

令和5年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5

1 n を2以上の自然数とする.

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2}x^n \leq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$$

2 平面上の3点O, A, Bが

$$|2\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする.

(1) $(2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB})$ を求めよ.

(2) 平面上の点Pが

$$|\vec{OP} - (\vec{OA} + \vec{OB})| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \vec{OP} \cdot (2\vec{OA} + \vec{OB}) \leq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき, $|\vec{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ.

3 Pを座標平面上の点とし, 点Pの座標を (a, b) とする. $-\pi \leq t \leq \pi$ の範囲にある実数 t のうち, 曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t, \cos t)$ における接線が点Pを通るという条件をみたすものの個数を $N(P)$ とする. $N(P) = 4$ かつ $0 < a < \pi$ をみたすような点Pの存在範囲を座標平面上に図示せよ.

4 a, b を $a^2 + b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする. 座標空間の点 $A(a, 0, b)$ と点 $P(x, y, 0)$ をとる. 点 $O(0, 0, 0)$ を通り直線APと垂直な平面を α とし, 平面 α と直線APとの交点をQとする.

(1) $(\vec{AP} \cdot \vec{AQ})^2 = |\vec{AP}|^2 |\vec{AQ}|^2$ が成り立つことを示せ.

(2) $|\vec{OQ}| = 1$ をみたすように点 $P(x, y, 0)$ が xy 平面上を動くとき, 点Pの軌跡を求めよ.

5 1個のさいころを n 回投げて、 k 回目に出た目を a_k とする． b_n を

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_1^{n-k} a_k$$

により定義し、 b_n が7の倍数になる確率を p_n とする．

- (1) p_1, p_2 を求めよ．
- (2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

解答例

1 (1) $-x \neq 1$ に注意して

$$1 + \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1}{x+1} - \frac{(-x)^n}{1+x}$$

したがって
$$\frac{1}{1+x} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} = \frac{(-x)^n}{x+1}$$

$$(-1)^n \left\{ \frac{1}{1+x} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} = \frac{x^n}{x+1} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで, $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} &= \frac{1-x}{2(x+1)} \geq 0 \\ 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{x+1} &= \frac{x(1-x)}{2(x+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

上の 2 式から
$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 - \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から, $0 \leq x \leq 1$ のとき, 次の不等式が成立する.

$$\frac{1}{2}x^n \leq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1}$ とおくと, (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^n &\leq (-1)^n f(x) \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} \\ \int_0^1 \frac{1}{2}x^n dx &\leq (-1)^n \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} \right) dx \\ \frac{1}{2(n+1)} &\leq (-1)^n \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned} \quad (*)$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right) dx \\ &= \left[\log(x+1) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right]_0^1 \\ &= \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 - a_n \end{aligned} \quad (**)$$

(*), (**) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(n+1)} &\leq (-1)^n (\log 2 - a_n) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \\ -\frac{n}{2(n+1)} &\geq (-1)^n n(a_n - \log 2) \geq -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \end{aligned} \quad (\text{A})$$

ここで

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{n}{2(n+1)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2 + \frac{2}{n}} \right\} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2 + \frac{4}{n}} \right\} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(A) および上の2式から、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n(a_n - \log 2) = -\frac{1}{2}$$

■

2 (1)

$$(*) \begin{cases} |2\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \\ (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$2\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{u}, \quad \vec{OA} + 2\vec{OB} = \vec{v} \text{ とおくと } \vec{OA} + \vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$$

$$\text{これらを } (*) \text{ に代入すると } |\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \right) = \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\text{よって} \quad (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB}) = 0$$

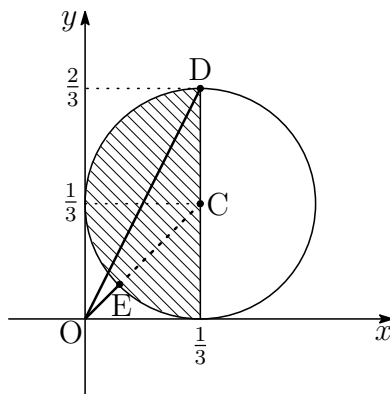
(2) 与えられた条件から

$$\left| \vec{OP} - \left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \right) \right| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \vec{OP} \cdot \vec{u} \leq \frac{1}{3}$$

