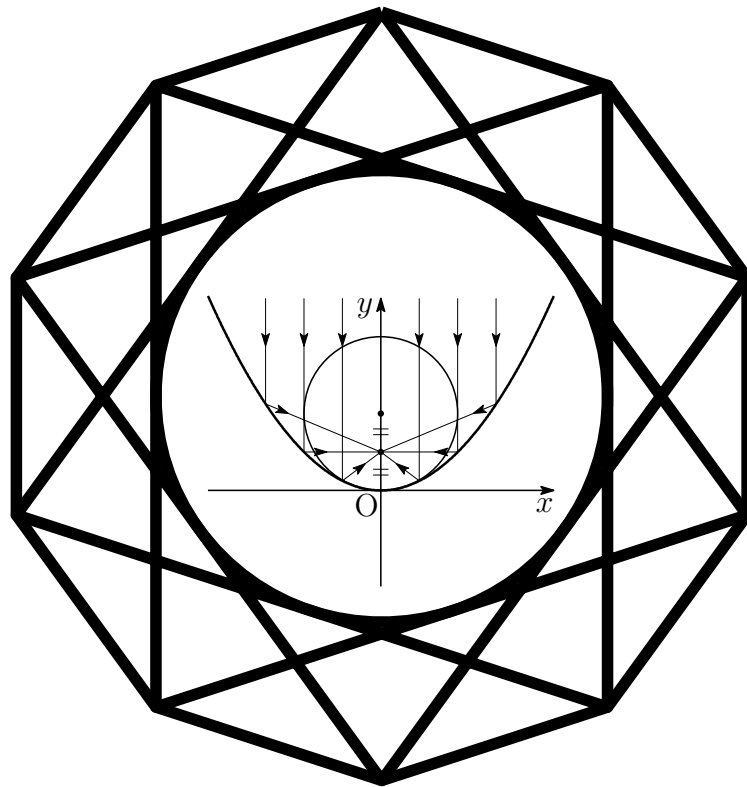


入試の軌跡

九州大学 文系

2015 - 2024

数 学



2024 年 6 月 17 日

*Typed by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>*

# 序

本書は，九州大学文学部・教育学部・法学部・経済学部（経済・経営）・医学部（保健[看護]）・共創学部受験者のための入試問題集です。

本書には，平成 27 年（2015 年）度から令和 6 年（2024 年）度までの 2 次試験前期日程の数学問題をすべて掲載しています。第 1 章には問題を掲載し，第 2 章には解答，第 3 章には研究を付けています。

また，平成 9 年（1997 年）から令和 5 年（2023 年）までの一般前期試験問題および解答については，年度ごとに次のサイトに掲載しています。

<https://math4u.site/>

本書の編集にあたり，以下の点に留意しました。

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮しました。
2. 本書は，電子文書 (PDF) での利用を想定し，ハイパーリンクを施しています。Adobe Reader(高機能の PDF ブラウザ[フリーソフト]) などをご利用ください。利用する際には，全画面表示 ( $\boxed{\text{Ctrl}}+\boxed{\text{L}}$ ) および描画領域に合わせる ( $\boxed{\text{Ctrl}}+\boxed{3}$ ) と見やすくなります。ページスクロールには，( $\boxed{\text{Ctrl}}+\boxed{\blacktriangle}$ ， $\boxed{\text{Ctrl}}+\boxed{\blacktriangledown}$ ) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ( $\boxed{\text{Alt}}+\boxed{\blacktriangleleft}$ )，進む ( $\boxed{\text{Alt}}+\boxed{\blacktriangleright}$ ) も利用できます。なお，全画面表示を解除するには  $\boxed{\text{ESC}}$ 。
4. 電子黒板を利用される場合は，電子黒板の PDF ブラウザをご使用ください。ファイルサイズに優れ，ハイパーリンク・拡大縮小・スワイプ・書き込みもスムーズに機能します。
3. 平成 13 年（2001 年）度から平成 26 年（2014 年）度までの一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡 九州大学 理系』を上記のサイトに掲載しています。

令和 6 年 6 月 西村 信一



# 目次

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 序                        | i  |
| 第1章 一般前期問題               | 1  |
| 1.1 2015 年度              | 5  |
| 1.2 2016 年度              | 7  |
| 1.3 2017 年度              | 9  |
| 1.4 2018 年度              | 10 |
| 1.5 2019 年度              | 12 |
| 1.6 2020 年度              | 13 |
| 1.7 2021 年度              | 14 |
| 1.8 2022 年度              | 15 |
| 1.9 2023 年度              | 18 |
| 1.10 2024 年度             | 20 |
| 第2章 一般前期解答               | 21 |
| 2.1 2015 年度              | 22 |
| 2.2 2016 年度              | 26 |
| 2.3 2017 年度              | 32 |
| 2.4 2018 年度              | 36 |
| 2.5 2019 年度              | 39 |
| 2.6 2020 年度              | 42 |
| 2.7 2021 年度              | 46 |
| 2.8 2022 年度              | 51 |
| 2.9 2023 年度              | 56 |
| 2.10 2024 年度             | 63 |
| 第3章 一般前期研究               | 67 |
| 3.1 2015 年度              | 68 |
| 3.1.1 3 番 研究             | 68 |
| 3.2 2016 年               | 69 |
| 3.2.1 2 番 (4) 外積 (ベクトル積) | 69 |
| 3.3 2017 年               | 70 |
| 3.3.1 1 番 (2) 研究         | 70 |
| 3.3.2 4 番 (1) ユークリッドの互除法 | 71 |
| 3.4 2018 年               | 72 |

|       |                            |    |
|-------|----------------------------|----|
| 3.4.1 | 4 番 条件付き確率と事象の独立 . . . . . | 72 |
| 3.5   | 2022 年 . . . . .           | 73 |
| 3.5.1 | 2 番 平面の方程式 . . . . .       | 73 |

# 第 1 章 一般前期問題

2003 年度以前の入試は，必答問題 2 題と，選択問題 3 題を 1 グループとした 2 グループから 1 題ずつ選んで 120 分で解答する形式であった．2004 年度入試以降は選択問題はなくなり，必答問題 4 題を 120 分で解答する現在の形式になった．

2014 年度入試においては，来年度からの新課程を意識した整数問題が出題されている．ユークリッドの互除法や合同式についても学習しておく必要があるようだ．

九大入試の特徴として，教科書にある公式の証明問題，教科書の典型的な問題についても確かな理解と応用力を問う問題が出題される．文系としてはめずらしく，論理的な展開能力が要求される．

平成 26 年 3 月 編者

平成 27 年 (2015 年) に現行課程へ移行し，移行後の出題を見ると，新たに導入された「整数の性質」の分野から，ユークリッドの互除法 (2017 年)，合同式 (2015 年，2016 年，2018 年) が出題されており，今後とも重点的に学習しておく必要がある．

過去の出題からも分かるように，「場合の数と確率」「微積分」は重要分野である．

平成 30 年 9 月 編者

平成 27 年 (2015 年) から令和 6 年 (2024 年) までの 10 年間の出題傾向をみると，「微分法と積分法」に関する問題は毎年出題された．10 年間で「場合の数と確率」の分野から 8 回，「整数の性質」の分野から 5 回，ベクトルについては「空間のベクトル」が 4 回，「平面上のベクトル」が 3 回と同分野からの出題が目立つ．文系数学受験者にとってこれらの分野を中心に学習に取り組む必要がある．

令和 6 年 6 月 編者

## 出題分野

## 2015 年度

|   | 難易度 | 科 目   | 分 野     | 出 題 内 容       |
|---|-----|-------|---------|---------------|
| 1 | 標準  | 数学 II | 微分法と積分法 | 面積, 軌跡        |
| 2 | 標準  | 数学 B  | 空間のベクトル | 正四面体, 三角形の面積  |
| 3 | やや易 | 数学 A  | 場合の数と確率 | 操作による硬貨の枚数の確率 |
| 4 | やや難 | 数学 A  | 整数の性質   | 合同式           |

## 2016 年度

|   | 難易度 | 科 目   | 分 野     | 出 題 内 容           |
|---|-----|-------|---------|-------------------|
| 1 | 標準  | 数学 II | 微分法と積分法 | 3 次関数のグラフによる図形の面積 |
| 2 | 標準  | 数学 A  | 図形の性質   | チェバの定理, メネラウスの定理  |
| 3 | 難   | 数学 A  | 場合の数と確率 | 重複組合せとその応用        |
| 4 | 標準  | 数学 A  | 整数の性質   | 合同式               |

## 2017 年度

|   | 難易度 | 科 目   | 分 野     | 出 題 内 容          |
|---|-----|-------|---------|------------------|
| 1 | 標準  | 数学 II | 微分法と積分法 | 2 つの放物線による図形の面積比 |
| 2 | 標準  | 数学 I  | 数と式     | 有理数と無理数          |
|   |     | 数学 II | 図形と方程式  | 座標平面上の三角形        |
| 3 | 標準  | 数学 A  | 場合の数と確率 | サイコロの目による勝者の確率   |
| 4 | 標準  | 数学 A  | 整数の性質   | ユークリッドの互除法       |

## 2018 年度

|   | 難易度 | 科 目   | 分 野     | 出 題 内 容           |
|---|-----|-------|---------|-------------------|
| 1 | 標準  | 数学 II | 微分法と積分法 | 3 次関数のグラフによる図形の面積 |
| 2 | 標準  | 数学 A  | 整数の性質   | 合同式               |
| 3 | 標準  | 数学 B  | 平面のベクトル | 三角形に関する証明問題       |
| 4 | 標準  | 数学 A  | 場合の数と確率 | 条件付き確率            |

## 2019 年度

|   | 難易度 | 科 目   | 分 野     | 出 題 内 容         |
|---|-----|-------|---------|-----------------|
| 1 | 標準  | 数学 A  | 場合の数と確率 | 硬貨に書かれた数字の積について |
| 2 | 標準  | 数学 II | 微分法と積分法 | 3 次関数の極大・極小     |
| 3 | 標準  | 数学 B  | 空間のベクトル | 四面体の体積          |
| 4 | やや難 | 数学 II | 式と証明    | 恒等式             |

## 2020 年度

|   | 難易度 | 科 目   | 分 野     | 出 題 内 容           |
|---|-----|-------|---------|-------------------|
| 1 | 標準  | 数学 II | 微分法と積分法 | 2つの放物線で囲まれた図形の最大値 |
| 2 | 標準  | 数学 B  | 空間のベクトル | 四面体の断面積の最大値       |
| 3 | 標準  | 数学 II | 複素数と方程式 | 虚数を解にもつ実係数の方程式    |
|   |     | 数学 A  | 整数の性質   | 合同式               |
| 4 | 標準  | 数学 A  | 場合の数と確率 | サイコロの出た目の積        |

## 2021 年度

|   | 難易度 | 科 目   | 分 野     | 出 題 内 容      |
|---|-----|-------|---------|--------------|
| 1 | 標準  | 数学 II | 図形と方程式  | 円の接線，点と直線の距離 |
| 2 | 標準  | 数学 II | 図形と方程式  | 不等式の表す領域     |
| 3 | 標準  | 数学 II | 微分法と積分法 | 放物線の接線，図形の面積 |
| 4 | 標準  | 数学 B  | 数列      | 漸化式と一般項      |

## 2022 年度

|   | 難易度 | 科 目   | 分 野     | 出 題 内 容         |
|---|-----|-------|---------|-----------------|
| 1 | 標準  | 数学 II | 微分法と積分法 | 曲線と直線で囲まれた図形の面積 |
| 2 | 標準  | 数学 B  | 空間のベクトル | 平面に関して対称な点      |
| 3 | やや難 | 数学 II | 複素数と方程式 | 3次方程式の解と係数の関係   |
| 4 | やや難 | 数学 II | 微分法と積分法 | 定積分と面積に関する証明問題  |

## 2023 年度

|   | 難易度 | 科 目   | 分 野      | 出 題 内 容   |
|---|-----|-------|----------|-----------|
| 1 | 標準  | 数学 II | 微分法と積分法  | 放物線に関する面積 |
| 2 | 標準  | 数学 II | 三角関数     | 関数の最小値    |
| 3 | 標準  | 数学 B  | 平面上のベクトル | 基本ベクトル    |
| 4 | 標準  | 数学 A  | 場合の数と確率  | 確率漸化式     |

## 2024 年度

|   | 難易度 | 科 目   | 分 野      | 出 題 内 容     |
|---|-----|-------|----------|-------------|
| 1 | 標準  | 数学 II | 微分法と積分法  | 2つの放物線の共通接線 |
| 2 | 標準  | 数学 B  | 平面上のベクトル | ベクトルの偏角と成分  |
| 3 | 標準  | 数学 II | 式と証明     | 不等式の証明      |
| 4 | 標準  | 数学 A  | 場合の数と確率  | 格子点を通る直線の本数 |

## 出題分野 (2015-2024)

[illegible]

## 1.1 2015 年度

### 1 座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

を考える。ただし、 $a, b$  は実数とする。

(1)  $C_1$  と  $C_2$  が異なる 2 点で交わるための  $a, b$  に関する条件を求めよ。

以下、 $a, b$  が (1) の条件を満たすとし、 $C_1$  と  $C_2$  で囲まれる面積が 9 であるとする。

(2)  $b$  を  $a$  を用いて表せ。

(3)  $a$  がすべての実数値をとって変化するとき、放物線  $C_2$  の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。

### 2 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P, 辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q, 辺 OC を 1 : 3 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ。

(2)  $\overrightarrow{PQ}$  と  $\overrightarrow{PR}$  の内積  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$  を求めよ。

(3) 三角形 PQR の面積を求めよ。

**3** 袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている。次の操作を考える。 研

(操作) 袋から1個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉1個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる。袋に入っている3個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を1枚もらう。

この操作を4回繰り返す。もらう硬貨の総数が1枚である確率と、もらう硬貨の総数が2枚である確率をそれぞれ求めよ。

**4** 以下の問いに答えよ。

- (1)  $n$  が正の偶数のとき、 $2^n - 1$  は3の倍数であることを示せ。
- (2)  $p$  を素数とし、 $k$  を0以上の整数とする。 $2^{p-1} - 1 = p^k$  を満たす  $p, k$  の組をすべて求めよ。

## 1.2 2016 年度

**1** 座標平面において、 $x$  軸上に 3 点  $(0, 0)$ ,  $(\alpha, 0)$ ,  $(\beta, 0)$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) があり、曲線  $C: y = x^3 + ax^2 + bx$  が  $x$  軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし、 $a, b$  は実数である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C$  と  $x$  軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を  $S$  とする。 $S$  を  $\alpha$  と  $\beta$  の式で表せ。
- (2)  $\beta$  の値を固定して、 $0 < \alpha < \beta$  の範囲で  $\alpha$  を動かすとき、 $S$  を最小とする  $\alpha$  を  $\beta$  の式で表せ。

**2**  $t$  を  $0 < t < 1$  を満たす実数とする。面積が 1 である三角形  $ABC$  において、辺  $AB, BC, CA$  をそれぞれ  $2:1, t:1-t, 1:3$  に内分する点を  $D, E, F$  とする。また、 $AE$  と  $BF, BF$  と  $CD, CD$  と  $AE$  の交点をそれぞれ  $P, Q, R$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 3 直線  $AE, BF, CD$  が 1 点で交わるときの  $t$  の値  $t_0$  を求めよ。

以下、 $t$  は  $0 < t < t_0$  を満たすものとする。

- (2)  $AP = kAE, CR = \ell CD$  を満たす実数  $k, \ell$  をそれぞれ求めよ。
- (3) 三角形  $BCQ$  の面積を求めよ。
- (4) 三角形  $PQR$  の面積を求めよ。

