

令和6年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5

1 自然数 n に対して, 関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3} \quad (x \geq 0)$$

で定める. ただし, e は自然対数の底である.

- (1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は, ただ1つの実数解をもつことを示せ.
- (2) (1)における実数解を a_n とおくと, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ.

2 α, β を複素数とし, 複素数 z に対して

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

とおく. α, β は

$$|f(1) - 3| \leq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(i) - 1| \leq 3$$

を満たしながら動く. ただし, i は虚数単位である.

- (1) $f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ.
- (2) $f(1+i) = 0$ であるとき, α, β の値を求めよ.

3 空間内の2直線 ℓ, m はねじれの位置にあるとする. ℓ と m の両方に直交する直線がただ1つ存在することを示せ.

4 $a > 1$ とする. xy 平面において, 点 $(a, 0)$ を中心とする半径1の円を C とする.

- (1) 円 C の $x \geq a$ の部分と y 軸および2直線 $y = 1, y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ.
- (2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_2 とする. (1)における V_1 について, $V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ.

5 自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ のうち, n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする.

(1) 自然数 a, b, c および相異なる素数 p, q, r に対して, 等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(n)$ が n の約数となる 5 以上 100 以下の自然数 n をすべて求めよ.

解答例

1 (1) $f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3}$ を微分すると ($x \geq 0$)

$$f'_n(x) = -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin \frac{x}{3}$$

$x \geq 0$ のとき, $-\frac{n}{2}e^{nx} \leq -\frac{n}{2}$, $-\frac{1}{3}\sin \frac{x}{3} \leq \frac{1}{3}$ であるから

$$f'_n(x) \leq -\frac{n}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(n - \frac{2}{3}\right) < 0$$

したがって, $f_n(x)$ は単調減少.

また, $f_n(0) = \frac{3}{2} > 0$, $f_n\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{3n}{2}\pi} < 0$ であるから, 方程式

$$f_n(x) = 0$$

は, ただ1つの実数解 $x \in \left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$ をもつ.

(2) $f_n(a_n) = 0$ より $1 - \frac{1}{2}e^{na_n} + \cos \frac{a_n}{3} = 0$

$$e^{na_n} = 2\left(1 + \cos \frac{a_n}{3}\right) \quad \text{ゆえに} \quad na_n = \log 2\left(1 + \cos \frac{a_n}{3}\right) \quad (*)$$

$a_n \in \left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$ であるから, $\log 2 < \log 2\left(1 + \cos \frac{a_n}{3}\right) < \log 4$ に注意して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2\left(1 + \cos \frac{a_n}{3}\right) = 0$$

(3) (2) の結果を (*) に代入して $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \log 4$ ■

2 (1) $|f(1) - 3| \leq 1$ かつ $|f(i) - 1| \leq 3$

上の2式に $f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$ をそれぞれ代入して整理すると

$$|\alpha + \beta - 2| \leq 1 \quad \text{かつ} \quad |\alpha i + \beta - 2| \leq 3$$

$$w_1 = \alpha + \beta - 2, \quad w_2 = \alpha i + \beta - 2 \quad \text{とおくと} \quad |w_1| \leq 1, \quad |w_2| \leq 3$$

α, β を w_1, w_2 で表すと

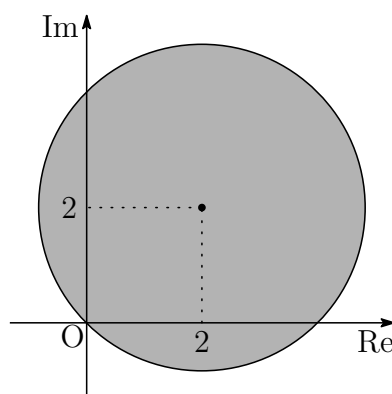
$$\alpha = \frac{1}{2}(1+i)(w_1 - w_2), \quad \beta = \frac{1}{2}(1-i)w_1 + \frac{1}{2}(1+i)w_2 + 2 \quad (*)$$