(1) の結果から, $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ とし, $\vec{OP} = (x, y)$ とおくと

$$\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 \leq \frac{1}{9} \quad \text{かつ} \quad x \leq \frac{1}{3}$$

点 P の表す領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む。



$$\text{上の図において} \quad |\vec{OD}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$|\vec{OE}| = |\vec{OC}| - |\vec{CE}| = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

$$\text{よって} \quad |\vec{OP}| \text{ の最大値 } \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ 最小値 } \frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

■

3 $y = \cos x$ を微分すると $y' = -\sin x$

$y = \cos x$ 上の点 $(t, \cos t)$ における接線の方程式は $(-\pi \leq t \leq \pi)$

$$y = (-\sin t)(x - t) + \cos t$$

この直線が点 (a, b) を通るから

$$b = (-\sin t)(a - t) + \cos t$$

これを満たす実数 t は, 平面 tu における曲線 $u = (-\sin t)(a - t) + \cos t$ と直線 $u = b$ の共有点の t 座標に一致する. $f(t) = (-\sin t)(a - t) + \cos t$ とおくと

$$f''(t) = (t - a) \cos t$$

(i) $0 < a < \frac{\pi}{2}$ のとき, $f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} + a$	$\searrow$	$\cos a$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - a$	$\searrow$	-1

$N(P) = 4$ となる条件は, 増減表から $f(a) < b < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

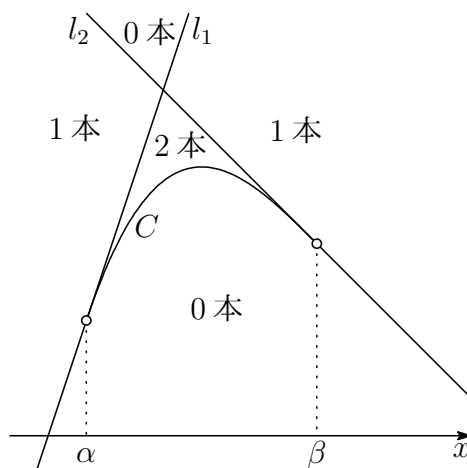
$$\cos a < b < \frac{\pi}{2} - a$$

(ii) $a = \frac{\pi}{2}$ のとき, $f(t)$ の増減表は

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		+	0	-	0	-	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	π	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

増減表から, $N(P) = 4$ を満たす点 (a, b) は存在しない.

解説 区間 $\alpha < x < \beta$ において, $f''(x)$ が常に定符号である曲線 $C: y = f(x)$ に引ける接線の本数は $(\alpha < x < \beta)$, C および $x = \alpha, \beta$ における 2 本の接線 l_1, l_2 によって, 下の図のようになる (l_1, l_2 上の点から引ける接線の本数は 0 本).



$y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は $(\alpha < t < \beta)$

$$f'(t)(x - t) + f(t) - y = 0$$

この接線が点 (p, q) を通るとき

$$f'(t)(p - t) + f(t) - q = 0$$

これから

$$\varphi(t) = f'(t)(p - t) + f(t) - q \quad (*)$$

とおくと, 方程式 $\varphi(t) = 0$ の解 $(\alpha < t < \beta)$ の個数は, 点 (p, q) から曲線 C に引ける接線の本数と一致する.

$$\varphi'(t) = f''(t)(p - t)$$

$f''(t) < 0$ のとき, $\varphi(t)$ の増減表は

t	α	$\cdots$	p	$\cdots$	β
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	$\varphi(\alpha)$	$\searrow$	$\varphi(p)$	$\nearrow$	$\varphi(\beta)$

たとえば, $\varphi(t) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき

$$\varphi(\alpha) > 0, \quad \varphi(p) < 0, \quad \varphi(\beta) > 0$$

(*) より, このとき, l_1 の下側, C の上側, l_2 の下側となる¹. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf [6] を参照

