha + \beta$ において整理すると

$$\frac{t^3 + t - 2}{t} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{(t-1)(t^2 + t + 2)}{t} < 0$$

$t^2 + t + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ に注意して, これを解くと $0 < t < 1$

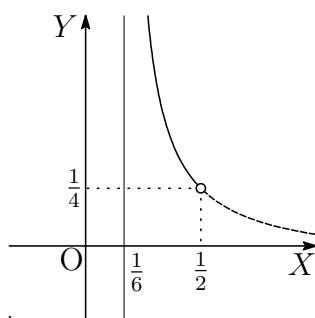
$0 < \alpha + \beta < 1$ であるから, (*) の第 1 式より $\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}$

(*) を (**) に代入すると
$$3Y - \frac{1}{4} = \frac{1}{3X - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

したがって、 $G(X, Y)$ の軌跡の方程式は

$$Y = \frac{1}{9\left(X - \frac{1}{6}\right)} - \frac{1}{12} \quad \left(\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}\right)$$

よって、 $G(X, Y)$ の軌跡は、下の図のようになる。



注意 α と β を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$$

実係数の 2 次方程式の解が α, β であるとき

$$\text{異なる 2 つの実数解をもつ} \iff (\alpha - \beta)^2 > 0$$



3.12 2012 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

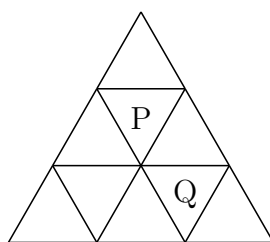
- 1 座標平面上の点 (x, y) が次の方程式を満たす.

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき, x のとりうる最大の値を求めよ.

- 2 実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし, 座標平面上の 4 点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(t, 0)$ を考える. また線分 AB 上の点 D を $\angle ACO = \angle BCD$ となるように定める. t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ.

- 3 図のように, 正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り, 部屋 P , Q を定める. 1 つの球が部屋 P を出発し, 1 秒ごとに, そのままその部屋にとどまることなく, 辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する. 球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ.



- 4 座標平面上の放物線 C を $y = x^2 + 1$ で定める. s, t は実数とし $t < 0$ を満たすとする. 点 (s, t) から放物線 C へ引いた接線を l_1, l_2 とする.
- (1) l_1, l_2 の方程式を求めよ.
 - (2) a を正の実数とする. 放物線 C と直線 l_1, l_2 で囲まれる領域の面積が a となる (s, t) を全て求めよ.

解答例

- 1 与えられた方程式を y について整理すると

$$3y^2 + (4x + 5)y + (2x^2 + 4x - 4) = 0$$

y は実数解をもつから、係数について

$$(4x + 5)^2 - 4 \cdot 3(2x^2 + 4x - 4) \geq 0$$

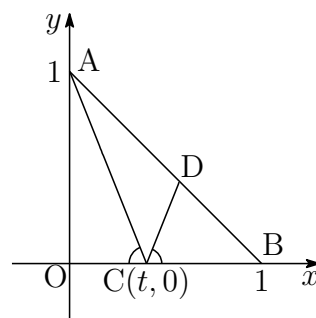
$$\text{ゆえに } 8x^2 + 8x - 73 \leq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \frac{-2 - 5\sqrt{6}}{4} \leq x \leq \frac{-2 + 5\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{よって、求める } x \text{ の最大値は } \frac{-2 + 5\sqrt{6}}{4}$$

- 2 2点 $A(0, 1)$, $C(t, 0)$ を通る直線の傾きは $-\frac{1}{t}$
直線 CD は、傾き $\frac{1}{t}$ で点 $C(t, 0)$ を通るから

$$y = \frac{1}{t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{t}x - 1$$

D はこれと直線 $AB: y = -x + 1$ の交点であるから



$$D\left(\frac{2t}{1+t}, \frac{1-t}{1+t}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (t, 0) - (0, 1) = (t, -1),$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{2t}{1+t}, \frac{1-t}{1+t}\right) - (0, 1) = \frac{2t}{1+t}(1, -1)$$

三角形 ACD の面積を S とすると、 $0 < t < 1$ に注意して

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t}(1-t) = 2 - t - \frac{2}{1+t} = 3 - \left(1+t + \frac{2}{1+t}\right)$$

$1+t > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1+t + \frac{2}{1+t} \geq 2\sqrt{(1+t) \cdot \frac{2}{1+t}} = 2\sqrt{2}$$

上式で等号が成立するのは

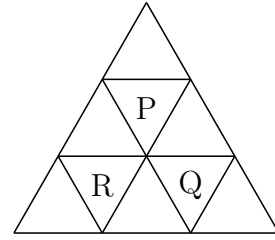
$$1+t = \frac{2}{1+t} \quad \text{ゆえに} \quad t = \sqrt{2} - 1$$

したがって $S \leq 3 - 2\sqrt{2}$

よって、 $\triangle ACD$ の面積は $t = \sqrt{2} - 1$ のとき、最大値 $3 - 2\sqrt{2}$ をとる。

- 3 右の図のように部屋 R をとると, n 秒後の球は, n が偶数のとき, 部屋 P, Q, R にあり, n が奇数のとき, P, Q, R 以外の部屋にある.
したがって, n が奇数のとき, 部屋 Q にある確率は

0



n が偶数のとき, $n = 2k$ 秒後に, P, Q, R にある確率を p_k , q_k , r_k とすると

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k \times \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + q_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + r_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ q_{k+1} &= q_k \times \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + r_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + p_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ r_{k+1} &= r_k \times \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + p_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + q_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって, k を 0 以上の整数とすると, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_0 = 1, \quad q_0 = r_0 = 0$$

$$p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{6}q_k + \frac{1}{6}r_k \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$q_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{2}{3}q_k + \frac{1}{6}r_k \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$r_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{1}{6}q_k + \frac{2}{3}r_k \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ の辺々を加えると

$$p_{k+1} + q_{k+1} + r_{k+1} = p_k + q_k + r_k \quad \text{ゆえに} \quad p_k + q_k + r_k = 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } p_{k+1} - q_{k+1} = \frac{1}{2}(p_k - q_k) \quad \text{ゆえに} \quad p_k - q_k = \frac{1}{2^k} \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ より } q_{k+1} - r_{k+1} = \frac{1}{2}(q_k - r_k) \quad \text{ゆえに} \quad q_k - r_k = 0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ より } q_k = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)$$

よって, 求める確率は n が奇数のとき 0,

$$n \text{ が偶数のとき } \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \right)$$



4 (1) $y = x^2 + 1$ を微分すると $y' = 2x$

C 上の点 $(\alpha, \alpha^2 + 1)$ における接線を l_1 とすると

$$y - (\alpha^2 + 1) = 2\alpha(x - \alpha)$$

すなわち $l_1: y = 2\alpha x - \alpha^2 + 1$

C 上の点 $(\beta, \beta^2 + 1)$ における接線を l_2 とすると

$$l_2: y = 2\beta x - \beta^2 + 1$$

l_1 と l_2 の交点が (s, t) であるから

$$s = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad t = \alpha\beta + 1 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha + \beta = 2s, \quad \alpha\beta = t - 1$$

α, β を解とする 2 次方程式は $\lambda^2 - 2s\lambda + t - 1 = 0 \quad \cdots (*)$

これを解いて $\lambda = s \pm \sqrt{s^2 - t + 1}$

$\alpha < \beta$ とすると $\alpha = s - \sqrt{s^2 - t + 1}, \quad \beta = s + \sqrt{s^2 - t + 1}$

l_1 は、点 (s, t) を通り、傾き 2α の直線であるから

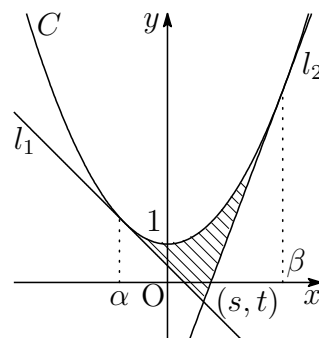
$$y = 2(s - \sqrt{s^2 - t + 1})(x - s) + t$$

l_2 は、点 (s, t) を通り、傾き 2β の直線であるから

$$y = 2(s + \sqrt{s^2 - t + 1})(x - s) + t$$

(2) C と l_1, l_2 で囲まれる領域の面積が a であるから

$$\begin{aligned} a &= \int_{\alpha}^s \{(x^2 + 1) - (2\alpha x - \alpha^2 + 1)\} dx \\ &\quad + \int_s^{\beta} \{(x^2 + 1) - (2\beta x - \beta^2 + 1)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^s (x - \alpha)^2 dx + \int_s^{\beta} (x - \beta)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^s + \left[\frac{1}{3}(x - \beta)^3 \right]_s^{\beta} = \frac{1}{3}(s - \alpha)^3 + \frac{1}{3}(\beta - s)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha \right)^3 + \frac{1}{3} \left(\beta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{12}(2\sqrt{s^2 - t + 1})^3 = \frac{2}{3}(s^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots (***) \end{aligned}$$



$t < 0$ であるから, (**) より $a > \frac{2}{3}$ このとき $(s^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{3a}{2}$

したがって $t = s^2 + 1 - \left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ このとき $s^2 + 1 - \left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < 0$

これを解いて $-\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1} < s < \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}$

よって, $a > \frac{2}{3}$ のとき, (s, t) は

$$t = s^2 + 1 - \left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad -\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1} < s < \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}$$

$0 < a \leq \frac{2}{3}$ のとき, (s, t) は存在しない.

補足 $s = \frac{\alpha + \beta}{2}$, C と l_1, l_2 との接点をそれぞれ P, Q とすると, C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は $2a$ となる¹. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf [4] を参照.

3.13 2013年(100分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 関数 $y = x(x-1)(x-3)$ のグラフを C ，原点 O を通る傾き t の直線を ℓ とし， C と ℓ が O 以外に共有点をもつとする． C と ℓ の共有点を O, P, Q とし， $|\overrightarrow{OP}|$ と $|\overrightarrow{OQ}|$ の積を $g(t)$ とおく．ただし，それらの共有点の1つが接点である場合は， O, P, Q のうちの2つが一致して，その接点であるとする．関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

- 2 座標平面上の3点

$$P(0, -\sqrt{2}), \quad Q(0, \sqrt{2}), \quad A(a, \sqrt{a^2+1}) \quad (0 \leq a \leq 1)$$

を考える．

- (1) 2つの線分の長さの差 $PA - AQ$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．
- (2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする．点 B から直線 $y = 2$ へ下ろした垂線と直線 $y = 2$ との交点を C とする．このとき，線分の長さの和

$$PA + AB + BC$$

は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

- 3 a, b を実数の定数とする．実数 x, y が

$$x^2 + y^2 \leq 25, \quad 2x + y \leq 5$$

をともに満たすとき， $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$ の最小値を求めよ．

4 A, B の 2 人がいる. 投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり, 最初は A がそのコインを持っている. 次の操作を繰り返す.

- (i) A がコインを持っているときは, コインを投げ, 表が出れば A に 1 点を与え, コインは A がそのまま持つ. 裏が出れば, 両者に点を与えず, A はコインを B に渡す.
- (ii) B がコインを持っているときは, コインを投げ, 表が出れば B に 1 点を与え, コインは B がそのまま持つ. 裏が出れば, 両者に点を与えず, B はコインを A に渡す.

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で, 2 点を獲得した方の勝利とする. たとえば, コインが表, 裏, 表, 表と出た場合, この時点で A は 1 点, B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる.

A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ.

解答例

1 $C: y = x(x-1)(x-3)$ と $\ell: y = tx$ から y を消去すると

$$x(x-1)(x-3) = tx \quad \text{ゆえに} \quad x\{(x-1)(x-3) - t\} = 0$$

C と ℓ の原点以外の交点の x 座標は、方程式

$$x^2 - 4x + 3 - t = 0 \quad \cdots (*)$$

の実数解であるから

$$D/4 = (-2)^2 - (3-t) \geq 0 \quad \text{これを解いて} \quad t \geq -1$$

このとき、方程式 $(*)$ の解を α, β とすると、解と係数の関係により

$$\alpha\beta = 3 - t$$

P, Q は ℓ 上の点であるから、 $P(\alpha, t\alpha), Q(\beta, t\beta)$ とすると

$$|\overrightarrow{OP}| = |\alpha|\sqrt{1+t^2}, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\beta|\sqrt{1+t^2}$$

$$\text{ゆえに} \quad g(t) = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| = |\alpha\beta|(1+t^2) = |3-t|(1+t^2)$$

$$\text{したがって} \quad g(t) = \begin{cases} (3-t)(1+t^2) & (-1 \leq t < 3) \\ (t-3)(1+t^2) & (3 \leq t) \end{cases}$$

$$-1 \leq t < 3 \text{ のとき} \quad g'(t) = -3t^2 + 6t - 1$$

$$\text{このとき、} g'(t) = 0 \text{ の解を } \alpha = \frac{3-\sqrt{6}}{3}, \beta = \frac{3+\sqrt{6}}{3} \text{ とおくと}$$

$$g(t) = -\frac{1}{3}g'(t)(-t+1) + \frac{4}{3}t + \frac{8}{3}$$

$$\text{ゆえに} \quad g(\alpha) = \frac{4}{3}\alpha + \frac{8}{3} = 4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}, \quad g(\beta) = \frac{4}{3}\beta + \frac{8}{3} = 4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

$$3 \leq t \text{ のとき} \quad g'(t) = 3t^2 - 6t + 1 = 3t(t-2) + 1 > 0$$

t	-1	...	α	...	β	...	3	...
$g'(t)$		-	0	+	0	-		+
$g(t)$	8	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$\text{よって} \quad \text{極小値 } g\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) = 4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}, \quad \text{極小値 } g(3) = 0,$$

$$\text{極大値 } g\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right) = 4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}$$



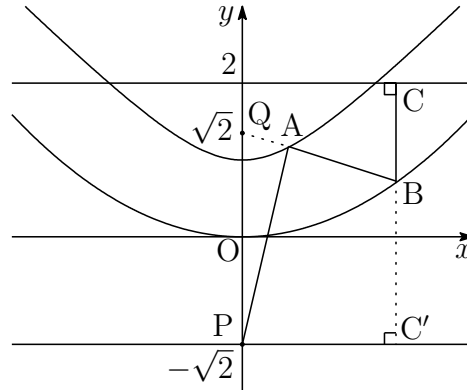
2 (1) $P(0, -\sqrt{2})$, $Q(0, \sqrt{2})$, $A(a, \sqrt{a^2+1})$ より

$$\begin{aligned} PA^2 &= a^2 + (\sqrt{a^2+1} + \sqrt{2})^2 = 2a^2 + 3 + 2\sqrt{2(a^2+1)} \\ &= (2a^2 + 2) + 1 + 2\sqrt{(2a^2+2) \cdot 1} = (\sqrt{2a^2+2} + 1)^2, \\ AQ^2 &= a^2 + (\sqrt{a^2+1} - \sqrt{2})^2 = 2a^2 + 3 - 2\sqrt{2(a^2+1)} \\ &= (2a^2 + 2) + 1 - 2\sqrt{(2a^2+2) \cdot 1} = (\sqrt{2a^2+2} - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } PA = \sqrt{2a^2+2} + 1, \quad AQ = \sqrt{2a^2+2} - 1$$

$$PA - AQ = (\sqrt{2a^2+2} + 1) - (\sqrt{2a^2+2} - 1) = 2$$

(2) $B\left(t, \frac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)$ とする ($0 \leq t \leq 2\sqrt{2}$).



B から直線 $y = -\sqrt{2}$ へ直線 BC' を下ろすと

$$QB^2 = t^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2 - 2\right)^2 = \frac{1}{32}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2 + \sqrt{2}\right)^2$$

$$\text{ゆえに } QB = \frac{\sqrt{2}}{8}t^2 + \sqrt{2} = BC'$$

(1) の結果および上式により

$$\begin{aligned} PA + AB + BC &= (PA - AQ) + (QA + AB) + BC \\ &= 2 + QB + BC \\ &= 2 + (QB - BC') + (BC' + BC) \\ &= 2 + 0 + CC' = 2 + (2 + \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

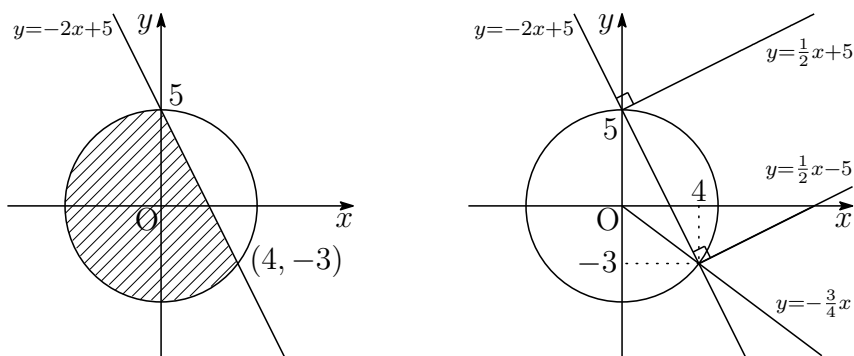
補足 A は双曲線 $x^2 - y^2 = -1$ 上にあり, P, Q はその焦点であるから, $|PA - AQ|$ は双曲線の 2 頂点 $(0, 1)$, $(0, -1)$ 間の距離に等しい.

また, Q は放物線 $x^2 = 4\sqrt{2}y$ の焦点で, 直線 $x = -\sqrt{2}$ はその準線であるから, $QB = BC'$ が成り立つ². ■

² http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf [3] を参照.

3 連立不等式
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$$

の表す領域は下の図の斜線部分で境界線を含む.



座標平面上に2点 $P(x, y)$, $A(a, b)$ をとると

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 - 2ax - 2by \\ &= (x - a)^2 + (y - b)^2 - (a^2 + b^2) = AP^2 - OA^2 \end{aligned}$$

(i) $a^2 + b^2 \leq 25$, $2a + b \leq 5$ のとき, $P = A$ より最小値 $-a^2 - b^2$

(ii) $a^2 + b^2 \geq 25$ かつ $\left(a \leq 0 \text{ または } b \leq -\frac{3}{4}a\right)$ のとき, $AP = OA - 5$ より

$$(OA - 5)^2 - OA^2 = 25 - 10OA \quad \text{ゆえに} \quad \text{最小値 } 25 - 10\sqrt{a^2 + b^2}$$

(iii) $a \geq 0$, $b \geq \frac{1}{2}a + 5$ のとき, $P(0, 5)$ より

$$AP^2 - OA^2 = a^2 + (b - 5)^2 - (a^2 + b^2) \quad \text{ゆえに} \quad \text{最小値 } 25 - 10b$$

(iv) $b \geq -\frac{3}{4}a$, $b \leq \frac{1}{2}a - 5$ のとき, $P(4, -3)$ より

$$AP^2 - OA^2 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2 - (a^2 + b^2)$$

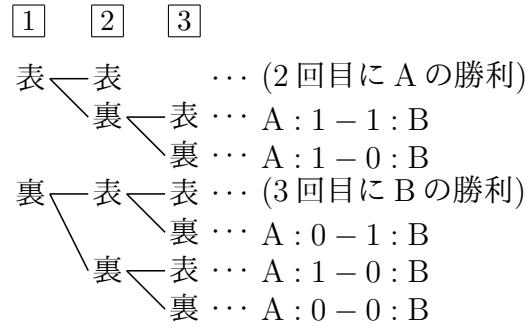
ゆえに 最小値 $25 - 8a + 6b$

(v) $b \geq -2a + 5$, $\frac{1}{2}a - 5 \leq b \leq \frac{1}{2}a + 5$ のとき, $AP = \frac{|2a + b - 5|}{\sqrt{5}}$ より

$$AP^2 - OA^2 = \frac{(2a + b - 5)^2}{5} - (a^2 + b^2)$$

ゆえに 最小値 $\frac{1}{5}(25 + 4ab - 20a - 10b - a^2 - 4b^2)$ ■

4 3 回コインを投げ終えたとき、A と B の勝敗は次のようになる。



したがって $p(1) = 0, p(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, p(3) = 0 \dots (*)$

コインをちょうど n 回投げ終え ($n \geq 4$), A が勝利するとき、A と B の得点の推移は、次の (i)~(iii) である。

(i) n 回目よりも前に A だけが得点するのは奇数回目で、 n は偶数。

A B … A B A A B … A B A
裏裏 … 裏裏 表 裏裏 … 裏裏 表
} 偶数個 } 偶数個

1 から $n - 1$ の整数の中に奇数は $\frac{n}{2}$ 個で、この確率は $\frac{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^{n+1}}$

(ii) n 回目よりも前に A, B の順に得点するのは奇数回目で、 n は奇数。

A B … A B A A B … A B B A … B A
裏裏 … 裏裏 表 裏裏 … 裏 表 裏裏 … 裏裏 表
} 偶数個 } 奇数個 } 奇数個

1 から $n - 1$ の整数の中に奇数は $\frac{n-1}{2}$ 個で、この確率は

$${}_{\frac{n-1}{2}}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}$$

(iii) n 回目よりも前に B, A の順に得点するのは偶数回目で、 n は奇数。

A B … A B B A … B A A B … A B A
裏裏 … 裏 表 裏裏 … 裏 表 裏裏 … 裏裏 表
} 奇数個 } 奇数個 } 偶数個

1 から $n - 1$ の整数の中に偶数は $\frac{n-1}{2}$ 個で、この確率は

$${}_{\frac{n-1}{2}}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}$$

n が偶数のとき, (i) より $p(n) = \frac{n}{2^{n+1}} \quad (n \geq 4)$

n が奇数のとき, (ii), (iii) より

$$p(n) = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}} + \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}} = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} \quad (n \geq 5)$$

(*) に注意すると, 上の2式は $n = 1, 2, 3$ のときも成立するから

$$p(n) = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n \text{ が奇数}) \\ \frac{n}{2^{n+1}} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$



3.14 2014 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

1 以下の問いに答えよ.

(1) t を実数の定数とする. 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める. このとき, 関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ.

(2) (1) の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする. t が $t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき, $g(t)$ の最小値を求めよ.

2 a を自然数 (すなわち 1 以上の整数) の定数とする.

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して, 次の操作 $(*)$ を考える.

$(*)$ 袋 U から球を 1 個取り出し,

(i) 取り出した球が白球のときは, 袋 U の中身が白球 a 個, 赤球 1 個となるようにする.

(ii) 取り出した球が赤球のときは, その球を袋 U へ戻すことなく, 袋 U の中身はそのままにする.

はじめに袋 U の中に, 白球が $a+2$ 個, 赤球が 1 個入っているとする. この袋 U に対して操作 $(*)$ を繰り返し行う.

たとえば, 1 回目の操作で白球が出たとすると, 袋 U の中身は白球 a 個, 赤球 1 個となり, さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると, 袋 U の中身は白球 a 個のみとなる.

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする. ただし, 袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする.

(1) p_1, p_2 を求めよ.

(2) $n \geq 3$ に対して p_n を求めよ.

3 座標平面の原点を O で表す.

線分 $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上の点 P と, 線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-3 \leq x \leq 0$) 上の点 Q が, 線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く. このとき, 線分 PQ の通過する領域を D とする.

- (1) s を $-3 \leq s \leq 2$ をみたす実数とすると, 点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ.
- (2) D を図示せよ.

4 r を 0 以上の整数とし, 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また, 素数 p を 1 つとり, a_n を p で割った余りを b_n とする. ただし, 0 を p で割った余りは 0 とする.

- (1) 自然数 n に対し, b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ.
- (2) $r = 2, p = 17$ の場合に, 10 以下のすべての自然数 n に対して, b_n を求めよ.
- (3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して,

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする. このとき, $b_n = b_m$ が成り立つことを示せ.

解答例

1 (1) $f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$
 $= -2(x - 2t + 3)^2 + t^3 - 9t^2 + 15t$

よって, 最大値は $t^3 - 9t^2 + 15t$

(2) (1) の結果から $g(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$

ゆえに $g'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t - 1)(t - 5)$

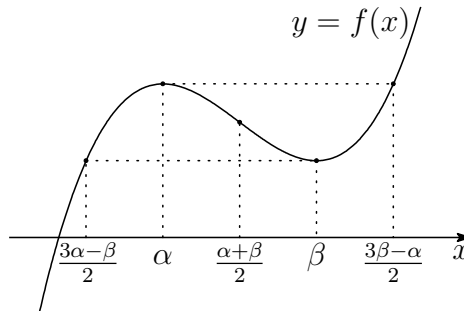
t	...	1	...	5	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	$\nearrow$	極大 7	$\searrow$	極小 -25	$\nearrow$

$g(-1) = -25$, $-1 < -\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ より, $g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > -25$

よって, 求める最小値は $g(5) = -25$

補足 極値をとる 2 点 $(1, 7)$, $(5, -25)$ の中点 $(3, -18)$ に関して, グラフは対称である. また, $g(-1) = g(5)$, $g(1) = g(7)$.

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$) について, $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解 α , β をもつとき ($\alpha < \beta$), $y = f(x)$ のグラフは次のようになる.



とくに, 数列 $\frac{3\alpha - \beta}{2}$, α , $\frac{\alpha + \beta}{2}$, β , $\frac{3\beta - \alpha}{2}$ は, 等差数列をなす. ■

- 2** (1) 1回目の袋Uの中には白球が $a+2$ 個, 赤球が1個入っているから

$$p_1 = \frac{1}{(a+2)+1} = \frac{1}{a+3}$$

1回目に赤球が出ると, 2回目に球を取り出すとき, 袋Uの中には赤球はない. 1回目に白球が出て, 2回目(袋Uの中に白球 a 個, 赤球が1個)に赤球が出る確率であるから

$$p_2 = (1-p_1) \times \frac{1}{a+1} = \left(1 - \frac{1}{a+3}\right) \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

- (2) (i) n 回目 ($n \geq 1$) の試行で赤球が出たとき (確率 p_n), $n+1$ 回目の試行 (袋Uの中に赤球は0個) で赤球が出る確率は 0
(ii) n 回目 ($n \geq 1$) の試行で白球が出たとき (確率 $1-p_n$), $n+1$ 回目の試行 (袋Uの中に白球 a 個, 赤球1個) で赤球が出る確率は

$$(1-p_n) \times \frac{1}{a+1}$$

$$(i), (ii) \text{ より } p_{n+1} = 0 + (1-p_n) \times \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1}(1-p_n)$$

$$\text{したがって } p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1} \left(p_n - \frac{1}{a+2} \right)$$

よって, $n \geq 1$ のとき

$$p_n - \frac{1}{a+2} = \left(p_1 - \frac{1}{a+2} \right) \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1}$$

$$p_n = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1}$$

■

- 3 (1) $P(p, \sqrt{3}p)$, $Q(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leq p \leq 2, -3 \leq q \leq 0)$,

$$OP = 2p, \quad OQ = -2q$$

$OP + OQ = 6$ であるから $2p + (-2q) = 6$ ゆえに $q = p - 3$

したがって $0 \leq p \leq 2, -3 \leq p - 3 \leq 0$ すなわち $0 \leq p \leq 2$

2 点 $P(p, \sqrt{3}p)$, $Q(p - 3, -\sqrt{3}(p - 3))$ を通る直線は

$$y - \sqrt{3}p = \frac{2p - 3}{\sqrt{3}}(x - p)$$

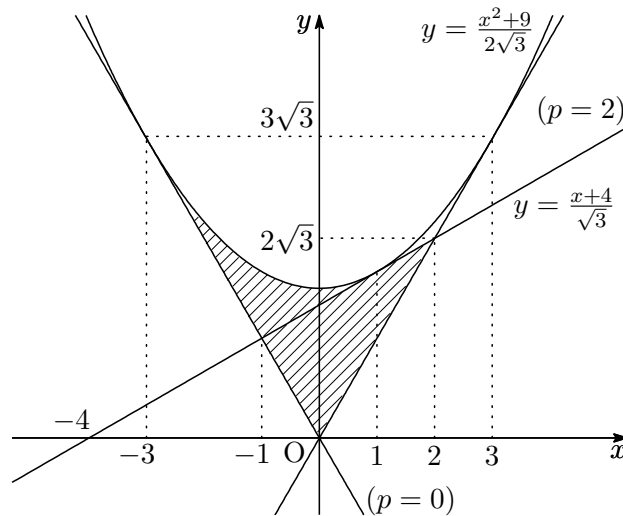
$$\text{すなわち } y = \frac{(2p - 3)x - 2p^2 + 6p}{\sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{1}$$

直線 $\textcircled{1}$ の x を固定し, y が極値をとる点では, $\frac{dy}{dp} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dp} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x - 4p + 6) = 0 \quad \text{ゆえに } x = 2p - 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } p \text{ を消去すると } y = \frac{x^2 + 9}{2\sqrt{3}} \quad \dots (*)$$

D は, $0 \leq p \leq 2$ のとき, 2 点 $P(p, \sqrt{3}p)$, $Q(p - 3, -\sqrt{3}(p - 3))$ を結ぶ線分 PQ (直線 $\textcircled{1}$) が通過する領域であるから, $(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると, その領域は, 下の図の斜線部分で, 境界線を含む.



よって, $0 \leq s \leq 2$ をみたす点 (s, t) が D にあるとき

$$-3 \leq s \leq 0 \text{ のとき } -\sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s^2 + 9}{2\sqrt{3}}$$

$$0 \leq s \leq 1 \text{ のとき } \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s^2 + 9}{2\sqrt{3}}$$

$$1 \leq s \leq 2 \text{ のとき } \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s + 4}{\sqrt{3}}$$

- (2) 領域 D は (1) で示した領域. ■

- 4 (1) a_n を素数 p で割った余りが b_n であるから

$$a_{n+2} \equiv b_{n+2}, \quad a_{n+1} \equiv b_{n+1}, \quad a_n \equiv b_n \pmod{p}$$

また, $a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1)$ であるから $b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1) \pmod{p}$

よって, b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致する.

- (2) $r = 2$ のとき, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ であるから, (1) の結果を用いると

$$b_1 \equiv 2, \quad b_2 \equiv 3, \quad b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1) \pmod{17}$$

したがって, 法 17 について

$$b_3 \equiv b_2(b_1 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9$$

$$b_4 \equiv b_3(b_2 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2$$

$$b_5 \equiv b_4(b_3 + 1) \equiv 2(9 + 1) \equiv 20 \equiv 3$$

$$b_6 \equiv b_5(b_4 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9$$

$$b_7 \equiv b_6(b_5 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2$$

$$b_8 \equiv b_7(b_6 + 1) \equiv 2(9 + 1) \equiv 20 \equiv 3$$

$$b_9 \equiv b_8(b_7 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9$$

$$b_{10} \equiv b_9(b_8 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2$$

よって $b_1 = 2, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 9, \quad b_4 = 2, \quad b_5 = 3,$
 $b_6 = 9, \quad b_7 = 2, \quad b_8 = 3, \quad b_9 = 9, \quad b_{10} = 2$

- (3) (1) の結果を用いると

$$b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1), \quad b_{m+2} \equiv b_{m+1}(b_m + 1) \pmod{p}$$

$$b_{n+2} = b_{m+2} \text{ より } b_{n+1}(b_n + 1) \equiv b_{m+1}(b_m + 1) \pmod{p}$$

$$q = b_{n+1} = b_{m+1} \text{ とおくと } (q > 0)$$

$$q(b_n + 1) \equiv q(b_m + 1) \quad \text{ゆえに} \quad q(b_n - b_m) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$q \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ であるから } b_n - b_m \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad b_n \equiv b_m \pmod{p}$$

よって, $b_n = b_m$ が成り立つ. ■

3.15 2015 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 以下の命題 A, B それぞれに対し, その真偽を調べよ. また, 真ならば証明を与え, 偽ならば反例を与えよ.

命題 A n が正の整数ならば, $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$ が成り立つ.

命題 B 整数 n, m, ℓ が $5n + 5m + 3\ell = 1$ をみたすならば, $10nm + 3m\ell + 3n\ell < 0$ が成り立つ.

- 2 座標平面上の 2 点 $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$ を考える. また, P を座標平面上の点とし, その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする. 次の条件 (i) または (ii) をみたす点 P の範囲を図示し, その面積を求めよ.

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで, 点 A, P, B をすべて通るものがある.

(ii) 点 A, P, B は同一直線上にある.

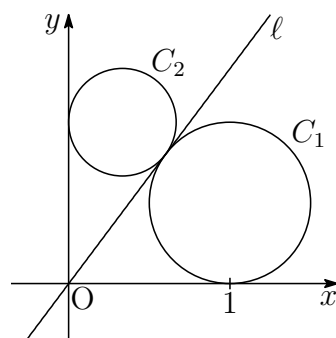
- 3 ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする. さらに, 以下の 3 条件 (i), (ii), (iii) で定まる円 C_1, C_2 を考える.

(i) 円 C_1, C_2 は 2 つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0$ で定まる領域に含まれる.

(ii) 円 C_1, C_2 は直線 ℓ と同一点で接する.

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し, 円 C_2 は y 軸と接する.

円 C_1 の半径を r_1 , 円 C_2 の半径を r_2 とする. $8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 ℓ の方程式と, その最小値を求めよ.



- 4 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを1枚用意し，次のように左から順に文字を書く．コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く．さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．たとえば，コインを5回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は

AABBAAB

となる．このとき，左から4番目の文字はB，5番目の文字はAである．

- (1) n を正の整数とする． n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ．
- (2) n を2以上の整数とする． n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n - 1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ．

解答例

1 命題 A : $f(x) = \frac{x^3}{26} - x^2 + 100$ ($x > 0$) とおくと

$$f'(x) = \frac{3}{26}x^2 - 2x = \frac{3}{26}x \left(x - \frac{52}{3} \right)$$

x	(0)	...	$\frac{52}{3}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$17 < \frac{52}{3} < 18 \text{ より } f(17) = 17^2 \left(\frac{17}{26} - 1 \right) + 100 = -\frac{2601}{26} + 100 < 0$$

したがって, $n = 17$ のとき, 不等式 $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$ は成立しない.

よって, 命題 A は 偽

命題 B : $5n + 5m + 3\ell = 1$ より, $3\ell = 1 - 5(m + n)$ であるから

$$\begin{aligned} 10nm + 3m\ell + 3n\ell &= 10mn + 3\ell(m + n) \\ &= 10mn + \{1 - 5(m + n)\}(m + n) \\ &= 10mn + (m + n) - 5(m + n)^2 \\ &= -5m^2 - 5n^2 + m + n \\ &= -5 \left(m - \frac{1}{10} \right)^2 - 5 \left(n - \frac{1}{10} \right)^2 + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

m, n は整数なので

$$-5 \left(m - \frac{1}{10} \right)^2 - 5 \left(n - \frac{1}{10} \right)^2 + \frac{1}{10} \leq 0 \quad (\text{等号は } m = n = 0 \text{ のとき})$$

$m = n = 0$ のとき, $3\ell = 1$ を満たす整数 ℓ は存在しないから

$$10nm + 3m\ell + 3n\ell = -5 \left(m - \frac{1}{10} \right)^2 - 5 \left(n - \frac{1}{10} \right)^2 + \frac{1}{10} < 0$$

よって, 命題 B は 真



2 点 P の x 座標 ($|x| \leq 1$) および条件 (ii) より, 点 P は線分 AB 上にあるから

$$x + y = 0 \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad \cdots (*)$$

条件 (i) について, 点 A, B, P(x, y) ($-1 \leq x \leq 1$) が満たす 2 次関数を

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおくと, このグラフは, 2 点 A($-1, 1$), B($1, -1$) を通るから

$$a - b + c = 1, \quad a + b + c = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = -1, \quad c = -a$$

$$\text{したがって} \quad y = ax^2 - x - a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{すなわち} \quad y = a \left(x - \frac{1}{2a} \right)^2 - a - \frac{1}{4a}$$

頂点の x 座標の絶対値が 1 以上であるから

$$\left| \frac{1}{2a} \right| \geq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < |a| \leq \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

① により, $x = -1$ のとき点 A, $x = 1$ のとき点 B にある.

$$-1 < x < 1 \text{ のとき, } a = \frac{x+y}{x^2-1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると } 0 < \left| \frac{x+y}{x^2-1} \right| \leq \frac{1}{2}$$

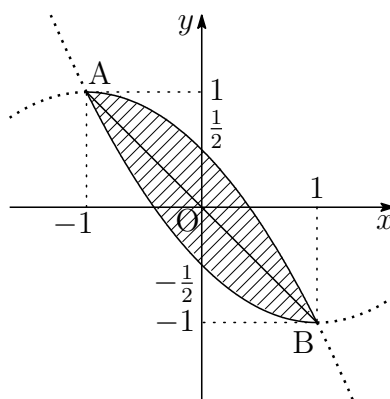
$$\text{したがって} \quad 0 < |x+y| \leq \frac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 < x < 1)$$

$$\text{これに } (*) \text{ を含めると } |x+y| \leq \frac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

よって, 点 P の表す領域は, 右の図の斜線部分で境界を含む. その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \right) \right\} dx \\ &= - \int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx \\ &= \frac{1}{6} \{ 1 - (-1) \}^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



- 3 円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ A, B とし, C_1, C_2 が外接する点を P とすると, 右の図から, $OP = 1$ である. これから, B の y 座標は 1 であるから, $A(1, r_1), B(r_2, 1)$ とおくと, $AB = r_1 + r_2$ より

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_2 - 1)^2 + (1 - r_1)^2$$

整理すると $r_1 r_2 + r_1 + r_2 = 1$

$$r_2 = \frac{1 - r_1}{1 + r_1} = \frac{2}{1 + r_1} - 1 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} 8r_1 + 9r_2 &= 8r_1 + 9 \left(\frac{2}{1 + r_1} - 1 \right) \\ &= 8(1 + r_1) + \frac{18}{1 + r_1} - 17 \\ &\geq 2\sqrt{8(1 + r_1) \cdot \frac{18}{1 + r_1}} - 17 = 7 \end{aligned}$$

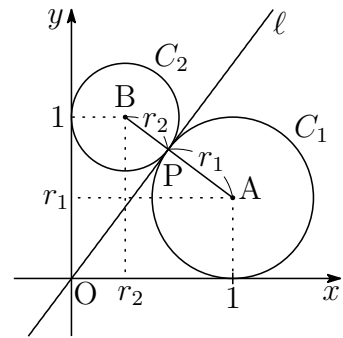
上式において, 等号が成立するとき

$$8(1 + r_1) = \frac{18}{1 + r_1} \quad \text{すなわち} \quad r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

このとき, 点 P は 2 点 $A\left(1, \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ を $r_1 : r_2 = 3 : 2$ に内分するから, その座標は

$$\left(\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{3}}{3 + 2}, \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1}{3 + 2} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

よって, ℓ の方程式は $y = \frac{4}{3}x$, 最小値は 7



- 4 (1) 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とすると, p_{n+2} は最初に裏が出た場合と表が出た場合により

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n \geq 1) \quad \cdots (*)$$

このとき $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

(*) より $p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n),$

$$p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

第1式から $p_{n+1} - p_n = (p_2 - p_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

第2式から $p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = p_2 + \frac{1}{2}p_1 = 1$

上の2式から $p_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} \quad (n \geq 1)$

- (2) 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で, かつ n 番目の文字列が B となる確率を q_n とすると, q_{n+2} は, (1) と同様に

$$q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n \quad (n \geq 2) \quad \cdots (**)$$

このとき $q_2 = 0, q_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(**) より $q_{n+2} - q_{n+1} = -\frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n),$

$$q_{n+2} + \frac{1}{2}q_{n+1} = q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$$

第1式から $q_{n+1} - q_n = (q_3 - q_2) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

第2式から $q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n = q_3 + \frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{4}$

上の2式から $q_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\} \quad (n \geq 2)$ ■

3.16 2016 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

1 座標平面上の 3 点 $P(x, y)$, $Q(-x, -y)$, $R(1, 0)$ が鋭角三角形をなすための (x, y) についての条件を求めよ. また, その条件をみたす点 $P(x, y)$ の範囲を図示せよ.

2 A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する. 以下の方式で試合を行い, 2 連勝したチームが出た時点で, そのチームを優勝チームとして大会は終了する.

- (a) 1 試合目で A と B が対戦する.
- (b) 2 試合目で, 1 試合目の勝者と, 1 試合目で待機していた C が対戦する.
- (c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は, k 試合目の勝者と, k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する. ここで k は 2 以上の整数とする.

なお, すべての対戦において, それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で, 引き分けはないものとする.

- (1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ.
- (2) n を 2 以上の整数とする. ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ.
- (3) m を正の整数とする. 総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ.

3 座標平面上の 2 つの放物線

$$A: y = x^2$$

$$B: y = -x^2 + px + q$$

が点 $(-1, 1)$ で接している. ここで, p と q は実数である. さらに, t を正の実数とし, 放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$, y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする.

- (1) p と q の値を求めよ.
- (2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする. ただし, A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める. $S(t)$ を求めよ.
- (3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ.

4 以下の問いに答えよ。ただし、(1)については、結論のみを書けばよい。

- (1) n を正の整数とし、 3^n を 10 で割った余りを a_n とする。 a_n を求めよ。
- (2) n を正の整数とし、 3^n を 4 で割った余りを b_n とする。 b_n を求めよ。
- (3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

解答例

1 $\triangle PQR$ が鋭角三角形であるとき、次の条件式をみたせばよい.

$$PQ^2 + QR^2 > RP^2, \quad QR^2 + RP^2 > PQ^2, \quad RP^2 + PQ^2 > QR^2$$

3 点 $P(x, y)$, $Q(-x, -y)$, $R(1, 0)$ から

$$PQ^2 = 4x^2 + 4y^2, \quad QR^2 = (x+1)^2 + y^2, \quad RP^2 = (x-1)^2 + y^2$$

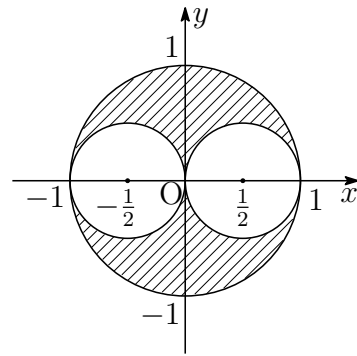
これらを条件式に代入すると

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 + (x+1)^2 + y^2 &> (x-1)^2 + y^2, \\ (x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 &> 4x^2 + 4y^2, \\ (x-1)^2 + y^2 + 4x^2 + 4y^2 &> (x+1)^2 + y^2 \end{aligned}$$

整理すると $x^2 + y^2 + x > 0$, $x^2 + y^2 < 1$, $x^2 + y^2 - x > 0$

すなわち $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$, $x^2 + y^2 < 1$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$

よって, $P(x, y)$ のみたす領域は, 右の図の斜線部分で, 境界線を含まない.



2 (1) ちょうど 5 試合目で A が優勝するときの勝敗は次のようになる.

求める確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

回数	1	2	3	4	5
勝者	A	C	B	A	A
敗者	B	A	C	B	C
控え	C	B	A	C	B

(2) $n_1 \equiv 1 \pmod{3}$, $n_2 = n_1 + 1$, $n_3 = n_1 + 2$ とする.

優勝チームが決まらず対戦が続くとき, 勝者・敗者・控えは3順ごとに, 次の (i), (ii) のように繰り返す.

(i) 初戦で A が B に勝つとき

回数	1	2	3	...	n_1	n_2	n_3	...
勝者	A	C	B	...	A	C	B	...
敗者	B	A	C	...	B	A	C	...
控え	C	B	A	...	C	B	A	...

(ii) 初戦で B が A に勝つとき

回数	1	2	3	...	n_1	n_2	n_3	...
勝者	B	C	A	...	B	C	A	...
敗者	A	B	C	...	A	B	C	...
控え	C	A	B	...	C	A	B	...

n 試合目に A が優勝するのは, (i) の場合, $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき, A は最後に C に勝って優勝し, (ii) の場合, $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき, A は最後に B に勝って優勝する. これらの場合の確率は, ともに $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

よって, 求める確率は

$$n \not\equiv 0 \text{ のとき } \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \equiv 0 \text{ のとき } 0 \quad (\text{mod } 3)$$

(3) (2) の結果から, A が最後に C に勝って, 優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7} \left\{ 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\}$$

また, A が最後に B に勝って, 優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{2} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{7} \left\{ 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\} + \frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{2} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\} = \frac{1}{14} \left\{ 5 - 12 \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\}$$

補足 初項 a , 公比 r , 末項 l の等比数列の和は $\frac{a - rl}{1 - r}$ ■

- 3** (1) $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + px + q$ とおくと, $f'(x) = 2x$, $g'(x) = -2x + p$.
 A , B が点 $(-1, 1)$ で接するから

$$f(-1) = g(-1), \quad f'(-1) = g'(-1)$$

$$\text{ゆえに } 1 = -1 - p + q, \quad -2 = 2 + p \quad \text{よって } \mathbf{p = -4, \quad q = -2}$$

- (2) (1) の結果から $g(x) = -x^2 - 4x - 2$

B を x 軸方向に $2t$, y 軸方向に t だけ平行移動した C の方程式は

$$\begin{aligned} y &= g(x - 2t) + t = -(x - 2t)^2 - 4(x - 2t) - 2 + t \\ &= -x^2 + 4(t - 1)x - 4t^2 + 9t - 2 \end{aligned}$$

$$h(x) = -x^2 + 4(t - 1)x - 4t^2 + 9t - 2 \text{ とおくと}$$

$$h(x) - f(x) = -2x^2 + 4(t - 1)x - 4t^2 + 9t - 2$$

$$h(x) - f(x) = 0 \text{ とすると}$$

$$2x^2 - 4(t - 1)x + 4t^2 - 9t + 2 = 0 \quad \cdots (*)$$

2 次方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = \{-2(t - 1)\}^2 - 2(4t^2 - 9t + 2) = -4t^2 + 10t = -2t(2t - 5)$$

$$D > 0 \text{ のとき, } t > 0 \text{ に注意して } 0 < t < \frac{5}{2}$$

このとき, 2 次方程式 $(*)$ の異なる 2 つの解を α , β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\beta - \alpha = \frac{2(t - 1) + \sqrt{D/4}}{2} - \frac{2(t - 1) - \sqrt{D/4}}{2} = \sqrt{D/4},$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{h(x) - f(x)\} dx = -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}(D/4)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(-4t^2 + 10t)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{よって } S(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}(-4t^2 + 10t)^{\frac{3}{2}} & \left(0 < t < \frac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(t \geq \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

$$(3) \quad 0 < t < \frac{5}{2} \text{ のとき } -4t^2 + 10t = -4\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

$$\text{よって, 最大値 } S\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{125}{24}$$



4 (1) $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 9, 3^3 \equiv 7, 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$

したがって $3^{n+4} \equiv 3^n \pmod{10}$

よって
$$a_n = \begin{cases} 3 & (n \equiv 1 \pmod{4}) \\ 9 & (n \equiv 2 \pmod{4}) \\ 7 & (n \equiv 3 \pmod{4}) \\ 1 & (n \equiv 0 \pmod{4}) \end{cases}$$

(2) $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 1 \pmod{4}$

したがって $3^{n+2} \equiv 3^n \pmod{4}$

よって
$$b_n = \begin{cases} 3 & (n \equiv 1 \pmod{2}) \\ 1 & (n \equiv 0 \pmod{2}) \end{cases}$$

(3) $x_1 = 1, x_{n+1} = 3^{x_n} \ (n = 1, 2, 3, \dots)$

この漸化式で定められた数列 $\{x_n\}$ は奇数からなるから, x_8 は奇数

したがって, (2) の結果から $3^{x_8} \equiv 3 \pmod{4}$ ゆえに $x_9 \equiv 3 \pmod{4}$

さらに, (1) の結果から $3^{x_9} \equiv 7 \pmod{10}$ ゆえに $x_{10} \equiv 7 \pmod{10}$

よって, 求める余りは **7**

補足 正の整数 m について, x_m は奇数

したがって, (2) の結果から $3^{x_m} \equiv 3 \pmod{4}$ ゆえに $x_{m+1} \equiv 3 \pmod{4}$

さらに, (1) の結果から $3^{x_{m+1}} \equiv 7 \pmod{10}$ ゆえに $x_{m+2} \equiv 7 \pmod{10}$

よって, $l \geq 3$ の整数について $x_l \equiv 7 \pmod{10}$ ■

3.17 2017 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

1 座標平面において 2 つの放物線 $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ を考える. ただし, s, t は実数で, $0 < s, 0 < t < 1$ をみたすとする. 放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし, 放物線 B の $x \geq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする. A と B がただ 1 点を共有するとき, $\frac{Q}{P}$ の最大値を求めよ.

2 1 辺の長さが 1 の正六角形 $ABCDEF$ が与えられている. 点 P が辺 AB 上を, 点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき, 線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ.

3 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という. 格子点上を次の規則 (a), (b) に従って動く点 P を考える.

(a) 最初に, 点 P は原点 O にある.

(b) ある時刻で点 P が格子点 (m, n) にあるとき, その 1 秒後の点 P の位置は, 隣接する格子点 $(m+1, n), (m, n+1), (m-1, n), (m, n-1)$ のいずれかであり, また, これらの点に移動する確率は, それぞれ $\frac{1}{4}$ である.

(1) 最初から 1 秒後の点 P の座標を (s, t) とする. $t - s = -1$ となる確率を求めよ.

(2) 点 P が, 最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ.

4 $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき, 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める. 以下の問いに答えよ. ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい.

(1) a_1, a_2 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ とする. 積 $a_1 a_n$ を, a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ.

(3) a_n は自然数であることを示せ.

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ.

解答例

- 1 (1) $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ から y を消去して、整理すると

$$(s+1)x^2 - 2sx + s - t^2 = 0$$

A と B は接するので、上式の係数について

$$(-s)^2 - (s+1)(s-t^2) = 0$$

これを s について解くと $s = \frac{t^2}{1-t^2}$

$$\text{ゆえに } P = \int_0^1 s(x-1)^2 dx = \left[\frac{s}{3}(x-1)^3 \right]_0^1 = \frac{s}{3} = \frac{t^2}{3(1-t^2)}$$

$$Q = \int_0^t (-x^2 + t^2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + t^2 x \right]_0^t = \frac{2t^3}{3}$$

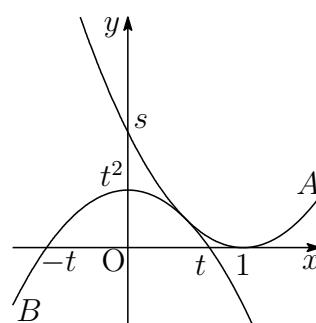
$$\text{したがって } \frac{Q}{P} = \frac{2t^3}{3} \cdot \frac{3(1-t^2)}{t^2} = 2t - 2t^3$$

$f(t) = 2t - 2t^3$ ($0 < t < 1$) とおくと

$$f'(t) = 2 - 6t^2 = -6 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right) = -6 \left(t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

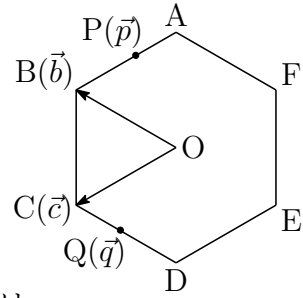
t	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	(1)
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	極大	↘	

よって、求める最大値は $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$



- 2 正六角形の中心 O に関する 4 点 B, C, P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{p}, \vec{q}$ とする. このとき実数 s, t を用いて ($0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$)

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{b} + s(-\vec{c}) = \vec{b} - s\vec{c} \\ \vec{q} &= \vec{c} + t(-\vec{b}) = -t\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$



線分 PQ を $2:1$ に内分する点 $R(\vec{r})$ の位置ベクトルは

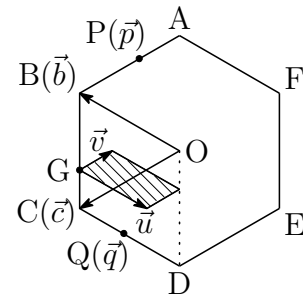
$$\begin{aligned}\vec{r} &= \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q} = \frac{1}{3}(\vec{b} - s\vec{c}) + \frac{2}{3}(-t\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{2t}{3}(-\vec{b}) + \frac{s}{3}(-\vec{c})\end{aligned}$$

2 つのベクトル $-\vec{b}, -\vec{c}$ の大きさはともに 1 で, そのなす角は 60° である.

$0 \leq \frac{2t}{3} \leq \frac{2}{3}, 0 \leq \frac{s}{3} \leq \frac{1}{3}$ であるから, R が通る図形の面積は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

補足 $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}, \vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{b}, \vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{c}$ とおくと,
 G を始点とする 2 つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ で張られた平行四辺形の内部または周上を点 R は動く.
 (右の図の斜線部分)



- 3 (1) 点 $P(s, t)$ は原点 O から 1 秒後に格子点 $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ に確率 $\frac{1}{4}$ で移動し、このとき、 $t - s$ はそれぞれ $-1, 1, 1, -1$ となるから、求める確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

- (2) x 軸方向に $1, -1$, y 軸方向に $1, -1$ だけ平行移動する回数をそれぞれ i, j, k, l とすると $(0 \leq i, j, k, l \leq 6)$, その確率は

$$\sum_{\substack{i+j+k+l=6 \\ 0 \leq i, j, k, l \leq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!} \left(\frac{1}{4}\right)^6$$

このとき $i + j + k + l = 6$, $i - j = k - l$ すなわち $i + l = j + k = 3$ よって、求める確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i+l=j+k=3 \\ 0 \leq i, j, k, l \leq 3}} \frac{6!}{i!j!k!l!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 &= \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+l=3 \\ 0 \leq i, l \leq 3}} \frac{3!}{i!l!} \sum_{\substack{j+k=3 \\ 0 \leq j, k \leq 3}} \frac{3!}{j!k!} \\ &= \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

■

- 4 (1) $a_1 = p - \frac{1}{p} = 2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 2) = 4$

$$a_2 = p^2 + \frac{1}{p^2} = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$$

- (2) $p^{n+1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1} = \left(p - \frac{1}{p}\right) \left\{p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n\right\} + p^{n-1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}$ より

$$a_{n+1} = a_1 a_n + a_{n-1} \quad \text{よって} \quad a_1 a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$$

補足 $\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$

- (3) (1), (2) の結果から $a_1 = 4, a_2 = 18, a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1} \cdots (*)$ よって、すべての自然数 n について、 a_n は自然数である。

- (4) 2 つの自然数 k, l の最大公約数を $\gcd(k, l)$ とする。

(*) にユークリッドの互除法を順次適用することにより

$$\gcd(a_{n+1}, a_n) = \gcd(a_n, a_{n-1}) = \cdots = \gcd(a_2, a_1) = 2$$

■

3.18 2018 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

1 座標平面上に放物線 C を

$$y = x^2 - 3x + 4$$

で定め、領域 D を

$$y \geq x^2 - 3x + 4$$

で定める。原点をとる 2 直線 l , m は C に接するものとする。

- (1) 放物線 C 上を動く点 A と直線 l , m の距離をそれぞれ L , M とする。
 $\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小値をとるとき点 A の座標を求めよ。
- (2) 次の条件をみたす点 $P(p, q)$ の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件：領域 D のすべての点 (x, y) に対し不等式 $px + qy \leq 0$ がなりたつ。2 数列 $a_1, a_2, \dots$ を

$$a_n = \frac{{}^{2n}C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。

- (1) a_7 と 1 の大小を調べよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。 $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ。
- (3) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ。

3 $a > 0$ とし、

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。

- (1) $x \geq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための、 a についての条件を求めよ。
- (2) 次の 2 条件をみたす点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。条件 2：さらに、方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

- 4 放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ をみたす部分を C とする. 座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考える.

- (1) 点 P が C 上を動くとき,

$$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$$

をみたす点 Q の軌跡を求めよ.

- (2) 点 P が C 上を動き, 点 R が線分 OA 上を動くとき,

$$\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$$

をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.

解答例

1 (1) $C: y = x^2 - 3x + 4$ より $y' = 2x - 3$

C 上の点 $(t, t^2 - 3t + 4)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 - 3t + 4) = (2t - 3)(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = (2t - 3)x - t^2 + 4$$

この接線が原点を通るとき $-t^2 + 4 = 0$ これを解いて $t = \pm 2$

したがって, 2 直線 l, m の方程式は $x - y = 0, 7x + y = 0$

C 上の点 A の座標を $(a, a^2 - 3a + 4)$ とすると

$$\begin{aligned} \sqrt{L} + \sqrt{M} &= \sqrt{\frac{|a - (a^2 - 3a + 4)|}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{|7a + (a^2 - 3a + 4)|}{5\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}}(\sqrt{5}|a - 2| + |a + 2|) \end{aligned}$$

$$\text{このとき} \quad \sqrt{5}|a - 2| + |a + 2| = \begin{cases} -(1 + \sqrt{5})a - 2 + 2\sqrt{5} & (a < -2) \\ (1 - \sqrt{5})a + 2 + 2\sqrt{5} & (-2 \leq a \leq 2) \\ (1 + \sqrt{5})a + 2 - 2\sqrt{5} & (2 < a) \end{cases}$$

したがって, $\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小となるのは, $-2 \leq a \leq 2$ の範囲であり, $a = 2$ のときである. このとき, 点 A の座標は **(2, 2)**

(2) 領域 D 内の点 (x, y) に対して, $\vec{OX} = (x, y)$ とすると

$$px + qy = \vec{OP} \cdot \vec{OX} \leq 0 \quad \dots (*)$$

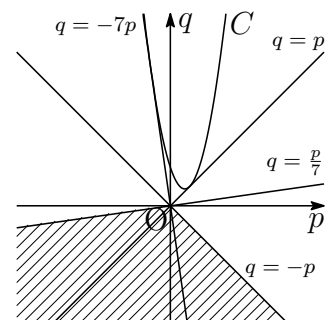
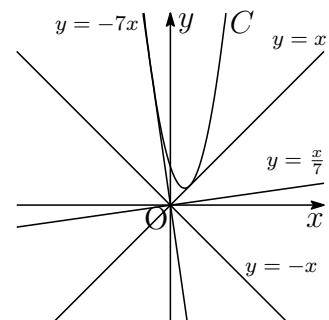
l, m に垂直な 2 直線は

$$y = -x, \quad y = \frac{x}{7}$$

(*) を満たす点 $P(p, q)$ は

$$\begin{cases} q \leq -p \\ q \leq \frac{p}{7} \end{cases}$$

よって, その領域は, 右の図の斜線部分である. ただし, 境界線を含む.



2 (1) $a_n = \frac{{}^{2n}C_n}{n!}$ より ($n = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{{}^{14}C_7}{7!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{(7!)^2} = \frac{2^4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \times 13 \cdot 11 \cdot 9}{(7!)^2} \\ &= \frac{2^4 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9}{3! \cdot 7!} = \frac{13 \cdot 11}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{143}{210} < 1 \end{aligned}$$

(2) $a_n = \frac{{}^{2n}C_n}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^3}$ より ($n = 1, 2, \dots$)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^3} \cdot \frac{\{(n-1)!\}^3}{(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{n^3} = \frac{2(2n-1)}{n^2}$$

ゆえに $1 - \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \frac{2(2n-1)}{n^2} = \frac{(n-2)^2 - 2}{n^2} > 0$

上式をみたす n の値の範囲は $n \geq 4$

(3) $a_1 = \frac{{}^2C_1}{1!} = 2, \quad a_2 = \frac{{}^4C_2}{2!} = 3,$

また $a_3 = \frac{6!}{(3!)^3}, \quad a_4 = \frac{8!}{(4!)^3}, \quad a_5 = \frac{10!}{(5!)^3}, \quad a_6 = \frac{12!}{(6!)^3}$

a_3, a_4 の既約分数は、その分母に素因数 3 がある。

a_5, a_6 の既約分数は、その分母に素因数 5 がある。

(1), (2) の結果から、 $n \geq 7$ のとき $0 < a_n < 1$

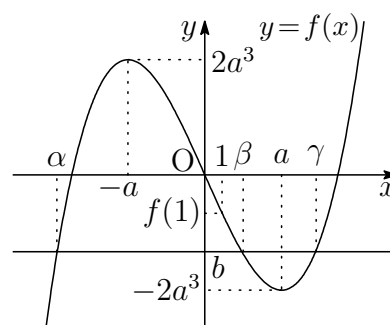
よって、 a_n が整数となる $n \geq 1$ は $n = 1, 2$ ■

3 (1) $f(x) = x^3 - 3a^2x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$



$x \geq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するから、 $a > 0$ に注意して $0 < a \leq 1$

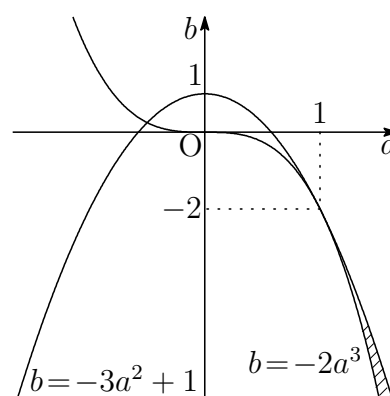
(2) $f(x) = b$ の解 $\alpha < \beta < \gamma$ について、 $\beta > 1$ であるから、右上の図より

$$1 < a, \quad -2a^3 < b < f(1)$$

したがって

$$-2a^3 < b < -3a^2 + 1 \quad (a > 1)$$

点 (a, b) の満たす領域は、右の図の斜線部分で、境界線を含まない。



■

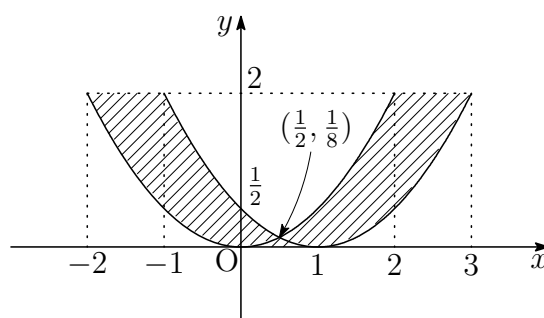
- 4 (1) C 上の点 $P(t, t^2)$ に対して $(-1 \leq t \leq 1)$, 点 $Q(x, y)$ は, $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$ より

$$(x, y) = 2(t, t^2) \quad \text{ゆえに} \quad x = 2t, y = 2t^2$$

上の2式から t を消去すると $y = \frac{x^2}{2} \quad (-2 \leq x \leq 2)$

- (2) $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$ より $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$

したがって, 点 S が動く領域は, (1) で求めた Q の軌跡を x 軸方向に1だけ平行移動するとき描く図形であるから, 次の図の斜線部分である.

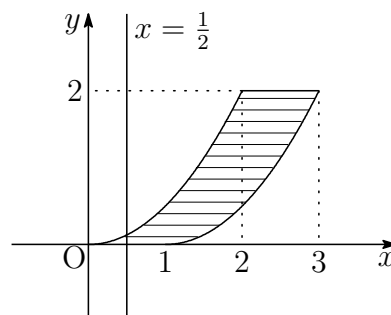


右の図の斜線部分の面積は, カバリエリの原理により

$$1 \cdot 2 = 2$$

斜線部分の $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ における面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{48}$$



図形は直線 $x = \frac{1}{2}$ に関して対称であるから, 求める図形の面積は

$$2 \left(2 - \frac{1}{48} \right) = \frac{95}{24}$$

■

3.19 2019 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 座標平面の原点を O とし, $O, A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)$ を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする. 3 点 $P(p, 0), Q(0, q), R(r, 1)$ はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあり, 3 点 O, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする.

(1) q と r を p で表し, p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ.

(2) $\frac{CR}{OQ}$ の最大値, 最小値を求めよ.

- 2 O を原点とする座標平面において, 点 $A(2, 2)$ を通り, 線分 OA と垂直な直線を l とする. 座標平面上を点 $P(p, q)$ が次の 2 つの条件をみたしながら動く.

条件 1: $8 \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \leq 17$

条件 2: 点 O と直線 l の距離を c とし, 点 $P(p, q)$ と直線 l の距離を d とするとき $cd \geq (p-1)^2$

このとき, P が動く領域を D とする. さらに, x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする.

(1) D を図示し, その面積を求めよ.

(2) $\cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ.

- 3 正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする. また, 投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある. 点 P が最初に点 A にある. 次の操作を 10 回繰り返す.

操作: コインを投げ, 表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ, 裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる.

例えば, 点 P が点 H にある状態で, 投げたコインの表が出れば点 A に移動させ, 裏が出れば点 G に移動させる. 以下の事象を考える.

事象 S : 操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある.

事象 T : 1 回目から 10 回目の操作によって, 点 P は少なくとも 1 回, 点 F に移動する.

- (1) 事象 S が起こる確率を求めよ.
- (2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ.

- 4 O を原点とする座標平面を考える. 不等式

$$|x| + |y| \leq 1$$

が表す領域を D とする. また, 点 P, Q が領域 D を動くとき, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ をみたす点 R が動く範囲を E とする.

- (1) D, E をそれぞれ図示せよ.
- (2) a, b を実数とし, 不等式

$$|x - a| + |y - b| \leq 1$$

が表す領域を F とする. また, 点 S, T が領域 F を動くとき, $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OT}$ をみたす点 U が動く範囲を G とする. G は E と一致することを示せ.

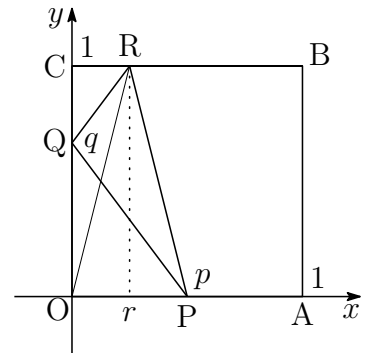
解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \triangle OPQ = \frac{1}{2}pq = \frac{1}{3} \text{ より } p = \frac{2}{3q}, \quad q = \frac{2}{3p}$$

$$0 < p \leq 1, \quad 0 < q \leq 1 \text{ より}$$

$$0 < \frac{2}{3q} \leq 1, \quad 0 < \frac{2}{3p} \leq 1$$

$$\text{よって } q = \frac{2}{3p}, \quad \frac{2}{3} \leq p \leq 1, \quad \frac{2}{3} \leq q \leq 1$$



$$\triangle OPR + \triangle OQR = \triangle OPQ + \triangle PQR \text{ より}$$

$$\frac{1}{2}p \cdot 1 + \frac{1}{2}qr = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad p + qr = \frac{4}{3}$$

$$\text{上の第2式に } q = \frac{2}{3p} \text{ を代入すると}$$

$$p + \frac{2}{3p} \cdot r = \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad r = -\frac{3}{2}p^2 + 2p = -\frac{3}{2}\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \leq p \leq 1 \text{ であるから} \quad \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{2}{3}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{CR}{OQ} = \frac{r}{q} = \frac{3p}{2} \left(-\frac{3}{2}p^2 + 2p \right) = -\frac{9}{4}p^3 + 3p^2$$

$$f(p) = -\frac{9}{4}p^3 + 3p^2 \text{ とおくと } \left(\frac{2}{3} \leq p \leq 1 \right)$$

$$f'(p) = -\frac{27}{4}p^2 + 6p = -\frac{27}{4}p \left(p - \frac{8}{9} \right)$$

したがって, $f(p)$ の増減表は, 次のようになる.

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		+	0	-	
$f(p)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

$$\text{よって 最大値 } \frac{64}{81}, \text{ 最小値 } \frac{2}{3}$$



- 2 (1) $A(2, 2)$, $P(p, q)$ より $\overrightarrow{OA} = (2, 2)$, $\overrightarrow{OP} = (p, q)$

これらを条件1に適用すると

$$8 \leq 2p + 2q \leq 17 \quad \text{ゆえに} \quad 4 \leq p + q \leq \frac{17}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

線分 OA に垂直な直線の傾きは -1

直線 l は点 $A(2, 2)$ を通り傾き -1 であるから

$$y - 2 = -1(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad x + y = 4$$

$c = OA$ であるから $c = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$P(p, q)$ から直線 l までの距離 d は、 $\textcircled{1}$ に注意して

$$d = \frac{|p + q - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{p + q - 4}{\sqrt{2}}$$

$cd \geq (p - 1)^2$ より

$$2\sqrt{2} \cdot \frac{p + q - 4}{\sqrt{2}} \geq (p - 1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad q \geq \frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2}$$

D の表す領域は、上式および $\textcircled{1}$ より

$$\begin{cases} y \leq -x + \frac{17}{2} \\ y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} \end{cases}$$

上の2式の境界線は

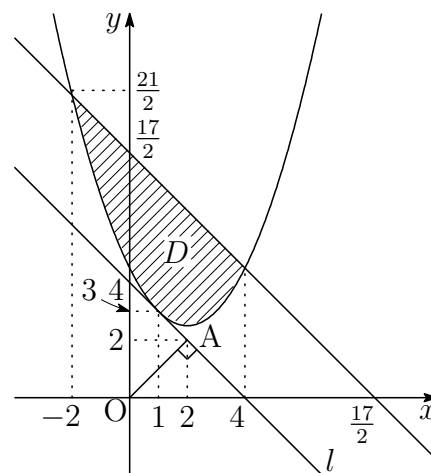
$$\begin{cases} y = -x + \frac{17}{2} \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} \end{cases}$$

上の2式から y を消去すると

$$-x + \frac{17}{2} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = -2, 4$$

領域 D の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^4 \left\{ \left(-x + \frac{17}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} \right) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-2}^4 (x + 2)(x - 4) dx = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6} \right) (4 + 2)^3 = 18 \end{aligned}$$



(2) 直線 $y = kx$ および放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$ の共有点について

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} = kx \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2(k+2)x + 9 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

これらの直線と放物線が接するとき、係数について

$$(k+2)^2 - 9 = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = 1, -5$$

共有点の x 座標は、 $x = k+2$ より $x = \pm 3$

θ は $\overrightarrow{OP} = (p, q)$ とベクトル $(1, 0)$ のなす角であるから

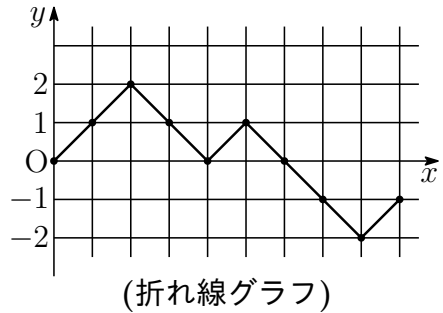
$$\cos \theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

$\cos \theta$ は $P(3, 3)$ で最大となり、 $P\left(-2, \frac{21}{2}\right)$ で最小となるから

$$\frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2}} \leq \cos \theta \leq \frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2}}$$

よって
$$-\frac{4}{\sqrt{457}} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3 座標平面上の原点 O から右斜め 45° 、または右斜め -45° の方向に最も近い第 1 番目の格子点を取り、この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 1 番目の格子点から第 2 番目の格子点を取り、第 1 番目と第 2 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返す、こうしてできる線分をつないだものを折れ線グラフということにする。右図は原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例である。



n を自然数、 k を $|k| \leq n$ を満たす整数とする。原点 O から格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフが存在するとき ($n+k$ が偶数)、右斜め 45° の方向に $\frac{n+k}{2}$ 回、右斜め -45° の方向に $\frac{n-k}{2}$ 回進む。原点 O から格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_nC_{\frac{n+k}{2}}$ であるから、格子点 (n, k) にある確率は

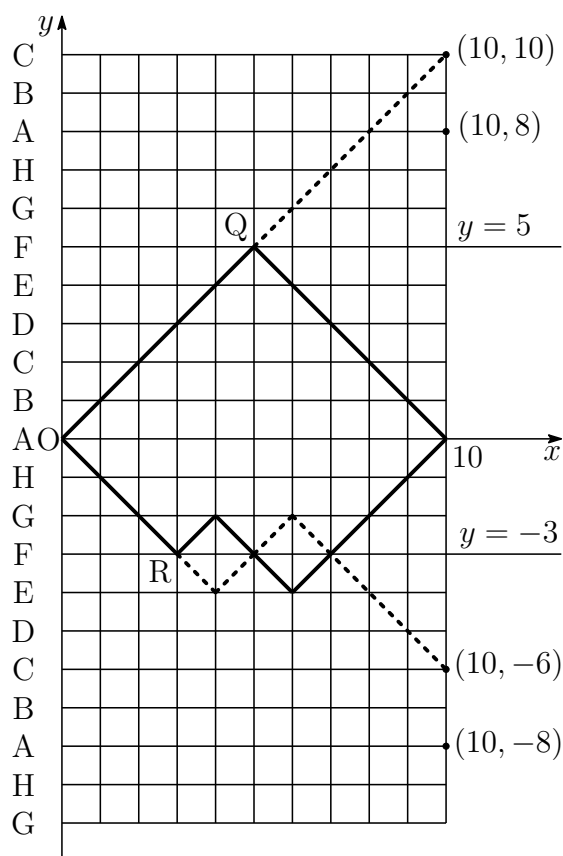
$$P_n(k) = \frac{{}_nC_{\frac{n+k}{2}}}{2^n}$$

- (1) コインの表, 裏により, 格子点上の点 P がそれぞれ右斜め 45° , 右斜め -45° 方向の最も近い格子点に移動するものとする. 格子点 (n, k) にあるとき, $k \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \pmod{8}$ を, それぞれ, A, B, C, D, E, F, G, H に対応させる. 操作を 10 回行って点 P が点 A にあるとき, $k = 0, \pm 8$ であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned}
 P_{10}(0) + P_{10}(8) + P_{10}(-8) &= \frac{{}_{10}C_{\frac{10+0}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}C_{\frac{10+8}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}C_{\frac{10-8}{2}}}{2^{10}} \\
 &= \frac{1}{2^{10}}({}_{10}C_5 + {}_{10}C_9 + {}_{10}C_1) \\
 &= \frac{1}{2^{10}}(252 + 10 + 10) = \frac{17}{64}
 \end{aligned}$$

- (2) 原点 O と点 $(10, 0)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = 5$ と交わる点を Q とすると, 点 Q と点 $(10, 0)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 Q と点 $(10, 10)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい (鏡像原理). 同様に, 原点 O と点 $(10, 0)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = -3$ と交わる点を R とすると, 点 R と点 $(10, 0)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 R と点 $(10, -6)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい. よって, 求める確率は

$$\begin{aligned}
 &P_{10}(8) + P_{10}(-8) \\
 &\quad + P_{10}(10) + P_{10}(-6) \\
 &= \frac{{}_{10}C_9}{2^{10}} + \frac{{}_{10}C_1}{2^{10}} + \frac{{}_{10}C_{10}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}C_2}{2^{10}} \\
 &= \frac{10 + 10 + 1 + 45}{2^{10}} = \frac{33}{512}
 \end{aligned}$$



補足 操作を 10 回行った後に点 P が点 E にあるとき、10 回目ではじめて点 E に達する条件付き確率について考えてみる.

8 回目以前ですでに点 E を通過する折れ線グラフは、点 $(9, \pm 5)$ または点 $(9, \pm 3)$ と点 $(10, \pm 4)$ を結ぶ (複号同順). 原点 O と点 $(10, \pm 4)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に $y = \pm 4$ と交わる点を S とすると、点 S と点 $(10, \pm 5)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 S と点 $(10, \pm 3)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は鏡像原理により等しい (複号同順). したがって、10 回目で初めて点 E に達する折れ線グラフの本数は

$$({}_{10}C_{\frac{10+4}{2}} - 2 \cdot {}_9C_{\frac{9+5}{2}}) + ({}_{10}C_{\frac{10-4}{2}} - 2 \cdot {}_9C_{\frac{9-5}{2}}) = 2({}_{10}C_7 - 2 \cdot {}_9C_7) \quad (\text{本})$$

$$\text{求める確率は} \quad \frac{2({}_{10}C_7 - 2 \cdot {}_9C_7)}{2 \cdot {}_{10}C_7} = \frac{2}{5}$$

一般に、原点 O と点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフで、 n 回目で初めて $y = k$ に達する折れ線グラフの本数は

$${}_nC_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}C_{\frac{n+k}{2}} = {}_nC_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n} \cdot {}_nC_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_nC_{\frac{n+k}{2}}$$

これは、原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの本数の $\frac{k}{n}$ 倍.

よって、求める条件付き確率は $\frac{k}{n}$ となる. ■

- 4 (1) 領域 D にある 2 点 P, Q の座標を, それぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とすると

$$|x_1| + |y_1| \leq 1, \quad |x_2| + |y_2| \leq 1$$

したがって

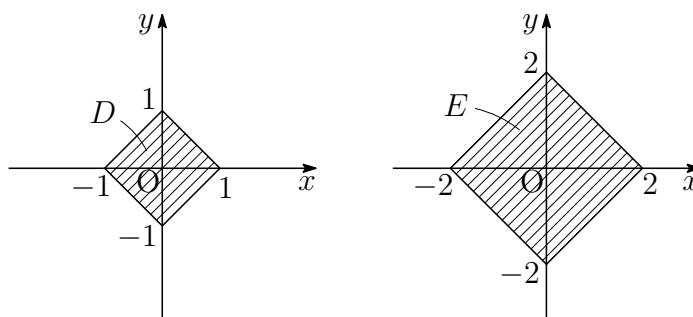
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

$R(x, y)$ とおくと

$$|x| + |y| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \leq 2$$

したがって, 領域 E の表す不等式は $|x| + |y| \leq 2$

よって, D, E の表す領域を図示すると



- (2) 領域 F にある 2 点 S, T の座標を, それぞれ $(x_3, y_3), (x_4, y_4)$ とすると

$$|x_3 - a| + |y_3 - b| \leq 1, \quad |x_4 - a| + |y_4 - b| \leq 1$$

したがって

$$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OT} = (x_3, y_3) - (x_4, y_4) = (x_3 - x_4, y_3 - y_4)$$

$U(x, y)$ とおくと

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= |x_3 - x_4| + |y_3 - y_4| \\ &= |(x_3 - a) - (x_4 - a)| + |(y_3 - b) - (y_4 - b)| \\ &\leq |x_3 - a| + |y_3 - b| + |x_4 - a| + |y_4 - b| \leq 2 \end{aligned}$$

よって, $G: |x| + |y| \leq 2$ の表す領域は E と一致する. ■

3.20 2020 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

1 $a > 0, b > 0$ とする. 座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 - 3ax^2 + b$$

が, 以下の 2 条件を満たすとする.

条件 1 : C は x 軸に接する.

条件 2 : x 軸と C で囲まれた領域 (境界は含まない) に, x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある.

b を a で表し, a のとりうる値の範囲を求めよ.

2 座標平面上に 8 本の直線

$$x = a \quad (a = 1, 2, 3, 4), \quad y = b \quad (b = 1, 2, 3, 4)$$

がある. 以下, 16 個の点

$$(a, b) \quad (a = 1, 2, 3, 4, \quad b = 1, 2, 3, 4)$$

から異なる 5 個の点を選ぶことを考える.

(1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか.

上の 8 本の直線のうち, 選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある.

(2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか.

上の 8 本の直線は, いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む.

- 3 O を原点とする座標平面において、放物線

$$y = x^2 - 2x + 4$$

のうち $x \geq 0$ を満たす部分を C とする.

- (1) 点 P が C 上を動くとき、 O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ.
- (2) 実数 a に対して、直線

$$l: y = ax$$

を考える. 次の条件を満たす a の範囲を求めよ.

C 上の点 A と l 上の点 B で、3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるものがある.

- 4 n, k を、 $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする. n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる. k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_nC_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく. 例えば,

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である.

- (1) 2 以上の整数 n に対し、 $a_{n,2}$ を求めよ.
- (2) 1 以上の整数 n に対し、 x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \dots + a_{n,n}x^n$$

を考える. $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ.

- (3) $\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ.

解答例

1 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 6ax$

$C: y = f(x)$ の x 軸との接点の x 座標を t とすると, $f(t) = 0$, $f'(t) = 0$ より

$$(*) \begin{cases} t^3 - 3at^2 + b = 0 \\ 3t^2 - 6at = 0 \end{cases}$$

(*) の第 2 式から $3t(t - 2a) = 0$ ゆえに $t = 0, 2a$

$t = 0$ を (*) の第 1 式に代入すると, $b = 0$ となり, 条件 $b > 0$ に反し, 不適.

$t = 2a$ であるから, これを (*) の第 1 式に代入すると

$$(2a)^3 - 3a \cdot (2a)^2 + b = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 4a^3$$

$$f(x) = (x + a)(x - 2a)^2$$

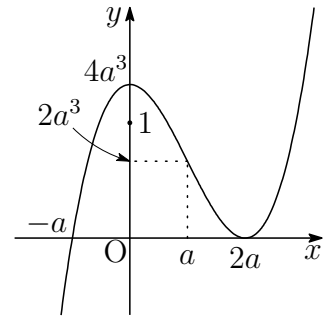
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$

x 軸と C で囲まれる区間は

$$-a \leq x \leq 2a$$

y 軸上の格子点 $(0, 1)$ に注目し, これが条件 2 の格子点でないと仮定すると, この区間において

$$0 \leq f(x) \leq 1$$



となり, 条件 2 を満たす格子点は存在しない.

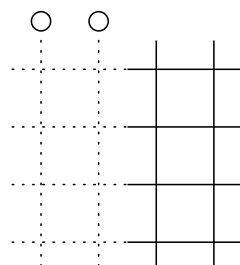
ゆえに, 条件 2 を満たす格子点は $(0, 1)$ である. したがって

$$1 < 4a^3 \leq 2 \quad \text{これを解いて} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

2 問題の直線をここでは簡単に行・列と呼び、交点を格子点と呼ぶことにする.

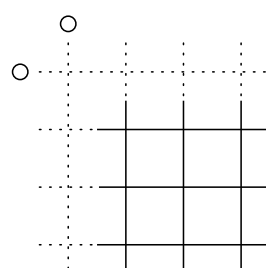
- (1) (i) 選んだ点を1個も含まない直線2本(○印)が(縦と横に)平行なとき、この直線上にない8個の格子点から5個の格子点を次のように選ぶ. 平行な2本の直線(${}_4C_2 \cdot 2$ 通り)に垂直な4本の直線に、1本には2個の点を置き(${}_4C_1$ 通り)、残り3本の直線には1個ずつ点を置く(2^3 通り)並べ方は

$${}_4C_2 \cdot 2 \times {}_4C_1 \times 2^3 = 384 \text{ (通り)}$$



- (ii) 選んだ点を1個も含まない直線2本(○印)が垂直なとき、この直線上にない9個の格子点から5個の格子点を次のように選ぶ. 垂直な2本の直線(4^2 通り)上にない9個の格子点から5個を選ぶとき、5個の格子点が特定の2本の直線上にある場合を除くから、その総数は

$$4^2 \times ({}_9C_5 - 6 \times {}_6C_5) = 1440 \text{ (通り)}$$

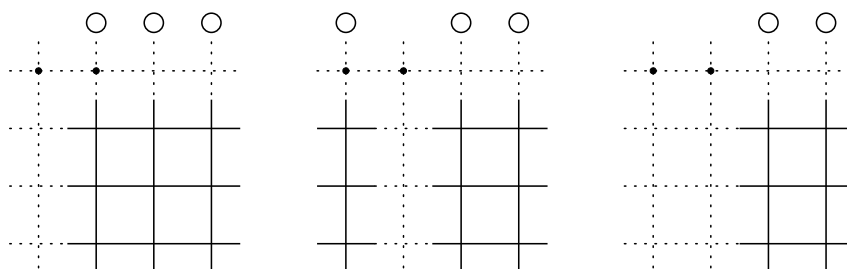


(i), (ii) より、求める場合の数は $384 + 1440 = 1824$ (通り)

- (2) 4行のうち1行は2個の格子点があり(${}_4C_1 \cdot {}_4C_2$ 通り)、残りの3行には1個の格子点がある. 2個の格子点がある直線に対して、残り3個の格子点を下の図の3列(○印)または2列(○印)に格子点を並べる場合である.

残り3個の格子点が3列に並ぶ場合の数は $3! = 6$ (通り)

残り3個の格子点が2列に並ぶ場合の数は $2^3 - 2 = 6$ (通り)



よって求める総数は ${}_4C_1 \cdot {}_4C_2 \times (6 + 6 + 6) = 432$ (通り)



- 3 (1) $y = x^2 - 2x + 4$ に接する直線を $y = kx$ とおいて、2 式から y を消去すると

$$x^2 - 2x + 4 = kx$$

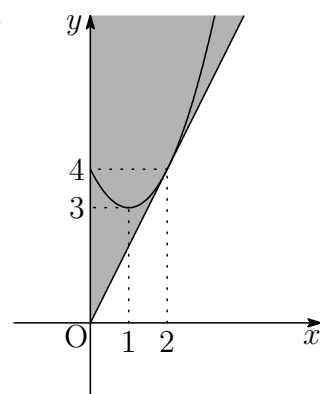
ゆえに $x^2 - (k+2)x + 4 = 0$

この方程式の係数について

$$(k+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

したがって $(k+6)(k-2) = 0$ $k > 0$ に注意して $k = 2$

よって $x \geq 0, y \geq 2x$ 図の灰色の部分で境界を含む.



- (2) (1) の結果から, $\tan \theta = 2$ とおくと

$$\tan \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \leq a \leq \tan \frac{\pi}{6}, \quad \tan \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq a \leq \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tan \left(\theta \pm \frac{\pi}{3} \right) &= \frac{\tan \theta \pm \tan \frac{\pi}{3}}{1 \mp \tan \theta \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{1 \mp 2\sqrt{3}} = \frac{(2 \pm \sqrt{3})(1 \pm 2\sqrt{3})}{(1 \mp 2\sqrt{3})(1 \pm 2\sqrt{3})} \\ &= \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{-11} = \frac{-8 \mp 5\sqrt{3}}{11} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

よって $\frac{-8 + 5\sqrt{3}}{11} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{-8 - 5\sqrt{3}}{11} \leq a \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ■

4 (1) 等式 $(x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1})^2 = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} x_i x_j$

において, $x_m = 2^m$ とすると ($m = 0, 1, \dots, n-1$)

$$(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1})^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (2^k)^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} 2^i \cdot 2^j$$

$$\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right)^2 = \frac{4^n - 1}{4 - 1} + 2a_{n,2}$$

$$4^n - 2 \cdot 2^n + 1 = \frac{1}{3} \cdot 4^n - \frac{1}{3} + 2a_{n,2}$$

ゆえに $a_{n,2} = \frac{1}{3} \cdot 4^n - 2^n + \frac{2}{3}$ よって $a_{n,2} = \frac{1}{3}(2^n - 1)(2^n - 2)$

(2) $f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$ の定義により, 次式が成立する.

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n a_{n,k}x^k = \prod_{k=1}^n (1 + 2^{k-1}x) \quad \cdots (*)$$

したがって

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \prod_{k=1}^{n+1} (1 + 2^{k-1}x) = (1 + 2^n x) \prod_{k=1}^n (1 + 2^{k-1}x) \\ &= (1 + 2^n x) f_n(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \prod_{k=1}^{n+1} (1 + 2^{k-1}x) = (1 + x) \prod_{k=2}^{n+1} (1 + 2^{k-1}x) \\ &= (1 + x) \prod_{k=1}^n (1 + 2^{k-1} \cdot 2x) = (1 + x) f_n(2x) \end{aligned}$$

よって $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1 + 2^n x, \quad \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = 1 + x$

(3) (2) で示した

$$(**) \begin{cases} f_{n+1}(x) = (1 + 2^n x) f_n(x) \\ f_{n+1}(x) = (1 + x) f_n(2x) \end{cases}$$

の第 1 式から $f_{n+1}(2x) = (1 + 2^{n+1}x) f_n(2x)$

これと (**) の第 2 式の辺々の差をとると

$$f_{n+1}(2x) - f_{n+1}(x) = (2^{n+1} - 1)x f_n(2x) \quad (\text{A})$$

(*) より

$$\begin{aligned} f_{n+1}(2x) - f_{n+1}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1,k} (2x)^k - \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1,k} x^k \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (2^k - 1) a_{n+1,k} x^k \\ &= a_{n+1,1} x + \sum_{k=2}^{n+1} (2^k - 1) a_{n+1,k} x^k \\ &= (2^{n+1} - 1)x + \sum_{k=1}^n (2^{k+1} - 1) a_{n+1,k+1} x^{k+1} \quad (\text{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2^{n+1} - 1)x f_n(2x) &= (2^{n+1} - 1)x \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n a_{n,k} (2x)^k \right\} \\ &= (2^{n+1} - 1)x + (2^{n+1} - 1) \sum_{k=1}^n 2^k a_{n,k} x^{k+1} \quad (\text{C}) \end{aligned}$$

(B), (C) を (A) に代入して、整理すると

$$\sum_{k=1}^n (2^{k+1} - 1) a_{n+1,k+1} x^{k+1} = (2^{n+1} - 1) \sum_{k=1}^n 2^k a_{n,k} x^{k+1}$$

上式の同じ次数の項の係数は等しいから

$$(2^{k+1} - 1) a_{n+1,k+1} = (2^{n+1} - 1) 2^k a_{n,k}$$

よって

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{(2^{n+1} - 1) 2^k}{2^{k+1} - 1}$$

■

3.21 2021 年 (100 分)

出題分野 ① ② ③ ④

① a を正の実数とする．座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める．原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ．

② N を 5 以上の整数とする．1 以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ．ただし 1 は必ず選ぶこととする．選んだ数の集合を S とし， S に関する以下の条件を考える．

条件 1 : S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない．

条件 2 : S は連続する $N - 2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む．

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l, l + 1, \dots, l + k - 1\}$ と表される集合を指す．例えば $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1, 2, 3\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{8, 9, 10\}$ を含む．

(1) 条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか．

(2) 条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか．

③ a, b を実数とする．座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす．

(1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ．

4 以下の問いに答えよ.

- (1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする. K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば, A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ.
- (2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする. このとき, $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$, $B = {}_aC_b$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ.
- (3) a, b は (2) の通りとし, さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする. ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ.
- (4) ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ.

解答例

1 曲線 $C: y = ax^3 - 2x$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ から y を消去すると

$$x^2 + (ax^3 - 2x)^2 = 1 \quad \text{整理すると} \quad a^2x^6 - 4ax^4 + 5x^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

このとき、上の第1式から $1 - x^2 = (ax^3 - 2x)^2 \geq 0$

$$1 - x^2 \geq 0 \quad \text{これを解いて} \quad -1 \leq x \leq 1$$

(*) が $-1 \leq x \leq 1$ ($x \neq 0$) に異なる6個の実数解をもつとき、3次方程式

$$a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1 = 0$$

は $0 < t \leq 1$ に異なる3つの実数解をもつ.

$f(t) = a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1$ とおくと

$$f'(t) = 3a^2t^2 - 8at + 5 = (at - 1)(3at - 5)$$

$a > 0$ より、 $f(t)$ の増減表は

t	$\dots$	$\frac{1}{a}$	$\dots$	$\frac{5}{3a}$	$\dots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	$\frac{2}{a} - 1$	$\searrow$	$\frac{50}{27a} - 1$	$\nearrow$

$f(t) = 0$ が $0 < t \leq 1$ に異なる3つの実数解をもつとき

$$0 < \frac{1}{a} < \frac{5}{3a} < 1, \quad f(0) = -1 < 0, \quad f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a} - 1 > 0,$$

$$f\left(\frac{5}{3a}\right) = \frac{50}{27a} - 1 < 0, \quad f(1) = (a - 2)^2 \geq 0$$

よって、これらを同時に満たす a の値の範囲は $\frac{50}{27} < a < 2$ ■

- 2 (1) S の集合を次のように定める.

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \quad (a_1 = 1 < a_2 < a_3 < \dots < a_N)$$

条件 1 を満たすとき, $a_N = 2N - 1$ または $a_N = 2N$ である.

- (i) $a_N = 2N - 1$ のとき

$$a_n = 2n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \text{ であるから } 1 \text{ (通り)}$$

- (ii) $a_N = 2N$ のとき

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_N - a_{N-1}$$

の 1 つだけが 3 で, 残りの $N - 2$ 個は 2 であるから

$$\frac{(N-1)!}{1!(N-2)!} = N-1 \text{ (通り)}$$

- (i), (ii) より, 条件 1 を満たす選び方は $1 + (N-1) = N$ (通り)

- (2) 連続する $N - 2$ 個の整数の最小値を k とする.

- (i) $k = a_1$, すなわち, $a_{N-2} - a_1 = N - 3$ のとき

$$N - 1 \leq a_{N-1} < a_N \leq 2N$$

a_{N-1}, a_N の選び方は, $2N - (N - 1) + 1$, すなわち, $N + 2$ 個の中から異なる 2 つを選ぶ組合せであるから

$${}_{N+2}C_2 = \frac{(N+2)(N+1)}{2} \text{ (通り)}$$

- (ii) $k \neq a_1$ のとき ($k \neq 2$), 連続する $N - 2$ 個の整数は

$$k, k+1, \dots, k+N-3 \quad (k = 3, 4, \dots, N+3)$$

であるから, 残りの整数は

$$1, 2, \dots, k-1 \quad \text{および} \quad k+N-2, k+N-1, \dots, 2N$$

この $N + 2$ 個の中から 1 が選ばれ, 残りの 1 個は $k - 1$ を除く N 通りの選び方があるから

$$\sum_{k=3}^{N+3} N = N(N+1)$$

よって $\frac{(N+2)(N+1)}{2} + N(N+1) = \frac{1}{2}(N+1)(3N+2)$ ■

- 3 (1) $C: y = x^2 + ax + b$ と $y = -x^2$ の2式から y を消去して整理すると

$$2x^2 + ax + b = 0$$

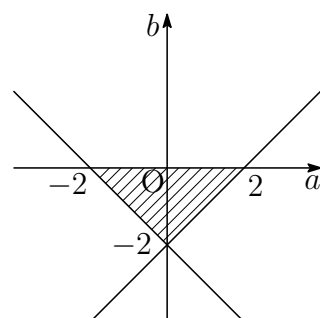
$f(x) = 2x^2 + ax + b$ とおく. C と $y = -x^2$ の共有点の x 座標が $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ であるとき, 次を満たせばよい.

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 > 0 \\ f(0) = b < 0 \\ f(1) = a + b + 2 > 0 \end{cases}$$

それぞれ整理すると

$$\begin{cases} b > a - 2 \\ b < 0 \\ b > -a - 2 \end{cases}$$

よって, 求める領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含まない.



- (2) C の方程式から, $b = -xa + y - x^2$ であるから

$$g(a) = -xa + y - x^2$$

とおくと, $b = g(a)$ は, 傾き $-x$, 切片 $y - x^2$ の直線である.

これが (1) で求めた領域を通る条件, 切片に注目して求めればよい.

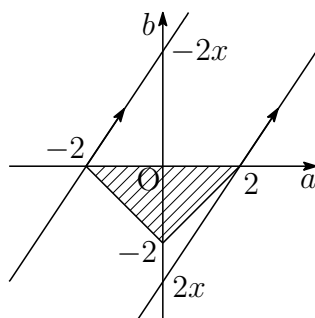
- (i) $x \leq -1$ のとき

$$2x < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 2x < y < x^2 - 2x \quad (x \leq -1)$$

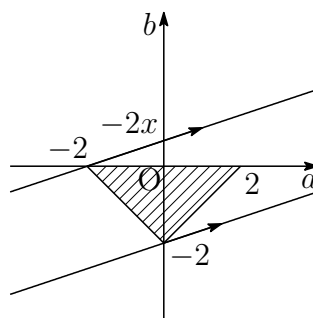
- (ii) $-1 \leq x \leq 0$ のとき

$$-2 < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2 < y < x^2 - 2x \quad (-1 \leq x \leq 0)$$

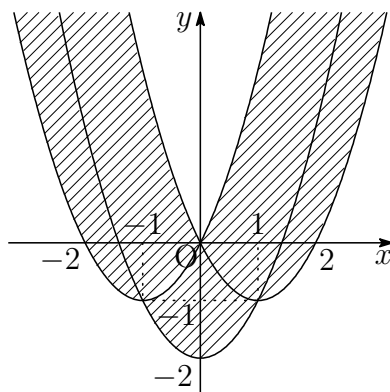
- (i) $x \leq -1$ のとき



- (ii) $-1 \leq x \leq 0$ のとき



$C: y = x^2 + ax + b$ と放物線 $y = -x^2$ が $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ の区間でそれぞれ共有点をもつから、 x と $-x$ の対称性に注意すると、 $x \leq 0$ で C の通りうる範囲と $0 \leq x$ で C の通りうる範囲は y 軸について対称である。よって、求める領域は、下の図の斜線部分で境界線を含まない。



4 (1) $KA = LB$ より

$$KA - KB = LB - KB \quad \text{ゆえに} \quad K(A - B) = (L - K)B$$

K, L をそれぞれ 4 で割った余りが等しいから $L - K \equiv 0 \pmod{4}$

$$K(A - B) \equiv 0 \pmod{4}$$

K は正の奇数であるから $A - B \equiv 0$ すなわち $A \equiv B \pmod{4}$

よって、 A を 4 で割った余りは、 B を 4 で割った余りと等しい。

$$(2) \quad A = {}_{4a+1}C_{4b+1} = \prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j}, \quad B = {}_aC_b = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k} \quad \text{よ り}$$

$$\begin{aligned} A &= \prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j} \\ &= \prod_{k=0}^b \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+1)}{4b+1-(4k+1)} \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+2)}{4b+1-(4k+2)} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+3)}{4b+1-(4k+3)} \\ &= (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k} \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-1-4k}{4b-1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{2a-1-2k}{2b-1-2k} \\ &= (4a+1-4b)B \prod_{k=0}^{b-1} \frac{(4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k)}{(4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k)} \end{aligned}$$

これから、正の奇数 K, L を

$$\begin{aligned} K &= \prod_{k=0}^{b-1} (4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k) \\ L &= (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} (4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k) \end{aligned}$$

とおくと、次式を満たす正の奇数 K, L が存在する。

$$A = \frac{LB}{K} \quad \text{すなわち} \quad KA = LB$$

(3) 2つの奇数 K, L の因数は、法 4 について ($a - b$ は 2 で割り切れる)

$$4a + 1 - 4b \equiv 1 \pmod{4}$$

$$4b + 1 - 4k \equiv 4a + 1 - 4k \pmod{4}$$

$$4b - 1 - 4k \equiv 4a - 1 - 4k \pmod{4}$$

$$2b - 1 - 2k = 2a - 1 - 2k - 2(a - b) \equiv 2a - 1 - 2k \pmod{4}$$

したがって、2つの奇数 K, L について $K \equiv L \pmod{4}$

これと $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$, $B = {}_aC_b$ を (1) の結論に適用すると

$$(*) \quad {}_{4a+1}C_{4b+1} \equiv {}_aC_b \pmod{4}$$

よって、 ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは、 ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しい。

(4) $(*)$ の左辺は $a = 505$, $b = 9$ を代入したもので $a - b$ は 2 で割り切れるから

$${}_{2021}C_{37} \equiv {}_{505}C_9 \pmod{4}$$

さらに、上式の右辺は、 $(*)$ の左辺に $a = 126$, $b = 2$ を代入したもので $a - b$ は 2 で割り切れるから

$${}_{505}C_9 \equiv {}_{126}C_2 \pmod{4}$$

$$\text{このとき } {}_{126}C_2 = \frac{126 \cdot 125}{2 \cdot 1} = 63 \cdot 125 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{4}$$

したがって ${}_{2021}C_{37} \equiv 3 \pmod{4}$ よって 求める余りは **3** ■

3.22 2022年(100分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 a, b を実数とする. 座標平面上の放物線 $y = x^2 + ax + b$ を C とおく. C は, 原点で垂直に交わる2本の接線 ℓ_1, ℓ_2 を持つとする. ただし, C と ℓ_1 の接点 P_1 の x 座標は, C と ℓ_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする.

- (1) b を a で表せ. また a の値はすべての実数を取りうることを示せ.
- (2) $i = 1, 2$ に対し, 円 D_i を, 放物線 C の軸上に中心を持ち, 点 P_i で ℓ_i と接するものと定める. D_2 の半径が D_1 の半径の2倍となるとき, a の値を求めよ.

- 2 $y = x^3 - x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする. C 上の点 $P(\alpha, \alpha^3 - \alpha)$ を通り, 点 P における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ とする. C と ℓ は相異なる3点で交わるとする.

- (1) α のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) C と ℓ の点 P 以外の2つの交点の x 座標を β, γ とする. ただし $\beta < \gamma$ とする. $\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 \neq 0$ となることを示せ.
- (3) (2) の β, γ を用いて,

$$u = 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1}$$

と定める. このとき, u のとりうる値の範囲を求めよ.

- 3 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n^2 + n(n+2) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_{2022} を3で割った余りを求めよ.
- (2) $a_{2022}, a_{2023}, a_{2024}$ の最大公約数を求めよ.

- 4 O を原点とする座標平面上で考える. 0 以上の整数 k に対して, ベクトル $\vec{v}_k$ を

$$\vec{v}_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{3}, \sin \frac{2k\pi}{3} \right)$$

と定める. 投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて, 座標平面上に点 $X_0, X_1, X_2, \dots, X_N$ を以下の規則 (i), (ii) に従って定める.

- (i) X_0 は O にある.
 (ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする. X_{n-1} が定まったとし, X_n を次のように定める.

- n 回目のコイン投げで表が出た場合,

$$\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{OX_{n-1}} + \vec{v}_k$$

により X_n を定める. ただし, k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする.

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合, X_n を X_{n-1} と定める.

- (1) $N = 5$ とする. X_5 が O にある確率を求めよ.
 (2) $N = 98$ とする. X_{98} が O にあり, かつ, 表が 90 回, 裏が 8 回出る確率を求めよ.

解答例

- 1** (1) 原点を通る直線を $\ell: y = kx$ とする. 直線 ℓ と放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 + (a - k)x + b = 0 \quad (*)$$

ℓ と C が接するとき, 係数について

$$(a - k)^2 - 4b = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k^2 - 2ak + a^2 - 4b = 0 \quad (**)$$

k に関する2次方程式の解を k_1, k_2 とすると, 解と係数の関係により

$$k_1 k_2 = a^2 - 4b$$

このとき, ℓ_1 と ℓ_2 が垂直であるから, $k_1 k_2 = -1$ より

$$a^2 - 4b = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{a^2 + 1}{4}$$

これを (**) に代入して

$$k^2 - 2ak - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = a \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

C と ℓ の接点の x 座標は (*) の係数から

$$-\frac{a - k}{2} = \frac{k - a}{2} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2} \quad (\text{複号同順})$$

条件から, P_1, P_2 の x 座標は, それぞれ

$$-\sqrt{a^2 + 1}, \sqrt{a^2 + 1}$$

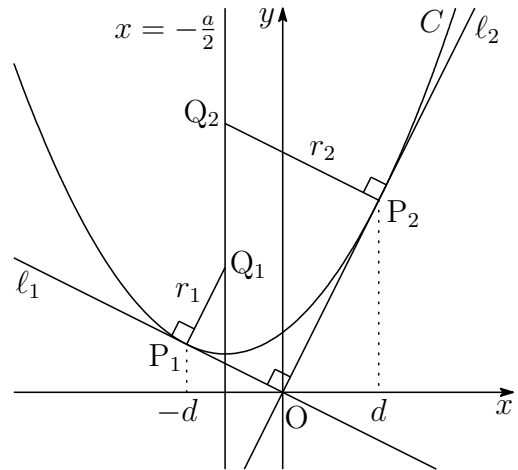
したがって, ℓ_1, ℓ_2 の傾きは, それぞれ

$$a - \sqrt{a^2 + 1}, \quad a + \sqrt{a^2 + 1}$$

上の諸式において表れる $\sqrt{a^2 + 1}$ の中の符号は, すべての a に対して正である. よって, a の値はすべての実数をとる.

- (2) 2 円 D_1, D_2 の中心をそれぞれ, Q_1, Q_2 とし, 半径を r_1, r_2 とする.
 $d = \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$ とおくと, P_1, P_2 の x 座標は, それぞれ, $-d, d$ である.
 $P_1Q_1 \parallel \ell_2, P_2Q_2 \parallel \ell_1$ であるから,
 P_1Q_1, P_2Q_2 の偏角をそれぞれ α, β とすると ($0 < \alpha < \beta < \pi$)

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= a + \sqrt{a^2+1}, \\ \tan \beta &= a - \sqrt{a^2+1}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}r_1 \cos \alpha &= -\frac{a}{2} - (-d) = \frac{-a + \sqrt{a^2+1}}{2} = \frac{1}{2(a + \sqrt{a^2+1})} = \frac{1}{2 \tan \alpha}, \\ r_2 |\cos \beta| &= d - \left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a + \sqrt{a^2+1}}{2} = \frac{1}{2|a - \sqrt{a^2+1}|} = \frac{1}{2|\tan \beta|}\end{aligned}$$

上の 2 式から $r_1 = \frac{1}{2 \sin \alpha}, r_2 = \frac{1}{2 \sin \beta}$

$$\begin{aligned}r_1^2 &= \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right) \\ r_2^2 &= \frac{1}{4 \sin^2 \beta} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \beta}\right) = \frac{1}{4} (1 + \tan^2 \alpha)\end{aligned}$$

$r_2 = 2r_1$ より, $r_2^2 = 4r_1^2$ であるから

$$\frac{1}{4} (1 + \tan^2 \alpha) = 1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} \quad \text{整理すると} \quad \tan^4 \alpha - 3 \tan^2 \alpha - 4 = 0$$

ゆえに $(\tan^2 \alpha + 1)(\tan^2 \alpha - 4) = 0$ $\tan \alpha > 0$ より $\tan \alpha = 2$

したがって $a + \sqrt{a^2+1} = 2$ ゆえに $\sqrt{a^2+1} = 2 - a \quad \dots \textcircled{1}$

$$a^2 + 1 = (2 - a)^2 \quad \text{このとき, } \textcircled{1} \text{ に注意して} \quad a = \frac{3}{4}$$



2 (1) $C: y = x^3 - x$ を微分すると $y' = 3x^2 - 1$

$3\alpha^2 - 1 = 0$ のとき, ℓ は y 軸と平行となり, C と ℓ は 1 点で交わるから, 不適. ゆえに, $3\alpha^2 - 1 \neq 0$

ℓ は, C 上の点 $(\alpha, \alpha^3 - \alpha)$ の点における法線であるから ($3\alpha^2 - 1 \neq 0$)

$$y = -\frac{1}{3\alpha^2 - 1}(x - \alpha) + \alpha^3 - \alpha$$

C と ℓ の方程式から, y を消去すると

$$\begin{aligned} x^3 - x &= -\frac{1}{3\alpha^2 - 1}(x - \alpha) + \alpha^3 - \alpha \\ x^3 - \alpha^3 - (x - \alpha) + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}(x - \alpha) &= 0 \\ (x - \alpha) \left(x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}$ とおくと

$$f(\alpha) = 3\alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1} = \frac{(3\alpha^2 - 1)^2 + 1}{3\alpha^2 - 1} \neq 0$$

2 次方程式 $f(x) = 0$ の係数について

$$\begin{aligned} D &= \alpha^2 - 4 \left(\alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1} \right) \\ &= \frac{-9\alpha^4 + 15\alpha^2 - 8}{3\alpha^2 - 1} = -\frac{9\left(\alpha^2 - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{7}{4}}{3\alpha^2 - 1} > 0 \end{aligned}$$

したがって $3\alpha^2 - 1 < 0$ よって $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) β, γ は, 2 次方程式 $f(x) = 0$ の解であるから, 解と係数の関係により

$$\beta + \gamma = -\alpha, \quad \beta\gamma = \alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} \beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 &= (\beta + \gamma)^2 - \beta\gamma - 1 \\ &= (-\alpha)^2 - \left(\alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1} \right) - 1 \\ &= -\frac{1}{3\alpha^2 - 1} \neq 0 \end{aligned} \quad (*)$$

(3) (1), (2) の結果から

$$\begin{aligned}
 u &= 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1} \\
 &= 4\alpha^3 - (3\alpha^2 - 1) \\
 &= 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}\right)
 \end{aligned}$$

$g(\alpha) = 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1$ とおくと

$$g'(\alpha) = 12\alpha^2 - 6\alpha = 6\alpha(2\alpha - 1)$$

これから, $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$ における $g(\alpha)$ の増減表は

α	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\dots$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$g'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(\alpha)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで

$$\begin{aligned}
 g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -\frac{4\sqrt{3}}{9}, \quad g(0) = 1, \\
 g\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{4}, \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{48}}{9} < 1
 \end{aligned}$$

したがって $-\frac{4\sqrt{3}}{9} < g(\alpha) \leq 1$ よって $-\frac{4\sqrt{3}}{9} < u \leq 1$ ■

3 (1) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n^2 + n(n+2)$ より, 法3について

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv 1, & a_2 &\equiv 1^2 + 1 \cdot 3 \equiv 1, & a_3 &\equiv 1^2 + 2 \cdot 4 \equiv 0, \\ a_4 &\equiv 0^2 + 3 \cdot 5 \equiv 0, & a_5 &\equiv 0^2 + 4 \cdot 6 \equiv 0, & a_6 &\equiv 0^2 + 5 \cdot 7 \equiv 2 \end{aligned}$$

$m = 1, 2, 3, \dots$ とし, 法3について

$$\begin{aligned} a_{6m-5} &\equiv 1, & a_{6m-4} &\equiv 1, & a_{6m-3} &\equiv 0, \\ a_{6m-2} &\equiv 0, & a_{6m-1} &\equiv 0, & a_{6m} &\equiv 2 \end{aligned} \quad (*)$$

とする.

[1] $m = 1$ のとき, $(*)$ は成立する.

[2] $m = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると, 法3について

$$\begin{aligned} a_{6k+1} &= a_{6k}^2 + 6k(6k+2) \equiv 2^2 + 0 \cdot 2 \equiv 1, \\ a_{6k+2} &= a_{6k+1}^2 + (6k+1)(6k+3) \equiv 1^2 + 1 \cdot 0 \equiv 1, \\ a_{6k+3} &= a_{6k+2}^2 + (6k+2)(6k+4) \equiv 1^2 + 2 \cdot 1 \equiv 0, \\ a_{6k+4} &= a_{6k+3}^2 + (6k+3)(6k+5) \equiv 0^2 + 0 \cdot 2 \equiv 0, \\ a_{6k+5} &= a_{6k+4}^2 + (6k+4)(6k+6) \equiv 0^2 + 1 \cdot 0 \equiv 0, \\ a_{6k+6} &= a_{6k+5}^2 + (6k+5)(6k+7) \equiv 0^2 + 2 \cdot 1 \equiv 2 \end{aligned}$$

したがって, $m = k+1$ のときも $(*)$ は成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 m について, $(*)$ は成立する.

$a_{2022} = a_{6 \cdot 337}$ であるから, $(*)$ より $a_{2022} \equiv 2 \pmod{3}$

よって, a_{2022} を3で割った余りは **2**

(2) $N = 2022$ とすると

$$a_{N+1} - a_N^2 = N(N+2), \quad a_{N+2} - a_{N+1}^2 = (N+1)(N+3)$$

a_N, a_{N+1}, a_{N+2} の最大公約数を p とすると, $N(N+2), (N+1)(N+3)$ は p を因数にもつ. $N, N+1, N+2, N+3$ は連続する4整数であるから, p は3以下であるが, (1)の結果から, a_N は3で割り切れない. また, $(N+1)(N+3)$ は奇数であるから, p は2でない.

よって, 求める最大公約数は **1** ■

4 (1) $\vec{v}_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{3}, \sin \frac{2k\pi}{3} \right)$ より

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_3 = \vec{v}_6 = \cdots, \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_4 = \vec{v}_7 = \cdots, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_5 = \vec{v}_8 = \cdots$$

$\vec{u}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) を次のように定める.

$$\vec{u}_j = \begin{cases} \vec{v}_k & (j \text{ 回目で表が出て, } k \text{ は } j \text{ 回目までに裏が出た回数}) \\ \vec{0} & (j \text{ 回目で裏が出る}) \end{cases}$$

与えられた漸化式から

$$\overrightarrow{OX_n} = \sum_{j=1}^n \vec{u}_j$$

$\vec{u}_j \in \{\vec{0}, \vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ であり, 上式の右辺の $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ の個数をそれぞれ a, b, c とすると, X_n が O にあるとき, $\vec{v}_0 = -(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ に注意して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX_n} &= a\vec{v}_0 + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 = -a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 \\ &= (b-a)\vec{v}_1 + (c-a)\vec{v}_2 = \vec{0} \end{aligned}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は, 1 次独立であるから

$$b-a = c-a = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = b = c \quad (*)$$

このとき, $a+b+c \leq 5$ であるから $a = b = c = 0, 1$

(i) $a = b = c = 0$ のとき, 5 回とも裏が出る確率であるから $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

(ii) $a = b = c = 1$ のとき, 裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を α_k とすると ($k = 0, 1, 2$)

$$\overrightarrow{OX_5} = \alpha_0 \vec{v}_0 + \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 3, \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 \text{ より } \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

このときの確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

(i), (ii) より, 求める確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$

- (2) (*) より, X_n が O にあるとき, 表の出た回数 $a + b + c = 90$ について,
 $a = b = c$ であるから

$$a = b = c = 30$$

裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を t_k とすると ($0 \leq k \leq 8$)

$$t_0 + t_3 + t_6 = 30$$

$$t_1 + t_4 + t_7 = 30$$

$$t_2 + t_5 + t_8 = 30$$

上の3式を満たす t_k の組は, すべて

$${}_3H_{30} = {}_{3+30-1}C_{30} = {}_{32}C_{30} = {}_{32}C_2 = 16 \cdot 31$$

よって, 求める確率は

$$(16 \cdot 31)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{98} = \frac{31^3}{2^{86}}$$



3.23 2023 年 (100 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 k を正の実数とし, 2 次方程式 $x^2 + x - k = 0$ の 2 つの実数解を α, β とする. k が $k > 2$ の範囲を動くとき,

$$\frac{\alpha^3}{1-\beta} + \frac{\beta^3}{1-\alpha}$$

の最小値を求めよ.

- 2 座標平面上の放物線 $y = 3x^2 - 4x$ を C とおき, 直線 $y = 2x$ を ℓ とおく. 実数 t に対して, C 上の点 $P(t, 3t^2 - 4t)$ と ℓ の距離を $f(t)$ とする.

- (1) $-1 \leq a \leq 2$ の範囲の実数 a に対し, 定積分

$$g(a) = \int_{-1}^a f(t) dt$$

を求めよ.

- (2) a が $0 \leq a \leq 2$ の範囲を動くとき, $g(a) - f(a)$ の最大値および最小値を求めよ.

- 3 黒玉 3 個, 赤玉 4 個, 白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し, 取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる. ただし, 袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする.

- (1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ.
 (2) どの赤玉も隣り合わないとき, どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ.

- 4 半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A, B, C, D が

$$AB = 1, \quad AC = BC, \quad AD = BD, \quad \cos \angle ACB = \cos \angle ADB = \frac{4}{5}$$

を満たしているとする.

- (1) 三角形 ABC の面積を求めよ.
 (2) 四面体 ABCD の体積を求めよ.

解答例

1 2次方程式 $x^2 + x - k = 0$ の解が α, β であるから、解との係数の関係により

$$\alpha + \beta = -1 \quad (\beta = -1 - \alpha), \quad \alpha\beta = -k$$

また、 $\alpha^2 + \alpha - k = 0$ より、 $\alpha^2 = k - \alpha$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^3}{1-\beta} &= \frac{\alpha^3}{1-(-1-\alpha)} = \frac{\alpha^3+8}{\alpha+2} - \frac{8}{\alpha+2} \\ &= \alpha^2 - 2\alpha + 4 - \frac{8}{\alpha+2} \\ &= (k-\alpha) - 2\alpha + 4 - \frac{8}{\alpha+2} \\ &= k + 4 - 3\alpha - \frac{8}{\alpha+2} \end{aligned}$$

α と β の対称性から

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^3}{1-\beta} + \frac{\beta^3}{1-\alpha} &= 2(k+4) - 3(\alpha+\beta) - 8\left(\frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta+2}\right) \\ &= 2(k+4) - 3(-1) - \frac{8(\alpha+\beta+4)}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4} \\ &= 2k+11 - \frac{8(-1+4)}{-k+2(-1)+4} \\ &= 15 + 2\left(k-2 + \frac{12}{k-2}\right) \end{aligned}$$

$k > 2$ より、2正数 $k-2, \frac{12}{k-2}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$k-2 + \frac{12}{k-2} \geq 2\sqrt{(k-2) \cdot \frac{12}{k-2}} = 4\sqrt{3}$$

したがって
$$\frac{\alpha^3}{1-\beta} + \frac{\beta^3}{1-\alpha} \geq 15 + 8\sqrt{3}$$

上式において、等号が成立するのは

$$k-2 = \frac{12}{k-2} \quad \text{すなわち} \quad k = 2 + 2\sqrt{3}$$

よって、求める最小値は $15 + 8\sqrt{3}$ ■

- 2 (1) 点 $P(t, 3t^2 - 4t)$ と直線 $\ell: -2x + y = 0$ との距離 $f(t)$ は

$$f(t) = \frac{|-2t + (3t^2 - 4t)|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|3t^2 - 6t|}{\sqrt{5}}$$

- (i) $-1 \leq a \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_{-1}^a f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{-1}^a (3t^2 - 6t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[t^3 - 3t^2 \right]_{-1}^a = \frac{1}{\sqrt{5}} (a^3 - 3a^2 + 4) \end{aligned}$$

- (ii) $0 \leq a \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_{-1}^a f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{-1}^0 (3t^2 - 6t) dt - \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^a (3t^2 - 6t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[t^3 - 3t^2 \right]_{-1}^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[t^3 - 3t^2 \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} (a^3 - 3a^2 - 4) \end{aligned}$$

- (2) $0 \leq a \leq 2$ のとき $f(a) = -\frac{1}{\sqrt{5}}(3a^2 - 6a)$

上式および (ii) の結果から

$$\begin{aligned} g(a) - f(a) &= -\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3 - 3a^2 - 4) + \frac{1}{\sqrt{5}}(3a^2 - 6a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-a^3 + 6a^2 - 6a + 4) \end{aligned}$$

$$h(a) = -a^3 + 6a^2 - 6a + 4 \text{ とおくと } h'(a) = -3(a^2 - 4a + 2)$$

$$h'(a) = 0 \text{ とすると } a = 2 \pm \sqrt{2}$$

a	0	$\dots$	$2 - \sqrt{2}$	$\dots$	2
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$	4	$\searrow$	最小	$\nearrow$	8

$$h(a) = \frac{1}{3}(a-2)h'(a) + 4a \text{ より } h(2 - \sqrt{2}) = 4(2 - \sqrt{2})$$

$$\text{よって 最大値 } \frac{1}{\sqrt{5}}h(2) = \frac{8}{\sqrt{5}}, \text{ 最小値 } \frac{1}{\sqrt{5}}h(2 - \sqrt{2}) = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{\sqrt{5}} \quad \blacksquare$$

- 3 (1) 黒玉3個, 赤玉4個, 白玉5個の12個の玉の並べ方の総数を N とすると

$$N = \frac{12!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

黒玉3個と, 白玉5個の8個を並べ, その8個の玉の両側と間の9カ所に赤玉4個を並べる場合の総数を A とすると

$$A = \frac{8!}{3!5!} \times \frac{9!}{4!5!} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \quad (\text{通り})$$

よって, 求める確率 p は

$$p = \frac{A}{N} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \bigg/ \frac{12!}{3!4!5!} = \frac{8!}{5!} \cdot \frac{9!}{12!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55}$$

- (2) 黒玉3個のうち2個をひとまとめにして, $\boxed{\text{黒黒}}$, 黒玉1個, 白玉5個を並べ, その7個の両側と間の8カ所に赤玉4個を並べる場合の総数を B とすると

$$B = \frac{7!}{1!1!5!} \times \frac{8!}{4!4!} = \frac{7!8!}{4!4!5!} \quad (\text{通り})$$

この中には, $\boxed{\text{黒黒}}\text{黒}$, または, $\text{黒}\boxed{\text{黒黒}}$ のように, 連続して並ぶ黒玉3個が重複する場合がある. 黒玉3個をひとまとめにして, $\boxed{\text{黒黒黒}}$, 白玉5個を並べ, その6個の両側と間の7カ所に赤玉4個を並べる場合の総数を C とすると

$$C = \frac{6!}{1!5!} \times \frac{7!}{4!3!} = \frac{6!7!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

どの赤玉も隣り合わないとき, 隣り合う黒玉が存在する条件付き確率は

$$\begin{aligned} \frac{B-C}{A} &= \left(\frac{7!8!}{4!4!5!} - \frac{6!7!}{3!4!5!} \right) \cdot \frac{3!4!5!5!}{8!9!} \\ &= \left(\frac{7!8!}{4!} - \frac{6!7!}{3!} \right) \cdot \frac{3!5!}{8!9!} \\ &= (8 \cdot 7 - 4) \frac{6!7!}{4!} \cdot \frac{3!5!}{8!9!} \\ &= 52 \cdot \frac{6!}{8!} \cdot \frac{7!}{9!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot 3! = \frac{65}{168} \end{aligned}$$

求める確率は, この余事象の確率であるから $1 - \frac{65}{168} = \frac{103}{168}$ ■

- 4 (1) $A = B$ より, $C = \pi - 2A$ であるから

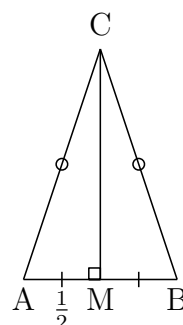
$$\cos(\pi - 2A) = \frac{4}{5} \quad \text{ゆえに} \quad 1 - 2\cos^2 A = \frac{4}{5}$$

$$A < \frac{\pi}{2} \text{ に注意して } \cos A = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} \text{ より } \tan A = 3$$

$$AB \text{ の中点を } M \text{ とすると } CM = AM \tan A = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって, } \triangle ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} AB \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$



- (2) CD の中点を H とすると $CD \perp MH$

対称性から球の中心を O とすると, O は MH 上にある.

$$OA = 1, AM = \frac{1}{2}, OA^2 = AM^2 + OM^2 \text{ より } OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta = \angle COH$ とすると

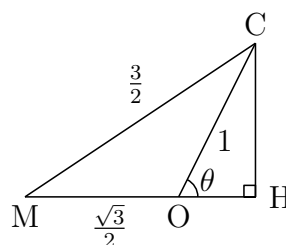
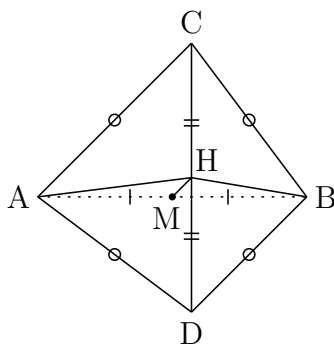
$$\cos(\pi - \theta) = \frac{OM^2 + OC^2 - CM^2}{2OM \cdot OC} = \frac{\frac{3}{4} + 1 - \frac{9}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ より } OH = OC \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}, CH = OC \sin \theta = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$$

$\triangle ABH$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}(OM + OH) \cdot AB = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって, 求める体積は } 2 \times \frac{1}{3} S \cdot CH = 2 \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11}}{9}$$



3.24 2024年(100分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 座標平面上で、放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ が2点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $Q(-\cos \theta, \sin \theta)$ を通り、点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2 + y^2 = 1$ と共通の接線を持っている。ただし、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

- (1) a, b, c を $s = \sin \theta$ を用いて表せ。
- (2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ。
- (3) $A \geq \sqrt{3}$ を示せ。

- 2 以下の問いに答えよ。必要ならば、 $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい。

- (1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。
- (2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ。

- 3 座標平面上に2点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$ となる。 x 軸上の2点 $P(p, 0)$, $Q(q, 0)$ が、次の条件 (i), (ii) をともに満たすとする。

- (i) $0 < p < 1$ かつ $p < q$
- (ii) 線分 AP の中点を M とするとき、 $\angle OAP = \angle PMQ$

- (1) q を p を用いて表せ。
- (2) $q = \frac{1}{3}$ となる p の値を求めよ。
- (3) $\triangle OAP$ の面積を S , $\triangle PMQ$ の面積を T とする。 $S > T$ となる p の範囲を求めよ。

- 4 n を5以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり、それに内接する正 n 角形を考える。 n 個の頂点から異なる4点を同時に選ぶ。ただし、どの4点も等確率で選ばれるものとする。選んだ4点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。

解答例

- 1** (1) 2 点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $Q(-\cos \theta, \sin \theta)$ は $C: y = ax^2 + bx + c$ 上の点であるから ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)

$$\sin \theta = a(\pm \cos \theta)^2 + b(\pm \cos \theta) + c$$

$$\text{したがって } b = 0, \quad \sin \theta = a \cos^2 \theta + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = ax^2 + c \text{ とおくと } f'(x) = 2ax$$

$$\vec{v} = (1, f'(\cos \theta)) \text{ とすると, } \vec{v} \perp \overrightarrow{OP} \text{ であるから, } \vec{v} \cdot \overrightarrow{OP} = 0 \text{ より}$$

$$1 \cdot \cos \theta + (2a \cos \theta) \cdot \sin \theta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{2 \sin \theta} \quad \cdots \textcircled{2}$$

② を ① に代入すると

$$\sin \theta = -\frac{\cos^2 \theta}{2 \sin \theta} + c \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{2 \sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + 1}{2 \sin \theta}$$

$$s = \sin \theta \text{ より } a = -\frac{1}{2s}, \quad b = 0, \quad c = \frac{s^2 + 1}{2s}$$

- (2) (1) の結果から, 曲線 C の方程式は ($0 < s < 1$)

$$y = -\frac{1}{2s}x^2 + \frac{s^2 + 1}{2s} = -\frac{1}{2s}(x + \sqrt{s^2 + 1})(x - \sqrt{s^2 + 1})$$

よって, 求める図形の面積 A は

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2s} \int_{-\sqrt{s^2+1}}^{\sqrt{s^2+1}} (x + \sqrt{s^2+1})(x - \sqrt{s^2+1}) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2s} (2\sqrt{s^2+1})^3 = \frac{2}{3s} (s^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から, 相加平均・相乗平均の大小関係により ³

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \left(\frac{s^2 + 1}{s^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \left(s^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{s^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \left(s^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\geq \frac{2}{3} \left(3 \sqrt[3]{s^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{上式において等号が成立するのは } s^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}} \quad \text{すなわち} \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \blacksquare$$

³ http://kumamoto.s12.xrea.com/2022/sigaidai_2022.pdf **3**

- 2** (1) $5^n > 10^{19}$ より $\log_{10} 5^n > 19$

$$n(1 - \log_{10} 2) > 19 \quad \text{これを解いて} \quad n > \frac{19}{1 - \log_{10} 2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{31}{100} \quad \text{より,} \quad \frac{69}{100} < 1 - \log_{10} 2 < \frac{7}{10} \quad \text{であるから}$$

$$27\frac{1}{7} = \frac{190}{7} < \frac{19}{1 - \log_{10} 2} < \frac{1900}{69} = 27\frac{37}{69}$$

したがって、 $\textcircled{1}$ を満たす最小の自然数 n は $n = 28$

- (2) 数列 $\{5^m + 4^m\}$ は単調増加列であるから、(1) の結果から、 $5^m + 4^m > 10^{19}$ を満たす最小の自然数 m は、28 以下である.

$$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 < 0.7, \quad 0.3 < \log_{10} 2 \quad \text{より}$$

$$\log_{10} 5^{27} = 27 \log_{10} 5 < 27 \times 0.7 = 18.9 = 18 + 3 \times 0.3$$

$$< \log_{10} 10^{18} + 3 \log_{10} 2 = \log_{10} (8 \times 10^{18}),$$

$$\log_{10} 4^{27} = 27 \log_{10} 4 < 27 \times 0.62 = 16.74 < \log_{10} 10^{17}$$

$$5^{27} < 8 \times 10^{18}, \quad 4^{27} < 10^{17} \quad \text{であるから}$$

$$5^{27} + 4^{27} < 8 \times 10^{18} + 10^{17} = 8.1 \times 10^{18} < 10^{19}$$

よって、求める最小の自然数 m は $m = 28$ ■

- 3 (1) $\angle OAP = \theta$ とおくと ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$), $\tan \theta = p$ より

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2p}{1 - p^2}$$

上式から直線 MQ の傾きは

$$-\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = -\frac{1}{\tan 2\theta} = -\frac{1 - p^2}{2p}$$

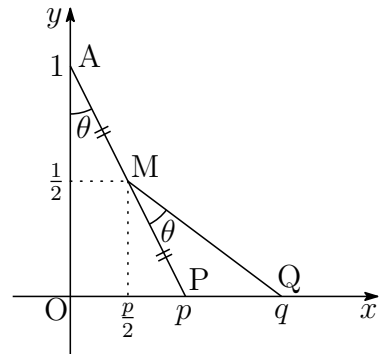
点 $M\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通る直線 MQ の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1 - p^2}{2p} \left(x - \frac{p}{2}\right)$$

この直線が点 $Q(q, 0)$ を通るから

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1 - p^2}{2p} \left(q - \frac{p}{2}\right)$$

$$q \text{ について解くと } q = \frac{p(3 - p^2)}{2(1 - p^2)}$$



- (2) (1) の結果に $q = \frac{1}{3}$ を代入すると

$$\frac{1}{3} = \frac{p(3 - p^2)}{2(1 - p^2)} \quad \text{整理すると} \quad 3p^3 - 2p^2 - 9p + 2 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (p - 2)(3p^2 + 4p - 1) = 0$$

$$0 < p < q = \frac{1}{3} \text{ に注意して, これを解くと } p = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$$

- (3) (1) の結果により

$$S = \triangle OAP = \frac{1}{2} \cdot p \cdot 1 = \frac{p}{2}$$

$$\begin{aligned} T = \triangle PMQ &= \frac{1}{2}(q - p) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(q - p) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{p(3 - p^2)}{2(1 - p^2)} - p \right\} = \frac{p(p^2 + 1)}{8(1 - p^2)} \end{aligned}$$

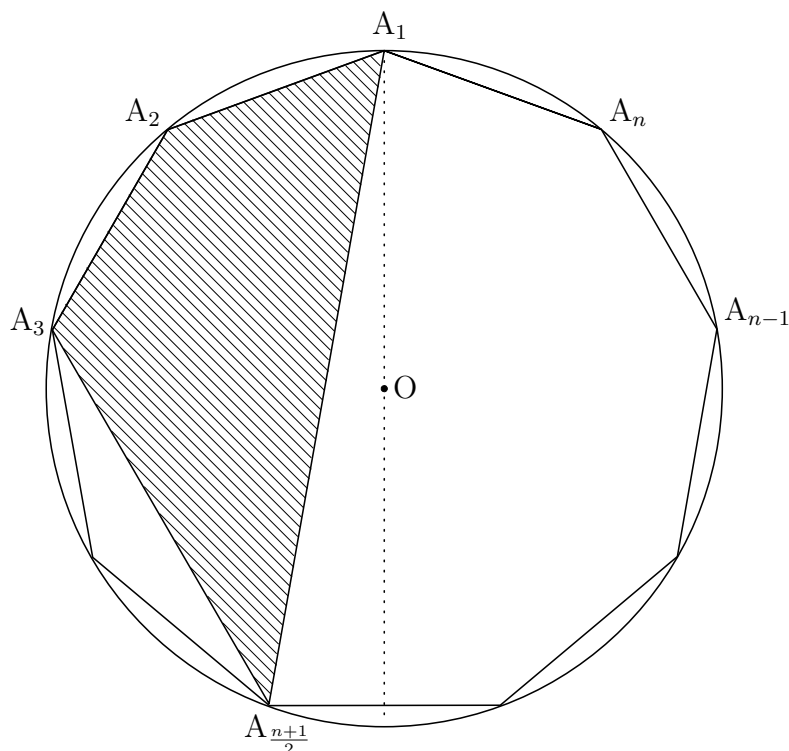
$$S > T \text{ より } (0 < p < 1) \quad \frac{p}{2} > \frac{p(p^2 + 1)}{8(1 - p^2)} \quad \text{ゆえに} \quad 5p^2 < 3$$

$$\text{よって} \quad 0 < p < \frac{\sqrt{15}}{5}$$

■

4 n 個の頂点を反時計回りに $A_1, A_2, \dots, A_n$ をとる (n は 5 以上の奇数).

