

令和5年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類, 二類, 三類) 数I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5 6

1 (1) 正の整数 k に対し,

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

とおく. 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) 正の整数 n に対し,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

とおく. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ を求めよ.

2 黒玉3個, 赤玉4個, 白玉5個が入っている袋から玉を1個ずつ取り出し, 取り出した玉を順に横一列に12個すべて並べる. ただし, 袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする.

(1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ.

(2) どの赤玉も隣り合わないとき, どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ.

3 a を実数とし, 座標平面上の点 $(0, a)$ を中心とする半径1の円の周を C とする.

(1) C が, 不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ.

(2) a は(1)で求めた範囲にあるとする. C のうち $x \geq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする. S 上の点 P に対し, 点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_P とする. $L_Q = L_R$ となる S 上の相異なる2点 Q, R が存在するような a の範囲を求めよ.

4 座標空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 2, 3)$ を考える.

- (1) $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ.
- (2) 点 P から直線 AB に垂線を下ろし, その垂線と直線 AB の交点を H とする. $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.
- (3) 点 Q を $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}$ により定め, Q を中心とする半径 r の球面 S を考える. S が三角形 OHB と共有点をもつような r の範囲を求めよ. ただし, 三角形 OHB は3点 O, H, B を含む平面内にあり, 周とその内部からなるものとする.

5 整式 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ を考える.

- (1) $g(x)$ を実数を係数とする整式とし, $g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく. $g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ.
- (2) a, b を実数とし, $h(x) = x^2 + ax + b$ とおく. $h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき, $h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく. $h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a, b の組をすべて求めよ.

6 O を原点とする座標空間において, 不等式 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$ の表す立方体を考える. その立方体の表面のうち, $z < 1$ を満たす部分を S とする.

以下, 座標空間内の2点 A, B が一致するとき, 線分 AB は点 A を表すものとし, その長さを0と定める.

- (1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i), (ii) をともに満たすとき, 点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ.
 - (i) $OP \leq \sqrt{3}$
 - (ii) 線分 OP と S は, 共有点を持たないか, 点 P のみを共有点に持つ.
- (2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii), (iv), (v) をすべて満たすとき, 点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ. 必要ならば, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい.
 - (iii) $ON + NP \leq \sqrt{3}$
 - (iv) 線分 ON と S は共有点を持たない.
 - (v) 線分 NP と S は, 共有点を持たないか, 点 P のみを共有点に持つ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad x = \sqrt{t} \text{ とおくと } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \begin{array}{c|c} x & \sqrt{k\pi} \longrightarrow \sqrt{(k+1)\pi} \\ t & k\pi \longrightarrow (k+1)\pi \end{array}$$

$$A_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}} dt$$

$k\pi \leq t \leq (k+1)\pi$ において

$$\frac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leq \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}} \leq \frac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}$$

したがって

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}} dt \leq A_k \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}} dt$$

$$t = k\pi + u \text{ とおくと } \frac{dt}{du} = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{|\sin(k\pi + u)|}{2\sqrt{(k+1)\pi}} du &\leq A_k \leq \int_0^\pi \frac{|\sin(k\pi + u)|}{2\sqrt{k\pi}} du \\ \frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \int_0^\pi |\sin u| du &\leq A_k \leq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}} \int_0^\pi |\sin u| du \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi |\sin u| du = \int_0^\pi \sin u du = \left[-\cos u \right]_0^\pi = 2 \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) $B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} A_k$ であるから, (1) の結果より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad (*)$$

このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x} \right]_1^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

これらを (*) に代入すると, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{\pi}}$$

■

- 2 (1) 黒玉 3 個, 赤玉 4 個, 白玉 5 個の 12 個の玉の並べ方の総数を N とすると

$$N = \frac{12!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

黒玉 3 個と, 白玉 5 個の 8 個を並べ, その 8 個の玉の両側と間の 9 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を A とすると

$$A = \frac{8!}{3!5!} \times \frac{9!}{4!5!} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \quad (\text{通り})$$

