

2023年12月吉日

平面曲線の曲率について
— 2次曲線と曲率中心 —

SSH事業 Haruta Maezaki

1 平面曲線の曲率中心

座標平面上の曲線 C が、媒介変数 s を用いて

$$x = f(s), \quad y = g(s)$$

で表されているとき、 C 上の3点を

$$P(f(t), g(t)), Q(f(u), g(u)), R(f(v), g(v))$$

とする ($t < u < v$).

3点P, Q, Rを通る円を $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 - r^2 = 0$ とし,

$$h(s) = \{f(s) - c_1\}^2 + \{g(s) - c_2\}^2 - r^2$$

とおくと, $h(t) = h(u) = h(v) = 0$ である.

$h(t) = h(u) = 0$ であるから, ロル(Rolle)の定理により

$$h'(t_1) = 0 \quad (t < t_1 < u)$$

を満たす t_1 が存在する. 同様に $h(u) = h(v) = 0$ から

$$h'(t_2) = 0 \quad (u < t_2 < v)$$

を満たす t_2 が存在する.

さらに $h'(t_1) = h'(t_2) = 0$ にロルの定理を適用すると

$$h''(t_3) = 0 \quad (t_1 < t_3 < t_2)$$

を満たす t_3 が存在する． Q , R が P に限りなく近づくとき，
 $u \rightarrow t$, $v \rightarrow t$ となり，上の諸式から

$$h(t) = 0, \quad h'(t) = 0, \quad h''(t) = 0$$

が成立する．

$$h(s) = \{f(s) - c_1\}^2 + \{g(s) - c_2\}^2 - r^2 \text{ から}$$

$$h'(s) = 2\{f(s) - c_1\}f'(s) + 2\{g(s) - c_2\}g'(s),$$

$$\begin{aligned} h''(s) = 2f'(s)^2 + 2\{f(s) - c_1\}f''(s) \\ + 2g'(s)^2 + 2\{g(s) - c_2\}g''(s) \end{aligned}$$

$$h'(t) = 0, \quad h''(t) = 0 \text{ であるから}$$

$$f'(t)\{c_1 - f(t)\} + g'(t)\{c_2 - g(t)\} = 0$$

$$f''(t)\{c_1 - f(t)\} + g''(t)\{c_2 - g(t)\} = f'(t)^2 + g'(t)^2$$

$f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t) \neq 0$ のとき，前の2式から

$$c_1 - f(t) = -\frac{g'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}$$

$$c_2 - g(t) = \frac{f'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}$$

上式を $h(t) = 0$ に適用すると，次式を得る．

$$r = \frac{\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)|}$$

これまでに求めた

$$c_1 = f(t) - \frac{g'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}$$

$$c_2 = g(t) + \frac{f'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}$$

$$r = \frac{\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)|}$$

について，点 (c_1, c_2) を C 上の点 $P(f(t), g(t))$ における曲率中心といい， r は曲率円 (接触円) の半径という．

2 曲率

C 上の2点 $P(f(t), g(t))$, $Q(f(u), g(u))$ を結ぶ弧長を s とし, $u \rightarrow t$ とすることにより, 次式が成立する

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}$$

C 上の点 P における接ベクトル $(f'(t), g'(t))$ の x 軸の正の向きとなす角 (偏角) を θ とすると

$$\tan \theta = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

t を変数とし, $\tan \theta = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ の両辺を t で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{f'(t)^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = \frac{f'(t)^2 + g'(t)^2}{f'(t)^2} \text{ より}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2}$$

曲率 κ は弧長 s に対する偏角 θ の変化率として定義される。

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}} \\ &= \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

また， $\frac{1}{\kappa}$ を曲率半径といい，その絶対値は，曲率円（接触円）の半径と等しい． $f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t) = 0$ のとき，曲率半径は定義されない。

3 曲線 $y = g(x)$ の曲率と曲率中心

曲率 κ および曲率中心 (c_1, c_2) は

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{g''(x)}{\{1 + g'(x)^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ c_1 &= x - \frac{g'(x)\{1 + g'(x)^2\}}{g''(x)} \\ c_2 &= g(x) + \frac{1 + g'(x)^2}{g''(x)}\end{aligned}$$