2 点 A_ℓ, A_m について, $\ell \equiv m \pmod{n}$ のとき, これらの 2 点は同一の点する.



$i < j < k < l \leq i + \frac{n-1}{2}$ とし, 点 A_i に対して 3 点 A_j, A_k, A_l をとると, 四角形 $A_i A_j A_k A_l$ は ($n \geq 7$), その内部に O を含まない. i の選び方 n 通りに対して, 3 点 A_j, A_k, A_l の選び方が $\frac{n-1}{2}C_3$ 通りあるから

$$1 - p_n = n \times \frac{n-1}{2}C_3 / {}_nC_4$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - n \times \frac{n-1}{2}C_3 / {}_nC_4 \\ &= 1 - n \times \frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right) \left(\frac{n-1}{2} - 2 \right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\ &= \frac{n+1}{2(n-2)} \end{aligned}$$

$p_5 = 1$ であるから, 上式は $n = 5$ のときも成立する.

$$\text{よって} \quad p_n = \frac{n+1}{2(n-2)}$$

補足 例えば, 上の図で A_1 を除く点線の左右には $\frac{n-1}{2}$ 個ずつ頂点が存在する. ■

第 4 章 一橋大学

出題分野 (2011-2024) 120 分

◀	一橋大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	数と式														
	2 次関数														
	図形と計量	2													
	データの分析														
II	式と証明														
	複素数と方程式							3				3			3
	図形と方程式					2		4		2・4			3		
	三角関数				3・4						2				
	指数関数と対数関数							1							
	微分法と積分法	3	2・3	3	2		4		2・5	3	4	4・5	2	2	2
A	場合の数と確率				5	3	3		3	5	5	5	5	5	5
	整数の性質	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
	図形の性質														
B	平面上のベクトル			2			5*				3				
	空間のベクトル	4	4	4		4		5	4				4	3	4
	数列	5		5		5*	2					2		4	
	確率分布と統計		5			6*	6*								

数字は問題番号 (5*, 6*の 2 題から 1 題選択)

4.11 2011年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

- 1 (1) 自然数 x, y は, $1 < x < y$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{3}$$

をみたす. x, y の組をすべて求めよ.

- (2) 自然数 x, y, z は, $1 < x < y < z$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5}$$

をみたす. x, y, z の組をすべて求めよ.

- 2 点 O を中心とする半径 r の円周上に, 2 点 A, B を $\angle AOB < \frac{\pi}{2}$ となるようにとり $\theta = \angle AOB$ とおく. この円周上に点 C を, 線分 OC が線分 AB と交わるようにとり, 線分 AB 上に点 D をとる. また, 点 P は線分 OA 上を, 点 Q は線分 OB 上を, それぞれ動くとする.

- (1) $CP + PQ + QC$ の最小値を r と θ で表せ.
 (2) $a = OD$ とおく. $DP + PQ + QD$ の最小値を a と θ で表せ.
 (3) さらに, 点 D が線分 AB 上を動くときの $DP + PQ + QD$ の最小値を r と θ で表せ.

- 3 xy 平面上に放物線 $C: y = -3x^2 + 3$ と 2 点 $A(1, 0), P(0, 3p)$ がある. 線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している.

- (1) 定数 p の存在する範囲を求めよ.
 (2) S_1 を, C と線分 AQ で囲まれた領域とし, S_2 を, C , 線分 QP , および y 軸とで囲まれた領域とする. S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ.

- 4 a, b, c を正の定数とする. 空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある.

- (1) 辺 AB を底辺とするとき, $\triangle ABC$ の高さを a, b, c で表せ.
 (2) $\triangle ABC$, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の面積をそれぞれ S, S_1, S_2, S_3 とする. ただし, O は原点である. このとき, 不等式

$$\sqrt{3}S \geq S_1 + S_2 + S_3$$

が成り立つことを示せ.

- (3) (2) の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ.

- 5 A と B の 2 人が, 1 個のサイコロを次の手順により投げ合う.

1 回目は A が投げる.

1, 2, 3 の目が出たら, 次の回には同じ人が投げる.

4, 5 の目が出たら, 次の回には別の人が投げる.

6 の目が出たら, 投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない.

- (1) n 回目に A がサイコロを投げる確率 a_n を求めよ.
 (2) ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率 p_n を求めよ.
 (3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{3} \quad \text{より} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{2}{3}$$

したがって $4xy - 6x - 6y = 6$ ゆえに $(2x - 3)(2y - 3) = 15$

$1 < x < y$ より, $-1 < 2x - 3 < 2y - 3$ に注意して

$$(2x - 3, 2y - 3) = (1, 15), (3, 5) \quad \text{よって} \quad (x, y) = (2, 9), (3, 4)$$

$$(2) \quad 1 < x < y < z \text{ より, } 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{y} > 1 + \frac{1}{z} \text{ であるから, } x \geq 3 \text{ のとき}$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 2$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5} \text{ をみたすとき, } x = 2 \text{ であるから}$$

$$\frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{8}{5}$$

したがって $9yz - 15y - 15z = 15$ ゆえに $(3y - 5)(3z - 5) = 40$

$2 < y < z$ より, $1 < 3y - 5 < 3z - 5$ に注意して

$$\begin{cases} 3y - 5 = 4 \\ 3z - 5 = 10 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad y = 3, z = 5$$

$$\text{よって} \quad (x, y, z) = (2, 3, 5)$$



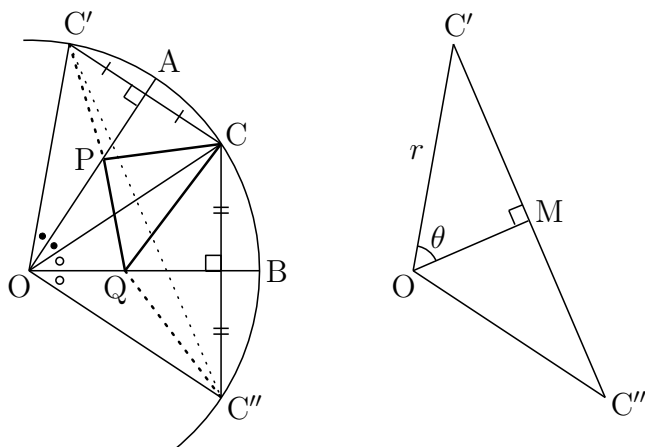
- 2 (1) 線分 OA, OB に関して C と対称な点をそれぞれ C' , C'' とすると

$$CP = C'P, \quad QC = QC'', \quad \angle C'OC'' = 2\theta$$

したがって $CP + PQ + QC = C'P + PQ + QC'' \geq C'C''$

求める最小値は線分 $C'C''$ であるから, $C'C''$ の中点を M とすると

$$C'C'' = 2C'M = 2r \sin \theta$$

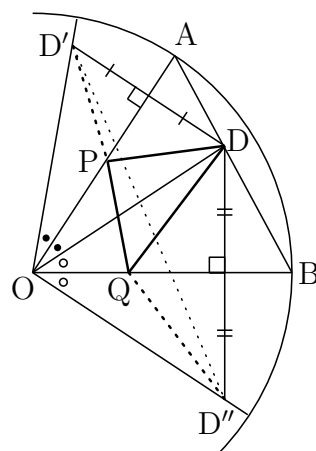


- (2) 線分 OA, OB に関して D と対称な点をそれぞれ D' , D'' とすると,

$$OD = OD' = OD'' = a$$

よって, (1) と同様に, 求める最小値は

$$2a \sin \theta$$



- (3) D が AB の中点であるとき, $\angle AOD = \frac{\theta}{2}$ となり

$$a = r \cos \angle AOD = r \cos \frac{\theta}{2}$$

このとき, a は最小となり, これを (2) の結果に代入して

$$2r \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta$$



3 (1) 直線 AP の方程式は

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3p} = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = -3px + 3p$$

これと $C: y = -3x^2 + 3$ から y を消去すると

$$-3px + 3p = -3x^2 + 3 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x-p+1) = 0$$

Q は A と異なる線分 AP 上の点であるから, Q の x 座標 $p-1$ について

$$0 \leq p-1 < 1 \quad \text{すなわち} \quad 1 \leq p < 2$$

(2) S_1 は C の x^2 の係数に注意して

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{6} \{1 - (p-1)\}^3 \\ &= \frac{1}{2} (2-p)^3 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

C と $x \geq 0, y \geq 0$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_0^1 (-3x^2 + 3) dx = \left[-x^3 + 3x \right]_0^1 = 2$$

$\triangle OAP$ の面積は $\frac{3}{2}p$ であるから

$$2 - S_1 = \frac{3}{2}p - S_2 \quad \text{ゆえに} \quad S_2 = S_1 + \frac{3}{2}p - 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, $f(p) = S_1 + S_2$ とおくと

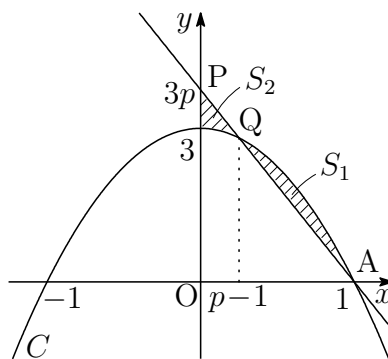
$$f(p) = S_1 + S_2 = 2S_1 + \frac{3}{2}p - 2 = (2-p)^3 + \frac{3}{2}p - 2,$$

$$f'(p) = -3(p-2)^2 + \frac{3}{2} = -3 \left\{ (p-2)^2 - \frac{1}{2} \right\}$$

(1) の結果に注意して, $f'(p) = 0$ を解くと $p = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$

p	1	...	$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$	...	(2)
$f'(p)$		-	0	+	
$f(p)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, 求める p の値は $p = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$ ■



- 4 (1) $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$ より, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} 2S &= \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - (a^2)^2} = \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \end{aligned}$$

$$\text{求める高さは} \quad \frac{2S}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- (2) $\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, b, 0)$, $\overrightarrow{OC} = (0, 0, c)$ より

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$$

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ であるから $2S_1 = ab$, $2S_2 = bc$, $2S_3 = ca$
 $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (ab, bc, ca)$ について, $|\vec{u}||\vec{v}| \geq \vec{u} \cdot \vec{v}$ であるから

$$\sqrt{3}\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \geq ab + bc + ca$$

$$\text{よって} \quad \sqrt{3}S \geq S_1 + S_2 + S_3$$

- (3) (2) の等号が成立するとき, $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ向きであるから

$$ab = bc = ca \quad \text{すなわち} \quad a = b = c$$



- 5** (1) n 回目に A, B がサイコロを投げる確率をそれぞれ a_n, b_n とすると, 次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$a_1 = 1, b_1 = 0$ であるから

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{5}{6}(a_n + b_n) \\ a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n - b_n) \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} a_n + b_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ a_n - b_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad a_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right\}$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から } p_n = \frac{1}{6}a_n = \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right\}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^n p_k = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 - \frac{1}{6}} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

■

4.12 2012 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

- 1 1つの角が 120° の三角形がある. この三角形の3辺の長さ x, y, z は $x < y < z$ を満たす整数である.
- (1) $x + y - z = 2$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ.
 - (2) $x + y - z = 3$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ.
 - (3) a, b を 0 以上の整数とする. $x + y - z = 2^a 3^b$ を満たす x, y, z の組の個数を a と b の式で表せ.
- 2 a を 0 以上の定数とする. 関数 $y = x^3 - 3a^2x$ のグラフと方程式 $|x| + |y| = 2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ.
- 3 定数 a, b, c, d に対して, 平面上の点 (p, q) を点 $(ap + bq, cp + dq)$ に移す操作を考える. ただし, $(a, b, c, d) \neq (1, 0, 0, 1)$ である. k を 0 でない定数とする. 放物線 $C: y = x^2 - x + k$ 上のすべての点は, この操作によって C 上に移る.
- (1) a, b, c, d を求めよ.
 - (2) C 上の点 A における C の接線と, 点 A をこの操作によって移した点 A' における C の接線は, 原点で直交する. このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ.
- 4 xyz 空間内の平面 $z = 2$ 上に点 P があり, 平面 $z = 1$ 上に点 Q がある. 直線 PQ と xy 平面の交点を R とする.
- (1) $P(0, 0, 2)$ とする. 点 Q が平面 $z = 1$ 上で点 $(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 R の軌跡の方程式を求めよ.
 - (2) 平面 $z = 1$ 上に 4 点 $A(1, 1, 1), B(1, -1, 1), C(-1, -1, 1), D(-1, 1, 1)$ をとる. 点 P が平面 $z = 2$ 上で点 $(0, 0, 2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き, 点 Q が正方形 $ABCD$ の周上を動くとき, 点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し, その面積を求めよ.
- 5 最初に 1 の目が上面にあるようにサイコロが置かれている. その後, 4 つの側面から 1 つの面を無作為に選び, その面が上面になるように置き直す操作を n 回繰り返す. なお, サイコロの向かい合う面の目の和は 7 である.
- (1) 最後に 1 の目が上面にある確率を求めよ.
 - (2) 最後に上面にある目の数の期待値を求めよ.

解答例

1 $x < y < z \cdots$ ① より, 120° の対辺は z であるから, 余弦定理により

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad z^2 = x^2 + xy + y^2$$

$x + y - z = k$ とおいて (k は自然数), $z = x + y - k \cdots$ ② より

$$(x + y - k)^2 = x^2 + xy + y^2 \quad \text{整理すると} \quad xy - 2(x + y)k - k^2 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (x - 2k)(y - 2k) = 3k^2 \quad \cdots \text{③}$$

①, ② より $x < y < x + y - k$ すなわち $k < x < y$

$y - 2k \leq 0$ と仮定すると, $-k < x - 2k < y - 2k \leq 0$ であるから

$$0 \leq (x - 2k)(y - 2k) < k^2$$

これは, ③ に反する. $y - 2k > 0$ となるから, ③ より $x - 2k > 0$

したがって, $x + y - z = k$ (k は自然数) に対して, 次が成立する.

$$(x - 2k)(y - 2k) = 3k^2, \quad 0 < x - 2k < y - 2k \quad \cdots (*)$$

(1) $x + y - z = 2$ のとき, $k = 2$ であるから, $(*)$ より

$$(x - 4)(y - 4) = 12, \quad 0 < x - 4 < y - 4$$

$$\text{ゆえに} \quad (x - 4, y - 4) = (1, 12), (2, 6), (3, 4)$$

このとき, $z = x + y - 2$ であるから

$$(x, y, z) = (5, 16, 19), (6, 10, 14), (7, 8, 13)$$

(2) $x + y - z = 3$ のとき, $k = 3$ であるから, $(*)$ より

$$(x - 6)(y - 6) = 27, \quad 0 < x - 6 < y - 6$$

$$\text{ゆえに} \quad (x - 6, y - 6) = (1, 27), (3, 9)$$

このとき, $z = x + y - 3$ であるから

$$(x, y, z) = (7, 33, 37), (9, 15, 21)$$

(3) $x + y - z = 2^a 3^b$ のとき, $k = 2^a 3^b$ であるから, (*) より

$$(x - 2^{a+1} 3^b)(y - 2^{a+1} 3^b) = 2^{2a} 3^{2b+1}, \quad 0 < x - 2^{a+1} 3^b < y - 2^{a+1} 3^b$$

積が $2^{2a} 3^{2b+1}$ となる正の 2 数の組み合わせの個数は

$$\frac{(2a+1)(2b+2)}{2!} = (2a+1)(b+1)$$

- 2 $y = x^3 - 3a^2x$ のグラフと $|x| + |y| = 2$ の表す図形は原点に関して対称であるから, $0 < x \leq 2$ における位置関係に注目する.
 $f(x) = x^3 - 3a^2x$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2$$

$y = f(x)$ と $y = x - 2$ が点 $(t, t - 2)$ で接するとき,
 $f(t) = t - 2, f'(t) = 1$ より

$$\begin{cases} t^3 - 3a^2t = t - 2 & \cdots \textcircled{1} \\ 3t^2 - 3a^2 = 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② から a を消去すると

$$t^3 + (1 - 3t^2)t = t - 2 \quad \text{これを解いて} \quad t = 1$$

$$t = 1 \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると, } a \geq 0 \text{ より } a = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

次に, $f(x) = x(x + \sqrt{3}a)(x - \sqrt{3}a)$ より, $y = f(x)$ が点 $(2, 0)$ を通るとき

$$\sqrt{3}a = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって, 求める共有点の個数は

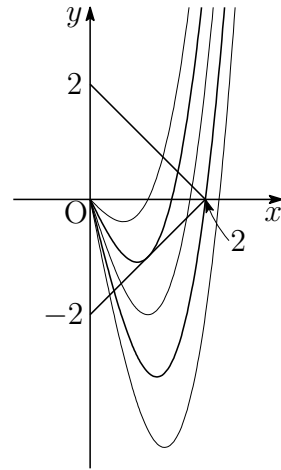
$$0 \leq a < \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

$$a = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ のとき} \quad 4 \text{ 個}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3} < a < \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき} \quad 6 \text{ 個}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき} \quad 4 \text{ 個}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} < a \text{ のとき} \quad 2 \text{ 個}$$



- 3** (1) C 上の点 $A(t, t^2 - t + k)$ が操作により, 点 $A'(x, y)$ に移るとき

$$x = at + b(t^2 - t + k), \quad y = ct + d(t^2 - t + k) \quad \cdots (*)$$

点 A' も C 上の点であるから

$$ct + d(t^2 - t + k) = \{at + b(t^2 - t + k)\}^2 - \{at + b(t^2 - t + k)\} + k$$

上式は, t に関する恒等式であるから, t^4 の係数に注目すると $b = 0$

$$\text{したがって} \quad dt^2 + (c - d)t + dk = a^2t^2 - at + k$$

$$\text{ゆえに} \quad d = a^2, \quad c - d = -a, \quad dk = k$$

$$k \neq 0 \text{ であるから } d = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a, c) = (1, 0), (-1, 2)$$

$$(a, b, c, d) \neq (1, 0, 0, 1) \text{ であるから } (a, b, c, d) = (-1, 0, 2, 1)$$

- (2) $y = x^2 - x + k$ より $y' = 2x - 1$

C 上の点 $A(t, t^2 - t + k)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 - t + k) = (2t - 1)(x - t)$$

$$\text{すなわち} \quad y = (2t - 1)x - t^2 + k \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(1) \text{ の結果を } (*) \text{ に適用すると } x = -t, \quad y = t^2 + t + k$$

C 上の点 $A'(-t, t^2 + t + k)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + t + k) = (-2t - 1)(x + t)$$

$$\text{すなわち} \quad y = (-2t - 1)x - t^2 + k \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② が原点で直交するから

$$(2t - 1)(-2t - 1) = -1, \quad -t^2 + k = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad A' \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \blacksquare$$

- 4 (1) $P(0, 0, 2)$, $Q(\cos \theta, \sin \theta, 1)$, $R(x, y, 0)$ とおくと

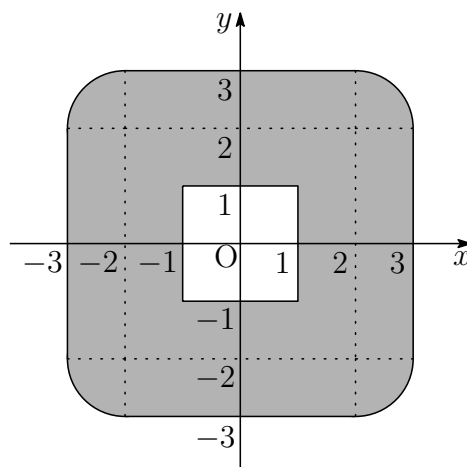
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PQ} \\ (x, y, z) &= (0, 0, 2) + 2(\cos \theta, \sin \theta, -1) \\ &= (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)\end{aligned}$$

よって, 求める軌跡の方程式は $x^2 + y^2 = 4, z = 0$

- (2) $P(\cos \theta, \sin \theta, 2)$, $Q(s, t, 1)$ とおくと (Q は正方形 $ABCD$ の周上の点)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PQ} \\ &= (\cos \theta, \sin \theta, 2) + 2(s - \cos \theta, t - \sin \theta, -1) \\ &= 2(s, t, 0) + (\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi), 0)\end{aligned}$$

よって, 点 R が動きうる領域は次のようになる.



また, 求める領域の面積は

$$6^2 - 2^2 - 4 \left(1^2 - \frac{1}{4} \pi \cdot 1^2 \right) = 28 + \pi$$

■

- 5 (1) n 回繰り返した後に、上面が 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目である確率はそれぞれ $a_n, b_n, c_n, c_n, b_n, a_n$ とおける. このとき,

$$a_1 = 0, b_1 = c_1 = \frac{1}{4}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n + c_n + b_n) = \frac{1}{2}(b_n + c_n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n + c_n + a_n) = \frac{1}{2}(a_n + c_n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + b_n + a_n) = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \cdots \textcircled{3}$$

上の 3 式から $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$

$$a_1 + b_1 + c_1 = \frac{1}{2} \text{ であるから } a_n + b_n + c_n = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ から } a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - a_n \right) = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}$$

$$\text{したがって } a_{n+1} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \left(a_n - \frac{1}{6} \right)$$

$$\text{ゆえに } a_n - \frac{1}{6} = \left(a_1 - \frac{1}{6} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

- (2) 求める期待値は, ④ より

$$1a_n + 2b_n + 3c_n + 4c_n + 5b_n + 6a_n = 7(a_n + b_n + c_n) = 7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

別解 (1) n 回繰り返した後に、1 の目が、上面、側面、底面にある確率をそれぞれ x_n, y_n, z_n とすると、次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, y_1 = 1, z_1 = 0 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{4}y_n & \cdots \textcircled{1} \\ y_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}y_n + z_n & \cdots \textcircled{2} \\ z_{n+1} &= \frac{1}{4}y_n & \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

上の 3 式をそれぞれ加えると $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$

ゆえに $x_n + y_n + z_n = 1 \quad \cdots \textcircled{4}$

②, ④ より $y_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}y_n$

したがって $y_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(y_n - \frac{2}{3}\right)$

ゆえに $y_n - \frac{2}{3} = \left(y_1 - \frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$y_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

これと ① より $x_n = \frac{1}{4}y_{n-1} = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

(2) n 回繰り返した後に、1 の目が上面にある確率は x_n , 2~5 の目が上面にある確率はすべて $\frac{y_n}{4}$, 6 の目が上面ある確率は z_n であるから、求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned} E &= 1x_n + (2 + 3 + 4 + 5)\frac{y_n}{4} + 6z_n \\ &= x_n + \frac{7}{2}y_n + 6z_n \end{aligned}$$

ここで、①, ③ により、 $x_n = z_n$ であるから $x_n + 6z_n = \frac{7}{2}(x_n + z_n)$

よって $E = \frac{7}{2}(x_n + y_n + z_n) = \frac{7}{2}$ ■

4.13 2013年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 $3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013$ を満たす正の整数 p, q の組をすべて求めよ.

2 平面上の4点 O, A, B, C が

$$OA = 4, \quad OB = 3, \quad OC = 2, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$$

を満たすとき, $\triangle ABC$ の面積の最大値を求めよ.

3 原点を O とする xy 平面上に, 放物線 $C: y = 1 - x^2$ がある. C 上に2点 $P(p, 1 - p^2), Q(q, 1 - q^2)$ を $p < q$ となるようにとる.

(1) 2つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を, p と q の式で表せ.

(2) $q = p + 1$ であるとき S の最小値を求めよ.

(3) $pq = -1$ であるとき S の最小値を求めよ.

4 t を正の定数とする. 原点を O とする空間内に, 2点 $A(2t, 2t, 0), B(0, 0, t)$ がある. また動点 P は

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$$

を満たすように動く. OP の最大値が3となるような t の値を求めよ.

5 サイコロを n 回投げ, k 回目に出た目を a_k とする. また, s_n を $s_n = \sum_{k=1}^n 10^{n-k} a_k$ で定める.

(1) s_n が4で割り切れる確率を求めよ.

(2) s_n が6で割り切れる確率を求めよ.

(3) s_n が7で割り切れる確率を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad 3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013 \text{ より}$$

$$3(p^3 + q^3) - pq(p + q) = 2013$$

$$3(p + q)(p^2 - pq + q^2) - pq(p + q) = 2013$$

$$(p + q)(3p^2 - 4pq + 3q^2) = 3 \cdot 11 \cdot 61$$

$$\text{ここで} \quad 3p^2 - 4pq + 3q^2 = 2(p - q)^2 + p^2 + q^2 \geq p + q$$

したがって、次の場合がある.

$$(p + q, 3p^2 - 4pq + 3q^2) = (3, 11 \cdot 61), (11, 3 \cdot 61), (3 \cdot 11, 61)$$

また, $3p^2 - 4pq + 3q^2 = 3(p + q)^2 - 10pq$ であるから

$$(i) \quad p + q = 3, \quad 3(p + q)^2 - 10pq = 11 \cdot 61 \text{ のとき} \quad 5pq = -322$$

p, q は整数であるから, 不適.

$$(ii) \quad p + q = 11, \quad 3(p + q)^2 - 10pq = 3 \cdot 61 \text{ のとき} \quad pq = 18$$

これを解いて $(p, q) = (2, 9), (9, 2)$

$$(iii) \quad p + q = 3 \cdot 11, \quad 3(p + q)^2 - 10pq = 61 \text{ のとき} \quad 5pq = 1603$$

p, q は整数であるから, 不適.

$$(i) \sim (iii) \text{ より} \quad (p, q) = (2, 9), (9, 2)$$



2 $\theta = \angle BOC$ とおくと

$$\cos \theta = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OB}| |\vec{OC}|} = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = 60^\circ$$

$\triangle OBC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BC^2 &= OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cos 60^\circ \\ &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 7 \end{aligned}$$

ゆえに $BC = \sqrt{7}$

O から直線 BC に垂線 OH を引くと $\frac{1}{2}BC \cdot OH = \frac{1}{2}OB \cdot OC \sin 60^\circ$

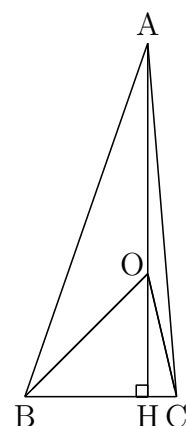
ゆえに $\frac{1}{2}\sqrt{7}OH = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ これを解いて $OH = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\triangle ABC$ の面積が最大となるのは、HO の延長に A があるときで、このとき

$$AH = OA + OH = 4 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

よって、求める $\triangle ABC$ の最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \sqrt{7} \left(4 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right) = 2\sqrt{7} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



- 3 (1) 2 点 $P(p, 1 - p^2)$, $Q(q, 1 - q^2)$ を通る直線 PQ の方程式は

$$y - (1 - p^2) = \frac{1 - q^2 - (1 - p^2)}{q - p}(x - p)$$

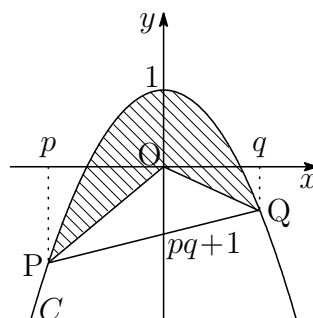
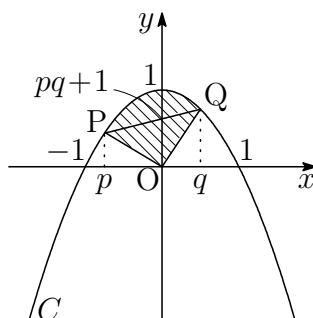
すなわち $y = -(p + q)x + pq + 1$

C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると, $p < q$ に注意して

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_p^q (1 - x^2 - \{-(p + q)x + pq + 1\}) dx \\ &= \int_p^q (x - p)(q - x) dx = \frac{1}{6}(q - p)^3 \end{aligned}$$

$\triangle OPQ$ の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}|p(1 - q^2) - q(1 - p^2)| \\ &= \frac{1}{2}|(p - q)(pq + 1)| \\ &= \frac{1}{2}(q - p)|pq + 1| \end{aligned}$$



- (i) $pq + 1 \geq 0$ のとき

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{6}(q - p)^3 + \frac{1}{2}(q - p)(pq + 1)$$

- (ii) $pq + 1 < 0$ のとき

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{6}(q - p)^3 - \frac{1}{2}(q - p)(-pq - 1)$$

(i),(ii) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}(q - p)\{(q - p)^2 + 3pq + 3\} \quad \cdots \textcircled{1} \\ &= \frac{1}{6}(q - p)(p^2 + pq + q^2 + 3) \end{aligned}$$

(2) $q = p + 1$ を ① に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}\{1^2 + 3p(p+1) + 3\} = \frac{1}{2}p(p+1) + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{24} \end{aligned}$$

$p = -\frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{13}{24}$ をとる.

(3) $pq = -1$ のとき, $p < 0 < q$ であるから, $p = -\frac{1}{q}$ を ① に代入すると

$$S = \frac{1}{6}\left(q + \frac{1}{q}\right)^3$$

$q > 0$ であるから, 相加・相乗平均の関係により

$$q + \frac{1}{q} \geq 2\sqrt{q \cdot \frac{1}{q}} = 2$$

等号が成立するのは, $q = \frac{1}{q}$, すなわち, $q = 1$ のときであるから

$$S \geq \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}$$

よって, 求める S の最小値は $\frac{4}{3}$



4 $\vec{OP} \cdot \vec{AP} + \vec{OP} \cdot \vec{BP} + \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 3$ より

$$\vec{OP} \cdot (\vec{OP} - \vec{OA}) + \vec{OP} \cdot (\vec{OP} - \vec{OB}) + (\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OP} - \vec{OB}) = 3$$

$$3|\vec{OP}|^2 - 2(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{OP} + \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3$$

$$|\vec{OP}|^2 - \frac{2}{3}(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{OP} + \frac{1}{3}\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1$$

$$\vec{OA} = (2t, 2t, 0), \vec{OB} = (0, 0, t) \text{ より } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\text{ここで, } \vec{OC} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB}) \text{ とおくと}$$

$$|\vec{OP}|^2 - 2\vec{OC} \cdot \vec{OP} = 1$$

$$|\vec{OP} - \vec{OC}|^2 = |\vec{OC}|^2 + 1$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{3}(2t, 2t, t) \text{ であるから } |\vec{OC}| = |t| = t$$

したがって, P は C を中心とする半径 $\sqrt{t^2 + 1}$ の球面上を動く.

OP が最大となるとき, P は OC の延長線上にあるから

$$OC + CP = OP \quad \text{ゆえに} \quad t + \sqrt{t^2 + 1} = 3$$

$$\sqrt{t^2 + 1} = 3 - t \text{ の両辺を平方して} \quad t^2 + 1 = 9 - 6t + t^2$$

$$t > 0 \text{ に注意してこれを解くと} \quad t = \frac{4}{3}$$



- 5 (1) $n = 1$ のとき, s_1 が 4 で割り切れるのは, $a_1 = 4$ の場合である.

したがって, この確率は $\frac{1}{6}$

$n \geq 2$ のとき, $100 \equiv 0 \pmod{4}$ であるから

$$s_n \equiv 10a_{n-1} + a_n \pmod{4}$$

$s_n \equiv 0 \pmod{4}$ となるのは

$$(a_{n-1}, a_n) = (1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 2), (3, 6), (4, 4), \\ (5, 2), (5, 6), (6, 4)$$

このときの確率は $\frac{9}{6^2} = \frac{1}{4}$

よって, 求める確率は $n = 1$ のとき $\frac{1}{6}$, $n \geq 2$ のとき $\frac{1}{4}$

- (2) $n = 1$ のとき, s_1 が 6 で割り切れるのは, $a_1 = 6$ の場合である.

したがって, この確率は $\frac{1}{6}$

$n \geq 2$ のとき

$$s_n = \sum_{k=1}^n 10^{n-k} a_k = 10 \sum_{k=1}^{n-1} 10^{n-1-k} a_k + a_n = 10s_{n-1} + a_n$$

$10 \equiv 4 \pmod{6}$ であるから $s_n \equiv 4s_{n-1} + a_n \pmod{6}$

$s_n \equiv 0 \pmod{6}$ となる確率を p_n とおく.

$s_n \equiv 0 \pmod{6}$ となるのは, 法 6 について

$$(s_{n-1}, a_n) = (0, 6), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (5, 4)$$

したがって, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}(1 - p_{n-1}) \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{1}{6}$$

よって, 求める確率は $\frac{1}{6}$

(3) $n = 1$ のとき, s_1 が 7 で割り切れることはないので, この確率は 0

$n \geq 2$ のとき

$$s_n = \sum_{k=1}^n 10^{n-k} a_k = 10 \sum_{k=1}^{n-1} 10^{n-1-k} a_k + a_n = 10s_{n-1} + a_n$$

$10 \equiv 3 \pmod{7}$ であるから $s_n \equiv 3s_{n-1} + a_n \pmod{7}$

$s_n \equiv 0 \pmod{7}$ となる確率を q_n とおく.

$s_n \equiv 0 \pmod{7}$ となるのは, 法 7 について

$$(s_{n-1}, a_n) = (1, 4), (2, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 6), (6, 3)$$

したがって, 次の確率漸化式が成立する.

$$q_1 = 0, \quad q_n = \frac{1}{6}(1 - q_{n-1})$$

$$\text{ゆえに} \quad q_n - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6} \left(q_{n-1} - \frac{1}{7} \right) \quad \text{すなわち} \quad q_n = \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right\}$$

$$\text{よって, 求める確率は} \quad \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right\} \quad \blacksquare$$

4.14 2014年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

- 1 $a - b - 8$ と $b - c - 8$ が素数となるような素数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.
- 2 $0 < t < 1$ とし, 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線を l とする. C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし, C と l と直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする. $S_1 + S_2$ の最小値を求めよ.
- 3 円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P における接線を l とする. 点 $(1, 0)$ を通り l と平行な直線を m とする. 直線 m と円 C の $(1, 0)$ 以外の共有点を P' とする. ただし, m が直線 $x = 1$ のときは P' を $(1, 0)$ とする.
円 C 上の点 $P(s, t)$ から点 $P'(s', t')$ を得る上記の操作を T と呼ぶ.
- (1) s', t' をそれぞれ s と t の多項式として表せ,
- (2) 点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点を P_n とおく. P が $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき, P_1, P_2, P_3 を図示せよ.
- (3) 正の整数 n について, $P_n = P$ となるような点 P の個数を求めよ.
- 4 半径 1 の球が直円錐に内接している. この直円錐の底面の半径を r とし, 表面積を S とする.
- (1) S を r を用いて表せ.
- (2) S の最小値を求めよ.
- 5 数直線上の点 P を次の規則で移動させる. 一枚の硬貨を投げて, 表が出れば P を $+1$ だけ移動させ, 裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる. P は初め原点にあるとし, 硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする.
- (1) $a_3 = 0$ となる確率を求めよ.
- (2) $a_4 = 1$ となる確率を求めよ.
- (3) $n \geq 3$ のとき, $a_n = n - 3$ となる確率を n を用いて表せ.

解答例

1 $a - b - 8, b - c - 8$ は素数であるから

$$a - b - 8 \geq 2, \quad b - c - 8 \geq 2 \quad \text{ゆえに} \quad a \geq b + 10, \quad b \geq c + 10$$

b, c は素数であるから, 上式より, a, b は奇素数である.

これより, $a - b - 8$ は偶素数となるから

$$a - b - 8 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = b + 10 \quad \cdots (*)$$

(i) c が奇素数のとき, $b - c - 8$ は偶素数であるから

$$b - c - 8 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad c = b - 10 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(ii) c が偶素数, すなわち, $c = 2$ のとき

$$b - c - 8 = b - 10 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(*), ①, ②において, $b + 10, b, b - 10$ は素数である.

これらは法 3 について, 互いに合同ではないので, これらの 3 数の中に 3 の倍数, すなわち, 素数 3 が存在する. このとき, 3 数の大小関係に注意して

$$b - 10 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad a = 23, \quad b = 13$$

(i), (ii) より $(a, b, c) = (23, 13, 3), (23, 13, 2)$ ■

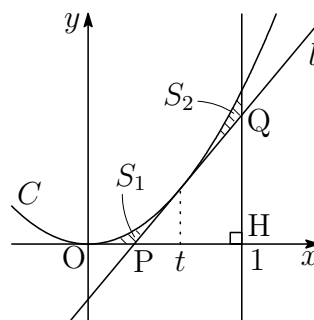
2 $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

$C: y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線 l の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2$$

l と x 軸および直線 $x = 1$ との交点をそれぞれ P , Q とすると

$$P\left(\frac{t}{2}, 0\right), \quad Q(1, 2t - t^2)$$



直線 $x = 1$ と x 軸との交点を H とすると $H(1, 0)$

$f(t) = S_1 + S_2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 x^2 dx - \triangle PHQ = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \cdot PH \cdot QH \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{2} \right) (2t - t^2) = -\frac{t^3}{4} + t^2 - t + \frac{1}{3}, \\ f'(t) &= -\frac{3}{4}t^2 + 2t - 1 = -\frac{1}{4}(t - 2)(3t - 2) \end{aligned}$$

$f(t)$ の増減表は次のようになる.

t	(0)	...	$\frac{2}{3}$	...	(1)
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって 最小値 $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{27}$

■

- 3** (1) $A(1, 0)$, $\overrightarrow{OP} = (s, t)$ に垂直なベクトルを $\vec{u} = (t, -s)$ とし, 実数 α, β を用いて

$$\overrightarrow{OA} = \alpha \overrightarrow{OP} + \beta \vec{u}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t \\ -s \end{pmatrix}$$

$s^2 + t^2 = 1$ に注意して, これを解くと $\alpha = s, \beta = t$

$\overrightarrow{OP'} = \alpha \overrightarrow{OP} + (-\beta) \vec{u}$ であるから

$$\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} t \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 - t^2 \\ 2st \end{pmatrix}$$

よって $s' = s^2 - t^2, t' = 2st$

別解 上の図で, $\angle AOM = \angle P'OM$. $(s, t) = (\cos \theta, \sin \theta)$ とおくと,

$(s', t') = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ であるから

$$s' = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = s^2 - t^2, \quad t' = 2 \sin \theta \cos \theta = 2st$$

(2) $s^2 + t^2 = 1$ より, $s = \cos \theta, t = \sin \theta$ とおくと, (1) の結果から

$$s' = s^2 - t^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta,$$

$$t' = 2st = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

したがって, $P(\cos \theta, \sin \theta)$ のとき $P_n(\cos 2^n \theta, \sin 2^n \theta) \dots (*)$

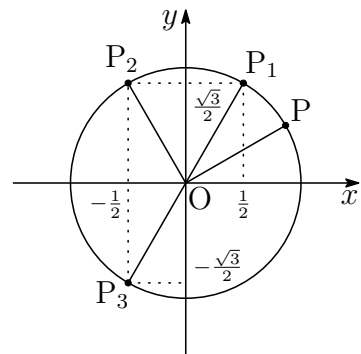
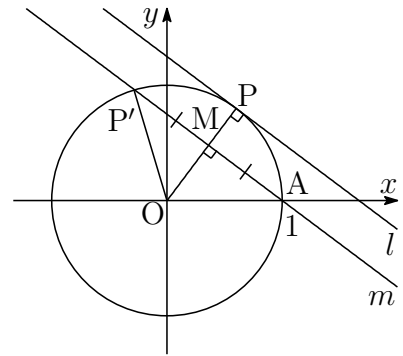
$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ より, $\theta = \frac{\pi}{6}$ であるから

$$P_1\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right), P_2\left(\cos \frac{2}{3}\pi, \sin \frac{2}{3}\pi\right), P_3\left(\cos \frac{4}{3}\pi, \sin \frac{4}{3}\pi\right)$$

ゆえに $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



(3) (*) より, $P_n = P$ となるとき, 整数 k を用いて

$$2^n \theta = \theta + 2k\pi \quad \text{これを解いて} \quad \theta = \frac{2k}{2^n - 1} \pi$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{より} \quad 0 \leq \frac{2k}{2^n - 1} \pi < 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq k < 2^n - 1$$

よって, 求める点 P の個数は $2^n - 1$ (個) ■

4 (1) 直円錐の母線の長さを l とすると, 右の図において

$$l \cos 2\theta = r, \quad \tan \theta = \frac{1}{r}$$

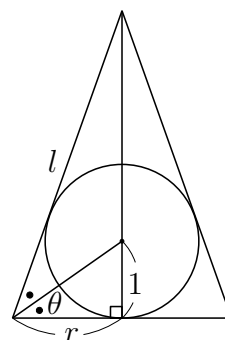
$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{より}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \frac{1}{r^2}}{1 + \frac{1}{r^2}} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$$

$$\text{したがって} \quad l = \frac{r}{\cos 2\theta} = \frac{r(r^2 + 1)}{r^2 - 1}$$

$$\text{よって} \quad S = \pi r^2 + \frac{1}{2} l \cdot 2\pi r$$

$$= \pi r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r(r^2 + 1)}{r^2 - 1} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi r^4}{r^2 - 1}$$

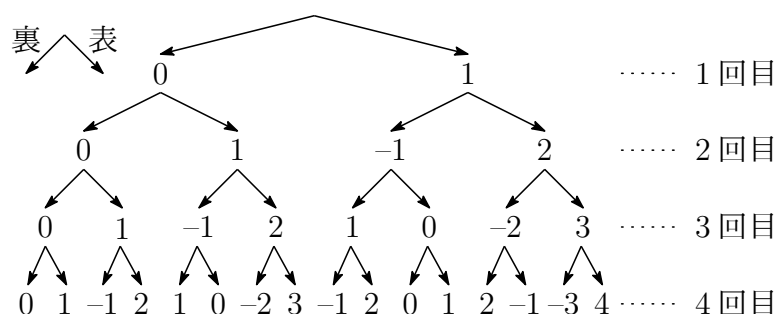


(2) (1) の結果および相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \left(r^2 - 1 + \frac{1}{r^2 - 1} + 2 \right) \\ &\geq 2\pi \left(2\sqrt{(r^2 - 1) \cdot \frac{1}{r^2 - 1}} + 2 \right) = 8\pi \end{aligned}$$

よって, 求める S の最小値は 8π ■

- 5 (1) 点 P の座標の推移は次のようになる.



よって, $a_3 = 0$ となる確率は $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

- (2) (1) に示した点 P の推移により, $a_4 = 1$ となる確率は $\frac{3}{16}$

- (3) $n \geq 3$ のとき, $a_n = 2 - n$ となるのは, 硬貨が $\overbrace{\text{裏表} \cdots \text{表裏}}^{n-2 \text{ 個}}$ の順に出るときで, その確率を q_n とすると

$$q_n = \frac{1}{2^n}$$

である. $n \geq 3$ のとき, $a_n = n - 3$ となる確率を p_n とすると

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{2} + q_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

この確率漸化式から $2^{n+1}p_{n+1} - 2^n p_n = 1 \quad (n = 3, 4, \dots)$

$$n \geq 4 \text{ のとき } \sum_{k=3}^{n-1} (2^{k+1}p_{k+1} - 2^k p_k) = \sum_{k=3}^{n-1} 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^n p_n - 8p_3 = n - 3$$

$$(1) \text{ の結果から, } p_3 = \frac{1}{4} \text{ であるから } 2^n p_n = n - 1 \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{n - 1}{2^n}$$

$$\text{上式は, } n = 3 \text{ のときも成立するから } p_n = \frac{n - 1}{2^n} \quad \blacksquare$$

4.15 2015年(120分)

出題分野 [1] [2] [3] [4] 必答, [5] [6] から1題

- [1] n を2以上の整数とする. n 以下の正の整数のうち, n との最大公約数が1となるものの個数を $E(n)$ で表す. たとえば

$$E(2) = 1, \quad E(3) = 2, \quad E(4) = 2, \quad \dots, \quad E(10) = 4, \quad \dots$$

である.

(1) $E(1024)$ を求めよ.

(2) $E(2015)$ を求めよ.

(3) m を正の整数とし, p と q を異なる素数とする. $n = p^m q^m$ のとき $\frac{E(n)}{n} \geq \frac{1}{3}$ が成り立つことを示せ.

- [2] 座標平面上の原点を O とする. 点 $A(a, 0)$, 点 $B(0, b)$ および点 C が

$$OC = 1, \quad AB = BC = CA$$

を満たしながら動く.

(1) $s = a^2 + b^2$, $t = ab$ とする. s と t の関係を表す等式を求めよ.

(2) $\triangle ABC$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ.

- [3] n を4以上の整数とする. 正 n 角形の2つの頂点を無作為に選び, それらを通る直線を l とする. さらに, 残りの $n - 2$ 個の頂点から2つの頂点を無作為に選び, それらを通る直線を m とする. 直線 l と m が平行になる確率を求めよ.

- [4] xyz 空間において, 原点を中心とする xy 平面上の半径1の円周上を点 P が動き, 点 $(0, 0, \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径1の円周上を点 Q が動く.

(1) 線分 PQ の長さの最小値と, そのときの点 P , Q の座標を求めよ.

(2) 線分 PQ の長さの最大値と, そのときの点 P , Q の座標を求めよ.

5 数列 $\{a_n\}$ を $a_k = k + \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$ で定める. n を正の整数とする.

(1) $\sum_{k=1}^{12n} a_k$ を求めよ.

(2) $\sum_{k=1}^{12n} a_k^2$ を求めよ.

6 a, b, c は異なる 3 つの正の整数とする. 次のデータは 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 10 人の得点をまとめたものである.

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
科目 X の得点	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
科目 Y の得点	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a

科目 X の得点の平均値と科目 Y の得点の平均値とは等しいとする.

- (1) 科目 X の得点の分散を s_X^2 , 科目 Y の得点の分散を s_Y^2 とする. $\frac{s_X^2}{s_Y^2}$ を求めよ.
- (2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数を, 四捨五入して小数第 1 位まで求めよ.
- (3) 科目 X の得点の中央値が 65, 科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるとき, a, b, c の組を求めよ.

解答例

1 (1) $1024 = 2^{10}$ であるから $E(1024) = 1024 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 512$

(2) $2015 = 5 \times 13 \times 31$ であるから

$$\begin{aligned} E(2015) &= 2015 - \left(\frac{2015}{5} + \frac{2015}{13} + \frac{2015}{31} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2015}{5 \cdot 13} - \frac{2015}{13 \cdot 31} - \frac{2015}{31 \cdot 5} + \frac{2015}{5 \cdot 13 \cdot 31} \right) \\ &= 2015 \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{13}\right) \left(1 - \frac{1}{31}\right) \\ &= 4 \times 12 \times 30 = 1440 \end{aligned}$$

(3) $n = p^m q^m$ であるから

$$E(n) = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{p \cdot q} \right) = n \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

したがって $\frac{E(n)}{n} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right)$

p, q は異なる素数であるから、一般性を失うことなく $p < q$ とすると

$$p \geq 2, \quad q \geq 3$$

であるから

$$1 - \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{1}{q} \geq \frac{2}{3}$$

よって $\frac{E(n)}{n} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \geq \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

補足 $p_1, p_2, \dots, p_l$ を素数, $k_1, k_2, \dots, k_l$ を正の整数とすると

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}$$

について、次式が成り立つ。

$$E(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right)$$

本題の $E(n)$ はオイラー (Euler) の $\varphi(n)$ 関数である¹。 ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf **1** を参照。

- 2 (1) $A(a, 0)$, $B(0, b)$. 点 C の座標を (x, y) とすると

$$OC^2 = 1, \quad AB^2 = BC^2 = CA^2$$

であるから

$$x^2 + y^2 = 1, \quad a^2 + b^2 = x^2 + (y - b)^2 = (x - a)^2 + y^2$$

$$\text{整理すると} \quad 2by = 1 - a^2, \quad 2ax = 1 - b^2$$

$$\text{ゆえに} \quad 2aby = a(1 - a^2), \quad 2abx = b(1 - b^2)$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} \{a(1 - a^2)\}^2 + \{b(1 - b^2)\}^2 &= (2aby)^2 + (2abx)^2 \\ &= 4a^2b^2(x^2 + y^2) = 4a^2b^2 \end{aligned}$$

$$\text{整理すると} \quad a^6 + b^6 - 2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + a^2 + b^2 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2) - 2(a^2 + b^2)^2 + (a^2 + b^2) = 0$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 \neq 0 \text{ であるから}$$

$$(a^2 + b^2)^2 - 3(ab)^2 - 2(a^2 + b^2) + 1 = 0$$

$$s = a^2 + b^2, \quad t = ab \text{ であるから}$$

$$s^2 - 3t^2 - 2s + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (s - 1)^2 = 3t^2$$

$$(2) \quad \triangle ABC = \frac{1}{2}AB^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}s$$

$$\text{ここで} \quad (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = s + 2t \geq 0$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = s - 2t \geq 0$$

$$\text{したがって} \quad -\frac{s}{2} \leq t \leq \frac{s}{2} \quad \text{ゆえに} \quad t^2 \leq \frac{s^2}{4}$$

これを (1) の結果に代入すると

$$(s - 1)^2 \leq \frac{3}{4}s^2 \quad \text{ゆえに} \quad s^2 - 8s + 4 \leq 0$$

$$\text{これを解いて} \quad 4 - 2\sqrt{3} \leq s \leq 4 + 2\sqrt{3}$$

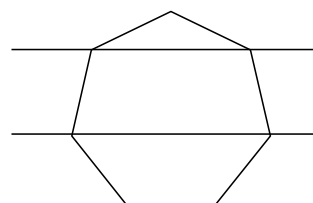
$$\text{よって} \quad \sqrt{3} - \frac{3}{2} \leq \triangle ABC \leq \sqrt{3} + \frac{3}{2}$$



3 直線 l および m の選び方の総数は

$$\begin{aligned}\frac{{}_nC_2 \times {}_{n-2}C_2}{2!} &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\ &= \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3) \quad (\text{通り})\end{aligned}$$

- (i) n が奇数のとき、直線 l を含めた平行な直線群には正 n 角形の辺が 1 本だけ存在し、この直線群の本数は $\frac{n-1}{2}$ であるから、直線 l と m が平行になる場合の総数は

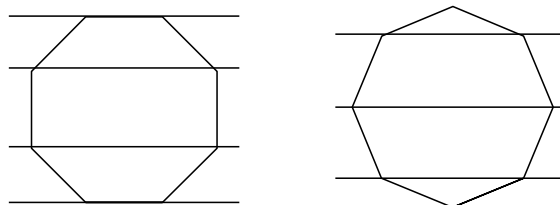


$$\begin{aligned}n \times \frac{n-1}{2} C_2 &= n \times \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \\ &= \frac{1}{8}n(n-1)(n-3)\end{aligned}$$

このとき、求める確率は

$$\frac{\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{1}{n-2}$$

- (ii) n が偶数のとき、直線 l を含めた平行な直線群には正 n 角形の辺が 2 本存在する場合と辺が 1 本も存在しない場合がある。



それぞれの直線群の本数は $\frac{n}{2}$, $\frac{n-2}{2}$ であるから、直線 l と m が平行になる場合の総数は

$$\begin{aligned}\frac{n}{2!} \times \frac{n}{2} C_2 + \frac{n}{2!} \times \frac{n-2}{2} C_2 &= \frac{n}{2} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} + \frac{n}{2} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \\ &= \frac{1}{8}n(n-2)^2\end{aligned}$$

このとき、求める確率は

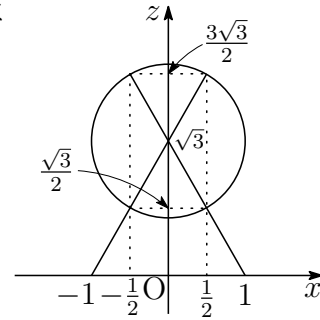
$$\frac{\frac{1}{8}n(n-2)^2}{\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{n-2}{(n-1)(n-3)}$$

■

- 4 (1) 線分 PQ の長さが最小となるとき, P, Q は zx 平面上にある. 右の図から

$$P(\pm 1, 0, 0), \quad Q\left(\pm \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

のとき (複号同順), PQ は最小値 1 をとる.



- (2) 線分 PQ の長さが最大となるとき, P, Q は zx 平面上にある. 上の図から

$$P(\pm 1, 0, 0), \quad Q\left(\mp \frac{1}{2}, 0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

のとき (複号同順), PQ は最大値 3 をとる. ■

5 (1) $a_k = k + \cos \frac{k\pi}{6}$ より

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{12n} a_k &= \sum_{k=1}^{12n} k + \sum_{k=1}^{12n} \cos \frac{k\pi}{6} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 12n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{12} \cos \frac{12j+k}{6} \pi \\
 &= 6n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{12} \cos \frac{k}{6} \pi \\
 &= 6n(12n+1) + \sum_{j=0}^{n-1} 0 = \mathbf{6n(12n+1)}
 \end{aligned}$$

(2) $a_k^2 = k^2 + 2k \cos \frac{k\pi}{6} + \cos^2 \frac{k\pi}{6} = k^2 + \frac{1}{2} + 2k \cos \frac{k\pi}{6} + \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi}{3}$ より

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{12n} \left(k^2 + \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{6} \cdot 12n(12n+1)(2 \cdot 12n+1) + \frac{1}{2} \cdot 12n \\
 &= 2n(12n+1)(24n+1) + 6n \\
 &= 8n(72n^2 + 9n + 1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{12n} k \cos \frac{k\pi}{6} &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{12} (12j+k) \cos \frac{12j+k}{6} \pi \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} 12j \sum_{k=1}^{12} \cos \frac{k\pi}{6} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{12} k \cos \frac{k\pi}{6} \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} 12j \times 0 + \sum_{j=0}^{n-1} 6 = 6n,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{12n} \cos \frac{k\pi}{3} &= \sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{k=1}^6 \cos \frac{6j+k}{3} \pi \\
 &= \sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{k=1}^6 \cos \frac{k}{3} \pi = \sum_{j=0}^{2n-1} 0 = 0
 \end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{12n} a_k^2 &= 8n(72n^2 + 9n + 1) + 2 \times 6n + 0 \\
 &= \mathbf{4n(144n^2 + 18n + 5)}
 \end{aligned}$$



- 6 (1) X と Y の平均をそれぞれ $\bar{X}$, $\bar{Y}$ とすると

$$\bar{X} = \frac{1}{10}(3a + 3b + 4c), \quad \bar{Y} = \frac{1}{10}(5a + 5b) = \frac{1}{2}(a + b)$$

$\bar{X} = \bar{Y}$ であるから

$$3a + 3b + 4c = 5a + 5b \quad \text{すなわち} \quad \bar{X} = \bar{Y} = c = \frac{a + b}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad s_X^2 &= \frac{1}{10}(3a^2 + 3b^2 + 4c^2) - c^2 = \frac{3}{10}(a^2 + b^2 - 2c^2) \\ &= \frac{3}{10} \left\{ a^2 + b^2 - 2 \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \right\} = \frac{3}{20}(a - b)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_Y^2 &= \frac{1}{10}(5a^2 + 5b^2) - c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2c^2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ a^2 + b^2 - 2 \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \right\} = \frac{1}{4}(a - b)^2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

- (2) 科目 X と Y の共分散を s_{XY} とすると

$$\begin{aligned} s_{XY} &= \frac{1}{10}(2a^2 + 2b^2 + 2ab + 2bc + 2ca) - \bar{X} \cdot \bar{Y} \\ &= \frac{1}{10} \{ 2a^2 + 2b^2 + 2ab + 2c(a + b) \} - \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{10} \{ 2a^2 + 2b^2 + 2ab + (a + b)^2 \} - \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{20}(a - b)^2 \end{aligned}$$

$$(1) \text{ の結果から } s_X^2 s_Y^2 = \frac{3}{80}(a - b)^4 \quad \text{ゆえに} \quad s_X s_Y = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}(a - b)^2$$

$$\text{したがって、相関係数は} \quad \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{\frac{1}{20}(a - b)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}(a - b)^2} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$3 < \sqrt{15} < 4 \text{ より, } 0.25 = \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{15}} < \frac{1}{3} < 0.34 \text{ であるから}$$

よって、求める相関係数は **0.3**

(3) $a < c, b < c$ と仮定すると $\frac{a+b}{2} < c$ となり, ① に反する.

また, $a > c, b > c$ と仮定すると $\frac{a+b}{2} > c$ となり, ① に反する.

よって, c は科目 X の最大値でもなく, 最小値でもない. a 点が 3 人, b 点が 3 人, c 点が 4 人であるから, 科目 X の中央値は c である.

したがって $c = 65$ ① より $a + b = 130$... ③

科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるから, ② より

$$\frac{1}{2}|a - b| = 11 \quad \text{ゆえに} \quad |a - b| = 22 \quad \dots \text{④}$$

③, ④ を解いて $(a, b) = (54, 76), (76, 54)$

よって $(a, b, c) = (54, 76, 65), (76, 54, 65)$ ■

4.16 2016 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 必答, 5 6 から 1 題

1 $6 \cdot 3^{3x} + 1 = 7 \cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ.2 θ を実数とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \cos \theta, \quad a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. すべての n について $a_n = \cos(n-1)\theta$ が成り立つとき, $\cos \theta$ を求めよ.

3 硬貨が 2 枚ある. 最初は 2 枚とも表の状態で置かれている. 次の操作を n 回行ったあと, 硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ.

[操作] 2 枚とも表, または 2 枚とも裏のときには, 2 枚の硬貨両方を投げる.
表と裏が 1 枚ずつのときには, 表になっている硬貨だけを投げる.

4 a を実数とし, $f(x) = x^3 - 3ax$ とする. 区間 $-1 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする. M の最小値とそのときの a の値を求めよ.

5 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度は 60° である. このとき

$$r = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|}{|2\vec{a} + \vec{b}|}$$

のとりうる値の範囲を求めよ.

- 6 x は 0 以上の整数である．次の表は 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 5 人の得点をまとめたものである．

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

- (1) $2n$ 個の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ について,

$$a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, \quad b = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \quad \text{とすると,}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a)(b_k - b) = \sum_{k=1}^n a_k b_k - nab$$

が成り立つことを示せ．

- (2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ．
 (3) x の値を 2 増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった．このとき， r_{XY} の値を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

解答例

1 $6 \cdot 3^{3x} + 1 = 7 \cdot 5^{2x} \quad \dots (*)$

(*) において

x	0	1	2
$6 \cdot 3^{3x} + 1$	7	163	4375
$7 \cdot 5^{2x}$	7	175	4375

$x \geq 3$ のとき

$$\frac{3^{3x}}{5^{2x}} = \left(\frac{27}{25}\right)^x \geq \left(1 + \frac{2}{25}\right)^3 > 1 + 3 \cdot \frac{2}{25} = 1 + \frac{6}{25} > 1 + \frac{6}{36} = \frac{7}{6}$$

したがって $x \geq 3$ のとき $6 \cdot 3^{3x} > 7 \cdot 5^{2x}$ すなわち $6 \cdot 3^{3x} + 1 > 7 \cdot 5^{2x}$

$x \geq 3$ において, (*) を満たす整数 x は存在しない.

よって, (*) を満たす 0 以上の整数 x は **0, 2** ■

2 $a_1 = 1, a_2 = \cos \theta, a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ が

$$a_n = \cos(n-1) \quad \dots (*)$$

を満たすから

$$n = 1 \text{ のとき} \quad \cos 2\theta = \frac{3}{2} \cos \theta - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$n = 2 \text{ のとき} \quad \cos 3\theta = \frac{3}{2} \cos 2\theta - \cos \theta \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{3}{2} \cos \theta - 1 \quad \text{ゆえに } \cos \theta \left(\cos \theta - \frac{3}{4} \right) = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ より } 2 \cos 2\theta \cos \theta = \frac{3}{2} \cos 2\theta \quad \text{ゆえに } (2 \cos^2 \theta - 1) \left(\cos \theta - \frac{3}{4} \right) = 0$$

$$\text{上の 2 式を同時に満たすとき} \quad \cos \theta = \frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

$n \leq 2$ のとき, (*) は定義より成立する.

$n \leq k+1$ のとき, (*) が成立すると仮定すると, $\textcircled{3}$ より

$$a_{k+2} = \frac{3}{2}a_{k+1} - a_k = 2 \cos \theta \cos k\theta - \cos(k-1)\theta$$

$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2 \cos \theta \cos k\theta$ であるから $a_{k+2} = \cos(k+1)\theta$

ゆえに, すべての自然数 n について, (*) は成立する. よって $\cos \theta = \frac{3}{4}$

補足 漸化式 $a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n$ の特性方程式

$$x^2 = \frac{3}{2}x - 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{7}i}{4}, \quad \beta = \frac{3 - \sqrt{7}i}{4} \quad \text{とおくと, } a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{3}{4} \quad \text{より}$$

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{4}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{とおくと}$$

$$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \beta = \cos \theta - i \sin \theta$$

したがって

$$a_n = \frac{1}{2} \{ (\cos \theta + i \sin \theta)^{n-1} + (\cos \theta - i \sin \theta)^{n-1} \} = \cos(n-1)\theta$$

■

3 硬貨を n 回投げたあと、表の硬貨の枚数が $0, 1, 2$ である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n とすると

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad q_1 = {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad r_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

操作により、次の確率漸化式が成り立つ。

$$(*) \quad \begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}r_n \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

$$(*) \text{ により } p_2 = \frac{3}{8}, \quad q_2 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{1}{8} \quad \text{さらに } p_3 = \frac{3}{8}, \quad q_3 = \frac{1}{2}, \quad r_3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{したがって } n \geq 2 \text{ のとき } p_n = \frac{3}{8}, \quad q_n = \frac{1}{2}, \quad r_n = \frac{1}{8}$$

$$\text{よって、求める確率は } p_n = \begin{cases} \frac{1}{4} & (n=1) \\ \frac{3}{8} & (n \geq 2) \end{cases}$$

■

4 $f(x) = x^3 - 3ax$ より

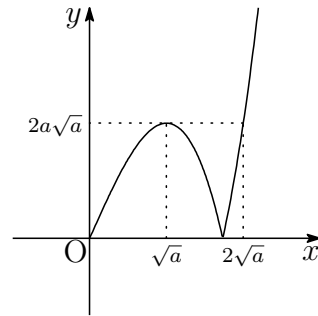
$$f(-x) = -(x^3 - 3ax) = -f(x) \quad \text{ゆえに} \quad |f(-x)| = |f(x)|$$

したがって、 $0 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を求めればよい.

$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$ であるから、 $a \leq 0$ のとき $f(x)$ は単調増加.

$a > 0$ のとき、 $f(x)$ の増減および $y = |f(x)|$ のグラフは

x	0	...	$\sqrt{a}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2a\sqrt{a}$	$\nearrow$



(i) $a \leq 0$ のとき $M = |f(1)| = |1 - 3a| = -3a + 1$

(ii) $0 < 2\sqrt{a} \leq 1$, すなわち、 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ のとき

$$M = |f(1)| = |1 - 3a| = -3a + 1$$

(iii) $\sqrt{a} \leq 1 < 2\sqrt{a}$, すなわち、 $\frac{1}{4} < a \leq 1$ のとき

$$M = |f(\sqrt{a})| = 2a\sqrt{a}$$

(iv) $1 < \sqrt{a}$, すなわち、 $1 < a$ のとき

$$M = |f(1)| = |1 - 3a| = 3a - 1$$

$$(i) \sim (iv) \text{ より } M = \begin{cases} -3a + 1 & (a \leq \frac{1}{4}) \\ 2a\sqrt{a} & (\frac{1}{4} < a \leq 1) \\ 3a - 1 & (1 < a) \end{cases}$$

M は a の関数で、 $a \leq \frac{1}{4}$ で単調減少、 $\frac{1}{4} \leq a$ で単調増加である.

よって、 M は $a = \frac{1}{4}$ で最小値 $\frac{1}{4}$ をとる. ■

$$\boxed{5} \quad r = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|}{|2\vec{a} + \vec{b}|} \text{ および } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \text{ より}$$

$$r^2 = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|^2}{|2\vec{a} + \vec{b}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + 4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2}$$

$$x = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \text{ とおくと } (x > 0) \quad r^2 = \frac{1 + 2x + 4x^2}{4 + 2x + x^2}$$

$$\text{したがって} \quad (r^2 - 4)x^2 + 2(r^2 - 1)x + 4r^2 - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

方程式(*)は, $r^2 - 4 = 0$, すなわち, $r = 2$ のとき $6x + 15 = 0$

これは正の解をもたないので不適.

$r \neq 2$ のとき, (*) の解を α, β とすると, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{2(r^2 - 1)}{r^2 - 4}, \quad \alpha\beta = \frac{4r^2 - 1}{r^2 - 4}$$

(i) $r = \frac{1}{2}$ のとき $\alpha + \beta < 0$, $\alpha\beta = 0$ より, (*) は正の解をもたない.

(ii) $0 < r < \frac{1}{2}$, $2 < r$ のとき $\alpha + \beta < 0$, $\alpha\beta > 0$ より,
(*) は正の解をもたない.

(iii) $\frac{1}{2} < r < 2$ のとき $\alpha\beta < 0$ より, (*) は正の解をもつ.

(i)~(iii) から, 求める r の値の範囲は $\frac{1}{2} < r < 2$

補足 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とすると, $\alpha\beta < 0$ のとき

$$b^2 - 4ac = b^2 - 4a^2 \cdot \frac{c}{a} = b^2 - 4a^2\alpha\beta > 0$$

別解 $f(x) = r^2 = \frac{1 + 2x + 4x^2}{4 + 2x + x^2}$ とおくと ($x > 0$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 + 2x + 4x^2)'(4 + 2x + x^2) - (1 + 2x + 4x^2)(4 + 2x + x^2)'}{(4 + 2x + x^2)^2} \\ &= \frac{6(1 + 5x + x^2)}{(4 + 2x + x^2)^2} > 0 \end{aligned}$$

$f(x)$ は単調増加. $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \frac{1}{4}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$

したがって $\frac{1}{4} < r^2 < 4$ よって $\frac{1}{2} < r < 2$ ■

6 (1) $na = \sum_{k=1}^n a_k$, $nb = \sum_{k=1}^n b_k$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k - a)(b_k - b) &= \sum_{k=1}^n a_k b_k - a \sum_{k=1}^n b_k - b \sum_{k=1}^n a_k + ab \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k b_k - a \cdot nb - b \cdot na + nab \\ &= \sum_{k=1}^n a_k b_k - nab \end{aligned}$$

(2) 科目 X と科目 Y の得点の平均をそれぞれ a , b とすると

$$a = \frac{1}{5}(x + 6 + 4 + 7 + 4) = \frac{x + 21}{5}, \quad b = \frac{1}{5}(9 + 7 + 5 + 10 + 9) = 8$$

科目 X と科目 Y の得点の分散をそれぞれ s_X^2 , s_Y^2 とすると

$$\begin{aligned} s_X^2 &= \frac{1}{5}(x^2 + 6^2 + 4^2 + 7^2 + 4^2) - a^2 = \frac{2}{25}(2x^2 - 21x + 72) \\ s_Y^2 &= \frac{1}{5}(9^2 + 7^2 + 5^2 + 10^2 + 9^2) - b^2 = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

科目 X と科目 Y の得点の共分散を s_{XY} とすると

$$s_{XY} = \frac{1}{5}(x \cdot 9 + 6 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 9) - ab = \frac{x}{5}$$

よって
$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{2(2x^2 - 21x + 72)}}$$

(3) r_{XY} は x の値を 2 増やしても値は同じであるから, (2) の結果から

$$\frac{\sqrt{5}(x+2)}{4\sqrt{2}\sqrt{2(x+2)^2 - 21(x+2) + 72}} = \frac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{2}\sqrt{2x^2 - 21x + 72}}$$

ゆえに
$$x\sqrt{2x^2 - 13x + 38} = (x+2)\sqrt{2x^2 - 21x + 72}$$

両辺を平方して整理すると
$$7x^2 - 34x - 48 = 0$$

したがって $(x-6)(7x+8) = 0$ x は 0 以上の整数であるから $x = 6$

ゆえに
$$r_{XY} = \frac{\sqrt{5} \cdot 6}{4\sqrt{2(2 \cdot 6^2 - 21 \cdot 6 + 72)}} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{2.236 \dots}{4} = 0.559 \dots$$

よって $r_{XY} = 0.6$ ■

4.17 2017年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 実数 a, b は $a \geq 1, b \geq 1, a + b = 9$ を満たす.(1) $\log_3 a + \log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ.(2) $\log_2 a + \log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ.

2 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 \\ y^2 = zx + 7 \\ z^2 = xy + 7 \end{cases}$$

を満たす整数の組 (x, y, z) で $x \leq y \leq z$ となるものを求めよ.3 $P(0) = 1, P(x+1) - P(x) = 2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ.4 正の実数 a, b, c は $a + b + c = 1$ を満たす. 連立方程式

$$|ax + by| \leq 1, \quad |cx - by| \leq 1$$

の表す xy 平面の領域を D とする. D の面積の最小値を求めよ.5 xy 平面上の直線 $x = y + 1$ を k , yz 平面上の直線 $y = z + 1$ を l , xz 平面上の直線 $z = x + 1$ を m とする. 直線 k 上に点 $P_1(1, 0, 0)$ をとる. l 上の点 P_2 を $P_1P_2 \perp l$ となるように定め, m 上の点 P_3 を $P_2P_3 \perp m$ となるように定め, k 上の点 P_4 を $P_3P_4 \perp k$ となるように定める. 以下, 同様の手順で $l, m, k, l, m, k, \dots$ 上の点 $P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, \dots$ を定める.(1) 点 P_2, P_3 の座標を求めよ.(2) 線分 P_nP_{n+1} の長さを n を用いて表せ.

解答例

- 1** (1) $a \geq 1, b \geq 1, a + b = 9$ を満たすとき

$$b = 9 - a \geq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leq a \leq 8$$

$$\text{このとき} \quad \log_3 a + \log_3 b = \log_3 ab = \log_3 a(9 - a)$$

$$f(a) = a(9 - a) \quad (1 \leq a \leq 8) \quad \text{とおくと} \quad f(a) = -\left(a - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{4}$$

$$\text{したがって} \quad 8 \leq f(a) \leq \frac{81}{4}$$

$$\text{よって} \quad \text{最大値} \log_3 \frac{81}{4} = 4 - 2 \log_3 2, \quad \text{最小値} \log_3 8 = 3 \log_3 2$$

- (2) (1) と同様に $\log_2 a + \log_4 b = \log_4 a^2 b = \log_4 a^2(9 - a)$

$$g(a) = a^2(9 - a) = -a^3 + 9a^2 \quad (1 \leq a \leq 8) \quad \text{とおくと}$$

$$g'(a) = -3a^2 + 18a = -3a(a - 6)$$

a	1	$\dots$	6	$\dots$	8
$g'(a)$		+	0	-	
$g(a)$	8	$\nearrow$	極大 108	$\searrow$	64

$$\text{したがって} \quad 8 \leq g(a) \leq 108$$

$$\text{よって} \quad \text{最大値} \log_4 108 = 1 + 3 \log_4 3, \quad \text{最小値} \log_4 8 = \frac{3}{2}$$



$$\boxed{2} \quad \begin{cases} x^2 = yz + 7 & \cdots \textcircled{1} \\ y^2 = zx + 7 & \cdots \textcircled{2} \\ z^2 = xy + 7 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } x^2 - y^2 = z(y - x) \quad \text{ゆえに } (x - y)(x + y + z) = 0$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ より } y^2 - z^2 = x(z - y) \quad \text{ゆえに } (y - z)(x + y + z) = 0$$

上の2式の結果において、 $x + y + z \neq 0$ とすると $x - y = 0$, $y - z = 0$

すなわち $x = y = z$ これは、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$ を満たさない。

$$\text{したがって } x + y + z = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

条件より、 $x \leq y \leq z$ であるから、 $z < 0$ とすると

$$x \leq y \leq z < 0 \quad \text{これは}\textcircled{4}\text{に反するから } z \geq 0$$

$\textcircled{4}$ から、 $x = -(y + z)$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$(y + z)^2 = yz + 7 \quad \text{ゆえに } (2y + z)^2 = 28 - 3z^2$$

第2式の左辺が平方数であるから、 $z \geq 0$ に注意して $z = 1, 2, 3$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より、 x, y を解とする t に関する2次方程式は

$$t^2 - (x + y)t + xy = 0 \quad \text{すなわち } t^2 + zt + z^2 - 7 = 0 \quad \cdots (*)$$

(i) $z = 1$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + t - 6 = 0 \quad \text{ゆえに } (t + 3)(t - 2) = 0$$

$x \leq y$ に注意して $x = -3, y = 2$ これは、 $y \leq z$ に反するので不適。

(ii) $z = 2$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \text{ゆえに } (t + 3)(t - 1) = 0$$

$x \leq y$ に注意して $x = -3, y = 1$

(iii) $z = 3$ を $(*)$ に代入すると

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \quad \text{ゆえに } (t + 2)(t + 1) = 0$$

$x \leq y$ に注意して $x = -2, y = -1$

(i) $\sim$ (iii) より $(x, y, z) = (-3, 1, 2), (-2, -1, 3)$ ■

3 $P(x+1) - P(x) = 2x$ より, n を自然数とすると

$$\sum_{k=0}^{n-1} \{P(k+1) - P(k)\} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} k$$

したがって $P(n) - P(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1)$

$P(0) = 1$ であるから $P(n) = n^2 - n + 1$

$f(x) = P(x) - (x^2 - x + 1) \cdots (*)$ とおくと

$$f(1) = 0, f(2) = 0, \dots, f(n) = 0, \dots$$

$f(x)$ は整式であるから, 因数定理により

$$f(x) = g(x)(x-1)(x-2) \cdots (x-n) \cdots \quad (g(x) \text{ は整式})$$

$f(x)$ の次数は有限であるから

$$g(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) = 0$$

$(*)$ より $P(x) = x^2 - x + 1$ ■

4 $|ax + by| \leq 1, |cx - by| \leq 1$ より

$$-1 \leq ax + by \leq 1, \quad -1 \leq cx - by \leq 1$$

4本の直線を

$$\begin{aligned} l_1 : ax + by &= 1, & m_1 : cx - by &= 1, \\ l_2 : ax + by &= -1, & m_2 : cx - by &= -1 \end{aligned}$$

とすると, $l_1 // l_2, m_1 // m_2$. D はこれら4本の直線で囲まれた平行四辺形の内部および周からなる領域である.

l_1 の点 (x_1, y_1) から l_2 へ下ろした垂線の長さを d とすると, $ax_1 + by_1 = 1$ より

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

l_1 と m_1 の交点を P をとすると, P の座標は

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx - by = 1 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad P \left(\frac{2}{a+c}, \frac{-a+c}{b(a+c)} \right)$$

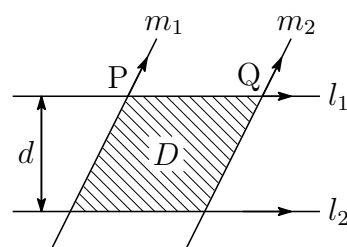
l_1 と m_2 の交点を Q をとすると, Q の座標は

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx - by = -1 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad Q \left(0, \frac{1}{b} \right)$$

したがって $PQ = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{b(a+c)}$

D の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= PQ \cdot d = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{b(a+c)} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{4}{b(a+c)} \end{aligned}$$



$a + b + c = 1$ より, $a + c = 1 - b$ であるから $S = \frac{4}{b(1-b)}$

$0 < b < 1$ であるから $b(1-b) = -b^2 + b = -\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

よって $b = \frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $S = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16$

■

- 5 (1) 直線 k, l, m を媒介変数 t を用いて表すと

$$k: (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 1, 0)$$

$$l: (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(0, 1, 1)$$

$$m: (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 0, 1)$$

P_2, P_3 はそれぞれ l, m 上にあるから, a_2, a_3 を用いて

$$\overrightarrow{OP_2} = (0, 1, 0) + a_2(0, 1, 1) = (0, 1 + a_2, a_2)$$

$$\overrightarrow{OP_3} = (0, 0, 1) + a_3(1, 0, 1) = (a_3, 0, 1 + a_3)$$

$\overrightarrow{OP_1} = (1, 0, 0)$ および上の 2 式から

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 1 + a_2, a_2), \quad \overrightarrow{P_2P_3} = (a_3, -1 - a_2, 1 - a_2 + a_3)$$

$\overrightarrow{P_1P_2} \perp l$ より

$$0 \cdot (-1) + 1 \cdot (1 + a_2) + 1 \cdot a_2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 + 2a_2 = 0$$

$\overrightarrow{P_2P_3} \perp m$ より

$$1 \cdot a_3 + 0 \cdot (-1 - a_2) + 1 \cdot (1 - a_2 + a_3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 - a_2 + 2a_3 = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{3}{4}$$

$$\text{よって} \quad P_2 \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad P_3 \left(-\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4} \right)$$

- (2) P_n が k 上にあるとき, $P_n(1 + a_n, a_n, 0), P_{n+1}(0, 1 + a_{n+1}, a_{n+1})$ とすると, $\overrightarrow{P_nP_{n+1}} = (-1 - a_n, 1 - a_n + a_{n+1}, a_{n+1}) \perp l$ であるから

$$(-1 - a_n) \cdot 0 + (1 - a_n + a_{n+1}) \cdot 1 + a_{n+1} \cdot 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

P_n が l 上にあるとき, $P_n(0, 1 + a_n, a_n), P_{n+1}(a_{n+1}, 0, 1 + a_{n+1})$ とすると, $\overrightarrow{P_nP_{n+1}} = (a_{n+1}, -1 - a_n, 1 - a_n + a_{n+1}) \perp m$ であるから

$$a_{n+1} \cdot 1 + (-1 - a_n) \cdot 0 + (1 - a_n + a_{n+1}) \cdot 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

P_n が m 上にあるとき, $P_n(a_n, 0, 1 + a_n), P_{n+1}(1 + a_{n+1}, a_{n+1}, 0)$ とすると, $\overrightarrow{P_nP_{n+1}} = (1 - a_n + a_{n+1}, a_{n+1}, -1 - a_n) \perp k$ であるから

$$(1 - a_n + a_{n+1}) \cdot 1 + a_{n+1} \cdot 1 + (-1 - a_n) \cdot 0 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①～③ をそれぞれ整理すると、すべて次式となる.

$$2a_{n+1} - a_n + 1 = 0$$

$a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}$ であるから

$$a_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(a_n + 1) \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1$$

したがって

$$\begin{aligned} P_n P_{n+1}^2 &= (-1 - a_n)^2 + (1 - a_n + a_{n+1})^2 + a_{n+1}^2 \\ &= \{-1 - (2^{1-n} - 1)\}^2 \\ &\quad + \{1 - (2^{1-n} - 1) + (2^{-n} - 1)\}^2 + (2^{-n} - 1)^2 \\ &= 4 \cdot 2^{-2n} + (1 - 2^{-n})^2 + (2^{-n} - 1)^2 \\ &= 6 \cdot 2^{-2n} - 4 \cdot 2^{-n} + 2 \end{aligned}$$

よって $P_n P_{n+1} = \sqrt{6 \cdot 2^{-2n} - 4 \cdot 2^{-n} + 2}$ ■

4.18 2018 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 正の整数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す. たとえば

$$S(3) = 3, \quad S(10) = 1 + 0 = 1, \quad S(516) = 5 + 1 + 6 = 12$$

である.

(1) $n \geq 10000$ のとき, 不等式 $n > 30S(n) + 2018$ を示せ.(2) $n = 30S(n) + 2018$ を満たす n を求めよ.2 $-1 \leq t \leq 1$ とし, 曲線 $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ 上の点 $\left(t, \frac{t^2 - 1}{2}\right)$ における接線を l とする. 半円 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \leq 0$) と l で囲まれた部分の面積を S とする. S のとりうる値の範囲を求めよ.

3 3 個のさいころを投げる.

(1) 出た目の積が 6 となる確率を求めよ.

(2) 出た目の積が k となる確率が $\frac{1}{36}$ であるような k をすべて求めよ.4 p, q を正の実数とする. 原点を O とする座標空間内の 3 点 $P(p, 0, 0)$, $Q(0, q, 0)$, $R(0, 0, 1)$ は $\angle PRQ = \frac{\pi}{6}$ を満たす. 四面体 $OPQR$ の体積の最大値を求めよ.5 a を実数とし, $f(x) = x - x^3$, $g(x) = a(x - x^2)$ とする. 2 つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ は $0 < x < 1$ の範囲に共有点を持つ.(1) a のとりうる値の範囲を求めよ.(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad 10^k \leq n < 10^{k+1} \text{ とすると } (k \geq 4)$$

$$\begin{aligned} n &\geq 10^k = (9+1)^k > 9^k + {}_k C_1 \cdot 9^{k-1} > 9^4 + {}_k C_1 \cdot 9^3 = 6561 + 729k \\ &> 30(9k+9) + 2018 \geq 30S(n) + 2018 \end{aligned}$$

$$\text{よって } n \geq 10000 \text{ のとき } n > 30S(n) + 2018$$

(2) (1) の結果から

$$n = 30S(n) + 2018 \quad \cdots (*)$$

を満たす正の整数 n の必要条件は

$$n < 10000$$

また, (*) から, n の一位の数が 8 であることに注意すると, 9 以下の負でない整数 a, b, c を用いて

$$n = 1000a + 100b + 10c + 8$$

とおき, (*) に代入すると

$$1000a + 100b + 10c + 8 = 30(a + b + c + 8) + 2018$$

$$\text{整理すると } 7b - 2c = 225 - 97a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-18 \leq 7b - 2c \leq 63 \text{ であるから}$$

$$-18 \leq 225 - 97a \leq 63 \quad \text{ゆえに } a = 2$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入して } 7b - 2c = 31$$

$$b, c \text{ の条件に注意してこれを解くと } (b, c) = (5, 2), (7, 9)$$

$$\text{よって, 求める } n \text{ は } \quad \mathbf{2528, 2798}$$



2 $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ より $y' = x$

曲線 $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ 上の点 $\left(t, \frac{t^2 - 1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y - \frac{t^2 - 1}{2} = t(x - t) + \frac{t^2 - 1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad tx - y - \frac{t^2 + 1}{2} = 0$$

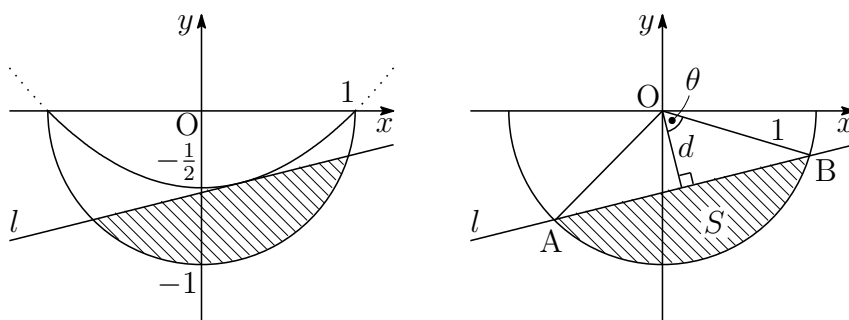
原点 O と直線 l の距離を d とすると

$$d = \frac{\left| -\frac{t^2 + 1}{2} \right|}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

l と半円 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \leq 0$) との交点を A, B とし, $2\theta = \angle AOB$ とすると

$$\cos \theta = d = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

したがって $S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 2\theta = \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \dots \textcircled{2}$



S は d が最大のとき最小となり, d が最小のとき最大となるから ①, ② より,

$$t = \pm 1 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{のとき} \quad S \text{ は最小値 } \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

$$t = 0 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{のとき} \quad S \text{ は最大値 } \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \leq S \leq \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$



- 3 (1) 出た目の積が6となる3個のサイコロの目の組合せは

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 1, 6\}$$

よって、求める確率は $\frac{3! + {}_3C_1}{6^3} = \frac{1}{24}$

- (2) 3個のさいころの出た目を a, b, c とすると $k = abc$

k となる確率が $\frac{1}{36} = \frac{{}_3C_1 \cdot 2}{6^3} = \frac{3!}{6!}$ となるのは, (A), (B) の場合である.

(A) k が3数 $a \cdot a \cdot ar^2 = a \cdot ar \cdot ar$ または $ar \cdot ar \cdot ar^2 = a \cdot ar^2 \cdot ar^2$ の積として表される ($r \neq 1$), すなわち, $1 \cdot 1 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 2$ または $2 \cdot 2 \cdot 4 = 1 \cdot 4 \cdot 4$ より

$$k = 4, 16$$

(B) k が相異なる3数 a, b, c の積として一意的に表される.

ここで, $X = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $Y = \{5\}$ とする.

(i) a, b, c が X の要素であるとき, k は

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 \cdot 3 \cdot 4, 1 \cdot 3 \cdot 6, \\ 1 \cdot 4 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4, 2 \cdot 3 \cdot 6, 2 \cdot 4 \cdot 6, 3 \cdot 4 \cdot 6 \end{aligned}$$

これらは, (B) を満たさない.

(ii) a, b, c の1つが Y の要素であるとき, $c = 5$ とすると, a, b は X の要素である. このとき

$$4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3, \quad 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

であることに注意すると, (B) を満たす $\{a, b\}$ の組合せは

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}$$

したがって, (B) を満たす k の値は

$$k = 1 \cdot 2 \cdot 5, 1 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 4 \cdot 5, 3 \cdot 5 \cdot 6, 4 \cdot 5 \cdot 6$$

(A) および (ii) から

$$k = 4, 10, 15, 16, 40, 90, 120$$



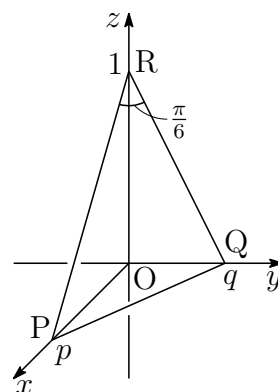
4 $P(p, 0, 0), Q(0, q, 0), R(0, 0, 1)$ より

$$\overrightarrow{RP} = (p, 0, -1), \quad \overrightarrow{RQ} = (0, q, -1)$$

$$\angle PRQ = \frac{\pi}{6}, \quad \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = |\overrightarrow{RP}| |\overrightarrow{RQ}| \cos \frac{\pi}{6} \text{ より}$$

$$1 = \sqrt{p^2 + 1} \sqrt{q^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad (p^2 + 1)(q^2 + 1) = \frac{4}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$



$$\text{四面体 OPQR の体積を } V \text{ とすると} \quad V = \frac{1}{6}pq \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より} \quad p^2q^2 + p^2 + q^2 = \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad (p - q)^2 = -p^2q^2 - 2pq + \frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$$\text{したがって} \quad -p^2q^2 - 2pq + \frac{1}{3} \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (pq)^2 + 2pq - \frac{1}{3} \leq 0$$

$$p > 0, q > 0 \text{ に注意して} \quad 0 < pq \leq \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$$

$$\text{上式において等号が成立するのは, } \textcircled{1}' \text{ より} \quad p = q = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}} - 1$$

$\textcircled{2}$ より, このとき V は最大値

$$\frac{1}{6}pq = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{18}$$

をとる. ■

5 (1) $f(x) = x(1-x)(1+x),$

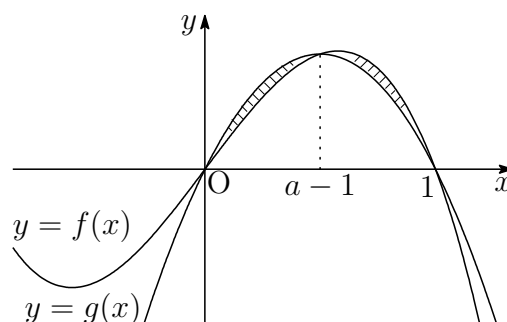
$g(x) = ax(1-x)$ より

$f(x) - g(x) = x(1-x)(x-a+1)$

$f(x) = g(x)$ の解は $x = 0, 1, a-1$

$0 < x < 1$ に解があるから

$0 < a-1 < 1$ よって $1 < a < 2$



(2) $f(x) - g(x) = x(1-x)(x-a+1)$ より

$0 \leq x \leq a-1$ のとき $f(x) \leq g(x), \quad a-1 \leq x \leq 1$ のとき $f(x) \geq g(x)$

$$S_1 = \int_0^{a-1} \{g(x) - f(x)\} dx, \quad S_2 = \int_{a-1}^1 \{f(x) - g(x)\} dx$$

とおくと

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \int_{a-1}^1 \{f(x) - g(x)\} dx - \int_0^{a-1} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \{f(x) - g(x)\} dx = \int_0^1 x(1-x)(x-a+1) dx \\ &= \int_0^1 x^2(1-x) dx + (1-a) \int_0^1 x(1-x) dx \\ &= \frac{1}{12} + (1-a) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}(3-2a) \end{aligned}$$

$S_2 - S_1 = 0$ であるから $a = \frac{3}{2}$

補足 積分公式²

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用する. ■

²<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> の [1] を参照.

4.19 2019 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

- 1 p を自然数とする. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. 数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ.

- 2 原点を O とする座標平面上の点 Q は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の部分を動く. 点 Q と点 $A(2, 2)$ に対して

$$\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ}) \overrightarrow{OQ}$$

を満たす点 P の軌跡を求め, 図示せよ.

- 3 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とする. また, α は 1 より大きい実数とする. 曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(\alpha, f(\alpha))$ における接線と x 軸の交点を Q とする. 点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを ℓ とする.

(1) ℓ と C の接点の x 座標を α の式で表せ.

(2) $\alpha = 2$ とする. ℓ と C で囲まれた部分の面積を求めよ.

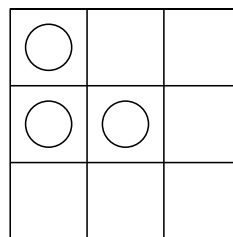
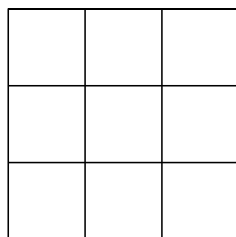
- 4 原点を O とする座標平面上に, 点 $(2, 0)$ を中心とする半径 2 の円 C_1 と, 点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある. 点 P を中心とする円 C_3 は C_1 に内接し, かつ C_2 に外接する. ただし, P は x 軸上にないものとする. P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とするとき, 三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ.

5 左下の図のような縦3列横3列の9個のマスがある．異なる3個のマスを選び，それぞれに1枚ずつコインを置く．マスの選び方は，どれも同様に確からしいものとする．縦と横の各列について，点数を次のように定める．

- その列に置かれているコインが1枚以下のとき，0点
- その列に置かれているコインがちょうど2枚のとき，1点
- その列に置かれているコインが3枚のとき，3点

縦と横のすべての列の点数の合計を S とする．たとえば，右下の図のようにコインが置かれている場合，縦の1列目と横の2列目の点数が1点，他の列の点数が0点であるから， $S = 2$ となる．

- (1) $S = 3$ となる確率を求めよ．
- (2) $S = 1$ となる確率を求めよ．
- (3) $S = 2$ となる確率を求めよ．



解答例

$$\boxed{1} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{ゆえに} \quad a_3 = a_2 - a_1 + 13 = p^2 - 1 + 13 = p^2 + 12$$

$$a_4 = a_3 - a_2 + 13 = (p^2 + 12) - p^2 + 13 = 25$$

$$a_5 = a_4 - a_3 + 13 = 25 - (p^2 + 12) + 13 = 26 - p^2$$

数列 $\{a_n\}$ が平方数からなると仮定すると, $a_5 = 26 - p^2$ より, p が自然数であるから, 条件を満たす p は

$$p = 1, 5$$

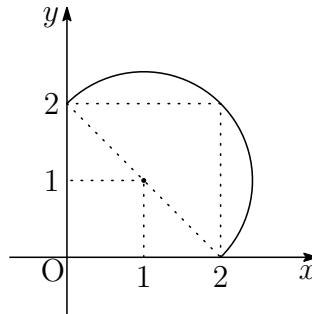
このとき, a_3 は平方数ではないので矛盾を生じる.

よって, 数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在する. ■

$$\boxed{2} \quad P(x, y), Q(\cos \theta, \sin \theta) \text{ とすると } (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}), \quad \overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ}) \overrightarrow{OQ} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} (x, y) &= (2 \cos \theta + 2 \sin \theta)(\cos \theta, \sin \theta) \\ &= (2 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta, 2 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin^2 \theta) \\ &= (\cos 2\theta + \sin 2\theta + 1, \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1) \\ &= \left(\sqrt{2} \cos \left(2\theta - \frac{\pi}{4} \right) + 1, \sqrt{2} \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right) \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ であるから, 点 P の描く軌跡は, 次のようになる.



$$\boxed{3} \quad (1) \quad f(x) = x^3 - 3x + 2 \text{ より } f'(x) = 3x^2 - 3$$

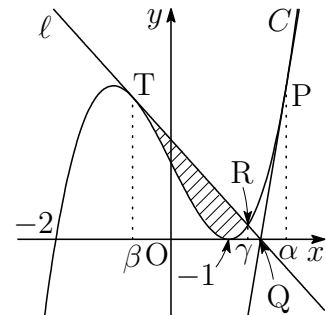
C 上の点 $P(\alpha, f(\alpha))$ における接線は

$$y - (\alpha^3 - 3\alpha + 2) = (3\alpha^2 - 3)(x - \alpha)$$

$$\text{すなわち } y = 3(\alpha^2 - 1)x - 2\alpha^3 + 2 \quad \cdots (*)$$

これに $y = 0$ を代入して整理すると

$$(\alpha - 1)\{3(\alpha + 1)x - 2(\alpha^2 + \alpha + 1)\} = 0$$



点 Q の x 座標は, $\alpha > 1$ に注意して $x = \frac{2(\alpha^2 + \alpha + 1)}{3(\alpha + 1)}$

ℓ と C の接点を T とし, その x 座標を β とすると, ℓ と x 軸の交点の x 座標は, $\beta \neq -1$ に注意して

$$\frac{2(\beta^2 + \beta + 1)}{3(\beta + 1)}$$

これが点 Q の x 座標と一致するから

$$\frac{2(\beta^2 + \beta + 1)}{3(\beta + 1)} = \frac{2(\alpha^2 + \alpha + 1)}{3(\alpha + 1)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\beta^2}{\beta + 1} = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1}$$

これを整理すると $(\alpha - \beta)(\alpha\beta + \alpha + \beta) = 0$

$$\alpha \neq \beta \text{ であるから} \quad \beta = -\frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

(2) C 上の点 $T(\beta, f(\beta))$ における接線の方程式は, (*) と同様に

$$y = 3(\beta^2 - 1)x - 2\beta^3 + 2$$

C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^3 - 3x + 2 = 3(\beta^2 - 1)x - 2\beta^3 + 2$$

整理すると $(x - \beta)^2(x + 2\beta) = 0$

T 以外の共有点を R とし, その x 座標を γ とすると $\gamma = -2\beta$

ℓ と C で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\beta}^{\gamma} \{3(\beta^2 - 1)x - 2\beta^3 + 2 - (x^3 - 3x + 2)\} dx \\ &= - \int_{\beta}^{\gamma} (x - \beta)^2(x + 2\beta) dx \\ &= \int_{\beta}^{\gamma} (x - \beta)^2(\gamma - x) dx = \frac{1}{12}(\gamma - \beta)^4 \end{aligned}$$

$$\alpha = 2 \text{ のとき, } \beta = -\frac{2}{3}, \gamma = \frac{4}{3}, \gamma - \beta = 2 \quad \text{よって} \quad S = \frac{1}{12} \cdot 2^4 = \frac{4}{3}$$

補足 積分公式³

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m(\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

を利用する. ■

³<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> の [1] を参照.

- 4 C_1, C_2 の中心をそれぞれ $A(1, 0), B(2, 0)$ とし, C_3 の半径を r , 中心 P の座標を (x, y) とすると $AP = 1 + r, BP = 2 - r$ であるから

$$(x - 1)^2 + y^2 = (1 + r)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = (2 - r)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } 2x = 6r \text{ ゆえに } x = 3r$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入すると } y^2 = 8r(1 - r)$$

$\triangle OPQ$ の面積を S とすると

$$S^2 = \frac{1}{4}x^2y^2 = \frac{1}{4}(3r)^2 \cdot 8r(1 - r) = 18r^3(1 - r)$$

$0 < r < 1$ より, 4 正数 $r, r, r, 3(1 - r)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

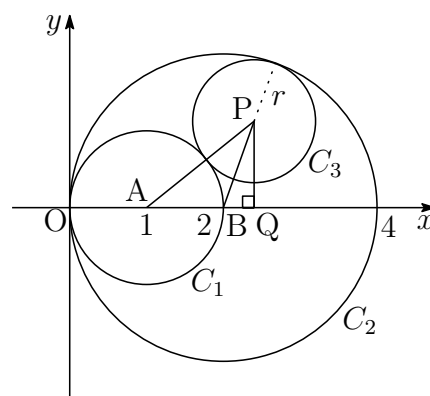
$$\frac{r + r + r + 3(1 - r)}{4} \geq \sqrt[4]{r \cdot r \cdot r \cdot 3(1 - r)} \quad \text{ゆえに} \quad r^3(1 - r) \leq \frac{27}{256}$$

上式において, 等号が成立する条件は

$$r = 3(1 - r) \quad \text{すなわち} \quad r = \frac{3}{4}$$

$$\text{したがって } S^2 \leq 18 \times \frac{27}{256} \quad \text{ゆえに} \quad S \leq \frac{9\sqrt{6}}{16}$$

$$\text{よって, 求める } \triangle OPQ \text{ の面積の最大値は } \frac{9\sqrt{6}}{16}$$



- 5 (1) 3枚のコインを配置する場合の総数は ${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ (通り)

$S = 3$ となるのは、3枚のコインが縦1列に並ぶ3通りと横1列に並ぶ3通りの計6通り

よって、求める確率は $P(S = 3) = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$

- (2) 縦1列に丁度2枚のコインが並ぶ場合の数は、1列に並ぶ列の選び方が ${}_3C_1$ 通り、その配置法が ${}_3C_2$ 通りあり、さらに残り1枚の配置法が2通りであるから

$${}_3C_1 \times {}_3C_2 \times 2 = 18 \text{ (通り)}$$

同様に、横1列に丁度2枚のコインが並ぶ場合の数は 18 (通り)

よって、求める確率は $P(S = 1) = \frac{18 + 18}{84} = \frac{3}{7}$

- (3) まず、 $S = 0$ となる場合は、3枚のコインのうちどの2枚も同じ縦の列または横の列にない場合であるから、その確率は

$$P(S = 0) = \frac{3!}{84} = \frac{1}{14}$$

$P(S = 2) = 1 - P(S = 0) - P(S = 1) - P(S = 3)$ であるから

求める確率は $1 - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} - \frac{1}{14} = \frac{3}{7}$ ■

4.20 2020 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 以下の問いに答えよ.

- (1) 10^{10} を 2020 で割った余りを求めよ.
- (2) 100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるもののうち, 2020 で割り切れるものの個数を求めよ.

2 a を定数とし, $0 \leq \theta < \pi$ とする. 方程式

$$\tan 2\theta + a \tan \theta = 0$$

を満たす θ の個数を求めよ.3 半径 1 の円周上に 3 点 A, B, C がある. 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ の最大値と最小値を求めよ.4 $x > 0$ に対し

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} |t-x| dt$$

と定める. $F(x)$ の最小値を求めよ.5 n を正の整数とする. 1 枚の硬貨を投げ, 表が出れば 1 点, 裏が出れば 2 点を得る. この試行を繰り返し, 点の合計が n 以上になったらやめる. 点の合計がちょうど n になる確率を p_n で表す.

- (1) p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ.
- (2) $|p_{n+1} - p_n| < 0.01$ を満たす最小の n を求めよ.

解答例

- 1** (1) $2020 \times 5 = 10100$ より, $10100 \equiv 0 \pmod{2020}$ であるから

$$10000 \equiv -100 \quad \text{ゆえに} \quad 10^4 \equiv -10^2 \pmod{2020}$$

$$\text{したがって} \quad 10^6 \equiv -10^2 \cdot 10^2 \equiv -10^4 \equiv -(-10^2) \equiv 10^2 \pmod{2020}$$

$$10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020} \text{ の両辺に } 10^4 \text{ を掛けると } 10^{10} \equiv 10^6 \pmod{2020}$$

$$\text{ゆえに} \quad 10^{10} \equiv 10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020} \quad \text{よって, 求める余りは} \quad \mathbf{100}$$

- (2) $10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$ の両辺に順次 10^4 を掛けると, 法 2020 について

$$10^{98} \equiv 10^{94} \equiv 10^{90} \equiv \cdots \equiv 10^{10} \equiv 10^6 \equiv 10^2 \pmod{2020}$$

さらに, 上式の辺々に 10 を掛けると

$$10^{99} \equiv 10^{95} \equiv 10^{91} \equiv \cdots \equiv 10^{11} \equiv 10^7 \equiv 10^3 \pmod{2020}$$

$$10^{96} \equiv 10^{92} \equiv \cdots \equiv 10^{12} \equiv 10^8 \equiv 10^4 \pmod{2020}$$

$$10^{97} \equiv 10^{93} \equiv \cdots \equiv 10^{13} \equiv 10^9 \equiv 10^5 \pmod{2020}$$

$10^4 \equiv -10^2$, $10^5 \equiv -10^3 \pmod{2020}$ であるから, 100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 で, 2020 で割り切れるものは

$$10^{99} + 10^n \quad (n = 5, 9, 13, \dots, 93, 97)$$

よって, 求める個数は $\mathbf{24}$ (個)



2 $\tan 2\theta + a \tan \theta = 0$ より $(0 \leq \theta < \pi)$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} + a \tan \theta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \tan \theta \left(\frac{2}{1 - \tan^2 \theta} + a \right) = 0$$

$x = \tan \theta$ ($0 \leq \theta < \pi$) とおくと

$$x \left(\frac{2}{1 - x^2} + a \right) = 0 \quad \dots (*)$$

• $a = 0$ のとき, 原方程式は $\tan 2\theta = 0$ これを解いて $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$

• $a \neq 0$ のとき, $(*)$ より $x = 0$ または $x^2 = \frac{a+2}{a}$

(i) $\frac{a+2}{a} \leq 0$, すなわち, $-2 \leq a < 0$ のとき $x = 0$

(ii) $\frac{a+2}{a} > 0$, すなわち, $a < -2, 0 < a$ のとき $x = 0, \pm \sqrt{\frac{a+2}{a}}$

(i),(ii) に示した x と θ は 1 対 1 に対応するから, 求める θ の個数は

$$\begin{cases} -2 \leq a < 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = 0 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a < -2, 0 < a \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$



- 3 点 A を極 O におき，点 (1, 0) を中心とする円周上に 2 点 B, C をおき，それぞれの偏角を β, γ とすると $(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2})$

$$AB = 2 \cos \beta, \quad AC = 2 \cos \gamma$$

$\angle BAC = \gamma - \beta$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \cdot AC \cos(\gamma - \beta) \\ &= 2 \cos \beta \cdot 2 \cos \gamma \cos(\gamma - \beta) \\ &= 4 \cos \beta \cos \gamma \cos(\gamma - \beta) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$4 \cos \beta \cos \gamma \cos(\gamma - \beta) \leq 4$ であるから (等号が成立するとき $\beta = \gamma = 0$)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \leq 4$$

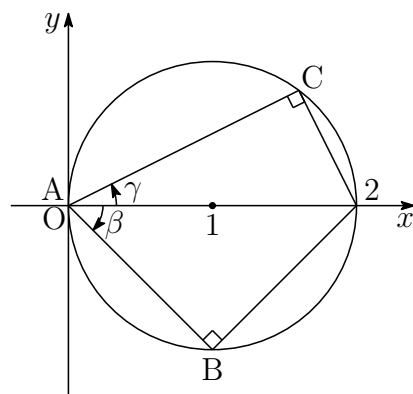
$2 \cos \beta \cos \gamma = \cos(\gamma - \beta) + \cos(\gamma + \beta)$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 2 \{ \cos(\gamma - \beta) + \cos(\gamma + \beta) \} \cos(\gamma - \beta) \\ &= 2 \cos^2(\gamma - \beta) + 2 \cos(\gamma + \beta) \cos(\gamma - \beta) \\ &= 2 \left\{ \cos(\gamma - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\gamma + \beta) \right\}^2 - \frac{1}{2} \cos^2(\gamma + \beta) \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

上式で等号が成立するとき

$$\begin{cases} \cos(\gamma - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\gamma + \beta) = 0 \\ \cos(\beta + \gamma) = 1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \beta = -\frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}$$

よって 最大値 4, 最小値 $-\frac{1}{2}$



4 $F(x) = \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} |t-x| dt$ について ($x > 0$)

(i) $x \leq 2-x$ すなわち $x \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} |t-x| dt = \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} (t-x) dt \\ &= \frac{1}{2x} \left[(t-x)^2 \right]_{2-x}^{2+x} = 4 - 2x \end{aligned}$$

したがって $F(x) \geq F(1) = 2$

(ii) $2-x \leq x$ すなわち $1 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} |t-x| dt \\ &= -\frac{1}{x} \int_{2-x}^x (t-x) dt + \frac{1}{x} \int_x^{2+x} (t-x) dt \\ &= -\frac{1}{2x} \left[(t-x)^2 \right]_{2-x}^x + \frac{1}{2x} \left[(t-x)^2 \right]_x^{2+x} \\ &= 2x + \frac{4}{x} - 4 \end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

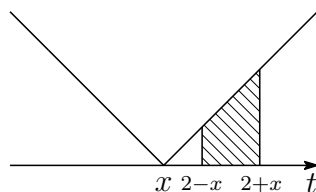
$$2x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{4}{x}} = 4\sqrt{2}$$

上式において、等号が成立するとき

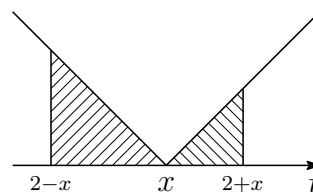
$$2x = \frac{4}{x} \quad \text{すなわち} \quad x = \sqrt{2}$$

したがって $F(x) \geq F(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4$

i) $x \leq 1$ のとき



ii) $1 \leq x$ のとき



よって 最小値 $F(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4$



5 点の合計が1点になるのは、1回目に表が出る確率であるから

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

点の合計が2点になるのは、1回目に裏が出るか、または2回続けて表が出る確率であるから

$$p_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

また、次の確率漸化式が成立する.

$$(*) \quad p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

上式に $n = 1, 2$ を代入すると

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \\ p_4 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

(*) より

$$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$$

数列 $\{p_{n+1} - p_n\}$ は初項 $p_2 - p_1 = \frac{1}{4}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_{n+1} - p_n = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad |p_{n+1} - p_n| = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$|p_{n+1} - p_n| = \frac{1}{2^{n+1}} < 0.01$ のとき

$$\frac{1}{2^{n+1}} < 0.01 \quad \text{したがって} \quad 2^{n+1} > 100$$

$2^6 = 64$, $2^7 = 128$ より, 上式を満たす最小の n は

$$n + 1 = 7 \quad \text{すなわち} \quad n = 6$$



4.21 2021 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ.

2 実数 x に対し, x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す. 数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = 2^{[\sqrt{k}]} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する. 正の整数 n に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$$

を求めよ.

3 次の問いに答えよ.

(1) a, b を実数とし, 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が実数解 α, β をもつとする. ただし, 重解の場合は $\alpha = \beta$ とする. 3 辺の長さが 1, α, β である三角形が存在する (a, b) の範囲を求め図示せよ.

(2) 3 辺の長さが 1, α, β である三角形が存在するとき,

$$\frac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2}$$

の値の範囲を求めよ.

4 $k > 0$ とする. 円 C を $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ とし, 放物線 S を $y = \frac{1}{k}x^2$ とする.

(1) C と S が共有点をちょうど 3 個持つときの k の範囲を求めよ.

(2) k が (1) の範囲を動くとき, C と S の共有点のうちで x 座標が正の点を P とする. P における S の接線と S と y 軸とによって囲まれる領域の面積の最大値を求めよ.

5 サイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とするとき,

$$\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c) dx = 0$$

となる確率を求めよ.

解答例

1 n を自然数とすると、連続する整数

$$6n-4, 6n-3, 6n-2, 6n-1, 6n, 6n+1$$

について、 $n=1$ のとき、素数であるのは次の4個である. $\cdots (*)$

$$6n-4=2, 6n-3=3, 6n-1=5, 6n+1=7$$

$n>1$ のとき、次は合成数である.

$$6n-4=2(3n-2), 6n-3=3(2n-1), 6n-2=2(3n-1), 6n$$

したがって p が5以上の素数 $\implies p \equiv \pm 1 \pmod{6}$

U を8以上1000以下の自然数の集合とし、 U の部分集合を次とする.

$$A = \{6n+1 \mid n \text{ は } 2 \text{ 以上 } 166 \text{ 以下の自然数} \},$$

$$B = \{6n-1 \mid n \text{ は } 2 \text{ 以上 } 166 \text{ 以下の自然数} \}$$

$6n+1 \equiv 0 \pmod{5}$ とすると、 $n \equiv -1 \pmod{5}$ を満たす n は、次の33個

$$n = 4, 9, 14, \cdots, 164$$

$6n+1 \equiv 0 \pmod{7}$ とすると、 $n \equiv 1 \pmod{7}$ を満たす n は、次の23個

$$n = 8, 15, 22, \cdots, 162$$

$6n+1 \equiv 0 \pmod{35}$ とすると、 $n \equiv -6 \pmod{35}$ を満たす n は、次の4個

$$n = 29, 64, 99, 134$$

集合 A の要素で5または7で割り切れる数の個数は

$$33 + 23 - 4 = 52 \text{ (個)}$$

集合 A に属する素数の個数は、高々 $165 - 52 = 113$ (個) $\cdots (**)$

$6n-1 \equiv 0 \pmod{5}$ とすると、 $n \equiv 1 \pmod{5}$ を満たす n は、次の33個

$$n = 6, 11, 16, \cdots, 166$$

集合 B に属する素数の個数は、高々 $165 - 33 = 132$ (個) $\cdots (***)$

$(*)$, $(**)$, $(***)$ より、1000以下の素数は、高々 $4 + 113 + 132 = 249$ (個)

補足 $6n - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ とすると, $n \equiv -1 \pmod{7}$ を満たす n は, 次の 23 個

$$n = 6, 13, 20, \dots, 160$$

$6n - 1 \equiv 0 \pmod{35}$ とすると, $n \equiv 6 \pmod{35}$ を満たす n は, 次の 5 個

$$n = 6, 41, 76, 111, 146$$

集合 B の要素で 5 または 7 で割り切れる数の個数は

$$33 + 23 - 5 = 51 \text{ (個)}$$

集合 B に属する素数の個数は, 高々 $165 - 51 = 114$ (個)

1000 以下の素数は, 高々 $4 + 113 + 114 = 231$ (個)

別解 $1050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ より, 1 から 1050 の自然数で 2, 3, 5, 7 で割り切れない数の個数は (1 を含む)⁴

$$\varphi(1050) = 1050 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 240$$

したがって, 1 から 1050 の自然数で, 素数は高々

$$240 - 1 + 4 = 243 \text{ (個)}$$

よって, 1 から 1000 の自然数で, 素数は高々 243 (個)

補足 2, 3 以外の素数は, 法 6 ついて, ± 1 と合同である.

2021 京都大学 (文系)

p が素数ならば $p^4 + 14$ は素数でないことを示せ.

解答 (i) $p = 2$ のとき $p^4 + 14 = 30$ 素数ではない

(ii) $p = 3$ のとき $p^4 + 14 = 95$ 素数ではない

(iii) p が 5 以上の素数のとき, $p \equiv \pm 1 \pmod{6}$ であるから

$$p^4 + 14 \equiv 15 \equiv 3 \pmod{6}$$

$p^4 + 14$ は 3 より大きい 3 の倍数であるから, $p^4 + 14$ は素数ではない.

(i)~(iii) より, p が素数ならば $p^4 + 14$ は素数ではない. ■

⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6(定理 3) を参照)

2 $a_k = 2^{[\sqrt{k}]}$ より ($k = 1, 2, 3, \dots$), $n > 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 b_n &= \sum_{k=1}^{n^2} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k^2}^{k^2+2k} a_j + a_{n^2} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k^2}^{k^2+2k} 2^k + 2^n \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)2^k + 2^n \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} k2^k + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + 2^n
 \end{aligned}$$

ここで, $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k2^k$ とおくと, $T_n = \sum_{k=2}^n (k-1)2^{k-1}$ より

$$\begin{aligned}
 T_n &= 2T_n - T_n = 2 \sum_{k=2}^n (k-1)2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k2^k \\
 &= \sum_{k=1}^n (k-1)2^k - \sum_{k=1}^{n-1} k2^k \\
 &= (n-1)2^n + \sum_{k=1}^{n-1} \{(k-1)2^k - k2^k\} \\
 &= (n-1)2^n - S_n
 \end{aligned}$$

$b_n = 2T_n + S_n + 2^n$ であるから, 上式より

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2\{(n-1)2^n - S_n\} + S_n + 2^n \\
 &= (n-1)2^{n+1} - S_n + 2^n \\
 &= (n-1)2^{n+1} - \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} + 2^n \\
 &= (n-1)2^{n+1} + 2
 \end{aligned} \tag{*}$$

$b_1 = a_1 = 2^1 = 2$ であるから, $n = 1$ のときも (*) は成立する.

よって, 正の整数 n に対して $b_n = (n-1)2^{n+1} + 2$ ■

3 (1) 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ は実数解をもつから

$$(-a)^2 - 4b \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b \leq \frac{a^2}{4} \quad (*)$$

2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の実数解 α, β と係数の関係により

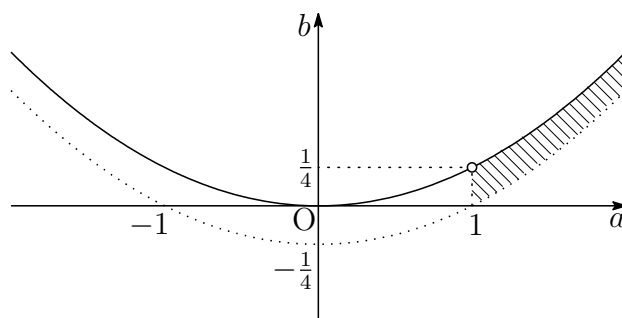
$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

3 辺の長さが 1, α, β である三角形が存在するとき

$$|\alpha - \beta| < 1 < \alpha + \beta \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{a^2 - 4b} < 1 < a \quad (**)$$

$$(*), (**) \text{ より } \quad \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} < b \leq \frac{a^2}{4} \quad (a > 1)$$

したがって、点 (a, b) の存在する範囲は、下の図の斜線部分である。
ただし、境界は、実線部分を含み、点線および $\circ$ は含まない。



(2) (1) の解と係数の関係により

$$\frac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{b + 1}{a^2}$$

さらに、(1) の結果から

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4a^2} < \frac{b + 1}{a^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{a^2}$$

$$a > 1 \text{ であるから } \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4a^2} < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{a^2} < \frac{5}{4}$$

$$\text{よって、求める範囲は} \quad \frac{1}{4} < \frac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2} < \frac{5}{4}$$



- 4 (1) $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$, $S: y = \frac{1}{k}x^2$
 C と S から x を消去すると

$$ky + (y-1)^2 = 1$$

整理すると $y(y+k-2) = 0 \quad \cdots (*)$

C と S は x 軸に関して対称で、原点で接する。
 右の図から、条件を満たすとき、方程式 $(*)$ の解が

$$y = 0, \quad 0 < y < 2$$

に解を持てばよいから

$$0 < 2 - k < 2 \quad \text{よって} \quad 0 < k < 2$$

- (2) 点 P の y 座標が $2-k$ であるから、 S 上の点 P の x 座標は $(x > 0)$

$$2-k = \frac{1}{k}x^2 \quad \text{ゆえに} \quad x = \sqrt{k(2-k)}$$

$$\alpha = \sqrt{k(2-k)} \text{ とおく. } y = \frac{1}{k}x^2 \text{ より } y' = \frac{2x}{k}$$

S 上の点 $P\left(\alpha, \frac{\alpha^2}{k}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{\alpha^2}{k} = \frac{2\alpha}{k}(x - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{2\alpha}{k}x - \frac{\alpha^2}{k}$$

P における S の接線と S と y 軸で囲まれた図形の面積を T とすると

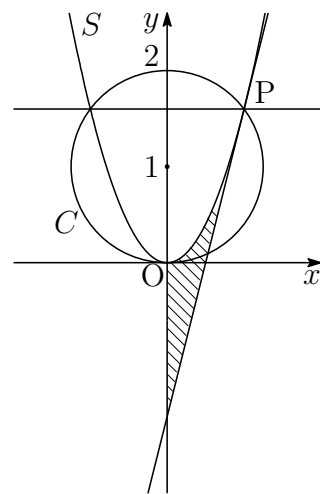
$$\begin{aligned} T &= \int_0^\alpha \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2\alpha}{k}x + \frac{\alpha^2}{k} \right) dx \\ &= \frac{1}{k} \int_0^\alpha (x - \alpha)^2 dx = \frac{1}{3k} \left[(x - \alpha)^3 \right]_0^\alpha = \frac{\alpha^3}{3k} \\ &= \frac{1}{3k} \{k(2-k)\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{k(2-k)^3} \end{aligned}$$

4 正数 $3k, 2-k, 2-k, 2-k$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3k + 3(2-k)}{4} \geq \sqrt[4]{3k(2-k)^3} \quad \text{したがって} \quad \sqrt{k(2-k)^3} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{ゆえに} \quad T \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\text{等号は } 3k = 2-k \text{ すなわち } k = \frac{1}{2} \text{ のとき})$$

$$\text{よって, 求める最大値は} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}$$



5 $I = \int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c) dx$ とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int_{a-3}^{a+3} \{x^2 - (b+c)x + bc\} dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{b+c}{2}x^2 + bcx \right]_{a-3}^{a+3} \\ &= \frac{1}{3}\{(a+3)^3 - (a-3)^3\} - \frac{b+c}{2}\{(a+3)^2 - (a-3)^2\} \\ &\quad + bc\{(a+3) - (a-3)\} \\ &= 6a^2 + 18 - 6(b+c)a + 6bc \end{aligned}$$

$I = 0$ であるから

$$a^2 + 3 - (b+c)a + bc = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (b-a)(c-a) = -3$$

$$\text{したがって} \quad (*) \begin{cases} b = a \pm 3 \\ c = a \mp 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad (**) \begin{cases} b = a \pm 1 \\ c = a \mp 3 \end{cases}$$

a, b, c は 1 以上 6 以下の整数であるから

$$(*) \text{ より } \begin{cases} b = a + 3 \\ c = a - 1 \end{cases} \quad (a = 2, 3), \quad \begin{cases} b = a - 3 \\ c = a + 1 \end{cases} \quad (a = 4, 5)$$

$$(**) \text{ より } \begin{cases} b = a + 1 \\ c = a - 3 \end{cases} \quad (a = 4, 5), \quad \begin{cases} b = a - 1 \\ c = a + 3 \end{cases} \quad (a = 2, 3)$$

条件を満たす場合の総数は 8 通り

$$\text{よって, 求める確率は} \quad \frac{8}{6^3} = \frac{1}{27}$$



4.22 2022年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

- 1 $2^a 3^b + 2^c 3^d = 2022$ を満たす 0 以上の整数 a, b, c, d の組を求めよ.
- 2 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする. 座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $Q(1, 3 \sin 2\theta)$ が三角形をなすとき, $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ.
- 3 次の問いに答えよ.

- (1) 実数 x, y について, $\lceil |x - y| \rceil \leq x + y$ であることの必要十分条件は「 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ 」であることを示せ.
- (2) 次の不等式で定まる xy 平面上の領域を図示せよ.

$$|1 + y - 2x^2 - y^2| \leq 1 - y - y^2$$

- 4 t を実数とし, 座標空間に点 $A(t-1, t, t+1)$ をとる. また, $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ を頂点とする立方体を D とする. 点 P が D の内部およびすべての面上を動くとき, 線分 AP の動く範囲を W とし, W の体積を $f(t)$ とする.

- (1) $f(-1)$ を求めよ.
- (2) $f(t)$ のグラフを描き, $f(t)$ の最小値を求めよ.

- 5 中身の見えない 2 つの箱があり, 1 つの箱には赤玉 2 つと白玉 1 つが入っており, もう 1 つの箱には赤玉 1 つと白玉 2 つが入っている. どちらかの箱を選び, 選んだ箱の中から玉を 1 つ取り出して元に戻す, という操作を繰り返す.

- (1) 1 回目は箱を無作為に選び, 2 回目以降は, 前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱, 前回取り出した玉が白玉なら前回とは異なる箱を選ぶ. n 回目に赤玉を取り出す確率 p_n を求めよ.
- (2) 1 回目は箱を無作為に選び, 2 回目以降は, 前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱, 前回取り出した玉が白玉なら箱を無作為に選ぶ. n 回目に赤玉を取り出す確率 q_n を求めよ.

解答例

1 $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. $2^a 3^b$ と $2^c 3^d$ の最大公約数を g とすると, $g \in \{1, 2, 3, 6\}$

[1] $g = 1$ のとき, 次式を満たす 0 以上の整数 x, y を求めればよい.

$$(1.1) \quad 2^x 3^y + 1 = 2022 \quad \text{または} \quad (1.2) \quad 2^x + 3^y = 2022$$

(1.1) より $2^x 3^y = 2021$ 右辺は 2 でも 3 で割り切れないので不適.

(1.2) より $3^y = 2022 - 2^x$ $x \geq 1$ とすると, 右辺は 2 を因数にもち, 等式を満たさない. $x = 0$ となり, $3^y = 2021$. 等式の右辺は 3 で割り切れず, 不適.

[2] $g = 2$ のとき, 次式を満たす 0 以上の整数 x, y を求めればよい.

$$(2.1) \quad 2(2^x 3^y + 1) = 2022 \quad \text{または} \quad (2.2) \quad 2(2^x + 3^y) = 2022$$

(2.1) より $2^x 3^y = 1010$. 右辺は 5 を因数にもつので, 不適.

(2.2) より $2^x = 1011 - 3^y$. $y \geq 1$ とすると, 右辺は 3 を因数にもち, 等式を満たさない. $y = 0$ となり, $2^x = 1010$. 右辺は 5 を因数にもち, 不適.

[3] $g = 3$ のとき, 次式を満たす 0 以上の整数 x, y を求めればよい.

$$(3.1) \quad 3(2^x 3^y + 1) = 2022 \quad \text{または} \quad (3.2) \quad 3(2^x + 3^y) = 2022$$

(3.1) より $2^x 3^y = 673$. 右辺は 2, 3 で割り切れないので, 不適.

(3.2) より $3^y = 674 - 2^x$. $x \geq 1$ とすると, 右辺は 2 を因数にもち, 等式を満たさない. $x = 0$ となり, $3^y = 673$. 右辺は 3 で割り切れず, 不適.

[4] $g = 6$ のとき, 次式を満たす 0 以上の整数 x, y を求めればよい.

$$(4.1) \quad 6(2^x 3^y + 1) = 2022 \quad \text{または} \quad (4.2) \quad 6(2^x + 3^y) = 2022$$

(4.1) より $2^x 3^y = 336$. 右辺は 7 を因数にもつので, 不適.

