

令和 5 年度

# 高等学校 数学 I

電子教科書



2023 年 10 月 7 日

熊本県立第二高等学校数学科

# スライド

## 第1章 数と式 [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

### 1.1 式の計算

- 1.1.1 多項式の加法と減法 教科書 pp.8-11
- 1.1.2 多項式の乗法 教科書 pp.12-15
- 1.1.3 因数分解 教科書 pp.16-23
- 1.1.4 問題 教科書 p.24

### 1.2 実数

- 1.2.1 実数 教科書 pp.25-30
- 1.2.2 根号を含む式の計算 教科書 pp.31-35
- 1.2.3 問題 教科書 p.36

### 1.3 1次不等式

- 1.3.1 不等式の性質 教科書 pp.37-39
- 1.3.2 1次不等式 教科書 pp.40-44
- 1.3.3 絶対値と方程式・不等式 教科書 pp.45-47
- 1.3.4 問題 教科書 p.48

### 1.4 章末問題 教科書 p.49-50

## 第2章 集合と命題 [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

### 2.1 集合と命題

- 2.1.1 集合 教科書 pp.52-57
- 2.1.2 命題と条件 教科書 pp.58-64
- 2.1.3 命題と証明 教科書 pp.65-69
- 2.1.4 問題 教科書 p.70

### 2.2 章末問題, 発展 教科書 p.71, 教科書 p.72

## 第3章 2次関数 [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

### 3.1 2次関数とグラフ

- 3.1.1 関数とグラフ 教科書 pp.74-77
- 3.1.2 2次関数のグラフ 教科書 pp.78-87
- 3.1.3 問題 教科書 p.88

### 3.2 2次関数の値の変化

- 3.2.1 2次関数の最大・最小 教科書 pp.89-95
- 3.2.2 2次関数の決定 教科書 pp.96-98
- 3.2.3 問題 教科書 p.99
- 3.3 2次方程式と2次不等式
  - 3.3.1 2次方程式 教科書 pp.100-104
  - 3.3.2 2次関数のグラフと  $x$  軸の位置関係 教科書 pp.105-110
  - 3.3.3 2次不等式 教科書 pp.111-123
  - 3.3.4 問題 教科書 p.124
- 3.4 章末問題 教科書 p.125-126

#### 第4章 図形と計量 [内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

- 4.1 三角比
  - 4.1.1 三角比 教科書 pp.128-133
  - 4.1.2 三角比の相互関係 教科書 pp.134-136
  - 4.1.3 三角比の拡張 教科書 pp.137-144
  - 4.1.4 問題 教科書 p.145
- 4.2 正弦定理と余弦定理
  - 4.2.1 正弦定理 教科書 pp.146-149
  - 4.2.2 余弦定理 教科書 pp.150-153
  - 4.2.3 正弦定理・余弦定理の応用 教科書 pp.154-155
  - 4.2.4 三角形の面積 教科書 pp.156-160
  - 4.2.5 空間図形への応用 教科書 pp.161-163
  - 4.2.6 問題 教科書 p.164
- 4.3 章末問題 教科書 p.165-166

#### 第5章 データの分析 [内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

- 5.1 データの分析
  - 5.1.1 データの整理 教科書 pp.168-169
  - 5.1.2 データの代表値 教科書 pp.170-173
  - 5.1.3 データの散らばりと四分位数 教科書 pp.174-179
  - 5.1.4 分散と標準偏差 教科書 pp.180-184
  - 5.1.5 2つの変量の間関係 教科書 pp.185-193
  - 5.1.6 仮説検定の考え方 教科書 pp.194-197
  - 5.1.7 問題 教科書 p.198
- 5.2 章末問題 教科書 pp.199-200

# 目次

|                   |           |
|-------------------|-----------|
| スライド              | i         |
| <b>第1章 数と式</b>    | <b>1</b>  |
| 1.1 式の計算          | 1         |
| 1.1.1 多項式の加法と減法   | 1         |
| 1.1.2 多項式の乗法      | 5         |
| 1.1.3 因数分解        | 10        |
| 1.1.4 問題          | 19        |
| 1.2 実数            | 21        |
| 1.2.1 実数          | 21        |
| 1.2.2 根号を含む式の計算   | 27        |
| 1.2.3 問題          | 32        |
| 1.3 1次不等式         | 33        |
| 1.3.1 不等式の性質      | 33        |
| 1.3.2 1次不等式       | 36        |
| 1.3.3 絶対値と方程式・不等式 | 41        |
| 1.3.4 問題          | 45        |
| 1.4 章末問題          | 46        |
| 1.4.1 章末問題 A      | 46        |
| 1.4.2 章末問題 B      | 48        |
| <b>第2章 集合と命題</b>  | <b>51</b> |
| 2.1 集合と命題         | 51        |
| 2.1.1 集合          | 51        |
| 2.1.2 命題と条件       | 57        |
| 2.1.3 命題と証明       | 64        |
| 2.1.4 問題          | 68        |
| 2.2 章末問題          | 69        |
| 2.2.1 章末問題 A      | 69        |
| 2.2.2 章末問題 B      | 69        |
| <b>第3章 2次関数</b>   | <b>71</b> |
| 3.1 2次関数とグラフ      | 71        |
| 3.1.1 関数とグラフ      | 71        |
| 3.1.2 2次関数のグラフ    | 76        |