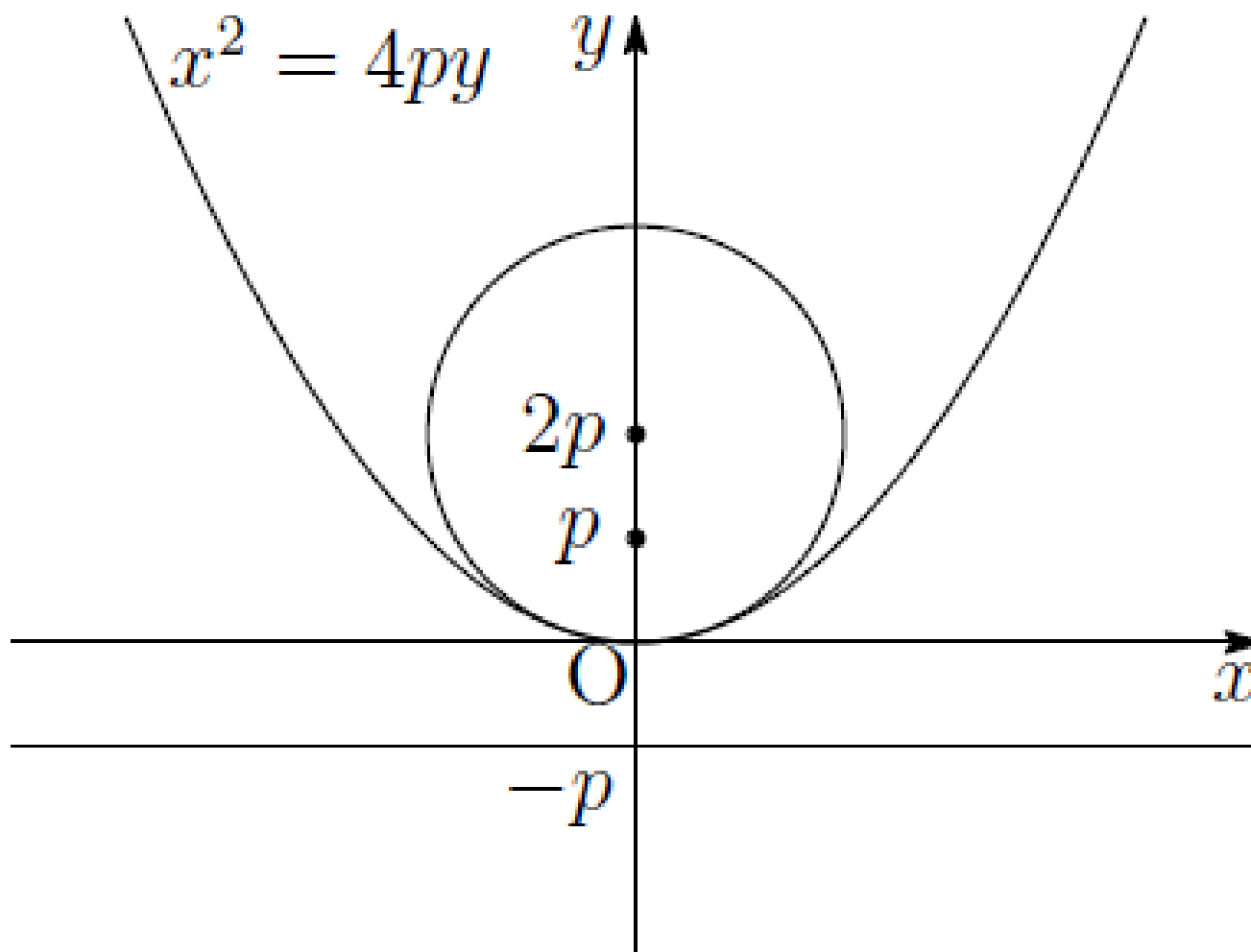
κ が極値をとる点を頂点という．とくに， $g(x)$ が2次関数のとき， $g'(x) = 0$ となる点が頂点である．

4 放物線 $x^2 = 4py$ の曲率中心

放物線 $x^2 = 4py$ の頂点は、 $g(x) = \frac{x^2}{4p}$ より、 $g'(x) = 0$ を解いて、 $(0, 0)$ となる． $g(0) = 0$ 、 $g'(0) = 0$ 、 $g''(0) = \frac{1}{2p}$ より、この点における曲率 κ および曲率中心 (c_1, c_2) は

$$\kappa = \frac{1}{2p} \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 2p$$

放物線 $x^2 = 4py$ の頂点における曲率中心，焦点，頂点，準線が等間隔に並んでいる．



5 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の曲率中心

$a > b$ のとき, $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ とすると曲率 κ および曲率中心 (c_1, c_2) は

$$\kappa = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$c_1 = a \cos \theta - \frac{b \cos \theta \cdot (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)}{ab}$$

$$c_2 = b \sin \theta - \frac{a \sin \theta \cdot (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)}{ab}$$

すなわち $c_1 = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \theta, c_2 = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \theta$

$a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta = (a^2 - b^2) \sin^2 \theta + b^2$ より,

