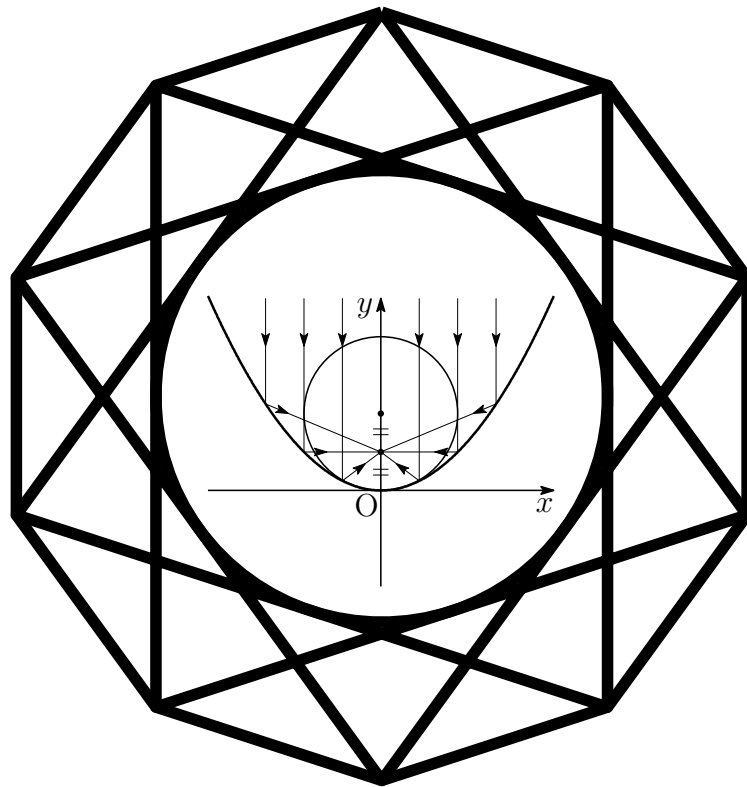


入試の軌跡

九州大学 理系

2015 - 2024

数 学



2024 年 7 月 9 日

Typed by L^AT_EX 2_ε

序

本書は，九州大学経済学部(経済工)・理学部・医学部(保健[看護]を除く)・歯学部・薬学部・工学部・芸術工学部・農学部受験者のための入試問題集です。

本書には，平成 27 年(2015 年)度から令和 6 年(2024 年)度までの 2 次試験前期日程の数学問題をすべて掲載しています。第 1 章には問題を掲載し，第 2 章には解答，第 3 章には研究を付けています。

また，平成 9 年(1997 年)から令和 5 年(2023 年)までの一般前期試験問題および解答については，年度ごとに次のサイトに掲載しています。

<https://math4u.site/>

本書の編集にあたり，以下の点に留意しました。

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮しました。
2. 本書は，電子文書(PDF)での利用を想定し，ハイパーリンクを施しています。Adobe Reader(高機能の PDF ブラウザ[フリーソフト])などをご利用ください。利用する際には，全画面表示(`[Ctrl]+L`)および描画領域に合わせる(`[Ctrl]+3`)と見やすくなります。ページスクロールには，(`[Ctrl]+▲`，`[Ctrl]+▼`)が利用でき，リンク(ジャンプ)先から戻る(`[Alt]+◀`)，進む(`[Alt]+▶`)も利用できます。なお，全画面表示を解除するには`[ESC]`。
4. 電子黒板を利用される場合は，電子黒板の PDF ブラウザをご使用ください。ファイルサイズに優れ，ハイパーリンク・拡大・スワイプ・書き込みもスムーズに機能します。
3. 平成 13 年(2001 年)度から平成 26 年(2014 年)度までの一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡 九州大学 理系』を上記のサイトに掲載しています。

令和 6 年 6 月 西村 信一

目次

序	i
第1章 一般前期問題	1
1.1 2015 年度	6
1.2 2016 年度	8
1.3 2017 年度	11
1.4 2018 年度	14
1.5 2019 年度	15
1.6 2020 年度	17
1.7 2021 年度	18
1.8 2022 年度	20
1.9 2023 年度	23
1.10 2024 年度	27
第2章 一般前期解答	29
2.1 2015 年度	30
2.2 2016 年度	35
2.3 2017 年度	41
2.4 2018 年度	48
2.5 2019 年度	55
2.6 2020 年度	62
2.7 2021 年度	69
2.8 2022 年度	77
2.9 2023 年度	87
2.10 2024 年度	96
第3章 一般前期研究	103
3.1 2015 年度	104
3.1.1 4 番 (3) 研究	104
3.1.2 5 番 (2) ユークリッドの互除法	106
3.2 2016 年度	107
3.2.1 2 番 (4) 外積 (ベクトル積)	107
3.2.2 3 番 マルコフ連鎖	108
3.2.3 5 番 (3) 発展	109
3.3 2017 年度	110

3.3.1	3 番 (2)(3) 別解	110
3.4	2018 年度	111
3.4.1	1 番 双曲線の媒介変数表示	111
3.4.2	2 番 (3) 研究	112
3.5	2019 年度	117
3.5.1	1 番 関数の内積	117
3.5.2	5 番 メビウス変換	119
3.6	2020 年度	120
3.6.1	3 番 等面四面体の体積	120
3.7	2021 年度	121
3.7.1	3 番 部分積分法の応用	121
3.8	2022 年度	122
3.8.1	5 番 ガウス・グリーンの定理	122
3.9	2023 年度	124
3.9.1	ライプニッツの公式	124
3.9.2	第 n 階微分方程式 (線形微分方程式)	128
3.10	2024 年度	137
3.10.1	回転体の体積	137

第 1 章 一般前期問題

2003 年度以前の入試は，必答問題 3 題と，選択問題 3 題を 1 グループとした 2 グループから 1 題ずつ選んで 150 分で解答する形式であった．2004 年度入試以降は選択問題はなくなり，必答問題 5 題を 150 分で解答する現在の形式になった．

九大入試の特徴として，教科書にある公式の証明問題，教科書の典型的な問題についても確かな理解と応用力を問う問題が出題される．一方で，大学数学で扱う基本的な概念に因んだ問題が出題されることがあり，理学部数学教室や経済学部経済工学科らしさ（確率論）が随所に見られる．2009 年度入試においては，5 題中 2 題が微分幾何学の基本的な概念に由来するものであった．

2005 年度まで出題されていた複素数平面が 2015 年度から復活することになり，当時の頻出問題であったこと，比較的難易度が高かったことにも注意しておきたい．とくに，2014 年度入試においては，来年度からの新課程を意識した整数問題が出題されている．ユークリッドの互除法や合同式についても学習しておく必要があるようだ．

平成 26 年 3 月 編者

平成 28 年 (2016 年) に現行課程へ完全移行し，移行後の出題を見ると，11 年ぶりに復活した「複素数平面」，新たに導入された「整数の性質」の分野から毎回出題された．合同式を用いる問題が毎回出題されており，重点的に学習しておく必要がある．かつて，「複素数平面」は，1997 年から 2005 年の教育課程における入学試験でも出題されていた．特に九州大学の「複素数平面」の出題率は高く，2004 年を除き毎回出題された．当時の九州大学の同分野の問題は良問が多く，学習教材としても優れている．これらの問題はすべて序文に示したサイトから入手することができる．

過去の出題からも分かるように，「場合の数と確率」「微積分」は重要分野である．

平成 30 年 9 月 編者

平成 27 年 (2015 年) から令和 6 年 (2024 年) までの 10 年間の出題傾向をみると，数学 III の微積分に関する問題は毎年出題された．10 年間で「複素数平面」と「場合の数と確率」の分野からともに 7 回，「整数の性質」の分野から 6 回，ベクトルについては「空間のベクトル」が 5 回，「平面上のベクトル」が 1 回と偏りがあり，難易度の高い分野からの出題が中心であった．2024 年度入試では外積を利用すると計算が簡単になり，発展的な学習を行った受験生に有利に働いたようである．

令和 6 年 6 月 編者

出題分野

2015 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 II	微分法と積分法	放物線と直線で囲まれた部分の面積
2	標準	数学 III	積分法	定積分と不等式の証明
3	標準	数学 III	積分法の応用	半球の影の面積・体積
4	標準	数学 A	場合の数と確率	袋の中の赤玉と青玉の個数の推移
5	やや難	数学 A	整数の性質	合同式, ユークリッドの互除法

2016 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	極限	極限值
			積分法	面積
2	標準	数学 A	図形の性質	チェバの定理, メネラウスの定理
3	やや易	数学 A	確率	マルコフ連鎖
4	標準	数学 A	整数の性質	合同式
5	標準	数学 III	複素数平面	ド・モアブルの定理

2017 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	微分法とその応用	接線の傾き
			積分法の応用	2 曲線で囲まれた部分の面積
2	標準	数学 B	空間のベクトル	2 つのベクトルのなす角
3	やや難	数学 A	整数の性質	合同式
		数学 B	数列	等差数列 $\{a_n\}$ の $7, 7^2$ の倍数の個数
4	標準	数学 A	場合の数と確率	確率漸化式
5	標準	数学 III	複素数平面	ド・モアブルの定理

2018 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	関数	双曲線の媒介変数表示
2	標準	数学 III	積分法の応用	面積, 回転体の体積
3	標準	数学 A	場合の数と確率	確率漸化式
4	標準	数学 A	整数の性質	3 次方程式の整数解・有理数解
5	標準	数学 III	複素数平面	複素係数の方程式

2019 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	極限	定積分・極限值
2	やや難	数学 II	式と証明	恒等式
3	標準	数学 A	確率	サイコロの目と2次方程式の係数
		数学 III	複素数平面	複素数平面上の2次方程式の解
4	標準	数学 III	極限	数列の極限
5	やや難	数学 III	複素数平面	1次分数式変換(メビウス変換)

2020 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	微分法とその応用	曲線に接する直線
2	標準	数学 II	複素数と方程式	虚数を解にもつ実係数の方程式
		数学 A	整数の性質	合同式
3	やや難	数学 B	空間のベクトル	等面四面体
4	標準	数学 A	確率	サイコロの出た目の積
5	標準	数学 III	積分法の応用	回転体の体積

2021 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	四面体に内接する球面
2	標準	数学 III	複素数平面	3点を通る円
3	標準	数学 III	微分法とその応用	曲線と領域
		数学 III	積分法の応用	回転体の体積
4	標準	数学 III	複素数平面	平均値の定理
5	標準	数学 II	式と証明	2項係数

2022 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	平面に関して対称な点
2	やや難	数学 III	極限	$x = \alpha$ を極とする整式の展開
3	やや難	数学 A	整数の性質	法 3, 7 について $n^2 + 1 \neq 0$
4	標準	数学 III	積分法	区分求積法に関する証明
5	やや難	数学 III	積分法の応用	ガウス・グリーンの定理

2023 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	複素数平面	複素数の図形への応用
2	やや難	数学 III	極限	数列の極限
3	標準	数学 B	平面上のベクトル	基本ベクトル
4	難	数学 III	積分法	微分方程式
5	標準	数学 III	積分法の応用	ガウス・グリーンの定理

2024 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	三角形の面積
2	標準	数学 III	複素数平面	1 の 8 乗根
3	標準	数学 II	式と証明	不等式の証明
4	やや易	数学 A	場合の数と確率	格子点を通る直線の本数
5	標準	数学 III	積分法	積分漸化式

出題分野 (2015-2024)

[illegible]

1.1 2015 年度

- 1 C_1, C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leq x \leq 0$$

また, a を実数とし, 直線 $y = a(x + 4)$ を ℓ とする。

- (1) 直線 ℓ と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下, a が (1) の条件を満たすとする。このとき, ℓ と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1 , x 軸と C_2 で囲まれた領域で ℓ の下側にある部分の面積を S_2 とする。

- (2) S_1 を a を用いて表せ。

- (3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \frac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

- 2 以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

- (2) 不定積分 $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ を求めよ。

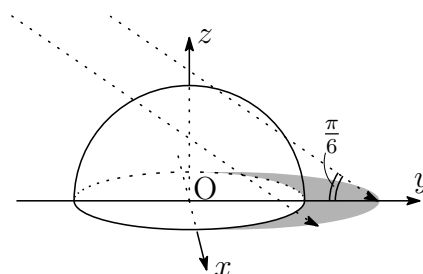
- (3) n を 3 以上の整数とすると, 不等式

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

が成り立つことを示せ。

- 3** 座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように、 y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0, \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 球の $z \geq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。 k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき、 xy 平面上の直線 $x = k$ において、球の外で光が当たらない部分の y 座標を k を用いて表せ。
- (2) xy 平面上において、球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。
- (3) $z \geq 0$ において、球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。



- 4** 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を 1 枚もらう。

- (1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。
- (2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。
- (3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。 [研]
- (4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

- 5** 以下の問いに答えよ。

- (1) n が正の偶数のとき、 $2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) n を自然数とする。 $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。 [研]
- (3) p, q を異なる素数とする。 $2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p, q の組をすべて求めよ。

1.2 2016年度

1 座標平面上の曲線 C_1 , C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$

$$C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし、 a は実数である。 n を自然数とすると、曲線 C_1 , C_2 が2点 P , Q で交わり、 P , Q の x 座標はそれぞれ 1 , $n+1$ となっている。また、曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n , 曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域を T_n とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し、 $a > 1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が1である三角形 ABC において、辺 AB , BC , CA をそれぞれ $2:1$, $t:1-t$, $1:3$ に内分する点を D , E , F とする。また、 AE と BF , BF と CD , CD と AE の交点をそれぞれ P , Q , R とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 3直線 AE , BF , CD が1点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下、 t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $AP = kAE$, $CR = \ell CD$ を満たす実数 k , ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

研

- 3** 座標平面上で円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接する正六角形で、点 $P_0(1, 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し、1 つのサイコロを 1 回投げ、出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。 研

- (規則) (i) 1 から 5 までの目が出た場合は、出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。例えば、コインが P_4 にあるときに 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。
- (ii) 6 の目が出た場合は、 x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし、コインが x 軸上にあるときは動かさない。例えば、コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き、1 つのサイコロを続けて何回か投げて、1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。
- (2) 3 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。
- (3) n を自然数とする。 n 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

- 4** 自然数 n に対して、 10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。 a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。
- (2) $a_1, a_2, \dots, a_6$ を求めよ。
- (3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。
 - (i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる。
 - (ii) N を十進数で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。
 - (iii) N は 13 で割り切れる。

5 以下の問いに答えよ。

- (1) θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数, i を虚数単位とし, z を $z = \cos \theta + i \sin \theta$ で表される複素数とする。このとき, 整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$$

- (2) 次の方程式を満たす実数 x ($0 \leq x < 2\pi$) を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

- (3) 次の式を証明せよ。

研

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

1.3 2017 年度

- 1** 定数 $a > 0$ に対し，曲線 $y = a \tan x$ の $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の部分を C_1 ，曲線 $y = \sin 2x$ の $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。
- (2) a が (1) の条件を満たすとき，原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし， P の x 座標を p とする。 P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき， a および $\cos 2p$ の値を求めよ。
- (3) a が (2) で求めた値のとき， C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

- 2** 2つの定数 $a > 0$ および $b > 0$ に対し，座標空間内の4点を

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, 1), D(a, b, 1)$$

と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。 G の座標を a, b を用いて表せ。
- (2) さらに，点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。 $\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ がなす角を θ とするとき， $\cos \theta$ を a, b を用いて表せ。

- 3** 初項 $a_1 = 1$ ，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

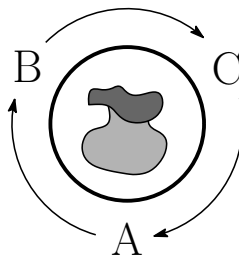
- (1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち， 7^2 の倍数である項の個数を求めよ。 研
- (3) 初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

- 4 赤玉2個，青玉1個，白玉1個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A, B, C の3人がこの順番で時計回りに着席している。3人のうち，ひとりが袋から玉を1個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1回目は A が玉を取り出し，次のルール (a), (b), (c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

- (a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。
(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。
(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

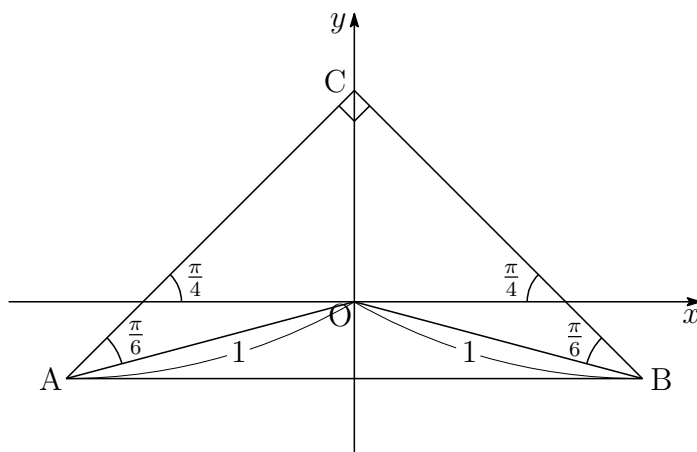
A, B, C の3人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n ($n = 1, 2, \dots$) とする。ただし， $a_1 = 1, b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) A が4回目に勝つ確率と7回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。
(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくとき， d_n を求めよ。
(3) 自然数 $n \geq 3$ に対し， a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。



- 【5】 2つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ を用いて、複素数平面上的の点 $P_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ ($n = 1, 2, \dots$) により定める。ただし、 i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。
- (2) $|z_n| \leq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。
- (3) 下図のように、複素数平面上の $\triangle ABC$ は線分 AB を斜辺とし、点 $C\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお A, B を表す複素数の虚部は負であり、原点 O と 2 点 A, B の距離はともに 1 である。点 P_n が $\triangle ABC$ の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



1.4 2018年度

- 1 座標空間において、 xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geq 1$ を満たす部分を C とする。また、 z 軸上の点 $A(0, 0, 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき、直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし、 d は正の定数とする。 [研]

- 2 原点を中心とする半径3の半円 $C: x^2 + y^2 = 9 \ (y \geq 0)$ 上の2点 P と Q に対し、線分 PQ を $2:1$ に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。 [研]

- (1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく、かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき、線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。
- (2) 点 P を $(-3, 0)$ に固定する。 Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。
- (3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第1象限の共通部分を U とする。 U を y 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積を求めよ。

- 3 1から4までの数字を1つずつ書いた4枚のカードが箱に入っている。箱の中から1枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。 k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし、積 $X_1 X_2 \cdots X_n$ を4で割った余りが $0, 1, 2, 3$ である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。 p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ。

- 4 整数 a, b は3の倍数ではないとし、

$$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(1)$ と $f(2)$ を3で割った余りをそれぞれ求めよ。
- (2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。
- (3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。

- 5 α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\bar{z} = 0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし、 i は虚数単位である。

1.5 2019 年度

- 1** n を自然数とする。 x, y がすべての実数を動くとき、定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$

の最小値を I_n とおく。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

研

- 2** 0 でない 2 つの整式 $f(x), g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$\begin{aligned} f(x^2) &= (x^2 + 2)g(x) + 7 \\ g(x^3) &= x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。
 - (2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。
- 3** 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とする。2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの解 z_1, z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $P_1(z_1), P_2(z_2)$ とする。また、複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

- (1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。
 - (2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。
 - (3) P_1 と O を通る直線を ℓ_1 とし、 P_2 と O を通る直線を ℓ_2 とする。 ℓ_1 と ℓ_2 のなす鋭角が 60° である確率を求めよ。
- 4** 座標平面上の 3 点 $O(0, 0), A(2, 0), B(1, \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり、 A, B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 $P_2, P_3, \dots$ を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき、点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし、点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし、点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \rightarrow \infty$ のとき、 P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

- 5 a, b を複素数, c を純虚数でない複素数とし, i を虚数単位とする。複素数平面において, 点 z が虚軸全体を動くとき 研

$$w = \frac{az + b}{cz + 1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の3条件が満たされているとする。

(ア) $z = i$ のときに $w = i$ となり, $z = -i$ のときに $w = -i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a, b, c の値を求めよ。さらに C を求め, 複素数平面上に図示せよ。

1.6 2020 年度

- 1** 点 $(a, 0)$ を通り, 曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。
- 2** a, b, c, d を整数とし, i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $f\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき, 以下の問いに答えよ。
- (1) c, d を a, b を用いて表せ。
 - (2) $f(1)$ を 7 で割ると 1 余り, 11 で割ると 10 余るとする。また, $f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り, 11 で割ると 10 余るとする。 a の絶対値と b の絶対値がともに 40 以下であるとき, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。
- 3** 四面体 $OABC$ において, 辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を ℓ , 辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m , 辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。 $\ell \perp m, m \perp n, n \perp \ell$ であり, $AB = \sqrt{5}, BC = \sqrt{3}, CA = 2$ のとき, 以下の問いに答えよ。 [研]
- (1) 直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。
 - (2) 四面体 $OABC$ の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。
- 4** 4 個のサイコロを同時に投げるとき, 出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。
- (1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。
 - (2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。
 - (3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。
- 5** 座標空間において, 中心 $(0, 2, 0)$, 半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。 D を底面とし, $z \geq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱 (内部を含む) を E とする。点 $(0, 2, 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け, D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。
- (1) $-1 \leq t \leq 1$ とする。平面 $x = t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また, T の体積を求めよ。
 - (2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

1.7 2021 年度

- 1 座標空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を考える。
以下の問いに答えよ。

- (1) 四面体 $OABC$ に内接する球の中心の座標を求めよ。
 (2) 中心の x 座標, y 座標, z 座標がすべて正の実数であり, xy 平面, yz 平面, zx 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わるとき, その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。

- 2 θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ をみたす定数とし, x の2次方程式

$$x^2 - (4 \cos \theta)x + \frac{1}{\tan \theta} = 0 \quad \cdots (*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2次方程式 $(*)$ が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。
 (2) θ が(1)で求めた範囲にあるとし, $(*)$ の2つの虚数解を α, β とする。ただし, α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $O(0)$ を通る円の中心を $C(\gamma)$ とするとき, θ を用いて γ を表せ。
 (3) 点 O, A, C を(2)のように定めるとき, 三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan \theta$ の値を求めよ。

- 3 座標平面上の点 (x, y) について, 次の条件を考える。

条件: すべての実数 t に対して $y \leq e^t - xt$ が成立する。 $\cdots (*)$

以下の問いに答えよ。必要ならば $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を使ってよい。

- (1) 条件 $(*)$ をみたす点 (x, y) 全体の集合を座標平面上に図示せよ。
 (2) 条件 $(*)$ をみたす点 (x, y) のうち, $x \geq 1$ かつ $y \geq 0$ をみたすものの全体の集合を S とする。 S を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

研

- 4 自然数 n と実数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_n \neq 0$) に対して, 2つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

を考える。 α, β を異なる複素数とする。複素数平面上の2点 α, β を結ぶ線分上にある点 γ で,

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき,

$\alpha, \beta, f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし, i は虚数単位とする。

- (1) $n = 2$ のとき, どのような $\alpha, \beta, f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。
- (2) $\alpha = 1 - i, \beta = 1 + i, f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が平均値の性質をもつための, 実数 a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。
- (3) $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, f(x) = x^7$ は, 平均値の性質をもたないことを示せ。

- 5 以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n, k が $2 \leq k \leq n-2$ をみたすとき, ${}_nC_k > n$ であることを示せ。
- (2) p を素数とする。 $k \leq n$ をみたす自然数の組 (n, k) で ${}_nC_k = p$ となるものをすべて求めよ。

1.8 2022 年度

1 座標空間内の5点

$$O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(2, 1, 2), P(4, 0, -1), Q(4, 0, 5)$$

を考える。3点O, A, Bを通る平面を α とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直であり、 x 成分が正であるような、大きさが1のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。
- (2) 平面 α に関して点Pと対称な点P'の座標を求めよ。
- (3) 点Rが平面 α 上を動くとき、 $|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}|$ が最小となるような点Rの座標を求めよ。

2 n を3以上の自然数、 α , β を相異なる実数とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 次をみたす実数 A , B , C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C$$

- (2) (1)の A , B , C を n , α , β を用いて表せ。
- (3) (2)の A について、 n と α を固定して、 β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A$ を求めよ。

3 自然数 m , n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{n^2 + 1}{2}$, $\frac{n^2 - 1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。
- (2) $n^2 - 1$ は168の倍数であることを示せ。
- (3) ①をみたす自然数の組 (m, n) を1つ求めよ。

4 定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、 $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び、 $f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \dots \textcircled{1}$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A), (B), (C) をもつ。

$$(A) \int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$$

$$(B) a \leq c \leq b \text{ のとき, } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(C) 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) \geq h(x)$ ならば,

$$\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$$

ただし、 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数、 k , l は定数である。

以下、 $f(x)$ を区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数とし、 n を自然数とする。定積分の性質 ア を用い、定数関数に対する定積分の計算を行うと、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと、不等式 $\textcircled{2}$ と定積分の性質 イ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \dots \textcircled{3}$$

よって、はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx$ が成り立つ。

- (1) 関数 $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるとき,

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことを, 導関数の定義に従って示せ。また, この等式と定積分の定義①を用いて, 定積分の性質 (A) で $k = l = 1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

を示せ。

- (2) 定積分の定義①と平均値の定理を用いて, 次を示せ。

$a < b$ のとき, 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) > 0$ ならば, $\int_a^b g(x) dx > 0$

- (3) (A), (B), (C) のうち, 空欄 ア に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで, 不等式②を示せ。

- (4) (A), (B), (C) のうち, 空欄 イ に入る記号として最もふさわしいものを1つ選び答えよ。また, 不等式③を示せ。

5 xy 平面上の曲線 C を, 媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5 \cos t + \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において, $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分, x 軸, 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。 研
- (3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また, C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。
- (4) 曲線 C の概形を図示せよ。

1.9 2023 年度

1 以下の問いに答えよ。

- (1) 4 次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。
- (2) 複素数平面上の $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とする。

$$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$$

が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形になるか答えよ。

2 α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha \leq 1$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (2) $\alpha > 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (3) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (4) $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。

3 点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \quad \vec{n} = (b, d)$$

に対して、 $D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して、次の条件を考える。

条件 I $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす実数 r, s が存在する。

条件 II $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす整数 r, s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 I がすべての $\vec{q}$ に対して成り立つとする。 $D \neq 0$ であることを示せ。

以下、 $D \neq 0$ とする。

(2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}, \vec{w}$ で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) さらに a, b, c, d が整数であるとし、 x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル $\vec{q}$ に対して条件 II が成り立つとする。 D のとりうる値をすべて求めよ。

4 以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

研

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが、逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A) すべての x, y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$

(B) すべての x, y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$

(C) $f(0) \neq 0$

(D) $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0) = 0$, $g'(0) = 1$

①条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ がわかる。以上のことから

② $f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で, $f'(x) = -g(x)$, $g'(x) = f(x)$ が成立する ことが示される。

③上のことから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ であることが、実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ であることが示される。

さらに, a, b を実数で $b \neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)' $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0) = a$, $g'(0) = b$

におきかえて, 条件 (A), (B), (C), (D)' を満たす $f(x)$, $g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも, 条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと, ④条件 (A), (B), (C), (D) において, $f(x)$ を $p(x)$ に, $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により, $p(x)$, $q(x)$ がまず求まり, このことを用いると $f(x) = \boxed{\text{ア}}$, $g(x) = \boxed{\text{イ}}$ が得られる。

