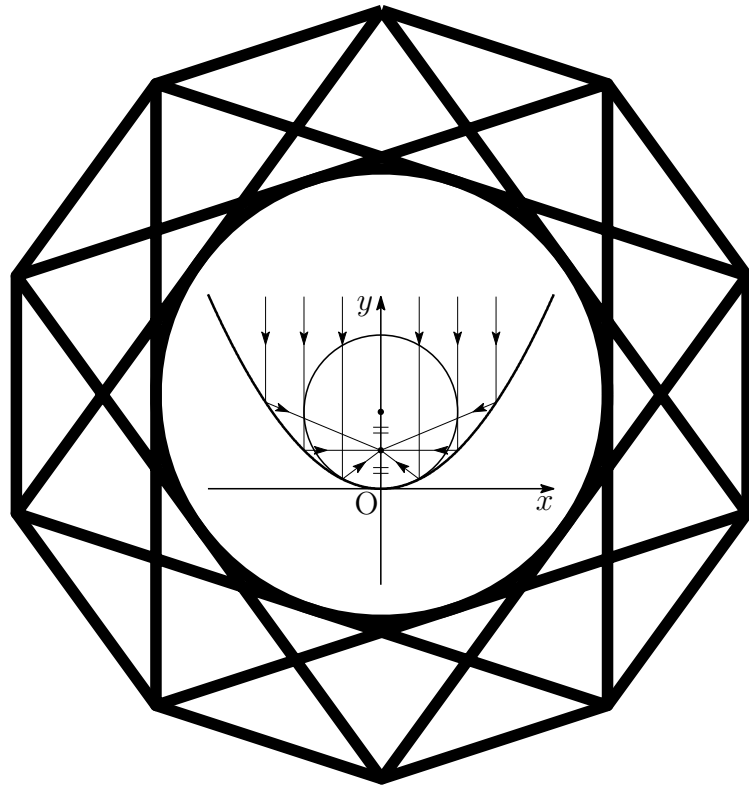


2024年度

大学への数学

共通テスト対策



熊本県立第二高等学校数学科

2025 年 1 月 10 日

Typed by L^AT_EX 2_ε

目次

1	数学 I	3
1.1	図形と計量	3
1.1.1	パップスの定理 (中線定理) とスチュワートの定理	3
1.1.2	トレミーの定理とブラマーグプタの公式	5
2	数学 II	9
2.1	微分法と積分法	9
2.1.1	極展開	9
2.1.2	積分公式 1	12
2.1.3	3 次関数のグラフと接線	13
2.1.4	積分公式 2	16
3	数学 A	17
3.1	図形の性質 (数学 A)	17
3.1.1	角の二等分線	17
3.1.2	複比と調和点列	18
4	数学 B	21
4.1	数列	21
4.1.1	隣接 3 項間	21
4.1.2	分数漸化式	22
5	数学 C	24
5.1	空間のベクトル	24
5.1.1	外積 (ベクトル積)	24
5.2	複素数平面	25
5.2.1	反転	25
5.3	2 次曲線	27
5.3.1	2 次曲線の性質	27
5.3.2	2 次曲線の標準形	32
6	Power Max	34
6.1	数学 I・A	34
6.1.1	第 1 回 第 1 問	34
6.1.2	第 3 回 第 3 問	45
6.1.3	第 4 回 第 3 問	52
6.1.4	第 5 回 第 3 問	58
6.1.5	第 6 回 第 3 問	62

6.2	数学 II・B・C	70
6.2.1	第 1 回 第 1 問	70
6.2.2	第 1 回 第 3 問	78
6.2.3	第 1 回 第 7 問	82
6.2.4	第 2 回 第 4 問	91
6.2.5	第 3 回 第 2 問	98
6.2.6	第 3 回 第 3 問	102
6.2.7	第 3 回 第 7 問	110
6.2.8	第 4 回 第 3 問	118
6.2.9	第 4 回 第 4 問	125
6.2.10	第 4 回 第 6 問	129
6.2.11	第 5 回 第 4 問	135
6.2.12	第 6 回 第 3 問	141
6.2.13	第 6 回 第 4 問	148
6.2.14	第 6 回 第 6 問	158
6.2.15	第 6 回 第 7 問	165
6.2.16	第 7 回 第 7 問	169
6.2.17	第 8 回 第 6 問	176
6.2.18	第 8 回 第 7 問	181

1 数学I

1.1 図形と計量

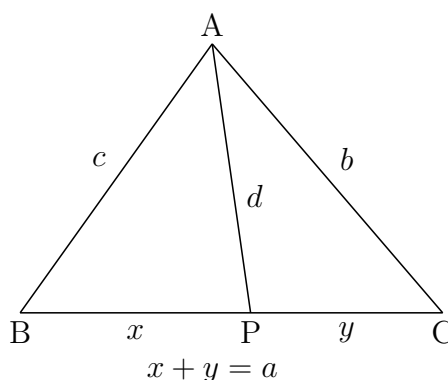
1.1.1 パップスの定理 (中線定理) とスチュワートの定理

パップスの定理はスチュワートの定理に含まれる.

スチュワートの定理

$\triangle ABC$ の3辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a , b , c とし, 辺 BC 上に点 P をとり, AP , BP , PC の長さをそれぞれ d , x , y とおくと, 次が成立する.

$$b^2x + c^2y = a(d^2 + xy)$$



証明 $\theta = \angle APB$ とし, $\triangle ABP$, $\triangle ACP$ に余弦定理を適用すると

$$c^2 = d^2 + x^2 - 2dx \cos \theta, \quad (\text{A})$$

$$\begin{aligned} b^2 &= d^2 + y^2 - 2dy \cos(180^\circ - \theta) \\ &= d^2 + y^2 + 2dy \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{B})$$

(A) $\times y$ + (B) $\times x$ より

$$\begin{aligned} b^2x + c^2y &= y(d^2 + x^2) + x(d^2 + y^2) \\ &= (x + y)d^2 + xy(x + y) \\ &= a(d^2 + xy) \end{aligned}$$

証終

補足 特に, $x = y = \frac{a}{2}$ のとき, 次のパップスの定理 (中線定理) を得る.

$$b^2 + c^2 = 2(d^2 + x^2)$$

関連 前頁の AP が $\angle A$ の二等分線であるとき, $x : y = c : b$ であるから, スチュワートの定理の左辺に

$$x = \frac{c}{b+c}a, \quad y = \frac{b}{b+c}a$$

を代入すると

$$b^2x + c^2y = b^2 \cdot \frac{c}{b+c}a + c^2 \cdot \frac{b}{b+c}a = \frac{bc(b+c)}{b+c}a = abc$$

したがって $abc = a(d^2 + xy)$ すなわち **$d^2 = ab - xy$**

別証 上の角の二等分線に関する公式は, 数学 A でも扱っている.

1.1.2 トレミーの定理とブラマーグプタの公式

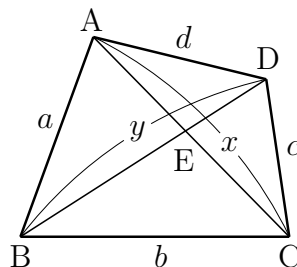
トレミーの定理とブラマーグプタの公式に関連する周辺公式を解説します.

円に内接する四角形 ABCD において,

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d,$$

$$AC = x, \quad BD = y$$

とすると, 次が成り立つ.



$$(1) \quad \cos A = \frac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(da + bc)}, \quad \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

$$(2) \quad x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \quad y^2 = \frac{(bd + ca)(ba + cd)}{bc + da}$$

$$(3) \quad xy = ac + bd \quad (\text{トレミーの定理})$$

(4) $2s = a + b + c + d$ とすると, 四角形 ABCD の面積を S , 外接円の半径を R とすると (ブラマーグプタの公式)

$$S = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

$$R = \frac{\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}}{4S}$$

(5) AC と BD の交点を E とするとき

$$EA : EB : EC : ED = da : ab : bc : cd$$

(6) $\theta = \angle AED$ とするとき

$$\cos \theta = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(ac + bd)}$$

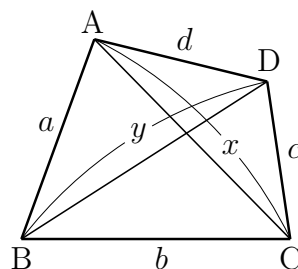
証明 (1) 余弦定理により

$$y^2 = d^2 + a^2 - 2da \cos A$$

$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$$

このとき, $\cos C = -\cos A$ であるから

$$d^2 + a^2 - 2da \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$



よって
$$\cos A = \frac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(da + bc)}$$

上式から
$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

補足 $\cos B$ は $\cos A$ の結果を $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow a$ とすればよい.

(2) 余弦定理により
$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$$

これに (1) の結果を代入すると

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

上式から
$$y^2 = \frac{(bd + ca)(ba + cd)}{bc + da}$$

(3) (2) の結果から
$$x^2 y^2 = (ac + bd)^2 \quad \text{よって} \quad xy = ac + bd$$

(4) (1) の結果から

$$1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b - c + d)(a - b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

$$1 - \cos A = \frac{-(a - d)^2 + (b + c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b + c - d)(-a + b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

したがって
$$\sin^2 A = (1 + \cos A)(1 - \cos A)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2d)}{4(ad + bc)^2} \\ &= \frac{4(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}{(ad + bc)^2} \end{aligned}$$

$\sin A = \sin C$ より
$$S = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin A$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(ad + bc) \times \frac{2\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}{ad + bc} \\ &= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)} \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}, \quad \sin A = \frac{2S}{ad+bc} \quad \text{であるから, 正弦定理により}$$

$$R = \frac{y}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

$$(5) \quad \triangle EDA \sim \triangle ECB \quad \text{より} \quad EA : EB = ED : EC = d : b$$

$$\triangle EAB \sim \triangle EDC \quad \text{より} \quad EA : ED = EB : EC = a : c$$

$$\text{よって} \quad EA : EB : EC : ED = da : ab : bc : cd$$

$$(6) \quad (2), (3), (5) \text{の結果から}$$

$$AE^2 = \left(\frac{ad}{ad+bc} x \right)^2 = \frac{a^2 d^2}{(ad+bc)^2} \times \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} = \frac{a^2 d^2 (ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$ED^2 = \left(\frac{cd}{ab+cd} y \right)^2 = \frac{c^2 d^2}{(ab+cd)^2} \times \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} = \frac{c^2 d^2 (ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$AE \cdot ED = \frac{ad}{ad+bc} x \times \frac{cd}{ab+cd} y = \frac{acd^2 xy}{(ad+bc)(ab+cd)} = \frac{acd^2 (ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)}$$

これらを $2AE \cdot ED \cos \theta = AE^2 + ED^2 - d^2$ に代入して整理すると

$$\frac{2acd^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)} \cos \theta = \frac{acd^2}{(ad+bc)(ab+cd)} (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(ac+bd)}$$

$$(4) \text{の別解} \quad (6) \text{の結果から}$$

$$1 + \cos \theta = \frac{(a+c)^2 - (b-d)^2}{2(ac+bd)} = \frac{(a-b+c+d)(a+b+c-d)}{2(ac+bd)}$$

$$1 - \cos \theta = \frac{(b+d)^2 - (a-c)^2}{2(ac+bd)} = \frac{(-a+b+c+d)(a+b-c+d)}{2(ac+bd)}$$

$$2s = a + b + c + d \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}{4(ac+bd)^2} \\ &= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ac+bd)^2} \end{aligned}$$

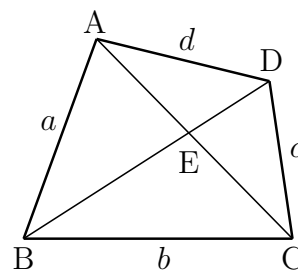
したがって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} xy \sin \theta = \frac{1}{2} (ac+bd) \times \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ac+bd} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \end{aligned}$$

補足 たとえば, (1), (6) から得られた

$$\cos \angle ABC = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

$$\cos \angle BEC = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(ac + bd)}$$



の符号から, これらの角の大きさに関する次の性質が分かる.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \begin{cases} \angle ABC \text{ が鋭角} & \Longleftrightarrow & a^2 + b^2 > c^2 + d^2 \\ \angle ABC \text{ が直角} & \Longleftrightarrow & a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ \angle ABC \text{ が鈍角} & \Longleftrightarrow & a^2 + b^2 < c^2 + d^2 \end{cases} \\ \text{ii)} \quad & \begin{cases} \angle BEC \text{ が鋭角} & \Longleftrightarrow & a^2 + c^2 > b^2 + d^2 \\ \angle BEC \text{ が直角} & \Longleftrightarrow & a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ \angle BEC \text{ が鈍角} & \Longleftrightarrow & a^2 + c^2 < b^2 + d^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$d = 0$ とすると, 四角形 ABCD は三角形 ABC に退化し, $\angle ABC = B$, $\angle BEC = A$ となり, $\cos B$, $\cos A$ は余弦定理に一致する.

また, i), ii) から, 三角形 ABC における関係式を得る.

同様に, ブラマーグプタの公式

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad (2s = a + b + c + d)$$

において, $d = 0$ とすると, 次のヘロンの公式を得る.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (2s = a + b + c)$$

2 数学II

2.1 微分法と積分法

2.1.1 極展開

定理 1 2次関数 $f(x)$ の x^2 の係数が a であるとき, $x = k$ を極として展開すると

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x - k) + a(x - k)^2 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと, $f'(x) = 2ax + b$ より

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^2 + bk + c + (2ak + b)(x - k) + a(x - k)^2 \\ &= ax^2 + bx + c = f(x) \end{aligned}$$

[証終]

例えば, 定理 1 において, $f'(k) = 0$ のとき, $k = -\frac{b}{2a}$ であるから

$$f(k) = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

このとき, $f(x)$ は平方完成の式となる.

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

定理 2 3次関数 $f(x)$ の x^3 の係数が a であるとき, $x = k$ を極として展開すると

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x - k) + \frac{1}{2}f''(k)(x - k)^2 + a(x - k)^3 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおくと

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^3 + bk^2 + ck + d + (3ak^2 + 2bk + c)(x - k) \\ &\quad + \frac{1}{2}(6ak + 2b)(x - k)^2 + a(x - k)^3 \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d = f(x) \end{aligned}$$

[証終]

n 次多項式についても数学 III で学習する部分積分法を使って証明できる¹.

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai-2020.pdf> (p.15 を参照)

定理 3 3次関数 $C: y = f(x)$ のグラフは変曲点 $M(k, f(k))$ に関して対称である。

証明 変曲点を $M(k, f(k))$ とすると, $f''(k) = 0$ であるから

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x - k) + a(x - k)^3 \quad (a \text{ は } f(x) \text{ の } x^3 \text{ の係数}) \quad (1)$$

C 上の 2 点 $A(k + t, f(k + t))$, $B(k - t, f(k - t))$ について (t は任意の定数)

$$\begin{aligned} (k + t) + (k - t) &= 2k, \\ f(k + t) + f(k - t) &= \{f(k) + f'(k)t + at^3\} + \{f(k) - f'(k)t - at^3\} \\ &= 2f(k) \end{aligned}$$

したがって, A , B の中点は変曲点 M である. よって, C は変曲点 M に関して対称である. 証終

補足 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のとき, $f''(x) = 6ax + 2b$ より $k = -\frac{b}{3a}$ [終]

次に, 3 次関数 $f(x)$ の増減を (1) を利用して調べてみる. $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = f'(k) + 3a(x - k)^2 \quad (2)$$

(i) $f'(k) = 0$ または $f'(k)$ が a と同符号, すなわち, $af'(k) \geq 0$ であるとき ($f(x)$ は極値をもたない), $f(x)$ は単調増加または単調減少であるから, このとき, 3 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解は 1 個である.

(ii) $f'(k)$ が a と異符号であるとき ($f(x)$ は極大値と極小値をもつ)

$$f'(k) = -3as^2 \quad (3)$$

とおくと ($s > 0$), (1), (2) は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(k) - 3as^2(x - k) + a(x - k)^3 \\ f'(x) &= -3as^2 + 3a(x - k)^2 = 3a(x - k + s)(x - k - s) \end{aligned} \quad (4)$$

$f'(x) = 0$ とすると, $x = k \pm s$ であるから, $f(x)$ の極値は

$$f(k + s) = f(k) - 2as^3, \quad f(k - s) = f(k) + 2as^3 \quad (5)$$

上の 2 式および (3) より

$$\begin{aligned} f(k + s)f(k - s) &= f(k)^2 - 4a^2s^6 = f(k)^2 - 4a^2 \left\{ -\frac{f'(k)}{3a} \right\}^3 \\ &= f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} \end{aligned}$$

3 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数について

$$f(k+s)f(k-s) = f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} > 0 \text{ のとき } \text{実数解は 1 個}$$

$$f(k+s)f(k-s) = f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} = 0 \text{ のとき } \text{実数解は 2 個}$$

$$f(k+s)f(k-s) = f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} < 0 \text{ のとき } \text{実数解は 3 個}$$

(i), (ii) より, 3 次方程式の実数解の個数について, 次の定理が成立する.

3 次方程式の実数解の個数

定理 4 3 次方程式 $f(x) = 0$ の x^3 の係数を a , $f''(x) = 0$ の解を k とすると

$$af'(k) \geq 0 \text{ または } f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} > 0 \iff f(x) = 0 \text{ の実数解は 1 個}$$

$$af'(k) < 0, f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} = 0 \iff f(x) = 0 \text{ の実数解は 2 個}$$

$$f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} < 0 \iff f(x) = 0 \text{ の実数解は 3 個}$$

注意 $f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} < 0 \implies af'(k) < 0$

また, (4) に $x = k - 2s$, $k + 2s$ を代入すると

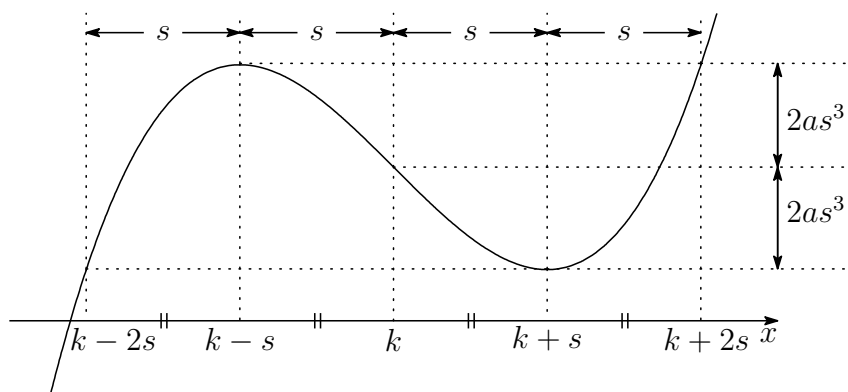
$$f(k - 2s) = f(k) - 2as^3, \quad f(k + 2s) = f(k) + 2as^3$$

したがって, 上の 2 式と (5) より, 次が成立する.

$$f(k - 2s) = f(k + s), \quad f(k + 2s) = f(k - s)$$

$a > 0$ のとき, $y = f(x)$ について, グラフの概形は次のようになる.

$(k, f(k))$ は変曲点, $f(k - s)$ は極大値, $f(k + s)$ は極小値である.



s は (3) より $s = \sqrt{-\frac{f'(k)}{3a}}$

2.1.2 積分公式 1

9 ページの定理 2 の関数 $f(x)$ について, 次の定積分を考える. k, t は任意の定数とする.

$$\begin{aligned}\int_k^{k+t} f(x) dx &= \int_k^{k+t} \left\{ f(k) + f'(k)(x-k) + \frac{1}{2}f''(k)(x-k)^2 + a(x-k)^3 \right\} dx \\ &= \left[f(k)(x-k) + \frac{f'(k)}{2}(x-k)^2 + \frac{f''(k)}{6}(x-k)^3 + \frac{a}{4}(x-k)^4 \right]_k^{k+t} \\ &= f(k)t + \frac{f'(k)}{2}t^2 + \frac{f''(k)}{6}t^3 + \frac{a}{4}t^4\end{aligned}\quad (6)$$

(6) の t を $-t$ に置き換えると

$$\int_k^{k-t} f(x) dx = -f(k)t + \frac{f'(k)}{2}t^2 - \frac{f''(k)}{6}t^3 + \frac{a}{4}t^4\quad (7)$$

(6)–(7) より

$$\int_{k-t}^{k+t} f(x) dx = 2t \left\{ f(k) + \frac{f''(k)t^2}{6} \right\}\quad (8)$$

また, 定理 2 の等式に $x = k+t$, $k-t$ をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}f(k+t) &= f(k) + f'(k)t + \frac{f''(k)}{2}t^2 + at^3 \\ f(k-t) &= f(k) - f'(k)t + \frac{f''(k)}{2}t^2 - at^3\end{aligned}$$

上の 2 式の辺々をそれぞれ加えると

$$f(k+t) + f(k-t) = 2f(k) + f''(k)t^2\quad (9)$$

(8) と (9) から $f''(k)t^2$ を消去すると

$$\int_{k-t}^{k+t} f(x) dx = \frac{1}{3}t \{ f(k-t) + 4f(k) + f(k+t) \}$$

$k = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $t = \frac{\beta - \alpha}{2}$ とおくと, 次の積分公式が成立する.

定理 5 $f(x)$ を 3 次以下の多項式とすると

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{6} \left\{ f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right\}$$

とくに, $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ のとき $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{2}{3}(\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

2.1.3 3 次関数のグラフと接線

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ の表す曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $P(p, f(p))$ における接線 ℓ の方程式を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

定理 2 にしたがって、 $x = p$ を極として、 $f(x)$ を展開すると

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 + a(x - p)^3$$

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと、 C と ℓ の共有点の x 座標は、3 次関数 $y = h(x)$ の x 軸との共有点の x 座標と等しい。

$$h(x) = \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 + a(x - p)^3$$

$f''(x) = 6ax + 2b$ より、変曲点の x 座標を k とすると、 $f''(k) = 0$ より

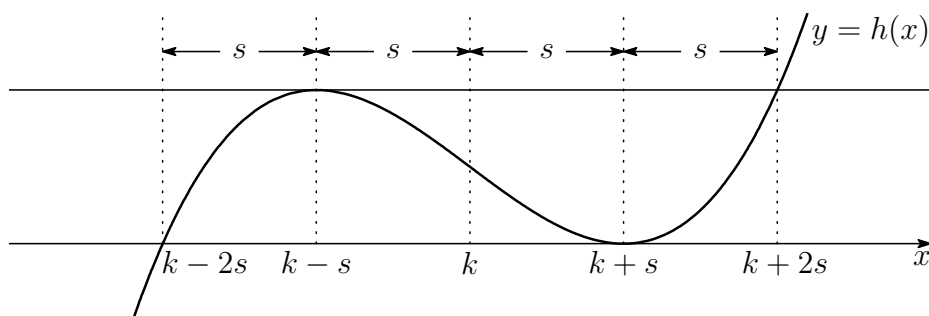
$$6ak + 2b = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = -3ak, \quad f''(x) = 6a(x - k)$$

$f''(p) = 6a(p - k)$ であるから、 $h(x)$ は

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2} \cdot 6a(p - k)(x - p)^2 + a(x - p)^3 \\ &= a(x - p)^2 \{3(p - k) + (x - p)\} = a(x - p)^2 \{x - (3k - 2p)\} \end{aligned}$$

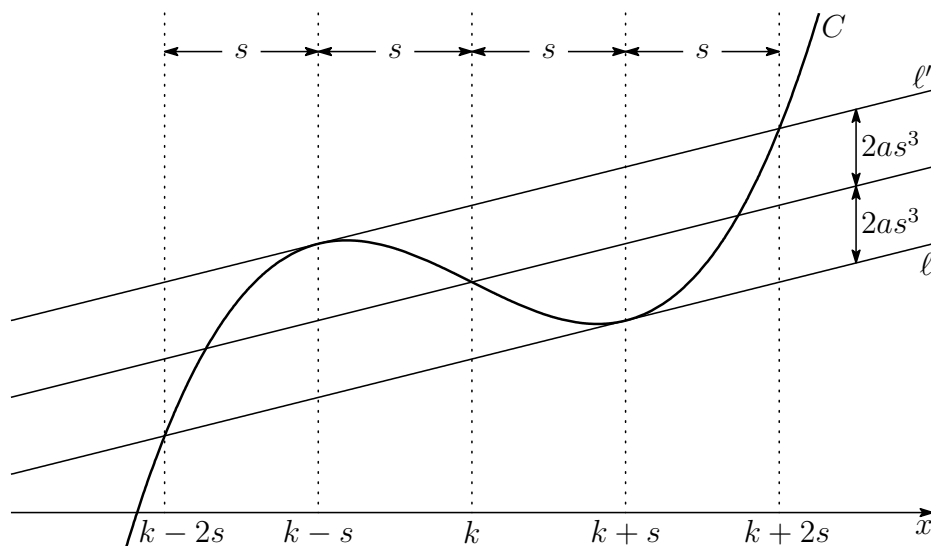
$y = h(x)$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標は $x = p, 3k - 2p$

$p = k + s$ とおくと、これらの共有点の x 座標は、それぞれ $x = k + s, k - 2s$
 $s > 0$ のとき、 $y = h(x)$ のグラフの概形は、次のようになる (p.11 を参照)。



変曲点の x 座標を基準に考えると分かりやすい。接点の x 座標が変曲点の x 座標より s だけ大きければ、もう一方の共有点の x 座標は変曲点の x 座標より $2s$ だけ小さい。逆に、接点の x 座標が変曲点の x 座標より s だけ小さければ、もう一方の共有点の x 座標は変曲点の x 座標より $2s$ だけ大きい。

ℓ と平行な C の接線を ℓ' とすると、これらのグラフの概形は、次のようになる。
 なお、 C と 2 接線 ℓ, ℓ' との位置関係は C が極値をもたない場合にも成立する。



定理 3 で述べたように、3 次関数 $y = f(x)$ のグラフは変曲点に関して対称である。
 このことから変曲点に関して対称な 2 点における接線が平行であることを証明できる。
 変曲点の x 座標 k を極として $f(x)$ を展開すると

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x - k) + a(x - k)^3$$

これを微分すると $f'(x) = f'(k) + 3a(x - k)^2$

変曲点に関して対称な 2 点 $(k + s, f(k + s))$, $(k - s, f(k - s))$ における接線の傾きは

$$f'(k + s) = f'(k - s) = f'(k) + 3as^2$$

よって、 ℓ と ℓ' は平行である。

ℓ は、点 $(k + s, f(k) + f'(k)s + as^3)$ を通り、傾き $f'(k) + 3as^2$ の直線

$$\begin{aligned} y &= (f'(k) + 3as^2)(x - k - s) + f(k) + f'(k)s + as^3 \\ &= f(k) - 2as^3 + (f'(k) + 3as^2)(x - k) \end{aligned}$$

C と ℓ の方程式 $C: y = f(k) + f'(k)(x - k) + a(x - k)^3$

$$\ell: y = f(k) - 2as^3 + (f'(k) + 3as^2)(x - k)$$

上の 2 式から y を消去して整理すると

$$2as^3 - 3as^2(x - k) + a(x - k)^3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(x - k - s)^2(x - k + 2s) = 0$$

したがって、 C と ℓ は $x = k - 2s$ で交わる。

s を $-s$ に置き換えたものが ℓ' であるから、 C と ℓ' は $x = k + 2s$ で交わる。
 $s > 0$ のとき、 C と ℓ 、 C と ℓ' で囲まれた図形の面積をそれぞれ S 、 S' とすると

$$\begin{aligned} S &= |a| \int_{k-2s}^{k+s} (x - k - s)^2 (x - k + 2s) dx \\ &= |a| \int_{k-2s}^{k+s} (x - k + 2s)(k + s - x)^2 dx \\ &= \frac{|a|}{12} \{(k + s) - (k - 2s)\}^4 = \frac{27}{4} |a| s^4 \end{aligned}$$

上式の s を $-s$ に置き換えると

$$\begin{aligned} \frac{27}{4} |a| (-s)^4 &= |a| \int_{k+2s}^{k-s} (x - k + s)^2 (x - k - 2s) dx \\ &= |a| \int_{k-s}^{k+2s} (x - k + s)^2 (k + 2s - x) dx \\ &= S' \end{aligned}$$

したがって

$$S = S' = \frac{27}{4} |a| s^4$$

3 次関数のグラフとその接線で囲まれた図形の面積

定理 6 3 次関数 $f(x)$ の x^3 の係数が a で、変曲点、接点の x 座標をそれぞれ k 、 $k + s$ とすると、接線と $C : y = f(x)$ のグラフの接点以外の共有点の x 座標は

$$x = k - 2s$$

C 上の $x = k + s$ 、 $k - s$ における接線は平行で、その傾きは

$$f'(k) + 3as^2$$

C 上の $x = k + s$ 、 $k - s$ における接線をそれぞれ ℓ 、 ℓ' とすると、 C と ℓ 、 C と ℓ' で囲まれた図形の面積をそれぞれ S 、 S' とすると

$$S = S' = \frac{27}{4} |a| s^4$$

2.1.4 積分公式 2

次の定積分を求める.

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)^2 dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \beta) - (\alpha - \beta)\}(x - \beta)^2 dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \beta)^3 - (\alpha - \beta)(x - \beta)^2\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}(x - \beta)^4 - \frac{1}{3}(\alpha - \beta)(x - \beta)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= 0 - \left\{ \frac{1}{4}(\alpha - \beta)^4 - \frac{1}{3}(\alpha - \beta)^4 \right\} \\
 &= \frac{1}{12}(\alpha - \beta)^4 = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4
 \end{aligned} \tag{10}$$

(10) の α と β を入れ替えると

$$\int_{\beta}^{\alpha} (x - \beta)(x - \alpha)^2 dx = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4$$

上式の左辺の上端と下端を入れ替えて書き替えると

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2(\beta - x) dx = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4 \tag{11}$$

(10) は, 次のように書くこともできる.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x)^2 dx = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4 \tag{12}$$

(11) および (12) より, 次式を得る.

定理 7 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2(\beta - x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x)^2 dx = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4$

例えば, 定理 7 より

$$S = \int_{-2}^1 (x - 1)^2(x + 2) dx = \int_{-2}^1 (x + 2)(1 - x)^2 dx = \frac{1}{12}\{1 - (-2)\}^4 = \frac{27}{4}$$

数学 III の部分積分法を利用すると, 次を証明できる².

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m(\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

²<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010-kouki.pdf> の 1 を参照.

3 数学 A

3.1 図形の性質 (数学 A)

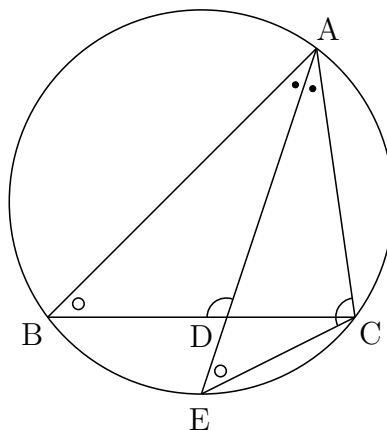
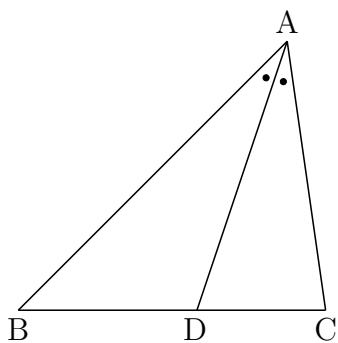
3.1.1 角の二等分線

三角形の角の二等分線に関する公式

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

証明 右下の図のように $\triangle ABC$ の外接円と AD の延長との交点を E とする.



$\triangle ABD \sim \triangle AEC$ より

$$AB : AD = AE : AC \quad \text{ゆえに} \quad AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

$AE = AD + DE$ より

$$AB \cdot AC = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

方べきの定理により, $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ であるから

$$AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC \quad \text{よって} \quad AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

証終

3.1.2 複比と調和点列

複比 (cross ratio)

同一直線上の 4 点 A, P, B, Q に対して複比を

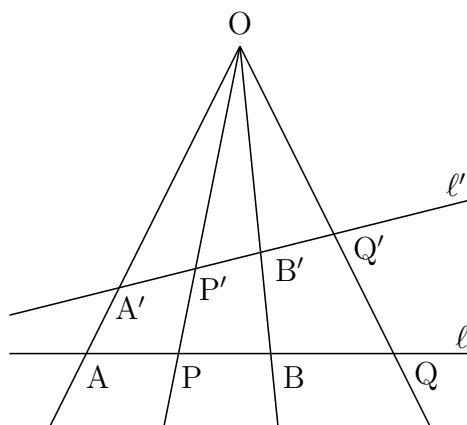
$$(A, B; P, Q) = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ}$$

と定義する. P, Q はそれぞれ AB の内分点, 外分点である.

定理 8 O から伸びる四本の半直線がある. 別の直線 ℓ がこれらの半直線と A, P, B, Q で交わるとする. このとき, 複比 $(A, B; P, Q)$ は ℓ の取り方によらない不変量である.

補足 下の図において, 次式が成立することである.

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} = \frac{A'P'}{B'P'} \cdot \frac{B'Q'}{A'Q'}$$



証明

$$\begin{aligned} \frac{AP}{BP} &= \frac{\triangle OAP}{\triangle OPB} = \frac{\frac{1}{2}OA \cdot OP \sin \angle AOP}{\frac{1}{2}OP \cdot OB \sin \angle POB} = \frac{OA \sin \angle AOP}{OB \sin \angle POB}, \\ \frac{BQ}{AQ} &= \frac{\triangle OBQ}{\triangle OAQ} = \frac{\frac{1}{2}OB \cdot OQ \sin \angle BOQ}{\frac{1}{2}OA \cdot OQ \sin \angle AOQ} = \frac{OB \sin \angle BOQ}{OA \sin \angle AOQ} \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を掛けると
$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} = \frac{\sin \angle AOP \sin \angle BOQ}{\sin \angle POB \sin \angle AOQ}$$

この値は, 角のみで決まるので ℓ の取り方によらない.

証終

調和点列

同一直線上に4点 A, P, B, Q がこの順にあり,

$$(A, B; P, Q) = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} = 1$$

を満たすとき, 4点 A, P, B, Q を調和点列という. 上式を

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$$

と表記することもできる.

右の図の $\triangle OAB$ にチェバの定理を適用すると

$$\frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} = 1$$

また, $\triangle OAB$ と直線 $A'Q$ についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BB'}{B'O} = 1$$

上の第1式の辺々を第2式の辺々で割ると

$$(A, B; P, Q) = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} = 1$$

さらに, 定理8により $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} = \frac{A'P'}{B'P'} \cdot \frac{B'Q}{A'Q} = 1$

P が AB を $m:n$ に内分する点であるとき ($m \neq n$), Q は AB を $m:n$ に外分する点である. 同時に, P', Q も A'B' をそれぞれ $m:n$ に内分, 外分する点である.

4点 A, P, B, Q が調和点列であるから, 4点 A', P', B', Q も調和点列である. 調和点列 A, P, B, Q について, $AP \cdot BQ = BP \cdot AQ$ であるから, これに

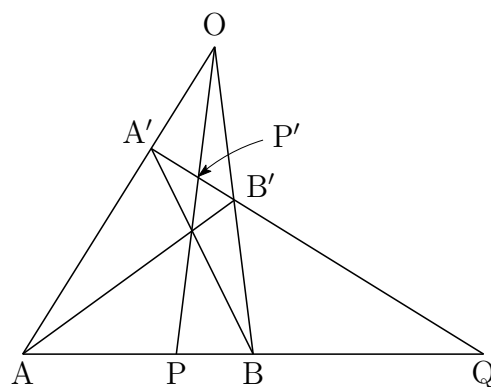
$$BQ = AQ - AB, \quad BP = AB - AP$$

を代入すると $AP \cdot (AQ - AB) = (AB - AP) \cdot AQ$

$$2AP \cdot AQ = AB(AP + AQ) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$$

よって

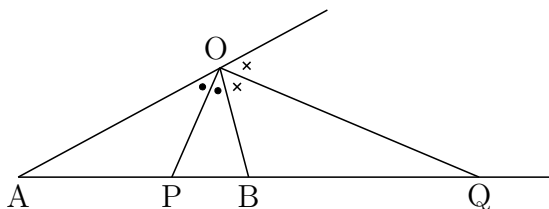
$$(A, B; P, Q) = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$$



調和点列の代表的な性質を2つ紹介する.