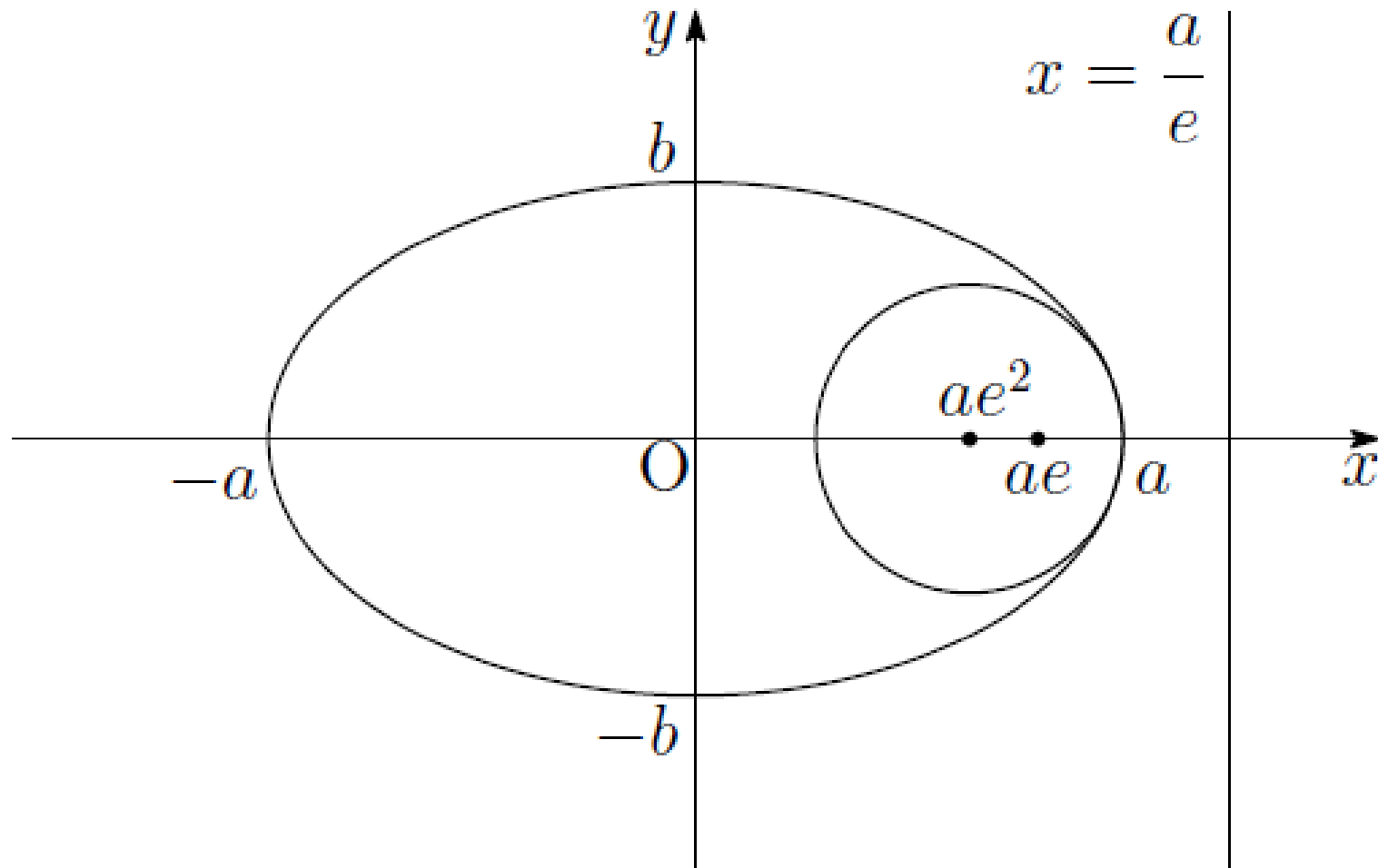
κ は点 $(\pm a, 0)$ で極大, 点 $(0, \pm b)$ で極小となる.

したがって, これらの4点が楕円の頂点である.

例えば, 頂点 $(a, 0)$ における $(\theta = 0)$ 曲率 κ および曲率中心 (c_1, c_2) は, (e は離心率)

$$\kappa = \frac{a}{b^2}, \quad c_1 = \frac{a^2 - b^2}{a} = ae^2, \quad c_2 = 0$$

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の頂点 $(a, 0)$ における曲率中心，焦点，
頂点，準線が x 軸上で等比点列をなしている．



6 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の曲率中心

$$x = f(\theta) = \frac{a}{\cos \theta}, \quad y = g(\theta) = \frac{b}{\tan \theta} \quad \text{とおくと}$$

$$f'(\theta) = \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta}, \quad g'(\theta) = \frac{b}{\cos^2 \theta},$$

$$f''(\theta) = \frac{a(\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta)}{\cos^3 \theta}, \quad g''(\theta) = \frac{2b \sin \theta}{\cos^3 \theta},$$

$$f'(\theta)g''(\theta) - f''(\theta)g'(\theta) = -\frac{ab}{\cos^3 \theta},$$

$$\begin{aligned} f'(\theta)^2 + g'(\theta)^2 &= \left(\frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right)^2 + \left(\frac{b}{\cos^2 \theta} \right)^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2}{\cos^4 \theta} - \frac{a^2}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$-\frac{ab}{\cos^3 \theta} = -\frac{\operatorname{sgn}(\cos \theta)ab}{(\cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \text{ に注意すると}$$