**研**

- 3 袋の中に、赤玉が15個、青玉が10個、白玉が5個入っている。袋の中から玉を1個取り出し、取り出した玉の色に応じて、以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

(操作) コインが点  $(x, y)$  にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点  $(x + 1, y)$  に移動、青玉を取り出したときには点  $(x, y + 1)$  に移動、白玉を取り出したときには点  $(x - 1, y - 1)$  に移動し、取り出した球は袋に戻す。

最初に原点  $(0, 0)$  にコインを置き、この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後、コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 操作を  $n$  回繰り返したとき、白玉を1度だけ取り出したとする。このとき、到達点となり得る点をすべて求めよ。
  - (2) 操作を  $n$  回繰り返したとき、到達点となり得る点の個数を求めよ。
  - (3) 座標平面上の4点  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$  を頂点とする正方形  $D$  を考える。操作を  $n$  回繰り返したとき、到達点が  $D$  の内部または辺上にある確率を  $P_n$  とする。 $P_3$  を求めよ。
  - (4) 自然数  $N$  に対して  $P_{3N}$  を求めよ。
- 4 自然数  $n$  に対して、 $10^n$  を13で割った余りを  $a_n$  とおく。 $a_n$  は0から12までの整数である。以下の問いに答えよ。
- (1)  $a_{n+1}$  は  $10a_n$  を13で割った余りに等しいことを示せ。
  - (2)  $a_1, a_2, \dots, a_6$  を求めよ。
  - (3) 以下の3条件を満たす自然数  $N$  をすべて求めよ。
    - (i)  $N$  を十進数で表示したとき6桁となる。
    - (ii)  $N$  を十進数で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと2016となる。
    - (iii)  $N$  は13で割り切れる。

## 1.3 2017 年度

**1** 定数  $a < 1$  に対し，放物線  $C_1 : y = 2x^2 + 1$ ， $C_2 : y = -x^2 + a$  を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線  $C_1$ ， $C_2$  の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ  $a$  を用いて表せ。

(2)  $C_1$  と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を  $S_1$ ， $C_2$  と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を  $S_2$  とするとき， $\frac{S_2}{S_1}$  を求めよ。 [研]

**2** 座標平面上に原点  $O$ ，点  $A(1, a)$ ，点  $B(s, t)$  がある。以下の問いに答えよ。

(1)  $a = 1$  のとき， $\triangle OAB$  が正三角形となるような  $(s, t)$  をすべて求めよ。

(2)  $\sqrt{3}$  は無理数であることを証明せよ。

(3)  $\triangle OAB$  が正三角形であり， $a$  が有理数であるとき， $s$  と  $t$  のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ。

**3**  $A$  と  $B$  の 2 人が  $A, B, A, B, \dots$  の順にさいころを投げ，先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える。以下では，さいころを投げた回数とは  $A$  と  $B$  が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を  $\log_{10} 2 = 0.301$ ， $\log_{10} 3 = 0.477$  として，以下の問いに答えよ。

(1) さいころを投げた回数が  $n$  回以下では勝敗が決まらない確率  $p_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を求めよ。さらに， $p_n$  が 0.005 より小さくなる最小の  $n$  を求めよ。

(2) さいころを投げた回数が 3 回以下で  $A$  が勝つ確率を求めよ。

(3) 自然数  $k$  に対し，さいころを投げた回数が  $2k + 1$  回以下で  $A$  が勝つ確率を求めよ。

**4** 以下の問いに答えよ。

(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。 [研]

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。

## 1.4 2018年度

- 1 座標平面内の曲線  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  が点  $(c, 0)$  において  $x$  軸に接しているとする。ただし,  $a, b$  は実数,  $c > 0$  である。以下の問いに答えよ。

- (1)  $a, b$  をそれぞれ  $c$  を用いて表せ。  
 (2) この曲線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を  $S$  とする。  $S$  を最小にする  $c$  の値を求めよ。

- 2 以下の問いに答えよ。

- (1)  $n$  を自然数とするとき,  $2^n$  を 7 で割った余りを求めよ。  
 (2) 自然数  $m$  は, 2 進法で 101 が 6 回連続する表示

$$101101101101101101_{(2)}$$

をもつとする。  $m$  を 7 で割った余りを求めよ。

- 3 平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し,

$$L = PA^2 + PB^2 + PC^2$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$  および  $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$  とおくとき, 次の等式を示せ。

$$L = 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

- (2)  $L$  を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また,  $L$  の最小値は

$$\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

であることを示せ。

4 3つの部品 a, b, c からなる製品が多数入った箱がある。製品を1つ取り出したとき、部品 a, b, c が不良品である確率について次のことがわかっている。

- 部品 a が不良品である確率は  $p$  である。 研
- 部品 a が不良品でないとき、部品 b が不良品である確率は  $q$  である。
- 部品 a が不良品であるとき、部品 b も不良品である確率は  $3q$  である。
- 部品 b が不良品でないとき、部品 c が不良品である確率は  $r$  である。
- 部品 b が不良品であるとき、部品 c も不良品である確率は  $5r$  である。

ただし、 $0 < p < 1$ ,  $0 < q < \frac{1}{3}$ ,  $0 < r < \frac{1}{5}$  である。以下の問いに答えよ。

- (1) 製品を1つ取り出したとき、部品 a, b の少なくとも一方が不良品である確率を  $p, q$  を用いて表せ。
- (2) 製品を1つ取り出したとき、部品 c が不良品である確率を  $p, q, r$  を用いて表せ。
- (3) 製品を1つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき、部品 b も不良品である確率を  $p, q$  を用いて表せ。

## 1.5 2019年度

- 1 表に3, 裏に8が書かれた硬貨がある。この硬貨を10回投げるとき, 出た数字10個の積が8桁になる確率を求めよ。ただし,  $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする。
- 2  $k$  を実数とする。3次関数  $y = x^3 - kx^2 + kx + 1$  が極大値と極小値をもち, 極大値から極小値を引いた値が  $4|k|^3$  になるとする。このとき,  $k$  の値を求めよ。
- 3 座標空間内の3点  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 2, 3)$ ,  $C(4, 5, 6)$  を通る平面を  $\alpha$  とし, 平面  $\alpha$  上にない点  $P(6, p, q)$  を考える。以下の問いに答えよ。
- (1) 点  $P$  から平面  $\alpha$  に下ろした垂線と  $\alpha$  との交点を  $H$  とする。線分  $PH$  の長さを  $p, q$  を用いて表せ。
- (2) 点  $P$  が  $(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$  を満たしながら動くとき, 四面体  $ABCP$  の体積の最大値と最小値を求めよ。
- 4 0 でない2つの整式  $f(x), g(x)$  が以下の恒等式を満たすとする。

$$\begin{aligned}f(x^2) &= (x^2 + 2)g(x) + 7 \\g(x^3) &= x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2\end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  の次数と  $g(x)$  の次数はともに2以下であることを示せ。
- (2)  $f(x)$  と  $g(x)$  を求めよ。

## 1.6 2020 年度

- 1  $a \geq 0$  とする。2 つの放物線  $C_1 : y = x^2$ ,  $C_2 : y = 3(x - a)^2 + a^3 - 40$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  が異なる 2 点で交わるような定数  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $a$  が (1) で求めた範囲を動くとき、 $C_1$  と  $C_2$  で囲まれた図形の面積  $S$  の最大値を求めよ。

- 2 座標空間内の 4 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 0, p)$ ,  $C(q, r, s)$  を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし、 $p > 0$ ,  $s > 0$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $p, q, r, s$  の値を求めよ。
- (2)  $z$  軸に垂直な平面で正四面体  $OABC$  を切ったときの断面積の最大値を求めよ。

- 3  $a, b, c$  を整数とし、 $i$  を虚数単位とする。整式  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  が  $f\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = 0$  をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a, b$  を  $c$  を用いて表せ。
- (2)  $f(1)$  を 7 で割ると 4 余り、 $f(-1)$  を 11 で割ると 2 余るとする。 $c$  の絶対値が 40 以下であるとき、方程式  $f(x) = 0$  の解をすべて求めよ。

- 4 4 個のサイコロを同時に投げるとき、出る目すべての積を  $X$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $X$  が 25 の倍数になる確率を求めよ。
- (2)  $X$  が 4 の倍数になる確率を求めよ。
- (3)  $X$  が 100 の倍数になる確率を求めよ。

## 1.7 2021 年度

1 座標平面上の3点  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 2)$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形  $OAB$  に内接する円の中心の座標を求めよ。
- (2) 中心が第1象限にあり、 $x$  軸と  $y$  軸の両方に接し、直線  $AB$  と異なる2つの交点をもつような円を考える。この2つの交点を  $P$ ,  $Q$  とするとき、線分  $PQ$  の長さの最大値を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

- (1) 次の条件  $A$  をみたす座標平面上の点  $(x, y)$  全体の集合を図示せよ。

条件  $A$  : すべての実数  $t$  に対して  $y \geq xt - 2t^2$  が成立する。

- (2) 次の条件  $B$  をみたす座標平面上の点  $(x, y)$  全体の集合を図示せよ。

条件  $B$  :  $|t| \leq 1$  をみたすすべての実数  $t$  に対して

$$y \geq xt - 2t^2 \text{ が成立する。}$$

3  $a$  を正の実数とし、放物線

$$C : y = -x^2 - 2ax - a^3 + 10a$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線  $C$  と直線  $\ell : y = 8x + 6$  が接するような  $a$  の値を求めよ。
- (2)  $a$  が (1) で求めた値のとき、放物線  $C$ , 直線  $\ell$ ,  $y$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

- (1)  $n$  を自然数とすると、

$$\sum_{k=1}^n k 2^{k-1}$$

を求めよ。

- (2) 次のように定義される数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

## 1.8 2022 年度

- 1  $a$  を  $-3 < a < 13$  をみたす実数とし、次の曲線  $C$  と直線  $\ell$  が接しているとする。

$$C: y = |x^2 + (3 - a)x - 3a|, \quad \ell: y = -x + 13$$

以下の問いに答えよ。

- (1)  $a$  の値を求めよ。
- (2) 曲線  $C$  と直線  $\ell$  で囲まれた 2 つの図形のうち、点  $(a, 0)$  が境界線上にある図形の面積を求めよ。

- 2 座標空間内の 4 点

$$O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(2, 1, 2), P(4, 0, -1)$$

を考える。3 点  $O, A, B$  を通る平面を  $\alpha$  とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  とおく。以下の問いに答えよ。

研

- (1) ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  の両方に垂直であり、 $x$  成分が正であるような、大きさが 1 のベクトル  $\vec{n}$  を求めよ。
- (2) 点  $P$  から平面  $\alpha$  に垂線を下ろし、その交点を  $Q$  とおく。線分  $PQ$  の長さを求めよ。
- (3) 平面  $\alpha$  に関して点  $P$  と対称な点  $P'$  の座標を求めよ。

- 3  $k$  を実数とし、整式  $f(x)$  を

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$$

で定める。方程式  $f(x) = 0$  が虚数解をもつとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  は  $x - 2$  で割り切れることを示せ。
- (2) 方程式  $f(x) = 0$  は負の実数解をもつことを示せ。
- (3) 方程式  $f(x) = 0$  のすべての実数解が整数であり、すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような  $k$  をすべて求めよ。

4 定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

$f(x)$  を整式とする。 $F'(x) = f(x)$  となる関数  $F(x)$  を1つ選び、 $f(x)$  の  $a$  から  $b$  までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

で定義する。定積分の値は  $F(x)$  の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A), (B), (C) をもつ。

$$(A) \int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$$

$$(B) a \leq c \leq b \text{ のとき, } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(C) 区間  $a \leq x \leq b$  において  $g(x) \geq h(x)$  ならば,

$$\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$$

ただし、 $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  は整式、 $k$ ,  $l$  は定数である。

以下、 $f(x)$  が区間  $0 \leq x \leq 1$  上で増加関数になる場合を考える。 $n$  を自然数とする。定積分の性質 ア を用い、定数関数に対する定積分の計算を行うと、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$  とおくと、不等式  $\textcircled{2}$  と定積分の性質 イ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \cdots \textcircled{3}$$

よって、 $n$  を限りなく大きくすると、 $S_n$  は  $\int_0^1 f(x) dx$  に限りなく近づく。

- (1) 関数  $F(x)$ ,  $G(x)$  が微分可能であるとき,

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことと定積分の定義 ① を用いて, 性質 (A) で  $k = l = 1$  とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

を示せ。

- (2) 定積分の定義 ① と, 関数の増減と導関数の関係を用いて, 次を示せ。

$a < b$  のとき, 区間  $a \leq x \leq b$  において  $g(x) > 0$  ならば,  $\int_a^b g(x) dx > 0$

- (3) (A), (B), (C) のうち, 空欄  に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで, 不等式 ② を示せ。

- (4) (A), (B), (C) のうち, 空欄  に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また, 不等式 ③ を示せ。

## 1.9 2023 年度

- 1  $a$  を  $0 < a < 9$  を満たす実数とする。 $xy$  平面上の曲線  $C$  と直線  $\ell$  を、次のように定める。

$$C: y = |(x-3)(x+3)|, \quad \ell: y = a$$

曲線  $C$  と直線  $\ell$  で囲まれる図形のうち、 $y \geq a$  の領域にある部分の面積を  $S_1$ 、 $y \leq a$  の領域にある部分の面積を  $S_2$  とする。 $S_1 = S_2$  となる  $a$  の値を求めよ。

- 2  $xy$  平面上の曲線  $C: y = x^3 - x$  を考える。実数  $t > 0$  に対して、曲線  $C$  上の点  $A(t, t^3 - t)$  における接線を  $\ell$  とする。直線  $\ell$  と直線  $y = -x$  の交点を  $B$ 、三角形  $OAB$  の外接円の中心を  $P$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $B$  の座標を  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $\theta = \angle OBA$  とする。 $\sin^2 \theta$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3)  $f(t) = \frac{OP}{OA}$  とする。 $t > 0$  のとき、 $f(t)$  を最小にする  $t$  の値と  $f(t)$  の最小値を求めよ。

- 3 点  $O$  を原点とする座標平面上の  $\vec{0}$  でない2つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \quad \vec{n} = (b, d)$$

に対して、 $D = ad - bc$  とおく。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{m}$  と  $\vec{n}$  が平行であるための必要十分条件は  $D = 0$  であることを示せ。以下、 $D \neq 0$  であるとする。
- (2) 座標平面上のベクトル  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

- (3) 座標平面上のベクトル  $\vec{q}$  に対して

$$r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$$

を満たす実数  $r$  と  $s$  を  $\vec{q}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  を用いて表せ。

4  $\omega$  を  $x^3 = 1$  の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて、次の規則で4つの複素数  $0, 1, \omega, \omega^2$  を並べていくことにより、複素数の列  $z_1, z_2, z_3, \dots$  を定める。

- $z_1 = 0$  とする。
- $z_k$  まで定まったとき、さいころを投げて、出た目を  $t$  とする。このとき  $z_{k+1}$  を以下のように定める。
  - $z_k = 0$  のとき,  $z_{k+1} = \omega^t$  とする。
  - $z_k \neq 0, t = 1, 2$  のとき,  $z_{k+1} = 0$  とする。
  - $z_k \neq 0, t = 3$  のとき,  $z_{k+1} = \omega z_k$  とする。
  - $z_k \neq 0, t = 4$  のとき,  $z_{k+1} = \overline{\omega z_k}$  とする。
  - $z_k \neq 0, t = 5$  のとき,  $z_{k+1} = z_k$  とする。
  - $z_k \neq 0, t = 6$  のとき,  $z_{k+1} = \overline{z_k}$  とする。

