

令和6年度 筑波大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分

- 総合選抜文系は [1] [2] [3] から2題選択 (数II・B), 及び他教科との選択
- 総合選抜理系I, 理系II, 理系IIIは [1] [2] [3] から2題選択,
[4] [5] [6] から2題選択
- 社会学類は [1] [2] [3] から2題選択 (数II・B), 及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は, 数II・B選択の場合は [1] [2] [3] から2題選択,
数III選択の場合は [4] [5] [6] から2題選択, 及び他教科との選択
- 教育・心理学類・生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学
システム・情報科学・情報メディア創生学類・知識情報・図書館学類・社会工
学類・医学・医療学類は [1] [2] [3] から2題選択, [4] [5] [6] から2題選択

[1] $\triangle OAB$ において, $OA = OB = 4$, $AB = 2$ とする. $\angle OAB$ の二等分線と線分 OB の交点を C とし, 点 O から直線 AC に垂線 OD を引く. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ.
- (2) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ.
- (3) $\triangle BCD$ の面積を求めよ.

[2] 以下の問いに答えよ.

- (1) $x > 1$, $y > 1$ のとき, 不等式

$$\log_x y + \log_y x \geq 2$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 座標平面において, 連立不等式

$$x > 1, \quad y > x, \quad \log_x y + \log_y x < \frac{5}{2}$$

の表す領域を図示せよ.

- (3) (2) の領域の中で $x^2 + y^2 < 12$ を満たす部分に境界線を含めた図形を D とする. D の面積を求めよ.

3 $f(x) = x(x+1)(x-1)$ とする. 座標平面において, 曲線 $y = f(x)$ を C とし, 曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線を L とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 直線 L の方程式を t を用いて表せ.
- (2) $t \neq 0$ のとき, 直線 L と曲線 C の共有点で, 点 $(t, f(t))$ とは異なるものを $(a, f(a))$ とする. a を t を用いて表せ. また, t が 0 を除いた実数を動くとき, $f'(t)f'(a)$ の最小値を求めよ.
- (3) 次の条件 (A) を満たすような実数 t の範囲を求めよ.
 (A) 曲線 C 上の点 $(s, f(s))$ における接線が直線 L と直交するような実数 s が存在する.

4 座標平面において, 媒介変数表示

$$x = -t \left(t - \frac{3}{2} \right), \quad y = \sin \pi t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

で表される曲線を C とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 定積分 $\int_0^1 t \sin \pi t \, dt$ を求めよ.
- (2) 実数 a に対し, 曲線 C と直線 $x = a$ の共有点の個数を求めよ.
- (3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

5 a と b は実数の定数とする．関数

$$f(x) = (1 - 2x^2) \cos 2x + 2x \sin 2x + a \cos^2 x + b \int_0^x t \sin 2t \, dt$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $a = 8\pi^2$, $b = -4\pi$ のとき, $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ において $f(x)$ が極値をとる x の値をすべて求めよ．

(2) 次の条件 (B) を満たす a , b を求めよ．

(B) $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ において, $f(x)$ は極値をとらない．

6 定数 α は実数でない複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\frac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ は純虚数であることを示せ．

(2) 純虚数 β で, $\frac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるものがただ一つ存在することを示せ．

(3) 複素数 z を $\frac{z - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるように動かすとき, $|z|$ が最小となる z を α を用いて表せ．

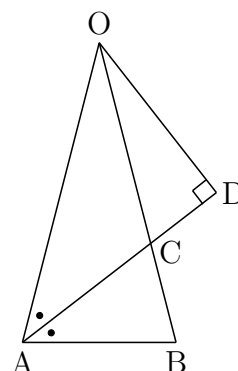
解答例

- 1 (1) AC は $\angle OAB$ の二等分線であるから

$$OC : CB = OA : AB = 2 : 1$$

$$\text{ゆえに} \quad \vec{OC} = \frac{2}{3}\vec{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\text{よって} \quad \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$$