$f(1+i) = (1+i)^2 + \alpha(1+i) + \beta = (1+i)\alpha + \beta + 2i$ に $(*)$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(1+i) &= \frac{1}{2}(1+i)^2(w_1 - w_2) + \frac{1}{2}(1-i)w_1 + \frac{1}{2}(1+i)w_2 + 2 + 2i \\ &= \frac{1}{2}(1+i)w_1 + \frac{1}{2}(1-i)w_2 + 2 + 2i \end{aligned} \quad (**)$$

$$\left| \frac{1}{2}(1+i)w_1 \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|w_1| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left| \frac{1}{2}(1-i)w_2 \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|w_2| \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

したがって、 $f(1+i)$ は中心 $2 + 2i$ 、半径 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ の円の内部で境界線を含む。



(2) $(**)$ より

$$\frac{1}{2}(1+i)w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right), \quad \frac{1}{2}(1-i)w_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$\text{ゆえに} \quad w_1 = -1, \quad w_2 = -3i$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入して} \quad \alpha = -2 + i, \quad \beta = 3 - i$$

■

- 3** 2直線 ℓ, m の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}$ とする. ℓ と m は平行ではないから, $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直なベクトルを $\vec{n}$ とし, 2直線 ℓ, m 上の定点をそれぞれ $A(\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{n}), B(\beta_1\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \beta_3\vec{n})$ とする.

ℓ を含み, $\vec{n}$ に平行な平面 S のベクトル方程式は, 媒介変数 s_1, s_2 を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OA} + s_1\vec{a} + s_2\vec{n} &= \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{n} + s_1\vec{a} + s_2\vec{n} \\ &= (s_1 + \alpha_1)\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + (s_2 + \alpha_3)\vec{n}\end{aligned}$$

m を含み, $\vec{n}$ に平行な平面 T のベクトル方程式は, 媒介変数 t_1, t_2 を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OB} + t_1\vec{b} + t_2\vec{n} &= \beta_1\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \beta_3\vec{n} + t_1\vec{b} + t_2\vec{n} \\ &= \beta_1\vec{a} + (t_1 + \beta_2)\vec{b} + (t_2 + \beta_3)\vec{n}\end{aligned}$$

S と T の共通部分は

$$(s_1 + \alpha_1)\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + (s_2 + \alpha_3)\vec{n} = \beta_1\vec{a} + (t_1 + \beta_2)\vec{b} + (t_2 + \beta_3)\vec{n} \quad (*)$$

これを整理すると

$$(s_1 + \alpha_1 - \beta_1)\vec{a} + (-t_1 + \alpha_2 - \beta_2)\vec{b} + (s_2 - t_2 + \alpha_3 - \beta_3)\vec{n} = \vec{0}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ は, 1次独立であるから

$$s_1 + \alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad -t_1 + \alpha_2 - \beta_2 = 0, \quad s_2 - t_2 + \alpha_3 - \beta_3 = 0$$

上の3式から

$$s_1 = \beta_1 - \alpha_1, \quad t_1 = \alpha_2 - \beta_2, \quad s_2 - t_2 = \beta_3 - \alpha_3 \quad (**)$$

このとき, 2直線 ℓ, m 上の2定点 P, Q をそれぞれ

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s_1\vec{a}, \quad \vec{OQ} = \vec{OB} + t_1\vec{b}$$

とおくと, 2平面 S, T の共通部分は, $(*)$, $(**)$ より

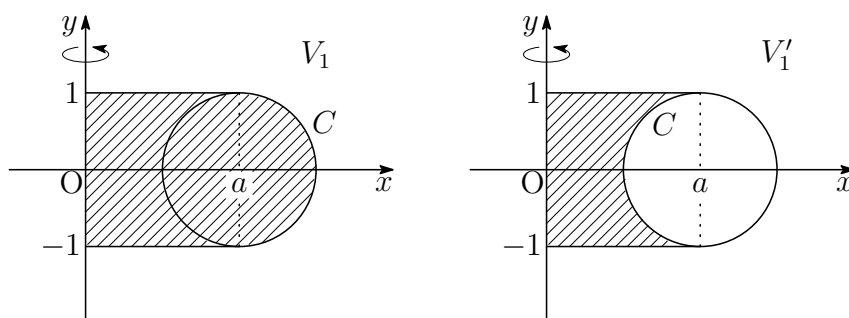
$$\vec{OP} + s_2\vec{n} = \vec{OQ} + t_2\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{PQ} = (s_2 - t_2)\vec{n} = (\beta_3 - \alpha_3)\vec{n}$$