よって, 求める確率 p は

$$p = \frac{A}{N} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \bigg/ \frac{12!}{3!4!5!} = \frac{8!}{5!} \cdot \frac{9!}{12!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55}$$

- (2) 黒玉 3 個のうち 2 個をひとまとめにして, 黒黒, 黒玉 1 個, 白玉 5 個を並べ, その 7 個の両側と間の 8 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を B とすると

$$B = \frac{7!}{1!1!5!} \times \frac{8!}{4!4!} = \frac{7!8!}{4!4!5!} \quad (\text{通り})$$

この中には, 黒黒黒, または, 黒黒黒のように, 連続して並ぶ黒玉 3 個が重複する場合がある. 黒玉 3 個をひとまとめにして, 黒黒黒, 白玉 5 個を並べ, その 6 個の両側と間の 7 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を C とすると

$$C = \frac{6!}{1!5!} \times \frac{7!}{4!3!} = \frac{6!7!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

どの赤玉も隣り合わないとき, 隣り合う黒玉が存在する条件付き確率は

$$\begin{aligned} \frac{B-C}{A} &= \left(\frac{7!8!}{4!4!5!} - \frac{6!7!}{3!4!5!} \right) \cdot \frac{3!4!5!5!}{8!9!} \\ &= \left(\frac{7!8!}{4!} - \frac{6!7!}{3!} \right) \cdot \frac{3!5!}{8!9!} \\ &= (8 \cdot 7 - 4) \frac{6!7!}{4!} \cdot \frac{3!5!}{8!9!} \\ &= 52 \cdot \frac{6!}{8!} \cdot \frac{7!}{9!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot 3! = \frac{65}{168} \end{aligned}$$

求める確率は, この余事象の確率であるから $1 - \frac{65}{168} = \frac{103}{168}$ ■

- 3** (1) C 上の点 $(0, a-1)$ が $y > x^2$ を含まれるから, $a-1 > 0$ は必要条件.
放物線 $y = x^2$ 上の点 (u, u^2) と点 $(0, a)$ の距離を d とすると

$$d^2 = u^2 + (u^2 - a)^2 = \left(u^2 - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + \frac{4a-1}{4}$$

d^2 は $u = \pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}$ のとき, 最小値 $\frac{4a-1}{4}$ をとる.

条件をみたすとき, $d > 1$, すなわち, $d^2 > 1$ であるから

$$\frac{4a-1}{4} > 1 \quad \text{よって} \quad a > \frac{5}{4}$$

- (2) $A(0, a)$ とし, S 上の点 P における接線の偏角を θ とすると $(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = (\sin\theta, -\cos\theta), \\ \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (\sin\theta, a - \cos\theta)\end{aligned}$$

$C: x^2 + (y-a)^2 = 1$ 上の点 $P(\sin\theta, a - \cos\theta)$ における接線の方程式は

$$x \sin\theta - (y-a) \cos\theta = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = x \tan\theta - \frac{1}{\cos\theta} + a$$

この直線と放物線 $y = x^2$ の方程式から y を消去し, 整理すると

$$x^2 - x \tan\theta + \frac{1}{\cos\theta} - a = 0$$

この方程式の解を α, β とすると, 解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = \tan\theta, \quad \alpha\beta = \frac{1}{\cos\theta} - a$$

2点 $(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$ を結ぶ線分の長さを L とすると

$$\begin{aligned}L^2 &= (\beta - \alpha)^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2 = (\beta - \alpha)^2 \{1 + (\alpha + \beta)^2\} \\ &= \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} \{1 + (\alpha + \beta)^2\} \\ &= \left(\tan^2\theta - \frac{4}{\cos\theta} + 4a\right) (1 + \tan^2\theta) \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 - \frac{4}{\cos\theta} + 4a\right) \frac{1}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

$$t = \frac{1}{\cos \theta}, \quad f(t) = L^2 \text{ とおくと}$$

$$f(t) = t^4 - 4t^3 + (4a - 1)t^2 \quad (t \geq 1)$$

$f(t)$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めると

$$f'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 2(4a - 1)t$$

$$f''(t) = 12t^2 - 24t + 2(4a - 1)$$

$$t \geq 1 \text{ に注意して, } f''(t) = 0 \text{ を解くと} \quad t = 1 + \sqrt{\frac{7 - 4a}{6}}$$

$$f'(t) \text{ を } f''(t) \text{ で割って, } k = \sqrt{\frac{7 - 4a}{6}} \text{ とおくと}$$