(4.2) より $2^x = 337 - 3^y$. $0 \leq y \leq 5$ について調べればよい.

y	0	1	2	3	4	5
$337 - 3^y$	336	334	328	310	256	94

$2^x = 337 - 3^y$ を満たすのは, $256 = 2^8$ により $x = 8, y = 4$

したがって $6(2^8 + 3^4) = 2^9 \cdot 3^1 + 2^1 \cdot 3^5 = 2022$

対称性に注意して $(a, b, c, d) = (9, 1, 1, 5), (1, 5, 9, 1)$ ■

2 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $Q(1, 3 \sin 2\theta)$ より

$$\begin{aligned}\triangle OPQ &= \frac{1}{2} |\cos \theta \cdot 3 \sin 2\theta - \sin \theta \cdot 1| \\ &= \frac{1}{2} |6 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin \theta| \\ &= \frac{1}{2} |6 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) - \sin \theta| \\ &= \frac{1}{2} |-6 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta|\end{aligned}$$

$t = \sin \theta$ とおくと $(0 \leq \theta < 2\pi) \quad -1 \leq t \leq 1$

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} |-6t^3 + 5t|$$

$f(t) = -6t^3 + 5t$ $(-1 \leq t \leq 1)$ とおくと $f'(t) = -18t^2 + 5$

$f'(t) = 0$ とすると $t = \pm \frac{\sqrt{10}}{6}$

t	-1	...	$-\frac{\sqrt{10}}{6}$	...	$\frac{\sqrt{10}}{6}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{5\sqrt{10}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{10}}{9}$	$\searrow$	-1

$|f(t)| \leq \frac{5\sqrt{10}}{9}$ であるから、求める最大値は $\frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}}{9} = \frac{5\sqrt{10}}{18}$ ■

3 (1) 同値変形を用いると

$$\begin{aligned} |x - y| \leq x + y &\iff -(x + y) \leq x - y \leq x + y \\ &\iff \begin{cases} -(x + y) \leq x - y \\ x - y \leq x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(2) $|1 + y - 2x^2 - y^2| \leq 1 - y - y^2$ について

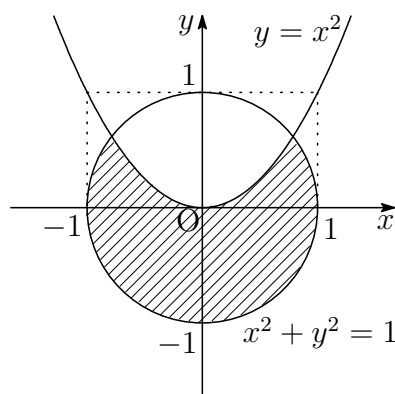
$$A - B = 1 + y - 2x^2 - y^2, \quad A + B = 1 - y - y^2$$

$$\text{とすると} \quad A = 1 - x^2 - y^2, \quad B = x^2 - y$$

(1) の結論に適用すると, $A \geq 0, B \geq 0$ であるから

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x^2 - y \geq 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ y \leq x^2 \end{cases}$$

よって, 求める領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



補足 円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $y = x^2$ の方程式から x を消去すると

$$y^2 + y - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$0 \leq y \leq 1 \text{ に注意して} \quad y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\text{これを } y = x^2 \text{ に代入することにより} \quad x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

$$\text{したがって, これらの交点の座標は} \quad \left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

■

4 (1) D の境界面を次の6つに分ける.

平面 $x = 0$, 平面 $x = 1$ の部分をそれぞれ $E_{x,0}$, $E_{x,1}$ とする.

平面 $y = 0$, 平面 $y = 1$ の部分をそれぞれ $E_{y,0}$, $E_{y,1}$ とする.

平面 $z = 0$, 平面 $z = 1$ の部分をそれぞれ $E_{z,0}$, $E_{z,1}$ とする.

$E_{\alpha,k}$ ($\alpha = x, y, z$, $k = 0, 1$) を底面, 点 $A(t-1, t, t+1)$ を頂点する四角錐の体積を $V_{\alpha,k}(t)$ とすると

$$V_{x,0}(t) = \frac{1}{3}|t-1|, \quad V_{x,1}(t) = \frac{1}{3}|t-2|,$$

$$V_{y,0}(t) = \frac{1}{3}|t|, \quad V_{y,1}(t) = \frac{1}{3}|t-1|,$$

$$V_{z,0}(t) = \frac{1}{3}|t+1|, \quad V_{z,1}(t) = \frac{1}{3}|t|$$

ただし, これらの D の領域外の体積は次の範囲にある.

- $V_{x,0}(t)$ は $t \leq 1$, $V_{x,1}(t)$ は $2 \leq t$
- $V_{y,0}(t)$ は $t \leq 0$, $V_{y,1}(t)$ は $1 \leq t$
- $V_{z,0}(t)$ は $t \leq -1$, $V_{z,1}(t)$ は $0 \leq t$

$t = -1$ のとき, $A(-2, -1, 0)$ であるから

$$f(-1) = 1^3 + V_{x,0}(-1) + V_{y,0}(-1) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 2$$

(2) 点 $A(t-1, t, t+1)$ は, 点 $(-1, 0, 1)$ を通り, 方向ベクトルが $(1, 1, 1)$ の直線上にある. また, 点 A は D の外部にあるから

(i) $t \leq -1$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{x,0}(t) + V_{y,0}(t) + V_{z,0}(t) \\ &= 1 + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| + \frac{1}{3}|t+1| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(-t+1) + \frac{1}{3}(-t) + \frac{1}{3}(-t-1) = -t+1 \end{aligned}$$

(ii) $-1 \leq t \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= 1^3 + V_{x,0}(t) + V_{y,0}(t) = 1 + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\ &= 1 + \frac{1}{3}(-t+1) + \frac{1}{3}(-t) = -\frac{2}{3}t + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(iii) $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 1^3 + V_{x,0}(t) + V_{z,1}(t) = 1 + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\
 &= 1 + \frac{1}{3}(-t+1) + \frac{1}{3}t = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

(iv) $1 \leq t \leq 2$ のとき

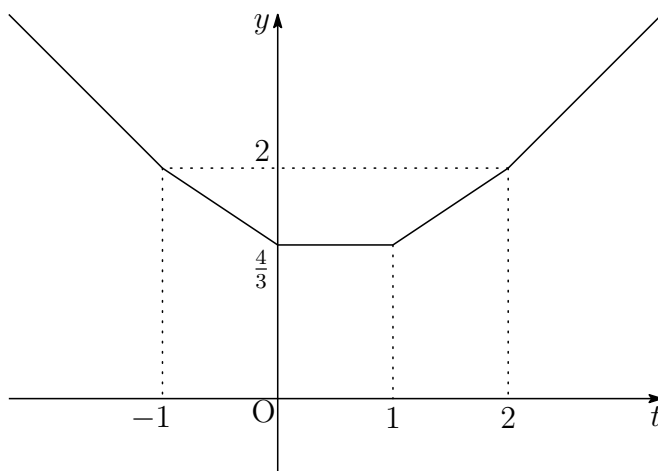
$$\begin{aligned}
 f(t) &= 1^3 + V_{y,1}(t) + V_{z,1}(t) = 1 + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\
 &= 1 + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{3}t = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

(v) $2 \leq t$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 1^3 + V_{x,1}(t) + V_{y,1}(t) + V_{z,1}(t) \\
 &= 1 + \frac{1}{3}|t-2| + \frac{1}{3}|t-1| + \frac{1}{3}|t| \\
 &= 1 + \frac{1}{3}(t-2) + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{3}t = t
 \end{aligned}$$

$$\text{(i)~(v) より} \quad f(t) = \begin{cases} -t+1 & (t \leq -1) \\ -\frac{2}{3}t + \frac{4}{3} & (-1 \leq t \leq 0) \\ \frac{4}{3} & (0 \leq t \leq 1) \\ \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} & (1 \leq t \leq 2) \\ t & (2 \leq t) \end{cases}$$

$y = f(t)$ のグラフは、下の図のようになる． $f(t)$ の最小値は $\frac{4}{3}$



- 5 (1) 赤玉2つと白玉1つが入っている箱をA, 赤玉1つと白玉2つが入っている箱をBとする. n 回目の操作でAを選ぶ確率を x_n とすると

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3}(1-x_n) = \frac{2}{3} \quad (n \geq 1)$$

すなわち $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_n = \frac{2}{3} \quad (n \geq 2)$

したがって $p_n = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}(1-x_n) = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$

よって $p_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$$p_n = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9} \quad (n \geq 2)$$

- (2) n 回目の操作でAを選ぶ確率を y_n とすると

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(1-y_n) = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{3}$$

ゆえに $y_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \left(y_n - \frac{2}{3} \right)$ すなわち $y_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n$

①と同様にして $q_n = \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{3}$

よって $q_n = \frac{1}{3} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9} - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ ■

4.23 2023 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

- 1 n を 2 以上 20 以下の整数, k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする.

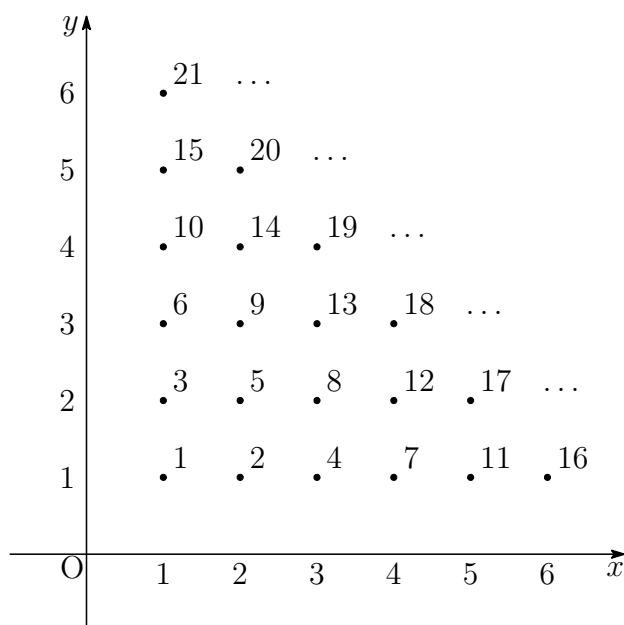
$${}_{n+2}C_{k+1} = 2({}_nC_{k-1} + {}_nC_{k+1})$$

が成り立つような整数の組 (n, k) を求めよ.

- 2 a を正の実数とする. 2 つの曲線 $C_1: y = x^3 + 2ax^2$ および $C_2: y = 3ax^2 - \frac{3}{a}$ の両方に接する直線が存在するような a の範囲を求めよ.

- 3 原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(-3, 2, 0)$, $B(1, 5, 0)$, $C(4, 5, 1)$ がある. P は $|\vec{PA} + 3\vec{PB} + 2\vec{PC}| \leq 36$ を満たす点である. 4 点 O, A, B, P が同一平面上にないとき, 四面体 $OABP$ の体積の最大値を求めよ.

- 4 xy 平面上で、 x 座標と y 座標がともに正の整数であるような各点に、下の図のような番号をつける．点 (m, n) につけた番号を $f(m, n)$ とする．たとえば、 $f(1, 1) = 1$ ， $f(3, 4) = 19$ である．



- (1) $f(m, n) + f(m+1, n+1) = 2f(m, n+1)$ が成り立つことを示せ．
- (2) $f(m, n) + f(m+1, n) + f(m, n+1) + f(m+1, n+1) = 2023$ となるような整数の組 (m, n) を求めよ．
- 5 A, B, C の3人が、A, B, C, A, B, C, A, ... という順番にさいころを投げ、最初に1を出した人を勝ちとする．だれかが1を出すか、全員が n 回ずつ投げたら、ゲームを終了する．A, B, C が勝つ確率 P_A, P_B, P_C をそれぞれ求めよ．

解答例

1 ${}_{n+2}C_{k+1} = 2({}_nC_{k-1} + {}_nC_{k+1})$ より

$$\frac{(n+2)!}{(k+1)!(n-k+1)!} = 2 \left\{ \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!} \right\}$$

$$(n+2)(n+1) = 2\{(k+1)k + (n-k+1)(n-k)\}$$

$$(2k-n)^2 = n+2$$

$n+2$ は 4 以上 22 以下の平方数となるから, $n+2 = 2^2, 3^2, 4^2$

$$k = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}, \quad n = 2, 7, 14$$

$1 \leq k \leq n-1$ であることに注意すると

$$(n, k) = (7, 2), (7, 5), (14, 5), (14, 9) \quad \blacksquare$$

2 $y = x^3 + 2ax^2$ より $y' = 3x^2 + 4ax$

C_1 上の点 $(t, t^3 + 2at^2)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 + 2at^2) = (3t^2 + 4at)(x - t)$$

すなわち $y = (3t^2 + 4at)x - 2t^3 - 2at^2$

この接線と C_2 の方程式から y を消去して整理すると

$$3ax^2 - (3t^2 + 4at)x + 2t^3 + 2at^2 - \frac{3}{a} = 0$$

このとき, 係数について $(3t^2 + 4at)^2 - 4 \cdot 3a \left(2t^3 + 2at^2 - \frac{3}{a} \right) = 0$

$$8a^2t^2 = 9t^4 + 36$$

上式において, $t \neq 0$ であるから $a^2 = \frac{1}{8} \left(9t^2 + \frac{36}{t^2} \right)$

相加平均・相乗平均の大小関係より $9t^2 + \frac{36}{t^2} \geq 2\sqrt{9t^2 \cdot \frac{36}{t^2}} = 36$

したがって $a^2 \geq \frac{1}{8} \cdot 36$ $a > 0$ に注意して $a \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \blacksquare$

$$\boxed{3} \quad \left| \overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} \right| \leq 36 \text{ より } \left| \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{6} \right| \leq 6$$

A(-3, 2, 0), B(1, 5, 0), C(4, 5, 1) より, $\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{6}$ とおくと

$$D\left(\frac{4}{3}, \frac{9}{2}, \frac{1}{3}\right), \quad |\overrightarrow{DP}| \leq 6$$

D から平面 OAB, すなわち, xy 平面まで距離は $\frac{1}{3}$

P は D を中心とする半径 6 の球面上とその内部であるから, P から xy 平面までの距離の最大値は

$$6 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$$

$\triangle OAB = \frac{1}{2}|-3 \cdot 5 - 2 \cdot 1| = \frac{17}{2}$ より, 求める四面体 OABP の最大値は

$$\frac{1}{3}\triangle OAB \cdot \frac{19}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{17}{2} \cdot \frac{19}{3} = \frac{323}{18}$$



4 (1) $f(1, j) = \frac{1}{2}j(j+1)$ より, $0 \leq k \leq j-1$ に対して

$$f(1+k, j-k) = f(1, j) - k = \frac{1}{2}j(j+1) - k$$

$1+k=m, j-k=n$ とすると, $k=m-1, j=m+n-1$ より

$$f(m, n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1) - m + 1$$

したがって

$$\begin{aligned} f(m, n) + f(m+1, n+1) &= \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1) - m + 1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(m+n+2)(m+n+1) - m \\ &= (m+n)^2 + (m+n) - 2m + 2 \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) - m + 1 \right\} \\ &= 2f(m, n+1) \end{aligned}$$

(2) 与えられた等式に (1) の結論を適用すると

$$\begin{aligned} f(m+1, n) + 3f(m, n+1) &= 2023 \\ 2(m+n)(m+n+1) - 4m + 3 &= 2023 \\ (m+n)^2 - m + n &= 1010 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \{2(m+n)-1\}^2 &= 4041 - 8n < 4041 \\ \{2(m+n)+1\}^2 &= 4041 + 8m > 4041 \end{aligned}$$

$$63^2 = 3869, 65^2 = 4225 \text{ より}$$

$$2(m+n)-1 \leq 63, \quad 2(m+n)+1 \geq 65 \quad \text{ゆえに} \quad m+n=32$$

これを ① に代入すると $-m+n=-14$ よって $m=23, n=9$ ■

5 k 回目 ($1 \leq k \leq n$) で A, B, C がそれぞれ勝つ確率を $P_A(k)$, $P_B(k)$, $P_C(k)$ とすると

$$P_A(k) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3}$$

$$P_B(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{5}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3}$$

$$P_C(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{25}{216} \left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3}$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3} = \frac{1}{1 - \frac{125}{216}} \left\{ 1 - \left(\frac{125}{216}\right)^n \right\} = \frac{216}{91} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \right\} \text{ より}$$

$$P_A = \sum_{k=1}^n P_A(k) = \frac{1}{6} \cdot \frac{216}{91} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \right\} = \frac{36}{91} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \right\}$$

$$P_B = \sum_{k=1}^n P_B(k) = \frac{5}{36} \cdot \frac{216}{91} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \right\} = \frac{30}{91} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \right\}$$

$$P_C = \sum_{k=1}^n P_C(k) = \frac{25}{216} \cdot \frac{216}{91} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \right\} = \frac{25}{91} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \right\}$$

■

4.24 2024 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 $\sum_{k=1}^m k(n-2k) = 2024$ を満たす正の整数の組 (m, n) を求めよ.

2 a, b を実数とする. 曲線 $C: y = x^2$ と曲線 $C': y = -x^2 + ax + b$ はある点を共有しており, その点におけるそれぞれの接線は直交している. C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ.

3 $f(x)$ は x に関する 4 次多項式で 4 次の係数は 1 である. $f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると 1 余り, $(x-1)^2$ で割ると 2 余る. $f(x)$ を求めよ.

4 実数 a, b は $-1 < a < 1, -1 < b < 1$ を満たす. 座標空間内に 4 点 $A(a, -1, -1), B(-1, b, -1), C(-a, 1, 1), D(1, -b, 1)$ をとる.

(1) A, B, C, D がひし形の頂点となるとき, a と b の関係を表す式を求めよ.

(2) a, b が (1) の等式を満たすとき, A, B, C, D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ.

5 n を 3 以上の奇数とする. 円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相異なる 3 点を選んだとき, その 3 点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ.

解答例

1

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m k(n-2k) &= n \sum_{k=1}^m k - 2 \sum_{k=1}^m k^2 \\
&= n \cdot \frac{1}{2}m(m+1) - 2 \cdot \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \\
&= \frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2) = 2024
\end{aligned}$$

$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ であるから

$$m(m+1)(3n-4m-2) = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$$

連続する2数 $m, m+1$ の一方は奇数1, 3, 11, 23であることに注意すると、次の①～⑥の場合が考えられる.

	m	$m+1$	$3n-4m-2$
①	1	2	$2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
②	2	3	$2^3 \cdot 11 \cdot 23$
③	3	2^2	$2^2 \cdot 11 \cdot 23$
④	11	$2^2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 23$
⑤	$2 \cdot 11$	23	$2^3 \cdot 3$
⑥	23	$2^3 \cdot 3$	$2 \cdot 11$

①～⑥をそれぞれ解くと

$$(m, n) = (1, 2026), (2, 678), (3, 342), (11, 46), (22, 38), \left(23, \frac{116}{3}\right)$$

n は自然数であるから、⑥は不適.

よって、求める (m, n) の組は、次の5つである.

$$(m, n) = (1, 2026), (2, 678), (3, 342), (11, 46), (22, 38)$$



2 $C: y = x^2$ と $C': y = -x^2 + ax + b$ の共有点の x 座標を α, β とすると ($\alpha < \beta$).

$$x^2 = -x^2 + ax + b \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - ax - b = 0 \quad (*)$$

解と係数の関係から、上の第2式より

$$\alpha + \beta = \frac{a}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{2}$$

C, C' の方程式をそれぞれ微分すると $y' = 2x, \quad y' = -2x + a$

それぞれの交点における接線が直交しているから、 α, β は2次方程式

$$2x(-2x + a) = -1 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - ax - \frac{1}{2} = 0 \quad (**)$$

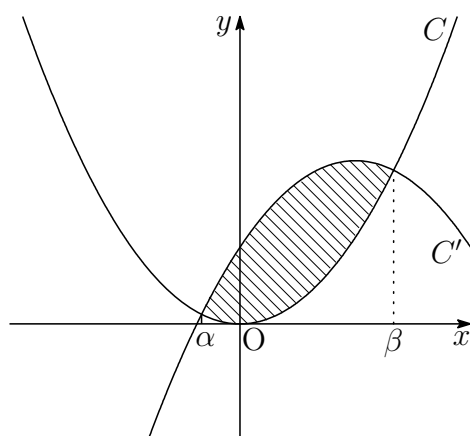
の解であり、(*) と (**) は一致するから、定数項を比較して $b = \frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{4}$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{a^2}{4} + 1$$

C と C' で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + ax + b) - x^2\} dx = -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -2 \left(-\frac{1}{6}\right) (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^{\frac{3}{2}} \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

よって、求める面積の最小値は $\frac{1}{3}$



- 3** $f(x)$ の x^4 の係数が1であることと $f(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが1であるから, $f(x)$ を次のようにおける (p, q は定数).

$$f(x) = (x+1)^2 \{(x-1)^2 + p(x-1) + q\} + 1 \quad (*)$$

上式を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \{(x-1)^2 + 4(x-1) + 4\} \{(x-1)^2 + p(x-1) + q\} + 1 \\ &= (x-1)^4 + (p+4)(x-1)^3 + (4p+q+4)(x-1)^2 \\ &\quad + 4(p+q)(x-1) + 4q + 1 \\ &= (x-1)^2 \{(x-1)^2 + (p+4)(x-1) + (4p+q+4)\} \\ &\quad + 4(p+q)x - 4p + 1 \end{aligned}$$

また, $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが2であるから

$$4(p+q) = 0, \quad -4p + 1 = 2 \quad \text{これを解いて} \quad p = -\frac{1}{4}, \quad q = \frac{1}{4}$$

これらを (*) に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2 \left\{ (x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4} \right\} + 1 \\ &= (x^2 + 2x + 1) \left(x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{2} \right) + 1 \\ &= x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

別解 $f'(x)$ は $x+1, x-1$ を因数にもつ3次式で, 最高次の係数が4であるから

$$f'(x) = (x+1)(x-1)(4x+3A) = 4x^3 + 3Ax^2 - 4x - 3A$$

とおき, これを積分すると (A, B は定数)

$$f(x) = x^4 + Ax^3 - 2x^2 - 3Ax + B$$

$f(-1) = 1, f(1) = 2$ であるから

$$2A + B - 1 = 1, \quad -2A + B - 1 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{5}{2}$$

よって
$$f(x) = x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$



- 4 (1) 4 点 $A(a, -1, -1)$, $B(-1, b, -1)$, $C(-a, 1, 1)$, $D(1, -b, 1)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-1 - a, 1 + b, 0), & \overrightarrow{AC} &= (-2a, 2, 2), \\ \overrightarrow{AD} &= (1 - a, 1 - b, 2)\end{aligned}$$

上式より $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ が成立する.

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2$ を満たせばよいから

$$(-1 - a)^2 + (1 + b)^2 = (1 - a)^2 + (1 - b)^2 + 2^2$$

整理すると $b = 1 - a$

$-1 < b < 1$ であるから

$$-1 < 1 - a < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a < 2$$

$-1 < a < 1$ に注意して よって $0 < a < 1$, $b = 1 - a$

補足 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0$ であるから

$$-2a \cdot 2 + 2 \cdot (-2b) + 2 \cdot 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 1$$

- (2) $-1 < b < 1$ であるから, (1) の結果より

$$-1 < 1 - a < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a < 2$$

$-1 < a < 1$ に注意して $0 < a < 1 \quad \dots \textcircled{1}$

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - a, 2 - a, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (1 - a, a, 2)$$

したがって $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = 2(2 - a, 1 + a, -1 + a - a^2)$

四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S^2}{4} &= (2 - a)^2 + (1 + a)^2 + (-1 + a - a^2)^2 \\ &= a^4 - 2a^3 + 5a^2 - 4a + 6\end{aligned}$$

$f(a) = \frac{S^2}{4}$ とおき, これを微分すると

$$\begin{aligned}f'(a) &= 4a^3 - 6a^2 + 10a - 4 \\ &= 2(2a - 1)(a^2 - a + 2) \\ &= 2(2a - 1) \left\{ \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \right\}\end{aligned}$$

① の範囲で増減を考えると

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、 $a = \frac{1}{2}$ のとき、 S の最小値は

$$2\sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{2}$$

別解 四角形 ABCD はひし形であるから、その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2a, 2, 2), \overrightarrow{BD} = (2, -2b, 2) \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{a^2 + 2}, \quad |\overrightarrow{BD}| = 2\sqrt{b^2 + 2}$$

したがって、(1) の結果に注意して

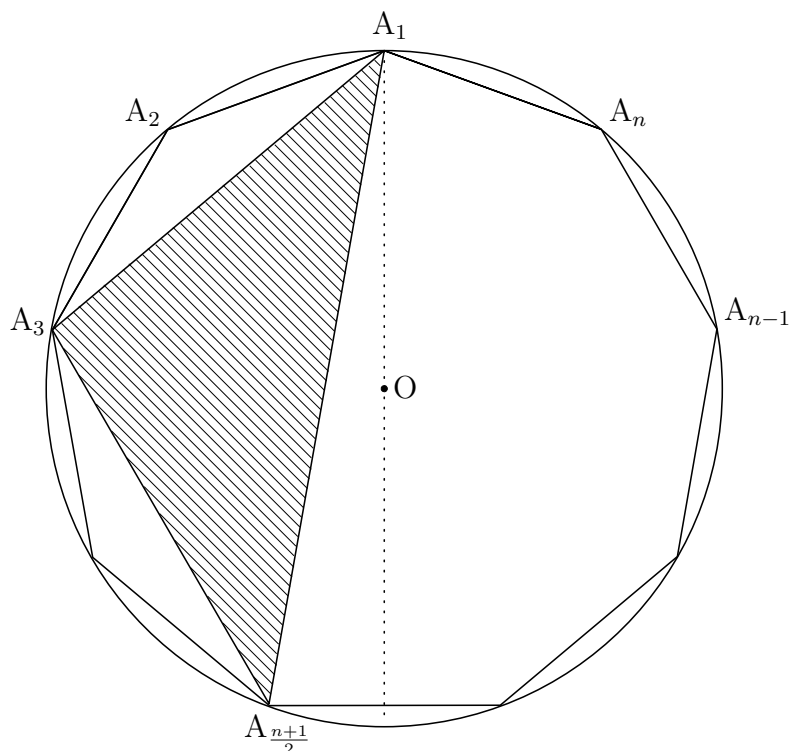
$$\begin{aligned} \frac{S^2}{4} &= (a^2 + 2)(b^2 + 2) = a^2b^2 + 2(a^2 + b^2) + 4 \\ &= (2 - ab)^2 + 2(a + b)^2 = \{2 - a(1 - a)\}^2 + 2 \\ &= (a^2 - a + 2)^2 + 2 \\ &= \left\{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right\}^2 + 2 \geq \frac{81}{16} \end{aligned}$$

よって、 $a = \frac{1}{2}$ のとき、 S の最小値は $\frac{9}{2}$



5 n 個の頂点を反時計回りに $A_1, A_2, \dots, A_n$ をとる (n は 3 以上の奇数).

2 点 A_ℓ, A_m について, $\ell \equiv m \pmod{n}$ のとき, これらの 2 点は同一の点する.



$i < j < k \leq i + \frac{n-1}{2}$ とし, 点 A_i に対して 2 点 A_j, A_k をとると, 三角形 $A_i A_j A_k$ は ($n \geq 5$), その内部に O を含まない. i の選び方 n 通りに対して, 2 点 A_j, A_k の選び方が $\frac{n-1}{2} C_2$ 通りあるから

$$1 - p_n = n \times \frac{n-1}{2} C_2 / {}_n C_3$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - n \times \frac{n-1}{2} C_2 / {}_n C_3 \\ &= 1 - n \times \frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right)}{2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{n+1}{4(n-2)} \end{aligned}$$

$p_3 = 1$ であるから, 上式は $n = 3$ のときも成立する.

よって
$$p_n = \frac{n+1}{4(n-2)}$$

補足 例えば, 上の図で A_1 を除く点線の左右には $\frac{n-1}{2}$ 個ずつ頂点が存在する. ■

第 5 章 名古屋大学

出題分野 (2011-2024) 90 分

◀	名古屋大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	数と式														
	2 次関数						1								2
	図形と計量														
	データの分析														
II	式と証明														
	複素数と方程式					3							1		1
	図形と方程式	3	1		1	1			1						
	三角関数														
	指数関数と対数関数											2			
	微分法と積分法	1		2	3			1		1	1	1	3	1	
A	場合の数と確率	2	2				2			3		3	2	3	3
	整数の性質		3	3			3	3	2						
	図形の性質														
B	平面上のベクトル														
	空間のベクトル										2			2	
	数列			1		2		2	3	2	3				
	確率分布と統計				2										

数字は問題番号

5.11 2011 年 (90 分)

出題分野 1 2 3

- 1 (1) 関数 $y = x^3 - x^2$ のグラフをかけ.
- (2) 曲線 $y = x^3 - x^2$ の接線で、点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ を通るものをすべて求めよ.
- (3) p を定数とする. x の 3 次方程式 $x^3 - x^2 = p\left(x - \frac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ.
- 2 数字の 2 を書いた玉が 1 個、数字の 1 を書いた玉が 3 個、数字の 0 を書いた玉が 4 個あり、これら合計 8 個の玉が袋に入っている. 以下の (1) から (3) のそれぞれにおいて、この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し、取り出した玉は袋に戻さないものとする.
- (1) 玉を 2 度取り出すとき、取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ.
- (2) 玉を 4 度取り出すとき、取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ.
- (3) 玉を 8 度取り出すとき、次の条件が満たされる確率を求めよ.
- 条件：すべての $n = 1, 2, \dots, 8$ に対して、1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である.
- 3 xy 平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ がある.
- (1) $a > 0$ とする. $OP : AP = 1 : a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ.
- (2) $a > 1 > b > 0$ とする. $OP : AP : BP = 1 : a : b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ.

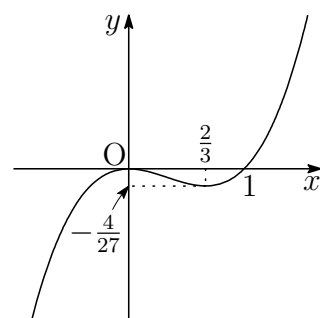
解答例

- 1 (1) $f(x) = x^3 - x^2$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$



よって、 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる.

- (2) $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - t^2) = (3t^2 - 2t)(x - t)$$

$$\text{すなわち } y = (3t^2 - 2t)x - 2t^3 + t^2 \quad \cdots (*)$$

接線 (*) が点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ を通るとき

$$0 = (3t^2 - 2t) \cdot \frac{3}{2} - 2t^3 + t^2 \quad \text{すなわち } t(t-2)(4t-3) = 0$$

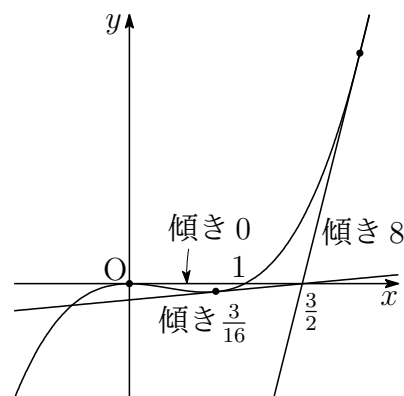
ゆえに $t = 0, 2, \frac{3}{4}$ 求める接線の方程式は、これらを (*) に代入して

$$y = 0, \quad y = 8x - 12, \quad y = \frac{3}{16}x - \frac{9}{32}$$

- (3) 3 次方程式

$$x^3 - x^2 = p \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

の異なる実数解の個数は、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = p \left(x - \frac{3}{2} \right)$ の異なる共有点の個数である。 $y = f(x)$ のグラフと (2) で求めた 3 本の接線は右の図のようになる。したがって、求める実数解の個数は



$$\begin{cases} p < 0, \frac{3}{16} < p < 8 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ p = 0, \frac{3}{16}, 8 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 0 < p < \frac{3}{16}, 8 < p \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

■

- 2 (1) 条件を満たすのは、次の場合である.

回 数		
①	②	確 率
2	0	$\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7}$
0	2	$\frac{4}{8} \cdot \frac{1}{7}$
1	1	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$

よって、求める確率は $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{4}$

- (2) 玉を4度取り出すとき、取り出した玉に書かれた数字の合計が5以上である確率は、4度とも1または2が書かれた玉が出る確率であるから

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{70}$$

求める確率は、この事象の余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{70} = \frac{69}{70}$$

- (3) k 個取り出したときにはじめて1個目から k 個目までの数字の和が $k+1$ となる事象の確率は ($k=1, 2, 3, 4$)

回 数				
①	②	③	④	確 率
2	*	*	*	$\frac{1}{8}$
1	2	*	*	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7}$
1	1	2	*	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}$
1	1	1	2	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}$

この確率は $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

求める確率は、この事象の余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$



- 3** (1) 点 P の座標を (x, y) とすると

$$OP^2 = x^2 + y^2, \quad AP^2 = (x-1)^2 + y^2$$

OP : AP = 1 : a より, $AP^2 = a^2 OP^2$ であるから

$$(x-1)^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

整理すると $(1-a^2)x^2 + (1-a^2)y^2 - 2x + 1 = 0$

よって $a = 1$ のとき 直線 $x = \frac{1}{2}$

$$a \neq 1 \text{ のとき } \quad \text{円} \left(x - \frac{1}{1-a^2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{1-a^2} \right)^2$$

- (2) (1) と同様に, OP : BP = 1 : b を満たす点 P の軌跡は $(0 < b < 1)$

$$\text{円} \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{1-b^2} \right)^2 = \left(\frac{b}{1-b^2} \right)^2$$

ここで, (1) で求めた円を C_1 , 上の円を C_2 とする.

C_1, C_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とし, 中心間の距離を d とすると

$$|r_1 - r_2| \leq d \leq r_1 + r_2 \quad \text{ゆえに} \quad |r_1 - r_2|^2 \leq d^2 \leq (r_1 + r_2)^2$$

整理すると $-2r_1r_2 \leq d^2 - r_1^2 - r_2^2 \leq 2r_1r_2$

すなわち $|d^2 - r_1^2 - r_2^2| \leq 2r_1r_2 \quad \cdots (*)$

このとき

$$\begin{aligned}
 d^2 - r_1^2 - r_2^2 &= \left(\frac{1}{1-a^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{1-b^2} \right)^2 - \left(\frac{a}{1-a^2} \right)^2 - \left(\frac{b}{1-b^2} \right)^2 \\
 &= \frac{1-a^2}{(1-a^2)^2} + \frac{1-b^2}{(1-b^2)^2} = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2}, \\
 r_1 r_2 &= \frac{a}{|1-a^2|} \cdot \frac{b}{|1-b^2|} = \frac{ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|}
 \end{aligned}$$

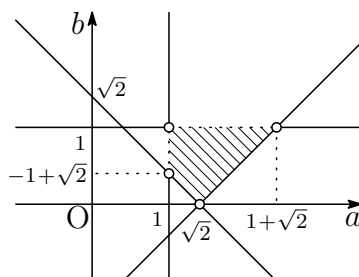
これらを(*)に代入すると

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} \right| &\leq \frac{2ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|} \\
 |a^2 + b^2 - 2| &\leq 2ab \\
 -2ab &\leq a^2 + b^2 - 2 \leq 2ab
 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad (a+b)^2 \geq 2 \quad \text{かつ} \quad (a-b)^2 \leq 2$$

$$\text{よって} \quad a > 1 > b > 0, \quad a+b \geq \sqrt{2}, \quad a-b \leq \sqrt{2}$$

したがって、 ab 平面上の不等式の表す領域は下の図の斜線部分で、 $\circ$ と点線以外の境界線を含む。



5.12 2012 年 (90 分)

出題分野 1 2 3

1 xy 平面上に、点 $(0, 1)$ を通り、傾きが h の直線 ℓ がある.

- (1) xy 平面上において、 ℓ に関して点 $P(a, b)$ と対称な点を $Q(s, t)$ とする. このとき、 a, b, h を用いて、 s, t を表せ. ただし、点 $P(a, b)$ は ℓ 上にならないとする.
- (2) xy 平面において、 ℓ に関して原点 $O(0, 0)$ と対称な点を A とする. h が $-1 \leq h \leq 1$ の範囲を動くとき、線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ.
- (3) h が $-1 \leq h \leq 1$ の範囲を動くときの点 A の軌跡を C とする. C と直線 $y = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

2 n を 2 以上の整数とする. 1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある. ただし、異なるカードには異なる整数が書かれているものとする. この n 枚のカードから、1 枚のカードを無作為に取り出して、書かれた整数を調べてからもとに戻す. この試行を 3 回繰り返し、取り出したカードに書かれた整数の最小値を X , 最大値を Y とする. 次の問に答えよ. ただし、 j と k は正の整数で、 $j + k \leq n$ を満たすとする. また、 s は $n - 1$ 以下の正の整数とする.

- (1) $X \geq j$ かつ $Y \leq j + k$ となる確率を求めよ.
- (2) $X = j$ かつ $Y = j + k$ となる確率を求めよ.
- (3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする. $P(s)$ を求めよ.
- (4) n が偶数のとき、 $P(s)$ を最大にする s を求めよ.

3 m を正の奇数とする.

- (1) $(x - 1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ.
- (2) p を正の整数とすると、 $(p - 1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ.
- (3) r を正の整数とし、 $s = 3^{r-1}m$ とする. $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ.

解答例

- 1 (1) ℓ の方向ベクトルを $\vec{v} = (1, h)$, 法線ベクトルを $\vec{n} = (-h, 1)$ とする.
 $B(0, 1)$ とおき, $\overrightarrow{BP}$ を $\vec{v}, \vec{n}$ を用いて, $\overrightarrow{BP} = k\vec{v} + l\vec{n}$ とすると

$$\begin{aligned}(a, b-1) &= k(1, h) + l(-h, 1) \\ &= (k-hl, hk+l)\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad k = \frac{a+h(b-1)}{h^2+1}, \quad l = \frac{-ha+b-1}{h^2+1}$$

このとき, $\overrightarrow{BQ} = k\vec{v} - l\vec{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + k\vec{v} - l\vec{n} \\ (s, t) &= (0, 1) + \frac{a+h(b-1)}{h^2+1}(1, h) - \frac{-ha+b-1}{h^2+1}(-h, 1) \\ &= \frac{1}{h^2+1}((1-h^2)a+2hb-2h, 2ha+(h^2-1)b+2)\end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad s = \frac{(1-h^2)a+2hb-2h}{h^2+1}, \quad t = \frac{2ha+(h^2-1)b+2}{h^2+1}$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果に } a=b=0 \text{ を代入すると } s = \frac{-2h}{h^2+1}, \quad t = \frac{2}{h^2+1}$$

$A\left(\frac{-2h}{h^2+1}, \frac{2}{h^2+1}\right)$ であるから

$$OA = \sqrt{\frac{4h^2}{(h^2+1)^2} + \frac{4}{(h^2+1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{h^2+1}}$$

$-1 \leq h \leq 1$ において, OA は

$h=0$ のとき最大値 2 , $h=\pm 1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$

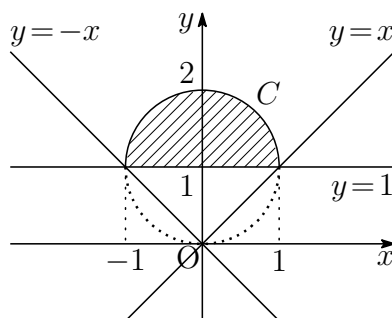
$$(3) \quad x = -\frac{2h}{h^2+1}, \quad y = \frac{2}{h^2+1} \quad \text{とすると} \quad y > 0, \quad \frac{x}{y} = -h$$

$$-1 \leq h \leq 1 \quad \text{より} \quad -1 \leq \frac{x}{y} \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad y \geq -x, \quad y \geq x$$

$$(h^2+1)y = 2 \quad \text{より,} \quad \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)y = 2 \quad \text{であるから}$$

$$x^2 + y^2 = 2y \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + (y-1)^2 = 1$$

したがって、 C と直線 $y=1$ で囲まれた部分は、下の図の斜線部分である。



$$\text{よって、求める面積は} \quad \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{別解} \quad x = -\frac{2h}{h^2+1}, \quad y = \frac{2}{h^2+1}, \quad -1 \leq h \leq 1 \quad \text{より}$$

$$h = \tan \theta \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

とおくと

$$x = -\frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = -2 \sin \theta \cos \theta = -\sin 2\theta = \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y = \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} = 2 \cos^2 \theta = \cos 2\theta + 1 = \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\text{このとき} \quad 0 \leq 2\theta + \frac{\pi}{2} \leq \pi$$



- 2 (1) 3回とも j から $j+k$ までのカードが出る確率であるから

$$\left(\frac{j+k-j+1}{n}\right)^3 = \frac{(k+1)^3}{n^3}$$

- (2) (i) 出た目が i ($j < i < j+k$), j , $j+k$ となる場合の総数は

$$\{(j+k-1) - (j+1) + 1\} \cdot 3! = 6(k-1) \text{ (通り)}$$

- (ii) 出た目が j , j , $j+k$ となる場合の総数は 3 (通り)

- (iii) 出た目が j , $j+k$, $j+k$ となる場合の総数は 3 (通り)

- (i)~(iii) から, $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる場合の総数は

$$6(k-1) + 3 + 3 = 6k \quad \cdots (*)$$

よって, 求める確率は $\frac{6k}{n^3}$

別解 $A(j, i) : X \geq j$ かつ $Y \leq i$ とすると $P(A(j, i)) = \frac{(i-j+1)^3}{n^3}$

したがって, 求める確率は

$$P(A(j, j+k)) - P(A(j+1, j+k) \cup A(j, j+k-1)) \quad \cdots (**)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad & P(A(j+1, j+k) \cup A(j, j+k-1)) \\ &= P(A(j+1, j+k)) + P(A(j, j+k-1)) - P(A(j+1, j+k-1)) \\ &= \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \end{aligned}$$

$$(**) \text{ より, 求める確率は } \frac{(k+1)^3}{n^3} - \left\{ \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \right\} = \frac{6k}{n^3}$$

- (3) $Y - X = s$ となるは, $X = j$, $Y = j+s$ ($j = 1, 2, \dots, n-s$)

したがって, (*) により

$$P(s) = \frac{6s}{n^3} \times (n-s) = \frac{6s(n-s)}{n^3}$$

- (4) (3) の結果から $P(s) = -\frac{6}{n^3} \left(s - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{2n}$

n は偶数であるから, 求める s は $s = \frac{n}{2}$



3 (1) $(x-1)^{101}$ の x^2 の項は ${}_{101}C_2 x^2 (-1)^{99} = -5050x^2$

よって、求める係数は **-5050**

(2) $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$ および m が奇数であるから

$$(p-1)^m + 1 \equiv (-1)^m + 1 = 0 \pmod{p}$$

よって、 $(p-1)^m + 1$ は p で割り切れる.

(3) まず、自然数 r について

$$2^{3^{r-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r} \quad \cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す.

(i) $r=1$ のとき、明らか.

(ii) $r=k$ のとき

$$2^{3^{k-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^k}$$

が成立すると仮定する、このとき、 $N = 2^{3^{k-1}} + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} 2^{3^k} + 1 &= (2^{3^{k-1}})^3 + 1 = (N-1)^3 + 1 \\ &= N(N^2 - 3N + 3) \end{aligned}$$

N は 3^k で割り切れ、 $N^2 - 3N + 3$ は 3 で割り切れるから

$$2^{3^k} + 1 \equiv 0 \pmod{3^{k+1}}$$

したがって、すべての自然数 r について、 $(*)$ は成立する.

$(*)$ より $2^{3^{r-1}} \equiv -1 \pmod{3^r}$

この両辺を m 乗すると

$$(2^{3^{r-1}})^m \equiv (-1)^m \quad \text{ゆえに} \quad 2^{3^{r-1}m} \equiv -1 \pmod{3^r}$$

したがって $2^{3^{r-1}m} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r}$

よって、 $s = 3^{r-1}m$ とすると、 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れる、

補足 2 は 3^r と互いに素であるから、フェルマー・オイラーの定理¹により

$$2^{\varphi(3^r)} \equiv 1 \pmod{3^r}$$

このとき、 $\varphi(3^r) = 3^r \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 3^{r-1}$ であるから

$$2^{2 \cdot 3^{r-1}} - 1 = (2^{3^{r-1}} + 1)(2^{3^{r-1}} - 1) \equiv 0 \pmod{3^r}$$

ここで $2^{3^{r-1}} - 1 \equiv (-1)^{3^{r-1}} - 1 \equiv -2 \pmod{3}$

よって $2^{3^{r-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r}$ ■

¹ <http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga.2005.pdf> (p.6 を参照)

5.13 2013年(90分)

出題分野 ① ② ③

- ① 3人でジャンケンをする. 各人はグー, チョキ, パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする. 負けた人は脱落し, 残った人で次回のジャンケンを行い (アイコの場合は誰も脱落しない), 勝ち残りが1人になるまでジャンケンを続ける. このとき各回の試行は独立とする. 3人でジャンケンを始め, ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に2人が残っている確率を p_n , 3人が残っている確率を q_n とおく.

- (1) p_1, q_1 を求めよ.
- (2) p_n, q_n がみたす漸化式を導き, p_n, q_n の一般項を求めよ.
- (3) ちょうど n 回目で1人の勝ち残りが決まる確率を求めよ.

- ② 平面上に同じ点 O を中心とする半径1の円 C_1 と半径2の円 C_2 があり, C_1 の周上に定点 A がある. 点 P, Q はそれぞれ C_1, C_2 の周上を反時計回りに動き, ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む. 時刻 $t = 0$ において, P は A の位置にあって O, P, Q はこの順に同一直線上に並んでいる. $0 \leq t \leq 4\pi$ のとき $\triangle APQ$ の面積の2乗の最大値を求めよ.

- ③ k, m, n は整数とし, $n \geq 1$ とする. ${}_m C_k$ を二項係数として, $S_k(n), T_m(n)$ を以下のように定める.

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$T_m(n) = {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \cdots$$

$$+ {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2)$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ.
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ.
- (3) p が7以上の素数のとき, $S_1(p-1), S_2(p-1), S_3(p-1), S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ.

解答例

- 1 (1) 1 回のジャンケンで負ける 1 人の選び方は 3 通り, その負け方は 3 通り.
1 回のジャンケンで 1 人だけが負ける, すなわち, 2 人が残る確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{3 \cdot 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

1 回のジャンケンでアイコになるのは, 3 人とも違う手を出す場合の $3!$ 通りと 3 人とも同じ手を出す場合の 3 通りがある. 1 回のジャンケンで 3 人が残っている確率 q_1 は

$$q_1 = \frac{3! + 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

- (2) $n+1$ 回目に 2 人が残っているのは, n 回目に 2 人が残っていて $n+1$ 回目でアイコになる場合, n 回目に 3 人が残っていて $n+1$ 回目で 1 人脱落する場合であるから

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{3}{3^2} + q_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

$n+1$ 回目に 3 人が残っているのは, n 回目に 3 人が残っていて $n+1$ 回目でアイコになる場合であるから

$$q_{n+1} = q_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}q_n$$

よって, 求める漸化式は

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, \quad q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n$$

$\{q_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから $q_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$

これを漸化式に代入すると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3^{n+1}} \quad \text{ゆえに} \quad 3^{n+1}p_{n+1} - 3^n p_n = 1$$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (3^{k+1}p_{k+1} - 3^k p_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$\text{ゆえに} \quad 3^n p_n - 3p_1 = n - 1 \quad \text{したがって} \quad p_n = \frac{n}{3^n}$$

$n=1$ のときも上式は成立する.

$$\text{よって, 求める一般項は} \quad p_n = \frac{n}{3^n}, \quad q_n = \frac{1}{3^n}$$

- (3) n 回目 ($n \geq 2$) で1人の勝ち残りが決まるのは, $n-1$ 回目に2人が残っていて n 回目で1人が脱落する場合 (脱落する1人の選び方が2通りで, その負け方が3通り), $n-1$ 回目に3人が残っていて n 回目で2人脱落する場合 (勝者1人の選び方が3通りで, その勝ち方が3通り) であるから

$$p_{n-1} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3^2} + q_{n-1} \cdot \frac{3 \cdot 3}{3^3} = \frac{n-1}{3^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2n-1}{3^n}$$

上式は, $n=1$ のときも成立するから, 求める確率は $\frac{2n-1}{3^n}$ ■

- 2 (1) $A(1, 0)$, $P(\cos t, \sin t)$, $Q\left(2\cos\frac{t}{2}, 2\sin\frac{t}{2}\right)$ とおくと ($0 \leq t \leq 4\pi$)

$$\overrightarrow{AP} = (\cos t - 1, \sin t) = 2\sin\frac{t}{2} \left(-\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AQ} = \left(2\cos\frac{t}{2} - 1, 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

$\triangle APQ$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| 2\sin\frac{t}{2} \right| \left| -\sin\frac{t}{2} \cdot 2\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2} \left(2\cos\frac{t}{2} - 1\right) \right| \\ &= \left| \sin\frac{t}{2} \right| \left(2 - \cos\frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

$x = \cos\frac{t}{2}$, $f(x) = S^2$ とおくと

$$f(x) = (1-x^2)(2-x)^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$f'(x) = 2(2-x)(2x^2 - 2x - 1)$$

$-1 \leq x \leq 1$ に注意して, $f'(x) = 0$ を解くと $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

x	-1	...	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

$a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ とおくと, $2a^2 - 2a - 1 = 0$ より $a^2 = a + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f(a) &= (1-a^2)(2-a)^2 = (1-a^2)(4-4a+a^2) \\ &= \left(1-a-\frac{1}{2}\right) \left(4-4a+a+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}-a\right) \left(\frac{9}{2}-3a\right) \\ &= 3a^2 - 6a + \frac{9}{4} = 3\left(a + \frac{1}{2}\right) - 6a + \frac{9}{4} = -3a + \frac{15}{4} = \frac{9+6\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

よって, 求める最大値は $\frac{9+6\sqrt{3}}{4}$ ■

3 (1) $S_k(1) = 1^k$ であるから

$$\begin{aligned} T_m(1) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(1) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k - ({}_m C_0 + {}_m C_m) = 2^m - 2 \end{aligned}$$

$S_k(2) = 1^k + 2^k$ であるから

$$\begin{aligned} T_m(2) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(2) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (1^k + 2^k) \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k (1 + 2^k) - \{{}_m C_0 (1 + 2^0) + {}_m C_m (1 + 2^m)\} \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k + \sum_{k=0}^m {}_m C_k 2^k - (3 + 2^m) \\ &= 2^m + (2 + 1)^m - (3 + 2^m) = 3^m - 3 \end{aligned}$$

(2) $S_k(n) = \sum_{j=1}^n j^k$ であるから

$$\begin{aligned} T_m(n) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) = \sum_{k=0}^m {}_m C_k S_k(n) - S_0(n) - S_m(n) \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k \sum_{j=1}^n j^k - n - \sum_{j=1}^n j^m \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m {}_m C_k j^k - n - \sum_{j=1}^n j^m \\ &= \sum_{j=1}^n (j+1)^m - n - \sum_{j=1}^n j^m = \sum_{j=1}^n \{(j+1)^m - j^m\} - n \\ &= \{(n+1)^m - 1^m\} - n = (n+1)^m - (n+1) \end{aligned}$$

(3) (2) の結果に $n = p - 1$ を代入すると

$$T_m(p-1) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(p-1) = p^m - p \quad \cdots (*)$$

(*) に $m = 2, 3, 4, 5$ を代入すると

$$2S_1(p-1) = p^2 - p$$

$$3S_1(p-1) + 3S_2(p-1) = p^3 - p$$

$$4S_1(p-1) + 6S_2(p-1) + 4S_3(p-1) = p^4 - p$$

$$5S_1(p-1) + 10S_2(p-1) + 10S_3(p-1) + 5S_4(p-1) = p^5 - p$$

これらは法 p について

$$(*) \begin{cases} 2S_1(p-1) \equiv 0 \\ 3S_1(p-1) + 3S_2(p-1) \equiv 0 \\ 4S_1(p-1) + 6S_2(p-1) + 4S_3(p-1) \equiv 0 \\ 5S_1(p-1) + 10S_2(p-1) + 10S_3(p-1) + 5S_4(p-1) \equiv 0 \end{cases}$$

p は 7 以上の素数であるから, (*) の第 1 式から

$$S_1(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

これを (*) の第 2 式に代入すると

$$3S_2(p-1) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad S_2(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

上の結果を (*) の第 3 式に代入すると

$$4S_3(p-1) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad S_3(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

これらの結果を (*) の第 4 式に代入すると

$$5S_4(p-1) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad S_4(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

よって, $S_1(p-1), S_2(p-1), S_3(p-1), S_4(p-1)$ は p の倍数である. ■

5.14 2014 年 (90 分)

出題分野 1 2 3

1 原点を中心とする半径 1 の円を C とし, x 軸上に点 $P(a, 0)$ をとる. ただし $a > 1$ とする. P から C へ引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線が x 軸と交わる点を Q とする.

(1) Q の x 座標を求めよ.

(2) 点 R が C 上にあるとき, $\frac{PR}{QR}$ が R によらず一定であることを示し, その値を a を用いて表せ.

(3) C 上の点 R が $\angle PRQ = 90^\circ$ をみたすとする. このような R の座標と線分 PR の長さを求めよ.

2 大小合わせて 2 個のサイコロがある. サイコロを投げると, 1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする.

(1) 2 個のサイコロを同時に投げる. 出た目の差の絶対値について, その期待値を求めよ.

(2) 2 個のサイコロを同時に投げ, 出た目が異なるときはそこで終了する. 出た目が同じときには小さいサイコロをもう一度だけ投げて終了する. 終了時に出ている目の差の絶対値について, その期待値を求めよ.

3 実数 t に対して 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を考える.

(1) 2 点 P , Q を通る直線 ℓ の方程式を求めよ.

(2) a は定数とし, 直線 $x = a$ と ℓ の交点の y 座標を t の関数と考えて $f(t)$ とおく. t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を a を用いて表せ.

(3) t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くとき, 線分 PQ が通過してできる図形を図示し, その面積を求めよ.

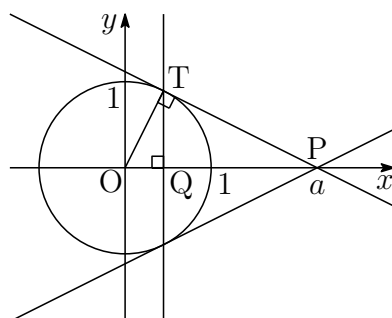
解答例

- 1 (1) 右の図において

$$\frac{OQ}{OT} = \frac{OT}{OP}$$

したがって、点 Q の x 座標は

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{a} \quad \text{よって} \quad x = \frac{1}{a}$$



補足 点 $P(a, 0)$ から C へ引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線の方程式は

$$ax + 0y = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{a}$$

円 $C: x^2 + y^2 = r^2$ の外部の点 $P(a, b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ とする. 2 本の接線

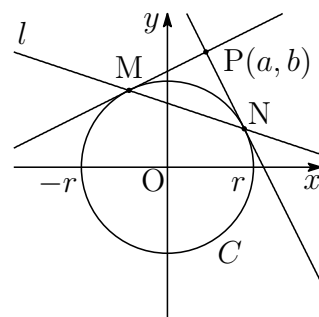
$$x_1x + y_1y = r^2, \quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点 $P(a, b)$ を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2, \quad ax_2 + by_2 = r^2$$

上の 2 式から直線 $l: ax + by = r^2$ は 2 点 M, N を通る.

このとき, l を P を極とする C の極線という.



- (2) $R(\cos \theta, \sin \theta)$ とすると, $P(a, 0)$, $Q\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ より

$$\frac{PR^2}{QR^2} = \frac{(a - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}{\left(\frac{1}{a} - \cos \theta\right)^2 + \sin^2 \theta} = \frac{a^2 - 2a \cos \theta + 1}{\frac{1}{a^2} - \frac{2 \cos \theta}{a} + 1} = a^2 \quad \text{よって} \quad \frac{PR}{QR} = a$$

- (3) (2) の結果から $QR = \frac{PR}{a}$

$\angle PRQ = 90^\circ$ より, $PR^2 + QR^2 = PQ^2$ であるから

$$PR^2 + \frac{PR^2}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad PR^2 = \frac{(a^2 - 1)^2}{a^2 + 1}$$

$$a > 1 \text{ であるから} \quad PR = \frac{a^2 - 1}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad \blacksquare$$

- 2** (1) 大小 2 個のサイコロの出た目をそれぞれ j, k とし、期待値を E_1 とすると

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{1}{6^2} \sum_{1 \leq j, k \leq 6} |j - k| = \frac{1}{36} \sum_{1 \leq j < k \leq 6} |j - k| + \frac{1}{36} \sum_{1 \leq k < j \leq 6} |j - k| \\
 &= \frac{1}{36} \sum_{1 \leq j < k \leq 6} (k - j) + \frac{1}{36} \sum_{1 \leq k < j \leq 6} (j - k) \\
 &= \frac{1}{36} \sum_{1 \leq j < k \leq 6} (k - j) + \frac{1}{36} \sum_{1 \leq j < k \leq 6} (k - j) \\
 &= \frac{1}{18} \sum_{1 \leq j < k \leq 6} (k - j) = \frac{1}{18} \sum_{k=2}^6 \sum_{j=1}^{k-1} (k - j) \\
 &= \frac{1}{18} \sum_{k=2}^6 \left\{ k(k-1) - \frac{1}{2}(k-1)k \right\} = \frac{1}{36} \sum_{k=2}^6 (k-1)k \\
 &= \frac{1}{108} \sum_{k=2}^6 \{ (k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k \} \\
 &= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{108} = \frac{35}{18}
 \end{aligned}$$

別解 $|j - k|$ の値は、右の表のようになる。

したがって、求める期待値 E_1 は

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{6^2} \\
 &= \frac{70}{36} = \frac{35}{18}
 \end{aligned}$$

$j \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

- (2) 出た目が異なるときの期待値は E_1

出た目が同じときには、その期待値は $\frac{1}{6}E_1$

よって、求める期待値を E_2 とすると

$$E_2 = E_1 + \frac{1}{6}E_1 = \frac{7}{6}E_1 = \frac{7}{6} \cdot \frac{35}{18} = \frac{245}{108}$$

■

- 3** (1) 2点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$y - t^2 = \frac{(t+1)^2 - t^2}{(t+1) - t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (2t+1)x - t^2 - t$$

- (2) 直線 $x = a$ と ℓ の交点の y 座標が $f(t)$ であるから

$$\begin{aligned} f(t) &= (2t+1)a - t^2 - t = -t^2 + (2a-1)t + a \\ &= -\left(t - a + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

したがって, $-1 \leq t \leq 0$ のとき, $f(t)$ の最大値は

(i) $a - \frac{1}{2} < -1$, すなわち, $a < -\frac{1}{2}$ のとき, $f(-1) = -a$

(ii) $-1 \leq a - \frac{1}{2} \leq 0$, すなわち, $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$f\left(a - \frac{1}{2}\right) = a^2 + \frac{1}{4}$$

(iii) $0 < a - \frac{1}{2}$, すなわち, $\frac{1}{2} < a$ のとき, $f(0) = a$

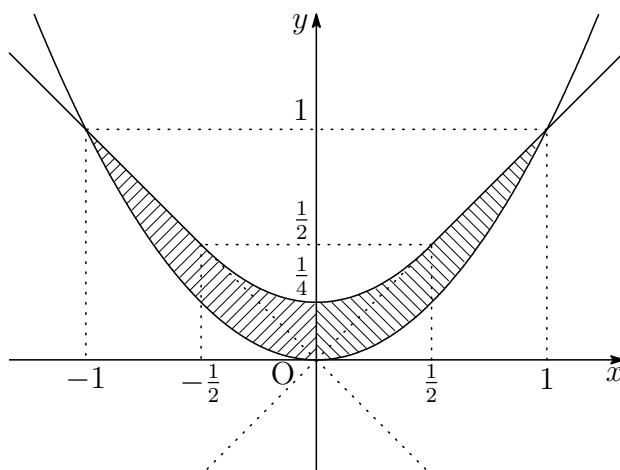
(i)~(iii) から, 求める最大値を $M(a)$ とすると

$$M(a) = \begin{cases} -a & (a < -\frac{1}{2}) \\ a^2 + \frac{1}{4} & (-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}) \\ a & (\frac{1}{2} < a) \end{cases}$$

- (3) 線分 PQ は放物線 $y = x^2$ の上側にあるから, (2) の結果より, 求める図形の領域は

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq M(x) \end{cases}$$

よって, 下の図の斜線部分で, 境界線を含む.



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) - x \right\} dx \\ &= \int_0^1 x(1 - x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} + \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

よって $S = \frac{5}{12}$

補足 $y = x^2 + \frac{1}{4}$ は直線 PQ の包絡線. 理系 [2] を参照. ■

5.15 2015年(90分)

出題分野 ① ② ③

① 座標平面上の円 $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$ と、 x 軸上の2点 $P(-a, 0)$, $Q(b, 0)$ を考える. ただし, $a > 0$, $b > 0$, $ab \neq 1$ とする. 点 P , Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き, その2つの接線の交点を R とする. このとき, 次の間に答えよ.

- (1) 直線 QR の方程式を求めよ.
- (2) R の座標を a, b で表せ.
- (3) R の y 座標が正であるとき, $\triangle PQR$ の周の長さを T とする. T を a, b で表せ.
- (4) 2点 P, Q が, 条件「 $PQ = 4$ であり, R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき, T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ.

② 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の5つの点と1つの石を考える. 石がいずれかの点にあるとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{石が点1にあるならば, 確率1で点2に移動する} \\ \text{石が点 } k \ (k=2, 3, 4) \text{ にあるならば,} \\ \quad \text{確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に, 確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点5にあるならば, 確率1で4に移動する} \end{array} \right.$$

という試行を行う. 石が点1にある状態から始め, この試行を繰り返す. 試行を n 回繰り返した後に, 石が点 k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) にある確率を $P_n(k)$ とするとき, 次の間に答えよ.

- (1) $n=6$ のときの確率 $P_6(k)$ ($k=1, 2, 3, 4, 5$) をそれぞれ求めよ.
- (2) 石が移動した先の点に印をつける (点1には初めから印がついているものとする). 試行を6回繰り返した後に, 5つの点全てに印がついている確率を求めよ.
- (3) $n \geq 1$ のとき, $P_n(3)$ を求めよ.

3 次の問に答えよ.

- (1) $\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2$ を計算し, 2 重根号を用いない形で表せ.
- (2) $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき, 整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち, x^4 の係数が 1 であるものを求めよ.
- (3) 8 つの実数

$$\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9+2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

(ただし, 複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる) の中で, (2) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求めよ.

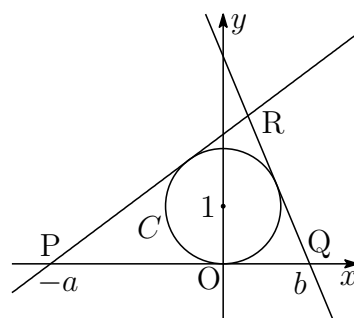
解答例

- 1 (1) 点 $Q(b, 0)$ を通り ($b \neq 1$), 傾き m の直線は

$$y = m(x - b) \quad \text{ゆえに} \quad mx - y - bm = 0$$

これが円 $C: x^2 + (y - 1)^2 = 1$ と接するから

$$\frac{|-1 - bm|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$



平方して整理すると $m\{(b^2 - 1)m + 2b\} = 0$

$$m \neq 0 \text{ であるから} \quad m = \frac{2b}{1 - b^2}$$

したがって, 直線 QR の方程式は $y = \frac{2b}{1 - b^2}(x - b)$

よって, $b = 1$ のときも成立することに注意して

$$2bx + (b^2 - 1)y - 2b^2 = 0$$

- (2) (1) の結果から直線 PR の方程式は $-2ax + (a^2 - 1)y - 2a^2 = 0$
点 R の座標は, 次の連立方程式の解である.

$$\begin{cases} -2ax + (a^2 - 1)y - 2a^2 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ 2bx + (b^2 - 1)y - 2b^2 = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } & -2(a + b)x + (a^2 - b^2)y - 2(a^2 - b^2) = 0 \\ & (a + b)\{-2x + (a - b)y - 2(a - b)\} = 0 \end{aligned}$$

$$a + b \neq 0 \text{ であるから} \quad 2x = (a - b)(y - 2) \quad \cdots \textcircled{3}$$

②, ③ から x を消去して, 整理すると

$$\begin{aligned} b(a - b)(y - 2) + (b^2 - 1)y - 2b^2 &= 0 \\ (ab - 1)y - 2ab &= 0 \end{aligned}$$

$$ab \neq 1 \text{ であるから} \quad y = \frac{2ab}{ab - 1} \quad \text{これを } \textcircled{3} \text{ に代入して}$$

$$2x = (a - b)\left(\frac{2ab}{ab - 1} - 2\right) \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a - b}{ab - 1}$$

$$\text{よって, 点 R の座標は} \quad \left(\frac{a - b}{ab - 1}, \frac{2ab}{ab - 1}\right)$$

(3) $\triangle PQR$ の面積は, PQ の長さと点 R の y 座標により

$$\triangle PQR = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \frac{2ab}{ab-1} = \frac{ab(a+b)}{ab-1}$$

また, $\triangle PQR$ の面積は, T と $\triangle PQR$ の内接円の半径により

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot T \cdot 1 = \frac{T}{2}$$

$$\text{したがって } \frac{T}{2} = \frac{ab(a+b)}{ab-1} \quad \text{よって } T = \frac{2ab(a+b)}{ab-1}$$

(4) R の y 座標は, 正であるから $\frac{2ab}{ab-1} > 0$

$a, b > 0$ であるから $ab > 1$

正の 2 数 a, b の相加平均・相乗平均の関係により $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$a+b=4$ であるから $2 \geq \sqrt{ab}$ すなわち $1 < ab \leq 4$

$$\begin{aligned} T &= \frac{8ab}{ab-1} = \frac{8(ab-1)+8}{ab-1} = 8 + \frac{8}{ab-1} \\ &\geq 8 + \frac{8}{4-1} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

上式で等号が成立するのは, $a=b$, すなわち, $a=b=2$

よって, T は $a=2$ のとき, 最小値 $\frac{32}{3}$ をとる. ■

2 (1) n が奇数のとき $P_n(1) = P_n(3) = P_n(5) = 0$

n が偶数のとき $P_n(2) = P_n(4) = 0$

n が奇数のとき, 石は点 2 または 4 にある. このとき

$$P_{2j+1}(2) = p_{2j-1}(2) \times \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

したがって, j を自然数とすると, 次の確率漸化式が成立する.

$$P_1(2) = 1, P_1(4) = 0$$

$$(*) \quad \begin{cases} P_{2j+1}(2) = \frac{3}{4}P_{2j-1}(2) + \frac{1}{4}P_{2j-1}(4) \\ P_{2j+1}(4) = \frac{1}{4}P_{2j-1}(2) + \frac{3}{4}P_{2j-1}(4) \end{cases}$$

(*) に $j = 1$ を代入すると

$$P_3(2) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{4}, \quad P_3(4) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 0 = \frac{1}{4}$$

さらに, (*) に $j = 2$ を代入すると

$$P_5(2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}, \quad P_5(4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

したがって

$$P_6(1) = P_5(2) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

$$P_6(3) = P_5(2) \times \frac{1}{2} + P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_6(5) = P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$P_6(2) = P_6(4) = 0$$

(2) 4 回繰り返した後に、点 5、点 3 にある確率は

$$P_4(5) = P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P_4(3) = P_3(2) \times \frac{1}{2} + P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

よって、6 回繰り返した後に、5 つの点すべてに印がつく確率は

$$P_4(5) + P_4(3) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(3) (*) の辺々を加えると

$$P_{2j+1}(2) + P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4)$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4) &= P_1(2) + P_1(4) \\ &= 1 + 0 = 1 \quad (j \geq 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad P_{2j}(3) &= P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4)\} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad P_n(3) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ \frac{1}{2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

$$\text{補足 (*) を解くと}^2 \quad P_{2j-1}(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^j}, \quad P_{2j-1}(4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^j}$$

$$\text{ゆえに} \quad P_{2j}(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{j+1}}, \quad P_{2j}(3) = \frac{1}{2}, \quad P_{2j}(5) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{j+1}} \quad \blacksquare$$

²<http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Ndai/Ndai.ri.2015.pdf> [4] 参照

- 3** (1) $p = \sqrt{9 + 2\sqrt{17}}$, $q = \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$ とおくと

$$p^2 + q^2 = 18, \quad pq = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \left(\sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}} \right)^2 &= (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \\ &= 18 + 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

- (2) $\alpha = pq + p + q$ であるから

$$(\alpha - pq)^2 = (p + q)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 - 2pq\alpha + (pq)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

$$\text{したがって} \quad \alpha^2 - 2\sqrt{13}\alpha + 13 = 18 + 2\sqrt{13}$$

$$\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{13}(\alpha + 1)$$

この両辺を平方すると

$$(\alpha^2 - 5)^2 = 52(\alpha + 1)^2 \quad \text{すなわち} \quad \alpha^4 - 62\alpha^2 - 104\alpha - 27 = 0$$

$$\text{よって} \quad f(x) = x^4 - 62x^2 - 104x - 27$$

- (3) (1) の式変形に注意すると, $f(x) = 0$ は $(x^2 - 5)^2 = 52(x + 1)^2$

- (i) $x^2 - 5 = 2\sqrt{13}(x + 1)$ のとき

$$x^2 - 2\sqrt{13}x + 13 = 18 + 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x - pq)^2 = (p + q)^2$$

$$\text{したがって} \quad x - pq = \pm(p + q) \quad \text{すなわち} \quad x = pq + p + q, \quad pq - p - q$$

- (ii) $x^2 - 5 = -2\sqrt{13}(x + 1)$ のとき

$$x^2 + 2\sqrt{13}x + 13 = 18 - 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x + pq)^2 = (p - q)^2$$

$$\text{したがって} \quad x + pq = \pm(p - q) \quad \text{すなわち} \quad x = -pq + p - q, \quad -pq - p + q$$

- (i), (ii) から, $f(x) = 0$ の解は

$$\begin{aligned} &\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ &\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ &-\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ &-\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}} \end{aligned}$$



5.16 2016 年 (90 分)

出題分野 1 2 3

- 1 曲線 $y = x^2$ 上に 2 点 $A(-1, 1)$, $B(b, b^2)$ をとる. ただし $b > -1$ とする. このとき, 次の条件を満たす b の範囲を求めよ.

条件: $y = x^2$ 上の点 $T(t, t^2)$ ($-1 < t < b$) で, $\angle ATB$ が直角になるものが存在する.

- 2 n を正の整数とし, k を $1 \leq k \leq n+2$ を満たす整数とする. $n+2$ 枚のカードがあり, そのうちの 1 枚には数字 0 が, 他の 1 枚には数字 2 が, 残りの n 枚には数字 1 が書かれている. この $n+2$ 枚のカードのうちから無作為に k 枚のカードを取り出すとする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 1 以上になる確率を求めよ.
- (2) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 2 となる確率 $Q_n(k)$ を求めよ.
- (3) 与えられた n に対して, 確率 $Q_n(k)$ が最大となる k の値と, その最大値を求めよ.

- 3 正の整数 n に対して, その (1 と自分自身を含めた) すべての正の約数の和を $s(n)$ と書くことにする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) k を正の整数, p を 3 以上の素数とするとき, $s(2^k p)$ を求めよ.
- (2) $s(2016)$ を求めよ.
- (3) 2016 の正の約数 n で, $s(n) = 2016$ となるものをすべて求めよ.

解答例

1 直線 AT の傾きは $\frac{t^2-1}{t+1} = t-1$, 直線 BT の傾きは $\frac{t^2-b^2}{t-b} = t+b$

∠ATB が直角であるから

$$(t-1)(t+b) = -1 \quad \text{整理すると} \quad t^2 + (b-1)t - b + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

方程式 (*) が, $-1 < t < b$ に解をもつ条件を求めればよい. ここで

$$f(t) = t^2 + (b-1)t - b + 1 = \left(t + \frac{b-1}{2}\right)^2 - \frac{(b+3)(b-1)}{4} \quad (-1 \leq t \leq b)$$

の最大値を M , 最小値を m とすると

$$M = \begin{cases} f(-1) & (-1 < b < 1) \\ f(b) & (1 \leq b) \end{cases}, \quad m = \begin{cases} f(b) & (-1 < b < \frac{1}{3}) \\ f(\frac{1-b}{2}) & (\frac{1}{3} \leq b \leq 3) \\ f(-1) & (3 < b) \end{cases}$$

$$f(-1) = -2b + 3, \quad f(b) = 2b^2 - 2b + 1, \quad f\left(\frac{1-b}{2}\right) = -\frac{(b+3)(b-1)}{4}$$

方程式 (*) が $-1 < t < b$ に解をもつことから

$$(i) \quad -1 < b < \frac{1}{3} \text{ のとき } \begin{cases} -2b + 3 > 0 \\ 2b^2 - 2b + 1 < 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに 解なし}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{3} \leq b < 1 \text{ のとき } \begin{cases} -2b + 3 > 0 \\ -\frac{(b+3)(b-1)}{4} \leq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに 解なし}$$

$$(iii) \quad 1 \leq b \leq 3 \text{ のとき } \begin{cases} 2b^2 - 2b + 1 > 0 \\ -\frac{(b+3)(b-1)}{4} \leq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに } 1 \leq b \leq 3$$

$$(iv) \quad 3 < b \text{ のとき } \begin{cases} 2b^2 - 2b + 1 > 0 \\ -2b + 3 < 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに } 3 < b$$

(i)~(iv) より $b \geq 1$

別解 直線 AT の傾きは $\frac{t^2 - 1}{t + 1} = t - 1$, 直線 BT の傾きは $\frac{t^2 - b^2}{t - b} = t + b$

$\angle ATB$ が直角であるから

$$(t - 1)(t + b) = -1 \quad \text{整理すると} \quad t^2 + (b - 1)t - b + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

方程式 (*) は, 実数解をもつから

$$(b - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b + 1) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (b + 3)(b - 1) \geq 0$$

$b > -1$ に注意すると, $b \geq 1$ の範囲について調べればよい.

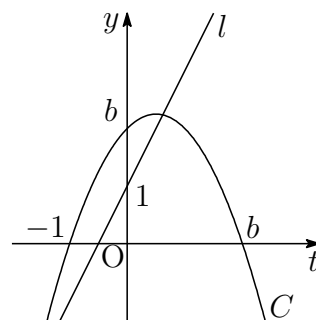
$$(*) \text{ を変形すると} \quad 2(b - 1)t + 1 = -(t + 1)(t - b)$$

直線 $l: y = 2(b - 1)t + 1$ と放物線 $C: y = -(t + 1)(t - b)$ が $-1 < t < b$ で共有点をもつ b の値の範囲を求めればよい.

$b \geq 1$ のとき, C と l は共有点を持つ.

とくに, $b = 1$ のとき, C と l は, $t = 0$ で接する.

$b > 1$ のとき, C および l が y 軸とそれぞれ $b, 1$ で交わるので, このとき, C と l は常に $-1 < t < b$ に共有点をもつ. よって $b \geq 1$



- 2** (1) 0 以外の $n+1$ 枚のカードから k 枚取り出す場合の確率であるから

$$\frac{{}_{n+1}C_k}{{}_{n+2}C_k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \cdot \frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{n+2-k}{n+2}$$

- (2) 2 のカードを 1 枚, 1 のカードを $k-1$ 枚取り出す場合の確率であるから

$$\begin{aligned} Q_n(k) &= \frac{1 \cdot {}_n C_{k-1}}{{}_{n+2} C_k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から $Q_n(k) = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(k - \frac{n+2}{2}\right)^2 + \frac{n+2}{4(n+1)}$

(i) n が偶数のとき, $k = \frac{n+2}{2}$ で, 最大値 $\frac{n+2}{4(n+1)}$

(ii) n が奇数のとき, $k = \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}$ で,
 最大値 $-\frac{1}{4(n+1)(n+2)} + \frac{n+2}{4(n+1)} = \frac{n+3}{4(n+2)}$

別解 (2) の結果から

$$\frac{Q_n(k+1)}{Q_n(k)} - 1 = \frac{(k+1)(n+1-k)}{k(n+2-k)} - 1 = \frac{n+1-2k}{k(n+2-k)}$$

- (i) n が偶数のとき

$$Q_n(1) < Q_n(2) < \cdots < Q_n\left(\frac{n}{2}\right) < Q_n\left(\frac{n+2}{2}\right) > \cdots > Q_n(n+2)$$

よって 最大値 $Q_n\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{n+2}{4(n+1)}$

- (ii) n が奇数のとき

$$Q_n(1) < Q_n(2) < \cdots < Q_n\left(\frac{n+1}{2}\right) = Q_n\left(\frac{n+3}{2}\right) > \cdots > Q_n(n+2)$$

よって 最大値 $Q_n\left(\frac{n+1}{2}\right) = Q_n\left(\frac{n+3}{2}\right) = \frac{n+3}{4(n+2)}$ ■

3 (1) $s(2^k p) = (1 + 2 + \cdots + 2^k)(1 + p)$
 $= \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1}(1 + p) = (2^{k+1} - 1)(p + 1)$

(2) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ より

$$\begin{aligned} s(2016) &= s(2^5)s(3^2)s(7) \\ &= \frac{2^6 - 1}{2 - 1}(1 + 3 + 3^2)(1 + 7) \\ &= 63 \cdot 13 \cdot 8 = \mathbf{6552} \end{aligned}$$

(3) n は 2016 の正の約数であるから

$$n = 2^i \cdot 3^j \cdot 7^k \quad (0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 1)$$

とおくと, $s(n) = 2016$ となるとき

$$s(2^i)s(3^j)s(7^k) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad \cdots (*)$$

ここで

$s(2^0) = 1$	$s(3^0) = 1$	$s(7^0) = 1$
$s(2^1) = 3$	$s(3^1) = 2^2$	$s(7^1) = 2^3$
$s(2^2) = 7$	$s(3^2) = 13$	
$s(2^3) = 3 \cdot 5$		
$s(2^4) = 31$		
$s(2^5) = 3^2 \cdot 7$		

(*) の $3^2 \cdot 7$ に注目すると $i = 5$

さらに, 2^5 に注目すると $j = k = 1$

よって $n = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = \mathbf{672}$



5.17 2017年(90分)

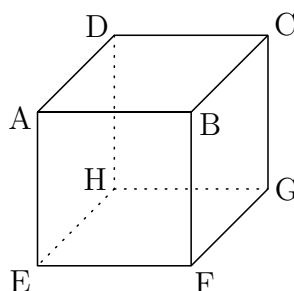
出題分野 ① ② ③

① a を正の定数とする. 2 次関数 $f(x) = ax^2$ と 3 次関数 $g(x) = x(x-4)^2$ について, 次の問に答えよ.

- (1) 関数 $y = g(x)$ について, 極値を求め, そのグラフを描け.
- (2) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ.
- (3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ. またそのとき, 2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ.

② 下図のような立方体を考える. この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する. 時刻 0 では点 P は頂点 A にいる. 時刻が 1 増えるごとに点 P は, 今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する. 例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると, 時刻 $n+1$ では, それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれかにいる. 自然数 $n \geq 1$ に対して, (i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず, かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n , (ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず, かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n , (iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず, かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n , とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) p_2, q_2, r_2 と p_3, q_3, r_3 を求めよ.
- (2) $n \geq 2$ のとき, p_n, q_n, r_n を求めよ.
- (3) 自然数 $m \geq 1$ に対して, 点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ.



3 次の問に答えよ.

(1) 次の条件 (*) を満たす 3 つの自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

$$(*) \quad a < b < c \text{ かつ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \text{ である.}$$

(2) 偶数 $2n$ ($n \geq 1$) の 3 つの正の約数 p, q, r で, $p > q > r$ と $p + q + r = n$ を満たす組 (p, q, r) の個数を $f(n)$ とする. ただし, 条件を満たす組が存在しない場合は, $f(n) = 0$ とする. n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ. また, $f(n) = M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ.

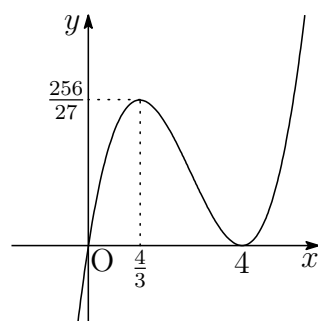
解答例

- 1 (1) $g(x) = x(x-4)^2 = x^3 - 8x^2 + 16x$ より

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 16x + 16 \\ &= (x-4)(3x-4) \end{aligned}$$

$g(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$



よって 極大値 $g\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27}$, 極小値 $g(4) = 0$

- (2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ から y を消去すると

$$ax^2 = x(x-4)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x\{x^2 - (a+8)x + 16\} = 0 \quad \cdots (*)$$

方程式 $x^2 - (a+8)x + 16 = 0$ の係数について, $a > 0$ であるから

$$D = (a+8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = a(a+16) > 0$$

方程式 $x^2 - (a+8)x + 16 = 0$ は 0 でない異なる 2 つの実数解をもつので, 方程式 (*) は異なる 3 つの解をもつ.

よって $y = f(x)$, $y = g(x)$ は相異なる 3 点で交わる

- (3) (2) の結果から, 方程式 (*) の 3 つの解を $0, \alpha, \beta$ とすると ($\alpha < \beta$)

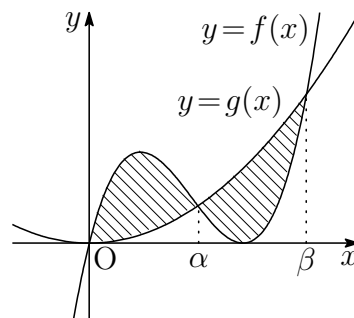
$$\alpha + \beta = a + 8 > 0, \quad \alpha\beta = 16 \quad \cdots (**) \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \alpha < \beta$$

条件より

$$\int_0^\alpha \{g(x) - f(x)\} dx = \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$\text{ゆえに} \quad \int_0^\beta \{g(x) - f(x)\} dx = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad g(x) - f(x) &= x\{x^2 - (a+8)x + 16\} \\ &= x(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= -x^2(\beta-x) + \alpha x(\beta-x) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{したがって} \quad & -\int_0^\beta x^2(\beta-x) dx + \alpha \int_0^\beta x(\beta-x) dx = 0 \\
 & -\frac{1}{12}\beta^4 + \alpha \cdot \frac{1}{6}\beta^3 = 0 \\
 & \beta = 2\alpha
 \end{aligned}$$

これを (**) に代入すると

$$\alpha + 2\alpha = a + 8, \quad \alpha \cdot 2\alpha = 16$$

$$\alpha > 0 \text{ に注意して } \alpha = 2\sqrt{2}, \quad \beta = 4\sqrt{2}, \quad a = 6\sqrt{2} - 8$$

$$2 \text{ つの曲線の交点の } x \text{ 座標は } \quad 0, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$$

補足 次の公式³を利用するとよい.

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

■

2 (1) 与えられた規則により, 次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned}
 & p_1 = 1, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = 0 \\
 (*) \quad & \begin{cases} p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n \\ q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

(*) に $n = 1$ を代入すると

$$p_2 = \frac{2}{3}q_1 = 0, \quad q_2 = \frac{2}{3}p_1 + r_1 = \frac{2}{3}, \quad r_2 = \frac{1}{3}q_1 = 0$$

(*) に $n = 2$ を代入すると, 上の結果により

$$p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \frac{4}{9}, \quad q_3 = \frac{2}{3}p_2 + r_2 = 0, \quad r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \frac{2}{9}$$

³<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> の **1** を参照.

(2) (*) の第2式から $q_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + r_{n+1}$

これに (*) の第1式, 第3式を代入すると

$$q_{n+2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} q_n + \frac{1}{3} q_n \quad \text{すなわち} \quad q_{n+2} = \frac{7}{9} q_n$$

(i) n が奇数のとき ($n \geq 1$) $q_n = q_1 \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 0$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3} q_n = 0, \quad r_{n+1} = \frac{1}{3} q_n = 0$$

(ii) n が偶数のとき ($n \geq 2$) $q_n = q_2 \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3} q_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3} q_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

(i), (ii) の結果から

n が偶数のとき $p_n = 0, q_n = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}, r_n = 0$

n が奇数のとき $p_n = \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}, q_n = 0, r_n = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} \quad (n \neq 1)$

(3) $s_m = \frac{1}{3} p_{2m-1}$ であるから

$$s_1 = \frac{1}{3} p_1 = \frac{1}{3},$$

$$s_m = \frac{1}{3} p_{2m-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{(2m-1)-3}{2}} = \frac{4}{27} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-2} \quad (m \geq 2)$$



3 (1) $0 < a < b < c$ より, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ であるから

$$\frac{3}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{a} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{c} < \frac{1}{2} < \frac{3}{a} \quad \text{すなわち} \quad a < 6 < c$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 0 \quad \text{より} \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a > 2$$

a は自然数であるから $a = 3, 4, 5$

$$(i) \ a = 3 \text{ のとき} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ゆえに} \quad (b-6)(c-6) = 36$$

$b < c, \ c > 6$ に注意して

$$(b-6, c-6) = (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9)$$

$$\text{すなわち} \quad (b, c) = (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15)$$

$$(ii) \ a = 4 \text{ のとき} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ゆえに} \quad (b-4)(c-4) = 16$$

$b < c, \ c > 6$ に注意して

$$(b-4, c-4) = (1, 16), (2, 8)$$

$$\text{すなわち} \quad (b, c) = (5, 20), (6, 12)$$

$$(iii) \ a = 5 \text{ のとき} \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10}$$

$$\text{ゆえに} \quad (3b-10)(3c-10) = 100$$

$$a < b < c \text{ より, } b \geq 6, \ c \geq 7 \text{ であるから, } 3b-10 \geq 8, \ 3c-10 \geq 11$$

このとき, 自然数 (b, c) の組は存在しない.

(i)~(iii) から

$$(a, b, c) = (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), \\ (4, 5, 20), (4, 6, 12)$$

(2) p, q, r ($p > q > r$) は偶数 $2n$ ($n \geq 1$) の正の約数であるから

$$\frac{2n}{p} = a, \quad \frac{2n}{q} = b, \quad \frac{2n}{r} = c$$

をみたす自然数 a, b, c ($a < b < c$) が存在する. 上式より

$$p = \frac{2n}{a}, \quad q = \frac{2n}{b}, \quad r = \frac{2n}{c} \quad \cdots (*)$$

$p + q + r = n$ より

$$\frac{2n}{a} + \frac{2n}{b} + \frac{2n}{c} = n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$

上式を満たす自然数 a, b, c ($a < b < c$) の組は (1) の結果である.

これらの自然数の組を (*) に代入すると

$$(p, q, r) = \left(\frac{2n}{3}, \frac{2n}{7}, \frac{2n}{42} \right), \left(\frac{2n}{3}, \frac{2n}{8}, \frac{2n}{24} \right), \left(\frac{2n}{3}, \frac{2n}{9}, \frac{2n}{18} \right), \\ \left(\frac{2n}{3}, \frac{2n}{10}, \frac{2n}{15} \right), \left(\frac{2n}{4}, \frac{2n}{5}, \frac{2n}{20} \right), \left(\frac{2n}{4}, \frac{2n}{6}, \frac{2n}{12} \right)$$

p, q, r が自然数となるのは, n がそれぞれ 21, 12, 9, 15, 10, 6 の倍数のときである. とくに

$$21 = 3 \cdot 7, \quad 12 = 2^2 \cdot 3, \quad 9 = 3^2, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 10 = 2 \cdot 5, \quad 6 = 2 \cdot 3$$

の最小公倍数が $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$ であるから, n が 1260 の倍数のとき, $f(n)$ は最大値 6 をとる. よって **$M = 6$** , 最小の n は **1260** ■

5.18 2018 年 (90 分)

出題分野 1 2 3

- 1 a, b を実数とし, 少なくとも一方は 0 でないとする. このとき, 次の間に答えよ.

(1) 連立不等式

$$3x + 2y + 4 \geq 0, \quad x - 2y + 4 \geq 0, \quad ax + by \geq 0$$

の表す領域, または連立不等式

$$3x + 2y + 4 \geq 0, \quad x - 2y + 4 \geq 0, \quad ax + by \leq 0$$

の表す領域が三角形であるために a, b がみたすべき条件を求めよ. さらに, その条件をみたす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ.

(2) (1) の三角形の面積を S とするとき, S を a, b を用いて表せ.

(3) $S \geq 4$ を示せ.

- 2 次の間に答えよ.

(1) 整数 α, β の少なくとも一方が奇数のとき, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ は奇数であることを示せ.

(2) n を奇数とする. このとき $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2n$ をみたす整数 α, β は存在しないことを示せ.

(3) c を実数とする. このとき 3 次方程式 $x^3 - 2018x + c = 0$ の解のうち整数であるものは 1 個以下であることを示せ.

3 図1のように2つの正方形ABCDとCDEFを並べた図形を考える．2点P, Qが6個の頂点A, B, C, D, E, Fを以下の規則(a), (b)に従って移動する．

- (a) 時刻0では図2のように点Pは頂点Aに, 点Qは頂点Cにいる．
 (b) 点P, Qは時刻が1増えるごとに独立に, 今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．

時刻 n まで2点P, Qが同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す．また時刻 n まで2点P, Qが同時に同じに頂点にいることが一度もなく, かつ時刻 n に2点P, Qがともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し, $b_n = p_n - a_n$ と定める．このとき, 次の問に答えよ．

- (1) 時刻1での点P, Qの可能な配置を, 図2にならってすべて図示せよ．
 (2) a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ．
 (3) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ．
 (4) $p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を示せ．

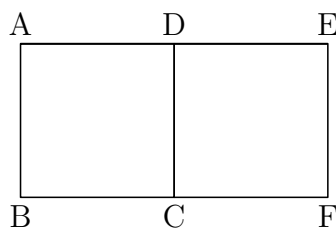


図1

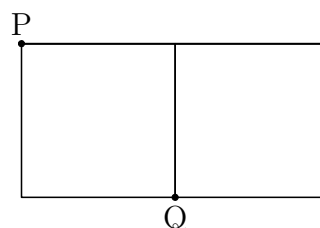


図2

解答例

1 (1) 連立不等式

$$3x + 2y + 4 \geq 0, \quad x - 2y + 4 \geq 0$$

の表す領域は、右の図の斜線部分で境界を含む。
2 直線

$$l_1: 3x + 2y + 4 = 0, \quad l_2: x - 2y + 4 = 0$$

の傾きはそれぞれ $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ である。

$b \neq 0$ のとき、直線 $l: ax + by = 0$ の傾きを m とすると、 l によって領域が三角形となるのは

$$(*) \quad m < -\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} < m \quad \text{すなわち} \quad -\frac{a}{b} < -\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} < -\frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad & \frac{a}{b} < -\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} < \frac{a}{b} \\ & \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{aligned}$$

上式より $a \neq 0$ であることに注意して

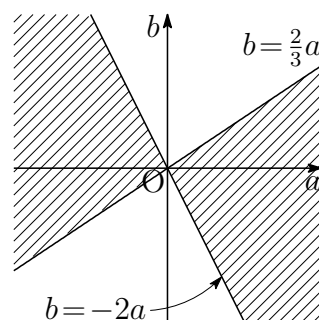
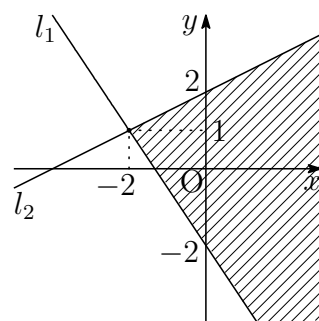
$$\left(\frac{b}{a} + 2\right)\left(\frac{b}{a} - \frac{2}{3}\right) < 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{したがって} \quad -2 < \frac{b}{a} < \frac{2}{3}$$

$b = 0$ のとき、条件より $a \neq 0$ であるから、 l は直線 $x = 0$ となる。このときも、 l により領域は三角形となる。よって、点 (a, b) の満たす不等式は

$$-2 < \frac{b}{a} < \frac{3}{2}$$

その領域は、右の図の斜線部分で境界を含まない。



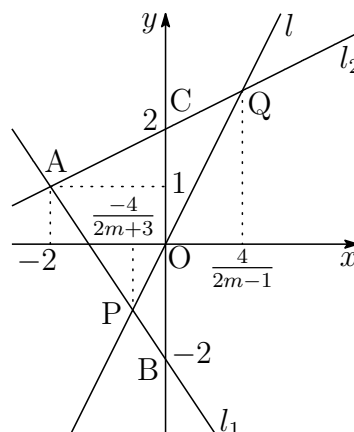
(2) (*) を満たすとき, $l: y = mx$ と

$$l_1: 3x + 2y + 4 = 0, \quad l_2: x - 2y + 4 = 0$$

との交点をそれぞれ P, Q とすると, 2 点 P, Q の x 座標は, それぞれ

$$-\frac{4}{2m+3}, \quad \frac{4}{2m-1}$$

また, l_1 と l_2 の交点 A の x 座標は -2 であり, l_1, l_2 の y 軸との交点をそれぞれ $B(0, -2)$, $C(0, 2)$ とすると



$$\triangle ABC = 4, \quad \triangle OBP = \frac{4}{|2m+3|}, \quad \triangle OCQ = \frac{4}{|2m-1|}$$

(i) $\frac{1}{2} < m$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \triangle APQ = \triangle ABC + \triangle OCQ - \triangle OBP \\ &= 4 + \frac{4}{|2m-1|} - \frac{4}{|2m+3|} = 4 + \frac{4}{2m-1} - \frac{4}{2m+3} \end{aligned}$$

(ii) $m < -\frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \triangle APQ = \triangle ABC - \triangle OCQ + \triangle OBP \\ &= 4 - \frac{4}{|2m-1|} + \frac{4}{|2m+3|} = 4 + \frac{4}{2m-1} - \frac{4}{2m+3} \end{aligned}$$

(i), (ii) から, (*) を満たすとき

$$\begin{aligned} S &= 4 + \frac{16}{(2m-1)(2m+3)} = 4 + \frac{16}{\left(-\frac{2a}{b} - 1\right)\left(-\frac{2a}{b} + 3\right)} \\ &= 4 + \frac{16b^2}{(2a+b)(2a-3b)} \end{aligned}$$

$b = 0$ のとき, $l: ax + by = 0$ は, 直線 $x = 0$ であるから, $S = \triangle ABC = 4$ より, 上式を満たす. よって

$$S = 4 + \frac{16b^2}{(2a+b)(2a-3b)}$$

(3) ① より, $(2a+b)(2a-3b) > 0$ であるから, (2) の結果より $S \geq 4$ ■

- 2 (1) α, β の一方が奇数で他方が偶数のとき, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ の偶奇は

$$(\text{奇数})^2 + (\text{奇数})(\text{偶数}) + (\text{偶数})^2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{奇数}$$

α, β がともに奇数のとき, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ の偶奇は

$$(\text{奇数})^2 + (\text{奇数})(\text{奇数}) + (\text{奇数})^2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{奇数}$$

よって, α, β の少なくとも一方が奇数のとき, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ は奇数.

- (2) $2n$ は偶数であるから

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2n \quad \cdots (*)$$

を満たすとき, (1) の結果から, α, β はともに偶数で

$$\alpha = 2k, \quad \beta = 2l$$

とおくと (k, l は整数)

$$(2k)^2 + 2k \cdot 2l + (2l)^2 = 2n \quad 2(k^2 + kl + l^2) = n$$

上の第 2 式の左辺は偶数であるから, n が奇数であることに反する.

よって, (*) を満たす α, β は存在しない.

- (3) 3 次方程式

$$x^3 - 2018x + c = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α, β, γ すると (c は実数), 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2018$$

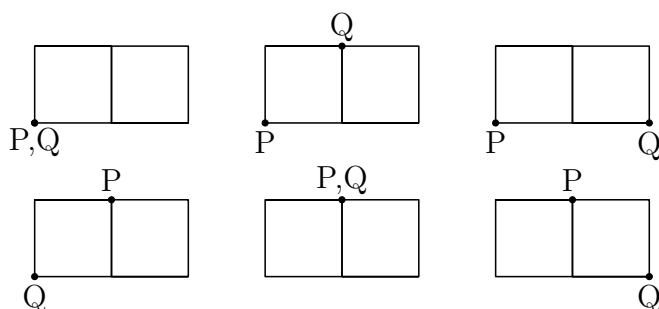
α, β が整数であると仮定し, 上の 2 式から γ を消去すると

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2 \cdot 1009$$

(2) の結果から, 上式を満たす整数 α, β は存在しないので, 仮定に反する.

よって, 3 次方程式 (*) の整数解の個数は 1 個以下である. ■

- 3 (1) 時刻1で動点P, Qの可能な配置は, 次の6通り



- (2) (1)の6通りの配置は同様に確からしい.

a_1 は時刻1で動点P, Qが同じ正方形上の対角にある, すなわち,

$$(P, Q) = (B, D), (D, B), (D, F)$$

にある確率であるから $a_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b_1 は時刻1で動点P, Qが同じ正方形上にない, すなわち, $(P, Q) = (B, F)$

にある確率であるから $b_1 = \frac{1}{6}$

動点P, Qが頂点B, D, F上にあるのは偶数時刻で, 頂点A, C, E上にあるのは奇数時刻である. 動点P, Qが時刻 n まで同じ頂点にないという条件を満たしながら時刻 n において, 動点P, Qが同じ正方形上の対角にある確率 a_n , 動点P, QがAとEまたはBとFにある確率 b_n について次の確率漸化式が成立する.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n \quad \cdots (*)$$

$$\text{したがって} \quad a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

$$(3) (*) \text{より} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n$$

$$(4) a_0 = 1, b_0 = 0, (*) \text{より, } a_n \geq 0, b_n \geq 0 \text{ であるから}$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \leq \frac{3}{4}(a_n + b_n)$$

$$\text{ゆえに } p_0 = 1, p_{n+1} \leq \frac{3}{4}p_n \text{ よって } p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n p_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

■

5.19 2019 年 (90 分)

出題分野 ① ② ③

① a を実数とし、関数 $f(x) = x^2 + ax - a$ と $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ を考える. 関数 $y = F(x) - f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ.

② 非負の整数 n に対して P_n を xy 平面上の点とする. P_0 の座標を $(1, 0)$ とし, P_n の座標 (x_n, y_n) と P_{n+1} の座標 (x_{n+1}, y_{n+1}) は

$$x_{n+1} = x_n - k(y_n + y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + k(x_n + x_{n+1})$$

をみたすとする. ただし k を正の実数とする.

(1) $k = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ とする. ただし $0 < \alpha < \pi$ とする. このとき P_1, P_2 の座標 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を α を用いて表せ.

(2) P_n の座標 (x_n, y_n) を (1) の α と n を用いて表せ.

(3) O を xy 平面の原点とすると、三角形 P_nOP_{n+1} の面積を k を用いて表せ.

③ 1 つのサイコロを 3 回投げる. 1 回目に出る目を a , 2 回目に出る目を b , 3 回目に出る目を c とする. なお, サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする.

(1) 2 次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ.

(2) 2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ のすべての解が整数である確率を求めよ.

(3) 2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (t^2 + at - a) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{a}{2}t^2 - at \right]_0^x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - ax$$

$g(x) = F(x) - f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - ax - (x^2 + ax - a) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{a-2}{2}x^2 - 2ax + a, \\ g'(x) &= x^2 + (a-2)x - 2a = (x+a)(x-2) \end{aligned}$$

したがって、3次関数 $y = g(x)$ の極値は

$$\begin{aligned} g(-a) &= \frac{1}{3}(-a)^3 + \frac{a-2}{2} \cdot (-a)^2 - 2a \cdot (-a) + a = \frac{1}{6}a(a^2 + 6a + 6), \\ g(2) &= \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{a-2}{2} \cdot 2^2 - 2a \cdot 2 + a = -a - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$y = g(x)$ のグラフが、 x 軸と異なる3点で交わるための a の条件は、

$$g(-a)g(2) < 0$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}a(a^2 + 6a + 6) \left(-a - \frac{4}{3} \right) &< 0 \\ a \left(a + \frac{4}{3} \right) (a^2 + 6a + 6) &> 0 \\ a \left(a + \frac{4}{3} \right) (a + 3 + \sqrt{3})(a + 3 - \sqrt{3}) &> 0 \end{aligned}$$

よって、 $-3 - \sqrt{3} < -\frac{4}{3} < -3 + \sqrt{3} < 0$ に注意して

$$a < -3 - \sqrt{3}, \quad -\frac{4}{3} < a < -3 + \sqrt{3}, \quad 0 < a$$

■

2 (1) 与えられた漸化式から

$$x_{n+1} + ky_{n+1} = x_n - ky_n, \quad -kx_{n+1} + y_{n+1} = kx_n + y_n$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad x_{n+1} &= \frac{1-k^2}{1+k^2}x_n - \frac{2k}{1+k^2}y_n, \\ y_{n+1} &= \frac{2k}{1+k^2}x_n + \frac{1-k^2}{1+k^2}y_n \end{aligned}$$

$$k = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ より } \frac{1-k^2}{1+k^2} = \cos \alpha, \quad \frac{2k}{1+k^2} = \sin \alpha$$

$$\text{したがって} \quad (*) \begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos \alpha - y_n \sin \alpha \\ y_{n+1} = x_n \sin \alpha + y_n \cos \alpha \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (1, 0)$ であるから, $(*)$ より

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (\cos \alpha, \sin \alpha), \\ (x_2, y_2) &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, 2 \sin \alpha \cos \alpha) \\ &= (\cos 2\alpha, \sin 2\alpha) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{cases} x_n = \cos n\alpha, \\ y_n = \sin n\alpha \end{cases} \quad \dots (A)$$

であると推測し, これを数学的帰納法により示す.

[1] $n = 0$ のとき, (A) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (A) が成立すると仮定すると, $(*)$ より

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \cos k\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \sin \alpha = \cos(k+1)\alpha \\ y_{k+1} &= \cos k\alpha \sin \alpha + \sin k\alpha \cos \alpha = \sin(k+1)\alpha \end{aligned}$$

したがって, $n = k+1$ のときも (A) が成立する.

[1], [2] より, すべての非負の整数 n について, (A) は成立する.

よって $x_n = \cos n\alpha, \quad y_n = \sin n\alpha$

(3) (2) の結果から, $OP_n = OP_{n+1} = 1, \quad \angle P_n OP_{n+1} = \alpha$

$$\text{よって} \quad \triangle P_n OP_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

■

- 3 (1) 2次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ の解を α, β とすると ($\alpha \leq \beta$), 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = b, \quad \alpha\beta = c$$

上の第1式から, 解の一方が整数であるとき, 他の解も整数である. b, c は1から6までの整数であるから, 条件を満たすのは次の7通り.

$$c = 1 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (1, 1) \quad \text{ゆえに} \quad b = 2$$

$$c = 2 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (1, 2) \quad \text{ゆえに} \quad b = 3$$

$$c = 3 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (1, 3) \quad \text{ゆえに} \quad b = 4$$

$$c = 4 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (2, 2), (1, 4) \quad \text{ゆえに} \quad b = 4, 5$$

$$c = 5 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (1, 5) \quad \text{ゆえに} \quad b = 6$$

$$c = 6 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (2, 3) \quad \text{ゆえに} \quad b = 5$$

$$\text{よって, 求める確率は} \quad \frac{7}{6^2} = \frac{7}{36}$$

- (2) 2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$, すなわち, 2次方程式

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \cdots (*)$$

のすべての解が整数であるから, 解と係数の関係により, $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ は整数で, これらは1以上6以下の整数であるから, 2次方程式(*)は, (1)で示した2次方程式

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

と一致する. すなわち, 2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ は, これらと同型 (monic) であるから, 上の第1式を2, 3倍および第2式を2倍した次の3つの2次方程式も含む.

$$2x^2 - 4x + 2 = 0, \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0, \quad 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\text{よって, 求める確率は} \quad \frac{7+3}{6^3} = \frac{5}{108}$$

(3) 2 次方程式

$$ax^2 - bx + c = 0 \quad \dots (**)$$

が少なくとも 1 つ整数解をもつとき, $a = 1$ の場合については (1) で調べているので, $a \geq 2$ の場合について調べる. 2 次方程式 (**) の解を p, q とすると, 解と係数の関係により

$$p + q = \frac{b}{a}, \quad pq = \frac{c}{a}$$

このとき, $0 < \frac{b}{a} \leq 3, 0 < \frac{c}{a} \leq 3$ であるから, 整数解は 1 または 2

(i) 方程式 (**) が 1 を解にもつとき $a + c = b \quad \dots \textcircled{1}$

これを満たす (a, b, c) の組は, 次の 10 組.

a	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
b	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
c	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1

(ii) 方程式 (**) が 2 を解にもつとき $c = 2(b - 2a) \quad \dots \textcircled{2}$

これを満たす (a, b, c) の組は, 次の 2 組.

$$(a, b, c) = (2, 5, 2), (2, 6, 4)$$

(iii) 方程式 (**) が 1 と 2 を解にもつ, すなわち, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を同時に満たす (a, b, c) は次の 1 組である.

$$(a, b, c) = (2, 6, 4)$$

よって, 求める確率は (1) および (i)~(iii) により

$$\frac{7 + 10 + 2 - 1}{6^3} = \frac{1}{12}$$

補足 整数を係数とする2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が有理数を解に持つための必要十分条件は

$$b^2 - 4ac \text{ が平方数}$$

$b = 2, 3, 4, 5, 6$ について, これを満たす ac の値を求める.

(i) $b = 2$ のとき, $ac = 1$ であるから, 次の1組.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

(ii) $b = 3$ のとき, $ac = 2$ であるから, 次の2組.

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

(iii) $b = 4$ のとき, $ac = 3, 4$ であるから, 次の5組.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0, & 3x^2 - 4x + 1 &= 0, & x^2 - 4x + 4 &= 0, \\ 2x^2 - 4x + 2 &= 0, & \underline{4x^2 - 4x + 1} &= 0 \end{aligned}$$

(iv) $b = 5$ のとき, $ac = 4, 6$ であるから, 次の7組.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0, & 2x^2 - 5x + 2 &= 0, & 4x^2 - 5x + 1 &= 0, \\ x^2 - 5x + 6 &= 0, & 2x^2 - 5x + 3 &= 0, & 3x^2 - 5x + 2 &= 0, \\ \underline{6x^2 - 5x + 1} &= 0 \end{aligned}$$

(v) $b = 6$ のとき, $ac = 5, 8, 9$ であるから, 次の5組.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= 0, & 5x^2 - 6x + 1 &= 0, & 2x^2 - 6x + 4 &= 0, \\ 4x^2 - 6x + 2 &= 0, & 3x^2 - 6x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が有理数を解にもつのは, (i)~(v) の20組あり, そのうち, 整数解を持たないのは, 次の2組である.

$$4x^2 - 4x + 1 = 0, \quad 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

したがって, 少なくとも1つ整数解を持つのは $20 - 2 = 18$ (組)
 実際, 設問(1)についても, $a = 1$ であるものを数えるとよい. また,
 設問(2)については, 上に示した20個の方程式のうち, とともに整数解
 であるものを確認すればよい. ■

5.20 2020 年 (90 分)

出題分野 1 2 3

1 a を実数として $f(x) = 2x^2 - 2ax - a^2$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の解 t が, 必ず $-1 \leq t \leq 1$ をみたすための a の条件を求めよ.

(2) (1) で求めた条件をみたす a に対して

$$S(a) = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$$

とおく. $S(a)$ の値を求めよ.

(3) $S(a)$ の値が最小となる a を求めよ.

2 (1) 平面上に $|\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = |\vec{OR}| = 1$ をみたす相異なる 4 点 O, P, Q, R がある. このとき $|\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}| = 0$ ならば, 三角形 PQR は正三角形であることを示せ.

(2) 空間内に $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = |\vec{OD}| = 1$ をみたす相異なる 5 点 O, A, B, C, D がある. また O から A, B, C を含む平面におろした垂線の足を H とする. このとき, 以下の 2 つの命題を示せ.

命題 (i) $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}| = 3|\vec{OH}|$ ならば, 三角形 ABC は正三角形である.

命題 (ii) $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}| = 0$ かつ $|\vec{OH}| = \frac{1}{3}$ ならば, 四面体 $ABCD$ は正四面体である.

3 xy 平面において x, y がともに整数となる点 (x, y) を格子点という. 正の整数 n に対して

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq n$$

で定まる領域を D とする. 4 つの頂点がすべて D に含まれる格子点であり, x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする. また, そのなかで特に 1 つの辺が x 軸上にある長方形の数を $S(n)$ とする. 以下の問に答えよ.

(1) $R(3)$ と $R(4)$ を求めよ.

(2) $S(n)$ を求めよ.

(3) $R(n)$ を求めよ.

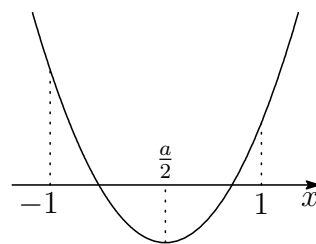
(4) $R(n) = 1001$ となる n を求めよ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = 2x^2 - 2ax - a^2$ より

$$f(x) = 2 \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{3a^2}{2}$$

方程式 $f(x) = 0$ は実数解をもつ. 実数解 t が $-1 \leq t \leq 1$ をみたす条件は



$$-1 \leq \frac{a}{2} \leq 1, \quad f(-1) \geq 0, \quad f(1) \geq 0$$

$$\text{したがって } -2 \leq a \leq 2, \quad 2 + 2a - a^2 \geq 0, \quad 2 - 2a - a^2 \geq 0$$

$$\text{ゆえに } \begin{cases} -2 \leq a \leq 2 \\ 1 - \sqrt{3} \leq a \leq 1 + \sqrt{3} \\ -1 - \sqrt{3} \leq a \leq -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{よって } 1 - \sqrt{3} \leq a \leq -1 + \sqrt{3}$$

- (2) $f(x) = 0$ の解を α, β とおくと ($\alpha \leq \beta$)

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx - 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^2 - 2ax - a^2) dx - 2 \int_{\alpha}^{\beta} 2(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - ax^2 - a^2x \right]_{-1}^1 - 4 \left(-\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{4}{3} - 2a^2 + \frac{2}{3}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } f(x) = 0 \text{ の解は } x = \frac{a \pm \sqrt{3}|a|}{2} \quad \text{ゆえに } \beta - \alpha = \sqrt{3}|a|$$

$$\text{よって } S(a) = \frac{4}{3} - 2a^2 + \frac{2}{3}(\sqrt{3}|a|)^3 = 2\sqrt{3}|a|^3 - 2a^2 + \frac{4}{3}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$S(a) = 2\sqrt{3}|a|^3 - 2|a|^2 + \frac{4}{3} \quad (|a| \leq \sqrt{3} - 1)$$

$$u = |a| \text{ とし, } g(u) = 2\sqrt{3}u^3 - 2u^2 + \frac{4}{3} \text{ とおくと } (0 \leq u \leq \sqrt{3} - 1)$$

$$g'(u) = 6\sqrt{3}u^2 - 4u = 6\sqrt{3}u \left(u - \frac{2\sqrt{3}}{9} \right)$$

$$\text{このとき, } \sqrt{3} - 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{7\sqrt{3} - 9}{9} = \frac{\sqrt{147} - \sqrt{81}}{9} > 0 \text{ に注意して}$$

u	0	$\dots$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\dots$	$\sqrt{3}-1$
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$u = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{ すなわち, } a = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ のとき, } S(a) \text{ は最小となる.} \quad \blacksquare$$

2 (1) $|\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}| = 0$ より, $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \vec{0}$ であるから

$$\vec{OP} + \vec{OQ} = -\vec{OR} \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{OP} + \vec{OQ}|^2 = |\vec{OR}|^2$$

$$\text{したがって} \quad |\vec{OP}|^2 + 2\vec{OP} \cdot \vec{OQ} + |\vec{OQ}|^2 = |\vec{OR}|^2$$

$$|\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = |\vec{OR}| = 1 \text{ より, } \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = -\frac{1}{2} \text{ であるから}$$

$$\cos \angle POQ = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{|\vec{OP}| |\vec{OQ}|} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \angle POQ = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{同様に} \quad \angle QOR = \angle ROP = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{したがって} \quad OP = OQ = OR = 1, \quad \angle POQ = \angle QOR = \angle ROP = \frac{2\pi}{3}$$

P, Q, R は相異なる点であるから, $\triangle PQR$ は正三角形である.

(2) 命題 (i) $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$ より $\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$

したがって $|\vec{HA}| = |\vec{HB}| = |\vec{HC}| \dots \textcircled{1}$

$\triangle ABC$ の重心を G とすると $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$

上式を $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}| = 3|\vec{OH}|$ に代入すると $|\vec{OG}| = |\vec{OH}|$

O から平面 ABC 上の点 G までの距離が OH に等しいから $G = H$

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0} \dots \textcircled{2}$$

①, ② から, (1) と同様の計算により

$$\frac{\vec{HA} \cdot \vec{HB}}{|\vec{HA}| |\vec{HB}|} = \frac{\vec{HB} \cdot \vec{HC}}{|\vec{HB}| |\vec{HC}|} = \frac{\vec{HC} \cdot \vec{HA}}{|\vec{HC}| |\vec{HA}|} = -\frac{1}{2}$$

したがって $\angle AHB = \angle BHC = \angle CHA = \frac{2\pi}{3} \dots \textcircled{3}$

①, ③ および A, B, C は相異なる点より, $\triangle ABC$ は正三角形である.

命題 (ii) 条件から

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$$

H は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OH}$$

上の2式から $3\vec{OH} + \vec{OD} = \vec{0}$

ゆえに $|\vec{OD}| = 3|\vec{OH}| = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

直角三角形 OAH において $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

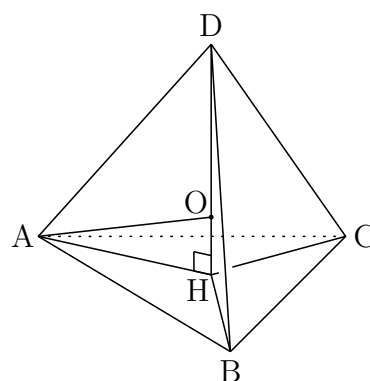
$\triangle ABH$ において $AB = \sqrt{3}AH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\triangle ABC$ は正三角形であるから $AB = BC = CA = \frac{2\sqrt{6}}{3} \dots \textcircled{4}$

$\triangle ADH$ において $AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{\frac{8}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

これと ① より $AD = BD = CD = \frac{2\sqrt{6}}{3} \dots \textcircled{5}$

④, ⑤ および A, B, C, D は相異なる点より, 四面体 $ABCD$ は正四面体.



- 3** (1) 横の長さが a , 縦の長さが b の長方形を (a, b) 型とよぶことにする.

$n = 3$ のとき, 領域 D に含まれる長方形は, $(1, 1)$ 型が 3 個, $(2, 1)$ 型が 1 個, $(1, 2)$ 型が 1 個であるから

$$R(3) = 3 + 1 + 1 = 5$$

$n = 4$ のとき, 領域 D に含まれる長方形は, $(1, 1)$ 型が 6 個, $(2, 1)$ 型が 3 個, $(1, 2)$ 型が 3 個, $(2, 2)$ 型が 1 個, $(3, 1)$ 型が 1 個, $(1, 3)$ 型が 1 個

$$R(4) = 6 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 15$$

- (2) 領域 D において, 1 辺が x 軸上にある長方形の個数について

$(1, k)$ 型の総数は $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$ 個

$(2, k)$ 型の総数は $(k = 1, 2, \dots, n-2)$ $1 + 2 + 3 + \dots + (n-2)$ 個

$\vdots$

$(n-2, k)$ 型の総数は $(k = 1, 2)$ $1 + 2$ 個

$(n-1, k)$ 型の総数は $(k = 1)$ 1 個

$$\begin{aligned} \text{したがって } S(n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i j = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} i(i+1) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} \{i(i+1)(i+2) - (i-1)i(i+1)\} \\ &= \frac{1}{6} (n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} R(n) &= \sum_{k=1}^n S(k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (k-1)k(k+1) \\ &= \frac{1}{24} \sum_{k=1}^n \{(k-1)k(k+1)(k+2) - (k-2)(k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{24} (n-1)n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

$$(4) R(n) = 1001 \text{ より } \frac{1}{24} (n-1)n(n+1)(n+2) = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

$$(n-1)n(n+1)(n+2) = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$$

$n \geq 1$ において, $R(n)$ は単調増加であるから $n = 12$



5.21 2021 年 (90 分)

出題分野 1 2 3

- 1 a の正の実数とする．放物線 $y = x^2$ を C_1 ，放物線 $y = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$ を C_2 とする．以下の問に答えよ．

- (1) 点 (t, t^2) における C_1 の接線の方程式を求めよ．
 (2) C_1 と C_2 が異なる 2 つの共通接線 ℓ, ℓ' を持つような a の範囲を求めよ．ただし C_1 と C_2 の共通接線とは， C_1 と C_2 の両方に接する直線のことである．

以下， a は (2) で求めた範囲にあるとし， ℓ, ℓ' を C_1 と C_2 の異なる 2 つの共通接線とする．

- (3) ℓ, ℓ' の交点の座標を求めよ．
 (4) C_1 と ℓ, ℓ' で囲まれた領域を D_1 とし，不等式 $x \leq a$ の表す領域を D_2 とする． D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ．

- 2 4 つの実数を $\alpha = \log_2 3$, $\beta = \log_3 5$, $\gamma = \log_5 2$, $\delta = \frac{3}{2}$ とおく．以下の問に答えよ．

- (1) $\alpha\beta\gamma = 1$ を示せ．
 (2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を小さい順に並べよ．
 (3) $p = \alpha + \beta + \gamma$, $q = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ とし， $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ とする．
 このとき $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(-1)$ および $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ．

3 1 から 12 までの数字が下の図のように並べて書かれている．以下のルール (a), (b) と (終了条件) を用いたゲームを行う．ゲームを開始すると最初に (a) を行い, (終了条件) が満たされたならゲームを終了する．そうでなければ (終了条件) が満たされるまで (b) の操作を繰り返す．ただし, (a) と (b) における数字を選ぶ操作はすべて独立な試行とする．

(a) 1 から 12 までの数字のどれか 1 つを等しい確率で選び, 下の図において選んだ数字を丸で囲み, その上に石を置く．

(b) 石が置かれた位置の水平右側または垂直下側の位置にある数字のどれか 1 つを等しい確率で選び, その数字を丸で囲み, そこに石を移して置く．例えば, 石が 6 の位置に置かれているときは, その水平右側または垂直下側の位置にある数字 7, 8, 9, 10, 12 のどれか 1 つの数字を等しい確率で選び, その数字を丸で囲み, そこに石を移して置く．

(終了条件) 5, 9, 11, 12 の数字のどれか 1 つが丸で囲まれ石が置かれている．ゲームの終了時に数字 j が丸で囲まれている確率を p_j とする．以下の問に答えよ．

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

- (1) 確率 p_2 を求めよ．
- (2) 確率 p_5 を求めよ．
- (3) 確率 p_{11} を求めよ．

解答例

1 (1) $C_1: y = x^2$ より $y' = 2x$

C_1 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2$$

(2) (1) で求めた接線と $C_2: y = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$ から y を消去すると

$$2tx - t^2 = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$$

これを x について整理すると

$$x^2 + 2(t - 2a)x + 4a^2 - 4a^4 - t^2 = 0$$

このとき、上の x の2次方程式は重解をもつから、係数について

$$D/4 = (t - 2a)^2 - (4a^2 - 4a^4 - t^2) = 0$$

これを t について整理すると $t^2 - 2at + 2a^4 = 0 \quad \dots (*)$

C_1 と C_2 が異なる2つの共通接線 ℓ, ℓ' をもつとき、その2つの接点の x 座標、すなわち、2次方程式 $(*)$ の解が異なる2つの実数解をもつから、係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 2a^4 = a^2(1 - 2a^2) > 0$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) 2次方程式 $(*)$ の異なる2つの実数解 p, q と係数の関係により

$$(**) \quad p + q = 2a, \quad pq = 2a^4$$

C_1 上の2点 $(p, p^2), (q, q^2)$ における接線をそれぞれ ℓ, ℓ' とすると、(1)の結果から

$$\ell: y = 2px - p^2, \quad \ell': y = 2qx - q^2$$

ℓ, ℓ' の交点の座標は $\left(\frac{p+q}{2}, pq\right)$ すなわち $(a, 2a^4)$

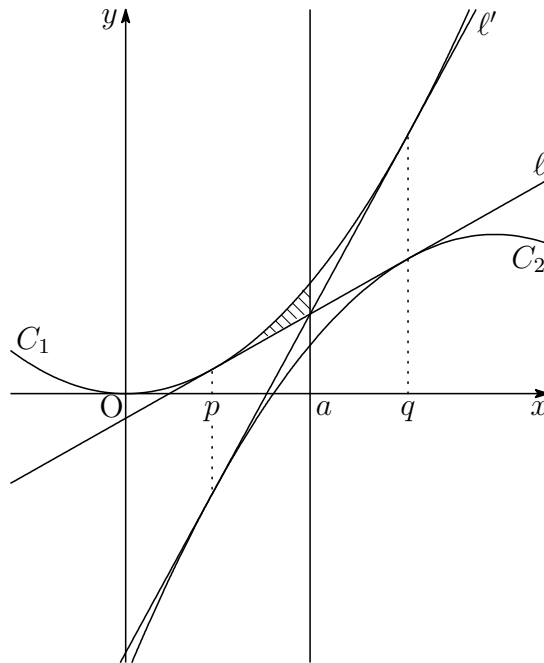
(4) $p < q$ とすると, D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_p^a \{x^2 - (2px - p^2)\} dx = \int_p^a (x - p)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x - p)^3 \right]_p^a = \frac{1}{3} (a - p)^3 \end{aligned}$$

$$2a = p + q \text{ より } S(a) = \frac{1}{3} \left(\frac{q - p}{2} \right)^3$$

$$(**) \text{ より } (q - p)^2 = (p + q)^2 - 4pq = (2a)^2 - 4 \cdot 2a^4 = 4(a^2 - 2a^4)$$

$$p < q \text{ より } \frac{q - p}{2} = \sqrt{a^2 - 2a^4} \quad \text{よって} \quad S(a) = \frac{1}{3} (a^2 - 2a^4)^{\frac{3}{2}}$$



2 (1) $\alpha = \log_2 3$, $\beta = \log_3 5$, $\gamma = \log_5 2$ より

$$\alpha\beta\gamma = \log_2 3 \log_3 5 \log_5 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = 1$$

補足 積における真数の交換法則 $\log_a A \log_b B = \log_a B \log_b A$ を用いると

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma &= \log_2 3 \log_3 5 \log_5 2 = \log_2 5 \log_3 3 \log_5 2 \\ &= \log_2 5 \log_5 2 = \log_2 2 \log_5 5 = 1\end{aligned}$$

(2) $\alpha = \log_2 3$, $\beta = \log_3 5$, $\gamma = \log_5 2$, $\delta = \frac{3}{2}$ より

$$\log_5 2 < 1 < \log_3 5 < \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2} = \log_2 \sqrt{8} < \log_2 3$$

$$\text{よって} \quad \gamma < \beta < \delta < \alpha$$

(3) (1) の結果から

$$q = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \quad (*)$$

また, $p = \alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta\gamma = 1$ であるから

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 + px^2 + qx + 1 \\ &= x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma \\ &= (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)\end{aligned} \quad (**)$$

$$\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \text{ および } (*) \text{ から } \gamma < \frac{1}{2} < 1 < \beta < \frac{3}{2} < \alpha$$

$$-\alpha < -\frac{3}{2} < -\beta < -1 < -\frac{1}{2} < -\gamma$$

$$(**) \text{ より } f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0, \quad f(-1) < 0, \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) > 0 \quad \blacksquare$$

- 3** $i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10$ とし, i の位置にある石が移動可能なそれぞれの位置に移動する確率を q_i とすると

$$q_1 = \frac{1}{7}, \quad q_2 = q_6 = \frac{1}{5}, \quad q_3 = q_7 = \frac{1}{3}, \quad q_4 = \frac{1}{2}, \quad q_8 = 1, \quad q_{10} = \frac{1}{2}$$

- (1) $p_1 = \frac{1}{12}$ であるから, 求める確率 p_2 は

$$p_2 = p_1 q_1 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{12} = \frac{2}{21}$$

- (2) (1) の結果を利用して

$$\begin{aligned} p_3 &= p_1 q_1 + p_2 q_2 + \frac{1}{12} = p_2 + p_2 q_2 = p_2(1 + q_2) \\ &= \frac{2}{21} \left(1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4 &= p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + \frac{1}{12} = p_3 + p_3 q_3 = p_3(1 + q_3) \\ &= \frac{4}{35} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{105} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_5 &= p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 + \frac{1}{12} = p_4 + p_4 q_4 = p_4(1 + q_4) \\ &= \frac{16}{105} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{8}{35} \end{aligned}$$

- (3) (1),(2) の結果を利用して

$$\begin{aligned} p_6 &= p_1 q_1 + \frac{1}{12} = p_2 \\ p_7 &= p_2 q_2 + p_6 q_6 + \frac{1}{12} = p_2 q_2 + p_2 q_2 + \frac{1}{12} = 2p_2 q_2 + \frac{1}{12} \\ &= 2 \cdot \frac{2}{21} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{12} = \frac{17}{140} \\ p_{10} &= p_1 q_1 + p_6 q_6 + \frac{1}{12} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \frac{1}{12} = p_3 = \frac{4}{35} \\ p_{11} &= p_2 q_2 + p_7 q_7 + p_{10} q_{10} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{2}{21} \cdot \frac{1}{5} + \frac{17}{140} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{35} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$



5.22 2022年(90分)

出題分野 1 2 3

1 a, b を実数とする.

- (1) 整式 x^3 を2次式 $(x-a)^2$ で割ったときの余りを求めよ.
- (2) 実数を係数とする2次式 $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x + b$ とする. b の値に応じて, このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ.

2 1つのサイコロを3回投げる. 1回目に出る目を a , 2回目に出る目を b , 3回目に出る目を c とする. なおサイコロは1から6までの目が等しい確率で出るものとする.

- (1) $ab + 2c \geq abc$ となる確率を求めよ.
- (2) $ab + 2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ.

3 a, b を実数とし, 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ を C_1 , 放物線 $y = -(x-a)^2 + b$ を C_2 とする.

- (1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるための a, b の条件を求めよ.

以下, C_1 と C_2 は異なる2点で交わるとし, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする.

- (2) $S = 16$ となるための a, b の条件を求めよ.
- (3) a, b は $b \leq a + 3$ を満たすとする. このとき S の最大値を求めよ.

解答例

1 (1) $x^3 = (x - a)^2(x + 2a) + 3a^2x - 2a^3$ より, 求める余りは $3a^2x - 2a^3$

(2) $x^3 = (x^2 + \alpha x + \beta)(x - \alpha) + (\alpha^2 - \beta)x + \alpha\beta$

x^3 を $x^2 + \alpha x + \beta$ で割った余りが $3x + b$ であるから

$$\alpha^2 - \beta = 3, \quad \alpha\beta = b \quad (*)$$

上の 2 式から β を消去すると $b = \alpha^3 - 3\alpha$

$g(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha$ とすると

$$g'(\alpha) = 3\alpha^2 - 3 = 3(\alpha + 1)(\alpha - 1)$$

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(*) の第 1 式から, α の値により, 一意的に β が決定するから, $f(x)$ の個数は, 方程式 $b = g(\alpha)$ の解の個数と一致する. よって

$-2 < b < 2$ のとき 3 個

$b = \pm 2$ のとき 2 個

$b < -2, 2 < b$ のとき 1 個



- 2** (1) $ab + 2c \geq abc$ より, $(ab - 2)c \leq ab$ であるから, $ab \leq 2$ のとき, c は任意.

$$ab \geq 3 \text{ のとき } c \leq \frac{ab}{ab-2} = 1 + \frac{2}{ab-2} \quad \cdots (*)$$

とくに, $ab \geq 5$ のとき $c < 2$ ゆえに $c = 1$

(i) $ab \leq 2$, すなわち, $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ のとき

$$c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(ii) $ab = 3$, すなわち, $(a, b) = (1, 3), (3, 1)$ のとき, $(*)$ より

$$c \leq 3 \quad \text{ゆえに} \quad c = 1, 2, 3$$

(iii) $ab = 4$, すなわち, $(a, b) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$ のとき, $(*)$ より

$$c \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad c = 1, 2$$

(iv) $ab \geq 5$ のとき, $c = 1$ で, (a, b) の組は, (i)~(iii) を除いた

$$6^2 - (3 + 2 + 3) = 28 \text{ 通り}$$

(i)~(iv) より, 求める確率は

$$\frac{3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 28 \cdot 1}{6^3} = \frac{58}{216} = \frac{29}{108}$$

- (2) まず「 $ab + 2c$ と $2abc$ が互いに素であること」と「 ab と $2c$ が互いに素であること」が同値であることを示す.

