

平成16年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 医(医・保健(理学・放射線・検査)), 歯, 獣医, 水産)

問題 1 2 3 4 5

1 次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1 = 1$$

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

を考える. ただし, i は虚数単位である.

(1) z_2, z_3 を求めよ.

(2) 上の漸化式を

$$z_{n+1} - \alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \alpha)$$

と表したとき, 複素数 α を求めよ.

(3) 一般項 z_n を求めよ.

(4) $z_n = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ.

2 A を2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ (ただし, $bc \neq 0$), k を実数とする.

行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ について等式

$$XA - AX = kA \quad \dots (*)$$

を考える. ただし, 行列の成分は, すべて実数とする.

(1) $k=0$ のとき, $(*)$ を満たす X は A の実数倍であることを示せ.

(2) $k \neq 0$ のとき, $(*)$ を満たす X が存在するための必要十分条件は $A^2 = O$ (ただし, O は零行列) であることを示せ. このとき, $(*)$ を満たす X で $z=c$ であるものを求めよ.

3 a を 1 以上の実数, b を正の実数とする.

- (1) 0 以上のすべての実数 x について, 不等式 $e^x - a(x+2b) \geq 0$ が成り立つための, a, b の満たすべき条件を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.
- (2) a, b が (1) で求めた範囲を動くとき, 定積分

$$\frac{1}{ae^b} \int_0^1 \frac{1}{x+2b} dx$$

の値を最小にする a, b と, その最小値を求めよ.

4 a, b を正の実数とする. 空間内の 2 点 $A(0, a, 0)$, $B(1, 0, b)$ を通る直線を ℓ とする. 直線 ℓ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする.

- (1) x 座標の値が t であるような直線 ℓ 上の点 P の座標を求めよ.
- (2) 図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ.
- (3) 図形 M と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ.

5 ある人がサイコロを振る試行によって, 部屋 A, B を移動する. サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る. また各試行の結果, 部屋 A に居る場合はその人の持ち点に 1 点を加え, 部屋 B に居る場合は 1 点を減らす. 持ち点は負になることもあるとする. 第 n 試行の結果, 部屋 A, B に居る確率をそれぞれ $P_A(n)$, $P_B(n)$ と表す. 最初にその人は部屋 A に居るものとし (つまり, $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$ とする), 持ち点は 1 とする.

- (1) $P_A(1)$, $P_A(2)$, $P_A(3)$ および $P_B(1)$, $P_B(2)$, $P_B(3)$ を求めよ. また, 第 3 試行の結果, その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ.
- (2) $P_A(n+1)$, $P_B(n+1)$ を $P_A(n)$, $P_B(n)$ を用いて表せ.
- (3) $P_A(n)$, $P_B(n)$ を n を用いて表せ.
- (4) 第 n 試行の結果, その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ.

解答例

1 (1) $z_1 = 1$, $(*)$ $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1$ より

$$z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{3+i\sqrt{3}}{2},$$

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3+i\sqrt{3}}{2} + 1 = 1 + i\sqrt{3}$$

(2) $z_{n+1} - \alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \alpha)$ および $(*)$ から

$$\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha + 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\alpha = 1 \quad \text{よって} \quad \alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

(3) (2) の結果から $z_{n+1} - \alpha = \alpha(z_n - \alpha)$

$$z_n - \alpha = \alpha^{n-1}(1 - \alpha) = \alpha^{n-1}(-\alpha^2) \quad \text{ゆえに} \quad z_n = \alpha(1 - \alpha^n) \quad (**)$$

$$\text{よって} \quad z_n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

(4) $-\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \alpha^2$ であるから, $z_n = \alpha^2$ となるとき, $(**)$ より

$$\alpha(1 - \alpha^n) = \alpha^2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^n = 1 - \alpha = -\alpha^2 = \alpha^5$$

$$|\alpha| = 1, \quad \arg \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{であるから} \quad n \equiv 5 \pmod{6}, \quad n > 0$$



2 (1) $XA - AX = kA$ より

$$\begin{pmatrix} cy - bz & 2(bx - ay) \\ 2(az - cx) & -(cy - bz) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

成分を比較すると

$$cy - bz = ka, \quad 2(bx - ay) = kb, \quad 2(az - cx) = kc$$

したがって
$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 2b & -2a & 0 \\ -2c & 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

上式の 3×3 行列は正則ではない. $k = 0$ のとき, $bc \neq 0$ に注意して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2b \\ -2a \\ 0 \end{pmatrix} = -2b \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq o$$

よって, X は A の実数倍である.

(2) (*) より

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 2b & -2a & 0 \\ 0 & -2ca & 2ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2bc \end{pmatrix} \quad (**)$$

行列の第1行と第3行に注意して $-2a \cdot a = 2bc$

したがって $a^2 + bc = 0$ すなわち $\det A = 0$

ハミルトン・ケリーの定理を A に適用すると

$$A^2 = O \iff a^2 + bc = 0$$

(**) に条件の $z = c$ を代入すると, 第1行および第2行より

$$cy - bc = ka, \quad 2bx - 2by = kc$$

$c \neq 0, a^2 + bc = 0$ に注意して $x = a - \frac{k}{2}, y = b + \frac{ka}{c}$

よって
$$X = \begin{pmatrix} a - \frac{k}{2} & b + \frac{ka}{c} \\ c & -a + \frac{k}{2} \end{pmatrix}$$