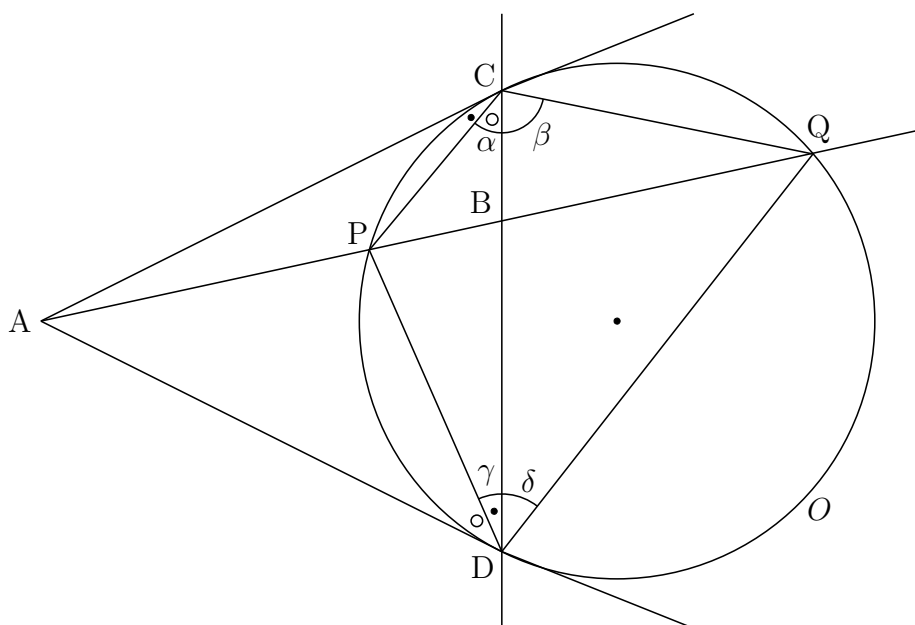
- (1) 図の $\triangle OAB$ の $\angle AOB$ の角の二等分線 OP と外角の二等分線 OQ について

$$AP : PB = AQ : QB \quad \text{ゆえに} \quad (A, B; P, Q) = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} = 1$$



- (2) 図の円 O の極 A と極線 CD について, 次式が成立する

$$(A, B; P, Q) = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} = 1$$



証明 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ に注意して

$$\begin{aligned} \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} &= \frac{\triangle CAP}{\triangle CPB} \cdot \frac{\triangle CBQ}{\triangle CAQ} = \frac{CA \sin \gamma}{CB \sin \alpha} \cdot \frac{CB \sin \beta}{CA \sin(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{\sin \gamma \sin \beta}{\sin \alpha \sin \delta}, \\ \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} &= \frac{\triangle DAP}{\triangle DPB} \cdot \frac{\triangle DBQ}{\triangle DAQ} = \frac{DA \sin \alpha}{DB \sin \gamma} \cdot \frac{DB \sin \delta}{DA \sin(\alpha + \gamma + \delta)} = \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sin \gamma \sin \beta} \end{aligned}$$

上の2式の辺々を掛けると $\left(\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} \right)^2 = 1$ よって $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{AQ} = 1$ 証終

4 数学B

4.1 数列

4.1.1 隣接3項間

数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_{n+2} - pa_{n+1} + qa_n = 0$ の特性方程式

$$x^2 - px + q = 0$$

の解を α, β とすると、与えられた漸化式は $a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$

これから
$$\begin{cases} a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \\ a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \end{cases}$$

ゆえに
$$\begin{cases} a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) \\ a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) \end{cases} \dots (*)$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき, (*) の第1式から第2式を引くことにより

$$a_n = \frac{(a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} - (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

ii) $\alpha = \beta$ のとき, (*) から
$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}$$

数列 $\left\{\frac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ は初項 $\frac{a_1}{\alpha}$, 公差 $\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1}{\alpha} + (n-1)\left(\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}\right)$$

よって
$$a_n = \alpha^{n-1} \left\{ a_1 + (n-1) \left(\frac{a_2}{\alpha} - a_1 \right) \right\}$$

i), ii) の結果から, 定数 A, B, C, D を用いて

$$\alpha \neq \beta \text{ のとき } a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$$

$$\alpha = \beta \text{ のとき } a_n = (Cn + D)\alpha^{n-1}$$

4.1.2 分数漸化式

$p, q, r \neq 0, s$ を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について、以下に述べる.

$ps - qr = 0$ のとき、右辺は定数となるので、 $ps - qr \neq 0$ とする.

(*) の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α, β とすると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots (***) \\ a_{n+1} - \beta &= \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)} \end{aligned}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき、上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha} \left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \right)^{n-1}$$

上式から、 a_n が求まる.

ii) $\alpha = \beta$ のとき、(*) の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、 α は (**) の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② により、(***) は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると
$$\frac{1}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{a_n - \alpha} + \frac{2r}{p + s}$$

このとき、数列 $\left\{ \frac{1}{a_n - \alpha} \right\}$ は初項が $\frac{1}{a_1 - \alpha}$ 、公差が $\frac{2r}{p + s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n - \alpha} = \frac{1}{a_1 - \alpha} + \frac{2r}{p + s}(n - 1)$$

これから、 a_n が求まる.

大分大学 2001 年 1

数列 $\{a_n\}$ は、初項 $a_1 = 3$ 、 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 5}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をみたす.

- (1) $b_n = \frac{a_n}{a_n + 1}$ とおくとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

解説 漸化式

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 5}$$

の特性方程式 $x = \frac{2x}{3x + 5}$ の解が $0, -1$ であるから

$$a_{n+1} + 1 = \frac{5(a_n + 1)}{3a_n + 5}$$

したがって
$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + 1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a_n}{a_n + 1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}$$

よって
$$a_n = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{4 \cdot 5^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}}$$

5 数学 C

5.1 空間のベクトル

5.1.1 外積 (ベクトル積)

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき, ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は, $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する. このベクトルを, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 (ベクトル積) と言い, $\vec{a} \times \vec{b}$ で表し (内積をスカラー積とも言う), その成分は

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

であるから, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ が成り立つ. また, その大きさについて

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

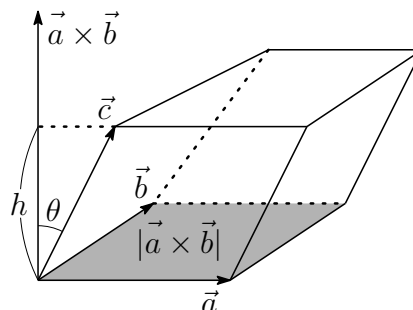
であるから, $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい.

$\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos \theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| |\cos \theta|$$



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の張る平行六面体について, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平面を底面とすると, $|\vec{c}| \cos \theta$ は, その高さ h であるから, この平行六面体の体積 V_1 は

$$V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

また, 対称性により, $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$ が成り立つ.

複素数平面の主な出題分野として, ド・モアブルの定理, 方程式, 図形への応用などあるが, 難関大学を中心に 1 次分数式変換 (メビウス変換) や 2 次曲線との融合問題など出題されることがある. 大学ごとに特徴があり, 難易度の差も大きい.

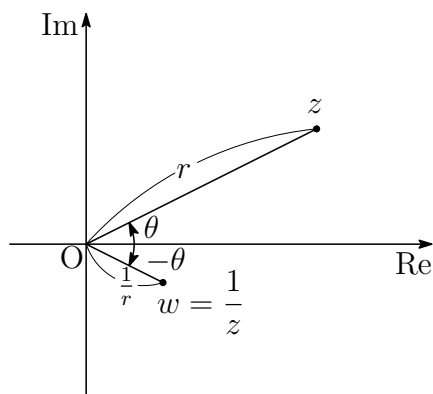
5.2 複素数平面

5.2.1 反転

複素数平面上の点 z を $w = \frac{1}{z}$ に移す変換を反転という.
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のとき

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} \{ \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \}$$

となり, 下の図のような位置関係になる.



中心 $\alpha \neq 0$, 半径 r の円 $|z - \alpha| = r$ を反転すると

$$\left| \frac{1}{w} - \alpha \right| = r \quad \text{ゆえに} \quad |1 - \alpha w| = r|w|$$

上の第2式から

$$\begin{aligned} (1 - \alpha w)(1 - \bar{\alpha} \bar{w}) &= r^2 |w|^2 \\ (|\alpha|^2 - r^2) |w|^2 - (\alpha w + \bar{\alpha} \bar{w}) + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

(i) $|\alpha|^2 - r^2 \neq 0$ のとき, (*) より

$$\begin{aligned} |w|^2 - \frac{\alpha w + \bar{\alpha} \bar{w}}{|\alpha|^2 - r^2} &= -\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} \\ |w|^2 - \frac{\alpha w + \bar{\alpha} \bar{w}}{|\alpha|^2 - r^2} + \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} &= -\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} + \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} \\ \left(w - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right) \left(\bar{w} - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\right) &= \frac{r^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} \\ \left|w - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right| &= \frac{r}{||\alpha|^2 - r^2|} \end{aligned}$$

(ii) $|\alpha|^2 - r^2 = 0$ のとき, (*) より $\alpha w + \bar{\alpha} \bar{w} = 1$

$$\frac{w}{\bar{\alpha}} + \frac{\bar{w}}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|^2} \quad \text{ゆえに} \quad \left|w - \frac{1}{\alpha}\right|^2 = |w|^2$$

したがって, w は原点 O と $\frac{1}{\alpha}$ を結ぶ線分の垂直二等分線である.

定理 9 中心 $\alpha (\neq 0)$, 半径 r の円を反転した像は

(i) $|\alpha| \neq r$ のとき, 中心 $\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}$, 半径 $\frac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$ の円

(ii) $|\alpha| = r$ のとき, 原点 O と点 $\frac{1}{\alpha}$ を結ぶ線分の垂直二等分線

上の (ii) から, 次が成立する.

原点 O と点 α を結ぶ線分の垂直二等分線上の点を反転した像は, 点 $\frac{1}{\alpha}$ を中心とする半径 $\left|\frac{1}{\alpha}\right|$ の円 (ただし, 原点を除く)

5.3 2次曲線

5.3.1 2次曲線の性質

平面上の点 F と F を通らない直線 ℓ について、点 P から ℓ に引いた垂線を PH とするとき

$$e = \frac{PF}{PH} \quad (e \text{ は 離心率})$$

の値が一定であるような点 P の軌跡 C は、2次曲線であることを示す。 F は2次曲線の焦点、 ℓ は準線という。

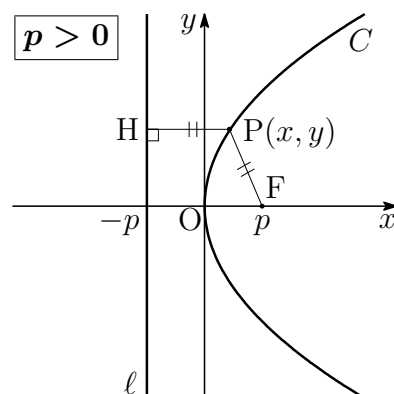
- (I) $e = 1$ のとき、 $F(p, 0)$, $\ell: x = -p$, $P(x, y)$ とすると、 $H(-p, y)$ であるから、このとき、 $PF^2 = PH^2$ により

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

したがって

$$C: y^2 = 4px$$

よって、 $e = 1$ のとき、 C は放物線である。



- (II) $e \neq 1$ のとき、 $F(ae, 0)$, $\ell: x = \frac{a}{e}$, $P(x, y)$ とすると $(a \neq 0)$, $H(\frac{a}{e}, y)$ であるから、このとき、 $PF^2 = e^2 PH^2$ により

$$(x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e} \right)^2$$

整理すると

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = (1 - e^2)a^2 \quad (1)$$

$(1 - e^2)a^2 \neq 0$ に注意して

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1 \quad (2)$$

- (i) $0 < e < 1$ のとき、 $(1 - e^2)a^2 = b^2$ とおくと、 (2) より

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(|a| > |b|, e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{|a|} \right)$$

よって、 $0 < e < 1$ のとき、 C は楕円である。

- (ii) $1 < e$ のとき、 $(1 - e^2)a^2 = -b^2$ とおくと、 (2) より

$$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|a|} \right)$$

よって、 $1 < e$ のとき、 C は双曲線である。

前ページの (2) で示した

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$$

は, x 軸, y 軸, 原点に関して対称であるから, 上式の焦点, 準線は, 次の 2 組である.

$$F(ae, 0), \ell: y = \frac{a}{e} \quad \text{および} \quad F'(-ae, 0), \ell': y = -\frac{a}{e}$$

前ページの (1) より, $y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2)$ を利用すると

$$\begin{aligned} FP^2 &= (x-ae)^2 + y^2 = (x-ae)^2 + (1-e^2)(a^2-x^2) \\ &= e^2x^2 - 2aex + a^2 = (ex-a)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'P^2 &= (x+ae)^2 + y^2 = (x+ae)^2 + (1-e^2)(a^2-x^2) \\ &= e^2x^2 + 2aex + a^2 = (ex+a)^2 \end{aligned}$$

したがって

$$FP = |ex-a|, \quad F'P = |ex+a|$$

(i) $0 < e < 1$ のとき (楕円), $a > 0$ とすると, $-a \leq x \leq a$ より

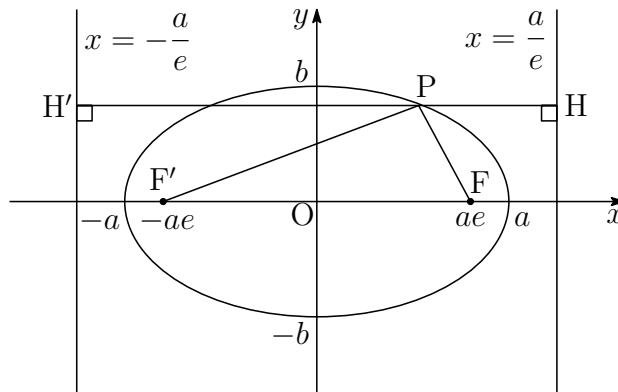
$$FP = a-ex, \quad F'P = a+ex \quad \text{ゆえに} \quad FP + F'P = 2a$$

(補足) $FP = ePH, F'P = ePH'$ より

$$FP = ePH = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a-ex,$$

$$F'P = ePH' = e\left\{x - \left(-\frac{a}{e}\right)\right\} = a+ex$$

$$FP + F'P = e(PH + PH') = eHH' = e \cdot \frac{2a}{e} = 2a$$



解説 C 上の点 P における法線は, $\angle FPF'$ の二等分線 (証明は [New Global Top 499](#)) であるから, P における接線と x 軸の交点は線分 FF' を $FP : F'P$ の比に外分する点である.

499* $a > b > 0$ として、座標平面上の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を C とおく. C 上の点 $P(p_1, p_2)$ ($p_2 \neq 0$) における C の接線を l , 法線を n とする. (お茶の水女子大)

(1) 接線 l および法線 n の方程式を求めよ.

(2) 2 点 $A(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $B(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ に対して、法線は $\angle APB$ の二等分線であることを示せ.

解答 (1) $l: \frac{p_1 x}{a^2} + \frac{p_2 y}{b^2} = 1$, l の法線ベクトル $\vec{v}$ は $\vec{v} = \left(\frac{p_1}{a^2}, \frac{p_2}{b^2}\right)$

したがって、法線 n は、点 $P(p_1, p_2)$ を通り、 $\vec{v}$ に平行な直線であるから

$$\frac{p_2}{b^2}(x - p_1) - \frac{p_1}{a^2}(y - p_2) = 0$$

整理すると $n: a^2 p_2 x - b^2 p_1 y = p_1 p_2 (a^2 - b^2)$

(2) n と x 軸との交点を Q とすると $Q\left(\frac{p_1(a^2 - b^2)}{a^2}, 0\right)$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ とおくと } b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$A(ae, 0), B(-ae, 0), Q(p_1 e^2, 0), C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

$P(p_1, p_2)$ は C 上の点であるから

$$\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p_2^2 = (a^2 - p_1^2)(1 - e^2)$$

上の結果を利用して

$$\begin{aligned} AP^2 &= (p_1 - ae)^2 + p_2^2 \\ &= p_1^2 - 2ap_1e + a^2e^2 + (a^2 - p_1^2)(1 - e^2) \\ &= a^2 - 2ap_1e + p_1^2e^2 = (a - p_1e)^2, \\ BP^2 &= (p_1 + ae)^2 + p_2^2 \\ &= p_1^2 + 2ap_1e + a^2e^2 + (a^2 - p_1^2)(1 - e^2) \\ &= a^2 + 2ap_1e + p_1^2e^2 = (a + p_1e)^2 \end{aligned}$$

$$0 < e < 1, -a \leq p_1 \leq a \text{ に注意して } AP = a - p_1e, BP = a + p_1e$$

$$\text{また } AQ:QB = ae - p_1e^2 : p_1e^2 + ae = a - p_1e : a + p_1e$$

$AP:PB = AQ:QB$ より、法線 n は $\angle APB$ の二等分線である.

(ii) $1 < e$ のとき (双曲線), $a > 0$ とすると, $x \leq -a$, $a \leq x$ より

$$a \leq x \text{ のとき } FP = ex - a, \quad F'P = ex + a$$

$$x \leq -a \text{ のとき } FP = -ex + a, \quad F'P = -ex - a$$

$$\text{よって } |\mathbf{FP} - \mathbf{F'P}| = 2a$$

(補足) $FP = ePH$, $F'P = ePH'$ より

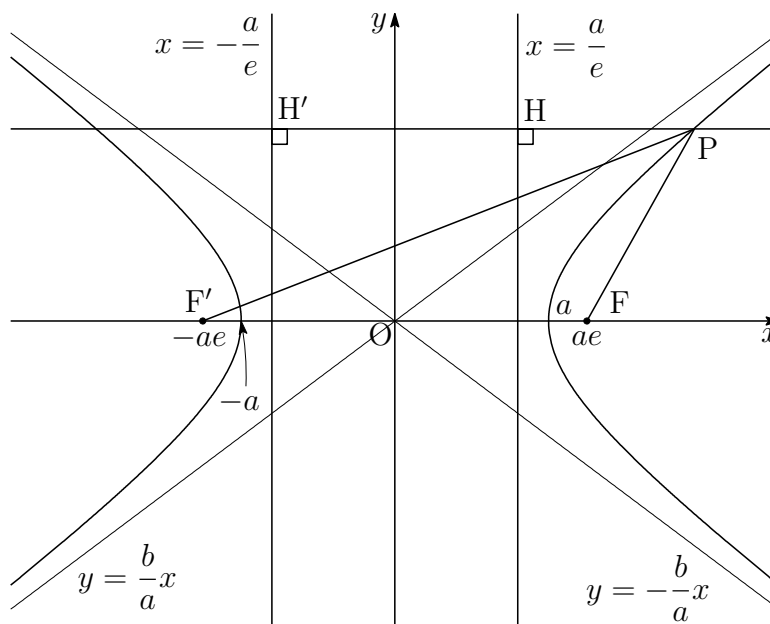
$$a \leq x \text{ のとき } FP = ePH = e\left(x - \frac{a}{e}\right) = ex - a,$$

$$F'P = ePH' = e\left\{x - \left(-\frac{a}{e}\right)\right\} = ex + a$$

$$x \leq -a \text{ のとき } FP = ePH = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = -ex + a,$$

$$F'P = ePH' = e\left(-\frac{a}{e} - x\right) = -ex - a$$

$$FP \sim F'P = e(PH \sim PH') = eHH' = e \cdot \frac{2a}{e} = 2a$$



解説 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{(1-e^2)a^2} = 1$

の x 軸との交点 $Q\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$ について

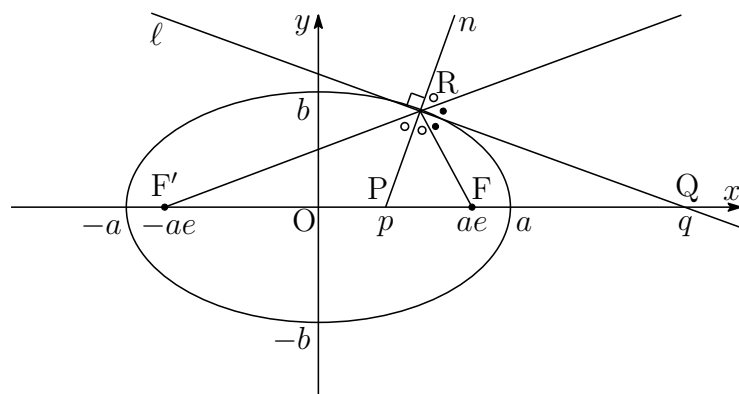
$$FQ : F'Q = ae - \frac{a^2}{x_1} : \frac{a^2}{x_1} + ae = ex_1 - a : ex_1 + a = FP : F'P$$

上式より, 接線 PQ は $\angle FPF'$ の二等分線であるから, P における法線と x 軸との交点は線分 FF' を $FP : F'P$ の比に外分する点である.

20 ページの性質 (1) から次のことが分かる.

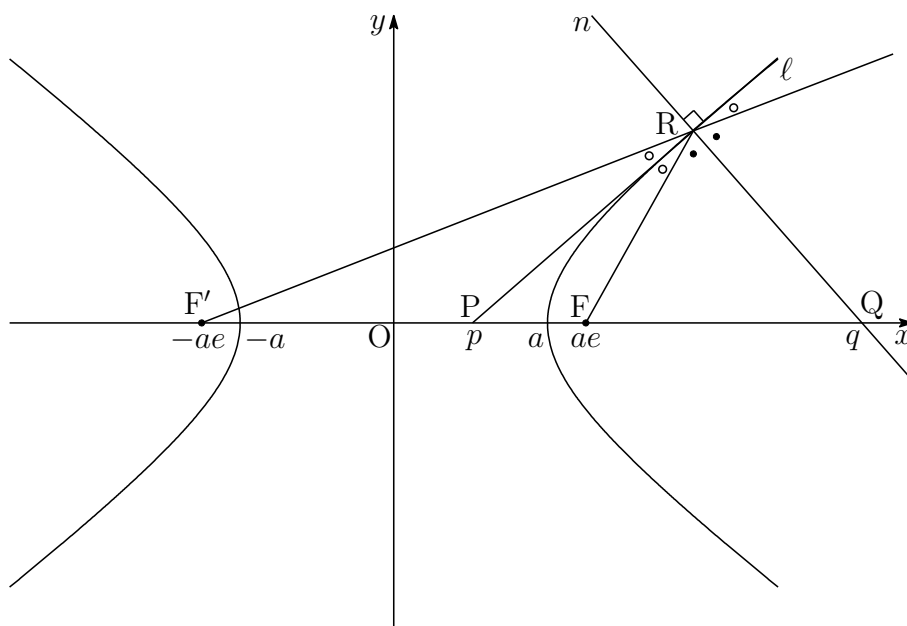
$a > b > 0$ のとき, 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 R における接線を ℓ , 法線を n とし, n , ℓ の x 軸との交点をそれぞれ P, Q とおくと, 4 点 F' , P, F, Q は調和点列である.

$$(F', F; P, Q) = \frac{F'P}{FP} \cdot \frac{FQ}{F'Q} = 1$$



双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 R における接線を ℓ , 法線を n とし, ℓ , n の x 軸との交点をそれぞれ P, Q とおくと, 4 点 F' , P, F, Q は調和点列である.

$$(F', F; P, Q) = \frac{F'P}{FP} \cdot \frac{FQ}{F'Q} = 1$$



5.3.2 2次曲線の標準形

2次曲線 $C : \alpha x^2 + \beta y^2 = d$ を原点を中心に θ だけ回転させた曲線が

$$C' : ax^2 + 2bxy + cy^2 = d \quad (b \neq 0)$$

であるとする $\left(-\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$.

C 上の点 (X, Y) と C' 上の点 (x, y) を, 複素数平面上にとると

$$\begin{aligned} x + yi &= (X + Yi)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (X \cos \theta - Y \sin \theta) + (X \sin \theta + Y \cos \theta)i \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases} \quad (*)$$

これから

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= a(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 \\ &\quad + 2b(X \cos \theta - Y \sin \theta)(X \sin \theta + Y \cos \theta) \\ &\quad + c(X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 \\ &= (a \cos^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta)X^2 \\ &\quad + \{-2(a - c) \sin \theta \cos \theta + 2b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\}XY \\ &\quad + (a \sin^2 \theta - 2b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta)Y^2 \\ &= \left(a \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + b \sin 2\theta + c \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)X^2 \\ &\quad + \{-(a - c) \sin 2\theta + 2b \cos 2\theta\}XY \\ &\quad + \left(a \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - b \sin 2\theta + c \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)Y^2 \end{aligned}$$

上式と $\alpha X^2 + \beta Y^2$ の係数を比較すると

$$\alpha = a \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + b \sin 2\theta + c \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (1)$$

$$\beta = a \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - b \sin 2\theta + c \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (2)$$

$$0 = -(a - c) \sin 2\theta + 2b \cos 2\theta \quad (3)$$

(3) から

$$a = c \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{4}, \quad a \neq c \text{ のとき } \tan 2\theta = \frac{2b}{a - c} \quad (\text{A})$$

(1), (2) の辺々の和と差は

$$\alpha + \beta = a + c \quad (4)$$

$$\alpha - \beta = (a - c) \cos 2\theta + 2b \sin 2\theta \quad (5)$$

(3)² + (5)² より

$$\begin{aligned} 0^2 + (\alpha - \beta)^2 &= \{-(a - c) \sin 2\theta + 2b \cos 2\theta\}^2 + \{(a - c) \cos 2\theta + 2b \sin 2\theta\}^2 \\ (\alpha - \beta)^2 &= (a - c)^2 + 4b^2 \end{aligned} \quad (6)$$

(4)² - (6) より

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 &= (a + c)^2 - \{(a - c)^2 + 4b^2\} \\ \alpha\beta &= ac - b^2 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, (5) の符号について, (A) より

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= (a - c + 2b \tan 2\theta) \cos 2\theta \\ &= \left(a - c + 2b \cdot \frac{2b}{a - c}\right) \cos 2\theta \\ &= (a - c) \left\{1 + \left(\frac{2b}{a - c}\right)^2\right\} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (8)$$

(4), (7) より, α, β は 2 次方程式

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

の解である. (8) より, $a - c \neq 0$ のとき, $\alpha - \beta$ の符号は $a - c$ の符号と一致する. $a - c = 0$ のとき, $\theta = \frac{\pi}{4}$ であるから, (5) より, $\alpha - \beta$ の符号は b の符号と一致する.

定理 10 2 次曲線 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$ は 2 次曲線 $\alpha x^2 + \beta y^2 = d$ を原点を中心
に θ だけ回転させたものである $\left(-\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$. ここで, α, β は 2 次方程式

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

の解である ($b \neq 0$).

(i) $a - c \neq 0$ のとき, $\alpha - \beta$ の符号は $a - c$ の符号と一致し, $\tan 2\theta = \frac{2b}{a - c}$

(ii) $a - c = 0$ のとき, $\alpha - \beta$ の符号は b の符号と一致し, $\theta = \frac{\pi}{4}$

6 Power Max

6.1 数学I・A

6.1.1 第1回 第1問

〔1〕 $\sqrt{3}$ が無理数であることを利用して、次の問いに答えよ.

(1) 実数 a, b に対し、命題 A, 命題 B をそれぞれ

命題 A 「 a, b がともに有理数ならば、 $(a + \sqrt{3}b)^2$ は無理数である」

命題 B 「 a, b がともに有理数ならば、 $(a + \sqrt{3}b)^2$ は無理数である」

とする.

(i) 命題 A の対偶は ア である.

ア の解答群

- ① 「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が有理数ならば、 a, b はともに有理数である」
- ② 「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が有理数ならば、 a, b はともに無理数である」
- ③ 「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が有理数ならば、 a, b の少なくとも一方は有理数である」
- ④ 「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が有理数ならば、 a, b の少なくとも一方は無理数である」
- ⑤ 「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が有理数ならば、 a, b のうち一方は有理数、他方は無理数である」
- ⑥ 「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が無理数ならば、 a, b はともに有理数である」
- ⑦ 「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が無理数ならば、 a, b はともに無理数である」
- ⑧ 「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が無理数ならば、 a, b の少なくとも一方は有理数である」
- ⑨ 「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が無理数ならば、 a, b の少なくとも一方は無理数である」
- ⑩ 「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が無理数ならば、 a, b のうち一方は有理数、他方は無理数である」

(ii) 命題 A, 命題 B の審議の組み合わせとして正しいものは である.

の解答群

	①	②	③
命題 A	真	真	偽
命題 B	真	偽	真

(2) a, b を実数とする.

- $a + \sqrt{3}b = 0$ は, $a = 0$ かつ $b = 0$ であるための .
- $(a + \sqrt{3}b)^2 = 0$ は, $a + \sqrt{3}b = 0$ であるための .

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- ① 必要条件であるが, 十分条件ではない
- ② 十分条件であるが, 必要条件ではない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

解答 (1) (i) 命題 A

「 a, b がともに有理数ならば, $(a + \sqrt{3}b)^2$ は無理数である」
の対偶は

「 $(a + \sqrt{3}b)^2$ が有理数ならば, a, b の少なくとも一方は無理数である」
... (ア) ③

(ii) 命題 A は偽 (反例: $a = b = 0$), 命題 B は偽 (反例: $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3} - 1$)
... (イ) ③

- (2)
- $a + \sqrt{3}b = 0$ は, $a = 0$ かつ $b = 0$ であるための必要条件であるが, 十分条件ではない ($a = \sqrt{3}, b = -1$). ... (ウ) ④
 - $(a + \sqrt{3}b)^2 = 0$ は, $a + \sqrt{3}b = 0$ であるための必要十分条件である.
... (エ) ②

[2] 太郎さんと花子さんは、ある山 A の山頂 B の標高を測ることで、地球の半径を求めることにした。以下では次のことを仮定して計算するものとする。

- (ア) ある地点の標高とは、平均海面を基準とした高さのことを指すものとする。
- (イ) 仰角、俯角の測定の際は、太郎さんと花子さんの身長は考えないこととする。
- (ウ) 平均海面を地表面とするとき、地球は完全な球体と考える。

ただし、山頂 B の標高の測定において、地表面は球面ではなく平面として考えるものとする。すなわち、水平面を考えることができ、標高が異なる 2 地点 P、Q の水平距離とは、P、Q から水平面上に下ろした垂線 PH、QM に対して、2 点 H、M の距離を表す。また、 $\tan 20^\circ = 0.3640$ とする。

- (1) 山 A の山頂 B と、標高 1m の地点 C は水平距離で 3500m 離れている。花子さんが、地点 C で山頂 B を見上げて仰角を測ったところ、仰角は 20° であった。山頂 B の標高 h は

$$h = \boxed{\text{オカキク}} \text{ (m)}$$

である。

- (2) 太郎さんは山頂 B に登頂し、そこから水平線上のある点 D までの俯角 θ を測ることで、花子さんの測定結果と合わせて、地球の半径を計算できると考えた。なお、水平線は水面と空との境界をなす線とする。地球の中心を O とすると、 $\angle BOD = \boxed{\text{ケ}}$ と表せる。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------|
| ① $90^\circ - \theta$ | ② $45^\circ - \theta$ | ③ θ |
| ④ $45^\circ + \theta$ | ⑤ $90^\circ + \theta$ | |

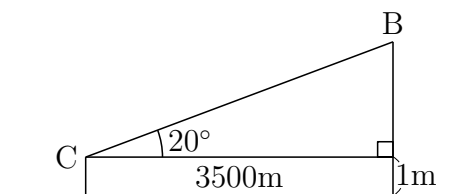
地球の半径を θ と (1) の山頂 B の標高 h m を用いて表すと、地球の半径は $\boxed{\text{コ}}$ m である。あとは、俯角 θ を正しく計測することで、地球の半径の値を計算できる。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

- | | |
|---|---|
| ① $\frac{h \sin \theta}{1 - \sin \theta}$ | ② $\frac{h + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$ |
| ③ $\frac{h \cos \theta}{1 - \cos \theta}$ | ④ $\frac{h + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$ |
| ⑤ $\frac{h \tan \theta}{1 - \tan \theta}$ | ⑥ $\frac{h + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$ |

解答 (1) 求める標高は

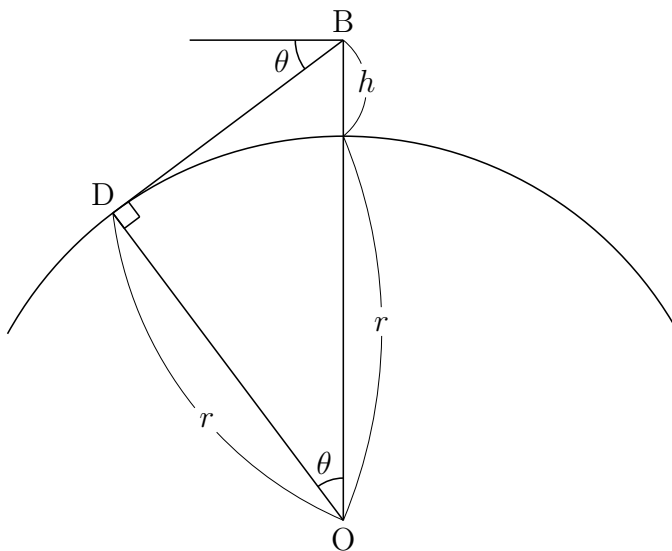
$$h = 3500 \tan 30^\circ + 1 = 3500 \times 0.3640 + 1 = \mathbf{1275} \text{ (m)}$$



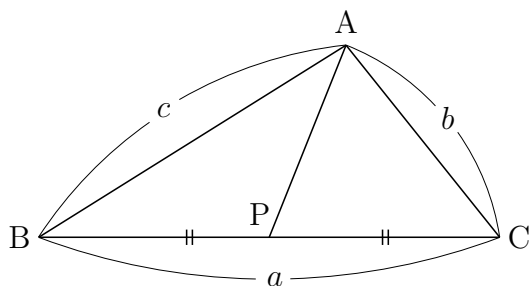
(2) 下の図から $\angle BOD = \theta \dots(\text{ケ}) \textcircled{2}$

地球の半径を r とすると, $\triangle BOD$ について

$$\cos \theta = \frac{r}{r+h} \quad \text{よって} \quad r = \frac{h \cos \theta}{1 - \cos \theta} \quad \dots(\text{コ}) \textcircled{2}$$



- [3] $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ である $\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を P とする.
線分 AP の長さを a , b , c で表すことについて考える.



- (1) 点 P は辺 BC の中点より

$$BP = CP = \boxed{\text{サ}}$$

である. また, $\triangle ABC$ に着目すると

$$\cos \angle ABC = \boxed{\text{シ}}$$

である.

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

- | | | | | | | | | | |
|---|---------------|---|---------------|---|---------------|---|---------------|---|---------------|
| ① | $2a$ | ② | $3a$ | ③ | $4a$ | ④ | b | ⑤ | c |
| ⑥ | $\frac{a}{2}$ | ⑦ | $\frac{a}{3}$ | ⑧ | $\frac{a}{4}$ | ⑨ | $\frac{b}{2}$ | ⑩ | $\frac{c}{2}$ |

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

- | | | | | | |
|---|-------------------------------|---|-------------------------------|---|-------------------------------|
| ① | $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ | ② | $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}$ | ③ | $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ab}$ |
| ④ | $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$ | ⑤ | $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ | ⑥ | $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2bc}$ |
| ⑦ | $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ca}$ | ⑧ | $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ca}$ | ⑨ | $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ |

$$\text{また, } \cos \angle ABP = \frac{\boxed{\text{スセ}} AP^2 + a^2 + \boxed{\text{ソ}} c^2}{\boxed{\text{タ}} ac} \text{ であるから}$$

$$AP^2 = -\frac{a^2}{\boxed{\text{チ}}} + \frac{b^2}{\boxed{\text{ツ}}} + \frac{c^2}{\boxed{\text{テ}}}$$

であり

$$AP = \sqrt{-\frac{a^2}{\boxed{\text{チ}}} + \frac{b^2}{\boxed{\text{ツ}}} + \frac{c^2}{\boxed{\text{テ}}}}$$

と線分 AP の長さを a, b, c で表すことができる.

- (2) $\cos \angle APB$ と $\cos \angle APC$ の間に成り立つ関係式として正しいものは ト である.

ト の解答群

- ① $\cos \angle APB + \cos \angle APC = 0$
- ② $\cos \angle APB - \cos \angle APC = 0$
- ③ $\cos \angle APB + 2 \cos \angle APC = 0$
- ④ $\cos \angle APB - 2 \cos \angle APC = 0$
- ⑤ $2 \cos \angle APB + \cos \angle APC = 0$
- ⑥ $2 \cos \angle APB - \cos \angle APC = 0$

$\cos \angle APB = \frac{\text{ナ} \cdot AP^2 + a^2 - \text{ニ} \cdot c^2}{\text{ヌ} \cdot a \cdot AP}$ であり, 同様に $\cos \angle APC$ を求めて, ト に代入することで

$$AP = \sqrt{-\frac{a^2}{\text{チ}} + \frac{b^2}{\text{ツ}} + \frac{c^2}{\text{テ}}}$$

と線分 AP の長さを a, b, c で表すことができる.