- (1) 下線部①について, $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ となることを示せ。
- (2) 下線部②について, $f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり, $f'(x) = -g(x)$ となることを示せ。
- (3) 下線部③について, 下線部①, 下線部②の事実を用いることにより, $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ となることを示せ。
- (4) 下線部④について, 条件(B), (D)において, $f(x)$ を $p(x)$ に, $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が,
- (B) すべての x, y について $q(x+y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$
- (D) $p(x), q(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $p'(0) = 0$, $q'(0) = 1$
- を満たすことを示せ。空欄 ア , イ に入る関数を求めよ。 研

5 xy 平面上の曲線 C を, 媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = t + 2 \sin^2 t, \quad y = t + \sin t \quad (0 < t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。
- (2) 曲線 C のうち $y \leq x$ の領域にある部分と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

1.10 2024 年度

- 1** a を実数とし、座標空間内の 3 点 $P(-1, 1, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(a, a^2, a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $a \neq -1$, $a \neq 1$ のとき、3 点 P , Q , R は一直線上にないことを示せ。
- (2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき、三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

- 2** 整式

$$f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して、 $|z| = 1$ が成り立つことを示せ。
- (2) 次の条件をみたす複素数 w をすべて求めよ。

条件： $f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して
 $f(wz) = 0$ が成り立つ。

- 3** 以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 a, b が $a < b$ をみたすとき、 $\frac{b!}{a!} \geq b$ が成り立つことを示せ。
- (2) $2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (3) $a! + b! = 2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

- 4** n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち、 x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $L(3)$ を求めよ。
- (2) $L(4)$ を求めよ。
- (3) $L(5)$ を求めよ。

5 自然数 m, n に対して

$$I(m, n) = \int_1^e x^m e^x (\log x)^n dx$$

とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $I(m+1, n+1)$ を $I(m, n+1)$, $I(m, n)$, m , n を用いて表せ。
- (2) すべての自然数 m に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} I(m, n) = 0$ が成り立つことを示せ。

第 2 章 一般前期解答

問題冊子 (A4 で 12 ページ) は、見開きで問題が偶数ページ、下書き (計算スペース) が奇数ページに配置されており、問題ページの下側の余白を含め十分な計算スペースがある。解答用紙は、**26**～**30**の番号が書かれた 5 枚の A3 用紙がはさみ込まれており、問題**1**～**5**を順次指定された解答用紙に答えるようになっている。

設問ごとに解答欄が仕切られているため、十分な解答スペースではなく、途中の計算などを書いていくスペースはない (解答用紙の裏面の使用は不可)。そのため、問題用紙の下書き欄で計算した結果を整理して「理由と計算結果・結論」を明示する必要がある。なお、問題冊子は、試験終了後に持ち帰ることができる。

出題者は受験生に簡潔な表現力を要求したものと考えられる。理学部数学科の採点担当者からも、定積分の途中計算などを細かく書く必要はないと聞いた。

対策

1. 標準的な問題を中心に 3 題とやや難の 2 題が例年の出題傾向である。配点はすべて 50 点ずつの計 250 点であるので 150 分で効率的に問題を解いていく必要がある。なお、経済学部経済工学科は 300 点満点に換算される。
2. 完答が難しい問題についても、前半の設問はどれも基本または標準的な問題が配置されているので、確実に部分点を狙っていく必要がある。しかしながら、近年の傾向として、2018 年度は**1**，**3**，**5**，2019 年度は**1**，**4**，**5**が大問のみの問題設定であったことに注意したい。
3. 九州大学では、完答できていない答案について、途中までの計算が正しいもの、また論理的な展開が間違っていないものについては加点されるそうである。特に大問中心の出題になった傾向を踏まえると、採点者が読みやすい簡潔な答案の作成を普段から練習しておく必要がある。

2.1 2015年度

- 1 (1) $y = -x^2 + 2x$ ($0 \leq x \leq 2$) と $y = a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2 + 2x = a(x+4) \quad \text{すなわち} \quad x^2 + (a-2)x + 4a = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と ℓ が接するとき, $(*)$ より

$$(a-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4a = 0, \quad 0 < -\frac{a-2}{2 \cdot 1} < 2$$

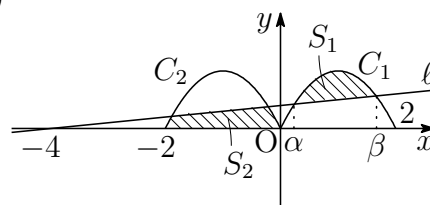
上の第1式および第2式から

$$a = 10 \pm 4\sqrt{6}, \quad -2 < a < 2 \quad \text{すなわち} \quad a = 10 - 4\sqrt{6}$$

よって, 求める a の値の範囲は $0 \leq a < 10 - 4\sqrt{6}$

- (2) 方程式 $(*)$ の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -(a-2), \quad \alpha\beta = 4a, \\ \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{a^2 - 20a + 4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad S_1 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + 2x) - a(x+4)\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 + (a-2)x + 4a\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(a^2 - 20a + 4)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

- (3) $y = -x^2 - 2x$ ($-2 \leq x \leq 0$) と $y = a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2 - 2x = a(x+4) \quad \text{すなわち} \quad x^2 + (a+2)x + 4a = 0 \quad \cdots (**)$$

方程式 $(**)$ の解を γ, δ とすると ($\gamma < \delta$)

$$\begin{aligned} \gamma + \delta &= -(a+2), \quad \gamma\delta = 4a, \\ \delta - \gamma &= \sqrt{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta} = \sqrt{a^2 - 12a + 4} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2}^0 \{-x^2 - 2x\} dx + \int_{\gamma}^{\delta} \{-x^2 - 2x - a(x+4)\} dx \\ &= -\int_{-2}^0 x(x+2) dx - \int_{\gamma}^{\delta} (x-\gamma)(x-\delta) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 - \frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}(a^2 - 12a + 4)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$S_1 = S_2 \text{ より } \frac{1}{6}(a^2 - 20a + 4)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}(a^2 - 12a + 4)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{整理すると } (a^2 - 20a + 4)^{\frac{3}{2}} + (a^2 - 12a + 4)^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$$

ここで, $f(a) = (a^2 - 20a + 4)^{\frac{3}{2}} + (a^2 - 12a + 4)^{\frac{3}{2}} - 8$ とおくと

$$f(0) = 8 > 0, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{41\sqrt{41} - 999}{125} < \frac{41 \cdot 7 - 999}{125} < 0,$$

$$10 - 4\sqrt{6} = 2(5 - 2\sqrt{6}) = \frac{2}{5 + 2\sqrt{6}} > \frac{2}{5 + 5} = \frac{1}{5}$$

$f(a)$ は連続であるから, 中間値の定理により, $f(a) = 0$, すなわち $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \frac{1}{5}$ の範囲に存在する. ■

2 (1) $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ を微分すると $y' = -\frac{\log x + 2}{x^2(\log x)^3}$

したがって, $x > 1$ において $y' < 0$

よって, $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において, 単調減少.

$$(2) \int \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \int \frac{(\log x)'}{(\log x)^2} dx = -\frac{1}{\log x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

別解 $t = \log x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ であるから

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\log x} + C$$

(3) (1), (2) の結果から, n が 3 以上の整数であるとき

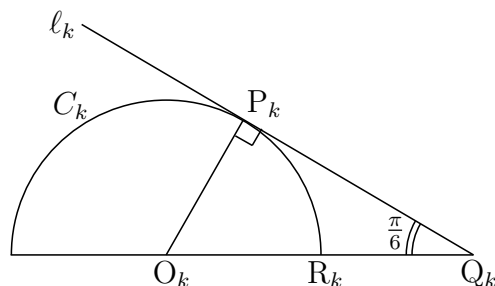
$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} &= \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k(\log k)^2} dx \\ &< \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\log x} \right]_2^n = -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2} < \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

■

- 3 (1) 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $z \geq 0$ の部分の平面 $x = k$ ($-1 < k < 1$) による断面の表す図形は、中心 $O_k(k, 0, 0)$ 、半径 $\sqrt{1 - k^2}$ の半円

$$y^2 + z^2 = 1 - k^2 \quad (-1 < k < 1), \quad z \geq 0$$

この半円を C_k とし、 C_k 上の点を $R_k(k, \sqrt{1 - k^2}, 0)$ とする. 方向ベクトルが $(0, \sqrt{3}, -1)$ で C_k に接する直線を ℓ_k とし、 ℓ_k と C_k の接点を P_k 、 ℓ_k と xy 平面との共有点を Q_k とすると



$$\begin{aligned} O_k R_k &= O_k P_k = \sqrt{1 - k^2} \\ O_k Q_k &= 2 O_k P_k = 2\sqrt{1 - k^2} \end{aligned}$$

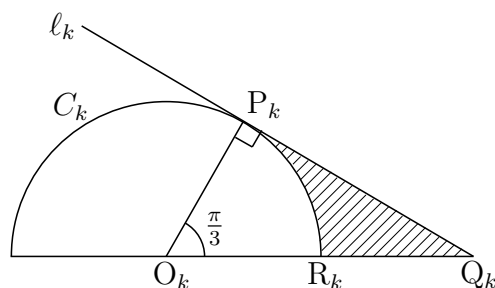
よって $\sqrt{1 - k^2} \leq y \leq 2\sqrt{1 - k^2}$

- (2) (1) の結果から $R_k Q_k = O_k Q_k - O_k R_k = \sqrt{1 - k^2}$

よって $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - k^2} dk = \frac{\pi}{2}$

- (3) 右の図の斜線部分の面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} O_k P_k \cdot P_k Q_k - \frac{1}{2} O_k R_k^2 \cdot \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - k^2) - \frac{\pi}{6} (1 - k^2) \\ &= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} (1 - k^2) \end{aligned}$$



よって、求める体積を V とすると

$$V = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} \int_{-1}^1 (1 - k^2) dk = \frac{6\sqrt{3} - 2\pi}{9}$$

■

- 4 (1) 求める確率は、2 回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

- (2) 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

- (3) 偶数回目の操作で青玉の個数は 1 個または 3 個である．青玉 1 個の状態からその後の 2 回目の操作で青玉が 1 個となる確率を p とすると 研

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{9}$$

8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p) = p^3(1-p) = \left(\frac{7}{9}\right)^3 \frac{2}{9} = \frac{686}{6561}$$

- (4) 青玉 3 個の状態から，2 回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$(1-p)qpp = p^2(1-p)q$$

4 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$p(1-p)qp = p^2(1-p)q$$

6 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$pp(1-p)q = p^2(1-p)q$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} 3 \times p^2(1-p)q + p^3(1-p) &= 2p^2(1-p) + p^3(1-p) \\ &= p^2(1-p)(2+p) \\ &= \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{25}{9} = \frac{2450}{6561} \end{aligned}$$



- 5 (1) n が正の偶数のとき, $\frac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

よって, $2^n - 1$ は 3 の倍数である.

- (2) n が自然数のとき, $2^n - 1$ は奇数である.

研

i) $n = 1$ のとき, $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である.

ii) $n \geq 2$ のとき

$$2^n + 1 = 1(2^n - 1) + 2$$

上式より, $2^n + 1$ を $2^n - 1$ で割った余りは 2.

$2^n - 1$ を 2 で割った余りは 1 であるから, ユークリッドの互除法により, $2^n + 1$ と $2^n - 1$ の最大公約数は 1 である.

よって, $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である.

- (3) $2^{p-1} - 1 = pq^2$ (p, q は異なる素数) $\cdots (*)$

(*) について, $p = 2$ のとき $1 = 2q^2$

これを満たす素数 q は存在しない.

$p \neq 2$ となり, p は奇素数であるから, $\frac{p-1}{2}$ は自然数である.

(1) の結果から, $2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数であるから, pq^2 は 3 を因数にもつ.

i) $p = 3$ のとき, (*) より $3 = 3q^2$

q は素数であるから, 不適.

ii) $q = 3$ のとき, (*) より

$$2^{p-1} - 1 = 9p \quad \text{ゆえに} \quad (2^{\frac{p-1}{2}} + 1)(2^{\frac{p-1}{2}} - 1) = 9p$$

i) より, 奇素数 p は $p \geq 5$ であること, (2) の結果から, $2^{\frac{p-1}{2}} + 1$ と $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は互いに素であることに注意して

$$(A) \begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = 9 \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = p \end{cases} \quad \text{または} \quad (B) \begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = p \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 9 \end{cases}$$

(A) を解いて, $p = 7$. (B) の第 2 式を満たす奇素数 p は存在しない.

よって $(p, q) = (7, 3)$ ■

2.2 2016 年度

- 1 (1) C_1 と C_2 の交点 Q の x 座標が $n+1$ であるから

$$\log(n+1) = (n+1-1)(n+1-a)$$

$n \neq 0$ であるから

$$a = n+1 - \frac{\log(n+1)}{n}$$

$$\text{上式より } a-1 = \frac{n^2 - \log(n+1)}{n}$$

$$\text{ここで } \int_0^n \frac{t}{t+1} dt = \left[t - \log(t+1) \right]_0^n = n - \log(n+1) > 0$$

$$\text{上の2式から } a-1 = \frac{n^2 - \log(n+1)}{n} > \frac{n^2 - n}{n} = n-1 \geq 0$$

よって $a > 1$

$$\begin{aligned} (2) \quad S_n &= \int_1^{n+1} \log x \, dx - \frac{1}{2} \{(n+1) - 1\} \log(n+1) \\ &= \left[x \log x - x \right]_1^{n+1} - \frac{n}{2} \log(n+1) = \frac{n+2}{2} \log(n+1) - n \end{aligned}$$

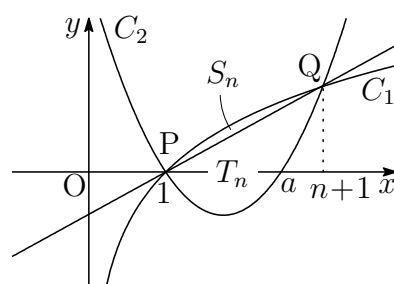
C_2 の x^2 の係数および2点 P , Q の x 座標に注意して

$$T_n = \frac{1}{6} \{(n+1) - 1\}^3 = \frac{1}{6} n^3$$

- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n \log T_n} &= \frac{\frac{n+2}{2} \log(n+1) - n}{n \log \frac{n^3}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \log(n+1) - 1}{3 \log n - \log 6} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\} - 1}{3 \log n - \log 6} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \left\{1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\} - \frac{1}{\log n}}{3 - \frac{\log 6}{\log n}} \end{aligned}$$

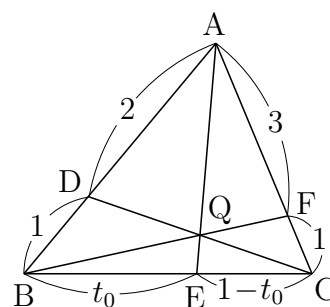
$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log T_n} = \frac{\left(\frac{1}{2} + 0\right)(1 + 0) - 0}{3 - 0} = \frac{1}{6}$$



2 (1) チェバの定理により

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\text{これを解いて} \quad t_0 = \frac{3}{5}$$

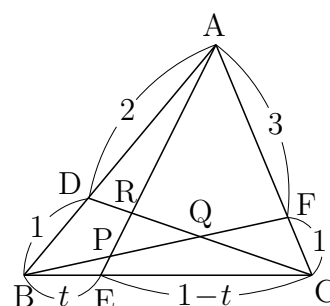


(2) $\triangle AEC$ および直線 BF について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AP}{PE} \cdot \frac{t}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{AP}{PE} = \frac{3}{t}$$

$$\text{よって} \quad k = \frac{AP}{AE} = \frac{3}{3+t}$$



$\triangle BCD$ および直線 AE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DA}{AB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{CR}{RD} = \frac{3(1-t)}{2t}$$

$$\text{よって} \quad \ell = \frac{CR}{CD} = \frac{3(1-t)}{3(1-t) + 2t} = \frac{3(1-t)}{3-t}$$

(3) (2) の図について、 $\triangle BCF$ および直線 AE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CA}{AF} \cdot \frac{FP}{PB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{FP}{PB} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{FP}{PB} = \frac{3(1-t)}{4t} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$t = \frac{3}{5} \text{ のとき, } P \text{ は } Q \text{ に一致するので} \quad \frac{FQ}{QB} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{よって} \quad \triangle BCQ = \frac{2}{3} \triangle BCF = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

(4) $t = \frac{3}{5}$ のとき, R は Q に一致するので, (2) の結果から

研

$$\frac{CQ}{CD} = \frac{3\left(1 - \frac{3}{5}\right)}{3 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって } CQ : QR = \frac{1}{2} : \frac{3(1-t)}{3-t} - \frac{1}{2} = 3-t : 3-5t$$

また, ①, ② から

$$BQ : PQ = \frac{2}{3} : \frac{3(1-t)}{3(1-t)+4t} - \frac{1}{3} = 3+t : 3-5t$$

$\triangle BCQ : \triangle PQR = BQ \cdot CQ : PQ \cdot QR$ であるから

$$\triangle BCQ : \triangle PQR = (3+t)(3-t) : (3-5t)^2$$

$$(3) \text{ の結果から } \triangle PQR = \frac{1}{6} \times \frac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)} = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}$$

■

3 (1) n 回サイコロ投げた後に, コインが P_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) の位置にある確率を $P_i(n)$ とすると

研

$$\begin{aligned} P_0(n+1) &= \frac{1}{6}P_0(n) + \frac{1}{6}P_1(n) + \frac{1}{6}P_2(n) + \frac{1}{6}P_3(n) + \frac{1}{6}P_4(n) + \frac{1}{6}P_5(n) \\ &= \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n)\} \end{aligned}$$

自然数 n に対して $P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n) = 1$

$$\text{したがって } P_0(n) = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6} \quad \dots (*)$$

よって, 求める確率は $\frac{1}{6}$

(2) (*) より, 求める確率は $\frac{1}{6}$

(3) (*) より, 求める確率は $\frac{1}{6}$

■

4 (1) 仮定から $10^n \equiv a_n, \quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第1式から $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より **$a_1 = 10$**

(1)の結果を用いると、法13について

$$a_2 \equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9$$

$$a_3 \equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12$$

$$a_4 \equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3$$

$$a_5 \equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4$$

$$a_6 \equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1$$

よって **$a_2 = 9, a_3 = 12, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 1$**

(3) 整数 p, q を $1 \leq p \leq 9, 0 \leq q \leq 9$ とし、求める自然数 N を

$$N = p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

とおくと、法13に関して

$$N \equiv p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

$$\equiv p \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 9 + 6 \cdot 10 + q = 4p + q + 75$$

$$\equiv 4p + q - 3$$

このとき、 $N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 (p, q) の組は

$$(p, q) = (2, 8), (3, 4), (4, 0), (5, 9), (6, 5), (7, 1), (9, 6)$$

よって、求める自然数 N は

$$\mathbf{220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166}$$



5 (1) ド・モアブルの定理により

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad \frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i \sin n\theta \quad \cdots (*)$$

(*) の辺々を加えると

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

(*) の辺々を引くと

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ \cos 2x &= \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 1 \\ \cos 3x &= \frac{1}{2} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

$t = z + \frac{1}{z}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1}{2}t, \quad \cos 2x = \frac{1}{2}t^2 - 1, \quad \cos 3x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

これらを $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ に代入すると

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right) = 1$$

整理すると $t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$ ゆえに $(t-1)(t+2)(t-2) = 0$

これを解いて $t = 1, -2, 2$ したがって $\cos x = \frac{1}{2}, -1, 1$

$0 \leq x < 2\pi$ であるから $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

(3) (1) の結果から

研

$$\sin^2 n\theta = \left\{ -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right) \right\}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}} \right)$$

 $\theta = 20^\circ$ とすると, $z^{18} = 1$ であるから

$$(z^2 - 1)(z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1) = 0$$

 $z^2 \neq 1$ であるから $z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1 = 0$ また, $z \neq 0$ であるから
$$\sum_{n=1}^4 \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}} \right) = -1$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \sum_{n=1}^4 \sin^2 n\theta &= \sum_{n=1}^4 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}} \right) \right\} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

別解 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ および $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ により

$$\begin{aligned} &\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ \\ &= \frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ}{2} \end{aligned}$$

方程式 $\cos 3\theta + \frac{1}{2} = 0$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) の解は $\theta = 40^\circ, 80^\circ, 160^\circ$ ここで, $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ であるから, 方程式

$$4\cos^3 \theta - 3\cos \theta + \frac{1}{2} = 0 \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

の解と係数の関係により $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$

$$\text{よって} \quad \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

補足 また, 解と係数の関係により $\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}$

■

2.3 2017 年度

- 1 (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $y = a \tan x$ と $y = \sin 2x$ から y を消去すると

$$a \tan x = \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sin 2x}{\tan x} = 2 \cos^2 x \quad \cdots \textcircled{1}$$

このとき, $0 < 2 \cos^2 x < 2$ より $0 < a < 2$

- (2) $f(x) = a \tan x$, $g(x) = \sin 2x$ において, これらを微分すると

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2 x}, \quad g'(x) = 2 \cos 2x$$

交点 P の x 座標が p であるから, ① より $a = 2 \cos^2 p \quad \cdots \textcircled{2}$

$$f'(p)g'(p) = -1 \text{ であるから } \frac{a}{\cos^2 p} \times 2 \cos 2p = -1$$

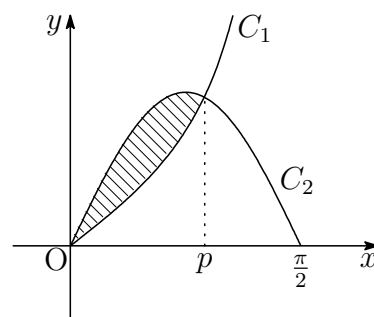
② を上式に代入すると

$$\frac{2 \cos^2 p}{\cos^2 p} \times 2 \cos 2p = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \cos 2p = -\frac{1}{4}$$

$$\text{したがって} \quad a = 2 \cos^2 p = \cos 2p + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

- (3) 求める面積は右の図の斜線部分であるから, その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left(\sin 2x - \frac{3}{4} \tan x \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{4} \log |\cos x| \right]_0^p \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2p + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \log |\cos p| \end{aligned}$$



$$\text{ここで, (2) の結果から} \quad \log |\cos p| = \frac{1}{2} \log \cos^2 p = \frac{1}{2} \log \frac{3}{8}$$

$$\text{よって} \quad S = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \log \frac{3}{8} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \log \frac{3}{8}$$

■

2 (1) $A(a, 0, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(a, b, 1)$ より

$$\overrightarrow{CA} = (a, 0, -1), \quad \overrightarrow{CD} = (a, b, 0)$$

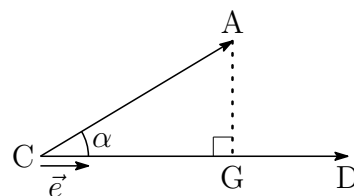
$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2} \overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} (a, b, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = (0, 0, 1) + \frac{a^2}{a^2 + b^2} (a, b, 0) \\ &= \left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}, 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad G \left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}, 1 \right)$$

補足 $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CD}$ のなす角を α とし, 単位ベクトル $\vec{e}$ を

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} \quad \cdots \textcircled{1}$$



とすると, A から CD に下ろした垂線と CD の交点 G について

$$\overrightarrow{CG} = (|\overrightarrow{CA}| \cos \alpha) \vec{e} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CD}|} \text{ であるから } |\overrightarrow{CA}| \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}$$

$$\text{これと } \textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると } \quad \overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2} \overrightarrow{CD}$$

(2) B(0, b, 0) から, $\overrightarrow{CB} = (0, b, -1)$ であるから, (1) と同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OC} + \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2} \overrightarrow{CD} \\ &= (0, 0, 1) + \frac{b^2}{a^2 + b^2} (a, b, 0) = \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{b^3}{a^2 + b^2}, 1 \right)\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2}, 1 \right) - (a, 0, 0) \\ &= \left(-\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2}, 1 \right), \\ \overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} = \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{b^3}{a^2 + b^2}, 1 \right) - (0, b, 0) \\ &= \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, -\frac{a^2b}{a^2 + b^2}, 1 \right)\end{aligned}$$

$\vec{u} = (a^2 + b^2)\overrightarrow{AG}$, $\vec{v} = (a^2 + b^2)\overrightarrow{BH}$ とおくと

$$\vec{u} = (-ab^2, a^2b, a^2 + b^2), \quad \vec{v} = (ab^2, -a^2b, a^2 + b^2)$$

$$\begin{aligned}\text{したがって} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} &= -a^2b^4 - a^4b^2 + (a^2 + b^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - a^2b^2), \\ |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 &= a^2b^4 + a^4b^2 + (a^2 + b^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + a^2b^2)\end{aligned}$$

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は θ であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - a^2b^2)}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + a^2b^2)} = \frac{a^2 + b^2 - a^2b^2}{a^2 + b^2 + a^2b^2}$$

■

- 3** (1) 初項 $a_1 = 1$, 公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3 \cdots \textcircled{1}$$

a_n が 7 の倍数であるとき, $4n - 3 \equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$8n \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -1 \pmod{7}$$

このとき, n は整数 m を用いて

$$n = 7m - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

したがって, $1 \leq 7m - 1 \leq 600$ を満たす整数 m の個数は

$$\frac{2}{7} \leq m \leq \frac{601}{7} \quad \text{すなわち} \quad 1 \leq m \leq 85$$

よって, 求める個数は **85 (個)**

- (2) ② を ① に代入すると

$$a_n = 4(7m - 1) - 3 = 7(4m - 1)$$

a_n が 7^2 の倍数であるとき, $4m - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$8m \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad m \equiv 2 \pmod{7}$$

このとき, m は整数 l を用いて

$$m = 7l + 2$$

これを ② に代入すると

$$n = 7(7l + 2) - 1 = 49l + 13 \quad \cdots \textcircled{3}$$

したがって, $1 \leq 49l + 13 \leq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leq l \leq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq l \leq 11$$

よって, 求める個数は **12 (個)**

研

(3) ③ を ① に代入すると

$$a_n = 4(49l + 13) - 3 = 7^2(4l + 1)$$

a_n が 7^3 の倍数であるとき, $4l + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$8l \equiv -2 \quad \text{ゆえに} \quad l \equiv -2 \pmod{7}$$

このとき, l は整数 k を用いて

$$l = 7k - 2$$

これを ③ に代入すると

$$n = 49(7k - 2) + 13 = 343k - 85 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$1 \leq 343k - 85 \leq 600$ を満たす整数 k は 1 で, このとき $n = 258$

④ を ① に代入すると

$$a_n = 4(343k - 85) - 3 = 7^3(4k - 1)$$

これから, a_n が 7^4 の倍数となることはない.

以上の結果および ②, ③ より, $1 \leq n \leq 600$ に対して

$$a_n \text{ が } 7 \text{ の倍数であるとき} \quad n \equiv -1 \pmod{7}$$

$$a_n \text{ が } 7^2 \text{ の倍数であるとき} \quad n \equiv 13 \pmod{49}$$

$$a_n \text{ が } 7^3 \text{ の倍数であるとき} \quad n = 258$$

数列 $\{a_n\}$ のうち, 7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

上の表で 2 列目のみ 7^2 を因数にもち, それ以外の列は 7 を因数にもつ.

ただし, 第 6 行目第 2 列の a_{258} のみ 7^3 を因数にもつ.