ここで複素数  $z$  に対し,  $\overline{z}$  は  $z$  と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\omega^2 = \overline{\omega}$  となることを示せ。
- (2)  $z_n = 0$  となる確率を  $n$  の式で表せ。
- (3)  $z_3 = 1, z_3 = \omega, z_3 = \omega^2$  となる確率をそれぞれ求めよ。
- (4)  $z_n = 1$  となる確率を  $n$  の式で表せ。

## 1.10 2024年度

## 1 2つの放物線

$$C_1 : y = 2x^2, \quad C_2 : y = 2x^2 - 8x + 16$$

の両方に接する直線を  $\ell$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線  $\ell$  の方程式を求めよ。
- (2) 2つの放物線  $C_1, C_2$  と直線  $\ell$  で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 座標平面上の原点  $O(0, 0)$ , 点  $A(2, 1)$  を考える。点  $B$  は第1象限にあり,  $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{10}$ ,  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$  をみたすとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $B$  の座標を求めよ。
- (2)  $s, t$  を正の実数とし,  $\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  をみたす点  $C$  を考える。三角形  $OAC$  と三角形  $OBC$  の面積が等しく,  $|\overrightarrow{OC}| = 4$  が成り立つとき,  $s, t$  の値を求めよ。

## 3 以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数  $a, b$  が  $a < b$  をみたすとき,  $\frac{b!}{a!} \geq b$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $2 \cdot a! = b!$  をみたす自然数の組  $(a, b)$  をすべて求めよ。
- (3)  $a! + b! = 2 \cdot c!$  をみたす自然数の組  $(a, b, c)$  をすべて求めよ。

4  $n$  を3以上の整数とする。座標平面上の点のうち,  $x$  座標と  $y$  座標がともに1以上  $n$  以下の整数であるものを考える。これら  $n^2$  個の点のうち3点以上を通る直線の個数を  $L(n)$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $L(3)$  を求めよ。
- (2)  $L(4)$  を求めよ。
- (3)  $L(5)$  を求めよ。

## 第 2 章 一般前期解答

問題冊子 (A4 で 12 ページ) は、見開きで問題が偶数ページ、下書き (計算スペース) が奇数ページに配置されており、問題ページの下側の余白を含め十分な計算スペースがある。解答用紙は、**22**～**25**の番号が書かれた 4 枚の A3 用紙がはさみ込まれており、問題**1**～**4**を順次指定された解答用紙に答えるようになっている (2004 年度以降の必答 4 題の出題形式)。

設問ごとに解答欄が仕切られているため、十分な解答スペースではなく、途中の計算などを書いていくスペースはない (解答用紙の裏面の使用は不可)。そのため、問題用紙の下書き欄で計算した結果を整理して「理由と計算結果・結論」を明示する必要がある。なお、問題冊子は、試験終了後に持ち帰ることができる。

出題者は受験生に簡潔な表現力を要求したものと考えられる。理学部数学科の採点担当者からも、定積分の途中計算などを細かく書く必要はないと聞いた。

### 対策

1. 標準的な問題を中心に 3 題とやや難の 1 題が例年の出題傾向である。配点はすべて 50 点ずつの計 200 点であるので 120 分で効率的に問題を解いていく必要がある。なお、文学部および医学部保健学科看護学専攻は 100 点満点に換算される。
2. 完答が難しい問題についても、前半の設問はどれも基本または標準的な問題が配置されているので、確実に部分点を狙っていく必要がある。
3. 採点者が読みやすい簡潔な答案の作成を普段から練習しておく。

## 2.1 2015年度

- 1 (1)  $y = x^2$  と  $y = -x^2 + ax + b$  から  $y$  を消去すると

$$x^2 = -x^2 + ax + b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - ax - b = 0 \quad \cdots (*)$$

$C_1$  と  $C_2$  が異なる2点で交わる時,  $(*)$  より

$$(-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-b) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 8b > 0$$

- (2) 方程式  $(*)$  の解を  $\alpha, \beta$  とすると  $(\alpha < \beta)$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{a}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{2} \\ \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$C_1$  と  $C_2$  で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + ax + b) - x^2\} dx &= - \int_{\alpha}^{\beta} (2x^2 - ax - b) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = 9 \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b} = 3 \quad \text{よって} \quad b = -\frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

- (3) (2) の結果から,  $C_2$  は

$$y = -x^2 + ax - \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad y = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

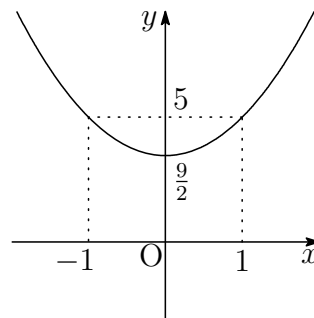
$C_2$  の頂点を  $(x, y)$  とすると

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

よって,  $C_2$  の頂点が描く軌跡の方程式は

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

その軌跡は, 右の図のようになる.



- 2 (1)  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$  とおくと

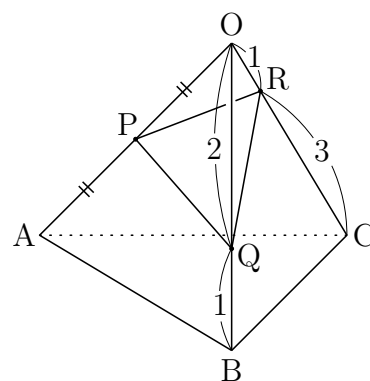
$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$$



$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad |\overrightarrow{PQ}|^2 &= \left| \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 = \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{4}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PR}|^2 &= \left| \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{c}|^2 - \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{PQ} = \frac{\sqrt{13}}{6}, \quad \mathbf{PR} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

別解  $\triangle OPQ$  および  $\triangle OPR$  に余弦定理を適用すると

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{36}$$

$$PR^2 = OP^2 + OR^2 - 2OP \cdot OR \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= \left( \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \right) \cdot \left( \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \right) \\ &= \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{8}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{48} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \triangle PQR = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{36} \cdot \frac{3}{16} - \left(\frac{5}{48}\right)^2} = \frac{\sqrt{131}}{96}$$

■

**3** 1, 3回目の操作で青玉の個数は2個または0個.

研

2, 4回目の操作で青玉の個数は3個または1個.

したがって, もらう硬貨の枚数は0, 1, 2枚のいずれかである.

2回目の操作で青玉3個である確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

したがって, 2回目の操作で青玉1個である確率は

$$1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

2, 4回目の操作で青玉3個, すなわち, もらう硬貨の総数が2枚である確率は

$$\frac{2}{9} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

2, 4回目の操作で青玉1個, すなわち, 硬貨を1枚ももらわない確率は

$$\frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{49}{81}$$

よって, もらう硬貨の総数が1枚である確率は

$$1 - \left( \frac{2}{27} + \frac{49}{81} \right) = \frac{26}{81}$$

補足  $x$  回目の操作で青玉が  $y$  個である確率を  $P(x, y)$  とすると

$$P(2, 3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

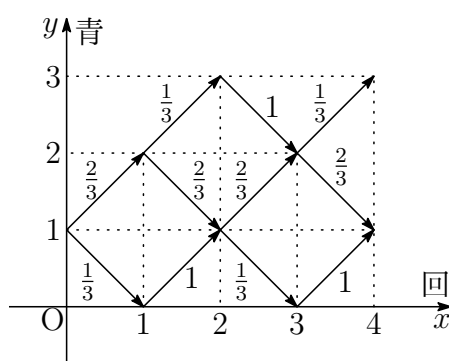
$$P(2, 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{9}$$

4回の操作で硬貨を2枚もらう (青玉が2回3個になる) 確率は

$$P(2, 3) \times 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

4回の操作で硬貨を1枚ももらわない確率は

$$\{P(2, 1)\}^2 = \left( \frac{7}{9} \right)^2 = \frac{49}{81}$$



- 4 (1)  $n$  が正の偶数のとき,  $\frac{n}{2}$  は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

よって,  $2^n - 1$  は 3 の倍数である.

- (2)  $2^{p-1} - 1 = p^k$  ( $p$  は素数,  $k$  は 0 以上の整数)  $\cdots (*)$

- (i)  $p = 2$  のとき,  $(*)$  は

$$1 = 2^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 0$$

- (ii)  $p \neq 2$  のとき,  $p$  は奇素数であるから,  $p - 1$  は偶数である.

(1) の結果から,  $2^{p-1} - 1$  は 3 の倍数である.

$(*)$  より,  $p^k$  は 3 を因数にもつから

$$p = 3$$

これを  $(*)$  に代入すると

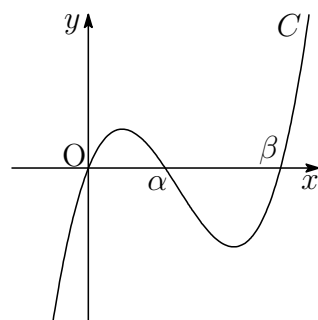
$$3 = 3^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 1$$

よって  $(p, k) = (2, 0), (3, 1)$  ■

## 2.2 2016年度

- 1 (1)  $C$  は  $x$  軸との共有点の  $x$  座標が  $x = 0, \alpha, \beta$  であるから,  $C: y = f(x)$  の方程式は  $x^3$  の係数に注意して ( $0 < \alpha < \beta$ )

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \end{aligned}$$



関数  $f(x)$  の原始関数の1つを

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha + \beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2$$

とおくと

$$F(0) = 0, \quad F(\alpha) = -\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta, \quad F(\beta) = -\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha f(x) dx - \int_\alpha^\beta f(x) dx = \left[ F(x) \right]_0^\alpha - \left[ F(x) \right]_\alpha^\beta \\ &= 2F(\alpha) - F(\beta) - F(0) \\ &= 2\left(-\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta\right) - \left(-\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3\right) \\ &= -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^3\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^4 \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= -\frac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2\beta - \frac{1}{6}\beta^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\alpha - \beta)\{2\alpha(\beta - \alpha) + \beta^2\} \end{aligned}$$

$$0 < \alpha < \beta \text{ であるから } 2\alpha(\beta - \alpha) + \beta^2 > 0$$

したがって

| $\alpha$             | (0) | $\cdots$   | $\frac{\beta}{2}$ | $\cdots$   | ( $\beta$ ) |
|----------------------|-----|------------|-------------------|------------|-------------|
| $\frac{dS}{d\alpha}$ |     | -          | 0                 | +          |             |
| $S$                  |     | $\searrow$ | 極小                | $\nearrow$ |             |

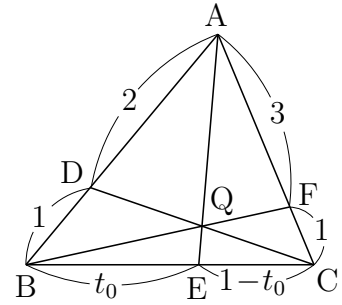
よって,  $S$  を最小にする  $\alpha$  は  $\alpha = \frac{\beta}{2}$



- 2 (1) チェバの定理により

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\text{これを解いて} \quad t_0 = \frac{3}{5}$$

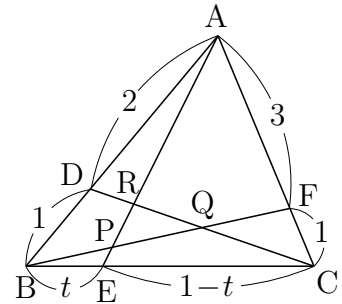


- (2)  $\triangle AEC$  および直線  $BF$  について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AP}{PE} \cdot \frac{t}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{AP}{PE} = \frac{3}{t}$$

$$\text{よって} \quad k = \frac{AP}{AE} = \frac{3}{3+t}$$



$\triangle BCD$  および直線  $AE$  について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DA}{AB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{CR}{RD} = \frac{3(1-t)}{2t}$$

$$\text{よって} \quad \ell = \frac{CR}{CD} = \frac{3(1-t)}{3(1-t) + 2t} = \frac{3(1-t)}{3-t}$$

- (3) (2) の図について、 $\triangle BCF$  および直線  $AE$  について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CA}{AF} \cdot \frac{FP}{PB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{FP}{PB} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{FP}{PB} = \frac{3(1-t)}{4t} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$t = \frac{3}{5} \text{ のとき, } P \text{ は } Q \text{ に一致するので} \quad \frac{FQ}{QB} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{よって} \quad \triangle BCQ = \frac{2}{3} \triangle BCF = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

(4)  $t = \frac{3}{5}$  のとき, R は Q に一致するので, (2) の結果から

研

$$\frac{CQ}{CD} = \frac{3\left(1 - \frac{3}{5}\right)}{3 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

したがって  $CQ : QR = \frac{1}{2} : \frac{3(1-t)}{3-t} - \frac{1}{2} = 3-t : 3-5t$

また, ①, ② から

$$BQ : PQ = \frac{2}{3} : \frac{3(1-t)}{3(1-t)+4t} - \frac{1}{3} = 3+t : 3-5t$$

$\triangle BCQ : \triangle PQR = BQ \cdot CQ : PQ \cdot QR$  であるから

$$\triangle BCQ : \triangle PQR = (3+t)(3-t) : (3-5t)^2$$

(3) の結果から  $\triangle PQR = \frac{1}{6} \times \frac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)} = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}$

■

- 3** (1) 白玉を1度だけ取り出すので、赤玉を  $m$  回 ( $m = 0, 1, \dots, n-1$ ) 取り出すとすると、青玉を取り出す回数は  $n-m-1$  であるから、到達点  $(x, y)$  は

$$x = m - 1, \quad y = (n - m - 1) - 1 = n - m - 2$$

よって、到達点は  $(m - 1, n - m - 2) \quad (m = 0, 1, \dots, n - 1)$

- (2) 赤玉, 青玉, 白玉を取り出す回数を, それぞれ  $i, j, k$  とすると, 到達点  $(x, y)$  は  $(i + j + k = n)$

$$x = i - k, \quad y = j - k$$

このとき,  $k = n - i - j$  であるから

$$(*) \begin{cases} x = i - (n - i - j) = 2i + j - n \\ y = j - (n - i - j) = i + 2j - n \end{cases}$$

ここで

$$2i + j - n = 2i' + j' - n, \quad i + 2j - n = i' + 2j' - n$$

とすると

$$2(i - i') + (j - j') = 0, \quad (i - i') + 2(j - j') = 0$$

これを解くと  $(i, j) = (i', j')$

したがって,  $(i, j) \neq (i', j')$  のとき

$$(2i + j - n, i + 2j - n) \neq (2i' + j' - n, i' + 2j' - n)$$

このことから,  $(i, j, k)$  の組合せの個数とその到達点の個数は一致する.  
よって, 求める到達点の個数は, 赤玉, 青玉, 白玉の3種類の玉から  $n$  個取り出す重複組合せの総数に一致するので

$${}_3H_n = {}_{3+n-1}C_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

(3) (\*) から

$$i = \frac{2x-y}{3} + \frac{n}{3}, \quad j = \frac{2x-y}{3} - x + y + \frac{n}{3} \quad \cdots (**)$$

$n = 3$  のとき, 上式より

$$i = \frac{2x-y}{3} + 1, \quad j = \frac{2x-y}{3} - x + y + 1$$

$(x, y)$  が  $D$  内にあるとき ( $k = 3 - i - j$ )

$$(x, y, i, j, k) = (-1, 1, 0, 2, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (1, -1, 2, 0, 1)$$