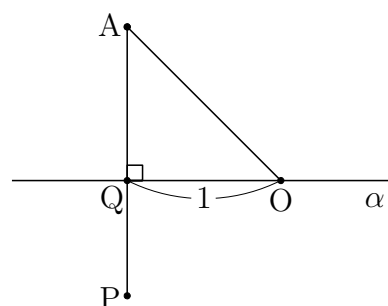
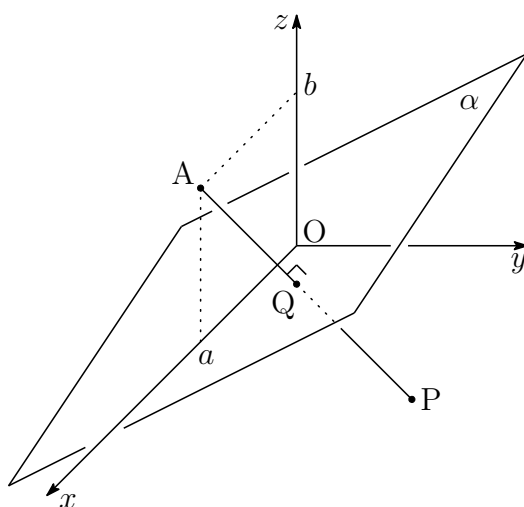
- 4 (1) $AP \perp \alpha$ で、直線 AP と平面 α との交点が Q であるから

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})}{|\overrightarrow{AP}|^2} \overrightarrow{AP} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{AP} // \overrightarrow{AQ} \text{ より } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \pm |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2$$

$$\text{よって } (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2$$



- (2) $A(a, 0, b)$, $P(x, y, 0)$, $|\overrightarrow{OQ}| = 1$ より

$$|\overrightarrow{AQ}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OQ}|^2 = a^2 + b^2 - 1$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = (x - a)^2 + y^2 + b^2$$

$$(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OA})^2 = (ax - a^2 - b^2)^2$$

これらを (1) の結果に代入すると

$$(ax - a^2 - b^2)^2 = \{(x - a)^2 + y^2 + b^2\}(a^2 + b^2 - 1)$$

よって、求める軌跡の方程式は

$$(b^2 - 1)x^2 + (a^2 + b^2 - 1)y^2 + 2ax - a^2 - b^2 = 0$$

補足 $a^2 + b^2 - 1 > 0$ であるから、 $0 < |b| < 1$ のとき双曲線。 $|b| = 1$ のとき放物線、 $|b| > 1$ のとき楕円。 ■

5 (1) $b_1 = a_1$ より $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$

$b_2 = a_1^2 + a_2$, $a_1^2 \not\equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$a_1^2 + a_2 \equiv 0 \pmod{7}$$

を満たす a_2 がただ 1 つ存在する. よって $\mathbf{p}_2 = \frac{1}{6}$

(2) $b_n = \sum_{k=1}^n a_1^{n-k} a_k$ より

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} a_1^{n+1-k} a_k = \sum_{k=1}^n a_1^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= a_1 \sum_{k=1}^n a_1^{n-k} a_k + a_{n+1} = a_1 b_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

(i) $b_n \not\equiv 0 \pmod{7}$ のとき, $a_1 b_n \not\equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$a_1 b_n + a_{n+1} \equiv 0 \pmod{7}$$

となる a_{n+1} がただ一つ定まる.

(ii) $b_n \equiv 0 \pmod{7}$ のとき, $a_1 b_n \equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$a_1 b_n + a_{n+1} \not\equiv 0 \pmod{7}$$

(i), (ii) および (1) の結果から, $\{p_n\}$ について, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_1 = 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{6}(1 - p_n)$$

上の第 2 式から

$$p_{n+1} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \left(p_n - \frac{1}{6} \right) \quad \text{ゆえに} \quad p_n - \frac{1}{6} = \left(p_1 - \frac{1}{6} \right) \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1}$$

$$p_1 = 0 \text{ より} \quad \mathbf{p}_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right\}$$

■