- (3) $\triangle ABC$ の辺 BC 上に, $BQ : QC = 1 : 2$ となる点 Q をとるとき, 線分 AQ の長さを a, b, c で表すと

$$AQ = \frac{\sqrt{-\text{ネ} \cdot a^2 + \text{ノ} \cdot b^2 + \text{ハ} \cdot c^2}}{3}$$

である.

解答 (1) 点 P は辺 BC の中点より

$$BP = CP = \frac{a}{2} \quad \dots (\text{サ}) \textcircled{5}$$

$\triangle ABC$ に注目すると、余弦定理により

$$\cos \angle ABC = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad \dots (\text{シ}) \textcircled{6}$$

$\triangle ABP$ に注目すると、余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos \angle ABP &= \frac{AB^2 + BP^2 - AP^2}{2AB \cdot BP} = \frac{c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - AP^2}{2 \cdot c \cdot \frac{a}{2}} \\ &= \frac{-4AP^2 + a^2 + 4c^2}{4ac} \quad \dots (\text{チ}) \sim (\text{テ}) \end{aligned}$$

$\cos \angle ABC = \cos \angle ABP$ より

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{-4AP^2 + a^2 + 4c^2}{4ac}$$

これを AP^2 について解くと

$$AP^2 = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} \quad \dots (\text{チ}) \sim (\text{テ})$$

であり

$$AP = \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}}$$

と線分 AP の長さを a, b, c で表すことができる.

(2) $\angle APC = 180^\circ - \angle APB$ であるから

$$\cos \angle APC = \cos(180^\circ - \angle APB) = -\cos \angle APB$$

よって $\cos \angle APB + \cos \angle APC = 0 \quad \dots (ト) \textcircled{0}$

$\cos \angle APB$ を求めると

$$\begin{aligned} \cos \angle APB &= \frac{AP^2 + BP^2 - AB^2}{2AP \cdot BP} = \frac{AP^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - c^2}{2AP \cdot \frac{a}{2}} \\ &= \frac{4AP^2 + a^2 - 4c^2}{4a \cdot AP} \quad \dots (ナ) \sim (ヌ) \end{aligned}$$

同様に, $\cos \angle APC$ を求めると

$$\begin{aligned} \cos \angle APC &= \frac{CP^2 + AP^2 - AC^2}{2CP \cdot AP} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + AP^2 - b^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot AP} \\ &= \frac{4AP^2 + a^2 - 4b^2}{4a \cdot AP} \end{aligned}$$

$\cos \angle APB + \cos \angle APC = 0$ であるから

$$\frac{4AP^2 + a^2 - 4c^2}{4a \cdot AP} + \frac{4AP^2 + a^2 - 4b^2}{4a \cdot AP} = 0$$

これを AP^2 について解くと

$$AP^2 = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

であり

$$AP = \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}}$$

と線分 AP の長さを a, b, c で表すことができる.

別解 パップスの定理 (中線定理) $CA^2 + AB^2 = 2(AP^2 + BP^2)$ により

$$b^2 + c^2 = 2 \left\{ AP^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right\}$$

これを AP^2 について解くと

$$AP^2 = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

(3) スチュワートの定理 $CA^2 \cdot BQ + AB^2 \cdot QC = BC(AQ^2 + BQ \cdot QC)$ により

$$b^2 \frac{a}{3} + c^2 \cdot \frac{2a}{3} = a \left(AQ^2 + \frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3} \right)$$

これを AQ について解くと

$$AQ^2 = -\frac{2a^2}{9} + \frac{b^2}{3} + \frac{2c^2}{3}$$
$$AQ = \frac{\sqrt{-2a^2 + 3b^2 + 6c^2}}{3} \quad \dots (\text{ネ}) \sim (\text{ハ})$$

参照 [パップスの定理およびスチュワートの定理](#)

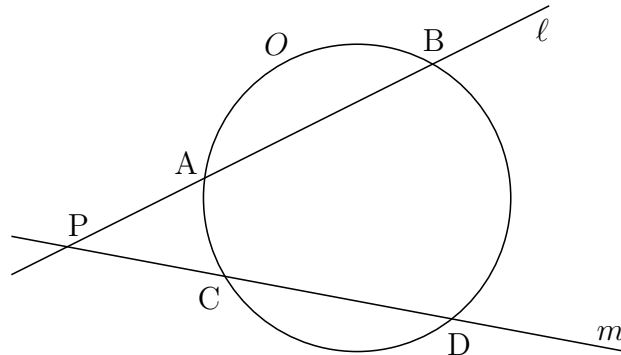
関連 [角の二等分線に関する公式](#)

6.1.2 第3回 第3問

- (1) 下の図のように，点Pで交わる直線 ℓ ， m があり，それぞれ円Oと異なる2点で交わっている． ℓ と円Oの交点をPに近い方から順にA，Bとし， m と円Oの交点をPに近い方から順にC，Dとする．このとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立ち，これを方べきの定理という．この定理を証明しよう．



四角形ACDBは円Oに内接するので

$$\angle ABD = \boxed{\text{ア}}$$

である．よって

$$\triangle PAC \sim \boxed{\text{イ}}$$

となるので，この相似な二つの三角形の2辺の長さの比を比べれば $\textcircled{1}$ が得られる．

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

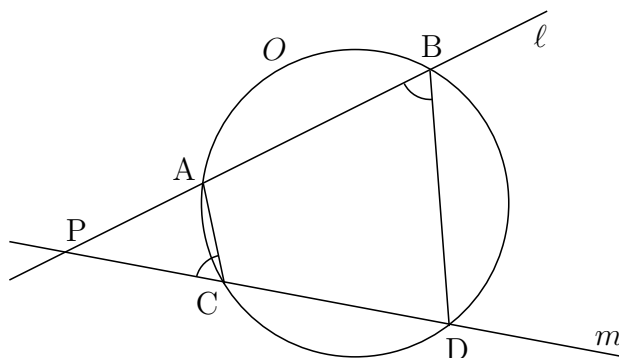
- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| ① $\angle ACD$ | ② $\angle ACP$ | ③ $\angle APC$ |
| ④ $\angle BAC$ | ⑤ $\angle BDC$ | ⑥ $\angle CAP$ |

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| ① $\triangle ACB$ | ② $\triangle ACD$ | ③ $\triangle ADB$ |
| ④ $\triangle CDB$ | ⑤ $\triangle PDB$ | |

解答 四角形 ACDB は円 O に内接するから

$$\angle ABD = \angle \mathbf{ACP} \quad \cdots (\text{ア}) \text{ ①}$$



$\triangle PCA$ と $\triangle PBD$ において, $\angle P$ は共通, $\angle PCA = \angle PBD$ より, 2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle PCA \sim \triangle \mathbf{PBD} \quad \cdots (\text{イ}) \text{ ④}$$

- (2) $AB = 4$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DA = 6$, $\cos \angle BAD = \frac{13}{20}$ の四角形 ABCD がある.
 ただし, 四角形 ABCD の四つの内角はすべて 180° 未満とする.

(i) $\cos \angle BCD = \frac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$

- (ii) 直線 AB と直線 CD の交点を E とすると

$$EB = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}, \quad EC = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である.

- (iii) 直線 AC と直線 BD の交点を F とすると

$$AF : FC = \boxed{\text{セ}} : 1$$

である.

- (iv) 直線 AC の C の側の延長線上に $AH : HC = \boxed{\text{セ}} : 1$ を満たす点 H をとる. 直線 AD と直線 BC の交点を G とするとき, H は $\boxed{\text{ソ}}$ の点である.

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

- ① $\triangle AEG$ の内部 ② 線分 EG 上 ③ $\triangle AEG$ の外部

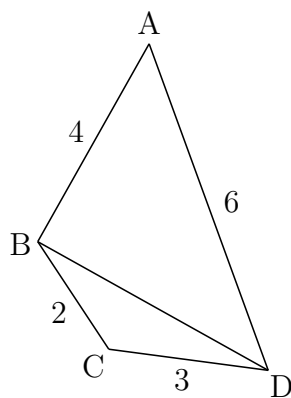
解答

(i) $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos \angle BAD \\ &= 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{13}{20} = \frac{104}{5} \end{aligned}$$

$\triangle BCD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \cos \angle BCD &= \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot CD} \\ &= \frac{2^2 + 3^2 - \frac{104}{5}}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{-13}{20} \quad \dots (\text{ウ}) \sim (\text{キ}) \end{aligned}$$



別解 5 ページの (1) より

$$\cos \angle BCD = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2 - 6^2}{2(2 \cdot 3 + 4 \cdot 6)} = -\frac{13}{20}$$

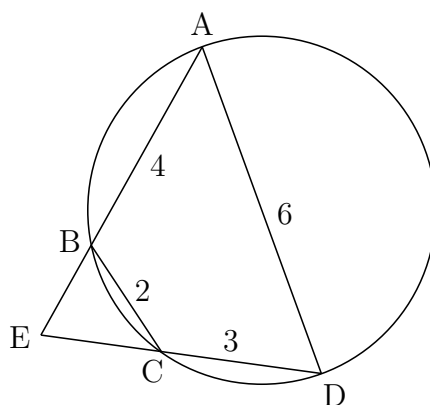
(ii) (i) の結論より, $\cos \angle BCD = -\cos \angle BAD$

$\triangle AED \sim \triangle CEB$ であるから

$$4 + EB : EC + 3 : 6 = EC : EB : 2$$

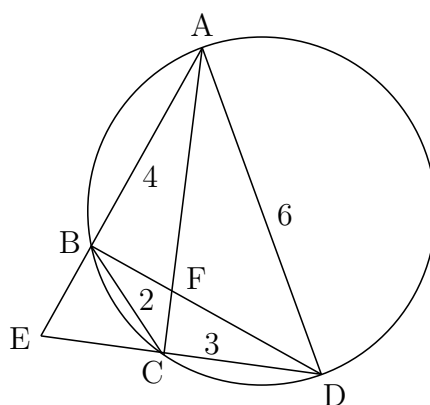
したがって $4 + EB = 3EC$, $EC + 3 = 3EB$

これを解いて $EB = \frac{13}{8}$, $EC = \frac{15}{8}$... (ク) ~ (ス)



(iii) 5 ページの公式 (5) より

$$AF : FC = AD \cdot AB : CB \cdot CD = 6 \cdot 4 : 2 \cdot 3 = 4 : 1 \quad \dots (\text{セ})$$



(iv) 直線 AC と辺 EG の交点を I とする.

四角形 ABCD が円に内接しているから, $\triangle GDC \sim \triangle GBA$ より

$$GD : DC : CG = GB : BA : AG \quad \text{ゆえに} \quad GD : 3 : CG = CG + 2 : 4 : GD + 6$$

$$\text{したがって} \quad 4GD = 3(CG + 2), \quad 4CG = 3(GD + 6)$$

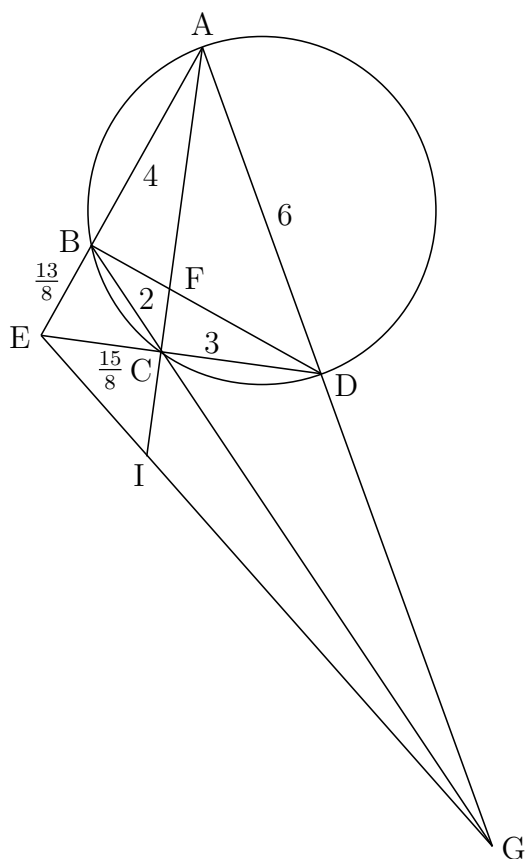
$$\text{これを解いて} \quad CG = \frac{90}{7}, \quad GD = \frac{78}{7}$$

$\triangle ABC$ と直線 EI について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AI}{IC} \cdot \frac{CG}{GB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AI}{IC} \cdot \frac{\frac{90}{7}}{\frac{90}{7} + 2} \cdot \frac{\frac{13}{8}}{\frac{13}{8} + 4} = 1$$

したがって $AI : IC = 4 : 1$ ゆえに H と I は一致する.

よって, H は EG 上の点である. $\dots(\text{ソ}) \textcircled{1}$



別解 (18 ページの定理 8 を利用する解法)

2 直線 FG と AE の交点を J とし, $\triangle ABG$ にチェバの定理を適用すると

$$\frac{AJ}{JB} \cdot \frac{BC}{CG} \cdot \frac{GD}{DA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AJ}{JB} \cdot \frac{2}{\frac{90}{7}} \cdot \frac{\frac{78}{7}}{6} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{AJ}{JB} = \frac{45}{13}$$

したがって, 4 点 A, J, B, E の複比 (A, B; J, E) は

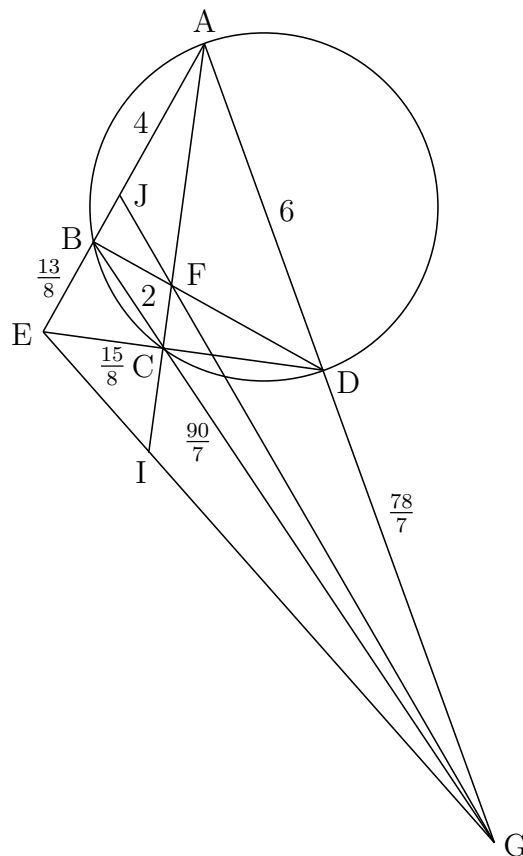
$$(A, B; A, E) = \frac{AJ}{JB} \cdot \frac{BE}{AE} = \frac{45}{13} \cdot \frac{\frac{13}{8}}{4 + \frac{13}{8}} = 1$$

であるから, 4 点 A, F, C, I の複比 (A, C; F, I) は

$$(A, C; F, I) = \frac{AF}{CF} \cdot \frac{CI}{AI} = \frac{4}{1} \cdot \frac{CI}{AI} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AI}{CI} = 4$$

したがって $AI : IC = 4 : 1$ ゆえに H と I は一致する.

よって, H は EG 上の点である.



補足 4 点 A, J, B, E および 4 点 A, F, C, I はともに調和点列である.

6.1.3 第4回 第3問

△ABCにおいて、∠BACの二等分線と辺BCの交点をDとする。

- (1) △ABCの外接円と直線ADの交点のうち、点Aでない点をEとする。△ABE ∽ △ADC より

$$AD^2 + AD \cdot DE = \boxed{\text{ア}}$$

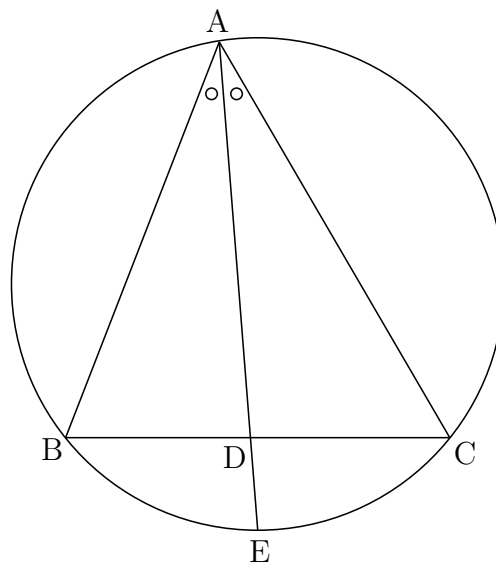
である。また、方べきの定理により

$$AD \cdot DE = \boxed{\text{イ}}$$

であるから

$$AD^2 = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}$$

である。



$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| ① AB・AC | ② AB・BC | ③ AB・BD | ④ AB・CD |
| ⑤ AC・BC | ⑥ AC・BD | ⑦ AC・CD | ⑧ BC・BD |
| ⑨ BC・CD | ⑩ BD・CD | | |

- (2) △ABCにおいて、∠BACの内角の二等分線と∠ABC, ∠BCAの外角の二等分線は1点で交わることが知られており、その交点を「△ABCの∠BACについての傍心」という。

△ABCの内心をI, ∠BACについての傍心を I_A とする。

(i) 直線 BI_A と直線 AC が交わらないのは、ウ のときである。

ウ の解答群

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| ① $\angle BAC = 90^\circ$ | ② $\angle ABC = 90^\circ$ | ③ $\angle BCA = 90^\circ$ |
| ④ $AB = BC$ | ⑤ $BC = CA$ | ⑥ $CA = AB$ |

(ii) $AB = 4$, $BC = 2$, $CA = 3$ のとき, $\frac{AI}{ID} = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ である。

このとき, ウ は成り立たないから, 直線 BI_A と直線 AC は交わる. その交点を F とする.

線分 AB の点 B の方の延長線上 (点 B を除く) に点 G をとると, $\angle GBF = \angle CBF$ より, $CF = \text{カ}$ である. また, 3 点 B, I, I_A は線分 キ を直径とする円周上の点である.

キ の解答群

- | | | |
|--------|----------|----------|
| ① BI | ② BI_A | ③ II_A |
|--------|----------|----------|

以上のことと $ID = \frac{\text{ク} \sqrt{\text{ケコ}}}{\text{サシ}}$ より, $\triangle BII_A$ の外心を O とすると

$$OD = \frac{\text{ス} \sqrt{\text{セソ}}}{\text{タチツ}}$$

であり, 点 O は $\triangle ABC$ の外接円の テ の点であることがわかる.

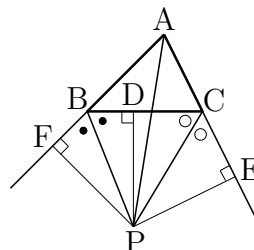
テ の解答群

- | | | |
|------|------|------|
| ① 内部 | ② 外部 | ③ 周上 |
|------|------|------|

解答

- (1) (ア) ⑩ (イ) ⑨ (17 ページの [三角形の角の二等分線に関する公式](#) を参照)

補題 $\triangle ABC$ において、右の図のように $\angle B$ の外角の二等分線と $\angle C$ の外角の二等分線との交点 (傍心) を P とするとき、 P は $\angle A$ の二等分線上にある。このことを証明せよ。



証明 P は $\angle B$ の外角の二等分線上にあるから $PF = PD$

また、 P は $\angle C$ の外角の二等分線上にあるから $PE = PD$

よって $PF = PE$

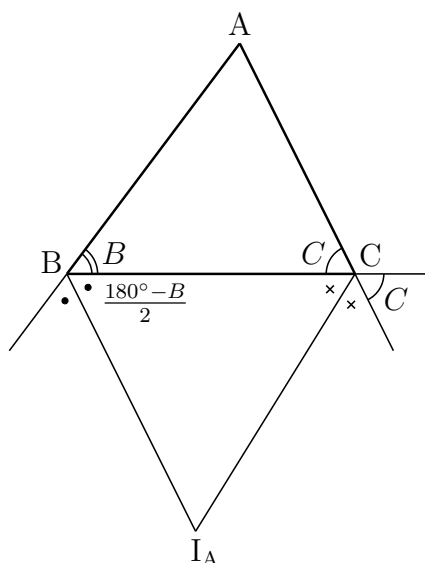
したがって、 P は $\angle A$ の二等分線上にある。

証終

- (2) (i) 直線 BI_A と直線 AC が交わらないとき $C = \frac{180^\circ - B}{2}$

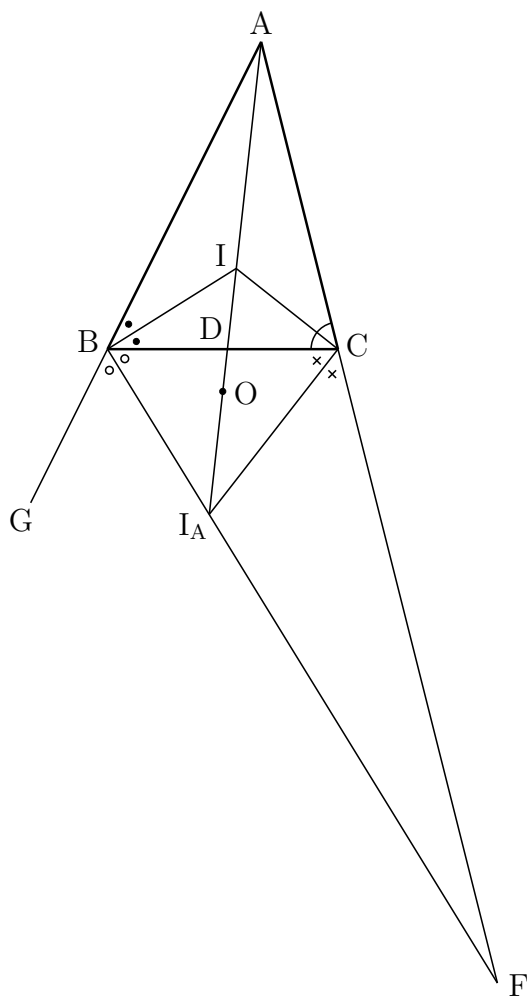
$$C = 180^\circ - (B + C) \quad \text{ゆえに} \quad C = A$$

よって $AB = BC \quad \dots (ウ) \text{ ③}$



(ii) $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $d = AD$ とおき, 一般的に示す.

20 ページで確認した調和点列の性質 (1) により, 4 点 A, I, D, I_A は調和点列である.



$BD : DC = AB : AC$ より

$$BD = \frac{c}{b+c}BC = \frac{ac}{b+c}, \quad DC = \frac{b}{b+c}BC = \frac{ab}{b+c}$$

$AI : ID = BA : BD = c : \frac{ac}{b+c} = b+c : a$ より

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \quad \dots (\text{エ})(\text{オ})$$

BF は $\angle ABC$ の外角の二等分線であるから, $BA : BC = AF : FC$

$$c : a = b + CF : CF \quad \text{ゆえに} \quad CF = \frac{ab}{c-a} = \frac{2 \cdot 3}{4-2} = 3 \quad \dots (\text{カ})$$

$\angle IBI_A = 90^\circ$ であるから，3 点 B, I, I_A は線分 II_A を直径とする円周上の点である． …(キ) ②

点 I は線分 AD を $b+c:a$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned} AI &= \frac{b+c}{(b+c)+a} AD = \frac{(b+c)d}{b+c+a}, \\ ID &= \frac{a}{(b+c)+a} AD = \frac{ad}{b+c+a} \end{aligned}$$

点 I_A は線分 AD を $b+c:a$ に外分する点であるから

$$AI_A = \frac{b+c}{(b+c)-a} AD = \frac{(b+c)d}{b+c-a}$$

点 O は線分 II_A の中点であるから

$$\begin{aligned} AO &= \frac{1}{2}(AI + AI_A) \\ &= \frac{1}{2}(b+c)d \left(\frac{1}{b+c+a} + \frac{1}{b+c-a} \right) \\ &= \frac{(b+c)^2 d}{(b+c)^2 - a^2}, \\ OD &= AO - AD = \frac{(b+c)^2 d}{(b+c)^2 - a^2} - d = \frac{a^2 d}{(b+c)^2 - a^2} \end{aligned}$$

ここで，(1) の結論を利用すると

$$\begin{aligned} d^2 &= AB \cdot AC - BD \cdot DC \\ &= c \cdot b - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} = \frac{bc\{(b+c)^2 - a^2\}}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

上の諸式から

$$\begin{aligned} AD \cdot DO &= d \cdot \frac{a^2 d}{(b+c)^2 - a^2} = \frac{a^2}{(b+c)^2 - a^2} d^2 \\ &= \frac{a^2}{(b+c)^2 - a^2} \cdot \frac{bc\{(b+c)^2 - a^2\}}{(b+c)^2} \\ &= \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{bc+c} = BD \cdot DC \end{aligned}$$

方べきの定理の逆により，4 点 A, B, O, C を同一円周上にある．
よって，点 O は $\triangle ABC$ の外接円の周上の点である． …(テ) ②

$a = 2, b = 3, c = 4$ より

$$d^2 = \frac{bc\{(b+c)^2 - a^2\}}{(b+c)^2} = \frac{3 \cdot 4\{(3+4)^2 - 2^2\}}{(3+4)^2} = \frac{12 \cdot 45}{49}$$

$d > 0$ であるから $d = \frac{6}{7}\sqrt{15}$

$$\begin{aligned} \text{ID} &= \frac{ad}{b+c+a} = \frac{2}{3+4+2} \cdot \frac{6}{7}\sqrt{15} \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{21} \dots (\text{ク}) \sim (\text{シ}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{OD} &= \frac{a^2d}{(b+c)^2 - a^2} = \frac{2^2}{(3+4)^2 - 2^2} \cdot \frac{6}{7}\sqrt{15} \\ &= \frac{8\sqrt{15}}{105} \dots (\text{ス}) \sim (\text{ツ}) \end{aligned}$$

6.1.4 第5回 第3問

Oを中心とする円Cの外部に点Pがある．PからCに引いた接線とCの接点の一つをAとし，Aから直線OPに垂線ASを引く．Pの位置に関係なく成り立つ性質について考える．

- (1) 直線OPとCの交点のうち，Pに近い方をQ，Pから遠い方をRとおくと，方べきの定理より

$$PQ \cdot PR = \boxed{\text{ア}}$$

である．また， $\triangle OAP \sim \triangle ASP$ より

$$PO \cdot PS = \boxed{\text{イ}}$$

である．

$\boxed{\text{ア}}$ ， $\boxed{\text{イ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① PO	② PO ²	③ PA
④ PA ²	⑤ PS	⑥ PS ²

さらに，Oが線分QRの中点であることから， $PO = \boxed{\text{ウ}}$ であり

$$\frac{1}{PQ} + \frac{1}{PR} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{PS}$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

① PR - PQ	② PS - QS	③ PS - RS
④ $\frac{PQ + PR}{2}$	⑤ $\frac{PS + QS}{2}$	⑥ $\frac{PS + RS}{2}$

- (2) P を通り直線 OP と一致しない直線 ℓ が, C と異なる 2 点 Q' , R' で交わる場合を考える. ただし, P に近い方の点を Q' とする. ℓ と直線 AS の交点を T とし, O から直線 ℓ に垂線 OH を引く.

(i) このとき

$$PO \cdot PS = \boxed{\text{オ}}$$

であるから, 直線 ℓ 上の点について

$$\frac{1}{PQ'} + \frac{1}{PR'} = \boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ.

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

- | | | |
|----------|-----------------|------|
| ① PT | ② PT^2 | ③ PH |
| ④ PH^2 | ⑤ $PT \cdot PH$ | |

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

- | | | | |
|------------------|------------------|--------------------|------------------|
| ① $\frac{1}{PT}$ | ② $\frac{1}{PH}$ | ③ $\frac{1}{Q'R'}$ | ④ $\frac{1}{TH}$ |
| ⑤ $\frac{2}{PT}$ | ⑥ $\frac{2}{PH}$ | ⑦ $\frac{2}{Q'R'}$ | ⑧ $\frac{2}{TH}$ |

(ii) $PT = PQ' + Q'T$, $PR' = PT + TR'$ に注意すると

$$\frac{Q'T}{PQ'} = \boxed{\text{キ}}$$

が成り立つ.

また, $OA = 1$, $PO = 5$, $PQ' = \frac{9}{2}$ のとき, $HT = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサシ}}}$ である.

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

- | | | |
|---------------------|--------------------|---------------------|
| ① $\frac{R'T}{PR'}$ | ② $\frac{TR'}{PT}$ | ③ $\frac{TH}{PT}$ |
| ④ $\frac{HR'}{PH}$ | ⑤ $\frac{TH}{PH}$ | ⑥ $\frac{R'H}{PR'}$ |

解答

(1) 方べきの定理により

$$PQ \cdot PR = PA^2 \quad \dots (\text{ア}) \textcircled{3}$$

また, $\triangle OAP \sim \triangle ASP$ より

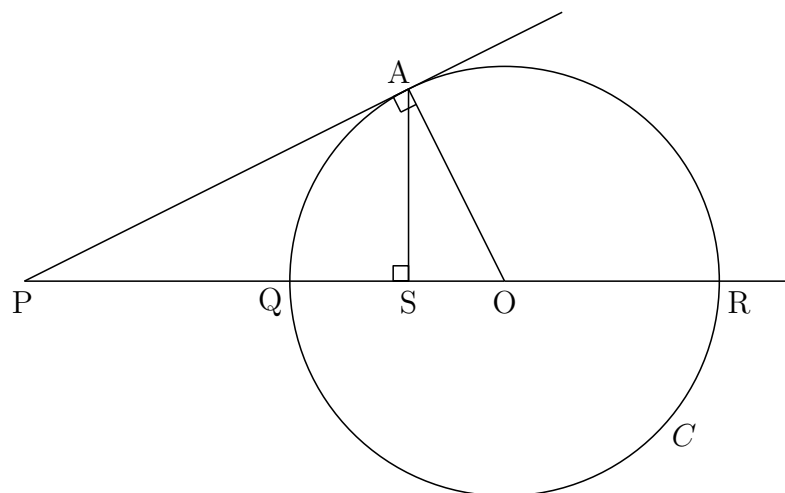
$$\frac{PA}{PO} = \frac{PS}{PA} \quad \text{ゆえに} \quad PO \cdot PS = PA^2 \quad \dots (\text{イ}) \textcircled{3}$$

点 O は線分 QR の中点であるから

$$PO = \frac{PQ + PR}{2} \quad \dots (\text{ウ}) \textcircled{3}$$

点 P は C の極で, 直線 AS は極線であるから, 20 ページの調和点列の性質 (2) により

$$\frac{1}{PQ} + \frac{1}{PR} = \frac{2}{PS} \quad \dots (\text{エ})$$

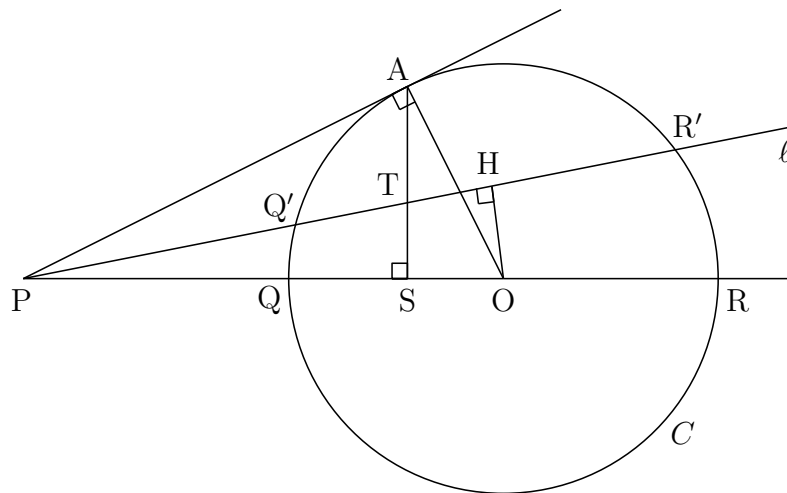


(2) (i) $\triangle POH \simeq \triangle PTS$ であるから

$$\frac{\text{PH}}{\text{PO}} = \frac{\text{PS}}{\text{PT}} \quad \text{よって} \quad \text{PO} \cdot \text{PS} = \text{PT} \cdot \text{PH} \quad \dots (\text{オ}) \quad \textcircled{4}$$

4点 P, Q', T, R' は調和点列であるから

$$\frac{1}{\text{PQ}'} + \frac{1}{\text{PR}'} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{PT}} \quad \dots(\text{力}) \textcircled{4}$$



(ii) 調和点列 P, Q', T, R' の複比は 1 であるから

$$(P, T; Q', R') = \frac{PQ'}{TQ'} \cdot \frac{TR'}{PR'} = 1 \quad \text{よって} \quad \frac{Q'T}{PQ'} = \frac{R'T}{PR'} \quad \dots (\ast) \textcircled{0}$$

$$OA = 1, \quad PO = 5 \text{ より } PA^2 = PO^2 - OA^2 = 5^2 - 1^2 = 24$$

方べきの定理により $PQ' \cdot PR' = PA^2 = 24$

これに $PQ' = \frac{9}{2}$ を代入すると $PR' = \frac{16}{3}$

$$\frac{2}{\text{PT}} = \frac{1}{\text{PQ}} + \frac{1}{\text{PR}} = \frac{2}{9} + \frac{3}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \text{PT} = \frac{288}{59}$$

H は線分 $Q'R'$ の中点であるから

$$PH = \frac{PQ' + PR'}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + \frac{16}{3} \right) = \frac{59}{12}$$

よって $HT = PH - PT = \frac{59}{12} - \frac{288}{59} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{708}}$

6.1.5 第6回 第3問

次の定理と問題について考える.

定理

△ABC の辺 BC の中点を D とすると

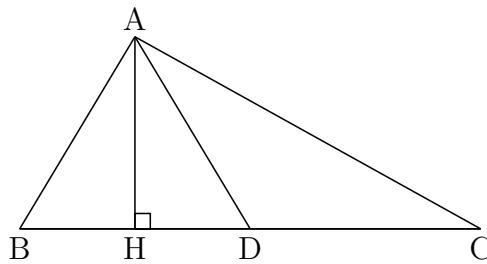
$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2) \quad \cdots (*)$$

が成り立つ.

(1) 定理は次のように証明できる.

証明

点 A から直線 BC へ下した垂線と直線 BC の交点を H とおく.



点 H が線分 DH 上にあるとき, 三平方の定理により

$$AH^2 + \left(\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}} \right)^2 = AB^2$$

$$AH^2 + DH^2 = AD^2$$

$$AH^2 + \left(\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} \right)^2 = AC^2$$

これらより AH と DH を消去すると, (*) が得られる.

点 H が線分 BD 上にないときも同様である.

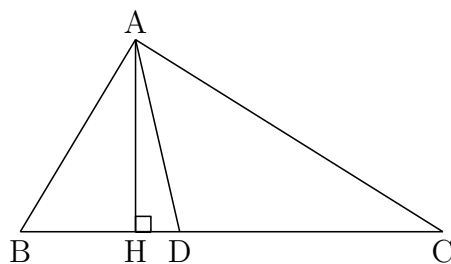
$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ については, 最も適当なものを, 次の ① ~ ④ のうちから一つずつ選べ. ただし, $\boxed{\text{ア}} > \boxed{\text{イ}}$ とする.

- ① BC ② BD ③ BH ④ CH ⑤ DH

次の問題について、点 A から直線 BC へ下した垂線と直線 BC の交点を H とおくことで、定理の証明と同じ構想で考えることができる。

問題

△ABC の ∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とおくと、 AD^2 を AB, AC, BD, DC を用いて表せ。



ウ から、 $\frac{AC}{AB} = r$ とおくと、点 H が線分 BD 上にあるとき、三平方の定理より

$$AH^2 + \left(\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}} \right)^2 = AB^2$$

$$AH^2 + DH^2 = AD^2$$

$$AH^2 + \left(r \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} \right)^2 = AC^2$$

これらより、 AD^2 を AB, AC, BD, DC を用いて表すと

$$AD^2 = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}} \quad \cdots \text{①}$$

となる。

点 H が線分 BD 上にないときも同様である。

ウ の解答群

- ⑩ 三角形の三つの内角の二等分線は1点で交わる.
- ⑪ 三角形の三つの頂点から, 向かい合う辺またはその延長へ下ろした垂線は1点で交わる.
- ⑫ 三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わる.
- ⑬ $\triangle ABC$ の $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点は, 辺 BC を $AB : AC$ に内分する.
- ⑭ $AB \neq AC$ である $\triangle ABC$ の頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点 Q は, 辺 BC を $AB : AC$ に外分する.