よって, 求める確率は

$$P_3 = \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{6} + \frac{3!}{1!1!1!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{25}{72}$$

(4)  $n = 3N$  のとき, (\*\*) より

$$i = \frac{2x-y}{3} + N, \quad j = \frac{2x-y}{3} - x + y + N$$

$(x, y)$  が  $D$  内にあるとき ( $k = 3N - i - j$ )

$$(x, y, i, j, k) = (-1, 1, N-1, N+1, N), (0, 0, N, N, N), \\ (1, -1, N+1, N-1, N)$$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} P_{3N} &= \frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ &\quad + \frac{(3N)!}{N!N!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{1}{3}\right)^N \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ &\quad + \frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ &= \frac{(19N+6)(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^2(N+1)!} \end{aligned}$$

■

**4** (1) 仮定から  $10^n \equiv a_n, \quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から  $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって  $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2)  $10^1 = 10$  より  **$a_1 = 10$**

(1) の結果を用いると、法 13 について

$$a_2 \equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9$$

$$a_3 \equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12$$

$$a_4 \equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3$$

$$a_5 \equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4$$

$$a_6 \equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1$$

よって  **$a_2 = 9, a_3 = 12, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 1$**

(3) 整数  $p, q$  を  $1 \leq p \leq 9, 0 \leq q \leq 9$  とし、求める自然数  $N$  を

$$N = p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

とおくと、法 13 に関して

$$N \equiv p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

$$\equiv p \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 9 + 6 \cdot 10 + q = 4p + q + 75$$

$$\equiv 4p + q - 3$$

このとき、 $N \equiv 0 \pmod{13}$  を満たす整数  $(p, q)$  の組は

$$(p, q) = (2, 8), (3, 4), (4, 0), (5, 9), (6, 5), (7, 1), (9, 6)$$

よって、求める自然数  $N$  は

$$\mathbf{220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166}$$



## 2.3 2017年度

- ① (1) 求める直線を  $l: y = px + q$  とおく.  $C_1$  と  $l$  の方程式から  $y$  を消去すると

$$2x^2 + 1 = px + q \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - px - q + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

$C_1$  と  $l$  は接するので, 方程式  $(*)$  の係数について

$$(-p)^2 - 4 \cdot 2(-q + 1) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 + 8q - 8 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に,  $C_2$  と  $l$  の方程式から  $y$  を消去すると

$$-x^2 + a = px + q \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + px + q - a = 0 \quad \cdots (**)$$

$C_2$  と  $l$  は接するので, 上の方程式の係数について

$$p^2 - 4 \cdot 1(q - a) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - 4q + 4a = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad p^2 = \frac{8}{3}(1 - a), \quad q = \frac{1}{3}(a + 2)$$

よって, 求める2直線の方程式は

$$y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1 - a)}x + \frac{1}{3}(a + 2)$$

- (2) (1) の結果から, 次の2式は平方式になることに注意して

研

$$2x^2 + 1 - (px + q) = 2\left(x - \frac{p}{4}\right)^2$$

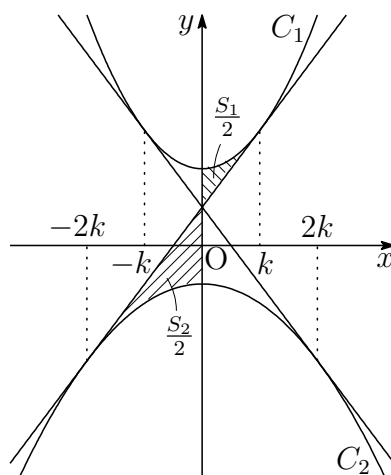
$$px + q - (-x^2 + a) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$p = 2\sqrt{\frac{2}{3}(1 - a)}$  のとき,  $k = \frac{p}{4}$  とおく.  
 $C_1, C_2$  および2接線は  $y$  軸に関して対称であることに注意して

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{2} &= \int_0^k 2(x - k)^2 dx \\ &= \left[ \frac{2}{3}(x - k)^3 \right]_0^k = \frac{2k^3}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{2} &= \int_{-2k}^0 (x + 2k)^2 dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}(x + 2k)^3 \right]_{-2k}^0 = \frac{8k^3}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{16k^3}{3} \times \frac{3}{4k^3} = 4$$



■

- 2 (1) 3 点  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 1)$ ,  $B(s, t)$  について,  $\triangle OAB$  が正三角形であるから,  $OA^2 = OB^2 = AB^2$  より

$$1^2 + 1^2 = s^2 + t^2 = (s-1)^2 + (t-1)^2$$

整理すると  $s^2 + t^2 = 2, \quad s + t = 1$

これを解いて  $(s, t) = \left( \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \right)$  (複号同順)

- (2)  $\sqrt{3}$  が有理数であると仮定すると, 自然数  $p, q$  を用いて

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素})$$

とおける. これから,  $p = \sqrt{3}q$  の両辺を平方すると

$$p^2 = 3q^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$p^2$  は 3 の倍数であるから,  $p$  は 3 の倍数である.

したがって,  $p = 3k$  ( $k$  は自然数) とおけ, これを  $\textcircled{1}$  に代入すると

$$(3k)^2 = 3q^2 \quad \text{ゆえに} \quad q^2 = 3k^2$$

$q^2$  は 3 の倍数であるから,  $q$  も 3 の倍数である. このことは,  $p$  と  $q$  が互いに素であることに反する. よって,  $\sqrt{3}$  は無理数である.

- (3)  $\overrightarrow{OA} = (1, a)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (s, t)$  であるから,  $\triangle OAB$  の面積により

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin 60^\circ = \frac{1}{2} |t - as|$$

このとき,  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$  であることに注意して

$$\frac{1}{2} (a^2 + 1) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} |t - as| \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{3} = \frac{2|t - as|}{a^2 + 1} \quad \dots (*)$$

$a$  が有理数であるとき, 2 数  $s, t$  がともに有理数であるとする,  $(*)$  の右辺は有理数となり, (2) の結果に矛盾する.

よって,  $s$  と  $t$  のうち少なくとも 1 つは無理数である. ■

- 3** (1) サイコロを1回投げるとき、勝敗が決まらない、すなわち、1または2の目が出る確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$n$  回以下では勝敗が決まらないのは、 $n$  回とも1または2の目が出ることであるから、よって、求める確率  $p_n$  は

$$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$$

$p_n$  が 0.005 より小さいとき

$$\frac{1}{3^n} < 0.005 = \frac{1}{200} \quad \text{ゆえに} \quad 3^n > 200$$

$3^4 = 81$ ,  $3^5 = 243$  であるから、求める最小の  $n$  は  **$n = 5$**

- (2) サイコロを1回投げるとき、勝者が決まる、すなわち、3, 4, 5, 6の目が出る確率は

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

さいころを投げた回数が3回以下でAが勝つのは、1回目または3回目でAが勝つことであるから、求める確率は

$$\frac{2}{3} + p_2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$$

- (3) 求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \sum_{i=1}^k p_{2i} \times \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^k \frac{1}{3^{2i}} = \frac{2}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{9}\right)^i \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{9^{k+1}}\right) \end{aligned}$$

■

4 (1) ユークリッドの互除法を用いて

研

$$2017 = 225 \times 8 + 217,$$

$$225 = 217 \times 1 + 8,$$

$$217 = 8 \times 27 + 1$$

よって、求める最大公約数は 1

$$(2) 225 = 3^2 \times 5^2, 2017 = 15 \times 134 + 7$$

全体集合を  $U = \{1, 2, 3, \dots, 134\}$  とし、その部分集合を

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 44\},$$

$$B = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 26\}$$

とすると

$$A \cap B = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, 15 \cdot 3, \dots, 15 \cdot 8\}$$

したがって、求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cap B}) &= n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 134 - (44 + 26 - 8) = \mathbf{72} \end{aligned}$$

$$(3) 225 = 3^2 \times 5^2, 15 = 3 \times 5, 1998 = 2 \times 3^3 \times 37, 111 = 3 \times 37$$

求める数は 2017 以下で、 $3 \times 5 \times 37$  の倍数は

$$\{555n \mid n = 1, 2, 3\}$$

ただし、 $n$  は 2, 3, 5 と互いに素であるから、求める数は 555 ■

## 2.4 2018年度

- 1 (1) 曲線  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  が点  $(c, 0)$  において  $x$  軸に接するから、曲線の方程式の  $x^3$  の係数および定数項に注意して

$$y = (x - c)^2 \left( x + \frac{1}{c} \right) \quad \cdots (*)$$

とおける．これを展開すると

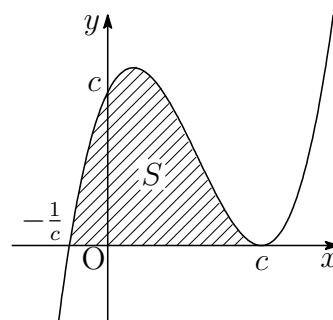
$$y = x^3 + \left( \frac{1}{c} - 2c \right) x^2 + (c^2 - 2)x + c$$

与えられた曲線の方程式と上式の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = \frac{1}{c} - 2c, \quad b = c^2 - 2$$

- (2) (\*) により ( $c > 0$ )

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{c}}^c \left( x + \frac{1}{c} \right) (c - x)^2 dx \\ &= \frac{1}{12} \left( c + \frac{1}{c} \right)^4 \end{aligned}$$



$c > 0$ ,  $\frac{1}{c} > 0$  であるから、相加平均・相乗平均の関係により

$$c + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{c}} = 2$$

上式において、等号が成立するのは

$$c = \frac{1}{c} \quad \text{すなわち} \quad c = 1$$

のときで、このとき  $S$  は最小となる．よって  $c = 1$

補足 定積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる<sup>1</sup>．

<sup>1</sup><http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010-kouki.pdf> [1]

- 2** (1)  $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$  であるから

$$2^n \text{ を } 7 \text{ で割った余りは } \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき } & 1 \\ n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } & 2 \\ n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } & 4 \end{cases}$$

- (2)  $m = 101101101101101101_{(2)}$

これに (1) の結果を用いると、法 7 に関して

$$m = \sum_{k=0}^5 (2^2 + 1) 2^{3k} \equiv \sum_{k=0}^5 5 \cdot 1 = 30 \equiv 2 \pmod{7}$$

よって、求める余りは **2** ■

- 3** (1)  $L = PA^2 + PB^2 + PC^2$ ,  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ ,  $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$  より

$$\begin{aligned} L &= |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 \\ &= |\vec{a} - \vec{x}|^2 + |\vec{b} - \vec{x}|^2 + |\vec{c} - \vec{x}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{x} + |\vec{x}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{x} + |\vec{x}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{x} + |\vec{x}|^2 \\ &= 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

- (2)  $\triangle ABC$  の重心を  $G$  とし,  $\vec{g} = \overrightarrow{OG}$  とおくと

$$\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{g}$$

これを (1) に代入すると

$$\begin{aligned} L &= 3|\vec{x}|^2 - 6\vec{g} \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ &= 3(|\vec{x}|^2 - 2\vec{g} \cdot \vec{x} + |\vec{g}|^2) + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 3|\vec{g}|^2 \\ &= 3|\vec{x} - \vec{g}|^2 + \frac{1}{3}\{3|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 + 3|\vec{c}|^2 - 3|\vec{g}|^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad & 3|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 + 3|\vec{c}|^2 - |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{c}|^2 = (AB^2 + BC^2 + CA^2) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad L = 3|\vec{x} - \vec{g}|^2 + \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

よって,  $\vec{x} = \vec{g}$ , すなわち,  $P$  が  $\triangle ABC$  の重心であるとき,

$L$  は最小値  $\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$  をとる. ■

4 a, b, c がそれぞれ不良品である事象をそれぞれ  $A, B, C$  とすると

研

$$P(A) = p, P_{\bar{A}}(B) = q, P_A(B) = 3q, P_{\bar{B}}(C) = r, P_B(C) = 5r$$

$$(1) P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{1 - P(A)}, P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ より}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \{1 - P(A)\}P_{\bar{A}}(B) = (1 - p)q$$

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = p \cdot 3q = 3pq$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= 3pq + (1 - p)q = (1 + 2p)q \end{aligned}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= p + (1 + 2p)q - 3pq = \mathbf{p + q - pq} \end{aligned}$$

$$(2) P_{\bar{B}}(C) = \frac{P(\bar{B} \cap C)}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{B} \cap C)}{1 - P(B)}, P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \text{ より}$$

$$P(\bar{B} \cap C) = \{1 - P(B)\}P_{\bar{B}}(C) = \{1 - (1 + 2p)q\}r$$

$$P(B \cap C) = P(B)P_B(C) = (1 + 2p)q \cdot 5r = 5(1 + 2p)qr$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\bar{B} \cap C) + P(B \cap C) \\ &= \{1 - (1 + 2p)q\}r + 5(1 + 2p)qr \\ &= \{1 + 4(1 + 2p)q\}r = \mathbf{(1 + 4q + 8pq)r} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から、求める確率は

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{5(1 + 2p)qr}{(1 + 4q + 8pq)r} = \frac{\mathbf{5(1 + 2p)q}}{\mathbf{1 + 4q + 8pq}}$$

■

## 2.5 2019 年度

- 1 硬貨を 10 回投げて、裏が出た回数を  $n$  とすると、出た数字 10 個の積は

$$8^n \cdot 3^{10-n}$$

これが 8 桁の数であるから  $10^7 \leq 8^n \cdot 3^{10-n} < 10^8$

辺々の常用対数をとると  $7 \leq n \log_{10} 8 + (10-n) \log_{10} 3 < 8$

$\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  より

$$7 \leq 0.9030n + 0.4771(10-n) < 8$$

整理すると  $22290 \leq 4259n < 32290$  ゆえに  $5 + \frac{995}{4259} \leq n < 7 + \frac{2477}{4259}$

$n$  は整数 ( $0 \leq n \leq 10$ ) であるから  $n = 6, 7$

よって、求める確率は

$${}_{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = (210 + 120) \times \frac{1}{1024} = \frac{165}{512}$$

■

- 2  $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 1$  とおくと  $f'(x) = 3x^2 - 2kx + k$

$f(x)$  は極大値と極小値をもつから、 $f'(x) = 0$  の解を  $\alpha, \beta$  とすると ( $\alpha < \beta$ )

$$\beta - \alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 - 3k}}{3} - \frac{k - \sqrt{k^2 - 3k}}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{k(k-3)} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

極大値、極小値は、それぞれ  $f(\alpha), f(\beta)$  であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx = 3 \int_{\beta}^{\alpha} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -3 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

条件により、 $f(\alpha) - f(\beta) = 4|k|^3$  であるから

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 = 4|k|^3 \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 2|k| \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より  $2|k| = \frac{2}{3} \sqrt{k(k-3)}$  ゆえに  $k(8k+3) = 0$

$k(k-3) > 0$  に注意して、これを解くと  $k = -\frac{3}{8}$

■

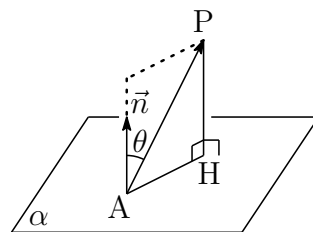
- 3** (1)  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 2, 3)$ ,  $C(4, 5, 6)$ ,  $P(6, p, q)$  より

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{AP} = (5, p-2, q-3)$$

$\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  の両方に垂直なベクトル, すなわち,  
 $\alpha$  の法線ベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (0, 1, -1)$$

とおき,  $\overrightarrow{AP}$  と  $\vec{n}$  のなす角を  $\theta$  とすると



$$PH = |\overrightarrow{AP}| |\cos \theta|, \quad \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AP}| |\vec{n}|}$$

$$\text{よって } PH = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|0 \cdot 5 + 1 \cdot (p-2) - 1 \cdot (q-3)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|p - q + 1|}{\sqrt{2}}$$

- (2)  $|\overrightarrow{AB}| = 2$ ,  $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$   
 $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  の張る平行四辺形の面積を  $S$  とすると

$$S = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \sqrt{2^2 (3\sqrt{3})^2 - 6^2} = 6\sqrt{2}$$

四面体 ABCP の体積を  $V$  とすると<sup>2</sup>

$$V = \frac{1}{6} S \cdot PH = \frac{1}{6} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{|p - q + 1|}{\sqrt{2}} = |p - q + 1|$$

$(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$  より,  $p-9 = \cos \theta$ ,  $q-7 = \sin \theta$  とおくと

$$p = \cos \theta + 9, \quad q = \sin \theta + 7$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } V &= |p - q + 1| = |(\cos \theta + 9) - (\sin \theta + 7) + 1| \\ &= |3 - (\sin \theta - \cos \theta)| = 3 - \sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } 3 - \sqrt{2} \leq V \leq 3 + \sqrt{2}$$

よって 最大値  $3 + \sqrt{2}$ , 最小値  $3 - \sqrt{2}$  ■

<sup>2</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai\\_bun\\_2016.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_bun_2016.pdf) **3** の解説を参照.

