

令和6年度 北海道大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 医(医・保健(理学・放射線・検査)), 歯, 獣医, 水産)

問題 1 2 3 4 5

1 t を実数とし, xy 平面上の点 $P(\cos 2t, \cos t)$ および $Q(\sin t, \sin 2t)$ を考える.

- (1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ.
- (2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき, 点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ. ただし, x 軸, y 軸との共有点がある場合は, それらの座標を求め, 図中に記せ.

2 各面に1つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある. 「1」, 「2」, 「3」が書かれた面がそれぞれ1つずつあり, 残りの5つの面には「0」が書かれている. このさいころを水平な床面に投げて, 出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える. 最初の持ち点は0点とし, この試行を繰り返す. 例えば, 3回の試行を行ったとき, 出た面に書かれた数が「0」, 「2」, 「3」であれば, 持ち点は5となる. なお, さいころが水平な床面にあるとき, さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ. また, さいころを投げるとき, 各面が出ることは同様に確からしいとする.

- (1) この試行を n 回行ったとき, 持ち点が2以下である確率を求めよ. ただし, n は2以上の自然数とする.
- (2) この試行を4回行って持ち点が10以上であったときに, さらにこの試行を2回行って持ち点が17点以上である条件付き確率を求めよ.

3 次の問いに答えよ.

- (1) α を実数とする. 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\dots$ を次の関係式で定める.

$$f_1(x) = 3x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) x$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ.

- 4 三角形 OAB が, $|\overrightarrow{OA}| = 3$, $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 10$ をみたしているとする.
 三角形 OAB の内接円の中心を I とし, この内接円と辺 OA の接点を H とする.

- (1) 辺 OB の長さを求めよ.
- (2) $\overrightarrow{OI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.
- (3) $\overrightarrow{HI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.

- 5 関数

$$f(x) = x \log(x+2) + 1 \quad (x > -2)$$

を考える. $y = f(x)$ で表される曲線を C とする. C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを ℓ とする. ただし, $\log t$ は t の自然対数である.

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ.
- (3) C と ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

- 1** (1) 点 $P(\cos 2t, \cos t)$ と点 $Q(\sin t, \sin 2t)$ が一致するとき

$$\begin{cases} \cos 2t = \sin t \\ \cos t = \sin 2t \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} (\sin t + 1)(2 \sin t - 1) = 0 \\ \cos t(2 \sin t - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\sin t + 1 = 0 \implies \cos t = 0 \text{ に注意して } \sin t = \frac{1}{2}, -1$$

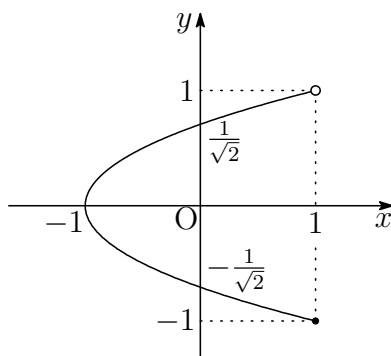
$$\text{よって} \quad t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad \frac{5}{6}\pi + 2n\pi, \quad \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$$

- (2) $P(\cos 2t, \cos t)$ について, $0 < t < 2\pi$ のとき

$$-1 \leq \cos t < 1, \quad \cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$$

よって, 求める軌跡の方程式は $x = 2y^2 - 1 \quad (-1 \leq y < 1)$

したがって, 点 P の描く軌跡は, 下の図の実線部分で $\circ$ は含まない.



- 2 (1) $p = \frac{1}{8}$, $q = \frac{5}{8}$ とおく.