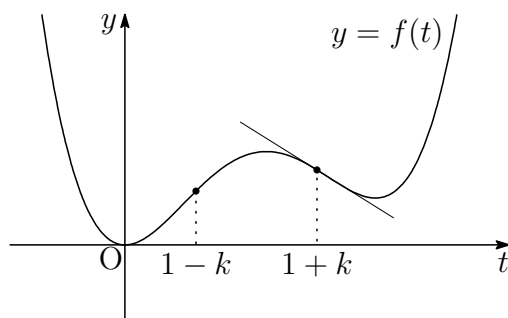
$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{3}(t - 1)f''(t) + \frac{4}{3}(4a - 7)t + \frac{2}{3}(4a - 1) \\ &= \frac{1}{3}(t - 1)f''(t) - 8k^2t - 4k^2 + 4 \end{aligned}$$

$f'(1 + k) < 0$ を満たせばよい. $f''(1 + k) = 0$ より

$$-8k^2(1 + k) - 4k^2 + 4 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (k + 1)^2(2k - 1) > 0$$

$$\text{これを解いて } k > \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{\frac{7 - 4a}{6}} > \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad a < \frac{11}{8}$$

$$\text{これと (1) の結果により} \quad \frac{5}{4} < a < \frac{11}{8}$$



参考 3 次関数 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標を c とする. $f'(c)$ の符号と $f(x)$ の x^3 の係数の符号が異なることは $f(x)$ が極値をもつための必要十分条件. ■

- 4 (1) $\vec{OA} = (2, 0, 0)$ および $\vec{OB} = (1, 1, 1)$ と垂直なベクトルの1つを

$$\vec{v} = (0, -1, 1)$$

とすると, $\vec{OP} = k\vec{v}$ であるから (k は定数), $\vec{OP} \cdot \vec{OC} = 1$ より

$$k\{0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3\} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = 1$$

したがって $\vec{OP} = \vec{v} = (0, -1, 1)$ よって $\mathbf{P}(0, -1, 1)$

- (2) H は直線 AB 上の点であるから, 実数 t を用いて

$$\vec{OH} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$$

とおくと, $\vec{PH} \cdot \vec{AB} = 0$ であるから, $\vec{OP} \cdot \vec{OA} = 0$, $\vec{OP} \cdot \vec{OB} = 0$ に注意して

$$\begin{aligned} \vec{PH} \cdot \vec{AB} &= (\vec{OH} - \vec{OP}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= \vec{OH} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= \{(1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}\} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= (2-t, t, t) \cdot (-1, 1, 1) = 3t - 2 = 0 \end{aligned} \tag{*}$$

これを解いて $t = \frac{2}{3}$ よって $\vec{OH} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$

(3) 空間の点 X を平面 OAB に垂線を下ろした点を $f(X)$ とすると

$$f(\overrightarrow{OP}) = \vec{0}, \quad f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA}, \quad f(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB}$$

f は線形変換であるから, f による Q の像を R とすると

$$\overrightarrow{OR} = f(\overrightarrow{OQ}) = \frac{3}{4}f(\overrightarrow{OA}) + f(\overrightarrow{OP}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$$

(*) により, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ であるから, R から線分 OH に垂線 RT を引くと

$$RT = \frac{3}{4}AH = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|(-1, 1, 1)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

次に, $\overrightarrow{OR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$ より $|\overrightarrow{OR}| = \frac{3}{2}$