エ, オ の解答群

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ⑩ $(AB^2 + AC^2)$ | ① $\frac{AB^2 + AC^2}{2}$ |
| ⑫ $(AB + AC)$ | ③ $\frac{AB + AC}{2}$ |
| ⑬ $AB \cdot AC$ | ⑤ $(BD^2 + DC^2)$ |
| ⑭ $\frac{BD^2 + DC^2}{2}$ | ⑦ $(BD + DC)$ |
| ⑮ $\frac{BD + DC}{2}$ | ⑨ $BD \cdot DC$ |

(2) 太郎と花子さんは、問題の解答について振り返っている。

花子：問題を解くことはできたけれど、計算が大変だったね。

太郎：計算量の少ない方法はないかな。

花子：△ABCの外接円をかいてみたらどうか。

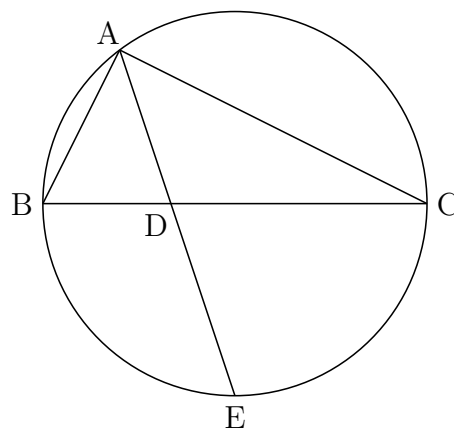
△ABCの外接円の直線ADの交点をEとおくと、方べきの定理により

$$AD \cdot \boxed{\text{カ}} = \boxed{\text{オ}} \quad \dots \textcircled{2}$$

円周角の定理より

$$\angle ABD = \angle AEC$$

となる。



△DAB ∽ $\boxed{\text{キ}}$ より

$$AD \cdot \boxed{\text{ク}} = \boxed{\text{エ}}$$

である。

この式と②より、(1)の①が得られる。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

- ① AC ② AE ③ BC ④ CD ⑤ CE ⑥ DE

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

- ① △ACB ② △ADC ③ △CAE ④ △ECB

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

- ① AC ② AE ③ BC ④ CD ⑤ CE ⑥ DE

- (3) AD が $\angle BAC$ の二等分線でない場合について考える. 点 D が直線 BC 上を動くとき (1) の ① がつねに成り立つための必要十分条件として正しいものは ケ である.

ケ の解答群

- ① $\angle BAC = 90^\circ$ であること
- ② $AB = AC$ であること
- ③ $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形であること
- ④ $\triangle ABC$ が正三角形であること

解答

- (1) $BH = BD - DH$, $HC = DC + DH = BD + DH$ を

$$AH^2 + BH^2 = AB^2, \quad AH^2 + HC^2 = AC^2$$

に代入すると

$$AH^2 + (BD - DH)^2 = AB^2, \quad \dots (\text{ア})(\text{イ})$$

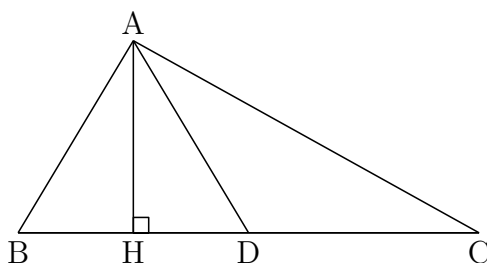
$$AH^2 + (BD + DH)^2 = AC^2$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$(AH^2 + DH^2 + BD^2) = AB^2 + AC^2$$

$AH^2 + DH^2 = AD^2$ であるから

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$



△ABC の ∠BAC の二等分線と辺 BC の交点は、辺 BC を AB : AC に内分するから、 $\frac{AC}{AB} = r$ とおくと、点 H が線分 BD 上にあるとき、三平方の定理より

$$AH^2 + (BD - DH)^2 = AB^2$$

$$AH^2 + DH^2 = AD^2$$

$$AH^2 + (rBD + DH)^2 = AC^2$$

第1式 × r + 第3式 より

$$(r + 1)(AH^2 + DH^2) + (r^2 + r)BD^2 = rAB^2 + AC^2$$

$$(r + 1)AD^2 + (r^2 + r)BD^2 = AB \cdot AC + AC^2$$

$$AD^2 + rBD^2 = \frac{AC(AB + AC)}{r + 1}$$

$$AD^2 + \frac{AC}{AB} \cdot BD^2 = \frac{AC(AB + AC)}{\frac{AC}{AB} + 1}$$

AB : AC = BD : DC より、 $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BD}$ より

$$AD^2 + BD \cdot DC = AB \cdot AC$$

よって

$$AD^2 = \mathbf{AB \cdot AC - BD \cdot DC} \quad \dots \textcircled{1} \quad (\text{エ})(\text{オ})$$

となる。

点 H が線分 BD 上にないときも同様である。

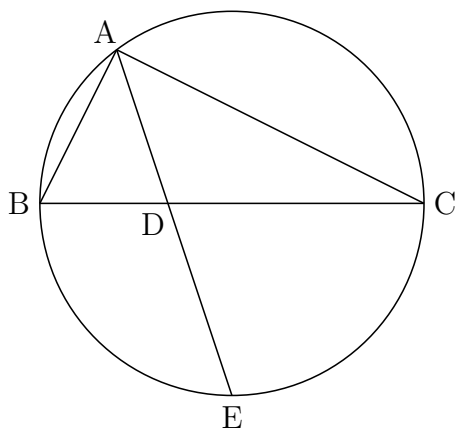
△ABC の外接円の直線 AD の交点を E とおくと，方べきの定理により

$$AD \cdot \mathbf{DE} = BD \cdot DC \quad \cdots \textcircled{2} \quad (\text{カ}) \textcircled{5}$$

円周角の定理より

$$\angle ABD = \angle AEC$$

となる．



△DAB ∽ △CAE より $\cdots$ (キ) $\textcircled{2}$

$$AD \cdot \mathbf{AE} = AB \cdot AC \quad \cdots (\text{ク}) \textcircled{1}$$

である．

この式と $\textcircled{2}$ より，(1) の $\textcircled{1}$ が得られる．

(2) ① から $AD^2 + BD \cdot DC = AB \cdot AC$

スチュワートの定理により

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = BC \cdot (AD^2 + BD \cdot DC)$$

上の 2 式から $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = BC \cdot AB \cdot AC$

$$\frac{AC}{AB} = r > 0 \text{ とおくと } BDr^2 - BCr + DC = 0$$

D は BC 上の点であるから, $BC = BD + DC$ より

$$BDr^2 - (BD + DC)r + DC = 0$$

$$(r - 1)(rBD - DC) = 0$$

$$\left(\frac{AC}{AB} - 1 \right) \left(\frac{AC}{AB} \cdot BD - DC \right) = 0$$

$$(AC - AB)(AC \cdot BD - AB \cdot DC) = 0$$

AD が $\angle BAC$ の二等分線でないから, $AC \cdot BD - AB \cdot DC \neq 0$ に注意して

$$AB = AC \quad \dots (\text{ケ}) \text{ ①}$$

6.2 数学Ⅱ・B・C

6.2.1 第1回 第1問

座標平面上で、円 $x^2 + y^2 = 4$ を C とする．円 C と直線や放物線が接するときについて考えよう．

- (1) a を定数とし、直線 $y = -2x + a$ を ℓ とする．太郎さんと花子さんは、 C と ℓ が接するときの a の値の求め方について話している．

太郎： C の中心から ℓ までの距離と、 C の半径に着目すると求められそうだよ．

花子： C と ℓ の方程式を連立させると、 x についての2次方程式が得られるね．判別式を使って求めることもできそうだよ．

- (i) 太郎さんの求め方について考えてみよう．

C の半径 であるから、 C と ℓ が接するとき、 $a =$ である．

の解答群

- | | | | | |
|-----------------|------------------|------------------|-----------|-----------|
| ① $\sqrt{5}$ | ② $2\sqrt{5}$ | ③ $4\sqrt{5}$ | ④ 10 | ⑤ 20 |
| ⑥ $\pm\sqrt{5}$ | ⑦ $\pm2\sqrt{5}$ | ⑧ $\pm4\sqrt{5}$ | ⑨ ±10 | ⑩ ±20 |

- (ii) 花子さんの求め方について考えてみよう．

$y = -2x + a$ を $x^2 + y^2 = 4$ に代入すると、 x についての2次方程式

$$5x^2 - 4ax + a^2 - 4 = 0 \quad \cdots \text{①}$$

が得られる．①の判別式を D として、 D の条件を考えると、 $a =$ を得る．

- (2) b を定数とし，放物線 $y = x^2 + b$ を P とする．花子さんと太郎さんは， C と P が接するときの b の値の求め方について話している．

花子：円と直線が接するときのように y を消去すると， x についての 4 次方程式が得られるね． C と P の接点の x 座標を c とすれば， $x = c$ はこの 4 次方程式の重解だね．

太郎：接点の座標を (x_1, y_1) として， C と P の接線の方程式をそれぞれ立式すれば，接するときはこの二つの接線が一致するので， (x_1, y_1) が求められるよ．

- (i) 花子さんの求め方について考えよう．

$y = x^2 + b$ を $x^2 + y^2 = 4$ に代入すると， x についての 4 次方程式

$$x^4 + (2b + 1)x^2 + b^2 - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が得られる．

まず， C と P が 1 点だけで接するとする．

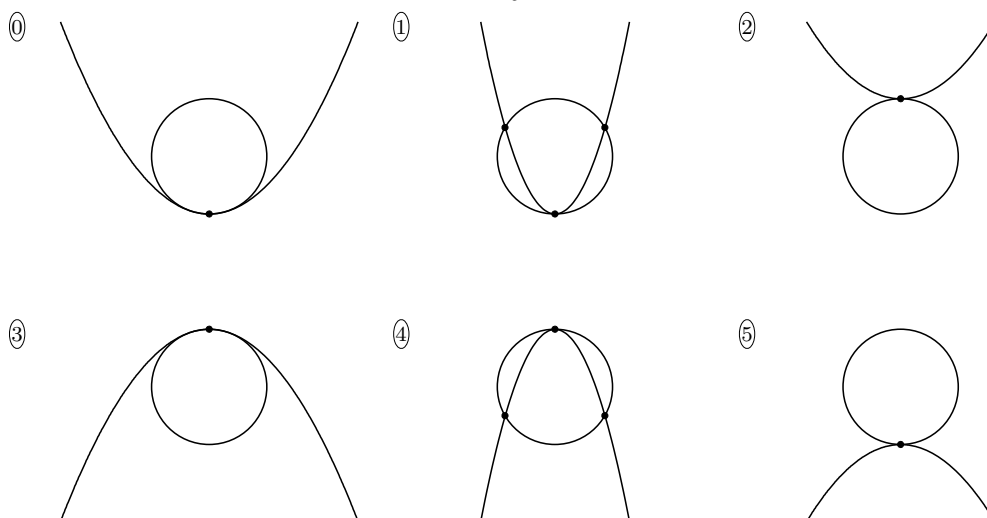
P の軸上に C の中心があるので， $\textcircled{2}$ は $x = \boxed{\text{ウ}}$ を重解にもつから

$$b = \boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オカ}}$$

である．

C と P は， $b = \boxed{\text{エ}}$ のとき $\boxed{\text{キ}}$ ， $b = \boxed{\text{オカ}}$ のとき $\boxed{\text{ク}}$ のように接する．

$\boxed{\text{キ}}$ ， $\boxed{\text{ク}}$ については，最も適当なものを，次の ①～⑤のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．なお， x 軸と y 軸は省略しているが， x 軸は右方向， y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である．

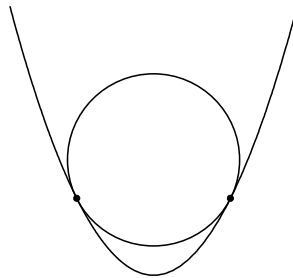


次に， C と P が異なる 2 点で接するとする．

② の重解の一つを $x = c$ ($\neq 0$) とすると，もう一つの重解は $-c$ である．
よって

$$b = \frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

であり，下の図のように接していることがわかる．なお， x 軸と y 軸は省略しているが， x 軸は右方向， y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である．



② が異なる三つ以上の重解をもつことはないので， C と P が異なる 3 点以上で接することはない．よって， C と P が接するときの b の値は

$$b = \boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オカ}}, \frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である．

(ii) 太郎さんの求め方について考えてみよう.

C と P の接点の座標を (x_1, y_1) とすると, 点 (x_1, y_1) における C の接線の方程式は

$$\boxed{\text{ス}} \quad \cdots \textcircled{3}$$

である.

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ① $x_1x + y_1y = 2$ | ① $x_1x + y_1y = 4$ |
| ② $x_1x - y_1y = 2$ | ② $x_1x - y_1y = 4$ |
| ④ $y_1x + x_1y = 2$ | ⑤ $y_1x + x_1y = 4$ |
| ⑥ $y_1x - x_1y = 2$ | ⑦ $y_1x - x_1y = 4$ |

点 (x_1, y_1) における P の接線の方程式は

$$y = 2x_1(x - x_1) + y_1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

である.

④ を ③ に代入して y を消去すると

$$x_1(2y_1 + 1)x - 2x_1^2y_1 + y_1^2 - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる.

C と P が点 (x_1, y_1) で接するとき, すべての x に対して ⑤ が成り立つので

$$x_1(2y_1 + 1) = \boxed{\text{セ}}, \quad -2x_1^2y_1 + y_1^2 - 4 = \boxed{\text{セ}}$$

これより (x_1, y_1) が求められる.

よって, $b = y_1 - x_1^2$ より, C と P が接するとき

$$b = \boxed{\text{エ}}, \quad \boxed{\text{オカ}}, \quad \frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である.

解答

- (1) (i) $C: x^2 + y^2 = 4$ の半径 r は $r = 2 \dots (\text{ア})$

C の中心 $(0, 0)$ から直線 $\ell: 2x + y - a = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|-a|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$$

C と ℓ が接するとき, $d = r$ より

$$\frac{|a|}{\sqrt{5}} = 2 \quad \text{よって} \quad a = \pm 2\sqrt{5} \dots (\text{イ}) \textcircled{6}$$

- (ii) $y = -2x + a$ を $x^2 + y^2 = 4$ に代入して整理すると

$$5x^2 - 4ax + a^2 - 4 = 0 \dots \textcircled{1}$$

このとき, ① の判別式

$$D/4 = (-2a)^2 - 5 \cdot (a^2 - 4) = -a^2 + 20$$

について, $D = 0$ であるから

$$-a^2 + 20 \quad \text{これを解いて} \quad a = \pm 2\sqrt{5} \dots (\text{イ})$$

- (2) (i) $y = x^2 + b$ を $x^2 + y^2 = 4$ に代入して整理すると

$$x^4 + (2b + 1)x^2 + b^2 - 4 = 0 \dots \textcircled{2}$$

C と P が 1 点で接するとき, ② は $x = 0$ を重解もつから $\dots (\text{ウ})$

$$b^2 - 4 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad b = 2, -2 \dots (\text{エ}) \sim (\text{カ})$$

$$b = 2 \text{ のとき} \quad x^4 + 5x^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2(x^2 + 5) = 0$$

このとき, $x = 0$ (重解) 以外に解はない (共有点なし). $\dots (\text{キ}) \textcircled{2}$

$$b = -2 \text{ のとき} \quad x^4 - 3x^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2(x^2 - 3) = 0$$

このとき, $x = 0$ (重解) 以外に, $x = \pm\sqrt{3}$ をもつ. $\dots (\text{ク}) \textcircled{1}$

次に, C と P が 2 点で接するとき, ② の重解の 1 つを $x = c$ とすると, y 軸に関する対称性から, もう一つの重解は $-c$ である. $x^2 = X$ とおくと, ② から

$$X^2 + (2b + 1)X + b^2 - 4 = 0$$

は重解 c^2 をもつから, 係数について

$$(2b + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b^2 - 4) = 0 \quad \text{よって} \quad b = -\frac{17}{4} \dots (\text{ケ}) \sim (\text{シ})$$

- (ii) C と P の接点の座標を (x_1, y_1) とすると、点 (x_1, y_1) における C の接線の方程式は

$$x_1x + y_1y = 4 \quad \cdots \textcircled{3}(\text{ス})$$

である.

点 (x_1, y_1) における P の接線の方程式は

$$y = 2x_1(x - x_1) + y_1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

である.

$\textcircled{4}$ を $\textcircled{3}$ に代入して y を消去すると

$$x_1(2y_1 + 1)x - 2x_1^2y_1 + y_1^2 - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる.

C と P が点 (x_1, y_1) で接するとき、すべての x に対して $\textcircled{5}$ が成り立つので

$$x_1(2y_1 + 1) = 0, \quad -2x_1^2y_1 + y_1^2 - 4 = 0 \quad \cdots (\text{セ})$$

これより $(x_1, y_1) = (0, \pm 2), \left(\pm \frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

よって、 $b = y_1 - x_1^2$ より、 C と P が接するとき

$$b = 2, -2, -\frac{17}{4} \quad \cdots (\text{エ}) \sim (\text{シ})$$

である.

別解

信一：接点の x 座標が 0 であるとき、 $b = \pm 2$ は自明です．接点の x 座標が $x \neq 0$ の場合については、円の中心から放物線までの最短距離が円の半径であることを利用しよう．そこで距離 2 乗関数を使ってみましょう．

M 君：放物線の頂点で接するとき接触円 (曲率円) の半径から、放物線の頂点で接する円の位置関係はわかります．

(信一さんの解答)

放物線 P と円 C が $x = 0$ で接するとき、 $b = \pm 2$ は明らか．

P と C の接点の x 座標が $x \neq 0$ の場合について考える．

円の中心 O から放物線上の点 $(x, x^2 + b)$ までの距離 2 乗関数は

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + (x^2 + b)^2 = x^4 + (2b + 1)x^2 + b^2 \\ &= \left(x^2 + b + \frac{1}{2}\right)^2 - b - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$b + \frac{1}{2} \geq 0$ のとき、 $f(x)$ は $x = 0$ で最小となる．

$b + \frac{1}{2} < 0$ のとき、最小値 $-b - \frac{1}{4}$

この最小値が 2^2 であるから

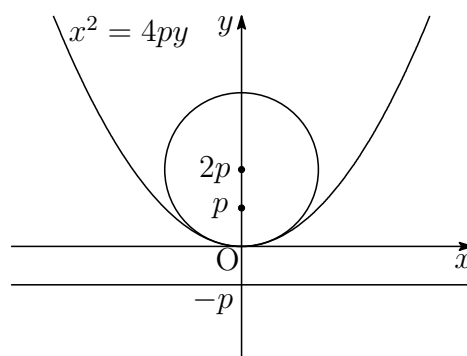
$$-b - \frac{1}{4} = 4 \quad \text{これを解いて} \quad b = -\frac{17}{4}$$

自明である $b = \pm 2$ を含めて、求める b の値は $b = \pm 2, -\frac{17}{4}$

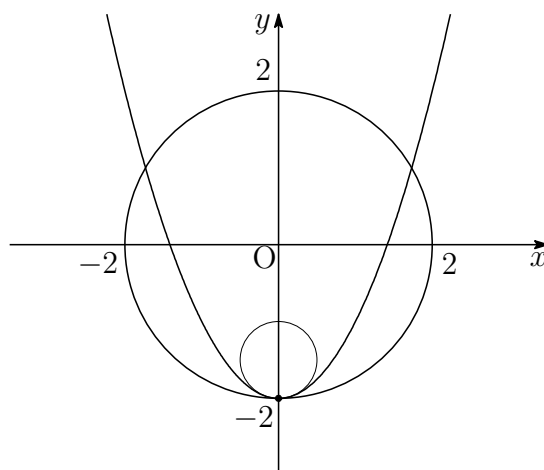
(M 君の補足)

放物線 $y = x^2 - 2$ の頂点における曲率半径が分かります．

放物線 $x^2 = 4py$ の曲率半径が $2p$ です． また，放物線 $x^2 = 4py$ の頂点における曲率中心，焦点，頂点，準線が等間隔に並んでいます．



これから， $x^2 = y$ の曲率半径は $\frac{1}{2}$ です．放物線 $y = x^2 - 2$ は $y = x^2$ を平行移動したものですから，放物線 $y = x^2 - 2$ の頂点における曲率半径は $\frac{1}{2}$ です．このことから，点 $(0, -2)$ でこの放物線に接する半径 2 の円との位置関係は，次のようになります．接触円よりも大きい円ですね．



参考 2 次曲線の準線・焦点・頂点・曲率中心

6.2.2 第1回 第3問

a, b を実数の定数とする. $f(x) = x^3 + ax + b$ とし, D を

$$D = -4a^3 - 27b^2$$

と定める. 方程式 $f(x) = 0$ の解と D の関係について考えよう.

(1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とすると

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}} x^2 + a$$

であるから, 方程式 $f'(x) = 0$ について

異なる二つの実数解をもつための必要十分条件は

重解を一つもつための必要十分条件は

実数解をもたないための必要十分条件は

である.

~ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① $a^2 - 4b > 0$

② $a^2 - 4b = 0$

③ $a^2 - 4b < 0$

④ $a > 0$

⑤ $a = 0$

⑥ $a < 0$

⑦ $b > 0$

⑧ $b = 0$

⑨ $b < 0$

(i) のとき, $f'(x) = 0$ の異なる二つの実数解を p, q ($p < q$) とおくと, $f(x)$ は $x = p$ で をとり, $x = q$ で をとる.

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① 極小値

② 最小値

③ 負の値

④ 極大値

⑤ 最大値

⑥ 正の値

このとき

$$p = -\sqrt{\frac{-a}{\boxed{\text{キ}}}}, \quad q = \sqrt{\frac{-a}{\boxed{\text{キ}}}}$$

であるから, $f(p)f(q)$ を D を用いて表すと

$$f(p)f(q) = -\frac{D}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である.

- (ii) のとき、方程式 $f(x) = 0$ の解について調べると、方程式 $f(x) = 0$ が $x = 0$ である重解のみをもつための必要十分条件は であり、方程式 $f(x) = 0$ が一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつための必要十分条件は である。

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- | | | |
|-----------|--------------|--------------|
| ① $b = 0$ | ② $b \neq 0$ | ③ $b > 0$ |
| ④ $b < 0$ | ⑤ $b \geq 0$ | ⑥ $b \leq 0$ |

- (iii) のとき、方程式 $f(x) = 0$ は .

については、最も適当なものを一つ選べ

- ① 異なる三つの実数解をもつ
- ② $x = 0$ である重解のみをもつ
- ③ $x \neq 0$ である重解のみをもつ
- ④ 一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつ
- ⑤ 実数解をもたない

- (2) これまでの考察から、方程式 $f(x) = 0$ がどのような解をもつかは、 D の値から調べることができる。

$D > 0$ のとき,

$D < 0$ のとき,

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- ① 異なる三つの実数解をもつ
- ② 異なる二つの実数解 (ただし、一つは重解) をもつ
- ③ 一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつ
- ④ 一つの実数解を重解としてもち、虚数解をもたない
- ⑤ 実数解をもたない

解答

(1) $f(x) = x^3 + ax + b$ より

$$f'(x) = 3x^2 + a \quad \cdots (\text{ア})$$

であるから, $f'(x) = 0$ のとき

$$x^2 = -\frac{a}{3}$$

異なる二つの実数解をもつための必要十分条件は

$$-\frac{a}{3} > 0 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{a < 0} \quad \cdots (\text{イ}) \textcircled{5}$$

重解を一つもつための必要十分条件は

$$-\frac{a}{3} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{a = 0} \quad \cdots (\text{ウ}) \textcircled{4}$$

実数解をもたないための必要十分条件は

$$-\frac{a}{3} < 0 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{a > 0} \quad \cdots (\text{エ}) \textcircled{3}$$

(i) $a < 0$ のとき, $f'(x) = 0$ の異なる二つの実数解を p, q とおくと

$$f'(x) = 3(x-p)(x-q) \quad (p < q)$$

$f(x)$ の増減表は増減表は

x	$\cdots$	p	$\cdots$	q	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって, $f(x)$ は $x = p$ で極大値をとり, $x = q$ で極小値をとる.

$\cdots$ (オ) ③ (カ) ④

このとき

$$p = -\sqrt{\frac{-a}{3}}, \quad q = \sqrt{\frac{-a}{3}} \quad \cdots (\text{キ})$$

$$p^2 = q^2 = -\frac{a}{3}, \quad p + q = 0, \quad pq = \frac{a}{3} \quad \text{より } (p, q \text{ は } 3x^2 + a = 0 \text{ の解})$$

$$f(p) = p^3 + ap + b = (p^2 + a)p + b = \left(-\frac{a}{3} + a\right)p + b = \frac{2}{3}ap + b$$

$$\text{同様にして } f(q) = \frac{2}{3}aq + b$$

$$\begin{aligned} f(p)f(q) &= \left(\frac{2}{3}ap + b\right)\left(\frac{2}{3}aq + b\right) = \frac{4}{9}a^2pq + \frac{2}{3}ab(p+q) + b^2 \\ &= \frac{4}{9}a^2 \cdot \frac{a}{3} + \frac{2}{3}ab \cdot 0 + b^2 = \frac{4}{27}a^3 + b^2 = -\frac{4a^3 - 27b^2}{27} \\ &= -\frac{D}{27} \quad \cdots (\text{ク})(\text{ケ}) \end{aligned}$$

(ii) $a = 0$ のとき, 方程式 $f(x) = 0$, すなわち, $x^3 + b = 0$ について, 重解 $x = 0$ のみをもつための必要十分条件は $b = 0$ であり, 方程式 $x^3 + b = 0$ が一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつための必要十分条件は $b \neq 0$ である.
 $\cdots$ (コ) ④ (サ) ①

(iii) $a > 0$ のとき, $f'(x) = 3x^2 + a > 0$

$f(x)$ は単調増加であるから, $f(x) = 0$ は一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつ.
 $\cdots$ (シ) ③

(2) $D > 0$ のとき, $f(p)f(q) < 0$ であるから, 極大値と極小値の符号が異なり, 異なる三つの実数解をもつ
 $\cdots$ (ス) ④

$D < 0$ のとき, $f(p)f(q) > 0$ であるから, 極大値と極小値の符号が同じで, 一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつ
 $\cdots$ (セ) ②

参照 定理 4

6.2.3 第1回 第7問

〔1〕放物線 $C: y^2 = 4x$ について考える.

C の焦点を F とおくと, 座標平面上における F の座標は

$$F \left(\boxed{\text{ア}}, 0 \right)$$

である.

以下の設問で極座標を扱う際は, F を極, x 軸の $x \geq \boxed{\text{ア}}$ の部分を始線とする極座標を考えるものとし, (r, θ) ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) の形で答えること.

(1) C 上の直交座標で表された点 $A(3, 2\sqrt{3})$ を極座標で表すと

$$A \left(\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}} \right)$$

である.

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

① $\frac{\pi}{6}$

② $\frac{\pi}{4}$

③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{\pi}{2}$

⑤ $\frac{2}{3}\pi$

⑥ $\frac{3}{4}\pi$

⑦ $\frac{5}{6}\pi$

⑧ π

(2) C 上の点 B の極座標が (r, θ) で表されるとき、 C の極座標は

$$r = \boxed{\text{エ}}$$

である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

- | | | | | | | | |
|---|-----------------------------|---|-----------------------------|---|-----------------------------|---|-----------------------------|
| ㉠ | $\frac{1}{1 - \cos \theta}$ | ㉡ | $\frac{1}{1 + \cos \theta}$ | ㉢ | $\frac{1}{1 - \sin \theta}$ | ㉣ | $\frac{1}{1 + \sin \theta}$ |
| ㉤ | $\frac{2}{1 - \cos \theta}$ | ㉥ | $\frac{2}{1 + \cos \theta}$ | ㉦ | $\frac{2}{1 - \sin \theta}$ | ㉧ | $\frac{2}{1 + \sin \theta}$ |

(3) 極座標が (r, θ) が (r_1, θ_1) $\left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}\right)$ で表される C 上の点 P を考える。直線 PF を ℓ とし、 C と ℓ の共有点のうち P でないものを R とする。また、点 F を通り ℓ に垂直な直線を m とし、 C と m の共有点を x 座標が小さいほうから順に Q, S とする。

このとき

$$a = \frac{1}{PF \cdot RF} + \frac{1}{QF \cdot SF}$$

についての記述として、次の ㉠ ~ ㉣ のうち、正しいものは $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

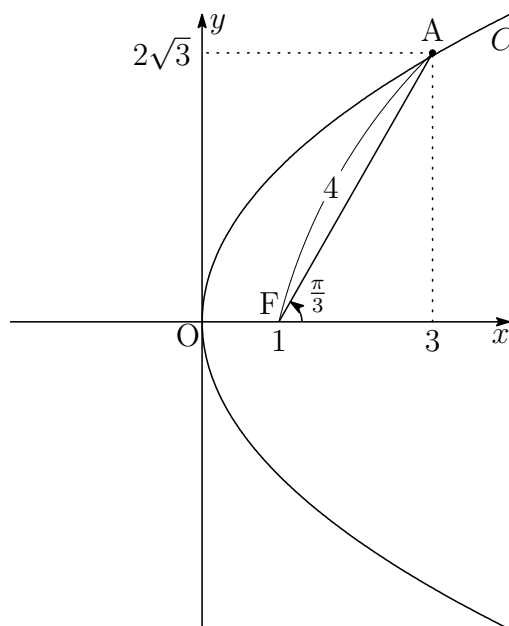
- ㉠ θ_1 の値が増加すると、 a の値も増加する。
- ㉡ θ_1 の値が増加すると、 a の値は減少する。
- ㉢ θ_1 の値が増加すると、 a の値は増加したり減少したりする。
- ㉣ θ_1 の値が増加しても、 a の値は変化しない。

解答 放物線 C は $y^2 = 4 \cdot 1 \cdot x$

C の焦点は $F(1, 0)$ …(ア)

(1) 下の図から, F を極とする点 A の極座標は

$$A\left(4, \frac{\pi}{3}\right) \quad \dots(\text{イ})(\text{ウ})$$

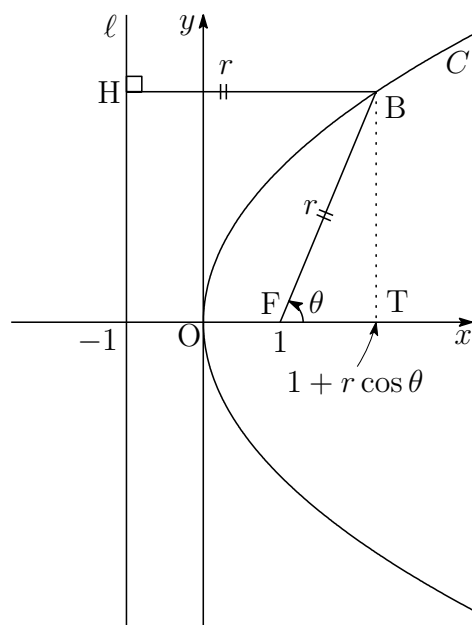


(2) $C: x^2 = 4y$ の極 (焦点) は $F(1, 0)$, 準線は $\ell: x = -1$

B から ℓ に垂線 BH, x 軸に垂線 BT を引くと, $FB = BH = r$

T から準線 ℓ までの距離が r であるから

$$r = (1 + r \cos \theta) - (-1) \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{2}{1 - \cos \theta} \quad \dots (\text{工}) \textcircled{4}$$



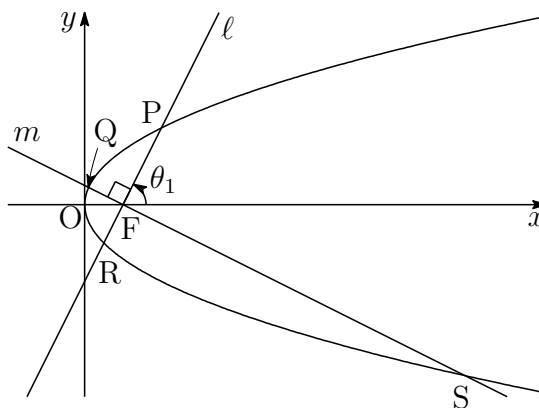
(3) P, Q, R, S の偏角はそれぞれ θ_1 , $\theta_1 + \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 + \pi$, $\theta_1 + \frac{3\pi}{2}$ であるから, (2) の極方程式により

$$\begin{aligned} PF &= \frac{2}{1 - \cos \theta_1}, \\ QF &= \frac{2}{1 - \cos(\theta_1 + \frac{\pi}{2})} = \frac{2}{1 + \sin \theta_1}, \\ RF &= \frac{2}{1 - \cos(\theta_1 + \pi)} = \frac{2}{1 + \cos \theta_1}, \\ SF &= \frac{2}{1 - \cos(\theta_1 + \frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{1 - \sin \theta_1} \end{aligned}$$

したがって

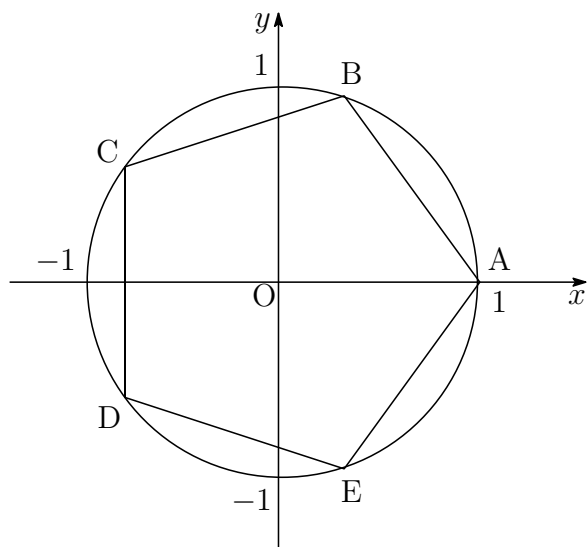
$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{PF \cdot RF} + \frac{1}{QF \cdot SF} \\ &= \frac{1 - \cos \theta_1}{2} \cdot \frac{1 + \cos \theta_1}{2} + \frac{1 + \sin \theta_1}{2} \cdot \frac{1 - \sin \theta_1}{2} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta_1}{4} + \frac{1 - \sin^2 \theta_1}{4} \\ &= \frac{\sin^2 \theta_1}{4} + \frac{\cos^2 \theta_1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって, θ_1 の値が増加しても, a の値は変化しない. ... ③



参照 [2 次曲線の性質](#)

- [2] 図のように，原点Oを中心とする複素数平面上の単位円周上に，正五角形ABCDEの頂点をとる．ただし，A(1)とする．



点Bを表す複素数を z_1 とし， z_1 の偏角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおく．

(1) $\theta = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

- (2) 点Cを表す複素数を α ，点Dを表す複素数を β とおくと， α の偏角は $\boxed{\text{ク}}$ ， β の偏角は $\boxed{\text{ケ}}$ である．ただし，偏角 θ' は $0 < \theta' < 2\pi$ とする．

$\boxed{\text{ク}}$ ， $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① θ	② 2θ	③ 3θ	④ 4θ	⑤ 5θ
------------	-------------	-------------	-------------	-------------

α と β の実部に着目すると， z_1 の実部は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である．

- (3) 方程式 $w^5 = i$ の解のうち，実部，虚部ともに負であるものを w_1 とする．複素数 $z_1^2 w_1$ で表された点 F は，点 B と に関して対称である．

の解答群

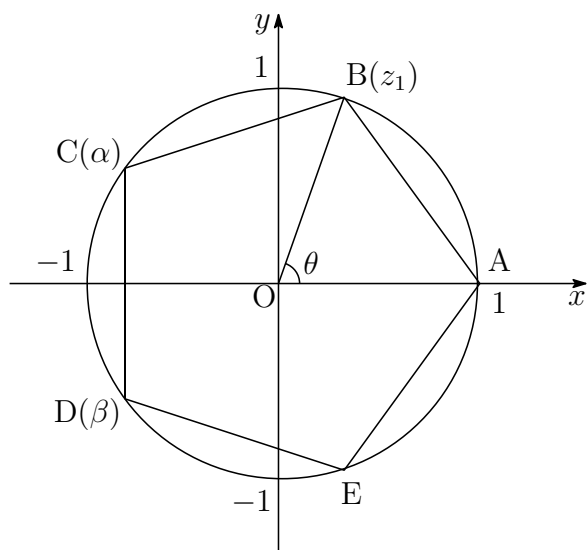
- ① 実軸
- ② 虚軸
- ③ 原点 O
- ④ 原点 O と点 $1 + i$ を結ぶ直線
- ⑤ 原点 O と点 $1 - i$ を結ぶ直線