$$(2) \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \quad |\vec{AB}| = 2, \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 4 \text{ より} \quad |\vec{AB}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2$$

$$2^2 = 4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4^2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 14$$

$$\vec{AC} \text{ に平行なベクトルを } \vec{v} = 2\vec{b} - 3\vec{a} \text{ とすると} \quad \vec{AD} = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

$$\vec{AO} \cdot \vec{v} = -\vec{a} \cdot (2\vec{b} - 3\vec{a}) = -2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{a}|^2 = -2 \cdot 14 + 3 \cdot 4^2 = 20$$

$$|\vec{v}|^2 = 4|\vec{b}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{a}|^2 = 4 \cdot 4^2 - 12 \cdot 14 + 9 \cdot 4^2 = 40$$

$$\vec{AD} = \frac{20}{40}(2\vec{b} - 3\vec{a}) = \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{a}) \text{ より}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} + \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

$$(3) \vec{AC} = \frac{1}{3}(2\vec{b} - 3\vec{a}), \quad \vec{AD} = \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{a}) \text{ より}$$

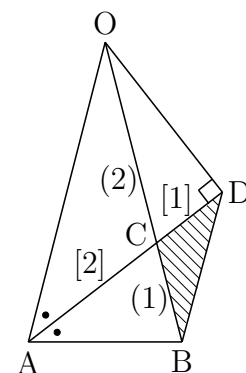
$$\vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{AC}$$

AC : CD = 2 : 1, OC : CB = 2 : 1 であるから

$$\begin{aligned} \triangle BCD &= \frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\triangle OAB \\ &= \frac{1}{6}\triangle OAB \end{aligned}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 \cdot 4^2 - 14^2} = \sqrt{15}$$

$$\text{よって} \quad \triangle BCD = \frac{1}{6}\sqrt{15}$$



- 2** (1) $x > 1, y > 1$ のとき $\log_x y > 0$
 相加平均・相乗平均の大小関係から

$$\begin{aligned}\log_x y + \log_y x &= \log_x y + \frac{1}{\log_x y} \\ &\geq 2\sqrt{\log_x y \cdot \frac{1}{\log_x y}} = 2\end{aligned}$$

- (2) 連立不等式

$$x > 1, y > x, \log_x y + \log_y x < \frac{5}{2} \quad (*)$$

の第3式について $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} < \frac{5}{2}$

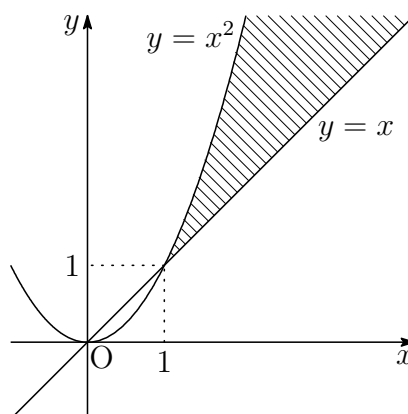
$$2(\log_x y)^2 - 5\log_x y + 2 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\log_x y - 2)(2\log_x y - 1) < 0$$

$$y > x > 1 \text{ であるから, } \log_x y > 1 \text{ より} \quad 1 < \log_x y < 2$$

$$\log_x x < \log_x y < \log_x x^2 \quad \text{ゆえに} \quad x < y < x^2$$

(*) の連立不等式は $1 < x < y < x^2$

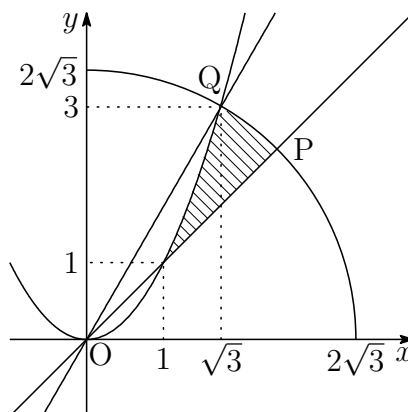
よって、求める領域は、下の図の斜線部分で境界線は含まない。



- (3) 第1象限において, $y = x$, $y = x^2$ と円 $x^2 + y^2$ との交点をそれぞれ P, Q とすると $Q(\sqrt{3}, 3)$