($\implies$) ab と $2c$ が素数 p を因数にもつならば, $ab + 2c$ および $2abc (= ab \cdot 2c)$ は素数 p を因数にもち, $ab + 2c$ と $2abc$ はともに p を因数にもつ.

($\impliedby$) $ab + 2c$ と $2abc (= ab \cdot 2c)$ が素数 q を因数にもつならば, $ab \cdot 2c$ が素数 q を因数にもつから, ab または $2c$ が素数 q を因数にもつ.

$$2c = (ab + 2c) - ab, \quad ab = (ab + 2c) - 2c$$

ab が素数 q を因数にもつとき上の第1式から $2c$ も q を因数にもち, $2c$ が素数 q を因数にもつとき上の第2式から ab も素数 q を因数にもつ. (証終)

したがって、 ab と $2c$ が互いに素となる確率を求めればよい。

$$(a, b) = (1, 1) \text{ のとき } c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$(a, b) = (1, 3), (3, 1), (3, 3) \text{ のとき } c = 1, 2, 4, 5$$

$$(a, b) = (1, 5), (5, 1), (5, 5) \text{ のとき } c = 1, 2, 3, 4, 6$$

$$(a, b) = (3, 5), (5, 3) \text{ のとき } c = 1, 2, 4$$

よって、求める確率は

$$\frac{1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{6^3} = \frac{39}{216} = \frac{13}{72}$$

■

- 3** (1) $C_1 : y = \frac{1}{2}x^2$ と $C_2 : y = -(x-a)^2 + b$ の方程式から y を消去すると

$$\frac{1}{2}x^2 = -(x-a)^2 + b \quad \text{整理すると} \quad 3x^2 - 4ax + 2a^2 - 2b = 0 \quad (*)$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるから

$$D/4 = (-2a)^2 - 3(2a^2 - 2b) = 6b - 2a^2 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad b > \frac{a^2}{3}$$

- (2) 2 次方程式 (*) の異なる 2 つの解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\alpha = \frac{2a - \sqrt{6b - 2a^2}}{3}, \quad \beta = \frac{2a + \sqrt{6b - 2a^2}}{3}$$

$$\text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = \frac{2}{3}\sqrt{6b - 2a^2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-(x-a)^2 + b - \frac{1}{2}x^2\} dx \\ &= -\frac{3}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{4} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned} \quad (**)$$

$$S = 16 \text{ より } \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^3 = 16 \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \frac{2}{3}\sqrt{6b - 2a^2} = 4$$

$$\sqrt{6b - 2a^2} = 6 \quad \text{ゆえに} \quad 6b - 2a^2 = 36 \quad \text{よって} \quad b = \frac{a^2}{3} + 6$$

(3) $b \leq a + 3$ より, $k = a + 3 - b$ とおくと ($k \geq 0$) $b = a + 3 - k \cdots \textcircled{3}$

①, (**) から, $6b - 2a^2$ が最大となるとき, S は最大となる. ③ より

$$\begin{aligned} 6b - 2a^2 &= 6(a + 3 - k) - 2a^2 \\ &= -2a^2 + 6a + 18 - 6k \\ &= -2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{45}{2} - 6k \end{aligned}$$

$k \geq 0$ であるから, $k = 0$, $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$ のとき, $6b - 2a^2$ は最大値 $\frac{45}{2}$ をとる. これを ① に代入すると

$$\beta - \alpha = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{45}{2}} = \sqrt{10}$$

さらに (**) に代入すると, S の最大値は $\frac{1}{4}(\sqrt{10})^3 = \frac{5}{2}\sqrt{10}$ ■

5.23 2023 年 (90 分)

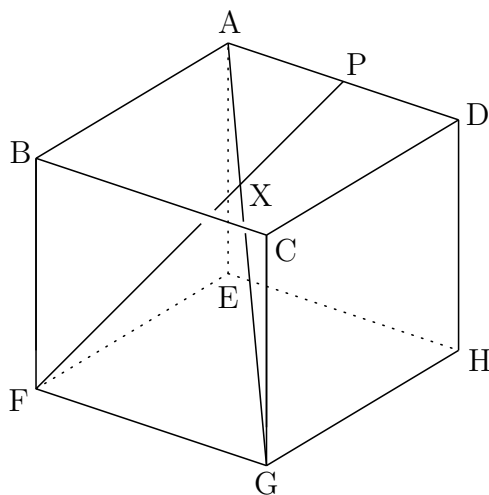
出題分野 1 2 3

1 a を実数とし, 2 つの関数 $f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (a-2)x + 2a+1$ と $g(x) = -x^2 + 1$ を考える.

- (1) $f(x) - g(x)$ を因数分解せよ.
- (2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点が 2 個であるような a を求めよ.
- (3) a は (2) の条件を満たし, さらに $f(x)$ の極大値は 1 よりも大きいとする. $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフを同じ座標平面に図示せよ.

2 図のような 1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH において, 辺 AD 上に点 P をとり, 線分 AP の長さを p とする. このとき, 線分 AG と線分 FP は ADGF 上で交わる. その交点を X とする.

- (1) 線分 AX の長さを p を用いて表せ.
- (2) 三角形 APX の面積を p を用いて表せ.
- (3) 四面体 ABPX と四面体 EFGX の体積の和を V とする. V を p を用いて表せ.
- (4) 点 P を辺 AD 上で動かすとき, V の最小値を求めよ.



3 数字1が書かれた球が2個，数字2が書かれた球が2個，数字3が書かれた球が2個，数字4が書かれた球が2個，合わせて8個の球が袋に入っている．カードを8枚用意し，次の試行を8回行う．袋から球を1個取り出し，数字 k が書かれていたとき，

- 残っているカードの枚数が k 以上の場合，カードを1枚取り除く．
- 残っているカードの枚数が k 未満の場合，カードは取り除かない．

- (1) 取り出した球を毎回袋の中に戻すとき，8回の試行のあとでカードが1枚だけ残っている確率を求めよ．
- (2) 取り出した球を袋の中に戻さないとき，8回の試行のあとでカードが残っていない確率を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x) - g(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (a-2)x + 2a + 1 - (-x^2 + 1)$
 $= x(x^2 - x - 2) - a(x^2 - x - 2)$
 $= (x-a)(x^2 - x - 2)$
 $= (x-a)(x+1)(x-2)$

(2) (1) の結果から $a = -1, 2$

(3) (i) $a = -1$ のとき

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$$

$f'(x) = 0$ の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{10}}{3} \quad (-1 < \alpha < 0), \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$$

$-1 < \alpha < 0$ について

$$f(\alpha) - g(\alpha) = (\alpha + 1)^2(\alpha - 2) < 0, \quad g(\alpha) < g(0) = 1$$

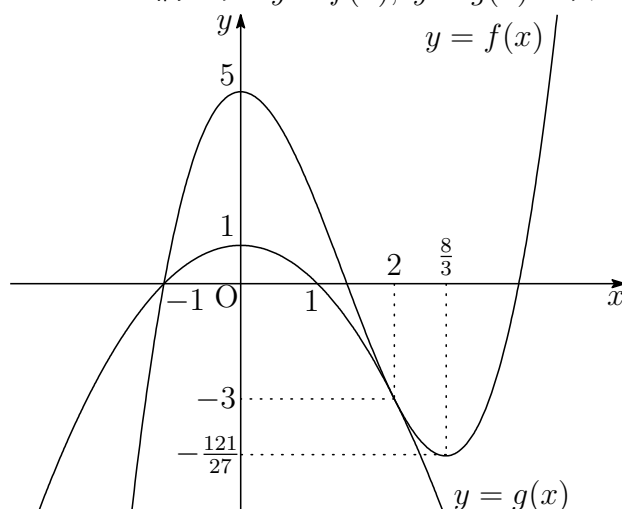
したがって $f(\alpha) < g(\alpha) < g(0) = 1$

これは、極大値 $f(\alpha) > 1$ に反するので、不適.

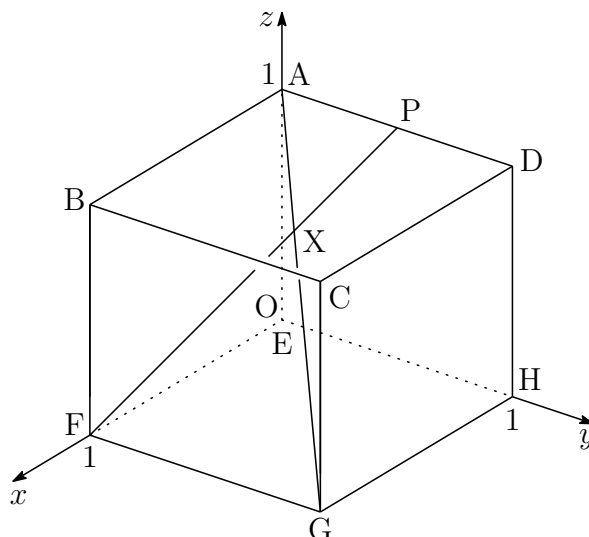
(ii) $a = 2$ のとき $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5, \quad f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x - 8)$

x	...	0	...	$\frac{8}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\frac{121}{27}$	$\nearrow$

極大値 $f(0) = 5 > 1$ を満たす. $y = f(x), y = g(x)$ は次のようになる.



- 2 (1) 下の図のように、座標空間の原点を O とし、点 $E(0, 0, 0)$, $F(1, 0, 0)$, $H(0, 1, 0)$, $A(0, 0, 1)$, $P(0, p, 1)$ をとる.



$FX : XP = s : 1 - s$, $AX : XG = t : 1 - t$ とすると

$$\begin{aligned}\vec{OX} &= (1-s)\vec{OF} + s\vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OG} \\ &= (1-s, sp, s) = (t, t, 1-t)\end{aligned}$$

したがって $1-s=t$, $sp=t$, $s=1-t$ ゆえに $s = \frac{1}{1+p}$, $t = \frac{p}{1+p}$

$$\begin{aligned}\vec{OX} &= \left(\frac{p}{1+p}, \frac{p}{1+p}, \frac{1}{1+p} \right), \quad \vec{OA} = (0, 0, 1), \\ \vec{AX} &= \vec{OX} - \vec{OA} = \left(\frac{p}{1+p}, \frac{p}{1+p}, -\frac{p}{1+p} \right)\end{aligned}$$

よって $AX = |\vec{AX}| = \frac{\sqrt{3}p}{1+p}$

(2) $\vec{AP} = (0, p, 0)$ より

$$|\vec{AP}|^2 |\vec{AX}|^2 - (\vec{AP} \cdot \vec{AX})^2 = p^2 \cdot \frac{3p^2}{(1+p)^2} - \left(\frac{p^2}{1+p} \right)^2 = \frac{2p^4}{(1+p)^2}$$

よって、求める三角形 APX の面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2p^4}{(1+p)^2}} = \frac{\sqrt{2}p^2}{2(1+p)}$$

(3) 点 X の z 座標に注目して

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \triangle ABP \cdot \left(1 - \frac{1}{1+p}\right) + \frac{1}{3} \triangle EFG \cdot \frac{1}{1+p} \\ &= \frac{p}{6} \cdot \frac{p}{1+p} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1+p} = \frac{p^2 + 1}{6(p+1)} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left(\frac{p^2 - 1}{p+1} + \frac{2}{p+1} \right) = \frac{1}{6} \left(p+1 + \frac{2}{p+1} \right) - \frac{1}{3} \\ &\geq \frac{1}{6} \cdot 2 \sqrt{(p+1) \cdot \frac{2}{p+1}} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} \end{aligned}$$

上式において、等号が成立するとき

$$p+1 = \frac{2}{p+1} \quad \text{すなわち} \quad p = \sqrt{2} - 1$$

確かに、 $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ であるから、求める V の最小値は

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$



- 3** (1) 5回目までは残っているカードが4枚以上あるから、カードは毎回1枚取り除かれる．8回の試行のあとでカードが1枚残るのは、次の(i)～(iii)の場合である．

- (i) 6回目だけカードを取り除かない、すなわち、6回目に数字4の球が出て、7回目に数字1～3の球が出て、8回目に数字1または2の球が出る場合で、その確率は

$$\frac{2}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{3}{32}$$

- (ii) 7回目だけカードを取り除かない、すなわち、6回目に数字1～3の球が出て、7回目に数字3または4の球が出て、8回目に数字1または2の球が出る場合で、その確率は

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{3}{16}$$

- (iii) 8回目だけカードを取り除かない、すなわち、6回目に数字1～3の球が出て、7回目に数字1または2の球が出て、8回目に数字2～4の球が出る場合で、その確率は

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{9}{32}$$

(i)～(iii) から、求める確率は $\frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{9}{32} = \frac{9}{16}$

- (2) 8個の球をすべて区別して順番を逆に一列に並べたとする．

8回目は数字1の球、7回目は数字1または2の球、6回目は数字1～3の球、5回目から1回目はどの数字の球でもよいから、求める確率は

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5!}{8!} = \frac{1}{14}$$



5.24 2024 年 (90 分)

出題分野 1 2 3

1 次の問いに答えよ.

- (1) 方程式 $x^3 - 3x^2 - 50 = 0$ の実数解を求めよ.
- (2) 実数 p, q が $p + q = pq$ を満たすとする. $X = pq$ とおくとき, $p^3 + q^3$ を X で表せ.
- (3) 条件

$$p^3 + q^3 = 50, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p < q$$

を満たす 0 でない実数の組 (p, q) をすべて求めよ.

2 t を 0 でない実数として, x の関数 $y = -x^2 + tx + t$ のグラフを C とする.

- (1) C 上において y 座標が最大となる点 P の座標を求めよ.
- (2) P と点 $O(0, 0)$ を通る直線を ℓ とする. ℓ と C が P 以外の共有点 Q を持つために t が満たすべき条件を求めよ. また, そのとき, 点 Q の座標を求めよ.
- (3) t は (2) の条件を満たすとする. $A(-1, -2)$ として, $X = \frac{1}{4}t^2 + t$ とおくとき, $AP^2 - AQ^2$ を X で表せ. また, $AP < AQ$ となるために t が満たすべき条件を求めよ.

3 n を自然数とする．表と裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを n 回投げ，以下のように得点を決める．

- 最初に数直線上の原点に石を置き，コインを投げて表なら 2，裏なら 3 だけ数直線上を正方向に石を移動させる．コインを k 回投げた後の石の位置を a_k とする．
- $a_n \neq 2n+2$ の場合は得点を 0， $a_n = 2n+2$ の場合は得点を $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．

たとえば， $n = 3$ のとき，投げたコインが 3 回とも表のときは得点は 0，投げたコインが順に裏，裏，表のときは得点は $3 + 6 + 8 = 17$ である．

- (1) n 回のうち裏の出る回数を r とするとき， a_n を求めよ．
- (2) $n = 4$ とする．得点が 0 でない確率および 25 である確率をそれぞれ求めよ．
- (3) $n = 9$ とする．得点が 100 である確率および奇数である確率をそれぞれ求めよ．

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad x^3 - 3x^2 - 50 = (x - 5)(x^2 + 2x + 10)$$

3 次方程式 $x^3 - 3x^2 - 50 = 0$ の解は $x = 5, -1 \pm 3i$

よって, 求める実数解は $x = 5$

$$(2) \quad X = pq = p + q \text{ より}$$

$$\begin{aligned} p^3 + q^3 &= (p + q)^3 - 3pq(p + q) \\ &= X^3 - 3X \cdot X = X^3 - 3X^2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ より } p + q = pq$$

$X = pq = p + q$ とおくと, $p^3 + q^3 = 50$ より, (2) の結果を利用すると

$$X^3 - 3X^2 = 50 \quad \text{ゆえに} \quad X^3 - 3X^2 - 50 = 0$$

X は実数であるから, (1) の結果より $X = pq = p + q = 5$

したがって, p, q を解とする 2 次方程式は

$$t^2 - 5t + 5 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$p < q \text{ より} \quad p = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \quad q = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$



2 (1) $C: y = -x^2 + tx + t$ より $y = -\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{4} + t$

よって、点 P の座標は $\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4} + t\right)$

(2) 2点 $O(0, 0)$, $P\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4} + t\right)$ を通る直線 ℓ の方程式は ($t \neq 0$)

$$y = \frac{\frac{t^2}{4} + t}{\frac{t}{2}}x \quad \text{すなわち} \quad y = \left(\frac{t}{2} + 2\right)x$$

ℓ と C の方程式から y を消去すると

$$\left(\frac{t}{2} + 2\right)x = -x^2 + tx + t \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)\left(x - \frac{t}{2}\right) = 0$$

これを解いて $x = -2, \frac{t}{2}$ このとき $\frac{t}{2} \neq -2$ に注意して $t \neq -4$

$x = -2$ を ℓ の方程式に代入して $Q(-2, -t-4)$ ($t \neq 0, -4$)

(3) $A(-1, -2)$, $P\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4} + t\right)$, $Q(-2, -t-4)$ より

$$\begin{aligned} AP^2 - AQ^2 &= \left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{t^2}{4} + t + 2\right)^2 - \{(-2+1)^2 - (-t-2)^2\} \\ &= \left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{t^2}{4} + t + 2\right)^2 - 1 - 4\left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 \\ &= \left(\frac{t^2}{4} + t + 2\right)^2 - 3\left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

ここで, $X = \frac{t^2}{4} + t$, $\left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 = X + 1$ であるから

$$\begin{aligned} AP^2 - AQ^2 &= (X+2)^2 - 3(X+1) - 1 \\ &= X^2 + X = X(X+1) \end{aligned}$$

$AP < AQ$ より, $AP^2 - AQ^2 < 0$ であるから $-1 < X < 0$

$$-1 < \frac{t^2}{4} + t < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+2)^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad t(t+4) < 0$$

よって $-4 < t < 0$, $t \neq -2$ ■

- 3** (1) 裏の出る回数が r のとき、表の出る回数は $n - r$ であるから

$$a_n = 3r + 2(n - r) = 2n + r$$

- (2) $a_0 = 0$, $a_k - a_{k-1} = 2 + \varepsilon_k$ (ε_k は 0 または 1) とおくと ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\sum_{k=1}^j (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^j (2 + \varepsilon_k) \quad \text{ゆえに} \quad a_j = 2j + \sum_{k=1}^j \varepsilon_k \quad (\text{A})$$

$$(j = 0, 1, \dots, n)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j &= 2 \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \varepsilon_k \\ &= n(n+1) + \sum_{j=1}^n (n+1-j) \varepsilon_j \end{aligned} \quad (\text{B})$$

$$j = 4 \text{ を (A) に代入すると, } a_4 = 8 + \sum_{k=1}^4 \varepsilon_k$$

$n = 4$ のとき 得点が 0 でないのは, $a_4 = 2 \cdot 4 + 2 = 10$ であるから

$$8 + \sum_{k=1}^4 \varepsilon_k = 10 \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^4 \varepsilon_k = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

上の第 2 式から, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ の組の総数は ${}_4C_2$ (通り)

$$\text{よって, 得点が 0 でない確率は} \quad {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

$$\sum_{j=1}^4 a_j = 25 \text{ のとき} \quad 4 \cdot 5 + 4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 25$$

$$\text{したがって} \quad 4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)$$

$$\text{よって, 求める確率は} \quad 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

(3) 得点が0でないとき, (A) から

$$2n + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k = 2n + 2 \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n \varepsilon_k = 2 \quad (*)$$

このときの得点は, (B) である. これに $n = 9$, $\sum_{j=1}^9 a_j = 100$ を適用して

$$9\varepsilon_1 + 8\varepsilon_2 + 7\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4 + 5\varepsilon_5 + 4\varepsilon_6 + 3\varepsilon_7 + 2\varepsilon_8 + \varepsilon_9 = 10 \quad (**)$$

(*), (**) を満たす $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_9)$ を同時に満たすのは次の4組.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_9 = 1, \quad a_j = 0 \quad (j \neq 1, 9)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_8 = 1, \quad a_j = 0 \quad (j \neq 2, 8)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_7 = 1, \quad a_j = 0 \quad (j \neq 3, 7)$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_6 = 1, \quad a_j = 0 \quad (j \neq 4, 6)$$

よって, 得点が100である確率は $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{128}$

また, (B) は法2について

$$n(n+1) + \sum_{j=1}^n (n+1-j)\varepsilon_j \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_7 + \varepsilon_9 \pmod{2}$$

これが奇数であるとき, $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_9$ の1つだけが1で他が0, 同時に $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6, \varepsilon_8$ の1つだけが1で他が0である確率であるから

$$5 \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{5}{128}$$

■

第 6 章 京都大学

出題分野 (2011-2024) 120 分

◀	京都大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	数と式														
	2 次関数			1						2					3
	図形と計量		2			2							5		
	データの分析														
II	式と証明					5				1・5		1			
	複素数と方程式				1		5								
	図形と方程式									3			4		
	三角関数		5					4						3	
	指数関数と対数関数	5			4			2		1			1	1	4
	微分法と積分法	34	1・3	4	2	1	1	1	1・2		1・2	2	3	5	5
A	場合の数と確率	1	1	5		3	2	5	5	4	5	3		1	2
	整数の性質			3			3		3		3	5			
	図形の性質		4						4						
B	平面上のベクトル			2								1			
	空間のベクトル	2			3	4	4	3			4	4		2	1
	数列												2	4	
	確率分布と統計				5										

数字は問題番号

6.11 2011年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ.

(1) 辺 AB, 辺 BC, 辺 CA の長さがそれぞれ 12, 11, 10 の三角形 ABC を考える. $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とするとき, 線分 AD の長さを求めよ.

(2) 箱の中に, 1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている. ただし, 異なるカードには異なる番号が書かれているものとする. この箱から 2 枚のカードを同時に選び, 小さいほうの数を X とする. これらのカードを箱に戻して, 再び 2 枚のカードを同時に選び, 小さいほうの数を Y とする. $X = Y$ である確率を求めよ.

2 四面体 OABC において, 点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする. $\vec{OA} \perp \vec{BC}$, $\vec{OB} \perp \vec{OC}$, $|\vec{OA}| = 2$, $|\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 3$, $|\vec{AB}| = \sqrt{7}$ のとき, $|\vec{OH}|$ を求めよ.

3 実数 a が変化するとき, 3 次関数 $y = x^3 - 4x^2 + 6x$ と直線 $y = x + a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか. a の値によって分類せよ.

4 xy 平面上で, 連立不等式

$$\begin{cases} |x| \leq 2, \\ y \geq x, \\ y \leq \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2 \end{cases}$$

を満たす領域の面積を求めよ.

5 0 以上の整数を 10 進法で表すとき, 次の問いに答えよ. ただし, 0 は 0 桁の数と考えることにする. また n は正の整数とする.

(1) 各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える. それらすべての整数の総和を T_n とする. T_n を n を用いて表せ.

(2) 各桁の数が 0, 1, 2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える. それらすべての整数の総和を S_n とする. S_n が T_n の 15 倍以上になるのは, n がいくつ以上のときか. 必要があれば, $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ および $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ を用いてもよい.

解答例

- 1 (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\cos B = \frac{12^2 + 11^2 - 10^2}{2 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{5}{8}$$

AD は $\angle A$ の 2 等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 6 : 5$$

$$\text{ゆえに } BD = \frac{6}{6+5} BC = \frac{6}{11} \cdot 11 = 6$$

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cos B \\ &= 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{5}{8} = 90 \end{aligned}$$

$$AD > 0 \text{ であるから } AD = 3\sqrt{10}$$

補足 $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

$$(2) 1 \leq k \leq 8 \text{ とすると } P(X \geq k) = \frac{{}_{9-k+1}C_2}{{}_9C_2} = \frac{{}_{10-k}C_2}{{}_9C_2} = \frac{(10-k)(9-k)}{72}$$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \geq k) - P(X \geq k+1) \\ &= \frac{(10-k)(9-k)}{72} - \frac{(9-k)(8-k)}{72} = \frac{9-k}{36} \end{aligned}$$

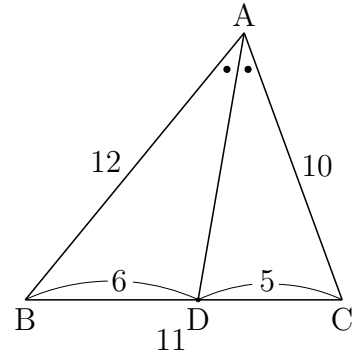
したがって、 $X = Y$ である確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{9-k}{36} \right)^2 &= \frac{1}{36^2} \sum_{k=1}^8 (9-k)^2 = \frac{1}{36^2} \sum_{k=1}^8 k^2 \\ &= \frac{1}{36^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 = \frac{17}{108} \end{aligned}$$

別解 9 枚のカードから 2 枚を同時に選ぶ総数は ${}_9C_2 = 36$ (通り)

小さいほうの数を k とすると ($1 \leq k \leq 8$)、大きいほうの数は $k+1$ から 9 までの $9-k$ 通りあるから

$$P(X = k) = \frac{9-k}{36}$$



2 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく. $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$ より

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$|\overrightarrow{OA}| = 2, \quad |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 3 \text{ より } |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = |\vec{c}| = 3$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7} \text{ より, } |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 7 \text{ であるから } |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 7$$

$$\text{ゆえに } 3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 7 \quad \text{すなわち} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 3$$

$$\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \text{ とおくと } x + y + z = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH} \text{ より } \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2)x + (|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})y + (\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a})z \\ &= -x + 6y - 3z = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{OH} \text{ より } \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OH} &= (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \\ &= (\vec{c} \cdot \vec{a} - |\vec{a}|^2)x + (\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b})y + (|\vec{c}|^2 - \vec{c} \cdot \vec{a})z \\ &= -x - 3y + 6z = 0 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ を解いて } x = \frac{3}{5}, \quad y = z = \frac{1}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OH} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\begin{aligned} |3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 &= 9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 6\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 9 \cdot 2^2 + 3^2 + 3^2 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 3 = 90 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad |\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{5}|3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \frac{1}{5}\sqrt{90} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

別解 O を通り, 平面 OBC に垂直な直線を ℓ とする. $\overrightarrow{OA}$ が $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, ℓ となす角をそれぞれ α , β , γ とすると, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ であるから

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{四面体 OABC の体積 } V \text{ は } V = \frac{1}{3} \triangle OBC \cdot OA |\cos \gamma| = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{また } |\overrightarrow{AB}|^2 = 7, \quad |\overrightarrow{AC}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 = 7$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 = -2$$

$$\text{ゆえに } \triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{7 \cdot 7 - (-2)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \triangle ABC |\overrightarrow{OH}| \text{ より } \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} |\overrightarrow{OH}| \quad \text{よって} \quad |\overrightarrow{OH}| = \frac{3\sqrt{10}}{5} \quad \blacksquare$$

- 3 求める交点の個数は, 3 次関数 $y = x^3 - 4x^2 + 5x$ と直線 $y = a$ のグラフの交点の個数に一致する. $y = x^3 - 4x^2 + 5x$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 8x + 5 = (x - 1)(3x - 5)$$

この関数の増減表は, 次のようになる.

x	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{5}{3}$	$\dots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

よって, 求める共有点の個数は

$$\begin{cases} a < \frac{50}{27}, 2 < a \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = \frac{50}{27}, 2 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ \frac{50}{27} < a < 2 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$



4 求める領域の面積は、領域

$$(*) \begin{cases} |x| \leq 2, \\ y \geq x+2, \\ y \leq \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| \end{cases}$$

の面積に等しい. (*) の第1式から $-2 \leq x \leq 2$

このとき, $\frac{3}{4}x^2 - 3 = \frac{3}{4}(x^2 - 4) \leq 0$ であるから

$$y \leq \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| = -\frac{3}{4}x^2 + 3$$

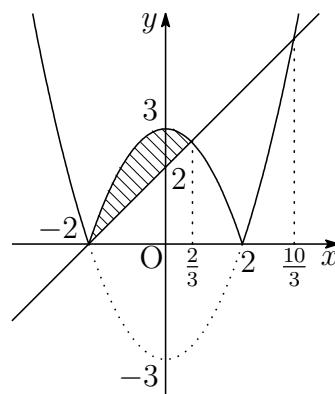
$y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ と $y = x + 2$ の交点の x 座標は

$$-\frac{3}{4}x^2 + 3 = x + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(3x-2) = 0$$

$-2 \leq x \leq 2$ に注意してこれを解くと $x = -2, \frac{2}{3}$

したがって、図の斜線部分が求める面積で、その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{\frac{2}{3}} \left\{ -\frac{3}{4}x^2 + 3 - (x+2) \right\} dx \\ &= -\frac{3}{4} \int_{-2}^{\frac{2}{3}} (x+2) \left(x - \frac{2}{3} \right) dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} + 2 \right)^3 = \frac{64}{27} \end{aligned}$$



■

- 5 (1) 各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数の個数は 2^n

したがって、各桁の数の和は $2^n \cdot \frac{1+2}{2} = 3 \cdot 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad T_n &= 3 \cdot 2^{n-1} \sum_{k=1}^n 10^{k-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} \\ &= \frac{2^{n-1}(10^n - 1)}{3} \end{aligned}$$

- (2) 各桁の数が 0, 1, 2 である n 桁以下の整数の個数は 3^n

したがって、各桁の数の和は $3^n \cdot \frac{0+1+2}{3} = 3^n$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S_n &= 3^n \sum_{k=1}^n 10^{k-1} = 3^n \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} \\ &= 3^{n-2}(10^n - 1) \end{aligned}$$

これと (1) の結果により $\frac{S_n}{T_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

S_n が T_n の 15 倍以上となるとき $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geq 15$

両辺の常用対数をとると $(n-1) \log_{10} \frac{3}{2} \geq 1 + \log_{10} \frac{3}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$

$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$, $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ であるから

$\log_{10} \frac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$ より

$$\frac{1}{6} < 0.175 < \log_{10} \frac{3}{2} < 0.177 < \frac{1}{5} \quad \text{ゆえに} \quad 5 < \frac{1}{\log_{10} \frac{3}{2}} < 6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① より $n-1 \geq \frac{1}{\log_{10} \frac{3}{2}} + 1$ ゆえに $n \geq \frac{1}{\log_{10} \frac{3}{2}} + 2$

② より、上式を満たすのは n が 8 以上のときである. ■

6.12 2012年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ.

- (1) 2つの曲線 $y = x^4$ と $y = x^2 + 2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ.
- (2) n を3以上の整数とする. 1から n までの番号をつけた n 枚の札の組が2つある. これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて, 札を1枚ずつ3回取り出し, 取り出した順にその番号を X_1, X_2, X_3 とする. $X_1 < X_2 < X_3$ となる確率を求めよ. ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする.

2 正四面体 $OABC$ において, 点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる. ただし P, Q, R は四面体 $OABC$ の頂点とは異なるとする. $\triangle PQR$ が正三角形ならば, 3辺 PQ, QR, RP はそれぞれ3辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ.

3 実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

4 次の命題 $(p), (q)$ のそれぞれについて, 正しいかどうかを答えよ. 正しい場合は証明し, 正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ.

- (p) 正 n 角形の頂点から3点を選んで内角の1つが 60° である三角形を作ることができるならば, n は3の倍数である.
- (q) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において, $AB = A'B', BC = B'C', \angle A = \angle A'$ ならば, これらの2つの三角形は合同である.

5 次の条件 $(*)$ を満たす正の実数の組 (a, b) の範囲を求め, 座標平面上に図示せよ.

$(*) \cos a\theta = \cos b\theta$ かつ $0 < \theta \leq \pi$ となる θ がちょうど1つある.

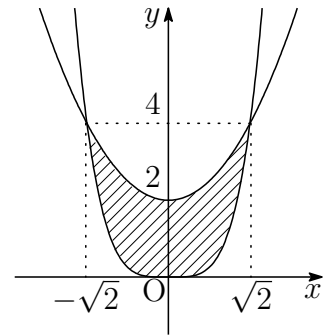
解答例

- 1 (1) $y = x^4$ と $y = x^2 + 2$ から y を消去すると

$$x^4 = x^2 + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x^2 + 1)(x^2 - 2) = 0$$

交点の x 座標は $x = \pm\sqrt{2}$

求める面積は、右の図の斜線部分であるから



$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\sqrt{2}} \{(x^2 + 2) - x^4\} dx \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{56}{15} \sqrt{2} \end{aligned}$$

- (2) $2n$ 枚の札を区別すると、 $2n$ 枚の札から 1 枚ずつ 3 回取り出す順列の総数は

$${}_ {2n} P_3 = 2n(2n-1)(2n-2) = 4n(n-1)(2n-1)$$

$X_1 < X_2 < X_3$ となる場合の総数は、それぞれの数に同じ札が 2 枚ずつあるから

$${}_n C_3 \cdot 2^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3} n(n-1)(n-2) \quad (\text{通り})$$

よって、求める確率は

$$\frac{\frac{4}{3} n(n-1)(n-2)}{4n(n-1)(2n-1)} = \frac{n-2}{3(2n-1)} \quad (\text{通り})$$

補足 $2n$ 枚の札を区別すると、 $X_1 < X_2 < X_3$, $X_1 < X_3 < X_2$, $X_2 < X_1 < X_3$, $X_2 < X_3 < X_1$, $X_3 < X_1 < X_2$, $X_3 < X_2 < X_1$ となる場合の総数は、すべて

$$\frac{4}{3} n(n-1)(n-2) \quad (\text{通り})$$

$2n$ 枚の札を区別すると、 $X_1 = X_2$, $X_1 = X_3$, $X_2 = X_3$ となる場合の総数は、すべて

$$4n(n-1) \quad (\text{通り})$$

したがって

$$4n(n-1)(2n-1) = 6 \times \frac{4}{3} n(n-1)(n-2) + 3 \times 4n(n-1)$$

■

- 2 $p = OP$, $q = OQ$, $r = OR$ とおき, $\triangle OPQ$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} PQ^2 &= p^2 + q^2 - 2pq \cos 60^\circ \\ &= p^2 + q^2 - pq \end{aligned}$$

同様に, $\triangle OQR$, $\triangle ORP$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} QR^2 &= q^2 + r^2 - qr, \\ RP^2 &= r^2 + p^2 - rp \end{aligned}$$

$PQ = QR$ であるから

$$p^2 + q^2 - pq = q^2 + r^2 - qr \quad \text{ゆえに} \quad (p-r)(p-q+r) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $QR = RP$ であるから $(q-p)(q-r+p) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

①において, $r \neq p$ とすると, $q = p + r$ となり, これを ② に代入すると

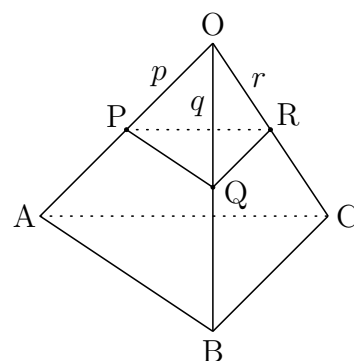
$$(p+r-p)(p+r-r+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad pr = 0$$

このとき, $p = 0$ または $r = 0$ となり, 不適. したがって $r = p$

$r = p$ を ② に代入すると $q(q-p) = 0$ すなわち $p = q$

$p = q = r$ であるから $OA : OP = OB : OQ = OC : OR$

よって, 3 辺 PQ , QR , RP はそれぞれ 3 辺 AB , BC , CA に平行である. ■



3 $x + y = t$ とおくと, 条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ より

$$xy = (x + y)^2 - (x^2 + xy + y^2) = t^2 - 6$$

x, y を解とする λ に関する 2 次方程式は

$$\lambda^2 - t\lambda + t^2 - 6 = 0$$

この方程式は, 実数解をもつから, 係数について

$$(-t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (t^2 - 6) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 8 \leq 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y &= xy(x + y) - (x + y)^2 + (x + y) \\ &= (t^2 - 6)t - t^2 + t \\ &= t^3 - t^2 - 5t \end{aligned}$$

$f(t) = t^3 - t^2 - 5t$ ($-2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2}$) とおくと

$$f'(t) = 3t^2 - 2t - 5 = (t + 1)(3t - 5)$$

t	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$f(-2\sqrt{2}) = -8 - 6\sqrt{2} = -8 - \sqrt{72} < -16$$

$$f(-1) = 3$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{175}{27} > -7$$

$$f(2\sqrt{2}) = -8 + 6\sqrt{2} = -8 + \sqrt{72} < 1$$

よって, 求める値 $f(t)$ のとりうる値は $-8 - 6\sqrt{2} \leq f(t) \leq 3$ ■

- 4 (p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る最小の内角は $\frac{180^\circ}{n}$

したがって、正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る内角は

$$\frac{180^\circ}{n} \times k \quad (k \text{ は自然数})$$

条件を満たすとき $\frac{180^\circ}{n} \times k = 60^\circ$ ゆえに $n = 3k$

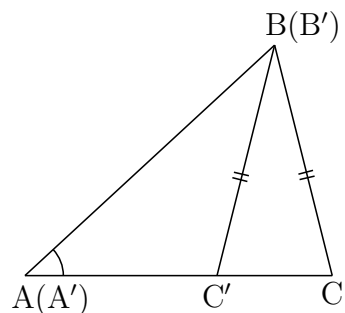
上式から、 n は 3 の倍数である。よって、本命題は真である。

- (q) 右の図のように、 $C \neq 90^\circ$ の $\triangle ABC$ について、直線 AC 上に $BC = BC'$ をみたす異なる 2 点 C, C' がとれる。

このとき、 $A' = A, B' = B$ とすると

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad \angle A = \angle A'$$

一方、 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は合同ではない。
よって、本命題は偽である。



- 5 $\cos a\theta = \cos b\theta \cdots (*)$ は、 $a = b$ のとき、 $(*)$ を満たす θ が無数にあるので不適。

(*) より
$$\sin \frac{a+b}{2}\theta \sin \frac{a-b}{2}\theta = 0$$

$a > 0, b > 0, a \neq b$ であるから、 k, l を自然数とすると

$$\frac{a+b}{2}\theta = k\pi \quad \text{または} \quad \frac{|a-b|}{2}\theta = l\pi$$

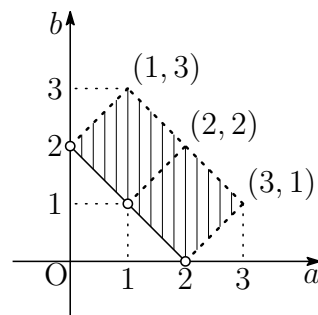
したがって
$$\theta = \frac{2k}{a+b}\pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{2l}{|a-b|}\pi$$

(*) を満たす θ ($0 < \theta \leq \pi$) がちょうど 1 つであるから

$$\frac{2}{a+b}\pi \leq \pi < \frac{4}{a+b}\pi, \quad \pi < \frac{2}{|a-b|}\pi$$

すなわち $0 < |a-b| < 2 \leq a+b < 4$

よって、求める領域は、右の図の斜線部分で、境界は実線を含み、点線および白丸は含まない。



6.13 2013 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 a を 2 以上の実数とし, $f(x) = (x+a)(x+2)$ とする. このとき $f(f(x)) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ.

2 平行四辺形 ABCD において, 辺 AB を 1:1 に内分する点を E, 辺 BC を 2:1 に内分する点を F, 辺 CD を 3:1 に内分する点を G とする. 線分 CE と線分 FG の交点を P とし, 線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき, 比 AP:PQ を求めよ.

3 n と k を自然数とし, 整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする.

(1) a と b は整数であることを示せ.

(2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ.

4 α, β を実数とする. xy 平面内で, 点 $(0, 3)$ を中心とする円 C と放物線

$$y = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$$

が点 $P(\sqrt{3}, 0)$ を共有し, さらに P における接線が一致している. このとき以下の問に答えよ.

(1) α, β の値を求めよ.

(2) 円 C , 放物線 $y = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

5 投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する. 数直線上に石を置き, この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し, 裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する.

(1) 石が座標 x の点にあるとする. 2 回硬貨を投げたとき, 石が座標 x の点にある確率を求めよ.

(2) 石が原点にあるとする. n を自然数とし, $2n$ 回硬貨を投げたとき, 石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ.

解答例

- 1 (i) 関数 $f(x)$ の最小値が -2 以下であるとき,
 $f(c) = -2$ を満たす実数 c が存在するから $f(f(c)) = f(-2) = 0$
 これは条件に反する.
- (ii) 関数 $f(x)$ の最小値が -2 より大きいとき,
 すべての実数 x に対して, $f(x) > -2$ であるから $f(f(x)) > 0$
 これは条件を満たす.

(i),(ii) より, $f(x)$ の最小値が -2 より大きい,
 すなわち, $f(x) = -2$ は実数解をもたない.

$$(x+a)(x+2) = -2$$

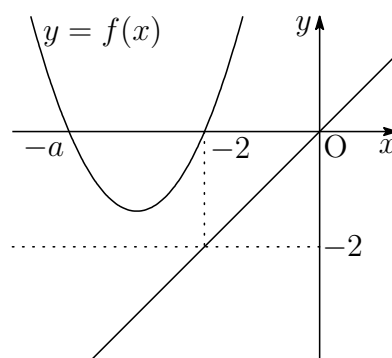
整理すると

$$x^2 + (a+2)x + 2a+2 = 0$$

したがって, 係数について

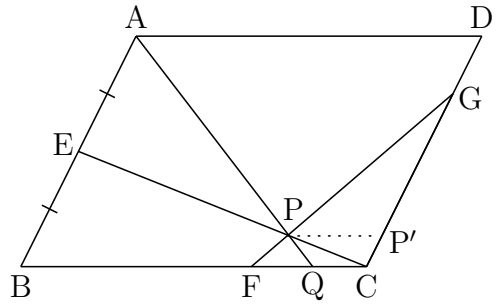
$$(a+2)^2 - 4 \cdot 1(2a+2) < 0$$

$a \geq 2$ に注意してこれを解くと $2 \leq a < 2 + 2\sqrt{2}$ ■



2 $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CD}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} \\ &= 3\overrightarrow{CF} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\overrightarrow{CG} \\ &= \frac{11}{3} \left(\frac{9}{11}\overrightarrow{CF} + \frac{2}{11}\overrightarrow{CG} \right)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{したがって } \overrightarrow{CP} &= \frac{9}{11}\overrightarrow{CF} + \frac{2}{11}\overrightarrow{CG} \\ &= \frac{9}{11} \cdot \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{4}\vec{d} = \frac{3}{11}\vec{b} + \frac{3}{22}\vec{d}\end{aligned}$$

点 P を通り, BC に平行な直線と辺 CD との交点を P' とすると

$$\overrightarrow{CP'} = \frac{3}{22}\vec{d} \quad \text{ゆえに} \quad DP' = P'C = 19 : 3$$

よって $AP : PQ = DP' : P'C = 19 : 3$

補足 $\overrightarrow{CE} = \frac{11}{3}\overrightarrow{CP}$ であるから, 2 直線 AD, CE の交点を A' とすると

$$\overrightarrow{CA'} = 2\overrightarrow{CE} = \frac{22}{3}\overrightarrow{CP} \quad \text{ゆえに} \quad A'P : PC = 19 : 3$$

よって $AP : PQ = A'P : PC = 19 : 3$

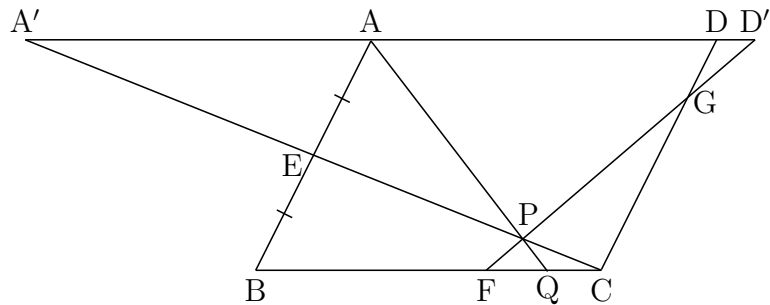
別解 2 直線 AD, CE の交点を A' とし, 2 直線 AD, FG の交点を D' とする.

$\triangle GDD' \sim \triangle GCF$, $GD : GC = 1 : 3$ より $DD' : CF = 1 : 3$

また, $CF : AD = 1 : 3$ より $DD' : AD = 1 : 9$

$A'A = AD$ であるから $DD' : A'D' = 1 : 19$ ゆえに $A'D' : CF = 19 : 3$

$\triangle PA'D' \sim \triangle PCF$ であるから $AP : PQ = 19 : 3$



- 3** (1) x^n を $(x-k)(x-k-1)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$x^n = (x-k)(x-k-1)Q(x) + ax + b$$

上式に $x = k, k+1$ を代入すると

$$\begin{cases} k^n = ak + b & \cdots \textcircled{1} \\ (k+1)^n = a(k+1) + b & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より } a = (k+1)^n - k^n$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入すると } k^n = \{(k+1)^n - k^n\}k + b$$

$$\text{したがって } b = (k+1)k^n - k(k+1)^n$$

k は自然数であるから, a, b は整数である.

- (2) $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$ を満たす素数 p が存在すると仮定すると, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より

$$k^n \equiv 0, \quad (k+1)^n \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad k \equiv 0, \quad k+1 \equiv 0 \pmod{p}$$

このとき, $1 \equiv 0 \pmod{p}$ となり, 矛盾を生じる.

よって, a と b をともに割り切る素数 p は存在しない. ■

4 (1) $f(x) = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$ とすると $f'(x) = -\frac{2}{3}x + \alpha$

条件により, $f(\sqrt{3}) = 0$, $f'(\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$-1 + \sqrt{3}\alpha - \beta = 0, \quad -\frac{2}{3}\sqrt{3} + \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

これを解いて $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 2$

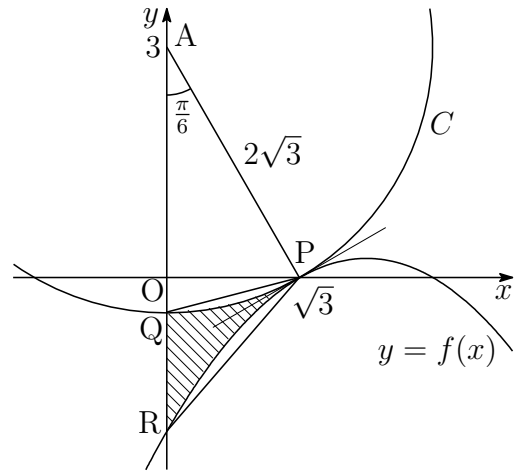
- (2) 点 $(0, \sqrt{3})$ を A とし, 円 C, 放物線 $y = f(x)$ の y 軸との交点をそれぞれ Q, R とすると

$$AP = 2\sqrt{3}, \quad \angle PAQ = \frac{\pi}{6}$$

$$Q(0, 3 - 2\sqrt{3}), \quad R(0, -2)$$

$$OP = \sqrt{3}, \quad QR = 5 - 2\sqrt{3} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \frac{1}{2} QR \cdot OP \\ &= \frac{1}{2} (5 - 2\sqrt{3}) \sqrt{3} \\ &= \frac{5}{2} \sqrt{3} - 3 \end{aligned}$$



線分 PQ と円 C で囲まれた A を含まない方の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2} (2\sqrt{3})^2 \left(\frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \right) = \pi - 3$$

線分 PR と放物線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} (\sqrt{3})^3 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle PQR - S_1 - S_2 \\ &= \frac{5}{2} \sqrt{3} - 3 - (\pi - 3) - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{7}{3} \sqrt{3} - \pi \end{aligned}$$



- 5 (1) 座標 x にあるとき、硬貨の表と裏により、それぞれ $-x$ と $2-x$ に移動するので

$$f(x) = -x, \quad g(x) = 2 - x$$

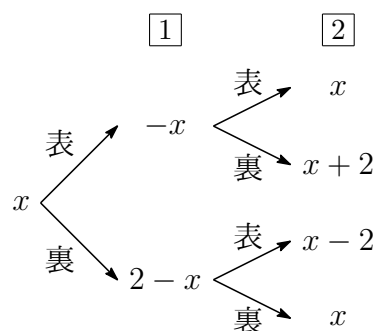
とおくと、2回の試行による石の座標は次のようになる.

$$\text{表表のとき} \quad f(f(x)) = x$$

$$\text{表裏のとき} \quad g(f(x)) = x + 2$$

$$\text{裏表のとき} \quad f(g(x)) = x - 2$$

$$\text{裏裏のとき} \quad g(g(x)) = x$$



$$\text{よって、求める確率は} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

- (2) (1)の結果から、2回硬貨を投げる試行を T とすると、この試行により、石の座標の増減が $+2$, 0 , -2 となる3つの事象があり、それぞれの確率は $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ である. 硬貨を $2n$ 回投げる、すなわち、試行 T を n 回行ったとき、石の座標が $2n$ だけ増加するのは、

$$+2 \times n = 2n$$

これにより、増減が $+2$ である事象が n 回である. よって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2^{2n}}$$

■

6.14 2014 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ とする. x についての 4 次方程式

$$\{x^2 - 2(\cos \theta)x - \cos \theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan \theta)x + 3\} = 0$$

は虚数解を少なくとも 1 つ持つことを示せ.

2 t を実数とする. $y = x^3 - x$ のグラフ C へ点 $P(1, t)$ から接線を引く.

- (1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ.
- (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき, $P(1, t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする. $S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ.

3 座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える.

l は点 $A(1, 0, -2)$ を通り, ベクトル $\vec{u} = (2, 1, -1)$ に平行な直線である.

m は点 $B(1, 2, -3)$ を通り, ベクトル $\vec{v} = (1, -1, 1)$ に平行な直線である.

n は点 $C(1, -1, 0)$ を通り, ベクトル $\vec{w} = (1, 2, 1)$ に平行な直線である.

P を l 上の点として, P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする. このとき, $PQ^2 + PR^2$ を最小にするような P と, そのときの $PQ^2 + PR^2$ を求めよ,

4 次の式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (2) 次の不等式

$$a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ. ただし, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい.

5 1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり, それぞれの目が出る確率は等しいものとする. A, B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ一回ずつ投げ, 大きな目を出した方はその目を得点とし, 小さな目を出した方は得点を 0 とする. また同じ目が出た場合は, A, B ともに得点を 0 とする. このとき, A の得点の期待値を求めよ.

解答例

1 2つの2次方程式

$$x^2 - 2(\cos \theta)x - \cos \theta + 1 = 0, \quad x^2 + 2(\tan \theta)x + 3 = 0$$

の判別式を, それぞれ D_1 , D_2 とすると

$$\begin{aligned} D_1/4 &= \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 \\ &= \left(\cos \theta - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(\cos \theta - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right), \\ D_2/4 &= \tan^2 \theta - 3 \\ &= (\tan \theta + \sqrt{3})(\tan \theta - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$2 < \sqrt{5} < 3$ より $\frac{1}{2} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$ であるから, α を次のように定める.

$$\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (0^\circ < \alpha < 60^\circ)$$

したがって, D_1 , D_2 の符号は次のようになる.

θ	0°	$\dots$	α	$\dots$	60°	$\dots$	(90°)
D_1	+	+	0	-	-	-	
D_2	-	-	-	-	0	+	

$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ において, D_1 , D_2 の少なくとも一方が負であるから, 与えられた4次方程式は, 虚数解を少なくとも1つ持つ. ■

- 2 (1) $C: y = x^3 - x$ より $y' = 3x^2 - 1$

C 上の点 $A(s, s^3 - s)$ における接線の方程式は

$$y - (s^3 - s) = (3s^2 - 1)(x - s) \quad \text{すなわち} \quad y = (3s^2 - 1)x - 2s^3$$

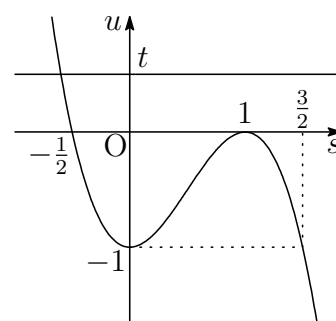
この接線が点 $P(1, t)$ を通るとき $t = -2s^3 + 3s^2 - 1 \quad \dots (*)$

$f(s) = -2s^3 + 3s^2 - 1$ とおくと

$$f'(s) = -6s^2 + 6s = -6s(s - 1)$$

$f(s)$ の増減表は次のようになる.

s	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$
$f'(s)$	$-$	0	$+$	0	$\dots$
$f(s)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$



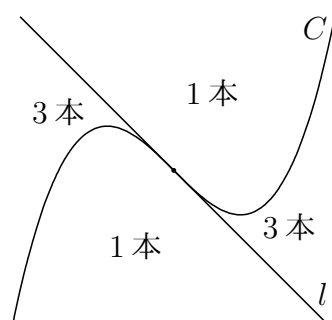
実数 t に対し, 方程式 $(*)$ の実数解 s がただ 1 つだけであるとき, $u = f(s)$ のグラフと直線 $u = t$ の共有点がただ 1 つである.

よって, 求める t の値の範囲は $t < -1, 0 < t$

補足 3 次関数のグラフ C 上の変曲点 ($y'' = 0$) における接線 l とそのグラフにより, P から引ける接線の本数は右の図のようになる. P が変曲点を除く C および l 上にあるとき 2 本, 変曲点では l のみの 1 本である.

本題では, 変曲点 $(0, 0)$, $l: y = -x$.

直線 $x = 1$ と C および l の共有点は, それぞれ $(1, 0)$, $(1, -1)$



- (2) $C: y = x^3 - x$ と C 上の点 $A(s, s^3 - s)$ における接線 $y = (3s^2 - 1)x - 2s^3$ の方程式より

$$x^3 - x - \{(3s^2 - 1)x - 2s^3\} = (x - s)^2(x + 2s)$$

点 A 以外の共有点の x 座標は $-2s$ であるから, 求める面積 $S(t)$ は¹

$$S(t) = \frac{1}{12} \{s - (-2s)\}^4 = \frac{27}{4} s^4$$

(1) で示したグラフから, $t < -1, 0 < t$ のとき $s < -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} < s$

したがって $s^4 > \frac{1}{16}$ よって $S(t) > \frac{27}{64}$

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> の [1] を参照.

3 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと, 実数 r, s, t を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + r\vec{u}, \quad \overrightarrow{OQ} = \vec{b} + s\vec{v}, \quad \overrightarrow{OR} = \vec{c} + t\vec{w}$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{PQ} = \vec{b} - \vec{a} + s\vec{v} - r\vec{u}, \quad \overrightarrow{PR} = \vec{c} - \vec{a} + t\vec{w} - r\vec{u}$$

$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$, $\overrightarrow{PR} \perp \vec{w}$ より, $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$, $\overrightarrow{PR} \cdot \vec{w} = 0$ であるから

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{v} + s|\vec{v}|^2 - r\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \quad (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{w} + t|\vec{w}|^2 - r\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\text{ここで} \quad \vec{b} - \vec{a} = (0, 2, -1), \quad \vec{c} - \vec{a} = (0, -1, 2),$$

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{v} = -3, \quad (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{w} = 0,$$

$$|\vec{v}|^2 = 3, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \quad |\vec{w}|^2 = 6, \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 3$$

$$\text{したがって} \quad -3 + 3s = 0, \quad 6t - 3r = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = 1, \quad r = 2t$$

$$\overrightarrow{PQ} = (\vec{b} - \vec{a}) + \vec{v} - 2t\vec{u}$$

$$= (0, 2, -1) + (1, -1, 1) - 2t(2, 1, -1)$$

$$= (1 - 4t, 1 - 2t, 2t),$$

$$\overrightarrow{PR} = \vec{c} - \vec{a} + t\vec{w} - 2t\vec{u}$$

$$= (0, -1, 2) + t(1, 2, 1) - 2t(2, 1, -1)$$

$$= (-3t, -1, 2 + 3t),$$

$$PQ^2 + PR^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{PR}|^2$$

$$= (1 - 4t)^2 + (1 - 2t)^2 + (2t)^2 + (-3t)^2 + (-1)^2 + (2 + 3t)^2$$

$$= 42t^2 + 7$$

$PQ^2 + PR^2$ は, $t = 0$ のとき最小値 7 をとる.

このとき, $r = 0$ より, $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$, すなわち, $P(1, 0, -2)$ ■

4 (1) $a_{n+1} = 2a_n - 1$ より $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$

数列 $\{a_n - 1\}$ は公比 2 の等比数列であるから

$$a_n - 1 = 2^{n-1}(a_1 - 1) \quad \text{すなわち} \quad a_n = 1 + 2^{n-1}$$

(2) $a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$ より $(a_n - 1)^2 > 10^{15} + 1$

これに (1) の結果を代入すると $2^{2n-2} > 10^{15} + 1$

上式において $n > 1$ であるから, 上式の左辺は偶数, 右辺は奇数により

$$2^{2n-2} > 10^{15} \quad \dots (*)$$

を満たす最小の自然数を求めればよい.

(*) の両辺の常用対数をとると

$$(2n - 2) \log_{10} 2 > 15 \quad \text{ゆえに} \quad n > 1 + \frac{15}{2 \log_{10} 2} \quad \dots (**)$$

ここで, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より

$$\frac{15}{2 \times 0.3011} < \frac{15}{2 \log_{10} 2} < \frac{15}{2 \times 0.3010}$$

$$\text{ゆえに} \quad 24.90 < \frac{15}{2 \log_{10} 2} < 24.91$$

$$\text{したがって} \quad 25.90 < 1 + \frac{15}{2 \log_{10} 2} < 25.91$$

(**) より, 求める最小の自然数 n は $\mathbf{n = 26}$

$$\text{補足 } 0.3010 = \frac{3}{10} + \frac{1}{100} = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{1}{30}\right), \quad 0.3011 = \frac{3}{10} + \frac{11}{1000} = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{11}{300}\right)$$

$$\log_{10} 2 = \frac{3}{10}(1 + \varepsilon) \text{ とおくと, } \frac{1}{30} < \varepsilon < \frac{11}{300} \text{ であるから}$$

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 25 - 25\varepsilon < \frac{15}{2 \log_{10} 2} < 25$$

$$\frac{5}{6} < 25\varepsilon < \frac{11}{12} \text{ であるから} \quad 25 < 1 + \frac{15}{2 \log_{10} 2} < 26$$

なお, $1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1$ の精度を順次高めると

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &< \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \\ 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 &< \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \\ 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 &< \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

■

5 A の得点が k で, B の得点が $k - 1$ 以下である確率を $P(k)$ とすると

$$P(k) = \frac{1}{20} \cdot \frac{k-1}{20} = \frac{k-1}{20^2} \quad (2 \leq k \leq 20)$$

求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=2}^{20} k \cdot P(k) = \frac{1}{20^2} \sum_{k=2}^{20} k(k-1) = \frac{1}{20^2} \sum_{k=1}^{20} (k^2 - k) \\ &= \frac{1}{20^2} \left(\frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 \right) \\ &= \frac{21}{20} \left(\frac{41}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{21}{20} \cdot \frac{19}{3} = \frac{133}{20} \end{aligned}$$

■

6.15 2015 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

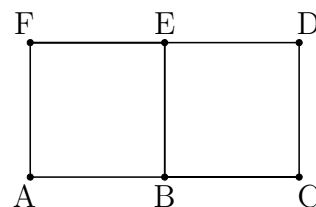
1 直線 $y = px + q$ が, $y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが, $y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフとは交わらないような (p, q) の範囲を図示し, その面積を求めよ.

2 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものを求めよ.

(a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である.

(b) 半径 1 の円が内接する. ただし, 円が四角形に内接するとは, 円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう.

3 6 個の点 A, B, C, D, E, F が右図のように長さ 1 の線分で結ばれているとする. 各線分をそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{2}$ で赤または黒で塗る. 赤く塗られた線分だけを通して点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする. そのような経路がない場合は X を 0 とする. このとき, $n = 0, 2, 4$ について, $X = n$ となる確率を求めよ.



4 xyz 空間の中で, $(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える. 点 Q が $(0, 0, 2)$ 以外の S 上の点を動くとき, 点 Q と点 $P(1, 0, 2)$ の 2 点を通る直線 ℓ と平面 $z = 0$ との交点を R とおく. R の動く範囲を求め, 図示せよ.

5 a, b, c, d, e を正の有理数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$g(x) = dx + e$$

を考える. すべての正の整数 n に対して $\frac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする. このとき, $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ.

解答例

1 $y = px + q$ と $y = x^2 - x$ から y を消去すると

$$px + q = x^2 - x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - (p+1)x - q = 0$$

判別式を D とすると, このとき, $D \geq 0$ であるから

$$(p+1)^2 + 4q \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad q \geq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

$y = |x| + |x-1| + 1$ は

$$y = \begin{cases} -2x+2 & (x < 0) \\ 2 & (0 \leq x < 1) \\ 2x & (1 \leq x) \end{cases}$$

$f(x) = px + q$ とおくと, 直線 $y = f(x)$ が上のグラフと共有点を持たないとき, 傾き p に注意して

$$-2 \leq p \leq 2$$

上のグラフから, $f(0) < 2$, $f(1) < 2$ であるから

$$q < 2, \quad p + q < 2$$

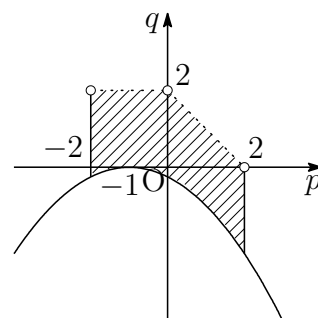
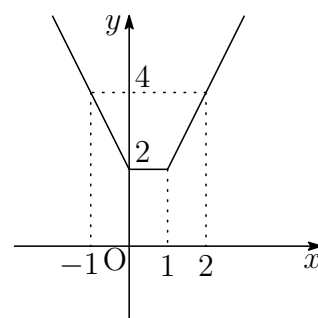
したがって, (p, q) の満たす領域は

$$-2 \leq p \leq 2, \quad q < 2, \quad q < -p + 2, \quad q \geq -\frac{1}{4}(p+1)^2$$

右の図の斜線分で, 点線および $\circ$ は除く.

よって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2+4) \cdot 2 + \int_{-2}^2 \frac{1}{4}(p+1)^2 dp \\ &= 6 + \left[\frac{1}{12}(p+1)^3 \right]_{-2}^2 = 6 + \frac{1}{12}(3^3 + 1) = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

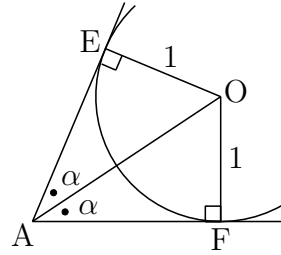


■

2 右の図の四角形 OEAF について

$$AE = AF = \frac{1}{\tan \alpha}$$

四角形 OEAF の面積は $\frac{1}{\tan \alpha}$



条件 (a), (b) を満たす四角形の 4 つの角の大きさを 2α , 2β , 2γ , 2δ とし, その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma} + \frac{1}{\tan \delta} \quad \cdots (*)$$

一般性を失うことなく $2\gamma = 2\delta = 90^\circ$, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$

上の 2 式から $\beta = 90^\circ - \alpha$, $\gamma = \delta = 45^\circ$

これらを (*) に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} + \frac{1}{\tan 45^\circ} + \frac{1}{\tan 45^\circ} \\ &= \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} + 2 = \frac{(\tan \alpha - 1)^2}{\tan \alpha} + 4 \geq 4 \end{aligned}$$

よって, S は $\alpha = 45^\circ$, すなわち, 四角形 ABCD が正方形のとき, 最小値 4

3 $X = 2$ となるのは, $A \rightarrow B \rightarrow E$ または $A \rightarrow F \rightarrow E$ の経路があるときで, それぞれの事象を R , S とすると

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$, $B \rightarrow E$ の経路がある事象をそれぞれ Y , Z とすると

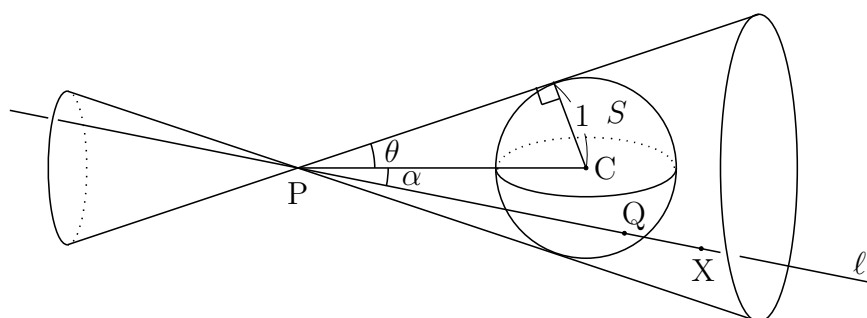
$$\begin{aligned} P(X = 4) &= P(Y \cap \bar{Z} \cap \bar{S}) = P(Y)P(\bar{Z})P(\bar{S}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \frac{3}{128} \end{aligned}$$

$P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) = 1$ であるから

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 1 - P(X = 2) - P(X = 4) \\ &= 1 - \frac{7}{16} - \frac{3}{128} = \frac{69}{128} \end{aligned}$$

- 4 球面 S の中心 $(0, 0, 1)$ を C とし, S に接する P を頂点とする円錐面の母線と PC のなす角を θ とする. 直線 ℓ 上の点を $X(x, y, z)$ とし, PC と PX のなす角を α とすると

$$0 \leq \alpha \leq \theta, \quad \pi - \theta \leq \alpha \leq \pi \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \alpha \geq \cos^2 \theta$$



$$P(1, 0, 2), C(0, 0, 1) \text{ より } PC = \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\vec{PC} = (-1, 0, -1), \quad \vec{PX} = (x-1, y, z-2), \quad \frac{\vec{PC} \cdot \vec{PX}}{|\vec{PC}| |\vec{PX}|} = \cos \alpha \text{ より}$$

$$\frac{3-x-z}{\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2}} = \cos \alpha$$

$$\text{したがって} \quad \frac{(3-x-z)^2}{2\{(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2\}} = \cos^2 \alpha \geq \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

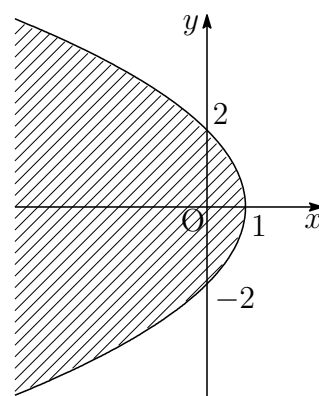
$$\text{ゆえに} \quad (3-x-z)^2 - \{(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2\} \geq 0$$

この図形の xy 平面 ($z=0$) 上の領域は

$$(3-x)^2 - \{(x-1)^2 + y^2 + (-2)^2\} \geq 0$$

$$\text{よって} \quad x \leq -\frac{1}{4}y^2 + 1$$

R の動く範囲は, 右の図の斜線部分で, 境界を含む.



別解 R(X, Y, 0) とおくと, Q は直線 PR 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= t\overrightarrow{OR} + (1-t)\overrightarrow{OP} \\ &= t(X, Y, 0) + (1-t)(1, 0, 2) \\ &= (tx + 1 - t, tY, 2 - 2t)\end{aligned}$$

また, Q は球面 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ 上の点であるから

$$\begin{aligned}\{t(X - 1) + 1\}^2 + (tY)^2 + (1 - 2t)^2 &= 1 \\ \{(X - 1)^2 + Y^2 + 4\}t^2 + 2(X - 3)t + 1 &= 0\end{aligned}$$

$t \neq 0$, $(X - 1)^2 + Y^2 + 4 \neq 0$ に注意して, 上式の t に関する係数について

$$(X - 3)^2 - \{(X - 1)^2 + Y^2 + 4\} \cdot 1 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad X \leq -\frac{1}{4}Y^2 + 1$$

よって, R の動く範囲は $x \leq -\frac{1}{4}y^2 + 1$ ■

5 $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $px + q$, 余りを $r \neq 0$ (p, q, r は有理数) とすると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = px + q + \frac{r}{g(x)}, \quad p = \frac{a}{d} > 0$$

したがって $\frac{f(n)}{g(n)} = pn + q + \frac{r}{g(n)}$

$p = \frac{A}{B}, q = \frac{C}{D}$ とおくと (A, B, C, D は整数)

$$\left| BD \cdot \frac{f(n)}{g(n)} - ADn - BC \right| = \left| \frac{rBD}{g(n)} \right| \quad \cdots (*)$$

$d > 0$ より, $g(n) = dn + e$ は十分大きな n に対し,

$$0 < \left| \frac{rBD}{g(n)} \right| < 1$$

となり, (*) の左辺が整数であることに反する.

よって, $r = 0$ となり, $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる. ■

6.16 2016年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 xy 平面内の領域

$$x^2 + y^2 \leq 2, \quad |x| \leq 1$$

で、曲線 $C: y = x^3 + x^2 - x$ の上側にある部分の面積を求めよ.

2 ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある. 「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする. この装置のボタンを 20 回押したとき、1 回以上「あたり」の出る確率は 36% である. 1 回以上「あたり」の出る確率が 90% 以上となるためには、このボタンを最低何回押せばよい. 必要なら $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい.

3 n を 4 以上の自然数とする. 数 2, 12, 1331 がすべて n 進法で表記されているとして、

$$2^{12} = 1331$$

が成り立っている. このとき n はいくつか. 十進法で答えよ.

4 四面体 OABC が次の条件を満たすならば、それは正四面体であることを示せ.

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る.

ただし、四面体のある頂点の対面とは、その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう.

5 実数を係数とする 3 次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に対し、次の条件を考える.

(イ) 方程式 $f(x) = 0$ の解であるすべての複素数 α に対し、 α^3 もまた $f(x) = 0$ の解である.

(ロ) 方程式 $f(x) = 0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ.

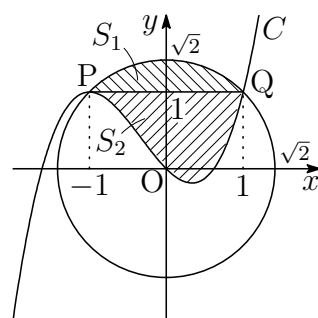
この 2 つの条件 (イ), (ロ) を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ.

解答例

1 $y = x^3 + x^2 - x$ を微分すると $(-1 \leq x \leq 1)$

$$y' = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

x	-1	...	$\frac{1}{3}$	...	1
y'		-	0	+	
y	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	1



曲線 C と円 $x^2 + y^2 = 2$ の交点を $P(-1, 1)$, $Q(1, 1)$ とし, 直線 PQ の上側で円の内部の面積を S_1 , $-1 \leq x \leq 1$ において, 直線 PQ と C で囲まれた部分の面積を S_2 とする. $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \triangle POQ = \frac{\pi}{2} - 1, \\ S_2 &= \int_{-1}^1 \{1 - (x^3 + x^2 - x)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x+1)^2(1-x) dx = \frac{1}{12} \{1 - (-1)\}^4 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{求める面積を } S \text{ とすると} \quad S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$$

補足 定積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる².



²<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> **1**

- 2** 「はずれ」が表示される確率を p とすると、ボタンを 20 回押したとき、1 回以上「あたり」が出る確率が 36% であるから

$$1 - p^{20} = \frac{36}{100} \quad \text{ゆえに} \quad p^{10} = \frac{8}{10} \quad \cdots \textcircled{1}$$

ボタンを n 回押したとき、「あたり」の出る確率が 90% 以上となるとき

$$1 - p^n \geq \frac{90}{100} \quad \text{ゆえに} \quad p^n \leq \frac{1}{10} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から p を消去すると

$$\left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{n}{10}} \leq \frac{1}{10} \quad \text{ゆえに} \quad n \geq \frac{10}{1 - 3\log 2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011 \quad \text{であるから} \quad \frac{967}{10000} < 1 - 3\log 2 < \frac{97}{1000}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{10000}{97} < \frac{10}{1 - 3\log 2} < \frac{100000}{967}$$

$$\text{ここで} \quad \frac{10000}{97} = 103 + \frac{9}{97}, \quad \frac{100000}{967} = 103 + \frac{399}{967}$$

よって、③ を満たす最小の自然数 n は **104** ■

- 3** $n \geq 4$ より、 n 進法で標記された数 2^{12} と 1331 が等しいから

$$2^{n+2} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{\frac{n+2}{3}} = n + 1 \quad \cdots (*)$$

ここで、指数関数 $y = 2^{\frac{x+2}{3}}$ のグラフと直線 $y = x + 1$ の交点は高々 2 個.

このとき、 $x + 2 \equiv 0 \pmod{3}$ に注意して、交点の x 座標を求めると

$$x = 1, 7$$

よって、(*) を満たす 4 以上の自然数 n は **7** ■

- 4 辺 CO の中点を M とし, $\triangle OBC$, $\triangle OAC$ の重心をそれぞれ G, H とする.

AG は平面 OBC と垂直であるから, $AG \perp CO$.

BH は平面 OAC と垂直であるから, $BH \perp CO$.

ゆえに, CO は平面 ABM と垂直である.

したがって $AC = AO$, $BC = BO$ $\cdots (*)$

また, 辺 BO の中点をとり, 同様の議論を行うと, $(*)$ の B と C を交換して

$$AB = AO, CB = CO \quad \cdots (**)$$

$(*)$, $(**)$ より $AO = AB = AC$, $OB = BC = CO$ $\cdots (***)$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} \text{ より } \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{MA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{MB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$$

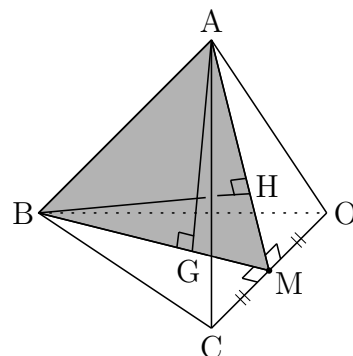
$\overrightarrow{GA} \perp \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{MA}$ であるから, $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ より

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{MB}|^2 = 0, \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{MA}|^2 = 0$$

上の 2 式から $|\overrightarrow{MA}|^2 = |\overrightarrow{MB}|^2$ すなわち $MA = MB$

したがって $\triangle ACM \equiv \triangle BCM$ ゆえに $AC = BC$

これと $(***)$ より, 四面体のすべての辺の長さが等しいので, 四面体 OABC は正四面体である. ■



5 3次方程式 $f(x) = 0$ の解を $\alpha, \bar{\alpha}, k$ とする (α を虚数, k を実数).

(i) α^3 が実数のとき $\alpha^3 = k, k^3 = k$

α は虚数であるから, $k \neq 0$ であることに注意して $k = \pm 1$

$k = 1$ のとき $\alpha^3 = 1$ ゆえに $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$

$\alpha \neq 1$ であるから, α および $\bar{\alpha}$ は方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解であるから

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

$k = -1$ のとき $\alpha^3 = -1$ ゆえに $(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0$

$\alpha \neq -1$ であるから, α および $\bar{\alpha}$ は方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の解であるから

$$f(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$$

(ii) α^3 が虚数のとき $\alpha^3 = \bar{\alpha}, k^3 = k$

第1式から $\alpha^4 = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$ ゆえに $\alpha = \pm\sqrt{|\alpha|}i$

$|\alpha|^2 = |\alpha|$ となるから $|\alpha| = 1$ すなわち $\alpha = \pm i$

したがって, α および $\bar{\alpha}$ は方程式 $x^2 + 1 = 0$ の解

$k^3 = k$ より, $k = 0, \pm 1$ であるから

$$f(x) = (x - k)(x^2 + 1) \quad (k = 0, 1, -1)$$

(i), (ii) より, 求める $f(x)$ は

$$x^3 - 1, x^3 + 1, x^3 + x, x^3 - x^2 + x - 1, x^3 + x^2 + x + 1$$



6.17 2017 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 曲線 $y = x^3 - 4x + 1$ を C とする. 直線 l は C の接線であり, 点 $P(3, 0)$ を通るものとする. また, l の傾きは負であるとする. このとき, C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

2 次の問に答えよ. ただし, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい.

(1) 100 桁以下の自然数で, 2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ.

(2) 100 桁の自然数で, 2 と 5 以外に素因数を持たないものの個数を求めよ.

3 座標空間において原点 O と点 $A(0, -1, 1)$ を通る直線を l とし, 点 $B(0, 2, 1)$ と点 $C(-2, 2, -3)$ を通る直線を m とする. l 上の 2 点 P, Q と, m 上の点 R を $\triangle PQR$ が正三角形となるようにとる. このとき, $\triangle PQR$ の面積が最小となるような P, Q, R の座標を求めよ.

4 p, q を自然数, α, β を

$$\tan \alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan \beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 次の条件

$$(A) \quad \tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす p, q の組 (p, q) のうち, $q \leq 3$ であるものをすべて求めよ.

(2) 条件 (A) を満たす p, q の組 (p, q) で, $q > 3$ であるものは存在しないことを示せ.

5 n を 2 以上の自然数とする. さいころを n 回振り, 出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M - L$ を X とする.

(1) $X = 1$ である確率を求めよ.

(2) $X = 5$ である確率を求めよ.

解答例

1 $f(x) = x^3 - 4x + 1$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - 4t + 1) = (3t^2 - 4)(x - t)$$

すなわち $y = (3t^2 - 4)x - 2t^3 + 1 \cdots (*)$

これが点 $(3, 0)$ を通るから

$$(3t^2 - 4) \cdot 3 - 2t^3 + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t + 1)(2t^2 - 11t + 11) = 0$$

$f'(-1) = -1 < 0$ であるから, $t = -1$ は条件を満たす.

$2t^2 - 11t + 11 = 0$ のとき, $t^2 = \frac{11}{2}(t - 1)$, $t = \frac{11 \pm \sqrt{33}}{4}$ より

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 - 4 = 3 \cdot \frac{11}{2}(t - 1) - 4 = \frac{33}{8} \left(4t - 4 - \frac{32}{33} \right) \\ &= \frac{33}{8} \left\{ (11 \pm \sqrt{33}) - 4 - \frac{32}{33} \right\} = \frac{33}{8} \left\{ (6 \pm \sqrt{33}) + \frac{1}{33} \right\} > 0 \end{aligned}$$

したがって, 条件を満たすのは, $t = -1$ に限る. $(*)$ より $l: y = -x + 3$

$$\begin{aligned} (-x + 3) - (x^3 - 4x + 1) &= -(x^3 - 3x - 2) \\ &= -(x + 1)^2(x - 2) = (x + 1)^2(2 - x) \end{aligned}$$

C と l の共有点の x 座標は $x = -1, 2$

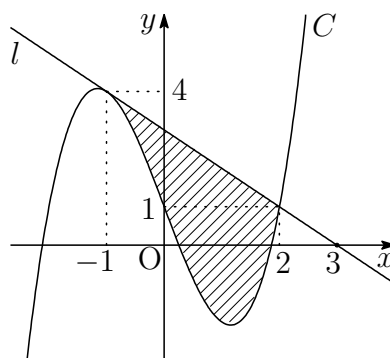
$-1 \leq x \leq 2$ において $(-x + 3) - (x^3 - 4x) = (x + 1)^2(2 - x) \geq 0$

よって, 求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^2 (x + 1)^2(2 - x) dx = \frac{1}{12} \{2 - (-1)\}^4 = \frac{27}{4}$$

補足 次の公式³に $m = 2$, $n = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$ を代入する.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$



³<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> の [1] を参照.

- 2** (1) 100 桁以下の自然数で、2 以外の素因数を持たない数は

$$1 \leq 2^m < 10^{100} \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

辺々の常用対数をとると

$$0 \leq m \log_{10} 2 < 100 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq m < \frac{100}{\log_{10} 2} \quad \cdots (*)$$

$$\frac{100}{0.3011} < \frac{100}{\log_{10} 2} < \frac{100}{0.3010}, \quad \frac{100}{0.3011} = 332.1\cdots, \quad \frac{100}{0.3010} = 332.2\cdots$$

(*) を満たす整数は $0 \leq m \leq 332$ よって、求める個数は **333 個**

- (2) 100 桁の自然数で、2 と 5 以外の素因数を持たない数 N は

$$N = 2^p \cdot 5^q \quad (p, q \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}, 10^{99} \leq N < 10^{100})$$

- (i) $p \geq q$ のとき、 $p = q + m$ とおくと $N = 2^{q+m} \cdot 5^q = 2^m \cdot 10^q$

100 桁以下の自然数 2^m について、 N が 100 桁の自然数となるのとき、

(1) で求めたそれぞれの m に対して、一意に q が定まる。

したがって、これらの個数は 333 個。

- (ii) $p \leq q$ のとき、 $q = p + n$ とおくと $N = 2^p \cdot 5^{p+n} = 5^n \cdot 10^p$

100 桁以下の自然数で、5 以外の素因数を持たない数は

$$1 \leq 5^n < 10^{100} \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

辺々の常用対数をとると

$$0 \leq n \log_{10} 5 < 100 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq n < \frac{100}{\log_{10} 5}$$

100 桁以下の自然数 5^n について、 N が 100 桁の自然数となるのとき、

それぞれの n に対して、一意に p が定まる。

$$0 \leq n < \frac{100}{\log_{10} 5} \quad \cdots (**)$$

$$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 \quad \text{ゆえに} \quad 0.6989 < \log_{10} 5 < 0.6990$$

$$\frac{100}{0.6990} < \frac{100}{\log_{10} 5} < \frac{100}{0.6989}, \quad \frac{100}{0.6990} = 143.06\cdots, \quad \frac{100}{0.6989} = 143.08\cdots$$

(**) を満たす整数は $0 \leq n \leq 143$ これらの個数は 144 個。

$p = q = 99$ は (i), (ii) で重複しているから $333 + 144 - 1 = \mathbf{476}$ (個)



3 原点 O と点 $A(0, -1, 1)$ を通る直線 l 上の点 (x, y, z) は、媒介変数 s を用いて

$$(x, y, z) = s\overrightarrow{OA} = (0, -s, s) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$B(0, 2, 1)$, $C(-2, 2, -3)$ より $\overrightarrow{BC} = (-2, 0, -4) = -2(1, 0, 2)$

2点 B, C を通る直線 m 上の点 (x, y, z) は、媒介変数 t を用いて

$$(x, y, z) = \overrightarrow{OB} + t(1, 0, 2) = (t, 2, 2t+1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を同時に満たす (x, y, z) は存在しない.

$P(0, -p, p)$, $Q(0, -q, q)$, $R(r, 2, 2r+1)$ とおくと $(p \neq q)$

$$PQ^2 = 2(p-q)^2,$$

$$PR^2 = r^2 + (p+2)^2 + (2r+1-p)^2,$$

$$QR^2 = r^2 + (q+2)^2 + (2r+1-q)^2$$

$PR^2 - QR^2 = 0$ であるから

$$(p+2)^2 - (q+2)^2 + (2r+1-p)^2 - (2r+1-q)^2 = 0$$

$$(p+q+4)(p-q) + (4r+2-p-q)(-p+q) = 0$$

$$(p-q)(2p+2q-4r+2) = 0$$

$p \neq q$ であるから, $r = \frac{1}{2}(p+q+1) \cdots \textcircled{3}$ より

$$PR^2 = \frac{1}{4}(p+q+1)^2 + (p+2)^2 + (q+2)^2$$

$PR^2 - PQ^2 = 0$ であるから

$$\frac{1}{4}(p+q+1)^2 + (p+2)^2 + (q+2)^2 - 2(p-q)^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

ここで $(p+q+1)^2 = (p+q)^2 + 2(p+q) + 1$,

$$(p+2)^2 + (q+2)^2 = p^2 + q^2 + 4(p+q) + 8$$

$$= \frac{1}{2}\{(p+q)^2 + (p-q)^2\} + 4(p+q) + 8$$

これらの2式を(*)に代入して整理すると

$$(p+q)^2 - 2(p-q)^2 + 6(p+q) + 11 = 0$$

したがって $PQ^2 = 2(p-q)^2 = (p+q+3)^2 + 2$

正三角形 PQR の面積が最小になるとき, PQ^2 が最小となるから

$$p+q+3=0, \quad |p-q|=1 \quad \text{これを解いて} \quad (p, q) = (-1, -2), (-2, -1)$$

$\textcircled{3}$ より $r = -1$ よって $R(-1, 2, -1)$, P, Q は $(0, 1, -1), (0, 2, -2)$

別解 O, A(0, -1, 1) より $\vec{OA} = (0, -1, 1)$

B(0, 2, 1), C(-2, 2, -3) より $\vec{BC} = (-2, 0, -4) = -2(1, 0, 2)$

$\vec{b} = \vec{OB}$, 2 直線 l, m の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{u} = (0, -1, 1), \vec{v} = (1, 0, 2)$ とおく. l 上の点 S を $\vec{OS} = s\vec{u}$, m 上の点 T を $\vec{OT} = \vec{b} + t\vec{v}$ とすると

$$\vec{ST} = \vec{OT} - \vec{OS} = -s\vec{u} + t\vec{v} + \vec{b}$$

ST が最小となるとき, $\vec{u} \cdot \vec{ST} = 0, \vec{v} \cdot \vec{ST} = 0$ であるから

$$\vec{u} \cdot (-s\vec{u} + t\vec{v} + \vec{b}) = 0, \quad \vec{v} \cdot (-s\vec{u} + t\vec{v} + \vec{b}) = 0$$

したがって $s\vec{u} \cdot \vec{u} - t\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{b}, \quad s\vec{u} \cdot \vec{v} - t\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{b}$

すなわち $2s - 2t = -1, \quad 2s - 5t = 2$ これを解いて $s = -\frac{3}{2}, t = -1$

$$\vec{ST} = \frac{3}{2}\vec{u} - \vec{v} + \vec{b} = \frac{3}{2}(0, -1, 1) - (1, 0, 2) + (0, 2, 1) = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$ST = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

S は P, Q の中点で, T を R にとればよい.

このとき $SP = SQ = \frac{1}{\sqrt{3}}ST = \frac{1}{\sqrt{2}}$

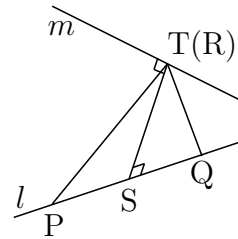
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{2}\vec{u}$$

$\vec{OS} = -\frac{3}{2}\vec{u}$ であるから

$$\vec{OS} + \frac{1}{2}\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u} = -\vec{u} = (0, 1, -1),$$

$$\vec{OS} - \frac{1}{2}\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} = -2\vec{u} = (0, 2, -2)$$

よって $R(-1, 2, -1), P, Q$ は $(0, 1, -1), (0, 2, -2)$



■

- 4 (1) $\tan \beta = \frac{1}{q}$ より, $q = 1$ のとき, $\beta = \frac{\pi}{4} + n\pi$ (n は整数) であるから

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} = -p \quad (p \neq 2)$$

したがって $q \neq 1$

$$\tan \beta = \frac{1}{q} \quad (q \neq 1) \text{ より } \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{q^2}} = \frac{2q}{q^2 - 1}$$

正接の加法定理により

$$\tan \alpha = \tan\{(\alpha + 2\beta) - 2\beta\} = \frac{\tan(\alpha + 2\beta) - \tan 2\beta}{1 + \tan(\alpha + 2\beta) \tan 2\beta}$$

$$\text{条件により } \frac{1}{p} = \frac{2 - \frac{2q}{q^2 - 1}}{1 + 2 \cdot \frac{2q}{q^2 - 1}} = \frac{2(q^2 - q - 1)}{q^2 + 4q - 1} \quad \text{ゆえに } p = \frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)}$$

$$q = 2 \text{ のとき } p = \frac{11}{2}, \quad q = 3 \text{ のとき } p = 2 \quad \text{よって } (p, q) = (2, 3)$$

$$(2) (1) \text{ の計算から } 2p - 1 = \frac{5q}{q^2 - q - 1}$$

$2p - 1$ は正の奇数, $q^2 - q - 1 = q(q - 2) + q - 1 > 0$ より ($q \geq 2$)

$$\frac{5q}{q^2 - q - 1} \geq 1 \quad \text{ゆえに } q^2 - 6q - 1 \leq 0$$

$$\text{したがって } |q - 3| \leq \sqrt{10}$$

これを満たす自然数 q は $q = 2, 3, 4, 5, 6$

(1) の結果に注意すると, $q = 4, 5, 6$ について調べればよい.

ここで, $f(q) = \frac{5q}{q^2 - q - 1}$ とすると

$$f(4) = \frac{20}{11}, \quad f(5) = \frac{25}{19}, \quad f(6) = \frac{30}{29}$$

よって, $q > 3$ であるものは存在しない. ■

- 5 (1) $X = 1$ となるのは $(L, M) = (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$
 $(L, M) = (2, 1)$ であるとき, n 回とも 1 または 2 で, n 回とも 1 のときと
 n 回とも 2 のときを除くから

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

他の場合も同様であるから, 求める確率は

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 10\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

- (2) $X = 5$ となるのは $(L, M) = (1, 6)$
 $L = 1, M = 6$ となる事象をそれぞれ A, B とすると

$$P(A) = P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

また $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$

ゆえに $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\} + \left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\} - \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \\ &= 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

■

6.18 2018年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

- 1 a は正の実数とし，座標平面内の点 (x_0, y_0) は2つの曲線

$$C_1: y = |x^2 - 1|, \quad C_2: y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり， $|x_0| \neq 1$ を満たすとする． C_1 と C_2 が (x_0, y_0) で共通の接線をもつとき， C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

- 2 1 辺の長さが1の正方形 ABCD において，辺 BC 上に B とは異なる点 P を取り，線分 AP の垂直二等分線が辺 AB，辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q, R とする．

- (1) 線分 QR の長さを $\sin \angle BAP$ を用いて表せ．
- (2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ．

- 3 $n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

- 4 四面体 ABCD は $AC = BD$ ， $AD = BC$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする．

- (1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ．
- (2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って2つの部分に分ける．このとき，2つの部分の体積は等しいことを示せ．

- 5 整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える．ただし各球に書かれている整数は1つのみとする．

- (i) 袋から無作為に球を1個取り出し，その球に書かれている整数を k とする．
- (ii) $k \neq 0$ の場合，整数 k が書かれた球を1個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．
- (iii) $k = 0$ の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より1大きい整数が書かれた球を1個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

整数0が書かれている球が1個入っており他の球が入っていない袋を用意する．この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする．例えば X_1 は常に1である．以下 $n \geq 2$ として次の問に答えよ．

- (1) $X_n \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ．
- (2) $X_n \leq n+1$ である確率を求めよ．

解答例

1 $f(x) = |x^2 - 1|$, $g(x) = x^2 - 2ax + 2$ とおくと

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (|x| > 1) \\ -2x & (|x| < 1) \end{cases}, \quad g'(x) = 2x - 2a$$

$f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$ であるから

(i) $|x_0| > 1$ のとき

$$x_0^2 - 1 = x_0^2 - 2ax_0 + 2, \quad 2x_0 = 2x_0 - 2a$$

上の第 2 式から, $a = 0$ となり, $a > 0$ に反するので不適.

(ii) $|x_0| < 1$ のとき

$$-x_0^2 + 1 = x_0^2 - 2ax_0 + 2, \quad -2x_0 = 2x_0 - 2a$$

$$\text{整理すると} \quad \begin{cases} 2x_0^2 - 2ax_0 + 1 = 0 \\ x_0 = \frac{a}{2} \end{cases}$$

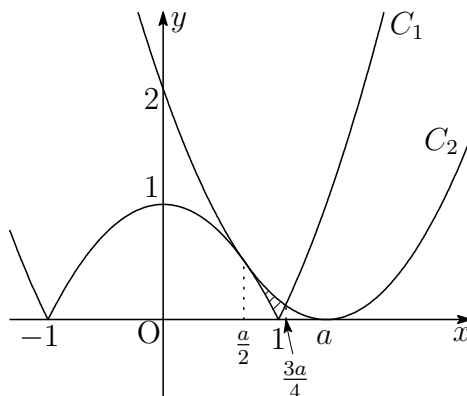
上の第 2 式を第 1 式に代入すると $-\frac{a^2}{2} + 1 = 0$

$$a > 0 \text{ および } |x_0| < 1 \text{ に注意して } a = \sqrt{2}, \quad x_0 = \frac{a}{2}$$

$C_1: y = |x^2 - 1|$ と $C_2: y = (x - a)^2$ の接点以外の共有点の x 座標は

$$x^2 - 1 = (x - a)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a^2 + 1}{2a} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3a}{4}$$

求める面積は, 下の図の斜線部分の面積である.



よって、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} \{(x-a)^2 - |x^2 - 1|\} dx \\
 &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} (x-a)^2 dx + \int_{\frac{a}{2}}^1 (x^2 - 1) dx - \int_1^{\frac{3a}{4}} (x^2 - 1) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 \right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{4}} + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{\frac{a}{2}}^1 - \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^{\frac{3a}{4}} \\
 &= -\frac{7a^3}{48} + \frac{5a}{4} - \frac{4}{3} = \frac{23}{24}\sqrt{2} - \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

■

- 2 (1) $\theta = \angle BAP$ とし ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$), 正方形 ABCD を右の図のように座標平面にとる. 線分 AP の中点を $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\tan \theta}{2}\right)$ とすると, AP の垂直二等分線は, M を通り傾き $-\frac{1}{\tan \theta}$ の直線であるから

$$y - \frac{\tan \theta}{2} = -\frac{1}{\tan \theta} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

すなわち $y = -\frac{x}{\tan \theta} + \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta} \quad \cdots (*)$

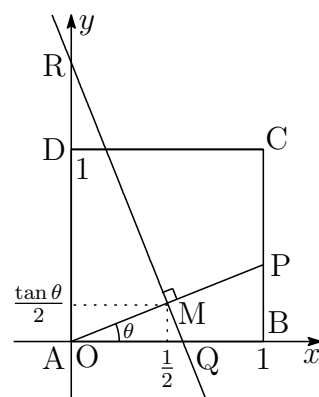
(*) の方程式から $R\left(0, \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta}\right)$

(*) に $y = 0$ を代入すると $x = \frac{1}{2 \cos^2 \theta}$ ゆえに $Q\left(\frac{1}{2 \cos^2 \theta}, 0\right)$

したがって $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2 \cos \theta} \left(-\frac{1}{\cos \theta}, \frac{1}{\sin \theta}\right)$

$$\begin{aligned}
 QR = |\overrightarrow{QR}| &= \frac{1}{2 \cos \theta} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta}} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta)} \quad \cdots (*)
 \end{aligned}$$

よって $QR = \frac{1}{2 \sin \angle BAP (1 - \sin^2 \angle BAP)}$



(2) $t = \sin \theta$ とすると $0 < t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(t) = 2t(1 - t^2)$ とおくと $f'(t) = 2 - 6t^2 = 2(1 - 3t^2)$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

(*) より, 線分 QR の最小値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}$



3 与えられた整式を変形すると

$$n^3 - 7n + 9 = (n - 1)n(n + 1) - 3(2n - 3) \quad \cdots (*)$$

連続する 3 整数の積 $(n - 1)n(n + 1)$ は 3 の倍数であるから, (*) は 3 の倍数である. これが素数であるとき, その値は 3 であるから

$$n^3 - 7n + 9 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad (n - 1)(n - 2)(n + 3) = 0$$

よって, 求める整数 n は $n = 1, 2, -3$



4 (1) $\triangle ACD$ と $\triangle BDC$ について

$AC = BD$, $AD = BC$, CD は共通

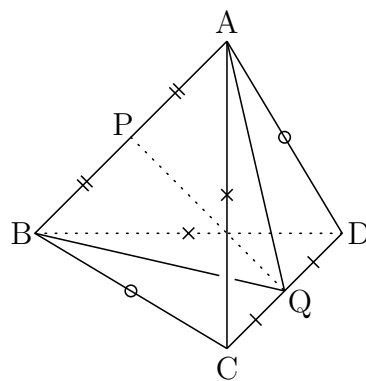
3 辺相等により $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$

したがって $\angle ACQ = \angle BDQ$

$\triangle ACQ$ と $\triangle BDQ$ について, 2 辺夾角相等により $\triangle ACQ \equiv \triangle BDQ$

したがって $AQ = BQ$

よって, PQ は二等辺三角形 ABQ の中線であるから $AB \perp PQ$



別解
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$$

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ に注意して, 上の 2 式の辺々を加えて 2 倍すると

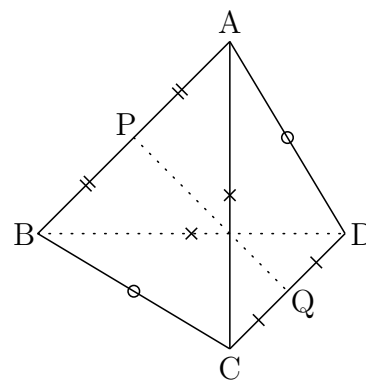
$$4\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}$$

したがって

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}) \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ であるから

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{よって} \quad AB \perp PQ$$



補足 同様にして

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) \\ &= |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ であるから

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \quad \text{よって} \quad CD \perp PQ$$

(2) $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ について

$AC = BD$, $BC = AD$, AB は共通

3 辺相等により $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$

したがって $\angle CAP = \angle DBP$

$\triangle CAP$ と $\triangle DBP$ について, 2 辺夾角相等
により $\triangle CAP \equiv \triangle DBP$

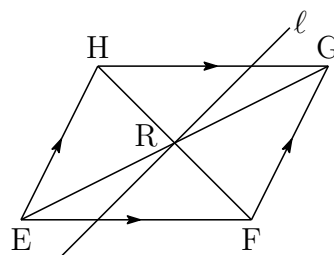
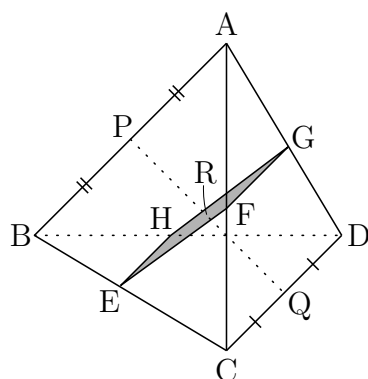
したがって $CP = DP$

よって, PQ は二等辺三角形 CDP の中線
であるから $CD \perp PQ$

線分 PQ 上に点 R とり, R を通り線分 PQ に垂直な平面と辺 BC , AC , AD ,
 BD との交点を, それぞれ, E , F , G , H とすると

$BA \parallel EF$, $BA \parallel HG$, $CD \parallel EH$, $CD \parallel FG$

ゆえに $EF \parallel HG$, $EH \parallel FG$ すなわち 四角形 $EFGH$ は平行四辺形



PQ を含む平面 α と平行四辺形 $EFGH$ との交線を ℓ とすると, ℓ によって
平行四辺形 $EFGH$ の面積は二等分される.

よって, α によって, 四面体 $ABCD$ の体積は二等分される. ■

- 5 (1) (i) n 回とも整数 0 が書かれた球を取り出すとき

$$X_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

$$\text{このときの確率は } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

- (ii) $n-1$ 回目まで整数 0 が書かれた球を取り出し, n 回目に整数 $n-1$ が書かれた球を取り出すとき

$$\begin{aligned} X_n &= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n-1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{このときの確率は } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

- (i),(ii) 以外のとき, $X_n < \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ となるから, 求める確率は

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{2}{n!}$$

- (2) (i) 2 回目以降すべて整数 1 が書かれた球を取り出すとき

$$X_n = 0 + \overbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}^{n \text{ 個}} = n \leq n+1$$

$$\text{このときの確率は } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

- (ii) 2 回目以降, j 回目だけ整数 0 が書かれた球を取り出し, j 回目以外はすべて整数 1 が書かれた球を取り出すとき ($j = 2, 3, \cdots, n$)

$$X_n = 0 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \overbrace{2}^{j \text{ 回目}} + 1 + \cdots + 1 = n+1$$

$$\text{このときの確率は } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{j-2}{j-1} \cdot \frac{1}{j} \cdot \frac{j-1}{j+1} \cdots \frac{n-2}{n} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

- (i),(ii) 以外のとき, $X_n > n+1$ となるから, 求める確率は

$$\frac{1}{n} + \frac{(n-2)!}{n!} \cdot (n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$



6.19 2019 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ.

(1) a は実数とする. x に関する整式 $x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2$ を整式 $x^3 + x^2 + x + 1$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とする. $R(x)$ の x の 1 次の項の係数が 1 のとき, a の値を定め, さらに $Q(x)$ と $R(x)$ を求めよ.

(2) 8.94^{18} の整数部分は何桁か. また最高位からの 2 桁の数字を求めよ. 例えば, 12345.6789 の最高位からの 2 桁は 12 を指す.

2 a は実数とし, b は正の定数とする. x の関数 $f(x) = x^2 + 2(ax + b|x|)$ の最小値 m を求めよ. さらに, a の値が変化するとき, a の値を横軸に, m の値を縦軸にとって m のグラフをかけ.

3 a, b, c は実数とする. 次の命題が成立するための, a と c がみたすべき必要十分条件を求めよ. さらに, この (a, c) の範囲を図示せよ.

命題: すべての実数 b に対して, ある実数 x が不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ をみたす.

4 1 つのさいころを n 回続けて投げ, 出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする. このとき次の条件をみたす確率を n を用いて表せ. ただし $X_0 = 0$ としておく.

条件: $1 \leq k \leq n$ をみたす k のうち, $X_{k-1} \leq 4$ かつ $X_k \geq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである.

5 半径 1 の球面上の 5 点 A, B_1, B_2, B_3, B_4 は, 正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を底面とする四角錐をなしている. この 5 点が球面上を動くとき, 四角錐 $AB_1B_2B_3B_4$ の体積の最大値を求めよ.

常用対数表は次ページにある.

常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第5位を四捨五入し、小数第4位まで掲載している。

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第 5 位を四捨五入し、小数第 4 位まで掲載している。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + a - 2) \\ + (3 - a)x^2 + (4 - a)x + 4 - a$$

$R(x)$ の1次の項の係数が1であるから

$$4 - a = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = 3$$

$$\text{よって} \quad Q(x) = x^2 + x + 1, \quad R(x) = x + 1$$

補足 $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ であるから, 法 $x^3 + x^2 + x + 1$ について

$$x^4 \equiv 1, \quad x^5 \equiv x, \quad x^3 \equiv -x^2 - x - 1,$$

$$x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2 \equiv x + 2 \cdot 1 + a(-x^2 - x - 1) + 3x^2 + 3x + 2 \\ \equiv (3 - a)x^2 + (4 - a)x + 4 - a$$

$$\text{したがって} \quad R(x) = (3 - a)x^2 + (4 - a)x + 4 - a$$

(2) 常用対数表から, $0.95125 \leq \log_{10} 8.94 < 0.95135$ であるから

$$18 \times 0.95125 \leq 18 \log_{10} 8.94 < 18 \times 0.95135 \\ 17.1225 \leq \log_{10} 8.94^{18} < 17.1243 \\ 10^{0.1225} \times 10^{17} \leq 8.94^{18} < 10^{0.1243} \times 10^{17}$$

常用対数表から, $\log_{10} 1.32 < 0.12065$, $0.12705 \leq \log_{10} 1.34$ であるから

$$1.32 \times 10^{17} < 8.94^{18} < 1.34 \times 10^{17}$$

よって 整数部分の桁数は 18 桁, 最高位の2桁は 13



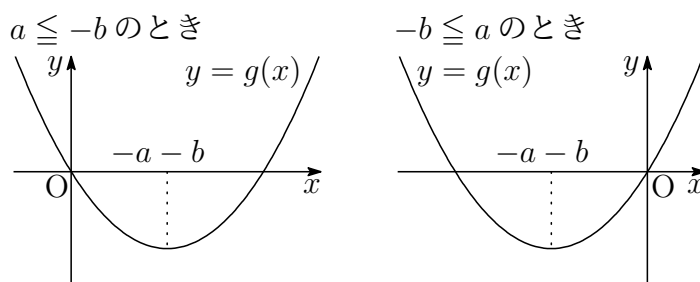
2 $g(x) = x^2 + 2(a+b)x$, $h(x) = x^2 + 2(a-b)x$ とおくと

$$f(x) = x^2 + 2(ax + 2b|x|) = \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ h(x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

(i) $g(x) = (x + a + b)^2 - (a + b)^2$ であるから $(x \geq 0)$

$-a - b \geq 0$, すなわち, $a \leq -b$ のとき $m = g(-a - b) = -(a + b)^2$

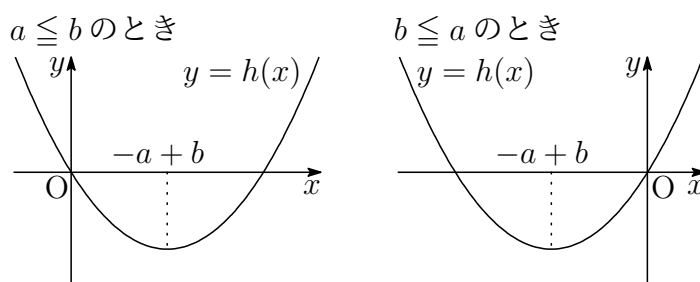
$-a - b \leq 0$, すなわち, $-b \leq a$ のとき $m = g(0) = 0$



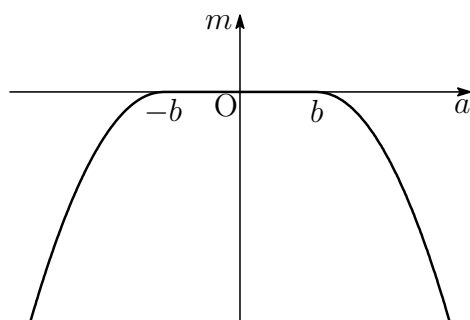
(ii) $h(x) = (x + a - b)^2 - (a - b)^2$ であるから $(x \leq 0)$

$-a + b \geq 0$, すなわち, $a \leq b$ のとき $m = h(0) = 0$

$-a + b \leq 0$, すなわち, $b \leq a$ のとき $m = h(-a + b) = -(a - b)^2$



(i), (ii) の結果から
$$m = \begin{cases} -(a+b)^2 & (a \leq -b) \\ 0 & (-b \leq a \leq b) \\ -(a-b)^2 & (b \leq a) \end{cases}$$



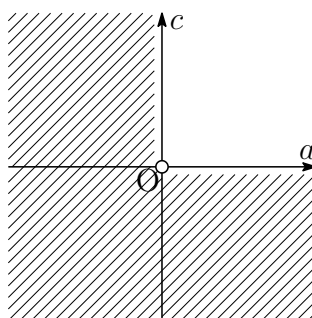
3 関数 $y = ax^2 + bx + c \quad \cdots (*)$

- (i) $a < 0$ のとき, 放物線 $(*)$ は, b, c の値に関係なく, $y < 0$ を満たす x が存在する.
- (ii) $a = 0$ のとき, 直線 $y = bx + c$ は, すべての b について, $c < 0$ のとき, $y < 0$ を満たす x ($x = 0$) が存在する.
- (iii) $a > 0$ のとき, 放物線 $(*)$ が, $y < 0$ を満たす x をもつとき, 係数について

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{ゆえに} \quad ac < \frac{b^2}{4}$$

すべての実数 b について, 上式が成立するから $ac < 0$ ゆえに $c < 0$

(i)~(iii) から $a < 0$ または 「 $a \geq 0$ かつ $c < 0$ 」



4 連続して i 回 4 以下の事象を A_i , 連続して j 回 5 以上の事象を B_j とすると, $A_i B_j A_k$ の順に起きる確率であるから ($i, k \geq 0, j \geq 1, i + j + k = n$)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i, k \geq 0, j \geq 1, \\ i + j + k = n}} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{\substack{i \geq 0, k \geq 0, \\ i + k \leq n-1}} \frac{2^{i+k}}{3^n} = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \sum_{i=0}^{n-k-1} 2^i \\ &= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k (2^{n-k} - 1) = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) \\ &= \frac{1}{3^n} \{n \cdot 2^n - (2^n - 1)\} = \frac{(n-1) \cdot 2^n + 1}{3^n} \end{aligned}$$

- 5 原点 O を中心とする球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上に 4 点 $(\pm a, \pm a, b)$ および点 $(0, 0, 1)$ の 5 点を頂点する四角錐の体積 V とすると ($a > 0$)

$$2a^2 + b^2 = 1, \quad V = \frac{1}{3}(2a)^2(1-b) = \frac{4}{3}a^2(1-b)$$

$$a \text{ を消去すると } V = \frac{2}{3}(1-b^2)(1-b) = \frac{2}{3}(1+b)(1-b)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$-1 < b < 1$ であるから, 3 正数 $2(1+b)$, $1-b$, $1-b$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2(1+b) + (1-b) + (1-b)}{3} \geq \sqrt[3]{2(1+b)(1-b)^2}$$

$$\text{したがって} \quad (1+b)(1-b)^2 \leq \frac{32}{27} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ で等号が成立するとき } 2(1+b) = 1-b \quad \text{すなわち} \quad b = -\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } V \leq \frac{64}{81} \quad \text{よって, 最大値は } \frac{64}{81} \quad \blacksquare$$

6.20 2020年(120分)

出題分野 ① ② ③ ④ ⑤

- ① a を負の実数とする. xy 平面上で曲線 $C: y = |x|x - 3x + 1$ と直線 $\ell: y = x + a$ のグラフが接するときの a の値を求めよ. このとき, C と ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ.

- ② x の2次関数で, そのグラフが $y = x^2$ のグラフと2点で直交するようなものをすべて求めよ. ただし, 2つの関数のグラフがある点で直交するとは, その点が2つのグラフの共有点であり, かつ接線どうしが直交することをいう.

- ③ a を奇数とし, 整数 m, n に対して

$$f(m, n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8$$

とおく. $f(m, n)$ が16で割り切れるような整数の組 (m, n) が存在するための a の条件を求めよ.

- ④ k を正の実数とする. 座標空間において, 原点 O を中心とする半径1の球面上の4点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = k.\end{aligned}$$

このとき, k の値を求めよ. ただし, 座標空間の点 X, Y に対して, $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY}$ は, $\overrightarrow{OX}$ と $\overrightarrow{OY}$ の内積を表す.

- ⑤ 縦4個, 横4個のマス目のそれぞれに1, 2, 3, 4の数字を入れていく. このマス目の横の並びを行といい, 縦の並びを列という. どの行にも, どの列にも同じ数字が1回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ. 下図はこのような入れ方の1例である.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

解答例

- 1 $x > 0$ のとき, $C: y = x^2 - 3x + 1$ と
 $\ell: y = x + a$ から y を消去すると

$$x^2 - 3x + 1 = x + a$$

整理すると $x^2 - 4x + 1 - a = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

C と ℓ が接するとき, 係数について

$$D/4 = (-2)^2 - 1 \cdot (1 - a) = 0$$

$a < 0$ に注意して解くと $a = -3$

このとき $\textcircled{1}$ の解は $x = 2$

$x < 0$ のとき, $C: y = -x^2 - 3x + 1$ と $\ell: y = x + a$ から, y を消去すると

$$-x^2 - 3x + 1 = x + a \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 4x + a - 1 = 0$$

C と ℓ が接するとき, 係数について

$$D/4 = 2^2 - 1 \cdot (a - 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = 5$$

これは, $a < 0$ に反するので, 不適. よって, 求める負の値 a は $a = -3$

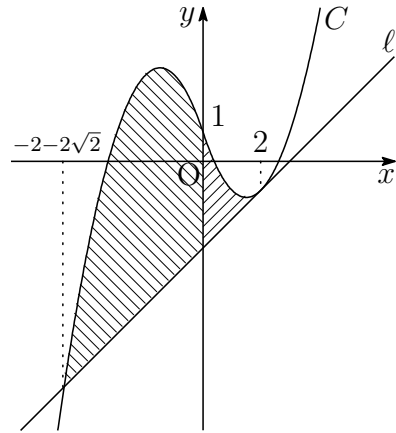
$x < 0$ において, $C: y = -x^2 - 3x + 1$ と $\ell: y = x - 3$ の共有点の x 座標は

$$-x^2 - 3x + 1 = x - 3 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 4x - 4 = 0$$

$x < 0$ に注意して, これを解くと $x = -2 - 2\sqrt{2}$

よって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2-2\sqrt{2}}^0 \{-x^2 - 3x + 1 - (x - 3)\} dx \\ &\quad + \int_0^2 \{x^2 - 3x + 1 - (x - 3)\} dx \\ &= \int_{-2-2\sqrt{2}}^0 \{-(x+2)^2 + 8\} dx + \int_0^2 (x-2)^2 dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}(x+2)^3 + 8x \right]_{-2-2\sqrt{2}}^0 + \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{32}{3}\sqrt{2} + 16 \end{aligned}$$



2 $f(x) = px^2 + qx + r$ とすると ($p \neq 0$) $f'(x) = 2px + q$

$y = f(x)$ と $y = x^2$ のグラフが 2 点 (α, α^2) , (β, β^2) で直交するとき ($\alpha \neq \beta$)

$$\begin{cases} f(\alpha) = \alpha^2 \\ f(\beta) = \beta^2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \quad \begin{cases} p\alpha^2 + q\alpha + r = \alpha^2 \\ p\beta^2 + q\beta + r = \beta^2 \end{cases}$$

また, $y = x^2$ より, $y' = 2x$ であるから

$$\begin{cases} 2\alpha f'(\alpha) = -1 \\ 2\beta f'(\beta) = -1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (**) \quad \begin{cases} 2\alpha(2p\alpha + q) = -1 \\ 2\beta(2p\beta + q) = -1 \end{cases}$$

(*) より, α, β は次の 2 次方程式の解である.

$$pt^2 + qt + r = t^2 \quad \text{すなわち} \quad (p-1)t^2 + qt + r = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, (**) より, α, β は次の 2 次方程式の解である.

$$2t(2pt + q) = -1 \quad \text{すなわち} \quad 4pt^2 + 2qt + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② は, それぞれ, $p-1 \neq 0$, $p \neq 0$ に注意して

$$t^2 + \frac{q}{p-1}t + \frac{r}{p-1} = 0, \quad t^2 + \frac{q}{2p}t + \frac{1}{4p} = 0$$

となり, これらの方程式は一致するから

$$(A) \quad \frac{q}{p-1} = \frac{q}{2p}, \quad \frac{r}{p-1} = \frac{1}{4p}$$

(A) の第 1 式から $\frac{q(p+1)}{p(p-1)} = 0$ ゆえに $q = 0$ または $p = -1$

(i) $q = 0$ のとき, (A) の第 2 式から $r = \frac{p-1}{4p}$

① から, 方程式は

$$(p-1)t^2 + \frac{p-1}{4p} = 0 \quad \text{すなわち} \quad t^2 = -\frac{1}{4p}$$

これが異なる 2 つの実数解をもつから $-\frac{1}{4p} > 0$ ゆえに $p < 0$

(ii) $p = -1$ のとき これを (A) の第 2 式に代入して $r = \frac{1}{2}$

① から, 方程式は $-2t^2 + qt + \frac{1}{2} = 0$ 判別式は $D = q^2 + 4 > 0$

(i), (ii) より

$$y = px^2 + \frac{p-1}{4p} \quad (p < 0), \quad y = -x^2 + qx + \frac{1}{2} \quad (q \text{ は任意の実数})$$

3 $f(m, n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8$ (a は奇数) は, 法 2 について

$$\begin{array}{ll} m \equiv 0, n \equiv 0 \text{ のとき} & f(m, n) \equiv 0 \pmod{2} \\ m \equiv 1, n \equiv 0 \text{ のとき} & f(m, n) \equiv a \equiv 1 \pmod{2} \\ m \equiv 0, n \equiv 1 \text{ のとき} & f(m, n) \equiv 1 \pmod{2} \\ m \equiv 1, n \equiv 1 \text{ のとき} & f(m, n) \equiv 1 \pmod{2} \end{array}$$

したがって, m, n が共に偶数であることが $f(m, n)$ が 16 で割り切れるための必要条件である. そこで, $m = 2M, n = 2N$ とおくと (M, N は整数)

$$f(m, n) = 4(2MN^2 + aM^2 + N^2 + 2)$$

このとき, 整数 M, N に対して

$$g(M, N) = 2MN^2 + aM^2 + N^2 + 2$$

が 4 で割り切れるような整数の組 (M, N) が存在するための a の条件を求めればよい. 一般に, 法 4 について

$$K \equiv 0, 2 \text{ のとき } K^2 \equiv 0, \quad K \equiv 1, 3 \text{ のとき } K^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

すなわち

$$K \text{ が偶数のとき } K^2 \equiv 0, \quad K \text{ が奇数のとき } K^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

これから, $g(M, N) = 2MN^2 + aM^2 + N^2 + 2$ (a は奇数) は, 法 4 について

$$\begin{array}{ll} \text{(i) } M, N \text{ がともに偶数のとき} & g(M, N) \equiv 2 \pmod{4} \\ \text{(ii) } M \text{ が偶数, } N \text{ が奇数のとき} & g(M, N) \equiv 3 \pmod{4} \\ \text{(iii) } M \text{ が奇数, } N \text{ が偶数のとき} & g(M, N) \equiv a + 2 \pmod{4} \\ \text{(iv) } M, N \text{ がともに奇数のとき} & g(M, N) \equiv a + 1 \pmod{4} \end{array}$$

a は奇数であるから, $g(M, N)$ が 4 で割り切れるのは, (iv) の場合である.

$$a + 1 \equiv 0 \quad \text{よって} \quad a \equiv 3 \pmod{4}$$



4 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}, \vec{d} = \overrightarrow{OD}$

とおくと $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1,$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CD}|^2 &= |\vec{d} - \vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{d} + |\vec{c}|^2 \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AB}| = 1, |\overrightarrow{CD}| = 1$ より, $\triangle OAB, \triangle OCD$ は, 正三角形である.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = k \text{ より}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OD}$$

A, B を xy 平面上の点とすると, C, D は yz 平面上の点である.

辺 AB の中点を M とすると, $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{OC}$ のなす角を θ とすると

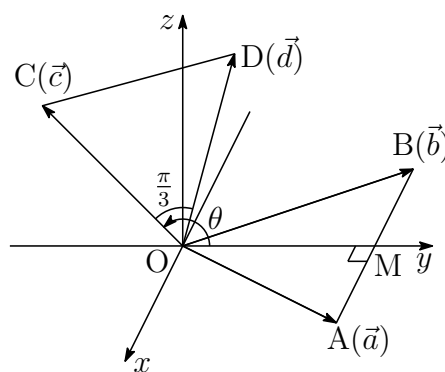
$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{OC}|} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{OD}$ のなす角は $\frac{3\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3}$

$$\overrightarrow{OM} \text{ と } \overrightarrow{OD} \text{ の内積は } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d}) = k > 0$$

$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{OD}$ のなす角は, 鋭角であるから $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$

$$\text{よって} \quad k = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{OD}| \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$



別解 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ とおく.

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ より, 2つのベクトル $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ は垂直である. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ より

$$|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2 \pm 1 \quad (\text{複号同順})$$

直交する2つの単位ベクトル $\vec{e}$, $\vec{f}$ を次のようにおく.

$$\vec{e} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a} + \vec{b}), \quad \vec{f} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{|\vec{a} - \vec{b}|} = \vec{a} - \vec{b}$$

$\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{e})\vec{e} - (\vec{c} \cdot \vec{f})\vec{f}$ は, $\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である. $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$ より

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{e} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \vec{c} \cdot \vec{f} &= \vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \end{aligned}$$

したがって, ベクトル $\vec{c} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\vec{c} + \vec{e})$ は, $\vec{e}$ および $\vec{f}$ と垂直である.

$$\left| \sqrt{2}\vec{c} + \vec{e} \right|^2 = 2|\vec{c}|^2 + 2\sqrt{2}\vec{c} \cdot \vec{e} + |\vec{e}|^2 = 2 + 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 = 1$$

$\vec{g} = \sqrt{2}\vec{c} + \vec{e}$ とおくと, 3つの単位ベクトル $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ は互いに直交する.

$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot \vec{e} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{d} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{\sqrt{3}}k, \quad \vec{d} \cdot \vec{f} = \vec{d} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0, \\ \vec{d} \cdot \vec{g} &= \vec{d} \cdot (\sqrt{2}\vec{c} + \vec{e}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}k \end{aligned}$$

$$\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{e})\vec{e} + (\vec{d} \cdot \vec{f})\vec{f} + (\vec{d} \cdot \vec{g})\vec{g} \quad \text{より} \quad \vec{d} = \frac{2}{\sqrt{3}}k\vec{e} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}k \right) \vec{g}$$

$$|\vec{d}|^2 = 1 \quad \text{であるから} \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}k \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}k \right)^2 = 1$$

$$\text{整理すると} \quad 8k^2 + 2\sqrt{6}k - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{-\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{条件より, } k > 0 \text{ であるから} \quad k = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$

■

- 5 1行目に A, B, C, D を固定し、本題の条件を満たすように、2行目～4行目を並べたとき、行ごとに入れ替えても、条件は満たされる．そこで、第2行第1列目から第4行第1列目までを上から順に、B, C, D とすると、第2行第2列に配置する文字 X ($X = A, C, D$) の場合に分けてその総数を求める．

A	B	C	D
2 行 目			
3 行 目			
4 行 目			

A	B	C	D
B	X		
C			
D			

第2行第2列に配置される A, C, D の場合の数は、それぞれ、2, 1, 1 通りある．

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D
B	D	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

1, 2, 3, 4 を A, B, C, D に 1 対 1 に対応させる (全単射) 場合の数は $4!$ 通り．
2行目～4行目までの入れ替えの総数は $3!$ 通り．これと場合分けの総数により

$$4! \times 3! \times (2 + 1 + 1) = 576 \text{ (通り)}$$



6.21 2021 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ.

(1) 10 進法で表された数 6.75 を 2 進法で表せ. また, この数と 2 進法で表された数 101.0101 との積として与えられる数を 2 進法および 4 進法で表せ.

(2) $\triangle OAB$ において $OA = 3$, $OB = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ とする. $\triangle OAB$ の垂心を H とするとき, $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.

2 定積分 $\int_{-1}^1 \left| x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right| dx$ を求めよ.

3 n を 2 以上の整数とする. 1 から n までの番号が付いた n 個の箱があり, それぞれの箱には赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている. このとき操作 $(*)$ を $k = 1, \dots, n-1$ に対して, k が小さい方から順に 1 回ずつ行う.

$(*)$ 番号 k の箱から玉を 1 個取り出し, 番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる.

一連の操作がすべて終了した後, 番号 n の箱から玉を 1 個取り出し, 番号 1 の箱に入れる. このとき番号 1 の箱に赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている確率を求めよ.

4 空間の 8 点

$O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$

$D(0, 0, 3)$, $E(1, 0, 3)$, $F(1, 2, 3)$, $G(0, 2, 3)$

を頂点とする直方体 $OABC-DEFG$ を考える. 点 O , 点 F , 辺 AE 上の点 P , および辺 CG 上の点 Q の 4 点が同一平面上にあるとする. このとき, 四角形 $OPFQ$ の面積 S を最小にするような点 P および点 Q の座標を求めよ. また, そのときの S の値を求めよ.

5 p が素数ならば $p^4 + 14$ は素数でないことを示せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad 6.75 = 4 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2^2 + 2 + 2^{-1} + 2^{-2} = \mathbf{110.11}_{(2)}$$

$$101.0101_{(2)} = 2^2 + 1 + 2^{-2} + 2^{-4}$$

$a = 2$ とおくと

$$\begin{aligned} 2^2 + 2 + 2^{-1} + 2^{-2} &= a^2 + a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \\ &= a(a+1) + \frac{a+1}{a^2} = (a+1) \left(a + \frac{1}{a^2} \right) \\ &= \frac{1}{a^2} (a+1)(a^3+1) \\ 2^2 + 1 + 2^{-2} + 2^{-4} &= a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} \\ &= a^2 + 1 + \frac{a^2+1}{a^4} = (a^2+1) \left(1 + \frac{1}{a^4} \right) \\ &= \frac{1}{a^4} (a^2+1)(a^4+1) \end{aligned}$$

$a^2 - 1 = a + 1$ に注意すると、上の2数の積を A とすると

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^6} (a+1)(a^3+1)(a^2+1)(a^4+1) \\ &= \frac{1}{a^6} (a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)(a^3+1) \\ &= \frac{1}{a^6} (a^8-1)(a^3+1) = \frac{1}{a^6} (a^{11} + a^8 - a^3 - 1) \end{aligned}$$

$a^8 - 1 = a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ に注意すると

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^6} (a^{11} + a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^2 + a + 1) \\ &= a^5 + a + 1 + a^{-1} + a^{-2} + a^{-4} + a^{-5} + a^{-6} \end{aligned} \quad (*)$$

また、(*)において、 $b = a^2$ とおくと

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{b^3} (2b^5 + 2b^3 + b^3 + 2b^2 + b^2 + b + 2 + 1) \\ &= \frac{1}{b^3} (2b^5 + 3b^3 + 3b^2 + b + 3) \\ &= 2b^2 + 3 + 3b^{-1} + b^{-2} + 3b^{-3} \end{aligned}$$

求める2進法表示および4進法表示は

$$\mathbf{100011.110111}_{(2)}, \quad \mathbf{203.313}_{(4)}$$

(2) $OA = 3$, $OB = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ より, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおくと

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3$$

$\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと (x, y は実数), $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{OA}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} &= (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} = (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} \\ &= x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 3x + 4y - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{OA} &= (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA} = (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{b}) \cdot \vec{a} \\ &= x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 9x + 3y - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② を解いて $x = \frac{1}{9}$, $y = \frac{2}{3}$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OH} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

別解 $OA = 3$, $OB = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ より,
2 点 A, B からそれぞれ OB, OA に垂線
AN, BM を引くと

$$OM = 1, \quad ON = \frac{3}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ とおくと (x, y は実数)

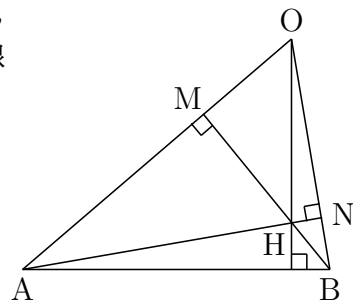
$$\overrightarrow{OH} = 3x\overrightarrow{OM} + y\overrightarrow{OB} = x\overrightarrow{OA} + \frac{4}{3}y\overrightarrow{ON}$$

H は直線 MB および NA 上の点であるから

$$3x + y = x + \frac{4}{3}y = 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1}{9}, \quad y = \frac{2}{3}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OH} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

■



- 2 (1) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ とおくと

$$f(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - x - 1) = \frac{1}{2}(2x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の原始関数の1つを

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

とおくと, 求める定積分は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |f(x)| dx &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \\ &= \left[F(x) \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} - \left[F(x) \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= 2F\left(-\frac{1}{2}\right) - F(1) - F(-1) \\ &= 2 \cdot \frac{7}{48} - \left(-\frac{5}{12}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{19}{24} \end{aligned}$$

■

- 3 番号 k の箱から取り出した玉の色が番号1の箱から取り出した玉の色と同じである確率を p_k とすると, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_1 = 1, \quad p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k) = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$$

$$\text{したがって} \quad p_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(p_k - \frac{1}{2} \right) \quad \text{ゆえに} \quad p_k - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1}$$

$$\text{すなわち} \quad p_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \right\}$$

求める確率は, 番号 n の箱から取り出した玉の色が番号1の箱から取り出した玉の色と同じである確率 p_n と一致するから

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}$$

■

4 平面 AODE//平面 BCGF より

$$OP//QF \quad \dots \textcircled{1}$$

平面 OCGD//平面 ABFE より

$$OQ//PF \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, 四角形 OPFQ は, 平行四辺形である. P は辺 AE 上の点であるから

$$P(1, 0, t) \quad (0 \leq t \leq 3)$$

とおくと, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QF}$ より

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OQ} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OQ} = (1, 2, 3) - (1, 0, t) = (0, 2, 3-t)$$

このとき, Q は辺 CG の点であるから

$$0 \leq 3-t \leq 3 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq t \leq 3$$

平行四辺形 OPFQ の面積 S は

$$\begin{aligned} S^2 &= |\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2 \\ &= (1+t^2)\{2^2 + (3-t)^2\} - \{t(3-t)\}^2 \\ &= 4 + 4t^2 + (3-t)^2 \\ &= 5t^2 - 6t + 13 \\ &= 5\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5} \end{aligned}$$

$$t = \frac{3}{5}, \text{ すなわち, } P\left(1, 0, \frac{3}{5}\right), Q\left(0, 2, \frac{12}{5}\right) \text{ のとき, } S \text{ は最小値 } 2\sqrt{\frac{14}{5}}$$

■

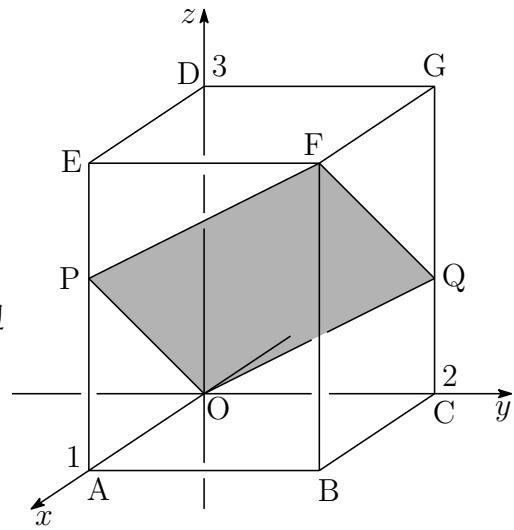
5 (i) $p = 3$ のとき $p^4 + 14 = 3^4 + 14 = 95 = 5 \cdot 19$

(ii) p が 3 以外の素数のとき $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$

$$p^4 + 14 \geq 2^4 + 14 = 30, \quad p^4 + 14 \equiv 15 \equiv 0 \pmod{3}$$

よって, p が素数ならば, $p^4 + 14$ は素数でない.

