

2次曲線の準線・焦点・頂点・曲率中心 — 2次曲線の中心は定義関数の特異点 —

2-S Haruta Maezaki

1 はじめに

2次曲線は，準線，焦点など大域的な性質を扱うことが多いが，局所的な視点から，放物線・楕円・双曲線の曲率中心と焦点，頂点，準線との位置関係を離心率を介した考察を行った．

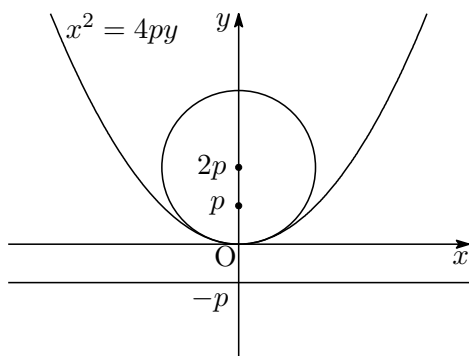
2次曲線 $f(x, y) = 0$ の頂点は， $|\text{grad}f(x, y)|$ が極値をとる点であることを証明した．

また，2次曲線 $f(x, y) = 0$ の中心は，定義関数の特異点と同値であることを証明し，中心の定義を与えた．

2 頂点における曲率中心

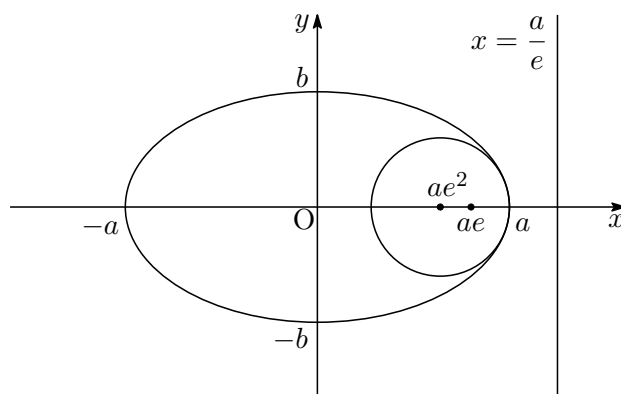
2.1 放物線 $x^2 = 4py$ の曲率中心

放物線 $x^2 = 4py$ の頂点における曲率中心，焦点，頂点，準線が等間隔に並んでいる．



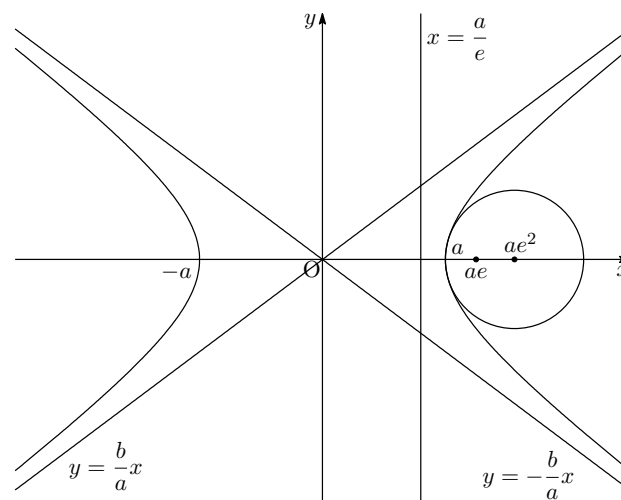
2.2 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の曲率中心

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) の頂点 $(a, 0)$ における曲率中心，焦点，頂点，準線が x 軸上で等比点列をなしている (e は離心率)．



2.3 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の曲率中心

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の頂点 $(a, 0)$ における曲率中心，焦点，頂点，準線が x 軸上で等比点列をなしている (e は離心率)．



3 曲線 $f(x, y) = 0$ の曲率

$f(x, y)$ の偏微分を

$$f_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y), \quad f_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} f(x, y)$$

と表記すると $(\alpha, \beta = x, y)$, 曲率 κ は

$$\kappa = \operatorname{sgn}(f_y) \frac{\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

なお, $f(x, y) = 0$ と $-f(x, y) = 0$ は一致するから, (1) の $\operatorname{sgn}(f_y)$ の符号には本質的な違いはない.

とくに, 2 次曲線 $f(x, y) = 0$ について

$$f(x, y) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + px + qy + \frac{r}{2}$$

とすると, その曲率 κ は

$$\kappa = \operatorname{sgn}(f_y) \frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{vmatrix}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

(2) から, 2 次曲線 $f(x, y) = 0$ の頂点は, 曲線上で $f_x^2 + f_y^2$ が極値をとる点である.

4 2 次曲線 $f(x, y) = 0$ の中心

2 次曲線の頂点は曲線上の点であるが, 2 次曲線の中心は R^2 の点として考える必要があるから, 中心について次のように定義する.

定義 (中心) —

$K \subset R^2$ とする. 点 $p \in R^2$ に対し, 任意の点 $q \in K$ の p に対する対称な点 q' が, $q' \in K$ であるとき, p は K の中心という.

定理 (中心は定義関数の特異点) —

2 次曲線 $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ に対し, $(\alpha, \beta) \in R^2$ が

$$f_x(\alpha, \beta) = f_y(\alpha, \beta) = 0 \quad (\text{特異点})$$

であることは, $(\alpha, \beta) \in R^2$ が $f^{-1}(0)$ の中心であるための必要十分条件である.

5 2 次曲線の分類

退化しない 2 次曲線, すなわち, 楕円, 双曲線, 放物線となるときの, 曲率 $\kappa \neq 0$ である. (2) から,

$$\begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

のとき, 2 次曲線 $f(x, y) = 0$ は退化する.

一般に, 2 次曲線は, 次のように分類される.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0 \\ \text{(II)} \quad \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + C = 0 \quad (C \neq 0) \\ \text{(III)} \quad \lambda_1 X^2 + 2\mu Y = 0 \quad (\mu \neq 0) \end{array} \right\} \quad (3)$$

2 次曲線の中心と定義関数の特異点が同値であるから, (3) において, (I), (II) は中心が存在する有心 2 次曲線であり, (III) は中心が存在しない無心 2 次曲線である.

中心 (α, β) が $f^{-1}(0)$ 上にあるとき,

$$\begin{vmatrix} a & b & f_x \\ b & c & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

(I) は, $\kappa = 0$ であり, 次のように分類される.

- $ac - b^2 > 0$ のとき, 1 点 (中心は 1 点)
- $ac - b^2 = 0$ のとき, 1 つの実直線
(中心は実直線上の点 [非孤立特異点])
- $ac - b^2 < 0$ のとき, 相交わる 2 直線
(中心は 2 直線の交点)

(II) は, $\lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2$ より分類される.

- $ac - b^2 > 0$ のとき, 楕円型
- $ac - b^2 < 0$ のとき, 双曲線
- $ac - b^2 = 0$ のとき, 平行 2 直線

(III) は, 放物線で, 定義関数の特異点が存在しない無心 2 次曲線である.

6 おわりに

解説及び証明については, 次に掲載している.

<https://math4u.site/temp/paper.pdf>