解答

$$(1) \theta = \arg z_1 = \frac{2}{5}\pi \quad \dots (\text{カ})(\text{キ})$$

$$(2) \arg \alpha = \arg z_1^2 = 2 \arg z_1 = \mathbf{2\theta} \quad \dots (\text{ク}) \text{ ①}$$

$$\arg \beta = \arg z_1^3 = 3 \arg z_1 = \mathbf{3\theta} \quad \dots (\text{ケ}) \text{ ②}$$



α と β の実部が等しいから

$$\cos 2\theta = \cos 3\theta \quad \text{ゆえに} \quad 2\cos^2\theta - 1 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\text{したがって} \quad (\cos\theta - 1)(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1) = 0$$

$\theta = \frac{2}{5}\pi$ より, $\cos\theta > 0$ であることに注意して解くと

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \dots (\text{コ}) \sim (\text{シ})$$

(3) $w_1^5 = i$ より $\arg w_1^5 = \arg i$

$$5 \arg w_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{ゆえに} \quad \arg w_1 = \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5}n \right) \pi \quad (n \text{ は整数})$$

$\pi < \arg w_1 < \frac{3}{2}\pi$ であるから

$$1 < \frac{1}{10} + \frac{2}{5}n < \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{9}{4} < n < \frac{7}{2}$$

n は整数であるから $n = 3$ すなわち $\arg w_1 = \frac{13}{10}\pi$

$$\begin{aligned} \text{これから} \quad \arg z_1^2 w_1 &= 2 \arg z_1 + \arg w_1 = 2 \cdot \frac{2}{5}\pi + \frac{13}{10}\pi \\ &= \frac{21}{10}\pi = \frac{\pi}{10} + 2\pi \end{aligned}$$

$$\text{このとき} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} \right) = \frac{\pi}{4}, \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

よって、点 F は点 B と原点 O と点 $1+i$ を結ぶ直線に関して対称である。

…(ス) ③

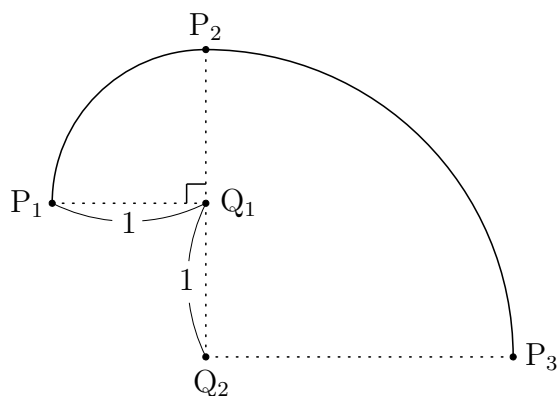
6.2.4 第2回 第4問

自然界には，貝殻の模様，台風の渦巻き，ひまわりの種の並び方など螺旋形^{らせん}をなすものが多い。螺旋をつくって，その長さを考えよう。

(1) 次のように円弧をつないでいくと，螺旋をつくることができる。

(I) 平面上に2点 P_1, Q_1 を， $P_1Q_1 = 1$ を満たすようにとる。

(II) k を自然数とする．2点 P_k, Q_k に対して，下の図のように点 P_k から，点 Q_k を中心として時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させて半径 P_kQ_k の円弧をかき，その終点を P_{k+1} とする．そして，直線 $P_{k+1}Q_k$ 上の点 Q_{k+1} を，点 Q_k に関して点 P_{k+1} の反対側に， $Q_kQ_{k+1} = 1$ を満たすようにとる。



円弧 P_kP_{k+1} の長さを a_k とすると， $a_3 = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}\pi$ ， $a_4 = \text{ウ}\pi$ であり，数列 $\{a_n\}$ は エ であることがわかる。

エ の解答群

- ① すべての項が同じ値をとる数列である
- ② 公差が0でない等差数列である
- ③ 公比が1より大きい等比数列である
- ④ 公比が1より小さい等比数列である
- ⑤ 等差数列でも等比数列でもない

点 P_1 から点 P_{n+1} までの螺旋の長さは $\frac{n(n + \text{オ})}{\text{カ}}\pi$ である。

解答 $r_k = Q_k P_k$ とおくと

$$r_1 = 1, \quad r_{k+1} = r_k + 1 \quad \text{ゆえに} \quad r_n = n$$

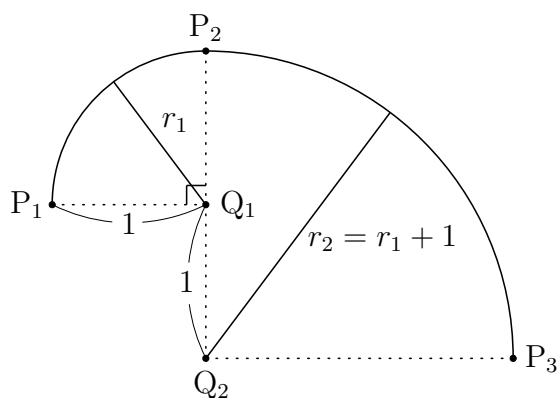
$$\text{したがって} \quad a_n = r_n \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{n}{2} \pi$$

$$\text{よって} \quad a_3 = \frac{3}{2} \pi, \quad a_4 = 2\pi \quad \dots (\text{ア}) \sim (\text{ウ})$$

数列 $\{a_n\}$ は等差数列 $\dots (\text{エ})$

点 P_1 から点 P_{n+1} までの螺旋の長さは

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{n(n+1)}{4} \quad \dots (\text{オ})(\text{カ})$$



(2) 線分 $Q_k Q_{k+1}$ の長さが変化するときの螺旋の長さを考えよう．次のように円弧をつないでいくと，螺旋をつくることができる．

(I) 平面上に 2 点 P_1, Q_1 を， $P_1 Q_1 = 1$ を満たすようにとる．

(II) k を自然数とする．2 点 P_k, Q_k に対して，点 P_k から，点 Q_k を中心として時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させて半径 $P_k Q_k$ の円弧をかき，その終点を P_{k+1} とする．そして，直線 $P_{k+1} Q_k$ 上の点 Q_{k+1} を，点 Q_k に関して点 P_{k+1} の反対側に，線分 $Q_k Q_{k+1}$ の長さが次の条件を満たすようにとる．

条件

$k = 1$ のとき， $Q_1 Q_2 = 1$

$k \geq 2$ のとき， $Q_k Q_{k+1} = P_{k-1} Q_{k-1}$

円弧 $P_k P_{k+1}$ の長さを b_k とすると， $b_3 = \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \pi$ ， $b_4 = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \pi$ であり，数列 $\{b_n\}$ は 3 項間の漸化式 サ を満たすことがわかる．

サ

の解答群

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| ① $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ | ① $b_{n+2} = b_{n+1} - b_n$ |
| ② $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$ | ③ $b_{n+2} = b_{n+1} - 2b_n$ |
| ④ $2b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$ | ⑤ $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$ |
| ⑥ $b_{n+2} = 2b_{n+1} + 2b_n$ | ⑦ $b_{n+2} = 2b_{n+1} - 2b_n$ |

3 項間の漸化式 を

$$b_{n+2} - \beta b_{n+1} = \alpha(b_{n+1} - \beta b_n)$$

に変形して，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう． α ， β は

$$\alpha + \beta = \text{シ}, \quad \alpha\beta = \text{スセ}$$

を満たす実数である．

$c_n = b_{n+1} - \beta b_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は ことから，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求める．

の解答群

- ① すべての項が同じ値をとる数列である
- ② 公差が 0 でない等差数列である
- ③ 公比が 1 でない等比数列である
- ④ 等差数列でも等比数列でもない

したがって， $b_{n+1} - \beta b_n$ を， $\beta = \text{シ} - \alpha$ より， α だけ用いて表すと

$$b_{n+1} - \beta b_n = \frac{(\alpha + \text{タ}) \alpha^{\text{チ}}}{\text{ツ}} \pi \quad \dots \text{①}$$

である．

の解答群

- ① $n - 2$
- ② $n - 1$
- ③ n
- ④ $n + 1$
- ⑤ $n + 2$

$b_{n+1} - \alpha b_n$ を, $\alpha = \boxed{\text{シ}}$ $-\beta$ より, β だけ用いて表すと

$$b_{n+1} - \alpha b_n = \frac{\left(\beta + \boxed{\text{タ}}\right) \beta^{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}} \pi \quad \cdots \textcircled{2}$$

である. よって, ①, ② の辺々の差をとると, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることができる.

点 P_1 から点 P_{n+1} までの螺旋の長さを考えよう.

$\boxed{\text{サ}}$ より

$$\sum_{k=1}^n b_k = \boxed{\text{テ}} - \pi$$

が成り立ち, これに着目して求めることができる.

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

- | | | | | | | | | | |
|---|------------|---|------------|---|--------|---|------------|---|------------|
| ① | b_{n-2} | ② | b_{n-1} | ③ | b_n | ④ | b_{n+1} | ⑤ | b_{n+2} |
| ⑥ | $2b_{n-2}$ | ⑦ | $2b_{n-1}$ | ⑧ | $2b_n$ | ⑨ | $2b_{n+1}$ | ⑩ | $2b_{n+2}$ |

解答 $r_k = Q_k P_k$ とおくと、条件から

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_{k+2} = r_{k+1} + r_k$$

したがって

$$r_3 = r_2 + r_1 = 2 + 1 = 3,$$

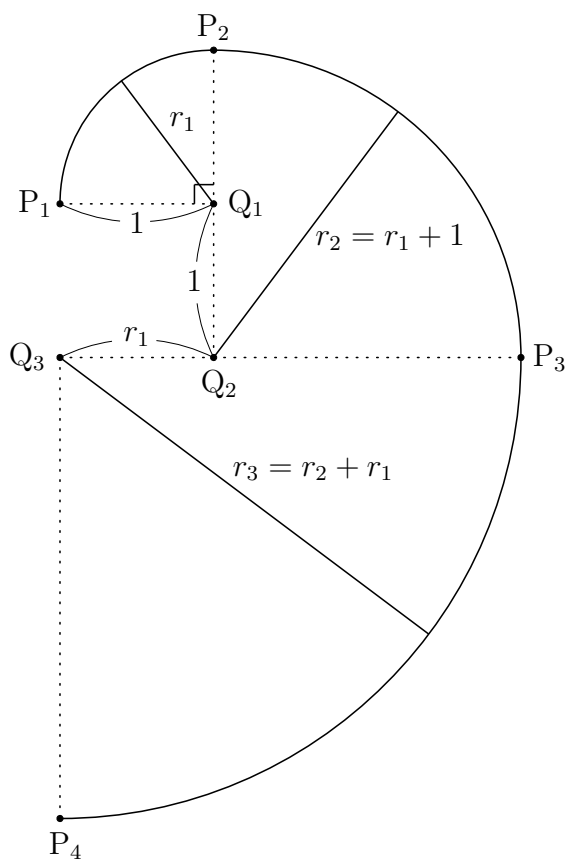
$$r_4 = r_3 + r_2 = 3 + 2 = 5$$

$$b_n = r_n \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{r_n}{2} \pi \text{ であるから}$$

$$b_3 = \frac{3}{2} \pi, \quad b_4 = \frac{5}{2} \pi \quad \dots (\text{キ}) \sim (\text{コ})$$

$r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$ の辺々に $\frac{\pi}{2}$ を掛けると

$$b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \quad \dots (\text{サ})$$



3 項間の漸化式 $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ から

$$b_{n+2} - b_{n+1} - b_n = 0 \quad (*)$$

漸化式 (*) の特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1 \quad \dots (\text{シ})(\text{ス})$$

とおくと, (*) は $b_{n+2} - (\alpha + \beta)b_{n+1} + \alpha\beta b_n = 0$

$$b_{n+2} - \beta b_{n+1} = \alpha(b_{n+1} - \beta b_n)$$

であるから, $c_n = b_{n+1} - \beta b_n$ とおくと $c_{n+1} = \alpha c_n$

数列 $\{c_n\}$ は公比が α (1 でない) の等比数列である. $\dots (\text{ソ})$

$$c_n = c_1 \alpha^{n-1}$$

$c_n = b_{n+1} - \beta b_n$ について, $r_1 = 1, r_2 = 2$ より $b_1 = \frac{\pi}{2}, b_2 = \pi$

$$c_1 = b_2 - \beta b_1 = \pi - (1 - \alpha) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\alpha + 1}{2} \pi$$

であるから

$$b_{n+1} - \beta b_n = \frac{(\alpha + 1)\alpha^{n-1}}{2} \pi \quad \dots \textcircled{1} \quad \dots (\text{タ}) \sim (\text{ツ})$$

上式の α と β を交換すると

$$b_{n+1} - \alpha b_n = \frac{(\beta + 1)\beta^{n-1}}{2} \pi \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② の辺々の差をとると

$$b_n = \frac{(\alpha + 1)\alpha^{n-1} - (\beta + 1)\beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

α, β は $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるから $\alpha + 1 = \alpha^2, \quad \beta + 1 = \beta^2$

$$b_n = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}$$

よって $\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (b_{k+2} - b_{k+1}) = b_{n+2} - b_2 = \mathbf{b_{n+2}} - \pi \quad \dots (\text{テ})$

参照 [隣接 3 項間の漸化式](#)

6.2.5 第3回 第2問

a を定数とする． x について方程式

$$4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 20 - a = 0$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

解答 $4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 20 - a = 0$ より

$$4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 20 = a$$

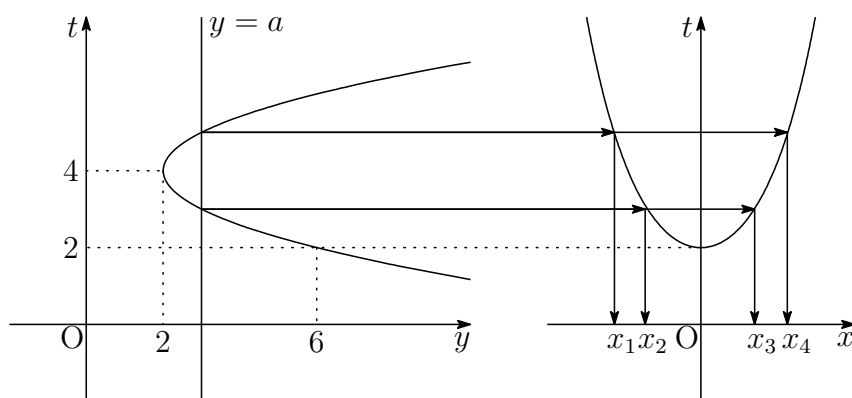
の実数解の個数は $y = 4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 20$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数である． $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと

$$y = t^2 - 8t + 18 = (t - 4)^2 + 2$$

これらのグラフの共有の個数により，求める実数解の個数は

$a < 2$ のとき	0 個
$a = 2$ のとき	2 個
$2 < a < 6$ のとき	4 個
$a = 6$ のとき	3 個
$6 < a$ のとき	2 個

(図は $2 < a < 6$ の場合)



参照 New Global Top 315

k を定数とする．関数 $y = 4^x + 4^{-x} - 2k(2^x + 2^{-x}) + 2$ について，次の問に答えよ．
(滋賀大 改)

- (1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく．このとき， t の最小値が 2 であることを示せ．
- (2) y の最小値を k を用いて表せ．
- (3) r を実数とする． $k = 5$ のとき， $y = r$ となるような x の個数が r の値によってどのように変化するか調べよ．

解答 (1) 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号が成立するとき $2^x = 2^{-x}$ ゆえに $2^{2x} = 1$ すなわち $x = 0$
よって， $x = 0$ のとき， t は最小値 2 をとる．

別解 $t = 2^x + 2^{-x} = (2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}})^2 + 2$

等号が成立するとき

$$2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2^x = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = 0$$

よって， $x = 0$ のとき， t は最小値 2 をとる．

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ ， $4^x + 4^{-x} + 2 = (2^x + 2^{-x})^2 = t^2$ より

$$y = t^2 - 2kt = (t - k)^2 - k^2$$

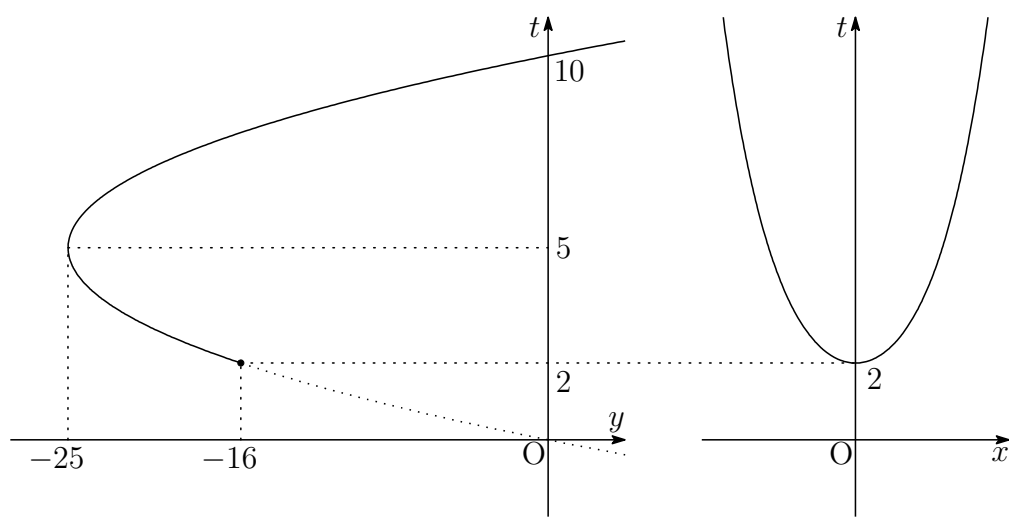
よって $k < 2$ のとき， $t = 2$ で最小値 $4 - 4k$

$2 \leq k$ のとき， $t = k$ で最小値 $-k^2$

(3) $k = 5$ のとき $y = (t - 5)^2 - 25$ ($t \geq 2$)

これと $t = 2^x + 2^{-x}$ のグラフから, $y = r$ となる x の個数は

$r < -25$ のとき	0 個
$r = -25, -16 < r$ のとき	2 個
$r = -16$ のとき	3 個
$-25 < r < -16$ のとき	4 個



熊大医医 2024 年 3

k を実数とし, $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1 + k$ とおく。曲線 $y = f(x) \left(0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \right)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

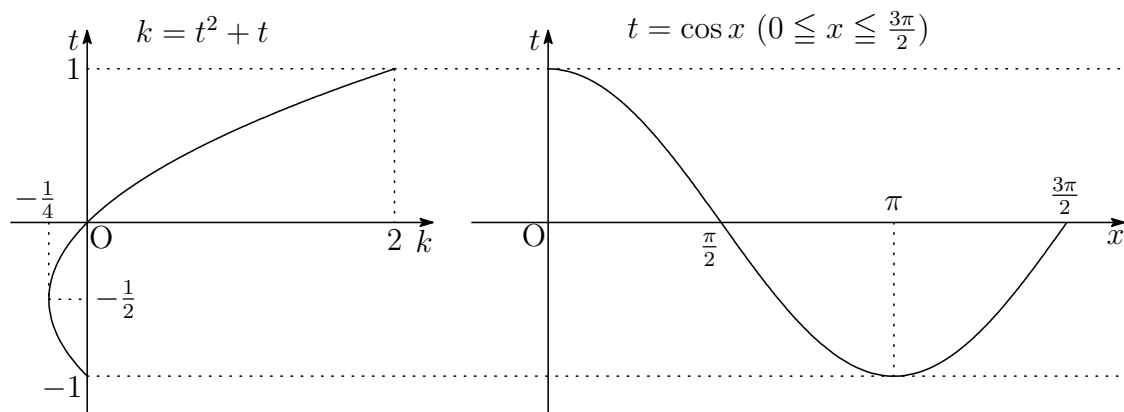
- (1) 曲線 C と x 軸の共有点の個数が k の値によってどのように変わるか調べよ。
- (2) (省略)

解答 (1) 曲線 C の x 軸との交点であるから, $f(x) = 0$ とし, $t = \cos x$ とおくと

$$k = t^2 + t, \quad t = \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \right)$$

下の 2 つのグラフから, 曲線 C と x 軸の共有点の個数は, 次のようになる。

$2 < k$ のとき	0 個
$0 < k \leq 2$ のとき	1 個
$k = 0$ のとき	3 個
$-\frac{1}{4} < k < 0$ のとき	4 個
$k = -\frac{1}{4}$ のとき	2 個
$k < -\frac{1}{4}$ のとき	0 個



6.2.6 第3回 第3問

k を実数とする． O を原点とする座標平面上に曲線 $C: y = x^3 - 4x^2 + 3x$ と直線 $\ell: y = kx$ がある．曲線 C と直線 ℓ が異なる三つの点で交わるとき，曲線 C と直線 ℓ で囲まれている二つの面積について考えよう．

(1) 曲線 C と直線 ℓ が異なる三つの点で交わるときの k の値の範囲は

$$\boxed{\text{アイ}} < k < \boxed{\text{ウ}}, \quad k > \boxed{\text{エ}}$$

である．

(2) $\boxed{\text{アイ}} < k < \boxed{\text{ウ}}$ とする．曲線 C と直線 ℓ で囲まれてできる二つの図形の面積が等しいときの k の値を求めよう．

曲線 C と直線 ℓ の交点 x 座標のうち， 0 でないものを α, β ($0 < \alpha < \beta$) とすると

$$\int_0^\beta x(x - \alpha)(x - \beta) dx = \boxed{\text{オ}}$$

より， $\beta = \boxed{\text{カ}}$ である．

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

① 2α

② $2\alpha - 1$

③ $2\alpha + 1$

④ 3α

⑤ $3\alpha - 1$

⑥ $3\alpha + 1$

また、 $\alpha = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ ， $k = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり，曲線 C と直線 ℓ の交点について， x 座標が α である点を A ， x 座標が β である点を B とすると，点 A は $\boxed{\text{シ}}$ である．

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

- ① 線分 OB の中点
- ② 線分 OB を $1:2$ に内分する点
- ③ 線分 OB を $2:1$ に内分する点
- ④ 線分 OB を $2:3$ に内分する点
- ⑤ 線分 OB を $3:2$ に内分する点

- (3) $k < 0$ とする. 曲線 $C: y = x^3 - 4x^2 + 3x$ と直線 $m: y = kx + 1$ が異なる三つの点で交わり, 曲線 C と直線 m で囲まれてできる二つの図形の面積が等しいときの k の値を求めたい.

曲線 C と直線 m の交点の x 座標を p, q, r ($p < q < r$) として

$$\int_p^r \{x^3 - 4x^2 + 3x - (kx + 1)\} dx = \boxed{\text{オ}}$$

を整理することで k の値を求めようとしたが, 計算が煩雑になったため, 別の方法を考えることにした.

曲線 C の式を $y = f(x)$ とし, 曲線 C を x 軸方向に $\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$, y 軸方向に $\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ だけ平行移動したグラフの式を $y = g(x)$ とする. $y = g(x)$ は原点 O に関して対称なグラフであり, $g(x) = x^3 - \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}x$ であることから, 曲線 m で囲まれてできる二つの図形の面積が等しいときの曲線 C と直線 m の三つの交点のうち, 一つの座標がわかる.

このことを利用すると, $k = -\frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ と求められる.

解答

(1) $C: y = x^3 - 4x^2 + 3x$ と $\ell: y = kx$ が接する, すなわち, 方程式

$$x^3 - 4x^2 + 3x = kx \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2 - 4x + 3 - k) = 0$$

が重解もつときの k の値を求める. $x^2 - 4x + 3 - k$ に注目すると, 次の2つの場合がある.

(i) $x^2 - 4x + 3 - k = 0$ が $x = 0$ を解にもつとき

$$3 - k = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = 3$$

(ii) $x^2 - 4x + 3 - k = 0$ が重解をもつとき

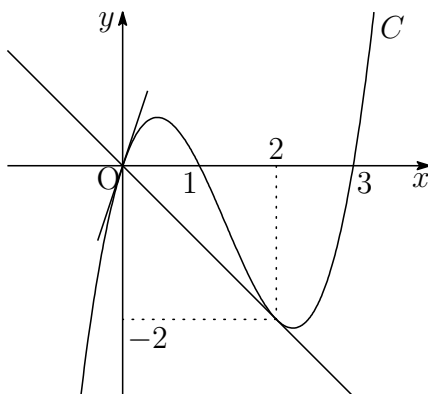
$$3 - k = 4 \quad \text{ゆえに} \quad k = -1$$

ℓ と C は接点の x 座標は

$$k = 3 \text{ のとき } x = 0, \quad k = -1 \text{ のとき } x = 2$$

よって, C と ℓ が異なる三つの点で交わるときの k の値の範囲は

$$-1 < k < 3, \quad k > 3 \quad \dots (\text{ア}) \sim (\text{エ})$$

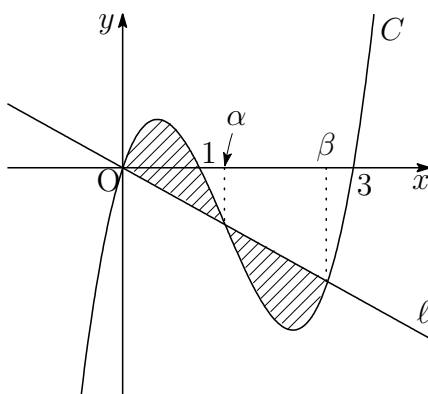


補足 $k = 3$ は, 曲線 C の原点における接線の傾きとして求めることもできる.

- (2) C 上の点 $(\alpha, \alpha^3 - 4\alpha^2 + 3\alpha)$ は変曲点であり, C は変曲点に関して対称であるから

$$\int_0^\beta x(x - \alpha)(x - \beta) dx = 0 \quad \dots(\text{オ})$$

より, $\beta = 2\alpha \quad \dots(\text{カ})$



3 次関数のグラフは変曲点に関して対称であり, 3 次関数のグラフと直線で囲まれる二つの図形の面積が等しいとき, その交点の 1 つは 3 次関数のグラフの変曲点である.

$y = x^3 - 4x^2 + 3x$ より

$$y' = 3x^2 - 8x + 3$$

$$y'' = 6x - 8$$

α は, $y'' = 0$ の解であるから

$$6\alpha - 8 = 0 \quad \text{よって} \quad \alpha = \frac{4}{3} \quad \dots(\text{キ})(\text{ク})$$

ℓ は C の変曲点 $\left(\frac{4}{3}, -\frac{20}{27}\right)$ を通るから

$$-\frac{20}{27} = k \cdot \frac{4}{3} \quad \text{これを解いて} \quad k = -\frac{5}{9} \quad \dots(\text{ケ}) \sim (\text{サ})$$

よって, 点 A は OB の中点である. $\dots(\text{シ})$

参照 定理 6

参考 積分公式

$$\int_0^\beta x(\beta - x) dx = \frac{1}{6}\beta^3, \quad \int_0^\beta x^2(\beta - x) dx = \frac{1}{12}\beta^4$$

を利用すると

$$\begin{aligned} \int_0^\beta x(x - \alpha)(x - \beta) dx &= - \int_0^\beta x^2(\beta - x) dx + \alpha \int_0^\beta x(\beta - x) dx \\ &= -\frac{1}{12}\beta^4 + \alpha \cdot \frac{1}{6}\beta^3 = \frac{1}{12}\beta^3(-\beta + 2\alpha) \end{aligned}$$

したがって $-\beta + 2\alpha = 0$ よって $\beta = 2\alpha \quad \dots (カ)$

積分公式

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (x - \alpha)(\beta - x) dx &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ \int_\alpha^\beta (x - \alpha)^2(\beta - x) dx &= \int_\alpha^\beta (x - \alpha)(\beta - x)^2 dx = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4 \end{aligned}$$

参照 積分公式³

$$\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^m(\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

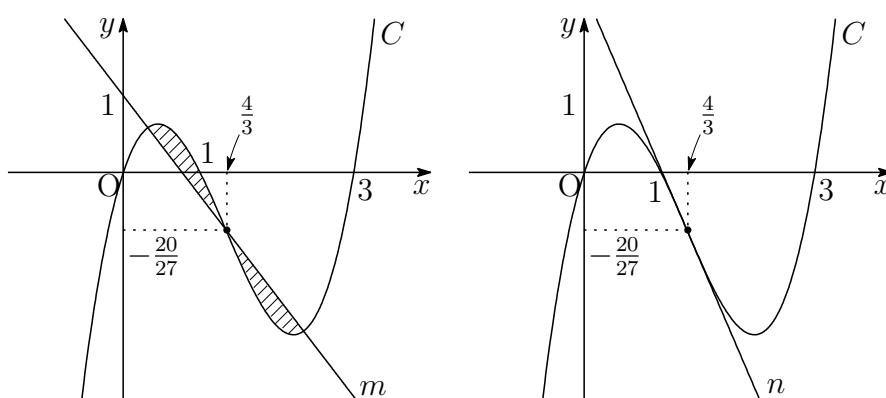
³http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010.kouki.pdf(p.4 を参照)

- (3) $C: y = x^3 - 4x^2 + 3x$ と直線 $m: y = kx + 1$ が異なる三つの点で交わり, C と m で囲まれてできる二つの図形が等しいとき, m は C の変曲点 $\left(\frac{4}{3}, -\frac{20}{27}\right)$ を通るから

$$-\frac{20}{27} = k \cdot \frac{4}{3} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = -\frac{47}{36} \quad \dots (\text{ニ}) \sim (\text{ノ})$$

C の変曲点における接線 n の傾きは $x = \frac{4}{3}$ を $y' = 3x^2 - 8x + 3$ に代入して

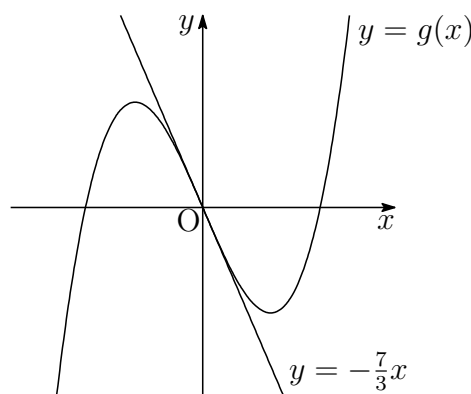
$$\text{接線 } n \text{ の傾き} = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{4}{3} + 3 = -\frac{7}{3}$$



C の変曲点を原点に平行移動させたグラフが $y = g(x)$ であり, このグラフが原点に関して対称であることから, $g(x)$ は奇関数であるから, その原点における接線の傾きが $-\frac{7}{3}$ であるから

$$g(x) = x^3 - \frac{7}{3}x \quad \dots (\text{ト})(\text{ナ})$$

C を x 軸方向に $-\frac{4}{3}$, y 軸方向に $\frac{20}{27}$ だけ平行移動したものが $y = g(x)$ である.
 $\dots (\text{ス}) \sim (\text{テ})$



解説 9 ページの定理 2 により, x^3 の係数が a である 3 次関数 $f(x)$ を $x = k$ を極として展開すると

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x - k) + \frac{1}{2}f''(k)(x - k)^2 + a(x - k)^3$$

点 $(k, f(k))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点であるとき, $f''(k) = 0$ であるから

$$y = f(k) + f'(k)(x - k) + a(x - k)^3$$

これを x 軸方向に $-k$, y 軸方向に $-f(k)$ だけ平行移動した曲線の方程式は

$$y = ax^3 + f'(k)x$$

本題の $g(x)$ は, 次式で与えられる.

$$g(x) = ax^3 + f'(k)x$$

$g'(x) = 3ax^2 + f'(k)$ より, $af'(k) \geq 0$ のとき, $g(x)$ は極値をもたない.

$af'(k) < 0$ のとき

$$s = \sqrt{-\frac{f'(k)}{3a}} \quad \text{ゆえに} \quad f'(k) = -3as^2$$

とおくと, $g(x) = ax^3 - 3as^2x$ より

$$g'(x) = 3a(x^2 - s^2) = 3a(x + s)(x - s)$$

$g(x)$ は $x = \pm s$ で極値をとり, 次式が成立する

$$g(s) = g(-2s) = -2as^3, \quad g(-s) = g(2s) = 2as^3, \quad g(\pm\sqrt{3}s) = 0$$

また, $f(x) = f(k) - 3as^2(x - k) + a(x - k)^3$ について

$$f(k + s) = f(k) - 2as^3, \quad f(k - s) = f(k) + 2as^3$$

となり, $f(x)$ の極値が a と変曲点における y 座標および接線の傾きによって与えられることが分かる. 上の 2 式から

$$\begin{aligned} f(k + s)f(k - s) &= f(k)^2 - 4a^2s^6 = f(k)^2 - 4a^2 \left\{ -\frac{f'(k)}{3a} \right\}^3 \\ &= f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} \end{aligned}$$

これから 11 ページの定理 4 が成立する.

6.2.7 第3回 第7問

- 〔1〕 図1のような道具(楕円コンパス)を考える. 図2は楕円コンパスの動きを座標平面上に表したものであり, 点Pは図1のハンドルを表している. ハンドルを回すと, 図1の点A, Bはそれぞれ左右, 上下に動き, これらが動く部分を図2ではそれぞれx軸, y軸の一部としている. ここで, 点Aは線分BP上にある. また, 線分ABの長さはつねに1であり, 線分BPの長さはつねに $a(>1)$ であるとする.

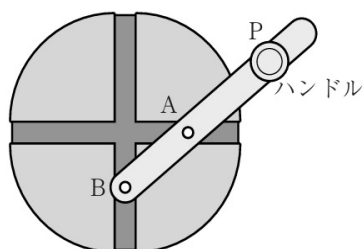


図1 楕円コンパス

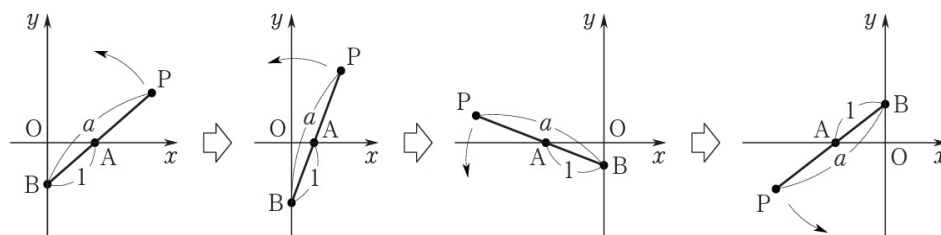


図2 楕円コンパスの動き方

s, t を正の実数とすると, 点Pの軌跡は $\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$ で表される曲線となる.

- (1) $a = 2$ のとき, $s = \boxed{\text{ア}}$, $t = \boxed{\text{イ}}$ である.

(2) 線分 BP の長さ a に対して、 $L_a = \frac{t}{s}$ とする.

- (i) b, c を $1 < b < c$ を満たす実数とする. a の値の範囲で変化させたとき、 L_a の変化に関する記述として、次の ㉠ ~ ㉥ のうち、正しいものは である.

の解答群

- ㉠ a の値を変化させても、 L_a は変化しない.
- ㉡ $L_b < L_c$ が成り立ち、 $L_a > 1$ となる a の値は存在する.
- ㉢ $L_b < L_c$ が成り立ち、 $L_a > 1$ となる a の値は存在しない.
- ㉣ $L_b > L_c$ が成り立ち、 $L_a > 1$ となる a の値は存在する.
- ㉤ $L_b > L_c$ が成り立ち、 $L_a > 1$ となる a の値は存在しない.
- ㉥ つねに $L_b < L_c$ が成り立つとも、つねに $L_b > L_c$ が成り立つとも限らない.

- (ii) この楕円コンパスで円をかくことができるか、すなわち、点 P の軌跡が円になるかに関する記述として、次の ㉠ ~ ㉤ のうち、正しいものは である.

の解答群

- ㉠ 円はかけない.
- ㉡ 任意の半径の円がかける.
- ㉢ ある円がかけ、その半径は 1 である.
- ㉣ ある円がかけ、その半径は 1 より大きい.
- ㉤ ある円がかけ、その半径は 1 より小さい.