■



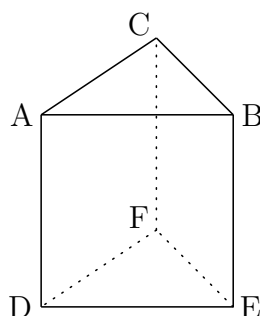
6.22 2022年(120分)

出題分野 ① ② ③ ④ ⑤

- ① $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ. ただし, $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることを用いてよい.
- ② 下図の三角柱 ABC-DEF において, A を始点として, 辺に沿って頂点を n 回移動する. すなわち, この移動経路

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n \quad (\text{ただし } P_0 = A)$$

において, $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ はすべて辺であるとする. また, 同じ頂点を何度通ってもよいものとする. このような移動経路で, 終点 P_n が A, B, C のいずれかとなるものの総数 a_n を求めよ.



- ③ xy 平面上の2直線 L_1, L_2 は直交し, 交点の x 座標は $\frac{3}{2}$ である. また, L_1, L_2 はともに $C: y = \frac{x^2}{4}$ に接している. このとき, L_1, L_2 および C で囲まれる図形の面積を求めよ.
- ④ a, b を正の実数とする. 直線 $L: ax + by = 1$ と曲線 $y = -\frac{1}{x}$ との2つの交点のうち, y 座標が正のものを P, 負のものを Q とする. また, L と x 軸との交点を R とし, L と y 軸との交点を S とする. a, b が条件

$$\frac{PQ}{RS} = \sqrt{2}$$

を満たしながら動くとき, 線分 PQ の中点の軌跡を求めよ.

5 四面体 $OABC$ が

$$OA = 4, \quad OB = AB = BC = 3, \quad OC = AC = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする. P を辺 BC 上の点とし, $\triangle OAP$ の重心を G とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{OA}$ を示せ.

(2) P が辺 BC 上を動くとき, PG の最小値を求めよ.

解答例

1 $2000 < 2022 < 2048$ より

$$\begin{aligned}\log_4 2022 &< \log_4 2048 = \log_4 2^{11} = 5.5, \\ \log_4 2022 &> \log_4 2000 = \frac{\log_{10} 2000}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 2 + 3}{2 \log_{10} 2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \log_{10} 2} \\ &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 0.3011} = 0.5 + 4.98 \cdots > 5.4\end{aligned}$$

よって $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ ■

2 終点 P_n が A, B, C のいずれかとなるものの総数 a_n に対し, 終点 P_n が D, E, F のいずれかとなるものの総数を b_n とする.

- P_n が A, B, C のいずれかであるとき, P_{n+1} も A, B, C のいずれかであるのは 2 通り (辺 $P_n P_{n+1}$ の取り方が 2 通り), P_{n+1} が D, E, F のいずれかであるのは 1 通り (辺 $P_n P_{n+1}$ の取り方が 1 通り).
- P_n が D, E, F のいずれかであるとき, P_{n+1} も D, E, F のいずれかであるのは 2 通り (辺 $P_n P_{n+1}$ の取り方が 2 通り), P_{n+1} が A, B, C のいずれかであるのは 1 通り (辺 $P_n P_{n+1}$ の取り方が 1 通り).

これより次の漸化式が成立する.

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n$$

$$\text{したがって} \quad a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n), \quad a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n$$

$$\text{上の 2 式から} \quad a_n + b_n = 3^{n-1}(a_1 + b_1) = 3^n, \quad a_n - b_n = a_1 - b_1 = 1$$

$$\text{よって} \quad a_n = \frac{3^n + 1}{2} \quad \text{■}$$

3 $C: y = \frac{x^2}{4}$ より $y' = \frac{x}{2}$

C と L_1 , L_2 の接点の x 座標をそれぞれ α , β とすると ($\alpha < \beta$)

L_1 の方程式は $y - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha}{2}(x - \alpha)$

すなわち $L_1: y = \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{4}$

同様に $L_2: y = \frac{\beta}{2}x - \frac{\beta^2}{4}$

L_1 と L_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\beta}{2}x - \frac{\beta^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

条件から $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}$ ゆえに $\alpha + \beta = 3 \quad \dots \textcircled{1}$

L_1 と L_2 は直交するから $\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta}{2} = -1$ ゆえに $\alpha\beta = -4 \quad \dots \textcircled{2}$

①, ② より, α , β は, 2 次方程式 $x^2 - 3x - 4 = 0$ の解であるから ($\alpha < \beta$)

$$(x + 1)(x - 4) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = -1, \beta = 4$$

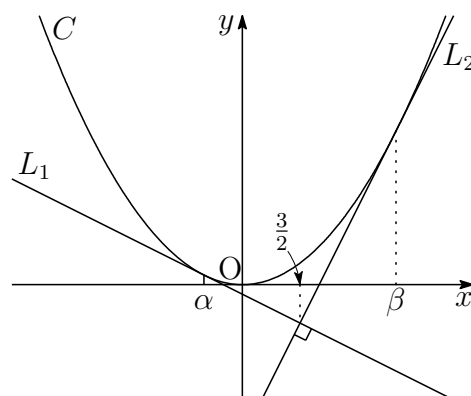
これより $L_1: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \quad L_2: y = 2x - 4$

よって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{x^2}{4} - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 \left\{ \frac{x^2}{4} - (2x - 4) \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{\frac{3}{2}} (x + 1)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\frac{3}{2}}^4 (x - 4)^2 dx \\ &= \frac{1}{12} \left[(x + 1)^3 \right]_{-1}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12} \left[(x - 4)^3 \right]_{\frac{3}{2}}^4 = \frac{125}{48} \end{aligned}$$

補足 一般に放物線に接する 2 本の接線の接点の x 座標を α , β とすると, 2 本の接線の交点の x 座標は $\frac{\alpha + \beta}{2}$ である. また, 本題の面積は, 2 つの接点を通る直線と放物線で囲まれ部分の面積の $\frac{1}{2}$ である ⁴. ■

⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf (p.6 を参照)



- 4 直線 $L: ax + by = 1$ と曲線 $y = -\frac{1}{x}$ との
2つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q
とすると、条件から、 $p < 0, q > 0$.
直線 L と曲線 $y = -\frac{1}{x}$ の方程式から y を
消去すると

$$ax + b\left(-\frac{1}{x}\right) = 1$$

すなわち $ax^2 - x - b = 0$

これを解いて $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4ab}}{2a}$

ゆえに $p = \frac{1 - \sqrt{1 + 4ab}}{2a}, q = \frac{1 + \sqrt{1 + 4ab}}{2a}$

このとき $PQ : RS = q - p : \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{1 + 4ab}}{a} : \frac{1}{a} = \sqrt{1 + 4ab} : 1$

$\frac{PQ}{RS} = \sqrt{2}$ より $\sqrt{1 + 4ab} = \sqrt{2}$ すなわち $b = \frac{1}{4a}$... ①

線分 PQ の中点を M とすると、 M の x 座標は $\frac{p + q}{2} = \frac{1}{2a}$

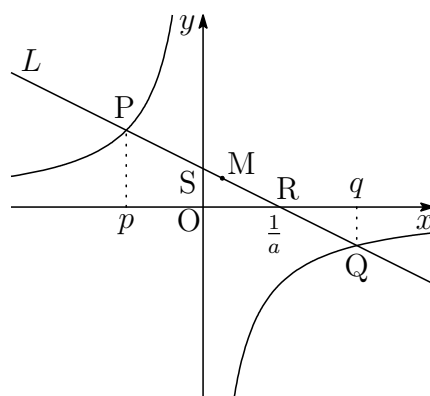
① に注意して、これを L の方程式に代入すると

$$a \cdot \frac{1}{2a} + by = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{1}{2b} = 2a$$

したがって、点 M の座標は $\left(\frac{1}{2a}, 2a\right)$

$a > 0$ に注意して $x = \frac{1}{2a} > 0, y = 2a$

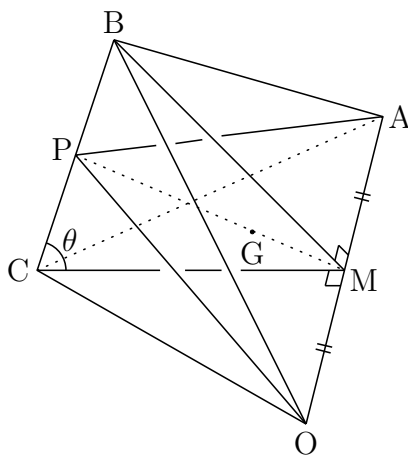
よって、求める軌跡は 曲線 $xy = 1 (x > 0)$



- 5 (1) OA の中点を M とすると, G は線分 PM を 2 : 1 に内分する点で, 2 点 P, G は平面 MBC 上の点である. このとき, $BO = AB$, $OC = AC$ より

$$\triangle ABM \equiv \triangle OBM, \quad \triangle ACM \equiv \triangle OCM \quad \text{ゆえに} \quad MB \perp OA, \quad MC \perp OA$$

したがって 平面 $MBC \perp OA$ よって $\overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{OA}$



- (2) (1) の結果から

$$MB = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$CM = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$\theta = \angle BCM$ とおき, $\triangle BCM$ に余弦定理を適用すると

$$\cos \theta = \frac{BC^2 + CM^2 - MB^2}{2BC \cdot CM} = \frac{9 + 8 - 5}{2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{これから} \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

PG が最小となるとき, $MP \perp BC$ であるから, 求める最小値は

$$\frac{2}{3}MP = \frac{2}{3}CM \sin \theta = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$$



6.23 2023年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ.

(1) n を自然数とする. 1 個のさいころを n 回投げるとき, 出た目の積が 5 で割り切れる確率を求めよ.

(2) 次の式の分母を有理化し, 分母に 3 乗根の記号が含まれない式として表せ.

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5}$$

2 空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 点 D, P, Q を次のように定める. 点 D は $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$ を満たし, 点 P は線分 OA を $1:2$ に内分し, 点 Q は線分 OB の中点である. さらに, 直線 OD 上の点 R を, 直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める. このとき, 線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 $OR:RD$ を求めよ.

3 (1) $\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ の式として表せ.

(2) 半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さが 1.15 より大きいかな否かを理由を付けて判定せよ.

4 数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たしている.

$$a_1 = 3, \quad a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1) \cdot 2^n \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ である. このとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

5 整式 $f(x)$ が恒等式

$$f(x) + \int_{-1}^1 (x-y)^2 f(y) dy = 2x^2 + x + \frac{5}{3}$$

を満たすとき, $f(x)$ を求めよ.

解答例

1 (1) 出た目の積が 5 で割り切れない確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^n$

求める確率は、この余事象の確率であるから $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

(2) $x = \sqrt[3]{3}$ おくと $2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5 = 2x^2 + x + 5$
 $f(x) = 2x^2 + x + 5$ とすると、 $x^3 = 3$ であるから

$$x^2 f(x) = 5x^2 + 6x + 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x f(x) = x^2 + 5x + 6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$f(x) = 2x^2 + x + 5 \quad \cdots \textcircled{3}$$

① - 5 × ② および ② × 2 - ③ より

$$(x^2 - 5x)f(x) = -19x - 27 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$(2x - 1)f(x) = 9x + 7 \quad \cdots \textcircled{5}$$

④ × 9 + ⑤ × 19 より

$$(9x^2 - 7x - 19)f(x) = -110 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{55}{f(x)} = \frac{1}{2}(-9x^2 + 7x + 19)$$

$$\text{よって} \quad \frac{55}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{x} + 5} = \frac{1}{2}(-9\sqrt[3]{9} + 7\sqrt[3]{3} + 19)$$

$$\text{発展 } \textcircled{1} \sim \textcircled{3} \text{ より} \quad f(x) \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって} \quad f(x) \begin{pmatrix} 19 & -27 & 21 \\ 7 & 19 & -27 \\ -9 & 7 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = 110 \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{すなわち} \quad f(x)(-9x^2 + 7x + 19) = 110$$



2 R は直線 OD 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OD} = k(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC})$$

直線 QR 上の点の位置ベクトルは，実数 t を用いて

$$\begin{aligned} (1-t)\overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{OR} &= (1-t)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + tk(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}) \\ &= 3tk\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \left\{\frac{1}{2}(1-t) + 2tk\right\}\overrightarrow{OB} + 3tk\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

これが直線 PC 上の点で， $\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OB}$ ， $\overrightarrow{OC}$ が 1 次独立および $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ から

$$3tk + 3tk = 1, \quad \frac{1}{2}(1-t) + 2tk = 0$$

これを解いて $t = \frac{5}{3}$, $k = \frac{1}{10}$ ゆえに $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{10}\overrightarrow{OD}$

よって **OR : RD = 1 : 9**

別解 $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OQ}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OP} + 4\overrightarrow{OQ} + 3\overrightarrow{OC} \\ \frac{1}{10}\overrightarrow{OD} &= \frac{3\overrightarrow{OP} + 4\overrightarrow{OQ} + 3\overrightarrow{OC}}{10} \end{aligned}$$

(*) $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{10}\overrightarrow{OD}$ とすると，R は平面 PQC 上の点である．

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \frac{3}{10}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QC}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QC}}{2}$$

確かに，直線 QR は線分 PC の中点を通る．(*) より **OR : RD = 1 : 9** ■

3 (1) 加法定理から

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$$

$$\cos \theta = \cos(2\theta - \theta) = \cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta$$

上の第 2 式と第 3 式の辺々を加えると

$$\cos 3\theta + \cos \theta = 2 \cos 2\theta \cos \theta = 2(2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta$$

よって $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

(2) $\theta = \frac{2\pi}{5}$ とすると, $5\theta = 2\pi$ より $3\theta = 2\pi - 2\theta$ であるから

$$\cos 3\theta = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos 2\theta$$

これに (1) の結果を代入すると $4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

$$(\cos \theta - 1)(4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1) = 0$$

$0 < \cos \theta < 1$ に注意して $\cos \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

正五角形の一辺の長さを a とすると, 余弦定理により

$$a^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos \theta = 2 - 2 \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} a^2 - 1.15^2 &= \frac{5 - \sqrt{5}}{2} - \left(\frac{23}{20}\right)^2 = \frac{200(5 - \sqrt{5}) - 529}{400} \\ &= \frac{471 - 200\sqrt{5}}{400} = \frac{2.355 - \sqrt{5}}{2} \\ &> \frac{2.3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{(2.3 - \sqrt{5})(2.3 + \sqrt{5})}{2(2.3 + \sqrt{5})} = \frac{5.29 - 5}{2(2.3 + \sqrt{5})} > 0 \end{aligned}$$

よって, 正五角形の一辺の長さは 1.15 より大きい. ■

$$\boxed{4} \quad a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1) \cdot 2^n \text{ より } na_n = S_n + n(n-1) \cdot 2^n$$

$$\begin{aligned} (n+1)a_{n+1} &= S_{n+1} + (n+1)n \cdot 2^{n+1} \\ na_n &= S_n + n(n-1) \cdot 2^n \end{aligned}$$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ に注意して, 上の第1式から第2式を引くと

$$\begin{aligned} (n+1)a_{n+1} - na_n &= a_{n+1} + n(n+3) \cdot 2^n \\ na_{n+1} - na_n &= n(n+3) \cdot 2^n \\ a_{n+1} - a_n &= (n+3) \cdot 2^n \end{aligned} \tag{1}$$

$(n+1) \cdot 2^{n+1} - n \cdot 2^n = (n+2) \cdot 2^n$, $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ の辺々を加えると

$$(n+2) \cdot 2^{n+1} - (n+1) \cdot 2^n = (n+3) \cdot 2^n \tag{2}$$

$$(1) - (2) \text{ より } a_{n+1} - a_n - (n+2) \cdot 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^n = 0$$

$$a_{n+1} - (n+2) \cdot 2^{n+1} = a_n - (n+1) \cdot 2^n$$

$$a_1 = 3 \text{ より } a_n - (n+1) \cdot 2^n = a_1 - (1+1) \cdot 2^1 = -1$$

$$\text{よって } a_n = (n+1) \cdot 2^n - 1$$



5 恒等式 $f(x) + \int_{-1}^1 (x-y)^2 f(y) dy = 2x^2 + x + \frac{5}{3}$ より

$$f(x) + x^2 \int_{-1}^1 f(y) dy - 2x \int_{-1}^1 y f(y) dy + \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy = 2x^2 + x + \frac{5}{3} \quad (*)$$

上式より, $f(x)$ は 2 次以下の整式であるから, $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(y) dy &= \int_{-1}^1 (ay^2 + by + c) dy \\ &= \left[\frac{ay^3}{3} + \frac{by^2}{2} + cy \right]_{-1}^1 = \frac{2a}{3} + 2c \\ \int_{-1}^1 y f(y) dy &= \int_{-1}^1 (ay^3 + by^2 + cy) dy \\ &= \left[\frac{ay^4}{4} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{2b}{3} \\ \int_{-1}^1 y^2 f(y) dy &= \int_{-1}^1 (ay^4 + by^3 + cy^2) dy \\ &= \left[\frac{ay^5}{5} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} \end{aligned}$$

これらを (*) に代入すると

$$f(x) + \left(\frac{2a}{3} + 2c \right) x^2 - \frac{4b}{3} x + \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} = 2x^2 + x + \frac{5}{3}$$

$$\text{整理すると } f(x) = \left(-\frac{2a}{3} - 2c + 2 \right) x^2 + \left(\frac{4b}{3} + 1 \right) x - \frac{2a}{5} - \frac{2c}{3} + \frac{5}{3}$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ と同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = -\frac{2a}{3} - 2c + 2, \quad b = \frac{4b}{3} + 1, \quad c = -\frac{2a}{5} - \frac{2c}{3} + \frac{5}{3}$$

これを解いて $a = 0, b = -3, c = 1$ よって $f(x) = -3x + 1$ ■

6.24 2024年(120分)

出題分野 ① ② ③ ④ ⑤

- ① 四面体 OABC が次を満たすとする.

$$OA = OB = OC = 1, \quad \angle COA = \angle COB = \angle ACB, \quad \angle AOB = 90^\circ$$

このとき、四面体 OABC の体積を求めよ.

- ② n 個の異なる色を用意する. 立方体の各面にいずれかの色を塗る. 各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする. 辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする. 次の問いに答えよ.

(1) p_3 を求めよ.

(2) p_4 を求めよ.

- ③ a は正の定数とする. 次の関数の最大値を求めよ.

$$f(x) = \left| x^2 - \left(ax + \frac{3}{4}a^2 \right) \right| + ax + \frac{3}{4}a^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

- ④ ある自然数を八進法, 九進法, 十進法でそれぞれ表したとき, 桁数がすべて同じになった. このような自然数で最大のものを求めよ. ただし, 必要なら次を用いてもよい.

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011, \quad 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$$

- ⑤ 関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフの $x > 1$ の部分を C とする. このとき, 下の条件を満たすような正の実数 a, b について, 座標平面の点 (a, b) が動く領域の面積を求めよ.

「 C と直線 $y = ax + b$ は二つの異なる共有点を持つ.」

解答例

- 1 OA = OB = OC = 1, $\angle AOB = 90^\circ$ であるから, O を座標空間の原点とし, A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(s, t, u) とおく ($u > 0, s^2 + t^2 + u^2 = 1 \cdots \textcircled{1}$).

$\cos \angle COA = \cos \angle COB = \cos \angle ACB$ であるから

$$\frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OA}|} = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} \quad (\text{A})$$

$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0), \overrightarrow{OB} = (0, 1, 0), \overrightarrow{OC} = (s, t, u), \overrightarrow{CA} = (1-s, -t, -u),$
 $\overrightarrow{CB} = (-s, 1-t, -u)$ を代入すると

$$s = t = \frac{-s(1-s) - t(1-t) + u^2}{\sqrt{(1-s)^2 + t^2 + u^2} \sqrt{s^2 + (1-t)^2 + u^2}}$$

$s = t$ を ① および上式に代入すると

$$2t^2 + u^2 = 1, \quad t = \frac{2t^2 + u^2 - 2t}{2t^2 + u^2 - 2t + 1} \quad (*)$$

(*) の 2 式から u を消去すると

$$t = \frac{1-2t}{2-2t} \quad \text{整理すると} \quad 2t^2 - 4t + 1 = 0$$

(*) の第 1 式から, $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ に注意して

$$t = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad u^2 = 1 - 2t^2 = 2\sqrt{2} - 2$$

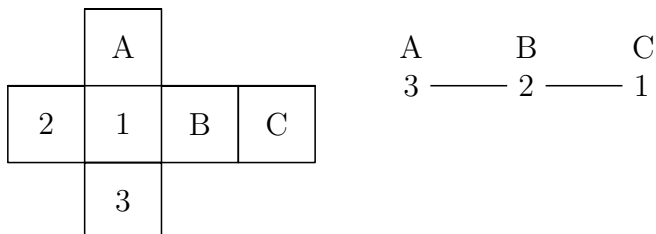
$u > 0$ より $u = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}$

よって, 四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \triangle OAB \cdot u = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2\sqrt{2} - 2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{6}$$



- 2 (1) 次の立方体の展開図において, 1, 2, 3 の面を異なる色で塗り, 残りの A, B, C の面を順番に塗るとき, A, B, C はそれぞれ 3, 2, 1 と同じ色で塗ることになる.

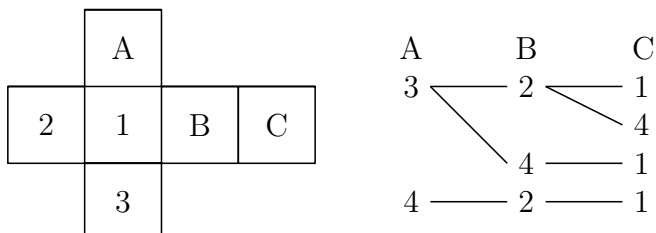


3 色を 1~3 に対応させる方法が 3! 通りあるから, 求める確率は

$$\frac{3!}{3^6} = \frac{2}{243}$$

- (2) 次の立方体の展開図において, 1, 2, 3 の面を異なる色で塗り, 残りの A, B, C の面を順番に塗るとき, 次の規則に従う.

- A は 1, 2 以外の色で塗る.
- B は 1, 3, A 以外の色で塗る.
- C は 2, 3, A, B 以外の色で塗る.



1~4 の色で展開図の面を塗る方法は上の樹形図で示した 4 通あり, 4 色を 1~4 に対応させる方法が 4! 通りあるから, 求める確率は

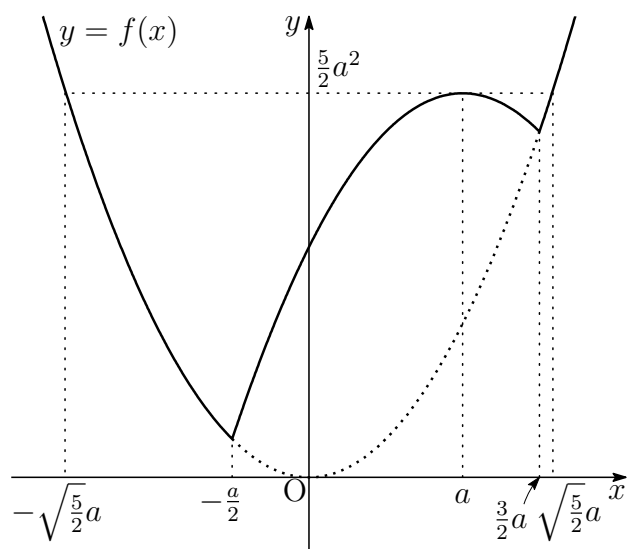
$$\frac{4 \cdot 4!}{4^6} = \frac{3}{128}$$



3 $x^2 - \left(ax + \frac{3}{4}a^2\right) = \left(x + \frac{a}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2}a\right)$ より

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \left(x \leq -\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a \leq x\right) \\ -x^2 + 2ax + \frac{3}{2}a^2 & \left(-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}a\right) \end{cases}$$

したがって、 $y = f(x)$ のグラフの概形は次のようになる。



(i) $0 \leq t \leq \frac{a}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) - f(-t) &= \left(-t^2 + 2at + \frac{3}{2}a^2\right) - \left\{-(-t)^2 + 2a(-t) + \frac{3}{2}a^2\right\} \\ &= 4at \geq 0 \end{aligned}$$

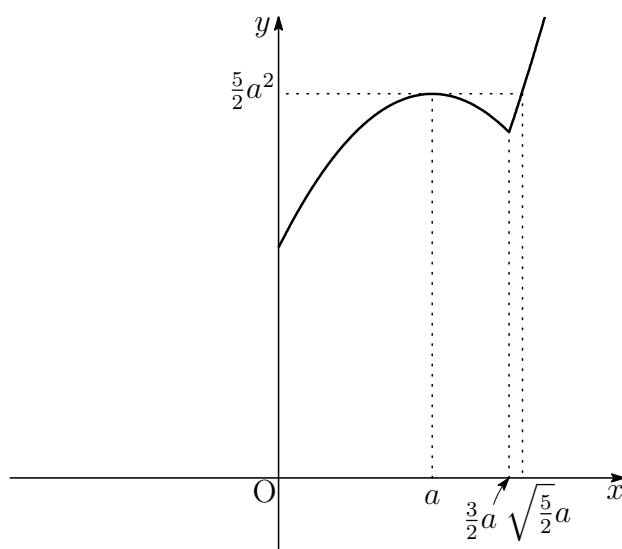
(ii) $\frac{a}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}a$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) - f(-t) &= \left(-t^2 + 2at + \frac{3}{2}a^2\right) - (-t)^2 \\ &= -2t^2 + 2at + \frac{3}{2}a^2 \\ &= -2\left(t + \frac{a}{2}\right)\left(t - \frac{3}{2}a\right) \geq 0 \end{aligned}$$

(iii) $\frac{3}{2}a \leq t$ のとき

$$f(t) - f(-t) = t^2 - (-t)^2 = 0$$

(i)~(iii) より, $f(x)$ の最大値は $0 \leq x \leq 1$ の範囲で求めるとよい.



したがって

$$1 < a \text{ のとき, 最大値 } f(1) = \frac{3}{2}a^2 + 2a - 1$$

$$a \leq 1 < \sqrt{\frac{5}{2}}a, \text{ すなわち, } \sqrt{\frac{2}{5}} < a \leq 1 \text{ のとき, 最大値 } f(a) = \frac{5}{2}a^2$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}}a \leq 1, \text{ すなわち, } 0 < a \leq \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ のとき, 最大値 } f(1) = 1$$

■

- 4 八進法および十進法でそれぞれ表記された数の桁数が同じである最大の自然数を求めればよい. 八進法で表記された n 桁の最大数

$$\overbrace{7 \cdots 7}^{n \text{ 桁}}_{(8)} = 8^n - 1 \quad (*)$$

と 10 進法で表記された n 桁の最小数 10^{n-1} について, 次式を満たす.

$$8^n - 1 \geq 10^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad 8^n > 10^{n-1} \quad (\text{A})$$

上の第 2 式から $\log_{10} 8^n > n - 1$

$$(1 - 3 \log_{10} 2)n < 1 \quad \text{ゆえに} \quad n < \frac{1}{1 - 3 \log_{10} 2} \quad (\text{B})$$

$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より

$$\frac{1}{11} < 0.0967 < 1 - 3 \log_{10} 2 < 0.097 < \frac{1}{10}$$

$$10 < \frac{1}{1 - 3 \log_{10} 2} < 11$$

したがって, (B) を満たす最大の整数 n は $n = 10$

$n = 10$ を (A) の第 1 式に代入すると

$$8^{10} - 1 \geq 10^9$$

(*) により, 求める最大の自然数は $8^{10} - 1$ ■

5 $y = x^2 - 4x + 5$ と $y = ax + b$ から y を消去すると

$$x^2 - 4x + 5 = ax + b \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - (a+4)x - b + 5 = 0$$

この2次方程式が $x > 1$ の範囲で異なる2つの実数解をもつための a, b の条件を求めればよい. $f(x) = x^2 - (a+4)x - b + 5$ とおくと

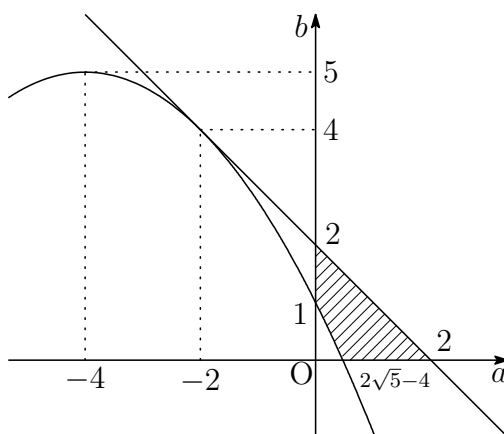
$$f(x) = \left(x - \frac{a+4}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(a+4)^2 - b + 5$$

a, b が正であることと条件を満たすとき

$$a > 0, \quad b > 0, \quad f(1) = -a - b + 2 > 0, \quad -\frac{1}{4}(a+4)^2 - b + 5 < 0$$

$$\text{すなわち} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b < -a + 2, \quad b > -\frac{1}{4}(a+4)^2 + 5$$

これらの不等式の満たす領域は、下の図の斜線部分で境界線を含まない.



よって、求める斜線部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \int_0^{2\sqrt{5}-4} \left\{ -\frac{1}{4}(a+4)^2 + 5 \right\} da \\ &= 2 + \left[\frac{1}{12}(a+4)^3 - 5a \right]_0^{2\sqrt{5}-4} \\ &= \frac{50 - 20\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

■

第 7 章 大阪大学

出題分野 (2011-2024) 90 分

大阪大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	数と式													
	2 次関数								2					
	図形と計量													
	データの分析													
II	式と証明					1								
	複素数と方程式													
	図形と方程式		3	1	1				1				1	
	三角関数				2			1		3				
	指数関数と対数関数	1												
	微分法と積分法	2		3	3	2	2	1・2		1	1・3	3	2	1
A	場合の数と確率		1	2				2				2		
	整数の性質		2				1				3			3
	図形の性質													
B	平面上のベクトル	3				3						1	3	
	空間のベクトル							3	3		2			2
	数列						3	3		2				
	確率分布と統計													

数字は問題番号

7.11 2011 年

出題分野 ① ② ③

- ① 実数の組 (x, y, z) で, どのような整数 l, m, n に対しても, 等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

- ② 実数の組 (p, q) に対し, $f(x) = (x-p)^2 + q$ とおく.

- (1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り, しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ.
- (2) 実数の組 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ に対して, $f_1(x) = (x-p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x-p_2)^2 + q_2$ とおく. 実数 α, β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ.

- (3) 長方形 $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ を考える. また, 4点 $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする. 実数の組 (p, q) を, 放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき, R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする. R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.

- ③ a, b, c を実数とする. ベクトル $\vec{v}_1 = (3, 0), \vec{v}_2 = (1, 2\sqrt{2})$ をとり, $\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ とおく. 座標平面上のベクトル $\vec{p}$ に対する条件

$$(*) \quad (\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{p})\vec{v}_3 = c\vec{p}$$

を考える. ここで $\vec{v}_i \cdot \vec{p}$ ($i = 1, 2, 3$) はベクトル $\vec{v}_i$ とベクトル $\vec{p}$ の内積を表す. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{v} = (x, y)$ が, 実数 s, t を用いて $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ と表されることを, s および t の各々を x, y の式で表すことによって示せ.
- (2) $\vec{p} = \vec{v}_1$ と $\vec{p} = \vec{v}_2$ の両方が条件 $(*)$ をみたすならば, 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して, $\vec{p} = \vec{v}$ が条件 $(*)$ をみたすことを示せ.
- (3) 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して, $\vec{p} = \vec{v}$ が条件 $(*)$ をみたす. このような実数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

解答例

$$\begin{array}{ll}
\boxed{1} & (l, m, n) = (1, 0, 0) \text{ とすると } 10^{x-y} + 10^{y-z} = 13 \quad \dots \textcircled{1} \\
& (l, m, n) = (0, 1, 0) \text{ とすると } 10^{x-z} = 36 \quad \dots \textcircled{2} \\
& (l, m, n) = (0, 0, 1) \text{ とすると } -x = y \quad \dots \textcircled{3}
\end{array}$$

①, ② から

$$10^{x-y} + 10^{x-z} \cdot 10^{y-x} = 13 \quad \text{ゆえに} \quad 10^{x-y} + 36 \cdot 10^{y-x} = 13$$

③ から $y = -x$ を上式に代入すると

$$10^{2x} + 36 \cdot 10^{-2x} = 13 \quad \text{ゆえに} \quad (10^{2x} - 4)(10^{2x} - 9) = 0$$

したがって $10^x = 2, 3$

(i) $10^x = 2$ のとき ($x = \log_{10} 2$), ② より

$$2 \cdot 10^{-z} = 36 \quad \text{ゆえに} \quad 10^z = \frac{1}{18} \quad \text{すなわち} \quad z = -\log_{10} 18$$

③ より $y = -\log_{10} 2$

(ii) $10^x = 3$ のとき ($x = \log_{10} 3$), ② より

$$3 \cdot 10^{-z} = 36 \quad \text{ゆえに} \quad 10^z = \frac{1}{12} \quad \text{すなわち} \quad z = -\log_{10} 12$$

③ より $y = -\log_{10} 3$

よって, ①, ② より

$$\begin{aligned}
(x, y, z) &= (\log_{10} 2, -\log_{10} 2, -\log_{10} 18), \\
&(\log_{10} 3, -\log_{10} 3, -\log_{10} 12)
\end{aligned}$$



- 2 (1) 放物線 $y = (x - p)^2 + q$ が点 $(0, 1)$ を通るから $p^2 + q = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

$y = (x - p)^2 + q$ と $y = x$ から y を消去すると

$$(x - p)^2 + q = x \quad \text{整理すると} \quad x^2 - (2p + 1)x + p^2 + q = 0 \quad \cdots (*)$$

上の放物線と直線は接するから、(*) の係数について

$$(2p + 1)^2 - 4(p^2 + q) = 0 \quad \text{整理すると} \quad 4p - 4q + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(*) より、接点の x 座標 $\frac{2p + 1}{2}$ が正であるから

$$\frac{2p + 1}{2} > 0 \quad \text{これを解いて} \quad p > -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ② から q を消去すると

$$4p^2 + 4p - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2p + 3)(2p - 1) = 0$$

③ に注意して解くと $p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{4}$

接点の x 座標は 1 で、直線 $y = x$ 上の点であるから 接点 $(1, 1)$

- (2) $g(x) = f_2(x) - f_1(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - p_2)^2 + q_2 - (x - p_1)^2 - q_1 \\ &= 2(p_1 - p_2)x - p_1^2 + p_2^2 - q_1 + q_2 \end{aligned}$$

$g(x)$ のグラフは直線であるから、 $m = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}$ とおくと

$$g(x) = m(x - \alpha) + g(\alpha) \quad \cdots (A)$$

または

$$g(x) = m(x - \beta) + g(\beta) \quad \cdots (B)$$

とおける $(\alpha < \beta)$. 与えられた条件から、 $g(\alpha) > 0, g(\beta) > 0$ である.

(i) $0 < g(\alpha) \leq g(\beta)$ のとき

(A) より、 $\alpha \leq x \leq \beta$ において、 $m \geq 0, x - \alpha \geq 0$ であるから

$$g(x) = m(x - \alpha) + g(\alpha) \geq g(\alpha) > 0$$

(ii) $0 < g(\beta) < g(\alpha)$ のとき

(B) より、 $\alpha \leq x \leq \beta$ において、 $m < 0, x - \beta \leq 0$ であるから

$$g(x) = m(x - \beta) + g(\beta) \geq g(\beta) > 0$$

(i), (ii) より、 $\alpha \leq x \leq \beta$ において $g(x) > 0$ すなわち $f_1(x) < f_2(x)$

(3) (1) の結果から

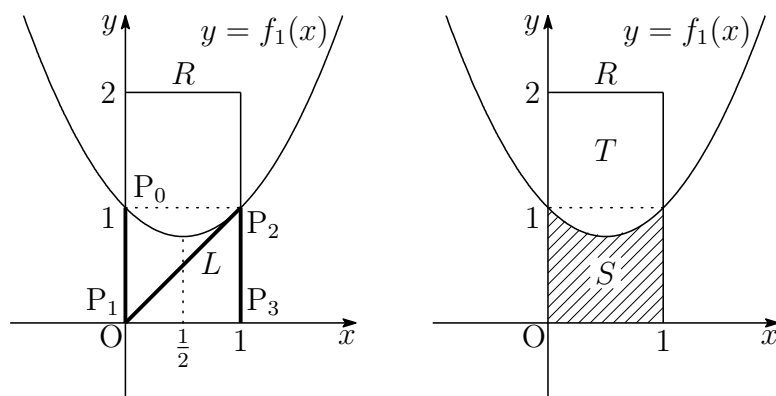
$$f_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$$

とおくと $f_1(0) = 1$, $f_1(1) = 1$

R を通過する放物線 $y = f_2(x)$ が L と共有点がないから

$$f_1(0) < f_2(0), f_1(1) < f_2(1)$$

(2) の結論から, $0 \leq x \leq 1$ において, $f_1(x) < f_2(x)$ であるから, R の点のうちで放物線 $y = f_2(x)$ が通過する点全体の集合は, R の点のうちで放物線 $y = f_1(x)$ の上側である. したがって, R から T を除いた領域 S は右下の図の斜線部分で, 境界線を含む.



よって, 求める面積は

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

■

3 (1) $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} x = 3s + t \\ y = 2\sqrt{2}t \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad s = \frac{x}{3} - \frac{y}{6\sqrt{2}}, \quad t = \frac{y}{2\sqrt{2}}$$

(2) $\vec{p} = \vec{v}_1$ と $\vec{p} = \vec{v}_2$ の両方が(*)をみたすとき

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_3 - c\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_3 - c\vec{v}_2 = \vec{0} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は1次独立であるから、座標平面上の任意のベクトル $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \quad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

とかける。このとき、①、②より

$$\begin{aligned} & (\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{p})\vec{v}_3 - c\vec{p} \\ &= \alpha\{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_3 - c\vec{v}_1\} \\ & \quad + \beta\{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_3 - c\vec{v}_2\} \\ &= \alpha\vec{0} + \beta\vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

よって、座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して、 $\vec{p} = \vec{v}$ が条件(*)をみたす。

(3) ①, ② は, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 9$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3$, $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 9$ より

$$(9 - c)\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = -(\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_3 \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$$3\vec{v}_1 + (9 - c)\vec{v}_2 = -(\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_3 \quad \cdots \textcircled{2}'$$

上の 2 つのベクトルは, 平行であるから

$$(9 - c)^2 - 3^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad c = 6, 12$$

(i) $c = 6$ のとき, $\vec{v}_3 = a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ とおけるから, ①', ②' より

$$3(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = -12a\vec{v}_3 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = -4a\vec{v}_3$$

このとき, $-4a^2 = 1$ となり, これをみたす実数 a は存在しない.

(ii) $c = 12$ のとき, $\vec{v}_3 = a(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ とおけるから, ①', ②' より

$$3(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 6a\vec{v}_3 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 2a\vec{v}_3$$

$$\text{このとき} \quad 2a^2 = 1 \quad \text{これを解いて} \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $(a, b, c) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, 12 \right)$ (複号同順) ■

7.12 2012年

出題分野 ① ② ③

- ① 1個のさいころを3回続けて投げるとき、1回目に出る目を l 、2回目に出る目を m 、3回目に出る目を n で表し、3次式

$$f(x) = x^3 + lx^2 + mx + n$$

を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる確率を求めよ。
 - (2) 関数 $y = f(x)$ が極大値も極小値もとる確率を求めよ。
- ② 次の2つの条件 (i), (ii) をみたす自然数 n について考える。

- (i) n は素数ではない。
- (ii) l, m を1でも n でもない n の正の約数とすると、必ず

$$|l - m| \leq 2$$

である。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) n が偶数のとき、(i), (ii) をみたす n をすべて求めよ。
 - (2) n が7の倍数のとき、(i), (ii) をみたす n をすべて求めよ。
 - (3) $2 \leq n \leq 1000$ の範囲で、(i), (ii) をみたす n をすべて求めよ。
- ③ xy 平面上で考える。不等式 $y < -x^2 + 16$ の表す領域を D とし、不等式 $|x-1| + |y| \leq 1$ の表す領域を E とする。このとき、以下の問いに答えよ。
- (1) 領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ。
 - (2) $A(a, b)$ を領域 D に属する点とする。点 $A(a, b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y = -x^2 + 16$ で囲まれた部分の面積を $S(a, b)$ とする。 $S(a, b)$ を a, b を用いて表せ。
 - (3) 点 $A(a, b)$ が領域 E を動くとき、 $S(a, b)$ の最大値を求めよ。

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^3 + lx^2 + mx + n$ を変形すると

$$f(x) = (x+1)^2(x+l-2) + (-2l+m+3)x - l + n + 2$$

$f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れるとき

$$\begin{cases} -2l+m+3=0 \\ -l+n+2=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} m=2l-3 \\ n=l-2 \end{cases}$$

l, m, n は 1 以上 6 以下の整数であるから、これをみたすのは

$$(l, m, n) = (3, 3, 1), (4, 5, 2)$$

の 2 組である。よって、求める確率は $\frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}$

- (2) $f(x)$ を微分すると $f'(x) = 3x^2 + 2lx + m$

関数 $y = f(x)$ が極大値・極小値をとるのは、 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をときであるから、その係数について

$$D/4 = l^2 - 3m > 0 \quad \text{ゆえに} \quad m < \frac{l^2}{3}$$

よって、これをみたす (l, m) の組は、次の 20 組である。

$$\begin{array}{ll} l=2 \text{ のとき} & m=1 \\ l=3 \text{ のとき} & m=1, 2 \\ l=4 \text{ のとき} & m=1, 2, 3, 4, 5 \\ l=5, 6 \text{ のとき} & m=1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array}$$

このとき、これらの 20 組に対して、 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の 6 通りが対応する。よって、求める確率は

$$\frac{20 \times 6}{6^3} = \frac{5}{9}$$



- 2** (1) $n = 2l$ とおくと (l は 2 以上の整数), (ii) より

$$|l - 2| \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad l = 2, 3, 4 \quad \text{すなわち} \quad n = 4, 6, 8$$

これらは, 条件 (i), (ii) をみたす. よって $n = 4, 6, 8$

- (2) $n = 7l$ とおくと (l は 2 以上の整数), (ii) より

$$|l - 7| \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad l = 5, 6, 7, 8, 9$$

すなわち $n = 35, 42, 49, 56, 63$

このうち, 条件 (i), (ii) をみたすものは $n = 35, 49$

- (3) 条件 (i), (ii) をみたす偶数 n は (1) で求めたので, これらの条件をみたす奇数 n を求める. このとき, n は 3 個以上の奇数を約数にもつことはない. 実際, 3 個の奇数を p, q, r とすると ($p < q < r$), $r - p \geq 4$ であるから, 条件 (ii) をみたさない. (i) より n は素数ではないから, n は 2 個の奇素数の積で, 条件 (ii) をみたすのは

$$p^2 \quad \text{または} \quad p(p+2) \quad (p, p+2 \text{ は奇素数})$$

- (a) $n = p^2$ のとき (p は奇素数), $2 \leq n \leq 1000$ であるものは

$$n = 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2$$

- (b) $n = p(p+2)$ のとき ($p, p+2$ は奇素数), $2 \leq n \leq 1000$ であるものは

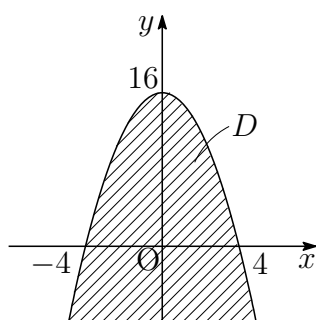
$$n = 3 \cdot 5, 5 \cdot 7, 11 \cdot 13, 17 \cdot 19, 29 \cdot 31$$

したがって, (1), (a), (b) より, 求める n は

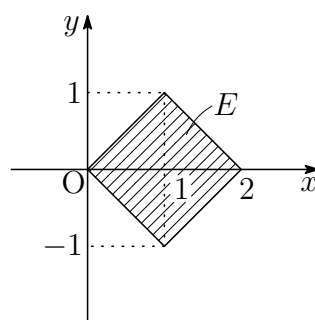
$$\begin{aligned} n = & 4, 6, 8, \\ & 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961, \\ & 15, 35, 143, 323, 899 \end{aligned}$$



- 3 (1) $D: y < -x^2 + 16$, $E: |x-1| + |y| \leq 1$



境界線を含まない



境界線を含む

- (2) $A(a, b)$ は D に属する点であるから

$$b < -a^2 + 16 \quad \text{ゆえに} \quad 16 - a^2 - b > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 $A(a, b)$ を通り傾き $-2a$ の直線は

$$y - b = -2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = -2ax + 2a^2 + b$$

この直線の方程式と放物線 $y = -x^2 + 16$ の方程式から y を消去すると

$$-2ax + 2a^2 + b = -x^2 + 16 \quad \text{ゆえに} \quad (x - a)^2 = 16 - a^2 - b$$

① に注意してこれを解くと $x = a \pm \sqrt{16 - a^2 - b}$

これらの 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると $\beta - \alpha = 2\sqrt{16 - a^2 - b}$

$$\text{よって} \quad S(a, b) = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{4}{3}(16 - a^2 - b)^{\frac{3}{2}}$$

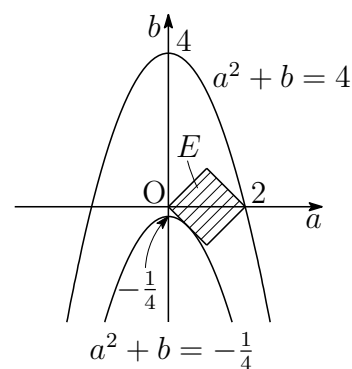
- (3) E において, $a^2 + b$ の取り得る値の範囲は,

$$\text{右の図から} \quad -\frac{1}{4} \leq a^2 + b \leq 4$$

$$S(a, b) = \frac{4}{3}(16 - a^2 - b)^{\frac{3}{2}} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} S(a, b) &\leq S\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(16 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{65\sqrt{65}}{6} \end{aligned}$$

$$\text{よって 最大値} \quad S\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{65\sqrt{65}}{6}$$



■

7.13 2013年

出題分野 1 2 3

- 1 xy 平面において、点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

である。これを証明せよ。

- 2 1個のさいころを3回投げる試行において、1回目に出る目を a 、2回目に出る目を b 、3回目に出る目を c とする。

(1) $\log_{\frac{1}{4}}(a + b) > \log_{\frac{1}{2}} c$ となる確率を求めよ。

(2) $2^a + 2^b + 2^c$ が3の倍数となる確率を求めよ。

- 3 曲線 $y = x^2 + x + 4 - |3x|$ と直線 $y = mx + 4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ。

解答例

- 1 点 (x_0, y_0) を P とし, P から直線 $ax + by + c = 0$ に垂線 PH を引く. 点 H の座標を (x_1, y_1) とすると

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 $ax + by + c = 0$ はベクトル (a, b) に垂直であるから, 実数 t を用いて

$$\overrightarrow{PH} = t(a, b) \quad \text{ゆえに} \quad (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = t(a, b)$$

したがって $(*) \begin{cases} x_1 = at + x_0 \\ y_1 = bt + y_0 \end{cases}$

$(*)$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$a(at + x_0) + b(bt + y_0) + c = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

求める距離は

$$|\overrightarrow{PH}| = |t|\sqrt{a^2 + b^2} = \left| -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- 2 (1) $\log_{\frac{1}{4}}(a + b) > \log_{\frac{1}{2}} c = \log_{\frac{1}{4}} c^2$ ゆえに $a + b < c^2$ $\cdots (*)$

$a + b$ の値に対する (a, b) の組の個数は, 次のようになる.

$a + b$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
個数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

$c = 1$ のとき, $(*)$ を満たす (a, b) の組はない.

$c = 2$ のとき, $(*)$ を満たす (a, b) の組の個数は $1 + 2 = 3$ (通り)

$c = 3$ のとき, $(*)$ を満たす (a, b) の組の個数は

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 = 26 \text{ (通り)}$$

$c = 4, 5, 6$ のとき, $(*)$ を満たす (a, b) の組は, それぞれ 36 通り.

よって, 求める確率は
$$\frac{3 + 26 + 36 \times 3}{6^3} = \frac{137}{216}$$

- (2) $2^a + 2^b + 2^c \equiv (-1)^a + (-1)^b + (-1)^c \pmod{3}$

したがって, $2^a + 2^b + 2^c$ が 3 の倍数となるのは, a, b, c がすべて奇数またはすべて偶数のときである. よって, 求める確率は

$$\frac{3^3 + 3^3}{6^3} = \frac{1}{4}$$

3 曲線 $C: y = x^2 + x + 4 - |3x|$ は

$$y = \begin{cases} (x+2)^2 & (x \leq 0) \\ (x-1)^2 + 3 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$x \leq 0$ のとき, C と直線 $l: y = mx + 4$ の方程式から y を消去すると

$$x(x - m + 4) = 0$$

$m \leq 4$ のとき, C と l の共有点の x 座標は $x = 0, m - 4$

このとき, C と l で囲まれる部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{6}(4 - m)^3$$

$x \geq 0$ のとき, C と l の方程式から y を消去すると

$$x(x - m - 2) = 0$$

$m \geq -2$ のとき, C と l の共有点の x 座標は $x = 0, m + 2$

このとき, C と l で囲まれる部分の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{6}(m + 2)^3$$

ゆえに, C と l で囲まれる部分の面積を S とすると

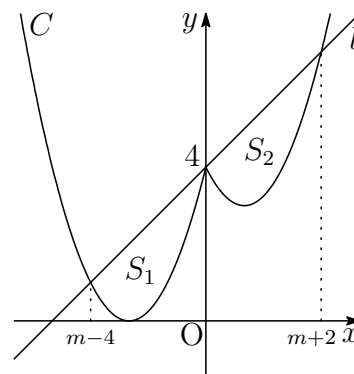
$$S = \begin{cases} S_1 & (m \leq -2) \\ S_1 + S_2 & (-2 \leq m \leq 4) \\ S_2 & (4 \leq m) \end{cases}$$

したがって $m \leq -2$ のとき $S \geq 36$

$-2 \leq m \leq 4$ のとき $S = 3(m - 1)^2 + 9$

$4 \leq m$ のとき $S \geq 36$

よって, $m = 1$ のとき, 面積は最小値 9 をとる. ■



7.14 2014 年

出題分野 1 2 3

1 i は虚数単位とし, 実数 a, b は $a^2 + b^2 > 0$ を満たす定数とする.

複素数 $(a + bi)(x + yi)$ の実部が 2 に等しいような座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を L_1 とし, また $(a + bi)(x + yi)$ の虚部が -3 に等しいような座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を L_2 とする.

(1) L_1 と L_2 はともに直線であることを示せ.

(2) L_1 と L_2 は互いに垂直であることを示せ.

(3) L_1 と L_2 の交点を求めよ.

2 次の問いに答えよ.

(1) $\cos x + \cos y \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y に対して等式

$$\tan \frac{x + y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $\cos x + \cos y + \cos z \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y, z に対して等式

$$\tan \frac{x + y + z}{3} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z}$$

は成り立つか. 成り立つときは証明し, 成り立たないときは反例を挙げよ.

3 関数 $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は, $x = 0$ のとき極大値 M をとり, $x = \alpha$ のとき極小値 m をとるとする. ただし $\alpha \neq 0$ とする. このとき, p, q, r, s を α, M, m で表せ.

解答例

- 1 (1) $(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (bx + ay)i$ であるから, 条件より

$$L_1 = \{(x, y) \mid ax - by = 2\}, \quad L_2 = \{(x, y) \mid bx + ay = -3\}$$

$a^2 + b^2 > 0$ であるから, $(a, b) \neq (0, 0)$ より, L_1, L_2 は直線を表す.

- (2) 2直線 $L_1 : ax - by = 2, L_2 : bx + ay = -3$ の法線ベクトルをそれぞれ

$$\vec{n}_1 = (a, -b), \quad \vec{n}_2 = (b, a)$$

とおくと, $\vec{n}_1 \neq \vec{0}, \vec{n}_2 \neq \vec{0}$ で

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = ab + (-b)a = 0$$

よって, L_1 と L_2 は互いに垂直である.

- (3) $\begin{cases} ax - by = 2 \\ bx + ay = -3 \end{cases}$ これを解いて $(x, y) = \left(\frac{2a - 3b}{a^2 + b^2}, \frac{-3a - 2b}{a^2 + b^2} \right)$ ■

- 2 (1) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$\cos x + \cos y \neq 0$ より, $\cos \frac{x-y}{2} \neq 0$ であることに注意して

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{\sin \frac{x+y}{2}}{\cos \frac{x+y}{2}} = \tan \frac{x+y}{2}$$

- (2) 成立しない.

反例は, $(x, y, z) = (0, 0, \pi), (0, \pi, \pi), (0, 0, \frac{\pi}{2}), (0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ など ■

3 $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ が $x = 0, \alpha$ で極値をとるから、 x^3 の係数に注意して

$$f'(x) = 3px(x - \alpha) = 3px^2 - 3p\alpha x$$

$$f(0) = M \text{ であるから } f(x) = px^3 - \frac{3p\alpha}{2}x^2 + M \quad \cdots (*)$$

また、 $f(\alpha) = m$ であるから

$$p\alpha^3 - \frac{3p\alpha^3}{2} + M = m \quad \text{ゆえに} \quad p = \frac{2(M - m)}{\alpha^3}$$

(*) より、 $q = -\frac{3p\alpha}{2}$. 上式をこれに代入すると

$$q = -\frac{3(M - m)}{\alpha^2}$$

また、(*) の 1 次の項の係数と定数項から $r = 0, s = M$ ■

7.15 2015 年

出題分野 1 2 3

- 1 実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき、不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ.

- 2 直線 $\ell: y = kx + m$ ($k > 0$) が円 $C_1: x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $C_2: y = -\frac{1}{2}x^2$ の両方に接している. このとき、以下の問いに答えよ.

(1) k と m を求めよ.

(2) 直線 ℓ と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

- 3 平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある. 2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し、 $AP = AQ$ となるように線分 AB 上の点 Q をとる. また、直線 PQ と円 C の交点のうち、 P でない方を R とする. このとき、以下の問いに答えよ.

(1) $\triangle AQR$ の面積を $\theta = \angle PAB$ を用いて表せ.

(2) 点 P を動かして $\triangle AQR$ の面積が最大になるとき、 $\overrightarrow{AR}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AP}$ を用いて表せ.

解答例

1 実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
 &= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2x\sqrt{1-y^2} \cdot y\sqrt{1-x^2} \\
 &= \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geq 0, \\
 & 1 - (x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \\
 &= x^2y^2 + (1-x^2)(1-y^2) - 2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \\
 &= \left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

よって $0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$

別解 $x = \cos \alpha, y = \cos \beta$ とおくと ($0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$)

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
 &= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
 &= \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \\
 &= (\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha)^2 = \sin^2(\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$

このとき, $0 \leq \sin^2(\alpha + \beta) \leq 1$ であるから

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$



- 2** (1) $y = -\frac{1}{2}x^2$ を微分すると $y' = -x$
 C_2 上の点 $\left(t, -\frac{1}{2}t^2\right)$ における接線の方程式は

$$y + \frac{1}{2}t^2 = -t(x - t)$$

すなわち $y = -tx + \frac{1}{2}t^2$

これが ℓ に一致するとき $k = -t, m = \frac{1}{2}t^2$

上の2式より, $m = \frac{1}{2}k^2 \dots \textcircled{1}$ であるから $\ell : kx - y + \frac{1}{2}k^2 = 0$

このとき, C_1 の中心 $(0, 1)$ と ℓ の距離が1であるから

$$\frac{|-1 + \frac{1}{2}k^2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(-1 + \frac{1}{2}k^2\right)^2 = k^2 + 1$$

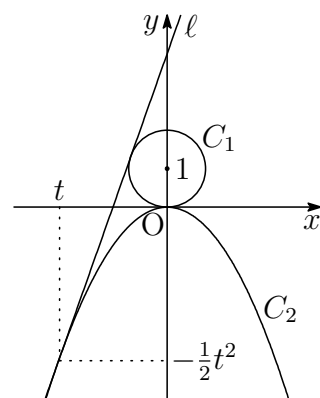
整理すると $\frac{1}{4}k^4 - 2k^2 = 0$ ゆえに $k^2(k^2 - 8) = 0$

$k > 0$ であるから $k = 2\sqrt{2}$ ①より $m = 4$

- (2) $k = -t$ であるから, (1) の結果より $t = -2\sqrt{2}, \ell : y = 2\sqrt{2}x + 4$

求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2\sqrt{2}}^0 \left\{ (2\sqrt{2}x + 4) - \left(-\frac{1}{2}x^2\right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2\sqrt{2}}^0 (x + 2\sqrt{2})^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x + 2\sqrt{2})^3 \right]_{-2\sqrt{2}}^0 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$



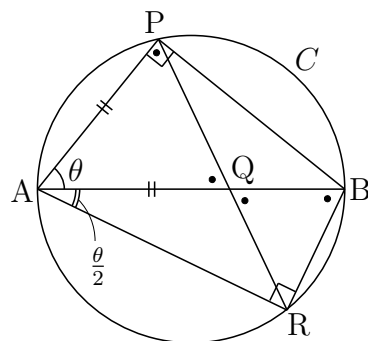
- 3 (1) $AP = AQ$ より $\angle APQ = \angle AQP$
 $\widehat{AR}$ の円周角により $\angle APR = \angle ABR$
 $\angle AQP = \angle RQB$ であるから (対頂角)

$$\angle APQ = \angle AQP = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$\text{ゆえに } \angle BAR = \angle BPR = \frac{\pi}{2} - \angle APQ = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{したがって } AP = AQ = 2 \cos \theta, \quad BR = QR = 2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad AR = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \triangle AQR &= \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot AR \sin \angle QAR \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$



- (2) $\triangle APQ$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{PQ}{\sin \theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \frac{\pi - \theta}{2}} \quad \text{ゆえに} \quad PQ = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } PQ : QR &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} : 2 \sin \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta : \sin \theta = 2 \cos \theta : 1 \end{aligned}$$

ゆえに、点 R は線分 PQ を $(2 \cos \theta + 1) : 1$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{-\overrightarrow{AP} + (2 \cos \theta + 1)\overrightarrow{AQ}}{(2 \cos \theta + 1) - 1} = -\frac{1}{2 \cos \theta} \overrightarrow{AP} + \frac{2 \cos \theta + 1}{2 \cos \theta} \overrightarrow{AQ}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{AQ}{AB} \overrightarrow{AB} = \frac{2 \cos \theta}{2} \overrightarrow{AB} = (\cos \theta) \overrightarrow{AB} \quad \text{であるから}$$

$$\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2 \cos \theta} \overrightarrow{AP} + \frac{2 \cos \theta + 1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\triangle AQR \text{ を最大にするとき } 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{このとき} \quad \overrightarrow{AR} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{AP} + \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \overrightarrow{AB}$$

■

7.16 2016年

出題分野 ① ② ③

① 次の問いに答えよ.

- (1)
- a
- を正の実数とし,
- k
- を1以上の実数とする.
- x
- についての2次方程式

$$x^2 - kax + a - k = 0$$

は, 不等式

$$-\frac{1}{a} < s \leq 1$$

をみたすような実数解 s をもつことを示せ.

- (2)
- a
- を3以上の整数とする.
- $n^2 + a$
- が
- $an + 1$
- で割り切れるような2以上のすべての整数
- n
- を
- a
- を用いて表せ.

② 曲線 $C: y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - 2x$ を考える.

- (1)
- C
- と直線
- $L: y = -x + t$
- が異なる4点で交わるような
- t
- の値の範囲を求めよ.
-
- (2)
- C
- と
- L
- が異なる4点で交わるとし, その交点を
- x
- 座標が小さいものから順に
- P_1, P_2, P_3, P_4
- とするとき,

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}| + |\overrightarrow{P_3P_4}|}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = 4$$

となるような t の値を求めよ.

- (3)
- t
- が(2)の値をとるとき,
- C
- と線分
- P_2P_3
- で囲まれる図形の面積を求めよ.

③ 1以上6以下の2つの整数 a, b に対し, 関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める.

$$(ア) \quad f_1(x) = \sin(\pi x)$$

$$(イ) \quad f_{2n}(x) = f_{2n-1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(ウ) \quad f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

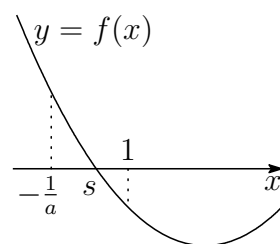
以下の問いに答えよ.

- (1)
- $a = 2, b = 3$
- のとき,
- $f_5(0)$
- を求めよ.
-
- (2) 1個のさいころを2回投げて, 1回目に出る目を
- a
- , 2回目に出る目を
- b
- とするとき,
- $f_6(0) = 0$
- となる確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^2 - kax + a - k$ とおくと ($a > 0, k \geq 1$)

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{a}\right) &= \frac{1}{a^2} + a > 0, \\ f(1) &= 1 - ka + a - k \\ &= (1+a)(1-k) \leq 0 \end{aligned}$$



$f(s) = 0$ をみたす $-\frac{1}{a} < s \leq 1$ が存在する. よって, x に関する 2 次方程式 $x^2 - kax + a - k = 0$ は解 $s \left(-\frac{1}{a} < s \leq 1 \right)$ をもつ.

- (2) $n^2 + a$ が $an + 1$ で割り切れるとき (a は 3 以上の整数, n は 2 以上の整数), $k = \frac{n^2 + a}{an + 1}$ とおくと, k は 1 以上の整数で, 次式が成り立つ.

$$n^2 - kan + a - k = 0$$

これから, n は 2 次方程式

$$f(x) = 0 \quad \cdots (*)$$

の解の 1 つである. したがって, (1) で示した s と n は $(*)$ の解であるから, 解と係数の関係により

$$s + n = ka \quad \text{ゆえに} \quad s = ka - n \quad \cdots \textcircled{1}$$

このとき, $ka - n$ は整数であるから, s は整数でその値の範囲から

$$s = 0 \quad \text{または} \quad s = 1$$

0 が $(*)$ の解であるとき, $f(0) = a - k = 0$ より $k = a$

1 が $(*)$ の解であるとき, $f(1) = (1+a)(1-k) = 0$ より $k = 1$

① より $(s, k) = (0, a)$ のとき $n = a^2$

$(s, k) = (1, 1)$ のとき $n = a - 1$

よって $n = a^2, a - 1$

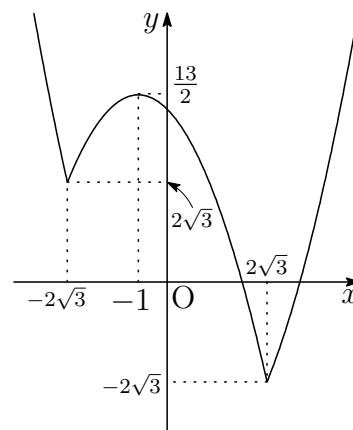


2 (1) $C: y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - 2x$ と $L: y = -x + t$ の

2式から y を消去すると $\left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - x = t$

$y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - x \cdots (*)$ のグラフは

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{13}{2} & (|x| \geq 2\sqrt{3}) \\ -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} & (|x| \leq 2\sqrt{3}) \end{cases}$$



C と L が異なる 4 点で交わるのは, $(*)$ と直線 $y = t$ は異なる 4 点で交わるときであるから

$$2\sqrt{3} < t < \frac{13}{2}$$

(2) x_1, x_4 は $(x_1 < x_4)$

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{13}{2} = t$$

これを解いて $x_1 = 1 - \sqrt{13+2t}$

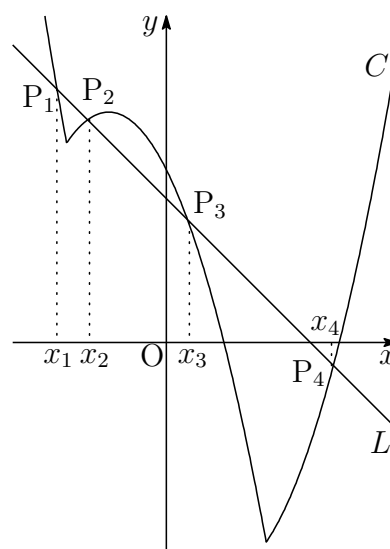
$$x_4 = 1 + \sqrt{13+2t}$$

また, x_2, x_3 は $(x_2 < x_3)$

$$-\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} = t$$

これを解いて $x_2 = -1 - \sqrt{13-2t}$

$$x_3 = -1 + \sqrt{13-2t}$$



直線 L の傾きは -1 であるから

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2}(x_2 - x_1), \quad |\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{2}(x_3 - x_2), \quad |\overrightarrow{P_3P_4}| = \sqrt{2}(x_4 - x_3)$$

これらを $\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}| + |\overrightarrow{P_3P_4}|}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = 4$ に代入すると

$$\frac{\sqrt{2}(x_2 - x_1) + \sqrt{2}(x_4 - x_3)}{\sqrt{2}(x_3 - x_2)} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad x_4 - x_1 = 5(x_3 - x_2)$$

したがって $\sqrt{13+2t} = 5\sqrt{13-2t}$ これを解いて $t = 6$

(3) (2) の結果から, $t = 6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$. 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \left\{ -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} - (-x+6) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-2}^0 x(x+2) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \{0 - (-2)\}^3 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

3 (1) (ア) $f_1(x) = \sin(\pi x)$
 (イ) $f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
 (ウ) $f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } f_{2n+1}(x) &= f_{2n}(-x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - (-x)\right) \\ &= f_{2n-1}\left(x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

したがって $f_5(x) = f_1\left(x + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right)$
 よって, $a = 2$, $b = 3$ のとき, $x = 0$ とすると

$$f_5(0) = f_1\left(\frac{5}{3}\right) = \sin \frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) (**) より $f_6(x) = f_1\left(3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - x\right)$

これに $x = 0$ を代入すると, (ア) により

$$f_6(0) = f_1\left(3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) = \sin 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\pi$$

$f_6(0) = 0$ となるのは, $3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ が整数になるときで, 次の 8 組.

$$(a, b) = (1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 3), (6, 6)$$

よって, 求める確率は $\frac{8}{6^2} = \frac{2}{9}$

■

7.17 2017年

出題分野 1 2 3

1 b, c を実数, q を正の実数とする. 放物線 $P: y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき, 放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ.

2 実数 x, y, z が

$$x + y + z = 1, \quad x + 2y + 3z = 5$$

を満たすとする.

(1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ の最小値を求めよ.

(2) $z \geq 0$ のとき, xyz が最大となる z の値を求めよ.

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく. b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく. 数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ.

解答例

1 放物線 $y = -x^2 + bx + c$ のグラフの頂点の y 座標 q は

$$q = -\frac{b^2 - 4 \cdot (-1)c}{4 \cdot (-1)} = \frac{b^2 + 4c}{4}$$

2次方程式 $-x^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とすると $(\alpha < \beta)$ $\alpha + \beta = b$ $\alpha\beta = -c$

ゆえに $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 + 4c = 4q$ したがって $\beta - \alpha = 2\sqrt{q}$

よって $S = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(2\sqrt{q})^3 = \frac{4}{3}q\sqrt{q}$

別解 放物線の頂点を (p, q) とすると, x^2 の係数に注意して

$$y = -(x - p)^2 + q$$

とおく. この放物線の x 軸との共有点の x 座標は

$$-(x - p)^2 + q = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = p \pm \sqrt{q}$$

よって, 求める面積 S は

$$S = \frac{1}{6}\{(p + \sqrt{q}) - (p - \sqrt{q})\}^3 = \frac{1}{6}(2\sqrt{q})^3 = \frac{4}{3}q\sqrt{q}$$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad \begin{cases} x+y=1-z \\ x+2y=5-3z \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \quad \begin{cases} x=z-3 \\ y=-2z+4 \end{cases}$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

$$x+y+z=1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \\ &= (z-3)^2+(-2z+4)^2+z^2 \\ &\quad - (z-3)(-2z+4) - (-2z+4)z - z(z-3) \\ &= 9z^2-33z+37 \\ &= 9\left(z-\frac{11}{6}\right)+\frac{27}{4} \end{aligned}$$

$$\text{よって } z=\frac{11}{6} \text{ で, 最小値 } \frac{27}{4} \text{ をとる.}$$

$$(2) \quad (*) \text{ より } \quad \begin{aligned} xyz &= (z-3)(-2z+4)z \\ &= -2z^3+10z^2-12z \end{aligned}$$

$$f(z)=-2z^3+10z^2-12z \text{ とおくと } (z \geq 0)$$

$$f'(z)=-6z^2+20z-12=-2(3z^2-10z+6)$$

$$f'(z)=0 \text{ とすると } z=\frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$$

z	0	...	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	...
$f'(z)$		-	0	+	0	-
$f(z)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$f(2)=f(3)=0$, $2 < \frac{5+\sqrt{7}}{3} < 3$ であるから, 上の増減表により, xyz が最大となる z の値は

$$z=\frac{5+\sqrt{7}}{3}$$

補足 $f(z)=f'(z)\left(\frac{1}{3}z-\frac{5}{9}\right)+\frac{4}{9}(7z-15)$ より

$$f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{4}{9}\left(7 \times \frac{5+\sqrt{7}}{3}-15\right)=\frac{4}{27}(7\sqrt{7}-10)>0$$



- 3** (1) $a_{n+1} = 8a_n^2 \cdots (*)$ より $a_n > 0$ のとき, $a_{n+1} > 0$
 $a_1 = 2$ であるから, すべての自然数 n について $a_n > 0$
 $(*)$ の両辺を底を 2 とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8a_n^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 3$$

$$\text{よって} \quad b_{n+1} = 2b_n + 3$$

- (2) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$, (1) の結果から $b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$
 数列 $\{b_n + 3\}$ は, 初項 $b_1 + 3 = 4$, 公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad b_n = 2^{n+1} - 3$$

- (3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ より

$$\begin{aligned} \log_2 P_n &= \log_2 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = \sum_{k=1}^n \log_2 a_k = \sum_{k=1}^n b_k \\ &= \sum_{k=1}^n (2^{k+1} - 3) = \frac{2^2(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n \\ &= 2^{n+2} - 3n - 4 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}$$

- (4) $P_n > 10^{100}$ より $\log_2 P_n > \log_2 10^{100} = 100 \log_2 10$

$$(*) \text{ より } 2^{n+2} - 3n - 4 > 100 \log_2 10$$

$$\text{ここで } \log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16 \text{ より } 300 < 100 \log_2 10 < 400$$

$$\text{また, } q_n = 2^{n+2} - 3n - 4 \text{ とおくと } (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$q_{n+1} - q_n = (2^{n+3} - 3n - 7) - (2^{n+2} - 3n - 4) = 2^{n+2} - 3 > 0$$

$\{q_n\}$ は単調増加列であることに注意して

$$q_6 = 2^8 - 3 \cdot 6 - 4 = 234, \quad q_7 = 2^9 - 3 \cdot 7 - 4 = 487$$

よって, 求める最小の自然数 n は **7**



7.18 2018年

出題分野 1 2 3

1 関数 $f(t) = (\sin t - \cos t) \sin 2t$ を考える.

- (1) $x = \sin t - \cos t$ とおくとき, $f(t)$ を x を用いて表せ.
- (2) t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を動くとき, $f(t)$ の最大値と最小値を求めよ.

2 1個のさいころを3回投げる試行において, 1回目に出る目を a , 2回目に出る目を b , 3回目に出る目を c とする.

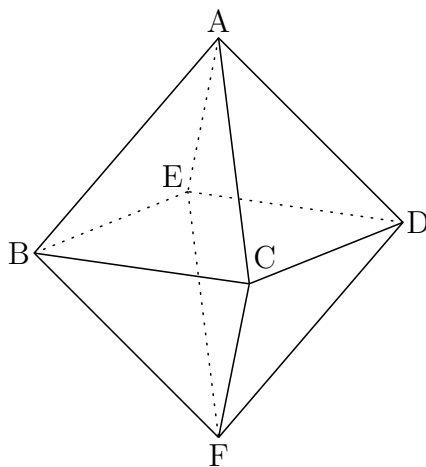
- (1) $\int_a^c (x-a)(x-b) dx = 0$ である確率を求めよ.
- (2) a, b が2以上かつ $2 \log_a b - 2 \log_a c + \log_b c = 1$ である確率を求めよ.

3 座標空間に6点

$$A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(-1, 0, 0), E(0, -1, 0), F(0, 0, -1)$$

を頂点とする正八面体 $ABCDEF$ がある. s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数とする. 線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし, 線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする.

- (1) 4点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ.
- (2) 線分 PQ の中点を L とし, 線分 RS の中点を M とする. s, t が $0 < s < 1, 0 < t < 1$ の範囲を動くとき, 線分 LM の長さの最小値 m を求めよ.
- (3) 正八面体 $ABCDEF$ の4点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする. 線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき, X を最大とするような s, t の値と, そのときの X の値を求めよ.



解答例

1 (1) $x = \sin t - \cos t$ より

$$x^2 = 1 - 2 \sin t \cos t = 1 - \sin 2t \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2t = 1 - x^2$$

$$\text{よって} \quad f(t) = (\sin t - \cos t) \sin 2t = x(1 - x^2) = -x^3 + x$$

$$(2) \quad x = \sin t - \cos t = \sqrt{2} \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \text{ より } (0 \leq t \leq \pi)$$

$$-1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$y = -x^3 + x \text{ とすると } (-1 \leq x \leq \sqrt{2})$$

$$y' = -3x^2 + 1 = -3 \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

$$\text{よって} \quad \text{最大値} \frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{ 最小値 } -\sqrt{2}$$



$$\begin{aligned}
\boxed{2} \quad (1) \quad \int_a^c (x-a)(x-b) dx &= \int_a^c (x-a)\{(x-a) + (a-b)\} dx \\
&= \int_a^c (x-a)^2 dx + (a-b) \int_a^c (x-a) dx \\
&= \frac{1}{3}(c-a)^3 + \frac{1}{2}(a-b)(c-a)^2 \\
&= \frac{1}{6}(c-a)^2(a-3b+2c)
\end{aligned}$$

$$\int_a^c (x-a)(x-b) dx = 0 \text{ であるとき } (c-a)^2(a-3b+2c) = 0$$

したがって $a = c$ または $a + 2c = 3b$

(i) $a = c$ のとき 6^2 通り

(ii) $a + 2c = 3b$ のとき, 次の 12 通り

$b = 1$ のとき $(a, c) = (1, 1)$

$b = 2$ のとき $(a, c) = (4, 1), (2, 2)$

$b = 3$ のとき $(a, c) = (5, 2), (3, 3), (1, 4)$

$b = 4$ のとき $(a, c) = (6, 3), (4, 4), (2, 5)$

$b = 5$ のとき $(a, c) = (5, 5), (3, 6)$

$b = 6$ のとき $(a, c) = (6, 6)$

(iii) $a = c$ かつ $a + 2c = 3b$ すなわち $a = b = c$ のとき 6 通り

(i)~(iii) より, 求める確率は $\frac{6^2 + 12 - 6}{6^3} = \frac{7}{36}$

$$(2) \quad 2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1 \quad \text{より} \quad 2\log_a b - 2\log_a c + \frac{\log_a c}{\log_a b} = 1$$

$$\text{ゆえに} \quad (2\log_a b - 1)(\log_a b - \log_a c) = 0$$

$$\text{したがって} \quad a = b^2 \quad \text{または} \quad b = c \quad (a \geq 2, b \geq 2)$$

(i) $a = b^2$ のとき 次の 6 通り

$$(a, b, c) = (4, 2, i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

(ii) $b = c$ のとき 次の 5^2 通り

$$(a, b, c) = (j, k, k) \quad (j, k = 2, 3, 4, 5, 6)$$

(iii) $a = b^2$ かつ $b = c$ すなわち $(a, b, c) = (4, 2, 2)$ の 1 通り

$$(i) \sim (iii) \text{ より, 求める確率は } \frac{6 + 5^2 - 1}{6^3} = \frac{5}{36}$$

■

- 3** (1) $\vec{a} = (0, 0, 1), \vec{b} = (1, 0, 0), \vec{c} = (0, 1, 0)$ とすると, $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(-\vec{b}), E(-\vec{c}), F(-\vec{a})$ であるから

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, \quad \overrightarrow{OQ} = s\vec{a} + (1-s)\vec{c},$$

$$\overrightarrow{OR} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{b}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{b},$$

$$\overrightarrow{OS} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{c}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{c}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1-s)(\vec{c} - \vec{b}) = (1-s)\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = (t-1)(\vec{b} - \vec{c}) = (1-t)\overrightarrow{BC}$$

$\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{SR}$ であるから, 4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある.

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OL} &= \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b} + \vec{c}), \\ \overrightarrow{OM} &= \frac{\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}}{2} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b} + \vec{c}), \\ \overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = -(s+t)\vec{a} + \frac{1}{2}(s+t-2)(\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{LM} = \left(\frac{s+t-2}{2}, \frac{s+t-2}{2}, -(s+t) \right)$$

ここで, $s+t=2u$ とおくと ($0 < u < 1$) $\overrightarrow{LM} = (u-1, u-1, -2u)$

$$\begin{aligned}m^2 &= |\overrightarrow{LM}|^2 = (u-1)^2 + (u-1)^2 + (-2u)^2 \\ &= 6u^2 - 4u + 2 = 6\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって, $u = \frac{1}{3}$, すなわち, $s+t = \frac{2}{3}$ のとき, m は最小値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) 直線 LM と xy 平面との交点を H とすると, $\vec{a}$ の係数に注意して

$$\overrightarrow{OH} = \frac{t\overrightarrow{OL} + s\overrightarrow{OM}}{s+t} = \frac{t(1-s) + s(t-1)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c})$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HL} &= \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OH} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= s\vec{a} + \frac{s(2-s-t)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}), \\ \overrightarrow{HM} &= -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= -t\vec{a} + \frac{t(s+t-2)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

$s+t = \frac{2}{3}$ を上の 2 式に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HL} &= s(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (s, s, s), \\ \overrightarrow{HM} &= -t(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (-t, -t, -t)\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } |\overrightarrow{HL}| = \sqrt{3}s, \quad |\overrightarrow{HM}| = \sqrt{3}t$$

平面 PQRS と線分 BE, CD のとの交点を
それぞれ H_1 , H_2 とすると

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{BC}$$

ゆえに $|\overrightarrow{H_1H_2}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$

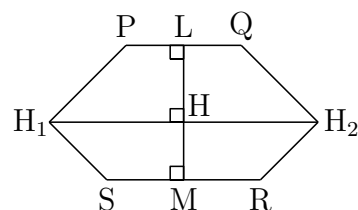
(1) の結果から $|\overrightarrow{PQ}| = (1-s)|\overrightarrow{BC}| = (1-s)\sqrt{2},$

$$|\overrightarrow{SR}| = (1-t)|\overrightarrow{BC}| = (1-t)\sqrt{2}$$

X は 2 つの台形 PH_1H_2Q , H_1SRH_2 の和であるから

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(PQ + H_1H_2)HL + \frac{1}{2}(SR + H_1H_2)HM \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2} \right\} \sqrt{3}s + \frac{1}{2} \left\{ (1-t)\sqrt{2} + \sqrt{2} \right\} \sqrt{3}t \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t = \frac{\sqrt{6}}{2} \{ 2(s+t) - (s^2 + t^2) \} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \{ 4(s+t) - (s+t)^2 - (s-t)^2 \} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \left\{ 4 \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 - (s-t)^2 \right\} = \frac{\sqrt{6}}{4} \left\{ \frac{20}{9} - (s-t)^2 \right\} \end{aligned}$$

よって, $s-t=0$, すなわち, $s=t=\frac{1}{3}$ のとき, X は最大値 $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ ■



7.19 2019年

出題分野 1 2 3

1 xy 平面において, 連立不等式

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 2\sin(x+y) - 2\cos(x+y) \geq \sqrt{2}$$

の表す領域を D とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) D を図示せよ.
- (2) 点 (x, y) が領域 D を動くとき, $2x + y$ の最大値と最小値を求めよ.

2 p を実数の定数とする. x の2次方程式

$$x^2 - (2p + |p| - |p+1| + 1)x + \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1) = 0$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) この2次方程式は実数解をもつことを示せ.
- (2) この2次方程式が異なる2つの実数解 α, β をもち, かつ $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ となるような定数 p の値の範囲を求めよ.

3 座標空間内の2つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

を考える. S_1 と S_2 の共通部分を C とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち, 半径が最小となる球面の方程式を求めよ.
- (2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち, 半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ.

解答例

- 1 (1) $2\sin(x+y) - 2\cos(x+y) \geq \sqrt{2}$ より

$$\sin\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$$

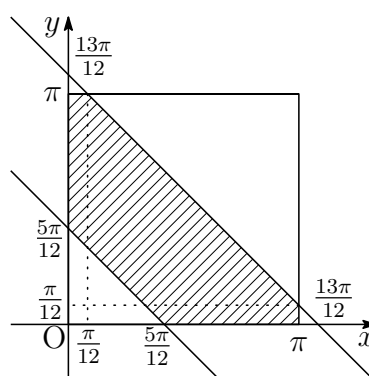
$0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ より,
 $0 \leq x+y \leq 2\pi$ に注意して

$$\frac{\pi}{6} \leq x+y-\frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{6}$$

したがって, D の表す不等式は

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad \frac{5\pi}{12} \leq x+y \leq \frac{13\pi}{12}$$

よって, 領域 D は, 右の図の斜線部分で, 境界線を含む.



- (2) $2x+y=k$ とおくと $y=-2x+k$

これは, 傾き -2 , 切片 k の直線を表す.

D において, k が最大・最小となるのは, それぞれ

$$x=\pi, \quad y=\frac{\pi}{12} \text{ のとき } \text{最大値 } \frac{25}{12}\pi$$

$$x=0, \quad y=\frac{5\pi}{12} \text{ のとき } \text{最小値 } \frac{5}{12}\pi$$

■

- 2 (1) 2 次方程式

$$x^2 - (2p + |p| - |p+1| + 1)x + \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1) = 0 \quad \cdots (*)$$

において

$$|p| = \begin{cases} p & (p \geq 0) \\ -p & (p < 0) \end{cases} \quad |p+1| = \begin{cases} p+1 & (p \geq -1) \\ -p-1 & (p < -1) \end{cases}$$

したがって、次の (i)~(iii) の場合分けを行う.

(i) $p < -1$ のとき, 2 次方程式 (*) は

$$x^2 - (2p+2)x = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0, 2p+2$$

このとき, 2 次方程式 (*) は実数解をもつ.

(ii) $-1 \leq p < 0$ のとき, 2 次方程式 (*) は

$$x^2 - p - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{p+1} \quad (p+1 \geq 0)$$

このとき, 2 次方程式 (*) は実数解をもつ ($p = -1$ のとき重解).

(iii) $0 \leq p$ のとき, 2 次方程式 (*) は

$$x^2 - 2px + 2p - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x-2p+1) = 0$$

これを解いて $x = 1, 2p-1$

このとき, 2 次方程式 (*) は実数解をもつ ($p = 1$ のとき重解).

(i)~(iii) より, 2 次方程式 (*) は, 実数解をもつ.

(2) (1) の結果と同じ場合分けを行う.

i) $p < -1$ のとき

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0^2 + (2p+2)^2 \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (2p+1)(2p+3) \leq 0$$

このとき, $p < -1$ に注意して $-\frac{3}{2} \leq p < -1$

ii) $-1 \leq p < 0$ のとき

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\sqrt{p+1})^2 + (-\sqrt{p+1})^2 < 1 \quad \text{ゆえに} \quad p \leq -\frac{1}{2}$$

このとき, $-1 \leq p < 0$ に注意して $-1 \leq p \leq -\frac{1}{2}$

iii) $0 \leq p$ のとき

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1^2 + (2p-1)^2 \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (2p-1)^2 \leq 0$$

このとき, $0 \leq p$ に注意して $p = \frac{1}{2}$

i)~iii) において $p \neq -1, 1$ であることに注意して

$$-\frac{3}{2} \leq p < -1, \quad -1 < p \leq -\frac{1}{2}, \quad p = \frac{1}{2}$$



3 (1) 2つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

の中心は、それぞれ $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 3)$ であり、この2点間の距離は

$$\sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2} = 3$$

また、 S_1 , S_2 の半径は、それぞれ $\sqrt{7}$, 1 より

$$\sqrt{7} - 1 < 3 < \sqrt{7} + 1$$

したがって、 S_1 と S_2 の共通部分 C は円である。 S_1 と S_2 の方程式から $x^2 + y^2 + z^2$ の項を消去すると、円 C が存在する次の平面の方程式を得る。

$$2x + 4y + 4z - 25 = 0$$

これから、 S_1 との共通部分が C となる球面の方程式は、実数 k を用いて

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 7 + k(2x + 4y + 4z - 25) = 0$$

$$(x+k-1)^2 + (y+2k-1)^2 + (z+2k-1)^2 = 9k^2 + 15k + 7 \quad \cdots (*)$$

$$\text{ゆえに} \quad 9k^2 + 15k + 7 = 9\left(k + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

球面の半径が最小になるのは、 $k = -\frac{5}{6}$ ときで、その方程式は

$$\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$(2) \text{ 球面の半径が } \sqrt{3} \text{ になるとき} \quad 9k^2 + 15k + 7 = 3$$

$$\text{ゆえに} \quad (3k+1)(3k+4) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}$$

上の結果を $(*)$ に代入することにより、求める球面の方程式は

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 &= 3, \\ \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 &= 3 \end{aligned}$$



7.20 2020 年

出題分野 1 2 3

1 a を $0 \leq a < 2\pi$ を満たす実数とする．関数

$$f(x) = 2x^3 - (6 + 3\sin a)x^2 + (12\sin a)x + \sin^3 a + 6\sin a + 5$$

について，以下の問いに答えよ．

- (1) $f(x)$ はただ 1 つの極大値をもつことを示し，その極大値 $M(a)$ を求めよ．
- (2) $0 \leq a < 2\pi$ における $M(a)$ の最大値とそのときの a の値，最小値とそのときの a の値をそれぞれ求めよ．

2 円周を 3 等分する点を時計回りに A, B, C とおく．点 Q は A から出発し，A, B, C を以下のように移動する．1 個のさいころを投げて，1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し，2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し，その他の目が出た場合は移動しない．さいころを n 回投げたあとに Q が A に位置する確率を p_n とする．以下の問いに答えよ．

- (1) p_2 を求めよ．
- (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．
- (3) p_n を求めよ．

3 三角形 ABC において，辺 AB の長さを c ，辺 CA の長さを b で表す． $\angle ACB = 3\angle ABC$ であるとき， $c < 3b$ を示せ．

解答例

- 1** (1) $f(x) = 2x^3 - (6 + 3\sin a)x^2 + (12\sin a)x + \sin^3 a + 6\sin a + 5$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 2(6 + 3\sin a)x + 12\sin a \\ &= 6(x - \sin a)(x - 2) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$\sin a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって, $x = \sin a$ で極大値

$$f(\sin a) = 6\sin^2 a + 6\sin a + 5$$

をただ1つもつ.

- (2) (1) の結果から $M(a) = 6\left(\sin a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$

よって $\sin a = -\frac{1}{2}$, すなわち, $a = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ で最小値 $\frac{7}{2}$

$\sin a = 1$, すなわち, $a = \frac{\pi}{2}$ で最大値 17 ■

- 2** (1) 1 回投げたあとに Q が A に位置する確率は $p_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

1 回投げたあとに Q が B, C に位置する確率はともに $\frac{1}{2}(1 - p_1)$

よって $p_2 = p_1 \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2}(1 - p_1) \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

- (2) n 回投げたあとに, Q が B, C に位置する確率はともに $\frac{1}{2}(1 - p_n)$

よって $p_{n+1} = p_n \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2}(1 - p_n) \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}$

- (3) (2) の結果から $p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$

ゆえに $p_n - \frac{1}{3} = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ よって $p_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ ■

3 $C = \angle ACB$, $B = \angle ABC$ とする. 正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$C = 3B \text{ であるから } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin 3B} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin 3B}{\sin B} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$B + C < \pi, \quad C = 3B \text{ より, } B < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\sin 3B}{\sin B} = \frac{3 \sin B - 4 \sin^3 B}{\sin B} = 3 - 4 \sin^2 B < 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \frac{c}{b} = \frac{\sin 3B}{\sin B} < 3 \quad \text{よって} \quad c < 3b$$



7.21 2021 年

出題分野 1 2 3

1 a を実数とする. C を放物線 $y = x^2$ とする.

- (1) 点 $A(a, -1)$ を通るような C の接線は, ちょうど 2 本存在することを示せ.
- (2) 点 $A(a, -1)$ から C に 2 本の接線を引き, その接点を P, Q とする. 直線 PQ の方程式は $y = 2ax + 1$ であることを示せ.
- (3) 点 $A(a, -1)$ と直線 $y = 2ax + 1$ の距離を L とする. a が実数全体を動くとき, L の最小値とそのときの a の値を求めよ.

2 空間内に, 同一平面上にない 4 点 O, A, B, C がある. s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ をみたす実数とする. 線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0 , 線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0 , 線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P , 線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする. さらに 4 点 A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあるとする.

- (1) t を s を用いて表せ.
- (2) $|\vec{OA}| = 1, |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 2, \angle AOB = 120^\circ, \angle BOC = 90^\circ, \angle COA = 60^\circ, \angle POQ = 90^\circ$ であるとき, s の値を求めよ.

3 整数 a, b, c に関する次の条件 (*) を考える.

$$\int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \quad \cdots (*)$$

- (1) 整数 a, b, c が (*) および $a \neq b$ をみたすとき, c^2 を a, b を用いて表せ.
- (2) $c = 3$ のとき, (*) および $a < b$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ.
- (3) 整数 a, b, c が (*) および $a \neq b$ をみたすとき, c は 3 の倍数であることを示せ.

解答例

- 1 (1) $y = x^2$ より, $y' = 2x$ であるから, 曲線 $C: y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2$$

これが点 $A(a, -1)$ を通るとき

$$-1 = 2ta - t^2 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 2at - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

t に関する2次方程式(*)の判別式は

$$D/4 = (-a)^2 - 1 \cdot (-1) = a^2 + 1 > 0$$

したがって, 2次方程式(*)は異なる2つの実数解をもつ, すなわち, $A(a, -1)$ を通る C の接線は, ちょうど2本存在する.

- (2) 接点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とおくと, 2次方程式(*)の解と係数の関係により

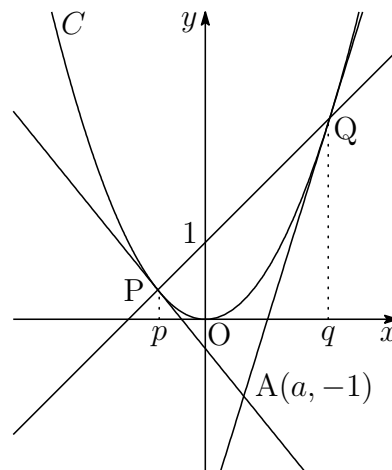
$$p + q = 2a, \quad pq = -1 \quad \cdots (**)$$

2点 $P(p, p^2), Q(q, q^2)$ を通る直線は

$$y - p^2 = \frac{q^2 - p^2}{q - p}(x - p)$$

整理すると $y = (p + q)x - pq$

(**) より $y = 2ax + 1$



- (3) 点 $A(a, -1)$ と直線 $2ax - y + 1 = 0$ の距離 L は

$$\begin{aligned} L &= \frac{|2a \cdot a - (-1) + 1|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = \frac{2(a^2 + 1)}{\sqrt{4a^2 + 1}} = \frac{a^2 + 1}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{a^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

等号が成立するとき $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}}$

$$a^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{これを解いて} \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

このとき, L の最小値は $\sqrt{3}$

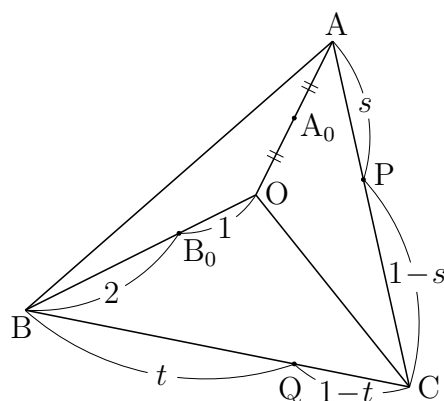


- 2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$
 とすると, $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AC}$ より ($0 < s < 1$)

$$\vec{p} - \vec{a} = s(\overrightarrow{OC} - \vec{a})$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{OC} = \left(1 - \frac{1}{s}\right)\vec{a} + \frac{1}{s}\vec{p}$$

点 Q は線分 BC を $t : (1-t)$ に内分する点であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\left\{\left(1 - \frac{1}{s}\right)\vec{a} + \frac{1}{s}\vec{p}\right\} \\ &= t\left(1 - \frac{1}{s}\right)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + \frac{t}{s}\vec{p}\end{aligned}$$

$\vec{a} = 2\overrightarrow{OA_0}$, $\vec{b} = 3\overrightarrow{OB_0}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ であるから

$$\overrightarrow{OQ} = 2t\left(1 - \frac{1}{s}\right)\overrightarrow{OA_0} + 3(1-t)\overrightarrow{OB_0} + \frac{t}{s}\overrightarrow{OP}$$

点 Q は平面 A_0B_0P 上の点であるから

$$2t\left(1 - \frac{1}{s}\right) + 3(1-t) + \frac{t}{s} = 1 \quad \text{よって} \quad t = \frac{2s}{s+1}$$

- (2) 条件から $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos 90^\circ = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$\vec{p} = s\vec{c} + (1-s)\vec{a}$, $\vec{q} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$ について

$$\begin{aligned}\vec{p} \cdot \vec{q} &= \{s\vec{c} + (1-s)\vec{a}\} \cdot \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \\ &= s(1-t)\vec{b} \cdot \vec{c} + st|\vec{c}|^2 + (1-s)(1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-s)t\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 4st - (1-s)(1-t) + (1-s)t \\ &= 2t(s+1) + s - 1\end{aligned}$$

(1) の結果および, $\angle POQ = 90^\circ$ より $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ であるから

$$2 \cdot \frac{2s}{s+1}(s+1) + s - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad s = \frac{1}{5}$$



$$\boxed{3} \quad (1) \quad \int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \quad \cdots (*)$$

$$(*) \text{ より } \int_a^b x^2 dx + b \int_a^c x dx - a \int_b^c x dx = 0$$

$$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \frac{b}{2}(c^2 - a^2) - \frac{a}{2}(c^2 - b^2) = 0$$

$$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \frac{c^2}{2}(b - a) + \frac{ab}{2}(b - a) = 0$$

$$a \neq b \text{ であるから } 2(a^2 + ab + b^2) + 3c^2 + 3ab = 0$$

$$\text{したがって } c^2 = -\frac{1}{3}(2a + b)(a + 2b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(2) \quad \textcircled{1} \text{ から } 2a + b \equiv 0 \quad \text{または} \quad a + 2b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$(2a + b) + (a + 2b) = 3(a + b) \text{ であるから}$$

$$2a + b \equiv 0, \quad a + 2b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \frac{2a + b}{3} \cdot \frac{a + 2b}{3} = -\frac{c^2}{3} \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$$\frac{2a + b}{3}, \frac{a + 2b}{3} \text{ は, ともに整数である.}$$

$$c = 3 \text{ を } \textcircled{1}' \text{ に代入すると } \frac{2a + b}{3} \cdot \frac{a + 2b}{3} = -3$$

$$\frac{a + 2b}{3} - \frac{2a + b}{3} = \frac{b - a}{3} > 0$$

に注意すると

$$\begin{cases} \frac{2a + b}{3} = -3 \\ \frac{a + 2b}{3} = 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{2a + b}{3} = -1 \\ \frac{a + 2b}{3} = 3 \end{cases}$$

$$\text{これらを解いて } (a, b) = (-7, 5), (-5, 7)$$

$$(3) \quad \textcircled{1}' \text{ の左辺は整数より, } c^2 \text{ は } 3 \text{ で割り切れるから, } c \text{ は } 3 \text{ の倍数である. } \blacksquare$$

7.22 2022 年

出題分野 1 2 3

- 1 三角形 ABC において、辺 AB を 2 : 1 に内分する点を M, 辺 AC を 1 : 2 に内分する点を N とする. また、線分 BN と線分 CM の交点を P とする.

- (1) $\overrightarrow{AP}$ を, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ.
- (2) 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とするとき、線分 AP の長さを, a, b, c を用いて表せ.

- 2 n を 2 以上の自然数とし、1 個のさいころを n 回投げて出る目の数を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする. $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小公倍数を L_n , 最大公約数を G_n とするとき、以下の問いに答えよ.

- (1) $L_2 = 5$ となる確率および $G_2 = 5$ となる確率を求めよ.
- (2) L_n が素数でない確率を求めよ.
- (3) G_n が素数でない確率を求めよ.

- 3 以下の問いに答えよ.

- (1) 実数 α, β に対し,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{(\alpha - \beta)^3}{6}$$

が成り立つことを示せ.

- (2) a, b を $b > a^2$ を満たす定数とし、座標平面上に点 $A(a, b)$ をとる. さらに、点 A を通り、傾きが k の直線を ℓ とし、直線 ℓ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積を $S(k)$ とする. k が実数全体を動くとき、 $S(k)$ の最小値を求めよ.

解答例

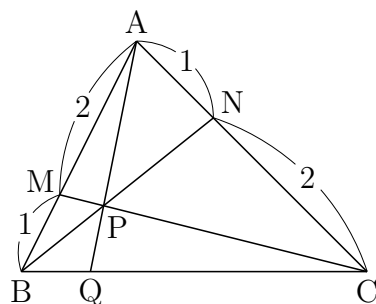
1 (1) $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ とおく.
 $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{3}{2}x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{AP} &= x\overrightarrow{AB} + 3y\overrightarrow{AN}\end{aligned}$$

P は MC および BN 上の点であるから

$$\frac{3}{2}x + y = 1, \quad x + 3y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{4}{7}, \quad y = \frac{1}{7}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$$



別解 直線 AP と辺 BC の交点を Q とする. チェバの定理により

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{2}{1} = 1 \quad \text{すなわち} \quad BQ : QC = 1 : 4$$

$\triangle ABQ$ および直線 MC について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BC}{CQ} \cdot \frac{QP}{PA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{PQ}{AP} = 1 \quad \text{すなわち} \quad AP : PQ = 5 : 2$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{5}, \quad \overrightarrow{AP} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AQ} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{7}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \quad \text{より} \quad |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}|^2 &= \frac{1}{49}(16|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 8\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{49} \left\{ 16|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 8 \cdot \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2) \right\} \\ &= \frac{1}{49}(20|\overrightarrow{AB}|^2 + 5|\overrightarrow{AC}|^2 - 4|\overrightarrow{BC}|^2) = \frac{1}{49}(20c^2 + 5b^2 - 4a^2)\end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad AP = \frac{1}{7}\sqrt{20c^2 + 5b^2 - 4a^2}$$

■

- 2** (1) $L_2 = 5$ となるとき $(X_1, X_2) = (1, 5), (5, 1), (5, 5)$

$$\text{よって, } L_2 = 5 \text{ となる確率は } \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

$$G_2 = 5 \text{ となるとき } (X_1, X_2) = (5, 5)$$

$$\text{よって, } G_2 = 5 \text{ となる確率は } \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

- (2) L_n が素数であるのは, $L_n = 2, 3, 5$ のときである.

$L_n = 2$ となるのは, $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ とすると, $X \subset \{1, 2\}$ で $X = \{1\}$ の場合を除くから, その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$L_n = 3, 5$ の場合もこれと等しい. 求める確率はこれらの余事象の確率であるから

$$1 - 3 \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3 \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

- (3) G_n が素数であるのは, $G_n = 2, 3, 5$ のときである.

$G_n = 2$ となるのは, $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ とすると, $X \subset \{2, 4, 6\}$ で, $X = \{4\}$ と $X = \{6\}$ の場合を除くから, その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$G_n = 3$ となるのは, $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ とすると, $X \subset \{3, 6\}$ で, $X = \{6\}$ の場合を除くから, その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$G_n = 5$ となるのは, $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ とすると, $X \subset \{5\}$ の場合であるから, その確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

G_n が素数となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

この余事象の確率であるから $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \left(\frac{1}{6}\right)^n$ ■

3 (1)

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \\
 &= \frac{1}{6}(\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3) = \frac{(\alpha - \beta)^3}{6}
 \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)\{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(x - \alpha)\} dx \\
 &= \left[\frac{(x - \alpha)^3}{3} - \frac{(\beta - \alpha)(x - \alpha)^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} - \frac{(\beta - \alpha)^3}{2} = \frac{(\alpha - \beta)^3}{6}
 \end{aligned}$$

(2) 点 A(a, b) を通り, 傾き k の直線 ℓ の方程式は

$$y - b = k(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = kx - ka + b$$

ℓ と放物線 $y = x^2$ の方程式から y を消去すると

$$x^2 = kx - ka + b \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - kx + ka - b = 0 \quad (*)$$

$$\text{これを解くと} \quad x = \frac{k \pm \sqrt{D}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{ただし} \quad D = k^2 - 4(ka - b) = (k - 2a)^2 + 4(b - a^2) \quad \dots \textcircled{2}$$

条件から, $b > a^2$ なので $D > 0$

したがって, ①の2つの実数解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

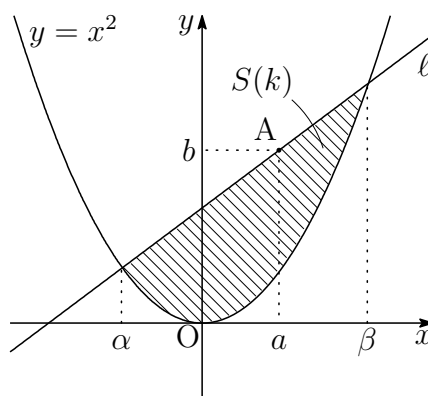
$$\beta - \alpha = \sqrt{D} = \sqrt{(k - 2a)^2 + 4(b - a^2)} \quad (**)$$

(*) より, 2 次方程式 $x^2 - kx + ka - b = 0$ の解が α, β であるから

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_{\alpha}^{\beta} (kx - ka + b - x^2) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - kx + ka - b) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = - \frac{(\alpha - \beta)^3}{6} = \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} \end{aligned}$$

$S(k)$ が最小となるとき, (**) より, $k = 2a$ であるから, $S(k)$ の最小値は

$$S(2a) = \frac{\{\sqrt{4(b - a^2)}\}^3}{6} = \frac{4}{3}(b - a^2)^{\frac{3}{2}}$$



補足 $S(k)$ が最小となるとき, ℓ の傾き k は α, β の中央 $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ における $y = x^2$ の接線の傾きと等しい. ■

7.23 2023 年

出題分野 1 2 3

1 a, b を実数とする. θ についての方程式

$$\cos 2\theta = a \sin \theta + b$$

が実数解をもつような点 (a, b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ.

2 正の実数 a, x に対して,

$$y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^3 + a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$$

とする.

(1) $t = \log_2 x$ とするとき, y を a, t を用いて表せ.

(2) x が $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ の範囲を動くとき, y の最大値 M を a を用いて表せ.

3 平面上の3点 O, A, B が

$$|2\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする.

(1) $(2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB})$ を求めよ.

(2) 平面上の点 P が

$$|\vec{OP} - (\vec{OA} + \vec{OB})| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \vec{OP} \cdot (2\vec{OA} + \vec{OB}) \leq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき, $|\vec{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad \cos 2\theta = a \sin \theta + b \text{ より } 2 \sin^2 \theta + a \sin \theta + b - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

$$f(t) = 2t^2 + at + b - 1 \text{ とおくと } f(t) = 2 \left(t + \frac{a}{4} \right)^2 - \frac{a^2}{8} + b - 1$$

(*) が実数解をもつことは, $f(t) = 0$ が $-1 \leq t \leq 1$ に解をもつことである.

したがって, 次の (i) または (ii) を満たす場合である.

(i) $f(t) = 0$ の解の 1 つだけが $-1 \leq t \leq 1$, すなわち, $f(1)f(-1) \leq 0$ のとき

$$(a + b + 1)(-a + b + 1) \leq 0$$

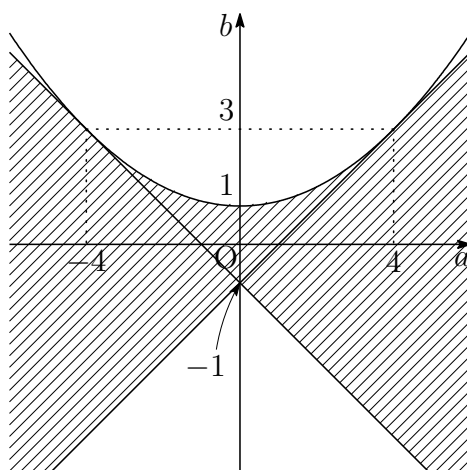
(ii) $f(t) = 0$ の解がともに $-1 \leq t \leq 1$ であるとき

$$-1 \leq -\frac{a}{4} \leq 1, \quad -\frac{a^2}{8} + b - 1 \leq 0, \quad f(1) \geq 0, \quad f(-1) \geq 0$$

すなわち

$$-4 \leq a \leq 4, \quad b \leq \frac{a^2}{8} + 1, \quad a + b + 1 \geq 0, \quad -a + b + 1 \geq 0$$

よって, 点 (a, b) の表す領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



- 2 (1) $y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^3 + a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$ より

$$\begin{aligned} y &= (-\log_2 x)^3 + a(2\log_2 x) \left(\frac{3}{2} \log_2 x \right) \\ &= -(\log_2 x)^3 + 3a(\log_2 x)^2 \end{aligned}$$

$$t = \log_2 x \text{ とすると } \quad y = -t^3 + 3at^2$$

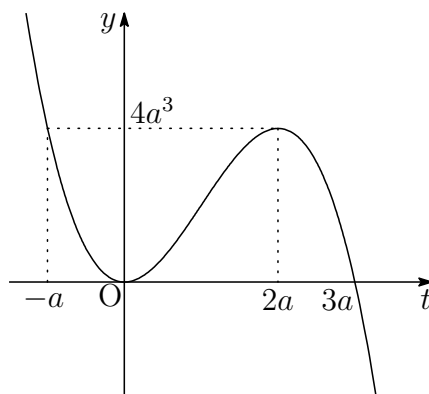
- (2) $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ のとき, $-1 \leq t \leq 3$ であるから

$$f(t) = -t^3 + 3at^2 \quad (-1 \leq t \leq 3)$$

$$\text{とおくと, } f'(t) = -3t^2 + 6at = -3t(t - 2a)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$

$f(-a) = f(2a)$ に注意すると, $y = f(t)$ のグラフは次のようになる.



- (i) $-1 \leq -a$, すなわち, $0 < a \leq 1$ のとき $M = f(-1)$
(ii) $-a \leq -1$, $2a \leq 3$, すなわち, $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$ のとき $M = f(2a)$
(iii) $3 \leq 2a$, すなわち, $\frac{3}{2} \leq a$ のとき $M = \max\{f(-1), f(3)\}$

$$f(3) - f(-1) = (27a - 27) - (3a + 1) = 24a - 28 = 24 \left(a - \frac{7}{6} \right) > 0$$

$$(i) \sim (iii) \text{ より } \quad M = \begin{cases} 3a + 1 & (0 < a \leq 1) \\ 4a^3 & \left(1 \leq a < \frac{3}{2} \right) \\ 27a - 27 & \left(\frac{3}{2} \leq a \right) \end{cases}$$

■

3 (1)

$$(*) \begin{cases} |\overrightarrow{2OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}| = 1 \\ (\overrightarrow{2OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{2OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{u}, \quad \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = \vec{v} \text{ とおくと } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$$

$$\text{これらを } (*) \text{ に代入すると } |\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \right) = \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\text{よって } (\overrightarrow{2OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}) = 0$$

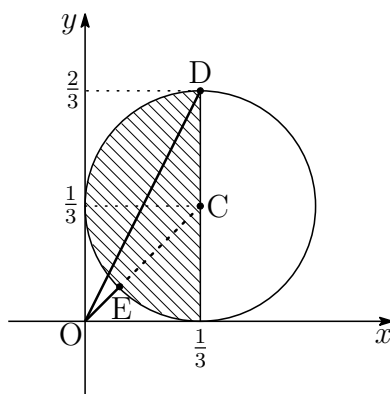
(2) 与えられた条件から

$$\left| \overrightarrow{OP} - \left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \right) \right| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} \leq \frac{1}{3}$$

(1) の結果から, $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ とし, $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ とおくと

$$\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 \leq \frac{1}{9} \quad \text{かつ} \quad x \leq \frac{1}{3}$$

点 P の表す領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



$$\text{上の図において } |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$|\overrightarrow{OE}| = |\overrightarrow{OC}| - |\overrightarrow{CE}| = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

$$\text{よって } |\overrightarrow{OP}| \text{ の最大値 } \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ 最小値 } \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

7.24 2024年

出題分野 1 2 3

1 曲線 $y = |x^2 - 1|$ を C , 直線 $y = 2a(x + 1)$ を ℓ とする. ただし, a は $0 < a < 1$ を満たす実数とする.

- (1) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ.
- (2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた2つの部分の面積が等しくなる a の値を求めよ.

2 座標空間内の直線 ℓ と z 軸はねじれの位置にあるとする. ℓ と z の両方に直交する直線がただ1つ存在することを示せ.

3 素数を小さい順に並べて得られる数列を

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

とする.

- (1) p_{15} の値を求めよ.
- (2) $n \geq 12$ のとき, 不等式 $p_n > 3n$ が成り立つことを示せ.

解答例

1 (1) 曲線 C は $y = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \leq -1, 1 \leq x) \\ -x^2 + 1 & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$

C と $\ell: y = 2a(x+1)$ の共有点は、次の (i), (ii) の場合に分けて求める.

(i) 曲線 $y = x^2 - 1$ と直線 ℓ の共有点の共有点の x 座標は

$$x^2 - 1 = 2a(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-1-2a) = 0$$

$0 < a < 1$ より, $1 < 1+2a$ に注意して $x = -1, 1+2a$

(ii) 曲線 $y = -x^2 + 1$ と直線 ℓ の共有点の共有点の x 座標は

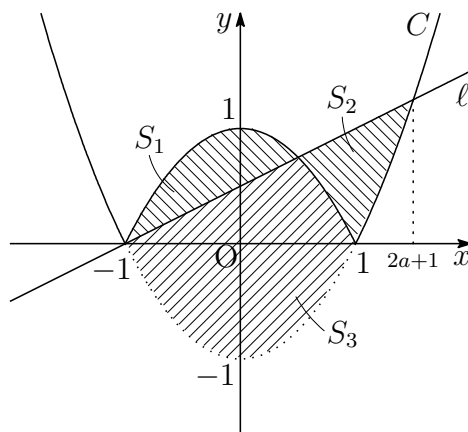
$$-x^2 + 1 = 2a(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-1+2a) = 0$$

$0 < a < 1$ より, $-1 < 1-2a < 1$ に注意して $x = -1, 1-2a$

求める共有点の座標は (i), (ii) の結果を ℓ に代入して

$$(-1, 0), (1+2a, 4a(1+a)), (1-2a, 4a(1-a))$$

(2) 下の図のように、それぞれの斜線部分の面積を S_1, S_2, S_3 とする.



$S_1 = S_2$ であるから, $S_1 + S_3 = S_2 + S_3$ を利用する.

$$S_1 + S_3 = 2 \times \frac{1}{6} \{1 - (-1)\}^3 = \frac{8}{3},$$

$$S_2 + S_3 = \frac{1}{6} \{(2a+1) - (-1)\}^3 = \frac{4}{3}(a+1)^3$$

したがって $\frac{4}{3}(a+1)^3 = \frac{8}{3}$ これを解いて $a = \sqrt[3]{2} - 1$ ■

- 2 直線 ℓ と z 軸の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ とする. ℓ と z 軸は平行ではないから, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直なベクトルを $\vec{n}$ とし, 直線 ℓ および z 軸上の定点をそれぞれ $A(\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{n})$, $B(\beta\vec{n})$ とする.

ℓ を含み, $\vec{n}$ に平行な平面 S のベクトル方程式は, 媒介変数 s_1, s_2 を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OA} + s_1\vec{a} + s_2\vec{n} &= \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{n} + s_1\vec{a} + s_2\vec{n} \\ &= (s_1 + \alpha_1)\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + (s_2 + \alpha_3)\vec{n}\end{aligned}$$

z 軸を含み, $\vec{n}$ に平行な平面 T のベクトル方程式は, 媒介変数 t_1, t_2 を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OB} + t_1\vec{b} + t_2\vec{n} &= \beta\vec{n} + t_1\vec{b} + t_2\vec{n} \\ &= t_1\vec{b} + (t_2 + \beta)\vec{n}\end{aligned}$$

S と T の共通部分は

$$(s_1 + \alpha_1)\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + (s_2 + \alpha_3)\vec{n} = t_1\vec{b} + (t_2 + \beta)\vec{n} \quad (*)$$

これを整理すると

$$(s_1 + \alpha_1)\vec{a} + (-t_1 + \alpha_2)\vec{b} + (s_2 - t_2 + \alpha_3 - \beta)\vec{n} = \vec{0}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ は, 1 次独立であるから

$$s_1 + \alpha_1 = 0, \quad -t_1 + \alpha_2 = 0, \quad s_2 - t_2 + \alpha_3 - \beta = 0$$

上の第 1 式, 第 2 式から

$$s_1 = -\alpha_1, \quad t_1 = \alpha_2$$

このとき, 直線 ℓ および z 軸上の 2 定点 P , Q をそれぞれ

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s_1\vec{a}, \quad \vec{OQ} = \vec{OB} + t_1\vec{b}$$

とおくと, 2 平面 S , T の共通部分は, $(*)$ より

$$\vec{OP} + s_2\vec{n} = \vec{OQ} + t_2\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{PQ} = (s_2 - t_2)\vec{n}$$

よって, 直線 ℓ および z 軸の両方に直交する直線 PQ がただ 1 つ存在する. ■

3 (1) k を 0 以上整数とすると, 整数

$$6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$$

について, 素数を調べると

$k=0$ のとき, 素数は $6k+2=2$, $6k+3=3$, $6k+5=5$

$k \geq 1$ のとき, 素数は $6k+1$, $6k+5$ のどちらかである.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$6k+1$	7	13	19		31	37	43			61	67	...
$6k+5$	11	17	23	29		41	47	53	59		71	...

したがって

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_k	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47

よって $p_{15} = 47$

(2) (1) の表から, $p_{12} = 37 > 3 \cdot 12$, $p_{13} = 41 > 3 \cdot 13$

$a_{2k} = 6k+1$, $a_{2k+1} = 6k+5$ とすると ($k \geq 6$)

$$a_{2k} = 6k+1 > 3 \cdot 2k, \quad a_{2k+1} = 6k+5 > 3(2k+1)$$

したがって $a_n > 3n$ ($n \geq 12$)

$n \geq 12$ のとき, $p_n \geq a_n$ であるから $p_n > 3n$ ■

第 8 章 神戸大学

出題分野 (2011-2024) 80 分

◀	神戸大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	数と式														
	2 次関数														
	図形と計量														
	データの分析														
II	式と証明		3								2				
	複素数と方程式														
	図形と方程式	2	1	2		1							2	1・3	
	三角関数														
	指数関数と対数関数														
	微分法と積分法	1	2		1		2	1・2		1	1		1		3
A	場合の数と確率	3		3		3	3	3	3		3			2	2
	整数の性質				2					2		1	3		
	図形の性質														
B	平面上のベクトル									3					
	空間のベクトル			1	3		1		1			3			
	数列					2			2		2				1
	確率分布と統計														

数字は問題番号

8.11 2011 年 (80 分)

出題分野 ① ② ③

① 実数 x, y に対して, 等式

$$x^2 + y^2 = x + y \quad \cdots \textcircled{1}$$

を考える. $t = x + y$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) ① の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ.
- (2) x と y が ① の等式をみたすとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) x と y が ① の等式をみたすとする.

$$F = x^3 + y^3 - x^2y - xy^2$$

を t を用いた式で表せ. また, F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ.

② xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり, 線分 AC と BD は原点 O で交わっている. 点 A の座標は (1, 2) で, 線分 OA と OD の長さは等しく, 四角形 ABCD は円に内接している. $\angle AOD = \theta$ とおき, 点 C の x 座標を a , 四角形 ABCD の面積を S とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ. また, 線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ.
- (2) S を a と θ を用いた式で表せ.
- (3) $\theta = \frac{\pi}{6}$ とし, $20 \leq S \leq 40$ とするとき, a のとりうる値の最大値を求めよ.

- 3** 袋の中に 0 から 4 までの数字のうち 1 つが書かれたカードが 1 枚ずつ合計 5 枚入っている. 4 つの数 0, 3, 6, 9 をマジックナンバーと呼ぶことにする. 次のようなルールをもつ, 1 人で行うゲームを考える.

[ルール] 袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出していく. ただし, 一度取り出したカードは袋に戻さないものとする. 取り出したカードの数字の合計がマジックナンバーになったとき, その時点で負けとし, それ以降はカードを取り出さない. 途中で負けとなることなく, すべてのカードを取り出せたとき, 勝ちとする.

以下の問に答えよ.

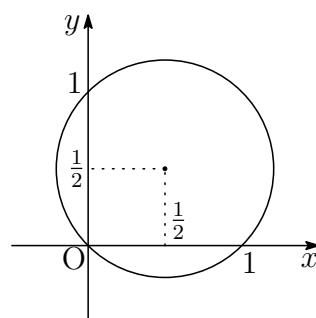
- (1) 2 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ.
- (2) 3 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ.
- (3) このゲームで勝つ確率を求めよ.

解答例

1 (1) $x^2 + y^2 = x + y \cdots \textcircled{1}$

これを变形すると

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

よって、中心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 、半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円

(2) 円 $\textcircled{1}$ の中心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ と直線 $x + y - t = 0$ との距離を d とすると

$$d = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - t\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|t - 1|}{\sqrt{2}}$$

$\textcircled{1}$ の半径 r は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、このとき、 $d \leq r$ であるから

$$\frac{|t - 1|}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{これを解いて} \quad 0 \leq t \leq 2$$

別解 2 次方程式 $u^2 - (x + y)u + xy = 0$ の解 x, y が実数解であるとき

$$D = (x + y)^2 - 4xy \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4xy \leq t^2$$

$$\textcircled{1} \text{ より } (x + y)^2 = 2xy + x + y \quad \text{ゆえに} \quad 2xy = t^2 - t$$

$$xy \text{ を消去すると } 2(t^2 - t) \leq t^2 \quad \text{これを解いて} \quad 0 \leq t \leq 2$$

(3) $\textcircled{1}$ より $2xy = t^2 - t$

$$\begin{aligned} F &= x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \\ &= (x + y)^3 - 2 \cdot 2xy(x + y) \\ &= t^3 - 2(t^2 - t)t = -t^3 + 2t^2 \\ \frac{dF}{dt} &= -3t^2 + 4t = -t(3t - 4) \end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{dF}{dt}$		+	0	-	
F	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0

よって、 F は $t = \frac{4}{3}$ で最大値 $\frac{32}{27}$ 、 $t = 0, 2$ で最小値 0 をとる。 ■

- 2 (1) 点 C は直線 $OA : y = 2x$ 上にあり,

C の x 座標が a より $C(a, 2a)$

C は原点 O に関して A と反対側にあるから $a < 0$

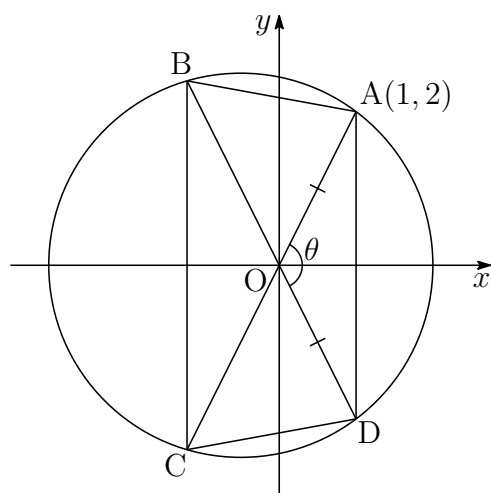
$$\begin{aligned} \text{よって } OC &= \sqrt{a^2 + (2a)^2} \\ &= \sqrt{5}|a| = -\sqrt{5}a \end{aligned}$$

方べきの定理により

$$OA \cdot OC = OB \cdot OD$$

条件により, $OA = OD$ であるから

$$OB = OC$$



- (2) (1) の結果から $AC = BD = OA + OC = \sqrt{5} + (-\sqrt{5}a) = \sqrt{5}(1 - a)$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \theta = \frac{5}{2}(1 - a)^2 \sin \theta$$

- (3) (2) の結果から, $\theta = \frac{\pi}{6}$ より $S = \frac{5}{4}(1 - a)^2$

$20 \leq S \leq 40$ のとき

$$20 \leq \frac{5}{4}(1 - a)^2 \leq 40 \quad \text{ゆえに} \quad 4 \leq |1 - a| \leq 4\sqrt{2}$$

$a < 0$ より, $1 - a > 0$ であるから

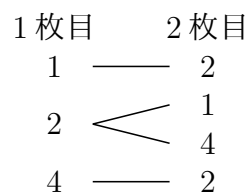
$$4 \leq 1 - a \leq 4\sqrt{2} \quad \text{これを解いて} \quad 1 - 4\sqrt{2} \leq a \leq -3$$

よって, a のとりうる値の最大値は -3



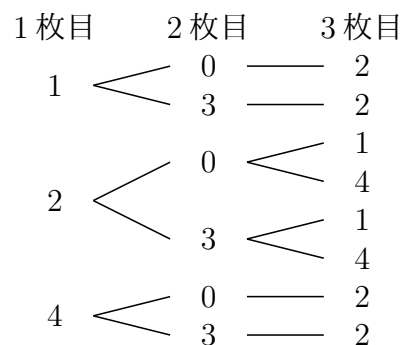
- 3** (1) n 枚目 ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) のカードを取り出したところで負けとなる確率を p_n とする.

2 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは、右のような場合で、求める確率は



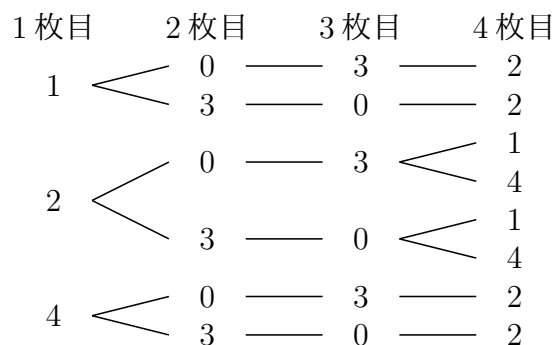
$$p_2 = \frac{4}{5 \cdot 4} = \frac{1}{5}$$

- (2) 3 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは、右のような場合で、求める確率は



$$p_3 = \frac{8}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

- (3) 4 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは、右のような場合で、その確率は



$$p_4 = \frac{8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{15}$$

1 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは、0 または 3 のカードを取り出す確率であるから

$$p_1 = \frac{2}{5}$$

よって、このゲームで勝つ確率は

$$1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{5}$$

別解 5 枚のカードを, 0, 0, 1, 1, 2 とし, 数 0, 3 をマジックナンバーとする.

(1) 2 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは

$$1-2, \quad 2-1$$

$$\text{よって} \quad p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

(2) 3 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは

$$1-0-2, \quad 2-0-1$$

$$\text{よって} \quad p_3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

(3) 4 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは

$$1-0-0-2, \quad 2-0-0-1$$

$$\text{よって} \quad p_4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{15}$$

$p_1 = \frac{2}{5}$ であるから, 求める確率は

$$1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{5}$$



8.12 2012年(80分)

出題分野 1 2 3

- 1 座標平面上に2点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ と直線 ℓ があり, A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が1であるという. 以下の問に答えよ.

- (1) ℓ は y 軸と平行でないことを示せ.
- (2) ℓ が線分 AB と交わるとき, ℓ の傾きを求めよ.
- (3) ℓ が線分 AB と交わらないとき, ℓ と原点との距離を求めよ.

- 2 a を正の実数とする. 2つの放物線

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3a$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$$

が異なる2点で交わるとし, 2つの放物線によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) a の値の範囲を求めよ.
- (2) $S(a)$ を a を用いて表せ.
- (3) $S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ.

- 3 以下の問に答えよ.

- (1) 正の実数 x, y に対して

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$$

が成り立つことを示し, 等号が成立するための条件を求めよ.

- (2) n を自然数とする. n 個の正の実数 $a_1, \dots, a_n$ に対して

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

が成り立つことを示し, 等号が成立するための条件を求めよ.

解答例

- 1 (1) y 軸と平行な直線 ℓ の方程式を $x = k$ とおくと (k は定数)

$$A(1, 0) \text{ と } \ell \text{ の距離は } |k - 1|$$

$$B(-1, 0) \text{ と } \ell \text{ の距離は } |k + 1|$$

一般に, 2 つの実数 a, b について

$$|a| + |b| = \max(|a + b|, |a - b|)$$

であるから, $a = k - 1, b = k + 1$ とすると

$$|k - 1| + |k + 1| = \max(|2k|, 2)$$

$|k - 1| + |k + 1| \geq 2$ であるから, このとき, A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が 2 以上となり, 条件に反する. よって, ℓ は y 軸と平行でない.