よって, ℓ と m の両方に直交する直線 PQ がただ1つ存在する. ■

- 4 (1) 円 $C: (x-a)^2 + y^2 = 1$ より $x^2 = -(y+1)(y-1) - a^2 + 2ax$

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi} &= - \int_{-1}^1 (y+1)(y-1) dy - a^2 \int_{-1}^1 dy + 2a \int_{-1}^1 x dy \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2a^2 + 2a \left(2a + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a\end{aligned}\quad (*)$$

よって $V_1 = \pi \left(\frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a \right)$



- (2) 右上の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1' とすると, (*) に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1'}{\pi} &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2a^2 + 2a \left(2a - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{4}{3} + 2a^2 - \pi a\end{aligned}$$

$V_2 = V_1 - V_1'$ であるから $V_2 = 2\pi^2 a$

上式および (1) の結果を $V_1 = 2V_2$ に代入すると

$$\pi \left(\frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a \right) = 2 \times 2\pi^2 a$$

整理すると $2a^2 - 3\pi a + \frac{4}{3} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$f(a) = 2a^2 - 3\pi a + \frac{4}{3}$ とすると $f(1) = \frac{10}{3} - 3\pi < 0$

2 次方程式 $f(a) = 0$ は 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつことに注意して, $\textcircled{1}$ を解くと

$$a = \frac{9\pi + \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}$$



5 (1) $n = p^a q^b r^c$ とする.

n 以下の自然数で p, q, r で割り切れる数の個数は, それぞれ

$$\frac{n}{p}, \quad \frac{n}{q}, \quad \frac{n}{r}$$

n 以下の自然数で pq, qr, rp で割り切れる数の個数は, それぞれ

$$\frac{n}{pq}, \quad \frac{n}{qr}, \quad \frac{n}{rp}$$

n 以下の自然数で pqr で割り切れる数の個数は

$$\frac{n}{pqr}$$

したがって¹

$$\begin{aligned} f(n) &= n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} + \frac{n}{r} \right) + \left(\frac{n}{pq} + \frac{n}{qr} + \frac{n}{rp} \right) - \frac{n}{pqr} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left(1 - \frac{1}{r} \right) \\ &= p^a q^b r^c \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left(1 - \frac{1}{r} \right) \\ &= p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1) \end{aligned} \quad (*)$$

(2) 次の (i)~(iv) を考える.

(i) $n = p^a$ のとき (p は素数, a は自然数)

$$f(n) = n - \frac{n}{p} = n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{f(n)} = \frac{p}{p-1}$$

上の第2式は整数で, p と $p-1$ はそれぞれ互いに素であるから

$$p-1 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p = 2$$

(ii) $n = p^a q^b$ のとき (p, q は素数 ($p < q$), a, b は自然数)

$$f(n) = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} \right) + \frac{n}{pq} = n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right)$$

$$\text{したがって} \quad \frac{n}{f(n)} = \frac{pq}{(p-1)(q-1)}$$

上式は整数で, p と $p-1$, q と $q-1$ はそれぞれ互いに素であるから

$$p-1 = 1, \quad q-1 = p \quad \text{ゆえに} \quad p = 2, \quad q = 3$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6(定理 3) を参照)

(iii) $n = p^a q^b r^c$ のとき (p, q, r は素数 ($p < q < r$), a, b, c は自然数),

(*) より

$$\frac{n}{f(n)} = \frac{pqr}{(p-1)(q-1)(r-1)}$$

上式は整数で, p と $p-1$, q と $q-1$, r と $r-1$ はそれぞれ互いに素, $q-1, r-1$ はともに偶数であるから, 上式は条件を満たさない.

(iv) n が 4 つ以上の素因数をもつとき, $n \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ となり, n が 100 以下の自然数であることに反する.

(i)~(iv) より, 求める 5 以上 100 以下の自然数 n は, 整数 a, b を用いて

$$n = 2^a 3^b \quad (a \geq 1, b \geq 0)$$

で与えられる. これを満たす整数 (a, b) の組は, 次の 13 組

$$\begin{aligned} (a, b) = & (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 0), \\ & (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), \\ & (1, 2), (2, 2), (3, 2), \\ & (1, 3) \end{aligned}$$

よって, 求める n は

$$n = 6, 8, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96$$