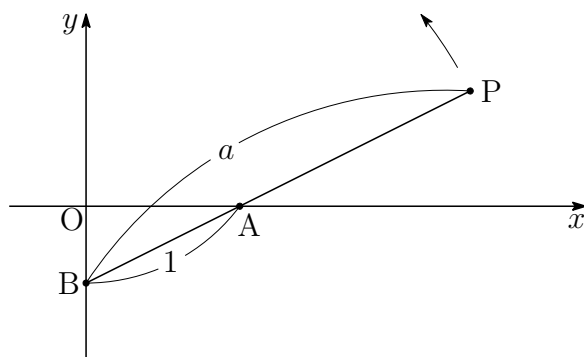
解答 (1) $A(\cos \theta, 0)$, $B(0, -\sin \theta)$, $P(x, y)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{BA} \\ (x, y) &= (0, -\sin \theta) + a(\cos \theta, \sin \theta) \\ &= (a \cos \theta, (a-1) \sin \theta)\end{aligned}$$

$$a > 1 \text{ に注意して } \frac{x}{a} = \cos \theta, \frac{y}{a-1} = \sin \theta$$

$s = a$, $t = a - 1$ であるから, $a = 2$ のとき

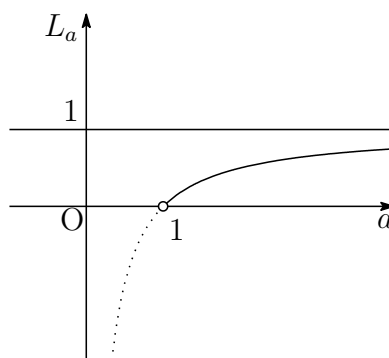
$$s = 2, \quad t = 1 \quad \dots (\text{ア})(\text{イ})$$



(2) (i) $s = a$, $t = a - 1$ より

$$L_a = \frac{t}{s} = \frac{a-1}{a} = -\frac{1}{a} + 1$$

$L_a = -\frac{1}{a} + 1$ のグラフは、次のようになる.



L_a は単調増加で, $0 < L_a < 1$.

$1 < b < c$ であるから ウ ... ㉔

$L_b < L_c$ が成り立ち, $L_a > 1$ となる a の値は存在しない.

(ii) (1) の結果から, P の軌跡は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a-1)^2} = 1$

$a \neq a - 1$ であるから, 円はかけない エ ... ㉕

[2] (1)

問題

複素数 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、 $w = \boxed{}$ で表される点 w が描く図形は、点 $1+i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円になった。 $\boxed{}$ に当てはまる式を求めよ。

太郎：円の半径を $\sqrt{2}$ 倍してから、 $1+i$ だけ平行移動すればよさそうだね。

花子：円を実軸方向に 1 だけ平行移動して、原点を通る円にしたあとに、中心が $1+i$ になるように回転拡大させてもいいね。

太郎さんの考え得られる式は $\boxed{\text{オ}}$ であり、花子さんの考え方で得られる式は $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ ， $\boxed{\text{カ}}$ の解答群

- | | | |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|
| ① $z + 1 + i$ | ② $2z + 1 + i$ | ③ $\sqrt{2}(z + 1 + i)$ |
| ④ $\sqrt{2}z + 1 + i$ | ⑤ $z + \sqrt{2}(1 + i)$ | ⑥ $(1 + i)(z + 1)$ |

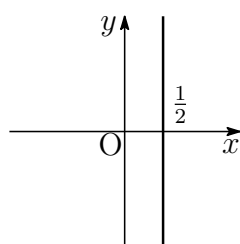
- (2) a を複素数とする. 点 a を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, $w = \frac{1}{z}$ で表される点 w が描く図形について考える. ただし, $z \neq 0$ とする.

(i) $a = 2$ のとき, 点 w が描く図形は中心 $\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$, 半径 $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ の円である.

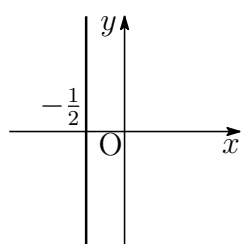
$a = i$ のとき, 点 w が描く図形は, サ の太線部のようになる.

サ については, 最も適当なものを, 次の ㉠ ~ ㉢ のうちから一つ選べ.

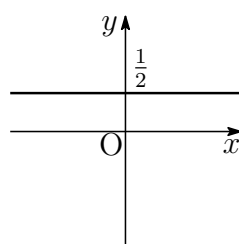
㉠



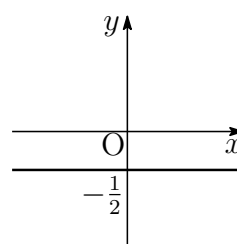
㉡



㉢



㉣



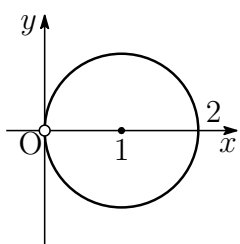
- (ii) a を実数とする. 点 w の描く図形と, 点 z の描く図形が一致するとき, すなわち, 点 w が点 a を中心とする半径 1 の円を描くとき,

$a = \text{シ}$, $\pm \sqrt{\text{ス}}$ である.

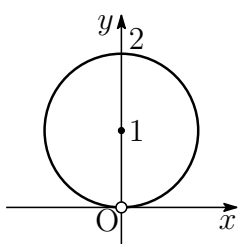
- (3) 点 z が, 原点を中心とする半径 1 の円周上で点 -1 を除く部分を動くとする. $w = \frac{1}{i(z+1)}$ で表される点 w が描く図形は, セ の太線部のようになる.

セ については, 最も適当なものを, 次の ㉠ ~ ㉢ のうちから一つ選べ.

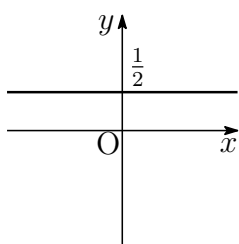
㉠



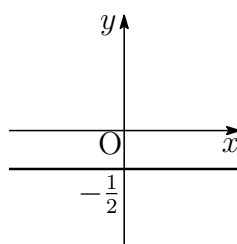
㉡



㉢

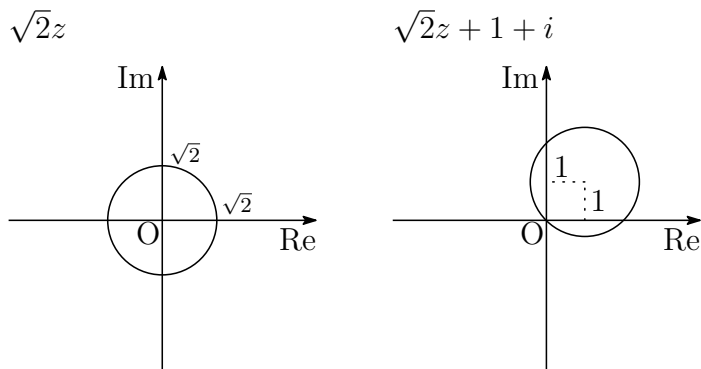


㉣

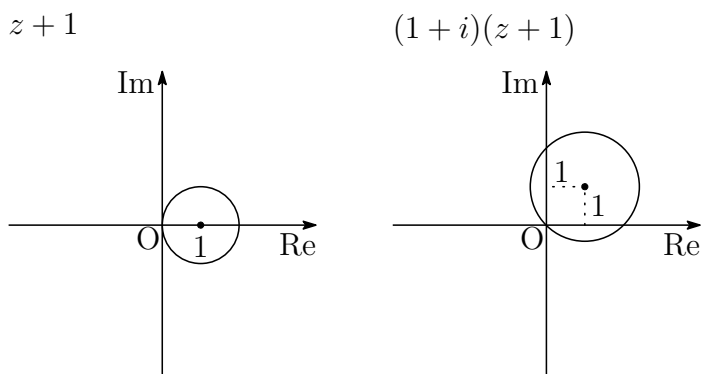


解答 (1)

太郎 ③



花子 ⑤



(2) (i) 定理 9(i) より, $a = 2$ のとき ... (キ) ~ (コ)

$$\text{中心 } \frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2} = \frac{2}{2^2 - 1^2} = \frac{2}{3}, \quad \text{半径 } \frac{r}{||a|^2 - r^2|} = \frac{1}{|2^2 - 1^2|} = \frac{1}{3}$$

定理 9(ii) より, $a = i$ のとき ... (サ)

w の描く図形は, 原点と点 $\frac{1}{i} = -i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(ii) 点 a (a は実数) を中心とする半径 $r = 1$ の円を反転してできた円が元の円と一致するから

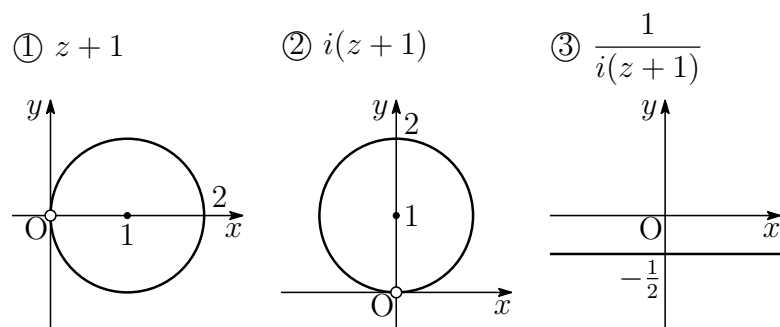
$$\frac{a}{a^2 - 1^2} = a, \quad \frac{1}{|a^2 - 1^2|} = 1$$

$$\text{したがって } a(a^2 - 2) = 0, \quad a^2 = 1 \pm 1$$

$$\text{よって } a = 0, \pm \sqrt{2} \quad \dots (\シ)(ス)$$

(3) 変換 $\frac{1}{i(z+1)}$ は ①～③ の順に行ったものである.

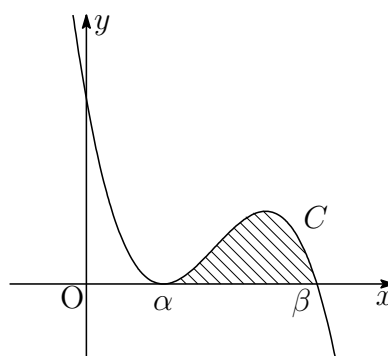
- ① $z+1$ は z を 1 だけ平行移動したもの
- ② $i(z+1)$ は $z+1$ を原点 O を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したもの
- ③ $\frac{1}{i(z+1)}$ は $i(z+1)$ を反転したもの



6.2.8 第4回 第3問

- (1) $\alpha < \beta$ とする. 右の図のように, x 座標が α の点で x 軸と接し, x 座標が β の点で x 軸と交わる3次関数のグラフを C とする. C と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし, S を α , β を用いた式で表そう.

$a > 0$ とし, C の方程式を $y = g(x)$ とする. このとき, a を用いて $f(x) = \boxed{\text{ア}}$ と表すことができる.



C を x 軸の正の方向に $-\alpha$ だけ平行移動させたグラフを C' とし, C' の方程式を $y = g(x)$ とする. このとき, a を用いて $g(x) = \boxed{\text{イ}}$ と表すことができる.

よって, C' と x 軸とで囲まれた図形の面積を S' とすると, $S = S'$ であるから

$$S' = \int_0^{\boxed{\text{ウ}}} g(x) dx$$

を計算することで

$$S = \frac{a(\beta - \alpha)^4}{12}$$

となる.

したがって

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{a(\beta - \alpha)^4}{12}$$

であり, この式は $\alpha \geq \beta$ のときも成り立つことがわかる.

ア の解答群

㊦ $a(x - \alpha)^2(x - \beta)$

㊩ $a(x - \alpha)(x - \beta)^2$

㊨ $-a(x - \alpha)^2(x - \beta)$

㊪ $-a(x - \alpha)(x - \beta)^2$

イ の解答群

㊦ $a(x - 2\alpha)^2(x - \alpha - \beta)$

㊩ $ax^2(x + \alpha - \beta)$

㊨ $a(x - 2\alpha)(x - \alpha - \beta)^2$

㊪ $ax(x + \alpha - \beta)^2$

㊫ $-a(x - 2\alpha)^2(x + \alpha - \beta)$

㊬ $-ax^2(x + \alpha - \beta)$

㊭ $-a(x - 2\alpha)(x - \alpha - \beta)^2$

㊮ $-ax(x + \alpha - \beta)^2$

ウ の解答群

㊦ $\alpha + \beta$

㊩ $\alpha - \beta$

㊨ $\beta - \alpha$

㊪ 2α

㊫ 2β

- (2) 3 次関数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ のグラフを C'' とし、 C'' 上の x 座標が t である点 P における接線を ℓ_1 とする。このとき、次の問いに答えよ。

(i) ℓ_1 の方程式は

$$y = \boxed{\text{エ}} \left(t^2 - \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}} \right) x - \boxed{\text{キ}} t^3 + \boxed{\text{ク}} t^2 + \boxed{\text{ケコ}}$$

である。

また、 ℓ_1 と C'' の共有点が P 以外に存在するとき、 P でない方の共有点の x 座標は

$$x = \boxed{\text{サシ}} t + \boxed{\text{ス}}$$

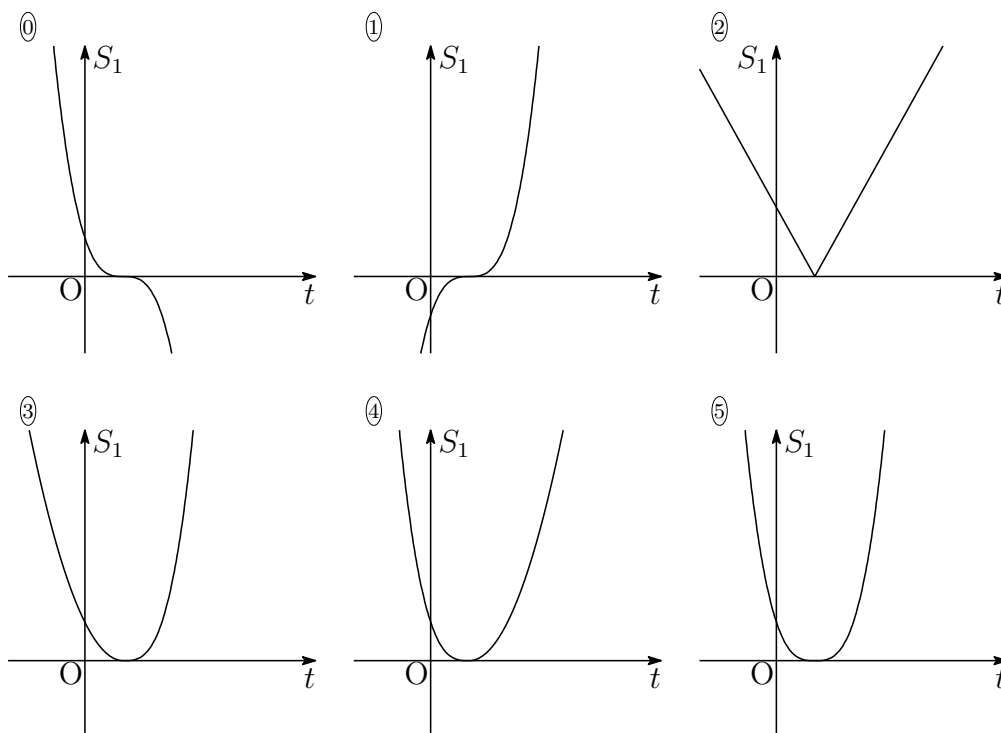
であるから、 ℓ_1 と C'' とで囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{セソ}} \left(\boxed{\text{タ}} - t \right)^{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

そして、 ℓ_1 と C'' の共有点が P 以外に存在しないのは $t = \boxed{\text{テ}}$ のときであるから、 $t = \boxed{\text{テ}}$ のときの S_1 の値を 0 としたときの t と S_1 の関係を表にしたグラフは $\boxed{\text{ト}}$ である。

$\boxed{\text{ト}}$ については、最も適当なものを、次の ① ~ ⑤ のうちから一つ選べ。



(ii) l_1 と傾きが等しい C'' の接線が l_1 以外に存在するとき、その接点の x 座標は $x = \boxed{\text{ナ}}t + \boxed{\text{ニ}}$ である.

そして、 l_1 と傾きが等しい C'' の接線が l_1 以外に存在するのは $t \neq \boxed{\text{テ}}$ のときであり、このような接線は l_1 以外に 1 本だけ存在することがわかる.

$t \neq \boxed{\text{テ}}$ のとき、 l_1 と傾きが等しい C'' の接線のうち、 l_1 でない方の接線を l_2 とする.

l_1 と C'' とで囲まれた図形の面積を S_1 、 l_2 と C'' とで囲まれた図形の面積を S_2 とすると、 $S_1 + S_2 = \frac{8}{3}$ のとき、 l_1 の傾きは $\frac{\boxed{\text{ヌネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である.

解答

(1) C の増減から, x^3 の係数は $-a < 0$

C は x 軸と $x = \alpha$ で接し, $x = \beta$ で交わるから

$$f(x) = -a(x - \alpha)^2(x - \beta) \quad \cdots (\text{ア}) \textcircled{2}$$

$y = f(x)$ を x 軸方向に $-\alpha$ だけ平行移動した ($x \rightarrow x + \alpha$ に置き換える)

グラフの方程式が $y = g(x)$ であるから

$$g(x) = -ax^2(x + \alpha - \beta) \quad \cdots (\text{イ}) \textcircled{3}$$

よって, C' と x 軸で囲まれた図形の面積を S' とすると, $S = S'$ であるから

$$S' = \int_0^{\beta-\alpha} g(x) dx \quad \cdots (\text{ウ}) \textcircled{4}$$

を計算することで, 定理 7 より

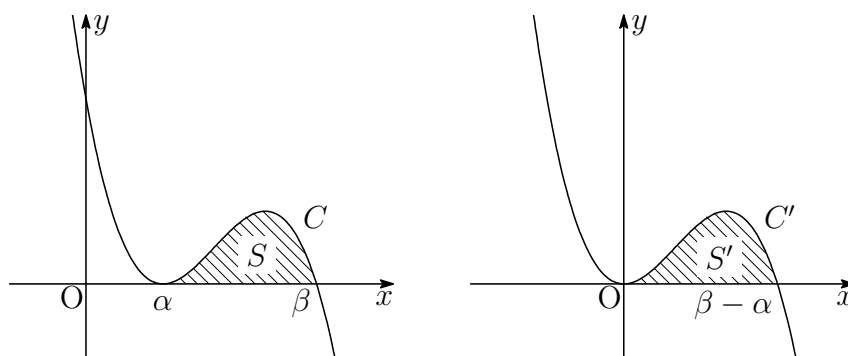
$$\begin{aligned} S &= -a \int_0^{\beta-\alpha} x^2 \{x + \alpha - \beta\} dx \\ &= a \int_0^{\beta-\alpha} x^2 \{(\beta - \alpha) - x\} dx = \frac{a(\beta - \alpha)^4}{12} \end{aligned}$$

となる.

したがって

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{a(\beta - \alpha)^4}{12}$$

であり, この式は $\alpha \geq \beta$ のときも成り立つことがわかる.



補足 定理 7 を用いると

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = a \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 (\beta - x) dx = \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^4$$

- (2) (i) $C'' : y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ より $y' = 3x^2 - 6x - 9$
 C'' 上の x 座標が t である点 P における接線 ℓ_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 6t - 9)(x - t) + t^3 - 3t^2 - 9t + 11 \\ &= \mathbf{3(t^2 - 2t - 3)x - 2t^3 + 3t^2 + 11} \quad \dots (\text{エ}) \sim (\text{コ}) \end{aligned}$$

$y'' = 6x - 6$ について, $y'' = 0$ とすると

$$x = 1$$

定理 6 より

$$t = 1 + s \quad \text{ゆえに} \quad s = t - 1$$

P でない方の共有点の x 座標は

$$x = 1 - 2s = 1 - 2(t - 1) = \mathbf{-2t + 3} \quad \dots (\text{サ}) \sim (\text{ス})$$

ℓ_1 と C'' とで囲まれた図形の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{27}{4}s^4 = \frac{27}{4}(t - 1)^4 = \frac{\mathbf{27(1 - t)^4}}{4} \quad \dots (\text{セ}) \sim (\text{ツ})$$

そして, ℓ_1 と C'' の共有点が P 以外に存在しないのは t が変曲点の x 座標である, すなわち, $\mathbf{t = 1}$ のときである. $\dots (\text{テ})$

別解 接点 P の x 座標 t ともう一方の共有点の x 座標 $-2t + 3$ が等しいとき

$$t = -2t + 3 \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{t = 1}$$

t と S_1 の関係式を表したグラフは

$$y = \frac{27}{4}(t - 1)^4 \quad \dots \textcircled{\text{五}}$$

(ii) ℓ_1 と傾きが等しい C'' の接線が ℓ_1 以外に存在するとき、その接点の x 座標は

$$x = 1 - s = 1 - (t - 1) = -t + 2 \quad \dots (\text{ナ}) \sim (\text{ニ})$$

である.

そして、 ℓ_1 と傾きが等しい C'' の接線が ℓ_1 以外に存在するのは $t \neq 1$ のときであり、このような接線は ℓ_1 以外に 1 本だけ存在することがわかる.

$t \neq 1$ のとき、 ℓ_1 と傾きが等しい C'' の接線のうち、 ℓ_1 でない方の接線を ℓ_2 とする.

ℓ_1 と C'' とで囲まれた図形の面積を S_1 、 ℓ_2 と C'' とで囲まれた図形の面積を S_2 とすると、 $S_1 + S_2 = \frac{8}{3}$ のとき、 $S_1 = S_2 = \frac{4}{3}$ であるから、定理 6 より

$$S_1 = S_2 = \frac{27}{4}s^4 = \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad s^2 = \frac{4}{9}$$

$h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ とおくと、 $h'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ より

$$h'(1) = 3 - 6 - 9 = -12$$

よって、求める ℓ_1 の傾きは

$$h'(1) + 3 \cdot 1 \cdot s^2 = -12 + 3 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{32}{3}$$

6.2.9 第4回 第4問

太郎さんと花子さんは、次のように定められた数列 $\{a_n\}$ に関する【問題】について話している.

$$a_{n+1} = 5a_n - 5 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

二人の会話を読んで、下の問いに答えよ.

【問題】

$a_1 = 7$ のとき、任意の自然数 n について、 a_{2n} は 4 の倍数であることを示せ.

太郎：数列 $\{a_n\}$ の漸化式は、前に授業で学習したタイプだから、一般項を求めることができるね.

花子：まず、 m を定数として $a_{n+1} = 3a_n - 5$ を

$$a_{n+1} - m = 3(a_n - m)$$

の形に変形するといいいんだよね.

(1) m の値、および $a_1 = 7$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$m = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad a_n = \frac{\boxed{\text{ウ}}^{n+1} + \boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である.

太郎：一般項が分かったから、それを用いて【問題】の証明ができるかな.

花子： $a_2, a_4, a_6, \dots$ についてすべて成り立つことを示すんだよね.

太郎：自然数 n についての証明だから、数学的帰納法を利用できるんじゃないかな.

太郎さんの証明の構想

$A_n = a_{2n}$ とおくと

$$A_1 = \boxed{\text{カキ}}$$

である. また、 A_n が 4 の倍数であると仮定して $A_n = 4p$ (p は整数) とおくと、 $\boxed{\text{ウ}}^{2n+1} = \boxed{\text{ク}}p - \boxed{\text{ケ}}$ より

$$A_{n+1} = \boxed{\text{コサ}}p - \boxed{\text{シス}}$$

ゆえに、 A_n が 4 の倍数ならば、 A_{n+1} も 4 の倍数になることより、数学的帰納法によって【問題】は示される.

花子さんの証明の構想

$A_n = a_{2n}$ とおくと

$$A_1 = \boxed{\text{カキ}}$$

である。また

$$A_{n+1} = \boxed{\text{セ}} A_n - \boxed{\text{ソタ}}$$

ゆえに、 A_n が 4 の倍数ならば、 A_{n+1} も 4 の倍数になることより、数学的帰納法によって【問題】は示される。

- (3) a_n が 13 の倍数ならば、 a_{n+q} も 13 の倍数となるような自然数 q のうち、最小のものは $q = \boxed{\text{チ}}$ である。この q に対して、 $a_1 = \boxed{\text{ツ}}$ のとき、任意の自然数 n について a_{qn} は 13 の倍数になる。

$\boxed{\text{ツ}}$ の選択肢

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

⑥ 12

解答

(1) 漸化式 $a_{n+1} = 3a_n - 5$ の特性方程式は

$$m = 3m - 5 \quad \text{これを解いて} \quad m = \frac{5}{2} \quad \dots(\text{ア})(\text{イ})$$

これと漸化式から $a_{n+1} - m = 3(a_n - m)$

$$a_{n+1} - \frac{5}{2} = 3 \left(a_n - \frac{5}{2} \right)$$

数列 $\left\{ a_n - \frac{5}{2} \right\}$ は初項 $a_1 - \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$, 公比 3 の等比数列であるから

$$a_n - \frac{5}{2} = \frac{9}{2} \cdot 3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{3^{n+1} + 5}{2} \quad \dots(\text{ウ}) \sim (\text{オ})$$

(2) 太郎さんの証明の構想

$A_n = a_{2n}$ とおくと

$$A_1 = a_2 = \frac{3^3 + 5}{2} = 16 \quad \dots(\text{オ})(\text{カ})$$

である. また, A_n が 4 の倍数であると仮定して $A_n = 4p$ (p は整数) とおくと,

$$\frac{3^{2n+1} + 5}{2} = 4p \quad \text{ゆえに} \quad 3^{2n+1} = 8p - 5 \quad \dots(\text{ク})(\text{ケ})$$

したがって

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{3^{2n+3} + 5}{2} = \frac{3^2 \cdot 3^{2n+1} + 5}{2} \\ &= \frac{9(8p - 5) + 5}{2} = 36p - 20 \quad \dots(\text{コ}) \sim (\text{ス}) \end{aligned}$$

花子さんの証明の構想

$A_n = a_{2n}$ とおくと

$$A_1 = a_2 = \frac{3^3 + 5}{2} = 16 \quad \dots(\text{オ})(\text{カ})$$

である. また

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= a_{2n+2} = 3a_{2n+1} - 5 = 3(3a_{2n} - 5) - 5 \\ &= 9a_{2n} - 20 = 9A_n - 20 \quad \dots(\text{セ}) \sim (\text{タ}) \end{aligned}$$

ゆえに, A_n が 4 の倍数ならば, A_{n+1} も 4 の倍数になることより, 数学的帰納法によって【問題】は示される.

(3) $a_{n+1} = 3a_n - 5$ より

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 5 = 3(3a_n - 5) - 5 = 9a_n - 20,$$

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 5 = 3(9a_n - 20) - 5 = 27a_n - 65$$

$27 \equiv 1, 65 \equiv 0 \pmod{13}$ より

$$a_{n+3} \equiv a_n \pmod{13} \quad \text{ゆえに} \quad q = \mathbf{3} \quad \cdots (\text{チ})$$

$a_3 = 9a_1 - 20 \equiv 0 \pmod{13}$ であるから

$$9a_1 \equiv 7 \quad \text{ゆえに} \quad 27a_1 \equiv 21 \pmod{13}$$

したがって $a_1 \equiv 8 \pmod{13}$ 選択肢から $a_1 = \mathbf{8} \quad \cdots (\text{ツ})$ ㉓

6.2.10 第4回 第6問

k を $2 < k < 8$ を満たす実数とし、 $OA = 3$, $OB = 5$, $AB = k$ である. $\angle A$ の内角の二等分線と辺 OB の交点を P , $\angle O$ の内角の二等分線の交点を Q とする.

$\angle B$ の外角の二等分線と直線 OA の交点が存在しないのは、この2直線が平行のときで、 $k = \boxed{\text{ア}}$ のときである.

$k \neq \boxed{\text{ア}}$ のとき、 $\angle B$ の外角の二等分線と直線 OA の交点を R とする.

(1) $k = 4$ のとき

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \overrightarrow{OB}$$

であることから

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \overrightarrow{OA} - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}} \overrightarrow{OB}$$

である.

また、 $\angle B$ の外角の二等分線上の点を R' とおくと、 t を実数として

$$\overrightarrow{OR'} = t \left(\boxed{\text{ス}} \right)$$

と表すことができるから

$$\overrightarrow{OR} = \boxed{\text{セ}} \overrightarrow{OA}$$

である.

よって、 $\overrightarrow{PR} = \boxed{\text{ソ}} \overrightarrow{PQ}$ より、 $\boxed{\text{タ}}$.

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

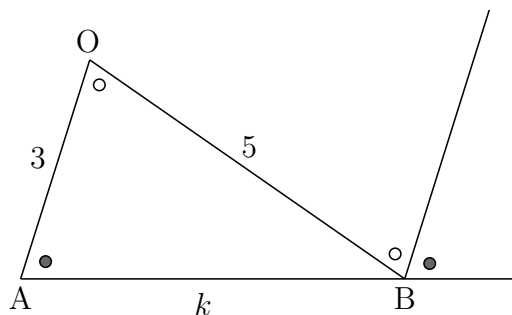
- | | | |
|---|---|---|
| ① $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BO}$ | ① $\frac{\overrightarrow{BA}}{4} - \frac{\overrightarrow{BO}}{5}$ | ② $\frac{\overrightarrow{BA}}{5} - \frac{\overrightarrow{BO}}{4}$ |
| ③ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO}$ | ④ $\frac{\overrightarrow{BA}}{4} + \frac{\overrightarrow{BO}}{5}$ | ⑤ $\frac{\overrightarrow{BA}}{5} + \frac{\overrightarrow{BO}}{4}$ |

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

- ① 3点 P , Q , R は一直線上にあり、 P は線分 QR 上の点である
- ② 3点 P , Q , R は一直線上にあり、 Q は線分 PR 上の点である
- ③ 3点 P , Q , R は一直線上にあり、 R は線分 PQ 上の点である
- ④ 3点 P , Q , R は一直線上にない

解答 $\angle B$ の外角の二等分線と直線 OA が交点をもたない，すなわち，平行であるとき，下の図から

$$\angle BAO = \angle BOA \quad \text{ゆえに} \quad AB = OB \quad \text{よって} \quad k = 5 \quad \dots(\text{ア})$$



(1) $k = 4$ のとき，下の図から

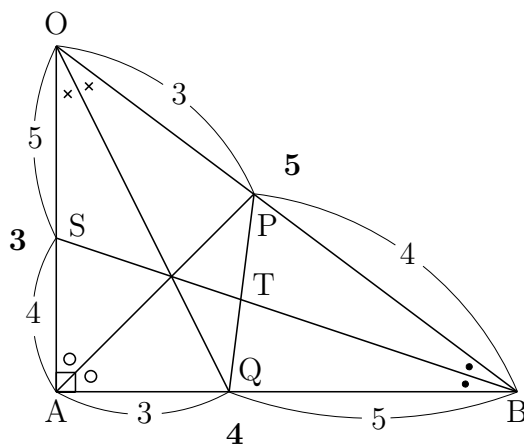
$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB} \quad \dots(\text{イ}) \sim (\text{キ})$$

であることから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \left(\frac{5}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB} \right) - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{5}{8}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{56}\overrightarrow{OB} \quad \dots(\text{ク}) \sim (\text{シ}) \end{aligned}$$

また， $\angle B$ の外角の二等分線上の点を R' とおくとき， t を実数として

$$\overrightarrow{BR'} = t \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} \right) = t \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{4} - \frac{\overrightarrow{BO}}{5} \right) \quad \dots(\text{ス}) \textcircled{1}$$



これより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR'} &= \overrightarrow{OB} + t \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{4} - \frac{\overrightarrow{BO}}{5} \right) \\ &= \overrightarrow{OB} + t \left(\frac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{4} + \frac{\overrightarrow{BO}}{5} \right) \\ &= \frac{t}{4} \overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{t}{20} \right) \overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

R' は直線 OA 上の点であるから

$$1 - \frac{t}{20} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 20$$

このとき、点 R' は点 R と一致するから

$$\overrightarrow{OR} = 5\overrightarrow{OA} \quad \dots(\text{セ})$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = 5\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} \\ &= 8 \left(\frac{5}{8}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{56}\overrightarrow{OB} \right) = 8\overrightarrow{PQ} \quad \dots(\text{ソ})\end{aligned}$$

3 点 P, Q, R は一直線上にあり, Q は線分 PR 上の点である. $\dots(\text{タ})$ ①

別解 20 ページの調和点列の性質 (1) により, 4 点 O, S, A, R は調和点列であり, 点 R は線分 OA を 5 : 4 に外分する点であるから

$$\overrightarrow{OR} = 5\overrightarrow{OA}$$

$BP : BQ = \frac{4}{7} \cdot 5 : \frac{5}{8} \cdot 4 = 8 : 7$ より, 直線 BS と直線 PQ の交点を T とすると

$$PT : TQ = 8 : 7$$

4 点 P, T, Q, R も調和点列である. 点 R は線分 PQ を 8 : 7 に外分する点であるから (18 ページの定理 8 を参照)

$$\overrightarrow{PR} = 8\overrightarrow{PQ}$$

解説 $\triangle OAB$ について, $a = OA$, $b = OB$, $k = AB$, $\angle OAB$, $\angle ABO$, $\angle BOA$ の内角の二等分線を AP , BS , OQ とし, PQ と BS の交点を T とする. $\angle ABC$ の外角の二等分線を ℓ とし, ℓ と 2 直線 OA , PQ の交点をそれぞれ R , R' とする. 4 点 O , S , A , R は調和点列であるから, 定理 8 より, 4 点 P , T , Q , R' も調和点列である. $OS : SA = a : k$ であるから, R は線分 OA を $a : k$ に外分する点

$$\overrightarrow{OR} = \frac{b}{b-k} \overrightarrow{OA}$$

下の図から

$$\overrightarrow{OP} = \frac{a}{k+a} \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b}$$

したがって

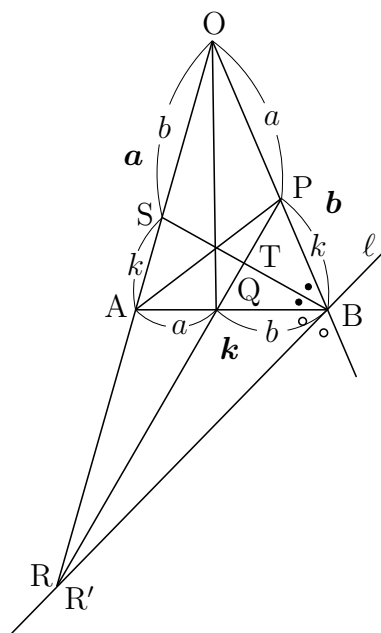
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{OA} + \frac{a(k-b)}{(a+b)(k+a)} \overrightarrow{OB} \quad (*)$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \frac{b}{b-k} \overrightarrow{OA} - \frac{a}{k+a} \overrightarrow{OB} \quad (**)$$

$$BP : BQ = \frac{k}{k+a} a : \frac{b}{a+b} c = a+b : k+a \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CR'} &= \frac{-(k+a)\overrightarrow{OP} + (a+b)\overrightarrow{OQ}}{(a+b) - (a+k)} \\ &= \frac{1}{b-k} \left\{ -(k+a) \cdot \frac{a}{k+a} \overrightarrow{OB} + (a+b) \cdot \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b} \right\} = \frac{b}{b-k} \overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

よって, R と R' は一致する.



(2) $k \neq$ ア のとき, (1) と同様に考えると

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}} \overrightarrow{OA} - \frac{\text{テ}}{\text{ナ}} \frac{(\text{ト} - k)}{(k + \text{ニ})} \overrightarrow{OB}$$

である.

次の ① ~ ④ のうち, 正しいものは ヒ と フ である.

ヒ, フ の解答群 (解答の順序は問わない)

- ① $k = \frac{7}{3}$ のとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあり, P は線分 QR 上の点である.
- ② $k = \frac{9}{2}$ のとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあり, Q は線分 PR 上の点である.
- ③ $k = \frac{13}{2}$ のとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあり, P は線分 QR 上の点である.
- ④ $k = \frac{22}{3}$ のとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあり, Q は線分 PR 上の点である.
- ⑤ 3 点 P, Q, R が一直線上にない k の値が存在する.

解答 132 ページの (*), (**) に $a = 3$, $b = 5$ を代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \frac{5}{8}\overrightarrow{OA} - \frac{3(5-k)}{8(k+3)}\overrightarrow{OB} \quad \dots (\text{チ}) \sim (\text{ニ}) \\ \overrightarrow{PR} &= \frac{5}{5-k}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{k+3}\overrightarrow{OB} \quad \dots (\text{ヌ}) \sim (\text{ハ})\end{aligned}$$

R は, OA を $5:k$ に外分する点で, 3 点 P, Q, R は同一直線上にある. $k < 5$ のとき, R は PQ の延長上にあり, $k > 5$ のとき, R は QP の延長上にある.