領域 D は下の図の斜線部分 (境界線を含む) で, その面積を S とすると,
 $\angle POQ = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\pi}{12} + \int_0^1 (x - x^2) dx - \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}x - x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{\pi}{12} + \int_0^1 x(1 - x) dx - \int_0^{\sqrt{3}} x(\sqrt{3} - x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6}(1 - 0)^3 - \frac{1}{6}(\sqrt{3} - 0)^3 \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



別解 $y = x^2$ にガウス・グリーンの定理の系を適用する.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} (xy' - y) dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} x^2 dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

補足 別解の公式は, ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt$$

の変数 t を x に変更したものである.



3 (1) $f(x) = x(x+1)(x-1) = x^3 - x$ より $f'(x) = 3x^2 - 1$

曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線 L の方程式は

$$y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t \quad \text{すなわち} \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

(2) C と L の方程式から, y を消去すると

$$x^3 - x = (3t^2 - 1)x - 2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x - t)^2(x + 2t) = 0$$

L と C の共有点で $(t, f(t))$ と異なる点の x 座標 a は $(t \neq 0) \quad a = -2t$

$$\begin{aligned} f'(t)f'(a) &= f'(t)f'(-2t) = (3t^2 - 1)(12t^2 - 1) \\ &= 36t^4 - 15t^2 + 1 = 36\left(t^2 - \frac{5}{24}\right)^2 - \frac{9}{16} \end{aligned}$$

よって, $f'(t)f'(a)$ は $t^2 = \frac{5}{24}$ のとき, 最小値 $-\frac{9}{16}$ をとる.

(3) C 上の 2 点 $(s, f(s)), (t, f(t))$ におけるそれぞれの接線が直交するとき, $f'(s)f'(t) = -1$ より

$$(3s^2 - 1)(3t^2 - 1) = -1$$

$$\text{したがって} \quad 3s^2 = \frac{3t^2 - 2}{3t^2 - 1} = \frac{(3t^2 - 2)(3t^2 - 1)}{(3t^2 - 1)^2} \geq 0$$

$3t^2 - 1 \neq 0, 3t^2 - 2 < 3t^2 - 1$ に注意して

$$3t^2 - 1 < 0 \quad \text{または} \quad 3t^2 - 2 \geq 0$$

$$\text{よって} \quad t \leq -\frac{\sqrt{6}}{3}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{\sqrt{6}}{3} \leq t$$

補足 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について, $C: y = f(x)$ の変曲点の x 座標を p とすると, $f''(p) = 0$ より, $b = -3ap$

$$f''(t) = 6at + 2b = 6a(t - p)$$

$f(x)$ を $x = t$ を極として展開すると ¹

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x - t) + \frac{1}{2}f''(t)(x - t)^2 + a(x - t)^3$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) - \{f(t) + f'(t)(x - t)\} &= 3a(t - p)(x - t)^2 + a(x - t)^3 \\ &= a(x - t)^2(x - 3p + 2t) \end{aligned}$$

よって, C 上の点 $(t, f(t))$ における接線と C の共有点の x 座標は

$$x = t, 3p - 2t$$



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

4 (1)