- 4 (1) 2つの整式  $f(x)$ ,  $g(x)$  が満たす恒等式

$$(*) \begin{cases} f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7 \\ g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により,  $f(x)$ ,  $g(x)$  の次数をそれぞれ  $m$ ,  $n$  とすると

$$\begin{cases} 2m = 2 + n & \cdots \textcircled{1} \\ 3n = \max(4 + m, 2 + n) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(i)  $4 + m \geq 2 + n$  のとき,  $\textcircled{2}$  より  $3n = 4 + m$  ゆえに  $m = 3n - 4$   
これと  $\textcircled{1}$  を条件に注意して解くと  $m = n = 2$

(ii)  $4 + m < 2 + n$  のとき,  $\textcircled{2}$  より  $3n = 2 + n$  ゆえに  $n = 1$   
これを  $\textcircled{1}$  に代入すると,  $m = \frac{3}{2}$  となり, 不適.

$f(x)$  と  $g(x)$  の次数はともに 2 であるから, 題意は成立する.

- (2)  $(*)$  の第 1 式において,  $x$  を  $-x$  に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(-x) + 7$$

これと  $(*)$  の第 1 式により  $g(-x) = g(x) \quad \cdots \textcircled{3}$

また,  $(*)$  の第 2 式の  $x$  を  $-x$  に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(-x) - 6x^2 - 2$$

$\textcircled{3}$  より,  $g(x)$  は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

これと  $(*)$  の第 2 式より  $f(-x) = f(x)$

また,  $(*)$  に  $x = 0$  を代入すると

$$f(0) = 2g(0) + 7, \quad g(0) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 3$$

以上の結果から,  $f(x) = ax^2 + 3$ ,  $g(x) = px^2 - 2$  とおくと,  $(*)$  は

$$\begin{cases} ax^4 + 3 = (x^2 + 2)(px^2 - 2) + 7 \\ px^6 - 2 = x^4(ax^2 + 3) - 3x^2(px^2 - 2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\text{整理すると} \quad \begin{cases} ax^4 = px^4 + 2(p-1)x^2 \\ px^6 = ax^6 - 3(p-1)x^4 \end{cases}$$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = p, \quad p - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = p = 1$$

よって  $f(x) = x^2 + 3$ ,  $g(x) = x^2 - 2$  ■

## 2.6 2020年度

- 1 (1)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$  とおくと

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - \{3(x-a)^2 + a^3 - 40\} \\ &= -(2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

2次方程式

$$2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40 = 0 \quad \cdots (**)$$

の判別式を  $D$  とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-3a)^2 - 2(a^3 + 3a^2 - 40) \\ &= -2a^3 + 3a^2 + 80 = (4-a)(2a^2 + 5a + 20) \\ &= (4-a) \left\{ 2 \left( a + \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{135}{8} \right\} \end{aligned}$$

方程式  $(**)$  が異なる2つの実数解をもつから,  $D > 0$  より

$a \geq 0$  に注意して,  $4-a > 0$  を解くと  $0 \leq a < 4$

- (2) 2次方程式  $(**)$  の解を  $\alpha$ ,  $\beta$  とおくと ( $\alpha < \beta$ )

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{3a + \sqrt{D/4}}{2} - \frac{3a - \sqrt{D/4}}{2} = \sqrt{D/4} \\ f(x) - g(x) &= -2(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned}$$

$\alpha \leq x \leq \beta$  において,  $f(x) - g(x) \geq 0$  であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - g(x)\} dx = -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{3}\{D/4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$h(a) = D/4 \text{ とおくと } S = \frac{1}{3}\{h(a)\}^{\frac{3}{2}}$$

$$h(a) = -2a^3 + 3a^2 + 80 \text{ より } h'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a-1)$$

|         |   |            |    |            |     |
|---------|---|------------|----|------------|-----|
| $a$     | 0 | $\cdots$   | 1  | $\cdots$   | (4) |
| $h'(a)$ |   | +          | 0  | -          |     |
| $h(a)$  |   | $\nearrow$ | 81 | $\searrow$ |     |

よって, 求める  $S$  の最大値は  $\frac{1}{3}\{h(1)\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 81^{\frac{3}{2}} = 243$  ■

- 2 (1) 4点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 0, p)$ ,  $C(q, r, s)$  について,  
 $OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ,  $OB = OA$  であるから

$$\sqrt{1^2 + p^2} = \sqrt{2} \quad \text{条件 } p > 0 \text{ により } p = 1$$

$OC^2 = AC^2 = BC^2 = 2$  であるから

$$(*) \begin{cases} q^2 + r^2 + s^2 = 2 \\ (q-1)^2 + (r-1)^2 + s^2 = 2 \\ (q-1)^2 + r^2 + (s-1)^2 = 2 \end{cases}$$

(\*) の第 2 式, 第 3 式をそれぞれ整理すると

$$(q^2 + r^2 + s^2 - 2) - 2(q + r - 1) = 0,$$

$$(q^2 + r^2 + s^2 - 2) - 2(q + s - 1) = 0$$

(\*) の第 1 式を上 の 2 式に代入することにより

$$\begin{cases} q + r - 1 = 0 \\ q + s - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (**) \begin{cases} q = 1 - s \\ r = s \end{cases}$$

(\*\*) を (\*) の第 1 式に代入すると

$$(1-s)^2 + s^2 + s^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (s-1)(3s+1) = 0$$

$s > 0$  に注意して  $s = 1$  (\*\*) より  $q = 0, r = 1$

よって  $p = 1, q = 0, r = 1, s = 1$

- (2) 2点  $O, A$  の  $z$  座標が 0 で, 2点  $B, C$  の  $z$  座標が 1 であるから, 四面体  $OABC$  の平面  $z = t$  による断面は, 線分  $AB, AC, OC, OB$  を  $t : 1 - t$  に内分する点を頂点とする四角形である. これらの頂点を順に  $D, E, F, G$  とおくと

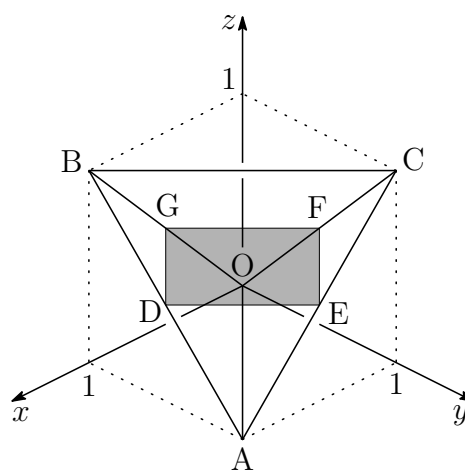
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GF} = t\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FE} = (1-t)\overrightarrow{OA}$$

$\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 0)$  より  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OA}$ , この断面積を  $S$  とすると

$$S = t(1-t)|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{OA}| = 2t(1-t) = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$0 \leq t \leq 1$  より, 断面積は,  $t = \frac{1}{2}$  のとき, 最大値  $\frac{1}{2}$  をとる. ■



- 3 (1)  $w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$  が実数を係数とする整式  $f(x) = 0$  の解であるから,  
 $f(x)$  は,  $(x - w)(x - \bar{w})$ , すなわち,  $x^2 - x + 1$  を因数にもつ.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c \\ &= (x^2 - x + 1)(x + a + 1) \\ &\quad + (a + b)x - a + c - 1 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad a + b = 0, \quad -a + c - 1 = 0$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{a = c - 1, \quad b = 1 - c}$$

$$(2) (1) \text{の結果から} \quad f(x) = x^3 + (c - 1)x^2 + (1 - c)x + c$$

$$\text{ゆえに} \quad f(1) = c + 1, \quad f(-1) = 3c - 3$$

$f(1)$  を 7 で割ると 4 余るから

$$c + 1 \equiv 4 \quad \text{ゆえに} \quad c \equiv 3 \pmod{7}$$

$$\text{したがって, 整数 } k \text{ を用いて} \quad c = 7k + 3 \cdots \textcircled{1}$$

$f(-1)$  を 11 で割ると 2 余るから

$$3c - 3 \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad 4 \cdot 3c = 4 \cdot 5 \quad \text{すなわち} \quad c \equiv 9 \pmod{11}$$

① を上式に代入すると

$$7k + 3 \equiv 9 \quad \text{ゆえに} \quad 3 \cdot 7k \equiv 3 \cdot 6 \quad \text{すなわち} \quad k \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\text{したがって, 整数 } \ell \text{ を用いて} \quad k = 11\ell + 4$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入すると} \quad c = 7(11\ell + 4) + 3 = 77\ell + 31$$

$c$  の絶対値が 40 以下であるから

$$c = 31 \quad \text{ゆえに} \quad a = 30, \quad b = -30 \quad \cdots (*)$$

(1) の結果から

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x + a + 1)$$

(\*) をこれに代入して

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 31)$$

$$f(x) = 0 \text{ の解は} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \quad -31$$



- 4 (1)  $X$  が 5 で割り切れない, すなわち, 4 回とも 5 以外の目が出る確率を  $p_0$ ,  $X$  が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を  $p_1$  とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{625}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \frac{19}{144}$$

- (2)  $X$  が 2 で割り切れない, すなわち, 4 回とも奇数の目が出る確率を  $q_0$ ,  $X$  が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を  $q_1$  とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \frac{37}{48}$$

- (3)  $X$  が 100 の倍数となるは, 出る目の組合せが次の (i)~(iv) の場合である.

- (i)  $\{A, A, 5, 5\}$  のとき ( $A = 2, 6$ )

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

- (ii)  $\{4, 5, 5, B\}$  のとき ( $B = 1, 2, 3, 6$ )

$$\frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

- (iii)  $\{4, 4, 5, 5\}$  のとき

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

- (iv)  $\{4, 5, 5, 5\}$  のとき

$$\frac{4!}{3!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

- (i)~(iv) より, 求める確率は  $\frac{24 + 48 + 6 + 4}{1296} = \frac{82}{1296} = \frac{41}{648}$  ■

## 2.7 2021 年度

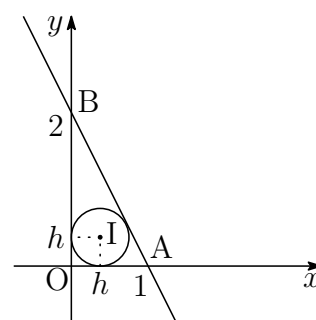
- 1 (1)  $\triangle OAB$  の内心を  $I(h, h)$  とし ( $h > 0$ ),  $\triangle OAB$  の周の長さを  $\ell$  とすると

$$\ell = 1 + 2 + \sqrt{1^2 + 2^2} = 3 + \sqrt{5}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}\ell h \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})h$$

$$\text{これを解いて } h = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ よって } I\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

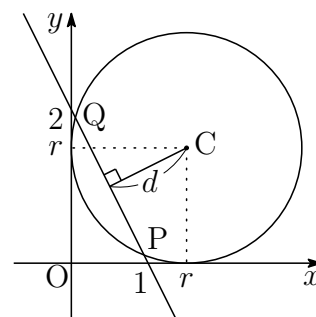


- (2) 2点  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 2)$  を通る直線は

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad 2x + y - 2 = 0$$

中心が第1象限で、 $x$  軸と  $y$  軸の両方に接する円の半径を  $r$ , 中心を  $C(r, r)$ ,  $C$  から直線  $AB$  までの距離を  $d$  とすると

$$d = \frac{|2r + r - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|3r - 2|}{\sqrt{5}}$$



この円と直線  $AB$  が2つの交点  $P$ ,  $Q$  をもつとき,  $d < r$  であるから

$$\frac{|3r - 2|}{\sqrt{5}} < r \quad \text{整理すると} \quad r^2 - 3r + 1 < 0$$

$$\text{これを解いて} \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < r < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 &= r^2 - d^2 = r^2 - \left(\frac{|3r - 2|}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= -\frac{4}{5}r^2 + \frac{12}{5}r - \frac{4}{5} \\ &= -\frac{4}{5}\left(r - \frac{3}{2}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{ および上式より } \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad PQ \leq 2$$

よって, 線分  $PQ$  の長さの最大値は **2**

2 (1)  $y \geq xt - 2t^2$  より  $2t^2 - xt + y \geq 0$

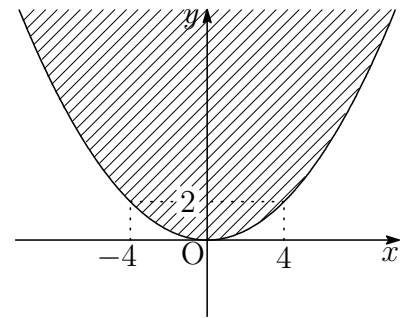
$f(t) = 2t^2 - xt + y$  とおくと

$$(*) \quad f(t) = 2\left(t - \frac{x}{4}\right)^2 - \frac{x^2}{8} + y$$

すべての実数  $t$  に対して,  $f(t) \geq 0$  より

$$-\frac{x^2}{8} + y \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \geq \frac{x^2}{8}$$

よって, 求める領域は右上の図の斜線部分で境界線を含む.



(2) (1) と同様に,  $|t| \leq 1$  に対して  $f(t) \geq 0$

(\*) より, 次をみたせばよい.