$$\kappa = \frac{f'(\theta)g''(\theta) - f''(\theta)g'(\theta)}{\{f'(\theta)^2 + g'(\theta)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa = - \frac{\operatorname{sgn}(\cos \theta) ab}{\left(\frac{a^2 + b^2}{\cos^2 \theta} - a^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$c_1 = \frac{a}{\cos \theta} - \frac{\frac{b}{\cos^2 \theta} \left(\frac{a^2 + b^2}{\cos^4 \theta} - \frac{a^2}{\cos^2 \theta} \right)}{\frac{ab}{\cos^3 \theta}}$$

$$c_2 = b \tan \theta + \frac{\frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(\frac{a^2 + b^2}{\cos^4 \theta} - \frac{a^2}{\cos^2 \theta} \right)}{\frac{ab}{\cos^3 \theta}}$$

すなわち $c_1 = \frac{a^2 + b^2}{a \cos^3 \theta}, \quad c_2 = -\frac{a^2 + b^2}{b} \tan^3 \theta$

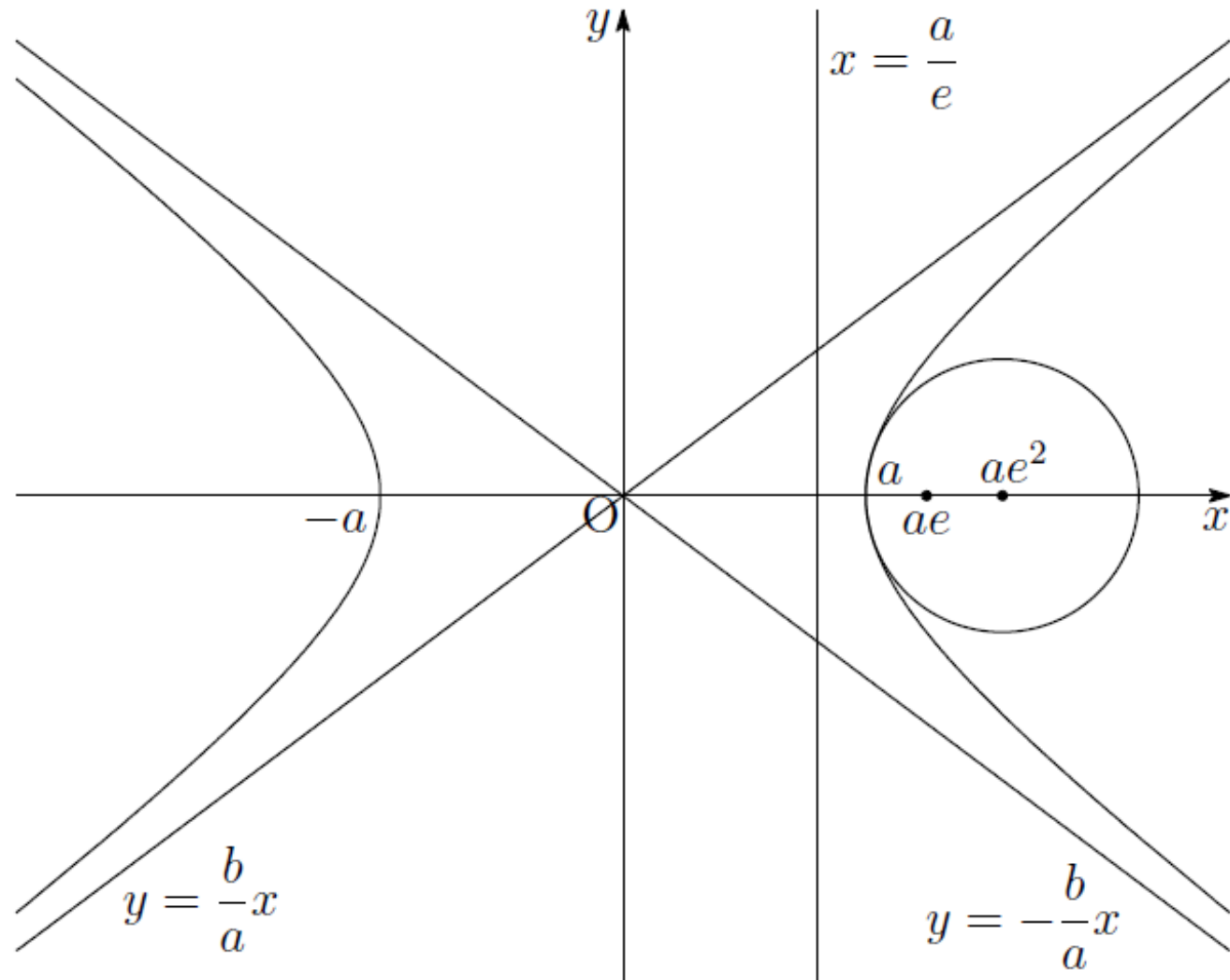
$\kappa = -\frac{\operatorname{sgn}(\cos \theta)ab}{\left(\frac{a^2 + b^2}{\cos^2 \theta} - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ より, κ は, 点 $(\pm a, 0)$ で極値

をとり, これらの2点が双曲線の頂点である.