したがって, 2 列目以外の 32 項 (7 を因数にもつ), 2 列目の第 1 行から第 5 行目までの 5 項 (7^2 を因数にもつ) および第 6 行目第 2 列の a_{258} より

$$32 \times 1 + 2 \times 5 + 3 = 45$$

よって, 求める n の最小値は $n = 265$ ■

- 4 (1) 定められたルールにより, 次の確率漸化式が得られる.

$$(*) \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n), \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n)$$

$d_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると

$$d_1 = a_1 + b_1 + c_1 = 1 + 0 + 0 = 1$$

(*) の辺々を加えることにより

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n \quad \text{ゆえに} \quad d_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \dots \textcircled{1}$$

したがって, (*) は

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - b_n \right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}b_n$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - c_n \right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - a_n \right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}a_n$$

上の3式から, $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4}c_{n-1} \right) = \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{16}c_{n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4}a_{n-2} \right) = \frac{3}{2^{n+3}} - \frac{1}{64}a_{n-2} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

② に $n = 3, 6$ を代入することにより

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{3}{2^6} - \frac{1}{64}a_1 = \frac{3}{64} - \frac{1}{64} \cdot 1 = \frac{1}{32} \\ a_7 &= \frac{3}{2^9} - \frac{1}{64}a_4 = \frac{3}{512} - \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{32} = \frac{11}{2048} \end{aligned}$$

よって A が4回目に勝つ確率は $a_4 \times \frac{2}{4} = \frac{1}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$

A が7回目に勝つ確率は $a_7 \times \frac{2}{4} = \frac{11}{2048} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{4096}$

(2) ① より $d_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

(3) ② より $a_{n+1} = \frac{3}{2^{n+3}} - \frac{1}{64}a_{n-2}$



5 (1) $\alpha = 10000 + 10000i = 10000\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

ゆえに $z_n = \alpha w^n = \frac{10000\sqrt{2}}{2^n} \left\{ \cos \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi + i \sin \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi \right\}$

よって $|z_n| = \frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}}, \quad \arg z_n = \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi$

(2) (1) の結果から, $|z_n| \leq 1$ のとき

$$\frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}} \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-\frac{1}{2}} \geq 10^4$$

両辺の常用対数をとると

$$\left(n - \frac{1}{2} \right) \log_{10} 2 \geq 4 \quad \text{ゆえに} \quad n \geq \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2}$$

ここで $\frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{0.301} + 0.5 = 13.7 \dots$

よって, 求める最小の自然数 n は $\mathbf{n = 14}$

(3) (1),(2) の結果から

$$|z_{14}| = \frac{10000}{2^{14-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4 \cdot 5^4}{2^{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{512} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg z_{14} = \left(\frac{14}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi = \frac{7}{12} \pi + 2\pi$$

$$|z_{15}| = \frac{10000}{2^{15-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4 \cdot 5^4}{2^{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{1024} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{128} \cdot \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{128} \sqrt{\frac{25}{32}} < \frac{1}{2}$$

$$\arg z_{15} = \left(\frac{15}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi = \frac{3}{4} \pi + 2\pi$$

したがって, P_{14} は $\triangle ABC$ の外部にあり, P_{15} は $\triangle ABC$ の内部にある.

よって, 求める最小の自然数 n は $\mathbf{n = 15}$



2.4 2018年度

- 1 C 上の点 P を $\left(\frac{1}{\cos \theta}, \tan \theta, 0\right)$ とおく $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$. 直線 AP と平面 $x = d$ との交点を Q とすると, 実数 k を用いて 研

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AP} \\ &= (0, 0, 1) + k\left(\frac{1}{\cos \theta}, \tan \theta, -1\right) \\ &= \left(\frac{k}{\cos \theta}, k \tan \theta, 1 - k\right) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

点 Q の x 座標が d であるから

$$\frac{k}{\cos \theta} = d \quad \text{ゆえに} \quad k = d \cos \theta$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= (d, d \sin \theta, 1 - d \cos \theta) \\ &= (d, 0, 1) + d(0, \sin \theta, -\cos \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ここで} \quad \sin \theta &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ -\cos \theta &= -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OQ} = (d, 0, 1) + d\left(0, \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

このとき, $-\pi < \theta - \frac{\pi}{2} < 0$ であるから, 求める軌跡は,

平面 $x = d$ 上の点 $(d, 0, 1)$ を中心とする半径 d の円周上で $z < 1$.

別解 軌跡の方程式を, 次のように表してもよい.

$$\begin{cases} x = d \\ y^2 + (z - 1)^2 = d^2 \\ z < 1 \end{cases}$$



2 (1) $\int_0^3 PQ \, dy = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$ であるから, $PR = \frac{2}{3}PQ$ より

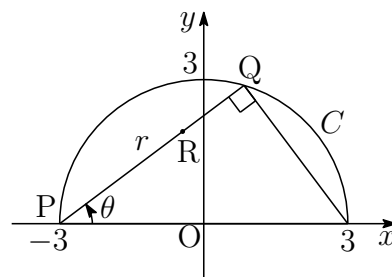
研

$$S = \int_0^3 PR \, dy = \frac{2}{3} \int_0^3 PQ \, dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}\pi = 3\pi$$

(2) $\theta = \angle OPQ$, $r = PQ$ とおくと ($r = 6 \cos \theta$)

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \, d\theta = \frac{9}{2}\pi$$

$PR = \frac{2}{3}r$ より



$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}r\right)^2 \, d\theta = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \, d\theta = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{2}\pi = 2\pi$$

(3) $C: x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) の第 1 象限と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積は, 半径 3 の半球の体積であるから

$$\pi \int_0^3 x^2 \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 18\pi$$

$P(-x, y)$, $Q(x, y)$ を 2 : 1 に内分する点は $\left(\frac{x}{3}, y\right)$ ($x \geq 0, y \geq 0$)

この点の軌跡は C の第 1 象限の部分を y 軸を元に x 軸方向に $\frac{1}{3}$ だけ縮小したものであるから, 図形 S と第 1 象限の共通部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi \int_0^3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 \, dy = \frac{1}{9} \pi \int_0^3 x^2 \, dy = \frac{1}{9} \cdot 18\pi = 2\pi$$

$P(-3, 0)$, $Q(s, t)$ を 2 : 1 に内分する点を $R(x, y)$ とすると

$$x = \frac{2s - 3}{3}, \quad y = \frac{2t}{3} \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{3}{2}(x + 1), \quad t = \frac{3}{2}y$$

Q は C 上の点であるから $s^2 + t^2 = 9$ ($t \geq 0$)

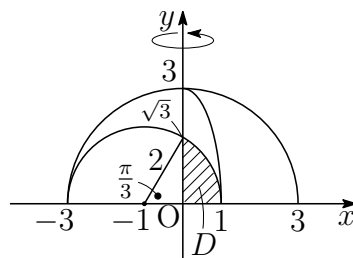
これに上の結果を代入することにより, R の軌跡の方程式は

$$\frac{9}{4}(x+1)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)^2 + y^2 = 4 \quad (y \geq 0) \quad \cdots (*)$$

(*) の y 軸との交点の y 座標は, (*) に $x = 0$ を代入して

$$y = \sqrt{3}$$

右の図の領域 D を y 軸のまわりに回転させて
できる回転体の体積を V_2 とすると



$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} x^2 dy \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2 - 1\} dy - 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x dy \quad \cdots (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2 - 1\} dy &= \int_0^{\sqrt{3}} (3 - y^2) dy \\ &= \left[3y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

また, $\int_0^{\sqrt{3}} x dy$ は, D の面積であるから

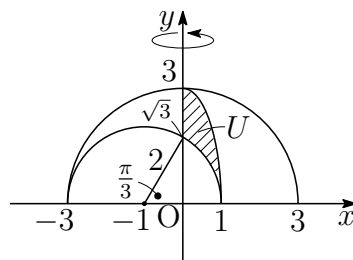
$$\int_0^{\sqrt{3}} x dy = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

これらを (**) に代入すると

$$V_2 = 2\sqrt{3}\pi - 2\pi \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right) \pi$$

U の表す領域は右の図の斜線部分で, これを
 y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= 2\pi - \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right) \pi \\ &= \left(2 - 3\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi \right) \pi \end{aligned}$$



注意 (**) の $\pi \int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2 - 1\} dy$ は, D を直線 $x = -1$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を表す. ■

- 3** 法 4 に関する 0, 1, 2, 3 の積は, 右のようになる.
したがって, 次の確率漸化式が成立する.

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$\begin{aligned}
 p_1 &= q_1 = r_1 = s_1 = \frac{1}{4} \\
 p_{n+1} &= p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots \textcircled{1} \\
 q_{n+1} &= \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots \textcircled{2} \\
 r_{n+1} &= \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots \textcircled{3} \\
 s_{n+1} &= \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

$q_1 = s_1 = \frac{1}{4}$ および ②, ④ より, $q_n = s_n$ であるから

$$q_1 = \frac{1}{4}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n \quad \text{ゆえに} \quad q_n = q_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

したがって $q_n = s_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ これを ③ に代入すると

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n+1}r_{n+1} = 2^n r_n + \frac{1}{2}$$

数列 $\{2^n r_n\}$ は初項 $2r_1 = \frac{1}{2}$, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$2^n r_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} \quad \text{ゆえに} \quad r_n = \frac{n}{2^{n+1}}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned}
 p_n &= 1 - q_n - r_n - s_n \\
 &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}
 \end{aligned}$$



- 4 (1) 整数 a, b は 3 の倍数ではないから

$$a \equiv \pm 1, b \equiv \pm 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 \equiv 1, b^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad \dots (*)$$

$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$ より, 法 3 に関して

$$f(1) = a^2 + 2b^2 + 3 \equiv 1 + 2 \cdot 1 + 3 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$f(2) = 4a^2 + 4b^2 + 17 \equiv 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 17 \equiv 1 \pmod{3}$$

よって, $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りはそれぞれ 0 と 1

- (2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x が m であるとき

$$2m^3 + a^2m^2 + 2b^2m + 1 = 0$$

$$\text{したがって} \quad m(2m^2 + a^2m + 2b^2) = -1$$

上式より, 次の (i), (ii) の場合分けができる.

- (i) $m = 1, 2m^2 + a^2m + 2b^2 = -1$ のとき,

第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 + a^2 + 2b^2 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 2b^2 = -3$$

$a^2 + 2b^2 \geq 0$ であるから, 不適.

- (ii) $m = -1, 2m^2 + a^2m + 2b^2 = 1$ のとき,

第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 - a^2 + 2b^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad -a^2 + 2b^2 = -1$$

(*) より, $-a^2 + 2b^2 \equiv 1 \pmod{3}$ であるから, 不適.

- (i), (ii) より, $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しない.

補足 x を整数とすると $x + 3 \equiv x \pmod{3}$

n を自然数とすると $(x + 3)^n \equiv x^n \pmod{3}$

ゆえに $f(x + 3) \equiv f(x) \pmod{3}$

これと (1) の結果および $f(0) = 1$ から, $x \equiv 1 \pmod{3}$ が $f(x) = 0$ を満たす x であるための必要条件である. したがって, (2) は, (ii) の $m = 1$ の場合についてのみ調べればよい.

- (3) $f(x) = 0$ を満たす x は負である. (2) の結果に注意すると, $f(x) = 0$ を満たす有理数 x は整数ではないから, x を $\frac{p}{q}$ とすると (p, q は互いに素である整数, $p < 0, q > 1$)

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{p}{q}\right)^3 + a^2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2b^2\frac{p}{q} + 1 &= 0 \\ 2p^3 + a^2p^2q + 2b^2pq^2 + q^3 &= 0 \\ \frac{2p^3}{q} + a^2p^2 + 2b^2pq + q^2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

上式の $a^2p^2 + 2b^2pq + q^2$ が整数であるから, $\frac{2p^3}{q}$ は整数である. このとき, p と q は互いに素であるから ($q > 1$), $q = 2$. これを ① に代入すると

$$p^3 + a^2p^2 + 4b^2p + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p^2 + a^2p + 4b^2) = -4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

負の整数 p は -4 の約数で, $q (= 2)$ と互いに素であるから $p = -1$
 $p = -1$ を ② に代入すると

$$-(1 - a^2 + 4b^2) = -4 \quad \text{ゆえに} \quad |a|^2 - 4|b|^2 = -3$$

$$\text{したがって} \quad (|a| + 2|b|)(|a| - 2|b|) = -3$$

条件より a, b は 0 でない整数であるから, $|a| + 2|b| \geq 3$ に注意すると

$$\begin{cases} |a| + 2|b| = 3 \\ |a| - 2|b| = -1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |a| = |b| = 1$$

a, b は, 3 の倍数でないことに注意して

$$(a, b) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$



5 $\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\bar{z} = 0$ より

$$\frac{\alpha}{2|\alpha|^2 + 1} + \frac{\bar{z}i}{|z|^2 + 2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\bar{z}}{|z|^2 + 2} = \frac{\alpha i}{2|\alpha|^2 + 1}$$

上の第2式の共役複素数は $\frac{z}{|z|^2 + 2} = \frac{-\bar{\alpha}i}{2|\alpha|^2 + 1} \quad \cdots (*)$

(i) $\alpha = 0$ のとき, $(*)$ より $z = 0$

(ii) $\alpha \neq 0$ のとき, $(*)$ より, $\frac{z}{-\bar{\alpha}i} = \frac{|z|^2 + 2}{2|\alpha|^2 + 1} = k$ とおくと ($k > 0$)

$|z| = k|\alpha|$ であるから, これを $\frac{|z|^2 + 2}{2|\alpha|^2 + 1} = k$ に代入すると

$$\frac{k^2|\alpha|^2 + 2}{2|\alpha|^2 + 1} = k \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2 k^2 - (2|\alpha|^2 + 1)k + 2 = 0$$

したがって $(k - 2)(|\alpha|^2 k - 1) = 0$ これを解いて $k = 2, \frac{1}{|\alpha|^2}$

$$\frac{z}{-\bar{\alpha}i} = k \text{ であるから } z = -2\bar{\alpha}i, \quad -\frac{\bar{\alpha}i}{|\alpha|^2}$$

(i), (ii) より $\alpha = 0$ のとき $z = 0$

$$\alpha \neq 0 \text{ のとき } z = -2\bar{\alpha}i, \quad -\frac{\bar{\alpha}i}{|\alpha|^2}$$



2.5 2019 年度

1 まず, 次の定積分を計算する.

研

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin^2 2n\pi t \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 4n\pi t) \, dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{4n\pi} \sin 4n\pi t \right]_0^1 = \frac{1}{2}, \\ \int_0^1 t \sin 2n\pi t \, dt &= \left[-\frac{t}{2n\pi} \cos 2n\pi t + \frac{1}{4n^2\pi^2} \sin 2n\pi t \right]_0^1 = -\frac{1}{2n\pi}, \\ \int_0^1 \sin 2n\pi t \, dt &= -\frac{1}{2n\pi} \left[\cos 2n\pi t \right]_0^1 = 0, \\ \int_0^1 t^2 \, dt &= \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 dt = 1\end{aligned}$$

上の結果により

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 \, dt &= \int_0^1 \sin^2 2n\pi t \, dt + x^2 \int_0^1 t^2 \, dt + y^2 \int_0^1 dt \\ &\quad - 2x \int_0^1 t \sin 2n\pi t \, dt - 2y \int_0^1 \sin 2n\pi t \, dt + 2xy \int_0^1 t \, dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 - 2x \left(-\frac{1}{2n\pi} \right) - 2y \cdot 0 + 2xy \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \frac{x}{n\pi} + xy \\ &= \left(y + \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2} \\ &= \left(y + \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(x + \frac{6}{n\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

したがって $x = -\frac{6}{n\pi}$, $y = \frac{3}{n\pi}$ のとき, $(*)$ は最小値 $I_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2}$ をとる.

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2}$

別解 $\int_0^1 dt = 1$, $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ より, $f(t) = t - \frac{1}{2}$ とおくと

$$\int_0^1 f(t) dt = 0, \quad \int_0^1 f(t)^2 dt = \frac{1}{3} \left[\left(t - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$\int_0^1 \sin 2n\pi t dt = 0, \quad \int_0^1 t \sin 2n\pi t dt = -\frac{1}{2n\pi} \text{ より}$$

$$\int_0^1 f(t) \sin 2n\pi t dt = -\frac{1}{2n\pi} = -\frac{6}{n\pi} \cdot \frac{1}{12} = -\frac{6}{n\pi} \int_0^1 f(t)^2 dt$$

$$\text{したがって} \quad \int_0^1 f(t) \left\{ \sin 2n\pi t + \frac{6}{n\pi} f(t) \right\} dt = 0$$

$$g(t) = \sin 2n\pi t + \frac{6}{n\pi} f(t) \text{ とおくと} \quad \int_0^1 f(t)g(t) dt = 0$$

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 \sin 2n\pi t dt + \frac{6}{n\pi} \int_0^1 f(t) dt = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t)^2 dt &= \int_0^1 \sin^2 2n\pi t dt + \frac{12}{n\pi} \int_0^1 f(t) \sin 2n\pi t dt + \frac{36}{n^2\pi^2} \int_0^1 f(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{12}{n\pi} \left(-\frac{1}{2n\pi} \right) + \frac{36}{n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

$$\sin 2n\pi t = -\frac{6}{n\pi} f(t) + g(t), \quad t = f(t) + \frac{1}{2} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \sin 2n\pi t - xt - y &= -\frac{6}{n\pi} f(t) + g(t) - x \left(f(t) + \frac{1}{2} \right) - y \\ &= -\left(x + \frac{6}{n\pi} \right) f(t) + g(t) - \left(\frac{x}{2} + y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sin 2n\pi t - xt - y)^2 dt &= \left(x + \frac{6}{n\pi} \right)^2 \int_0^1 f(t)^2 dt + \int_0^1 g(t)^2 dt + \left(\frac{x}{2} + y \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \left(x + \frac{6}{n\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} + \left(\frac{x}{2} + y \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} = I_n \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2}$$



- 2 (1) 2つの整式 $f(x)$, $g(x)$ が満たす恒等式

$$(*) \begin{cases} f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7 \\ g(x^3) = x^4f(x) - 3x^2g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により, $f(x)$, $g(x)$ の次数をそれぞれ m , n とする. $(*)$ の第 1 式から, $f(x)$ と $g(x)$ の最高次の係数が等しいことに注意して

$$\begin{cases} 2m = 2 + n & \cdots \textcircled{1} \\ 3n = \max(4 + m, 2 + n) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(i) $4 + m \geq 2 + n$ のとき, $\textcircled{2}$ より $3n = 4 + m$ ゆえに $m = 3n - 4$
これと $\textcircled{1}$ を条件に注意して解くと $m = n = 2$

(ii) $4 + m < 2 + n$ のとき, $\textcircled{2}$ より $3n = 2 + n$ ゆえに $n = 1$
これを $\textcircled{1}$ に代入すると, $m = \frac{3}{2}$ となり, 不適.

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから, 題意は成立する.

- (2) $(*)$ の第 1 式において, x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(-x) + 7$$

これと $(*)$ の第 1 式により $g(-x) = g(x)$ $\cdots \textcircled{3}$

また, $(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4f(-x) - 3x^2g(-x) - 6x^2 - 2$$

$\textcircled{3}$ より, $g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4f(-x) - 3x^2g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より $f(-x) = f(x)$

また, $(*)$ に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0) + 7, \quad g(0) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 3$$

以上の結果から, $f(x) = ax^2 + 3$, $g(x) = ax^2 - 2$ とおくと, $(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4 + 3 = (x^2 + 2)(ax^2 - 2) + 7 \\ ax^6 - 2 = x^4(ax^2 + 3) - 3x^2(ax^2 - 2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\text{整理すると} \quad \begin{cases} 2(a-1)x^2 = 0 \\ -3(a-1)x^4 = 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad a = 1$$

よって $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^2 - 2$ ■

- 3 (1) 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \cdots (*)$ の解 z_1, z_2 が $z_1 = z_2$, すなわち, 2次方程式 $(*)$ が重解をもつ確率である. 係数について, $b^2 - 4ac = 0$ であるから, $b^2 = 4ac$ より

$$b = 2 \text{ のとき, } ac = 1 \text{ より } (a, c) = (1, 1)$$

$$b = 4 \text{ のとき, } ac = 4 \text{ より } (a, c) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$$

$$b = 6 \text{ のとき, } ac = 9 \text{ より } (a, c) = (3, 3)$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{1+3+1}{6^3} = \frac{5}{216}$$

- (2) (i) 2次方程式 $(*)$ が単位円周上に実数解をもつとき, その解は1ではないから, $(*)$ は -1 を重解にもち, その方程式は

$$a(x+1)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2a, \quad c = a$$

これを満たす (a, b, c) の組は, 次の3組である.

$$(a, b, c) = (1, 2, 1), (2, 4, 2), (3, 6, 3)$$

- (ii) 2次方程式 $(*)$ が単位円周上に虚数解をもつとき $b^2 - 4ac < 0 \cdots \textcircled{1}$
 $(*)$ の解と係数の関係および $z_2 = \bar{z}_1, |z_1| = 1$ に注意して

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad \text{ゆえに} \quad |z_1|^2 = \frac{c}{a} \quad \text{すなわち} \quad c = a \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して } b^2 - 4a^2 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b}{2} < a = c$$

$$b = 1 \text{ のとき} \quad a = c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$b = 2, 3 \text{ のとき} \quad a = c = 2, 3, 4, 5, 6$$

$$b = 4, 5 \text{ のとき} \quad a = c = 3, 4, 5, 6$$

$$b = 6 \text{ のとき} \quad a = c = 4, 5, 6$$

これらの (a, b, c) の組の総数は $6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 = 27$ 組

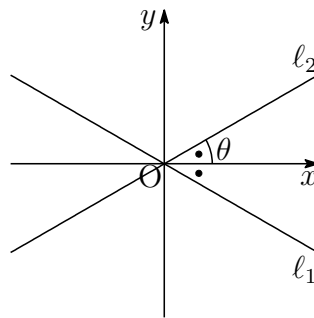
$$\text{よって, 求める確率は } \frac{3+27}{6^3} = \frac{5}{36}$$

(3) 条件を満たす z_1, z_2 は虚数であるから

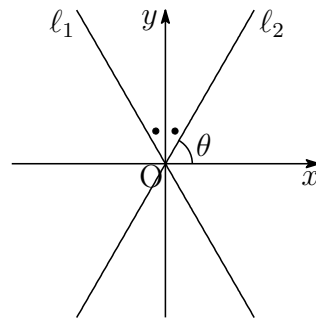
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$$

$$\ell_2 \text{ の偏角を } \theta \text{ とすると } \tan \theta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{b}$$

$$(i) \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$(ii) \tan \theta = \sqrt{3}$$



$$(i) \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき, } \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より}$$

$$\sqrt{3(4ac - b^2)} = b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 3ac$$

$$b = 3 \text{ のとき, } ac = 3 \text{ より } (a, c) = (1, 3), (3, 1)$$

$$b = 6 \text{ のとき, } ac = 12 \text{ より } (a, c) = (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$$

これらの (a, b, c) の組の総数は $2 + 4 = 6$ 組

$$(ii) \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき, } \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} = \sqrt{3} \text{ より}$$

$$\sqrt{4ac - b^2} = \sqrt{3}b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = ac$$

$$b = 1 \text{ のとき, } ac = 1 \text{ より } (a, c) = (1, 1)$$

$$b = 2 \text{ のとき, } ac = 4 \text{ より } (a, c) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$$

$$b = 3 \text{ のとき, } ac = 9 \text{ より } (a, c) = (3, 3)$$

$$b = 4 \text{ のとき, } ac = 16 \text{ より } (a, c) = (4, 4)$$

$$b = 5 \text{ のとき, } ac = 25 \text{ より } (a, c) = (5, 5)$$

$$b = 6 \text{ のとき, } ac = 36 \text{ より } (a, c) = (6, 6)$$

これらの (a, b, c) の組の総数は $5 \cdot 1 + 3 = 8$ 組

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{6 + 8}{6^3} = \frac{7}{108}$$

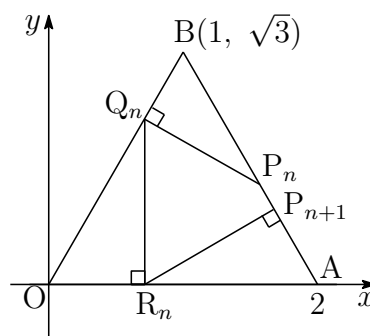


4 点 $P_n(x_n, y_n)$ を通り、直線 OB に垂直な直線は

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$

これと直線 $OB: y = \sqrt{3}x$ の交点の x 座標は

$$\sqrt{3}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$



これを解くことにより、点 Q_n の x 座標は $x = \frac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$

次に、点 $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ を通り、直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

これを解くことにより、点 R_n の x 座標は $x = x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1}$

点 Q_n と点 R_n の x 座標は等しいから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$$

2 点 P_n, P_{n+1} は直線 $AB: y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 上の点であるから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_{n+1} + 2\sqrt{3}) = \frac{x_n + \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3})}{4}$$

整理すると $x_{n+1} = -\frac{1}{8}x_n + \frac{15}{8}$ ゆえに $x_{n+1} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{8}\left(x_n - \frac{5}{3}\right)$

数列 $\left\{x_n - \frac{5}{3}\right\}$ は初項 $x_1 - \frac{5}{3}$ 、公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$x_n - \frac{5}{3} = \left(x_1 - \frac{5}{3}\right) \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{5}{3}$$

また $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3} \cdot \frac{5}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

よって、求める点の座標は $\left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ■

5

$$C: w = \frac{az + b}{cz + 1} \quad \cdots (*)$$

研

条件 (ア) により $i = \frac{ai + b}{ci + 1}, \quad -i = \frac{a(-i) + b}{c(-i) + 1}$

ゆえに $b + c + (a - 1)i = 0, \quad b + c - (a - 1)i = 0$

上の 2 式から $a = 1, \quad b = -c$

これを (*) に代入すると $w = \frac{z - c}{cz + 1} \cdots \textcircled{1}$ ゆえに $z = -\frac{w + c}{cw - 1}$

点 z は虚軸全体を動くから, $z + \bar{z} = 0$ より $-\frac{w + c}{cw - 1} - \frac{\bar{w} + \bar{c}}{\bar{c}\bar{w} - 1} = 0$

整理すると $(c + \bar{c})|w|^2 + (|c|^2 - 1)(w + \bar{w}) - (c + \bar{c}) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

条件 (イ) に注意すると, $\textcircled{1}$ により $c \neq 0$

さらに, c は純虚数ではないから $c + \bar{c} \neq 0$

$k = \frac{|c|^2 - 1}{c + \bar{c}} \cdots \textcircled{3}$ とおいて (k は実数), $\textcircled{2}$ に適用すると

$$|w|^2 + k(w + \bar{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w + k|^2 = k^2 + 1$$

条件 (イ) により $k^2 + 1 = 1$ ゆえに $k = 0$ よって $|w| = 1 \quad \cdots (**)$

また, $\textcircled{3}$ により $|c|^2 - 1 = 0$ ゆえに $c = \pm 1$

(i) $c = 1$ のとき, $\textcircled{1}$ により

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{ゆえに} \quad w + 1 = \frac{2z}{z + 1}$$

$z = 0$ のとき, $w = -1$ となり, 条件 (ウ) に反する.

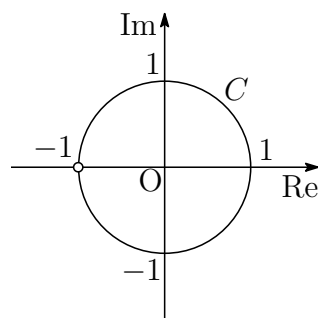
(ii) $c = -1$ のとき, $\textcircled{1}$ により

$$w = \frac{z + 1}{-z + 1} \quad \text{ゆえに} \quad w + 1 = \frac{2}{-z + 1} \neq 0$$

これは, 条件 (ウ) を満たす.