- (2) ℓ の傾きを m とし, その方程式を $mx - y + n = 0$ とすると, 条件から

$$\frac{|m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|-m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{|m + n| + |-m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \quad \dots (*)$$

ここで, $f(x, y) = mx - y + n$ とおくと

$$f(1, 0) = m + n, \quad f(-1, 0) = -m + n$$

ℓ が線分 AB と交わるから

$$f(1, 0)f(-1, 0) \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m + n)(-m + n) \leq 0$$

$$\text{このとき} \quad |m + n| + |-m + n| = |(m + n) - (-m + n)| = |2m|$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入して} \quad \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \quad \text{よって} \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- (3) ℓ と原点の距離を d とすると $d = \frac{|n|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

ℓ が線分 AB と交わらないから

$$f(1, 0)f(-1, 0) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m + n)(-m + n) \geq 0$$

$$\text{このとき} \quad |m + n| + |-m + n| = |(m + n) + (-m + n)| = |2n|$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入して} \quad \frac{|2n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \quad \text{よって} \quad d = \frac{|n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

- 2 (1) 2つの放物線の方程式から y を消去すると

$$\frac{1}{2}x^2 - 3a = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$$

整理すると $(x - a)^2 = 3a - a^3 \quad \dots \textcircled{1}$

2つの放物線が2点で交わる条件は

$$3a - a^3 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) < 0$$

a は正であるから $0 < a < \sqrt{3}$

- (2) 2つの放物線の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると, ① より

$$\alpha = a - \sqrt{3a - a^3}, \quad \beta = a + \sqrt{3a - a^3}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3a \right) \right\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \{ (x - a)^2 - (3a - a^3) \} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\sqrt{3a - a^3})^3 = \frac{4}{3}(3a - a^3)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

- (3) $f(a) = 3a - a^3$ ($0 \leq a \leq \sqrt{3}$) とおくと

$$f'(a) = -3a^2 + 3 = -3(a + 1)(a - 1)$$

a	0	$\dots$	1	$\dots$	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$S(a) = \frac{4}{3}\{f(a)\}^{\frac{3}{2}}$ であるから, $S(a)$ の最大値は

$$a = 1 \text{ のとき, 最大値 } \frac{4}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$



3 (1) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 2 = \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{x}{y}} \right)^2 \geq 0$ ゆえに $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$

なお, 等号が成立するための条件は

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad \text{すなわち} \quad x = y$$

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ より

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_j}{a_k} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \frac{a_j}{a_k} \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{a_j}{a_k} + \sum_{1 \leq k < j \leq n} \frac{a_j}{a_k} + \sum_{1 \leq j = k \leq n} \frac{a_j}{a_k} \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{a_j}{a_k} + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{a_k}{a_j} + n = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{a_j}{a_k} + \frac{a_k}{a_j} \right) + n \\ &\geq \sum_{1 \leq j < k \leq n} 2 + n = {}_nC_2 \cdot 2 + n = n^2 \end{aligned}$$

よって $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$

なお, 等号が成立するための条件は, $1 \leq j < k \leq n$ について $a_j = a_k$

すなわち $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

解説

$a > 0, b > 0$ のとき $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

よって $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \cdots (*)$ (等号は $a = b$ のとき成立する)

$a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) のとき

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad \cdots (**)$$

(等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき成立する)

が成り立つことを示す. $(*)$ より

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &\geq 2(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}) \\ &\geq 4\sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}} = 4\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \end{aligned}$$

同様のことを繰り返すと, $n = 2^k$ のときに $(**)$ が成立することが示される.

$n = 2^k$ のときは $2^{k-1} < n < 2^k$ となる k に対して, $n + m = 2^k$ となるように m を定め, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = np$ とおくと

$$\frac{1}{n+m} (\overbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}^{n \text{ 個}} + \overbrace{p + \cdots + p}^{m \text{ 個}}) \geq \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \cdots a_n p^m}$$

左辺は $\frac{1}{n+m}(np + mp) = p$ であるから

$$\begin{aligned} p &\geq \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \cdots a_n p^m} \\ p^{n+m} &\geq a_1 a_2 \cdots a_n p^m \\ p^n &\geq a_1 a_2 \cdots a_n \end{aligned}$$

よって, すべての自然数 n について, $(**)$ が成立する.

n 個の正の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ の相加平均 A , 相乗平均 G , 調和平均 H は

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)$$

相加平均 $\geq$ 相乗平均 の大小関係を $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ に適用すると

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$$

よって $A \geq G \geq H$ (等号が成立する条件は, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$)

本題の左辺から $nA \cdot \frac{n}{H} = n^2 \cdot \frac{A}{H} \geq n^2$

上式の等号が成立する条件は, $A = H$, すなわち, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$



8.13 2013 年 (80 分)

出題分野 1 2 3

1 空間において、2 点 $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 0, 0)$ を通る直線を ℓ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 点 P を ℓ 上に, 点 Q を z 軸上にとる. $\overrightarrow{PQ}$ がベクトル $(3, 1, -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ.
- (2) 点 R を ℓ 上に, 点 S を z 軸上にとる. $\overrightarrow{RS}$ が $\overrightarrow{AB}$ およびベクトル $(0, 0, 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ.
- (3) R, S を (2) で求めた点とする. 点 T を ℓ 上に, 点 U を z 軸上にとる. また, $\vec{v} = (a, b, c)$ は零ベクトルではなく, $\overrightarrow{RS}$ に垂直ではないとする. $\overrightarrow{TU}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ.

2 a, b, c は実数とし, $a < b$ とする. 平面上の相異なる 3 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ が, 辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする. 次の問いに答えよ.

- (1) a を b, c を用いて表せ.
- (2) $b - a \geq 2$ が成り立つことを示せ.
- (3) 斜辺 AB の長さの最小値と, そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ.

3 赤色, 緑色, 青色のさいころが各 2 個ずつ, 計 6 個ある. これらを同時にふるとき,

赤色の 2 個のさいころの出た目の数 r_1, r_2 に対し $R = |r_1 - r_2|$

緑色の 2 個のさいころの出た目の数 g_1, g_2 に対し $G = |g_1 - g_2|$

青色の 2 個のさいころの出た目の数 b_1, b_2 に対し $B = |b_1 - b_2|$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1) R がとりうる値と, R がそれらの各値をとる確率をそれぞれ求めよ.
- (2) $R \geq 4, G \geq 4, B \geq 4$ が同時に成り立つ確率を求めよ.
- (3) $RGB \geq 80$ となる確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) P は直線 AB 上の点であるから、実数 α を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) + \alpha(-1, -1, 0) = (-\alpha, 1 - \alpha, 0)$$

点 Q を $(0, 0, q)$ とおくと

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (0, 0, q) - (-\alpha, 1 - \alpha, 0) = (\alpha, \alpha - 1, q)$$

$\overrightarrow{PQ}$ がベクトル $(3, 1, -1)$ に平行であるから

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha - 1}{1} = \frac{q}{-1} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \text{ であるから } P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), Q\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

- (2) R は直線 AB 上の点であるから、実数 β を用いて $\overrightarrow{OR} = (-\beta, 1 - \beta, 0)$

点 S を $(0, 0, s)$ とおくと $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = (\beta, \beta - 1, s)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0)$ およびベクトル $(0, 0, 1)$ に垂直なベクトルの 1 つは

$$(1, -1, 0)$$

$\overrightarrow{RS}$ はこのベクトルと平行であるから $\frac{\beta}{1} = \frac{\beta - 1}{-1}, s = 0$

これを解いて $\beta = \frac{1}{2}$ ゆえに $R\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), S(0, 0, 0)$

- (3) $\overrightarrow{RS} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ は $\vec{v} = (a, b, c)$ に垂直ではないから

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \neq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a - b \neq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

T は直線 AB 上の点であるから、実数 t を用いて $\overrightarrow{OT} = (-t, 1 - t, 0)$

点 U を $(0, 0, u)$ とおくと $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OT} = (t, t - 1, u)$

$\overrightarrow{TU}$ は $\vec{v} = (a, b, c)$ に平行であるから、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{TU} = k\vec{v} \quad \text{ゆえに} \quad (t, t - 1, u) = k(a, b, c)$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} t = ka \\ t - 1 = kb \\ u = kc \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad k(a - b) = 1 \quad \textcircled{1} \text{ より} \quad k = \frac{1}{a - b}$$

$$t = \frac{a}{a - b}, u = \frac{c}{a - b} \text{ より } T\left(\frac{a}{b - a}, \frac{b}{b - a}, 0\right), U\left(0, 0, \frac{c}{a - b}\right)$$

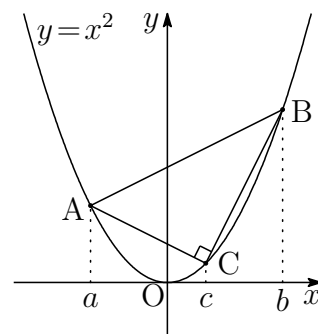
■

- 2 (1) 3 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ は, 放物線 $y = x^2$ 上の点である.

直線 BC の傾きは $\frac{c^2 - b^2}{c - b} = b + c$

直線 AC の方程式は

$$y - c^2 = -\frac{1}{b + c}(x - c)$$



点 $A(a, a^2)$ は, この直線上の点であるから $(a - c \neq 0)$

$$a^2 - c^2 = -\frac{a - c}{b + c} \quad \text{ゆえに} \quad a + c = -\frac{1}{b + c}$$

よって $a = -c - \frac{1}{b + c}$

(2) (1) の結果から $b - a = b + c + \frac{1}{b + c}$

$b - a > 0$ であるから, 上式より $b + c > 0$

したがって, 相加平均・相乗平均の関係により

$$b - a = b + c + \frac{1}{b + c} \geq 2\sqrt{(b + c) \cdot \frac{1}{b + c}} = 2$$

(3) $AB^2 = (b - a)^2 + (b^2 - a^2) = (b - a)^2 \{1 + (a + b)^2\}$

上式より, AB が最小となるとき, (2) の結果に注意して

$$b - a = 2, \quad a + b = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = -1, \quad b = 1$$

これを (1) の結果に代入して

$$-1 = -c - \frac{1}{1 + c} \quad \text{これを解いて} \quad c = 0$$

よって $A(-1, 1), B(1, 1), C(0, 0), AB = 2$



- 3** (1) r_1, r_2 に対する $R = |r_1 - r_2|$ の値は、右の表のようになる。したがって、 R のとりうる値とその確率は次のようになる。

R	0	1	2	3	4	5
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

$r_1 \backslash r_2$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

- (2) (1) の結果から、 $R \geq 4$ となる確率は $\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$

同様に、 $G \geq 4, B \geq 4$ となる確率はともに $\frac{1}{6}$

よって、求める確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

- (3) $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75, 4^2 \cdot 5 = 80$ より、 $RGB \geq 80$ となる $\{R, G, B\}$ の組は

$$\{4, 4, 5\}, \{4, 5, 5\}, \{5, 5, 5\}$$

また、 $R = G = B = 4$ となる確率は $\left(\frac{1}{9}\right)^3$

これと (2) の結果から、求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{3^3 - 2^3}{18^3} = \frac{19}{5832}$$

■

8.14 2014 年 (80 分)

出題分野 1 2 3

- 1 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とし,

$$c_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) n を 2 以上の自然数とすると,

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$$

となることを示せ.

- (2) 曲線 $y = c_1x^3 - c_3x^2 - c_2x + c_4$ の極値を求めよ.

- (3) 曲線 $y = c_1x^2 - c_3x + c_2$ と, x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

- 2 m, n ($m < n$) を自然数とし

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2 + m^2$$

とおく. 三辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし, その三角形の面積を S とする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ.
 (2) r を m, n を用いて表せ.
 (3) r が素数のときに, S を r を用いて表せ.
 (4) r が素数のときに, S が 6 で割り切れることを示せ.

- 3 空間において, 原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり, その頂点を順に A, B, C, D とする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いて表せ.
 (2) $OA = OB = OC$ のとき, ベクトル

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

が, 平面 α と垂直であることを示せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \quad \cdots (*)$$

α, β は2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

$c_n = \alpha^n + \beta^n$ であるから

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1} \quad \cdots (**)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad c_1 &= \alpha + \beta = 1, \quad c_2 = \alpha^2 + \beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 1^2 - 2 \cdot (-1) = 3 \end{aligned}$$

$$(*) \text{ より } c_3 = c_2 + c_1 = 3 + 1 = 4,$$

$$c_4 = c_3 + c_2 = 4 + 3 = 7$$

$$\text{したがって } y = x^3 - 4x^2 - 3x + 7$$

$$y' = 3x^2 - 8x - 3 = (x - 3)(3x + 1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	$\frac{203}{27}$	$\searrow$	-11	$\nearrow$

よって $x = -\frac{1}{3}$ のとき極大値 $\frac{203}{27}$, $x = 3$ のとき極小値 -11

$$(3) \quad y = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

よって, 求める面積を S とすると

$$S = - \int_1^3 (x - 1)(x - 3) dx = \frac{1}{6}(3 - 1)^3 = \frac{4}{3}$$

■

- 2** (1) $a = n^2 - m^2$, $b = 2mn$, $c = n^2 + m^2$ より

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= n^4 + 2n^2m^2 + m^4 = (n^2 + m^2)^2 = c^2 \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から, 斜辺の長さが c の直角三角形であるから, この三角形の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot (n^2 - m^2) \cdot 2mn = mn(n + m)(n - m)$$

三角形の内接円の半径が r であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(a + b + c)r \\ &= \frac{1}{2}\{(n^2 - m^2) + 2mn + (n^2 + m^2)\}r \\ &= n(n + m)r \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

したがって $n(n + m)r = mn(n + m)(n - m)$ よって $r = m(n - m)$

- (3) r が素数のとき, (2) の結果から $m = 1$ または $n - m = 1$

- (i) $m = 1$ のとき, これを (2) の結果に代入すると

$$r = 1(n - 1) \quad \text{ゆえに} \quad n = r + 1$$

これらを (*) に代入すると

$$S = (r + 1)\{(r + 1) + 1\}r = r(r + 1)(r + 2)$$

- (ii) $n - m = 1$ のとき, これを (2) の結果に代入すると

$$r = m \cdot 1 \quad \text{すなわち} \quad m = r, \quad n = r + 1$$

これらを (*) に代入すると

$$S = (r + 1)\{(r + 1) + r\}r = r(r + 1)(2r + 1)$$

よって $S = r(r + 1)(r + 2)$ または $S = r(r + 1)(2r + 1)$

- (4) $r(r + 1)(r + 2)$ は連続する 3 整数の積である. また

$$\begin{aligned} r(r + 1)(2r + 1) &= r(r + 1)\{(r - 1) + (r + 2)\} \\ &= (r - 1)r(r + 1) + r(r + 1)(r + 2) \end{aligned}$$

これは連続する 3 整数 (2 の倍数と 3 の倍数を含む) の積の和.

よって, (3) の結果から, r が素数のとき, S は 6 で割り切れる. ■

- 3** (1) 四角形 ABCD は正方形であるから

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

- (2) 正方形 ABCD の対角線の交点を G とし

$$\overrightarrow{OG} = \vec{g}, \quad \overrightarrow{GA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{GB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{GC} = -\vec{a}, \quad \overrightarrow{GD} = -\vec{b}$$

とすると

$$\overrightarrow{OA} = \vec{g} + \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{g} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{g} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{OD} = \vec{g} - \vec{b}$$

OA = OB = OC より, $|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2$ であるから

$$|\vec{g} + \vec{a}|^2 = |\vec{g} + \vec{b}|^2 = |\vec{g} - \vec{a}|^2$$

このとき, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ に注意して, 上式を整理すると

$$\vec{g} \cdot \vec{a} = \vec{g} \cdot \vec{b} = -\vec{g} \cdot \vec{a} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{g} \cdot \vec{a} = \vec{g} \cdot \vec{b} = 0$$

また, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\vec{g}$ であるから

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

は, $\vec{a}$ および $\vec{b}$ と垂直, すなわち, 平面 α と垂直である.

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{CA} &= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) \\ &= 2(|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2) = 0 \end{aligned}$$

2 点 A, C の中点を M とすると $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}$

以上より, $OM \perp MC$ となる. これから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2, \\ |\overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MB} + |\overrightarrow{MB}|^2 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OB}|$, $|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB}|$ であるから $OM \perp MB$

よって, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ は, 平面 α と垂直である. ■

8.15 2015 年 (80 分)

出題分野 1 2 3

- 1 s, t を $s < t$ をみたす実数とする. 座標平面上の 3 点 $A(1, 2)$, $B(s, s^2)$, $C(t, t^2)$ が一直線上にあるとする. 以下の間に答えよ.

- (1) s と t の間の関係式を求めよ.
- (2) 線分 BC の中点を $M(u, v)$ とする. u と v の間の関係式を求めよ.
- (3) s, t が変化するとき, v の最小値と, そのときの u, s, t の値を求めよ.

- 2 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が $a_1 = 5$, $b_1 = 7$ をみたし, さらにすべての実数 x とすべての自然数 n に対して

$$x(a_{n+1}x + b_{n+1}) = \int_{c_n}^{x+c_n} (a_nt + b_n) dt$$

をみたすとする. 以下の間に答えよ.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (2) $c_n = 3^{n-1}$ のとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) $c_n = n$ のとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

- 3 a, b, c を 1 以上 7 以下の自然数とする. 次の条件 (*) を考える.

(*) 3 辺の長さが a, b, c である三角形と, 3 辺の長さが $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する.

以下の間に答えよ.

- (1) $a = b > c$ であり, かつ条件 (*) をみたす a, b, c の組の個数を求めよ.
- (2) $a > b > c$ であり, かつ条件 (*) をみたす a, b, c の組の個数を求めよ.
- (3) 条件 (*) をみたす a, b, c の組の個数を求めよ.

解答例

- 1** (1) $A(1, 2)$, $B(s, s^2)$, $C(t, t^2)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (s-1, s^2-2), \quad \overrightarrow{BC} = (t-s)(1, s+t)$$

3点 A , B , C が同一直線上にあるとき, $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$ であるから ($s < t$)

$$(s-1)(s+t) - (s^2-2) \cdot 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad st = s + t - 2$$

- (2) 線分 BC の中点 $M(u, v)$ は

$$u = \frac{s+t}{2}, \quad v = \frac{s^2+t^2}{2} \quad \cdots (*)$$

(*) の第1式および (1) の結果から $s+t = 2u$, $st = 2u - 2 \quad \cdots (**)$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad v &= \frac{s^2+t^2}{2} = \frac{(s+t)^2 - 2st}{2} = \frac{(2u)^2 - 2(2u-2)}{2} \\ &= 2u^2 - 2u + 2 \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から $v = 2\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$

したがって $u = \frac{1}{2}$ のとき v は最小値 $\frac{3}{2}$ をとる.

$u = \frac{1}{2}$ を (**) に代入すると $s+t = 1$, $st = -1$

2数 s, t を解とする2次方程式は

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$s < t \text{ であるから} \quad s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

- 2** (1) $x(a_{n+1}x + b_{n+1}) = \int_{c_n}^{x+c_n} (a_nt + b_n) dt = \left[\frac{a_nt^2}{2} + b_nt \right]_{c_n}^{x+c_n}$
 $= \frac{a_n}{2}(x^2 + 2c_nx) + b_nx = \frac{a_n}{2}x^2 + (a_nc_n + b_n)x$

$$\text{したがって} \quad a_{n+1}x^2 + b_{n+1}x = \frac{a_n}{2}x^2 + (a_nc_n + b_n)x$$

同じ次数の項の係数が等しいから

$$(*) \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \\ b_{n+1} = a_nc_n + b_n \end{cases}$$

$\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 5$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから $a_n = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) $c_n = 3^{n-1}$ のとき, (1) の結果を (*) の第 2 式に代入すると

$$b_{n+1} = 5 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \times 3^{n-1} + b_n \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = b_n + 5 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$$

$n \geq 2$ のとき, $b_1 = 7$ より

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 5 \left(\frac{3}{2} \right)^{k-1} = 7 + 5 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \\ &= 7 + 10 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} - 1 \right\} = 10 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} - 3 \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立するから $b_n = 10 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} - 3$

(3) $c_n = n$ のとき, (1) の結果を (*) の第 2 式に代入すると

$$\text{ゆえに} \quad b_{n+1} = b_n + 5n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \cdots (**)$$

ここで, $r = \frac{1}{2}$ とし, $S_n = \sum_{k=1}^n k r^{k-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} r S_n &= \sum_{k=1}^n k r^k = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) r^{k-1} = \sum_{k=1}^n (k-1) r^{k-1} + n r^n \\ &= S_n - \sum_{k=1}^n r^{k-1} + n r^n \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad (1-r) S_n = \sum_{k=1}^n r^{k-1} - n r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} - n r^n$$

$$\text{ゆえに} \quad (1-r) S_n = 2 - (n+2) r^n \quad \text{すなわち} \quad S_n = 4 - (n+2) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

(**) より, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + 5 \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = 7 + 5 S_{n-1} \\ &= 7 + 5 \left\{ 4 - (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right\} = 27 - 5(n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立するから $b_n = 27 - 5(n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2}$ ■

3 (1) a, b, c は1以上7以下の自然数であるから, $a = b > c$ のとき $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$

条件(*)をみたすとき $b + c > a$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

このとき, $a = b > c$ であるから $\frac{2}{b} > \frac{1}{c}$ すなわち $2c > b > c$

ゆえに $c = 1$ のとき $2 > b > 1$ より なし

$c = 2$ のとき $4 > b > 2$ より $a = b = 3$

$c = 3$ のとき $6 > b > 3$ より $a = b = 4, 5$

$c = 4$ のとき $8 > b > 4$ より $a = b = 5, 6, 7$

$c = 5$ のとき $10 > b > 5$ より $a = b = 6, 7$

$c = 6$ のとき $12 > b > 6$ より $a = b = 7$

$c = 7$ のとき $14 > b > 7$ より なし

よって, 求める組の個数は $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$ (個)

(2) a, b, c は1以上7以下の自然数であるから, $a > b > c$ のとき $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$

条件(*)をみたすとき $b + c > a$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

ゆえに $a - b < c$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

このとき, $a > b > c$ であるから $1 \leq c \leq 5$

(i) $a > b > c = 1$ のとき $a - b < 1, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1$

これをみたす (a, b) の組はなし

(ii) $a > b > c = 2$ のとき $a - b < 2, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$

よって, $(a, b) = (4, 3)$ の1個

(iii) $a > b > c = 3$ のとき $a - b < 3, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{3}$

よって, $(a, b) = (5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 5)$ の4個

(iv) $a > b > c = 4$ のとき $a - b < 4, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{4}$

よって, $(a, b) = (6, 5), (7, 5), (7, 6)$ の3個

(v) $a > b > c = 5$ のとき $a - b < 5, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{5}$

よって, $(a, b) = (7, 6)$ の1個

したがって, 求める組の個数は $1 + 4 + 3 + 1 = 9$ (個)

(3) a, b, c は 1 以上 7 以下の自然数であるから, $a > b = c$ のとき $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

条件 (*) をみたすとき $b + c > a$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

このとき, $a > b = c$ であるから $c + c > a$ すなわち $2c > a > c$

これは (1) の個数に等しいから 9 (個)

また, $a = b = c$ となる個数は 7 個であるから, 以上をまとめると

- $a = b > c$ の場合が 9 個であるから,
 $b = c > a, c = a > b$ の場合もそれぞれ 9 個
- $a > b = c$ の場合が 9 個であるから,
 $b > c = a, c > a = b$ の場合もそれぞれ 9 個
- $a > b > c$ の場合が 9 個であるから,
 $a > c > b, b > a > c, b > a > c, c > a > b, c > b > a$
 の場合もそれぞれ 9 個
- $a = b = c$ の場合が 7 個

よって, 条件 (*) をみたす a, b, c の個数は

$$9 \times 3 + 9 \times 3 + 9 \times 6 + 7 = 115 \text{ (個)}$$



8.16 2016年(80分)

出題分野 ① ② ③

- ① 四面体 $OABC$ において、 P を辺 OA の中点、 Q を辺 OB を $2:1$ に内分する点、 R を辺 BC の中点とする。 P 、 Q 、 R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。以下の問に答えよ。

- (1) $\overrightarrow{PQ}$ 、 $\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 比 $|\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SC}|$ を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ を1辺の長さが1の正四面体とすると、 $|\overrightarrow{QS}|$ を求めよ。

- ② a を正の定数とし、 $f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく。以下の問に答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフが点 $(-1, 2)$ を通るとき a の値を求めよ。また、そのときの $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。
- (3) $a = 2$ とする。すべての実数 x に対して $f(x) \geq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ。

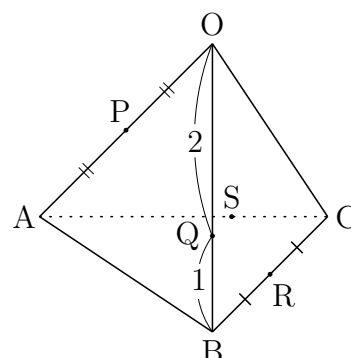
- ③ さいころを4回振って出た目を順に a 、 b 、 c 、 d とする。以下の問に答えよ。

- (1) $ab \geq cd + 25$ となる確率を求めよ。
- (2) $ab = cd$ となる確率を求めよ。

解答例

1 (1) 右の図から

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \vec{OQ} - \vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}, \\ \vec{PR} &= \vec{OR} - \vec{OP} \\ &= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}}{2}\end{aligned}$$

(2) S は平面 PQR 上の点であるから、実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OS} &= \vec{OP} + s\vec{PQ} + t\vec{PR} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + t(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - s - t)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + t\right)\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

このとき、S は直線 AC 上の点であるから

$$\frac{1}{2}(1 - s - t) + \frac{t}{2} = 1, \quad \frac{2}{3}s + t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = -1, \quad t = \frac{4}{3}$$

$$\text{したがって} \quad \vec{OS} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c} \quad \text{よって} \quad |\vec{AS}| : |\vec{SC}| = 2 : 1$$

$$(3) \quad \vec{QS} = \vec{OS} - \vec{OQ} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$$

$$\begin{aligned}\text{したがって} \quad |\vec{QS}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\vec{b} \cdot \vec{c} + 4\vec{c} \cdot \vec{a})\end{aligned}$$

$$\text{このとき} \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad |\vec{QS}|^2 = \frac{1}{9}(1 + 4 + 4 - 2 - 4 + 2) = \frac{5}{9} \quad \text{よって} \quad |\vec{QS}| = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \blacksquare$$

2 (1) $g(x) = x^2 + 2ax + a$ とおくと $g(x) = (x+a)^2 - a^2 + a$

$a > 0$ に注意すると

(i) $-a^2 + a \geq 0$, すなわち, $0 < a \leq 1$ のとき, $g(x) \geq 0$ であるから

$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

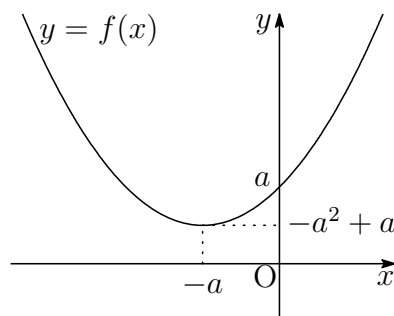
(ii) $-a^2 + a < 0$, すなわち, $1 < a$ のとき,

$$g(x) = 0 \text{ の解は } x = -a \pm \sqrt{a^2 - a}$$

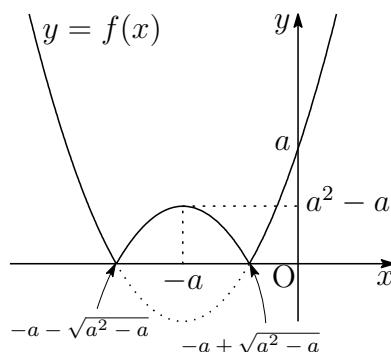
$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & (x \leq -a - \sqrt{a^2 - a}, -a + \sqrt{a^2 - a} \leq x) \\ -g(x) & (-a - \sqrt{a^2 - a} \leq x \leq -a + \sqrt{a^2 - a}) \end{cases}$$

(i), (ii) より, $y = f(x)$ のグラフは, 次のようになる.

(i) $0 < a \leq 1$ のとき



(ii) $1 < a$ のとき



(2) $y = f(x)$ が点 $(-1, 2)$ を通るから, $f(-1) = 2$ より

$$|1 - a| = 2 \quad \text{このとき, } a > 0 \text{ に注意して解くと } a = 3$$

(1) で示したグラフから, $y = f(x)$ と x 軸との交点の x 座標は $-3 \pm \sqrt{6}$

$$\text{よって } - \int_{-3-\sqrt{6}}^{-3+\sqrt{6}} (x^2 + 6x + 3) dx = \frac{1}{6} \{(-3+\sqrt{6}) - (-3-\sqrt{6})\}^3 = 8\sqrt{6}$$

(3) $a = 2$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は, (1)(ii) のグラフに $a = 2$ を代入して

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

また, $g(x) = x^2 + 4x + 2$ であるから, $g'(x) = 2x + 4$ より

$$g'(-2 + \sqrt{2}) = 2(-2 + \sqrt{2}) + 4 = 2\sqrt{2} > 2$$

点 $(-2 + \sqrt{2}, 0)$ が直線 $y = 2x + b$ の上側またはこの直線上にあるときで

$$0 \geq 2(-2 + \sqrt{2}) + b \quad \text{すなわち } b \leq 4 - 2\sqrt{2}$$



3 (1) ab の値の集合を M とすると

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$

$m \in M$ に対する $ab = m$ となる組 (a, b) の個数を $S(m)$ とすると

m	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
$S(m)$	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4

m	15	16	18	20	24	25	30	36
$S(m)$	2	1	2	2	2	1	2	1

また, cd の値の集合も M に等しい.

$ab \geq cd + 25 \geq 26$ より, ab は 30 または 36.

$ab = 30$ のとき $cd = 1, 2, 3, 4, 5$

$ab = 36$ のとき $cd = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$

$$S(30) = 2, S(36) = 1,$$

$$S(1) + S(2) + S(3) + S(4) + S(5) = 1 + 2 + 2 + 3 + 2 = 10$$

$$S(6) + S(8) + S(9) + S(10) = 4 + 2 + 1 + 2 = 9$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{2 \times 10 + 1 \times (10 + 9)}{6^4} = \frac{13}{432}$$

(2) $S(m) = 1$ となる m は 1, 9, 16, 25, 36 の 5 通り

$S(m) = 2$ となる m は 2, 3, 5, 8, 10, 15, 18, 20, 24, 30 の 10 通り

$S(m) = 3$ となる m は 4 の 1 通り

$S(m) = 4$ となる m は 6, 12 の 2 通り

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{1^2 \times 5 + 2^2 \times 10 + 3^2 \times 1 + 4^2 \times 2}{6^4} = \frac{43}{648}$$



8.17 2017年(80分)

出題分野 ① ② ③

① t を正の実数とする. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) $2t^3 - 3t^2 + 1$ を因数分解せよ.
- (2) $f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ.
- (3) $-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ.

② 次の2つの条件をみたす x の2次式 $f(x)$ を考える.

- (i) $y = f(x)$ のグラフは点 $(1, 4)$ を通る.
- (ii) $\int_{-1}^2 f(x) dx = 15$.

以下の問に答えよ.

- (1) $f(x)$ の1次の項の係数を求めよ.
- (2) 2次方程式 $f(x) = 0$ の2つの解を α, β とするとき, α と β のみたす関係式を求めよ.
- (3) (2) における α, β がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ.

③ $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, -1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, -1)$, $\vec{v}_4 = (-1, -1, 1)$ とする. 座標空間内の動点 P が原点 O から出発し, 正四面体のサイコロ (1, 2, 3, 4 の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る) をふるごとに, 出た目が k ($k = 1, 2, 3, 4$) のときは $\vec{v}_k$ だけ移動する. すなわち, サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n とし, サイコロを $(n+1)$ 回目によって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \vec{v}_k$$

である. ただし, $P_0 = O$ である. 以下の問に答えよ.

- (1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{P_0 P_2} \perp \overrightarrow{P_2 P_4}$ となる確率を求めよ.
- (3) 4点 P_0, P_1, P_2, P_3 が同一平面上にある確率を求めよ.

解答例

1 (1) $2t^3 - 3t^2 + 1 = (2t + 1)(t - 1)^2$

(2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 3(t^2 - 1) = 3(x^2 + 2x + 1 - t^2) \\ &= 3\{(x + 1)^2 - t^2\} = 3(x + 1 + t)(x + 1 - t) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-1 - t$	$\cdots$	$-1 + t$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $4t^3$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

よって, $f(x)$ は $x = -1 + t$ で極小値 0 をとる.

補足 $f(x) = (x + 1)^3 - 3t^2(x + 1) + 2t^3$ であるから, $x + 1 = X$ とおくと

$$X^3 - 3t^2X + 2t^3 = (X - t)^2(X + 2t)$$

ゆえに $f(x) = (x + 1 - t)^2(x + 1 + 2t)$

(3) $f(-1) = 2t^3$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) - f(-1) &= (x + 1)^3 - 3t^2(x + 1) = (x + 1)\{(x + 1)^2 - 3t^2\} \\ &= (x + 1)(x + 1 + \sqrt{3}t)(x + 1 - \sqrt{3}t) \end{aligned}$$

$-1 + t \leq 2$, すなわち, $0 < t \leq 3$ のとき

$$m = f(-1 + t)$$

$2 \leq -1 + t$, すなわち, $t \geq 3$ のとき

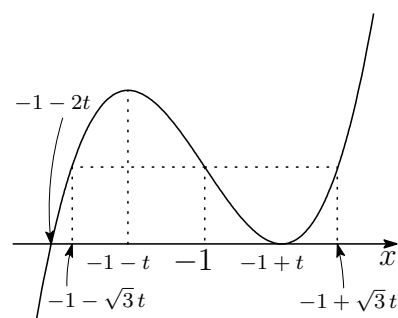
$$m = f(2)$$

$-1 + \sqrt{3}t \leq 2$, すなわち, $0 < t \leq \sqrt{3}$ のとき

$$M = f(2)$$

$2 \leq -1 + \sqrt{3}t$, すなわち, $t \geq \sqrt{3}$ のとき

$$M = f(-1)$$



よって
$$m = \begin{cases} 0 & (0 < t \leq 3) \\ 2t^3 - 9t^2 + 27 & (t \geq 3) \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} 2t^3 - 9t^2 + 27 & (0 < t \leq \sqrt{3}) \\ 2t^3 & (t \geq \sqrt{3}) \end{cases}$$

■

- 2** (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと, (i) より, $f(1) = 4$ であるから

$$a + b + c = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(ii) より, $\int_{-1}^2 (ax^2 + bx + c) dx = 15$ であるから

$$\left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-1}^2 = 15 \quad \text{ゆえに} \quad a + \frac{b}{2} + c = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より $a + c = 6, b = -2$ よって, 求める1次の係数は -2

- (2) (1) の結果から

$$f(x) = ax^2 - 2x + 6 - a \quad \cdots (*)$$

とおける. 2次方程式 $f(x) = 0$ の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{2}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{6-a}{a} = \frac{6}{a} - 1 \quad \cdots (**)$$

上の2式から a を消去すると

$$\alpha\beta = 3(\alpha + \beta) - 1 \quad \text{よって} \quad (\alpha - 3)(\beta - 3) = 8$$

- (3) α, β がともに正の整数であるから, $1 \leq \alpha \leq \beta$ とすると, $-2 \leq \alpha - 3 \leq \beta - 3$ に注意すると, (2) の結果から

$$(\alpha - 3, \beta - 3) = (1, 8), (2, 4) \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha, \beta) = (4, 11), (5, 7)$$

$$(**) \text{ の第1式より, } a = \frac{2}{\alpha + \beta} \text{ であるから} \quad a = \frac{2}{15}, \frac{1}{6}$$

これを (*) に代入して

$$f(x) = \frac{2}{15}x^2 - 2x + \frac{88}{15} \quad \text{または} \quad f(x) = \frac{1}{6}x^2 - 2x + \frac{35}{6}$$



- 3 (1) $i, j = 1, 2, 3, 4$ とし, $\vec{v}_i + \vec{v}_j$ が x 軸と平行になる組み合わせは

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = (2, 0, 0) \\ \vec{v}_3 + \vec{v}_4 &= \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = (-2, 0, 0)\end{aligned}$$

したがって, 求める確率は $\frac{2! + 2!}{4^2} = \frac{1}{4}$

- (2) $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ とおくと, $\overrightarrow{P_0P_2}$ および $\overrightarrow{P_2P_4}$ は, 次のベクトルからなる.

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 + \vec{v}_1 &= 2\vec{v}_1, & \vec{v}_2 + \vec{v}_2 &= 2\vec{v}_2, \\ \vec{v}_3 + \vec{v}_3 &= 2\vec{v}_3, & \vec{v}_4 + \vec{v}_4 &= 2\vec{v}_4, \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_1, & \vec{v}_1 + \vec{v}_3 &= \vec{v}_3 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_2, \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_4 &= \vec{v}_4 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_3, & \vec{v}_2 + \vec{v}_3 &= \vec{v}_3 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_3, \\ \vec{v}_2 + \vec{v}_4 &= \vec{v}_4 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_2, & \vec{v}_3 + \vec{v}_4 &= \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = -2\vec{e}_1\end{aligned}$$

$\vec{v}_j \cdot \vec{e}_k \neq 0$ であるから ($j = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, 3$), $\overrightarrow{P_0P_2} \perp \overrightarrow{P_2P_4}$ となるのは, $\overrightarrow{P_0P_2}$ および $\overrightarrow{P_2P_4}$ が座標軸に平行で, 互いに垂直な場合について調べればよい. (1) の結果と同様に, $\overrightarrow{P_0P_2}$ および $\overrightarrow{P_2P_4}$ は, x 軸, y 軸, z 軸と平行となる確率は $\frac{1}{4}$ であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \times {}_3P_2 = \frac{3}{8}$$

- (3) $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$ のとき, $\vec{v}_i$, $\vec{v}_j$, $\vec{v}_k$ は 1 次独立であるから, $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$ がすべて異なる場合を除く確率であるから

$$1 - \frac{{}_4P_3}{4^3} = 1 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \frac{5}{8}$$



8.18 2018年(80分)

出題分野 ① ② ③

- ① t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする. $OABC$ を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする. 辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P , 辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q , 辺 BC の中点を R とする. また $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) $\vec{QP}$ と $\vec{QR}$ を t , $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.
- (2) $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ のとき, t の値を求めよ.
- (3) t が (2) で求めた値をとるとき, $\triangle PQR$ の面積を求めよ.

- ② $f(x) = (2x-1)^3$ とする. 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める.

$x_1 = 2$ であり, x_{n+1} ($n \geq 1$) は点 $(x_n, f(x_n))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点の x 座標とする.

以下の問に答えよ.

- (1) 点 $(t, f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ. また $t \neq \frac{1}{2}$ のときに, その接線と x 軸の交点の x 座標を求めよ.
- (2) $x_n > \frac{1}{2}$ を示せ. また x_n を n の式で表せ.
- (3) $|x_{n+1} - x_n| < \frac{3}{4} \times 10^{-5}$ を満たす最小の n を求めよ. ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$, $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ は用いてよい.

- ③ さいころを 3 回ふって, 1 回目に出た目の数を a , 2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし, 2 次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots (*)$$

を考える. 以下の問に答えよ.

- (1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ.
- (2) $(*)$ が整数を解にもつとする. このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり, また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ.
- (3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ.

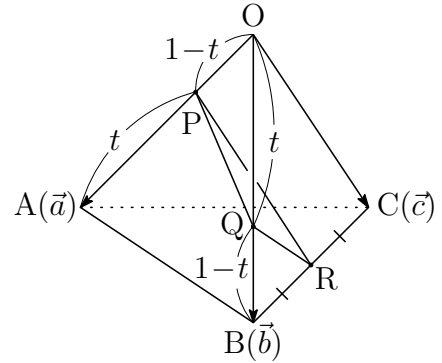
解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = t\vec{b}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$$

したがって

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (1-t)\vec{a} - t\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - t\vec{b} \\ &= \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \end{aligned}$$



$$(2) \quad \angle PQR = \frac{\pi}{2} \text{ より, } \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = 0 \text{ であるから}$$

$$\{(1-t)\vec{a} - t\vec{b}\} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right\} = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (1-t) \left(\frac{1}{2} - t\right) \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}(1-t)\vec{c} \cdot \vec{a} - t \left(\frac{1}{2} - t\right) |\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}t\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{上式に } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1^2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad |\vec{b}| = 1 \text{ を代入すると}$$

$$\frac{1}{2}(1-t) \left(\frac{1}{2} - t\right) + \frac{1}{4}(1-t) - t \left(\frac{1}{2} - t\right) - \frac{1}{4}t = 0$$

$$\text{整理すると } 6t^2 - 7t + 2 = 0 \quad \text{ゆえに } (2t-1)(3t-2) = 0$$

$$0 < t < 1 \text{ に注意して, これを解くと } t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$$

$$(3) \quad (i) \quad t = \frac{1}{2} \text{ のとき } \overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}), \quad \overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\vec{c}, \quad |\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{2}|\vec{c}| = \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに } |\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \triangle PQR = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$(ii) \quad t = \frac{2}{3} \text{ のとき } \overrightarrow{QP} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b}), \quad \overrightarrow{QR} = \frac{1}{6}(-\vec{a} + 3\vec{c})$$

$$\text{ゆえに } |\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2} = \frac{1}{3}\sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{c} + 9|\vec{c}|^2} = \frac{1}{6}\sqrt{1^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{6}$$

$$\text{よって } \triangle PQR = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{21}}{36}$$

■

2 (1) $f(x) = (2x - 1)^3$ より $f'(x) = 6(2x - 1)^2$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (2t - 1)^3 = 6(2t - 1)^2(x - t)$$

したがって $y = (2t - 1)^2(6x - 4t - 1)$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$6x - 4t - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{4t + 1}{6}$$

(2) (1) の結果より, $x_{n+1} = \frac{4x_n + 1}{6}$ であるから (ニュートン法¹)

$$x_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \left(x_n - \frac{1}{2} \right)$$

数列 $\left\{ x_n - \frac{1}{2} \right\}$ は, 初項 $x_1 - \frac{1}{2}$, 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$x_n - \frac{1}{2} = \left(2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad x_n = \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{2}$$

これから $x_n > \frac{1}{2}$

(3) (2) の結果から $x_{n+1} - x_n = \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^n = -\frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^n$

$|x_{n+1} - x_n| < \frac{3}{4} \times 10^{-5}$ のとき

$$\frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^n < \frac{3}{4} \times 10^{-5} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{2}{3} \right)^n < 10^{-5}$$

常用対数をとると $n(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) < -5$

したがって $n > \frac{5}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} \quad \cdots (*)$

ここで, $0.477 - 0.302 < \log_{10} 3 - \log_{10} 2 < 0.478 - 0.301$ であるから

$$28 + \frac{44}{177} = \frac{5}{0.177} < \frac{5}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} < \frac{5}{0.175} = 28 + \frac{4}{7}$$

よって, $(*)$ を満たす最小の n は **29**

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf (p.17 を参照)

- 3 (1) 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0 \cdots (*)$ が $x = 1$ を解にもつから $b = a - 1$
 $1 \leq a \leq 6, 2 \leq b \leq 12$ であるから

$$(a, b) = (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

a の値に対する確率は $\frac{1}{6}$, それぞれの b の値に対する確率は

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} \right) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

- (2) 2 次方程式 $(*)$ の解を α, β とすると, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

$(*)$ の整数解を α とすると, 上の第 1 式から

$$\beta = a - \alpha$$

上式の右辺は整数であるから, β も整数である.

2 整数 α, β について, $\alpha \leq \beta$ とおいても一般性を失わないから

$$2\alpha \leq \alpha + \beta = a \leq 6 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha \leq 3$$

- (3) (i) $x = 2$ が 2 次方程式 $(*)$ の解のとき $b = 2a - 4$

$$(a, b) = (3, 2), (4, 4), (5, 6), (6, 8)$$

- (ii) $x = 3$ が 2 次方程式 $(*)$ の解のとき $b = 3a - 9$

$$(a, b) = (4, 3), (5, 6), (6, 9)$$

(1),(i),(ii) より

a	3	4	4,5	6	5	6	6
b	2	3	4	5	6	8	9

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} \cdot 2 + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} \right) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$



8.19 2019年(80分)

出題分野 ① ② ③

① a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする. 2次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

で定める. 曲線 $y = f(x)$ は点 $\left(2, 2 - \frac{c}{2}\right)$ を通り,

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{9}{2}$$

をみたすとする. 以下の問に答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ を a を用いて表せ.
- (2) 点 $(1, f(1))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を ℓ とする. 直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ.
- (3) $0 < a < \frac{1}{2}$ とする. (2) で求めた直線 ℓ の $y \geq 0$ の部分と曲線 $y = f(x)$ の $x \geq 0$ の部分および x 軸で囲まれた図形の面積 S の最大値と, そのときの a の値を求めよ.

② 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする.

$$1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4, \dots$$

すなわち, $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4$ で, 4以上の自然数 n に対し, $a_n = a_{n-3}$ とする. この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする. 以下の問に答えよ.

- (1) S_n を求めよ.
- (2) $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ.
- (3) どのような自然数 k に対しても, $S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ.

③ $|\overrightarrow{AB}| = 2$ をみたす $\triangle PAB$ を考え, 辺 AB の中点を M , $\triangle PAB$ の重心を G とする. 以下の問に答えよ.

- (1) $|\overrightarrow{PM}|^2$ を内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ を用いて表せ.
- (2) $\angle AGB = \frac{\pi}{2}$ のとき, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の値を求めよ.
- (3) 点 A と点 B を固定し, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき, $\angle ABG$ の最大値を求めよ. ただし, $0 < \angle ABG < \pi$ とする.

解答例

- 1 (1) 曲線 $y = ax^2 + bx + c$ が点 $\left(2, 2 - \frac{c}{2}\right)$ を通るから

$$4a + 2b + c = 2 - \frac{c}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 4a + 2b + \frac{3}{2}c = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\int_0^3 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{9}{2} \quad \text{より}$$

$$\left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right]_0^3 = \frac{9}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{9}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } b = 1 - 2a, c = 0 \quad \text{よって} \quad f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x$$

- (2) (1) の結果から $f(1) = 1 - a$, $f'(x) = 2ax + 1 - 2a$ から $f'(1) = 1$

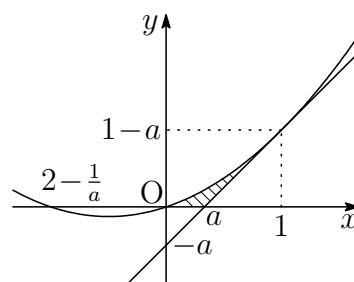
よって, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - (1 - a) = 1(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = x - a$$

- (3) (1), (2) の結果から

$$\begin{aligned} f(x) - (x - a) &= ax^2 + (1 - 2a)x - (x - a) \\ &= a(x - 1)^2 \end{aligned}$$

3 点 O , $(a, 0)$, $(0, -a)$ を頂点とする三角形の面積は $\frac{a^2}{2}$ であるから



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 a(x-1)^2 dx - \frac{a^2}{2} = \left[\frac{a}{3}(x-1)^3 \right]_0^1 - \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a}{3} - \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{18} \end{aligned}$$

$0 < a < \frac{1}{2}$ より, S は, $a = \frac{1}{3}$ のとき, 最大値 $\frac{1}{18}$ をとる. ■

2 (1) (i) $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$$S_n = S_3 + (1 + 3 + 4) \frac{n-3}{3} = 8 + \frac{8}{3}(n-3) = \frac{8n}{3}$$

(ii) $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$S_n = S_1 + (3 + 4 + 1) \frac{n-1}{3} = 1 + \frac{8}{3}(n-1) = \frac{8n-5}{3}$$

(iii) $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$S_n = S_2 + (4 + 1 + 3) \frac{n-2}{3} = 4 + \frac{8}{3}(n-2) = \frac{8n-4}{3}$$

$$\text{よって} \quad S_n = \begin{cases} \frac{8n}{3} & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ \frac{8n-5}{3} & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ \frac{8n-4}{3} & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

(2) $n = 3m + r$ とおくと ($r = 0, 1, 2$)

$$r = 0 \text{ のとき} \quad S_{3m} = \frac{8 \cdot 3m}{3} = 8m$$

$$r = 1 \text{ のとき} \quad S_{3m+1} = \frac{8(3m+1)-5}{3} = 8m+1$$

$$r = 2 \text{ のとき} \quad S_{3m+2} = \frac{8(3m+2)-4}{3} = 8m+4$$

2019 $\equiv 3 \pmod{8}$ であるから, $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しない.

(3) i) $k \equiv 0, \pm 4 \pmod{8}$ のとき $k^2 \equiv 0 \pmod{8}$

ii) $k \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod{8}$ のとき $k^2 \equiv 1 \pmod{8}$

iii) $k \equiv \pm 2 \pmod{8}$ のとき $k^2 \equiv 4 \pmod{8}$

i)~iii) および (2) の結果から, どのような自然数 k に対しても,

$$S_n = k^2$$

となる自然数 n が存在する. ■

- 3 (1) 点 M は辺 AB の中点であるから, $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$ より

$$|\overrightarrow{PM}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2) + \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}| = 2 \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{PB}|^2 - 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PA}|^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 4 + 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$$

上の結果を ① に代入すると

$$|\overrightarrow{PM}|^2 = \frac{1}{4}(4 + 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 1$$

- (2) 点 G は $\triangle PAB$ の重心であるから $\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{GM}$ $\dots \textcircled{2}$

$$\text{また, } \overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \text{ より } \overrightarrow{PM} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\angle AGB = \frac{\pi}{2} \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \quad \text{および} \quad |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = 2^2 = 4$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{ より } |\overrightarrow{PM}|^2 &= \frac{9}{4}|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}|^2 = \frac{9}{4}(|\overrightarrow{GA}|^2 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + |\overrightarrow{GB}|^2) \\ &= \frac{9}{4}(|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2) = \frac{9}{4} \cdot 4 = 9 \end{aligned}$$

$$\text{これを (1) の結果に代入して } 9 = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 1 \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 8$$

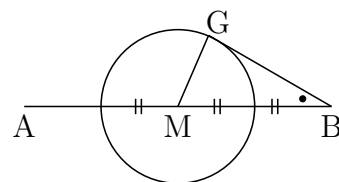
- (3) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}$ を (1) の結果に代入すると

$$|\overrightarrow{PM}|^2 = 1 + \frac{5}{4} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{PM}| = \frac{3}{2}$$

$$\text{これに } \textcircled{2} \text{ を代入することにより } |\overrightarrow{GM}| = |\overrightarrow{MG}| = \frac{1}{2}$$

したがって, G は M を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にある. B からこの円に引いた接線と辺 AB のなす角が求める最大値であるから, $MB = 1$ より

$$\angle ABG = \frac{\pi}{6}$$



8.20 2020年(80分)

出題分野 1 2 3

1 a, b, c, p は実数とし, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $(x-p)^2$ で割り切れるとする. 以下の問に答えよ.

(1) b, c を a, p を用いて表せ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は, $f'\left(p + \frac{4}{3}\right) = 0$ をみたすとする. a を p を用いて表せ.

(3) (2) の条件のもとで $p = 0$ とする. 曲線 $y = f(x)$ と $y = f'(x)$ の交点を x 座標が小さい方から順に A, B, C とし, 線分 AB と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1 , 線分 BC と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする. このとき, $S_1 + S_2$ の値を求めよ.

2 n を自然数とし, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次の (i), (ii) で定める.

(i) $a_1 = b_1 = 1$ とする.

(ii) $f_n(x) = a_n(x+1)^2 + 2b_n$ とし, $-2 \leq x \leq 1$ における $f_n(x)$ の最大値を a_{n+1} , 最小値を b_{n+1} とする.

以下の問に答えよ.

(1) すべての自然数 n について $a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ であることを示せ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

3 以下の問に答えよ.

(1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ.

(2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ.

(3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $x - p$ で割り切れるから, $f(p) = 0$ より

$$p^3 + ap^2 + bp + c = 0 \quad \text{ゆえに} \quad c = -p^3 - ap^2 - bp \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad f(x) &= x^3 + ax^2 + bx - p^3 - ap^2 - bp \\ &= x^3 - p^3 + a(x^2 - p^2) + b(x - p) \\ &= (x - p)\{x^2 + px + p^2 + a(x + p) + b\} \end{aligned}$$

$g(x) = x^2 + px + p^2 + a(x + p) + b$ とおくと, $g(x)$ は $x - p$ で割り切れるから, $g(p) = 0$ より

$$3p^2 + 2ap + b = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = -3p^2 - 2ap$$

上の第2式を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$c = -p^3 - ap^2 - (-3p^2 - 2ap)p = 2p^3 + ap^2$$

- (2) (1) の結果から $f(x) = x^3 + ax^2 + (-3p^2 - 2ap)x + 2p^3 + ap^2$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 3p^2 - 2ap$$

$$f'\left(p + \frac{4}{3}\right) = 0 \quad \text{より} \quad 3\left(p + \frac{4}{3}\right)^2 + 2a\left(p + \frac{4}{3}\right) - 3p^2 - 2ap = 0$$

$$\text{整理すると} \quad 3p + 2 + a = 0 \quad \text{よって} \quad a = -3p - 2$$

- (3) $p = 0$ のとき, (2) の結果から $a = -2, b = 0, c = 0$

$$f(x) = x^3 - 2x^2, \quad f'(x) = 3x^2 - 4x$$

2 曲線 $y = f(x), y = f'(x)$ の交点の x 座標は

$$x^3 - 2x^2 = 3x^2 - 4x$$

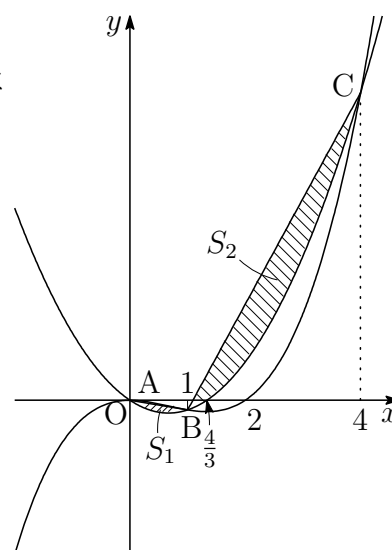
$$\text{ゆえに} \quad x(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = 0, 1, 4$$

$$A(0, 0), B(1, -1), C(4, 32)$$

$$\text{直線 AB は} \quad y = -x$$

$$\text{直線 BC は} \quad y = 11x - 12$$



したがって

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^1 \{-x - (3x^2 - 4x)\} dx \\
 &= -3 \int_0^1 x(x-1) dx = \frac{3}{6}(1-0)^3 = \frac{1}{2}, \\
 S_2 &= \int_1^4 \{11x - 12 - (3x^2 - 4x)\} dx \\
 &= -3 \int_1^4 (x-1)(x-4) dx = \frac{3}{6}(4-1)^3 = \frac{27}{2}
 \end{aligned}$$

よって $S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 14$ ■

2 (1) すべての自然数について

$$a_n > 0 \quad \text{かつ} \quad b_n > 0 \quad \cdots (*)$$

であることを数学的帰納法により示す.

[1] $n = 1$ のとき, $a_1 = 1 > 0$, $b_1 = 1 > 0$ より, $(*)$ は成立する.

[2] $n = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$a_{k+1} = f_n(1) = 4a_k + 2b_k > 0, \quad b_{k+1} = f_n(-1) = 2b_k > 0$$

したがって, $n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, $(*)$ は成立する.

(2) (1) の結果から $a_{n+1} = 4a_n + 2b_n$, $b_{n+1} = 2b_n$

$$b_1 = 1 \text{ および上の第2式から } b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

(3) (2) の結果から $a_{n+1} = 4a_n + 2^n$ ゆえに $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 2 \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$

したがって $c_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}$, $c_{n+1} = 2c_n + \frac{1}{2}$

$$c_{n+1} + \frac{1}{2} = 2 \left(c_n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{ゆえに} \quad c_n + \frac{1}{2} = \left(c_1 + \frac{1}{2} \right) \cdot 2^{n-1}$$

よって $c_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$ ■

- 3** (1) 30 個の○を一行に並べ、その間の 29 か所から 1 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$${}_{29}C_1 = \mathbf{29} \text{ (個)}$$

- (2) 30 個の○を一行に並べ、その間の 29 か所から 2 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$${}_{29}C_2 = \frac{29 \cdot 28}{2 \cdot 1} = \mathbf{406} \text{ (個)}$$

- (3) 和 30 になる 3 つの自然数の組合せについて

(i) 3 数が等しいものが $\{10, 10, 10\}$ の 1 組

(ii) 2 数だけが等しいものが、次の 13 組

$$\{1, 1, 28\}, \{2, 2, 26\}, \dots, \{9, 9, 12\}, \{11, 11, 8\}, \dots, \{14, 14, 2\}$$

(iii) 3 数がすべて異なるものが、 n 組とすると、(i), (ii) および (2) から

$$1 + 13 \cdot 3 + n \cdot 3! = 406 \quad \text{これを解いて} \quad n = 61 \text{ (組)}$$

よって、求める組合せの総数は、(i)~(iii) から

$$1 + 13 + 61 = \mathbf{75} \text{ (組)}$$



8.21 2021 年 (80 分)

出題分野 1 2 3

1 i を虚数単位とする. 以下の問に答えよ.(1) $n = 2, 3, 4, 5$ のとき $(3 + i)^n$ を求めよ. またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ.(2) n を正の整数とすると $(3 + i)^n$ は虚数であることを示せ.2 k, x, y, z を実数とする. k が以下の (1), (2), (3) のそれぞれの場合に, 不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 + k(xy + yz + zx) \geq 0$$

が成り立つことを示せ. また等号が成り立つのはどんな場合か.

(1) $k = 2$ (2) $k = -1$ (3) $-1 < k < 2$ 3 水平な地面に一本の塔が垂直に建っている (太さは無視する). 塔の先端を P とし, 足元の地点を H とする. また, H を通らない一本の道が一直線に延びている (幅は無視する). 道の途中に 3 地点 A, B, C がこの順にあり, $BC = 2AB$ をみたしている. 以下の問に答えよ.(1) $2AH^2 - 3BH^2 + CH^2 = 6AB^2$ が成り立つことを示せ.(2) A, B, C から P を見上げた角度 $\angle PAH$, $\angle PBH$, $\angle PCH$ はそれぞれ 45° , 60° , 30° であった. $AB = 100\text{m}$ のとき, 塔の高さ PH (m) の整数部分を求めよ.

(3) (2) において, H と道との距離 (m) の整数部分を求めよ.

解答例

$$\begin{aligned}
\boxed{1} \quad (1) \quad & (3+i)^2 = 9 + 6i + i^2 = \mathbf{8 + 6i} \\
& (3+i)^3 = (3+i)(3+i)^2 = (3+i)(8+6i) \\
& \quad = 24 + 26i + 6i^2 = \mathbf{18 + 26i} \\
& (3+i)^4 = (3+i)(3+i)^3 = (3+i)(18+26i) \\
& \quad = 54 + 96i + 26i^2 = \mathbf{28 + 96i} \\
& (3+i)^5 = (3+i)(3+i)^4 = (3+i)(28+96i) \\
& \quad = 84 + 316i + 96i^2 = \mathbf{-12 + 316i}
\end{aligned}$$

$n = 2, 3, 4, 5$ のとき, $(3+i)^n$ の虚部を 10 で割った余りは, すべて **6**

(2) 自然数 n について, $(3+i)^n = a_n + b_n i$ とすると

$$\begin{aligned}
a_{n+1} + b_{n+1}i &= (3+i)(a_n + b_n i) \\
&= 3a_n - b_n + (a_n + 3b_n)i
\end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad a_{n+1} = 3a_n - b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 3b_n$$

(1) の結果から

$$(*) \quad n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n \equiv 8, \quad b_n \equiv 6 \pmod{10}$$

であると推測する.

[1] $n = 2$ のとき, (1) の結果から, $(*)$ は成立する.

[2] $n = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3a_k - b_k \equiv 3 \cdot 8 - 6 \equiv 8 \pmod{10} \\
b_{k+1} &= a_k + 3b_k \equiv 8 + 3 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}
\end{aligned}$$

[1], [2] より, 2 以上の自然数 n について, $(*)$ が成立する.

$n = 1$ のとき $3+i = a_1 + b_1 i$ より $b_1 = 1 \neq 0$

すべての自然数 n について, $b_n \neq 0$ であるから, $(3+i)^n$ は虚数である.



- 2** (1) $k = 2$ のとき, $F = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ とおくと

$$F = (x + y + z)^2 \geq 0$$

$$\text{よって } x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 0$$

上式において, 等号が成立するのは, $x + y + z = 0$ のときである.

- (2) $k = -1$ のとき, $G = x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)$ とおくと

$$2G = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$$

$$\text{よって } x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \geq 0$$

上式において, 等号が成立するのは, 次のときである.

$$x - y = 0, y - z = 0, z - x = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = y = z$$

- (3) $-1 < k < 2$ とすると, $1 + k > 0$, $2 - k > 0$ であるから

$$(1 + k)F + (2 - k)G = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3k(xy + yz + zx)$$

したがって, (1), (2) の結果により

$$x^2 + y^2 + z^2 + k(xy + yz + zx) = \frac{1}{3}(1 + k)F + \frac{1}{3}(2 - k)G \geq 0$$

また, 上式において, 等号が成立するのは, 次のときである.

$$x + y + z = 0, x = y = z \quad \text{すなわち} \quad x = y = z = 0$$

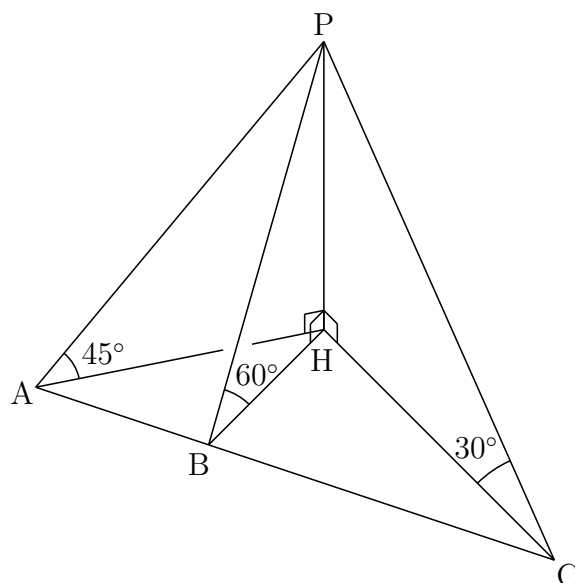


- 3 (1) $\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{BH}$, $\vec{CH} = \vec{CB} + \vec{BH} = -2\vec{AB} + \vec{BH}$ より

$$|\vec{AH}|^2 = |\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BH} + |\vec{BH}|^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|\vec{CH}|^2 = 4|\vec{AB}|^2 - 4\vec{AB} \cdot \vec{BH} + |\vec{BH}|^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \text{ より } & 2|\vec{AH}|^2 + |\vec{CH}|^2 = 6|\vec{AB}|^2 + 3|\vec{BH}|^2 \\ \text{よって} & 2AH^2 - 3BH^2 + CH^2 = 6AB^2 \end{aligned}$$



- (2) $PH = x$ (m) とすると, $AH = x$, $BH = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $CH = \sqrt{3}x$, $AB = 100$ (m) であるから, これらを (1) の結果に代入すると

$$2x^2 - 3\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 6 \cdot 100^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = 15000 \quad (*)$$

$$122^2 = 14884, \quad 123^2 = 15129 \text{ であるから } 122 < x < 123$$

よって, PH (m) の整数部分は **122**

- (3) (*) より, $x = 50\sqrt{6}$ であるから

$$AH = 50\sqrt{6} \text{ (m)}, \quad CH = 150\sqrt{2} \text{ (m)}, \quad AC = AB + BC = 300 \text{ (m)}$$

$$\text{これから } AH : CH : AC = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{6}$$

$$\theta = \angle HAC \text{ とすると } \cos \theta = \frac{1 + 6 - 3}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$H \text{ と道の距離は } AH \sin \theta = 50\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{2}$$

$$70^2 < (50\sqrt{2})^2 < 71^2 \text{ より, 求める整数は } \mathbf{70}$$



8.22 2022年(80分)

出題分野 ① ② ③

① a を正の実数とする. $x \geq 0$ のとき $f(x) = x^2$, $x < 0$ のとき $f(x) = -x^2$ とし, 曲線 $y = f(x)$ を C , 直線 $y = 2ax - 1$ を ℓ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) C と ℓ の共有点の個数を求めよ.
- (2) C と ℓ がちょうど2個の共有点をもつとする. C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ.

② a を正の実数とし, 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = \sqrt{a}x - 2\sqrt{a}$ が異なる2点 P, Q で交わっているとする. 線分 PQ の中点を $R(s, t)$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) a のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) s, t の値を a を用いて表せ.
- (3) a が (1) で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ.
- (4) t の値を s を用いて表せ.

③ a, b を実数とし, $1 < a < b$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) x, y, z を0でない実数とする. $a^x = b^y = (ab)^z$ ならば $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ であることを示せ.
- (2) m, n を $m > n$ をみたす自然数とし, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$ とする. m, n の値を求めよ.
- (3) m, n を自然数とし, $a^m = b^n = (ab)^5$ とする. b の値を a を用いて表せ.

解答例

- 1 (1) C と ℓ は, $x < 0$ の区間で共有点を 1 個もつ.
 $x \geq 0$ において, C と ℓ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 - 2ax + 1 = 0$$

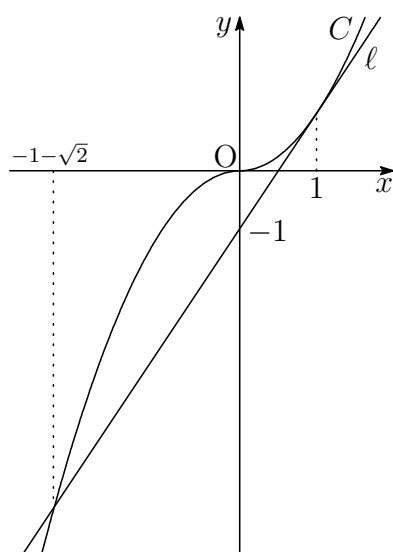
C と ℓ が接するとき, 係数について

$$D/4 = a^2 - 1 = 0$$

$a > 0$ より, $a = 1$ のとき, $0 \leq x$ において,
 C と ℓ は接する (右図).

ℓ の y 切片 -1 に注意して

$$\begin{array}{ll} 0 < a < 1 & \text{のとき} \quad 1 \text{ 個,} \\ a = 1 & \text{のとき} \quad 2 \text{ 個,} \\ 1 < a & \text{のとき} \quad 3 \text{ 個} \end{array}$$



- (2) C と ℓ がちょうど 2 個の共有点をもつとき, (1) の結果から, $a = 1$ であるから, $x < 0$ において, $C: y = -x^2$ と $\ell: y = 2x - 1$ の共有点の x 座標は

$$-x^2 = 2x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 2x - 1 = 0$$

$x < 0$ に注意して, これを解くと $x = -1 - \sqrt{2}$

$\alpha = -1 - \sqrt{2}$ とし, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^0 \{-x^2 - (2x - 1)\} dx + \int_0^1 \{x^2 - (2x - 1)\} dx \\ &= \int_0^{\alpha} \{(x + 1)^2 - 2\} dx + \int_0^1 (x - 1)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + 1)^3 - 2x \right]_0^{\alpha} + \left[\frac{1}{3}(x - 1)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\{(-\sqrt{2})^3 - 1^3\} + 2(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$



- 2 (1) 円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と直線 $\ell: y = \sqrt{a}(x-2)$ の方程式から y を消去すると

$$x^2 + a(x-2)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a+1)x^2 - 4ax + 4a - 1 = 0 \quad (*)$$

C と ℓ が異なる 2 点で交わるから、係数について ($a > 0$)

$$D/4 = (-2a)^2 - (a+1)(4a-1) = 1 - 3a > 0 \quad \text{よって} \quad 0 < a < \frac{1}{3}$$

- (2) P, Q の x 座標を s_1, s_2 とすると、2 次方程式 (*) の解と係数の関係により

$$s_1 + s_2 = \frac{4a}{a+1} \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{2a}{a+1}$$

これを $\ell: y = \sqrt{a}(x-2)$ の方程式に代入して

$$t = \sqrt{a} \left(\frac{2a}{a+1} - 2 \right) = -\frac{2\sqrt{a}}{a+1}$$

- (3) $s = \frac{2a}{a+1}$ より $s = -\frac{2}{a+1} + 2$. $0 < a < \frac{1}{3}$ より $1 < a+1 < \frac{4}{3}$

$$\frac{3}{4} < \frac{1}{a+1} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad -2 < -\frac{2}{a+1} < -\frac{3}{2}$$

$$\text{したがって} \quad 0 < -\frac{2}{a+1} + 2 < \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad 0 < s < \frac{1}{2}$$

- (4) $s = \frac{2a}{a+1}$ より $(2-s)a = s$ $s \neq 2$ であるから $a = \frac{s}{2-s}$

s の値の範囲に注意して、これを (2) の結果に代入すると

$$t = -\frac{2\sqrt{\frac{s}{2-s}}}{\frac{s}{2-s} + 1} = -\sqrt{s(2-s)}$$



- 3** (1) $R = a^x = b^y = (ab)^z$ とおくと $(x, y, z \neq 0, 1 < a < b) \quad R \neq 1$

$$a = R^{\frac{1}{x}}, \quad b = R^{\frac{1}{y}}, \quad ab = R^{\frac{1}{z}}$$

$$\text{ゆえに } R^{\frac{1}{x}} R^{\frac{1}{y}} = R^{\frac{1}{z}} \quad \text{したがって } R^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = R^{\frac{1}{z}} \quad \text{よって } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

別解 $R = a^x = b^y = (ab)^z$ とおくと $(x, y, z \neq 0, 1 < a < b) \quad R \neq 1$

正の実数 c ($c \neq 1$) を底とする対数をとると

$$\log_c R = x \log_c a = y \log_c b = z(\log_c a + \log_c b)$$

$$\text{したがって } \log_c a = \frac{\log_c R}{x}, \quad \log_c b = \frac{\log_c R}{y}, \quad \log_c a + \log_c b = \frac{\log_c R}{z}$$

上の第 1 式, 第 2 式を第 3 式に代入すると

$$\frac{\log_c R}{x} + \frac{\log_c R}{y} = \frac{\log_c R}{z} \quad \text{よって } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

- (2) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$ より $mn = 5(m+n)$ ゆえに $(m-5)(n-5) = 25$
 $m > n$ に注意すると, $m-5 > n-5 > 0$ であるから

$$m-5 = 25, \quad n-5 = 1 \quad \text{よって } (m, n) = (30, 6)$$

- (3) m, n は自然数であるから, $Q = a^m = b^n$ とおくと $(1 < a < b) \quad Q > 1$

$$a = Q^{\frac{1}{m}}, \quad b = Q^{\frac{1}{n}}$$

$$a < b \text{ より } Q^{\frac{1}{m}} < Q^{\frac{1}{n}} \quad \text{ゆえに } \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \quad \text{すなわち } m > n$$

(1) において, $x = m, y = n, z = 5$ とすると, $a^m = b^n = (ab)^5$ ならば

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$$

さらに, (2) の結論により

$$a^{30} = b^6 \quad \text{よって } b = a^5$$



8.23 2023 年 (80 分)

出題分野 ① ② ③

① a, b を実数とする. 整式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + ax + b$ で定める. 以下の間に答えよ.

- (1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ.
- (2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち, それが共に -1 より大きく, 0 より小さくなるような点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ.
- (3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく, 0 より小さくなるような点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ. ただし, 2 次方程式の重解は 2 つと数える.

② A, B の 2 人が, はじめに, A は 2 枚の硬貨を, B は 1 枚の硬貨を持っている. 2 人は次の操作 (P) を繰り返すゲームを行う.

- (P) 2 人は持っている硬貨すべてを同時に投げる. それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の枚数を数え, その枚数が少ない方が相手に 1 枚の硬貨を渡す. 表が出た硬貨の枚数が同じときは硬貨のやりとりは行わない.

操作 (P) を繰り返し, 2 人のどちらかが持っている硬貨の枚数が 3 枚となった時点でこのゲームは終了する. 操作 (P) を n 回繰り返し行ったとき, A が持っている硬貨の枚数が 3 枚となってゲームが終了する確率を p_n とする. ただし, どの硬貨も 1 回投げたとき, 表の出る確率は $\frac{1}{2}$ とする. 以下の間に答えよ.

- (1) p_1 の値を求めよ.
- (2) p_2 の値を求めよ.
- (3) p_3 の値を求めよ.

3 a を正の実数とする. 2 つの円

$$C_1 : x^2 + y^2 = a, \quad C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$$

が異なる 2 点 A, B で交わっているとする. 直線 AB が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ $(p, 0)$, $(0, q)$ とするとき, 以下の問に答えよ.

- (1) a のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) p, q の値を a を用いて表せ.
- (3) p, q の値が共に整数となるような a の値をすべて求めよ.

解答例

1 (1) $f(x) = x^2 + ax + b$ より $f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$
 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき

$$-\frac{a}{2} > 0, \quad f(0) = b > 0, \quad b - \frac{a^2}{4} < 0$$

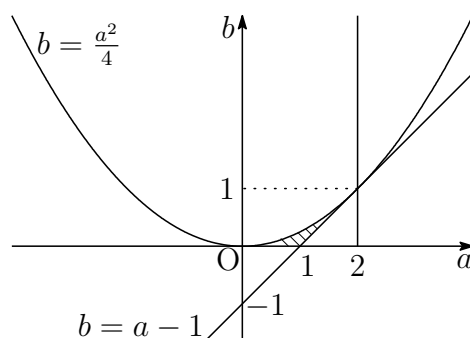
よって, 求める必要十分条件は $a < 0, b > 0, b < \frac{a^2}{4}$

(2) 与えられた条件を満たすとき

$$-1 < -\frac{a}{2} < 0, \quad f(0) = b > 0, \quad f(-1) = 1 - a + b > 0, \quad b - \frac{a^2}{4} < 0$$

したがって $0 < a < 2, b > 0, b > a - 1, b < \frac{a^2}{4}$

よって, 点 (a, b) の存在する範囲は, 図の斜線部分で境界線を含まない.



(3) (i) $f(x) = 0$ が実数解をもつ, すなわち, $a^2 - 4b \geq 0$ のとき

$$-1 < -\frac{a}{2} < 0, \quad f(0) = b > 0, \quad f(-1) = 1 - a + b > 0$$

$$\text{したがって} \quad 0 < a < 2, \quad b > 0, \quad b > a - 1, \quad b \leq \frac{a^2}{4}$$

(ii) $f(x) = 0$ が虚数解をもつ, すなわち, $a^2 - 4b < 0$ のとき

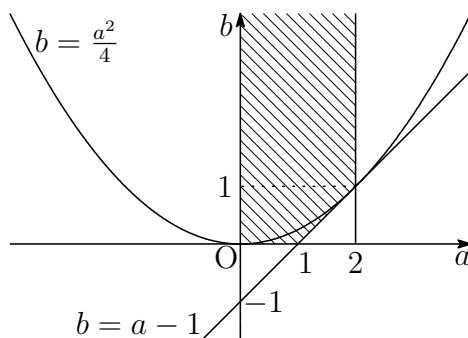
$f(x) = 0$ の虚数解 $\frac{-a \pm \sqrt{-a^2 + 4b}i}{2}$ の実部 $-\frac{a}{2}$ が -1 より大きく, 0 より小さいから

$$-1 < -\frac{a}{2} < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < a < 2$$

$$\text{したがって} \quad 0 < a < 2, \quad b > \frac{a^2}{4}$$

(i), (ii) から $0 < a < 2, \quad b > 0, \quad b > a - 1$

よって, 点 (a, b) の存在する範囲は, 図の斜線部分で境界線を含まない.



2 2枚の硬貨と1枚の硬貨を投げたとき、表の出る枚数をそれぞれ X, Y とすると

X	0	1	2	計
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Y	0	1	計
$P(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

したがって

$$\begin{aligned}
 P(X < Y) &= P(X = 0)P(Y = 1) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\
 P(X = Y) &= P(X = 0)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 1) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
 P(X > Y) &= 1 - \{P(X < Y) + P(X = Y)\} \\
 &= 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

A が m 枚の硬貨を持っているとき、操作 (P) によって硬貨の枚数が n 枚になる確率を (m, n) と表すと

$$\begin{aligned}
 (2, 1) &= (1, 2) = P(X < Y) = \frac{1}{8} \\
 (2, 2) &= (1, 1) = P(X = Y) = \frac{3}{8} \\
 (2, 3) &= (1, 0) = P(X > Y) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$(1) \quad p_1 = (2, 3) = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad p_2 = (2, 2)(2, 3) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$(3) \quad p_3 = (2, 2)(2, 2)(2, 3) + (2, 1)(1, 2)(2, 3) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{64} \quad \blacksquare$$

3 (1) $C_1 : x^2 + y^2 = a$ ($a > 0$)

$$C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \text{ より } (x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$$

$$C_1, C_2 \text{ の中心間の距離は } \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$C_1, C_2 \text{ の半径は, それぞれ } \sqrt{a}, \sqrt{10}$$

C_1, C_2 が異なる 2 点で交わるから

$$|\sqrt{a} - \sqrt{10}| < \sqrt{13} < \sqrt{a} + \sqrt{10}$$

$$\text{したがって } \sqrt{13} - \sqrt{10} < \sqrt{a} < \sqrt{13} + \sqrt{10}$$

$$\text{よって } 23 - 2\sqrt{130} < a < 23 + 2\sqrt{130}$$

(2) C_1, C_2 の交点を通る直線は, これらの方程式から $x^2 + y^2$ を消去して

$$6x + 4y - a - 3 = 0$$

この直線が $(p, 0), (0, q)$ を通るから

$$6p - a - 3 = 0, \quad 4q - a - 3 = 0$$

$$\text{よって } p = \frac{a+3}{6}, \quad q = \frac{a+3}{4}$$

(3) (2) の結果から $6p = 4q = a + 3$

$a + 3$ は 6 の倍数かつ 4 の倍数, すなわち, 12 の倍数である.

$2\sqrt{130} = \sqrt{520}, 22 < \sqrt{520} < 23$ であるから, (1) の結果について

$$0 < 23 - \sqrt{520} < 1, \quad 45 < 23 + \sqrt{520} < 46$$

$$\text{したがって } 0 < a + 3 < 49 \quad \text{ゆえに} \quad a + 3 = 12, 24, 36, 48$$

$$\text{よって } a = 9, 21, 33, 45$$



8.24 2024年(80分)

出題分野 ① ② ③

① 各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める. a_1 は関数

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 10x \quad (x \geq 0)$$

が最小値をとるときの x の値とする. a_{n+1} は関数

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 10a_n x \quad (x \geq 0)$$

が最小値をとるときの x の値とする. 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_{10} a_n$ で定める. 以下の問に答えよ.

- (1) a_1 と b_1 を求めよ.
- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ.
- (3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ.
- (4) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (5) $\frac{a_1 a_2 a_3}{100}$ の値を求めよ.

② n を自然数とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 1個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n で最小のものを求めよ.
- (2) 1個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\frac{5}{6}$ であるような n で最小のものを求めよ.
- (3) 1個のサイコロを3回投げて出た目の積が20の約数となる確率を求めよ.

3 a, b, c は実数で, $a \neq 0$ とする. 放物線 C と直線 ℓ_1, ℓ_2 をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c$$

$$\ell_1 : y = -3x + 3$$

$$\ell_2 : y = x + 3$$

で定める. ℓ_1, ℓ_2 がともに C に接するとき, 以下の問に答えよ.

- (1) b を求めよ. また c を a を用いて表せ.
- (2) C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき, $\frac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) C と ℓ_1 の接点を P , C と ℓ_2 の接点を Q , 放物線 C の頂点を R とする. a が (2) の条件を満たしながら動くとき, $\triangle PQR$ の重心 G の軌跡を求めよ.

解答例

- 1 (1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 10x$ を微分すると $y' = x^2 - 10$
 $x \geq 0$ における増減は、次のようになる.

x	0	...	$\sqrt{10}$	...
y'		...	0	...
y	0	$\searrow$	最小	$\nearrow$

よって $a_1 = \sqrt{10}, \quad b_1 = \log_{10} a_1 = \frac{1}{2}$

- (2) $y = \frac{1}{3}x^3 - 10a_n x$ を微分すると $y' = x^2 - 10a_n$
 $x \geq 0$ における増減は、次のようになる ($a_n > 0$).

x	0	...	$\sqrt{10a_n}$	...
y'		...	0	...
y	0	$\searrow$	最小	$\nearrow$

よって $a_{n+1} = \sqrt{10a_n}$

- (3) (2) の結果から

$$\log_{10} a_{n+1} = \log_{10} \sqrt{10a_n} = \frac{1}{2} \log_{10} a_n + \frac{1}{2}$$

よって $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$

- (4) (3) の結果から $b_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(b_n - 1)$

したがって、 $\{b_n - 1\}$ は初項 $b_1 - 1 = -\frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ である.

$$b_n - 1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad b_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- (5) (4) の結果から $b_1 + b_2 + b_3 = 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{17}{8}$

$$\log_{10} a_1 + \log_{10} a_2 + \log_{10} a_3 = \frac{17}{8} \quad \text{ゆえに} \quad a_1 a_2 a_3 = 10^{\frac{17}{8}}$$

よって $\frac{a_1 a_2 a_3}{100} = \frac{10^{\frac{17}{8}}}{10^2} = 10^{\frac{1}{8}}$



- 2** (1) サイコロの目 1, 2, 3, 4, 5, 6 の最小公倍数は 60

よって、求める最小の数は 60

- (2) n の約数となるサイコロの目の集合を A とし、 A の大きさ (要素の個数) を $|A|$ とする. $1 \in A, 2 \notin A \Rightarrow 6 \notin A, 3 \notin A \Rightarrow 6 \notin A, \{2, 3\} \subset A \Rightarrow 6 \in A$ に注意すると、 $|A| = 5$ となる A は次の 2 通り.

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6\} \quad \text{または} \quad A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

これを満たす n で最小の数は 12

- (3) $20 = 2^2 \cdot 5$ より $A = \{1, 2, 4, 5\}$

このとき、5 の目が出るのは 1 回までとなる.

- 5 の目が出ないときの組み合わせは

$$\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 1, 4\}, \{1, 2, 2\}$$

$$\text{その確率は} \left(1 + 3 \times \frac{3!}{1!2!}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{10}{216}$$

- 5 の目が 1 回出る組み合わせは

$$\{1, 1, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 2, 5\}$$

$$\text{その確率は} \left(2 \times \frac{3!}{1!2!} + 2 \times 3!\right) \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{18}{216}$$

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{10}{216} + \frac{18}{216} = \frac{7}{54}$$



3 (1) ℓ_1, ℓ_2 がともに C に接するとき

$$C' : y = ax^2 + (b+1)x + c$$

$$\ell'_1 : y = -2x + 3$$

$$\ell'_2 : y = 2x + 3$$

とすると, ℓ'_1, ℓ'_2 はともに C' に接する. ℓ'_1, ℓ'_2 は y 軸対称より, C' も y 軸対称であるから

$$b+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=-1$$

C' と ℓ'_1 から y を消去して, 整理すると

$$ax^2 + 2x + c - 3 = 0 \quad (*)$$

上の2次方程式は重解をもつから, 係数について

$$D/4 = 1^2 - a(c-3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{1}{a} + 3$$

(2) (1) の結果から C の方程式は $y = ax^2 - x + \frac{1}{a} + 3$

C は x 軸と2点で交わるから, 係数について

$$D = (-1)^2 - 4a\left(\frac{1}{a} + 3\right) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 + 4a < 0$$

上の第2式の両辺に $\frac{1}{a^2}$ を掛けると

$$\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} + 4 \right) < 0 \quad \text{よって} \quad -4 < \frac{1}{a} < 0$$

(3) C' と ℓ'_1 の接点を P' , C' と ℓ'_2 の接点を Q' とする.

P' の x 座標は, (*) から $x = -\frac{2}{2a} = -\frac{1}{a}$

Q' は P' と y 軸対称であるから, その x 座標は $x = \frac{1}{a}$

P と P' , Q と Q' の x 座標は一致するから

$$C : y = ax^2 - x + \frac{1}{a} + 3 = a \left(x - \frac{1}{2a} \right)^2 + \frac{3}{4a} + 3$$

これより, 3 点 P , Q , R の座標を得る.

$$P \left(-\frac{1}{a}, \frac{3}{a} + 3 \right), \quad Q \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a} + 3 \right), \quad R \left(\frac{1}{2a}, \frac{3}{4a} + 3 \right)$$

したがって, $\triangle PQR$ の重心 G の座標は $\left(\frac{1}{6a}, \frac{19}{12a} + 3 \right)$

(2) の結果から $-\frac{2}{3} < \frac{1}{6a} < 0$

$$\frac{19}{12a} + 3 = \frac{19}{2} \cdot \frac{1}{6a} + 3$$

よって, 点 G の軌跡は 直線 $y = \frac{19}{2}x + 3 \quad \left(-\frac{2}{3} < x < 0 \right)$ ■

第 9 章 広島大学

出題分野 (2011-2024) 120 分

◀	広島大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	数と式														
	2 次関数	1													
	図形と計量		3				2								
	データの分析														1
II	式と証明														
	複素数と方程式														
	図形と方程式			4	1			2		4			2		4
	三角関数							1			2	4			
	指数関数と対数関数	2	1												
	微分法と積分法	3	2	1	2	1・4	1	4	1・3		1	1	4	4	2
A	場合の数と確率		4	5	5		4	3	4	2	3	3	3	1	
	整数の性質		5										1		
	図形の性質									4					
B	平面上のベクトル	4		2		3						2			
	空間のベクトル				3		3							3	3
	数列			3	4	2・5			2	1・3	4			2	
	確率分布と統計	5					5								

数字は問題番号

9.11 2011年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ.

- (1) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とする. 不等式

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} < \frac{6}{a} + \frac{k}{b}$$

を満たす k の値の範囲を求めよ.

- (2) a, b は定数で, $a > 0$ とする. 2 次関数 $f(x) = ax^2 - 2x + b$ の定義域を $-1 \leq x \leq 2$ とし, $f(-1) < f(2)$ を満たすとする. 関数 $y = f(x)$ の値域が $-1 \leq y \leq 7$ であるとき, 定数 a, b の値を求めよ.

2 次の問いに答えよ.

- (1) $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ.
- (2) p, q を異なる自然数とすると, $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ.
- (3) $\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ.

3 放物線 $F: y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 上の点 $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を通り, A における F の接線に垂直な直線を ℓ とし, ℓ と放物線 F との交点のうち点 A と異なる方を $B\left(b, \frac{1}{2}(b+1)^2\right)$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 直線 ℓ の方程式と b の値を求めよ.
- (2) 放物線 F と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 T_1 を求めよ.
- (3) 線分 AB を直径とする円を C とする. このとき, 不等式 $y \leq \frac{1}{2}(x+1)^2$ の表す領域で円 C の内部にある部分の面積 T_2 を求めよ.

- 4 平面上で、線分 AB を 1 : 2 に内分する点を O、線分 AB を 1 : 4 に外分する点を C とする。P を直線 AB 上にない点とし、 $\overrightarrow{PO}$ と $\overrightarrow{PC}$ が垂直であるとする。 $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PC}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。
- (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ で表せ。
- (3) $PA = 1$, $\triangle PAB$ の面積が $\frac{3}{2}$ のとき、PB の長さを求めよ。

- 5 さいころを n 回投げる。 k 回目 ($k = 1, 2, \dots, n$) に投げた結果、

- 1 または 2 の目が出たとき $X_k = 2$,
- 3 または 4 の目が出たとき $X_k = 3$,
- 5 または 6 の目が出たとき $X_k = 5$

とする。これらの積を $Y = X_1 X_2 \cdots X_n$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $n = 5$ のとき、 Y が偶数になる確率 p_1 を求めよ。
- (2) $n = 5$ のとき、 Y が 100 の倍数になる確率 p_2 を求めよ。
- (3) $n = 2$ のとき、 Y の期待値 E を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} = 3 + (\sqrt{3} - 1)$$

$$0 < \sqrt{3} - 1 < 1 \text{ であるから } a = 3, b = \sqrt{3} - 1$$

上の結果を $\frac{1}{2-\sqrt{3}} < \frac{6}{a} + \frac{k}{b}$ に代入すると

$$2 + \sqrt{3} < \frac{6}{3} + \frac{k}{\sqrt{3}-1} \quad \text{よって} \quad k > 3 - \sqrt{3}$$

(2) $a > 0$ であるから、放物線 $y = ax^2 - 2x + b$ は下に凸である.

$$y = a \left(x - \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} + b \text{ より, 軸の方程式は } x = \frac{1}{a}$$

定義域 $-1 \leq x \leq 2$ の中央は $\frac{1}{2}$ で, $f(-1) < f(2)$ であるから

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a > 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

また, 関数 $y = f(x)$ の値域が $-1 \leq y \leq 7$ であるから

$$f(2) = 7, f\left(\frac{1}{a}\right) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (*) \quad \begin{cases} 4a + b = 11 \\ -\frac{1}{a} + b = -1 \end{cases}$$

(*) から, b を消去して整理すると $4a^2 - 12a + 1 = 0$

$$\textcircled{1} \text{ に注意して解くと } a = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$$

これを (*) の第1式に代入することにより $b = 5 - 4\sqrt{2}$

2次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり,
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる.



2 (1) $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ より $2^{\frac{m}{n}} = 3$ ゆえに $2^m = 3^n$

m, n は、自然数であるから、上式は素因数分解の一意性に反する.

よって、 $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しない.

補足 自然数 m, n に対し、 $2^m = 3^n$ の左辺は偶数、右辺は奇数であるから矛盾.

(2) $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分が等しくなる自然数 p, q に対し ($p \neq q$)

$$p \log_2 3 - q \log_2 3$$

は整数であるから、これを l とすると

$$(p - q) \log_2 3 = l \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 3 = \frac{l}{p - q}$$

これは (1) の結果に反するので、 $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分が等しくなる自然数 p, q ($p \neq q$) は存在しない.

(3) $8 < 9, 243 < 256$, すなわち、 $2^3 < 3^2, 3^5 < 2^8$ ゆえに $2^{\frac{3}{2}} < 3 < 2^{\frac{8}{5}}$

したがって $\frac{3}{2} < \log_2 3 < \frac{8}{5}$ すなわち $1.5 < \log_2 3 < 1.6$

よって、 $\log_2 3$ の小数第 1 位は 5

補足 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ ということを知っていれば

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

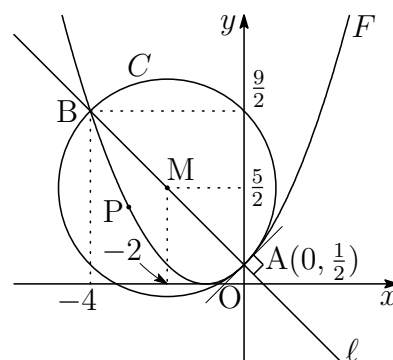
を計算することで、 $1.5 < \log_2 3 < 1.6$ を評価すればよいことが分かる. ■

3 (1) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ より $y' = x+1$

$x=0$ のとき, $y' = 1$ より, ℓ の傾きは -1

ℓ は点 $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を通り, 傾き -1 の直線であるから

$$\ell: y = -x + \frac{1}{2}$$



F と ℓ の方程式から y を消去すると

$$\frac{1}{2}(x+1)^2 = -x + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x(x+4) = 0$$

よって, 点 B の x 座標 b は $b = -4$

(2) (1) の結果から, 放物線 F と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 T_1 は

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-4}^0 \left\{ -x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x+1)^2 \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-4}^0 x(x+4) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4^3 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

(3) $B\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ であるから, 円 C の中心を M とすると $M\left(-2, \frac{5}{2}\right)$

C の半径は $2\sqrt{2}$ で, F 上の点 $P\left(t, \frac{1}{2}(t+1)^2\right)$ について $(-4 \leq t \leq 0)$

$$\begin{aligned} MP^2 - (\sqrt{8})^2 &= (t+2)^2 + \left\{ \frac{1}{2}(t+1)^2 - \frac{5}{2} \right\}^2 - 8 \\ &= \frac{1}{4}t^3(t+4) \leq 0 \end{aligned}$$

したがって, 区間 $-4 \leq x \leq 0$ において, F は C の内部にある.

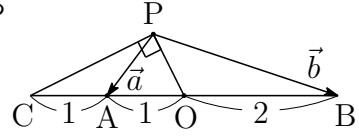
よって, 求める面積 T_2 は (2) の結果から

$$T_2 = \frac{1}{2}\pi(2\sqrt{2})^2 - T_1 = 4\pi - \frac{16}{3}$$

■

- 4 (1) 点 O は線分 AB を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{PO} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$$



点 C は線分 AB を 1 : 4 に外分する点であるから

$$\overrightarrow{PC} = \frac{-4\vec{a} + \vec{b}}{1 - 4} = \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3}$$

- (2) $\overrightarrow{PO} \perp \overrightarrow{PC}$ より, $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (4\vec{a} - \vec{b}) = 0$ であるから

$$8|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = 0 \quad \text{よって} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -4|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{b}|^2$$

- (3) $|\vec{b}| = x$ とおいて, これと $|\vec{a}| = 1$ を (2) の結果に代入すると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 + \frac{1}{2}x^2$$

$\triangle PAB = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ であるから, $\triangle PAB = \frac{2}{3}$ および上式より

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2x^2 - \left(-4 + \frac{1}{2}x^2\right)^2}$$

整理すると $x^4 - 20x^2 + 100 = 0$ ゆえに $(x^2 - 10)^2 = 0$

$x > 0$ であるから $PB = |\vec{b}| = \sqrt{10}$ ■

5 (1) Y が奇数となる確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

求める確率 p_1 は、この余事象の確率であるから

$$p_1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$$

(2) $100 = 2^2 \cdot 5^2$ であるから、 $X_k = 2$, $X_k = 5$ が少なくとも2回ずつある.

(i) $X_k = 2$ が2回, $X_k = 5$ が3回ある確率は

$$\frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{10}{243}$$

(ii) $X_k = 2$ が3回, $X_k = 5$ が2回ある確率は

$$\frac{5!}{3!2!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{10}{243}$$

(iii) $X_k = 2$ が2回, $X_k = 3$ が1回, $X_k = 5$ が2回ある確率は

$$\frac{5!}{2!1!2!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{30}{243}$$

(i)~(iii) より、求める確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{10}{243} + \frac{10}{243} + \frac{30}{243} = \frac{50}{243}$$

(3) $Y = X_1 X_2$ のとりうる値は、次の6通り

$$2^2, 3^2, 5^2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5$$

したがって

Y	4	9	25	6	10	15	計
$P(Y)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

よって、求める期待値 $E(Y)$ は

$$E(Y) = \frac{1}{9}(4 + 9 + 25) + \frac{2}{9}(6 + 10 + 15) = \frac{100}{9}$$

別解

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{1}{3}(2 + 3 + 5) = \frac{10}{3}$$

事象 X_1 , X_2 は独立であるから、求める期待値 $E(Y)$ は

$$E(Y) = E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) = \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{100}{9}$$



9.12 2012 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

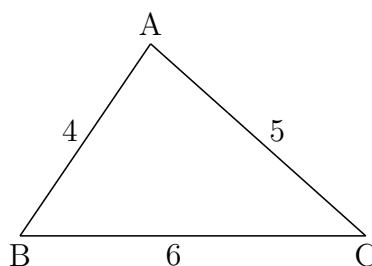
1 $f(x) = \log_2(x-1) + \log_2(4-x)$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ.
- (2) 不等式 $f(x) \geq 0$ を解け.
- (3) 関数 $f(x)$ の最大値を m とするとき, 2^{m-2} を求めよ.
- (4) (3) の m について, 1000^m の整数部分の桁数を求めよ. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

2 放物線 $C: y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ 上に 2 点 A, B があり, A の x 座標は 3 である. 点 A, 点 B における C の接線をそれぞれ ℓ , m とし, ℓ と m の交点を P とおくと, $\angle APB = 45^\circ$ であった. 次の問いに答えよ.

- (1) 接線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) 接線 m の傾きを求めよ.
- (3) 点 P の座標を求めよ.
- (4) C , ℓ , m で囲まれた図形において, 不等式 $x \geq 0$ を満たす部分の面積 S を求めよ.

3 図のような 3 辺の長さをもつ三角形 ABC がある.



次の問いに答えよ.

- (1) $45^\circ < \angle B < 60^\circ$ を証明せよ.
- (2) $\angle A = 2\angle C$ を証明せよ.
- (3) $40^\circ < \angle C < 45^\circ$ を証明せよ.

- 4 N は4以上の整数とする. 次の規則にしたがって1個のさいころを繰り返し投げる.

規則: 出た目を毎回記録し, 偶数の目が3回出るか, あるいは奇数の目が N 回出たところで, さいころを投げる操作を終了する.

ただし, さいころの目の出方は同様に確からしいとする. 次の問いに答えよ.

- (1) さいころを投げる回数は, 最大で何回か.
 - (2) さいころを3回投げて操作を終了する確率を求めよ.
 - (3) さいころを N 回投げて操作を終了する確率を求めよ.
 - (4) 最後に奇数の目が出て操作を終了する確率を求めよ.
 - (5) $N = 4$ のとき, さいころを投げる回数の期待値を求めよ.
- 5 n は3以上の整数とする. 1から n までの整数から連続する2つの整数 $x, x+1$ を取り除く. 次に問いに答えよ.

- (1) $n = 17$ のとき, 残された整数の総和を個数15で割った値が $\frac{42}{5}$ であるとする. 取り除いた2つの整数を求めよ.
- (2) $n \geq 39$ のとき, 不等式

$$\frac{1}{2}n(n+1) - 1 - 2(n-1) > \frac{205}{11}(n-2)$$

が成り立つことを証明せよ.

- (3) 残された整数の総和を個数 $n-2$ で割った値が $\frac{205}{11}$ であるとする. n と取り除いた2つの整数を求めよ.

解答例

1 (1) $x - 1 > 0, 4 - x > 0$ すなわち $1 < x < 4$

(2) 不等式を変形すると $\log_2(x-1)(4-x) \geq \log_2 1$

底 2 は 1 より大きいから $(x-1)(4-x) \geq 1$

整理すると $x^2 - 5x + 5 \geq 0$

(1) の結果に注意して、これを解くと $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$

(3) $f(x) = \log_2(x-1)(4-x) = \log_2(-x^2 + 5x - 4) = \log_2 \left\{ -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \right\}$

ゆえに $m = \log_2 \frac{9}{4}$ したがって $m - 2 = \log_2 \frac{9}{16}$ よって $2^{m-2} = \frac{9}{16}$

(4) $1000^m = 10^{3m}$ であるから

$$\begin{aligned} 3m &= 3 \log_2 \frac{9}{4} = 6 \log_2 \frac{3}{2} = 6(\log_2 3 - 1) \\ &= 6 \left(\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} - 1 \right) = 6 \left(\frac{0.4771}{0.3010} - 1 \right) = 3.5 \dots \end{aligned}$$

$3 < 3m < 4$ であるから、求める桁数は 4

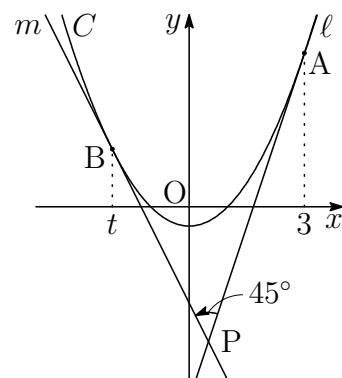
2 (1) $C: y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ より $y' = x$

ℓ は C 上の点 $(3, 4)$ における接線であるから

$$y - 4 = 3(x - 3) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x - 5$$

(2) m は、 ℓ を P を中心に 45° 回転させたもので、 $\tan \alpha = 3$ とおく。接点 B の x 座標を t とすると、接線 m の傾きは t であるから

$$\begin{aligned} t &= \tan(\alpha + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan 45^\circ}{1 - \tan \alpha \tan 45^\circ} \\ &= \frac{3 + 1}{1 - 3 \cdot 1} = -2 \end{aligned}$$



- (3) (2)の結果から, m は点 $B\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ を通り, 傾き -2 の直線であるから

$$y - \frac{3}{2} = -2(x + 2) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x - \frac{5}{2}$$

$$\ell, m \text{ を連立すると } P\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

- (4) 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - \left(-2x - \frac{5}{2}\right) \right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^3 \left\{ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - (3x - 5) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (x+2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^3 (x-3)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} \left[(x+2)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} \left[(x-3)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^3 = \frac{31}{8} \end{aligned}$$

3 (1) 余弦定理により $\cos B = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}$

$$\frac{1}{2} < \frac{9}{16} < \frac{8\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{より} \quad \cos 60^\circ < \cos B < \cos 45^\circ$$

$$\cos B > 0 \quad \text{より, } \angle B \text{ は鋭角であるから} \quad 45^\circ < \angle B < 60^\circ$$

- (2) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{8}, \quad \cos C = \frac{6^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8} = \cos A$$

$$\cos A > 0, \cos 2C > 0 \quad \text{より, } \angle A, \angle 2C \text{ は鋭角であるから} \quad \angle A = 2\angle C$$

- (3) $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$ であるから, (2)の結果により

$$\angle B = 180^\circ - 3\angle C$$

これを (1) の結果に代入すると

$$45^\circ < 180^\circ - 3\angle C < 60^\circ \quad \text{ゆえに} \quad 40^\circ < \angle C < 45^\circ$$

- 4 (1) さいころを投げる回数が最大となるのは、偶数が 2 回、奇数が $N-1$ 回出した後にもう 1 回投げる回数であるから

$$2 + (N - 1) + 1 = N + 2 \text{ (回)}$$

- (2) 求める確率は、偶数の目が 3 回出る確率であるから $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

- (3) さいころを N 回投げて操作が終了するのは、次の (i), (ii) の場合である.

- (i) N 回とも奇数の目が出る場合で、その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{1}{2^N}$$

- (ii) $N-1$ 回目までに偶数が 2 回出て、 N 回目に偶数が出る場合で、その確率は

$${}_{N-1}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(N-1)(N-2)}{2^{N+1}}$$

- (i), (ii) より、求める確率は

$$\frac{1}{2^N} + \frac{(N-1)(N-2)}{2^{N+1}} = \frac{N^2 - 3N + 4}{2^{N+1}}$$

- (4) 最後に奇数の目が出て操作が終了するのは、次の (i)~(iii) の場合である.

- (i) N 回とも奇数が出る場合で、その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{1}{2^N}$$

- (ii) N 回目までに偶数が 1 回出て、 $N+1$ 回目に奇数が出る場合で、その確率は

$${}_NC_1 \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot \frac{1}{2} = \frac{N}{2^{N+1}}$$

- (iii) $N+1$ 回目までに偶数が 2 回出て、 $N+2$ 回目に奇数が出る場合で、その確率は

$${}_{N+1}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(N+1)N}{2^{N+3}}$$

- (i)~(iii) から、求める確率は

$$\frac{1}{2^N} + \frac{N}{2^{N+1}} + \frac{(N+1)N}{2^{N+3}} = \frac{N^2 + 5N + 8}{2^{N+3}}$$

(5) さいころを投げる回数を X とし ($3 \leq X \leq 6$), その確率を $P(X)$ とする.

(i) $X = 3$ のとき, (2) の結果から $P(3) = \frac{1}{8}$

(ii) $X = 4$ のとき, 4 回とも奇数の目が出るか, 3 回目までに偶数が 2 回出て, 4 回目に偶数が出る場合であるから, (3) に $n = 4$ を代入して

$$P(4) = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 4}{2^5} = \frac{1}{4}$$

(iii) $P(6)$ は, 5 回目までに偶数が 2 回, 奇数が 3 回出る確率に等しいから

$$P(6) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$$

(iv) (i)~(iii) より

$$\begin{aligned} P(5) &= 1 - \{P(3) + P(4) + P(6)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{16}\right) = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

よって, 求める期待値は

$$3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{5}{16} + 6 \cdot \frac{5}{16} = \frac{77}{16}$$

別解 n 回投げた時点で、偶数が j 回、奇数が k 回出ている確率を P_j^k とすると

$$P_j^k = \begin{cases} \frac{1}{2} (P_{j-1}^k + P_j^{k-1}) & (1 \leq j < 3, 1 \leq k < 4) \\ \frac{1}{2} P_{j-1}^k & (j = 3) \\ \frac{1}{2} P_j^{k-1} & (k = 4) \end{cases}$$

が成り立つ ($P_0^1 = \frac{1}{2}$, $P_1^0 = \frac{1}{2}$).

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
			$P_0^4 = \frac{1}{16}$		
		$P_0^3 = \frac{1}{8}$		$P_1^4 = \frac{1}{8}$	
	$P_0^2 = \frac{1}{4}$		$P_1^3 = \frac{1}{4}$		$P_2^4 = \frac{5}{32}$
$P_0^1 = \frac{1}{2}$		$P_1^2 = \frac{3}{8}$		$P_2^3 = \frac{5}{16}$	
	$P_1^1 = \frac{1}{2}$		$P_2^2 = \frac{3}{8}$		$P_3^3 = \frac{5}{32}$
$P_1^0 = \frac{1}{2}$		$P_2^1 = \frac{3}{8}$		$P_3^2 = \frac{3}{16}$	
	$P_2^0 = \frac{1}{4}$		$P_3^1 = \frac{3}{16}$		
		$P_3^0 = \frac{1}{8}$			

さいころを投げる回数が X である確率を $P(X)$ とすると、上の計算から

$$\begin{aligned} P(3) &= \frac{1}{8}, & P(4) &= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}, \\ P(5) &= \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}, & P(6) &= \frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

よって、求める期待値は

$$3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{5}{16} + 6 \cdot \frac{5}{16} = \frac{77}{16}$$

■

- 5 (1) 取り除いた2つの整数を $x, x+1$ とすると

$$\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 18 - (2x+1) = \frac{42}{5} \times 15 \quad \text{これを解いて} \quad x = 13$$

よって、求める2数は **13, 14**

- (2) $n \geq 39$ のとき

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1) - 1 - 2(n-1)}{n-2} = \frac{1}{2}(n-1) \geq 19 > \frac{205}{11}$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{2}n(n+1) - 1 - (n-1) > \frac{205}{11}(n-2)$$

- (3) 1 から n までの整数の和から連続する2数を除いた整数を $n-2$ で割った値の最大値を A_M , 最小値を A_m とすると

$$A_M = \frac{\frac{1}{2}n(n+1) - 1 - 2}{n-2} = \frac{n+3}{2}$$

$$A_m = \frac{\frac{1}{2}n(n+1) - (n-1) - n}{n-2} = \frac{n-1}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{n-1}{2} \leq \frac{205}{11} \leq \frac{n+3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 35 \leq n \leq 38$$

$n-2$ は11の倍数であるから **$n = 35$**

したがって、取り除いた2数を $x, x+1$ とすると

$$x + (x+1) = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 36 - \frac{205}{11} \cdot 33 \quad \text{これを解いて} \quad x = 7$$

よって、取り除いた2数は **7, 8** ■

9.13 2013 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

- 1 放物線 $y = 2x^2 - 8$ を C とする. x 軸上の点 $A(a, 0)$ ($a > 0$) を通り C と接する直線が 2 本あるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) a の値の範囲を求めよ.
- (2) 2 つの接点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とする. $\beta - \alpha = 3$ のとき, a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ.
- (3) (2) で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めよ.

- 2 座標平面上に点 $A(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 < \theta < \pi$) がある. 原点を O とし, x 軸に関して点 A と対称な点を B とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $-1 < \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leq \frac{1}{2}$ となる θ の範囲を求めよ.

- (2) 点 P を

$$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

で定める. 点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする. θ が (1) で求めた範囲を動くとき, $\triangle POQ$ の面積の最大値を求めよ.

- 3 関数 $f(x) = \log_2(x+1)$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) 0 以上の整数 k に対して, $f(x) = \frac{k}{2}(f(1) - f(0))$ を満たす x を k を用いて表せ.

- (2) (1) で求めた x を x_k とおく. $S_n = \sum_{k=1}^n k(x_k - x_{k-1})$ を n を用いて表せ.

- 4 座標平面上で, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし, 2 点 $P(0, 1), Q(s, 0)$ を考える. 2 点 P, Q を通る直線を ℓ とし, ℓ と C の交点のうち P ではないものを R とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 点 R の座標を s を用いて表せ.
- (2) x 座標と y 座標がともに有理数である点を有理点という. s が有理数のとき, R は有理点であることを示せ.

- 5 座標平面上の点で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という． n を 3 以上の自然数とし、連立不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq n$$

の表す領域を D とする．格子点 $A(a, b)$ に対して、領域 D 内の格子点 $B(c, d)$ が $|a - c| + |b - d| = 1$ を満たすとき、点 B を点 A の隣接点という．次の問いに答えよ．

- (1) 点 $O(0, 0)$ の隣接点をすべて求めよ．また、領域 D 内の格子点 P が直線 $x + y = n$ 上にあるとき、 P の隣接点の個数を求めよ．
- (2) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ．
- (3) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき、隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ．ただし、格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする．

解答例

1 (1) $C: y = 2x^2 - 8$ より $y' = 4x$

C 上の点 $(t, 2t^2 - 8)$ における接線の方程式は

$$y - (2t^2 - 8) = 4t(x - t)$$

すなわち $y = 4tx - 2t^2 - 8 \quad \cdots \textcircled{1}$

この直線が点 $A(a, 0)$ を通るから

$$0 = 4ta - 2t^2 - 8$$

ゆえに $t^2 - 2at + 4 = 0 \quad \cdots (*)$

この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつから、係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 1 \cdot 4 = a^2 - 4 > 0$$

$a > 0$ に注意して、これを解くと $a > 2$

(2) α, β ($\alpha < \beta$) は方程式 $(*)$ の解であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2a > 4, \quad \alpha\beta = 4$$

$\beta - \alpha = 3$ および上の 2 式との連立方程式を解くと

$$\alpha = 1, \quad \beta = 4, \quad a = \frac{5}{2}$$

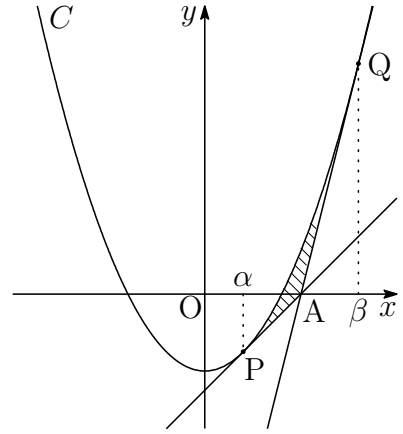
2 本の接線の方程式は、 $t = 1, 4$ を $\textcircled{1}$ に代入することにより

$$y = 4x - 10, \quad y = 16x - 40$$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{5}{2}} \{(2x^2 - 8) - (4x - 10)\} dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \{(2x^2 - 8) - (16x - 40)\} dx \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} 2(x - 1)^2 dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 2(x - 4)^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x - 1)^3 \right]_1^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{2}{3}(x - 4)^3 \right]_{\frac{5}{2}}^4 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

補足 $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$, C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_0 とすると¹, $S = \frac{S_0}{2}$



¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-bun.2009.pdf> [4] を参照.

- 2** (1) $A(\cos \theta, \sin \theta)$ より, $B(\cos \theta, -\sin \theta)$ であるから

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$-1 < \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leq \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$-1 < \cos 2\theta \leq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\pi}{3} \leq 2\theta < \pi, \quad \pi < 2\theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{よって} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$

- (2) $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ より

$$\overrightarrow{OP} = 2(\cos \theta, \sin \theta) + \frac{1}{2}(\cos \theta, -\sin \theta)$$

$$= \left(\frac{5}{2} \cos \theta, \frac{3}{2} \sin \theta \right),$$

$$\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{5}{2} \cos \theta, 0 \right)$$

$$\text{ゆえに} \quad \triangle POQ = \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2} \sin \theta \cdot \frac{5}{2} \cos \theta \right| = \frac{15}{16} |\sin 2\theta|$$

$$\text{よって} \quad 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \text{ すなわち, } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \text{ のとき, 最大値 } \frac{15}{16} \quad \blacksquare$$

- 3** (1) $f(x) = \log_2(x+1)$ より $f(0) = 0, f(1) = 1$

$$f(x) = \frac{k}{2}(f(1) - f(0)) \text{ より}$$

$$\log_2(x+1) = \frac{k}{2}(1-0) \quad \text{よって} \quad x = 2^{\frac{k}{2}} - 1$$

- (2) (1) の結果から, $x_k = 2^{\frac{k}{2}-1}$ であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n k(2^{\frac{k}{2}} - 2^{\frac{k-1}{2}}) \\ &= \sum_{k=1}^n \{k \cdot 2^{\frac{k}{2}} - (k-1) \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\} - \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k-1}{2}} \\ &= n \cdot 2^{\frac{n}{2}} - \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= n(\sqrt{2})^n - (\sqrt{2} + 1)\{(\sqrt{2})^n - 1\} \\ &= (n - \sqrt{2} - 1)(\sqrt{2})^n + \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

4 (1) C の方程式は $x^2 + y^2 = 1$

$x \neq 0$ のとき, 直線 ℓ の方程式は $\frac{x}{s} + y = 1$

このとき, C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^2 + \left(1 - \frac{x}{s}\right)^2 = 1 \quad \text{整理すると} \quad x\{(s^2 + 1)x - 2s\} = 0$$

R の x 座標は P と異なるから $x = \frac{2s}{s^2 + 1}$

これを ℓ の方程式に代入すると

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{2s}{s^2 + 1} + y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}$$

$s = 0$ のときも上の $R(x, y)$ は成立する.

よって, 求める R の座標は $\left(\frac{2s}{s^2 + 1}, \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}\right)$

(2) s が有理数のとき, $s = \frac{m}{n}$ (m, n は整数, $n \neq 0$) とおくと

$$x = \frac{2s}{s^2 + 1} = \frac{2 \cdot \frac{m}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

$$y = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1}{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

R の x 座標と y 座標は, 有理数であるから, R は有理点である.

補足 右の図において, $s = \tan \theta$ とおくと

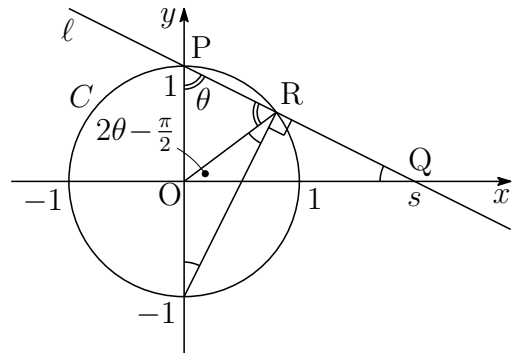
$(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$, $R(x, y)$ は

$$x = \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\theta$$

$$= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2s}{1 + s^2},$$

$$y = \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\theta$$

$$= -\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = -\frac{1 - s^2}{1 + s^2}$$



■

- 5 (1) 原点 O の隣接点は, $(1, 0), (0, 1)$ の **2** 個

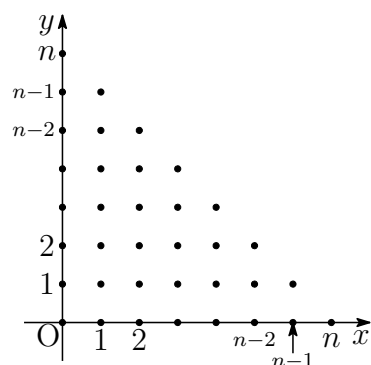
直線 $x+y=n$ 上の格子点 $P(k, n-k)$ の隣接点の個数は $(k=0, 1, 2, \dots, n)$

$k=0, n$ のとき 1 個, $k=1, 2, \dots, n-1$ のとき 2 個

- (2) 領域 D 内の格子点 (x, y) で隣接点の個数が 4 であるものは, $1 \leq k \leq n-2$ とすると, 直線 $x=k$ 上には, 次の $n-k-1$ 個ある.

$$(k, 1), (k, 2), \dots, (k, n-k-1)$$

したがって, 求める個数は



$$\sum_{k=1}^{n-2} (n-k-1) = \sum_{k=1}^{n-2} k = \frac{1}{2}(n-2)(n-1) \quad (\text{個})$$

- (3) 格子点 $(n, 0), (0, n)$ は隣接点が 1 個ある.

$1 \leq k \leq n-1$ のとき, 格子点 $(k, n-k), (0, 0)$ は隣接点が 2 個ある.

$1 \leq k \leq n-1$ のとき, 格子点 $(k, 0), (0, k)$ は隣接点が 3 個ある.

(1) で示した格子点は隣接点が 4 個ある.

領域 D 内の格子点の個数を N とすると

$$N = \sum_{k=0}^n (n+1-k) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

したがって, 隣接点の個数の期待値は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left\{ 1 \cdot 2 + 2 \cdot n + 3 \cdot 2(n-1) + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-2)(n-1) \right\} \\ &= \frac{2n(n+1)}{N} = \frac{2n(n+1)}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} = \frac{4n}{n+2} \end{aligned}$$

この期待値が 3 以上であるとき $\frac{4n}{n+2} \geq 3$ よって $n \geq 6$ ■

9.14 2014 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

- 1 座標平面上で、原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. C の外部にある点 $P(a, b)$ から C にひいた 2 本の接線と C との接点を H, H' とする. $\angle OPH = \theta$ とするとき、次の問いに答えよ.

(1) PH の長さ、および $\sin \theta$ を a, b を用いて表せ.

(2) $HH' = OP$ となるような点 P の軌跡を求めよ.

- 2 a_1, a_2, a_3 は定数で、 $a_1 > 0$ とする. 放物線 $C: y = a_1x^2 + a_2x + a_3$ 上の点 $P(2, 4a_1 + 2a_2 + a_3)$ における接線を ℓ とし、 ℓ と x 軸との交点を $Q(q, 0)$ 、 ℓ と y 軸との交点を $R(0, a_4)$ とする. a_1, a_2, a_3, a_4 がこの順に等差数列であるとき、次の問いに答えよ.

(1) a_2, a_3, a_4 を a_1 を用いて表せ.

(2) q の値を求めよ.

(3) 放物線 C 、接線 ℓ 、および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする. $S = q$ となるとき、 a_1 を求めよ.

- 3 四面体 $OABC$ において、 $\triangle OAB$ の重心を F 、 $\triangle OAC$ の重心を G とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{FG} // \overrightarrow{BC}$ であることを示せ.

(3) $OB = OC = 1$ 、 $\angle BOC = 90^\circ$ のとき、 FG の長さを求めよ.

- 4 $\alpha > 1$ とする. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1) $a_n > 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(2) $\sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x - 1) \quad (\text{ただし, } x > 1 \text{ とする.})$

(3) $a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (\alpha - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

5 正六角形の頂点を反時計回りに $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ とする. 1 個のさいころを 2 回投げて, 出た目を順に j, k とする. 次の問いに答えよ.

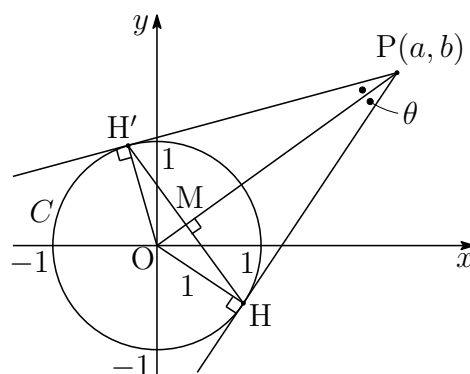
- (1) P_1, P_j, P_k が異なる 3 点となる確率を求めよ.
- (2) P_1, P_j, P_k が正三角形の 3 頂点となる確率を求めよ.
- (3) P_1, P_j, P_k が直角三角形の 3 頂点となる確率を求めよ.

解答例

1 (1) $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OH = 1$ より

$$\begin{aligned} PH &= \sqrt{OP^2 - OH^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\text{また } \sin \theta = \frac{OH}{OP} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



(2) 線分 HH' の中点を M とすると, (1) の結果を利用して

$$HM = PH \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2 - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{したがって } HH' = 2HM = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$HH' = OP$ のとき, $HH'^2 - OP^2 = 0$ より

$$\frac{4(a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + b^2} - (a^2 + b^2) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } (a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2) + 4 &= 0 \\ (a^2 + b^2 - 2)^2 &= 0 \\ a^2 + b^2 &= 2 \end{aligned}$$

よって, 点 $P(a, b)$ の描く軌跡は, 原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円.

補足 直線 HH' は, 点 $P(a, b)$ を極とする極線²であるから, その方程式は

$$ax + by = 1$$

原点 O から極線 HH' までの距離 d は

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{したがって } HH' = 2\sqrt{1^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

■

² <http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki.2012.pdf> [7] 参照.

- 2 (1) $y = a_1x^2 + a_2x + a_3$ より $y' = 2a_1x + a_2$
 $x = 2$ のとき, $y' = 4a_1 + a_2$ より, 点 $P(2, 4a_1 + 2a_2 + a_3)$ における接線は

$$y - (4a_1 + 2a_2 + a_3) = (4a_1 + a_2)(x - 2)$$

したがって, ℓ の方程式は $y = (4a_1 + a_2)x - 4a_1 + a_3$

また, ℓ は, 2点 $Q(q, 0)$, $R(0, a_4)$ を通るから, その方程式は

$$\frac{x}{q} + \frac{y}{a_4} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = -\frac{a_4}{q}x + a_4$$

これらの直線の方程式は一致するから

$$(*) \quad \begin{cases} 4a_1 + a_2 = -\frac{a_4}{q} \\ -4a_1 + a_3 = a_4 \end{cases}$$

(*) の第2式から $a_4 - a_3 = -4a_1$

数列 a_1, a_2, a_3, a_4 は等差数列であるから, 公差を d とすると $d = -4a_1$

したがって $a_2 = a_1 + d = a_1 + (-4a_1) = -3a_1$

$$a_3 = a_1 + 2d = a_1 + 2(-4a_1) = -7a_1$$

$$a_4 = a_1 + 3d = a_1 + 3(-4a_1) = -11a_1$$

- (2) (*) の第1式から $q = -\frac{a_4}{4a_1 + a_2}$

これに (1) の結果を代入して $q = -\frac{-11a_1}{4a_1 + (-3a_1)} = 11$

- (3) (1) の結果から

$$C: y = a_1x^2 - 3a_1x - 7a_1$$

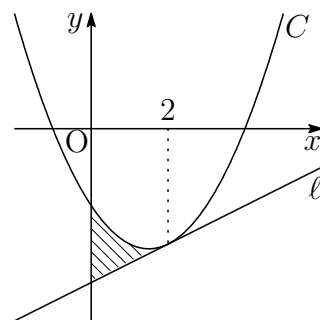
$a_4 = -11a_1$, $q = 11$ から

$$\ell: y = a_1x - 11a_1$$

$a > 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(a_1x^2 - 3a_1x - 7a_1) - (a_1x - 11a_1)\} dx \\ &= a_1 \int_0^2 (x-2)^2 dx = a_1 \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}a_1 \end{aligned}$$

$$S = q \text{ より } \frac{8}{3}a_1 = 11 \quad \text{これを解いて} \quad a_1 = \frac{33}{8}$$



■

3 (1) $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

(2) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ であるから, これと (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{よって } \overrightarrow{FG} // \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

(3) $\angle BOC = 90^\circ$ より $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

よって, (2) の結果から $FG = \frac{1}{3}BC = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ■

4 (1) 漸化式

$$a_1 = \alpha > 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

より, $a_n > 0$. また, 上式から $a_{n+1}^2 - 1 = \frac{2a_n}{a_n + 1} - 1$

ゆえに $a_{n+1} - 1 = \frac{1}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}(a_n - 1) \quad \dots (*)$

したがって $a_n - 1 > 0$ のとき $a_{n+1} - 1 > 0$

$a_1 - 1 > 0$ であるから, すべての自然数 n について

$$a_n - 1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad a_n > 1$$

(2) $\frac{1}{2}(x - 1) - (\sqrt{x} - 1) = \frac{1}{2}(x - 2\sqrt{x} + 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$

よって $\sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x - 1)$

(3) 漸化式および (2) の結果から

$$a_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a_n}{a_n + 1} - 1 \right) = \frac{1}{2(a_n + 1)}(a_n - 1)$$

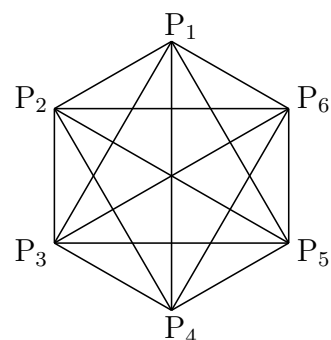
(1) の結果から $\frac{1}{2(a_n + 1)} \leq \frac{1}{4}$ ゆえに $a_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{4}(a_n - 1)$

よって $a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (a_1 - 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (\alpha - 1)$

別解 $a_n > 1$ から $\frac{1}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)} \leq \frac{1}{4} \quad (*)$ より $a_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{4}(a_n - 1)$ ■

- 5 (1) P_1, P_j, P_k が異なる3点となる場合の数, すなわち, (j, k) の組の総数は, 2, 3, 4, 5, 6 の5個から2個取り出して並べる順列の総数である. よって, 求める確率は

$$\frac{{}_5P_2}{6^2} = \frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9}$$



- (2) $\triangle P_1 P_j P_k$ が正三角形となるのは, 次の2組である.

$$(j, k) = (3, 5), (5, 3)$$

よって, 求める確率は $\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$

- (3) 正六角形の頂点は同一円周上の点であるから, $\triangle P_1 P_j P_k$ が直角三角形となるとき, $P_1 P_4, P_2 P_5, P_3 P_6$ を辺にもつ場合で, それぞれの三角形の個数は, 4, 1, 1である.

よって, 求める確率は $\frac{(4 + 1 + 1) \times 2}{6^2} = \frac{1}{3}$ ■

9.15 2015 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 a, b, c を実数とし, $a < 1$ とする. 座標平面上の 2 曲線

$$C_1: y = x^2 - x, \quad C_2: y = x^3 + bx^2 + cx - a$$

を考える. C_1 と C_2 は, 点 $P(1, 0)$ と, それとは異なる点 Q を通る. また, 点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいものとする. 点 P における C_1 の接線を ℓ_1 , 点 Q における C_1 の接線を ℓ_2 , 点 Q における C_2 の接線を ℓ_3 とする. 次の問いに答えよ.

- (1) b, c および点 Q の座標を a を用いて表せ.
- (2) ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 が三角形をつくらなような a の値を求めよ.
- (3) ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 が直角三角形をつくるような a の値の個数を求めよ.

2 n を自然数とし, p_n, q_n を実数とする. ただし, p_1, q_1 は $p_1^2 - 4q_1 = 4$ を満たすとする. 2 次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ は異なる実数解 α_n, β_n をもつとする. ただし, $\alpha_n < \beta_n$ とする. $c_n = \beta_n - \alpha_n$ とおくとき, 数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする. 次の問いに答えよ.

- (1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$ とするとき, $\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n, r_{n+1} を用いて表せ.
- (2) c_n を n の式で表せ.
- (3) $p_n = n\sqrt{n}$ であるとき, q_n を n の式で表せ.

3 座標平面上に原点 O と 2 点 $A(1, 0), B(0, 1)$ をとり, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする. 点 C は $|\overrightarrow{OC}| = 1, 0^\circ < \angle AOC < 90^\circ, 0^\circ < \angle BOC < 90^\circ$ を満たすとする. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = t$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}, \vec{b}, t$ を用いて表せ.
- (2) 線分 AB と線分 OC の交点を D とする. $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}, \vec{b}, t$ を用いて表せ.
- (3) 点 C から線分 OA に引いた垂線と線分 AB の交点を E とする. D は (2) で定めた点とする. このとき, $\triangle OBD$ と $\triangle CDE$ の面積の和を t を用いて表せ.

- 4 α, β は $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 1$ を満たす実数とする. 三つの放物線

$$C_1: y = x(1-x), \quad C_2: y = x(1-\beta-x), \quad C_3: y = (x-\alpha)(1-x)$$

を考える. C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする. また, C_1, C_2, C_3 で囲まれた図形の面積を S とする. 次の問いに答えよ.

- (1) γ を α, β を用いて表せ.
 - (2) S を α, β を用いて表せ.
 - (3) α, β が $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ を満たしながら動くとき, S の最大値を求めよ.
- 5 n を自然数とする. A, B, C, D, E の 5 人が 1 個のボールをパスし続ける. 最初に A がボールを持っていて, A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし, ボールを受けた人は, また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし, 以後同様にパスを続ける. n 回パスしたとき, B がボールを持っている確率を p_n とする. ここで, たとえば, $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E$ の順にボールをパスすれば, 4 回パスしたと考える. 次の問いに答えよ.