よって, 正しい解答群は ①, ②

6.2.11 第5回 第4問

太郎さんと花子さんは、数列の漸化式に関する問題について話している。

問題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n + 3^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1)

太郎：授業では

$$A_{n+1} = xA_n + y \quad (x, y \text{ は定数で, } x \neq 0, 1) \quad \dots (*)$$

の形の漸化式を学習したけれど、問題の漸化式は右辺に 3^n があるから、そのままでは学習したことを使えないね。

花子：問題の a_n, a_{n+1} の係数がともに1なら、階差数列を利用できるね。与えられた漸化式をうまく変形して階差数列の形にできないか、考えてみるよ。

太郎：その他にも、置き換えを利用して、与えられた漸化式を(*)の形に変形できれば、数列の一般項を求められるよね。うまく置き換えることができないか、考えてみるよ。

花子さんの方針

与えられた漸化式の両辺を $\boxed{\text{ア}}^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{\boxed{\text{ア}}^{n+1}} = \frac{a_n}{\boxed{\text{ア}}^n} + \frac{3^n}{\boxed{\text{ア}}^{n+1}}$$

となるから、数列 $\left\{ \frac{a_n}{\boxed{\text{ア}}^n} \right\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{\boxed{\text{ア}}^{n+1}} - \frac{a_n}{\boxed{\text{ア}}^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めると、数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ ，公比 $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ の等比数列になることを利用する。

花子さんの方針

与えられ漸化式の両辺を $\boxed{\text{キ}}^{n+1}$ で割り、数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = \frac{a_n}{\boxed{\text{キ}}^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めると

$$c_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} c_n + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

となるから、まず数列 $\{c_n\}$ の一般項を求める。

(2)

花子：置き換えを利用して、求めやすい数列の一般項をまず求めることで、元の数列の一般項 a_n が求められるね。

太郎：でも、(*) を解いたときのように、与えられた漸化式を直接変形できないかな。

定数 s を用いて、与えられた漸化式は

$$\boxed{\text{シ}} = 5 \left(\boxed{\text{ス}} \right)$$

のように変形することができる。 $d_n = \boxed{\text{ス}}$ とおくと、数列 $\{d_n\}$ は公比が5の等比数列になる。

これより、定数 s の値を求めると

$$s = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる。

$\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ の解答群

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| ① $a_n + s \cdot 3^n$ | ① $a_n + s \cdot 3^n + 5$ |
| ② $a_n + s \cdot 3^{n+1}$ | ③ $a_{n+1} + s \cdot 3^n$ |
| ④ $a_{n+1} + s \cdot 3^{n+1}$ | ⑤ $a_{n+1} + (s + 1) \cdot 3^{n+1}$ |
| ⑥ $a_{n+1} + s \cdot 3^{n+1} + 5$ | |

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\boxed{\text{タ}}^n - \boxed{\text{チ}}^n}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である.

(4) 次のように定められた数列 $\{p_n\}$ がある.

$$p_1 = 0, \quad p_{n+1} = 3p_n + 4^n + 4n$$

数列 $\{p_n\}$ の一般項を, 置き換えを利用して求めてみよう.

$q_n = \boxed{\text{テ}}$ とおくと, 与えられた漸化式は

$$q_{n+1} = 3q_n$$

のように変形することができる.

これより, 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めると

$$p_n = \boxed{\text{ト}}^n - \boxed{\text{ナ}}^{n-1} - \boxed{\text{ニ}}n - \boxed{\text{ヌ}}$$

となる.

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

- ① $p_n + x \cdot 4^n$ (x は定数)
- ② $p_n + x \cdot 4^n + 3$ (x は定数)
- ③ $p_n + x \cdot 4^n + yn$ (x, y は定数)
- ④ $p_n + x \cdot 4^n + yn + z$ (x, y, z は定数)

解答 (1) 花子さんの方針

与えられた漸化式の両辺を 5^{n+1} で割ると …(ア)

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + \frac{3^n}{5^{n+1}}$$

となるから、数列 $\left\{\frac{a_n}{5^n}\right\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{a_n}{5^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めると

$$b_n = \frac{3}{25} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

となり、数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{3}{25}$ 、公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列になる。…(イ)～(カ)

太郎さんの方針

与えられた漸化式を 3^{n+1} で割ると …(キ)

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{5a_n}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}$$

よって、 $c_n = \frac{a_n}{3^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定めると

$$c_{n+1} = \frac{5}{3}c_n + \frac{1}{3} \quad \dots(\text{ク}) \sim (\text{サ})$$

となる。

(2) 定数 s を用いて

$$s \cdot 3^{n+1} = 5s \cdot 3^n - 3^n \tag{A}$$

とおき、これを $a_{n+1} = 5a_n + 3^n$ の辺々に加えると

$$a_{n+1} + s \cdot 3^{n+1} = 5(a_n + s \cdot 3^n) \quad \dots(\text{シ}) \textcircled{4} \quad (\text{ス}) \textcircled{0}$$

(A) より、定数 s の値を求めると

$$s \cdot 3 = 5s - 1 \quad \text{これを解いて} \quad s = \frac{1}{2} \quad \dots(\text{セ})(\text{ソ})$$

- (3) (2) の結果から、数列 $\left\{a_n + \frac{1}{2} \cdot 3^n\right\}$ は、初項 $a_1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2}$ 、公比 5 の等比数列であるから

$$a_n + \frac{1}{2} \cdot 3^n = \frac{5}{2} \cdot 5^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{5^n - 3^n}{2} \quad \dots (\text{タ}) \sim (\text{ツ})$$

- (4) 定数 x, y, z を用いて

$$x \cdot 4^{n+1} + y(n+1) + z = 3(x \cdot 4^n + yn + z) - 4^n - 4n \quad (\text{B})$$

とおき、これを $p_{n+1} = 3p_n + 4^n + 4n$ の辺々に加えると

$$p_{n+1} + x \cdot 4^{n+1} + y(n+1) + z = 3(p_n + x \cdot 4^n + yn + z)$$

$q_n = p_n + x \cdot 4^n + yn + z$ とおくと、与えられた漸化式は $\dots (\text{テ})$ ③

$$q_{n+1} = 3q_n$$

のように変形することができる.

(B) を n について整理すると

$$(x+1) \cdot 4^n + (-2y+4)n + y - 2z = 0$$

上式は、 n に関する恒等式であるから

$$x = -1, y = 2, z = 1$$

したがって、数列 $\{p_n - 4^n + 2n + 1\}$ は初項 $p_1 - 4^1 + 2 \cdot 1 + 1 = -1$ 、公比 3 の等比数列であるから

$$p_n - 4^n + 2n + 1 = -1 \cdot 3^{n-1}$$

これより、数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めると

$$p_n = 4^n - 3^{n-1} - 2n - 1 \quad \dots (\text{ト}) \sim (\text{ヌ})$$

6.2.12 第6回 第3問

太郎さんと花子さんは、面積に関する問題について話している。

問題

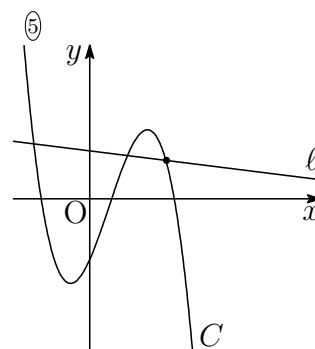
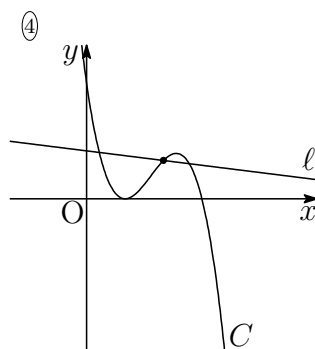
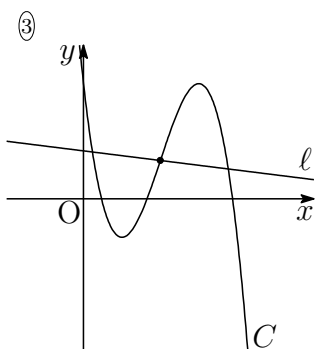
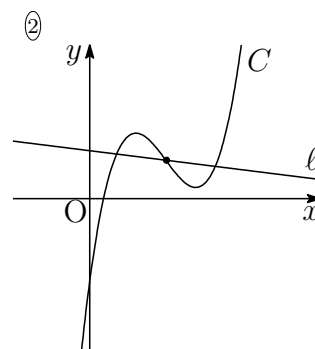
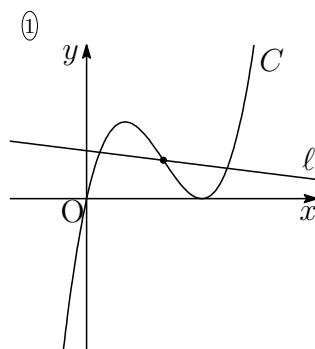
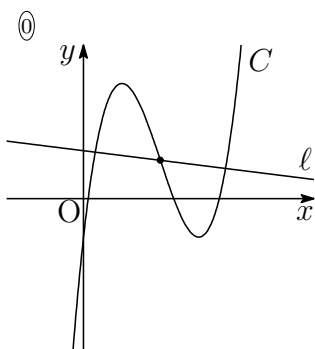
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ とし、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。また、曲線 C 上の点 $(2, 1)$ を M とし、 M を通る直線 ℓ と C が M 以外の2点 P, Q で交わっている。ただし、 P の x 座標は Q の x 座標よりも小さいとする。 C と線分 PM で囲まれた部分の面積を S_1 、 C と線分 QM で囲まれた部分の面積を S_2 とするとき、 S_1 と S_2 の大小関係を求めよ。

花子：まずは、曲線 C と直線 ℓ を図に表してみるとよさそうだね。

太郎：関数 $f(x)$ の増減表をつくれば、曲線 C と直線 ℓ を図に表すことができるね。

(1) 曲線 C と直線 ℓ を図に表したものは ア である。

ア については、最も適当なものを、次の ① ~ ⑤ のうちから一つ選べ。



太郎：あとは、直線 ℓ の式を求め、点 P と点 Q の x 座標を求めれば、 S_1 , S_2 も求めることができそうだね。直線 ℓ の傾きを m とすると、 ℓ は点 M を通るので、 ℓ の式は $y = m(x - 2) + 1$ で表すことができるね。

花子：でも、 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ と $y = m(x - 2) + 1$ を連立して解くことで点 P と点 Q の x 座標を求め、さらに S_1 , S_2 を求めようとする計算が大変になるね。点 M を原点 O に移すような平行移動によって、曲線 C と直線 ℓ を平行移動させれば、計算量を減らせるんじゃないかな。

- (2) まず、直線 C と直線 ℓ が点 M 以外の 2 点 P, Q で交わるとき、 m のとり得る値の範囲を求めよう。

$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ と $y = m(x - 2) + 1$ から y を消去し、整理すると

$$(x - \boxed{\text{イ}})(x^2 - \boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}} - m) = 0$$

となる。これより、 m のとり得る値の範囲を求めると

$$m > \boxed{\text{オカ}}$$

である。

- (3) そして、曲線 C を、点 M を原点 O に移すような平行移動によって移送させたあとの曲線の方程式を求めると

$$y = x^3 - \boxed{\text{キ}}x$$

である。

太郎：直線 $y = x^3 - \boxed{\text{キ}}x$ と，直線 ℓ を平行移動させた直線の式を利用して， S_1 と S_2 をそれぞれ m を用いた式で表すことができたよ。
花子：これで S_1 と S_2 の関係もわかるね。

- (4) 点 M を原点に移すような平行移動により，点 P, Q はそれぞれ P', Q' に移ったとする．点 P' の x 座標は $-\sqrt{m + \boxed{\text{ク}}}$ ，点 Q の x 座標は $\sqrt{m + \boxed{\text{ケ}}}$ である．これより， S_1 を求めると

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \left(m + \boxed{\text{シ}} \right)^{\boxed{\text{ス}}}$$

であり， S_2 も同様に求めると， S_1 と S_2 の大小関係について， $\boxed{\text{セ}}$ ことがわかる．

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

- ㊐ m の値によらず，つねに $S_1 < S_2$ が成り立つ．
- ㊑ m の値によらず，つねに $S_1 > S_2$ が成り立つ．
- ㊒ m の値によらず，つねに $S_1 = S_2$ が成り立つ．
- ㊓ m の値によらず， S_1 と S_2 の大小関係は変化する．

(5) $g(x) = x^3 - \boxed{\text{キ}}x$ とおく. このとき

$$g(-x) = \boxed{\text{ソ}}$$

より, 曲線 $y = g(x)$ は $\boxed{\text{タ}}$ であることがわかる.

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

- ① $g(x)$ ② $-g(x)$ ③ $-g(-x)$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

- ① x 軸に関して対称 ② y 軸に関して対称 ③ 原点に関して対称

(6) $m > \boxed{\text{オカ}}$ とする. 曲線 C 上に, 接線の傾きが直線 ℓ の傾きと等しくなるような 2 点 A, B をとり, 点 A における接線 ℓ_1 と C との交点を C , 点 B における接線 ℓ_2 と C との交点を D とする. ただし, A の x 座標は B の x 座標よりも小さいとする. また, ℓ_2 上の x 座標が 2 である点を E とする. このとき

$$\frac{EB}{DE} = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり, $\triangle ADE$ と四角形 $ADBC$ の面積比 $\frac{\triangle ADE}{\text{四角形 } ADBC}$ を求めると, 直線 ℓ の傾きによらず, つねに

$$\frac{\triangle ADE}{\text{四角形 } ADBC} = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である.

解答

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

(2) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ より $f''(x) = 6x - 12$

変曲点の x 座標は, $f''(x) = 0$ を解いて $x = 2$

$$f(2) = 1, \quad f'(2) = -3, \quad f''(2) = 0$$

$f(x)$ を $x = 2$ を極として展開すると (9 ページの定理 2 を参照)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + (x-2)^3 \\ &= 1 - 3(x-2) + (x-2)^3 \end{aligned}$$

$y = f(x)$ と $y = m(x-2) + 1$ から y を消去すると

$$1 - 3(x-2) + (x-2)^3 = m(x-2) + 1$$

したがって $(x-2)\{(x-2)^2 - 3 - m\} = 0$

$$(x-2)(x^2 - 4x + 1 - m) = 0 \quad \cdots (\text{イ}) \sim (\text{エ})$$

M 以外に 2 点 P, Q で交わる時

$$-3 - m < 0 \quad \text{すなわち} \quad m > -3 \quad \cdots (\text{オ})(\text{カ})$$

(3) $y = f(2) + f'(2)(x-2) + (x-2)^3$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に $-f(2)$ だけ平行移動した曲線の方程式は

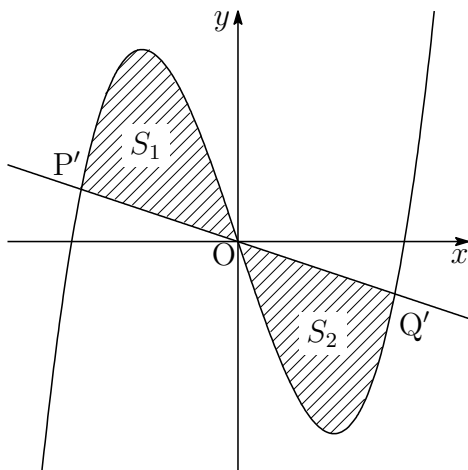
$$y = f'(2)x + x^3 \quad \text{すなわち} \quad y = x^3 - 3x \quad \cdots (\text{キ})$$

(4) $y = x^3 - 3x$ と $y = mx$ の2式から y を消去すると

$$x^3 - 3x = mx \quad \text{ゆえに} \quad x = 0, \pm \sqrt{m+3}$$

したがって

点 P' の x 座標は $-\sqrt{m+3}$, 点 Q' の x 座標は $\sqrt{m+3}$... (ク)(ケ)



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\sqrt{m+3}}^0 \{(x^3 - 3x) - mx\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(m+3)x^2 \right]_{-\sqrt{m+3}}^0 \\ &= \frac{1}{4}(m+3)^2 \quad \dots (\コ) \sim (\シ) \end{aligned}$$

曲線および直線が原点に関して対称であることから

m の値によらず, つねに $S_1 = S_2$ が成り立つ ... (セ) ②

(5) $g(x) = x^3 - 3x$ とおくと

$$g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -g(x) \quad \dots (\ソ) \text{ ①}$$

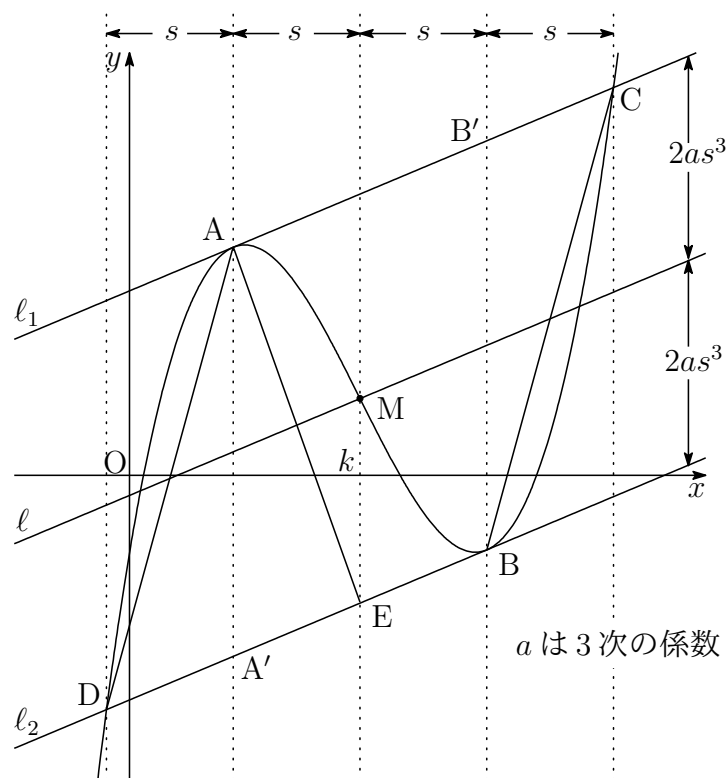
よって, 曲線 $y = g(x)$ は原点に関して対称であることがわかる. ... (タ) ②

(6) (3 次関数のグラフと接線を参照)

$$\frac{EB}{DE} = \frac{1}{2} \quad \dots (\text{チ})(\text{ツ})$$

下の図から ($a = 1, k = 2$)

$$\frac{\triangle ADE}{\text{四角形 ADBC}} = \frac{4as^4}{12as^4} = \frac{1}{3} \quad \dots (\text{テ})(\text{ト})$$



解説 3 次関数 $f(x)$ の 3 次の係数を a とし、変曲点の x 座標を k とし、 $x = k$ を極として $f(x)$ を展開すると

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x - k) + a(x - k)^3, \quad f'(x) = f'(k) + 3a(x - k)^2$$

$A(k - s, f(k - s)), B(k + s, f(k + s))$ とすると

$$f'(k \pm s) = f'(k) + 3as^2,$$

$$f(k \pm s) = f(k) \pm \{f'(k)s + as^3\} \quad (\text{複号同順})$$

したがって

$$\ell_1 : y = \{f'(k) + 3a(x - k)^2\}(x - k) + f(k) + 2as^3$$

$$\ell : y = \{f'(k) + 3a(x - k)^2\}(x - k) + f(k)$$

$$\ell_2 : y = \{f'(k) + 3a(x - k)^2\}(x - k) + f(k) - 2as^3$$

6.2.13 第6回 第4問

太郎さんと花子さんは、数列の漸化式に関する問題 A、問題 B について話している.

(1)

問題 A

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

太郎：授業では、等差数列，等比数列，階差数列や

$$A_{n+1} = xA_n + y \quad (x, y \text{ は定数で, } x \neq 0, 1) \quad \dots (*)$$

の形をした漸化式を習ったけれど，右辺が分数式だから，そのままでは学習したことを使えないね.

花子：問題 A の右辺の分子は a_n の項だけだから，両辺の逆数をとったらどうだろう.

太郎：でも， $a_n = 0$ のときがあると逆数はとれないよ.

花子： $a_n = 0$ とならないことを証明できるよ.

任意の自然数 n について、 $a_n \neq 0$ が成り立つことは、次のような花子さんの証明の構想により証明できる。

花子さんの証明の構想

$a_n > 0$ であることは、 $a_n \neq 0$ であるための ア。

任意の自然数 n について $a_n > 0$ であることは、 $n = k$ ($k \geq 1$) のときの成立を仮定して、 $n = k + 1$ のときも成り立つことを示せば、イ により、証明できる。

ア の解答群

- ① 必要条件であるが、十分ではない
- ① 十分条件であるが、必要条件でない
- ② 必要十分条件である
- ③ 必要十分条件でも十分条件でもない

イ の解答群

- | | |
|---------|----------|
| ① 組立除法 | ① 背理法 |
| ② 対偶証明法 | ③ 数学的帰納法 |

数列 $\{p_n\}$ を $p_n = \frac{1}{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定めると

$$p_{n+1} = \boxed{\text{ウ}} p_n + \boxed{\text{エ}}$$

であり, $(*)$ の形になる. このとき

$$p_{n+1} + \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}} (p_n + \boxed{\text{オ}})$$

であるから, 数列 $\{p_n + \boxed{\text{オ}}\}$ は $\boxed{\text{キ}}$ ことがわかる.

よって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{コ}}}$$

である.

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

- ① すべての項が同じ値をとる数列である
- ② 公差が0でない等差数列である
- ③ 公比が1より大きい等比数列である
- ④ 公比が1より小さい等比数列である
- ⑤ 等差数列でも等比数列でもない

解答 (ア) ① (イ) ③

花子さんの証明の構想

$a_n > 0$ であることは, $a_n \neq 0$ であるための十分条件であるが, 必要条件ではない.

任意の自然数 n について $a_n > 0$ であることは, $n = k$ ($k \geq 1$) のときの成立を仮定して, $n = k + 1$ のときも成り立つことを示せば, 数学的帰納法により, 証明できる.

証明 $(*) \ a_n > 0$

[1] $n = 1$ のとき, $a_1 = 1 > 0$ より, $(*)$ は成立する.

[2] $n = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{a_k + 2} > 0$$

よって, $n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, $(*)$ は成立する. 証終

数列 $\{p_n\}$ を $p_n = \frac{1}{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定めると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{a_n} = 1 + \frac{2}{a_n} \quad \text{ゆえに } p_{n+1} = 2p_n + 1 \quad \dots (\text{ウ})(\text{エ})$$

であり, $(*)$ の形になる. このとき

$$p_{n+1} + 1 = 2(p_n + 1) \quad \dots (\text{オ})(\text{カ})$$

であるから, 数列 $\{p_n + 1\}$ は公比が 2 の等比数列であることがわかる. (キ) ②

$$p_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ より}$$

$$p_n + 1 = (p_1 + 1) \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \text{ゆえに } p_n = 2^n - 1$$

よって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \quad \dots (\text{ク}) \sim (\text{コ})$$

である.

別解 (分数漸化式を参照)

特性方程式 $x = \frac{x}{x+2}$ を解くと $x = 0, -1$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}, \quad a_{n+1} + 1 = \frac{2(a_n + 1)}{a_n + 2}$$

上の2式から

$$\frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1}} = \frac{2(a_n + 1)}{a_n}$$

$\left\{ \frac{a_n + 1}{a_n} \right\}$ は初項 $\frac{a_1 + 1}{a_1} = 2$, 公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{a_n + 1}{a_n} = 2 \cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

(2)

問題 B

次のように定められた数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = 3b_n + 10n - 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

太郎：これも (*) の形ではないね.

花子：階差数列をとることで，(*) の形にできないかな.

太郎：(*) の式変形の考え方を応用できないか，考えてみるよ.

花子さんの方針

数列 $\{b_n\}$ の階差数列を， $q_n = b_{n+1} - b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定めると

$$q_{n+1} = \boxed{\text{サ}} q_n + \boxed{\text{シス}}$$

となり，数列 $\{q_n\}$ の一般項が

$$q_n = \boxed{\text{セソ}} \cdot \boxed{\text{タ}}^{n-1} - \boxed{\text{チ}}$$

となることを用いる.

太郎さんの方針

数列 $\{r_n\}$ を， $r_n = b_n + \boxed{\text{ツ}} n + \boxed{\text{テ}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定めると

$$r_{n+1} = 3r_n$$

となり，数列 $\{r_n\}$ は公比 3 の等比数列になることを用いる.

数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{ト}} \cdot \boxed{\text{ナ}}^{n-1} - \boxed{\text{ニ}} n - \boxed{\text{ヌ}}$$

である.

解答 花子さんの方針

数列 $\{b_n\}$ の階差数列を, $q_n = b_{n+1} - b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定めると

$$b_{n+1} = 3b_n + 10n - 3$$

$$b_{n+2} = 3b_{n+1} + 10(n+1) - 3$$

上の第2式から第1式の差をとると

$$b_{n+2} - b_{n+1} = 3(b_{n+1} - b_n) + 10$$

$$q_{n+1} = 3q_n + 10 \quad \dots (\text{サ}) \sim (\text{ス})$$

$$q_{n+1} + 5 = 3(q_n + 5)$$

$$b_2 = 3b_1 + 10 \cdot 1 - 3 = 10, \quad q_1 = b_2 - b_1 = 10 - 1 = 9$$

$\{q_n + 5\}$ は初項 $q_1 + 5 = 14$, 公比3の等比数列であるから

$$q_n + 5 = 14 \cdot 3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad q_n = 14 \cdot 3^{n-1} - 5 \quad \dots (\text{セ}) \sim (\text{チ})$$

$b_{n+1} - b_n = 14 \cdot 3^{n-1} - 5$ より, $n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (14 \cdot 3^{k-1} - 5)$$

$$b_n - b_1 = \frac{14(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} - 5(n-1)$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから

$$b_n = 7(3^{n-1} - 1) - 5(n-1) + 1 = 7 \cdot 3^{n-1} - 5n - 1$$

太郎さんの方針

漸化式

$$b_{n+1} = 3b_n + 10n - 3 \quad (\text{A})$$

から, $f(n) = xn + y$ とおき (x, y は定数),

$$f(n+1) = 3f(n) + 10n - 3 \quad (\text{B})$$

とすると

$$x(n+1) + y = 3(xn + y) + 10n - 3$$

$$xn + x + y = (3x + 10)n + 3y - 3$$

上式は, n に関する恒等式であるから

$$x = 3x + 10, \quad x + y = 3y - 3 \quad \text{ゆえに} \quad x = -5, \quad y = -1$$

したがって $f(n) = -5n - 1$

(A), (B) の辺々の差をとると

$$b_{n+1} - f(n+1) = 3\{b_n - f(n)\}$$

$r_n = b_n - f(n)$ とおくと $r_n = b_n + 5n + 1 \quad \dots (\text{ツ})(\text{テ})$

$$r_{n+1} = 3r_n$$

となり, $\{r_n\}$ は初項 $r_1 = b_1 - f(1) = 7$, 公比 3 の等比数列であるから

$$b_n + 5n + 1 = 7 \cdot 3^{n-1}$$

よって $b_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 5n - 1 \quad \dots (\text{ト}) \sim (\text{ヌ})$

(3) 次のように定められた数列 $\{c_n\}$ がある.

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{n^2 c_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めると

$$c_n = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}} \cdot \boxed{\text{ハ}}^{n-1} - n \boxed{\text{ヒ}} - \boxed{\text{フ}} n - \boxed{\text{ヘ}}}$$

である.

解答 $c_1 > 0$, $c_k > 0$ のとき, 漸化式より $c_{k+1} > 0$ となるから, 数学的帰納法により, すべての自然数 n について, $c_n > 0$

与えられた漸化式より

$$\frac{1}{c_{n+1}} = \frac{2}{c_n} + n^2 \quad (\text{A})$$

$f(n) = xn^2 + yn + z$ とおき (x, y, z は定数),

$$f(n+1) = 2f(n) + n^2 \quad (\text{B})$$

とすると

$$\begin{aligned} x(n+1)^2 + y(n+1) + z &= 2xn^2 + 2yn + 2z + n^2 \\ xn^2 + (2x+y)n + x + y + z &= (2x+1)n^2 + 2yn + 2z \end{aligned}$$

上式は, n に関する恒等式であるから

$$x = 2x + 1, \quad 2x + y = 2y, \quad x + y + z = 2z$$

これを解いて $x = -1, y = -2, z = -3$

したがって $f(n) = -n^2 - 2n - 3$

(A), (B) の辺々の差をとると

$$\frac{1}{c_{n+1}} - f(n+1) = 2 \left\{ \frac{1}{c_n} - f(n) \right\}$$

となり, $\left\{ \frac{1}{c_n} - f(n) \right\}$ は初項 $\frac{1}{c_1} - f(1) = 7$, 公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{1}{c_n} + n^2 + 2n + 3 = 7 \cdot 2^{n-1}$$

よって $c_n = \frac{1}{7 \cdot 2^{n-1} - n^2 - 2n - 3} \quad \cdots (\text{ネ}) \sim (\text{ヘ})$

6.2.14 第6回 第6問

次の定理について考えよう.

定理

$\triangle OAB$ において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 辺 AB の中点を M とおくとき

$$OM^2 - AM^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

が成り立つ.

(1) この定理は次のようにして証明できる.

証明の方針

M は辺 AB の中点であるので, $\overrightarrow{OM}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{OM} = \boxed{\text{ア}}$$

と表せるから, $\overrightarrow{AM}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{AM} = \boxed{\text{イ}}$$

と表せる.

$|\overrightarrow{OM}|^2 - |\overrightarrow{AM}|^2$ を計算すると, 定理が成り立つことを証明できる.

ア

イ

の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① $\vec{a} + \vec{b}$

② $\vec{a} - \vec{b}$

③ $\vec{b} - \vec{a}$

④ $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

⑤ $\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$

⑥ $\frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$

⑦ $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$

⑧ $\frac{\vec{a} - \vec{b}}{3}$

⑨ $\frac{\vec{b} - \vec{a}}{3}$

解答 M は辺 AB の中点であるので、 $\overrightarrow{OM}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad \dots (\text{ア}) \textcircled{3}$$

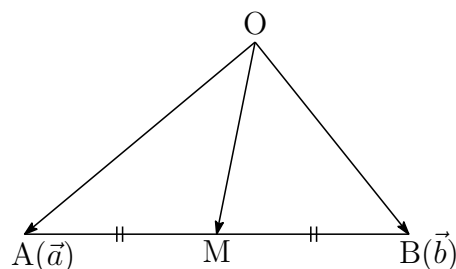
と表せるから、 $\overrightarrow{AM}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{2} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} \quad \dots (\text{イ}) \textcircled{5}$$

と表せる.

$|\overrightarrow{OM}|^2 - |\overrightarrow{AM}|^2$ を計算すると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OM}|^2 - |\overrightarrow{AM}|^2 &= \left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right|^2 - \left| \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) - \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$



別解 M は辺 AB の中点であるから

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{AM} \\ \vec{b} &= \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM}) \\ &= |\overrightarrow{OM}|^2 - |\overrightarrow{AM}|^2 = OM^2 - AM^2 \end{aligned}$$

(2) $\triangle OAB$ が鋭角三角形の場合に，定理の図形的な意味について考えてみよう．

点 B から直線 OA に垂線 BH を下すと， $OH = \boxed{\text{ウ}}$ であるから，内積の定義より

$$(a) \quad \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{エ}}}$$

$\angle BHA = \frac{\pi}{2}$ より， AB を直径とする $\triangle ABH$ の外接円を C とすると，辺 AB の中点 M は円 C の中心になり

$$OM^2 - AM^2 = (OM - AM)(OM + AM)$$

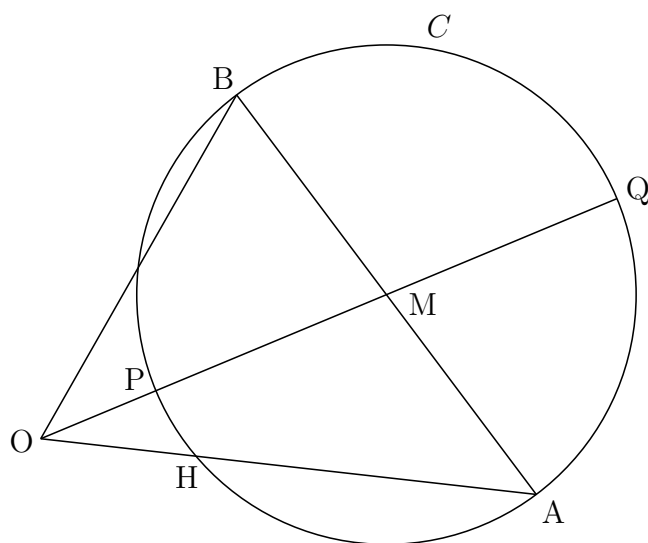
より，直線 OM と円 C の交点のうち，右の図のように O に近い方を P ，遠い方を Q とおくと

$$(b) \quad \underline{OM^2 - AM^2 = \boxed{\text{オ}}}$$

よって，定理より

$$(c) \quad \underline{\triangle OQA \sim \boxed{\text{カ}}}$$

が成り立つ．



ウ の解答群

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| ① $ \vec{a} \cos \angle OAB$ | ② $ \vec{a} \cos \angle OBA$ | ③ $ \vec{a} \cos \angle AOB$ |
| ④ $ \vec{b} \cos \angle OAB$ | ⑤ $ \vec{b} \cos \angle OBA$ | ⑥ $ \vec{b} \cos \angle AOB$ |

エ の解答群

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① $OB \cdot OH$ | ② $OB \cdot BH$ | ③ $OA \cdot OH$ |
| ④ $OA \cdot BH$ | ⑤ $OH \cdot BH$ | ⑥ $BH \cdot HA$ |

オ の解答群

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① $OP \cdot OM$ | ② $OP \cdot PM$ | ③ $OM \cdot OQ$ |
| ④ $OP \cdot OQ$ | ⑤ $OQ \cdot QM$ | ⑥ $PM \cdot QM$ |

カ の解答群

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| ① $\triangle OQB$ | ② $\triangle OMH$ | ③ $\triangle OHP$ |
| ④ $\triangle PQA$ | ⑤ $\triangle PQB$ | ⑥ $\triangle HBM$ |

解答 下の図から

$$OH = OB \cos \angle AOB = |\vec{b}| \cos \angle AOB \quad \dots (\text{ウ}) \textcircled{5}$$

内積の定義から

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB = OA \cdot OH \quad \dots (\text{エ}) \textcircled{2}$$

$\angle BHA = \frac{\pi}{2}$ より, AB を直径とする $\triangle ABH$ の外接円を C とすると, 辺 AB の中点 M は円 C の中心になり

$$OM^2 - AM^2 = (OM - AM)(OM + AM)$$

より, 直線 OM と円 C の交点のうち, 右の図のように O に近い方を P, 遠い方を Q とおくと, $AM = PM = MQ$ より

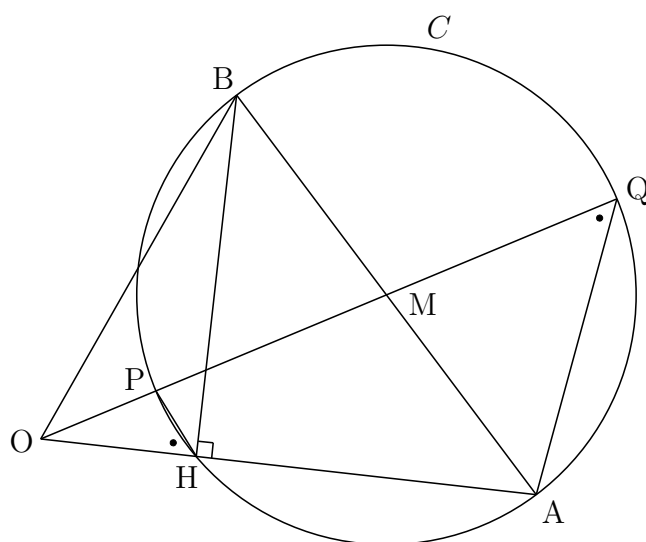
$$OM^2 - AM^2 = (OM - PM)(OM + MQ) = \mathbf{OP \cdot OQ} \quad \dots (\text{オ}) \textcircled{3}$$

よって, 定理より

$$OP \cdot OQ = OH \cdot OA \quad \text{ゆえに} \quad OQ : OA = OH : OP$$

また, $\angle QOA = \angle HOP$ であるから

$$\triangle OQA \sim \triangle OHP \quad \dots (\text{カ}) \textcircled{2}$$



別解 四角形 PHAQ は円に内接するから $\angle OHP = \angle OQA$

また, $\angle QOA = \angle HOP$ であるから $\triangle OQA \sim \triangle OHP$

(3) $\triangle OAB$ が $\frac{\pi}{2} < \angle AOB < \pi$ の鈍角三角形の場合に, (2) の下線部 (a)~(c) について考察すると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{キ}}, \quad OM^2 - AM^2 = \boxed{\text{ク}}$$

であるから

$$\triangle OQA \sim \boxed{\text{ケ}}$$

が成り立つ.