例えば, 頂点 $(a, 0)$ における $(\theta = 0)$ 曲率 κ および曲率中心 (c_1, c_2) は (e は離心率)

$$\kappa = -\frac{a}{b^2}, \quad c_1 = \frac{a^2 + b^2}{a} = ae^2, \quad c_2 = 0$$

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の頂点 $(a, 0)$ における曲率中心，焦点，頂点，準線が x 軸上で等比点列をなしている．



7 法線群の包絡線

座標平面上の曲線 C が，媒介変数 s を用いて

$$x = f(s), \quad y = g(s)$$

で表されているとき， C 上の2点を

$$P(f(t), g(t)), \quad Q(f(u), g(u))$$

とする． C 上の2点 P ， Q における法線はそれぞれ

$$f'(t)\{x - f(t)\} + g'(t)\{y - g(t)\} = 0$$

$$f'(u)\{x - f(u)\} + g'(u)\{y - g(u)\} = 0$$

2式から

$$\begin{aligned} & \{f'(u) - f'(t)\}x + \{g'(u) - g'(t)\}y \\ &= \{f'(u)f(u) - f'(t)f(t)\} + \{g'(u)g(u) - g'(t)g(t)\} \end{aligned}$$

両辺を $u - t$ で割って, $t \rightarrow 0$ とすると

$$f''(t)x + g''(t)y = f''(t)f(t) + f'(t)^2 + g''(t)g(t) + g'(t)^2$$

これから

$$f''(t)\{x - f(t)\} + g''(t)\{y - g(t)\} = f'(t)^2 + g'(t)^2$$

上式とPにおける接線

$$f'(t)\{x - f(t)\} + g'(t)\{y - g(t)\} = 0$$

を連立すると，次の法線群の包絡線を得る．

$$x = f(t) - \frac{g'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}$$
$$y = g(t) + \frac{f'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}$$

これは先に述べた縮閉線と一致する．

8 曲線 $f(x, y) = 0$ の曲率

$f(x, y)$ の偏微分を

$$f_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y), \quad f_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} f(x, y)$$

と表記する ($\alpha, \beta = x, y$).

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

とする.

$f(x, y) = 0$ を x で微分すると

$$f_x + f_y y' = 0$$

これを x で微分すると

$$f_{xx} + f_{xy} y' + (f_{yx} + f_{yy} y') y' + f_y y'' = 0$$

整理すると

$$f_{xx} + 2f_{xy} y' + f_{yy} (y')^2 + f_y y'' = 0$$

y' , y'' について解くと

$$y' = -\frac{f_x}{f_y}$$

$$y'' = \frac{-f_{yy}f_x^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{xx}f_y^2}{f_y^3}$$

y' , y'' を曲率, 曲率中心に適用すると

$$\kappa = \operatorname{sgn}(f_y) \frac{-f_{yy}f_x^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{xx}f_y^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$c_1 = x - \frac{f_x(f_x^2 + f_y^2)}{-f_{yy}f_x^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{xx}f_y^2}$$

$$c_2 = y - \frac{f_y(f_x^2 + f_y^2)}{-f_{yy}f_x^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{xx}f_y^2}$$

$f(x, y) = 0$ と $-f(x, y) = 0$ は一致するから, 曲率 κ の $\operatorname{sgn}(f_y)$ の符号には本質的な違いはない.

$$\begin{aligned}
 D &= -f_{yy}f_x^2 + 2f_{xy}f_xf_y - f_{xx}f_y^2 \\
 &= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

とおくと

$$\kappa = \frac{\operatorname{sgn}(f_y)D}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

とくに，2次曲線 $f(x, y) = 0$ について

$$f(x, y) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + px + qy + \frac{r}{2}$$

とすると

$$2f(x, y) = xf_x + yf_y + px + qy + r = 0$$

に注意して

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a & b & f_x \\ b & c & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & f_x - ax - by \\ b & c & f_y - bx - cy \\ f_x & f_y & -xf_x - yf_y \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ f_x & f_y & px + qy + r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

したがって、2次曲線 $f(x, y) = 0$ の頂点は、曲線上で $f_x^2 + f_y^2$ が極値をとる点である。

9 2次曲線 $f(x, y) = 0$ の中心

2次曲線の頂点は曲線上の点であるが，2次曲線の中心は R^2 の点として考える必要があるから，中心について次のように定義する．

定義(中心)

$K \subset R^2$ とする．点 $p \in R^2$ に対し，任意の点 $q \in K$ の p に対する対称な点 q' が， $q' \in K$ であるとき， p は K の中心という．

定理 (中心は定義関数の特異点)

2次曲線 $f^{-1}(0) \neq \phi$ に対し, $(\alpha, \beta) \in R^2$ が

$$f_x(\alpha, \beta) = f_y(\alpha, \beta) = 0 \quad (\text{特異点})$$

であることは, $(\alpha, \beta) \in R^2$ が $f^{-1}(0)$ の中心であるための必要十分条件である.