■

- 3** (1) $f(x) = e^x - a(x + 2b)$ ($x \geq 0$) とおくと $f'(x) = e^x - a$
 $f(x)$ の増減は, $a \geq 1$ に注意して

x	0	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

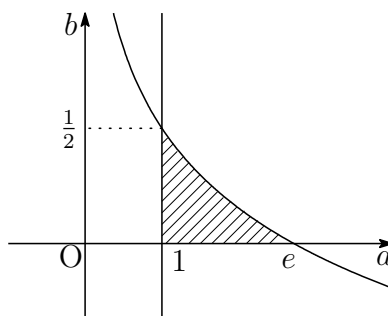
$f(\log a) \geq 0$ を満たせばよいから

$$a - a(\log a + 2b) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log a$$

よって 求める条件は $0 < b \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log a, \quad a \geq 1$

- (2) (1) の結果から, 点 (a, b) の表す領域は次のようになる. ただし, a 軸上の点は含まない. また, この領域は, 次のように表すこともできる.

$$(*) \quad 1 \leq a \leq e^{1-2b}, \quad 0 < b \leq \frac{1}{2}$$



与えられた定積分を I とすると

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{ae^b} \int_0^1 \frac{1}{x+2b} dx = \frac{1}{ae^b} \left[\log(x+2b) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{ae^b} \{ \log(1+2b) - \log 2b \} \end{aligned}$$

(*) より

$$I \geq \frac{1}{e^{1-2b}e^b} \{ \log(1+2b) - \log 2b \} = e^{b-1} \{ \log(1+2b) - \log 2b \}$$

上式において, 等号が成立するとき $a = e^{1-2b} \quad \cdots \textcircled{1}$

$$g(b) = e^{b-1} \{ \log(1+2b) - \log 2b \} \quad \left(0 < b \leq \frac{1}{2} \right) \text{ とおくと}$$

$$g'(b) = e^{b-1} \left\{ \log(1+2b) - \log 2b + \frac{2}{1+2b} - \frac{1}{b} \right\}$$

$$\text{ここで, } h(b) = \log(1+2b) - \log 2b + \frac{2}{1+2b} - \frac{1}{b} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} h'(b) &= \frac{2}{1+2b} - \frac{1}{b} - \frac{4}{(1+2b)^2} + \frac{1}{b^2} \\ &= \frac{-2b^2 + 3b + 1}{b^2(1+2b)^2} = \frac{b(3-2b)+1}{b^2(1+2b)^2} > 0 \end{aligned}$$

$0 < b \leq \frac{1}{2}$ において, $h'(b) > 0$ より, $h(x)$ は単調増加である.

$$h(b) \leq h\left(\frac{1}{2}\right) = \log 2 - 1 < 0 \quad \left(0 < b \leq \frac{1}{2} \right)$$

$g'(b) = e^{b-1}h(b) < 0$ となるから, $g(b)$ は単調減少であるから

$$g(b) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \log 2 = \frac{\log 2}{\sqrt{e}}$$

① より, $b = \frac{1}{2}$ のとき $a = 1$

よって $a = 1, b = \frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{\log 2}{\sqrt{e}}$

■

- 4 (1) 2点 $A(0, a, 0)$, $B(1, 0, b)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$x = \frac{y-a}{-a} = \frac{z}{b}$$

$x = t$ のとき, 点 P の座標は $(t, a - at, bt)$

- (2) ℓ の方程式から $y = a - ax$, $z = bx$

M は ℓ を x 軸まわりに 1 回転させたものであるから, M は

$$y^2 + z^2 = (a - ax)^2 + (bx)^2 \quad (*)$$

M と xy 平面が交わって得られる図形は, $z = 0$ を代入して

$$y^2 = (a - ax)^2 + bx^2$$

よって $y^2 = (a^2 + b^2)x^2 - 2a^2x + a^2$

- (3) (2) の結果から, 求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \{(a^2 + b^2)x^2 - 2a^2x + a^2\} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}(a^2 + b^2)x^3 - a^2x^2 + a^2x \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3}(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

補足 (*) は一葉双曲面

$$-(a^2 + b^2) \left(x - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

であり, これと xy 平面との断面の図形が (2) で求めた双曲線である. 一葉双曲面は線織面である. 神戸のポートタワーが一葉双曲面で真っ直ぐな鉄筋の柱で支えられていることで有名である. ■

- 5** (1) 与えられた条件から、次の漸化式が成立する.

$$\begin{aligned} P_A(0) &= 1, \quad P_B(0) = 0, \\ P_A(n+1) &= \frac{2}{3}P_A(n) + \frac{1}{3}P_B(n), \\ P_B(n+1) &= \frac{1}{3}P_A(n) + \frac{2}{3}P_B(n) \end{aligned}$$

上の2式から

$$\begin{aligned} P_A(n+1) + P_B(n+1) &= P_A(n) + P_B(n), \\ P_A(n+1) - P_B(n+1) &= \frac{1}{3}\{P_A(n) - P_B(n)\} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P_A(n) + P_B(n) &= P_A(0) + P_B(0) = 1 \\ P_A(n) - P_B(n) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \{P_A(0) - P_B(0)\} = \frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

$$\text{よって } P_A(n) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right), \quad P_B(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

これに $n = 1, 2, 3$ に代入すると

$$\begin{aligned} P_A(1) &= \frac{2}{3}, \quad P_A(2) = \frac{5}{9}, \quad P_A(3) = \frac{14}{27} \\ P_B(1) &= \frac{1}{3}, \quad P_B(2) = \frac{4}{9}, \quad P_B(3) = \frac{13}{27} \end{aligned}$$

- (2) (1) の計算から

$$\begin{aligned} P_A(n+1) + P_B(n+1) &= P_A(n) + P_B(n), \\ P_A(n+1) - P_B(n+1) &= \frac{1}{3}\{P_A(n) - P_B(n)\} \end{aligned}$$

- (3) (1) の計算から

$$P_A(n) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right), \quad P_B(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

- (4) (3) の結果より, $1 \cdot P_A(k) + (-1)P_B(k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$

$$E(n) = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

■