よって $a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1$

(**) および $w \neq -1$ により, C の概形は右の図のようになる.



2.6 2020年度

1 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ より $y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$

曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ 上の点 $(t, e^{-t} - e^{-2t})$ における接線の方程式は

$$y - (e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(x - t)$$

この直線が点 $(a, 0)$ を通るから

$$-(e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(a - t)$$

したがって $(e^t - 2)(a - t) = (e^t - 1) \cdots (*)$

$e^t - 2 = 0$, すなわち, $t = \log 2$ は, $(*)$ は満たさない.

$t \neq \log 2$ のとき, $(*)$ から

$$a - t = \frac{e^t - 1}{e^t - 2} \quad \text{ゆえに} \quad a = t + 1 + \frac{1}{e^t - 2}$$

$f(t) = t + 1 + \frac{1}{e^t - 2}$ とおくと

$$f'(t) = 1 - \frac{e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 2)^2 - e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 1)(e^t - 4)}{(e^t - 2)^2}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$(\log 2)$	$\cdots$	$2 \log 2$	$\cdots$
$f'(t)$	+	0	-		-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{3}{2} + 2 \log 2$	$\nearrow$

このとき $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$
 $\lim_{t \rightarrow \log 2 - 0} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \log 2 + 0} f(t) = \infty,$

したがって, $f(t)$ のとり得る値の範囲は $f(t) \leq 0, \quad \frac{3}{2} + 2 \log 2 \leq f(t)$

よって, 求める a の値の範囲は $a \leq 0, \quad \frac{3}{2} + 2 \log 2 \leq a$ ■

- 2 (1) $w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x) = 0$ の解であるから,
 $f(x)$ は, $(x - w)(x - \bar{w})$, すなわち, $x^2 - x + 1$ を因数にもつ.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + ax^2 + bx^2 + cx + d \\ &= (x^2 - x + 1)\{x^2 + (a+1)x + a+b\} \\ &\quad + (b+c-1)x - a - b + d \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad b+c-1=0, \quad -a-b+d=0$$

$$\text{よって} \quad c=1-b, \quad d=a+b$$

$$(2) (1) \text{の結果から} \quad f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + (1-b)x + a+b$$

$$\text{ゆえに} \quad f(1) = 2a+b+2, \quad f(-1) = 3b$$

$f(1), f(-1)$ を 7 で割った余りが, それぞれ 1, 3 であるから

$$2a+b+2 \equiv 1, \quad 3b \equiv 3 \pmod{7}$$

上の第 2 式から $b \equiv 1 \pmod{7}$ これを第 1 式に代入すると

$$2a+1+2 \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \equiv -1 \pmod{7}$$

$f(1), f(-1)$ を 11 で割った余りが, ともに 10 であるから

$$2a+b+2 \equiv 10, \quad 3b \equiv 10 \pmod{11}$$

上の第 2 式から $b \equiv 7 \pmod{11}$ これを第 1 式に代入すると

$$2a+7+2 \equiv 10 \quad \text{ゆえに} \quad 2a \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\text{さらに} \quad 6 \cdot 2a \equiv 6 \cdot 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \equiv 6 \pmod{11}$$

$$\text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} a \equiv -1 \pmod{7} \\ a \equiv 6 \pmod{11} \end{cases} \quad (**) \begin{cases} b \equiv 1 \pmod{7} \\ b \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$$

(*) の第 1 式から, $a = -1 + 7k$ とおき (k は整数), これを (*) の第 2 式に代入すると

$$-1 + 7k \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad k \equiv 1 \pmod{11}$$

$k = 1 + 11\ell$ とおくと (ℓ は整数)

$$a = -1 + 7(1 + 11\ell) = 6 + 77\ell$$

a の絶対値が 40 以下であるから, $\ell = 0$ より $a = 6 \quad \cdots \textcircled{1}$

(**) の第2式から, $b = 7 + 11m$ とおき (m は整数), これを (**) の第1式に代入すると

$$7 + 11m \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 4m \equiv 1 \quad \text{したがって} \quad m \equiv 2 \pmod{7}$$

$m = 2 + 7n$ とおくと (n は整数)

$$b = 7 + 11(2 + 7n) = 29 + 77n$$

b の絶対値が 40 以下であるから, $n = 0$ より $b = 29 \quad \dots \textcircled{2}$

(1) の結果から

$$f(x) = (x^2 - x + 1)\{x^2 + (a + 1)x + a + b\}$$

①, ② をこれに代入して

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 7x + 35)$$

$f(x) = 0$ の解は, $x^2 - x + 1 = 0$, $x^2 + 7x + 35 = 0$ を解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-7 \pm \sqrt{91}i}{2}$$

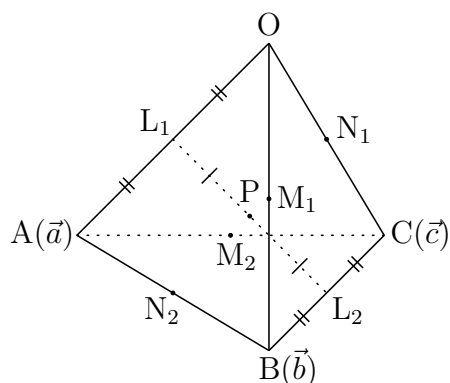
$$\text{補足 } (*) \begin{cases} a \equiv -1 \pmod{7} \\ a \equiv 6 \pmod{11} \end{cases} \quad (**) \begin{cases} b \equiv 1 \pmod{7} \\ b \equiv 7 \pmod{11} \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} a - 6 \equiv 0 \pmod{7} \\ a - 6 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \quad \begin{cases} b - 29 \equiv 0 \pmod{7} \\ b - 29 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

したがって $a - 6 \equiv 0$, $b - 29 \equiv 0 \pmod{77}$

a, b の絶対値がともに 40 以下であるから $a = 6$, $b = 29$ ■

- 3** (1) 点 O を始点とし, 3 点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とする. 線分 OA, OB, OC の中点をそれぞれ L_1 , M_1 , N_1 とし, 線分 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L_2 , M_2 , N_2 とすると **研**



$$\begin{aligned}\overrightarrow{2L_1L_2} &= \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}, \\ \overrightarrow{2M_1M_2} &= \vec{c} + \vec{a} - \vec{b}, \\ \overrightarrow{2N_1N_2} &= \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

直線 L_1L_2 , M_1M_2 , N_1N_2 はそれぞれ直線 ℓ , m , n であるから, $\ell \perp m$ より, $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$ であるから

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{2L_1L_2}) \cdot (\overrightarrow{2M_1M_2}) &= (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} + \vec{a} - \vec{b}) \\ &= |\vec{c}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$m \perp n$, $n \perp \ell$ であるから, 同様にして

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{2M_1M_2}) \cdot (\overrightarrow{2N_1N_2}) &= (\vec{c} + \vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{c} - \vec{b}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{2N_1N_2}) \cdot (\overrightarrow{2L_1L_2}) &= (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{c}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

①~③ より

$$\begin{aligned}|\vec{c}| &= |\vec{b} - \vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{5} \\ |\vec{a}| &= |\vec{c} - \vec{b}| = |\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{3} \\ |\vec{b}| &= |\vec{a} - \vec{c}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = 2\end{aligned}$$

①~③ をそれぞれ整理すると

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = 3 + 4 - 5 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$2\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 = 4 + 5 - 3 = 6 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$

$$2\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 5 + 3 - 4 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 2$$

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ と $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$ のなす角を φ とすると ($0 \leq \varphi \leq \pi$)

$$\cos \varphi = \frac{\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c})}{|\vec{b}| |\vec{a} - \vec{c}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1 - 3}{2^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

よって, 直線 OB と直線 CA のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) は

$$\theta = \pi - \varphi = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \overrightarrow{OA} \cdot (2\overrightarrow{L_1L_2}) &= \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} - |\vec{a}|^2 = 1 + 2 - 3 = 0 \\
 \overrightarrow{BC} \cdot (2\overrightarrow{L_1L_2}) &= (\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} \\
 &= 5 - 4 + 1 - 2 = 0
 \end{aligned}$$

したがって $OA \perp L_1L_2$, $BC \perp L_1L_2$

2点 L_1 , L_2 の中点を P とすると $PO = PA = PB = PC$

点 P は、四面体 $OABC$ の4頂点を通る球面の中心である。したがって

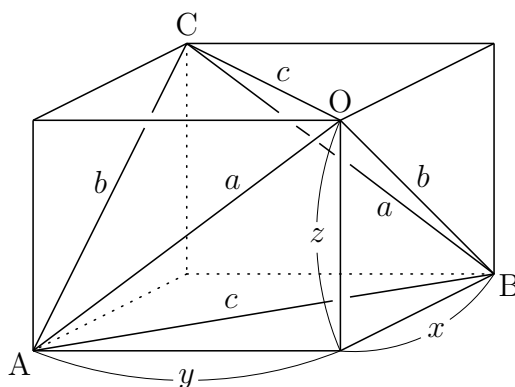
$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OL_1} + \overrightarrow{OL_2}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \right\} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\begin{aligned}
 \text{このとき } |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\
 &= 3 + 4 + 5 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 24
 \end{aligned}$$

$$\text{よって、求める半径は } \frac{1}{4}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \frac{1}{4}\sqrt{24} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

補足 四面体 $OABC$ のすべての面が合同である四面体を等面四面体という。
 $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$ とすると、直方体の縦、横、高さがそれぞれ x , y , z で

$$\begin{aligned}
 y^2 + z^2 &= a^2 \\
 z^2 + x^2 &= b^2 \\
 x^2 + y^2 &= c^2
 \end{aligned}$$



を満たすものが唯一存在する。

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad y^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

したがって、等面四面体はこの直方体に埋め込まれ、求める球面の半径はこの長方形に外接する球面の半径 R に等しい。

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



- 4 (1) X が 5 で割り切れない, すなわち, 4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0 , X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{625}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \frac{19}{144}$$

- (2) X が 2 で割り切れない, すなわち, 4 回とも奇数の目が出る確率を q_0 , X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \frac{37}{48}$$

- (3) X が 100 の倍数となるは, 出る目の組合せが次の (i)~(iv) の場合である.

- (i) $\{A, A, 5, 5\}$ のとき ($A = 2, 6$)

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

- (ii) $\{4, 5, 5, B\}$ のとき ($B = 1, 2, 3, 6$)

$$\frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

- (iii) $\{4, 4, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

- (iv) $\{4, 5, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

- (i)~(iv) より, 求める確率は $\frac{24 + 48 + 6 + 4}{1296} = \frac{82}{1296} = \frac{41}{648}$ ■

5 (1) T の表す領域は

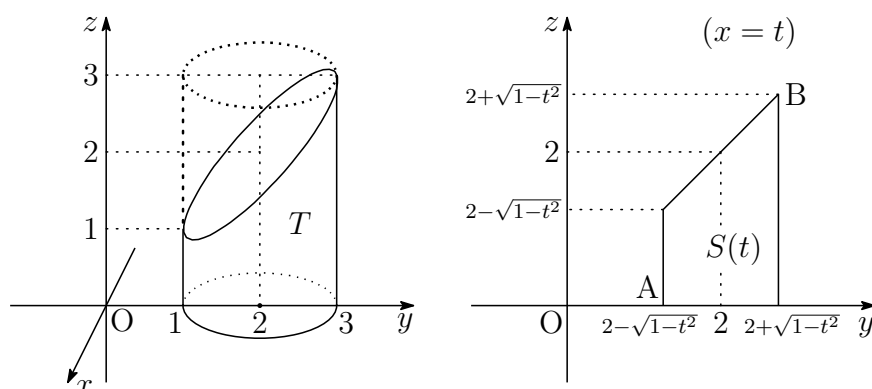
$$x^2 + (y-2)^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq y$$

T を平面 $x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ったときの断面を表す領域は

$$x = t, \quad 2 - \sqrt{1-t^2} \leq y \leq 2 + \sqrt{1-t^2}, \quad 0 \leq z \leq y$$

右下の図で中央の z 座標が 2 であることに注意して

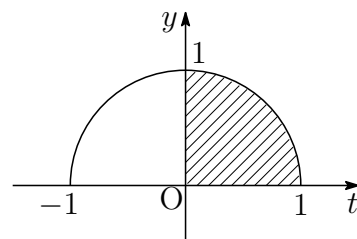
$$S(t) = 2\{(2 + \sqrt{1-t^2}) - (2 - \sqrt{1-t^2})\} = 4\sqrt{1-t^2}$$



右の図の斜線部分の面積は

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$$

よって、求める T の体積を V_1 とすると



$$V_1 = \int_{-1}^1 S(t) dt = \int_{-1}^1 4\sqrt{1-t^2} dt = 8 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = 8 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

(2) 2点 A, B を (1) の図のようにとると

$$OA = 2 - \sqrt{1-t^2}, \quad OB = \sqrt{2}(2 + \sqrt{1-t^2})$$

求める立体の体積を V_2 とすると, T が yz 平面に関して対称であるから

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{2\pi} &= \int_0^1 (OB^2 - OA^2) dt = \int_0^1 \{2(2 + \sqrt{1-t^2})^2 - (2 - \sqrt{1-t^2})^2\} dt \\ &= \int_0^1 (5 - t^2) dt + 12 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \left[5t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 + 12 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{14}{3} + 3\pi \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V_2 = 2\pi \left(\frac{14}{3} + 3\pi \right)$$

■

2.7 2021 年度

- 1 (1) 四面体 OABC に内接する球の中心を I, 半径を d とすると, I から xy 平面, yz 平面, zx 平面, 平面 ABC までの距離はともに d であり, $I(d, d, d)$ とおける ($d > 0$). $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}, \\ \triangle OBC &= \triangle OCA = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2) \text{ より}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 5 - 1^2} = \frac{3}{2}$$

したがって, 四面体 OABC の表面積を S , 体積を V とすると

$$S = \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{3}{2} = 4, \quad V = \frac{1}{3} \triangle OAB \cdot OC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

上の結果を $V = \frac{1}{3} Sd$ に代入すると

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4d \quad \text{ゆえに} \quad d = \frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad I\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

- (2) 条件を満たす球を S' とし, S' の中心を $I'(r, r, r)$, 半径を r とする ($r > 0$). $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (2, 2, 1)$$

とおき, I' から平面 ABC に垂線 $I'H$ を引くと

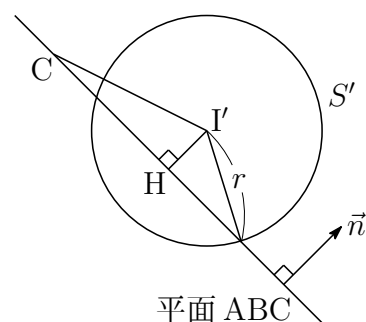
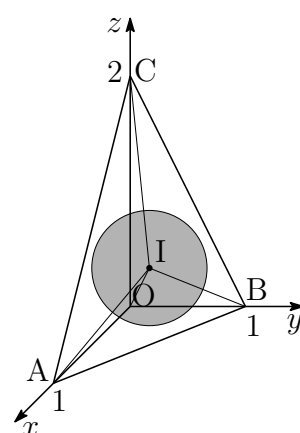
$$\overrightarrow{CI'} = (r, r, r-2)$$

$$\text{したがって} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{CI'} = 2r + 2r + r - 2 = 5r - 2$$

$$\overrightarrow{CI'} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HI'}, \quad \vec{n} \perp \overrightarrow{CH} \text{ であるから} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{HI'} = 5r - 2$$

$$\vec{n} \parallel \overrightarrow{HI'} \text{ であるから} \quad |\vec{n}| |\overrightarrow{HI'}| = |5r - 2|$$

$$|\overrightarrow{HI'}| = \frac{|5r - 2|}{|\vec{n}|} = \frac{|5r - 2|}{3}$$



S' が平面 ABC と共有点をもつとき, $|HI'| \leq r$ であるから

$$\frac{|5r-2|}{3} \leq r \quad \text{ゆえに} \quad -3r \leq 5r-2 \leq 3r$$

これを解いて $\frac{1}{4} \leq r \leq 1 \quad \dots \textcircled{1}$

S' と平面 ABC が交わってできる円の半径を R とすると

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 - |\overrightarrow{HI'}|^2 = r^2 - \left(\frac{|5r-2|}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{9}(16r^2 - 20r + 4) \\ &= -\frac{16}{9}\left(r - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

① に注意すると, $r = \frac{5}{8}$ のとき, R^2 の最大値は $\frac{1}{4}$

よって, 求める円の面積の最大値は $\frac{\pi}{4}$

補足 $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$ の外積 (ベクトル積) は ¹

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (1 \cdot 2 - 0 \cdot 0, 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2, -1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) \\ &= (2, 2, 1) \end{aligned}$$

は $\overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{AC}$ に直交する.

3 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2) を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad 2x + 2y + z - 2 = 0$$

この平面の法ベクトルは ² $\vec{n} = (2, 2, 1)$

点 $I'(r, r, r)$ から平面 $2x + 2y + z - 2 = 0$ までの距離は

$$\frac{|2r + 2r + r - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|5r - 2|}{3}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.179 (物理ページ p.184))

²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.171 (物理ページ p.176))

2 (1) x の 2 次方程式

$$x^2 - (4 \cos \theta)x + \frac{1}{\tan \theta} = 0 \quad \dots (*)$$

が実数解をもたないから、係数について

$$D/4 = (2 \cos \theta)^2 - \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\tan \theta} (4 \sin \theta \cos \theta - 1) = \frac{2 \sin 2\theta - 1}{\tan \theta} < 0$$

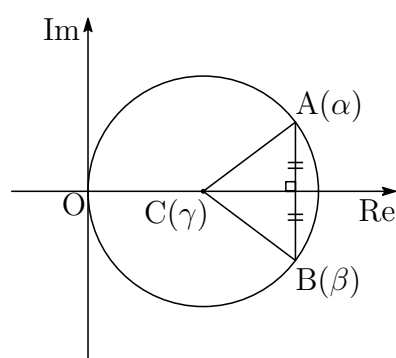
$$0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ に注意して解くと } 0 < 2\theta < \frac{\pi}{6} \text{ よって } 0 < \theta < \frac{\pi}{12}$$

(2) 2 次方程式 (*) の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 4 \cos \theta, \quad \alpha\beta = \frac{1}{\tan \theta}$$

α, β は互いに共役で、中心 $C(\gamma)$ は A, B の垂直二等分線上、すなわち、実軸上の点であるから、 γ は実数である。

$$OC = AC \text{ より } |\gamma| = |\gamma - \alpha|$$



$$\gamma^2 = (\gamma - \alpha)(\gamma - \bar{\alpha}) = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$$

$$\text{整理すると } (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\beta$$

$$\text{よって } \gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{1}{4 \cos \theta \tan \theta} = \frac{1}{4 \sin \theta}$$

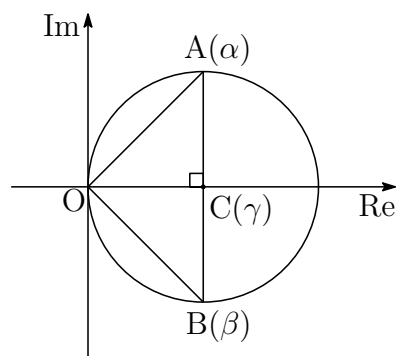
(3) $OC = AC$ より、 $\triangle OAC$ が直角三角形であるとき、 $\angle OCA = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち、 C は AB の中点であるから、 $\frac{\alpha + \beta}{2} = \gamma$ より、(2) の結果から

$$\frac{4 \cos \theta}{2} = \frac{1}{4 \sin \theta} \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \text{ であるから}$$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2 \theta - 8 \tan \theta + 1 = 0$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ より, } 0 < \tan \theta < 1 \text{ に注意して } \tan \theta = 4 - \sqrt{15}$$



- 3 (1) $f(t) = e^t - xt - y$ とおく. 条件(*)をみたすとき, すべての実数 t に対して

$$f(t) \geq 0 \quad (\text{A})$$

をみたす点 (x, y) の集合を求めればよい.

- (i) $x < 0$ のとき

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^t - xt - y) = -\infty$$

このとき, (A) をみたさない.

- (ii) $x = 0$ のとき, $f(t) = e^t - y$ は, 単調増加であるから

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^t - y) = -y \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \leq 0$$

- (iii) $x > 0$ のとき, $f'(t) = e^t - x$ より

t	$\cdots$	$\log x$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

極小値 $f(\log x) = x - x \log x - y$ であるから, (A) をみたすとき

$$x - x \log x - y \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \leq x - x \log x$$

- (i)~(iii) より

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x - x \log x & (x > 0) \end{cases}$$

とおくと, 条件(*)をみたす点 (x, y) は

$$x \geq 0 \quad \text{かつ} \quad y \leq g(x)$$

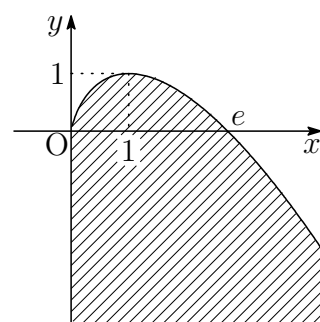
$$x > 0 \text{ のとき } g'(x) = -\log x, \quad g''(x) = -\frac{1}{x} < 0$$

したがって, $x \geq 0$ における $g(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g''(x)$		$-$	$-$	$-$
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$$

よって, 点 (x, y) 全体の集合は, 右上の図の斜線部分で境界線を含む.



(2) 求める立体の体積を V とすると

研

$$\frac{V}{\pi} = \int_1^e x^2(1 - \log x)^2 dx$$

$$x = e^t \text{ とおくと } \frac{dx}{dt} = e^t \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \longrightarrow e \\ \hline t & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 (e^t)^2(1-t)^2 \cdot e^t dt = \int_0^1 e^{3t}(t-1)^2 dt \\ &= \frac{1}{3} \left[e^{3t} \left\{ (t-1)^2 - \frac{\{(t-1)^2\}'}{3} + \frac{\{(t-1)^2\}''}{3^2} \right\} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \left[e^{3t} \left\{ (t-1)^2 - \frac{2(t-1)}{3} + \frac{2}{9} \right\} \right]_0^1 = \frac{2e^3}{27} - \frac{17}{27} \end{aligned}$$

$$\text{よって } V = \frac{\pi(2e^3 - 17)}{27}$$

補足 対数型から指数型の積分に置換すると、次の積分公式が利用できる³.

$$\int e^{px+q} f(x) dx = \frac{e^{px+q}}{p} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots \right\} + C$$

補足 まず、 $0 < x \leq 1$ のとき、 $-\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す.

$$h(x) = \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (0 < x \leq 1) \text{ とおくと}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$h(x)$ は単調減少で、 $h(1) = 2$ であるから

$$h(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\text{よって} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$$

$$\text{したがって} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad -2\sqrt{x} < x \log x < 0$$

$\lim_{x \rightarrow +0} (-2\sqrt{x}) = 0$ であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

³<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-math.2015-kouki.pdf> (p.7)

- 4 (1) $n = 2$ のとき, $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $f'(x) = 2a_2x + a_1$

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{a_2(\beta^2 - \alpha^2) + a_1(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = a_2(\alpha + \beta) + a_1$$

$$f'(\gamma) = 2a_2\gamma + a_1$$

γ を複素数平面上の 2 点 α , β の中点, すなわち, $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ とすると

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

よって, どのような α , β , $f(x)$ も平均値の性質をもつ.

- (2) $\alpha = 1 - i$, $\beta = 1 + i$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \frac{\beta^3 - \alpha^3 + a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} \\ &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + a(\alpha + \beta) + b \\ &= 2 + 2a + b \end{aligned}$$

γ は, 複素数平面上の線分 α , β 上の点であるから

$$\gamma = 1 + ti \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(\gamma) &= 3(1 + ti)^2 + 2a(1 + ti) + b \\ &= 3 - 3t^2 + 2a + b + 2t(3 + a)i \end{aligned}$$

平均値の性質をもつとき

$$2 + 2a + b = 3 - 3t^2 + 2a + b + 2t(3 + a)i$$

整理すると $1 - 3t^2 = 0$ かつ $2t(3 + a) = 0$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{ に注意して } t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, a = -3$$

このとき, 平均値の性質をもつ.

よって, 実数 a , b , c に関する必要十分条件は

$$a = -3, 2 \text{ 数 } b, c \text{ は任意の実数}$$

$$(3) \alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}, \quad \beta = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \text{ より}$$

$$\alpha^7 = \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)^7 = \cos \frac{7}{4}\pi - i \sin \frac{7}{4}\pi = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \beta$$

$$\beta^7 = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^7 = \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi = \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = \alpha$$

$f(x) = x^7$, $f'(x) = 7x^6$ について

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta^7 - \alpha^7}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} = -1, \quad f'(\gamma) = 7\gamma^6 \quad (*)$$

$$\arg \alpha = -\frac{\pi}{4}, \quad \arg \beta = \frac{\pi}{4} \text{ であるから } -\frac{\pi}{4} \leq \arg \gamma \leq \frac{\pi}{4}$$

平均値の性質をもつと仮定すると, $\arg(7\gamma^6) = \arg(-1)$ であるから

$$6 \arg \gamma = \pm \pi \quad \text{ゆえに} \quad \arg \gamma = \pm \frac{\pi}{6}$$

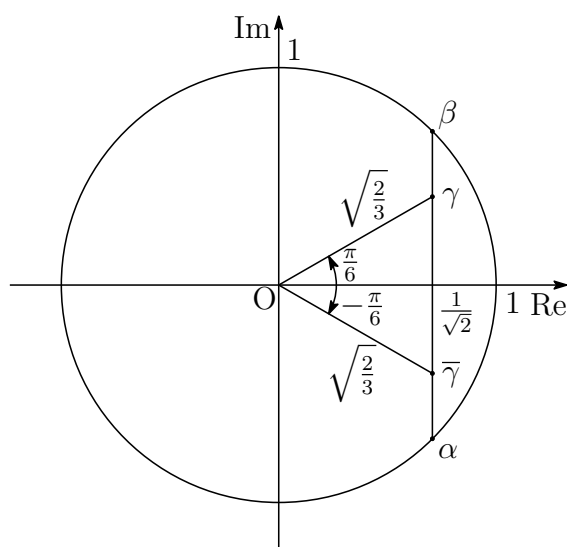
これをみたす 2 点 α , β を結ぶ線分上の点 γ について

$$|\gamma| = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$|7\gamma^6| = 7 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^6 = \frac{56}{27} \neq |-1|$$

上の第 2 式から, $7\gamma^6 \neq -1$ となり, 平均値の性質に反する.

よって, $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $f(x) = x^7$ は, 平均値の性質をもたない.



5 (1) (i) $2 \leq k \leq n-k \leq n-2$ のとき, $\frac{n-j}{j} \geq 1$ であるから ($j = 1, 2, \dots, k$)

$$\begin{aligned} {}_nC_k &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} \\ &> n \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} \cdots \frac{n-k}{k} \\ &\geq n \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = n \end{aligned}$$

(ii) $2 \leq n-k \leq k \leq n-2$ のとき, $k' = n-k$ とおくと

$$2 \leq k' \leq n-k' \leq n-2$$

(i) の結果から ${}_nC_{k'} > n$ ゆえに ${}_nC_k > n$

(i),(ii) より, 自然数 n, k が $2 \leq k \leq n-2$ をみたすとき

$${}_nC_k > n$$

(2) $2 \leq k \leq n-2$ について

$${}_nC_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = p \quad (*)$$

が成立するとき, 素数 p は $n, n-1, \dots, n-k+1$ のいずれかの因数で

$${}_nC_k = p \leq n$$

これは, (1) の結論に反する.