- (1) p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ.
- (2) p_n を求めよ.

解答例

- 1** (1) $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x^3 + bx^2 + cx - a$ とおくと

$$f'(x) = 2x - 1, \quad g'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

このとき, $g(1) = 0$, $g'(1) = f'(1)$ であるから

$$1 + b + c - a = 0, \quad 3 + 2b + c = 1$$

上の 2 式から $b = -a - 1$, $c = 2a$

$C_1 : y = x^2 - x$, $C_2 : y = x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a$ から y を消去すると

$$x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a = x^2 - x \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2(x-a) = 0$$

$a < 1$ であるから, 点 $P(1, 0)$ と異なる C_1 , C_2 の交点 Q は $(a, a^2 - a)$

- (2) ℓ_1 は点 $P(1, 0)$ を通り, 傾き 1 の直線であるから $\ell_1 : y = x - 1$

ℓ_2 の傾きは $f'(a) = 2a - 1$

ℓ_3 の傾きは $g'(a) = 3a^2 - 2(a+1)a + 2a = a^2$

ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 が三角形をつくらないのは, これら 3 本の直線のうち少なくとも 2 本が平行であるか, 3 本の直線が 1 点で交わる時である.

(i) $a < 1$ より, $f'(a) = 2a - 1 < 1$ であるから $\ell_1 \not\parallel \ell_2$

(ii) $a < 1$ より, $g'(a) - f'(a) = (a-1)^2 \neq 0$ であるから $\ell_2 \not\parallel \ell_3$

(iii) $\ell_3 \parallel \ell_1$ のとき $a^2 = 1$ このとき $a < 1$ に注意して $a = -1$

(iv) 3 直線が 1 点で交わる時, すなわち, ℓ_1 が点 Q を通るとき

$$a^2 - a = a - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a-1)^2 = 0$$

$a < 1$ であるから, これを満たす a は存在しない.

(i)~(iv) より, 求める a の値は $a = -1$

(3) ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 が直角三角形をつくるのは、これらの3本のうち2本だけが垂直である場合であり、(2)の結果より、 $a \neq -1$ に注意する.

(i) $\ell_1 \perp \ell_2$ のとき $1 \cdot (2a - 1) = -1$ すなわち $a = 0$

(ii) $\ell_2 \perp \ell_3$ のとき $(2a - 1) \cdot a^2 = -1$ 整理すると $2a^3 - a^2 + 1 = 0$

$h(a) = 2a^3 - a^2 + 1$ とおくと $h'(a) = 6a^2 - 2a = 2a(3a - 1)$

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$h'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(a)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{26}{27}$	$\nearrow$

$h(-1) = -2 \neq 0$ であるから、 $h(a) = 0$ を満たす a が、 $-1 < a < 0$ の範囲に唯一存在する.

(iii) $\ell_3 \perp \ell_1$ のとき $a^2 \cdot 1 = -1$ これを満たす実数 a は存在しない.

(i)~(iii) から、求める a の個数は **2 個** ■

2 (1) $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \log_2 \sqrt{n}(n+1)$ より

$$\sqrt{n}(n+1) = 2^{r_n} \quad \text{さらに} \quad \sqrt{n+1}(n+2) = 2^{r_{n+1}}$$

$$\text{よって} \quad \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)} = \frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}$$

(2) $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ であるから、(1)の結果より

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{c_{n+1}}{2^{r_{n+1}}} = \frac{c_n}{2^{r_n}}$$

ここで、 $c_1 = \sqrt{p_1^2 - 4q_1} = 2$, $r_1 = \log_2 2 = 1$ であるから

$$\frac{c_n}{2^{r_n}} = \frac{c_1}{2^{r_1}} = \frac{2}{2^1} = 1 \quad \text{よって} \quad c_n = 2^{r_n} = \sqrt{n}(n+1)$$

(3) $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の異なる2つの実数解が α_n, β_n であるから ($\alpha_n < \beta_n$)

$$\alpha_n = \frac{p_n - \sqrt{p_n^2 - 4q_n}}{2}, \quad \beta_n = \frac{p_n + \sqrt{p_n^2 - 4q_n}}{2}$$

したがって $c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{p_n^2 - 4q_n}$ ゆえに $c_n^2 = p_n^2 - 4q_n$

これに (2) の結果および $p_n = n\sqrt{n}$ を代入すると

$$n(n+1)^2 = n^3 - 4q_n \quad \text{よって} \quad q_n = -\frac{2n^2 + n}{4}$$
■

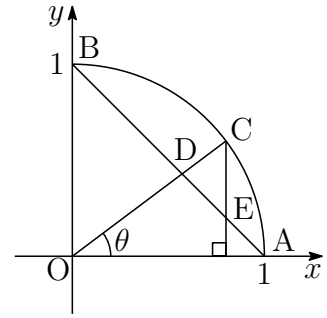
- 3 (1) 与えられた条件により, 点 C は原点を中心とする単位円周上の第 1 象限にある. OC の x 軸の正の向きとなす角を θ とすると ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)

$$C(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = t \text{ であるから } \cos \theta = t$$

$$\text{ゆえに } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - t^2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OC} &= \cos \theta(1, 0) + \sin \theta(0, 1) \\ &= t\vec{a} + \sqrt{1 - t^2}\vec{b} \end{aligned}$$



- (2) 点 D は, 直線 OC : $y = x \tan \theta$ と直線 AB : $y = -x + 1$ の交点であるから

$$\left(\frac{1}{1 + \tan \theta}, \frac{\tan \theta}{1 + \tan \theta} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta}, \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OD} &= \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \{ (\cos \theta)\vec{a} + (\sin \theta)\vec{b} \} \\ &= \frac{1}{t + \sqrt{1 - t^2}} (t\vec{a} + \sqrt{1 - t^2}\vec{b}) \end{aligned}$$

- (3) $\triangle OBD \sim \triangle CED$ であるから, (1), (2) の結果から

$$OD : OC = \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} : \cos \theta = 1 : \cos \theta + \sin \theta$$

$$\text{その相似比は} \quad OD : DC = 1 : \cos \theta + \sin \theta - 1$$

$$\triangle OBD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{2(\cos \theta + \sin \theta)}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{\cos \theta}{2(\cos \theta + \sin \theta)} \{ 1 + (\cos \theta + \sin \theta - 1)^2 \} \\ &= \frac{t \{ 1 + (t + \sqrt{1 - t^2} - 1)^2 \}}{2(t + \sqrt{1 - t^2})} \end{aligned}$$

■

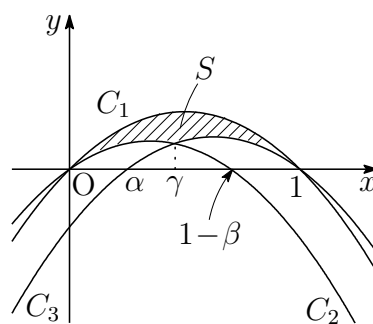
- 4 (1) C_2, C_3 の方程式から y を消去すると

$$x(1 - \beta - x) = (x - \alpha)(1 - x)$$

$$\text{整理すると} \quad (\alpha + \beta)x = \alpha$$

$\alpha > 0, \beta > 0$ より, $\alpha + \beta \neq 0$ であるから

$$\gamma = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$



- (2) S は, 右上の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\gamma \{x(1-x) - x(1-\beta-x)\} dx \\ &\quad + \int_\gamma^1 \{x(1-x) - (x-\alpha)(1-x)\} dx \\ &= \beta \int_0^\gamma x dx - \alpha \int_\gamma^1 (x-1) dx \\ &= \beta \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^\gamma - \alpha \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 \right]_\gamma^1 = \frac{1}{2}\beta\gamma^2 + \frac{1}{2}\alpha(\gamma-1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\beta \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^2 + \frac{1}{2}\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2\beta}{2(\alpha+\beta)^2} + \frac{\alpha\beta^2}{2(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

- (3) $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ のとき, $\beta = \frac{1}{4} - \alpha > 0$ より, $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ であるから

$$S = \frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)} = 2\alpha\beta = 2\alpha \left(\frac{1}{4} - \alpha \right) = -2 \left(\alpha - \frac{1}{8} \right)^2 + \frac{1}{32}$$

よって $\alpha = \beta = \frac{1}{8}$ のとき, S は最大値 $\frac{1}{32}$ をとる.

別解 $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ のとき, (2) の結果から $S = 2\alpha\beta$

$\alpha > 0, \beta > 0$ より, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{1}{8}$$

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{64} \text{ であるから } S = 2\alpha\beta \leq \frac{1}{32}$$

よって S は最大値 $\frac{1}{32}$ $\left(\alpha = \beta = \frac{1}{8} \right)$

■

- 5 (1) n 回パスしたとき, A, B, C, D, E それぞれがボールを持っている確率を a_n, b_n, c_n, d_n, e_n とすると (n は自然数)

$$a_1 = 0, \quad b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = \frac{1}{4}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n + d_n + e_n)$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n + d_n + e_n)$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + d_n + e_n)$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + e_n)$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + d_n)$$

$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 1$ であるから, 上の第 2 式より

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - b_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{4} \left(b_n - \frac{1}{5} \right)$$

数列 $\left\{ b_n - \frac{1}{5} \right\}$ は, 初項 $b_1 - \frac{1}{5}$, 公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{5} = \left(b_1 - \frac{1}{5} \right) \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right\}$$

$$p_n = b_n \text{ であるから} \quad p_n = \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right\} \quad \cdots (*)$$

$$(*) \text{ より} \quad p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{3}{16}, \quad p_3 = \frac{13}{64}, \quad p_4 = \frac{51}{256}$$

$$(2) \quad (*) \text{ より} \quad p_n = \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right\}$$

■

9.16 2016年(120分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 a を正の定数とし、座標平面上において、

$$\text{円 } C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad \text{放物線 } C_2 : y = ax^2 + 1$$

を考える. C_1 上の点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 ℓ は点 $Q(s, t)$ で C_2 に接している. 次の問いに答えよ.

- (1) s, t および a を求めよ.
- (2) C_2, ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.
- (3) 円 C_1 上の点が点 P から点 $R(0, 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする. C_2, ℓ および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ.

2 四角形 ABCD において、

$$\angle DAB = \angle DBC = 90^\circ, \quad \angle BCD = 60^\circ, \quad AB = AD, \quad BC = 1$$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 対角線 BD の長さの 2 乗 BD^2 を求めよ.
- (2) 対角線 AC の長さの 2 乗 AC^2 を求めよ.
- (3) $\angle BAC = \alpha, \angle ACD = \beta$ とおくとき, $\cos^2 \alpha, \cos^2 \beta$ を求めよ.

3 座標空間に 4 点

$$O(0, 0, 0), A(s, s, s), B(-1, 1, 1), C(0, 0, 1)$$

がある. ただし, $s > 0$ とする. t, u, v を実数とし,

$$\vec{d} = \overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA}, \quad \vec{e} = \overrightarrow{OC} - u\overrightarrow{OA} - v\overrightarrow{OB}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{OA} \perp \vec{d}$ のとき, t を s を用いて表せ.
- (2) $\overrightarrow{OA} \perp \vec{d}$, $\overrightarrow{OA} \perp \vec{e}$, $\vec{d} \perp \vec{e}$ のとき, u, v を s を用いて表せ.
- (3) (2) のとき, 2 点 D, E を

$$\overrightarrow{OD} = \vec{d}, \quad \overrightarrow{OE} = \vec{e}$$

となる点とする. 四面体 OADE の体積が 2 であるとき, s の値を求めよ.

4 xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり, 次の試行を行う.

1 枚の硬貨を投げ, 表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1, 裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く. ただし, 点 (3, 1) に到達したら Q は原点に戻る.

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を (x_n, y_n) とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $(x_4, y_4) = (0, 0)$ となる確率を求めよ.
- (2) $(x_8, y_8) = (5, 3)$ となる確率を求めよ.
- (3) $x_8 + y_8 \leq 4$ となる確率を求めよ.
- (4) $x_{4n} + y_{4n} \leq 4k$ となる確率を n と k で表せ. ここで k は n 以下の自然数とする.

5 n を 2 以上の自然数とする．次の問いに答えよ．

- (1) 変量 x のデータの値が $x_1, x_2, \dots, x_n$ であるとし，

$$f(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2$$

とする． $f(a)$ を最小にする a は $x_1, x_2, \dots, x_n$ の平均値で，そのときの最小値は $x_1, x_2, \dots, x_n$ の分散であることを示せ．

- (2) c を定数として，変量 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k = k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$z_k = ck \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

であるとする．このとき $y_1, y_2, \dots, y_n$ の分散が $z_1, z_2, \dots, z_n$ の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ．

- (3) 変量 x のデータの値が $x_1, x_2, \dots, x_n$ であるとし，その平均値を $\bar{x}$ とする．新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする． $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ の平均値を $x_{n+1}, \bar{x}$ および n を用いて表せ．
- (4) 次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40, 670, 35 であった．

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった．このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ．ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ．

解答例

- 1 (1) $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ における接線 ℓ の方程式は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = \sqrt{3}x - 2$$

点 $Q(s, t)$ は C_2 上の点であるから, $Q(s, as^2 + 1)$

$C_2: y = ax^2 + 1$ を微分すると $y' = 2ax$

C_2 上の点 Q における接線の方程式は

$$y - (as^2 + 1) = 2as(x - s) \quad \text{ゆえに} \quad y = 2asx - as^2 + 1$$

これが ℓ に一致するから

$$\begin{cases} 2as = \sqrt{3} \\ -as^2 + 1 = -2 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{1}{4}, s = 2\sqrt{3}$$

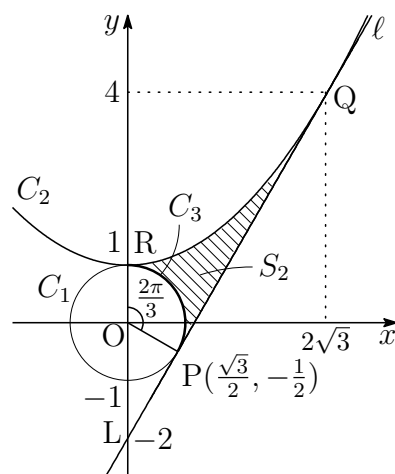
$$\text{また} \quad t = as^2 + 1 = \frac{1}{4}(2\sqrt{3})^2 + 1 = 4$$

- (2) (1) の結果より, $C_2: y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ であるから, 求める面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{4}x^2 + 1 - (\sqrt{3}x - 2) \right\} dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\sqrt{3}} (x - 2\sqrt{3})^2 dx \\ &= \frac{1}{12} \left[(x - 2\sqrt{3})^3 \right]_0^{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

- (3) ℓ と y 軸との交点を L とし, 求める面積を S_2 とすると, $\angle POR = \frac{2}{3}\pi$ であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \triangle OLP \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$



■

- 2 (1) 直角三角形BCDに着目すると

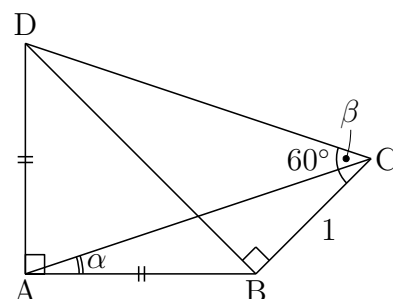
$$BD = BC \tan 60^\circ = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad BD^2 = 3$$

- (2) 直角二等辺三角形ABDに着目すると

$$AB = BD \cos 45^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

△ABCに余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AC^2 &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 1 \cos 135^\circ \\ &= \frac{5}{2} + \sqrt{3} \end{aligned}$$



- (3) △ABCに余弦定理を適用すると

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{\frac{3}{2} + \left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) - 1}{2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} AC} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} AC}$$

したがって

$$\cos^2 \alpha = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{6AC^2} = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{3(5 + 2\sqrt{3})} = \frac{2}{13}(4 + \sqrt{3})$$

△ACDに余弦定理を適用すると

$$\cos \beta = \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2AC \cdot CD} = \frac{\left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) + 4 - \frac{3}{2}}{4AC} = \frac{5 + \sqrt{3}}{4AC}$$

したがって

$$\cos^2 \beta = \frac{(5 + \sqrt{3})^2}{16AC^2} = \frac{2(14 + 5\sqrt{3})}{8(5 + 2\sqrt{3})} = \frac{1}{52}(40 - 3\sqrt{3})$$



- 3** (1) $O(0, 0, 0)$, $A(s, s, s)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(0, 0, 1)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= s(1, 1, 1), \\ \vec{d} &= \overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA} = (-1, 1, 1) - t(s, s, s) \\ &= (-1 - st, 1 - st, 1 - st)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA} \perp \vec{d}$ より, $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{d} = 0$ であるから ($s > 0$),

$$1(-1 - st) + 1(1 - st) + 1(1 - st) = 0 \quad \text{よって} \quad t = \frac{1}{3s}$$

- (2) (1) の結果から, $st = \frac{1}{3}$ より $\vec{d} = \left(-1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(-2, 1, 1)$

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \overrightarrow{OC} - u\overrightarrow{OA} - v\overrightarrow{OB} = (0, 0, 1) - u(s, s, s) - v(-1, 1, 1) \\ &= (-us + v, -us - v, 1 - us - v)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA} \perp \vec{e}$, $\vec{d} \perp \vec{e}$ より, $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{e} = 0$, $\vec{d} \cdot \vec{e} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}1(-us + v) + 1(-us - v) + 1(1 - us - v) &= 0, \\ -2(-us + v) + 1(-us - v) + 1(1 - us - v) &= 0\end{aligned}$$

$$\text{整理すると} \quad \begin{cases} -3us - v + 1 = 0 \\ -4v + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{よって} \quad u = \frac{1}{4s}, \quad v = \frac{1}{4}$$

- (3) (2) の結果から, $su = v = \frac{1}{4}$ であるから

$$\vec{e} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}(0, -1, 1)$$

$\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$ より,

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$$

このとき, 四面体 OADE の体積が 2 であるから, $\frac{1}{6}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OE}| = 2$ より

$$\frac{1}{6} \cdot s\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 \quad \text{よって} \quad s = 6$$

解説

座標空間に4点

$$O(0, 0, 0), A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$$

があるとき, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく.

$\vec{d} = \vec{b} - t\vec{a}$ が $\vec{a} \perp \vec{d}$ であるとき, $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$ より

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - t\vec{a}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S^2 &= (|\vec{a}||\vec{d}|)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b} - t\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2(|\vec{b}|^2 - 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{a}|^2) \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - 2t|\vec{a}|^2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (t|\vec{a}|^2)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ であるから

$$\begin{aligned} S^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

ここで, $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ とおくと

$$|\vec{n}| = S, \quad \vec{n} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の張る平行六面体について, $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ および $\vec{n}$ に平行なベクトル $\vec{e}$ を用いて

$$\vec{c} = \vec{e} + u\vec{a} + v\vec{b} \quad (u, v \text{ は定数})$$

とかける. このとき

$$\vec{n} \cdot \vec{e} = \vec{n} \cdot (\vec{c} - u\vec{a} - v\vec{b}) = \vec{n} \cdot \vec{c}$$

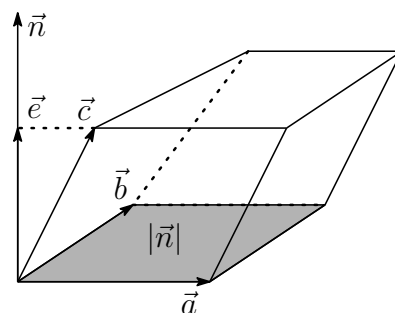
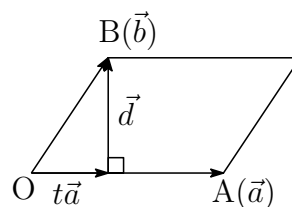
$\vec{n}$ と $\vec{e}$ のなす角は 0° または 180° であるから $|\vec{n} \cdot \vec{e}| = |\vec{n}||\vec{e}|$

この平行六面体の体積を V とすると, $V = |\vec{n}||\vec{e}|$ であるから

$$V = |\vec{n} \cdot \vec{e}| = |\vec{n} \cdot \vec{c}| = |(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3|$$

よって, 四面体 OABC の体積は, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S \cdot |\vec{e}| = \frac{1}{6} |\vec{n}||\vec{e}| = \frac{1}{6} V$ より

$$\frac{1}{6} |(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3|$$



- 4 (1) $(x_4, y_4) = (0, 0)$ となるのは、硬貨を 4 回投げて、表が 3 回、裏が 1 回出る確率であるから

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

- (2) $(x_8, y_8) = (5, 3)$ となるのは、点 $(3, 1)$ を通らずに、点 $(5, 3)$ に到達する確率であるから、(1) の結果を利用して

$${}_8C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{4} \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{32} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

- (3) $x_8 + y_8 \leq 4$ となるのは、4 回目に点 $(3, 1)$ に到達することである。したがって、(1) の結果から、求める確率は

$$\frac{1}{4}$$

- (4) $x_{4n} + y_{4n} \leq 4k$ となるのは、4 回目, 8 回目, $\dots$, $4(n-k)$ 回目に点 $(3, 1)$ に到達する, すなわち, ちょうど $n-k$ 回原点に戻る. よって, (1) の結果から, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \frac{1}{4^{n-k}}$$

■

- 5 (1) $x_1, x_2, \dots, x_n$ の平均を $\bar{x}$ とすると

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2a\bar{x} + a^2 = (a - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

$f(a)$ は, $a = \bar{x}$ のとき, 最小値 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2$ をとる. これは $x_1, x_2, \dots, x_n$ の分散である.

- (2) $y_1, y_2, \dots, y_n$ の平均を $\bar{y}$ とし, $y_1^2, y_2^2, \dots, y_n^2$ の平均を $\overline{y^2}$ とすると

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2}(n+1), \\ \overline{y^2} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

$y_1, y_2, \dots, y_n$ の分散は

$$\overline{y^2} - \bar{y}^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) - \left\{ \frac{1}{2}(n+1) \right\}^2 = \frac{1}{12}(n+1)(n-1)$$

$z_1, z_2, \dots, z_n$ の平均を $\bar{z}$ とし, $z_1^2, z_2^2, \dots, z_n^2$ の平均を $\overline{z^2}$ とすると, $z_k = cy_k$ であるから

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k = c \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = c\bar{y},$$

$$\overline{z^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k^2 = c^2 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2 = c^2 \overline{y^2}$$

$z_1, z_2, \dots, z_n$ の分散は

$$\overline{z^2} - \bar{z}^2 = c^2 \overline{y^2} - (c\bar{y})^2 = c^2(\overline{y^2} - \bar{y}^2)$$

$n \geq 2$ より, $\overline{y^2} - \bar{y}^2 > 0$ であるから, 条件を満たす c の範囲は

$$c^2 < 1 \quad \text{よって} \quad -1 < c < 1$$

(3) $\bar{x} = \sum_{k=1}^n x_k$ より, 求める平均は

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x_k &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \right) = \frac{n\bar{x} + x_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果を利用すると, 平均値は

$$\frac{40\bar{x} + x_{41}}{41} = \frac{40 \cdot 40 + 40}{41} = 40$$

$\frac{1}{40}(x_k - 40)^2 = 670$ および $x_{41} = 40$ より, 分散は

$$\begin{aligned} \frac{1}{41} \sum_{k=1}^{41} (x_k - 40)^2 &= \frac{1}{41} \left\{ \sum_{k=1}^{40} (x_k - 40)^2 + (x_{41} - 40)^2 \right\} \\ &= \frac{40}{41} \cdot \frac{1}{40} \sum_{k=1}^{40} (x_k - 40)^2 = \frac{40}{41} \times 670 = 653.6 \dots \end{aligned}$$

よって, 分散は **654**

40 個のデータで中央値 35 に一致するデータ 35 は存在しないので, 小さい方から 20 番目が 30 で, 21 番目が 40 である. したがって, データ 40 を追加したとき, これら 41 個のデータについて, 小さい方から 21 番目に該当する, すなわち, 中央値は **40** である. ■

9.17 2017 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 座標平面上の 2 点 $A(\sin \theta, \sin^2 \theta)$, $B(\cos \theta, \cos^2 \theta)$ を考え, A, B 間の距離を L とする. ただし, θ は条件

$$(*) \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{かつ} \quad \sin \theta - \cos \theta - 1 > 0$$

を満たすとする. 次の問いに答えよ.

- (1) $(*)$ を満たす θ の範囲を求めよ.
- (2) $t = \sin \theta \cos \theta$ とおくとき, t のとり得る値の範囲を求めよ.
- (3) L を (2) の t を用いて表せ.
- (4) L の最大値, 最小値を求めよ. また, そのときの θ の値を求めよ.

- 2 座標平面上の 3 点

$$O(0, 0), \quad A(3, 0), \quad B(1, 2)$$

を考える. C を線分 OA 上にあり, $\angle OBC = 45^\circ$ を満たす点とする. また, P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする. 点 Q, R, P' を次により定める.

- (a) 点 P を通り傾きが 1 の直線と, 直線 AB の交点を Q とする.
- (b) 点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と, 直線 OB の交点を R とする.
- (c) 点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と, 直線 OA の交点を P' とする.

次の問いに答えよ.

- (1) 点 Q の座標を t を用いて表せ.
- (2) 点 R の座標を t を用いて表せ.
- (3) 点 P' の座標を t を用いて表せ.
- (4) 点 P' の x 座標を $f(t)$ とする. 数列 $\{t_n\}$ を

$$t_1 = 2, \quad t_{n+1} = f(t_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. 数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ.

3 n を 2 以上の整数とする. n 個のさいころを投げ, 出た目のすべての積を X とする. 次の問いに答えよ.

- (1) X が 5 の倍数である確率を n を用いて表せ.
- (2) X が 5 の倍数である確率が 0.99 より大きくなる最小の n を求めよ. ただし, $\log_2 3 = 1.585$, $\log_2 5 = 2.322$ とする.
- (3) X が 3 でも 5 でも割り切れない確率を n を用いて表せ.
- (4) X が 15 の倍数である確率を n を用いて表せ.

4 座標平面上の二つの曲線

$$C_1 : y = 4x^3 - 1, \quad C_2 : y = x^3$$

を考える. $a > 0$ に対して, x 座標が a である C_1 上の点を A とし, A における C_1 の接線を ℓ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) C_1 と C_2 の交点の x 座標を p とする. p の値を求めよ.
- (2) 直線 ℓ の方程式を, a を用いて表せ.
- (3) 直線 ℓ が C_2 に接するとき, a の値を求めよ.
- (4) (3) のとき, 直線 ℓ と C_2 の接点を B とする. C_1 , C_2 と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

1 (1) $\sin \theta - \cos \theta - 1 > 0$ より

$$\sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より, } -\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi \text{ であるから}$$

$$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \quad \text{よって} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$(2) \quad t = \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \cdots (*)$$

$$(1) \text{ の結果から, } \pi < 2\theta < 2\pi \text{ であるから} \quad -\frac{1}{2} \leq t < 0$$

(3) $A(\sin \theta, \sin^2 \theta), B(\cos \theta, \cos^2 \theta)$ より

$$\begin{aligned} L^2 &= (\sin \theta - \cos \theta)^2 + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2 \\ &= (\sin \theta - \cos \theta)^2 \{1 + (\sin \theta + \cos \theta)^2\} \\ &= (1 - 2 \sin \theta \cos \theta)(2 + 2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= (1 - 2t)(2 + 2t) = 2(1 + t)(1 - 2t) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad L = \sqrt{2(1+t)(1-2t)}$$

$$(4) \text{ (3) の結果から } L^2 = -4t^2 - 2t + 2 = -4 \left(t + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{9}{4}$$

上式および (*) より L は

$$t = -\frac{1}{4}, \text{ すなわち, } \theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi \text{ のとき最大値 } \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2}, \text{ すなわち, } \theta = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき最小値 } \sqrt{2}$$

■

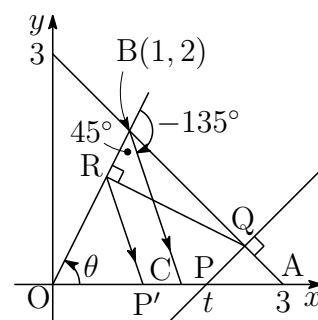
- 2 (1) 点 $P(t, 0)$ を通り、傾きが 1 の直線は

$$y = x - t$$

2 点 $A(3, 0)$, $B(1, 2)$ を通る直線は

$$y = -x + 3$$

この 2 直線の交点 Q は $\left(\frac{3+t}{2}, \frac{3-t}{2}\right)$



- (2) 点 $Q\left(\frac{3+t}{2}, \frac{3-t}{2}\right)$ を通り、直線 OB に垂直な直線は

$$y - \frac{3-t}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3+t}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{9-t}{4}$$

これと直線 $OB: y = 2x$ との交点 R は $\left(\frac{9-t}{10}, \frac{9-t}{5}\right)$

- (3) 直線 OB と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $\tan \theta = 2$

$$\text{直線 } BC \text{ の傾きは } \tan(\theta - 135^\circ) = \frac{\tan \theta - \tan 135^\circ}{1 + \tan \theta \tan 135^\circ} = \frac{2 - (-1)}{1 + 2 \cdot (-1)} = -3$$

点 $R\left(\frac{9-t}{10}, \frac{9-t}{5}\right)$ を通り、直線 BC と平行な直線は

$$y - \frac{9-t}{5} = -3\left(x - \frac{9-t}{10}\right) \quad \text{ゆえに} \quad y = -3x + \frac{9-t}{2}$$

この直線と直線 OA の交点 P' は $\left(\frac{9-t}{6}, 0\right)$

- (4) (3) の結果より、 P' の x 座標が $f(t)$ であるから $f(t) = \frac{9-t}{6}$

$$t_{n+1} = f(t_n) \quad \text{より} \quad t_{n+1} = \frac{9-t_n}{6} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{したがって} \quad t_{n+1} - \frac{9}{7} = -\frac{1}{6}\left(t_n - \frac{9}{7}\right)$$

数列 $\left\{t_n - \frac{9}{7}\right\}$ は初項 $t_1 - \frac{9}{7} = 2 - \frac{9}{7} = \frac{5}{7}$, 公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$t_n - \frac{9}{7} = \left(t_1 - \frac{9}{7}\right) \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad t_n = \frac{9}{7} + \frac{5}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

■

- 3** (1) X が 5 の倍数となる事象を A とすると

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

- (2) (1) の結果を利用して $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.99$ ゆえに $\left(\frac{6}{5}\right)^n > 100$

$$2 \text{ を底とする対数をとると } n \log_2 \frac{6}{5} > \log_2 100$$

$$\text{したがって} \quad n(1 + \log_2 3 - \log_2 5) > 2(1 + \log_2 5)$$

$$n > \frac{2(1 + \log_2 5)}{1 + \log_2 3 - \log_2 5}$$

$$\frac{2(1 + \log_2 5)}{1 + \log_2 3 - \log_2 5} = \frac{2(1 + 2.322)}{1 + 1.585 - 2.322} = \frac{6.644}{0.263} \doteq 25.2 \dots$$

よって、求める最小の整数 n は **26**

- (3) X が 3 の倍数となる事象を B とすると、求める確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- (4) (3) の結果から $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\text{したがって} \quad P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(\overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

よって X が 15 の倍数である確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{aligned}$$

■

- 4 (1) $C_1: y = 4x^3 - 1$ と $C_2: y = x^3$ の交点の x 座標が p であるから

$$4p^3 - 1 = p^3 \quad \text{ゆえに} \quad p^3 = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad p = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

- (2) $y = 4x^3 - 1$ を微分すると $y' = 12x^2$

C_1 上の点 $(a, 4a^3 - 1)$ における接線 l の方程式は

$$y - (4a^3 - 1) = 12a^2(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 12a^2x - 8a^3 - 1$$

- (3) $y = x^3$ を微分すると $y' = 3x^2$

l と C_2 との接点の x 座標を t とすると、接線の傾きと y 座標により

$$\begin{cases} 3t^2 = 12a^2 & \cdots \text{①} \\ t^3 = 12a^2t - 8a^3 - 1 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

① から $t^2 = 4a^2$ ゆえに $t = \pm 2a$

- (i) $t = 2a$ を ② に代入すると $(2a)^3 = 12a^2 \cdot 2a - 8a^3 - 1$

$$\text{整理すると} \quad 8a^3 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2}, \quad t = 1$$

- (ii) $t = -2a$ を ② に代入すると $(-2a)^3 = 12a^2 \cdot (-2a) - 8a^3 - 1$

整理すると $24a^3 = -1$ これは $a > 0$ であることに反するので不適

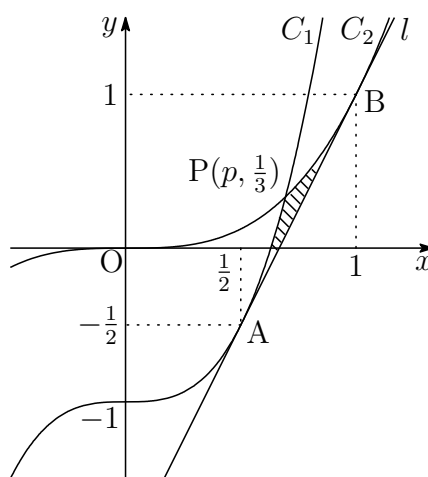
$$\text{よって} \quad a = \frac{1}{2}$$

- (4) 2点 A, B の x 座標は、それぞれ $\frac{1}{2}, 1$

(2), (3) の結果から $l: y = 3x - 2$
求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^p (4x^3 - 1) dx + \int_p^1 x^3 dx \\ &\quad - \int_{\frac{1}{2}}^1 (3x - 2) dx \\ &= \left[x^4 - x \right]_{\frac{1}{2}}^p + \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_p^1 \\ &\quad - \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{3}{4}p^4 - p + \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$$p^4 = p^3 p = \frac{1}{3}p \text{ に注意して} \quad S = -\frac{3}{4}p + \frac{9}{16} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \frac{9}{16}$$



9.18 2018 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 41 次の問いに答えよ.

- (1) t の 2 次関数 $s = \left(t - \frac{1}{5}\right) \left(t - \frac{3}{5}\right)$ のグラフを図示せよ.
- (2) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 (u, v) の存在範囲を図示せよ.
- (A) 2 次式 $t^2 - ut + v$ は, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される.
- (3) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 (u, v) の存在範囲を図示せよ.
- (B) 2 次式 $t^2 - ut + v$ は, $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される.
- (4) 座標平面上の点 (x, y) が 4 点 $(0, 0), (1, 0), (1, 2), (0, 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき, 点 $(x + y, xy)$ の動く範囲の面積を求めよ.

2 次の問いに答えよ.

- (1) 実数 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとき, 不等式

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} < 1$$

が成り立つことを示せ.

- (2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し,

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

により定まる実数 α は, θ についての整数 $f(\theta)$ を用いて $\alpha = f(\theta)$ と表すことができる. このような $f(\theta)$ を一つ求めよ.

- (3) (2) で求めた $f(\theta)$ を用いて, 数列 $\{\theta_n\}$ を

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{n+1} = f(\theta_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ.

- (4) (3) の数列 $\{\theta_n\}$ に対し,

$$|\theta_{n+1} - \theta_n| \leq \frac{\pi}{1000}$$

となる最小の自然数 n を求めよ.

3 O を原点とする座標平面上の曲線

$$C: y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{6}$$

を考える. C 上の点 $D(-1, 2)$ における C の接線を ℓ とし, D と異なる C と ℓ の共有点を E とする. 次の問いに答えよ.

- (1) ℓ の方程式を求めよ.
- (2) E の座標を求めよ.
- (3) 原点 O を中心とする半径 1 の円の周上の点 $A(a, b)$ を考える. ただし, a と b はともに正であるとする. 直線 ℓ 上の動点 P に対し, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ が P の位置によらず一定であるとき, A の座標を求めよ.
- (4) A を (3) で求めた点とする. 点 Q が C 上を D から E まで動くときの $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ}$ の最大値を求めよ.

4 座標平面上で，三つの不等式

$$y \geq 0, \quad x + y \geq 4, \quad 2x + 3y \leq 12$$

によって表される領域を D とする．次の問いに答えよ．

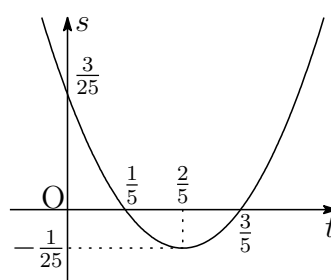
- (1) D を図示せよ．
- (2) 座標平面上で， x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という． D に含まれる格子点をすべて求めよ．
- (3) 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目に出た目の数を X ，2 回目に出た目の数を Y とする．点 (X, Y) が D に含まれる確率を求めよ．
- (4) 1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の数の中の最小の数を Z ，最大の数 W とする．点 (Z, W) が D に含まれる確率 P_n を求めよ．ただし， n は 2 以上の自然数とする．

解答例

1 (1) $s = \left(t - \frac{1}{5}\right) \left(t - \frac{3}{5}\right)$ より

$$s = \left(t - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}$$

グラフの概形は右の図のようになる.



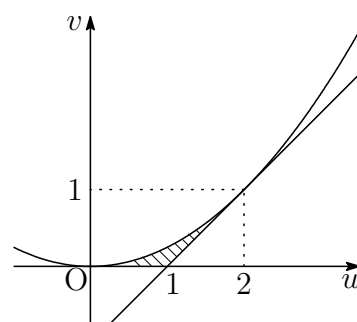
(2) $f(t) = t^2 - ut + v$ とおくと $f(t) = \left(t - \frac{u}{2}\right)^2 + v - \frac{u^2}{4}$

2次方程式 $f(t) = 0$ の実数解 x, y が $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ を満たすから,
 $f(0) \geq 0, f(1) \geq 0$ および上式より

$$v \geq 0, \quad 1 - u + v \geq 0, \quad 0 \leq \frac{u}{2} \leq 1, \quad v - \frac{u^2}{4} \leq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ v \geq 0 \\ v \geq u - 1 \\ v \leq \frac{u^2}{4} \end{cases}$$



よって, 求める領域は, 右の図の斜線部分
 で境界を含む.

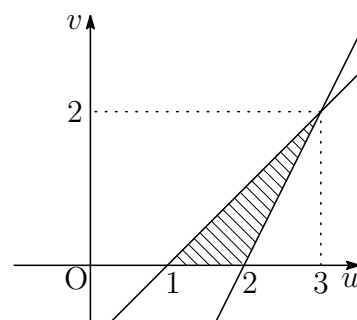
(3) 2次方程式 $f(t) = 0$ の実数解 x, y が $0 \leq x \leq 1 \leq y \leq 2$ を満たすから,
 $f(0) \geq 0, f(1) \leq 0, f(2) \geq 0$ より

$$v \geq 0, \quad 1 - u + v \leq 0, \quad 4 - 2u + v \geq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} v \geq 0 \\ v \leq u - 1 \\ v \geq 2u - 4 \end{cases}$$

よって, 求める領域は, 右の図の斜線部分
 で境界を含む.



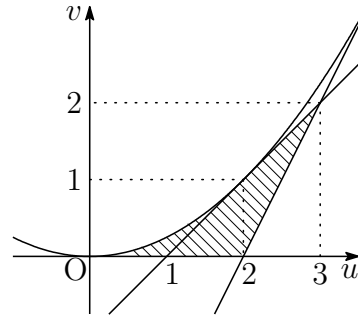
- (4) $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \leq y \leq 2\}$ とすると, (x, y) が 4 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$ を頂点とする長方形の周および内部は $A \cup B$ である. (1), (2) で求めた領域をそれぞれ E , F とすると

点 $(x + y, xy)$ すなわち 点 (u, v)

の表す領域は $E \cup F$ で, 右の図のようになる.

よって, 求める面積を S とすると

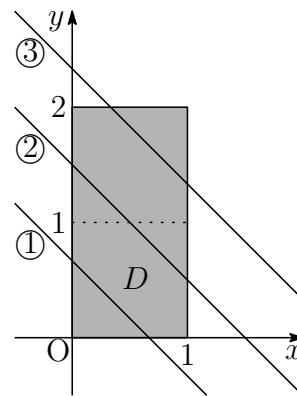
$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \frac{u^2}{4} du + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \left[\frac{u^3}{12} \right]_0^2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$



別解 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ とし, 直線 $x + y = u$ 上の点 $(x, y) \in D$ における $v = xy$ のとる値の範囲を求める.

$$v = x(u - x) = -\left(x - \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{4}$$

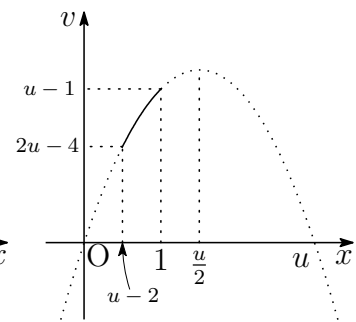
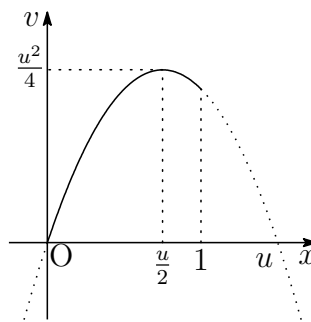
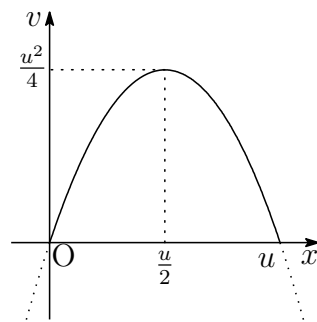
- ① $0 \leq u \leq 1$ のとき $0 \leq x \leq u$
 ② $1 \leq u \leq 2$ のとき $0 \leq x \leq 1$
 ③ $2 \leq u \leq 3$ のとき $u - 2 \leq x \leq 1$



① $0 \leq u \leq 1$

② $1 \leq u \leq 2$

③ $2 \leq u \leq 3$



- (i) $0 \leq u \leq 2$ のとき $0 \leq v \leq \frac{u^2}{4}$
 (ii) $2 \leq u \leq 3$ のとき $2u - 4 \leq v \leq u - 1$

よって $S = \int_0^2 \frac{u^2}{4} du + \int_2^3 \{(u - 1) - (2u - 4)\} du = \frac{7}{6}$

■

$$\boxed{2} \quad (1) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } 0 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq \frac{1 - \cos \theta}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$$

$$(2) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ より}$$

$$2 \cos^2 \alpha - 1 = -\cos \theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos 2\alpha = \cos(\pi - \theta)$$

$$\text{このとき, } 0 \leq 2\alpha \leq \pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \pi - \theta \leq \pi \text{ であるから, 上の第2式から}$$

$$2\alpha = \pi - \theta \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad \text{よって} \quad f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

$$(3) \quad \theta_{n+1} = f(\theta_n) \text{ より, (2) の結果から} \quad \theta_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_n}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \theta_{n+1} - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \left(\theta_n - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ より } \theta_n - \frac{\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad \theta_n = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

$$(4) \quad (3) \text{ の結果から } \theta_{n+1} - \theta_n = \frac{\pi}{3} \left\{ -\left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} = -\pi \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

$$\text{したがって} \quad |\theta_{n+1} - \theta_n| = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$|\theta_{n+1} - \theta_n| \leq \frac{\pi}{1000} \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{\pi}{1000} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n+1} \geq 1000$$

$$2^9 = 512, \quad 2^{10} = 1024 \text{ より, 上式を満たす最小の自然数 } n \text{ は}$$

$$n + 1 = 10 \quad \text{よって} \quad \mathbf{n = 9}$$

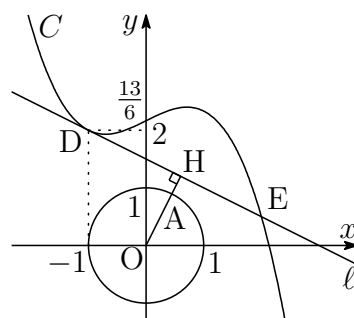


3 (1) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{6}$ より $y' = -x^2 + \frac{1}{2}$

$x = -1$ のとき $y' = -\frac{1}{2}$

ℓ は点 $D(-1, 2)$ を通り、傾き $-\frac{1}{2}$ の直線である

$y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$ すなわち $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



(2) C と ℓ の共有点は $(*) \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{6} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$

$(*)$ から y を消去すると $-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{6} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

整理すると $x^3 - 3x - 2 = 0$ ゆえに $(x + 1)^2(x - 2) = 0$

E の x 座標は $x \neq -1$ に注意して $x = 2$ これを $(*)$ に代入して $E\left(2, \frac{1}{2}\right)$

(3) O から ℓ に垂線 OH を引くと、直線 OH の方程式は $y = 2x$

直線 OH と ℓ の交点 H の座標は $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$

ℓ の方向ベクトルを $\vec{v} = (2, -1)$ とし、直線 OH の方向ベクトルを $\vec{n} = (1, 2)$ とすると

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + t\vec{v} = t\vec{v} + \frac{3}{5}\vec{n} \quad (t \text{ は媒介変数})$$

$(1, 0) = \frac{1}{5}(2\vec{v} + \vec{n}), (0, 1) = \frac{1}{5}(-\vec{v} + 2\vec{n})$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) \\ &= \frac{a}{5}(2\vec{v} + \vec{n}) + \frac{b}{5}(-\vec{v} + 2\vec{n}) = \frac{2a - b}{5}\vec{v} + \frac{a + 2b}{5}\vec{n} \quad \dots (***) \end{aligned}$$

ゆえに $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{2a - b}{5}t|\vec{v}|^2 + \frac{3}{25}(a + 2b)|\vec{n}|^2 = (2a - b)t + \frac{3}{5}(a + 2b)$

上式は t の値によらず一定であるから $2a - b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

点 $A(a, b)$ は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の第 1 象限にあるから

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (a > 0, b > 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を解いて $a = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = \frac{2}{\sqrt{5}}$ よって $A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

(4) 点 $Q(x, y)$ とすると, $\overrightarrow{OQ}$ は, $(**)$ と同様にして

$$\overrightarrow{OQ} = (x, y) = \frac{2x - y}{5} \vec{v} + \frac{x + 2y}{5} \vec{n}$$

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{n} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \frac{x + 2y}{5\sqrt{5}} |\vec{n}|^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (x + 2y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x + \frac{13}{3} \right) \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x + \frac{13}{3} \right) \text{ とおくと } (-1 \leq x \leq 2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2x^2 + 2) = -\frac{2}{\sqrt{5}} (x + 1)(x - 1)$$

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$	$\nearrow$	$\frac{17}{3\sqrt{5}}$	$\searrow$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$

よって, $Q\left(1, \frac{7}{3}\right)$ で, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ}$ は最大値 $\frac{17\sqrt{5}}{15}$ をとる.

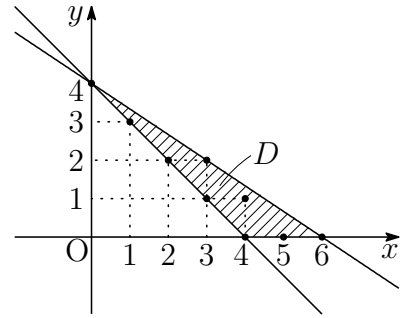
補足 点 Q が C 上を D から E まで動くとき, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ}$ の最大値を与える点における接線は ℓ に平行である. ■

4 (1) 三つの不等式

$$y \geq 0, \quad x + y \geq 4, \quad 2x + 3y \leq 12$$

$$\text{すなわち} \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq -x + 4 \\ y \leq -\frac{2}{3}x + 4 \end{cases}$$

この連立不等式の表す領域 D は、右の図の斜線部分で境界線を含む。



(2) (1) の図から、求める格子点は

$$(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (5, 0), (6, 0)$$

(3) 点 (X, Y) が D に含まれるものは、次の 5 通り。

$$(X, Y) = (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1)$$

$$\text{よって、求める確率は} \quad \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$

(4) $1 \leq Z \leq W \leq 6$ である (Z, W) の組は $(Z, W) = (1, 3), (2, 2)$

(i) $(Z, W) = (1, 3)$ のとき

$1 \leq Z \leq W \leq 3$, $1 \leq Z \leq W \leq 2$, $2 \leq Z \leq W \leq 3$ である事象をそれぞれ A , B , C とすると、このときの確率は

$$\begin{aligned} P(A) - P(B \cup C) &= P(A) - P(B) - P(C) + P(B \cap C) \\ &= \frac{3^n}{6^n} - \frac{2^n}{6^n} - \frac{2^n}{6^n} + \frac{1^n}{6^n} \\ &= \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{6^n} \end{aligned}$$

(ii) $(Z, W) = (2, 2)$ のとき, $Z = W = 2$ であるから、このときの確率は

$$\frac{1^n}{6^n} = \frac{1}{6^n}$$

(i),(ii) は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{6^n} + \frac{1}{6^n} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 2}{6^n}$$

■

9.19 2019年(120分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 $a > 0, r > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を初項 a , 公比 r の等比数列とする. また, 数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される.

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ.

- (1) b_n を a, r および n を用いて表せ.
 (2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ.

- (3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする. すなわち,

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$$

とする. このとき, 一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ.

- 2 n を自然数とし, p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする. 一方の面に 0, もう一方の面に 1 と書いたカードがある. 最初, このカードは 0 と書かれた面が上になるように置いてある. 表の出る確率が p のコインを投げ, 裏が出たときだけカードを裏返すという試行を n 回繰り返して行う. n 回の試行の後, カードの上の面に書かれた数字が 0 である確率を P_n とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) P_n を p および n を用いて表せ.
 (2) $n \geq 2$ とする. n 回の試行の後, カードの上の面に書かれた数字が 0 であり, さらに, 途中でカードが少なくとも 1 回裏返されたことがわかっている. このとき, ちょうど 2 回裏返された確率を p および n を用いて表せ.

3 座標平面上の二つの曲線

$$C : y = x^3, \quad C' : y = 8x^3$$

と曲線 C 上の点 $P_1(1, 1)$ を考える. 点 P_1 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_1 とし, 点 Q_1 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_2 とする. 次に, 点 P_2 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_2 とし, 点 Q_2 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_3 とする. このように, 自然数 n に対して, 点 P_n を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_n とし, 点 Q_n を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする. 点 P_n の x 座標を a_n とおく. 次の問いに答えよ.

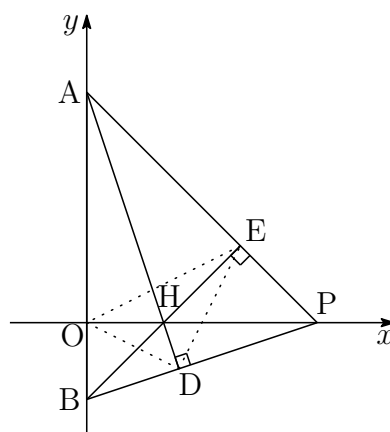
- (1) a_n を n を用いて表せ.
- (2) 点 P_{n+1} における曲線 C の接線, 直線 $x = a_n$ および曲線 C で囲まれる部分のうち, $a_{n+1} \leq x \leq a_n$ の領域にある面積を S_n とする. S_n を n を用いて表せ.
- (3) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とおく. T_n を n を用いて表せ.

- 4 原点を O とする座標平面上において、点 $A(0, 3)$, $B(0, -1)$ および x 軸上の正の部分動く点 $P(t, 0)$ があり、 $\angle APB$ は鈍角でないとする。△ABP の垂心を H 、頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D 、頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし、三角形の各頂点から対辺、またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わることが知られている。その交点のことを、三角形の垂心という。

- (1) $\angle APB$ が直角となる t の値を求めよ。
- (2) 点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では、 t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする。

- (3) 点 H が △ODE の内心であることを証明せよ。ただし、1組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを、証明なしに利用してもよい。
- (4) △ODE の内接円の半径を t を用いて表せ。



解答例

- 1** (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 a , 公比 r の等比数列であるから ($a > 0, r > 0$)

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$b_1 = a_1 = a, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{より} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = ar^n$$

$n \geq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} ar^k \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_n}{a} = a^{n-1} r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$n = 1 \text{ のときも, 上式は成立することから } b_n = a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } \log_2 b_n = n \log_2 a + \frac{1}{2}n(n-1) \log_2 r$$

$$\text{したがって } c_n = \frac{\log_2 b_n}{n} = \log_2 a + \frac{1}{2}(n-1) \log_2 r$$

よって, 数列 $\{c_n\}$ は, 初項 $\log_2 a$, 公差 $\frac{1}{2} \log_2 r$ の等差数列

- (3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \left\{ \log_2 a + \frac{1}{2}(k-1) \log_2 r \right\} = n \log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1) \log_2 r$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad M_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k = \frac{1}{n} \left\{ n \log_2 a + \frac{1}{4}n(n-1) \log_2 r \right\} \\ &= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1) \log_2 r \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad d_n = 2^{M_n} = ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$$

よって, 数列 $\{d_n\}$ は, 初項 a , 公比 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列である. ■

- 2** (1) 条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1 = p, \quad P_{n+1} = pP_n + (1-p)(1-P_n) \quad (n \geq 1)$$

$$\text{ゆえに} \quad P_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1) \left(P_n - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{したがって} \quad P_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1} \left(p - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{よって} \quad P_n = \frac{1}{2} \{1 + (2p-1)^n\}$$

- (2) n 回の試行で少なくとも 1 回裏返されて， n 回終了後にカードの上の面が 0 である事象を A とし， n 回の試行でちょうど 2 回裏返される事象を B とする．

$$P(A) = P_n - p^n = \frac{1}{2} \{1 + (2p-1)^n\} - p^n$$

$$P(A \cap B) = {}_nC_2 \cdot p^{n-2}(1-p)^2 = \frac{1}{2} n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2$$

よって，求める条件付き確率は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{\frac{1}{2} \{1 + (2p-1)^n\} - p^n} \\ &= \frac{n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{1 + (2p-1)^n - 2p^n} \end{aligned}$$

■

- 3 (1) P_n, P_{n+1} は $C: y = x^3$ 上の点であるから

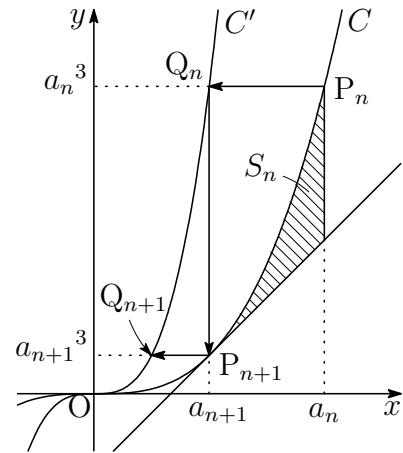
$$P_n(a_n, a_n^3), \quad P_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+1}^3)$$

右の図から, Q_n の座標は, P_{n+1} の x 座標
および P_n の y 座標と等しいから

$$Q_n(a_{n+1}, a_n^3)$$

Q_n は $C': y = 8x^3$ 上の点であるから

$$a_n^3 = 8a_{n+1}^3 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$



$$a_1 = 1 \text{ であるから, 上式より } a_n = a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

- (2) $C: y = x^3$ より $y' = 3x^2$

ここで, C 上の点 (α, α^3) における接線を ℓ とすると, その方程式は

$$y - \alpha^3 = 3\alpha^2(x - \alpha) \quad \text{ゆえに} \quad y = 3\alpha^2x - 2\alpha^3$$

C と ℓ で囲まれる部分のうち, $\alpha \leq x \leq \beta$ の領域にある面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^3 - (3\alpha^2x - 2\alpha^3)\} dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2(x + 2\alpha) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^3 + 3\alpha(x - \alpha)^2\} dx = \left[\frac{1}{4}(x - \alpha)^4 + \alpha(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{4}(3\alpha + \beta)(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

上式に $\alpha = a_{n+1} = \frac{1}{2^n}$, $\beta = a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ を代入することにより

$$S_n = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \right)^3 = \frac{5}{2^{4n+2}}$$

- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \frac{5}{2^{4k+2}} = \frac{5}{64} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{16}\right)^{k-1} \\ &= \frac{5}{64} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{2^{4n}}\right) \end{aligned}$$

■

- 4 (1) 3点 $A(0, 3)$, $B(0, -1)$, $P(t, 0)$ ($t > 0$) により

直線 AP の傾きは $-\frac{3}{t}$, 直線 BP の傾きは $\frac{1}{t}$

2直線 AP , BP は直交するから $-\frac{3}{t} \cdot \frac{1}{t} = -1$ よって $t = \sqrt{3}$

- (2) 直線 BE は点 $B(0, -1)$ を通り, 傾き $\frac{t}{3}$ であるから (直線 AP に垂直)

$$y = \frac{t}{3}x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{t}{3}\left(x - \frac{3}{t}\right) \quad \text{よって} \quad H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$$

- (3) 四角形 $AOHE$, 四角形 $OBDH$, 四角形 $HDPE$ は, それぞれ対角の和が 180° であるから, 円に内接する.

四角形 $AOHE$ において $\angle EOH = \angle EAH$

$$\angle OEH = \angle OAH$$

四角形 $OBDH$ において $\angle HOD = \angle HBD$

四角形 $HDPE$ において $\angle HED = \angle HPD$

$\triangle AHE \sim \triangle BHD$ より $\angle EAH = \angle HBD$

$\triangle AHO \sim \triangle PHD$ より $\angle OAH = \angle HPD$

上の第1, 第3, 第5式から

$$\angle EOH = \angle HOD \quad \dots \textcircled{1}$$

同様に, 上の第2, 第4, 第6式から

$$\angle OEH = \angle HED \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より, $\triangle ODE$ において, 線分 OH , EH は, それぞれ $\angle O$, $\angle E$ の二等分線である. よって, 点 H は $\triangle ODE$ の内心である.

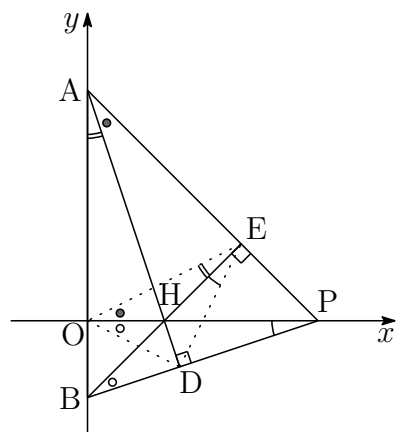
- (4) 点 E は, 直線 $AP: y = -\frac{3}{t}x + 3$ と (2) の直線 $y = \frac{t}{3}x - 1$ 交点である.

$$\text{これらの連立方程式を解くと} \quad E\left(\frac{12t}{t^2+9}, \frac{3t^2-9}{t^2+9}\right)$$

ゆえに, 直線 OE の方程式は $y = \frac{3t^2-9}{12t}x$ すなわち $(t^2-3)x - 4ty = 0$

$\triangle ODE$ の内接円の半径は, 点 $H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$ から直線 OE までの距離であるから ($t > \sqrt{3}$)

$$\frac{\left|(t^2-3) \cdot \frac{3}{t} - 4t \cdot 0\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2 + (-4t)^2}} = \frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2 + 16t^2}}$$



9.20 2020 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

1 m, p, q を実数とする. 二つの関数

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x, \quad g(x) = \frac{1}{6}(x-p)^2 + q$$

を考える. 座標平面上の放物線

$$C_1 : y = f(x), \quad C_2 : y = g(x)$$

および直線 $\ell : y = mx$ について, 次の二つの条件 (i), (ii) が成り立つとする.(i) 直線 ℓ は原点 O において放物線 C_1 に接している.(ii) 直線 ℓ は放物線 C_2 に接している.直線 ℓ と放物線 C_2 の接点を A とする. 次の問いに答えよ.

- (1) m の値を求めよ.
- (2) q を p を用いて表せ. また, 点 A の座標を p を用いて表せ.
- (3) $p \neq -1$ とする. 放物線 C_1 と放物線 C_2 の二つの共有点の x 座標を p を用いて表せ.
- (4) $p = 2$ とする. 放物線 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形のうち, $x \geq 0$ の範囲にある部分の面積 S と, $x \leq 0$ の範囲にある部分の面積 T をそれぞれ求めよ.

- 2** a, b を正の定数とする. $0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対し, 平面上で, 次の三つの条件 (i), (ii), (iii) を満たす三角形 PAB, およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える.

- (i) $PA = a, PB = b, \angle APB = \theta$ である.
- (ii) 2 点 C, D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある.
- (iii) $AB = 3AD$ である.

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 辺 AB の長さを a, b, θ を用いて表せ.
 - (2) S を a, b, θ を用いて表せ.
 - (3) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし, S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする. M を a, b を用いて表せ. また, $\sin \beta$ および $\cos \beta$ の値をそれぞれ求めよ.
 - (4) $a = 16, b = 25$ とする. また, β を (3) で定めた値とする. $\theta = \beta$ のときの, 点 P と直線 AB の距離を求めよ.
- 3** 1 個のさいころを 2 回投げる. 1 回目に出た目を a_1 , 2 回目に出た目を a_2 とする. 次に, 1 枚の硬貨を 2 回投げる. 1 回目に表が出た場合は $b_1 = 1$, 裏が出た場合は $b_1 = a_1$ とおく. また, 2 回目に表が出た場合は $b_2 = 1$, 裏が出た場合は $b_2 = a_2$ とおく. ベクトル

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \quad \vec{b} = (b_1, b_2)$$

を考える. 次の問いに答えよ.

- (1) $a_1 + a_2 = 7$ である確率を求めよ.
- (2) $b_1 = 1$ である確率を求めよ.
- (3) $\vec{b} = (1, 1)$ であったとき, $\vec{a} = (1, 6)$ である条件付き確率を求めよ.
- (4) $\vec{b} = (1, 1)$ であったとき, $a_1 + a_2 = 7$ である条件付き確率を求めよ.

4 数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i), (ii) により定める.

- (i) $a_1 = 1$ である.
- (ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, n が奇数ならば $a_{n+1} = -a_n + 1$, また n が偶数ならば $a_{n+1} = -2a_n + 3$ である.

さらに, 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n-1}$ により定め, 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ により定める. 次の問いに答えよ.

- (1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ.
- (2) 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.
- (3) 自然数 m に対して, 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $(2m-1)$ 項までの和を T_m とする. T_m を m を用いて表せ.

解答例

1 (1) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$ より $f'(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ よって $m = f'(0) = \frac{1}{3}$

(2) $\ell: y = \frac{1}{3}x$ と $C_2: y = \frac{1}{6}(x-p)^2 + q$ から y を消去すると

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}(x-p)^2 + q \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 2(p+1)x + p^2 + 6q = 0$$

ℓ と C_2 は接するから, 上の第2式の係数について

$$(p+1)^2 - 1 \cdot (p^2 + 6q) = 0 \quad \text{よって} \quad q = \frac{1}{3}p + \frac{1}{6}$$

(3) $C_1: y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$, $C_2: y = \frac{1}{6}(x-p)^2 + \frac{1}{3}p + \frac{1}{6}$

上の2式から y を消去して整理すると

$$3x^2 + 2(p+1)x - (p+1)^2 = 0$$

$$(x+p+1)(3x-p-1) = 0$$

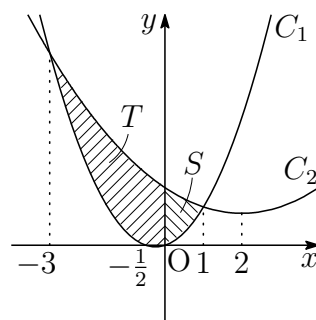
よって, 求める二つの共有点の x 座標は $x = -p-1, \frac{p+1}{3}$

(4) $p=2$ のとき, (2) の結果から

$$q = \frac{5}{6}$$

(3) の結果から, C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$x = -3, 1$$



$-3 \leq x \leq 1$ において $g(x) - f(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \frac{1}{6}(x-2)^2 + \frac{5}{6} - \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

よって $S + T = -\frac{1}{2} \int_{-3}^1 (x+3)(x-1) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4^3 = \frac{16}{3}$

$$S = \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

$$T = \frac{16}{3} - \frac{5}{6} = \frac{9}{2}$$

■

- 2 (1) $\triangle PAB$ に余弦定理を適用すると

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

$AB > 0$ であるから

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

- (2) $AD = \frac{1}{3}AB$ であるから

$$\text{長方形 } ABCD \text{ の面積} = AB \cdot AD = \frac{1}{3}AB^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)$$

また, $\triangle PAB = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab \sin \theta + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta) \\ &= \frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{ab}{6}(3 \sin \theta - 4 \cos \theta) \end{aligned}$$

- (3) $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, $\sin \varphi = -\frac{4}{5}$ とおくと $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0\right)$, (2) の結果から

$$S = \frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{5ab}{6} \sin(\theta + \varphi)$$

$0 < \theta < \pi$ より, $-\frac{\pi}{2} < \theta + \varphi < \pi$ であるから, S が最大なるとき, $\theta = \beta$ であるから

$$\beta + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\text{よって} \quad \sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi = \frac{3}{5}$$

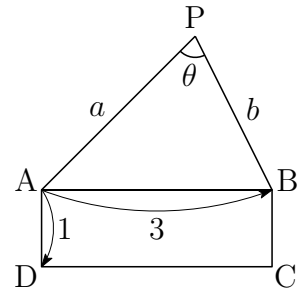
$$\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = -\frac{4}{5}$$

- (4) $a = 16$, $b = 25$, $\theta = \beta$ のとき $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 25 \cdot \frac{3}{5} = 120$

$$AB = \sqrt{16^2 + 25^2 - 2 \cdot 16 \cdot 25 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1521} = 39$$

点 P から直線 AB までの距離を h とすると, $S = \frac{1}{2}AB \cdot h$ であるから

$$120 = \frac{1}{2} \cdot 39h \quad \text{よって} \quad h = \frac{80}{13}$$



- 3 (1) $a_1 + a_2 = 7$ の場合の数の総数は、7個の○を一行に並べ、間の6カ所のうち1カ所に仕切りを作り、区切られた○の個数を順番に a_1, a_2 としたときの場合の総数に等しい。よって、求める確率は

$$\frac{{}_6C_1}{6^2} = \frac{1}{6}$$

- (2) $b_1 = 1$ となるのは、次の事象である。

- 1回目に投げた硬貨が表である。
- 1回目に投げた硬貨が裏で、 $a_1 = 1$ である。

これらの事象は、互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

- (3) $\vec{a} = (1, 6)$, $\vec{b} = (1, 1)$ となる事象をそれぞれ A, B とする。(2)の結果から

$$P(B) = \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$A \cap B$ は、さいころの出た目が順に1, 6で、硬貨は、1回目は表・裏どちらでもよく、2回目が裏となる事象であるから

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

よって、求める条件付き確率は

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{2}{49}$$

- (4) $a_1 + a_2 = 7$ となる事象を C とする。 $B \cap C$ は、 $\{a_1, a_2\}$ の組合せが $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ の場合であるから

$$P(B \cap C) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left\{ 2! \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 2! \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 \right\} = 2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

求める条件付き確率は

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = 2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{8}{49}$$

■

$$\boxed{4} \quad (1) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} -a_n + 1 & (n \text{ が奇数}) \\ -2a_n + 3 & (n \text{ が偶数}) \end{cases} \quad \cdots (*)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad a_2 &= -a_1 + 1 = -1 + 1 = \mathbf{0}, \\ a_3 &= -2a_2 + 3 = -2 \cdot 0 + 3 = \mathbf{3} \\ a_4 &= -a_3 + 1 = -3 + 1 = \mathbf{-2} \\ a_5 &= -2a_4 + 3 = -2 \cdot (-2) + 3 = \mathbf{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (*) \text{ より} \quad a_{2n+1} &= -2a_{2n} + 3 = -2(-a_{2n-1} + 1) + 3 = 2a_{2n-1} + 1 \\ a_{2n+2} &= -a_{2n+1} + 1 = -(-2a_{2n} + 3) + 1 = 2a_{2n} - 2 \end{aligned}$$

$$b_n = a_{2n-1}, \quad c_n = a_{2n} \text{ より} \quad b_1 = a_1 = 1, \quad c_1 = a_2 = 0$$

$$b_{n+1} = 2b_n + 1, \quad c_{n+1} = 2c_n - 2$$

$$\text{したがって} \quad b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1), \quad c_{n+1} - 2 = 2(c_n - 2)$$

数列 $\{b_n + 1\}$ は、初項 $b_1 + 1 = 2$ 、公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \mathbf{b_n = 2^n - 1}$$

数列 $\{c_n - 2\}$ は、初項 $c_1 - 2 = -2$ 、公比 2 の等比数列であるから

$$c_n - 2 = -2 \cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \mathbf{c_n = -2^n + 2}$$

(3) (2) の結果から

$$a_{2n-1} = b_n = 2^n - 1, \quad a_{2n} = c_n = -2^n + 2$$

上の 2 式から、 $a_{2n-1} + a_{2n} = 1$ であるから、 $m > 1$ のとき

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{k=1}^{2m-1} a_k = \sum_{j=1}^{m-1} (a_{2j-1} + a_{2j}) + a_{2m-1} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} 1 + (2^m - 1) \\ &= \mathbf{2^m + m - 2} \end{aligned}$$

$T_1 = a_1 = 1$ であるから、上式は、 $m = 1$ のときも成立する。

$$\text{よって} \quad \mathbf{T_m = 2^m + m - 2}$$



9.21 2021 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 a を実数とする. 関数 $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$ が $x = a$ で極大値をとるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) a の満たす条件を求めよ.
 (2) 次の不等式を解け.

$$|x+1| + |x-2| \leq 4$$

- (3) x が (2) の範囲を動くとき, $f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ.

- 2 座標平面において, 二つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 $A(1, 1)$, 点 $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ をとる. 次の問いに答えよ.

- (1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CB}$ は垂直であるとする. このとき, B の座標を求めよ.
 (2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり, $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{CD}$ は垂直であるとする. このとき, D の座標を求めよ.
 (3) B, D はそれぞれ (1), (2) で定めたものとする. このとき, 四角形 $ABCD$ が正方形であることを示せ.

- 3 1 個のさいころを 3 回投げる. 1 回目に出た目の数を a , 2 回目に出た目の数を b , 3 回目に出た目の数を c とする. また,

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ.
 (2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ.
 (3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき, $f'(1) = 1$ である条件付き確率を求めよ.

4 次の問いに答えよ.

- (1) $A = \sin x$ とおく. $\sin 5x$ を A の整式で表せ.
- (2) $\sin^2 \frac{\pi}{5}$ の値を求めよ.
- (3) 曲線 $y = \cos 3x$ ($x \geq 0$) と曲線 $y = \cos 7x$ ($x \geq 0$) の共有点の x 座標を小さい方から順に $x_1, x_2, x_3, \dots$ とする. このとき, 関数

$$y = \cos 3x \quad (x_5 \leq x \leq x_6)$$

の値域を求めよ.

解答例

1 (1) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$ より

$$f'(x) = -2x^2 + (2a+1)x - a = -(2x-1)(x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{2}, a$$

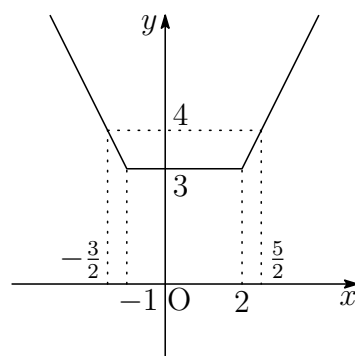
$$x = a \text{ で極大となるから, } f(x) \text{ の増減により } \frac{1}{2} < a$$

(2) $y = |x+1| + |x-2|$ とすると

$$y = \begin{cases} -2x+1 & (x \leq -1) \\ 3 & (-1 \leq x \leq 2) \\ 2x-1 & (2 \leq x) \end{cases}$$

グラフから, $|x+1| + |x-2| \leq 4$ の解は

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$



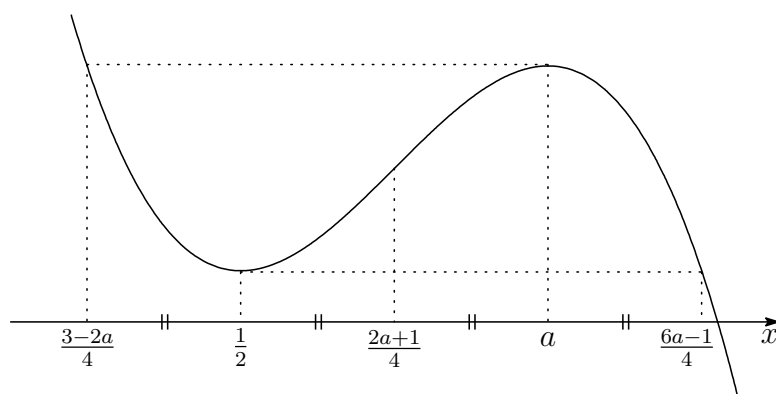
(3) $x = \frac{1}{2}$ は定義域 $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ の中央であるから, $f(x)$ の最大値は

$$\max \left(f\left(-\frac{3}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right) \right) = \max \left(\frac{15}{4}a + \frac{27}{8}, \frac{15}{4}a - \frac{175}{24} \right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24} = f\left(\frac{6a-1}{4}\right) \text{ であるから}$$

$$\frac{5}{2} < \frac{6a-1}{4} \text{ すなわち } a > \frac{11}{6} \text{ のとき 最小値 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{24}$$

$$\frac{6a-1}{4} \leq \frac{5}{2} \text{ すなわち } \frac{1}{2} < a \leq \frac{11}{6} \text{ のとき 最小値 } f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24}$$



補足 $x = \frac{1}{2}$ で極小, $x = a$ で極大となるから, その中央 $x = \frac{2a+1}{4}$ が変曲点の x 座標となる. ここで, 等差数列

$$\frac{3-2a}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2a+1}{4}, a, \frac{6a-1}{4}$$

をとると, 次式が成立する³.

$$f\left(\frac{3-2a}{4}\right) = f(a), \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{6a-1}{4}\right)$$

$x = \frac{1}{2}$ を極として, $f(x)$ を展開すると

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2a-1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

$d > 0$ とし, $x = \frac{1}{2} - d$, $x = \frac{1}{2} + d$ に対する $f(x)$ を求めると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2} - d\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2a-1}{2}d^2 + \frac{2}{3}d^3 \\ f\left(\frac{1}{2} + d\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2a-1}{2}d^2 - \frac{2}{3}d^3 \end{aligned}$$

上の 2 式から $f\left(\frac{1}{2} - d\right) > f\left(\frac{1}{2} + d\right)$

特に, $d = 2$ とすると $f\left(-\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right)$ ■

³<http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TSDai/TSDai.2017.pdf> (p.6 を参照)

- 2 (1) A(1, 1) と異なる点 B の座標を (b, b^2) とすると $(b \neq 1)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b-1 \\ b^2-1 \end{pmatrix} = (b-1) \begin{pmatrix} 1 \\ b+1 \end{pmatrix}$$

また, $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$, $B(b, b^2)$ より

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} b-\sqrt{2}+1 \\ b^2-\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$ より, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} 1 \cdot (b-\sqrt{2}+1) + (b+1)(b^2-\sqrt{2}-1) &= 0 \\ b^3 + b^2 - \sqrt{2}b - 2\sqrt{2} &= 0 \\ (b-\sqrt{2})\{b^2 + (\sqrt{2}+1)b + 2\} &= 0 \\ (b-\sqrt{2}) \left\{ \left(b + \frac{\sqrt{2}+1}{2} \right)^2 + \frac{5-2\sqrt{2}}{4} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

したがって $b = \sqrt{2}$ よって $B(\sqrt{2}, 2)$

- (2) 点 $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ と異なる点 D の座標を $(d, -\sqrt{2}d^2 + 3d + \sqrt{2})$ とすると $(d \neq \sqrt{2}-1)$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} d-\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d-1 \end{pmatrix} = (d-\sqrt{2}+1) \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

また, $A(1, 1)$, $D(d, -\sqrt{2}d^2 + 3d + \sqrt{2})$ より

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} d-1 \\ -\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CD}$ より, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} 1 \cdot (d-1) + (-\sqrt{2}d+\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}d^2+3d+\sqrt{2}-1) &= 0 \\ 2d^3 - (2+4\sqrt{2})d^2 + (2+4\sqrt{2})d &= 0 \\ d\{d^2 - (1+2\sqrt{2})d + (1+2\sqrt{2})\} &= 0 \\ d \left\{ \left(d - \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{4\sqrt{2}-5}{4} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

したがって $d = 0$ よって $D(0, \sqrt{2})$

(3) (1), (2) の結果から

$$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2} - 1, 1), \quad \overrightarrow{AD} = (-1, \sqrt{2} - 1)$$

$\overrightarrow{AD}$ は $\overrightarrow{AB}$ を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したもの, すなわち, 点 B を点 A を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたものが D である. また $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{2} - 1)$ より

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

よって, 四角形 ABCD は正方形である.

補足 放物線 $C: y = f(x)$ 上の 2 点 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ を通る直線は C 上の $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ における接線と平行である.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると

$$f'(x) = 2ax + b$$

であるから

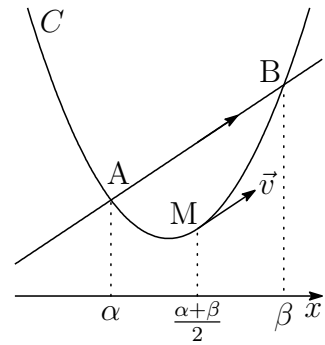
$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

本題の放物線について, $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ とすると

$$f'(x) = -2\sqrt{2}x + 3$$

2 点 $C(\sqrt{2} - 1, f(\sqrt{2} - 1))$, $D(d, f(d))$ を通る直線の傾きは

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\sqrt{2} - 1 + d}{2}\right) &= -2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1 + d}{2} + 3 \\ &= -\sqrt{2}d + \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$



3 (1) $b^2 > 4c$ より $c < \frac{1}{4}b^2$ これを満たす (b, c) の組は, 次の 17 組

- $b = 1, 2$ のとき c はなし
- $b = 3$ のとき $c = 1, 2$
- $b = 4$ のとき $c = 1, 2, 3$
- $b = 5, 6$ のとき $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

よって、求める確率は $\frac{17}{6^2} = \frac{17}{36}$

(2) (i) $a = 1, 3, 5$ のとき, $f(x) = -x^2 + bx + c$ であるから, 係数について

$$D = b^2 + 4c > 0$$

このとき, つねに異なる2つの実数解をもつ.

(ii) $a = 2, 4, 6$ のとき, $f(x) = x^2 + bx + c$ であるから, $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつ条件は

$$b^2 - 4c > 0 \quad \text{すなわち} \quad b^2 > 4c$$

よって、求める確率は, (i),(ii) および (1) の結果から

$$\frac{3}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{17}{36} = \frac{53}{72}$$

(3) まず, 2つの事象を次のように定める.

A : 「2次方程式 $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつ」

B : 「 $f'(1) = 1$ である」

(2) の結果から $P(A) = \frac{53}{72}$

$f'(x) = 2(-1)^a x + b$ より, $f'(1) = 1$ のとき

$$2(-1)^a + b = 1$$

これを満たす (a, b) は, 次の3組

$$(a, b) = (1, 3), (3, 3), (5, 3)$$

(i) より $B \implies A$ ゆえに $P(B) = P(A \cap B) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$

よって、求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{53}{72}} = \frac{6}{53}$$



- 4 (1) $\sin 5x = \sin(4x + x) = \sin 4x \cos x + \cos 4x \sin x$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 4x &= 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \cdot 2 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) \\ &= 4(\sin x - 2 \sin^3 x) \cos x \\ \cos 4x &= 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2(2 \sin x \cos x)^2 \\ &= 1 - 8 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = 8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + 1\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin 5x &= 4(\sin x - 2 \sin^3 x) \cos x \cos x + (8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + 1) \sin x \\ &= 4(2 \sin^3 x - \sin x)(\sin^2 x - 1) + 8 \sin^5 x - 8 \sin^3 x + \sin x \\ &= 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x \\ &= \mathbf{16A^5 - 20A^3 + 5A}\end{aligned}$$

- (2) $x = \frac{\pi}{5}$ とおくと $A = \sin \frac{\pi}{5}$, $\sin 5x = 0$
これらを (1) の結果に代入すると

$$16A^5 - 20A^3 + 5A = 0$$

$$A \neq 0 \text{ であるから } 16A^4 - 20A^2 + 5 = 0$$

$$A^2 \text{ について解くと } A^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$$

$$A^2 = \sin^2 \frac{\pi}{5} < \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \text{ であるから}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

- (3) $\cos 3x - \cos 7x = 2 \sin 5x \sin 2x$ より, $\cos 3x = \cos 7x$ の解は

$$x = \frac{m\pi}{5}, \quad x = \frac{n\pi}{2} \quad (m, n \text{ は整数})$$

$y = \cos 3x$ ($x \geq 0$) と $y = \cos 7x$ ($x \geq 0$) の共有点の x 座標は小さい順に

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{5}, \quad x_3 = \frac{2\pi}{5}, \quad x_4 = \frac{\pi}{2}, \quad x_5 = \frac{3\pi}{5}, \quad x_6 = \frac{4\pi}{5}, \quad \dots$$

$$x_5 = \frac{3\pi}{5}, x_6 = \frac{4\pi}{5}, x_5 \leq x \leq x_6 \text{ より}$$

$$\frac{9\pi}{5} \leq 3x \leq \frac{12\pi}{5} \quad \text{ゆえに} \quad 2\pi - \frac{\pi}{5} \leq 3x \leq 2\pi + \frac{2\pi}{5}$$

これから、関数 $y = \cos 3x$ ($x_5 \leq x \leq x_6$) の値域は

$$\cos \frac{2\pi}{5} \leq y \leq \cos 0$$

ここで、(2) の結果より

$$\cos \frac{2\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

よって、求める値域は $\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \leq y \leq 1$



9.22 2022 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

1 正の整数 N に対し、 N を 7 進法で表したときの数字の並びを 10 進法で表された数だと思って読み取った数を M とする. 例えば、 $N = 7$ のとき、 N は 7 進法で $10_{(7)}$ と表されるので $M = 10$ である. このとき、次の問いに答えよ.

- (1) $M = 100$ のとき N の値を求めよ. また、 $N = 100$ のとき M の値を求めよ.
- (2) N は 7 進法では 3 桁で表され、10 進法では 2 桁で表されるとする. $2N = M$ が成り立つとき、 N の値を求めよ.
- (3) 7 進法で 3 桁で表される N のうちで、 $2N = M$ が成り立つ最大のものを求めよ.
- (4) N は 7 進法で 4 桁で表されるとする. このとき、 $2N < M$ となることを示せ.

2 a を正の実数、 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする. 座標平面上の 3 点 $A(0, a)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし、その中心が $I(0, t)$ であるとする. このとき、次の問いに答えよ.

- (1) $\angle IBC$ を θ とおく. t と a を、それぞれ θ を用いて表せ.
- (2) a を t を用いて表せ.
- (3) $\triangle ABC$ の重心が内接円 S の周上にあるとき、 t の値を求めよ.
- (4) $\triangle ABC$ の垂心が S の周上にあるとき、 t の値を求めよ. ただし、三角形の各頂点から対辺、またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わる事が知られており、その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ.
- (5) $\triangle ABC$ の外心が S の周上にあるとき、 t のとり得る値をすべて求めよ.

- 3** n を自然数とする．袋の中に赤玉が3個，白玉が $(n+5)$ 個，合計で $(n+8)$ 個の玉が入っている．また，空箱 A, B, C, D, E, F が用意されている．この準備の下で次の試行1，試行2を順に行う．

試行1 袋から玉を1個取り出して，箱Aに入れる．箱Aに入れた玉が白玉なら $i=0$ ，赤玉なら $i=1$ とおく．

試行2 次に，袋から白玉を n 個取り出して，箱Bに入れる．この時点で，袋に残った玉7個のうち，赤玉は $(3-i)$ 個，白玉は $(4+i)$ 個である．この7個の中から2個の玉を取り出して，箱Cに入れる．

試行2を終えたら，箱Aと箱Cの玉の色を記録して，箱A, B, Cの玉をすべて元通り袋に戻す．そして次の試行3を行う．

試行3 袋から玉を1個取り出して，箱Dに入れる．次に，袋から玉を n 個取り出して，箱Eに入れる．最後に袋から玉を2個取り出して，箱Fに入れる．

このとき，次の問いに答えよ．

- (1) $i=0$ であったとき，試行2において箱Cに赤玉が2個入る条件付き確率 p_0 を求めよ．また， $i=1$ であったとき，試行2において箱Cに赤玉が2個入る条件付き確率 p_1 を求めよ．
- (2) 試行1において，箱Aに赤玉が入る確率 q_A を n を用いて表せ．また，試行1，試行2を順に行うとき，箱Cに赤玉が2個入る確率 q_C を n を用いて表せ．
- (3) 試行3において，箱Dに赤玉が入るという事象を事象 X ，箱Eに入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y ，箱Fに赤玉が2個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする．事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X \cap Y)$ を n を用いて表せ．また，事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y \cap Z)$ を n を用いて表せ．
- (4) (3) の事象 Y が起こったとき，(3) の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3) の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ．

- 4 実数 a に対して、座標平面上の点 $(a, 0)$ を通る傾き $4a$ の直線を L_a とする. a が実数全体を動くとき、直線 L_a が通り得る点全体からなる領域を S とする. また、2 点 $P(0, 1)$ と $Q(0, 2)$ に対し、 $\sqrt{2}AP \leq AQ$ を満たす点 A 全体からなる領域を T とする. このとき、次の問いに答えよ.

- (1) 領域 S を図示せよ.
- (2) 領域 T を図示せよ.
- (3) S と T の共通部分の面積を求めよ.

解答例

1 (1) $M = 100$ のとき $N = 100_{(7)} = 1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 0 = 49$
 $N = 100 = 2 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 2 = 202_{(7)}$ のとき $M = 202$

(2) $N = abc_{(7)} = a \cdot 7^2 + b \cdot 7^1 + c$ とおくと $M = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$
 N は 10 進法では 2 桁であるから $N \leq 201_{(7)} \cdots \textcircled{1}$
 $2N = M$ であるから

$$2(a \cdot 7^2 + b \cdot 7^1 + c) = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \quad \text{ゆえに} \quad c = 2(a - 2b) \quad (*)$$

$a = 1, 2$ で, b, c は 0 以上 6 以下の整数である.

$a = 2$ のとき, $\textcircled{1}$ より条件を満たす (a, b, c) は存在しない.

したがって $a = 1$ のとき $b = 0, c = 2$ よって $N = 102_{(7)} = 51$

(3) $N = xyz_{(7)}$ とする (x は 6 以下の自然数, y, z は 0 以上 6 以下の整数)
 $2N = M$ のとき, $(*)$ と同様に $z = 2(x - 2y)$
 最大の N は, $x = 6, y = 3, z = 0$ のときであるから

$$N = 630_{(7)} = 6 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 0 = 315$$

(4) $N = pqrs_{(7)} = p \cdot 7^3 + q \cdot 7^2 + r \cdot 7 + s$ とおくと
 (p は 6 以下の自然数, q, r, s は 0 以上 6 以下の整数)

$$M = p \cdot 10^3 + q \cdot 10^2 + r \cdot 10 + s$$

このとき

$$\begin{aligned} M - 2N &= (1000p + 100q + 10r + s) - 2(343p + 49q + 7r + s) \\ &= 314p + 2q - 4r - s \\ &= 314(p - 1) + 2q + 4(6 - r) + (6 - s) + 284 > 0 \end{aligned}$$

よって $2N < M$



2 (1) 右の図から

$$t = \tan \theta, \quad a = \tan 2\theta$$

(2) (1) の結果より

$$a = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

(3) $\triangle ABC$ の重心の座標は $\left(0, \frac{a}{3}\right)$

これが円周上の点 $(0, 2t)$ と一致するから

$$\frac{a}{3} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad a = 6t$$

これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{2t}{1 - t^2} = 6t \quad \text{ゆえに} \quad t(3t^2 - 2) = 0$$

$$0 < t < 1 \text{ に注意して } t = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(4) 点 $B(-1, 0)$ を通り、直線 AC に垂直な直線の方程式は

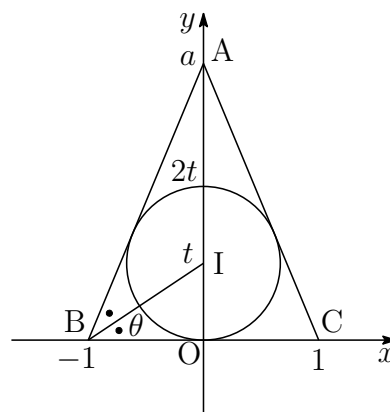
$$y = \frac{1}{a}(x + 1) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{x}{a} + \frac{1}{a}$$

この直線と y 軸との交点 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ が、 $(0, 2t)$ と一致するから

$$\frac{1}{a} = 2t$$

これに (2) の結果を代入すると $(0 < t < 1)$

$$\frac{1 - t^2}{2t} = 2t \quad \text{ゆえに} \quad 5t^2 = 1 \quad \text{よって} \quad t = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



- (5) AC の垂直二等分線, すなわち, AC の中点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)$ を通り, 傾き $\frac{1}{a}$ の直線の方程式は

$$y - \frac{a}{2} = \frac{1}{a} \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{a} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2a}$$

この直線と y 軸との交点 $\left(0, \frac{a}{2} - \frac{1}{2a}\right)$ が, 原点 $O(0, 0)$ または $(0, 2t)$ に一致するときである.

- (i) $\frac{a}{2} - \frac{1}{2a} = 0$ のとき ($a > 0$)

$$a^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = 1$$

これに (2) の結果を代入すると $\frac{2t}{1-t^2} = 1$

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \quad t \text{ の値の範囲に注意して} \quad t = -1 + \sqrt{2}$$

- (ii) $\frac{a}{2} - \frac{1}{2a} = 2t$ のとき, これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{t}{1-t^2} - \frac{1-t^2}{4t} = 2t \quad \text{整理すると} \quad 7t^4 - 2t^2 - 1 = 0$$

$$\text{したがって} \quad t^2 = \frac{1+2\sqrt{2}}{7} \quad t \text{ の範囲に注意して} \quad t = \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$$

$$(i), (ii) \text{ より} \quad t = -1 + \sqrt{2}, \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}} \quad \blacksquare$$

- 3** (1) 条件付き確率 p_0 は、赤玉 3 個、白玉 4 個の計 7 個から 2 個取り出し、2 個とも赤玉の確率であるから

$$p_0 = \frac{{}_3C_2}{{}_7C_2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

条件付き確率 p_1 は、赤玉 2 個、白玉 5 個の計 7 個から 2 個取り出し、2 個とも赤玉の確率であるから

$$p_1 = \frac{{}_2C_2}{{}_7C_2} = \frac{1}{21}$$

$$(2) q_A = \frac{3}{n+8}$$

箱 A に白玉が入る確率を $\overline{q_A}$ とすると $\overline{q_A} = 1 - q_A = \frac{n+5}{n+8}$

$$\begin{aligned} q_C &= \overline{q_A}p_0 + q_Ap_1 \\ &= \frac{n+5}{n+8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{n+8} \cdot \frac{1}{21} = \frac{n+6}{7(n+8)} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= \frac{3}{n+8} \cdot \frac{{}_{n+5}C_n}{{}_{n+7}C_n} = \frac{3}{n+8} \cdot \frac{{}_{n+5}C_5}{{}_{n+7}C_7} = \frac{3}{n+8} \cdot \frac{(n+5)!}{n!5!} \cdot \frac{n!7!}{(n+7)!} \\ &= \frac{3}{n+8} \cdot \frac{7 \cdot 6}{(n+7)(n+6)} = \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

$$P(X \cap Y \cap Z) = \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)} \cdot \frac{{}_2C_2}{{}_7C_2} = \frac{6}{(n+8)(n+7)(n+6)},$$

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \cap Y \cap Z) &= \frac{n+5}{n+8} \cdot \frac{{}_{n+4}C_n}{{}_{n+7}C_n} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_7C_2} = \frac{n+5}{n+8} \cdot \frac{{}_{n+4}C_4}{{}_{n+7}C_7} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_7C_2} \\ &= \frac{n+5}{n+8} \cdot \frac{(n+4)!}{n!4!} \cdot \frac{n!7!}{(n+7)!} \cdot \frac{1}{7} = \frac{30}{(n+8)(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P(Y \cap Z) &= P(X \cap Y \cap Z) + P(\overline{X} \cap Y \cap Z) \\ &= \frac{6}{(n+8)(n+7)(n+6)} + \frac{30}{(n+8)(n+7)(n+6)} \\ &= \frac{36}{(n+8)(n+7)(n+6)} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 P(\overline{X} \cap Y) &= \frac{n+5}{n+8} \cdot \frac{{}_{n+4}C_n}{{}_{n+7}C_n} = \frac{n+5}{n+8} \cdot \frac{{}_{n+4}C_4}{{}_{n+7}C_7} \\
 &= \frac{n+5}{n+8} \cdot \frac{(n+4)!}{n!4!} \cdot \frac{n!7!}{(n+7)!} = \frac{210}{(n+8)(n+7)(n+6)}
 \end{aligned}$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}
 P(Y) &= P(X \cap Y) + P(\overline{X} \cap Y) \\
 &= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)} + \frac{210}{(n+8)(n+7)(n+6)} \\
 &= \frac{336}{(n+8)(n+7)(n+6)}
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 P_Y(X) &= \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \\
 &= \frac{126}{(n+8)(n+7)(n+6)} \cdot \frac{(n+8)(n+7)(n+6)}{336} = \frac{3}{8}, \\
 P_Y(Z) &= \frac{P(Y \cap Z)}{P(Y)} \\
 &= \frac{36}{(n+8)(n+7)(n+6)} \cdot \frac{(n+8)(n+7)(n+6)}{336} = \frac{3}{28}
 \end{aligned}$$

■

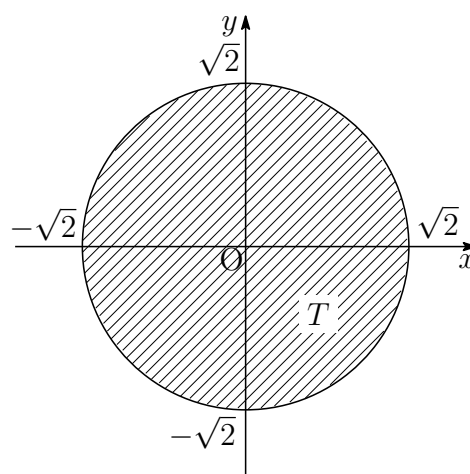
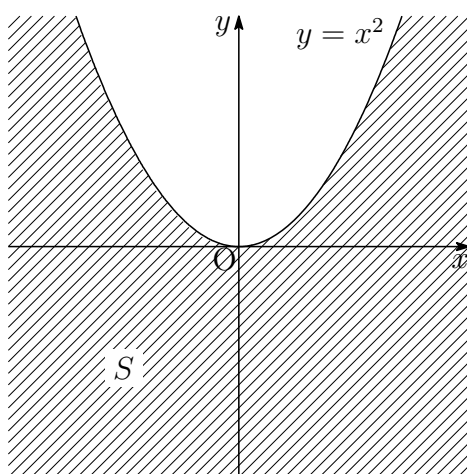
- 4 (1) 点 $(a, 0)$ を通り, 傾き $4a$ の直線 L_a の方程式は

$$y = 4a(x - a)$$

これを a について整理すると $4a^2 - 4xa + y = 0 \cdots (*)$
 a に関する 2 次方程式 $(*)$ が, 実数解をもつから, 係数について

$$D/4 = (-2x)^2 - 4y \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \leq x^2$$

この不等式が表す領域 S は左下の図の斜線部分で境界線を含む.

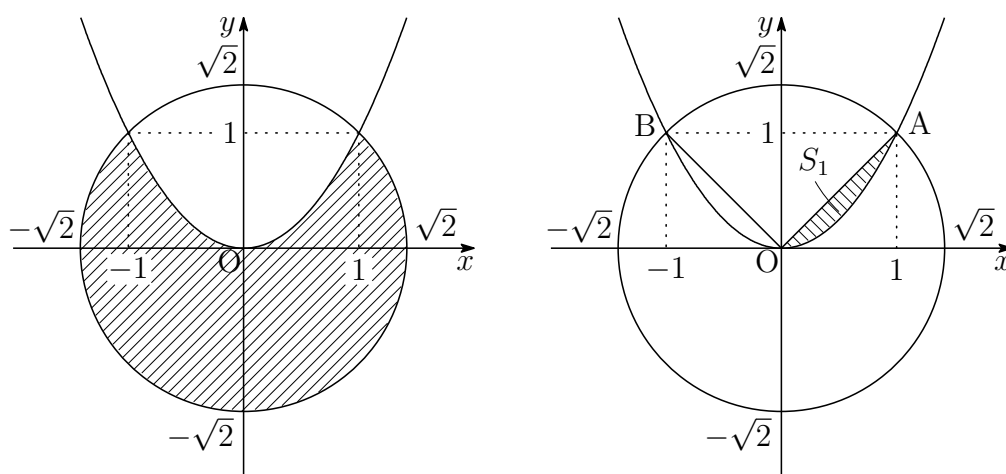


- (2) $\sqrt{2}AP \leq AQ$ より $2AP^2 \leq AQ^2$
 $P(0, 1), Q(0, 2)$ より, $A(x, y)$ の満たす不等式は

$$2\{x^2 + (y - 1)^2\} \leq x^2 + (y - 2)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + y^2 \leq 2$$

この不等式が表す領域 T は右上の図の斜線部分で境界線を含む.

(3) S と T の共通部分は、左下の図の斜線部分で境界線を含む。



放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

右上の図の原点 O を中心とする点 $(0, -\sqrt{2})$ を含む $\widehat{AB}$ の扇形の面積は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

よって、求める面積を S とすると

$$S = \frac{3\pi}{2} - 2S_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{3}$$



9.23 2023 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし、 N は 4 以上の自然数である。「この箱からカードを 1 枚取り出し、書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える。この試行を 4 回繰り返し、カードに書かれた番号を順に X, Y, Z, W とする。次の問いに答えよ。

- (1) $X = Y = Z = W$ となる確率を求めよ。
- (2) X, Y, Z, W が四つの異なる番号からなる確率を求めよ。
- (3) X, Y, Z, W のうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率を求めよ。
- (4) X, Y, Z, W が三つの異なる番号からなる確率を求めよ。

- 2 a, d を実数とし、数列 $\{a_n\}$ を初項 a 、公差 d の等差数列とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 $a_3 = S_2 = 18$ が成り立つとき、次の問いに答えよ。

- (1) a, d の値を求めよ。
- (2) S_n を n を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{S_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とし、数列 $\{U_n\}$ を

$$U_n = T_n - 4S_n + 5a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。 U_n が最小となるときの n の値をすべて求め、さらにそのときの U_n の値を求めよ。

- (4) (3) で定めた数列 $\{U_n\}$ の初項から第 7 項までの和を V とする。 c を実数とし、関数 $f(x) = 3x^2 + cx + 36$ を考える。定積分 $\int_0^c f(x) dx$ が V に等しいとき、 c の値を求めよ。

- 3 空間内の6点A, B, C, D, E, Fは1辺の長さが1の正八面体の頂点であり, 四角形ABCDは正方形であるとする. $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{AE}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 内積 $\vec{b} \cdot \vec{d}$, $\vec{b} \cdot \vec{e}$, $\vec{d} \cdot \vec{e}$ の値を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{AF} = p\vec{b} + q\vec{d} + r\vec{e}$ を満たす実数 p, q, r の値を求めよ.
- (3) 辺BEを1:2に内分する点をGとする. また, $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対し, 辺CFを $t:(1-t)$ に内分する点をHとする. t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき, $\triangle AGH$ の面積が最小となる t の値とそのときの $\triangle AGH$ の面積を求めよ. 必要ならば, $\triangle AGH$ の面積 S について

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2 |\overrightarrow{AH}|^2 - (\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH})^2}$$

が成り立つことを用いてよい.

- 4 $a < 0, b > 0, c > 0$ とし, 座標平面上の二つの放物線

$$C_1: y = ax(x-2), \quad C_2: y = b(x+c)^2$$

を考える. 放物線 C_1 上の点 $(2, 0)$ における接線の傾きは -2 である. 放物線 C_1 と放物線 C_2 の共有点が1点のみであるとし, その共有点の x 座標を d とする. 次の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) b, d を c を用いて表せ.
- (3) 放物線 C_1 と x 軸で囲まれた部分を A とし, 不等式 $0 \leq x \leq d$ の表す領域を B とする. A と B の共通部分の面積 S を c を用いて表せ.
- (4) 放物線 C_2 , x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 T を c を用いて表せ.
- (5) (3) の S と (4) の T が $8S = 15T$ を満たすとき, c の値を求めよ.

解答例

- 1 (1) 1 種類の数だけ取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N C_1}{N^4} = \frac{1}{N^3}$$

- (2) 4 種類の数を取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N C_4 \cdot 4!}{N^4} = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}$$

- (3) $\{A, A, A, B\}$ のとなる A, B の選び方は ${}_N P_2$ 通りあり, これらを取り出される順序は 4 通りあるから, 求める確率は

$$\frac{{}_N P_2 \cdot 4}{N^4} = \frac{4(N-1)}{N^3}$$

- (4) 3 種類の数を取り出される確率であるから

$$\frac{{}_N C_3 \{3^4 - {}_3 C_2 (2^4 - 2) - {}_3 C_1\}}{N^4} = \frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}$$

補足 2 種類の数を取り出される確率は ⁴

$$\frac{{}_N C_2 (2^4 - 2)}{N^4} = \frac{7(N-1)}{N^3}$$



⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2013.pdf 1 (2)

2 (1) $a_3 = a + 2d = 18$, $S_2 = a + (a + d) = 2a + d = 18$ より $\mathbf{a = d = 6}$

(2) (1) の結果から $a_n = 6 + (n - 1) \cdot 6 = 6n$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 6k = 6 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \mathbf{3n(n+1)}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n 3k(k+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1)\{(k+2) - (k-1)\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} = n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} U_n &= T_n - 4S_n + 5a_n \\ &= n(n+1)(n+2) - 4 \cdot 3n(n+1) + 5 \cdot 6n \\ &= n\{(n+1)(n+2) - 12(n+1) + 30\} \\ &= n(n-4)(n-5) \end{aligned} \quad (*)$$

(*) より, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} U_n - U_{n-1} &= (T_n - T_{n-1}) - 4(S_n - S_{n-1}) + 5(a_n - a_{n-1}) \\ &= S_n - 4a_n + 5 \cdot 6 \\ &= 3n(n+1) - 4 \cdot 6n + 30 \\ &= 3(n-2)(n-5) \end{aligned}$$

したがって $U_1 = U_2 > U_3 > U_4 = U_5 < U_6 < \dots$

よって U_n が最小となるのは $\mathbf{n = 4, 5}$ のとき $\mathbf{U_4 = U_5 = 0}$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \sum_{k=1}^n T_k &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)
 \end{aligned}$$

$$U_n = T_n - 4S_n + 5a_n \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n U_k &= \sum_{k=1}^n T_k - 4T_n + 5S_n \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) - 4n(n+1)(n+2) + 5 \cdot 3n(n+1) \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 - 11n + 34)
 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad V = \sum_{k=1}^7 U_k = \frac{1}{4} \cdot 7 \cdot 8(7^2 - 11 \cdot 7 + 34) = 84$$

$$f(x) = 3x^2 + cx + 36 \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^c f(x) dx &= \int_0^c (3x^2 + cx + 36) dx \\
 &= \left[x^3 + \frac{cx^2}{2} + 36x \right]_0^c = \frac{3}{2}c^3 + 36c
 \end{aligned}$$

$$\int_0^c f(x) dx = V \text{ であるから}$$

$$\frac{3}{2}c^3 + 36c = 87 \quad \text{ゆえに} \quad (c-2)(c^2 + 2c + 28) = 0$$

$$c \text{ は実数であるから} \quad \mathbf{c = 2}$$



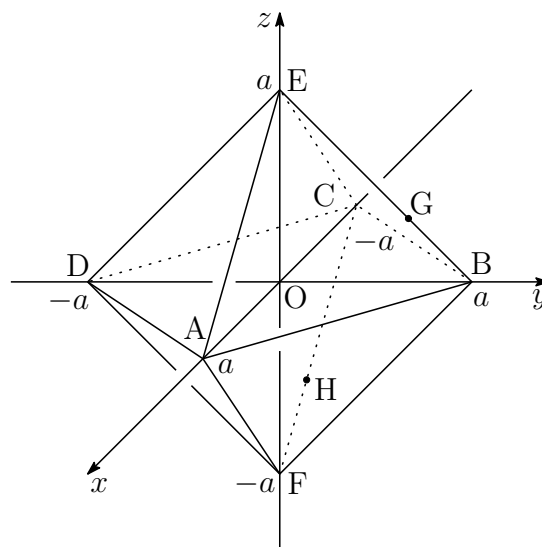
3 (1) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおく.

O を原点とする座標空間に 6 点

$$\begin{aligned} A(a, 0, 0), \quad B(0, a, 0), \\ C(-a, 0, 0), \quad D(0, -a, 0), \\ E(0, 0, a), \quad F(0, 0, -a) \end{aligned}$$

をとると

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \overrightarrow{AB} = (-a, a, 0), \\ \vec{d} &= \overrightarrow{AD} = (-a, -a, 0), \\ \vec{e} &= \overrightarrow{AE} = (-a, 0, a) \end{aligned}$$



$$\text{したがって} \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{e} = a^2 = \frac{1}{2}, \quad \vec{d} \cdot \vec{e} = a^2 = \frac{1}{2}$$

(2) $\overrightarrow{AF} = (-a, 0, -a)$, $\overrightarrow{AF} = p\vec{b} + q\vec{d} + r\vec{e}$ より

$$\begin{aligned} (-a, 0, -a) &= p(-a, a, 0) + q(-a, -a, 0) + r(-a, 0, a) \\ a(-1, 0, -1) &= a(-p - q - r, p - q, r) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad -p - q - r = -1, \quad p - q = 0, \quad r = -1$$

$$\text{これを解いて} \quad p = 1, \quad q = 1, \quad r = -1$$

(3) G は辺 BE を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}(0, a, 0) + \frac{1}{3}(0, 0, a) = \frac{a}{3}(0, 2, 1)$$

H は辺 CF を $t : 1 - t$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= (1 - t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OF} = (1 - t)(-a, 0, 0) + t(0, 0, -a) \\ &= a(t - 1, 0, -t) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} \\
 &= \frac{a}{3}(0, 2, 1) - a(1, 0, 0) = \frac{a}{3}(-3, 2, 1) \\
 \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} \\
 &= a(t-1, 0, -t) - a(1, 0, 0) = a(t-2, 0, -t) \\
 |\overrightarrow{AG}|^2 &= \frac{a^2}{9}(9+4+1) = \frac{7}{9} \\
 |\overrightarrow{AH}|^2 &= a^2\{(t-2)^2 + t^2\} = t^2 - 2t + 2 \\
 \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} &= \frac{a^2}{3}\{-3(t-2) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-t)\} = \frac{1}{3}(3-2t)
 \end{aligned}$$

$\triangle AGH$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2 |\overrightarrow{AH}|^2 - (\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{9}(t^2 - 2t + 2) - \frac{1}{9}(3-2t)^2} \\
 &= \frac{1}{6} \sqrt{7(t^2 - 2t + 2) - (3-2t)^2} \\
 &= \frac{1}{6} \sqrt{3t^2 - 2t + 5} \\
 &= \frac{1}{6} \sqrt{3 \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}
 \end{aligned}$$

$0 < t < 1$ より, $t = \frac{1}{3}$ のとき, S は最小値 $\frac{1}{6} \sqrt{\frac{14}{3}} = \frac{\sqrt{42}}{18}$ をとる. ■

4 (1) $y = ax(x-2)$ を微分すると $y' = 2a(x-1)$

$x = 2$ のとき, $y' = -2$ であるから

$$2a = -2 \quad \text{これを解いて} \quad a = -1$$

(2) $C_1: y = -x(x-2)$, $C_2: y = b(x+c)^2$ の方程式から y を消去すると

$$-x(x-2) = b(x+c)^2$$

整理すると $(b+1)x^2 + 2(bc-1)x + bc^2 = 0$ (*)

この方程式 (*) は, 重解をもつから

$$D/4 = (bc-1)^2 - (b+1)bc^2 = 0$$

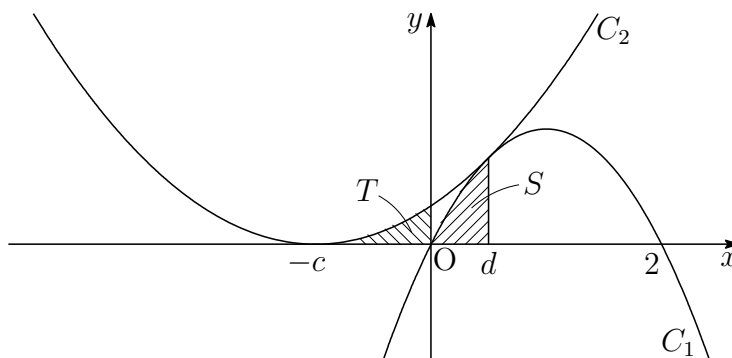
ゆえに $b(c^2+2c) = 1$ b について解くと $b = \frac{1}{c^2+2c}$

2次方程式 (*) の重解が d であるから

$$d = -\frac{2(bc-1)}{2(b+1)} = \frac{1-bc}{b+1} = \frac{1-\frac{c}{c^2+2c}}{\frac{1}{c^2+2c}+1} = \frac{c(c+1)}{(c+1)^2} = \frac{c}{c+1}$$

(3) $c > 0$ より, $0 < d < 1$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^d \{-x(x-2)\} dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^d = \frac{1}{3}d^2(3-d) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{c}{c+1} \right)^2 \left(3 - \frac{c}{c+1} \right) = \frac{c^2(2c+3)}{3(c+1)^3} \end{aligned}$$



(4) 求める面積 T は

$$\begin{aligned} T &= \int_{-c}^0 b(x+c)^2 dx = \left[\frac{1}{3}b(x+c)^3 \right]_{-c}^0 = \frac{1}{3}bc^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{c^2+2c} \cdot c^3 = \frac{\mathbf{c^2}}{\mathbf{3(c+2)}} \end{aligned}$$

(5) $8S = 15T$ に (3), (4) の結果を代入すると

$$\frac{8c^2(2c+3)}{3(c+1)^2} = \frac{15c^2}{3(c+2)}$$

$$\text{整理すると} \quad 15c^3 + 29c^2 - 11c - 33 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (c-1)(15c^2 + 44c + 33) = 0$$

$$c > 0 \text{ であるから} \quad \mathbf{c = 1}$$



9.24 2024年(120分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 A, B, C, D, Eの5人が、それぞれゲーム α とゲーム β の2種類のゲームを行った. ゲーム α の得点を x , ゲーム β の得点を y で表す. 下の表はそれぞれのゲームにおける得点である. ただし, a, b は整数である. なお, 得点が負になることもあり得る.

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点 x の平均値は7であるとし, ゲーム β の得点 y の平均値を m とする. 次の問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
 - (2) p, q は実数で, $p \neq 0$ とする. ゲーム β の得点 y を $z = py + q$ により変換し, 新たな変数 z を作成する. z の分散を s_z^2 , 二つの変数 x, z の共分散を s_{xz} とする. このとき, s_z^2 と s_{xz} を p, q, m のうちの必要なものを用いて表せ. ただし, 変数 x と z の共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である.
 - (3) 変数 x と(2)で作った変数 z の相関係数が $\frac{3}{4}$ であるとき, m と b の値を求めよ. また, p が正であるか負であるかを答えよ.
- 2 実数 t および $0 < a < b$ を満たす実数 a, b に対し,

$$f(t) = \int_a^b (x - at)(x - bt) dx$$

とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $f(0)$ を a と b を用いて表せ.
- (2) $14f(1) + f(0) = 0$ が成り立つとする. このとき, $\frac{b}{a}$ の値を求めよ.
- (3) $14f(1) + f(0) = 0$ が成り立つとする. t の関数 $y = f(t) - f(0)$ の最小値が -6 となるとき, a の値を求めよ.

- 3 座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 2, -1)$ に対し, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ.
- (2) 点 O , A , B を通る平面を α とする. 点 C から平面 α に下した垂線と平面 α の交点を M とする. 点 M の座標を求めよ.
- (3) 点 M を (2) で定めた点とする. 点 D を直線 CM 上の点であって

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$$

となるものとする. ただし, 点 D は点 C とは異なる点である. このとき, 点 D の座標を求めよ.

- (4) 点 D を (3) で定めた点とする. 三角形 CAD の面積 S を求めよ.

- 4 a と r を正の実数とする. 座標平面上の放物線 $y = x^2$ と, 中心 $(0, a)$, 半径 r の円 C を考える. 次の問いに答えよ.

- (1) $a = r$ とする. このとき, 放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点が一つのみになるような r の値の範囲を求めよ.
- (2) 円 C が不等式 $y > 0$ の表す領域に含まれるための必要十分条件を a と r を用いて表せ.
- (3) a と r は (2) で求めた条件を満たすとする. このとき, 放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点がちょうど二つになるような (r, a) の範囲を ra 平面に図示せよ.
- (4) 正の実数 s に対し, 中心 $(0, a + r + s)$, 半径 s の円を C' とする. 円 C と円 C' は次の条件 (i) と (ii) を満たすとする.
 - (i) 円 C は不等式 $y > 0$ の表す領域に含まれ, さらに放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点はちょうど二つである.
 - (ii) 放物線 $y = x^2$ と円 C' との共有点はちょうど二つである.
 このとき, s を r を用いて表せ.

解答例

- 1** (1) 得点 x の平均が7であるから

$$\frac{7+6+8+a+4}{5} = 7 \quad \text{これを解いて} \quad a = 10$$

- (2) 得点 y の平均値が m であるから

$$\frac{0+(-4)+(-1)+2+b}{5} = m \quad \text{ゆえに} \quad b = 5m + 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

したがって、得点 y の分散 s_y^2 は

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{0^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 2^2 + (5m+3)^2}{5} - m^2 \\ &= 4m^2 + 6m + 6 \end{aligned}$$

$$z = py + q \text{ より } s_z^2 = p^2 s_y^2 = p^2(4m^2 + 6m + 6)$$

x と y の共分散 s_{xy} は

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{7 \cdot 0 + 6 \cdot (-4) + 8 \cdot (-1) + 10 \cdot 2 + 4 \cdot (5m+3)}{5} - 7 \cdot m \\ &= -3m \end{aligned}$$

$$z = py + q \text{ より } s_{xz} = p s_{xy} = p \cdot (-3m) = -3pm$$

- (3) 得点 x の分散 s_x^2 は

$$s_x^2 = \frac{(7-7)^2 + (6-7)^2 + (8-7)^2 + (10-7)^2 + (4-7)^2}{5} = 4$$

$$s_x = 2, \quad s_z = |p|\sqrt{4m^2 + 6m + 6}, \quad \frac{s_{xz}}{s_x s_z} = \frac{3}{4} \text{ より}$$

$$\frac{-3pm}{2 \cdot |p|\sqrt{4m^2 + 6m + 6}} = \frac{3}{4} \quad (*)$$

上式の辺々を平方することにより

$$\frac{9m^2}{4(4m^2 + 6m + 6)} = \frac{9}{16} \quad \text{これを解いて} \quad m = -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入して整理すると } \frac{p}{|p|} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p > 0$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると } b = 3 \cdot (-1) + 5 = 2$$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad f(0) = \int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$(2) \quad f(1) = \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

上式および (1) の結果を $14f(1) + f(0) = 0$ に代入すると ($0 < a < b$)

$$-\frac{7}{3}(b-a)^3 + \frac{b^3 - a^3}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -7(b-a)^2 + b^2 + ab + a^2 = 0$$

$$\text{整理すると} \quad 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (b-2a)(2b-a) = 0$$

$$b > a > 0 \text{ より } b = 2a \quad \text{よって} \quad \frac{b}{a} = 2$$

(3) 与えられた条件を満たすとき, (2) の結果から $b = 2a$ であるから

$$f(0) = \frac{(2a)^3 - a^3}{3} = \frac{7}{3}a^3,$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_a^{2a} (x-at)(x-2at) dx = \int_a^{2a} (x^2 - 3atx + 2a^2t^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}atx^2 + 2a^2t^2x \right]_a^{2a} = 2a^3t^2 - \frac{9}{2}a^3t + \frac{7}{3}a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad y &= f(t) - f(0) = 2a^3t^2 - \frac{9}{2}a^3t \\ &= 2a^3 \left(t - \frac{9}{8} \right)^2 - \frac{81}{32}a^3 \end{aligned}$$

y の最小値が -6 であるから, $2a^3 > 0$ に注意して

$$-\frac{81}{32}a^3 = -6 \quad \text{ゆえに} \quad a^3 = \frac{64}{27} \quad \text{よって} \quad a = \frac{4}{3}$$



- 3 (1) $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, -1)$ であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 3$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 1$$

- (2) $\vec{OA} \times \vec{OB} = (1, -1, 1)$ より, 平面 α 上の点を $P(x, y, z)$ とすると,
 $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OP} = 0$ より, 平面 α の方程式は

$$x - y + z = 0$$

点 $C(1, 2, -1)$ を通り, 方向ベクトルが $\vec{OA} \times \vec{OB}$ の直線の方程式は

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} = t \quad (t \text{ は媒介変数})$$

これから $x = t + 1$, $y = -t + 2$, $z = t - 1 \quad \dots (*)$

(*) を平面 α の方程式に代入すると

$$(t+1) - (-t+2) + (t-1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3}$$

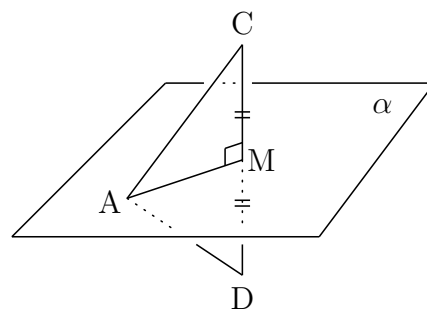
これを (*) に代入して $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$ よって $M\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

- (3) 条件から, M は CD の中点であるから

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= 2\vec{OM} - \vec{OC} \\ &= 2\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (1, 2, -1) \\ &= \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad D\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$



- (4) $\vec{AM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\vec{CD} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ より

$$S = \frac{1}{2} |\vec{CD}| |\vec{AM}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{6} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

■

- 4 (1) 放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$ と点 $R(0, r)$ について、関数

$$\begin{aligned} f(t) &= RP^2 - r^2 = t^2 + (t^2 - r)^2 - r^2 \\ &= t^4 - (2r - 1)t^2 = t^2\{t^2 - (2r - 1)\} \end{aligned}$$

を考えると、条件を満たすとき、 $f(t) \geq 0$ で、等号が成立するのが $t = 0$ のときに限られるから

$$2r - 1 \leq 0 \quad \text{よって} \quad 0 < r \leq \frac{1}{2}$$

- (2) 円 C の方程式は $x^2 + (y - a)^2 = r^2$

C 上の点の y 座標がとり得る値の範囲は $(y - a)^2 \leq r^2$

$$|y - a| \leq r \quad \text{ゆえに} \quad a - r \leq y \leq a + r$$

領域 $y > 0$ に含まれるから $a - r > 0$ よって $a > r$

- (3) 放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$ と点 $A(0, a)$ について、関数

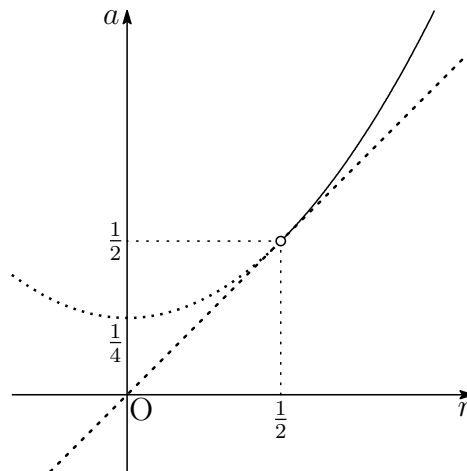
$$\begin{aligned} g(t) &= AP^2 - r^2 = t^2 + (t^2 - a)^2 - r^2 \\ &= t^4 - (2a - 1)t^2 + a^2 - r^2 = \left(t^2 - \frac{2a - 1}{2}\right)^2 + a - r^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

を考えると、条件を満たすとき、 $g(t) \geq 0$ で、等号が成立するときの t の値が 2 つだけ存在するから

$$\frac{2a - 1}{2} > 0, \quad a - r^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a > \frac{1}{2}, \quad a = r^2 + \frac{1}{4}$$

- (2) の条件と合わせて $a > \frac{1}{2}$, $a > r$, $a = r^2 + \frac{1}{4}$ ($r > 0$)

よって、 (r, a) の範囲は下の図の実線部分である (○は含まない).



(4) (3)の結果から, C について $a = r^2 + \frac{1}{4}$

これを C' について適用すると $a + r + s = s^2 + \frac{1}{4}$

上の2式から, a を消去すると

$$r + s = s^2 - r^2 \quad \text{ゆえに} \quad (r + s)(r - s + 1) = 0$$

$r + s > 0$ より $r - s + 1 = 0$ よって $s = r + 1$



第 10 章 九州大学

出題分野 (2011-2024) 120 分

◀	九州大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	数と式							2							
	2 次関数														
	図形と計量				3										
	データの分析														
II	式と証明									4					
	複素数と方程式										3		3		
	図形と方程式			2・4	1			2				1・2			
	三角関数				3									2	
	指数関数と対数関数														
	微分法と積分法	1	2	4	1	1	1	1	1	2	1	3	1・4	1	1
A	場合の数と確率	4	4	3	4*	3	3	3	4	1	4			4	4
	整数の性質		3		2	4	4	4	2		3				3
	図形の性質				3		2								
B	平面上のベクトル	3							3					3	2
	空間のベクトル		1	1		2				3	2		2		
	数列	2	4									4			
	確率分布と統計														

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

10.11 2011年(120分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き、交点を H とする。ただし、 $t > 1$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) H の座標を t を用いて表せ。
- (2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y = x$ との交点の座標を R とするとき、三角形 PRH の面積を t を用いて表せ。
- (3) $x \geq 1$ の範囲において、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき、 S_1 を t を用いて表せ。
- (4) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ であるとき、 t の値を求めよ。

- 2 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - a_n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

をみたしているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき、 a_{10} および a_{11} を求めよ。
- (2) $\tan \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。
- (3) $a_1 = \tan \frac{\pi}{7}$ とする。 $a_k = a_1$ をみたす 2 以上の自然数 k で最小のものを求めよ。

- 3 平面上に直角三角形 ABC があり、その斜辺 BC の長さを 2 とする。また、点 O は $4\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{0}$ をみたしているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 辺 BC の中点を M とするとき、点 A は線分 OM の中点となることを示せ。
- (2) $|\vec{OB}|^2 + |\vec{OC}|^2 = 10$ となることを示せ。
- (3) $4|\vec{PA}|^2 - |\vec{PB}|^2 - |\vec{PC}|^2 = -4$ をみたす点を P とするとき、 $|\vec{OP}|$ の値を求めよ。

- 4 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ、以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば、 i のカードと j のカードを入れかえる。その後、2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ、上の操作を 2 回繰り返した後のカードについて、以下の問いに答えよ。

- (1) カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。
- (2) カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。
- (3) 左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。
- (4) 左端のカードの数字の期待値を求めよ。

解答例

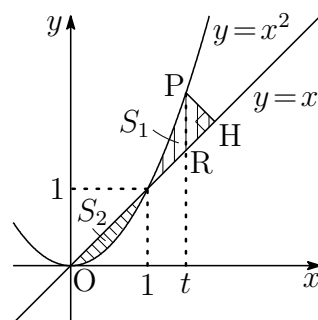
- 1 (1) 直線 PH は、点 $P(t, t^2)$ を通り、直線 $y = x \cdots \textcircled{1}$ に垂直な直線であるから

$$y - t^2 = -(x - t)$$

$$\text{すなわち } y = -x + t^2 + t \cdots \textcircled{2}$$

H の座標は $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を解いて

$$\left(\frac{t^2 + t}{2}, \frac{t^2 + t}{2} \right)$$



- (2) $R(t, t)$ であるから

$$\triangle PRH = \frac{1}{2}PH^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{PR}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 - t}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{4}(t^4 - 2t^3 + t^2)$$

- (3) (2) の結果を用いて、求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^t (x^2 - x) dx + \triangle PRH \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^t + \frac{1}{4}(t^4 - 2t^3 + t^2) \\ &= \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$(4) \quad S_2 = \int_0^1 (x - x^2) dx = - \int_0^1 x(x - 1) dx = \frac{1}{6}$$

$S_1 = S_2$ のとき、上式および (3) の結果より

$$\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{ゆえに} \quad t^2(3t^2 - 2t - 3) = 0$$

$$t > 1 \text{ に注意して} \quad t = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$$



2 (1) 与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2a_1}{1-a_1^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3} \\ a_3 &= \frac{2a_2}{1-a_2^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3} \\ a_4 &= \frac{2a_3}{1-a_3^2} = \frac{2 \cdot (-\sqrt{3})}{1 - (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって, a_2 以降は, 交互に $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ の繰り返しであるから

$$a_{10} = \sqrt{3}, \quad a_{11} = -\sqrt{3}$$

$$(2) \quad \tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$(3) \quad a_n = \tan \theta_n \text{ とおくと } a_{n+1} = \frac{2 \tan \theta_n}{1 - \tan^2 \theta_n} = \tan 2\theta_n$$

$$a_1 = \tan \frac{\pi}{7} \text{ より}$$

$$a_2 = \tan \frac{2}{7}\pi, \quad a_3 = \tan \frac{4}{7}\pi, \quad a_4 = \tan \frac{8}{7}\pi = \tan \frac{\pi}{7}$$

よって, $a_k = a_1$ をみたす最小の自然数 k は 4

■

3 (1) $4\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{0} \dots \textcircled{1}$ より $\vec{OA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$

M は BC の中点であるから $\vec{OM} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$

上の2式より $\vec{OA} = \frac{1}{2} \vec{OM}$

よって、点 A は OM の中点である。

(2) $\angle A = 90^\circ$ であるから、(1) の結果から、A は BC を直径とする円周上の点である。

$\vec{a} = \vec{AM}$, $\vec{b} = \vec{MB}$ とおくと

$$\vec{OB} = 2\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{OC} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

したがって

$$|\vec{OB}|^2 + |\vec{OC}|^2 = |2\vec{a} + \vec{b}|^2 + |2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 8|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$$

$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$ であるから $|\vec{OB}|^2 + |\vec{OC}|^2 = 10$

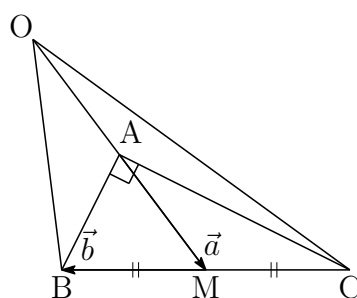
(3) $4|\vec{PA}|^2 - |\vec{PB}|^2 - |\vec{PC}|^2 = -4$ より

$$4|\vec{OA} - \vec{OP}|^2 - |\vec{OB} - \vec{OP}|^2 - |\vec{OC} - \vec{OP}|^2 = -4$$

$$2|\vec{OP}|^2 - 2(4\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}) \cdot \vec{OP} + 4|\vec{OA}|^2 - (|\vec{OB}|^2 + |\vec{OC}|^2) = -4$$

上式に $\textcircled{1}$, $|\vec{OA}| = 1$, および (2) の結果を代入し整理すると

$$|\vec{OP}|^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{OP}| = 1$$



- 4 (1) 1 回の操作による球の取り出し方の総数は ${}_4C_2 = 6$ (通り)
 カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶのは, 2 回とも同じ球の組合せであるから, 求める確率は

$$\frac{6 \times 1}{6^2} = \frac{1}{6}$$

- (2) カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶのは, 1 回目に $\{1, 4\}$, 2 回目 $\{2, 3\}$ の球を取り出す場合と 1 回目に $\{2, 3\}$, 2 回目に $\{1, 4\}$ を取り出す場合の 2 通りであるから, 求める確率は

$$\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

- (3) 左端のカードの数字が 1 になるのは, 次の i), ii) の場合.