|            |                      |            |
|------------|----------------------|------------|
| 3.1.3      | 問題                   | 86         |
| 3.2        | 2次関数の値の変化            | 87         |
| 3.2.1      | 2次関数の最大・最小           | 87         |
| 3.2.2      | 2次関数の決定              | 94         |
| 3.2.3      | 問題                   | 97         |
| 3.3        | 2次方程式と2次不等式          | 98         |
| 3.3.1      | 2次方程式                | 98         |
| 3.3.2      | 2次関数のグラフと $x$ 軸の位置関係 | 103        |
| 3.3.3      | 2次不等式                | 109        |
| 3.3.4      | 問題                   | 122        |
| 3.4        | 章末問題                 | 123        |
| 3.4.1      | 章末問題 A               | 123        |
| 3.4.2      | 章末問題 B               | 124        |
| <b>第4章</b> | <b>図形と計量</b>         | <b>125</b> |
| 4.1        | 三角比                  | 125        |
| 4.1.1      | 三角比                  | 125        |
| 4.1.2      | 三角比の相互関係             | 131        |
| 4.1.3      | 三角比の拡張               | 134        |
| 4.1.4      | 問題                   | 143        |
| 4.2        | 正弦定理と余弦定理            | 144        |
| 4.2.1      | 正弦定理                 | 144        |
| 4.2.2      | 余弦定理                 | 148        |
| 4.2.3      | 正弦定理・余弦定理の応用         | 152        |
| 4.2.4      | 三角形の面積               | 154        |
| 4.2.5      | 空間図形への応用             | 159        |
| 4.2.6      | 問題                   | 162        |
| 4.3        | 章末問題                 | 163        |
| 4.3.1      | 章末問題 A               | 163        |
| 4.3.2      | 章末問題 B               | 164        |
| 4.4        | 三角比の表                | 166        |
| <b>第5章</b> | <b>データの分析</b>        | <b>167</b> |
| 5.1        | データの分析               | 167        |
| 5.1.1      | データの整理               | 167        |
| 5.1.2      | データの代表値              | 169        |
| 5.1.3      | データの散らばりと四分位数        | 173        |
| 5.1.4      | 分散と標準偏差              | 179        |
| 5.1.5      | 2つの変量の間関係            | 184        |

|       |                              |            |
|-------|------------------------------|------------|
| 5.1.6 | 仮説検定の考え方 . . . . .           | 193        |
| 5.1.7 | 問題 . . . . .                 | 197        |
| 5.2   | 章末問題 . . . . .               | 198        |
| 5.2.1 | 章末問題 A . . . . .             | 198        |
| 5.2.2 | 章末問題 B . . . . .             | 199        |
| 解答    |                              | <b>201</b> |
|       | トレミーの定理とブラマーグプタの公式 . . . . . | 302        |

# 第 1 章 数と式

## 1.1 式の計算

### 1.1.1 多項式の加法と減法

数量を一般的に表すために，文字を数と同じように扱うと便利である．ここでは，文字を含む式の加法と減法について学ぶことにしよう．

#### A 》 単項式と多項式

$3$ ,  $x$ ,  $2a$ ,  $(-5)x^2y$  などのように，数や文字およびそれらを掛けて作られる式を単項式という．単項式では，数の部分をその単項式の係数といい，掛けた文字の個数をその単項式の次数という．

数だけの単項式の次数は0である．ただし，数0の次数は考えない．

ふつう  $1x$  は単に  $x$  と書き， $(-5)x^2y$  は  $-5x^2y$  と書く．

例 1.1 (1)  $2a$  の係数は2，次数は1である．

**S**

(2)  $-5x^2y$  の係数は $-5$ ，次数は3である．

練習 1.1 次の単項式の係数と次数をいえ． **解**

(1)  $6x^2$

(2)  $x$

(3)  $-x^2y^2$

(4)  $-3abc$

単項式が2種類以上の文字を含むとき、特定の文字に着目して係数や次数を考えることがある。この場合、残りの文字は数と同じように扱う。

### 例 1.2 単項式 $5ab^2x^4$ の係数と次数

[S]

(1)  $x$  に着目すると、係数は  $5ab^2$ 、次数は 4 である。

(2)  $a$  と  $b$  に着目すると、係数は  $5x^4$ 、次数は 3 である。

### 練習 1.2 次の単項式で [ ] 内の文字に着目したとき、その係数と次数をいえ。 [解]

(1)  $2ax^3$  [  $x$  ]

(2)  $3a^2bc^3$  [  $a$  ]

(3)  $-6ax^2y$  [  $x$  と  $y$  ]