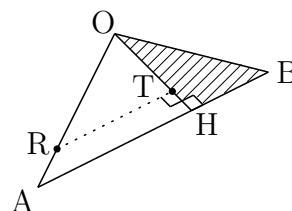
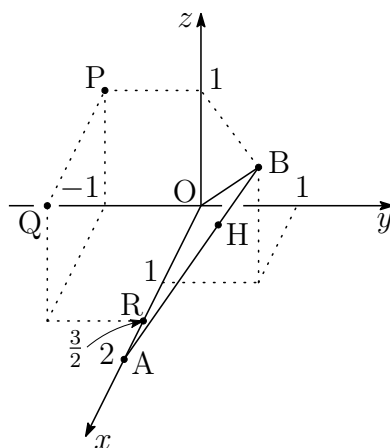
$$\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OR} = (1, 1, 1) - \left(\frac{3}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

$$|\overrightarrow{RB}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{3}{2}$$

$|\overrightarrow{OP}| = |(0, -1, 1)| = \sqrt{2}$ であるから, 求める r の値の範囲は

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \leq r \leq \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

よって $\frac{\sqrt{11}}{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{17}}{2}$



- 5 (1) $g(x) - r(x)$ は $f(x)$ を因数に持つ.

$$g(x)^7 - r(x)^7 = \{g(x) - r(x)\} \sum_{k=1}^7 g(x)^{7-k} r(x)^{k-1}$$

したがって、題意は成立する.

別解 $g(x) \equiv r(x) \pmod{f(x)}$ のとき $g(x)^7 \equiv r(x)^7 \pmod{f(x)}$

したがって、題意は成立する.

- (2) $h(x)^7 \equiv h_1(x)$, $h_1(x)^7 \equiv h(x) \pmod{f(x)}$ より

$$h(x)^{49} \equiv h_1(x)^7 \equiv h(x) \quad \text{ゆえに} \quad h(x)\{h(x)^{48} - 1\} \equiv 0 \pmod{f(x)}$$

$A = h(x)$ とすると

$$\begin{aligned} A(A^{48} - 1) &= A(A^{24} + 1)(A^{12} + 1)(A^6 + 1)(A^3 + 1)(A^3 - 1) \\ &= A(A + 1)(A - 1)(A^{24} + 1)(A^{12} + 1)(A^6 + 1) \\ &\quad \times (A^2 + A + 1)(A^2 - A + 1) \end{aligned}$$

次の因数

$$A^{24} + 1 > 0, \quad A^{12} + 1 > 0, \quad A^6 + 1 > 0,$$

$$A^2 \pm A + 1 = \left(A \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

は $x - 1$, $x - 2$ を因数に持たない (複号同順).

したがって、 $h(x)\{h(x) + 1\}\{h(x) - 1\}$ は $(x - 1)^2(x - 2)$ を因数にもつ.

$h(x)$, $h(x) + 1$, $h(x) - 1$ のいずれかが $(x - 1)(x - 2)$ を因数にもつとき,
 $x^2 - 3x + C$ (C は定数) は $x - 1$ を因数に持たないので不適.

$h(x)$, $h(x) + 1$, $h(x) - 1$ 中で $x - 1$, $x - 2$ を因数にもつものを次の 6 つの場合について調べる.

	$h(x)$	$h(x) + 1$	$h(x) - 1$	
①	$x - 1$	$x - 2$		$h(1) = 0, h(2) = -1$
②	$x - 1$		$x - 2$	$h(1) = 0, h(2) = 1$
③	$x - 2$	$x - 1$		$h(2) = 0, h(1) = -1$
④		$x - 1$	$x - 2$	$h(1) = -1, h(2) = 1$
⑤	$x - 2$		$x - 1$	$h(2) = 0, h(1) = 1$
⑥		$x - 2$	$x - 1$	$h(2) = -1, h(1) = 1$