[証明](十分条件)

$f(x, y) = 0$ について, (α, β) を極として展開すると

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{1}{2}a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)(y - \beta) + \frac{1}{2}c(y - \beta)^2 \\ & + f_x(\alpha, \beta)(x - \alpha) + f_y(\alpha, \beta)(y - \beta) \\ & + f(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

であるから, $f_x(\alpha, \beta) = f_y(\alpha, \beta) = 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{1}{2}a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)(y - \beta) \\ & + \frac{1}{2}c(y - \beta)^2 + f(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

上式から、 $f^{-1}(0)$ 上の任意の点 (x_1, y_1) に対し

$$(2\alpha - x_1, 2\beta - y_1) \in f^{-1}(0)$$

であるから、 $(\alpha, \beta) \in R^2$ は $f^{-1}(0)$ の中心である.

(必要条件)

$$2f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r$$

実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2 とし
($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$), それぞれの単位固有ベクトルを u_1, u_2
とする. また2次の正方行列 U を $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$ とお
き, 直交変換

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x' u_1 + y' u_2$$

を考えると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p' & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} U \text{ とおくと, } 2f(x, y) = 0 \text{ は,}$$

補題より

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2p'x' + 2q'y' + r = 0$$

さらに, $d_1 = -p'/\lambda_1$ ($\lambda_1 = 0$ のとき $d_1 = 0$),

$d_2 = -q'/\lambda_2$ ($\lambda_2 = 0$ のとき $d_2 = 0$) とすると,

平行移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

により, $f(x, y) = 0$ は標準形 $g(X, Y) = 0$ に分類さ

れる.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0 \\ \text{(II)} \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + C = 0 \quad (C \neq 0) \\ \text{(III)} \quad \lambda_1 X^2 + 2\mu Y = 0 \quad (\mu \neq 0) \end{array} \right\}$$

(I) $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ のとき, $g^{-1}(0)$ の中心を $P(p_1, p_2)$ とすると, $O(0, 0) \in g^{-1}(0)$ であるから, O と P に関して対称な点 $(2p_1, 2p_2)$ は $g^{-1}(0)$ 上にあるから

$$\lambda_1 (2p_1)^2 + \lambda_2 (2p_2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 (-2p_1)^2 + \lambda_2 (2p_2)^2 = 0$$

これから, $(-2p_1, 2p_2) \in g^{-1}(0)$ であり, これと P

に関して対称な点 $(4p_1, 0)$ は $g^{-1}(0)$ 上にあるから

$$\lambda_1(4p_1)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_1 = 0$$

$(0, 2p_2) \in g^{-1}(0)$ となるから $p_2 = 0$

したがって, $g^{-1}(0)$ の中心 $P(0, 0)$ について

$$g_X(0, 0) = g_Y(0, 0) = 0$$

$P(0, 0)$ は $g^{-1}(0)$ の孤立特異点である.

$\lambda_1 = 0$ のとき, $g^{-1}(0)$ の中心を $P(p_1, p_2)$ とすると, $O(0, 0) \in g^{-1}(0)$ であるから, O と P に関して

対称な点 $(2p_1, 2p_2)$ は $g^{-1}(0)$ 上にあるから

$$\lambda_2(2p_2)^2 = 0$$

$$\lambda_2(-2p_2)^2 = 0$$

これから, $(2p_1, -2p_2) \in g^{-1}(0)$ であり, これと P に関して対称な点 $(0, 4p_2)$ は $g^{-1}(0)$ 上にあるから

$$\lambda_2(4p_2)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_2 = 0$$

したがって, $g^{-1}(0)$ の中心 $P(p_1, 0)$ について (p_1 はすべての実数)

$$g_X(p_1, 0) = g_Y(p_1, 0) = 0$$

$\lambda_2 = 0$ のとき，同様にして， $g^{-1}(0)$ の中心
 $P(0, p_2)$ について (p_2 はすべての実数)

$$g_X(0, p_2) = g_Y(0, p_2) = 0$$

が成立する．

$(p_1, 0), (0, p_2)$ は $g^{-1}(0)$ の非孤立特異点である．

(II) $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ のとき， $g^{-1}(0) \neq \phi$ であるから， λ_1, λ_2
の少なくとも一方は C と異符号で $\lambda_1 C < 0$ のとき，
 $(\pm \sqrt{-C/\lambda_1}, 0) \in g^{-1}(0)$ であり， $g^{-1}(0)$ の中心
 $P(p_1, p_2)$ に対してこれと対称な点