$k=0, n$ のとき, $(*)$ は成立しないから, $k=1, n-1$ より

$${}_nC_1 = {}_nC_{n-1} = p$$

よって $(n, k) = (p, 1), (p, p-1)$

2.8 2022 年度

- 1 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (2, 1, 2)$
 $\vec{n} = (x, y, z)$ とおくと, $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ であるから

$$x + y = 0, \quad 2x + y + 2z = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = -x, \quad z = -\frac{1}{2}x$$

$$\vec{n} = \left(x, -x, -\frac{1}{2}x\right), \quad |\vec{n}|^2 = 1 \text{ であるから}$$

$$x^2 + x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2 = 4$$

$$x > 0 \text{ に注意して } x = \frac{2}{3} \quad \text{よって} \quad \vec{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

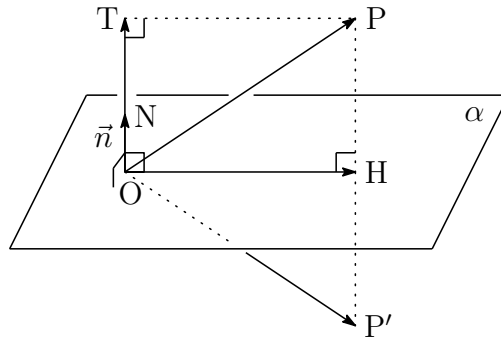
- (2) $\overrightarrow{ON} = \vec{n}$ とし, P から平面 α および直線 ON に引いた垂線の交点をそれぞれ H, T とすると

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OT}, \quad \overrightarrow{OT} = (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (*)$$

$$\overrightarrow{OP} = (4, 0, -1) \text{ より, } \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = 3 \text{ であるから } \overrightarrow{OT} = (2, -2, -1)$$

これと (*) の第 1 式により, $\overrightarrow{OH} = (2, 2, 0)$ であるから

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP'} = \overrightarrow{OH} + (-\overrightarrow{OT}) = (0, 4, 1) \quad \text{よって} \quad P'(0, 4, 1)$$



- (3) $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = 3 > 0$, $Q(4, 0, 5)$ より, $\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{n} = 1 > 0$ であるから, P, Q は平面 α に関して同じ側にある. このとき, $PR : RQ = P'R : RQ = 3 : 1$ であるから, R は線分 $P'Q$ を $3 : 1$ に内分する点である.

$$\left(\frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 4}{3 + 1}, \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 0}{3 + 1}, \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 5}{3 + 1}\right) \quad \text{すなわち} \quad R(3, 1, 4)$$

別解 $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = 3 > 0$, $Q(4, 0, 5)$ より, $\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{n} = 1 > 0$ であるから, P, Q は平面 α に関して同じ側にある. このとき点 R は, 2 点 $P'(0, 4, 1), Q(4, 0, 5)$ を通る直線上にある.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP'} + t\overrightarrow{P'Q} \quad (t \text{ は実数}) \\ &= (0, 4, 1) + t(4, -4, 4) \\ &= (4t, 4 - 4t, 1 + 4t)\end{aligned}$$

点 R は平面 α 上にあるから, $\overrightarrow{OR} \cdot \vec{n} = 0$ より

$$\frac{2}{3} \cdot 4t - \frac{2}{3}(4 - 4t) - \frac{1}{3}(1 + 4t) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{3}{4}$$

したがって $\overrightarrow{OR} = (3, 1, 4)$ よって $\mathbf{R}(3, 1, 4)$

2 (1) x^n を $x - \alpha$ で割った商を $Q_1(x)$, 余りを C とすると

$$x^n = (x - \alpha)Q_1(x) + C$$

$Q_1(x)$ を $x - \beta$ で割った商を $Q_2(x)$, 余りを B とすると

$$Q_1(x) = (x - \beta)Q_2(x) + B$$

$Q_2(x)$ を $x - \beta$ で割った商を $Q(x)$, 余りを A とすると

$$Q_2(x) = (x - \beta)Q(x) + A$$

したがって

$$\begin{aligned}x^n &= (x - \alpha)Q_1(x) + C \\ &= (x - \alpha)\{(x - \beta)Q_2(x) + B\} + C \\ &= (x - \alpha)(x - \beta)Q_2(x) + B(x - \alpha) + C \\ &= (x - \alpha)(x - \beta)\{(x - \beta)Q(x) + A\} + B(x - \alpha) + C \\ &= (x - \alpha)(x - \beta)^2Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C \quad (*)\end{aligned}$$

(2) $x = \alpha$ を (*) に代入すると $C = \alpha^n$

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha)$$

$$\frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} = (x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \beta) + B$$

$$f(x) = \frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} \text{ とおくと } f'(x) = \frac{nx^{n-1}(x - \alpha) - (x^n - \alpha^n)}{(x - \alpha)^2}$$

$$f(x) = (x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \beta) + B,$$

$$f'(x) = 2(x - \beta)Q(x) + (x - \beta)^2 Q'(x) + A$$

これから, $B = f(\beta)$, $A = f'(\beta)$ より

$$B = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}, \quad A = \frac{n\beta^{n-1}(\beta - \alpha) - (\beta^n - \alpha^n)}{(\beta - \alpha)^2}$$

(3) $g(\beta) = n\beta^{n-1}(\beta - \alpha) - (\beta^n - \alpha^n)$ とおくと

$$g'(\beta) = n(n-1)\beta^{n-2}(\beta - \alpha)$$

$$g''(\beta) = n(n-1)\{(n-2)\beta^{n-3}(\beta - \alpha) + \beta^{n-2}\}$$

$g(\alpha) = 0$, $g'(\alpha) = 0$, $g''(\alpha) = n(n-1)\alpha^{n-2}$ より, $g(\beta)$ は $(\beta - \alpha)^2$ を因数にもつから, $g(\beta) = (\beta - \alpha)^2 H(\beta)$ とおくと ($A = H(\beta)$)

$$g'(\beta) = 2(\beta - \alpha)H(\beta) + (\beta - \alpha)^2 H'(\beta)$$

$$g''(\beta) = 2H(\beta) + 4(\beta - \alpha)H'(\beta) + (\beta - \alpha)^2 H''(\beta)$$

$$g''(\alpha) = 2H(\alpha) = n(n-1)\alpha^{n-2}, \quad A = H(\beta) \text{ より}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} H(\beta) = H(\alpha) = \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$$

補足 n 次式 $g(\beta)$ を α を極としてテイラー展開すると ⁴

$$g(\beta) = g(\alpha) + g'(\alpha)(\beta - \alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2!}(\beta - \alpha)^2 + \sum_{k=3}^n \frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta - \alpha)^k$$

$$\text{このとき } A = \frac{g(\beta)}{(\beta - \alpha)^2} = \frac{g''(\alpha)}{2!} + \sum_{k=3}^n \frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta - \alpha)^{k-2}$$

$$\text{よって } \lim_{\beta \rightarrow \alpha} A = \frac{g''(\alpha)}{2!} = \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$$

⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri.2001.pdf (p.7)

3 (1) $n^4 = 1 + 210m^2 \cdots \textcircled{1}$ の右辺は奇数であるから、 n は奇数.

$n^2 + 1, n^2 - 1$ は偶数であるから、 $\frac{n^2 + 1}{2}, \frac{n^2 - 1}{2}$ は整数.

$\frac{n^2 + 1}{2} - \frac{n^2 - 1}{2} = 1$ より、 $\frac{n^2 + 1}{2}, \frac{n^2 - 1}{2}$ は互いに素である.

補足 ユークリッドの互除法により $\frac{n^2 + 1}{2} = \frac{n^2 - 1}{2} \cdot 1 + 1$

$\frac{n^2 + 1}{2}, \frac{n^2 - 1}{2}$ の最大公約数が1であるから、これらの2数は互いに素.

(2) n が奇数であるから、 $n + 1, n - 1$ はともに偶数で、一方は4で割り切れるから、次式から $n^2 - 1$ は、8の倍数である.

$$n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$$

$$\textcircled{1} \text{ より } (n^2 + 1)(n^2 - 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 m^2 \cdots \textcircled{1}'$$

$$\text{ここで } n^2 \equiv 0, 1 \pmod{3} \text{ より } n^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{3} \cdots \textcircled{2}$$

$$n^2 \equiv 0, 1, 4, 2 \pmod{7} \text{ より } n^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{7} \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}', \textcircled{2}, \textcircled{3}$ より、 $n^2 - 1$ は $3 \cdot 7$ の倍数である.

よって、 $n^2 - 1$ は、 $8 \times 3 \cdot 7$ 、すなわち、168の倍数である.

(3) (2) の結論から、 $n^2 - 1 = 168N$ (N は整数) とおくと、 $\textcircled{1}'$ より

$$(168N + 2) \cdot 168N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 m^2 \quad \text{ゆえに} \quad m = 2\sqrt{\frac{2N(84N + 1)}{5}}$$

$2N$ は偶数、 $84N + 1$ は奇数であるから、 $N = 2k$ (k は整数) とおくと

$$m = 4\sqrt{\frac{k(168k + 1)}{5}}, \quad n = \sqrt{336k + 1} \quad (*)$$

(*) の第1式から、整数 k の必要条件は

$$k \equiv 0 \quad \text{または} \quad 168k + 1 \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad k \equiv 0, 3 \pmod{5}$$

$k = 3$ のとき $m = 4\sqrt{3 \cdot 101}, n = \sqrt{1009}$ より、不適

$k = 5$ のとき $m = 4\sqrt{841} = 4 \cdot 29 = 116, n = \sqrt{1681} = 41$

よって $(m, n) = (116, 41)$

4 (1) $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるから

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

$H(x) = F(x) + G(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} H'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \frac{F(x+h) + G(x+h) - F(x) - G(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = F'(x) + G'(x) \end{aligned}$$

よって $\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$

次に, $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ を満たす $F(x)$, $G(x)$ をとり,

$$H(x) = F(x) + G(x), \quad h(x) = H'(x)$$

とすると, 次式が成立する.

$$h(x) = H'(x) = \{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

上式および定積分の定義 ① により

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx &= \int_a^b h(x) dx = \left[H(x) \right]_a^b = H(b) - H(a) \\ &= F(b) + G(b) - \{F(a) + G(a)\} \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

(2) $G'(x) = g(x)$ を満たす $G(x)$ をとると, 定積分の定義により

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$$

上式の右辺は平均値の定理により

$$\frac{G(b) - G(a)}{b - a} = G'(c) \quad (a < c < b)$$

$G'(c) = g(c) > 0$ であるから, 以上の結果から

$$\int_a^b g(x) dx = (b - a)g(c) > 0$$

(3) 答 (C)

(2) と同様に $\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx$ に平均値の定理を適用すると ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx = \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) f(c_i) = \frac{1}{n} f(c_i) \quad \left(\frac{i-1}{n} < c_i < \frac{i}{n} \right)$$

 $f(x)$ は、区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数であるから

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq f(c_i) \leq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

以上の結果から、次式を得る.

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(4) 答 (B)

 S_n の定義により

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0) \\ &= S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \end{aligned}$$

上式に注意すると、②より

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \\ S_n &\leq \int_0^1 f(x) dx \leq S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

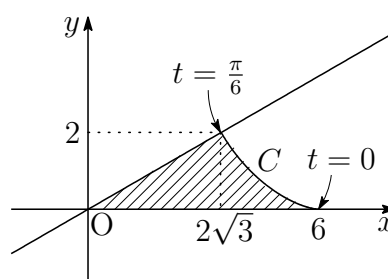
- 5 (1) $x = 5 \cos t + \cos 5t$, $y = 5 \sin t - \sin 5t$ ($-\pi \leq t < \pi$) より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -5(\sin t + \sin 5t) = -10 \sin 3t \cos 2t, \\ \frac{dy}{dt} &= 5(\cos t - \cos 5t) = 10 \sin 3t \sin 2t, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = -\tan 2t\end{aligned}$$

$0 < t < \frac{\pi}{6}$ のとき, $0 < 2t < 3t < \frac{\pi}{2}$ であるから $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$

- (2) (1) の結果および $\frac{dy}{dt} > 0$ より

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{dx}{dt}$		-	
$\frac{dy}{dt}$		+	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nwarrow$	
(x, y)	(6, 0)	...	$(2\sqrt{3}, 2)$



右上の図の斜線部分が求める面積で, その面積を S とすると

研

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 + \int_{2\sqrt{3}}^6 y \, dx = 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^0 y \frac{dx}{dt} \, dt \\ &= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^0 (5 \sin t - \sin 5t)(-5 \sin t - 5 \sin 5t) \, dt \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (5 \sin^2 t - \sin^2 5t + 4 \sin 5t \sin t) \, dt \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{ 5 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} - \frac{1 - \cos 10t}{2} - 2(\cos 6t - \cos 4t) \right\} \, dt \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \left[2t - \frac{5}{4} \sin 2t + \frac{1}{20} \sin 10t - \frac{1}{3} \sin 6t + \frac{1}{2} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{5} \right) = \frac{5}{3} \pi\end{aligned}$$

(3) $f(t) = 5 \cos t + \cos 5t$, $g(t) = 5 \sin t - \sin 5t$ とおくと

$$f(-t) = f(t), \quad g(-t) = -g(t)$$

よって, C 上の2点 $(f(t), g(t))$ と $(f(-t), g(-t))$ は x 軸に関して対称.

xy 直交座標系の原点 O を中心に反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた直交座標系を XY 系とすると

$$\begin{aligned} x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= X \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= X \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{3} \\ \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$X = f(t)$, $Y = g(t)$ とすると

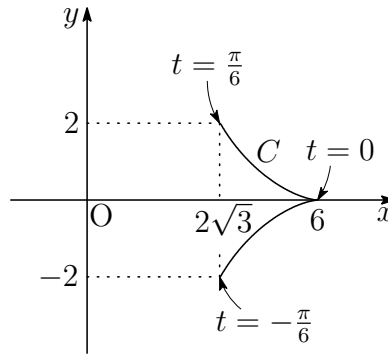
$$\begin{aligned} x &= (5 \cos t + \cos 5t) \cos \frac{\pi}{3} - (5 \sin t - \sin 5t) \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 5 \left(\cos t \cos \frac{\pi}{3} - \sin t \sin \frac{\pi}{3} \right) + \cos 5t \cos \frac{\pi}{3} + \sin 5t \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 5 \cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(5t - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 5 \cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right) + \cos 5 \left(t + \frac{\pi}{3} \right) = f \left(t + \frac{\pi}{3} \right), \\ y &= (5 \cos t + \cos 5t) \sin \frac{\pi}{3} + (5 \sin t - \sin 5t) \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 5 \left(\cos t \sin \frac{\pi}{3} + \sin t \cos \frac{\pi}{3} \right) + \cos 5t \sin \frac{\pi}{3} - \sin 5t \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 5 \sin \left(t + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(5t - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 5 \sin \left(t + \frac{\pi}{3} \right) - \sin 5 \left(t + \frac{\pi}{3} \right) = g \left(t + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

XY 系における点 $(f(t), g(t))$ は, xy 系における点 $\left(f \left(t + \frac{\pi}{3} \right), g \left(t + \frac{\pi}{3} \right) \right)$ であるから, C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にある.

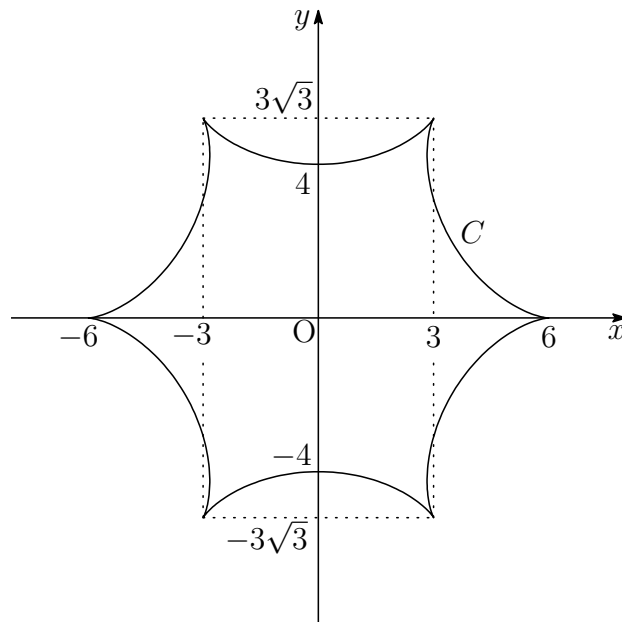
(4) $\frac{dy}{dx} = -\tan 2t$ および $\frac{dx}{dt} < 0$ ($0 < t < \frac{\pi}{6}$) により, $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-\tan 2t) \bigg/ \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{\cos^2 2t} \bigg/ \frac{dx}{dt} > 0$$

(3) の結果から, C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分と $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq 0$ の部分は x 軸に関して対称であるから, C の $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の概形は次のようになる.



さらに, これを原点を中心に反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた部分も C 上にある. よって, C の $-\pi \leq t < \pi$ の概形は, 次のようになる.



補足 C 上の点 $(x, y) = (f(t), g(t))$ における接ベクトルは $(f'(t), g'(t))$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{g'(t)}{f'(t)} \right\} \cdot \frac{dt}{dx}$$

逆関数定理により, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f'(t)}$ であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^2} \cdot \frac{1}{f'(t)} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}$$

本題において

$$f(t) = 5 \cos t + \cos 5t, \quad g(t) = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(t) &= -5(\sin t + \sin 5t), & g'(t) &= 5(\cos t - \cos 5t) \\ f''(t) &= -5(\cos t + 5 \cos 5t), & g''(t) &= -5(\sin t - 5 \sin 5t) \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t) &= 25(\sin t - 5 \sin 5t)(\sin t + \sin 5t) \\ &\quad + 25(\cos t - \cos 5t)(\cos t + 5 \cos 5t) \\ &= -100 + 100(\cos 5t \cos t - \sin 4t \sin t) \\ &= -100(1 - \cos 6t) \end{aligned}$$

$$0 < t < \frac{\pi}{6} \text{ において } f'(t) < 0, \quad g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t) < 0$$

$$\text{よって} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^3} > 0$$

2.9 2023 年度

1 (1) (*) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$

$x = 0$ は方程式 (*) の解ではないから, (*) の両辺を x^2 で割ると

$$x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$\text{したがって} \quad \left(x + \frac{1}{x} - 1\right)^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x^2 - x + 1)^2 = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2) (**) $(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$

$\alpha \neq \beta$ であるから, (**) の両辺を $(\beta - \alpha)^4$ で割ると

$$1 + \left\{ \frac{(\beta - \alpha) - (\gamma - \alpha)}{\beta - \alpha} \right\}^4 + \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^4 = 0$$

$$z = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ とおくと} \quad 1 + (1 - z)^4 + z^4 = 0$$

$$\text{整理すると} \quad z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$(1) \text{ の結果から, これを解くと} \quad z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{複号同順})$$

$$AB = AC, \angle CAB = \frac{\pi}{3} \text{ より} \quad \triangle ABC \text{ は正三角形}$$



2 $a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1$ より ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \max(a_n - 1, -a_n + 1) + a_n - 1 \\ &= \max(2(a_n - 1), 0) \end{aligned}$$

k を自然数とすると, 上の漸化式から

- (i) $a_k \leq 1$ のとき, $2(a_k - 1) \leq 0$ より, $a_{k+1} = 0$
- (ii) $a_k > 2$ のとき, $2(a_k - 1) > 2$ より, $a_{k+1} = 2(a_k - 1) > 2$
- (iii) $1 < a_k < \frac{3}{2}$ のとき, $0 < 2(a_k - 1) < 1$ より, $0 < a_{k+1} < 1$
- (iv) $\frac{3}{2} \leq a_k < 2$ のとき, $1 < 2(a_k - 1) < 2$ より, $a_{k+1} = 2(a_k - 1)$
このとき, $a_{k+1} - a_k = a_k - 2 < 0$ より $a_{k+1} < a_k$

が成立する.

- (1) $\alpha \leq 1$ のとき, (i) より $a_2 = 0$
順次, (i) を適用すると $a_3 = 0, a_4 = 0, \dots$
よって $\{a_n\}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (2) $\alpha > 2$ のとき, (ii) より $a_{n+1} = 2(a_n - 1)$
ゆえに $a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$ すなわち $a_n = 2 + (\alpha - 2) \cdot 2^{n-1}$
よって $\{a_n\}$ は発散し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- (3) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のとき, (iii) より $0 < a_2 < 1$
さらに, (i) を順次適用すると $a_3 = 0, a_4 = 0, \dots$
よって $\{a_n\}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (4) $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ のとき, すべての自然数 n について

$$\frac{3}{2} \leq a_n < 2$$

であると仮定すると, (iv) より $a_{n+1} = 2(a_n - 1)$

$$a_n = 2 + (\alpha - 2) \cdot 2^{n-1}$$

このとき, 十分大きな k に対して, $a_k < \frac{3}{2}$ となり, 仮定に反する.

よって, $a_k < \frac{3}{2}$ となる整数 k が存在するので, (i), (iii) より

$$\{a_n\} \text{ は収束し, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$



- 3 (1) $\vec{m} = (a, c)$, $\vec{n} = (b, d)$ より $(\vec{m} \neq \vec{0}, \vec{n} \neq \vec{0})$

$$(*) \begin{cases} d\vec{m} - c\vec{n} = (ad - bc, 0) = (D, 0) \\ -b\vec{m} + a\vec{n} = (0, ad - bc) = (0, D) \end{cases}$$

$D = 0$ のとき $d\vec{m} = c\vec{n}$, $b\vec{m} = a\vec{n}$ ゆえに $\vec{m} // \vec{n}$

このとき, $\vec{m}, \vec{n}$ は 1 次従属であるから, $\vec{q}$ がこれらのベクトルと平行でないならば, 条件 I

$$r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$$

を満たす実数 r, s は存在しない.

$D \neq 0$ のとき, 基本ベクトル $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ は, $(*)$ より

$$\vec{e}_1 = (1, 0) = \frac{d\vec{m} - c\vec{n}}{D}, \quad \vec{e}_2 = (0, 1) = \frac{-b\vec{m} + a\vec{n}}{D} \quad (**)$$

のように, これらの基本ベクトルは $\vec{m}, \vec{n}$ の線形結合で表される.

したがって, 任意のベクトル $\vec{q} = (x, y)$ を

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad (***)$$

とすると, $\vec{q}$ は $\vec{m}, \vec{n}$ の線形結合で表される.

よって, $D \neq 0$ のとき, 条件 I を満たす実数 r, s が存在する. [証終]

- (2) $(**)$ の基本ベクトルと $\vec{v}$ の内積をとると

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{v} &= \frac{(d\vec{m} - c\vec{n}) \cdot \vec{v}}{D} = \frac{d\vec{m} \cdot \vec{v} - c\vec{n} \cdot \vec{v}}{D} = \frac{d}{D} \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{v} &= \frac{(-b\vec{m} + a\vec{n}) \cdot \vec{v}}{D} = \frac{-b\vec{m} \cdot \vec{v} + a\vec{n} \cdot \vec{v}}{D} = -\frac{b}{D} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 = \frac{1}{D}(d, -b)$$

同様に, $(**)$ の基本ベクトルと $\vec{w}$ の内積をとると

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{w} &= \frac{(d\vec{m} - c\vec{n}) \cdot \vec{w}}{D} = \frac{d\vec{m} \cdot \vec{w} - c\vec{n} \cdot \vec{w}}{D} = -\frac{c}{D} \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{w} &= \frac{(-b\vec{m} + a\vec{n}) \cdot \vec{w}}{D} = \frac{-b\vec{m} \cdot \vec{w} + a\vec{n} \cdot \vec{w}}{D} = \frac{a}{D} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{w} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 = \frac{1}{D}(-c, a)$$

(3) (**) を (***) に代入すると

$$\begin{aligned}\vec{q} &= x \left(\frac{d\vec{m} - c\vec{n}}{D} \right) + y \left(\frac{-b\vec{m} + a\vec{n}}{D} \right) \\ &= \frac{dx - by}{D} \vec{m} + \frac{-cx + ay}{D} \vec{n}\end{aligned}\tag{A}$$

条件 II を満たすとき, $\frac{dx - by}{D}$, $\frac{-cx + ay}{D}$ が整数である. とくに

$$\vec{q} = (1, 0) \text{ のとき } \quad \vec{q} = \frac{d}{D} \vec{m} - \frac{c}{D} \vec{n}$$

$$\vec{q} = (0, 1) \text{ のとき } \quad \vec{q} = -\frac{b}{D} \vec{m} + \frac{a}{D} \vec{n}$$

上の 2 式から, $\frac{a}{D}$, $\frac{b}{D}$, $\frac{c}{D}$, $\frac{d}{D}$ は整数である.

$$\frac{a}{D} \cdot \frac{d}{D} - \frac{b}{D} \cdot \frac{c}{D} = \frac{ad - bc}{D^2} = \frac{1}{D}$$

は整数であるから $D = \pm 1$

逆に, $D = \pm 1$ のとき, (A) より, 条件 II を満たす.

したがって $D = \pm 1$

4 (1) 条件式 (A), (B) に $x = y = 0$ を代入すると

研

$$f(0) = f(0)^2 - g(0)^2, \quad g(0) = 2f(0)g(0) \quad (*)$$

上の第 2 式から $\{2f(0) - 1\}g(0) = 0$

したがって $f(0) = \frac{1}{2}$ または $g(0) = 0$

- $f(0) = \frac{1}{2}$ のとき, $(*)$ の第 1 式に代入して整理すると $g(0)^2 = -\frac{1}{4}$
 $g(0)$ は実数値であるから, $f(0) = \frac{1}{2}$ は不適.
- $g(0) = 0$ のとき, これを $(*)$ の第 1 式に代入して整理すると

$$f(0)\{f(0) - 1\} = 0 \quad f(0) \neq 0 \text{ に注意して } f(0) = 1$$

よって, 題意は成立する.