- i) 1, 2 回目ともに $\{1, k\}$ ($k = 2, 3, 4$) を取り出す確率は

$$\frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

- ii) 1, 2 回目ともに 1 以外の球を取り出す確率は

$$\frac{({}_3C_2)^2}{6^2} = \frac{1}{4}$$

- i) と ii) は互いに排反であるから, 求める確率は $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

- (4) 左端が X となる確率を $P(X)$ とすると, (3) の結果より $P(1) = \frac{1}{3}$
 左端に 2, 3, 4 のカードが並ぶ確率は等しいから

$$P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1 - P(1)}{3} = \frac{2}{9}$$

よって, 求める期待値は $\sum_{k=1}^4 kP(k) = 1 \cdot \frac{1}{3} + (2 + 3 + 4) \cdot \frac{2}{9} = \frac{7}{3}$ ■

10.12 2012年(120分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 原点を O とする座標空間に、3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 2)$, $C(-2, 1, 3)$ がある。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ において、 $\angle B$ は $\frac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ。
- (2) 点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする。
点 H の座標を求めよ。
- (3) $\triangle OAH$ の面積を求めよ。

- 2 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $t \geq 0$ のとき、曲線 C は傾きが t である接線を2本持つことを示せ。
- (2) (1) において、傾きが t である2本の接線と曲線 C との接点を、それぞれ $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ とする (ただし $p < q$)。このとき、点 P と点 Q は点 $A(-1, 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。
- (3) $t \geq 0$ のとき、2点 P, Q の間の距離の最小値を求めよ。また、最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。

- 3 100人の団体がある区間を列車で移動する。このとき、乗車券が7枚入った480円のセットAと、乗車券が3枚入った220円のセットBを購入して、利用することにした。以下の問いに答えよ。

- (1) x が0以上の整数であるとき、次のことを示せ。

$$\frac{1}{3}(100 - 7x) \text{ は、} x \text{ を3で割ったときの余りが1の場合に整数であり、}$$

それ以外の場合は整数ではない。

- (2) 購入した乗車券は、余らせずすべて利用するものとする。このとき、セットAとセットBの購入の仕方をすべて挙げよ。
- (3) 購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき、Aのみ、あるいはBのみを購入する場合も含めて、購入金額が最も低くなるのは、A, Bをそれぞれ何セットずつ購入するときか。またそのときの購入金額はいくらか。

4 いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき、次の試行 T を考える。

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ、その後、
箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個、箱 B に白玉が 2 個入っているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 試行 T を 1 回行ったときに、箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (2) 試行 T を 2 回行ったときに、箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (3) 試行 T を 3 回行ったときに、箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

解答例

- 1 (1) $\overrightarrow{BA} = (1, 0, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-2, 1, 1)$ であるから

$$\cos \angle B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 1}{\sqrt{5} \sqrt{6}} = \frac{-4}{\sqrt{30}} < 0$$

$$\text{よって} \quad \angle B > \frac{\pi}{2}$$

- (2) 点 H は BC 上の点であるから、実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BC} = (0, 0, 2) + t(-2, 1, 1) = (-2t, t, t+2)$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = (-2t, t, t+2) - (1, 0, 0) = (-2t-1, t, t+2)$$

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ より, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ であるから

$$(-2t-1) \cdot (-2) + t \cdot 1 + (t+2) \cdot 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -\frac{2}{3}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OH} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right) \quad \text{よって} \quad H \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

- (3) $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$ および (2) の結果から

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, \quad |\overrightarrow{OH}| = \frac{2}{3} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 2, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{4}{3}$$

よって, $\triangle OAH$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle OAH &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OH}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1^2 \cdot 2^2 - \left(\frac{4}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$



- 2 (1) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$ より, C 上の点 $(u, f(u))$ における接線の傾きが t であるとき, u は方程式

$$3x^2 + 6x + 1 = t \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 + 6x + 1 - t = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の解である. この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = 3^2 - 3(1 - t) = 3t + 6$$

$t \geq 0$ のとき, $D > 0$ であるから, $\textcircled{1}$ は異なる 2 つの実数解をもつ.

よって, C は傾きが t ($t \geq 0$) である接線を 2 本もつ.

- (2) p, q は 2 次方程式 $\textcircled{1}$ の解であるから, 解と係数の関係により

$$p + q = -2, \quad pq = \frac{1-t}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(p) + f(q) &= (p^3 + 3p^2 + p - 1) + (q^3 + 3q^2 + q - 1) \\ &= p^3 + q^3 + 3(p^2 + q^2) + p + q - 2 \\ &= (p + q)^3 - 3pq(p + q) + 3\{(p + q)^2 - 2pq\} \\ &\quad + (p + q) - 2 \\ &= (-2)^3 - 3 \times \frac{1-t}{3} \times 2 + 3 \left\{ (-2)^2 - 2 \times \frac{1-t}{3} \right\} \\ &\quad + (-2) - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに $\frac{p+q}{2} = -1, \quad \frac{f(p)+f(q)}{2} = 0$

よって, 2 点 $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ は点 $A(-1, 0)$ に関して対称である.

(3) $PQ^2 = (p - q)^2 + \{f(p) - f(q)\}^2$ であるから, まず

$$\begin{aligned}
 f(p) - f(q) &= (p^3 + 3p^2 + p - 1) - (q^3 + 3q^2 + q - 1) \\
 &= p^3 - q^3 + 3(p^2 - q^2) + p - q \\
 &= (p - q)\{p^2 + pq + q^2 + 3(p + q) + 1\} \\
 &= (p - q)\{(p + q)^2 - pq + 3(p + q) + 1\} \\
 &= (p - q)\left\{(-2)^2 - \frac{1-t}{3} + 3(-2) + 1\right\} \\
 &= \frac{1}{3}(t - 4)(p - q)
 \end{aligned}$$

次に $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = (-2)^2 - 4 \times \frac{1-t}{3} = \frac{4}{3}(t + 2)$
したがって

$$\begin{aligned}
 PQ^2 &= (p - q)^2 + \{f(p) - f(q)\}^2 \\
 &= (p - q)^2 + \frac{1}{9}(t - 4)^2(p - q)^2 \\
 &= (p - q)^2 \left\{1 + \frac{1}{9}(t - 4)^2\right\} \\
 &= \frac{4}{3}(t + 2) \left\{1 + \frac{1}{9}(t - 4)^2\right\} = \frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50)
 \end{aligned}$$

$g(t) = \frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50)$ ($t \geq 0$) の最小値を求めればよいから

$$g'(t) = \frac{4}{9}(t - 1)(t - 3)$$

t	0	...	1	...	3	...
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$	$\frac{200}{27}$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$\frac{200}{27}$	$\nearrow$

上の増減表により, $g(t)$ は, $t = 0, 3$ で最小値 $\frac{200}{27}$ をとる.

ゆえに, PQ の最小値は $\frac{10\sqrt{6}}{9}$ である.

p, q ($p < q$) は方程式 ① の解であるから
 $t = 0$ のとき, $3x^2 + 6x + 1 = 0$ を解いて

$$p = \frac{-3 - \sqrt{6}}{3}, \quad q = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$$

$t = 3$ のとき, $3x^2 + 6x - 2 = 0$ を解いて

$$p = \frac{-3 - \sqrt{15}}{3}, \quad q = \frac{-3 + \sqrt{15}}{3}$$

補足

$f(x)$ を $3x^2+6x+1-t$ で割った商と余りは, それぞれ $\frac{1}{3}(x+1)$, $\frac{1}{3}(t-4)(x+1)$ であるから

$$f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(3x^2+6x+1-t) + \frac{1}{3}(t-4)(x+1)$$

p, q は方程式 $3x^2+6x+1-t=0$ の解であるから

$$f(p) = \frac{1}{3}(t-4)(p+1), \quad f(q) = \frac{1}{3}(t-4)(q+1)$$

これを次の計算に用いることができる.

$$(2) \quad f(p) + f(q) = \frac{1}{3}(t-4)(p+q+2)$$

解と係数の関係により, $p+q=-2$ であるから, $f(p)+f(q)=0$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{p+q}{2} = -1, \quad \frac{f(p)+f(q)}{2} = 0$$

よって, 2 点 $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ は点 $A(-1, 0)$ に関して対称である.

$$(3) \quad f(p) - f(q) = \frac{1}{3}(t-4)(p-q)$$

$$\text{次に} \quad (p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = (-2)^2 - 4 \times \frac{1-t}{3} = \frac{4}{3}(t+2)$$

したがって

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (p-q)^2 + \{f(p) - f(q)\}^2 \\ &= (p-q)^2 + \frac{1}{9}(t-4)^2(p-q)^2 \\ &= (p-q)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{9}(t-4)^2 \right\} \\ &= \frac{4}{3}(t+2) \left\{ 1 + \frac{1}{9}(t-4)^2 \right\} = \frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50) \end{aligned}$$

$$g(t) = \frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50) \quad (t \geq 0) \text{ の最小値を求めればよい.} \quad \blacksquare$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \frac{1}{3}(100 - 7x) = \frac{1}{3}(99 - 6x + 1 - x) = 33 - 2x - \frac{x-1}{3}$$

上式が整数であるのは、 $x-1$ が3の倍数、すなわち x を3で割ったときの余りが1の場合に限る。

(2) A を x セット、B を y セット、合計100枚の乗車券を購入すると

$$7x + 3y = 100 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{3}(100 - 7x)$$

ここで、 y は整数であるから、(1)の結果より、 k を0以上の整数とすると、 $x = 3k + 1 \cdots \textcircled{1}$ とおける。このとき

$$y = \frac{1}{3}\{100 - 7(3k + 1)\} = 31 - 7k \cdots \textcircled{2}$$

y は0以上の整数であるから $31 - 7k \geq 0$ ゆえに $k \leq 4$
 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ であるから $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より、A, Bそれぞれの組合せは

$$(A, B) = (1, 31), (4, 24), (7, 17), (10, 10), (13, 3)$$

- (3) セット A とセット B を組み合わせて購入金額が最も低くなるのは、同じ購入枚数であれば、セット A を最大に組み合せた場合である．A だけで 15 セット (乗車券 105 枚) 購入した場合は

$$480 \times 15 = 7200 \text{ (円)}$$

100 枚以上 104 枚以下の枚数の乗車券を A と B で組み合わせる場合、B セットが 3 枚入りであるから

$$100 + 3 = 103, \quad 101 + 3 = 104$$

したがって、乗車券を 100 枚、101 枚、102 枚購入する場合について調べればよい．

- i) 乗車券を 100 枚購入する場合、(2) の結果から、A を 13 セット、B を 3 セット購入するとき、購入金額は最小になり、その金額は

$$480 \times 13 + 220 \times 3 = 6900 \text{ (円)}$$

- ii) 乗車券を 101 枚購入する場合、A を x_1 セット、B を y_1 セット購入するとき

$$7x_1 + 3y_1 = 101 \quad \text{ゆえに} \quad y_1 = \frac{1}{3}(101 - 7x_1) = 33 - 2x_1 - \frac{x_1 - 2}{3}$$

x_1 は 0 以上の整数 k_1 を用いて、 $x_1 = 3k_1 + 2$ とおけるので、
 $y_1 = 29 - 7k_1$ となり、 y_1 は 0 以上の整数であるから、 $0 \leq k_1 \leq 4$
 購入金額が最小となるのは、 $k_1 = 4$ 、すなわち A を 14 セット、B を 1 セット購入するときで、その金額は

$$480 \times 14 + 220 \times 1 = 6940 \text{ (円)}$$

- iii) 乗車券を 102 枚購入する場合、A を x_2 セット、B を y_2 セット購入するとき

$$7x_2 + 3y_2 = 102 \quad \text{ゆえに} \quad y_2 = \frac{1}{3}(102 - 7x_2) = 34 - 2x_2 - \frac{x_2}{3}$$

x_2 は 0 以上の整数 k_2 を用いて、 $x_2 = 3k_2$ とおけるので、
 $y_2 = 34 - 7k_2$ となり、 y_2 は 0 以上の整数であるから、 $0 \leq k_2 \leq 4$
 購入金額が最小となるのは、 $k_2 = 4$ 、すなわち A を 12 セット、B を 6 セット購入するときで、その金額は

$$480 \times 12 + 220 \times 6 = 7080 \text{ (円)}$$

以上のことから、A を 13 セット、B を 3 セット購入したとき、購入金額は最小となり、その金額は 6900 円である．

補足

(2) d を整数とする. 整数 x, y を解とする次の1次不定方程式を考える.

$$7x + 3y = d \cdots (*)$$

$7x + 3y = 1$ の整数解の1つは $(x, y) = (1, -2)$ であるから,

$(*)$ の整数解の1つは $(x, y) = (d, -2d)$

$7x + 3y = 0$ の整数解は, 整数 k を用いて $(x, y) = (-3k, 7k)$

ゆえに, $(x, y) = (d - 3k, -2d + 7k)$ は $(*)$ の解である.

(x', y') が $(*)$ の解であるとする

$$7x' + 3y' = d \cdots (**)$$

$(*)$, $(**)$ より $7(x' - x) + 3(y' - y) = 0$

ゆえに, 整数 k' を用いて $x' - x = -3k'$, $y' - y = 7k'$

したがって $x' = d - 3(k + k')$, $y' = -2d + 7(k + k')$

よって, $(x, y) = (d - 3k, -2d + 7k)$ は $(*)$ の一般解である.

$d = 100$ とすると, $(*)$ の解は $(x, y) = (100 - 3k, -200 + 7k)$

このとき, $x \geq 0$, $y \geq 0$ であるから $29 \leq k \leq 33$

よって $(x, y) = (13, 3), (10, 10), (7, 17), (4, 24), (1, 31)$

(3) $(x, y) = (d - 3k, -2d + 7k)$ より, $x \geq 0$, $y \geq 0$ であるから, 購入金額は

$$480(d - 3k) + 220(-2d + 7k) = 40d + 100k \quad \left(\frac{2d}{7} \leq k \leq \frac{d}{3} \right)$$

購入金額が最小となるのは, d に対して, 最小の整数 k をとるときである.

$d \geq 100$ において購入金額が最小となるのは, $d = 100$ のとき, $k = 29$ で, その購入金額は 6900 円である. このとき, $x = 13$, $y = 3$ である. ■

- 4 (1) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると、箱 B には黒玉 2 個と白玉 2 個が入っている.

箱 A に黒玉が 1 個入っている (箱 B から白玉 2 個を取り出す) 確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

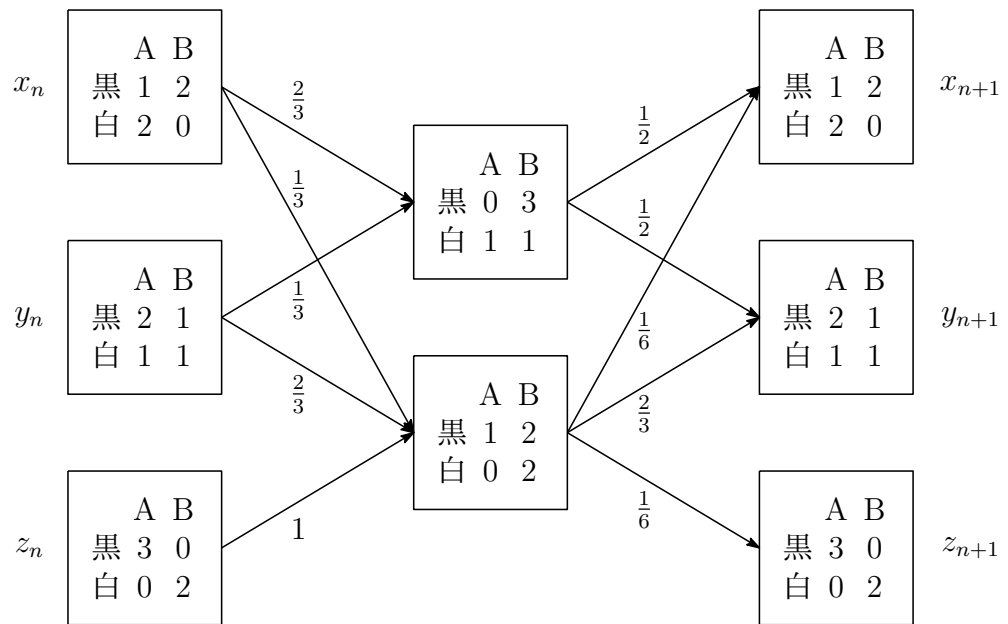
箱 A に黒玉が 2 個入っている (箱 B から黒玉 1 個と白玉 1 個を取り出す) 確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{{}_2C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$$

箱 A に黒玉が 3 個入っている (箱 B から黒玉 2 個を取り出す) 確率 p_3 は

$$p_3 = \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

- (2) 試行 T を n 回行ったとき、箱 A に黒玉が 1 個, 2 個, 3 個ある確率をそれぞれ x_n, y_n, z_n とすると



$$x_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \right) x_n + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \right) y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \right) x_n + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \right) y_n + 1 \times \frac{2}{3} z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} x_n + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$$x_1 = p_1, \quad y_1 = p_2, \quad z_1 = p_3 \text{ であるから } x_1 = \frac{1}{6}, \quad y_1 = \frac{2}{3}, \quad z_1 = \frac{1}{6}$$

$$x_{n+1} = \frac{7}{18}x_n + \frac{5}{18}y_n + \frac{1}{6}z_n$$

$$y_{n+1} = \frac{5}{9}x_n + \frac{11}{18}y_n + \frac{2}{3}z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{18}x_n + \frac{1}{9}y_n + \frac{1}{6}z_n$$

したがって

$$x_2 = \frac{7}{18}x_1 + \frac{5}{18}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{7}{18} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{18} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

$$y_2 = \frac{5}{9}x_1 + \frac{11}{18}y_1 + \frac{2}{3}z_1 = \frac{5}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{11}{18} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$$

$$z_2 = \frac{1}{18}x_1 + \frac{1}{9}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{1}{18} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

$q_1 = x_2, \quad q_2 = y_2, \quad q_3 = z_2$ であるから

$$q_1 = \frac{5}{18}, \quad q_2 = \frac{11}{18}, \quad q_3 = \frac{1}{9}$$

(3) 求める確率は z_3 であるから, (2) の結果より

$$z_3 = \frac{1}{18}x_2 + \frac{1}{9}y_2 + \frac{1}{6}z_2 = \frac{1}{18} \times \frac{5}{18} + \frac{1}{9} \times \frac{11}{18} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{11}{108}$$

補足

$x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ が x_n, y_n, z_n によって定まる (1 つ前の時点だけを考慮する).
このような確率過程をマルコフ連鎖 (Markov chain) という. ■

10.13 2013 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 一辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし、 $OP = AP = BP = CP$ をみたす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。辺 AP を $1:3$ に内分する点を D、辺 CP の中点を E、辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OE}$ を、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP}$ を用いて表せ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP}$ と t を用いて表せ。
- (3) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ の値を求めよ。
- (4) 直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき、 t の値および線分 OP の長さを求めよ。

- 2 座標平面上で、次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$x + 2y \leq 5, \quad 3x + y \leq 8, \quad -2x - y \leq 4, \quad -x - 4y \leq 7$$

点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき、 $x + y$ の値が最大となる点を Q とし、最小となる点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q および点 R の座標を求めよ。
- (2) $a > 0$ かつ $b > 0$ とする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき、 $ax + by$ が点 Q でのみ最大値をとり、点 R でのみ最小値をとるとする。このとき、 $\frac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ。

3 横一列に並んだ6枚の硬貨に対して，以下の操作Lと操作Rを考える。

L: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表 と並んだ状態で操作Lを行うときに，3の目が出た場合は，裏裏表表裏裏 となる。

以下，「最初の状態」とは硬貨が6枚とも表であることとする。

- (1) 最初の状態から操作Lを2回続けて行うとき，表が1枚となる確率を求めよ。
- (2) 最初の状態からL，Rの順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。
- (3) 最初の状態からL，R，Lの順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

4 座標平面上の円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 $y = x - 2$ は円 C に接することを示せ。また，接点の座標も求めよ。
- (2) 円 C と放物線 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ の共有点の座標をすべて求めよ。
- (3) 不等式 $y \geq \frac{1}{4}x^2 - 1$ の表す領域を D とする。また，不等式 $|x| + |y| \leq 2$ の表す領域を A とし，不等式 $(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$ の表す領域を B とする。そして，和集合 $A \cup B$ ，すなわち領域 A と領域 B をあわせた領域を E とする。このとき，領域 D と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を図示し，さらに，その面積を求めよ。

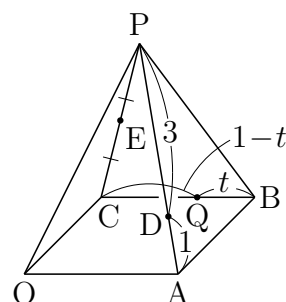
解答例

- 1 (1) D は線分 AP を 1 : 3 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}}{1+3} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$$

E は線分 CP の中点であるから

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$$



$$(2) \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OA}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \{\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OA}\} - \overrightarrow{OP} \\ &= (1-t)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

- (3) OP = AP であるから

$$|\overrightarrow{OP}| \cos \angle POA = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}| \cos \angle POA = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- (4) (3) と同様にして $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}$

$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{PQ}$ であるから

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{PQ} &= (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}) \cdot \{(1-t)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}\} \\ &= 3(1-t)|\overrightarrow{OA}|^2 + 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - (t+2)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} - |\overrightarrow{OP}|^2 \\ &= \frac{5}{2} - \frac{7}{2}t - |\overrightarrow{OP}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{PQ} &= (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}) \cdot \{(1-t)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}\} \\ &= (1-t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 + (1-t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} - |\overrightarrow{OP}|^2 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t - |\overrightarrow{OP}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } t = \frac{1}{3}, |\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{4}{3} \quad \text{すなわち } |\overrightarrow{OP}| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \blacksquare$$

- 2 (1) $x+2y=5 \cdots \textcircled{1}$, $3x+y=8 \cdots \textcircled{2}$, $-2x-y=4 \cdots \textcircled{3}$, $-x-4y=7 \cdots \textcircled{4}$

とおく. D の表す領域は, 図の斜線部分で, 境界線を含む. 直線 $x+y=k$ を l とする. l は傾き -1 の直線で, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の直線の傾きは, それぞれ $-\frac{1}{2}$, -3 であり,

$$-3 < -1 < -\frac{1}{2}$$

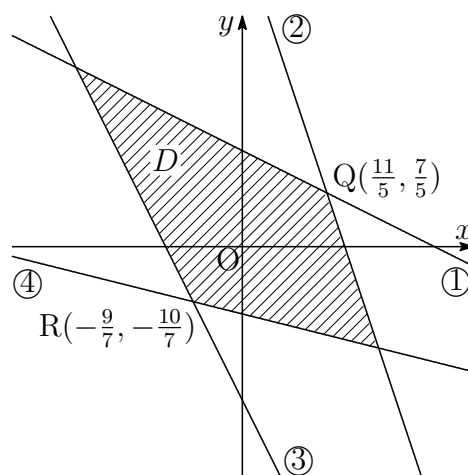
ゆえに, D 内の点 $\left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$ で, k は最大となる.

また, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ の傾きは, それぞれ -2 , $-\frac{1}{3}$ であり,

$$-2 < -1 < -\frac{1}{4}$$

ゆえに, D 内の点 $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$ で, k は最小となる.

よって $Q\left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$, $R\left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$



- (2) 直線 $ax+by=k'$ を l' とする.

l' は傾き $-\frac{a}{b}$, 切片 $\frac{k'}{b}$ の直線である. $b > 0$ であるから, k' が最大・最小となるのは, それぞれ $\frac{k'}{b}$ が最大・最小となるときである.

k' が Q で最大値をとるとき, l' と $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の傾きから

$$-3 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 3 \quad \cdots (*)$$

k' が R で最小値をとるとき, l' と $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ の傾きから

$$-2 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{4} < \frac{a}{b} < 2 \quad \cdots (**)$$

$a > 0$, $b > 0$ より, $\frac{a}{b}$ の符号に注意し, $(*)$, $(**)$ の共通範囲を求めて

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$$

- 3** (1) 1 回目, 2 回目に出た目を, それぞれ i, j とすると, $|i - j|$ 枚の硬貨は 1 回だけ反転し, それ以外の硬貨は反転しないか, 2 回反転する.
したがって, この操作による表の枚数は $6 - |i - j|$ である.

ゆえに表が 1 枚となるとき

$$6 - |i - j| = 1 \quad \text{すなわち} \quad |i - j| = 5$$

これをみたすのは, $(i, j) = (1, 6), (6, 1)$ の 2 組である.

よって, 求める確率は $\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$

- (2) L および R において出た目を, それぞれ i, j とし, これらの操作による表の枚数を $LR(i, j)$ とする.

i) $2 \leq i + j \leq 6$ のとき, $(i + j)$ 枚の硬貨は 1 回だけ反転し, 残りの硬貨は反転しないから $LR(i, j) = 6 - (i + j)$

ii) $7 \leq i + j \leq 12$ のとき, $(i + j - 6)$ 枚の硬貨は 2 回反転し, 残りの硬貨は 1 回だけ反転するから $LR(i, j) = i + j - 6$

i), ii) より, $LR(i, j) = |i + j - 6|$ となり, 求める期待値は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6^2} \sum_{1 \leq i, j \leq 6} LR(i, j) = \frac{1}{36} \sum_{1 \leq i, j \leq 6} |i + j - 6| = \frac{1}{36} \sum_{1 \leq i, j \leq 6} |j - (7 - i) + 1| \\ &= \frac{1}{36} \sum_{1 \leq i, j \leq 6} |j - i + 1| \\ &= \frac{1}{36} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 6} |j - i + 1| + \sum_{1 \leq j < i \leq 6} |j - i + 1| + \sum_{1 \leq i = j \leq 6} |j - i + 1| \right) \\ &= \frac{1}{36} \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq 6} (j - i + 1) + \sum_{1 \leq j < i \leq 6} (i - j - 1) + 6 \right\} \\ &= \frac{1}{36} \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq 6} (j - i + 1) + \sum_{1 \leq i < j \leq 6} (j - i - 1) + 6 \right\} \\ &= \frac{1}{36} \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq 6} (2j - 2i) + 6 \right\} = \frac{1}{36} \sum_{j=2}^6 \sum_{i=1}^{j-1} (2j - 2i) + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} \sum_{j=2}^6 \{2j(j-1) - j(j-1)\} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} \sum_{j=1}^6 (j^2 - j) + \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \left(\frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \right) + \frac{1}{6} = \frac{19}{9} \end{aligned}$$

別解 $LR(i, j) = |i + j - 6|$ の値は、右の表のようになる．したがって、求める期待値は

$$\frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6}{6^2} = \frac{76}{36} = \frac{19}{9}$$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	4	3	2	1	0	1
2	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
4	1	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5	6

(3) この操作により、すべての硬貨が表となるのは、L, R の操作が終わった時点で、次の (a)~(f) の場合である．

- (a) 裏表表表表表 (b) 裏裏表表表表 (c) 裏裏裏表表表
(d) 裏裏裏裏表表 (e) 裏裏裏裏裏表 (f) 裏裏裏裏裏裏

最初の L, R の操作で出た目をそれぞれ i, j とする．

(a)~(e) となる (i, j) の組は、順次、

$$(6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1)$$

(f) となる (i, j) の組は、 $i + j = 6$ をみたす 5 通り．

(a)~(f) について、最後の L の操作における目の出方は、順次、1~6 である．よって、求める確率は

$$\frac{5 + 5}{6^3} = \frac{5}{108}$$



- 4 (1) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ と $y = x - 2$ から y を消去すると

$$(x - 1)^2 + \{(x - 2) - 1\}^2 = 2 \quad \text{すなわち} \quad (x - 2)^2 = 0$$

ゆえに、 $x = 2$ で重解をもち、このとき $y = x - 2$ より $y = 0$

よって、直線 $y = x - 2$ は円 C に点 $(2, 0)$ で接する．

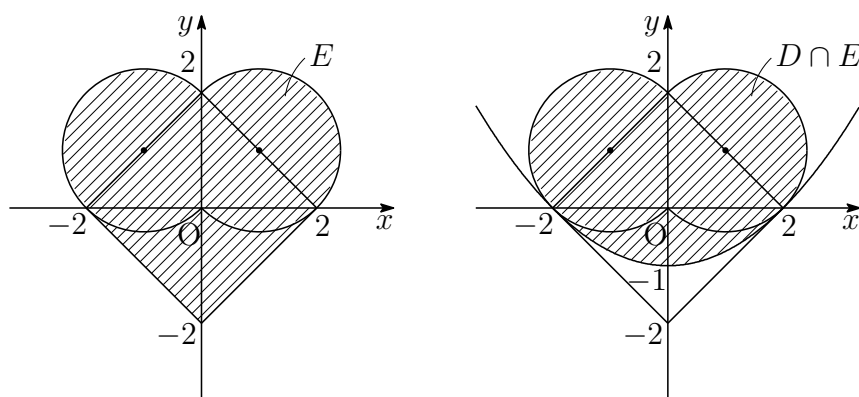
- (2) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ と $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ から y を消去し、整理すると

$$x^4 - 32x + 48 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x - 2)^2 \{(x + 2)^2 + 8\} = 0$$

ゆえに、 $x = 2$ で 2 重解をもち、このとき $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ より $y = 0$

よって、求める共有点の座標は $(2, 0)$

- (3) $x \geq 0, y \geq 0$ のとき, A の表す領域は, x 軸, y 軸および直線 $x + y = 2$ で囲まれた図形の内部および境界線である. このとき, (x, y) に対して, x 軸, y 軸, 原点に関して, それぞれ対称な点 $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ も不等式 $|x| + |y| \leq 2$ をみたす. したがって, A の表す領域は, 4 点 $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$ を頂点とする四角形の内部およびその周上である.
- $x \geq 0$ のとき, B の表す領域は, y 軸の右側で, 円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ の内部とその境界線である. このとき, (x, y) に対して, y 軸と対称な点 $(-x, y)$ も不等式 $(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$ をみたす.
- したがって, $A \cup B$ の表す領域 E および $D \cap E$ の表す領域は, 次のようになる. ただし, 境界線を含む.



3 点 $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$

放物線 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ の x 軸の下側の部分の面積は

$$-\int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) dx = \frac{8}{3}$$

2 点 $(2, 0)$, $(0, 2)$ を直径とする円の半径は $\sqrt{2}$ である.
よって, 求める面積は

$$4 + \frac{8}{3} + \pi(\sqrt{2})^2 = \frac{20}{3} + 2\pi$$

■

10.14 2014年(120分)

出題分野 ① ② ③ ④

- ① 座標平面上の直線 $y = -1$ を ℓ_1 , 直線 $y = 1$ を ℓ_2 とし, x 軸上の2点 $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ を考える。点 $P(x, y)$ について, 次の条件を考える。

$$d(P, \ell_1) \geq PO \quad \text{かつ} \quad d(P, \ell_2) \geq PA \quad \cdots \textcircled{1}$$

ただし, $d(P, \ell)$ は点 P と直線 ℓ の距離である。

- (1) 条件 ① を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ。
 - (2) 条件 ① を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ。ただし, a の値は (1) で求めた範囲にあるとする。
- ② 以下の問いに答えよ。
- (1) 任意の自然数 a に対し, a^2 を3で割った余りは0か1であることを証明せよ。
 - (2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると, a, b, c はすべて3で割り切れなければならないことを証明せよ。
 - (3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

- 3 鋭角三角形 $\triangle ABC$ について, $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさを, それぞれ A, B, C とする. $\triangle ABC$ の重心を G , 外心を O とし, 外接円の半径を R とする.

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を, それぞれ AD, OE とする. このとき,

$$AD = 2R \sin B \sin C, \quad OE = R \cos A$$

を証明せよ.

(2) G と O が一致するならば $\triangle ABC$ は正三角形であることを証明せよ.

(3) $\triangle ABC$ が正三角形でないとし, さらに OG が BC と平行であるとする. このとき,

$$AD = 3OE, \quad \tan B \tan C = 3$$

を証明せよ.

- 4 A さんは 5 円硬貨を 3 枚, B さんは 5 円硬貨を 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている. 2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる. それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする. 勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう. なお, 表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし, 硬貨のやりとりは行わない. このゲームについて, 以下の問いに答えよ.

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p , および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ.

(2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ.

解答例

1 (1) $d(P, \ell_1) = |y + 1|$, $d(P, \ell_2) = |y - 1|$ であるから, ① より

$$|y + 1| \geq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{かつ} \quad |y - 1| \geq \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

これらを整理すると

$$y \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad y \leq -\frac{1}{2}(x - a)^2 + \frac{1}{2}$$

上の2式を同時にみたす領域が存在する条件は, 2つの放物線

$$C_1: y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$C_2: y = -\frac{1}{2}(x - a)^2 + \frac{1}{2}$$

が共有点をもつことであるから, 2次方程式

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - a)^2 + \frac{1}{2}$$

すなわち $x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1 = 0 \quad \cdots (*)$

が実数解をもてばよい. したがって, 係数について

$$(-a)^2 - 4 \cdot 1 \left(\frac{1}{2}a^2 - 1 \right) \geq 0 \quad \text{これを解いて} \quad -2 \leq a \leq 2$$

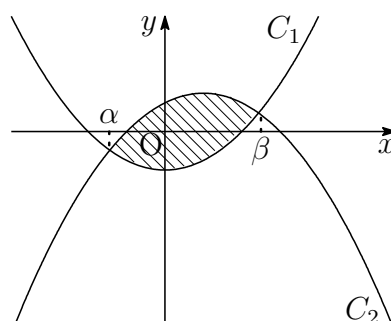
(2) (*) の方程式の解を α , β とすると ($\alpha < \beta$)

$$x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

$$\beta - \alpha = \sqrt{4 - a^2}$$

よって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -\frac{1}{2}(x - a)^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) \right\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \left(x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1 \right) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(4 - a^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$



- 2** (1) 自然数 a を 3 で割った商を k , 余りを r とすると ($r = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} r = 0 \text{ のとき} & \quad a^2 = (3k)^2 = 3 \cdot 3k^2 \\ r = 1 \text{ のとき} & \quad a^2 = (3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \\ r = 2 \text{ のとき} & \quad a^2 = (3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \end{aligned}$$

よって, a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である.

- (2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすとき, $a^2 + b^2$ は 3 の倍数であるから, (1) の結果から a^2, b^2 がともに 3 の倍数である.

このとき, 自然数 l, m を用いて

$$a = 3l, \quad b = 3m$$

とおける. したがって

$$(3l)^2 + (3m)^2 = 3c^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2 = 3(l^2 + m^2)$$

c^2 は 3 の倍数であるから, (1) の結果により, c も 3 の倍数である.

よって, a, b, c はすべて 3 で割り切れる.

- (3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c が存在すると仮定すると, (2) の結果から

$$a = 3^n A, \quad b = 3^n B, \quad c = 3^n C$$

とおける (n は自然数, 3 つの自然数 A, B, C の少なくとも 1 つは 3 で割り切れない). このとき

$$\begin{aligned} (3^n A)^2 + (3^n B)^2 &= 3(3^n C)^2 \\ A^2 + B^2 &= 3C^2 \end{aligned}$$

上式および (2) の結果から, A, B, C はすべて 3 で割り切れることになり, A, B, C の仮定に反する.

よって, $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しない. ■

3 (1) 直角三角形 ABD において

$$AD = AB \sin B \quad \cdots \textcircled{1}$$

正弦定理を $\triangle ABC$ に適用すると

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \text{ より } AB = 2R \sin C \quad \cdots \textcircled{2}$$

② を ① に代入すると

$$AD = 2R \sin B \sin C \quad \cdots \textcircled{3}$$

$A < 90^\circ$ より, 円周角と中心角の定理により $\angle BOC = 2A$

また, $\triangle BOE \equiv \triangle COE$ であるから $\angle BOE = \frac{1}{2} \angle BOC = A$

$OB = R$ であるから $\triangle BOE$ において $OE = R \cos A \quad \cdots \textcircled{4}$

(2) $\triangle ABC$ の重心 G は, 中線 AE 上にあるから, G と O が一致するとき, 直線 AE は辺 BC の垂直二等分線であるから $CA = AB$

同様に, 辺 CA の中点を F とすると, $OF \perp CA$

G は, 中線 BF 上にあるから, G と O が一致するとき, 直線 BF は辺 CA の垂直二等分線であるから $AB = BC$

よって, $AB = BC = CA$ より, $\triangle ABC$ は正三角形である.

別解 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とすると $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

O と G が一致するとき, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ であるから $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ より

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-\vec{c}) \cdot (-\vec{c}) \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

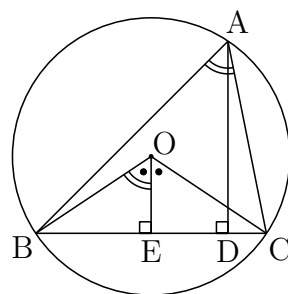
$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R \text{ であるから } 2\vec{a} \cdot \vec{b} = -R^2$$

$$\text{同様にして } 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 2\vec{c} \cdot \vec{a} = -R^2$$

$$\text{このとき } |\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 3R^2$$

$$\text{同様にして } |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 = 3R^2$$

よって, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}|$ より, $\triangle ABC$ は正三角形である.



(3) $OG \parallel BC$ より, $\triangle EGO \sim \triangle AED$

$EG : GA = 1 : 2$ であるから

$$OE : AD = 1 : 3 \quad \text{ゆえに} \quad AD = 3OE$$

③, ④ を上式に代入すると

$$2R \sin B \sin C = 3R \cos A$$

$A + B + C = \pi$ より $\cos A = -\cos(B + C)$ であるから

$$\begin{aligned} 2 \sin B \sin C &= -3 \cos(B + C) \\ &= -3(\cos B \cos C - \sin B \sin C) \end{aligned}$$

ゆえに $3 \cos B \cos C = \sin B \sin C$ よって $\tan B \tan C = 3$

別解 O を座標平面上の原点とし, x 軸を辺 BC と平行にとり, $A(a, b)$ とし, B と C は y 軸に関して対称であるから, $B(-c, -d)$, $C(c, -d)$ とする. $OG \parallel BC$ より, G は x 軸上にあるから, $\triangle ABC$ の重心 G の y 座標について

$$\frac{b + (-d) + (-d)}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2d$$

したがって

$$OE = |d|, \quad AD = 3|d| \quad \text{より} \quad AD = 3OE$$

$$BD = |a + c|, \quad CD = |c - a|$$

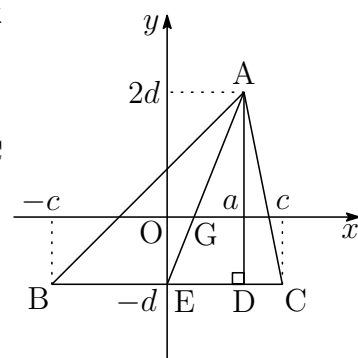
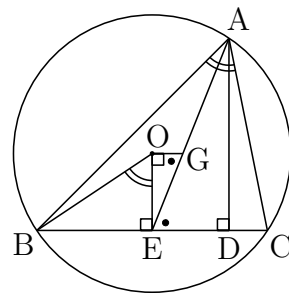
$\triangle ABC$ は鋭角三角形であるから, $|a| < |c|$ に注意して

$$\tan B \tan C = \frac{AD}{BD} \times \frac{AD}{CD} = \frac{3|d|}{|a + c|} \times \frac{3|d|}{|c - a|} = \frac{9d^2}{c^2 - a^2} \quad \cdots (*)$$

ここで, $OA^2 = OC^2$ であるから

$$a^2 + (2d)^2 = c^2 + (-d)^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2 - a^2 = 3d^2 \quad \cdots (**)$$

$d \neq 0$ であるから, $(**)$ を $(*)$ に代入すると $\tan B \tan C = 3$ ■



- 4 (1) Aさん, Bさんが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額をそれぞれ X, Y とすると

X	0	5	10	15	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	5	10	15	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって, AさんがBさんに勝つ確率 p , および引き分けとなる確率 q は

$$p = \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8}$$

$$q = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

- (2) (1)の X, Y に対して, ゲーム終了後にAさんが持っている硬貨の合計金額を Z とすると, Z およびその確率 $P(Z)$ を表にすると

合計金額 Z					合計金額の確率 $P(Z)$				
$X \backslash Y$	0	5	10	15	$X \backslash Y$	0	5	10	15
0	15	0	0	0	0	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$
5	30	15	5	5	5	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$
10	30	25	15	10	10	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$
15	30	25	20	15	15	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$

したがって $P(Z=0) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$

$$P(Z=5) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32}$$

$$P(Z=10) = \frac{3}{32}$$

$$P(Z=15) = q = \frac{8}{32}$$

$$P(Z=20) = \frac{1}{32}$$

$$P(Z=25) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32}$$

$$P(Z=30) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$$

よって, 求める期待値 E は

$$E = 5 \times \frac{6}{32} + 10 \times \frac{3}{32} + 15 \times \frac{8}{32} + 20 \times \frac{1}{32} + 25 \times \frac{4}{32} + 30 \times \frac{7}{32} = \frac{255}{16}$$

■

10.15 2015 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

1 座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

を考える。ただし、 a, b は実数とする。

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a, b に関する条件を求めよ。

以下、 a, b が (1) の条件を満たすとし、 C_1 と C_2 で囲まれる面積が 9 であるとする。

(2) b を a を用いて表せ。

(3) a がすべての実数値をとって変化するとき、放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。

2 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P, 辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q, 辺 OC を 1 : 3 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さ と 線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ の内積 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ を求めよ。

(3) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を考える。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を 1 枚もらう。

この操作を 4 回繰り返す。もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と、もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき、 $2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2) p を素数とし、 k を 0 以上の整数とする。 $2^{p-1} - 1 = p^k$ を満たす p, k の組をすべて求めよ。

解答例

- 1** (1) $y = x^2$ と $y = -x^2 + ax + b$ から y を消去すると

$$x^2 = -x^2 + ax + b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - ax - b = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と C_2 が異なる2点で交わるとき, $(*)$ より

$$(-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-b) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 8b > 0$$

- (2) 方程式 $(*)$ の解を α, β とすると $(\alpha < \beta)$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{a}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{2} \\ \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + ax + b) - x^2\} dx &= - \int_{\alpha}^{\beta} (2x^2 - ax - b) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = 9 \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b} = 3 \quad \text{よって} \quad b = -\frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

- (3) (2) の結果から, C_2 は

$$y = -x^2 + ax - \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad y = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

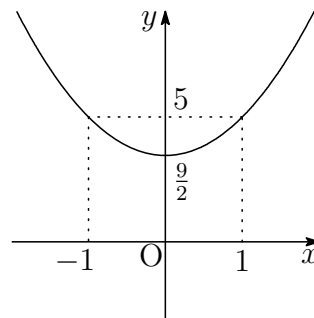
C_2 の頂点を (x, y) とすると

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

よって, C_2 の頂点が描く軌跡の方程式は

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

その軌跡は, 右の図のようになる.



2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと

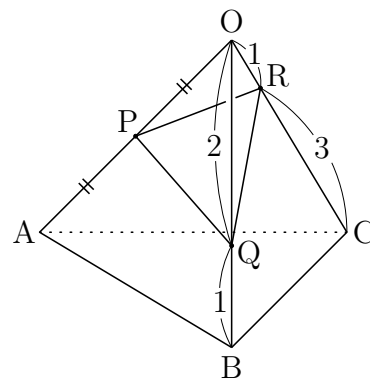
$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$$



$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad |\overrightarrow{PQ}|^2 &= \left| \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 = \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{4}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PR}|^2 &= \left| \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{c}|^2 - \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{PQ} = \frac{\sqrt{13}}{6}, \quad \mathbf{PR} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

別解 $\triangle OPQ$ および $\triangle OPR$ に余弦定理を適用すると

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{36}$$

$$PR^2 = OP^2 + OR^2 - 2OP \cdot OR \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \right) \\ &= \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{8}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{48} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \triangle PQR = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{36} \cdot \frac{3}{16} - \left(\frac{5}{48}\right)^2} = \frac{\sqrt{131}}{96} \quad \blacksquare$$

3 1, 3回目の操作で青玉の個数は2個または0個.

2, 4回目の操作で青玉の個数は3個または1個.

したがって, もらう硬貨の枚数は0, 1, 2枚のいずれかである.

2回目の操作で青玉3個である確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

したがって, 2回目の操作で青玉1個である確率は

$$1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

2, 4回目の操作で青玉3個, すなわち, もらう硬貨の総数が2枚である確率は

$$\frac{2}{9} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

2, 4回目の操作で青玉1個, すなわち, 硬貨を1枚ももらわない確率は

$$\frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{49}{81}$$

よって, もらう硬貨の総数が1枚である確率は

$$1 - \left(\frac{2}{27} + \frac{49}{81} \right) = \frac{26}{81}$$

補足 x 回目の操作で青玉が y 個である確率を $P(x, y)$ とすると

$$P(2, 3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

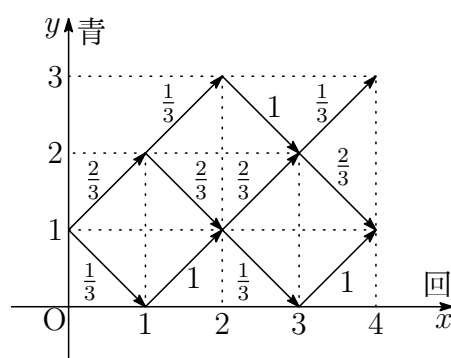
$$P(2, 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{9}$$

4回の操作で硬貨を2枚もらう (青玉が2回3個になる) 確率は

$$P(2, 3) \times 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

4回の操作で硬貨を1枚ももらわない確率は

$$\{P(2, 1)\}^2 = \left(\frac{7}{9} \right)^2 = \frac{49}{81}$$



- 4 (1) n が正の偶数のとき, $\frac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

よって, $2^n - 1$ は 3 の倍数である.

- (2) $2^{p-1} - 1 = p^k$ (p は素数, k は 0 以上の整数) $\cdots (*)$

- (i) $p = 2$ のとき, $(*)$ は

$$1 = 2^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 0$$

- (ii) $p \neq 2$ のとき, p は奇素数であるから, $p - 1$ は偶数である.

(1) の結果から, $2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数である.

$(*)$ より, p^k は 3 を因数にもつから

$$p = 3$$

これを $(*)$ に代入すると

$$3 = 3^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 1$$

よって $(p, k) = (2, 0), (3, 1)$



10.16 2016年(120分)

出題分野 1 2 3 4

1 座標平面において、 x 軸上に3点 $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ ($0 < \alpha < \beta$) があり、曲線 $C: y = x^3 + ax^2 + bx$ が x 軸とこの3点で交わっているものとする。ただし、 a, b は実数である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C と x 軸で囲まれた2つの部分の面積の和を S とする。 S を α と β の式で表せ。
- (2) β の値を固定して、 $0 < \alpha < \beta$ の範囲で α を動かすとき、 S を最小とする α を β の式で表せ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が1である三角形 ABC において、辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1, t:1-t, 1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また、 AE と BF , BF と CD , CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 3直線 AE, BF, CD が1点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下、 t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

- (2) $AP = kAE$, $CR = \ell CD$ を満たす実数 k, ℓ をそれぞれ求めよ。
- (3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。
- (4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

- 3 袋の中に、赤玉が 15 個、青玉が 10 個、白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し、取り出した玉の色に応じて、以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

(操作) コインが点 (x, y) にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x + 1, y)$ に移動、青玉を取り出したときには点 $(x, y + 1)$ に移動、白玉を取り出したときには点 $(x - 1, y - 1)$ に移動し、取り出した球は袋に戻す。

最初に原点 $(0, 0)$ にコインを置き、この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後、コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 操作を n 回繰り返したとき、白玉を 1 度だけ取り出したとする。このとき、到達点となり得る点をすべて求めよ。
- (2) 操作を n 回繰り返したとき、到達点となり得る点の個数を求めよ。
- (3) 座標平面上の 4 点 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき、到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。 P_3 を求めよ。
- (4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。

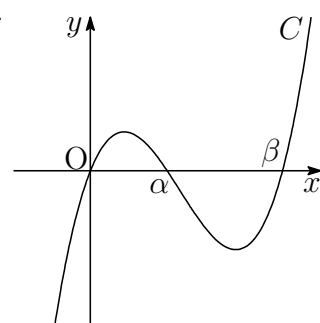
- 4 自然数 n に対して、 10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。 a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。
- (2) $a_1, a_2, \dots, a_6$ を求めよ。
- (3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。
 - (i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる。
 - (ii) N を十進数で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。
 - (iii) N は 13 で割り切れる。

解答例

- 1 (1) C は x 軸との共有点の x 座標が $x = 0, \alpha, \beta$ であるから, $C: y = f(x)$ の方程式は x^3 の係数に注意して ($0 < \alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \end{aligned}$$



関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha + \beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2$$

とおくと

$$F(0) = 0, \quad F(\alpha) = -\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta, \quad F(\beta) = -\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha f(x) dx - \int_\alpha^\beta f(x) dx = \left[F(x) \right]_0^\alpha - \left[F(x) \right]_\alpha^\beta \\ &= 2F(\alpha) - F(\beta) - F(0) \\ &= 2 \left(-\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta \right) - \left(-\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3 \right) \\ &= -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^3\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^4 \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= -\frac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2\beta - \frac{1}{6}\beta^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\alpha - \beta)\{2\alpha(\beta - \alpha) + \beta^2\} \end{aligned}$$

$$0 < \alpha < \beta \text{ であるから } 2\alpha(\beta - \alpha) + \beta^2 > 0$$

したがって

α	(0)	$\dots$	$\frac{\beta}{2}$	$\dots$	(β)
$\frac{dS}{d\alpha}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

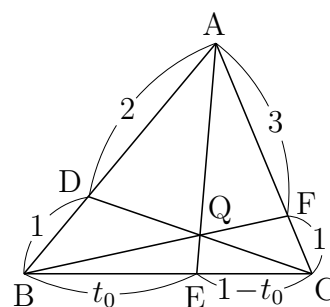
よって, S を最小にする α は $\alpha = \frac{\beta}{2}$



- 2 (1) チェバの定理により

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\text{これを解いて} \quad t_0 = \frac{3}{5}$$

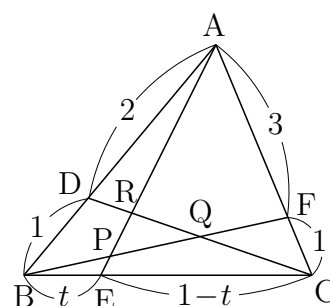


- (2) $\triangle AEC$ および直線 BF について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AP}{PE} \cdot \frac{t}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{AP}{PE} = \frac{3}{t}$$

$$\text{よって} \quad k = \frac{AP}{AE} = \frac{3}{3+t}$$



$\triangle BCD$ および直線 AE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DA}{AB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{CR}{RD} = \frac{3(1-t)}{2t}$$

$$\text{よって} \quad \ell = \frac{CR}{CD} = \frac{3(1-t)}{3(1-t) + 2t} = \frac{3(1-t)}{3-t}$$

- (3) (2) の図について、 $\triangle BCF$ および直線 AE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CA}{AF} \cdot \frac{FP}{PB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{FP}{PB} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{FP}{PB} = \frac{3(1-t)}{4t} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$t = \frac{3}{5} \text{ のとき, } P \text{ は } Q \text{ に一致するので} \quad \frac{FQ}{QB} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{よって} \quad \triangle BCQ = \frac{2}{3} \triangle BCF = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

(4) $t = \frac{3}{5}$ のとき, R は Q に一致するので, (2) の結果から

$$\frac{CQ}{CD} = \frac{3(1 - \frac{3}{5})}{3 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって } CQ : QR = \frac{1}{2} : \frac{3(1-t)}{3-t} - \frac{1}{2} = 3-t : 3-5t$$

また, ①, ② から

$$BQ : PQ = \frac{2}{3} : \frac{3(1-t)}{3(1-t)+4t} - \frac{1}{3} = 3+t : 3-5t$$

$\triangle BCQ : \triangle PQR = BQ \cdot CQ : PQ \cdot QR$ であるから

$$\triangle BCQ : \triangle PQR = (3+t)(3-t) : (3-5t)^2$$

$$(3) \text{ の結果から } \triangle PQR = \frac{1}{6} \times \frac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)} = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}$$

解説 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおくと

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}}{2+1} = \frac{\vec{b} + 2 \cdot \frac{3}{4}\vec{c}}{3} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AE} = \frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}$$

$CR : RD = 3(1-t) : 2t$ であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2t\overrightarrow{AC} + 3(1-t)\overrightarrow{AD}}{3(1-t) + 2t} = \frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b} + 2t\vec{c}\}$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{QP} = \frac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b} - 3\vec{c}), \quad \overrightarrow{QR} = \frac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

これらを空間ベクトルと考え, 外積の性質を用いると¹

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = -\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b} \times \vec{c}$$

$$\text{よって } \triangle PQR : \triangle ABC = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)} : 1$$

外積は高校数学の範囲外であるから, 2次試験では使えないが, センター試験では, 非常に有効な計算法である. なお, 外積(ベクトル積)の演算について, 次式が成り立つことに注意したい.

$$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$$

また, これに $\vec{c} = \vec{b}$ を代入すると $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

- 3 (1) 白玉を 1 度だけ取り出すので、赤玉を m 回 ($m = 0, 1, \dots, n-1$) 取り出すとすると、青玉を取り出す回数は $n-m-1$ であるから、到達点 (x, y) は

$$x = m - 1, \quad y = (n - m - 1) - 1 = n - m - 2$$

よって、到達点は $(m - 1, n - m - 2) \quad (m = 0, 1, \dots, n - 1)$

- (2) 赤玉, 青玉, 白玉を取り出す回数を, それぞれ i, j, k とすると, 到達点 (x, y) は $(i + j + k = n)$

$$x = i - k, \quad y = j - k$$

このとき, $k = n - i - j$ であるから

$$(*) \begin{cases} x = i - (n - i - j) = 2i + j - n \\ y = j - (n - i - j) = i + 2j - n \end{cases}$$

ここで

$$2i + j - n = 2i' + j' - n, \quad i + 2j - n = i' + 2j' - n$$

とすると

$$2(i - i') + (j - j') = 0, \quad (i - i') + 2(j - j') = 0$$

これを解くと $(i, j) = (i', j')$

したがって, $(i, j) \neq (i', j')$ のとき

$$(2i + j - n, i + 2j - n) \neq (2i' + j' - n, i' + 2j' - n)$$

このことから, (i, j, k) の組合せの個数とその到達点の個数は一致する.
よって, 求める到達点の個数は, 赤玉, 青玉, 白玉の 3 種類の玉から n 個取り出す重複組合せの総数に一致するので

$${}_3H_n = {}_{3+n-1}C_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

(3) (*) から

$$i = \frac{2x-y}{3} + \frac{n}{3}, \quad j = \frac{2x-y}{3} - x + y + \frac{n}{3} \quad \cdots (**)$$

$n = 3$ のとき, 上式より

$$i = \frac{2x-y}{3} + 1, \quad j = \frac{2x-y}{3} - x + y + 1$$

(x, y) が D 内にあるとき ($k = 3 - i - j$)

$$(x, y, i, j, k) = (-1, 1, 0, 2, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (1, -1, 2, 0, 1)$$

よって, 求める確率は

$$P_3 = \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{6} + \frac{3!}{1!1!1!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{25}{72}$$

(4) $n = 3N$ のとき, (**) より

$$i = \frac{2x-y}{3} + N, \quad j = \frac{2x-y}{3} - x + y + N$$

(x, y) が D 内にあるとき ($k = 3N - i - j$)

$$(x, y, i, j, k) = (-1, 1, N-1, N+1, N), (0, 0, N, N, N), \\ (1, -1, N+1, N-1, N)$$

よって, 求める確率は

$$P_{3N} = \frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ + \frac{(3N)!}{N!N!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{1}{3}\right)^N \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ + \frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ = \frac{(19N+6)(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^2(N+1)!}$$

■

4 (1) 仮定から $10^n \equiv a_n, \quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より $a_1 = 10$

(1) の結果を用いると, 法 13 について

$$a_2 \equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9$$

$$a_3 \equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12$$

$$a_4 \equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3$$

$$a_5 \equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4$$

$$a_6 \equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1$$

よって $a_2 = 9, a_3 = 12, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 1$

(3) 整数 p, q を $1 \leq p \leq 9, 0 \leq q \leq 9$ とし, 求める自然数 N を

$$N = p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

とおくと, 法 13 に関して

$$N \equiv p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

$$\equiv p \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 9 + 6 \cdot 10 + q = 4p + q + 75$$

$$\equiv 4p + q - 3$$

このとき, $N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 (p, q) の組は

$$(p, q) = (2, 8), (3, 4), (4, 0), (5, 9), (6, 5), (7, 1), (9, 6)$$

よって, 求める自然数 N は

$$220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166$$



10.17 2017年(120分)

出題分野 ① ② ③ ④

① 定数 $a < 1$ に対し，放物線 $C_1: y = 2x^2 + 1$ ， $C_2: y = -x^2 + a$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線 C_1 ， C_2 の両方に接する2つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。
- (2) C_1 と (1) で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積を S_1 ， C_2 と (1) で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき， $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

② 座標平面上に原点 O ，点 $A(1, a)$ ，点 $B(s, t)$ がある。以下の問いに答えよ。

- (1) $a = 1$ のとき， $\triangle OAB$ が正三角形となるような (s, t) をすべて求めよ。
- (2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。
- (3) $\triangle OAB$ が正三角形であり， a が有理数であるとき， s と t のうち少なくとも1つは無理数であることを示せ。

③ A と B の2人が $A, B, A, B, \dots$ の順にさいころを投げ，先に3以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える。以下では，さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2と3の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$ ， $\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

- (1) さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。さらに， p_n が0.005より小さくなる最小の n を求めよ。
- (2) さいころを投げた回数が3回以下で A が勝つ確率を求めよ。
- (3) 自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k + 1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

④ 以下の問いに答えよ。

- (1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。
- (2) 225 との最大公約数が15となる2017以下の自然数の個数を求めよ。
- (3) 225 との最大公約数が15であり，かつ1998との最大公約数が111となる2017以下の自然数をすべて求めよ。

解答例

- 1 (1) 求める直線を $l: y = px + q$ とおく. C_1 と l の方程式から y を消去すると

$$2x^2 + 1 = px + q \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - px - q + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と l は接するので, 方程式 $(*)$ の係数について

$$(-p)^2 - 4 \cdot 2(-q + 1) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 + 8q - 8 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に, C_2 と l の方程式から y を消去すると

$$-x^2 + a = px + q \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + px + q - a = 0 \quad \cdots (**)$$

C_2 と l は接するので, 上の方程式の係数について

$$p^2 - 4 \cdot 1(q - a) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - 4q + 4a = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad p^2 = \frac{8}{3}(1 - a), \quad q = \frac{1}{3}(a + 2)$$

よって, 求める 2 直線の方程式は

$$y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1 - a)}x + \frac{1}{3}(a + 2)$$

- (2) (1) の結果から, 次の 2 式は平方式になることに注意して

$$2x^2 + 1 - (px + q) = 2\left(x - \frac{p}{4}\right)^2$$

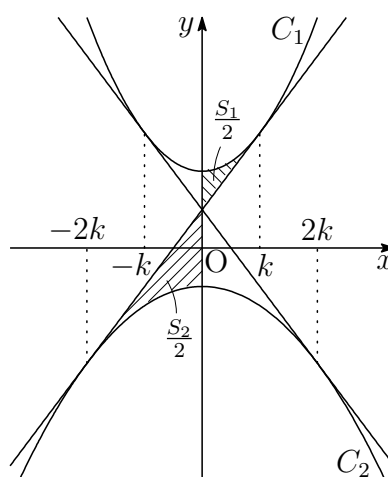
$$px + q - (-x^2 + a) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$p = 2\sqrt{\frac{2}{3}(1 - a)}$ のとき, $k = \frac{p}{4}$ とおく.
 C_1, C_2 および 2 接線は y 軸に関して対称であることに注意して

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{2} &= \int_0^k 2(x - k)^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x - k)^3 \right]_0^k = \frac{2k^3}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{2} &= \int_{-2k}^0 (x + 2k)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + 2k)^3 \right]_{-2k}^0 = \frac{8k^3}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{16k^3}{3} \times \frac{3}{4k^3} = 4$$



解説 $y = kx^2 \cdots \textcircled{1}$ は $y = x^2 \cdots \textcircled{2}$ を x 軸を元に y 軸方向に k 倍だけ拡大したものであるが、 $\textcircled{1}$ 上の点 $P(t, kt^2)$ に対して $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$ となる点 $Q(x, y)$ をとると

$$(x, y) = k(t, kt^2) \quad \text{ゆえに} \quad x = kt, \quad y = (kt)^2$$

これから、点 Q の描く軌跡は、 $y = x^2$ である。

したがって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ は相似であり、その相似比は $1 : |k|$ である。

一般に、放物線は相似であり、2つの放物線

$$C_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1, \quad C_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

の相似比は $\frac{1}{|a_1|} : \frac{1}{|a_2|}$ である。

右の図のように、 C_1, C_2 と2本の共通接線との接点を B, C, D, E とすると、点 A は線分 BD および線分 CE を

$$\frac{1}{|a_1|} : \frac{1}{|a_2|}$$

に内分するのである。また、2つの斜線部分の面積を S_1, S_2 とすると、面積比は相似比の2乗に比例するから

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{a_1^2} : \frac{1}{a_2^2}$$

特に、 $S_1 = \frac{1}{3}\triangle ABC$, $S_2 = \frac{1}{3}\triangle ADE$ である²。

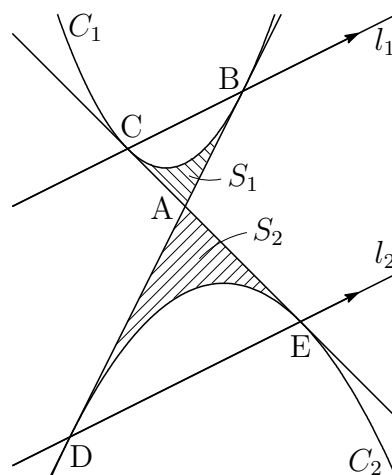
本題の点 A は C_1 の頂点 $(0, 1)$ と C_2 の頂点 $(0, a)$ を $1 : 2$ に内分する点で

$$A\left(0, \frac{2+a}{3}\right)$$

また、 C_1 上の点 P について、 $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{AP}$ をみたす点 Q の軌跡が C_2 である。

点 A を通り、傾き m の直線 $y = mx + \frac{2+a}{3}$ が $C_1 : y = 2x^2 + 1$ と接するとき、2次方程式 $2x^2 - mx + \frac{1-a}{3} = 0$ の係数により

$$(-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1-a}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad m = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}$$



²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf [4] の補足を参照。

- 2 (1) 3 点 $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(s, t)$ について, $\triangle OAB$ が正三角形であるから, $OA^2 = OB^2 = AB^2$ より

$$1^2 + 1^2 = s^2 + t^2 = (s-1)^2 + (t-1)^2$$

整理すると $s^2 + t^2 = 2, \quad s + t = 1$

これを解いて $(s, t) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \right)$ (複号同順)

- (2) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると, 自然数 p, q を用いて

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素})$$

とおける. これから, $p = \sqrt{3}q$ の両辺を平方すると

$$p^2 = 3q^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

p^2 は 3 の倍数であるから, p は 3 の倍数である.

したがって, $p = 3k$ (k は自然数) とおけ, これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$(3k)^2 = 3q^2 \quad \text{ゆえに} \quad q^2 = 3k^2$$

q^2 は 3 の倍数であるから, q も 3 の倍数である. このことは, p と q が互いに素であることに反する. よって, $\sqrt{3}$ は無理数である.

- (3) $\overrightarrow{OA} = (1, a)$, $\overrightarrow{OB} = (s, t)$ であるから, $\triangle OAB$ の面積により

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin 60^\circ = \frac{1}{2} |t - as|$$

このとき, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ であることに注意して

$$\frac{1}{2} (a^2 + 1) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} |t - as| \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{3} = \frac{2|t - as|}{a^2 + 1} \quad \dots (*)$$

a が有理数であるとき, 2 数 s, t がともに有理数であるとする, $(*)$ の右辺は有理数となり, (2) の結果に矛盾する.

よって, s と t のうち少なくとも 1 つは無理数である. ■

- 3** (1) サイコロを1回投げるとき、勝敗が決まらない、すなわち、1または2の目が出る確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

n 回以下では勝敗が決まらないのは、 n 回とも1または2の目が出ることであるから、よって、求める確率 p_n は

$$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$$

p_n が 0.005 より小さいとき

$$\frac{1}{3^n} < 0.005 = \frac{1}{200} \quad \text{ゆえに} \quad 3^n > 200$$

$3^4 = 81$, $3^5 = 243$ であるから、求める最小の n は $n = 5$

- (2) サイコロを1回投げるとき、勝者が決まる、すなわち、3, 4, 5, 6の目が出る確率は

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

さいころを投げた回数が3回以下でAが勝つのは、1回目または3回目でAが勝つことであるから、求める確率は

$$\frac{2}{3} + p_2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$$

- (3) 求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \sum_{i=1}^k p_{2i} \times \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^k \frac{1}{3^{2i}} = \frac{2}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{9}\right)^i \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{9^{k+1}}\right) \end{aligned}$$

■

- 4 (1) ユークリッドの互除法を用いて

$$2017 = 225 \times 8 + 217,$$

$$225 = 217 \times 1 + 8,$$

$$217 = 8 \times 27 + 1$$

よって、求める最大公約数は **1**

- (2) $225 = 3^2 \times 5^2$, $2017 = 15 \times 134 + 7$

全体集合を $U = \{1, 2, 3, \dots, 134\}$ とし、その部分集合を

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 44\},$$

$$B = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 26\}$$

とすると

$$A \cap B = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, 15 \cdot 3, \dots, 15 \cdot 8\}$$

したがって、求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cap B}) &= n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 134 - (44 + 26 - 8) = \mathbf{72} \end{aligned}$$

- (3) $225 = 3^2 \times 5^2$, $15 = 3 \times 5$, $1998 = 2 \times 3^3 \times 37$, $111 = 3 \times 37$

求める数は 2017 以下で、 $3 \times 5 \times 37$ の倍数は

$$\{555n \mid n = 1, 2, 3\}$$

ただし、 n は 2, 3, 5 と互いに素であるから、求める数は **555** ■

10.18 2018年(120分)

出題分野 1 2 3 4

- 1 座標平面内の曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c, 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし, a, b は実数, $c > 0$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) a, b をそれぞれ c を用いて表せ。
 (2) この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。 S を最小にする c の値を求めよ。

- 2 以下の問いに答えよ。

- (1) n を自然数とするとき, 2^n を 7 で割った余りを求めよ。
 (2) 自然数 m は, 2 進法で 101 が 6 回連続する表示

$$101101101101101101_{(2)}$$

をもつとする。 m を 7 で割った余りを求めよ。

- 3 平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し,

$$L = PA^2 + PB^2 + PC^2$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ および $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ とおくとき, 次の等式を示せ。

$$L = 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

- (2) L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また, L の最小値は

$$\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

であることを示せ。

4 3つの部品 a, b, c からなる製品が多数入った箱がある。製品を1つ取り出したとき、部品 a, b, c が不良品である確率について次のことがわかっている。

- 部品 a が不良品である確率は p である。
- 部品 a が不良品でないとき、部品 b が不良品である確率は q である。
- 部品 a が不良品であるとき、部品 b も不良品である確率は $3q$ である。
- 部品 b が不良品でないとき、部品 c が不良品である確率は r である。
- 部品 b が不良品であるとき、部品 c も不良品である確率は $5r$ である。

ただし、 $0 < p < 1$, $0 < q < \frac{1}{3}$, $0 < r < \frac{1}{5}$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) 製品を1つ取り出したとき、部品 a, b の少なくとも一方が不良品である確率を p, q を用いて表せ。
- (2) 製品を1つ取り出したとき、部品 c が不良品である確率を p, q, r を用いて表せ。
- (3) 製品を1つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき、部品 b も不良品である確率を p, q を用いて表せ。

解答例

- 1 (1) 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c, 0)$ において x 軸に接するから、曲線の方程式の x^3 の係数および定数項に注意して

$$y = (x - c)^2 \left(x + \frac{1}{c} \right) \quad \cdots (*)$$

とおける．これを展開すると

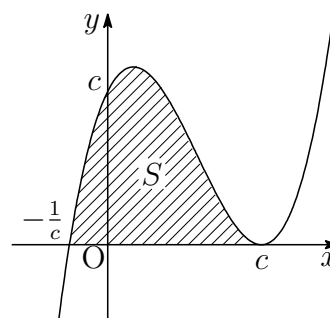
$$y = x^3 + \left(\frac{1}{c} - 2c \right) x^2 + (c^2 - 2)x + c$$

与えられた曲線の方程式と上式の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = \frac{1}{c} - 2c, \quad b = c^2 - 2$$

- (2) (*) により ($c > 0$)

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{c}}^c \left(x + \frac{1}{c} \right) (c - x)^2 dx \\ &= \frac{1}{12} \left(c + \frac{1}{c} \right)^4 \end{aligned}$$



$c > 0$, $\frac{1}{c} > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の関係により

$$c + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{c}} = 2$$

上式において、等号が成立するのは

$$c = \frac{1}{c} \quad \text{すなわち} \quad c = 1$$

のときで、このとき S は最小となる．よって $c = 1$

補足 定積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる³．

³<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010-kouki.pdf> [1]

- 2** (1) $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ であるから

$$2^n \text{ を } 7 \text{ で割った余りは } \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき } & 1 \\ n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } & 2 \\ n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } & 4 \end{cases}$$

- (2) $m = 101101101101101101_{(2)}$

これに (1) の結果を用いると、法 7 に関して

$$m = \sum_{k=0}^5 (2^2 + 1) 2^{3k} \equiv \sum_{k=0}^5 5 \cdot 1 = 30 \equiv 2 \pmod{7}$$

よって、求める余りは **2** ■

- 3** (1) $L = PA^2 + PB^2 + PC^2$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ より

$$\begin{aligned} L &= |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 \\ &= |\vec{a} - \vec{x}|^2 + |\vec{b} - \vec{x}|^2 + |\vec{c} - \vec{x}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{x} + |\vec{x}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{x} + |\vec{x}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{x} + |\vec{x}|^2 \\ &= 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

- (2) $\triangle ABC$ の重心を G とし, $\vec{g} = \overrightarrow{OG}$ とおくと

$$\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{g}$$

これを (1) に代入すると

$$\begin{aligned} L &= 3|\vec{x}|^2 - 6\vec{g} \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ &= 3(|\vec{x}|^2 - 2\vec{g} \cdot \vec{x} + |\vec{g}|^2) + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 3|\vec{g}|^2 \\ &= 3|\vec{x} - \vec{g}|^2 + \frac{1}{3}\{3|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 + 3|\vec{c}|^2 - 3|\vec{g}|^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad & 3|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 + 3|\vec{c}|^2 - |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{c}|^2 = (AB^2 + BC^2 + CA^2) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad L = 3|\vec{x} - \vec{g}|^2 + \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

よって, $\vec{x} = \vec{g}$, すなわち, P が $\triangle ABC$ の重心であるとき,

L は最小値 $\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ をとる. ■

4 a, b, c がそれぞれ不良品である事象をそれぞれ A, B, C とすると

$$P(A) = p, P_{\bar{A}}(B) = q, P_A(B) = 3q, P_{\bar{B}}(C) = r, P_B(C) = 5r$$

$$(1) P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{1 - P(A)}, P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ より}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \{1 - P(A)\}P_{\bar{A}}(B) = (1 - p)q$$

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = p \cdot 3q = 3pq$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= 3pq + (1 - p)q = (1 + 2p)q \end{aligned}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= p + (1 + 2p)q - 3pq = \mathbf{p + q - pq} \end{aligned}$$

$$(2) P_{\bar{B}}(C) = \frac{P(\bar{B} \cap C)}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{B} \cap C)}{1 - P(B)}, P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \text{ より}$$

$$P(\bar{B} \cap C) = \{1 - P(B)\}P_{\bar{B}}(C) = \{1 - (1 + 2p)q\}r$$

$$P(B \cap C) = P(B)P_B(C) = (1 + 2p)q \cdot 5r = 5(1 + 2p)qr$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\bar{B} \cap C) + P(B \cap C) \\ &= \{1 - (1 + 2p)q\}r + 5(1 + 2p)qr \\ &= \{1 + 4(1 + 2p)q\}r = \mathbf{(1 + 4q + 8pq)r} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から、求める確率は

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{5(1 + 2p)qr}{(1 + 4q + 8pq)r} = \frac{\mathbf{5(1 + 2p)q}}{\mathbf{1 + 4q + 8pq}}$$

■

10.19 2019 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

1 表に 3, 裏に 8 が書かれた硬貨がある。この硬貨を 10 回投げるとき, 出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

2 k を実数とする。3 次関数 $y = x^3 - kx^2 + kx + 1$ が極大値と極小値をもち, 極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき, k の値を求めよ。

3 座標空間内の 3 点 $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 3)$, $C(4, 5, 6)$ を通る平面を α とし, 平面 α 上にない点 $P(6, p, q)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とする。線分 PH の長さを p, q を用いて表せ。

(2) 点 P が $(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$ を満たしながら動くとき, 四面体 $ABCP$ の体積の最大値と最小値を求めよ。

4 0 でない 2 つの整式 $f(x), g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$\begin{aligned} f(x^2) &= (x^2 + 2)g(x) + 7 \\ g(x^3) &= x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

解答例

- 1 硬貨を10回投げて、裏が出た回数を n とすると、出た数字10個の積は

$$8^n \cdot 3^{10-n}$$

これが8桁の数であるから $10^7 \leq 8^n \cdot 3^{10-n} < 10^8$

辺々の常用対数をとると $7 \leq n \log_{10} 8 + (10-n) \log_{10} 3 < 8$

$\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$7 \leq 0.9030n + 0.4771(10-n) < 8$$

整理すると $22290 \leq 4259n < 32290$ ゆえに $5 + \frac{995}{4259} \leq n < 7 + \frac{2477}{4259}$

n は整数 ($0 \leq n \leq 10$) であるから $n = 6, 7$

よって、求める確率は

$${}_{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = (210 + 120) \times \frac{1}{1024} = \frac{165}{512}$$

■

- 2 $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 1$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 2kx + k$

$f(x)$ は極大値と極小値をもつから、 $f'(x) = 0$ の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\beta - \alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 - 3k}}{3} - \frac{k - \sqrt{k^2 - 3k}}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{k(k-3)} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

極大値、極小値は、それぞれ $f(\alpha), f(\beta)$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx = 3 \int_{\beta}^{\alpha} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -3 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

条件により、 $f(\alpha) - f(\beta) = 4|k|^3$ であるから

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 = 4|k|^3 \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 2|k| \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より $2|k| = \frac{2}{3} \sqrt{k(k-3)}$ ゆえに $k(8k+3) = 0$

$k(k-3) > 0$ に注意して、これを解くと $k = -\frac{3}{8}$

■

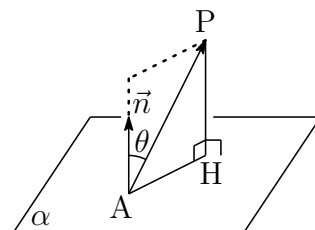
- 3** (1) $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 3)$, $C(4, 5, 6)$, $P(6, p, q)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{AP} = (5, p-2, q-3)$$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直なベクトル, すなわち,
 α の法線ベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (0, 1, -1)$$

とおき, $\overrightarrow{AP}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると



$$PH = |\overrightarrow{AP}| |\cos \theta|, \quad \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AP}| |\vec{n}|}$$

$$\text{よって } PH = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|0 \cdot 5 + 1 \cdot (p-2) - 1 \cdot (q-3)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|p - q + 1|}{\sqrt{2}}$$

- (2) $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$
 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の張る平行四辺形の面積を S とすると

$$S = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \sqrt{2^2 (3\sqrt{3})^2 - 6^2} = 6\sqrt{2}$$

四面体 ABCP の体積を V とすると ⁴

$$V = \frac{1}{6} S \cdot PH = \frac{1}{6} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{|p - q + 1|}{\sqrt{2}} = |p - q + 1|$$

$(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$ より, $p-9 = \cos \theta$, $q-7 = \sin \theta$ とおくと

$$p = \cos \theta + 9, \quad q = \sin \theta + 7$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } V &= |p - q + 1| = |(\cos \theta + 9) - (\sin \theta + 7) + 1| \\ &= |3 - (\sin \theta - \cos \theta)| = 3 - \sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } 3 - \sqrt{2} \leq V \leq 3 + \sqrt{2}$$

$$\text{よって 最大値 } 3 + \sqrt{2}, \text{ 最小値 } 3 - \sqrt{2}$$



⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_bun_2016.pdf **3** の解説を参照.

- 4 (1) 2つの整式 $f(x)$, $g(x)$ が満たす恒等式

$$(*) \begin{cases} f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7 \\ g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により, $f(x)$, $g(x)$ の次数をそれぞれ m , n とすると

$$\begin{cases} 2m = 2 + n & \cdots \textcircled{1} \\ 3n = \max(4 + m, 2 + n) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(i) $4 + m \geq 2 + n$ のとき, $\textcircled{2}$ より $3n = 4 + m$ ゆえに $m = 3n - 4$
これと $\textcircled{1}$ を条件に注意して解くと $m = n = 2$

(ii) $4 + m < 2 + n$ のとき, $\textcircled{2}$ より $3n = 2 + n$ ゆえに $n = 1$
これを $\textcircled{1}$ に代入すると, $m = \frac{3}{2}$ となり, 不適.

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから, 題意は成立する.

- (2) $(*)$ の第 1 式において, x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(-x) + 7$$

これと $(*)$ の第 1 式により $g(-x) = g(x) \cdots \textcircled{3}$

また, $(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(-x) - 6x^2 - 2$$

$\textcircled{3}$ より, $g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より $f(-x) = f(x)$

また, $(*)$ に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0) + 7, \quad g(0) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 3$$

以上の結果から, $f(x) = ax^2 + 3$, $g(x) = px^2 - 2$ とおくと, $(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4 + 3 = (x^2 + 2)(px^2 - 2) + 7 \\ px^6 - 2 = x^4(ax^2 + 3) - 3x^2(px^2 - 2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\text{整理すると} \quad \begin{cases} ax^4 = px^4 + 2(p-1)x^2 \\ px^6 = ax^6 - 3(p-1)x^4 \end{cases}$$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = p, \quad p - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = p = 1$$

よって $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^2 - 2$ ■

10.20 2020 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

1 $a \geq 0$ とする。2 つの放物線 $C_1: y = x^2$, $C_2: y = 3(x - a)^2 + a^3 - 40$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) a が (1) で求めた範囲を動くとき, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S の最大値を求めよ。

2 座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, p)$, $C(q, r, s)$ を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし, $p > 0$, $s > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) p, q, r, s の値を求めよ。
- (2) z 軸に垂直な平面で正四面体 $OABC$ を切ったときの断面積の最大値を求めよ。

3 a, b, c を整数とし, i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $f\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) a, b を c を用いて表せ。
- (2) $f(1)$ を 7 で割ると 4 余り, $f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るとする。 c の絶対値が 40 以下であるとき, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

4 4 個のサイコロを同時に投げるとき, 出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

- (1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - \{3(x-a)^2 + a^3 - 40\} \\ &= -(2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

2 次方程式

$$2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40 = 0 \quad \cdots (**)$$

の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-3a)^2 - 2(a^3 + 3a^2 - 40) \\ &= -2a^3 + 3a^2 + 80 = (4-a)(2a^2 + 5a + 20) \\ &= (4-a) \left\{ 2 \left(a + \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{135}{8} \right\} \end{aligned}$$

方程式 $(**)$ が異なる 2 つの実数解をもつから, $D > 0$ より

$a \geq 0$ に注意して, $4-a > 0$ を解くと $0 \leq a < 4$

- (2) 2 次方程式 $(**)$ の解を α , β とおくと ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{3a + \sqrt{D/4}}{2} - \frac{3a - \sqrt{D/4}}{2} = \sqrt{D/4} \\ f(x) - g(x) &= -2(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned}$$

$\alpha \leq x \leq \beta$ において, $f(x) - g(x) \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - g(x)\} dx = -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{3}\{D/4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$h(a) = D/4 \text{ とおくと } S = \frac{1}{3}\{h(a)\}^{\frac{3}{2}}$$

$$h(a) = -2a^3 + 3a^2 + 80 \text{ より } h'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a-1)$$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$h'(a)$		+	0	-	
$h(a)$		$\nearrow$	81	$\searrow$	

よって, 求める S の最大値は $\frac{1}{3}\{h(1)\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 81^{\frac{3}{2}} = 243$



- 2 (1) 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, p)$, $C(q, r, s)$ について,
 $OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $OB = OA$ であるから

$$\sqrt{1^2 + p^2} = \sqrt{2} \quad \text{条件 } p > 0 \text{ により } p = 1$$

$OC^2 = AC^2 = BC^2 = 2$ であるから

$$(*) \begin{cases} q^2 + r^2 + s^2 = 2 \\ (q-1)^2 + (r-1)^2 + s^2 = 2 \\ (q-1)^2 + r^2 + (s-1)^2 = 2 \end{cases}$$

(*) の第 2 式, 第 3 式をそれぞれ整理すると

$$(q^2 + r^2 + s^2 - 2) - 2(q + r - 1) = 0,$$

$$(q^2 + r^2 + s^2 - 2) - 2(q + s - 1) = 0$$

(*) の第 1 式を上 の 2 式に代入することにより

$$\begin{cases} q + r - 1 = 0 \\ q + s - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (**) \begin{cases} q = 1 - s \\ r = s \end{cases}$$

(**) を (*) の第 1 式に代入すると

$$(1-s)^2 + s^2 + s^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (s-1)(3s+1) = 0$$

$s > 0$ に注意して $s = 1$ (**) より $q = 0, r = 1$

よって $p = 1, q = 0, r = 1, s = 1$

- (2) 2 点 O, A の z 座標が 0 で, 2 点 B, C の z 座標が 1 であるから, 四面体 $OABC$ の平面 $z = t$ による断面は, 線分 AB, AC, OC, OB を $t : 1 - t$ に内分する点を頂点とする四角形である. これらの頂点を順に D, E, F, G とおくと

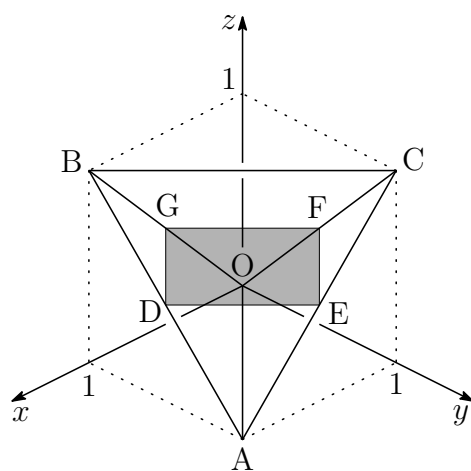
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GF} = t\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FE} = (1-t)\overrightarrow{OA}$$

$\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 0)$ より $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OA}$, この断面積を S とすると

$$S = t(1-t)|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{OA}| = 2t(1-t) = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$0 \leq t \leq 1$ より, 断面積は, $t = \frac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\frac{1}{2}$ をとる. ■



- 3** (1) $w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x) = 0$ の解であるから,
 $f(x)$ は, $(x - w)(x - \bar{w})$, すなわち, $x^2 - x + 1$ を因数にもつ.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c \\ &= (x^2 - x + 1)(x + a + 1) \\ &\quad + (a + b)x - a + c - 1 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad a + b = 0, \quad -a + c - 1 = 0$$

$$\text{よって} \quad a = c - 1, \quad b = 1 - c$$

$$(2) (1) \text{の結果から} \quad f(x) = x^3 + (c - 1)x^2 + (1 - c)x + c$$

$$\text{ゆえに} \quad f(1) = c + 1, \quad f(-1) = 3c - 3$$

$f(1)$ を 7 で割ると 4 余るから

$$c + 1 \equiv 4 \quad \text{ゆえに} \quad c \equiv 3 \pmod{7}$$

$$\text{したがって, 整数 } k \text{ を用いて} \quad c = 7k + 3 \cdots \textcircled{1}$$

$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るから

$$3c - 3 \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad 4 \cdot 3c = 4 \cdot 5 \quad \text{すなわち} \quad c \equiv 9 \pmod{11}$$

① を上式に代入すると

$$7k + 3 \equiv 9 \quad \text{ゆえに} \quad 3 \cdot 7k \equiv 3 \cdot 6 \quad \text{すなわち} \quad k \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\text{したがって, 整数 } \ell \text{ を用いて} \quad k = 11\ell + 4$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入すると} \quad c = 7(11\ell + 4) + 3 = 77\ell + 31$$

c の絶対値が 40 以下であるから

$$c = 31 \quad \text{ゆえに} \quad a = 30, \quad b = -30 \quad \cdots (*)$$

(1) の結果から

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x + a + 1)$$

(*) をこれに代入して

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 31)$$

$$f(x) = 0 \text{ の解は} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \quad -31$$



- 4 (1) X が 5 で割り切れない, すなわち, 4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0 , X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{625}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \frac{19}{144}$$

- (2) X が 2 で割り切れない, すなわち, 4 回とも奇数の目が出る確率を q_0 , X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \frac{37}{48}$$

- (3) X が 100 の倍数となるは, 出る目の組合せが次の (i)~(iv) の場合である.

- (i) $\{A, A, 5, 5\}$ のとき ($A = 2, 6$)

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

- (ii) $\{4, 5, 5, B\}$ のとき ($B = 1, 2, 3, 6$)

$$\frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

- (iii) $\{4, 4, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

- (iv) $\{4, 5, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

- (i)~(iv) より, 求める確率は $\frac{24 + 48 + 6 + 4}{1296} = \frac{82}{1296} = \frac{41}{648}$ ■

10.21 2021年(120分)

出題分野 1 2 3 4

1 座標平面上の3点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 2)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 OAB に内接する円の中心の座標を求めよ。
- (2) 中心が第1象限にあり、 x 軸と y 軸の両方に接し、直線 AB と異なる2つの交点をもつような円を考える。この2つの交点を P , Q とするとき、線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

- (1) 次の条件 A をみたす座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を図示せよ。

条件 A : すべての実数 t に対して $y \geq xt - 2t^2$ が成立する。

- (2) 次の条件 B をみたす座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を図示せよ。

条件 B : $|t| \leq 1$ をみたすすべての実数 t に対して $y \geq xt - 2t^2$ が成立する。3 a を正の実数とし、放物線

$$C : y = -x^2 - 2ax - a^3 + 10a$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線 C と直線 $\ell : y = 8x + 6$ が接するような a の値を求めよ。
- (2) a が (1) で求めた値のとき、放物線 C , 直線 ℓ , y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

- (1) n を自然数とすると、

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1}$$

を求めよ。

- (2) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

解答例

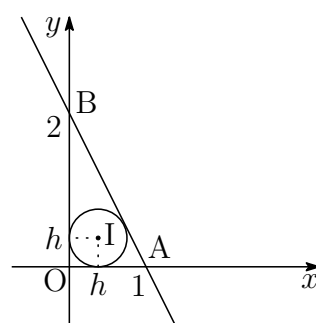
- 1 (1) $\triangle OAB$ の内心を $I(h, h)$ とし ($h > 0$), $\triangle OAB$ の周の長さを ℓ とすると

$$\ell = 1 + 2 + \sqrt{1^2 + 2^2} = 3 + \sqrt{5}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}\ell h \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})h$$

$$\text{これを解いて } h = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ よって } I\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

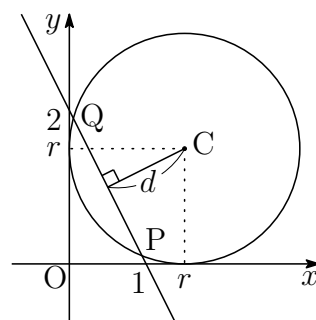


- (2) 2 点 $A(1, 0)$, $B(0, 2)$ を通る直線は

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad 2x + y - 2 = 0$$

中心が第 1 象限で, x 軸と y 軸の両方に接する円の半径を r , 中心を $C(r, r)$, C から直線 AB までの距離を d とすると

$$d = \frac{|2r + r - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|3r - 2|}{\sqrt{5}}$$



この円と直線 AB が 2 つの交点 P , Q をもつとき, $d < r$ であるから

$$\frac{|3r - 2|}{\sqrt{5}} < r \quad \text{整理すると} \quad r^2 - 3r + 1 < 0$$

$$\text{これを解いて} \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < r < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 &= r^2 - d^2 = r^2 - \left(\frac{|3r - 2|}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= -\frac{4}{5}r^2 + \frac{12}{5}r - \frac{4}{5} \\ &= -\frac{4}{5}\left(r - \frac{3}{2}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{ および上式より } \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad PQ \leq 2$$

よって, 線分 PQ の長さの最大値は **2**



2 (1) $y \geq xt - 2t^2$ より $2t^2 - xt + y \geq 0$

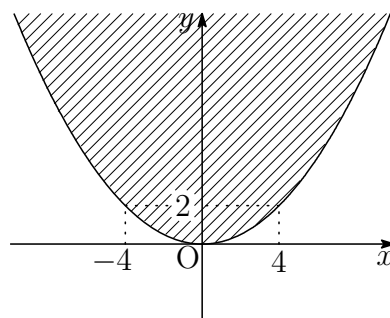
$f(t) = 2t^2 - xt + y$ とおくと

$$(*) \quad f(t) = 2\left(t - \frac{x}{4}\right)^2 - \frac{x^2}{8} + y$$

すべての実数 t に対して, $f(t) \geq 0$ より

$$-\frac{x^2}{8} + y \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \geq \frac{x^2}{8}$$

よって, 求める領域は右上の図の斜線部分で境界線を含む.



(2) (1) と同様に, $|t| \leq 1$ に対して $f(t) \geq 0$

(*) より, 次をみたせばよい.

(i) $\frac{x}{4} < -1$, すなわち, $x < -4$ のとき $f(-1) \geq 0$

$$f(-1) = 2 + x + y \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \geq -x - 2$$

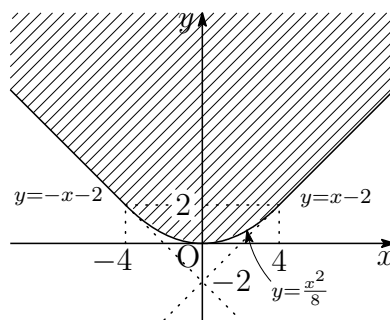
(ii) $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$ のとき $f\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0$

$$f\left(\frac{x}{4}\right) = -\frac{x^2}{8} + y \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \geq \frac{x^2}{8}$$

(iii) $1 < \frac{x}{4}$, すなわち, $4 < x$ のとき $f(1) \geq 0$

$$f(1) = 2 - x + y \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \geq x - 2$$

(i)~(iii) より, 求める領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



- 3 (1) 放物線 $C: y = -x^2 - 2ax - a^3 + 10a$ と直線 $\ell: y = 8x + 6$ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 + 2(a+4)x + a^3 - 10a + 6 = 0 \quad (*)$$

C と ℓ が接するから、上の 2 次方程式の係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= (a+4)^2 - (a^3 - 10a + 6) \\ &= -a^3 + a^2 + 18a + 10 \\ &= -(a-5)(a^2 + 4a + 2) = 0 \end{aligned}$$

$a > 0$ より、 $a^2 + 4a + 2 > 0$ に注意して $\mathbf{a = 5}$

- (2) $a = 5$ のとき、2 次方程式 $(*)$ は

$$x^2 + 18x + 81 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+9)^2 = 0$$

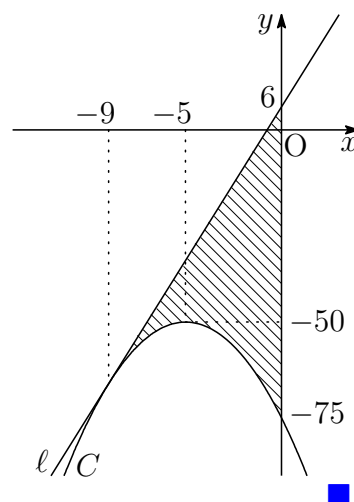
したがって、 C と ℓ の接点の x 座標は

$$x = -9$$

$$(8x+6) - (-x^2 - 2ax - a^3 + 10a) = (x+9)^2$$

であるから、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-9}^0 (x+9)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x+9)^3 \right]_{-9}^0 = \mathbf{243} \end{aligned}$$



$$\boxed{4} \quad (1) \quad x_n = \sum_{k=1}^n k2^{k-1} \text{ とおくと, } x_n = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)2^{k-2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} 2x_n &= \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)2^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n (k-1)2^{k-1} + n2^n \\ &= \sum_{k=1}^n k2^{k-1} - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} + n2^n \\ &= x_n - \frac{2^n - 1}{2 - 1} + n2^n \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad x_n = (n-1)2^n + 1$$

$$(2) \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}a_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} (n+2-k)a_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k \\ &= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

$$\text{整理すると} \quad 2a_{n+2} - 3a_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ とすると } S_1 = a_1 = 2, \quad S_2 = a_1 + a_2 = 4$$

$$2(S_{n+2} - S_{n+1}) - 3(S_{n+1} - S_n) = S_n$$

$$S_{n+2} - 2S_{n+1} = \frac{1}{2}(S_{n+1} - 2S_n)$$

$$S_2 - 2S_1 = 4 - 2 \cdot 2 = 0 \text{ より}$$

$$S_{n+1} - 2S_n = 0 \quad \text{ゆえに} \quad S_n = S_1 2^{n-1} = 2^n$$

したがって

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases} \quad \text{よって} \quad a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 2^{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

補足 $S_1 = 2, S_2 = 4, 2S_{n+2} - 5S_{n+1} + 2S_n = 0$

漸化式の特性方程式は

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 2, \frac{1}{2}$$

したがって, $\{S_n\}$ は定数 p, q を用いて

$$S_n = p2^n + q \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

とおける. このとき

$$2p + \frac{q}{2} = 2, \quad 4p + \frac{q}{4} = 4 \quad \text{これを解いて} \quad p = 1, q = 0$$

したがって $S_n = 2^n$ (以下同様)

別解 $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}a_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2}(2a_1 + a_2) = 1 + \frac{1}{2}(2 \cdot 2 + 2) = 4$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{2}(3a_1 + 2a_2 + a_3) = 1 + \frac{1}{2}(3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4) = 8$$

これから, $\{a_n\}$ を次のように推測する.

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = 2^{n-1} \quad \dots (*)$$

[1] $n = 2$ のとき, $(*)$ は成立する.

[2] $2 \leq n \leq j$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j (j+1-k)a_k \\ &= 1 + \frac{1}{2}(j+1) \sum_{k=1}^j a_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j ka_k \end{aligned}$$

$$a_1 = 2 \text{ より, } \sum_{k=1}^j a_k = 2^j, \quad \sum_{k=1}^j ka_k = (j-1)2^j + 2 \text{ であるから}$$

$$a_{j+1} = 1 + \frac{1}{2}(j+1)2^j - \frac{1}{2}\{(j-1)2^j + 2\} = 2^j$$

よって, $2 \leq n \leq j+1$ のときも, $(*)$ が成立する.

[1], [2] より, $(*)$ が成立する. よって, $a_1 = 2, a_n = 2^{n-1} (n \geq 2)$



10.22 2022年(文系)

出題分野 1 2 3 4

- 1 a を $-3 < a < 13$ をみたす実数とし、次の曲線 C と直線 ℓ が接しているとする。

$$C: y = |x^2 + (3-a)x - 3a|, \quad \ell: y = -x + 13$$

以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた2つの図形のうち、点 $(a, 0)$ が境界線上にある図形の面積を求めよ。

- 2 座標空間内の4点

$$O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(2, 1, 2), P(4, 0, -1)$$

を考える。3点 O, A, B を通る平面を α とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直であり、 x 成分が正であるような、大きさが1のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。
- (2) 点 P から平面 α に垂線を下ろし、その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを求めよ。
- (3) 平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ。

- 3 k を実数とし、整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$$

で定める。方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は $x - 2$ で割り切れることを示せ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は負の実数解をもつことを示せ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ のすべての実数解が整数であり、すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ。

4 定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

$f(x)$ を整式とする。 $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び、 $f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \dots \textcircled{1}$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A), (B), (C) をもつ。

$$(A) \int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$$

$$(B) a \leq c \leq b \text{ のとき, } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(C) 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) \geq h(x)$ ならば,

$$\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$$

ただし、 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は整式、 k , l は定数である。

以下、 $f(x)$ が区間 $0 \leq x \leq 1$ 上で増加関数になる場合を考える。 n を自然数とする。定積分の性質 ア を用い、定数関数に対する定積分の計算を行うと、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと、不等式 $\textcircled{2}$ と定積分の性質 イ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \dots \textcircled{3}$$

よって、 n を限りなく大きくすると、 S_n は $\int_0^1 f(x) dx$ に限りなく近づく。

- (1) 関数 $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるとき,

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことと定積分の定義①を用いて, 性質(A)で $k = l = 1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

を示せ。

- (2) 定積分の定義①と, 関数の増減と導関数の関係を用いて, 次を示せ。

$a < b$ のとき, 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) > 0$ ならば, $\int_a^b g(x) dx > 0$

- (3) (A), (B), (C) のうち, 空欄 に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで, 不等式②を示せ。
- (4) (A), (B), (C) のうち, 空欄 に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また, 不等式③を示せ。

解答例

- 1 (1) 曲線 $C: y = |x^2 + (3-a)x - 3a| = |(x+3)(x-a)|$ ($-3 < a < 13$) および直線 $\ell: y = -x + 13$ が接するとき, C と ℓ の x 軸との交点の x 座標に注目すると, C と ℓ の接点の x 座標は区間 $-3 < a < 13$ にあるから

$$-\{x^2 + (3-a)x - 3a\} = -x + 13$$

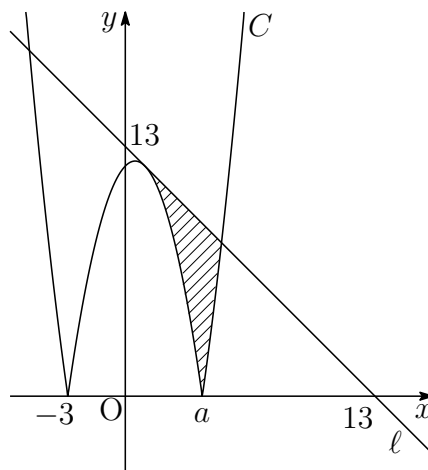
$$\text{したがって } x^2 + (2-a)x + 13 - 3a = 0 \quad \cdots (*)$$

このとき, 係数について

$$D = (2-a)^2 - 4 \cdot 1(13-3a) = 0, \quad -3 < -\frac{2-a}{2} < a$$

$$\text{それぞれ整理すると } (a+12)(a-4) = 0, \quad -2 < a$$

$-3 < a < 13$ に注意して, これを解くと $a = 4$



- (2) 接点の x 座標は, (1) の結果から $-\frac{2-a}{2} = -\frac{2-4}{2} = 1$
 $x > 4$ における C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x^2 - x - 12 = -x + 13 \quad x \text{ の範囲に注意して解くと } x = 5$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 \{(-x+13) - |(x+3)(x-4)|\} dx \\ &= \int_1^4 (x-1)^2 dx + \int_4^5 (-x^2 + 25) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^4 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 25x \right]_4^5 = \frac{41}{3} \end{aligned}$$



- 2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (2, 1, 2)$
 $\vec{n} = (x, y, z)$ とおくと, $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ であるから

$$x + y = 0, \quad 2x + y + 2z = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = -x, \quad z = -\frac{1}{2}x$$

$$\vec{n} = \left(x, -x, -\frac{1}{2}x\right), \quad |\vec{n}|^2 = 1 \quad \text{であるから}$$

$$x^2 + x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2 = 4$$

$$x > 0 \text{ に注意して } x = \frac{2}{3} \quad \text{よって} \quad \vec{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

- (2) $\overrightarrow{ON} = \vec{n}$ とし, P から直線 ON に引いた垂線の交点を T とすると

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OT}, \quad \overrightarrow{OT} = (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (*)$$

$$\overrightarrow{OP} = (4, 0, -1) \text{ より, } \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = 3 \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{OT} = (2, -2, -1), \quad |\overrightarrow{OT}| = 3 \quad (**)$$

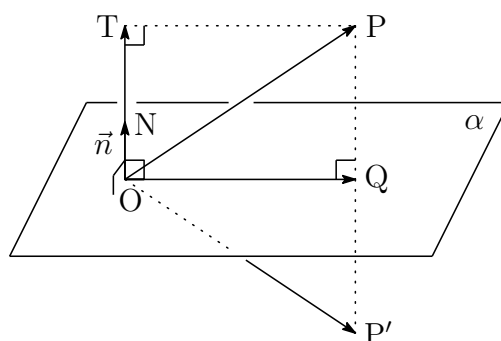
$$PQ = |\overrightarrow{OT}| \text{ であるから } \mathbf{PQ} = 3$$

- (3) (*) の第1式と (**) の第1式により,

$$(4, 0, -1) = \overrightarrow{OQ} + (2, -2, -1) \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OQ} = (2, 2, 0)$$

したがって

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{OQ} + (-\overrightarrow{OT}) = (0, 4, 1) \quad \text{よって} \quad \mathbf{P'(0, 4, 1)}$$



- 3 (1) $f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$ について

$$f(2) = 2^4 + 6 \cdot 2^3 - k \cdot 2^2 + 2k \cdot 2 - 64 = 0$$

因数定理により, $f(x)$ は $x - 2$ を因数にもつ, すなわち, $f(x)$ は $x - 2$ で割り切れる.

- (2) (1) の結果から

$$f(x) = (x - 2)\{x^3 + 8x^2 + (16 - k)x + 32\}$$

条件から, 3 次方程式 $x^3 + 8x^2 + (16 - k)x + 32 = 0$ の解を $\alpha, \bar{\alpha}, r$ とおくと, 解と係数の関係から

$$\alpha \bar{\alpha} r = -32 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2 r = -32$$

したがって, r は負の実数. よって, $f(x) = 0$ は負の実数解をもつ.

- (3) $\alpha = p + qi, \bar{\alpha} = p - qi$ とおく ($q > 0$). 条件から, p, q, r は整数であり, 解と係数の関係から

$$\begin{aligned} (p + qi) + (p - qi) + r &= -8, \\ (p + qi)(p - qi) + (p + qi)r + (p - qi)r &= 16 - k, \\ (p + qi)(p - qi)r &= -32 \end{aligned}$$

これらをそれぞれ整理すると

$$2p + r = -8, \quad p^2 + q^2 + 2pr = 16 - k, \quad (p^2 + q^2)r = -32 \quad (*)$$

(*) の第 1 式から, $r = -2p - 8 \cdots \textcircled{1}$. これを (*) の第 3 式に代入すると

$$(p^2 + q^2)(p + 4) = 16$$

上式において $p + 4 \geq 1$ ($p + 4$ は 16 の約数), $p^2 < p^2 + q^2 \leq 16$ より

$$p = -3, -2, 0$$

$p = -3$ のとき, $9 + q^2 = 16$ より, $q^2 = 7$ となり, 不適

$p = -2$ のとき, $(4 + q^2) \cdot 2 = 16$ より, $q = 2$

$p = 0$ のとき, $4q^2 = 16$ より, $q = 2$

① より $(p, q, r) = (-2, 2, -4), (0, 2, -8)$

(*) の第 2 式より, $k = 16 - (p^2 + q^2 + 2pr)$ であるから $k = -8, 12$ ■

- 4 (1) $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ を満たす $F(x)$, $G(x)$ をとり,

$$H(x) = F(x) + G(x), \quad h(x) = H'(x)$$

とすると, 次式が成立する.

$$h(x) = H'(x) = \{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

上式および定積分の定義①により

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx &= \int_a^b h(x) dx = \left[H(x) \right]_a^b = H(b) - H(a) \\ &= F(b) + G(b) - \{F(a) + G(a)\} \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

- (2) $G'(x) = g(x)$ を満たす $G(x)$ をとると, 定積分の定義により

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$$

区間 $a \leq x \leq b$ において $G'(x) = g(x) > 0$ より, 関数 $G(x)$ はこの区間で増加するから

$$G(a) < G(b) \quad \text{ゆえに} \quad G(b) - G(a) > 0$$

以上の結果から

$$\int_a^b g(x) dx > 0$$

(3) 答 (C)

$f(x)$ は, 区間 $\frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}$ で連続な増加関数であるから ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

性質 (C) により

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i-1}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i}{n}\right) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

したがって

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(4) 答 (B)

S_n の定義により

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0) \\ &= S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \end{aligned}$$

上式に注意すると, ② より

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \\ S_n &\leq \int_0^1 f(x) dx \leq S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \end{aligned}$$

よって $0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$



10.23 2023年(文系)

出題分野 ① ② ③ ④

- ① a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする。 xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を、次のように定める。

$$C: y = |(x-3)(x+3)|, \quad \ell: y = a$$

曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち、 $y \geq a$ の領域にある部分の面積を S_1 、 $y \leq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

- ② xy 平面上の曲線 $C: y = x^3 - x$ を考える。実数 $t > 0$ に対して、曲線 C 上の点 $A(t, t^3 - t)$ における接線を ℓ とする。直線 ℓ と直線 $y = -x$ の交点を B 、三角形 OAB の外接円の中心を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 B の座標を t を用いて表せ。
- (2) $\theta = \angle OBA$ とする。 $\sin^2 \theta$ を t を用いて表せ。
- (3) $f(t) = \frac{OP}{OA}$ とする。 $t > 0$ のとき、 $f(t)$ を最小にする t の値と $f(t)$ の最小値を求めよ。

- ③ 点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない2つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \quad \vec{n} = (b, d)$$

に対して、 $D = ad - bc$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D = 0$ であることを示せ。以下、 $D \neq 0$ であるとする。
- (2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}$, $\vec{w}$ で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 0$$

を満たすものを求めよ。

- (3) 座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して

$$r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$$

を満たす実数 r と s を $\vec{q}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ を用いて表せ。

4 ω を $x^3 = 1$ の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて、次の規則で4つの複素数 $0, 1, \omega, \omega^2$ を並べていくことにより、複素数の列 $z_1, z_2, z_3, \dots$ を定める。

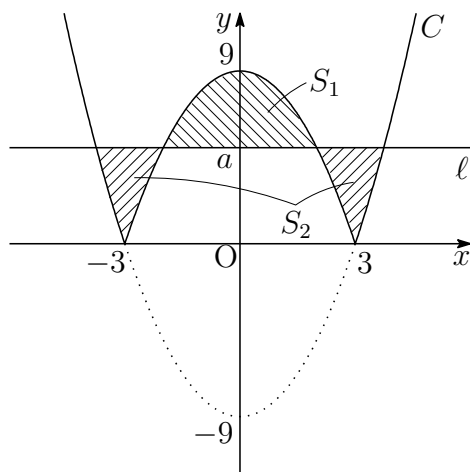
- $z_1 = 0$ とする。
- z_k まで定まったとき、さいころを投げて、出た目を t とする。このとき z_{k+1} を以下のように定める。
 - $z_k = 0$ のとき、 $z_{k+1} = \omega^t$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 1, 2$ のとき、 $z_{k+1} = 0$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 3$ のとき、 $z_{k+1} = \omega z_k$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 4$ のとき、 $z_{k+1} = \overline{\omega z_k}$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 5$ のとき、 $z_{k+1} = z_k$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 6$ のとき、 $z_{k+1} = \overline{z_k}$ とする。

ここで複素数 z に対し、 $\bar{z}$ は z と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。

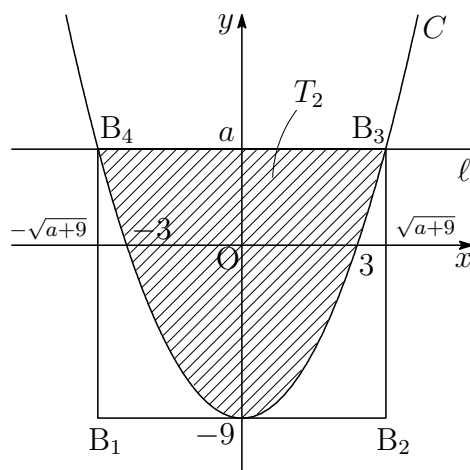
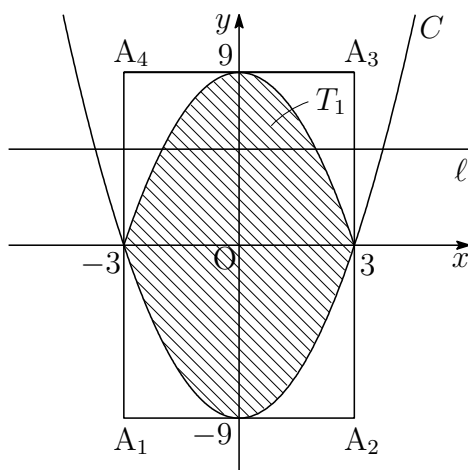
- (1) $\omega^2 = \bar{\omega}$ となることを示せ。
- (2) $z_n = 0$ となる確率を n の式で表せ。
- (3) $z_3 = 1, z_3 = \omega, z_3 = \omega^2$ となる確率をそれぞれ求めよ。
- (4) $z_n = 1$ となる確率を n の式で表せ。

解答例

1 S_1, S_2 は下の図の斜線部分の面積である.



$S_1 = S_2$ のとき, 下の2つ図の斜線部分の面積 T_1, T_2 について, $T_1 = T_2$ である.



T_1, T_2 は, それぞれ図の長方形 $A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4$ の面積の $\frac{2}{3}$ であるから, このとき, これら2つの長方形の面積は等しい.

$$6 \times 18 = 2\sqrt{a+9} \times (a+9) \quad \text{ゆえに} \quad (a+9)^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 3^3$$

$$\text{したがって} \quad a+9 = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^2 \quad \text{よって} \quad a = 9(\sqrt[3]{4} - 1)$$

補足 下の fig-1 について, 2つの面積 S_1 と S_2 の面積比を考える.

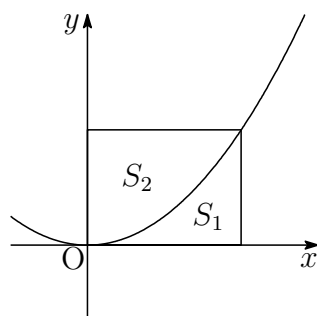


fig-1

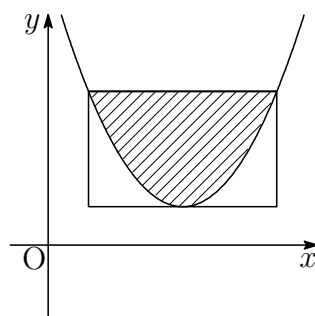


fig-2

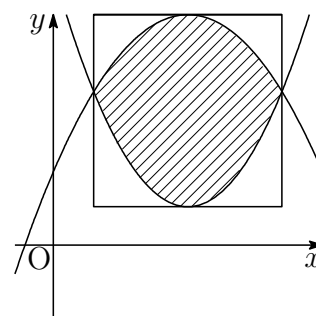


fig-3

S_1 を放物線 $y = kx^2$ と直線 $x = a$ と x 軸で囲まれた部分の面積とすると

$$S_1 = \int_0^a kx^2 dx = k \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{1}{3}ka^3 \quad (k, a > 0)$$

$S_1 + S_2$ は x 軸, y 軸, 直線 $x = a$, 直線 $y = ka^2$ で囲まれた部分の面積であるから

$$S_1 + S_2 = a \cdot ka^2 = ka^3 \quad \text{上の結果から} \quad S_2 = \frac{2}{3}ka^3 \quad \text{よって} \quad S_1 : S_2 = 1 : 2$$

fig-2 の放物線は fig-1 の放物線を平行移動したものとする. fig-2 の放物線の軸に関する対称性により, 斜線部の面積は長方形の面積の $2/3$ であることがわかる.

さらに, fig-2 の面積比を利用すると, fig-3 における斜線部分の面積も長方形の面積の $2/3$ であることもわかる. ■

- 2 (1) $y = x^3 - x$ より $y' = 3x^2 - 1$
 C 上の点 $A(t, t^3 - t)$ における接線 ℓ は

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

$$\text{すなわち } y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

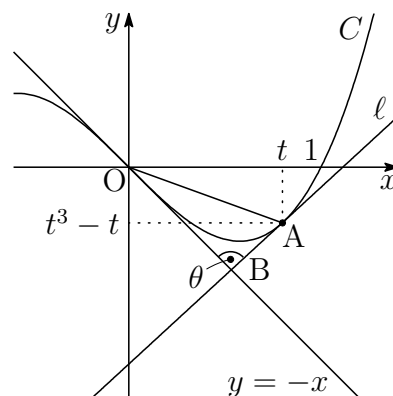
これと $y = -x$ から y を消去すると

$$(3t^2 - 1)x - 2t^3 = -x$$

$$\text{整理すると } t^2(3x - 2t) = 0$$

$$t > 0 \text{ であるから } 3x - 2t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{2t}{3}$$

$$\text{これを } y = -x \text{ に代入して } B\left(\frac{2t}{3}, -\frac{2t}{3}\right)$$



- (2) 直線 ℓ の偏角を α , 直線 $y = -x$ の偏角を β とすると

$$\tan \alpha = 3t^2 - 1, \quad \tan \beta = -1, \quad \theta = \frac{3}{4}\pi - \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{-1 - (3t^2 - 1)}{1 + (-1) \cdot (3t^2 - 1)} = \frac{3t^2}{3t^2 - 2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \left(\frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = 1 + \left(\frac{3t^2 - 2}{3t^2}\right)^2 = \frac{18t^4 - 12t^2 + 4}{9t^4} \quad (*)$$

$$\text{したがって} \quad \sin^2 \theta = \frac{9t^4}{18t^4 - 12t^2 + 4}$$

- (3) 点 P は $\triangle OAB$ の外心であるから, 正弦定理により

$$\frac{OA}{\sin \theta} = 2OP \quad \text{ゆえに} \quad f(t) = \frac{OP}{OA} = \frac{1}{2 \sin \theta} \quad (**)$$

$$(*), (**) \text{ より, } u = \frac{2}{t^2} \text{ とおくと } (u > 0)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{18 - 6 \cdot \frac{2}{t^2} + \left(\frac{2}{t^2}\right)^2} = \frac{1}{6} \sqrt{18 - 6u + u^2} = \frac{1}{6} \sqrt{(u - 3)^2 + 9}$$

$$u = 3 \quad \text{すなわち} \quad t = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ のとき, 最小値 } \frac{1}{2} \text{ をとる.} \quad \blacksquare$$

3 (1) $\vec{m} = (a, c)$, $\vec{n} = (b, d)$ より $(\vec{m} \neq \vec{0}, \vec{n} \neq \vec{0})$

$$\begin{cases} d\vec{m} - c\vec{n} = (ad - bc, 0) = (D, 0) \\ -b\vec{m} + a\vec{n} = (0, ad - bc) = (0, D) \end{cases} \quad (*)$$

$$(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (ab + cd)^2 + (ad - bc)^2 \text{ より}$$

$$|\vec{m}|^2 |\vec{n}|^2 = (\vec{m} \cdot \vec{n})^2 + D^2 \quad (**)$$

(i) $D = 0$ のとき, $(*)$ より

$$d\vec{m} = c\vec{n}, \quad b\vec{m} = a\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{m} // \vec{n}$$

(ii) $\vec{m} // \vec{n}$ のとき, $|\vec{m}|^2 |\vec{n}|^2 = (\vec{m} \cdot \vec{n})^2$ であるから, $(**)$ より

$$D = 0$$

(i), (ii) より $D = 0 \iff \vec{m} // \vec{n}$ [証終]

(2) $D \neq 0$ のとき, 基本ベクトル $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ は, $(*)$ より

$$\vec{e}_1 = (1, 0) = \frac{d\vec{m} - c\vec{n}}{D}, \quad \vec{e}_2 = (0, 1) = \frac{-b\vec{m} + a\vec{n}}{D} \quad (\#)$$

と表される.

$(\#)$ の基本ベクトルと $\vec{v}$ の内積をとると

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{v} &= \frac{(d\vec{m} - c\vec{n}) \cdot \vec{v}}{D} = \frac{d\vec{m} \cdot \vec{v} - c\vec{n} \cdot \vec{v}}{D} = \frac{d}{D} \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{v} &= \frac{(-b\vec{m} + a\vec{n}) \cdot \vec{v}}{D} = \frac{-b\vec{m} \cdot \vec{v} + a\vec{n} \cdot \vec{v}}{D} = -\frac{b}{D} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \frac{1}{D} (d, -b)$$

同様に, $(\#)$ の基本ベクトルと $\vec{w}$ の内積をとると

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{w} &= \frac{(d\vec{m} - c\vec{n}) \cdot \vec{w}}{D} = \frac{d\vec{m} \cdot \vec{w} - c\vec{n} \cdot \vec{w}}{D} = -\frac{c}{D} \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{w} &= \frac{(-b\vec{m} + a\vec{n}) \cdot \vec{w}}{D} = \frac{-b\vec{m} \cdot \vec{w} + a\vec{n} \cdot \vec{w}}{D} = \frac{a}{D} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{w} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \frac{1}{D} (-c, a)$$

(3) ベクトル $\vec{v}$, $\vec{w}$ が

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすことを利用して、内積 $\vec{q} \cdot \vec{v}$, $\vec{q} \cdot \vec{w}$ を求めると

$$\begin{aligned} \vec{q} \cdot \vec{v} &= (r\vec{m} + s\vec{n}) \cdot \vec{v} \\ &= r\vec{m} \cdot \vec{v} + s\vec{n} \cdot \vec{v} = r, \\ \vec{q} \cdot \vec{w} &= (r\vec{m} + s\vec{n}) \cdot \vec{w} \\ &= r\vec{m} \cdot \vec{w} + s\vec{n} \cdot \vec{w} = s \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad r = \vec{q} \cdot \vec{v}, \quad s = \vec{q} \cdot \vec{w}$$



4 (1) $x^3 = 1$ より, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ を解くと

$$x = 1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

ω は方程式 $x^3 = 1$ の解で虚部が正であるから

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$\omega^3 = 1$, $\omega\bar{\omega} = 1$ であるから

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$$

- (2) $z_n = 0, z_n = 1, z_n = \omega, z_n = \omega^2$ となる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とおくと、初期条件から、 $p_1 = 1, q_1 = r_1 = s_1 = 0$ となる。

また、さいころの出た目による z_n から z_{n+1} の推移は次のようになる。

	$z_n = 0$	$z_n = 1$	$z_n = \omega$	$z_n = \omega^2$
1	ω	0	0	0
2	ω^2	0	0	0
3	1	ω	ω^2	1
4	ω	ω^2	ω	1
5	ω^2	1	ω	ω^2
6	1	1	ω^2	ω

したがって、次の確率漸化式が成立する。

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} p_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}s_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}s_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{6}s_n \\ s_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{6}s_n \end{array} \right.$$

(*) の第 3 式と第 4 式から $r_{n+1} = s_{n+1}$

また、 $r_1 = s_1 = 0$ より $r_n = s_n$ ($n \geq 1$)

$s_n = r_n$ を (*) の第 2 式と第 3 式に代入すると

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n, \quad r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{2}r_n$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$q_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{6}(q_n - r_n)$$

$q_1 = r_1 = 0$ であるから $q_n = r_n$ ($n \geq 0$)

$q_n = r_n = s_n$ であるから、(*) の第 1 式および第 2 式において、

$r_n = q_n, s_n = q_n$ を代入して整理すると

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} p_{n+1} = q_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n \end{array} \right.$$

(**) の2式から

$$\begin{aligned} p_{n+1} - q_{n+1} &= -\frac{1}{3}(p_n - q_n), \\ p_{n+1} + 3q_{n+1} &= p_n + 3q_n \end{aligned}$$

$p_1 = 1, q_1 = 0$ より

$$\begin{aligned} p_n - q_n &= (p_1 - q_1) \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \\ p_n + 3q_n &= p_1 + 3q_1 = 1 \end{aligned}$$

上の2式および $q_n = r_n = s_n$ から

$$p_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}, \quad q_n = r_n = s_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \quad (\#)$$

$$z_n = 0 \text{ となる確率 } p_n \text{ は } \quad p_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

(3) $z_3 = 1, z_3 = \omega, z_3 = \omega^2$ となる確率は、それぞれ q_3, r_3, s_3 であるから、
(#) より

$$q_3 = r_3 = s_3 = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right\} = \frac{2}{9}$$

(4) $z_n = 1$ となる確率は q_n であるから、(#) より

$$q_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

■

10.24 2024 年 (文系)

出題分野 1 2 3 4

1 2つの放物線

$$C_1 : y = 2x^2, \quad C_2 : y = 2x^2 - 8x + 16$$

の両方に接する直線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 2つの放物線 C_1 , C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 座標平面上の原点 $O(0, 0)$, 点 $A(2, 1)$ を考える。点 B は第 1 象限にあり, $|\vec{OB}| = \sqrt{10}$, $\vec{OA} \perp \vec{AB}$ をみたすとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 B の座標を求めよ。
- (2) s, t を正の実数とし, $\vec{OC} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ をみたす点 C を考える。三角形 OAC と三角形 OBC の面積が等しく, $|\vec{OC}| = 4$ が成り立つとき, s, t の値を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 a, b が $a < b$ をみたすとき, $\frac{b!}{a!} \geq b$ が成り立つことを示せ。
- (2) $2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (3) $a! + b! = 2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

4 n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち, x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $L(3)$ を求めよ。
- (2) $L(4)$ を求めよ。
- (3) $L(5)$ を求めよ。

解答例

- 1 (1) $y = 2x^2$ を微分すると $y' = 4x$
 C_1 上の点 $(t, 2t^2)$ における接線の方程式は

$$y - 2t^2 = 4t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 4tx - 2t^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

C_2 と直線 ① の方程式から y を消去すると

$$2x^2 - 8x + 16 = 4tx - 2t^2$$

整理すると $x^2 - 2(t+2)x + t^2 + 8 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

C_2 と直線 ① が接するから、② の係数について

$$D/4 = (t+2)^2 - (t^2 + 8) = 4t - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 1$$

求める直線 ℓ の方程式は、 $t = 1$ を ① に代入して $y = 4x - 2$

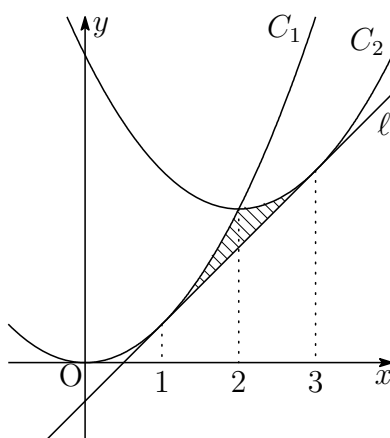
- (2) $t = 1$ より、 C_1 と ℓ の接点の x 座標は $x = 1$

また、② の係数から、 C_2 と ℓ の接点の x 座標は

$$x = -\frac{-2(t+2)}{2 \cdot 1} = t + 2 = 1 + 2 = 3$$

よって、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{2x^2 - (4x - 2)\} dx + \int_2^3 \{(2x^2 - 8x + 16) - (4x - 2)\} dx \\ &= \int_1^2 2(x-1)^2 dx + \int_2^3 2(x-3)^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \left[(x-1)^3 \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[(x-3)^3 \right]_2^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



- 2** (1) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB} = 0$ より, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ であるから

$$\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|^2 = 5$$

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とすると, $\overrightarrow{OA} = (2, 1)$ より $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$\overrightarrow{OA}$ の偏角を α とすると

$$(2, 1) = |\overrightarrow{OA}|(\cos \alpha, \sin \alpha) = (\sqrt{5} \cos \alpha, \sqrt{5} \sin \alpha)$$

点 B が第 1 象限の点であることから, $B(b_1, b_2)$ とすると

$$b_1 = |\overrightarrow{OB}| \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{10} \left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{5} \cos \alpha - \sqrt{5} \sin \alpha = 2 - 1 = 1,$$

$$b_2 = |\overrightarrow{OB}| \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{10} \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{5} \sin \alpha + \sqrt{5} \cos \alpha = 1 + 2 = 3$$

よって **B(1, 3)**

- (2) $\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = s(2, 1) + t(1, 3) = (2s + t, s + 3t)$ より ($s, t > 0$)

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} |2 \cdot (s + 3t) - 1 \cdot (2s + t)| = \frac{5}{2} |t| = \frac{5}{2} t$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} |1 \cdot (s + 3t) - 3 \cdot (2s + t)| = \frac{5}{2} |s| = \frac{5}{2} s$$

$\triangle OAC = \triangle OBC$ より, $s = t$ であるから $\overrightarrow{OC} = (3s, 4s)$

$$|\overrightarrow{OC}| = 4 \text{ より } \sqrt{(3s)^2 + (4s)^2} = 5s = 4 \quad \text{よって} \quad s = t = \frac{4}{5}$$



- 3** (1) $b > a$ のとき, $b - 1 \geq a$ であるから $(b - 1)! \geq a!$

$$b! = b \cdot (b - 1)! \geq b \cdot a! \quad \text{よって} \quad \frac{b!}{a!} \geq b$$

- (2) $2 \cdot a! = b!$ より $\frac{b!}{a!} = 2 > 1$ であるから

$$a! < b! \quad \text{すなわち} \quad a < b$$

$a < b$ より, (1) の結論を用いると

$$2 = \frac{b!}{a!} \geq b > a \quad \text{よって} \quad (a, b) = (1, 2)$$

- (3) (i) $a \leq c, b \leq c$ のとき

$$\frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} = 2, \quad \frac{a!}{c!} \leq 1, \quad \frac{b!}{c!} \leq 1$$

このとき $\frac{a!}{c!} = 1, \frac{b!}{c!} = 1$ すなわち $a = c, b = c \cdots (*)$

- (ii) $a > c$ または $b > c$ のとき, 一般性を失うことなく, $b > c$ とし,
(1) の結論を用いると

$$2 = \frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} \geq \frac{a!}{c!} + b > b > c \geq 1$$

これをみたす b, c は存在しない.

- (i), (ii) より $(a, b, c) = (n, n, n)$ (n は自然数) ■

- 4 (1) 条件を満たす直線は、次の 8 本より $L(3) = 8$

$$y = x, \quad y = -x + 4, \quad x = k, \quad y = k \quad (k = 1, 2, 3)$$

- (2) 条件を満たす直線は、次の 14 本より $L(4) = 14$

$$\begin{aligned} y = x - 1, \quad y = x, \quad y = x + 1, \\ y = -x + 4, \quad y = -x + 5, \quad y = -x + 6, \\ x = k, \quad y = k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

- (3) 条件を満たす直線で傾きが 0 以上の直線は、(i)~(iv) の 16 本ある.

(i) 条件を満たす x 軸に平行な直線は $y = k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$

(ii) 条件を満たす傾き $\frac{1}{2}$ の直線は $y - k = \frac{x - 1}{2} \quad (k = 1, 2, 3)$

(iii) 条件を満たす傾き 1 の直線は $y = x + k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2)$

(iv) 条件を満たす傾き 2 の直線は $y - 1 = 2(x - k) \quad (k = 1, 2, 3)$

(i)~(iv) の直線を点 (3, 3) を中心に 90° 回転させた直線も条件を満たす.

よって $L(5) = 16 \times 2 = 32$ ■