$$(2p_1 \mp \sqrt{-C/\lambda_1}, 2p_2)$$

が $g^{-1}(0)$ 上にあるから

$$\lambda_1(2p_1 \mp \sqrt{-C/\lambda_1})^2 + \lambda_2(2p_2)^2 + C = 0$$

となるが

$$\lambda_1(-2p_1 \pm \sqrt{-C/\lambda_1})^2 + \lambda_2(2p_2)^2 + C = 0$$

とも書けるので、点

$$(-2p_1 \pm \sqrt{-C/\lambda_1}, 2p_2)$$

は $g^{-1}(0)$ 上にある．これと P に関して対称な点

$$(4p_1 \mp \sqrt{-C/\lambda_1}, 0)$$

は $g^{-1}(0)$ 上にあるから

$$\lambda_1(4p_1 \mp \sqrt{-C/\lambda_1})^2 + C = 0$$

整理すると

$$\lambda_1(16p_1^2 \mp 8p_1\sqrt{-C/\lambda_1}) = 0$$

$\lambda_1 \neq 0$ より, $p_1 = 0$ となる. これを (II) に代入すると, $p_2 = 0$ を得る. このとき, 点 $P(0, 0)$ は孤立特異点である. λ_2 が C と異符号のときも同様の議論により, 同一の結論を得る.

$\lambda_1 = 0$ のとき, $g^{-1}(0) \neq \phi$ であるから, $\lambda_2 C < 0$ より, 点 $(0, \pm \sqrt{-C/\lambda_2})$ は $g^{-1}(0)$ 上の点であり,

$g^{-1}(0)$ の中心 $P(p_1, p_2)$ に対してこれと対称な点

$$(2p_1, 2p_2 \mp \sqrt{-C/\lambda_2})$$

が $g^{-1}(0)$ 上にあるから

$$\lambda_2(2p_2 \mp \sqrt{-C/\lambda_2})^2 + C = 0$$

整理すると

$$\lambda_2(4p_2^2 \mp 4p_2\sqrt{-C/\lambda_2}) = 0$$

$\lambda_2 \neq 0$ より, $p_2 = 0$ となる.

したがって、 $g^{-1}(0)$ の中心 $P(p_1, 0)$ について (p_1 はすべての実数)

$$g_X(p_1, 0) = g_Y(p_1, 0) = 0$$

$\lambda_2 = 0$ のとき，同様にして、 $g^{-1}(0)$ の中心 $P(0, p_2)$ について (p_2 はすべての実数)

$$g_X(0, p_2) = g_Y(0, p_2) = 0$$

が成立する．

$(p_1, 0)$ ， $(0, p_2)$ は $g^{-1}(0)$ の非孤立特異点である．

(III) 点 $(0, 0) \in g^{-1}(0)$ であり，点 $(0, 0)$ の中心

$P(p_1, p_2)$ に関して対称な点 $(2p_1, 2p_2)$ は $g^{-1}(0)$

上にあるから

$$\lambda_1(2p_1)^2 + 2\mu(2p_2) = 0$$

これから

$$\lambda_1(-2p_1)^2 + 2\mu(2p_2) = 0$$

と書けるから、点 $(-2p_1, 2p_2) \in g^{-1}(0)$. これと点 P に関して対称な点 $(4p_1, 0)$ も $g^{-1}(0)$ 上にあるから

$$\lambda_2(4p_1)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_1 = 0$$

$P(0, 0)$ となり, $(1, -\lambda_1/2u) \in g^{-1}(0)$ と P に関し

て対称な点 $(-1, \lambda_1/2u)$ について

$$g(-1, \lambda_1/2u) = 2\lambda_1 \neq 0$$

したがって，中心は存在しない

変換による

$$f(x, y) = g(X, Y)$$

について， x, y で偏微分を行うと

$$f_x = g_X \frac{\partial X}{\partial x} + g_Y \frac{\partial Y}{\partial x}$$
$$f_y = g_X \frac{\partial X}{\partial y} + g_Y \frac{\partial Y}{\partial y}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} g_X \\ g_Y \end{pmatrix}$$

したがって、(I), (II) で求めた $f^{-1}(0)$ の中心 (α, β) に対して、

$$f_x(\alpha, \beta) = f_y(\alpha, \beta) = 0 \quad (\text{特異点})$$

が成立する．ただし

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} p_1 + d_1 \\ p_2 + d_2 \end{pmatrix}$$

なお、 (p_1, p_2) は $g^{-1}(0)$ の中心．

証終

10 補題

補題1

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有ベクトルは直交する。
ただし, $A \neq kE$ とする.