(2) (1) の結論および条件 (A), (D) より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h) - g(x)g(h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ f(x) \cdot \frac{f(h) - f(0)}{h} - g(x) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h} \right\} \\ &= f(x)f'(0) - g(x)g'(0) \\ &= f(x) \cdot 0 - g(x) \cdot 1 = -g(x) \end{aligned} \quad (**)$$

(3) (2) と同様に, (1) の結論および条件 (B), (D) より

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(h) + g(x)f(h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ f(x) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(h) - f(0)}{h} \right\} \\ &= f(x)g'(0) + g(x)f'(0) \\ &= f(x) \cdot 1 + g(x) \cdot 0 = f(x) \end{aligned} \quad (***)$$

$\pi(x) = \{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x)$ とおくと, (2) および上式から

$$\begin{aligned} \pi'(x) &= \{f(x) + ig(x)\}'(\cos x - i \sin x) + \{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x)' \\ &= \{f'(x) + ig'(x)\}(\cos x - i \sin x) + \{f(x) + ig(x)\}(-\sin x - i \cos x) \\ &= \{-g(x) + if(x)\}(\cos x - i \sin x) - i\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) \\ &= i\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) - i\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 0 \end{aligned}$$

$\pi(x)$ は定数関数であるから $\pi(x) = \pi(0) = \{f(0) + ig(0)\} \cdot 1 = 1$

よって $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$

- (4) (3) の結論から $f(x) + ig(x) = \cos x + i \sin x$
 $f(x), g(x)$ は実関数 (実数値関数) であるから

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sin x$$

ここで, $\varphi(x) = f(x) + ig(x)$ とおくと

$$\varphi'(x) = f'(x) + ig'(x) = -g(x) + if(x) = i\{f(x) + ig(x)\} = i\varphi(x)$$

$\varphi(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$ および上式を満たす $\varphi(x)$ を求める.

$$\varphi'(x)e^{-ix} - i\varphi(x)e^{-ix} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{\varphi(x)e^{-ix}\}' = 0$$

したがって $\varphi(x)e^{-ix} = C$ (C は積分定数) ゆえに $\varphi(x) = Ce^{ix}$

$\varphi(0) = 1$ より $C = 1$ すなわち $\varphi(x) = e^{ix}$

$\varphi(x) = f(x) + ig(x) = \cos x + i \sin x$ であるから

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\#)$$

(#) により, 条件 (A), (B), (C), (D') を満たす関数 $f(x), g(x)$ を求める.
 (D') を (**), (***) に代入すると

$$f'(x) = af(x) - bg(x), \quad g'(x) = bf(x) + ag(x)$$

$\phi(x) = f(x) + ig(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= f'(x) + ig'(x) = \{af(x) - bg(x)\} + i\{bf(x) + ag(x)\} \\ &= (a + bi)\{f(x) + ig(x)\} = (a + bi)\phi(x) \end{aligned}$$

$\phi(0) = f(0) + ig(0) = 1 + i \cdot 0 = 1$ および上式を満たす $\phi(x)$ を求める.

$$\phi'(x)e^{-(a+bi)x} - (a+bi)\phi(x)e^{-(a+bi)x} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{\phi(x)e^{-(a+bi)x}\}' = 0$$

したがって

$$\phi(x)e^{-(a+bi)x} = C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}) \quad \text{ゆえに} \quad \phi(x) = C_0 e^{(a+bi)x}$$

$\phi(0) = 1$ より $C_0 = 1$ すなわち $\phi(x) = e^{(a+bi)x}$

(#) より $\phi(x) = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$

$\phi(x) = f(x) + ig(x)$ であるから ($f(x), g(x)$ は実関数)

$$f(x) = e^{ax} \cos bx, \quad g(x) = e^{ax} \sin bx$$

これから $f\left(\frac{x}{b}\right) = e^{\frac{a}{b}x} \cos x$, $g\left(\frac{x}{b}\right) = e^{\frac{a}{b}x} \sin x$

これらを $p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right)$, $q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$ に代入すると

$$p(x) = \cos x, \quad q(x) = \sin x$$

[B の証明] このとき, 加法定理を用いて

$$\begin{aligned} q(x+y) &= \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ &= q(x)p(y) + p(x)q(y) = p(x)q(y) + q(x)p(y) \end{aligned}$$

[D の証明] $p'(x) = -\sin x$, $q'(x) = \cos x$ より

$$p'(0) = 0, \quad q'(0) = 1 \quad \text{[証終]}$$

補足 本題の線形の連立微分方程式

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \quad g(0) = 0, \quad f'(0) = a, \quad g'(0) = b, \\ f'(x) &= af(x) - bg(x), \quad g'(x) = bf(x) + ag(x) \end{aligned}$$

から $g(x)$, $g'(x)$ を消去して, 2 階の微分方程式

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = a, \quad f''(x) - 2af'(x) + (a^2 + b^2)f(x) = 0$$

を解いてもよい. 特性方程式 $X^2 - 2aX + a^2 + b^2 = 0$ の解を

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = a - bi$$

とおくと $f(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$ (C_1, C_2 は積分定数)

このとき, $f(0) = 1$, $f'(0) = a$ より

$$C_1 + C_2 = 1, \quad \alpha C_1 + \beta C_2 = a$$

上の第 2 式について $\frac{\alpha + \beta}{2}(C_1 + C_2) + \frac{\alpha - \beta}{2}(C_1 - C_2) = a$

$\frac{\alpha + \beta}{2} = a$, $\frac{\alpha - \beta}{2} = bi$ を代入すると $a(C_1 + C_2) + bi(C_1 - C_2) = a$

$C_1 + C_2 = 1$, $b \neq 0$ より $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ よって $f(x) = e^{ax} \cos bx$

同様に, 2 階の微分方程式

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = b, \quad g''(x) - 2ag'(x) + (a^2 + b^2)g(x) = 0$$

を解くと, $g(x) = e^{ax} \sin bx$ を得る.

- 5 (1) $C: (x, y) = (f(t), g(t)) = (t + 2\sin^2 t, t + \sin t)$ とおくと $(0 < t < \pi)$
 $f'(t) = 0$ とすると $1 + 4\sin t \cos t = 0$

$$1 + 2\sin 2t = 0 \quad (0 < t < \pi) \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad f\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \frac{7\pi}{12} + 1 - \cos \frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{12} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \frac{11\pi}{12} + 1 - \cos \frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{12} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

したがって, C の $t = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$ における 2 接線

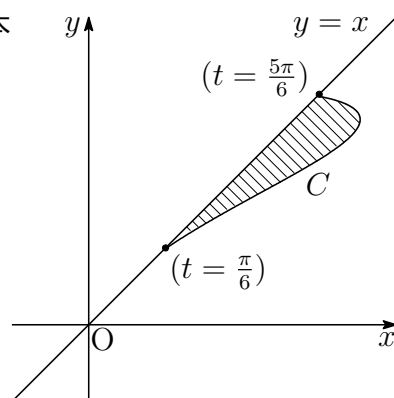
$$x = f\left(\frac{7\pi}{12}\right), \quad x = f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

が異なるから, 求める接線の本数は **2 本**

- (2) 求める面積を右の図の斜線部分である.
 この面積を S とすると, ガウス・グリーンの定理により

$$S = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt$$

このとき



$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (t + 2\sin^2 t)(1 + \cos t) - (1 + 4\sin t \cos t)(t + \sin t) \\ &= t(\cos t - 4\sin t \cos t) + 2\sin^2 t - \sin t - 2\sin^2 t \cos t \\ &= t(\sin t - 2\sin^2 t)' + 2\sin^2 t - \sin t - 2\sin^2 t \cos t \\ &= \{t(\sin t - 2\sin^2 t)\}' + 2(2\sin^2 t - \sin t) - \frac{2}{3}(\sin^3 t)' \end{aligned}$$

よって 5

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[t(\sin t - 2\sin^2 t) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin^2 t - \sin t) dt - \frac{1}{3} \left[\sin^3 t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - \cos 2t - \sin t) dt = \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t + \cos t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

⁵http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri.2022.pdf 5

別解 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$ で $y = g(t)$ は単調増加であることに注意して

$$\begin{aligned} S &= \int_{g(\frac{\pi}{6})}^{g(\frac{5\pi}{6})} (x - y) dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)g'(t) dt - \left[\frac{y^2}{2} \right]_{g(\frac{\pi}{6})}^{g(\frac{5\pi}{6})} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)g'(t) dt - \frac{1}{2} \left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = g\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ に注意して変形すると

$$\begin{aligned} S &= \left[f(t)g(t) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(t)g(t) dt - \frac{1}{2} \left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\} \\ &= - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(t)g(t) dt + \frac{1}{2} \left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② の辺々を加えることにより, 次式を得る.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt$$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$, $g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{1}{2}$ であるから, ① より

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (t + 2\sin^2 t)(1 + \cos t) dt - \frac{1}{2} \left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (t + t\cos t + 2\sin^2 t + 2\sin^2 t\cos t) dt - \frac{\pi}{3}(\pi + 1) \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + t\sin t + \cos t + t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\sin^3 t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{\pi}{3}(\pi + 1) \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

2.10 2024年度

- 1 (1) 3点 $P(-1, 1, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(a, a^2, a^3)$ より

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 0, 2), \quad \overrightarrow{PR} = (a+1, a^2-1, a^3+1)$$

3点 P, Q, R が一直線上にあると仮定すると, $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ の y 成分から

$$a^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \pm 1$$

これは, $a \neq -1, a \neq 1$ に反する.

よって, 3点 P, Q, R は一直線上にない.

- (2) $|\overrightarrow{PQ}|^2 = 8, \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 2(a^3 + a + 2)$

点 R から直線 PQ に垂線 RH を引くと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &= \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}|^2} \overrightarrow{PQ} = \frac{2(a^3 + a + 2)}{8} (2, 0, 2) \\ &= \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a}{2} + 1, 0, \frac{a^3}{2} + \frac{a}{2} + 1 \right), \\ \overrightarrow{RH} &= \overrightarrow{PH} - \overrightarrow{PR} = \left(-\frac{a}{2} + \frac{a^3}{2}, 1 - a^2, \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2} \right) \\ &= (1 - a^2) \left(-\frac{a}{2}, 1, \frac{a}{2} \right) \end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ より, $1 - a^2 > 0$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{RH}| &= (1 - a^2) \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - a^2) \sqrt{2 + a^2} \\ \triangle PQR &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{RH}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - a^2) \sqrt{2 + a^2} \\ &= (1 - a^2) \sqrt{2 + a^2} \end{aligned}$$

ここで, $t = 1 - a^2$ とおくと $0 < t \leq 1$

$$\triangle PQR = t\sqrt{3-t} = \sqrt{3t^2 - t^3}$$

$$f(t) = 3t^2 - t^3 \quad \text{とおくと} \quad f'(t) = 6t - 3t^2 = 3t(2-t) > 0$$

$f(t)$ は単調増加であるから, $t = 1$, すなわち, $a = 0$ のとき, $\triangle PQR$ の面積は, 最大値 $\sqrt{2}$ をとる.

補足 (外積を用いる解法)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= (2(1-a^2), 2a(1-a^2), -2(1-a^2)) \\ &= 2(1-a^2)(1, a, -1)\end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ に注意して

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = (1-a^2)\sqrt{2+a^2}$$

(面積公式を用いる解法)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= 2^2 + 0^2 + 2^2 = 8, \\ |\overrightarrow{PR}|^2 &= (a+1)^2 + (a^2-1)^2 + (a^3+1)^2 \\ &= (a+1)^2 \{1 + (a-1)^2 + (a^2-a+1)^2\} \\ &= (a+1)^2 (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3), \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= 2(a+1) + 0 + 2(a^3+1) \\ &= 2(a+1)(a^2 - a + 2)\end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\triangle PQR &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{8 \cdot (a+1)^2 (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3) - \{2(a+1)(a^2 - a + 2)\}^2} \\ &= (a+1) \sqrt{2(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3) - (a^2 - a + 2)^2} \\ &= (a+1) \sqrt{a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 2} \\ &= (a+1) \sqrt{(a-1)^2 (a^2 + 2)} \\ &= (a+1)(1-a) \sqrt{a^2 + 2} \\ &= (1-a^2) \sqrt{2+a^2}\end{aligned}$$

2 (1) $f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1 = (z^2 + 1)(z^4 + 1)$
 $f(z) = 0$ をみたすとき $z^2 = -1, z^4 = -1 \dots (*)$

$$|z^2| = |z|^2 = 1, |z^4| = |z|^4 = 1 \quad \text{よって} \quad |z| = 1$$

補足 $z^8 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)(z^4 + 1)$, $f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1 = (z^2 + 1)(z^4 + 1)$
より, $z^8 - 1 = (z^2 - 1)f(z)$ であるから, z は実数以外の 1 の 8 乗根である.

(2) $(*)$ より $z^2 = -1, \pm i$
 $f(z) = (z^2 + 1)(z^2 + i)(z^2 - i)$ より

$$f(wz) = (w^2 z^2 + 1)(w^2 z^2 + i)(w^2 z^2 - i)$$

(i) $z^2 = -1$ のとき

$$f(wz) = (-w^2 + 1)(-w^2 + i)(-w^2 - i) = 0$$

したがって $w^2 = 1, \pm i \dots \textcircled{1}$

(ii) $z^2 = i$ のとき

$$\begin{aligned} f(wz) &= (iw^2 + 1)(iw^2 + i)(iw^2 - i) \\ &= -i(w^2 - i)(w^2 + 1)(w^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

したがって $w^2 = \pm 1, i \dots \textcircled{2}$

(iii) $z^2 = -i$ のとき

$$\begin{aligned} f(wz) &= (-iw^2 + 1)(-iw^2 + i)(-iw^2 - i) \\ &= i(w^2 + i)(w^2 - 1)(w^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

したがって $w^2 = \pm 1, -i \dots \textcircled{3}$

①～③ を同時にみたすとき $w^2 = 1$ よって $w = \pm 1$

- 3** (1) $b > a$ のとき, $b - 1 \geq a$ であるから $(b - 1)! \geq a!$

$$b! = b \cdot (b - 1)! \geq b \cdot a! \quad \text{よって} \quad \frac{b!}{a!} \geq b$$

- (2) $2 \cdot a! = b!$ より $\frac{b!}{a!} = 2 > 1$ であるから

$$a! < b! \quad \text{すなわち} \quad a < b$$

$a < b$ より, (1) の結論を用いると

$$2 = \frac{b!}{a!} \geq b > a \quad \text{よって} \quad (a, b) = (1, 2)$$

- (3) (i) $a \leq c, b \leq c$ のとき

$$\frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} = 2, \quad \frac{a!}{c!} \leq 1, \quad \frac{b!}{c!} \leq 1$$

このとき $\frac{a!}{c!} = 1, \frac{b!}{c!} = 1$ すなわち $a = c, b = c \quad \dots (*)$

- (ii) $a > c$ または $b > c$ のとき, 一般性を失うことなく, $b > c$ とし,
(1) の結論を用いると

$$2 = \frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} \geq \frac{a!}{c!} + b > b > c \geq 1$$

これをみたす b, c は存在しない.

- (i), (ii) より $(a, b, c) = (n, n, n)$ (n は自然数)

- 4** (1) 条件を満たす直線は、次の8本より $L(3) = 8$

$$y = x, \quad y = -x + 4, \quad x = k, \quad y = k \quad (k = 1, 2, 3)$$

- (2) 条件を満たす直線は、次の14本より $L(4) = 14$

$$\begin{aligned} y = x - 1, \quad y = x, \quad y = x + 1, \\ y = -x + 4, \quad y = -x + 5, \quad y = -x + 6, \\ x = k, \quad y = k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

- (3) 条件を満たす直線で傾きが0以上の直線は、(i)～(iv)の16本ある.

(i) 条件を満たす x 軸に平行な直線は $y = k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$

(ii) 条件を満たす傾き $\frac{1}{2}$ の直線は $y - k = \frac{x - 1}{2} \quad (k = 1, 2, 3)$

(iii) 条件を満たす傾き1の直線は $y = x + k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2)$

(iv) 条件を満たす傾き2の直線は $y - 1 = 2(x - k) \quad (k = 1, 2, 3)$

(i)～(iv)の直線を点(3, 3)を中心に 90° 回転させた直線も条件を満たす.

よって $L(5) = 16 \times 2 = 32$

5 (1) $I(m, n) = \int_1^e x^m e^x (\log x)^n dx$ より (m, n は自然数)

$$\begin{aligned}
 & I(m+1, n+1) \\
 &= \int_1^e (e^x)' x^{m+1} (\log x)^{n+1} dx \\
 &= \left[e^x x^{m+1} (\log x)^{n+1} \right]_1^e \\
 &\quad - \int_1^e e^x \left\{ e^x (m+1) x^m (\log x)^{n+1} + x^{m+1} (n+1) (\log x)^n \frac{1}{x} \right\} dx \\
 &= e^{m+e+1} \\
 &\quad - (m+1) \int_1^e x^m e^x (\log x)^{n+1} dx - (n+1) \int_1^e x^m e^x (\log x)^n dx \\
 &= e^{m+e+1} - (m+1)I(m, n+1) - (n+1)I(m, n)
 \end{aligned}$$

(2) $1 \leq x \leq e$ において, $x^m e^x (\log x)^n \geq 0$ であるから (m, n は自然数)

$$I(m, n) = \int_1^e x^m e^x (\log x)^n dx \geq 0$$

上式および (1) の結果から

$$0 \leq (n+1)I(m, n) \leq e^{m+e+1} - (m+1)I(m, n+1) \leq e^{m+e+1}$$

$$\text{したがって} \quad 0 \leq I(m, n) \leq \frac{e^{m+e+1}}{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{m+e+1}}{n+1} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(m, n) = 0$$

別解 $1 \leq x \leq e$ において, $0 \leq x^m e^x (\log x)^n \leq e^{m+e} (\log x)^n$ であるから

$$0 \leq I(m, n) \leq e^{m+e} \int_1^e (\log x)^n dx$$

$$x = e^t \text{ とおくと } \frac{dx}{dt} = e^t \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \longrightarrow e \\ \hline t & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_1^e (\log x)^n dx &= \int_0^1 t^n e^t dt = \int_0^{1-\frac{1}{n}} t^n e^t dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 t^n e^t dt \\ &\leq e \int_0^{1-\frac{1}{n}} t^n dt + e \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dt \\ &= \frac{e}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{e}{n} \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \right\}^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{e}{n} \right\} = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理により}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^e (\log x)^n dx = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I(m, n) = 0$$

第 3 章 一般前期研究

九州大学の入試問題 (数学) の特徴として、毎年出題される「確率」「微積分」がある。旧課程の数学 A の分野に期待値 (確率変数の平均) があり、これをテーマとする九大 (経済工学部) らしい問題が多岐にわたり出題されていた。現行課程では、期待値が数学 B の「確率分布と統計」の分野で扱うことになり、同分野が九州大学の出題の範囲外であるため、「確率」の出題内容がかなり限られてきた印象を持つ。

近年の確率の出題内容を見ると、大学で扱う確率論で扱う反射壁・吸収壁、破産問題¹などの分野から入試問題として整えた変数の推移 (2015 年) をテーマとする問題が出題された。2015 年の問題で簡単に説明すると、青玉の個数を変数 X を縦軸に、横軸を試行回数とすると、 $X = 0, 1, 2, 3$ の値で推移し、 $X = 0, X = 3$ を反射壁としている。仮に本題が $X = 0$ または $X = 3$ になった時点で試行が終了するとき、 $X = 0, X = 3$ はその吸収壁という。また、青玉 1 個を 1 万円としてゲームに参加し、3 万円または 0 円になったときにゲームが終了するといった破産問題でもある。

折れ線グラフを用いる問題は、2002 年 (1 次元ランダムウォーク) にも出題され、九大らしい工夫がなされた良問である。

確率分野からの出題内容が狭くなったため、2016 年から 2018 年はマルコフ連鎖・確率漸化式を中心とする出題になってしまった。

最後に「微積分」の求積問題は、受験生にとって明暗を分けることが多い。確かに、時間が掛かっても膨大な計算の末、正解に至る受験生もいるが、試験時間は限られている。問題の核心を捉え、簡潔な解答を目指す必要がある。そのための学習が何よりも重要であり、本書はこれに対する編者の解答である。

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf [4]

3.1 2015年度

3.1.1 4番(3) 研究

操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が3個とも青玉になることなしに、青玉の個数が1個である確率を p_n とする.

問 解

(i) n が奇数のとき

(2) で示したように奇数回目に青玉が1個になることはないから $p_n = 0$

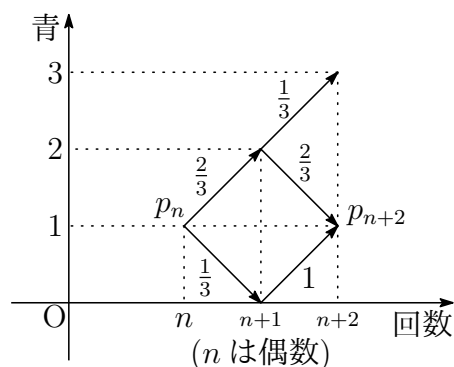
(ii) n が偶数のとき $p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{7}{9} p_n$$

ゆえに
$$p_n = \left(\frac{7}{9} \right)^{\frac{n}{2}}$$

n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2} \times \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$



東大理科 2008 年

白黒2種類のカードがたくさんある. そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき, 次の操作 (A) を考える.

(A) 手持ちの k 枚の中から1枚を, 等確率 $\frac{1}{k}$ で選び出し, それを違う色のカードにとりかえる.

以下の問 (1), (2) に答えよ.

(1) 最初に白2枚, 黒2枚, 合計4枚のカードをもっているとき, 操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて, 4枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ.

(2) 最初に白3枚, 黒3枚, 合計6枚のカードをもっているとき, 操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて, 6枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ.

解答 (1) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 4 枚とも同じ色になることなしに、白と黒のカードが 2 枚ずつである確率を p_n とする.

(i) n が奇数のとき

奇数回目に 4 枚とも同じ色になることはないので、求める確率は 0

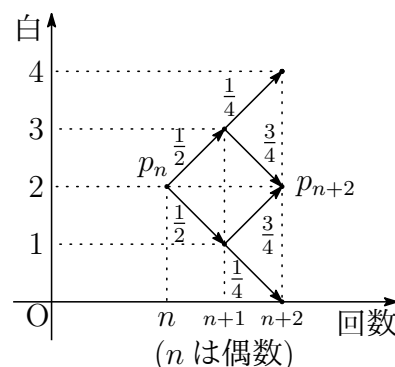
(ii) n が偶数のとき $p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4} p_n$$

$$\text{ゆえに } p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$$

求める確率は

$$p_{n-2} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$



(2) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 6 枚とも同じ色になることなしに、白のカードが 2 枚である確率を q_n とすると、対称性により白のカードが 4 枚である確率も q_n である.

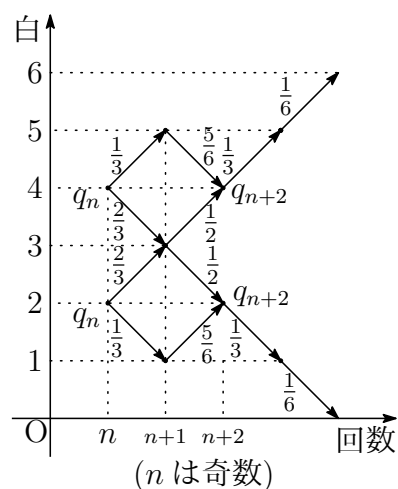
(i) n が奇数のとき $q_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= q_n \times \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + q_n \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{17}{18} q_n \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } q_n = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{18} \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

求める確率は、3 以上の奇数のとき

$$q_{n-2} \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{18} \left(\frac{17}{18} \right)^{\frac{n-3}{2}}$$



(ii) n が 1 または偶数のとき

6 枚とも同じ色になることはないので、求める確率は 0

3.1.2 5番(2) ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m \mid n$ と表記し, 整数 x, y の最大公約数を (x, y) と表記すると

問 解

$$(x, y) \mid x, \quad (x, y) \mid y$$

が成り立つ.

ユークリッドの互除法

2 整数 a, b について ($a > b > 0$), a を b で割ったときの商を q , 余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \quad (a, b) = (b, c)$$

$$c = 0 \text{ のとき} \quad (a, b) = b$$

証明 $c \neq 0$ のとき, $a = bq + c$ より $(b, c) \mid a$ また, $(b, c) \mid b$ であるから, (b, c) は a と b の公約数, したがって

$$(b, c) \mid (a, b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に, $c = a - bq$ より $(a, b) \mid c$ また, $(a, b) \mid b$ であるから, (a, b) は b と c の公約数, したがって

$$(a, b) \mid (b, c) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad (a, b) = (b, c)$$

$c = 0$ のとき, 自明.

証終

補足 さらに, b を c で割った余りが d であるとき $(b, c) = (c, d)$

$$\text{すなわち} \quad (a, b) = (b, c) = (c, d)$$

2 つの整数 a_1, a_2 について ($a_1 > a_2 > 0$), a_1 を a_2 で割った余りを a_3 , さらに, a_2 を a_3 で割った余りを a_4 , 順次, a_k を a_{k+1} で割った余りを a_{k+2} とすると

$$(a_1, a_2) = (a_2, a_3) = (a_3, a_4) = \cdots = (a_k, a_{k+1}) = (a_{k+1}, a_{k+2}) = \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから, 互除法を繰り返すことにより, a_1 と a_2 の最小公倍数を求めることができる.

3.2 2016 年度

3.2.1 2 番 (4) 外積 (ベクトル積)

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおくと

問 解

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}}{2+1} = \frac{\vec{b} + 2 \cdot \frac{3}{4}\vec{c}}{3} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{AP} &= k\overrightarrow{AE} = \frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}\end{aligned}$$

CR : RD = 3(1 - t) : 2t であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2t\overrightarrow{AC} + 3(1-t)\overrightarrow{AD}}{3(1-t) + 2t} = \frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b} + 2t\vec{c}\}$$

したがって $\overrightarrow{QP} = \frac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b} - 3\vec{c})$, $\overrightarrow{QR} = \frac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b} - 3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え、外積の性質を用いると²

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = -\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b} \times \vec{c}$$

よって $\triangle PQR : \triangle ABC = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)} : 1$

外積は高校数学の範囲外であるから、2 次試験では使えないが、センター試験では、非常に有効な計算法である。なお、外積 (ベクトル積) の演算について、次式が成り立つことに注意したい。

$$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$$

また、これに $\vec{c} = \vec{b}$ を代入すると $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$

²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

3.2.2 3番 マルコフ連鎖

$P_i(n+1)$ は $P_j(n)$ によって決定する確率過程 (マルコフ連鎖) である.

問 解

$$P_0(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n)\}$$

$$P_1(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + 2P_5(n)\}$$

$$P_2(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_3(n) + 2P_4(n) + P_5(n)\}$$

$$P_3(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n)\}$$

$$P_4(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + 2P_2(n) + P_3(n) + P_5(n)\}$$

$$P_5(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + 2P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n)\}$$

したがって $P_0(n) = P_3(n) = \frac{1}{6}$,

$$P_1(n+1) - P_5(n+1) = -\frac{1}{3}\{P_1(n) - P_5(n)\},$$

$$P_2(n+1) - P_4(n+1) = -\frac{1}{3}\{P_2(n) - P_4(n)\}$$

$$P_1(1) = P_2(1) = P_4(1) = P_5(1) = \frac{1}{6} \text{ より } P_1(n) = P_5(n), P_2(n) = P_4(n)$$

$$\text{これらの結果から } P_1(n+1) = P_2(n+1) = \frac{1}{3}\left\{P_1(n) + P_2(n) + \frac{1}{6}\right\}$$

$$\text{ゆえに } P_1(n+1) = \frac{2}{3}P_1(n) + \frac{1}{18}$$

$$P_1(1) = \frac{1}{6} \text{ であるから } P_1(n) = \frac{1}{6} \text{ よって } P_i(n) = \frac{1}{6} \text{ (} i = 0, 1, \dots, 5 \text{)}$$

3.2.3 5 番 (3) 発展

$\theta = \frac{\pi}{n}$, $\alpha = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ とおくと

問 解

$$z^n - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \alpha^k)$$

また $z^n - 1 = (z - 1) \sum_{k=1}^n z^{n-k}$ ゆえに $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \alpha^k) = \sum_{k=1}^n z^{n-k} \quad \dots (*)$

(*) は, z に関する恒等式であるから, $z = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \cos 2k\theta - i \sin 2k\theta) = \prod_{k=1}^{n-1} (2 \sin^2 k\theta - 2i \sin k\theta \cos k\theta) \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1} (\sin k\theta - i \cos k\theta) \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} - k\theta \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - k\theta \right) \right\} \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \times (\cos 0 - i \sin 0) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = n$$

よって $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

たとえば, $n = 9$ のとき $\prod_{k=1}^8 \sin \frac{k\pi}{9} = \frac{9}{256}$

したがって $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16} \quad \dots \textcircled{1}$

同様に, $n = 18$ のとき $\prod_{k=1}^{17} \sin \frac{k\pi}{18} = \frac{9}{2^{16}}$

したがって $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \dots \sin 80^\circ = \frac{3}{256} \quad \dots \textcircled{2}$

さらに, ①, ② から $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$

3.3 2017年度

3.3.1 3番(2)(3) 別解

(2) $a_n = 4n - 3$ より, a_n が 7^2 の倍数であるとき

問 解

$$4n - 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 12(4n - 3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 13 \pmod{7^2}$$

n は整数 l を用いて $n = 49l + 13$

したがって, $1 \leq 49l + 13 \leq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leq l \leq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq l \leq 11$$

よって, 求める個数は **12 (個)**

(3) $a_n = 4n - 3$ より, a_n が 7^3 の倍数であるとき

$$4n - 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 86(4n - 3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 258 \pmod{7^3}$$

n は整数 m を用いて $n = 343m + 258$

したがって, $1 \leq 343m + 258 \leq 600$ を満たす整数 m は $m = 0$ の1個で

$$a_{258} = 4 \cdot 258 - 3 = 1029 = 3 \cdot 7^3$$

また, $\{a_n\}$ の初項から第600項のうち, 7^4 で割り切れる項はない.