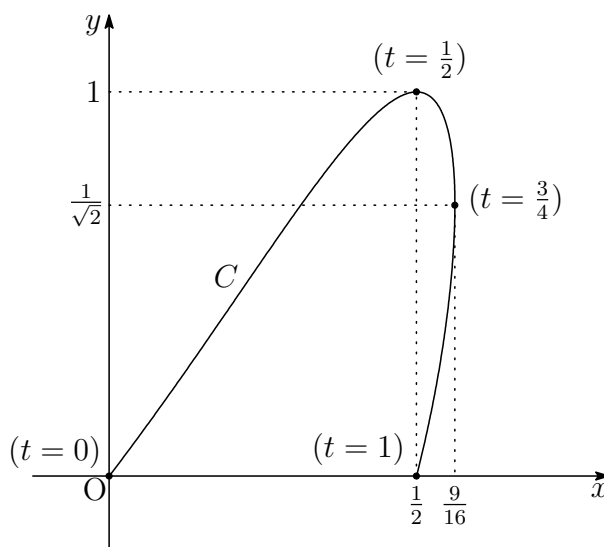
$$\begin{aligned}\int_0^1 t \sin \pi t \, dt &= \int_0^1 t \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right)' dt \\ &= \left[t \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right) - \left(-\frac{1}{\pi^2} \sin \pi t \right) \right]_0^1 = \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

(2) $x = -t \left(t - \frac{3}{2} \right)$, $y = \sin \pi t$ より $(0 \leq t \leq 1)$

$$\frac{dx}{dt} = -2t + \frac{3}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = \pi \cos \pi t$$

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{3}{4}$	...	1
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	0	-	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	-	-	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	(0, 0)		$(\frac{1}{2}, 1)$		$(\frac{9}{16}, \frac{1}{\sqrt{2}})$		$(\frac{1}{2}, 0)$

したがって、 C のグラフの概形は次のようになる。



よって、曲線 C と直線 $x = a$ の共有点の個数は

$$\begin{cases} a < 0, \frac{9}{16} < a & \text{のとき} & 0 \text{ 個} \\ 0 \leq a < \frac{1}{2}, a = \frac{9}{16} & \text{のとき} & 1 \text{ 個} \\ \frac{1}{2} \leq a < \frac{9}{16} & \text{のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$

- (3) $x = f(t) = -t \left(t - \frac{3}{2} \right)$, $y = g(t) = \sin \pi t$ とし ($0 \leq t \leq 1$), 求める面積を S とすると, (1) の結果に注意して

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{f(0)}^{f(\frac{3}{4})} y \, dx - \int_{f(1)}^{f(\frac{3}{4})} y \, dx = \int_{f(0)}^{f(1)} y \, dx = \int_0^1 y \frac{dx}{dt} dt \\
 &= \int_0^1 \sin \pi t \cdot \left(-2t + \frac{3}{2} \right) dt \\
 &= -2 \int_0^1 t \sin \pi t \, dt + \frac{3}{2} \int_0^1 \sin \pi t \, dt \\
 &= -2 \cdot \frac{1}{\pi} + \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 = \frac{1}{\pi}
 \end{aligned}$$

補足 (ガウス・グリーンの定理²) $x = f(t) = -t \left(t - \frac{3}{2} \right)$, $y = g(t) = \sin \pi t$ とし ($0 \leq t \leq 1$), 求める面積を S とすると (偏角の向きが正となるように積分区間をとる)

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_1^0 \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} \, dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int_1^0 \{f(t)g(t)\}' \, dt + \int_1^0 f(t)g'(t) \, dt
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \int_1^0 \{f(t)g(t)\}' \, dt &= \left[f(t)g(t) \right]_1^0 = 0, \\
 \int_1^0 f(t)g'(t) \, dt &= \int_1^0 \left(-t^2 + \frac{3}{2}t \right) (\sin \pi t)' \, dt \\
 &= \left[\left(-t^2 + \frac{3}{2}t \right) \sin \pi t - \left(-2t + \frac{3}{2} \right) \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right) \right. \\
 &\quad \left. + (-2) \left(-\frac{1}{\pi^2} \sin \pi t \right) \right]_1^0 = \frac{1}{\pi}
 \end{aligned}$$

よって $S = \frac{1}{\pi}$



²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf [5]

5 (1) 関数

$$f(x) = (1 - 2x^2) \cos 2x + 2x \sin 2x + a \cos^2 x + b \int_0^x t \sin 2t \, dt$$