証明 A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0 \quad (1)$$

この方程式の判別式は

$$\begin{aligned} & \{-(a + c)\}^2 - 4 \cdot 1(ac - b^2) \\ &= (a - c)^2 + 4b^2 > 0 \end{aligned}$$

ゆえに，異なる2つの固有値 λ_1 ， λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ u_1 ， u_2 とする．ここで，内積 $u_1 \cdot u_2$ は行列の積 ${}^t u_1 u_2$ であることに留意する．

$$\begin{aligned}(Au_1) \cdot u_2 &= {}^t(Au_1)u_2 = {}^tu_1 {}^tAu_2 \\ &= {}^tu_1 Au_2 = u_1 \cdot (Au_2)\end{aligned}$$

$Au_1 = \lambda_1 u_1$, $Au_2 = \lambda_2 u_2$ であるから

$$(\lambda_1 u_1) \cdot u_2 = u_1 \cdot (\lambda_2 u_2)$$

すなわち $(\lambda_1 - \lambda_2)u_1 \cdot u_2 = 0$

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ であるから

$$u_1 \cdot u_2 = 0 \quad \text{よって} \quad u_1 \perp u_2$$

証終

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の単位固有ベクトル u_1, u_2 は直交するから、これらを基底とする座標変換を用いることで、 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ について次の補題2が成り立つ。

補題2

u_1, u_2 を A の単位固有ベクトルとすると, 基底の変換
(x, y, x', y' は実数)

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x' u_1 + y' u_2$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

により次が成り立つ.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

$$\begin{aligned} \text{証明 } ax^2 + 2bxy + cy^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{から}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}$$

したがって

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Au_1 & Au_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

証終

11 直交変換による不変量

$2f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + r$ について

$$M = \begin{pmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$${}^t\mathbf{v}M\mathbf{v} = 0$$

ここで

$$V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad {}^t\mathbf{0} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

とおくと(9)と(9)の変換について,

$$V = \begin{pmatrix} U & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} v', \quad v' = \begin{pmatrix} E & d \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} V$$

となる.

$$U = \begin{pmatrix} U & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & d \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと $V = UDV$

これから

$${}^tV({}^tD{}^tUMUD)V = \mathbf{0}$$

を得る. このとき

$$\begin{aligned} \det({}^tD{}^tUMUD) &= (\det D)^2 (\det U)^2 \det M \\ &= \det M \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} f_x^2 + f_y^2 &= \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_X & g_Y \end{pmatrix} {}^t U U \begin{pmatrix} g_X \\ g_Y \end{pmatrix} \\ &= g_X^2 + g_Y^2 \end{aligned}$$

したがって, 曲率 κ は直交変換による不変量である.

12 主軸問題

2次曲線 $f(x, y) = 0$ を主軸方向を決定し，平行移動を行ってよいし，平行移動を先に行って主軸方向決定してもよい．

- 中心が存在する有心2次曲線(楕円，双曲線)は，中心に平行移動し，主軸方向を定める．
- 中心が存在しない無心2次曲線(放物線)は，頂点に平行移動する．

13 2次曲線の分類

退化しない2次曲線，すなわち，楕円，双曲線，放物線となるのは，曲率 $\kappa \neq 0$ であるから，

$$D == \begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{vmatrix} \neq 0$$

は $f(x, y) = 0$ が退化しない2次曲線であるための必要条件である．

2次曲線の中心と定義関数の特異点と同値であるから，(I)，(II)は中心が存在する有心2次曲線であり，(III)は中心が存在しない無心2次曲線である．

$$(I) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0$$

$$(II) \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + C = 0 \quad (C \neq 0 \text{ は定数})$$

$$(III) \quad \lambda_1 X^2 + 2\mu Y = 0 \quad (\mu \neq 0 \text{ は定数})$$

(I) $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0$ は $D = 0$ となり，次のように分類される．

- $ac - b^2 > 0$ のとき，1点(中心は1点)
- $ac - b^2 = 0$ のとき，1つの実直線
(中心は実直線上の点[非孤立特異点])
- $ac - b^2 < 0$ のとき，相交わる2直線
(中心は2直線の交点)

(II) $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + C = 0$ ($C \neq 0$ は定数)は,
 $\lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2$ より分類される.

- $ac - b^2 > 0$ のとき, 楕円型
- $ac - b^2 < 0$ のとき, 双曲線
- $ac - b^2 = 0$ のとき, 平行2直線

(III) $\lambda_1 X^2 + 2\mu Y = 0$ ($\mu \neq 0$ は定数)は放物線で, 定義関数の特異点が存在しない, 無心2次曲線である.

14 考察

2次曲線は，準線，焦点など大域的な性質を扱うことが多いが，局所的な視点から，放物線・楕円・双曲線の曲率中心と焦点，頂点，準線との位置関係を離心率を介して発見した．

2次曲線 $f(x, y) = 0$ の頂点は， $|\text{grad } f(x, y)|$ が極値をとる点であることを証明した．

また，2次曲線 $f(x, y) = 0$ の中心は，定義関数の特異点と同値であることを証明し，中心の定義を与えた．