持ち点が0, すなわち, 「0」が n 回出る確率は q^n

持ち点が1, すなわち, 「1」が1回, 「0」が $n-1$ 回出る確率は

$${}_nC_1pq^{n-1} = npq^{n-1}$$

持ち点が2, すなわち, 「2」が1回, 「0」が $n-1$ 回, または, 「1」が2回, 「0」が $n-2$ 回出る確率は

$${}_nC_1pq^{n-1} + {}_nC_2p^2q^{n-2} = npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} & q^n + npq^{n-1} + \left\{ npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2} \right\} \\ &= \left\{ q^2 + 2npq + \frac{n(n-1)}{2}p^2 \right\} q^{n-2} \\ &= \left(\frac{25}{8^2} + \frac{10n}{8^2} + \frac{n^2-n}{2 \cdot 8^2} \right) \cdot \frac{5^{n-2}}{8^{n-2}} = \frac{(n^2 + 19n + 50) \cdot 5^{n-2}}{2 \cdot 8^n} \end{aligned}$$

- (2) 持ち点が10, すなわち, 「1」が1回, 「3」が3回, または, 「2」が2回, 「3」が2回出る確率は

$${}_4C_1p \cdot p^3 + {}_4C_2p^2 \cdot p^2 = 10p^4$$

持ち点が11, すなわち, 「2」が1回, 「3」が3回出る確率は

$${}_4C_1p \cdot p^3 = 4p^4$$

持ち点が12, すなわち, 「3」が4回出る確率は p^4

以上から, 試行を4回行って得点が10以上になる確率は

$$10p^4 + 4p^4 + p^4 = 15p^4$$

試行を4回行って持ち点が10以上で, さらにこの試行を2回行って持ち点が17以上となるのは, 次の場合である.

- (i) 4回行って持ち点が11で, さらに「3」が2回出る確率は

$$4p^4 \times p^2 = 4p^6$$

- (ii) 4回行って持ち点が12で, さらに「2」が1回, 「3」が1回, または「3」が2回出る確率は

$$p^4 \times ({}_2C_1p \cdot p + p^2) = 3p^6$$

求める条件付き確率は $\frac{4p^6 + 3p^6}{15p^4} = \frac{7}{15}p^2 = \frac{7}{15} \left(\frac{1}{8} \right)^2 = \frac{7}{960}$ ■

3 (1) $a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ より $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

$\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = \alpha - 2$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - 2 = (\alpha - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = 2 + \frac{\alpha - 2}{2^{n-1}}$$

(2) $a_n = \int_0^1 f(t) dt$ とおくと, $f_1(x) = 3x$ より

$$a_1 = \int_0^1 3t dt = \left[\frac{3}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) x \quad \text{より} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\int_0^1 f_{n+1}(t) dt = \int_0^1 (n+2)t^{n+1} dt + a_n \int_0^1 t dt$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left[t^{n+2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} a_n \left[t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} a_n + 1 \end{aligned}$$

したがって, (1) の結果に $\alpha = \frac{3}{2}$ を代入すると

$$a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$n \geq 1 \text{ のとき } f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) x$$

上式に $n = 0$ を代入すると $f_1(x) = 3x$ となるから, 次式が成立する.

$$f_n(x) = (n+1)x^n + \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

■

- 4 (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ より $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2$
 $|\overrightarrow{OA}| = 3, |\overrightarrow{AB}| = 5, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 10$ を上式に代入すると

$$5^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2 \cdot 10 + 3^2 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{OB}|^2 = 36$$

$$|\overrightarrow{OB}| > 0 \text{ であるから} \quad |\overrightarrow{OB}| = 6$$

- (2) $\angle O$ の二等分線 OI と AB の交点を C とすると

$$AC : CB = OA : OB = 3 : 6 = 1 : 2$$

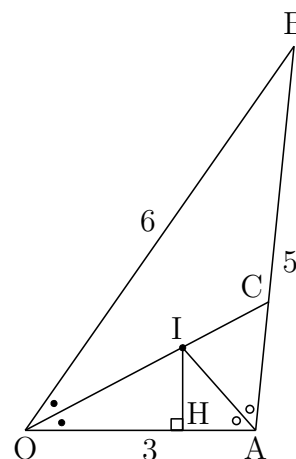
$$\text{ゆえに} \quad AC = AB \times \frac{1}{1+2} = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

AI は $\angle A$ の二等分線であるから

$$OI : IC = OA : AC = 3 : \frac{5}{3} = 9 : 5$$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{9}{9+5} \overrightarrow{OC} = \frac{9}{14} \cdot \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1+2} \\ &= \frac{6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{14} \end{aligned}$$



- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OA} &= \frac{6|\overrightarrow{OA}|^2 + 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{14} = \frac{6 \cdot 3^2 + 3 \cdot 10}{14} = 6 \\ \overrightarrow{OH} &= \frac{(\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OA}) \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^2} = \frac{6}{3^2} \overrightarrow{OA} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HI} &= \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OH} = \frac{6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{14} - \frac{2}{3} \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{-10\overrightarrow{OA} + 9\overrightarrow{OB}}{42} \end{aligned}$$

補足 $\triangle OAB$ の内接円の辺 AB との接点を J とし, $x = OH$ とすると

$$HA = AJ = 3 - x, \quad JB = 5 - (3 - x) = x + 2$$

$$\text{したがって} \quad OB = x + (x + 2) = 2x + 2$$

$$OB = 6 \text{ より} \quad 2x + 2 = 6 \quad \text{ゆえに} \quad OH = 2$$



- 5 (1) $f(x) = x \log(x+2) + 1$ を微分すると $f'(x) = \log(x+2) + \frac{x}{x+2}$
 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = f'(t)x + f(t) - tf'(t)$$

この直線が原点を通るとき, $f(t) - tf'(t) = 0$ より

$$t \log(t+2) + 1 - t \left\{ \log(t+2) + \frac{t}{t+2} \right\} = 0$$

整理すると $t^2 - t - 2 = 0$ ゆえに $(t+1)(t-2) = 0$

これを解いて $t = -1, 2$

このとき $f'(-1) = -1 < 0$, $f'(2) = 2 \log 2 + \frac{1}{2} > 0$

よって, 求める接線の方程式は $y = \left(2 \log 2 + \frac{1}{2} \right) x$

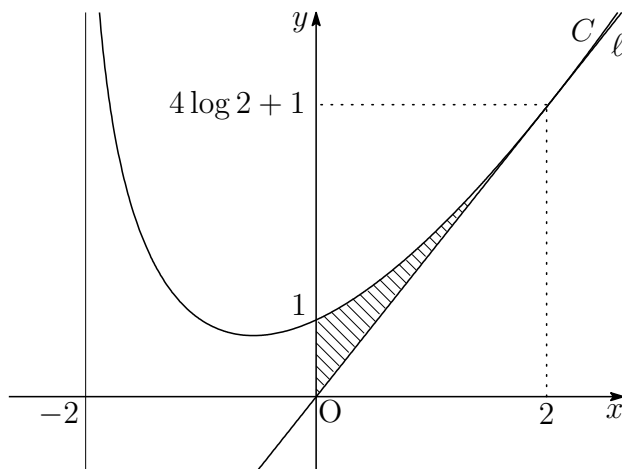
- (2) $f'(x) = \log(x+2) + 1 - \frac{2}{x+2}$ を微分すると ($x > -2$)

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} > 0$$

したがって, C は下に凸である.

- (3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{x \log(x+2) + 1\} dx - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (4 \log 2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2 - 4)' \log(x+2) dx + \left[x \right]_0^2 - (4 \log 2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \left[(x^2 - 4) \log(x+2) \right]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 (x-2) dx + 1 - 4 \log 2 \\ &= 2 \log 2 - \frac{1}{4} \left[(x-2)^2 \right]_0^2 + 1 - 4 \log 2 = 2 - 2 \log 2 \end{aligned}$$



別解 (ガウス・グリーンの定理の系)

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) &= x \left\{ \log(x+2) + \frac{x}{x+2} \right\} - \{x \log(x+2) + 1\} \\ &= \frac{x^2}{x+2} - 1 = x - 3 + \frac{4}{x+2} \end{aligned}$$

求める面積 S は (積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_2^0 (xy' - y) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_2^0 \left(x - 3 + \frac{4}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \log(x+2) \right]_2^0 \\ &= 2 - 2 \log 2 \end{aligned}$$

補足 別解の公式は, ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt$$

の変数 t を x に変更したものである. ■