(i)  $\frac{x}{4} < -1$ , すなわち,  $x < -4$  のとき  $f(-1) \geq 0$

$$f(-1) = 2 + x + y \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \geq -x - 2$$

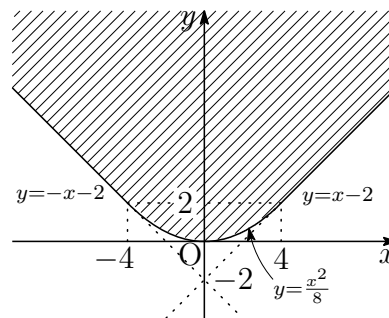
(ii)  $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$  のとき  $f\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0$

$$f\left(\frac{x}{4}\right) = -\frac{x^2}{8} + y \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \geq \frac{x^2}{8}$$

(iii)  $1 < \frac{x}{4}$ , すなわち,  $4 < x$  のとき  $f(1) \geq 0$

$$f(1) = 2 - x + y \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \geq x - 2$$

(i)~(iii) より, 求める領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



- 3 (1) 放物線  $C: y = -x^2 - 2ax - a^3 + 10a$  と直線  $\ell: y = 8x + 6$  の方程式から  $y$  を消去して整理すると

$$x^2 + 2(a+4)x + a^3 - 10a + 6 = 0 \quad (*)$$

$C$  と  $\ell$  が接するから、上の2次方程式の係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= (a+4)^2 - (a^3 - 10a + 6) \\ &= -a^3 + a^2 + 18a + 10 \\ &= -(a-5)(a^2 + 4a + 2) = 0 \end{aligned}$$

$a > 0$  より、 $a^2 + 4a + 2 > 0$  に注意して  $\mathbf{a = 5}$

- (2)  $a = 5$  のとき、2次方程式  $(*)$  は

$$x^2 + 18x + 81 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+9)^2 = 0$$

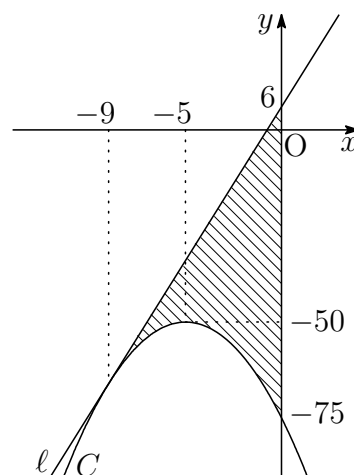
したがって、 $C$  と  $\ell$  の接点の  $x$  座標は

$$x = -9$$

$$(8x+6) - (-x^2 - 2ax - a^3 + 10a) = (x+9)^2$$

であるから、求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-9}^0 (x+9)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[ (x+9)^3 \right]_{-9}^0 = \mathbf{243} \end{aligned}$$



4 (1)  $x_n = \sum_{k=1}^n k2^{k-1}$  とおくと,  $x_n = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)2^{k-2}$  より

$$\begin{aligned} 2x_n &= \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)2^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n (k-1)2^{k-1} + n2^n \\ &= \sum_{k=1}^n k2^{k-1} - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} + n2^n \\ &= x_n - \frac{2^n - 1}{2 - 1} + n2^n \end{aligned}$$

よって  $x_n = (n-1)2^n + 1$

(2)  $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}a_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} (n+2-k)a_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k \\ &= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

整理すると  $2a_{n+2} - 3a_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k$

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  とすると  $S_1 = a_1 = 2, \quad S_2 = a_1 + a_2 = 4$

$$2(S_{n+2} - S_{n+1}) - 3(S_{n+1} - S_n) = S_n$$

$$S_{n+2} - 2S_{n+1} = \frac{1}{2}(S_{n+1} - 2S_n)$$

$S_2 - 2S_1 = 4 - 2 \cdot 2 = 0$  より

$$S_{n+1} - 2S_n = 0 \quad \text{ゆえに} \quad S_n = S_1 2^{n-1} = 2^n$$

したがって

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases} \quad \text{よって} \quad a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 2^{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

補足  $S_1 = 2, S_2 = 4, 2S_{n+2} - 5S_{n+1} + 2S_n = 0$

漸化式の特性方程式は

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 2, \frac{1}{2}$$

したがって,  $\{S_n\}$  は定数  $p, q$  を用いて

$$S_n = p2^n + q \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

とおける. このとき

$$2p + \frac{q}{2} = 2, \quad 4p + \frac{q}{4} = 4 \quad \text{これを解いて} \quad p = 1, q = 0$$

したがって  $S_n = 2^n$  (以下同様)

別解  $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}a_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2}(2a_1 + a_2) = 1 + \frac{1}{2}(2 \cdot 2 + 2) = 4$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{2}(3a_1 + 2a_2 + a_3) = 1 + \frac{1}{2}(3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4) = 8$$

これから,  $\{a_n\}$  を次のように推測する.

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = 2^{n-1} \quad \dots (*)$$

[1]  $n = 2$  のとき,  $(*)$  は成立する.

[2]  $2 \leq n \leq j$  のとき,  $(*)$  が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j (j+1-k)a_k \\ &= 1 + \frac{1}{2}(j+1) \sum_{k=1}^j a_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j ka_k \end{aligned}$$

$$a_1 = 2 \text{ より, } \sum_{k=1}^j a_k = 2^j, \quad \sum_{k=1}^j ka_k = (j-1)2^j + 2 \text{ であるから}$$

$$a_{j+1} = 1 + \frac{1}{2}(j+1)2^j - \frac{1}{2}\{(j-1)2^j + 2\} = 2^j$$

よって,  $2 \leq n \leq j+1$  のときも,  $(*)$  が成立する.

[1], [2] より,  $(*)$  が成立する. よって,  $a_1 = 2, a_n = 2^{n-1} \quad (n \geq 2)$

## 2.8 2022 年度

- 1 (1) 曲線  $C: y = |x^2 + (3-a)x - 3a| = |(x+3)(x-a)|$  ( $-3 < a < 13$ ) および直線  $\ell: y = -x + 13$  が接するとき、 $C$  と  $\ell$  の  $x$  軸との交点の  $x$  座標に注目すると、 $C$  と  $\ell$  の接点の  $x$  座標は区間  $-3 < a < 13$  にあるから

$$-\{x^2 + (3-a)x - 3a\} = -x + 13$$

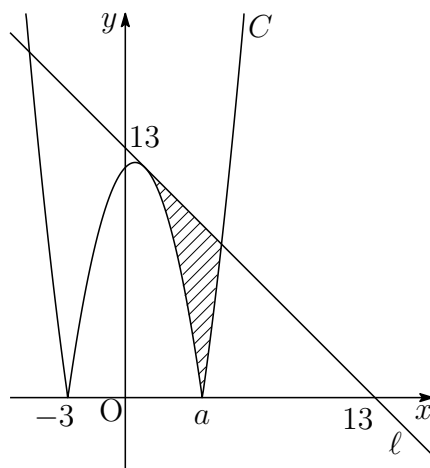
$$\text{したがって } x^2 + (2-a)x + 13 - 3a = 0 \quad \cdots (*)$$

このとき、係数について

$$D = (2-a)^2 - 4 \cdot 1(13-3a) = 0, \quad -3 < -\frac{2-a}{2} < a$$

$$\text{それぞれ整理すると } (a+12)(a-4) = 0, \quad -2 < a$$

$-3 < a < 13$  に注意して、これを解くと  $a = 4$



- (2) 接点の  $x$  座標は、(1) の結果から  $-\frac{2-a}{2} = -\frac{2-4}{2} = 1$   
 $x > 4$  における  $C$  と  $\ell$  の共有点の  $x$  座標は

$$x^2 - x - 12 = -x + 13 \quad x \text{ の範囲に注意して解くと } x = 5$$

求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 \{(-x+13) - |(x+3)(x-4)|\} dx \\ &= \int_1^4 (x-1)^2 dx + \int_4^5 (-x^2 + 25) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^4 + \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 25x \right]_4^5 = \frac{41}{3} \end{aligned}$$

- 2 (1)  $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (2, 1, 2)$   
 $\vec{n} = (x, y, z)$  とおくと,  $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$  であるから

研

$$x + y = 0, \quad 2x + y + 2z = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = -x, \quad z = -\frac{1}{2}x$$

$$\vec{n} = \left(x, -x, -\frac{1}{2}x\right), \quad |\vec{n}|^2 = 1 \text{ であるから}$$

$$x^2 + x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2 = 4$$

$$x > 0 \text{ に注意して } x = \frac{2}{3} \quad \text{よって} \quad \vec{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

- (2)  $\overrightarrow{ON} = \vec{n}$  とし, P から直線 ON に引いた垂線の交点を T とすると

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OT}, \quad \overrightarrow{OT} = (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (*)$$

$$\overrightarrow{OP} = (4, 0, -1) \text{ より, } \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = 3 \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{OT} = (2, -2, -1), \quad |\overrightarrow{OT}| = 3 \quad (**)$$

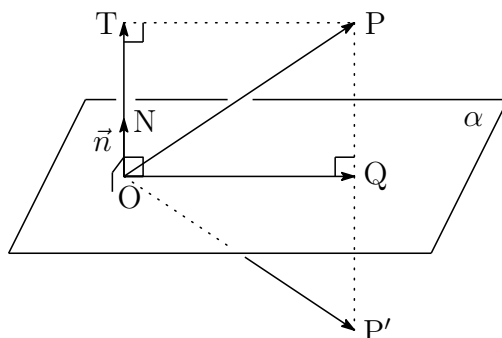
$$PQ = |\overrightarrow{OT}| \text{ であるから } \mathbf{PQ} = 3$$

- (3) (\*) の第1式と (\*\*) の第1式により,

$$(4, 0, -1) = \overrightarrow{OQ} + (2, -2, -1) \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OQ} = (2, 2, 0)$$

したがって

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{OQ} + (-\overrightarrow{OT}) = (0, 4, 1) \quad \text{よって} \quad \mathbf{P'(0, 4, 1)}$$



- 3** (1)  $f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$  について

$$f(2) = 2^4 + 6 \cdot 2^3 - k \cdot 2^2 + 2k \cdot 2 - 64 = 0$$

因数定理により,  $f(x)$  は  $x - 2$  を因数にもつ, すなわち,  $f(x)$  は  $x - 2$  で割り切れる.

- (2) (1) の結果から

$$f(x) = (x - 2)\{x^3 + 8x^2 + (16 - k)x + 32\}$$

条件から, 3 次方程式  $x^3 + 8x^2 + (16 - k)x + 32 = 0$  の解を  $\alpha, \bar{\alpha}, r$  とおくと, 解と係数の関係から

$$\alpha \bar{\alpha} r = -32 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2 r = -32$$

したがって,  $r$  は負の実数. よって,  $f(x) = 0$  は負の実数解をもつ.

- (3)  $\alpha = p + qi, \bar{\alpha} = p - qi$  とおく ( $q > 0$ ). 条件から,  $p, q, r$  は整数であり, 解と係数の関係から

$$\begin{aligned} (p + qi) + (p - qi) + r &= -8, \\ (p + qi)(p - qi) + (p + qi)r + (p - qi)r &= 16 - k, \\ (p + qi)(p - qi)r &= -32 \end{aligned}$$

これらをそれぞれ整理すると

$$2p + r = -8, \quad p^2 + q^2 + 2pr = 16 - k, \quad (p^2 + q^2)r = -32 \quad (*)$$

(\*) の第 1 式から,  $r = -2p - 8 \cdots \textcircled{1}$ . これを (\*) の第 3 式に代入すると

$$(p^2 + q^2)(p + 4) = 16$$

上式において  $p + 4 \geq 1$  ( $p + 4$  は 16 の約数),  $p^2 < p^2 + q^2 \leq 16$  より

$$p = -3, -2, 0$$

$p = -3$  のとき,  $9 + q^2 = 16$  より,  $q^2 = 7$  となり, 不適

$p = -2$  のとき,  $(4 + q^2) \cdot 2 = 16$  より,  $q = 2$

$p = 0$  のとき,  $4q^2 = 16$  より,  $q = 2$

① より  $(p, q, r) = (-2, 2, -4), (0, 2, -8)$

(\*) の第 2 式より,  $k = 16 - (p^2 + q^2 + 2pr)$  であるから  $k = -8, 12$

- 4 (1)  $F'(x) = f(x)$ ,  $G'(x) = g(x)$  を満たす  $F(x)$ ,  $G(x)$  をとり,

$$H(x) = F(x) + G(x), \quad h(x) = H'(x)$$

とすると, 次式が成立する.

$$h(x) = H'(x) = \{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

上式および定積分の定義①により

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx &= \int_a^b h(x) dx = \left[ H(x) \right]_a^b = H(b) - H(a) \\ &= F(b) + G(b) - \{F(a) + G(a)\} \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

- (2)  $G'(x) = g(x)$  を満たす  $G(x)$  をとると, 定積分の定義により

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$$

区間  $a \leq x \leq b$  において  $G'(x) = g(x) > 0$  より, 関数  $G(x)$  はこの区間で増加するから

$$G(a) < G(b) \quad \text{ゆえに} \quad G(b) - G(a) > 0$$

以上の結果から

$$\int_a^b g(x) dx > 0$$

(3) 答 (C)

$f(x)$  は, 区間  $\frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}$  で連続な増加関数であるから ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

性質 (C) により

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i-1}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i}{n}\right) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

したがって

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(4) 答 (B)

$S_n$  の定義により

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0) \\ &= S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \end{aligned}$$

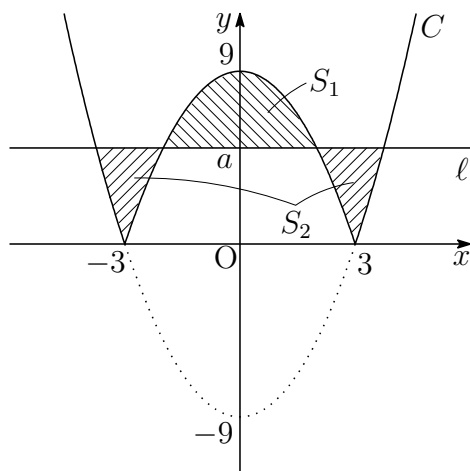
上式に注意すると, ② より

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \\ S_n &\leq \int_0^1 f(x) dx \leq S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \end{aligned}$$

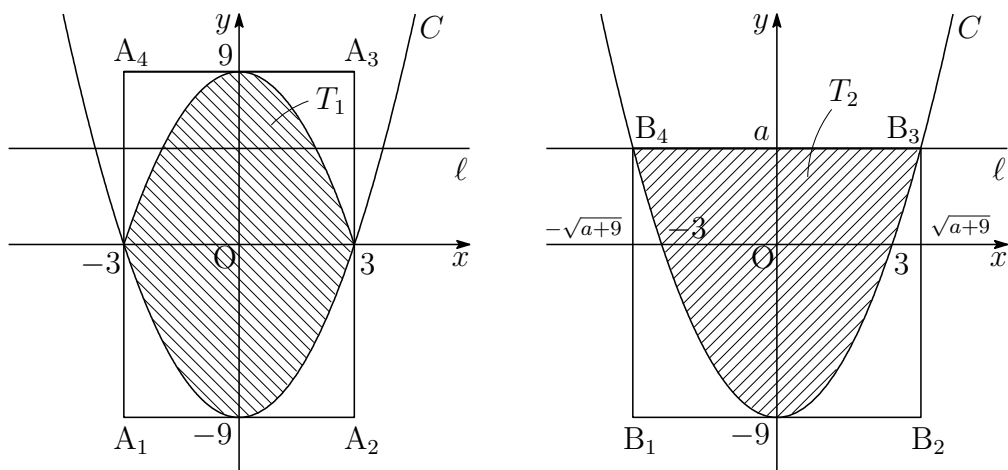
$$\text{よって} \quad 0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

## 2.9 2023年度

1  $S_1, S_2$  は下の図の斜線部分の面積である.



$S_1 = S_2$  のとき, 下の2つ図の斜線部分の面積  $T_1, T_2$  について,  $T_1 = T_2$  である.