(1),(2)の結果から, 数列 $\{a_n\}$ のうち, 7の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

これら38個の項をそれぞれ7で割ると, さらに7で割り切れる項が第2列に6個あり, これらをまた7で割ると, 最後に残った a_{258} だけが7で1回割れる.

したがって, これら38個の積は7で $38 + 6 + 1$, すなわち, 45回割り切れる.

よって, 求める n の最小値は **$n = 265$**

3.4 2018 年度

3.4.1 1 番 双曲線の媒介変数表示

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は, $\frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = 1$ により,

問 解

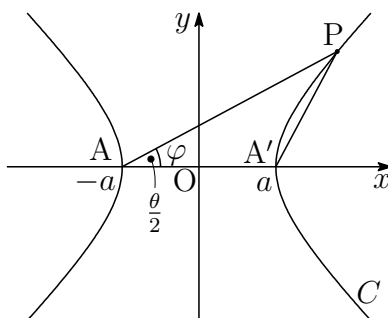
$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \frac{y}{b} = \tan \theta$$

とおくと, 双曲線上の点 $P(x, y)$ は, 次のように媒介変数表示ができる.

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases}$$

とくに, $a = b$ のとき, 直角双曲線となる.

直角双曲線 $C: x^2 - y^2 = a^2$ 上の点を $P(x, y)$, 2 頂点を $A(-a, 0)$, $A'(a, 0)$ とおく.



直線 AP の傾きを m , 直線 $A'P$ の傾きを m' とすると

$$m = \frac{y}{x+a}, \quad m' = \frac{y}{x-a} \quad \text{ゆえに} \quad mm' = \frac{y^2}{x^2 - a^2} = 1$$

P は 2 直線 $AP: y = m(x+a)$, $A'P: y = \frac{1}{m}(x-a)$ の交点であるから

$$x = \frac{1+m^2}{1-m^2}a, \quad y = \frac{2m}{1-m^2}a$$

ここで, $m = \tan \varphi$ とおくと $x = \frac{a}{\cos 2\varphi}$, $y = a \tan 2\varphi$

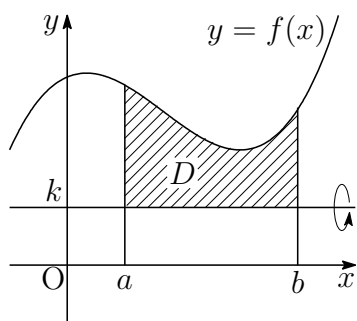
さらに, $\theta = 2\varphi$ とおくことにより $x = \frac{a}{\cos \theta}$, $y = a \tan \theta$

直角双曲線の漸近線が $y = x$ と $y = -x$ であるから, $0 \leq \theta < 2\pi$, すなわち, $0 \leq \varphi < \pi$ において, $\varphi \neq \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ である. $\varphi = \frac{\pi}{4} - 0$ のとき P は第 1 象限の無限遠点, $\varphi = \frac{\pi}{4} + 0$ のとき P は第 3 象限の無限遠点, $\varphi = \frac{3}{4}\pi - 0$ のとき P は第 2 象限の無限遠点, $\varphi = \frac{3}{4}\pi + 0$ のとき P は第 4 象限の無限遠点にある.

3.4.2 2番(3) 研究

$k > 0$ とする. 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ が, 区間 $a \leq x \leq b$ において, $f(x) \geq k$ であるとき, この区間において, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ で囲まれた領域 D を直線 $y = k$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V とすると

問 解

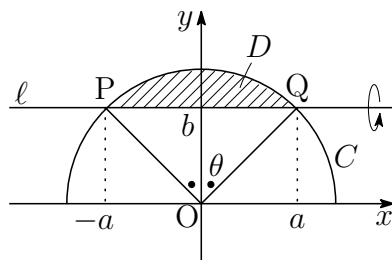


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b (y - k)^2 dy \\ &= \pi \int_a^b (y^2 - k^2) dx - 2\pi k \int_a^b (y - k) dx \end{aligned}$$

D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x , D の面積を S とすると

$$V = V_x - 2\pi kS$$

半円 $C: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ($y \geq 0$) と直線 $\ell: y = b$ ($b \geq 0$) で囲まれた領域を D とする. D を ℓ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V , D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x , D の面積を S とすると



$$V_x = \pi \int_{-a}^a (y^2 - b^2) dx = \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi a^3$$

とくに, V_x は C の半径 r に関係なく a の値により決定する.

C と ℓ の 2 つの交点 P , Q に対し, $\angle POQ = 2\theta$, $OP = OQ = r$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = r^2\theta - ab, \\ V &= V_x - 2\pi bS = \frac{4}{3}\pi a^3 - 2\pi b(r^2\theta - ab) \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{3}a^3 + ab^2 - br^2\theta \right) \end{aligned}$$

例えば, $C: x^2 + y^2 = 4$, $\ell: y = 1$ のとき, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ より

$$V = 2 \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right) \pi$$

これは, 50 ページで求めた V_2 の 2 倍に等しい.

前ページで示したように、領域 D を回転させた回転体の体積は、 D の面積 S を利用すると、簡単に求めることができる。

例題 次の領域 D_1 および D_2 をそれぞれ x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$$D_1 : \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 4 \\ y \geq 2 \end{cases} \quad D_2 : \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

解答 D_1 , D_2 の面積をそれぞれ S_1 , S_2 とする。

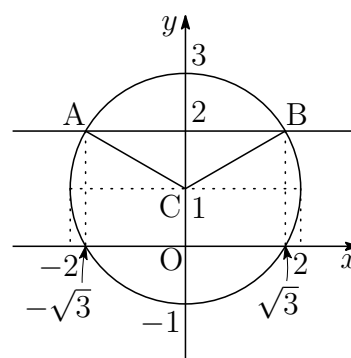
右図において、 $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_2 = \pi \cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$y = 1 + \sqrt{4-x^2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) $\cdots (*)$ とすると

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2) dx = S_1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$



D_1 および D_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1 , V_2 とする。(*) より、 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y^2 - 2^2) dx = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2) dx + \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2) dx \\ &= 2\pi S_1 + \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) + \frac{\pi}{6} (2\sqrt{3})^3 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

D_2 の境界を表す 2 曲線 $C_1 : y = f(x)$, $C_2 : y = g(x)$ を

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 1 + \sqrt{4-x^2} & (\sqrt{3} \leq |x| \leq 2) \\ 2 & (|x| \leq \sqrt{3}) \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 1 - \sqrt{4-x^2} & (\sqrt{3} \leq |x| \leq 2) \\ 0 & (|x| \leq \sqrt{3}) \end{cases} \end{aligned}$$

とすると

$$f(x) + g(x) = 2, \quad \int_{-2}^2 \{f(x) - g(x)\} dx = S_2$$

したがって

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \pi \int_{-2}^2 \{f(x)^2 - g(x)^2\} dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 \{f(x) + g(x)\} \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 2\{f(x) - g(x)\} dx = 2\pi \int_{-2}^2 \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &= 2\pi S_2 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right)
 \end{aligned}$$

補足 D_2 の重心は $(0, 1)$ であるから、パップス・ギュルダンの定理³により

$$V_2 = 2\pi S_2 \cdot 1 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right)$$

九大理系 2012 年

円 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 求める体積は $V_1 + V_2 = 2\pi \left(\frac{8\pi}{3} + 3\sqrt{3} \right)$

³http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 参照)

九大理系 2013 年

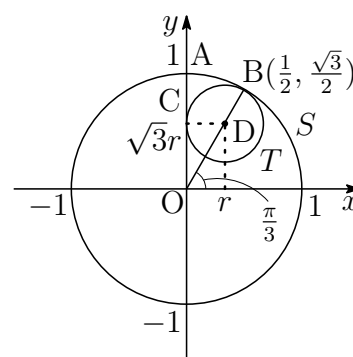
原点 O を中心とし、点 $A(0, 1)$ を通る円を S とする。点 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が、点 C で y 軸に接しているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。
- (2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 $\widehat{AB}$ ，円 T の短い方の弧 $\widehat{BC}$ ，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 (1) OB の x 軸の正の方向となす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから、 T の半径を r とすると、 D の座標は $(r, \sqrt{3}r)$ ， $OD = 2r$ である。
右の図より、 $OD + DB = 1$ であるから

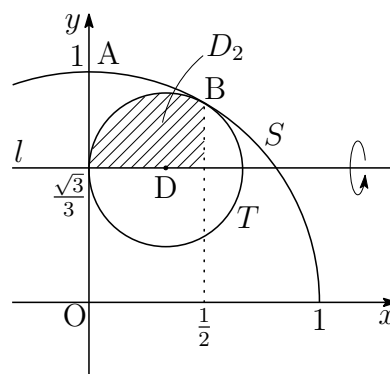
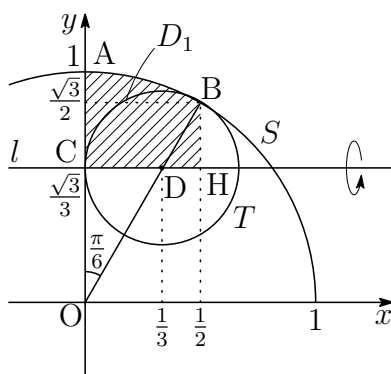
$$2r + r = 1 \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって} \quad D\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \text{半径} \frac{1}{3}$$



- (2) $y = \sqrt{1-x^2}$ とすると、 S と y 軸， l ，直線 $x = \frac{1}{2}$ で囲まれた領域 D_1 の面積は、左下の図から

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) dx &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \triangle OCD + \triangle BDH \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24} \quad \dots (*) \end{aligned}$$



D_1 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると, $x^2 + y^2 = 1$ および (*) に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} - x^2 \right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} - x^2 \right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24} \right)\end{aligned}$$

D_2 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると,

$$\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

に注意して

$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}x - x^2 \right) dx$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \frac{V_1}{\pi} - \frac{V_2}{\pi} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi\end{aligned}$$

よって
$$V = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi \right)$$

3.5 2019 年度

3.5.1 1 番 関数の内積

原点 O , $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ とし $(\vec{a} \perp \vec{b})$, 平面 OAB 上にない点 $P(\vec{p})$ をとる. m, n を実数とするととき

問 解

$$\begin{aligned} |\vec{p} - m\vec{a} - n\vec{b}|^2 &= |\vec{p}|^2 + m^2|\vec{a}|^2 + n^2|\vec{b}|^2 - 2m\vec{a} \cdot \vec{p} - 2n\vec{b} \cdot \vec{p} \\ &= |\vec{a}|^2 \left(m - \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{|\vec{a}|^2} \right)^2 + |\vec{b}|^2 \left(n - \frac{\vec{b} \cdot \vec{p}}{|\vec{b}|^2} \right)^2 + |\vec{p}|^2 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{p})^2}{|\vec{a}|^2} - \frac{(\vec{b} \cdot \vec{p})^2}{|\vec{b}|^2} \\ &\geq |\vec{p}|^2 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{p})^2}{|\vec{a}|^2} - \frac{(\vec{b} \cdot \vec{p})^2}{|\vec{b}|^2} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

ここで, 2 つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ の内積

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

を定義すると, ベクトルの内積と同様に

$$\begin{aligned} \langle f(t), g(t) \rangle &= \langle g(t), f(t) \rangle \\ k \langle f(t), g(t) \rangle &= \langle kf(t), g(t) \rangle = \langle f(t), kg(t) \rangle \quad (k \text{ は定数}) \\ \langle f(t), g(t) + h(t) \rangle &= \langle f(t), g(t) \rangle + \langle f(t), h(t) \rangle \\ |f(t)|^2 &= \langle f(t), f(t) \rangle \end{aligned}$$

が成立する. 例えば,

$$\begin{aligned} \left\langle 1, t - \frac{1}{2} \right\rangle &= \int_0^1 1 \left(t - \frac{1}{2} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} \right]_0^1 = 0, \\ \left| t - \frac{1}{2} \right|^2 &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \left[\frac{1}{3} \left(t - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}, \\ \langle 1, \sin 2n\pi t \rangle &= \int_0^1 \sin 2n\pi t dt = -\frac{1}{2n\pi} \left[\cos 2n\pi t \right]_0^1 = 0, \\ \left\langle t - \frac{1}{2}, \sin 2n\pi t \right\rangle &= \langle t, \sin 2n\pi t \rangle - \frac{1}{2} \langle 1, \sin 2n\pi t \rangle = \langle t, \sin 2n\pi t \rangle \\ &= \int_0^1 t \sin 2n\pi t dt = \left[-\frac{t}{2n\pi} \cos 2n\pi t + \frac{1}{4n^2\pi^2} \sin 2n\pi t \right]_0^1 = -\frac{1}{2n\pi}, \\ |\sin 2n\pi t|^2 &= \int_0^1 \sin^2 2n\pi t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 4n\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{4n\pi} \sin 4n\pi t \right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$f(t) - \frac{\langle e(t), f(t) \rangle}{|e(t)|^2} e(t)$ は $e(t)$ と直交するから, $t - \frac{1}{2}$ は 1 と直交することに注意して

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt &= |\sin 2n\pi t - xt - y|^2 \\ &= \left| \sin 2n\pi t - x \left(t - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{x}{2} + y \right) \right|^2 \end{aligned}$$

ここで, $p(t) = \sin 2n\pi t$, $f(t) = t - \frac{1}{2}$, $e(t) = 1$ とすると, (*) により

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt &= \left| p(t) - xf(t) - \left(\frac{x}{2} + y \right) e(t) \right|^2 \\ &\geq |p(t)|^2 - \frac{\langle f(t), p(t) \rangle^2}{|f(t)|^2} - \frac{\langle e(t), p(t) \rangle^2}{|e(t)|^2} \end{aligned}$$

(*) および前ページの結果から

$$x = \frac{\langle f(t), p(t) \rangle}{|f(t)|^2} = \frac{-\frac{1}{2n\pi}}{\frac{1}{12}}, \quad \frac{x}{2} + y = \frac{\langle e(t), f(t) \rangle}{|e(t)|^2} = 0$$

すなわち, $x = -\frac{6}{n\pi}$, $y = \frac{3}{n\pi}$ のとき, 最小値

$$|p(t)|^2 - \frac{\langle f(t), p(t) \rangle^2}{|f(t)|^2} - \frac{\langle e(t), p(t) \rangle^2}{|e(t)|^2} = \frac{1}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2n\pi}\right)^2}{\frac{1}{12}} - 0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2}$$

をとる.

原点 O, $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ とし $(\vec{a} \perp \vec{b})$, 平面 OAB 上にない点 $P(\vec{p})$ について, ベクトル

$$\vec{h} = \vec{p} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{p})}{|\vec{a}|^2} \vec{a} - \frac{(\vec{b} \cdot \vec{p})}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

が $\vec{a}$ および $\vec{b}$ と垂直で, $|\vec{p} - m\vec{a} - n\vec{b}|^2$ は $m = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{p})}{|\vec{a}|^2}$, $n = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{p})}{|\vec{b}|^2}$ のとき, 最小となる.

同様に, $e(t)$ と $f(t)$ が直交するから, 関数 (直交関数)

$$h(t) = p(t) - \frac{\langle f(t), p(t) \rangle}{|f(t)|^2} f(t) - \frac{\langle e(t), p(t) \rangle}{|e(t)|^2} e(t)$$

は, $e(t)$ および $f(t)$ と直交する. このとき, $|p(t) - xt - y|^2$ の最小値を与える.

3.5.2 5 番 メビウス変換

補足 $z = i \tan \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ を $w = \frac{z+1}{-z+1}$ に代入すると 問 解

$$w = \frac{i \tan \theta + 1}{-i \tan \theta + 1} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ より, w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある.

解説 一般に, 1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \text{ は複素数, } ad - bc \neq 0)$$

は, 拡大 (回転) kz , 平行移動 $z + \alpha$, 反転 $\frac{1}{z}$ の合成変換である.

特に反転に関して, 次の性質がある⁴.

- 原点を通らない円は, 原点を通らない円に移る.
- 原点を通る円は, 原点を通らない直線に移る.
- 原点を通らない直線は, 原点を通る円から原点を除いた図形に移る.
- 原点を通る直線は, 原点を通る直線から原点を除いた図形に移る.

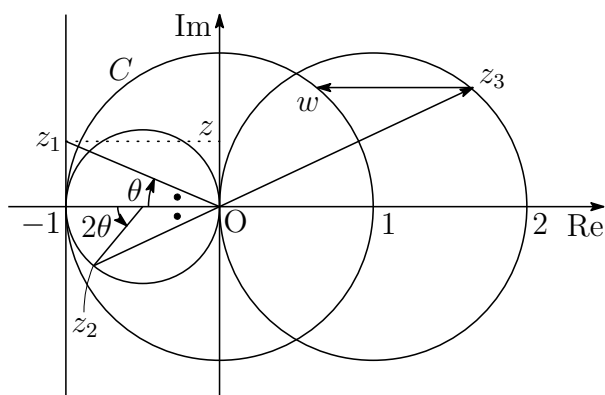
次の変換 (平行移動, 反転, 拡大, 平行移動)

$$f_1(z) = z - 1, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = -2z, \quad f_4(z) = z - 1$$

について, 合成変換 $f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ は $f(z) = \frac{z+1}{-z+1}$

$z = i \tan \theta$, $z_1 = f_1(z)$, $z_2 = f_2(z_1)$, $z_3 = f_3(z_2)$, $w = f_4(z_3)$ とすると

$$\begin{aligned} z_2 = f_2 \circ f_1(z) &= \frac{1}{i \tan \theta - 1} = \frac{-\cos \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} \\ &= -\cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \end{aligned}$$



⁴<http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai.ri.2017.pdf> [3] の解説を参照.

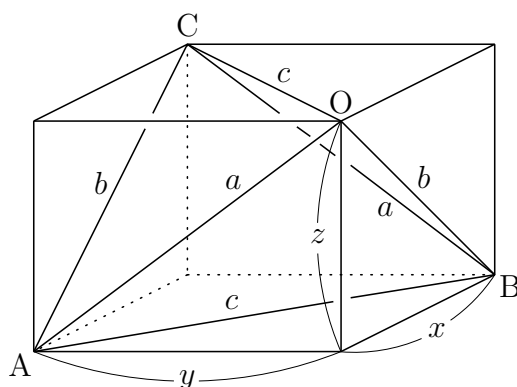
3.6 2020 年度

3.6.1 3 番 等面四面体の体積

等面四面体の体積を V とすると、 V は直方体の体積から 4 つの直角四面体を引いたものであるから

問 解

$$\begin{aligned}
 V &= xyz - 4 \cdot \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{3}xyz = \frac{1}{3}\sqrt{x^2y^2z^2} \\
 &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2} \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}
 \end{aligned}$$



$\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle COA$, $\gamma = \angle AOB$ とすると、余弦定理により

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

よって、等面四面体の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}abc\sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

また、一般の四面体 $OABC$ において、 $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle COA$, $\gamma = \angle AOB$ であるとき、その体積は⁵

$$\frac{1}{6}abc\sqrt{1 + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}$$

⁵http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (p.11)

3.7 2021 年度

3.7.1 3 番 部分積分法の応用

本来, 部分積分法

問 解

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

は漸化式である. $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数), ここで, n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする. 実際にはこのような定義はないが, $f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する. 上の積分について, 部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x) dx \end{aligned}$$

が成立する. $f(x)$ を n 次多項式とし, p ($p \neq 0$), q を定数とする.

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{px+q}, \quad g(x) = \frac{e^{px+q}}{p}, \quad g^{(-1)}(x) = \frac{e^{px+q}}{p^2}, \\ g^{(-2)}(x) &= \frac{e^{px+q}}{p^3}, \quad g^{(-3)}(x) = \frac{e^{px+q}}{p^4}, \dots, g^{(-n)}(x) = \frac{e^{px+q}}{p^{n+1}} \end{aligned}$$

とおくと

$$\int e^{px+q} f(x) dx = \frac{e^{px+q}}{p} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{p^n} \right\} + C$$

同様に, 整式 $f(x)$ について次式が得られる.

$$\begin{aligned} \int e^{x+q} f(x) dx &= e^{x+q} \{ f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots \} + C \\ \int e^{-x+q} f(x) dx &= -e^{-x+q} \{ f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots \} + C \\ \int a^{px+q} f(x) dx &= \frac{a^{px+q}}{p \log a} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{p \log a} + \frac{f''(x)}{(p \log a)^2} - \frac{f'''(x)}{(p \log a)^3} + \cdots \right\} + C \\ \int a^{x+q} f(x) dx &= \frac{a^{-x+q}}{\log a} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{\log a} + \frac{f''(x)}{(\log a)^2} - \frac{f'''(x)}{(\log a)^3} + \cdots \right\} + C \\ \int a^{-x+q} f(x) dx &= -\frac{a^{-x+q}}{\log a} \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{\log a} + \frac{f''(x)}{(\log a)^2} + \frac{f'''(x)}{(\log a)^3} + \cdots \right\} + C \end{aligned}$$

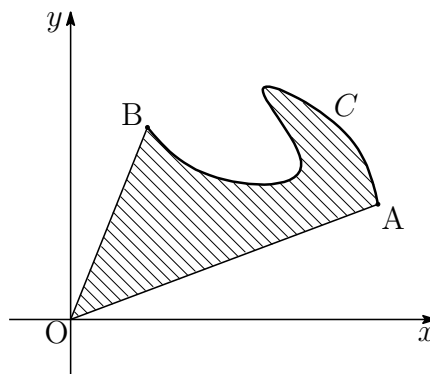
3.8 2022年度

3.8.1 5番 ガウス・グリーン の定理

ガウス・グリーン の定理

曲線 $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$)
 について, $t = \alpha, \beta$ に対応する点をそれぞれ A, B とする. C と直線 OA, OB で
 囲まれた部分の面積を S とすると
 (OB の偏角 $> OA$ の偏角)

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt$$



本題 (2) は, ガウス・グリーンを用いて求めることもできる.

問 解

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (5 \cos t + \cos 5t) \cdot 5(\cos t - \cos 5t) \\ &\quad + 5(\sin t + \sin 5t) \cdot (5 \sin t - \sin 5t) \\ &= 20 - 20(\cos 5t \cos t - \sin 5t \sin t) \\ &= 20(1 - \cos 6t) \end{aligned}$$

したがって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt \\ &= 10 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 6t) dt = 10 \left[t - \frac{1}{6} \sin 6t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{5}{3} \pi \end{aligned}$$

極方程式の面積の公式

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

において, θ は極方程式の偏角でなければならないが, ガウス・グリーン の定理

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt$$

は, 1変数関数の曲線の面積に関する定理で θ が偏角でなくてもよいし, 様々な曲線について適用できる.

阪大理系 2022 年

座標平面において、 t を媒介変数として

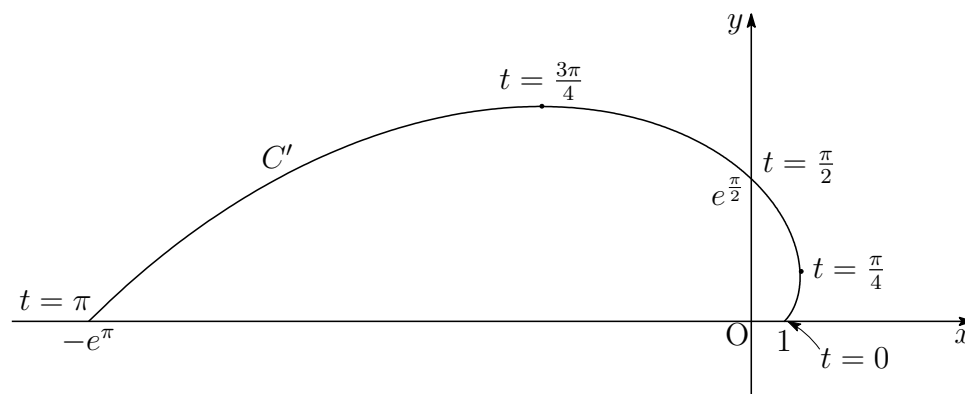
$$x = e^t \cos t + e^\pi, \quad y = e^t \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で表される曲線を C とする. 曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

解答 C を x 軸方向に $-e^\pi$ だけ平行移動させた曲線

$$C' : x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積を求めてもよい.



C' は O を極とする極方程式 $r = e^t$ ($0 \leq t \leq \pi$) で表されるから、その面積は

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2t} dt = \frac{1}{4} \left[e^{2t} \right]_0^\pi = \frac{1}{4} (e^{2\pi} - 1)$$

別解 C の方程式をそのままガウス・グリーンに適用させてもよい.

$$f(t)g'(t) - f'(t)g(t) = e^t \cos t \cdot e^t (\sin t + \cos t) - e^t (\cos t - \sin t) \cdot e^t \sin t = e^{2t}$$

したがって、求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\pi \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2t} dt = \frac{1}{4} \left[e^{2t} \right]_0^\pi = \frac{1}{4} (e^{2\pi} - 1)$$

補足 極座標 $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ について $xy' - x'y = r^2$ であるから、ガウス・グリーンの定理により、極方程式における面積公式が導かれる.