を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x \cos 2x - 2(1 - 2x^2) \sin 2x + 2 \sin 2x + 4x \cos 2x \\ &\quad - 2a \cos x \sin x + bx \sin 2x \\ &= (4x^2 + bx - a) \sin 2x \end{aligned} \quad (*)$$

$a = 8\pi^2$, $b = -4\pi$ を (*) に代入すると

$$f'(x) = (4x^2 - 4\pi x - 8\pi^2) \sin 2x = 4(x + \pi)(x - 2\pi) \sin 2x$$

したがって, $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ における $f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$(\frac{3}{2}\pi)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって, 極値をとる x の値は $x = \frac{\pi}{2}, \pi$

(2) $0 < x < \frac{3}{2}\pi$ において, (*) の $f'(x)$ の符号は, 常に $f'(x) \leq 0$ または $f'(x) \geq 0$ であるから

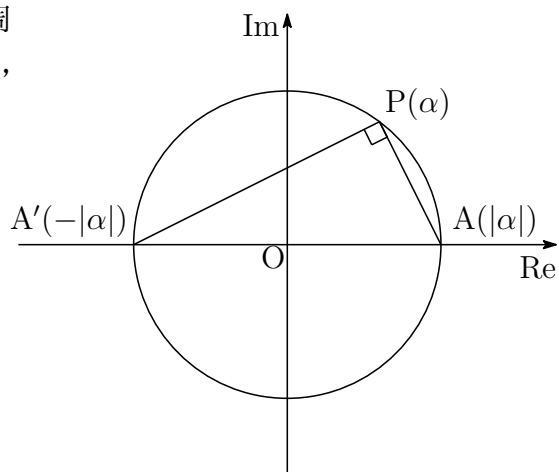
$$\begin{aligned} 4x^2 + bx - a &= 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi) \\ &= 4x^2 - 6\pi x + 2\pi^2 \end{aligned}$$

よって, 上式の係数を比較して $a = -2\pi^2$, $b = -6\pi$ ■

- 6** (1) O を中心とする点 $P(\alpha)$ を通る円周上に 2 点 $A(|\alpha|)$, $A'(-|\alpha|)$ をとると,
 $\angle APA' = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\arg \frac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|} = \pm \frac{\pi}{2}$$

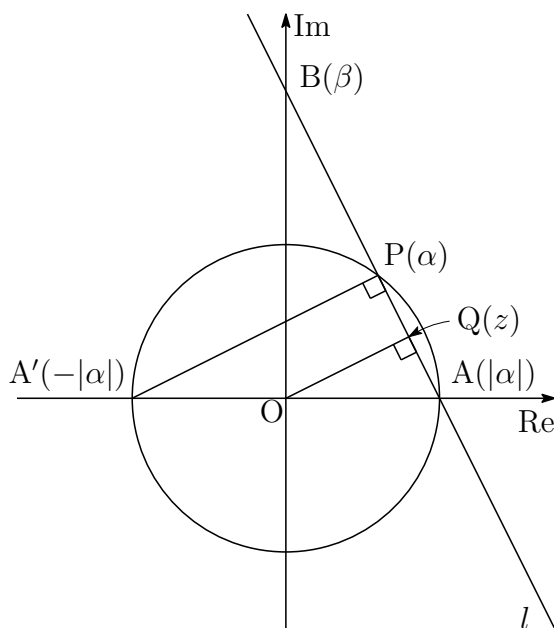
よって, $\frac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ は純虚数である.



- (2) 点 $A(|\alpha|)$ を通り, 直線 $A'P$ に垂直な直線 l と虚軸との交点 $B(\beta)$ とすると,
 $A'P \perp AB$ より,

$$\frac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|} = \pm \frac{\pi}{2}$$

よって, $\frac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となる純虚数 β がただ一つ存在する.



- (3) $\frac{z - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるとき, z は l 上の点で, $|z|$ が最小となるのは, $A(|\alpha|)$, $P(\alpha)$ の中点であるから

$$z = \frac{|\alpha| + \alpha}{2}$$