$T_1, T_2$  は, それぞれ図の長方形  $A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4$  の面積の  $\frac{2}{3}$  であるから, このとき, これら2つの長方形の面積は等しい.

$$6 \times 18 = 2\sqrt{a+9} \times (a+9) \quad \text{ゆえに} \quad (a+9)^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 3^3$$

$$\text{したがって} \quad a+9 = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^2 \quad \text{よって} \quad a = 9(\sqrt[3]{4} - 1)$$

補足 下の fig-1 について，2つの面積  $S_1$  と  $S_2$  の面積比を考える．

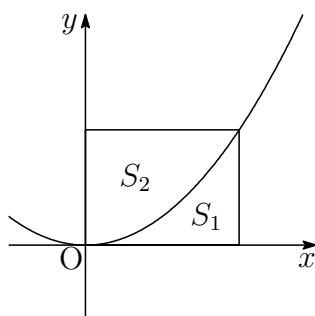


fig-1

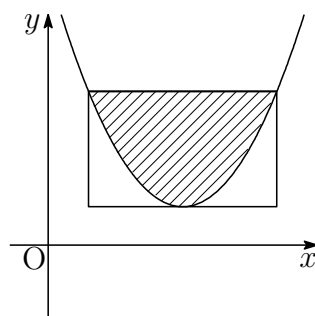


fig-2

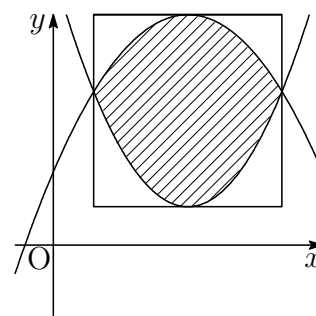


fig-3

$S_1$  を放物線  $y = kx^2$  と直線  $x = a$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積とすると

$$S_1 = \int_0^a kx^2 dx = k \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{1}{3}ka^3 \quad (k, a > 0)$$

$S_1 + S_2$  は  $x$  軸， $y$  軸，直線  $x = a$ ，直線  $y = ka^2$  で囲まれた部分の面積であるから

$$S_1 + S_2 = a \cdot ka^2 = ka^3 \quad \text{上の結果から} \quad S_2 = \frac{2}{3}ka^3 \quad \text{よって} \quad S_1 : S_2 = 1 : 2$$

fig-2 の放物線は fig-1 の放物線を平行移動したものとする．fig-2 の放物線の軸に関する対称性により，斜線部の面積は長方形の面積の  $2/3$  であることがわかる．

さらに，fig-2 の面積比を利用すると，fig-3 における斜線部分の面積も長方形の面積の  $2/3$  であることもわかる．

2 (1)  $y = x^3 - x$  より  $y' = 3x^2 - 1$

$C$  上の点  $A(t, t^3 - t)$  における接線  $\ell$  は

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

すなわち  $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$

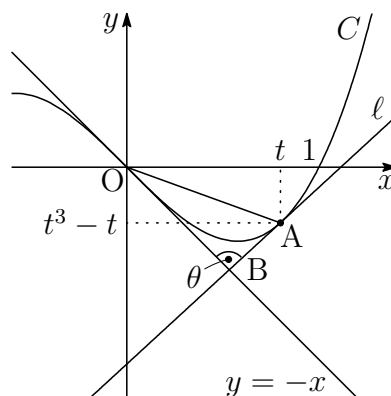
これと  $y = -x$  から  $y$  を消去すると

$$(3t^2 - 1)x - 2t^3 = -x$$

整理すると  $t^2(3x - 2t) = 0$

$t > 0$  であるから  $3x - 2t = 0$  ゆえに  $x = \frac{2t}{3}$

これを  $y = -x$  に代入して  $B\left(\frac{2t}{3}, -\frac{2t}{3}\right)$



(2) 直線  $\ell$  の偏角を  $\alpha$ , 直線  $y = -x$  の偏角を  $\beta$  とすると

$$\tan \alpha = 3t^2 - 1, \quad \tan \beta = -1, \quad \theta = \frac{3}{4}\pi - \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{-1 - (3t^2 - 1)}{1 + (-1) \cdot (3t^2 - 1)} = \frac{3t^2}{3t^2 - 2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \left(\frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = 1 + \left(\frac{3t^2 - 2}{3t^2}\right)^2 = \frac{18t^4 - 12t^2 + 4}{9t^4} \quad (*)$$

したがって  $\sin^2 \theta = \frac{9t^4}{18t^4 - 12t^2 + 4}$

(3) 点  $P$  は  $\triangle OAB$  の外心であるから, 正弦定理により

$$\frac{OA}{\sin \theta} = 2OP \quad \text{ゆえに} \quad f(t) = \frac{OP}{OA} = \frac{1}{2 \sin \theta} \quad (**)$$

(\*), (\*\*) より,  $u = \frac{2}{t^2}$  とおくと ( $u > 0$ )

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{18 - 6 \cdot \frac{2}{t^2} + \left(\frac{2}{t^2}\right)^2} = \frac{1}{6} \sqrt{18 - 6u + u^2} = \frac{1}{6} \sqrt{(u - 3)^2 + 9}$$

$u = 3$  すなわち  $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$  のとき, 最小値  $\frac{1}{2}$  をとる.

**3** (1)  $\vec{m} = (a, c)$ ,  $\vec{n} = (b, d)$  より  $(\vec{m} \neq \vec{0}, \vec{n} \neq \vec{0})$

$$\begin{cases} d\vec{m} - c\vec{n} = (ad - bc, 0) = (D, 0) \\ -b\vec{m} + a\vec{n} = (0, ad - bc) = (0, D) \end{cases} \quad (*)$$

$$(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (ab + cd)^2 + (ad - bc)^2 \text{ より}$$

$$|\vec{m}|^2 |\vec{n}|^2 = (\vec{m} \cdot \vec{n})^2 + D^2 \quad (**)$$

(i)  $D = 0$  のとき,  $(*)$  より

$$d\vec{m} = c\vec{n}, \quad b\vec{m} = a\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{m} // \vec{n}$$

(ii)  $\vec{m} // \vec{n}$  のとき,  $|\vec{m}|^2 |\vec{n}|^2 = (\vec{m} \cdot \vec{n})^2$  であるから,  $(**)$  より

$$D = 0$$

(i), (ii) より  $D = 0 \iff \vec{m} // \vec{n}$  [証終]

(2)  $D \neq 0$  のとき, 基本ベクトル  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  は,  $(*)$  より

$$\vec{e}_1 = (1, 0) = \frac{d\vec{m} - c\vec{n}}{D}, \quad \vec{e}_2 = (0, 1) = \frac{-b\vec{m} + a\vec{n}}{D} \quad (\#)$$

と表される.

$(\#)$  の基本ベクトルと  $\vec{v}$  の内積をとると

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{v} &= \frac{(d\vec{m} - c\vec{n}) \cdot \vec{v}}{D} = \frac{d\vec{m} \cdot \vec{v} - c\vec{n} \cdot \vec{v}}{D} = \frac{d}{D} \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{v} &= \frac{(-b\vec{m} + a\vec{n}) \cdot \vec{v}}{D} = \frac{-b\vec{m} \cdot \vec{v} + a\vec{n} \cdot \vec{v}}{D} = -\frac{b}{D} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \frac{1}{D} (d, -b)$$

同様に,  $(\#)$  の基本ベクトルと  $\vec{w}$  の内積をとると

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{w} &= \frac{(d\vec{m} - c\vec{n}) \cdot \vec{w}}{D} = \frac{d\vec{m} \cdot \vec{w} - c\vec{n} \cdot \vec{w}}{D} = -\frac{c}{D} \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{w} &= \frac{(-b\vec{m} + a\vec{n}) \cdot \vec{w}}{D} = \frac{-b\vec{m} \cdot \vec{w} + a\vec{n} \cdot \vec{w}}{D} = \frac{a}{D} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{w} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \frac{1}{D} (-c, a)$$

(3) ベクトル  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  が

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすことを利用して、内積  $\vec{q} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{q} \cdot \vec{w}$  を求めると

$$\begin{aligned}\vec{q} \cdot \vec{v} &= (r\vec{m} + s\vec{n}) \cdot \vec{v} \\ &= r\vec{m} \cdot \vec{v} + s\vec{n} \cdot \vec{v} = r, \\ \vec{q} \cdot \vec{w} &= (r\vec{m} + s\vec{n}) \cdot \vec{w} \\ &= r\vec{m} \cdot \vec{w} + s\vec{n} \cdot \vec{w} = s\end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad r = \vec{q} \cdot \vec{v}, \quad s = \vec{q} \cdot \vec{w}$$

4 (1)  $x^3 = 1$  より,  $(x-1)(x^2+x+1) = 0$  を解くと

$$x = 1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$\omega$  は方程式  $x^3 = 1$  の解で虚部が正であるから

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$\omega^3 = 1$ ,  $\omega\bar{\omega} = 1$  であるから

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$$

- (2)  $z_n = 0, z_n = 1, z_n = \omega, z_n = \omega^2$  となる確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n, s_n$  とおくと、初期条件から、 $p_1 = 1, q_1 = r_1 = s_1 = 0$  となる。

また、さいころの出た目による  $z_n$  から  $z_{n+1}$  の推移は次のようになる。

|   | $z_n = 0$  | $z_n = 1$  | $z_n = \omega$ | $z_n = \omega^2$ |
|---|------------|------------|----------------|------------------|
| 1 | $\omega$   | 0          | 0              | 0                |
| 2 | $\omega^2$ | 0          | 0              | 0                |
| 3 | 1          | $\omega$   | $\omega^2$     | 1                |
| 4 | $\omega$   | $\omega^2$ | $\omega$       | 1                |
| 5 | $\omega^2$ | 1          | $\omega$       | $\omega^2$       |
| 6 | 1          | 1          | $\omega^2$     | $\omega$         |

したがって、次の確率漸化式が成立する。

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} p_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}s_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}s_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{6}s_n \\ s_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{6}s_n \end{array} \right.$$

(\*) の第 3 式と第 4 式から  $r_{n+1} = s_{n+1}$

また、 $r_1 = s_1 = 0$  より  $r_n = s_n$  ( $n \geq 1$ )

$s_n = r_n$  を (\*) の第 2 式と第 3 式に代入すると

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n, \quad r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{2}r_n$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$q_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{6}(q_n - r_n)$$

$q_1 = r_1 = 0$  であるから  $q_n = r_n$  ( $n \geq 0$ )

$q_n = r_n = s_n$  であるから、(\*) の第 1 式および第 2 式において、

$r_n = q_n, s_n = q_n$  を代入して整理すると

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} p_{n+1} = q_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n \end{array} \right.$$

(\*\*) の2式から

$$\begin{aligned}p_{n+1} - q_{n+1} &= -\frac{1}{3}(p_n - q_n), \\p_{n+1} + 3q_{n+1} &= p_n + 3q_n\end{aligned}$$

$p_1 = 1, q_1 = 0$  より

$$\begin{aligned}p_n - q_n &= (p_1 - q_1) \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \\p_n + 3q_n &= p_1 + 3q_1 = 1\end{aligned}$$

上の2式および  $q_n = r_n = s_n$  から

$$p_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}, \quad q_n = r_n = s_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \quad (\#)$$

$$z_n = 0 \text{ となる確率 } p_n \text{ は } \quad p_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

(3)  $z_3 = 1, z_3 = \omega, z_3 = \omega^2$  となる確率は、それぞれ  $q_3, r_3, s_3$  であるから、  
(#) より

$$q_3 = r_3 = s_3 = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right\} = \frac{2}{9}$$

(4)  $z_n = 1$  となる確率は  $q_n$  であるから、(#) より

$$q_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

## 2.10 2024 年度

- 1 (1)  $y = 2x^2$  を微分すると  $y' = 4x$   
 $C_1$  上の点  $(t, 2t^2)$  における接線の方程式は

$$y - 2t^2 = 4t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 4tx - 2t^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$C_2$  と直線  $\textcircled{1}$  の方程式から  $y$  を消去すると

$$2x^2 - 8x + 16 = 4tx - 2t^2$$

整理すると  $x^2 - 2(t+2)x + t^2 + 8 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

$C_2$  と直線  $\textcircled{1}$  が接するから、 $\textcircled{2}$  の係数について

$$D/4 = (t+2)^2 - (t^2 + 8) = 4t - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 1$$

求める直線  $\ell$  の方程式は、 $t = 1$  を  $\textcircled{1}$  に代入して  $y = 4x - 2$

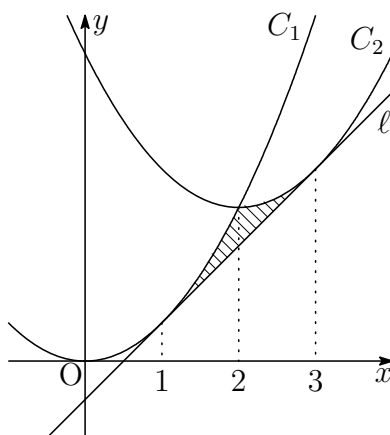
- (2)  $t = 1$  より、 $C_1$  と  $\ell$  の接点の  $x$  座標は  $x = 1$

また、 $\textcircled{2}$  の係数から、 $C_2$  と  $\ell$  の接点の  $x$  座標は

$$x = -\frac{-2(t+2)}{2 \cdot 1} = t + 2 = 1 + 2 = 3$$

よって、求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{2x^2 - (4x - 2)\} dx + \int_2^3 \{(2x^2 - 8x + 16) - (4x - 2)\} dx \\ &= \int_1^2 2(x-1)^2 dx + \int_2^3 2(x-3)^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \left[ (x-1)^3 \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[ (x-3)^3 \right]_2^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



- 2 (1)  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB} = 0$  より,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  であるから

$$\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|^2 = 5$$

$\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  のなす角を  $\theta$  とすると,  $\overrightarrow{OA} = (2, 1)$  より  $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$\overrightarrow{OA}$  の偏角を  $\alpha$  とすると

$$(2, 1) = |\overrightarrow{OA}|(\cos \alpha, \sin \alpha) = (\sqrt{5} \cos \alpha, \sqrt{5} \sin \alpha)$$

点 B が第 1 象限の点であることから,  $B(b_1, b_2)$  とすると

$$\begin{aligned} b_1 &= |\overrightarrow{OB}| \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{10} \left( \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{5} \cos \alpha - \sqrt{5} \sin \alpha = 2 - 1 = 1, \\ b_2 &= |\overrightarrow{OB}| \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{10} \left( \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{5} \sin \alpha + \sqrt{5} \cos \alpha = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

よって  $\mathbf{B(1, 3)}$

- (2)  $\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = s(2, 1) + t(1, 3) = (2s + t, s + 3t)$  より  $(s, t > 0)$

$$\begin{aligned} \triangle OAC &= \frac{1}{2} |2 \cdot (s + 3t) - 1 \cdot (2s + t)| = \frac{5}{2} |t| = \frac{5}{2} t \\ \triangle OBC &= \frac{1}{2} |1 \cdot (s + 3t) - 3 \cdot (2s + t)| = \frac{5}{2} |s| = \frac{5}{2} s \end{aligned}$$

$\triangle OAC = \triangle OBC$  より,  $s = t$  であるから  $\overrightarrow{OC} = (3s, 4s)$

$$|\overrightarrow{OC}| = 4 \text{ より } \sqrt{(3s)^2 + (4s)^2} = 5s = 4 \quad \text{よって} \quad s = t = \frac{4}{5}$$

**3** (1)  $b > a$  のとき,  $b - 1 \geq a$  であるから  $(b - 1)! \geq a!$

$$b! = b \cdot (b - 1)! \geq b \cdot a! \quad \text{よって} \quad \frac{b!}{a!} \geq b$$

(2)  $2 \cdot a! = b!$  より  $\frac{b!}{a!} = 2 > 1$  であるから

$$a! < b! \quad \text{すなわち} \quad a < b$$

$a < b$  より, (1) の結論を用いると

$$2 = \frac{b!}{a!} \geq b > a \quad \text{よって} \quad (a, b) = (1, 2)$$

(3) (i)  $a \leq c, b \leq c$  のとき

$$\frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} = 2, \quad \frac{a!}{c!} \leq 1, \quad \frac{b!}{c!} \leq 1$$

このとき  $\frac{a!}{c!} = 1, \frac{b!}{c!} = 1$  すなわち  $a = c, b = c \quad \dots (*)$

(ii)  $a > c$  または  $b > c$  のとき, 一般性を失うことなく,  $b > c$  とし,  
(1) の結論を用いると

$$2 = \frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} \geq \frac{a!}{c!} + b > b > c \geq 1$$

これをみたす  $b, c$  は存在しない.