$h(x) = x^2 + ax + b$ であるから、①～⑥ は次のようになる。

		$h(x)$	$h(x) + 1$	$h(x) - 1$
①	$a = -4, b = 3$	$(x-1)(x-3)$	$(x-2)^2$	$x^2 - 4x + 2$
②	$a = -2, b = 1$	$(x-1)^2$	$x^2 - 2x + 2$	$x(x-2)$
③	$a = -2, b = 0$	$x(x-2)$	$(x-1)^2$	$x^2 - 2x - 1$
④	$a = -1, b = -1$	$x^2 - x - 1$	$x(x-1)$	$(x+1)(x-2)$
⑤	$a = -4, b = 4$	$(x-2)^2$	$x^2 - 4x + 5$	$(x-1)(x-3)$
⑥	$a = -5, b = -5$	$x^2 - 5x + 5$	$(x-2)(x-3)$	$(x-1)(x-4)$

$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ が $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ で割り切れるものは、②と③の場合であるから

$$(a, b) = (-2, 1), (-2, 0)$$

別解 $h(x)^{49} - h(x)$ は $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ を因数にもつから

$$h(1)\{h(1)^{48} - 1\} = 0, \quad h'(1)\{49h(1)^{48} - 1\} = 0, \quad h(2)\{h(2)^{48} - 1\} = 0$$

上の第1式から $h(1) = 0, \pm 1$ であるから、第2式より $h'(1) = 0$

$$h(x) = x^2 + ax + b \text{ より, } h'(x) = 2x + a$$

$$h'(1) = 2 + a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -2$$

$$h(x) = x^2 - 2x + b \text{ であるから, } h(2) = 0, \pm 1 \text{ より } b = 0, \pm 1$$

(i) $b = 0$ のとき

$$h(x) = x(x-2), \quad h(x)+1 = (x-1)^2, \quad h(x)-1 = x^2 - 2x - 1$$

(ii) $b = 1$ のとき

$$h(x) = (x-1)^2, \quad h(x)+1 = x^2 - 2x + 2, \quad h(x)-1 = x(x-2)$$

(iii) $b = -1$ のとき

$$h(x) = x^2 - 2x - 1, \quad h(x)+1 = x(x-2), \quad h(x)-1 = x^2 - 2x - 2$$

$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ が $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ を因数に持つのは、(i) と (ii) の場合であるから

$$(a, b) = (-2, 0), (-2, 1)$$



- 6 (1) P が $z \leq 1$ にあるとき, 線分 OP の通過領域は 2^3

P が $z \geq 1$ にあるとき, 線分 OP の通過領域は $\frac{1}{6} \left\{ \frac{4}{3} \pi (\sqrt{3})^3 - 2^3 \right\}$

求める体積を V_1 とすると $V_1 = 2^3 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{4}{3} \pi (\sqrt{3})^3 - 2^3 \right\} = \frac{20}{3} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

- (2) $G(-1, 1, 1)$, $H(-1, -1, 1)$ とし, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$, $z \geq 1$ の平面 OGH による断面積を S とすると, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ より

$$S = \frac{1}{2} (\sqrt{3})^2 (2\alpha - \sin 2\alpha) = 3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) = 3\alpha - \sqrt{2}$$

右下の図の斜線部分を y 軸の周りに回転させた立体の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \pi \int_{-1}^1 \{t^2 - (\sqrt{2})^2\} dy = \pi \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = \frac{4}{3} \pi$$

図の斜線部分の重心の y 軸からの距離を d とすると, パップス・ギュルダンの定理により

$$d = \frac{V_2}{2\pi S} = \frac{2}{3S}$$

斜線部分を $t = \sqrt{2}$ の周りに $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転させた立体の体積を V_3 とすると

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{3}{4} \pi (d - \sqrt{2}) S = \frac{3}{4} \pi \left(\frac{2}{3S} - \sqrt{2} \right) S = \frac{\pi}{4} (2 - 3\sqrt{2}S) \\ &= \frac{\pi}{4} \{2 - 3\sqrt{2}(3\alpha - \sqrt{2})\} = \frac{\pi}{4} (8 - 9\sqrt{2}\alpha) \end{aligned}$$

よって, 求める体積は $V_1 + 4V_3 = \frac{20}{3} + \pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 8 - 9\sqrt{2}\alpha \right)$ ■