キ

- | | | |
|----------|----------|----------|
| ① OB·OH | ④ OB·BH | ⑦ OA·OH |
| ② OA·BH | ⑤ OH·BH | ⑧ BH·HA |
| ③ -OB·OH | ⑥ -OB·BH | ⑨ -OA·OH |
| ④ -OA·BH | ⑦ -OH·BH | ⑩ -BH·HA |

ク

- | | | |
|----------|----------|----------|
| ① OP·OM | ④ OP·PM | ⑦ OM·OQ |
| ② OP·OQ | ⑤ OQ·QM | ⑧ PM·QM |
| ③ -OP·OM | ⑥ -OP·PM | ⑨ -OM·OQ |
| ④ -OP·OQ | ⑦ -OQ·QM | ⑩ -PM·QM |

ケ

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| ① $\triangle OQB$ | ④ $\triangle OMH$ | ⑦ $\triangle OHP$ |
| ② $\triangle PQA$ | ⑤ $\triangle PQB$ | ⑧ $\triangle HBM$ |

解答 $\frac{\pi}{2} < \angle AOB < \pi$ のとき, $OB \cos \angle AOB = -OH$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \cdot OB \cos \angle AOB = OA \cdot (-OH) = -\mathbf{OA} \cdot \mathbf{OH} \quad \dots (\text{キ}) \textcircled{8}$$

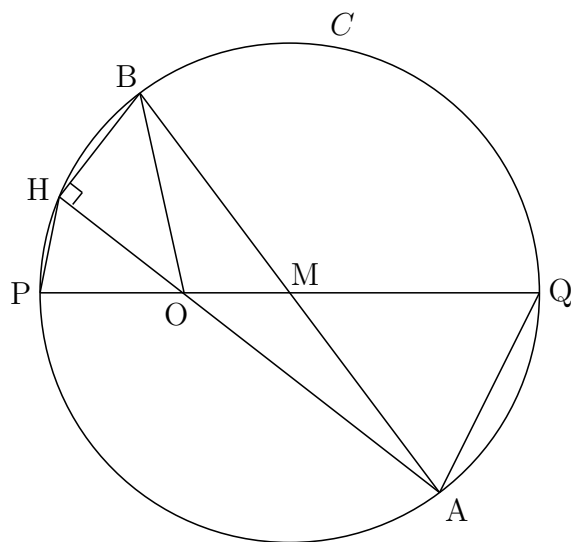
定理から

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= OM^2 - AM^2 \\ &= (OM + AM)(OM - AM) \\ &= (OM + MQ)(OM - PM) \\ &= OQ \cdot (-OP) = -\mathbf{OP} \cdot \mathbf{OQ} \quad \dots (\text{ク}) \textcircled{9} \end{aligned}$$

$-\mathbf{OA} \cdot \mathbf{OH} = -\mathbf{OP} \cdot \mathbf{OQ}$ より

$$OA \cdot OH = OP \cdot OQ \quad \text{ゆえに} \quad OQ : OA = OH : OP$$

また, $\angle AOQ = \angle HOP$ であるから $\triangle \mathbf{OQA} \simeq \triangle \mathbf{OHP} \quad \dots (\text{ケ}) \textcircled{2}$



別解 $\angle HPQ = \angle HAQ$, $\angle AOQ = \angle HOP$ であるから $\triangle \mathbf{OQA} \simeq \triangle \mathbf{OHP}$

6.2.15 第6回 第7問

楕円 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ の焦点を F, F' とする. F, F' の座標は

$$F \left(\boxed{\text{ア}}, 0 \right), \quad F' \left(\boxed{\text{イウ}}, 0 \right)$$

である.

また, 楕円 E 上の点 (x_0, y_0) における E の接線の方程式は

$$\frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{3} = 1$$

である.

(1) 楕円 E 上の点 $P \left(1, \frac{3}{2} \right)$ に対して

$$FP = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, \quad PF' = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である.

点 P における E の接線に垂直で, 点 P を通る直線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ク}} x - \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

であり, この直線と x 軸の交点を A とすると

$$AF = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}, \quad AF' = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である. よって, 直線 PA は $\angle F'PF$ の二等分線であることがわかる.

- (2) 点 $Q(x_1, y_1)$ ($0 < x_1 < 2, 0 < y_1 < \sqrt{3}$) を楕円 E 上の点とする. QF , QF' の長さを x_1 を用いて表すと

$$QF = \frac{\boxed{\text{ソ}} - x_1}{\boxed{\text{タ}}}, \quad QF' = \frac{\boxed{\text{チ}} + x_1}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である.

ここで, 点 Q における E の接線を ℓ とする. ℓ に垂直な点 Q を通る直線と, x 軸との交点を B とする. 点 B の座標は $\left(\frac{x_1}{\boxed{\text{テ}}}\right)$ であるから, 直線 QB は $\angle F'QF$ の二等分線であることがわかる.

また, ℓ と x 軸が楕円 E 上にない交点 C をもつとき, $\frac{FC}{FC'} = \boxed{\text{ト}}$ が成り立つ.

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

- | | | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|-------------------------|
| ① $\frac{3-x_1}{3+x_1}$ | ② $\frac{3+x_1}{3-x_1}$ | ③ $\frac{4-x_1}{4+x_1}$ | ④ $\frac{4+x_1}{4-x_1}$ |
| ⑤ $\frac{12-x_1}{12+x_1}$ | ⑥ $\frac{12+x_1}{12-x_1}$ | ⑦ $\frac{1}{2}$ | ⑧ $\frac{1}{4}$ |

- (3) 点 $R(x_2, y_2)$ ($-2 < x_2 < 0, -\sqrt{3}, -\sqrt{3} < y_2 < 0$) を楕円 E 上の点とする. 点 R における E の接線を m とする. m と x 軸が楕円 E 上になり交点 D をもつとき, $\frac{FD}{F'D} = \boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ.

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

- | | | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|-------------------------|
| ① $\frac{3-x_2}{3+x_2}$ | ② $\frac{3+x_2}{3-x_2}$ | ③ $\frac{4-x_2}{4+x_2}$ | ④ $\frac{4+x_2}{4-x_2}$ |
| ⑤ $\frac{12-x_2}{12+x_2}$ | ⑥ $\frac{12+x_2}{12-x_2}$ | ⑦ 2 | ⑧ 4 |

解答 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ の焦点 F, F' の x 座標は

$$x = \pm\sqrt{4-3} = \pm 1 \quad \text{よって} \quad \mathbf{F(1, 0), F'(-1, 0)} \quad \dots(\text{ア}) \sim (\text{ウ})$$

(1) $\mathbf{PF} = \frac{3}{2}$ であるから, $PF + PF' = 2 \cdot 2$ より

$$PF' = 4 - PF = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \quad \dots(\text{エ}) \sim (\text{キ})$$

E 上の点 P における接線の方程式は

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$$

これと垂直で点 P を通る直線は

$$y = 2(x - 1) + \frac{3}{2} \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{y = 2x - \frac{1}{2}} \quad \dots(\text{ク}) \sim (\text{コ})$$

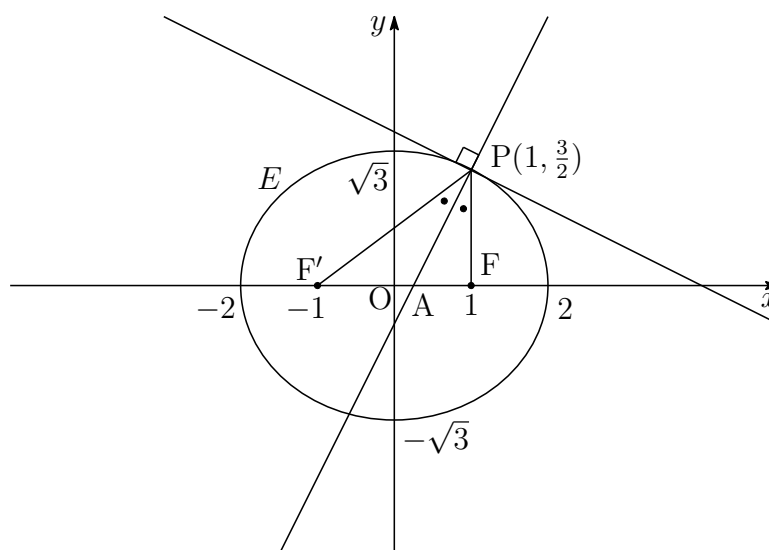
この直線の x 軸との交点 A の x 座標は

$$2x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{1}{4}$$

したがって

$$AF = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad AF' = \frac{1}{4} - (-1) = \frac{5}{4} \quad \dots(\text{サ}) \sim (\text{セ})$$

$PF : PF' = AF : AF'$ であるから, 直線 PA は $\angle F'PF$ の二等分である.



(2) $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ より, 離心率 e は $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{2}$

準線の方程式は $x = \pm \frac{a}{e} = \pm 4$

Q から準線 $x = 4$, $x = -4$ にそれぞれ垂線 QH, QH' を引くと

$$QF = eQH = \frac{1}{2}(4 - x_1) = \frac{4 - x_1}{2} \quad \dots (\text{ソ}) \sim (\text{タ})$$

$$QF' = eQH' = \frac{1}{2}\{x_1 - (-4)\} = \frac{4 + x_1}{2} \quad \dots (\text{チ}) \sim (\text{ツ})$$

$\ell: \frac{x_1 x}{4} + \frac{y_1 y}{3} = 1$ に垂直で点 Q を通る直線の方程式は

$$-\frac{y_1}{3}(x - x_1) + \frac{x_1}{4}(y - y_1) = 0$$

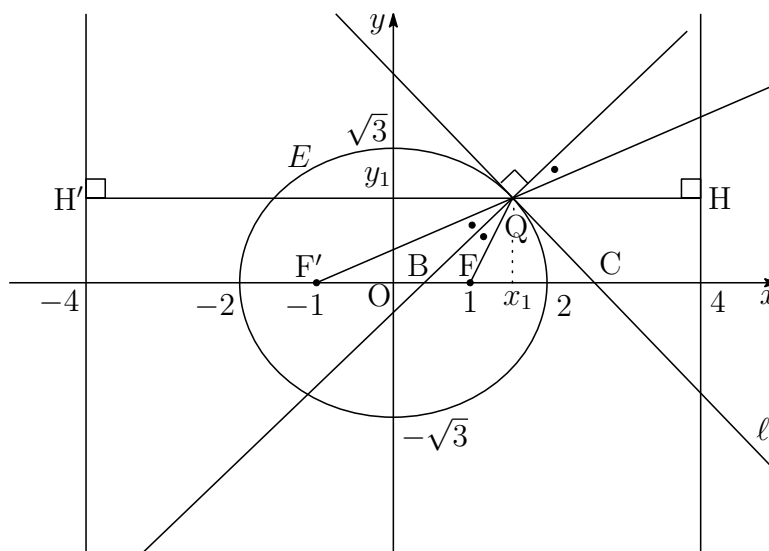
点 B の x 座標は, 上式に $y = 0$ を代入して

$$-\frac{y_1}{3}(x - x_1) - \frac{x_1 y_1}{4} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{x_1}{4}$$

よって $B\left(\frac{x_1}{4}, 0\right) \quad \dots (\text{テ})$

点 C は線分 FF' を QF : QF' の比に外分する点であるから

$$\frac{FC}{F'C} = \frac{QF}{QF'} = \frac{4 - x_1}{4 + x_1} \quad \dots (\text{ト}) \textcircled{2}$$



(3) D から準線 $x = 4$, $x = -4$ にそれぞれ垂線 DT, DT' を引くと

$$\frac{FD}{F'D} = \frac{eDT}{eDT'} = \frac{DT}{DT'} = \frac{4 - x_2}{x_2 - (-4)} = \frac{4 - x_2}{4 + x_2} \quad \dots (\text{ナ}) \textcircled{2}$$

参照 [28](#) ページを参照.

6.2.16 第7回 第7問

〔1〕座標平面上の点 $P(x, y)$ について考える.

- (1) 点 P と点 $(1, 0)$ との距離と, 点 P と y 軸との距離が等しいとき, 点 P の軌跡は ア である.

ア の解答欄

- ① 直線 ② 放物線 ③ 双曲線 ④ 楕円

- (2) 点 P と点 $(1, 0)$ との距離を a , 点 P と y 軸との距離を b とする. a と b の距離の比が一定, つまり, 定数 k を用いて

$$a = kb \quad (*)$$

と表されるような点 P の軌跡を C とする. ただし, $k > 0$ とする.

- (i) $(*)$ を, x, y を用いて表すと, イ となる.

イ の解答群

- ① $(1 - k^2)x^2 - x + y^2 - 1 = 0$
 ② $(1 - k^2)x^2 - x + y^2 + 1 = 0$
 ③ $(1 - k^2)x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0$
 ④ $(1 - k^2)x^2 - 2x + y^2 + 1 = 0$
 ⑤ $(k^2 - 1)x^2 - x + y^2 - 1 = 0$
 ⑥ $(k^2 - 1)x^2 - x + y^2 + 1 = 0$
 ⑦ $(k^2 - 1)x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0$
 ⑧ $(k^2 - 1)x^2 - 2x + y^2 + 1 = 0$

(ii) $k = \frac{1}{2}$ のとき, C は頂点が

$$\left(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}} \right), \left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}, \boxed{\text{キ}} \right)$$

(iii) C は, $k > 1$ のとき $\boxed{\text{ク}}$, $k = 1$ のとき $\boxed{\text{ケ}}$, $0 < k < 1$ のとき $\boxed{\text{コ}}$ を表す.

$\boxed{\text{ケ}} \sim \boxed{\text{コ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- ① 二つの焦点の x 座標が等しい楕円
- ② 二つの焦点の y 座標が等しい楕円
- ③ 準線が x 軸または x 軸に平行な直線の放物線
- ④ 準線が y 軸または y 軸に平行な直線の放物線
- ⑤ 二つの焦点の x 座標が等しい双曲線
- ⑥ 二つの焦点の y 座標が等しい双曲線
- ⑦ 直線

解答 (1) 定義から 放物線 …(ア)

なお、点 $P(x, y)$ と焦点 $(1, 0)$ の距離は $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

点 $P(x, y)$ から y 軸までの距離は $|x|$

これらの距離が等しいから

$$(x-1)^2 + y^2 = |x|^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

別解 焦点 $(1, 0)$ ，準線 y 軸，頂点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ の放物線

焦点は頂点を x 軸方向に $p \left(= \frac{1}{2}\right)$ だけ平行移動した位置にあるから

$$y^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

参照 [2次曲線の性質](#)

(2) 点 $P(x, y)$ と焦点 $(1, 0)$ 距離 a は $a = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

点 $P(x, y)$ から y 軸までの距離 b は $b = |x|$

a と b の比が一定，つまり，定数 k を用いて

$$a = kb \quad (k \text{ は離心率}) \quad (*)$$

と表されるような点 P の軌跡 C とする．($k > 0$)

(i) $a^2 = k^2 b^2$ より，(*) を， x, y を用いて表すと

$$(x-1)^2 + y^2 = k^2 |x|^2$$

$$\text{すなわち} \quad (1 - k^2)x^2 - 2x + y^2 + 1 = 0 \quad \dots (イ) \quad \textcircled{3}$$

(ii) $k = \frac{1}{2}$ のとき, C 上の点 P から, y 軸 (準線) に垂線 PH を引くと

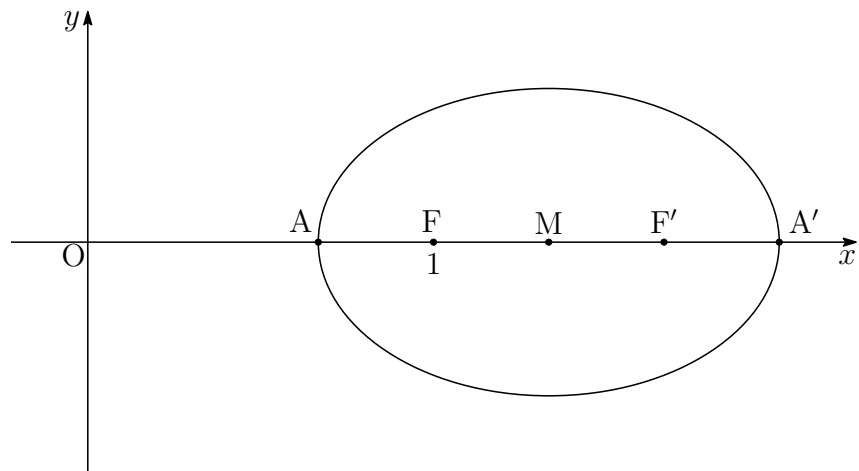
$$\frac{PF}{PH} = \frac{1}{2} \quad (\text{楕円})$$

C と x 軸との交点が C の頂点であるから, OF を $2:1$ に内分, 外分する点をそれぞれ A, A' とすると

$$A\left(\frac{2}{3}, 0\right), A'(2, 0)$$

C の中心 M は直軸 AA' の中点であるから $M\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

F' は F と M に関して対称であるから $F'\left(\frac{5}{3}, 0\right)$



(iii) C は, 2 焦点の y 座標は等しく ($k \neq 1$), 準線は y 軸に平行である.
 $k > 1$ のとき双曲線, $k = 1$ のとき放物線, $0 < k < 1$ のとき楕円.
 よって (ク) ⑤ (ケ) ③ (コ) ①

[2] 0でない複素数 z, w は, $w = \frac{1}{z}$ を満たすとする.

(1) $z = 1 + i$ のとき

$$w = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} - \frac{i}{\boxed{\text{ス}}}$$

である.

(2) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) と表すとき, w は r, θ を用いて表すと, $w = \boxed{\text{セ}}$ となる.

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

- | | |
|--|---|
| ① $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ | ① $r(-\cos \theta + i \sin \theta)$ |
| ② $r(\cos \theta - i \sin \theta)$ | ③ $-r(\cos \theta + i \sin \theta)$ |
| ④ $\frac{1}{r}(\cos \theta + i \sin \theta)$ | ⑤ $\frac{1}{r}(-\cos \theta + i \sin \theta)$ |
| ⑥ $\frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)$ | ⑦ $-\frac{1}{r}(\cos \theta + i \sin \theta)$ |

(3) s, t を異なる正の実数とする. $z = si$ のとき, $w = \boxed{\text{ソ}}$ であるから, 点 z が虚軸上を si から点 ti まで動くとき, 点 w は点 $\boxed{\text{ソ}}$ から $\boxed{\text{タ}}$ まで動く.

$\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

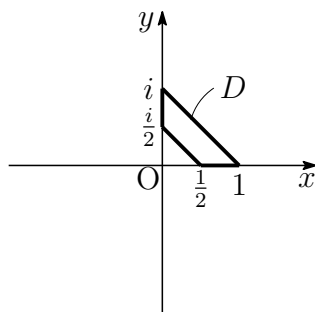
- | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| ① $\frac{1}{s}$ | ① $\frac{1}{t}$ | ② $-\frac{1}{s}$ | ③ $-\frac{1}{t}$ |
| ④ $\frac{i}{s}$ | ⑤ $\frac{i}{t}$ | ⑥ $-\frac{i}{s}$ | ⑦ $-\frac{i}{t}$ |

(4) α を 0 でない複素数とする. 点 z が点 0 と α を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるとき, 点 w は点 $\boxed{\text{チ}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ツ}}$ の円周上にある.

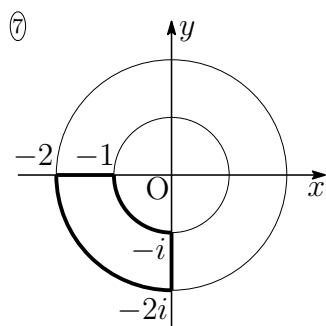
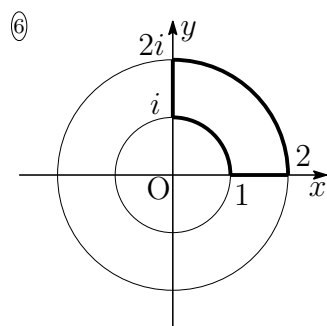
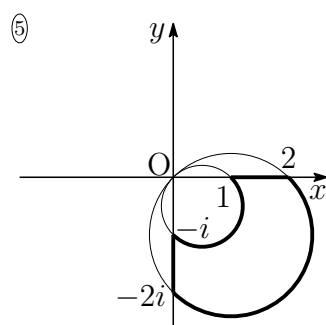
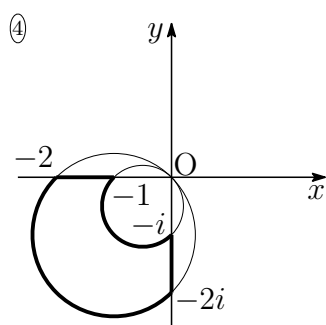
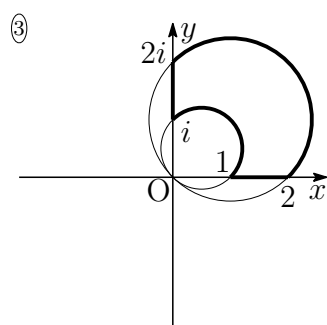
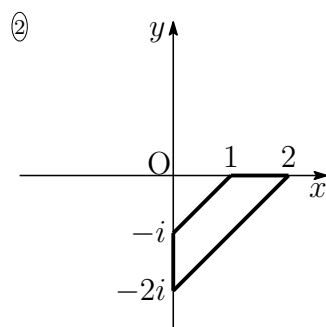
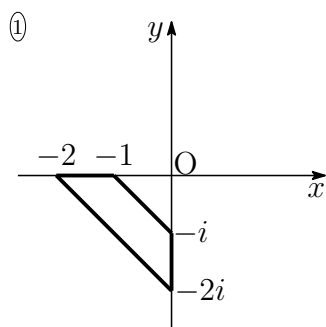
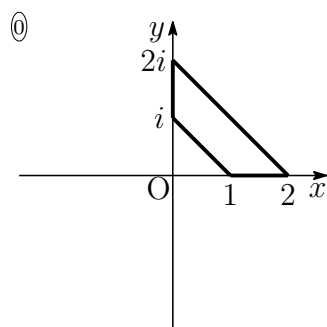
$\boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

- | | | | |
|------------------|-------------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| ① α | ① $-\alpha$ | ② $\frac{1}{\alpha}$ | ③ $-\frac{1}{\alpha}$ |
| ④ $\bar{\alpha}$ | ⑤ $-\bar{\alpha}$ | ⑥ $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ | ⑦ $-\frac{1}{\bar{\alpha}}$ |
| ⑧ $ \alpha $ | ⑨ $\left \frac{1}{\alpha} \right $ | | |

- (5) 点 z が次のような台形 D の周上をうごくとき、点 w の軌跡は テ の太線部のようになる。



テ については、最も適当なものを、次の ① ~ ⑧ のうちから一つ選べ。



解答 (1) $z = 1 + i$ のとき

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \quad \dots (\text{サ}) \sim (\text{ス})$$

(2) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のとき

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \quad \dots (\text{セ}) \textcircled{6}$$

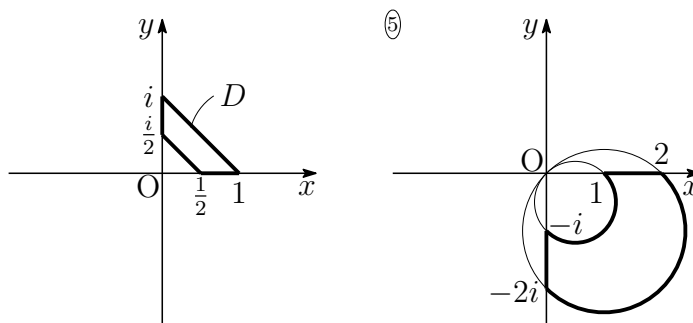
(3) 点 z が si から ti まで動くとき, 点 w は

$$\frac{1}{si} \text{ から } \frac{1}{ti} \quad \text{すなわち} \quad -\frac{i}{s} \text{ から } -\frac{i}{t} \quad \dots (\text{ソ})(\text{タ})$$

まで動く.

(4) 定理 9 から, 点 z が点 0 と α を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるとき, 点 w は点 $\frac{1}{\alpha}$ を中心とする半径 $\left| \frac{1}{\alpha} \right|$ の円周上にある.

(5) (3),(4) の結論に注意すると, 点 w の軌跡は



6.2.17 第8回 第6問

$\triangle ABC$ の面積 S について、ベクトルの成分表示との対応を考えよう.

- (1) S は $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ を用いて, $S = \frac{1}{2}\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ と表される.

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

- | | |
|--|--|
| ㉔ $ \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ | ㉑ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} $ |
| ㉒ $ \overrightarrow{AB} ^2 \overrightarrow{AC} ^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ | ㉓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} ^2 \overrightarrow{AC} ^2$ |
| ㉕ $ \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2$ | ㉖ $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 - \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} $ |
| ㉗ $ \overrightarrow{AB} ^2 \overrightarrow{AC} ^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2$ | ㉘ $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 - \overrightarrow{AB} ^2 \overrightarrow{AC} ^2$ |

- (2) $\overrightarrow{AB} = (a, b)$, $\overrightarrow{AC} = (x, y)$ のとき

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \boxed{\text{イ}}x + \boxed{\text{ウ}}y$$

であるから, S は a, b, x, y を用いて

$$S = \frac{1}{2} \left| \boxed{\text{エ}}x - \boxed{\text{オ}}y \right|$$

と表される.

$\boxed{\text{イ}} \sim \boxed{\text{オ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- | | |
|-------|-------|
| ㉔ a | ㉑ b |
|-------|-------|

(3) $\overrightarrow{AB} = (a, b, c)$, $\overrightarrow{AC} = (x, y, z)$ のとき, S は a, b, c, x, y, z を用いて

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\boxed{\text{力}} z - \boxed{\text{キ}} y \right)^2 + \left(\boxed{\text{ク}} x - \boxed{\text{ケ}} z \right)^2 + \left(\boxed{\text{コ}} y - \boxed{\text{サ}} x \right)^2}$$

と表される.

力 ～ サ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① a ② b ③ c

また

$$\vec{m} = \left(\boxed{\text{カ}} z - \boxed{\text{キ}} y, \boxed{\text{ク}} x - \boxed{\text{ケ}} z, \boxed{\text{コ}} y - \boxed{\text{サ}} x \right)$$

とおくと

$$\vec{m} \cdot \vec{AB} = \boxed{\text{シ}}, \quad \vec{m} \cdot \vec{AC} = \boxed{\text{ス}}$$

が成り立つ.

- (4) O を原点とする座標空間内の四面体 OABC について, $A(1, 1, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, 2, 0)$ とする. このとき, 四面体 OABC の体積を求めよう.

$\triangle ABC$ の面積は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるから, O から 3 点 A, B, C を通る平面に下した垂線 OH の長さを考える. $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直なベクトル $\vec{n}$ として

$$\vec{n} = (1, \boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}})$$

が求められる. また, H は 3 点 A, B, C を通る平面上の点であるから, 実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + (\boxed{\text{テ}} - s - t)\overrightarrow{OC}$$

と表される.

この $\vec{n}$ と $\overrightarrow{OH}$ を用いて, 垂線 OH の長さを求めると

$$OH = \frac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

となる. よって, 四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{ネ}}$ である.

解答

(1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ とすると

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta$$

$0 < \theta < \pi$ より, $\sin \theta > 0$ であるから, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \quad \dots (\text{ア}) \textcircled{6} \end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{AB} = (a, b)$, $\overrightarrow{AC} = (x, y)$ のとき

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ax + by \quad \dots (\text{イ})(\text{ウ})$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(bx - ay)^2} = \frac{1}{2} |bx - ay| \quad \dots (\text{エ})(\text{オ}) \end{aligned}$$

(3) (外積を参照)

$\overrightarrow{AB} = (a, b, c)$, $\overrightarrow{AC} = (x, y, z)$ のとき

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (bz - cy, cx - az, ay - bx)$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2} \quad \dots (\text{カ}) \sim (\text{サ}) \end{aligned}$$

また, $\vec{m} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ であるから

$$\vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad \dots (\text{シ})(\text{ス})$$

(4) A(1, 1, 1), B(3, 0, 1), C(2, 2, 0) より

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 1, -1)$$

したがって $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, \mathbf{2}, \mathbf{3}) = \vec{n} \quad \dots (\text{チ})(\text{ツ})$

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{14}}{\mathbf{2}} \quad \dots (\text{セ}) \sim (\text{タ})$$

H は 3 点 A, B, C を通る平面上の点であるから, 実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + (1 - s - t)\overrightarrow{OC} \quad \dots (\text{テ})$$

$\overrightarrow{OA} = (1, 1, 1), \overrightarrow{OB} = (3, 0, 1)$ より

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (1, 2, -3)$$

四面体の体積を V とすると, $\overrightarrow{OC} = (2, 2, 0)$ より

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}| = \mathbf{1} \quad \dots (\text{ネ})$$

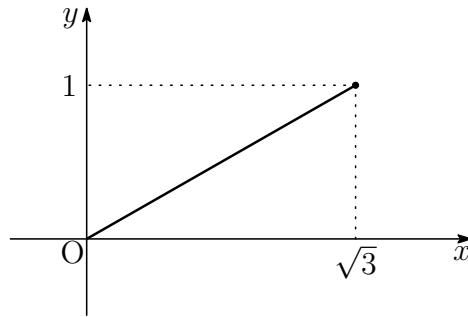
$V = \frac{1}{3} S \cdot OH$ より

$$OH = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 1}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \frac{\mathbf{3\sqrt{14}}}{\mathbf{7}} \quad \dots (\text{ト}) \sim (\text{ヌ})$$

6.2.18 第8回 第7問

xy 平面上の図形を，原点を中心に回転した図形を表す方程式の求め方について考えてみよう．

- (1) 点 $(\sqrt{3}, 1)$ を，原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転移動した点の座標は ア である．



ア の解答群

- | | |
|---|---|
| ① $\left(\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right), \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ | ① $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ |
| ② $\left(\sin\frac{5}{12}\pi, \cos\frac{5}{12}\pi\right)$ | ③ $\left(\cos\frac{5}{12}\pi, \sin\frac{5}{12}\pi\right)$ |
| ④ $\left(2\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right), 2\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ | ⑤ $\left(2\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right), 2\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ |
| ⑥ $\left(2\sin\frac{5}{12}\pi, 2\cos\frac{5}{12}\pi\right)$ | ⑦ $\left(2\cos\frac{5}{12}\pi, 2\sin\frac{5}{12}\pi\right)$ |

- (2) x, y, X, Y を実数とする. 点 (x, y) を, 原点を中心に θ だけ回転移動した点を (X, Y) とする.

座標平面上の点 $(x, y), (X, Y)$ を, それぞれ複素数平面上で $x + yi, X + Yi$ が表す点に対応させることで

$$X + Yi = \boxed{\text{イ}} \times (x + yi)$$

が成り立つ.

このことから, X, Y をそれぞれ x, y, θ を用いて表すと

$$X = \boxed{\text{ウ}}, \quad Y = \boxed{\text{エ}}$$

となる.

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| ① $\sin \theta + i \cos \theta$ | ① $\sin \theta - i \cos \theta$ |
| ② $\cos \theta + i \sin \theta$ | ③ $\cos \theta - i \sin \theta$ |
| ④ $-\sin \theta + i \cos \theta$ | ⑤ $-\sin \theta - i \cos \theta$ |
| ⑥ $-\cos \theta + i \sin \theta$ | ⑦ $-\cos \theta - i \sin \theta$ |

$\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}$ の解答群

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| ① $x \sin \theta + y \cos \theta$ | ① $x \sin \theta - y \cos \theta$ |
| ② $x \cos \theta + y \sin \theta$ | ③ $x \cos \theta - y \sin \theta$ |
| ④ $-x \sin \theta + y \cos \theta$ | ⑤ $-x \sin \theta - y \cos \theta$ |
| ⑥ $-x \cos \theta + y \sin \theta$ | ⑦ $-x \cos \theta - y \sin \theta$ |

- (3) (2)の結果を用いると、 xy 平面上にある図形を、原点を中心に θ だけ回転移動した図形を表す方程式を求めるには、移動後の図形の方程式において、 x を オ , y を カ にそれぞれ置き換えればよいことがわかる.

オ , カ の解答群

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| ① $x \sin \theta + y \cos \theta$ | ① $x \sin \theta - y \cos \theta$ |
| ② $x \cos \theta + y \sin \theta$ | ③ $x \cos \theta - y \sin \theta$ |
| ④ $-x \sin \theta + y \cos \theta$ | ⑤ $-x \sin \theta - y \cos \theta$ |
| ⑥ $-x \cos \theta + y \sin \theta$ | ⑦ $-x \cos \theta - y \sin \theta$ |

よって、楕円 $x^2 + 2y^2 = 1$ を、原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転移動した楕円の方程式は

$$\frac{\text{キ}}{\text{ク}}x^2 - \frac{\sqrt{\text{ケ}}}{\text{コ}}xy + \frac{\text{サ}}{\text{シ}}y^2 = 1$$

である.

- (4) 長軸が x 軸上、短軸が y 軸上にある楕円を、原点を中心に θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) だけ回転移動した楕円の方程式が $4x^2 - 2\sqrt{6}xy + 5y^2 = 1$ であるとき

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{\text{スセ}}}{\text{ソ}}$$

であり、楕円 F の方程式は

$$\text{タ}x^2 + \text{チ}y^2 = 1$$

である.

解答 (1) 点 $(\sqrt{3}, 1)$ を複素数平面上にとると

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

これを原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転移動させると

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \times 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\cos \frac{5}{12} \pi + i \sin \frac{5}{12} \pi \right)$$

よって、求める点の座標は

$$\left(2 \cos \frac{5}{12} \pi, 2 \sin \frac{5}{12} \pi \right) \quad \cdots (\text{ア}) \text{ ㉗}$$

(2) 点 $x + yi$ を原点を中心に θ だけ回転移動した点が $X + Yi$ であるから

$$\begin{aligned} X + Yi &= (\cos \theta + i \sin \theta)(x + yi) \quad \cdots (\text{イ}) \text{ ㉘} \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta) \end{aligned}$$

よって $X = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad Y = x \sin \theta + y \cos \theta \quad \cdots (\text{ウ}) \text{ ㉙}, (\text{エ}) \text{ ㉚}$

- (3) (2)の結果から、点 (x, y) を原点を中心に $-\theta$ だけ回転移動した点を (X, Y) とすると

$$(*) \begin{cases} X = x \cos(-\theta) - y \sin(-\theta) = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ Y = x \sin(-\theta) + y \cos(-\theta) = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

例えば、移動前の方程式が $f(x, y) = 0$ であるとき、点 (X, Y) がこの方程式を満たすから

$$f(X, Y) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) = 0$$

移動前の図形の方程式において、 x を $x \cos \theta + y \sin \theta$, y を $-x \sin \theta + y \cos \theta$ にそれぞれ置き換えればよい. $\dots$ (オ) ② (カ) ④

楕円 $x^2 + 2y^2 = 1$ を、原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転移動した楕円の方程式は、 x を $x \cos \frac{\pi}{3} + y \sin \frac{\pi}{3}$, y を $-x \sin \frac{\pi}{3} + y \cos \frac{\pi}{3}$ に置き換えればよい.

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)^2 + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)^2 = 1$$

$$\text{整理すると} \quad \frac{7}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{5}{4}y^2 = 1 \quad \dots(\text{キ}) \sim (\text{シ})$$

- (4) $4x^2 - 2\sqrt{6}xy + 5y^2 = 1$ を定理 10 に適用すると、

$$a = 4, \quad 2b = -2\sqrt{6}, \quad c = 5$$

2 次方程式 $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$ を解いて $\lambda = 2, 7$

$$\tan 2\theta = \frac{-2\sqrt{6}}{4-5} = 2\sqrt{6} \text{ より } \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{6} \tan^2 \theta + \tan \theta - \sqrt{6} = 0$$

$$(\sqrt{3} \tan \theta - \sqrt{2})(\sqrt{2} \tan \theta + \sqrt{3}) = 0$$

θ の値の範囲に注意して

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \quad \dots(\text{ス}) \sim (\text{ソ})$$

$a - c = 4 - 5 < 0$ より $\alpha - \beta < 0$ であるから $\alpha = 2, \beta = 7$

よって、 F の方程式は $2x^2 + 7y^2 = 1 \quad \dots(\text{タ})(\text{チ})$