(i), (ii) より  $(a, b, c) = (n, n, n)$  ( $n$  は自然数)

- 4** (1) 条件を満たす直線は、次の8本より  $L(3) = 8$

$$y = x, \quad y = -x + 4, \quad x = k, \quad y = k \quad (k = 1, 2, 3)$$

- (2) 条件を満たす直線は、次の14本より  $L(4) = 14$

$$\begin{aligned} y = x - 1, \quad y = x, \quad y = x + 1, \\ y = -x + 4, \quad y = -x + 5, \quad y = -x + 6, \\ x = k, \quad y = k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

- (3) 条件を満たす直線で傾きが0以上の直線は、(i)～(iv)の16本ある.

(i) 条件を満たす  $x$  軸に平行な直線は  $y = k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$

(ii) 条件を満たす傾き  $\frac{1}{2}$  の直線は  $y - k = \frac{x - 1}{2} \quad (k = 1, 2, 3)$

(iii) 条件を満たす傾き1の直線は  $y = x + k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2)$

(iv) 条件を満たす傾き2の直線は  $y - 1 = 2(x - k) \quad (k = 1, 2, 3)$

(i)～(iv)の直線を点(3, 3)を中心に $90^\circ$ 回転させた直線も条件を満たす.

よって  $L(5) = 16 \times 2 = 32$

## 第 3 章 一般前期研究

九州大学の入試問題 (数学) の特徴として、毎年出題される「確率」「微積分」がある。旧課程の数学 A の分野に期待値 (確率変数の平均) があり、これをテーマとする九大 (経済工学部) らしい問題が多岐にわたり出題されていた。経済工学部で扱う金融工学が扱うテーマの中心に期待値 (期待金額) があり、これに由来する問題でもあった。現行課程では、期待値が数学 B の「確率分布と統計」の分野で扱うことになり、同分野が九州大学の出題の範囲外であるため、「確率」の出題内容がかなり限られてきた印象を持つ。こうした中、2018 年に出版された条件付き確率に関する問題は目新しい。この分野に関連する問題について研究しておく必要がある。具体的には「部品 a, b, c が不良品である 3 つの事象は互いに独立であるかどうか」を扱う問題などがその延長上にある。

文系であるが、2016 年研究に示したように外積などの教科書  $+\alpha$  の知識があった方がよい。問題によっては、緻密な計算力を要するものもある。普段からじっくり問題を考えることを心掛け、理由と結論を的確に記述する習慣を身に付ける必要がある。

## 3.1 2015年度

### 3.1.1 3番 研究

設問  $n$  回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ.

問 解

解答 1回の操作で青玉の個数は1個だけ増減する. 最初に青玉が1個(奇数個)であるから, 奇数回目の操作で青玉は偶数個となる. したがって, 奇数回目の操作で青玉が3個(奇数個)にならない. よって, 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない.

操作を  $n$  回繰り返す中で袋の中の玉が3個とも青玉になることなしに, 青玉の個数が1個である確率を  $p_n$  とする.

(i)  $n$  が奇数のとき

上に示したように奇数回目に青玉が1個になることはないから  $p_n = 0$

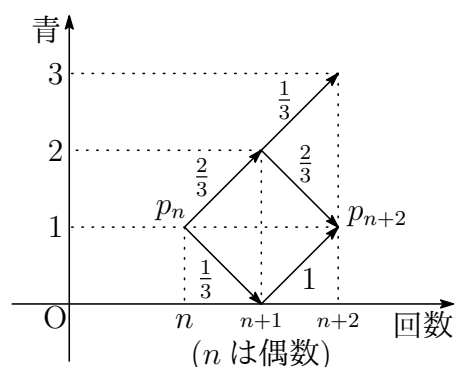
(ii)  $n$  が偶数のとき  $p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{7}{9} p_n$$

ゆえに 
$$p_n = \left( \frac{7}{9} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$n$  回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2} \times \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \left( \frac{7}{9} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$



参考 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ.

(九大理系)

$$\frac{2}{9} \left( \frac{7}{9} \right)^3 = \frac{686}{6561}$$

## 3.2 2016 年

### 3.2.1 2 番 (4) 外積 (ベクトル積)

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$  とおくと

問 解

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}}{2+1} = \frac{\vec{b} + 2 \cdot \frac{3}{4}\vec{c}}{3} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{AP} &= k\overrightarrow{AE} = \frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}\end{aligned}$$

CR : RD = 3(1 - t) : 2t であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2t\overrightarrow{AC} + 3(1-t)\overrightarrow{AD}}{3(1-t) + 2t} = \frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b} + 2t\vec{c}\}$$

したがって  $\overrightarrow{QP} = \frac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b} - 3\vec{c})$ ,  $\overrightarrow{QR} = \frac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b} - 3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え、外積の性質を用いると<sup>1</sup>

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = -\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b} \times \vec{c}$$

よって  $\triangle PQR : \triangle ABC = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)} : 1$

外積は高校数学の範囲外であるから、2 次試験では使えないが、センター試験では、非常に有効な計算法である。なお、外積 (ベクトル積) の演算について、次式が成り立つことに注意したい。

$$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$$

また、これに  $\vec{c} = \vec{b}$  を代入すると  $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2004.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf)

## 3.3 2017年

## 3.3.1 1番(2) 研究

$y = kx^2 \cdots \textcircled{1}$  は  $y = x^2 \cdots \textcircled{2}$  を  $x$  軸を元に  $y$  軸方向に  $k$  倍だけ拡大したものであるが、 $\textcircled{1}$  上の点  $P(t, kt^2)$  に対して  $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$  となる点  $Q(x, y)$  をとると 問 解

$$(x, y) = k(t, kt^2) \quad \text{ゆえに} \quad x = kt, \quad y = (kt)^2$$

これから、点  $Q$  の描く軌跡は、 $y = x^2$  である。

したがって、 $\textcircled{1}$  と  $\textcircled{2}$  は相似であり、その相似比は  $1 : |k|$  である。

一般に、放物線は相似であり、2つの放物線

$$C_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1, \quad C_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

の相似比は  $\frac{1}{|a_1|} : \frac{1}{|a_2|}$  である。

右の図のように、 $C_1, C_2$  と2本の共通接線との接点を  $B, C, D, E$  とすると、点  $A$  は線分  $BD$  および線分  $CE$  を

$$\frac{1}{|a_1|} : \frac{1}{|a_2|}$$

に内分するのである。また、2つの斜線部分の面積を  $S_1, S_2$  とすると、面積比は相似比の2乗に比例するから

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{a_1^2} : \frac{1}{a_2^2}$$

特に、 $S_1 = \frac{1}{3}\triangle ABC$ ,  $S_2 = \frac{1}{3}\triangle ADE$  である<sup>2</sup>。

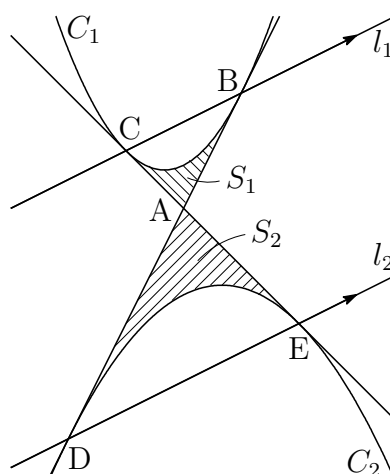
本題の点  $A$  は  $C_1$  の頂点  $(0, 1)$  と  $C_2$  の頂点  $(0, a)$  を  $1 : 2$  に内分する点で

$$A\left(0, \frac{2+a}{3}\right)$$

また、 $C_1$  上の点  $P$  について、 $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{AP}$  をみたす点  $Q$  の軌跡が  $C_2$  である。

点  $A$  を通り、傾き  $m$  の直線  $y = mx + \frac{2+a}{3}$  が  $C_1 : y = 2x^2 + 1$  と接するとき、2次方程式  $2x^2 - mx + \frac{1-a}{3} = 0$  の係数により

$$(-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1-a}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad m = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}$$



<sup>2</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_bun.2009.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf) 4 の補足を参照。

### 3.3.2 4 番 (1) ユークリッドの互除法

$n$  が  $m$  で割り切れること ( $m$  が  $n$  の約数) を  $m \mid n$  と表記し, 整数  $x, y$  の最大公約数を  $(x, y)$  と表記すると

[問](#) [解](#)

$$(x, y) \mid x, \quad (x, y) \mid y$$

が成り立つ.

ユークリッドの互除法

2 整数  $a, b$  について ( $a > b > 0$ ),  $a$  を  $b$  で割ったときの商を  $q$ , 余りを  $c$  とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \quad (a, b) = (b, c)$$

$$c = 0 \text{ のとき} \quad (a, b) = b$$

証明  $c \neq 0$  のとき,  $a = bq + c$  より  $(b, c) \mid a$  また,  $(b, c) \mid b$  であるから,  $(b, c)$  は  $a$  と  $b$  の公約数, したがって

$$(b, c) \mid (a, b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に,  $c = a - bq$  より  $(a, b) \mid c$  また,  $(a, b) \mid b$  であるから,  $(a, b)$  は  $b$  と  $c$  の公約数, したがって

$$(a, b) \mid (b, c) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad (a, b) = (b, c)$$

$c = 0$  のとき, 自明.

証終

補足 さらに,  $b$  を  $c$  で割った余りが  $d$  であるとき  $(b, c) = (c, d)$

$$\text{すなわち} \quad (a, b) = (b, c) = (c, d)$$

2 つの整数  $a_1, a_2$  について ( $a_1 > a_2 > 0$ ),  $a_1$  を  $a_2$  で割った余りを  $a_3$ , さらに,  $a_2$  を  $a_3$  で割った余りを  $a_4$ , 順次,  $a_k$  を  $a_{k+1}$  で割った余りを  $a_{k+2}$  とすると

$$(a_1, a_2) = (a_2, a_3) = (a_3, a_4) = \cdots = (a_k, a_{k+1}) = (a_{k+1}, a_{k+2}) = \cdots$$

数列  $\{a_n\}$  は下に有界な単調減少列であるから, 互除法を繰り返すことにより,  $a_1$  と  $a_2$  の最小公倍数を求めることができる.

## 3.4 2018年

### 3.4.1 4番 条件付き確率と事象の独立

$A, B$  を事象とし,  $B$  における  $A$  の条件付き確率は

問 解

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

で定義される (大学などでは  $P(A|B)$  と標記するのが一般的である).

$A$  と  $B$  が独立であるとき

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{および} \quad P_A(B) = P(B)$$

が成立する. このとき, 上の2式は同値である. 実際, 第1式から

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \iff \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \iff P_A(B) = P(B)$$

また,  $A$  と  $B$  が独立であることを, 次式で示することができる.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

性質  $A$  と  $B$  が独立ならば  $\bar{A}$  と  $B$  も独立である

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}P(B) = P(\bar{A})P(B) \end{aligned}$$

よって,  $\bar{A}$  と  $B$  は独立である.

証終

$A$  と  $B$  が独立であるから, 性質により,  $A$  と  $\bar{B}$  も独立である.

さらに,  $\bar{A}$  と  $B$  が独立であるから, 性質により,  $\bar{A}$  と  $\bar{B}$  も独立である.

したがって,  $A$  と  $B$  が独立であるとき, 次は3つは独立である.

$$A \text{ と } \bar{B}, \quad \bar{A} \text{ と } B, \quad \bar{A} \text{ と } \bar{B}$$

最後の性質は, 次から示すこともできる.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} = P(\bar{A})P(\bar{B}) \end{aligned}$$

参考 本題において,  $P_A(B) = 3q$ ,  $P(B) = (1 + 2p)q$  であるから,  $p \neq 1$ ,  $q \neq 0$  ならば,  $P_A(B) \neq P(B)$  となり,  $A$  と  $B$  は独立ではない.

## 3.5 2022 年

### 3.5.1 2 番 平面の方程式

平面  $\alpha$  上の任意の点を  $R(x, y, z)$  とすると,  $\vec{n} \perp \overrightarrow{OR}$  より,  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OR} = 0$  であるから

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2x - 2y - z = 0$$

上式が平面  $\alpha$  の方程式である.

問 解

点  $P(4, 0, -1)$  を通り,  $3\vec{n} = (2, -2, -1)$  に平行な直線を  $\ell$  とすると, その方程式は, 媒介変数  $t$  を用いて

$$\begin{aligned} \ell: (x, y, z) &= \overrightarrow{OP} + t(3\vec{n}) \\ &= (4, 0, -1) + t(2, -2, -1) \\ &= (4 + 2t, -2t, -1 - t) \end{aligned}$$

と表される.  $\alpha$  と  $\ell$  の方程式を連立すると

$$2(4 + 2t) - 2(-2t) - (-1 - t) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -1$$

$t = -1$  を  $\ell$  に代入すると,  $\alpha$  と  $\ell$  の交点  $Q(2, 2, 0)$  を得る.

2 点  $P(4, 0, -1)$ ,  $Q(2, 2, 0)$  の距離  $PQ$  は

$$PQ = \sqrt{(2-4)^2 + (2-0)^2 + (0+1)^2} = 3$$

また,  $P$  と  $P'$  の中点が  $Q$  であるから  $\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}}{2}$

$$\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = 2(2, 2, 0) - (4, 0, -1) = (0, 4, 1)$$

**補足** 次頁に示した公式により,  $PQ$  は点  $P(4, 0, -1)$  と平面  $\alpha: 2x - 2y - z = 0$  の距離であるから

$$PQ = \frac{|2 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 3$$

一般に点  $A(x_0, y_0, z_0)$  を通り、ベクトル  $\vec{n} = (a, b, c)$  に垂直な平面  $\alpha$  上の任意の点を  $R(x, y, z)$  とすると、 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AR} = 0$  より、平面  $\alpha$  の方程式

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

を得る。また、 $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$  とおくと

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (*)$$

となる。次に、点  $P(x_1, y_1, z_1)$  を通り、 $\alpha$  に垂直な直線  $\ell$  は

$$(x, y, z) = \overrightarrow{OP} + t\vec{n} = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct) \quad (**)$$

(\*), (\*\*) を連立すると

$$a(x_1 + at) + b(y_1 + bt) + c(z_1 + ct) + d = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$t_1 = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$  とおくと、 $\alpha$  と  $\ell$  の交点  $Q$ 、 $\alpha$  に関して  $P$  と対称な点  $P'$  は

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t_1\vec{n}, \quad \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2t_1\vec{n}$$

となる。上の第1式から  $\overrightarrow{PQ} = t_1\vec{n}$

$$|\overrightarrow{PQ}| = |t_1||\vec{n}| = \left| -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

これから、次が成立する。

点と平面の距離

点  $(x_1, y_1, z_1)$  と平面  $ax + by + cz + d = 0$  の距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

これは、座標平面において、点  $(x_1, y_1)$  と直線  $ax + by + c = 0$  の距離が

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であることと関連して覚えるとよい。