3.9 2023 年度

3.9.1 ライブニッツの公式

大分大学医 2020 年

n を任意の正の整数とし、2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ はともに n 回微分可能な関数とする。このとき以下の問いに答えなさい。

- (1) 積 $f(x)g(x)$ の第4次導関数 $\frac{d^4}{dx^4}\{f(x)g(x)\}$ を求めなさい。
- (2) 積 $f(x)g(x)$ の第 n 次導関数 $\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ における $f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$ の係数を類推し、その類推が正しいことを数学的帰納法を用いて証明しなさい。ただし、 r は負でない n 以下の整数とし、 $f^{(0)}(x) = f(x)$, $g^{(0)}(x) = g(x)$ とする。
- (3) 関数 $h(x) = x^3e^x$ の第 n 次導関数 $h^{(n)}(x)$ を求めなさい。ただし、 e は自然対数の底であり、 $n \geq 4$ とする。

解答 (1) $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(1)}(x) \quad \cdots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)\} \\ &= f^{(2)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) \\ &\quad + f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(2)}(x) \\ &= f^{(2)}(x)g^{(0)}(x) + 2f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(2)}(x) \\ \frac{d^3}{dx^3}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(2)}(x)g^{(0)}(x)\} + 2\frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(1)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(2)}(x)\} \\ &= f^{(3)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) \\ &\quad + 2\{f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(2)}(x)\} \\ &\quad + f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(3)}(x) \\ &= f^{(3)}(x)g^{(0)}(x) + 3f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) \\ &\quad + 3f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(3)}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dx^4}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(3)}(x)g^{(0)}(x)\} + 3\frac{d}{dx}\{f^{(2)}(x)g^{(1)}(x)\} \\ &\quad + 3\frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(2)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(3)}(x)\} \\ &= f^{(4)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) \\ &\quad + 3\{f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(2)}(x)\} \\ &\quad + 3\{f^{(2)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(3)}(x)\} \\ &\quad + f^{(1)}(x)g^{(3)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(4)}(x) \\ &= \mathbf{f^{(4)}(x)g^{(0)}(x) + 4f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) + 6f^{(2)}(x)g^{(2)}(x)} \\ &\quad + \mathbf{4f^{(1)}(x)g^{(3)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(4)}(x)} \end{aligned}$$

(2) $\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ における $f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$ の係数を ${}_nC_r$ であると推定すると

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\} = \sum_{r=0}^n {}_nC_r f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x) \quad \cdots (*)$$

[1] ① から $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = {}_1C_0 f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) + {}_1C_1 f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)$

したがって、 $n=1$ のとき、 $(*)$ は成立する。

[2] $n = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$\frac{d^k}{dx^k} \{f(x)g(x)\} = \sum_{r=0}^k {}_k C_r f^{(k-r)}(x) g^{(r)}(x)$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \{f(x)g(x)\} &= \sum_{r=0}^k {}_k C_r \{f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x)\} \\ &= \sum_{r=0}^k {}_k C_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\ &\quad + \sum_{r=0}^k {}_k C_r f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x) \\ &= f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{r=1}^k {}_k C_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{k-1} {}_k C_r f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\ &= f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{r=1}^k {}_k C_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\ &\quad + \sum_{r=1}^k {}_k C_{r-1} f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\ &= {}_{k+1}C_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) \\ &\quad + \sum_{r=1}^k ({}_k C_r + {}_k C_{r-1}) f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\ &\quad + {}_{k+1}C_{k+1} f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\ &= {}_{k+1}C_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) \\ &\quad + \sum_{r=1}^k {}_{k+1}C_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\ &\quad + {}_{k+1}C_{k+1} f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\ &= \sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}C_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \end{aligned}$$

したがって, $n = k + 1$ のときも $(*)$ が成立する.

[1] , [2] より, すべての自然数 n について $(*)$ が成立する.

(3) $h(x) = x^3 e^x = e^x x^3$ について, (2) の結果を適用すると ($n \geq 4$)

$$\begin{aligned}
 h^{(n)}(x) &= \sum_{r=0}^n {}_n C_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} \\
 &= \sum_{r=0}^3 {}_n C_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} + \sum_{r=4}^n {}_n C_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} \\
 &= \sum_{r=0}^3 {}_n C_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} \\
 &= {}_n C_0 e^x \cdot x^3 + {}_n C_1 e^x \cdot 3x^2 + {}_n C_2 e^x \cdot 6x + {}_n C_3 e^x \cdot 6 \\
 &= e^x \{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\}
 \end{aligned}$$

補足 (2) の結果は, ライブニッツ (Leibniz) の公式と呼ばれている.

3.9.2 第 n 階微分方程式 (線形微分方程式)

大分大学医 2010 年

微分可能な関数 $y = f(x)$ が次の方程式を満たすとする.

問 解

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 f(x) = 0 \quad (\text{A})$$

ここに n は自然数, a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) は実数の定数で, $a_n \neq 0$ である. また, $y^{(k)} = f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の k 次導関数で $y^{(0)} = f^{(0)}(x) = f(x)$ とする. (A) のような方程式を第 n 階微分方程式といい, (A) に対して t の n 次方程式

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0 \quad (\text{B})$$

を (A) の特性方程式という. このとき次の問いに答えよ.

- (1) 特性方程式 (B) の解が実数 r であるとき, 関数 $y = e^{rx}$ が方程式 (A) を満たすことを証明せよ.
- (2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解^(注)にもつとき, 次の t に関する方程式は r を $k-1$ 重解にもつことを証明せよ. ただし, $k = 2, 3, \dots$ とする.

$$na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(注) t の m 次方程式が適当な多項式 $Q(t)$ を用いて $(t-r)^k Q(t) = 0$ となるとき, $t = r$ をこの方程式の k 重解と定義する. ただし, $k = 1, 2, \dots$ とする.

- (3) 実数の定数 r に対して x の関数を $y_i = x^i e^{rx}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) とする. このとき, $y_j^{(n)}$ を x , $y_{j-1}^{(n-1)}$ および $y_{j-1}^{(n)}$ を用いて表せ. ただし, $j = 1, 2, 3, \dots$ とする.
- (4) 実数 r が n 次方程式 (B) の k 重解であるとき $y_i = x^i e^{rx}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k-1$) が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ. ただし, k は自然数とする.

解答 (1) 実数 r は特性方程式 (B) の解であるから

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

両辺に e^{rx} を掛けると

$$\begin{aligned} a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} &= 0 \\ a_n (e^{rx})^{(n)} + a_{n-1} (e^{rx})^{(n-1)} + \cdots + a_1 (e^{rx})^{(1)} + a_0 e^{rx} &= 0 \end{aligned}$$

よって、関数 $y = e^{rx}$ は方程式 (A) を満たす.

(2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解にもつから、 $n-k$ 次多項式 $Q(t)$ を用いて

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = (t-r)^k Q(t) \quad \cdots (*)$$

とおける. この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2 a_2 t + a_1 &= k(t-r)^{k-1} Q(t) + (t-r)^k Q'(t) \\ &= (t-r)^{k-1} \{k Q(t) + (t-r) Q'(t)\} \end{aligned}$$

よって、次の方程式は、 r を $k-1$ 重解にもつ.

$$n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2 a_2 t + a_1 = 0$$

(3) $y_j = x^j e^{rx}$ より、 $y_j = x y_{j-1}$ であるから、ライプニッツの公式を用いて微分すると

$$\begin{aligned} y_j^{(n)} &= (x y_j)^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{(n-k)} y_{j-1}^{(k)} \\ &= \sum_{k=n-1}^n {}_n C_k x^{(n-k)} y_{j-1}^{(k)} = n y_{j-1}^{(n-1)} + x y_{j-1}^{(n)} \end{aligned}$$

(4) (*) の $Q(t)$ を, 定数 $b_i (i = 0, 1, 2, \dots, n-k)$ を用いて ($b_{n-k} = a_n$)

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i$$

とおくと, (*) から

$$\begin{aligned} a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 &= (t-r)^k Q(t) \\ &= \sum_{j=0}^k {}_k C_j t^{k-j} (-r)^j \sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-r)^j t^{k+i-j} \end{aligned}$$

上式から

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-r)^j y^{(k+i-j)}$$

ここで $z = \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-r)^j y^{(k-j)}$ とおくと

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i z^{(i)}$$

このとき, 微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \dots (**)$$

は, 次のようになる.

$$b_0 z + b_1 z' + b_2 z'' + \dots + b_{n-k} z^{(n-k)} = 0$$

したがって, $z = 0$ は微分方程式 (**) の解の1つであるから

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-r)^j y^{(k-j)} &= 0 \\ e^{-rx} \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-r)^j y^{(k-j)} &= 0 \\ \sum_{j=0}^k {}_k C_j y^{(k-j)} (e^{-rx})^{(j)} &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに，ライプニッツの公式により

$$(ye^{-rx})^{(k)} = 0$$

上式の両辺を k 回積分すると，右辺は x の $k-1$ 次式になるので

$$ye^{-rx} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1}$$

となる (c_j は定数 ($j = 0, 1, 2, \dots, k-1$)).

したがって，次式は微分方程式 (**) の解の 1 つである．

$$y = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$$

よって， x^je^{rx} ($j = 0, 1, 2, \dots, k-1$) は，(**) をみたす．

解説

例1 微分方程式 $y' - \alpha y = 0$ を解け $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$.

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y'e^{-\alpha x} + y(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})' = 0$$

これを積分すると $ye^{-\alpha x} = C$ よって $y = Ce^{\alpha x}$ (C は定数)

例2 $\alpha \neq \beta$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とするとき, 次の微分方程式を解け.

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

解答 与式から $(y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) = 0$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(y' - \beta y)'e^{-\alpha x} + (y' - \beta y)(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{(y' - \beta y)e^{-\alpha x}\}' = 0$$

これを積分すると

$$(y' - \beta y)e^{-\alpha x} = A_1 \quad \text{ゆえに} \quad y' - \beta y = A_1 e^{\alpha x} \quad (A_1 \text{ は定数})$$

となる. 同様にして $y' - \alpha y = A_2 e^{\beta x}$ (A_2 は定数)

よって, 上の2式から, y' を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

例3 例2において, $\beta = \alpha$ とした, 次の微分方程式を解け.

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha x})'' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})^{(2)} = 0$$

これを2回積分すると

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

例 4 $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\gamma \neq \alpha$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ とするとき,
次の微分方程式を解け.

$$y''' - (\alpha + \beta + \gamma)y'' + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)y' - \alpha\beta\gamma y = 0$$

解答 与式から

$$\{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\}' - \alpha\{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\} = 0$$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$\begin{aligned} \{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\}'e^{-\alpha x} + \{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\}(e^{-\alpha x})' &= 0 \\ [\{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\}e^{-\alpha x}]' &= 0 \end{aligned}$$

これを積分すると

$$\begin{aligned} \{y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y\}e^{-\alpha x} &= A_1 \\ y'' - (\beta + \gamma)y' + \beta\gamma y &= A_1 e^{\alpha x} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

同様にして

$$y'' - (\gamma + \alpha)y' + \gamma\alpha y = A_2 e^{\beta x} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = A_3 e^{\gamma x} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } (\alpha - \beta)(y' - \gamma y) = A_1 e^{\alpha x} - A_2 e^{\beta x}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ より } (\beta - \gamma)(y' - \alpha y) = A_2 e^{\beta x} - A_3 e^{\gamma x}$$

上の 2 式から, y' を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} + C_3 e^{\gamma x} \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ は定数})$$

例5 例4において, $\gamma = \alpha$ とした, 次の微分方程式を解け.

$$y''' - (2\alpha + \beta)y'' + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)y' - \alpha^2\beta y = 0$$

解答 与式から

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)' - \beta(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y) = 0$$

両辺に $e^{-\beta x}$ を掛けると

$$\begin{aligned} (y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)' e^{-\beta x} + (y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)(e^{-\beta x})' &= 0 \\ \{(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\beta x}\}' &= 0 \end{aligned}$$

これを積分すると

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\beta x} = A_1$$

両辺に $e^{(\beta-\alpha)x}$ を掛けると

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\alpha x} = A_1 e^{(\beta-\alpha)x}$$

ここで, 上式の左辺は

$$\begin{aligned} (y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\alpha x} &= y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha x})'' \\ &= (ye^{-\alpha x})^{(2)} \end{aligned}$$

となる. したがって

$$(ye^{-\alpha x})^{(2)} = A_1 e^{(\beta-\alpha)x}$$

これを, x について2回積分すると, 改めて定数 C_1, C_2, C_3 を用いて

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 + C_3 e^{(\beta-\alpha)x} \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} + C_3 e^{\beta x}$$

例6 例4において, $\alpha = \beta = \gamma$ とした, 次の微分方程式を解け.

$$y''' - 3\alpha y'' + 3\alpha^2 y' - \alpha^3 y = 0$$

解答 与式の両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$\begin{aligned} y''' e^{-\alpha x} + 3y''(e^{-\alpha x})' + 3y'(e^{-\alpha x})'' + y(e^{-\alpha x})''' &= 0 \\ (ye^{-\alpha x})^{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

これを x について3回積分すると $ye^{-\alpha x} = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

よって $y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)e^{\alpha x}$ (C_1, C_2, C_3 は定数)

例 7 放射性同位体の原子数は、時間の経過により (原子の崩壊), その原子数は減少する. 原子数 N は時刻 t の減少関数で, その変化率は $\frac{dN}{dt} < 0$ で, N に比例し

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \dots (*)$$

であることが分かっている (崩壊定数 λ は物質の種類による固有の定数).

$$N' = \frac{dN}{dt} \text{ とおくと} \quad N' + \lambda N = 0$$

例 1 の結果を利用してこれを解くと $N = Ce^{-\lambda t}$

ここで, 初期条件 $t = 0$ のとき $N = N_0$ とすると, $C = N_0$ より

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \dots \textcircled{1}$$

さらに, $t = T$ (T は半減期) のとき $N = \frac{1}{2}N_0$ とすると

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T} \quad \text{ゆえに} \quad e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

崩壊定数 λ は, $(*)$ により個体数 N と単位時間あたり (1 秒間) の崩壊数を観測することで求めることができる. したがって, 半減期 T は $\textcircled{2}$ から

$$T = \frac{\log 2}{\lambda}$$

例8 ばね定数 $k[\text{N/m}]$ のばねの一端が固定され、他端に質量 $m[\text{kg}]$ のおもりが付けられ、なめらかな水平面を運動している。自然長の位置を原点 O とし、ばねが伸びる向きを変位 $x[\text{m}]$ の正の向きとし、おもりの加速度を $a[\text{m/s}^2]$ とすると、次式が成り立つ。

$$ma = -kx$$

このとき、 $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ より、 $a = x''$ とおくと

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

となる、このとき特性方程式の解が $\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ であるから、例2の結果から

$$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

を得る。初期条件を $t = 0$ のとき、 $x = A$ 、 $v = \frac{dx}{dt} = 0$ とすると

$$C_1 + C_2 = A, \quad C_1 - C_2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

したがって $x = \frac{A}{2} \left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \right)$

上式にオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を代入すると⁶

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

この単振動の周期を $T[\text{s}]$ とすると

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

を得る。具体的な線形微分方程式については、以下に紹介している。

http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/diff_eq.pdf

⁶証明は <http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf> を参照。

3.10 2024 年度

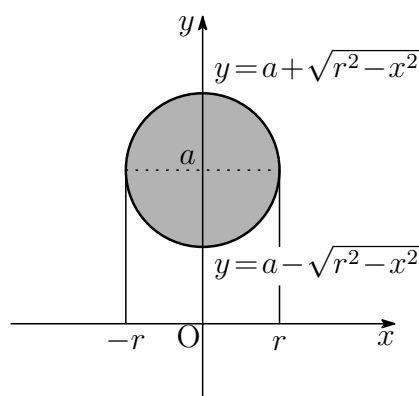
3.10.1 回転体の体積

例題 $0 < r < a$ とする. 円 $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

解答 $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ を y について解くと

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

半円 $y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x = -r$, $x = r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_1 , 半円 $y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x = -r$, $x = r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とすると



$$V_1 = \pi \int_{-r}^r (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx, \quad V_2 = \pi \int_{-r}^r (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$$

$$\text{よって} \quad V = V_1 - V_2 = 4\pi a \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4\pi a \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 = \mathbf{2\pi^2 r^2 a}$$

別解 $C_1: y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$, $C_2: y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ とする ($-r \leq x \leq r$).

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2 \text{ より } y^2 = r^2 - x^2 - a^2 + 2ay$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y^2 dx &= \int_{-r}^r \{(r^2 - x^2) + a^2 + 2a(y - a)\} dx \\ &= \int_{-r}^r \{(x + r)(r - x) + a^2\} dx + 2a \int_{C_1} (y - a) dx \\ &= \frac{2}{3} r^3 + 2a^2 r + 2a \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2}{3} r^3 + 2a^2 r + \pi r^2 a \\ \int_{C_2} y^2 dx &= \int_{-r}^r \{(r^2 - x^2) + a^2 - 2a(a - y)\} dx \\ &= \int_{-r}^r \{(x + r)(r - x) + a^2\} dx - 2a \int_{C_2} (a - y) dx \\ &= \frac{2}{3} r^3 + 2a^2 r - 2a \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2}{3} r^3 + 2a^2 r - \pi r^2 a \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{V}{\pi} = \int_{C_1} y^2 dx - \int_{C_2} y^2 dx = 2\pi r^2 a \quad \text{よって} \quad V = \mathbf{2\pi^2 r^2 a}$$

阪大理系 2024 年 4

$a > 1$ とする. xy 平面において, 点 $(a, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする.

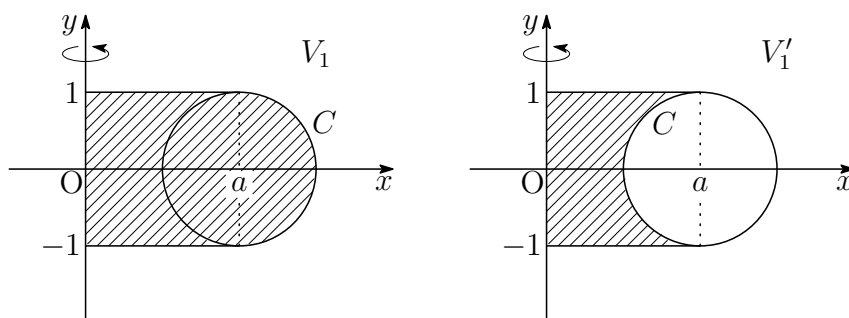
(1) 円 C の $x \geq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y = 1$, $y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ.

(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする. (1) における V_1 について, $V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ.

解答 (1) 円 $C: (x-a)^2 + y^2 = 1$ より $x^2 = -(y+1)(y-1) - a^2 + 2ax$

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= - \int_{-1}^1 (y+1)(y-1) dy - a^2 \int_{-1}^1 dy + 2a \int_{-1}^1 x dy \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2a^2 + 2a \left(2a + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a \end{aligned} \quad (*)$$

よって $V_1 = \pi \left(\frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a \right)$



別解

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_{-1}^1 x^2 dy = \int_{-1}^1 (a + \sqrt{1-y^2}) dy \\ &= \int_{-1}^1 (1 - y^2 + a^2 + 2a\sqrt{1-y^2}) dy \\ &= \frac{1}{6}(1+1)^3 + 2a^2 + 2a \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a \end{aligned}$$

よって $V_1 = \pi \left(\frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a \right)$

- (2) 右上の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V'_1 とすると, (*) に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V'_1}{\pi} &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2a^2 + 2a \left(2a - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{4}{3} + 2a^2 - \pi a\end{aligned}$$

$$V_2 = V_1 - V'_1 \text{ であるから } \quad V_2 = 2\pi^2 a$$

上式および (1) の結果を $V_1 = 2V_2$ に代入すると

$$\pi \left(\frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a \right) = 2 \times 2\pi^2 a$$

$$\text{整理すると} \quad 2a^2 - 3\pi a + \frac{4}{3} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(a) = 2a^2 - 3\pi a + \frac{4}{3} \text{ とすると } f(1) = \frac{10}{3} - 3\pi < 0$$

2 次方程式 $f(a) = 0$ は 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつことに注意して, ① を解くと

$$a = \frac{9\pi + \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}$$

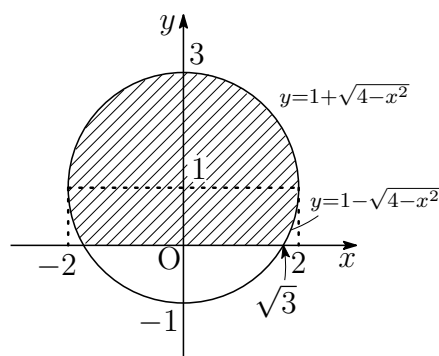
九大理系 2012 年 ①

円 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 立体は、右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体である。
 円の方程式 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ を y について解くと

$$y = 1 \pm \sqrt{4 - x^2}$$

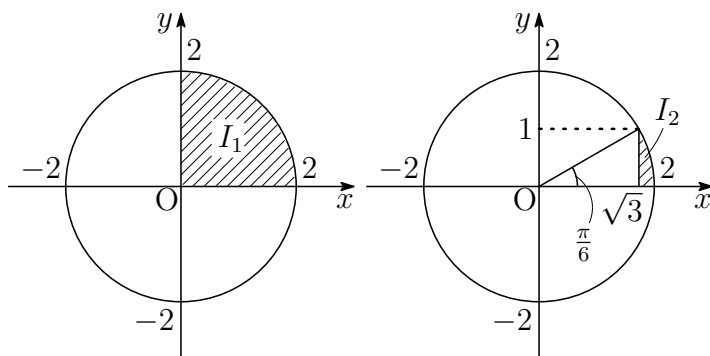
斜線部分は、 y 軸に関して対称であるから、求める回転体の体積を V とすると



$$\begin{aligned} V &= 2 \left\{ \pi \int_0^2 (1 + \sqrt{4 - x^2})^2 dx - \pi \int_{\sqrt{3}}^2 (1 - \sqrt{4 - x^2})^2 dx \right\} \\ &= 2\pi \left\{ \int_0^2 (5 - x^2 + 2\sqrt{4 - x^2}) dx - \int_{\sqrt{3}}^2 (5 - x^2 - 2\sqrt{4 - x^2}) dx \right\} \\ &= 2\pi \left\{ \int_0^{\sqrt{3}} (5 - x^2) dx + 2 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx + 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4 - x^2} dx \right\} \end{aligned}$$

ここで、 $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, $I_2 = \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ とおくと、これらはそれぞれ下の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = \pi \\ I_2 &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 1 \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



よって

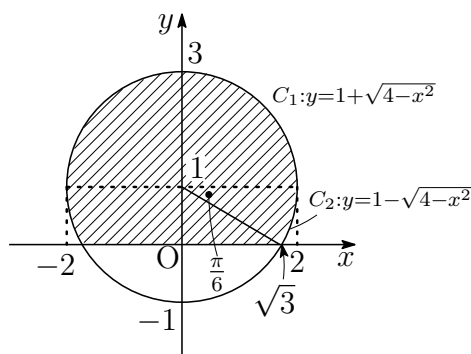
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left\{ \left[5x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} + 2 \cdot \pi + 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{16}{3} \pi^2 + 6\sqrt{3} \pi \end{aligned}$$

別解 $C_1: y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 2$), $C_2: y = 1 - \sqrt{4 - x^2}$ ($\sqrt{3} \leq x \leq 2$) とする.

下の図から

$$\int_{C_1} y \, dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 = \pi + 2$$

$$\int_{C_2} y \, dx = 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$$



$x^2 + (y - 1)^2 = 4$ より, $y^2 = 3 - x^2 + 2y$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y^2 \, dx &= \int_0^2 (3 - x^2) \, dx + 2 \int_{C_1} y \, dx \\ &= \left[3x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + 2(\pi + 2) = \frac{22}{3} + 2\pi \\ \int_{C_2} y^2 \, dx &= \int_{\sqrt{3}}^2 (3 - x^2) \, dx + 2 \int_{C_2} y \, dx \\ &= \left[3x - \frac{x^3}{3} \right]_{\sqrt{3}}^2 + 2 \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{22}{3} - 3\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_{C_1} y^2 \, dx - \int_{C_2} y^2 \, dx \\ &= \left(\frac{22}{3} + 2\pi \right) - \left(\frac{22}{3} - 3\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi \right) = \frac{8}{3}\pi + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって $V = 2\pi \left(\frac{8}{3}\pi + 3\sqrt{3} \right)$

阪大理系 2002 年 [5]

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と点 $P(0, \sin \alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある. ただし $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする. 円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし, A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ ℓ_A, ℓ_B とする. 2 直線 ℓ_A, ℓ_B ではさまれた領域の部分で, 円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1 , 円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする. いま, D_1, D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha), V_2(\alpha)$ とする.

(1) $V_1(\alpha), V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ.

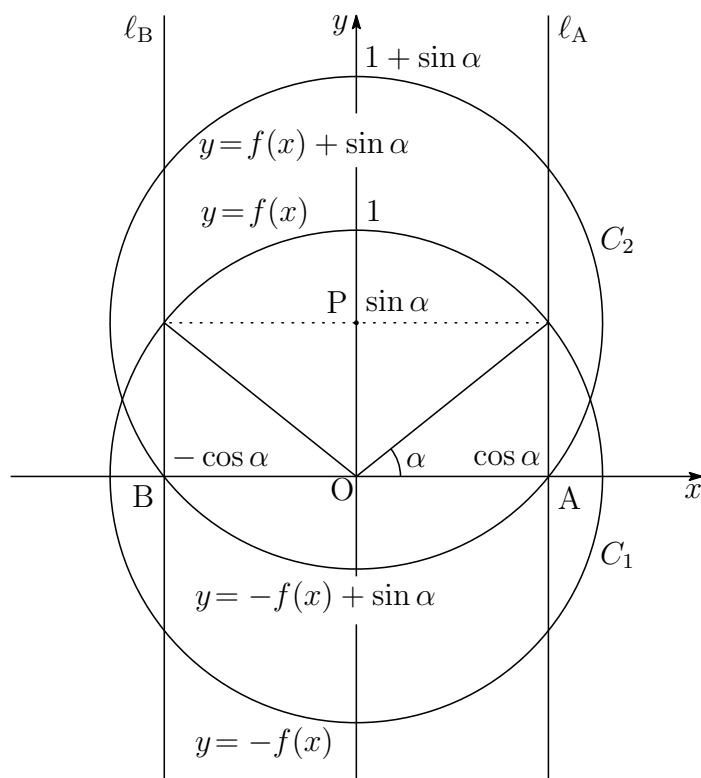
(2) α が $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ.

解答 (1) $-\cos \alpha \leq x \leq \cos \alpha$ における C_1 の x 軸の上側の曲線を $y = f(x)$ とすると

$$\begin{aligned} \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} f(x) dx &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot 1^2 (\pi - 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2} (2 \sin \alpha \cos \alpha + \pi - 2\alpha), \\ \frac{V_1(\alpha)}{\pi} &= \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \{(f(x) + \sin \alpha)^2 - f(x)^2\} dx \\ &= (2 \sin \alpha) \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} f(x) dx + (\sin^2 \alpha) \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} dx \\ &= (2 \sin \alpha \cos \alpha + \pi - 2\alpha) \sin \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= (4 \sin \alpha \cos \alpha + \pi - 2\alpha) \sin \alpha, \\ \frac{V_2(\alpha)}{\pi} &= \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \{|-f(x)|^2 - |-f(x) + \sin \alpha|^2\} dx \\ &= (2 \sin \alpha) \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} f(x) dx - (\sin^2 \alpha) \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} dx, \\ \frac{V_1(\alpha)}{\pi} - \frac{V_2(\alpha)}{\pi} &= (2 \sin^2 \alpha) \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} dx = 4 \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V_1(\alpha) = \pi(4 \sin \alpha \cos \alpha + \pi - 2\alpha) \sin \alpha$$

$$V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 4\pi \sin^2 \alpha \cos \alpha$$



(2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より, $t = \cos \alpha$, $V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = g(t)$ とおくと

$$g(t) = 4\pi(1 - t^2)t = 4\pi(t - t^3) \quad (0 < t < 1)$$

したがって $g'(t) = 4\pi(1 - 3t^2)$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		$\nearrow$	$\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	

よって, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 最大値 $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$ をとる.