

令和5年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 a, b を実数とする. θ についての方程式

$$\cos 2\theta = a \sin \theta + b$$

が実数解をもつような点 (a, b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ.

2 正の実数 a, x に対して,

$$y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^3 + a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$$

とする.

(1) $t = \log_2 x$ とするとき, y を a, t を用いて表せ.

(2) x が $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ の範囲を動くとき, y の最大値 M を a を用いて表せ.

3 平面上の3点 O, A, B が

$$|2\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする.

(1) $(2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB})$ を求めよ.

(2) 平面上の点 P が

$$|\vec{OP} - (\vec{OA} + \vec{OB})| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \vec{OP} \cdot (2\vec{OA} + \vec{OB}) \leq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき, $|\vec{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ.

解答例

1 $\cos 2\theta = a \sin \theta + b$ より $2 \sin^2 \theta + a \sin \theta + b - 1 = 0 \quad \cdots (*)$

$$f(t) = 2t^2 + at + b - 1 \text{ とおくと } f(t) = 2 \left(t + \frac{a}{4} \right)^2 - \frac{a^2}{8} + b - 1$$

(*) が実数解をもつことは, $f(t) = 0$ が $-1 \leq t \leq 1$ に解をもつことである.

したがって, 次の (i) または (ii) を満たす場合である.

(i) $f(t) = 0$ の解の 1 つだけが $-1 \leq t \leq 1$, すなわち, $f(1)f(-1) \leq 0$ のとき

$$(a + b + 1)(-a + b + 1) \leq 0$$

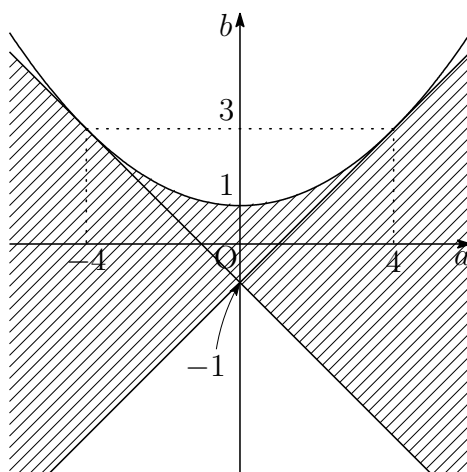
(ii) $f(t) = 0$ の解がともに $-1 \leq t \leq 1$ であるとき

$$-1 \leq -\frac{a}{4} \leq 1, \quad -\frac{a^2}{8} + b - 1 \leq 0, \quad f(1) \geq 0, \quad f(-1) \geq 0$$

すなわち

$$-4 \leq a \leq 4, \quad b \leq \frac{a^2}{8} + 1, \quad a + b + 1 \geq 0, \quad -a + b + 1 \geq 0$$

よって, 点 (a, b) の表す領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



- 2** (1) $y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^3 + a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$ より

$$\begin{aligned} y &= (-\log_2 x)^3 + a(2\log_2 x)^2 \left(\frac{3}{2} \log_2 x \right) \\ &= -(\log_2 x)^3 + 3a(\log_2 x)^2 \end{aligned}$$

$$t = \log_2 x \text{ とすると } \quad \mathbf{y = -t^3 + 3at^2}$$

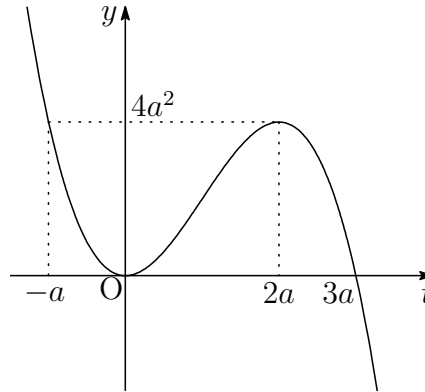
- (2) $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ のとき, $-1 \leq t \leq 3$ であるから

$$f(t) = -t^3 + 3at^2 \quad (-1 \leq t \leq 3)$$

$$\text{とおくと, } f'(t) = -3t^2 + 6at = -3t(t - 2a)$$

t	$\dots$	0	$\dots$	$2a$	$\dots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$

$f(-a) = f(2a)$ に注意すると, $y = f(t)$ のグラフは次のようになる.



- (i) $-1 \leq -a$, すなわち, $0 < a \leq 1$ のとき $M = f(-1)$
(ii) $-a \leq -1$, $2a \leq 3$, すなわち, $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$ のとき $M = f(2a)$
(iii) $3 \leq 2a$, すなわち, $\frac{3}{2} \leq a$ のとき $M = \max\{f(-1), f(3)\}$

$$f(3) - f(-1) = (27a - 27) - (3a + 1) = 24a - 28 = 24 \left(a - \frac{7}{6} \right) > 0$$

$$(i) \sim (iii) \text{ より } \quad M = \begin{cases} 3a + 1 & (0 < a \leq 1) \\ 4a^3 & \left(1 \leq a < \frac{3}{2} \right) \\ 27a - 27 & \left(\frac{3}{2} \leq a \right) \end{cases}$$

■

3 (1)

$$(*) \begin{cases} |2\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \\ (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$2\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{u}, \quad \vec{OA} + 2\vec{OB} = \vec{v} \text{ とおくと } \vec{OA} + \vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$$

$$\text{これらを } (*) \text{ に代入すると } |\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \right) = \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\text{よって} \quad (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB}) = 0$$

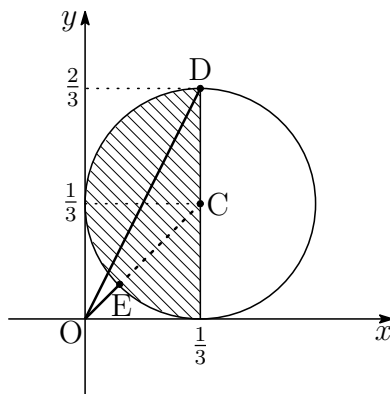
(2) 与えられた条件から

$$\left| \vec{OP} - \left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \right) \right| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \vec{OP} \cdot \vec{u} \leq \frac{1}{3}$$

(1) の結果から, $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ とし, $\vec{OP} = (x, y)$ とおくと

$$\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 \leq \frac{1}{9} \quad \text{かつ} \quad x \leq \frac{1}{3}$$

点 P の表す領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む。



$$\text{上の図において} \quad |\vec{OD}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$|\vec{OE}| = |\vec{OC}| - |\vec{CE}| = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

$$\text{よって} \quad |\vec{OP}| \text{ の最大値 } \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ 最小値 } \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

■