$5x^2 + (-4x) + 2$  のように、単項式の和として表される式を多項式といい、その 1 つ 1 つの単項式を、この多項式の項という。

$5x^2 + (-4x) + 2$  は、ふつう  $5x^2 - 4x + 2$  と書く。

単項式は項が 1 つの多項式と考える。多項式のことを整式ともいう。

### B》多項式の整理

多項式  $5x^2 + 4x - 2x^2 - 3$  における  $5x^2$  と  $-2x^2$  のように、多項式の項の中で、文字の部分が同じである項を同類項<sup>.....</sup>という。多項式に含まれる同類項は、係数の和を計算して、1 つの項にまとめることができる。

例 1.3 (1)  $3x^2 + 2x - 5 - 7x + x^2 - 1$   
 $= (3 + 1)x^2 + (2 - 7)x + (-5 - 1)$   
 $= 4x^2 - 5x - 6$

[S]

(2)  $2x^2 - 5xy + 4 - 3x^2 + 7xy - 4$   
 $= (2 - 3)x^2 + (-5 + 7)xy + (4 - 4)$   
 $= -x^2 + 2xy$

同類項をまとめる仕組み

$$ma + na = (m + n)a$$

$$ma - na = (m - n)a$$

### 練習 1.3 次の多項式と同類項をまとめよ。 [解]

(1)  $4x^2 + 3x - 1 - 2x^2 - 4x + 6$

(2)  $3a^2 - 2ab - 4b^2 - 5a^2 + 2ab - 8b^2$

同類項をまとめて整理した多項式において、最も次数の高い<sup>1</sup>項の次数をその多項式の次数という。また、次数が  $n$  の多項式を  $n$  次式という。

たとえば、 $4x^2 - 5x - 6$  は 2 次式である。

<sup>1</sup>次数の大小は、「高い」、「低い」で言い表すのがふつうである。

練習 1.4 次の多項式は何次式か. 解

(1)  $x^3 + 4x^2 - 5$

(2)  $1 + 6a - 8a^2 - 3a^4$

2種類以上の文字を含む多項式においても、特定の文字にだけ注目して係数や次数を考えることがある.

多項式の項の中で、着目した文字を含まない項を定数項という.

例 1.4 (1) 多項式  $ax^2 + bx + c$  S

$x$  に着目すると 2 次式で、定数項は  $c$  である.

(2) 多項式  $x^2y + 2x + a$

$y$  に着目すると 1 次式で、定数項は  $2x + a$  である.

$x$  と  $y$  に着目すると 3 次式で、定数項は  $a$  である.

練習 1.5 多項式  $ax^3 - x^2y + by^2 + c$  は、次の文字に着目すると何次式か. また、そのときの定数項は何か. 解

(1)  $x$

(2)  $y$

(3)  $x$  と  $y$

多項式は、ある文字に注目して、各項を次数が低くなる順に並べて整理することが多い. このことを、<sup>こ</sup>降べきの順に整理<sup>2</sup> するという.

例 1.5 多項式  $ax + 2a + x^2 - 2 + x$  の整理 S

$x$  について降べきの順に整理すると

$$x^2 + (a + 1)x + (2a - 2)$$

$a$  について降べきの順に整理すると

$$(x + 2)a + (x^2 + x - 2)$$

練習 1.6 次の多項式を、 $x$  について降べきの順に整理せよ. 解

(1)  $4a^2 + ax + 2x - 3a$

(2)  $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$

<sup>2</sup> 各項を次数が高くなる順に並べて整理することもある. このことを、<sup>しょう</sup>昇べきの順に整理するという.

## C》多項式の加法と減法

2つの多項式  $A$ ,  $B$  の和と差の計算は、次のように行う.

$$\begin{array}{ll} A+B & \cdots \cdots A \text{ と } B \text{ の項をすべて足して, 同類項をまとめる.} \\ A-B & \cdots \cdots A+(-B) \text{ と考え, } B \text{ の各項の符号を変えたものを} \\ & A \text{ に足して, 同類項をまとめる.} \end{array}$$

例 1.6 (1)  $(3x^2 - 5x + 2) + (2x^2 + x - 4)$

$$\begin{aligned} &= (3+2)x^2 + (-5+1)x + (2-4) \\ &= 5x^2 - 4x - 2 \end{aligned}$$

S

(2)  $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 1) - (3x^3 - 4x - 1)$

$$\begin{aligned} &= 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 - 3x^3 + 4x + 1 \quad \leftarrow \text{符号を変える} \\ &= (2-3)x^3 - 4x^2 + (3+4)x + (-1+1) \\ &= -x^3 - 4x^2 + 7x \end{aligned}$$

例 1.6 は、次のように計算することもできる.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x^2 - 5x + 2 & \\ +) & 2x^2 + x - 3 & \\ \hline & 5x^2 - 4x - 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (2) & 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 & \\ -) & 3x^3 & - 4x - 1 \\ \hline & -x^3 - 4x^2 + 7x & \end{array}$$

練習 1.7 次の多項式  $A$  と  $B$  について,  $A+B$  と  $A-B$  を計算せよ. 解

(1)  $A = 2x^2 + 3x - 1$ ,  $B = 4x^2 - 5x - 6$

(2)  $A = -3x^2 - 2x + 4x^3 + 5$ ,  $B = 2x^3 + 7 - 3x^2$

例 1.7  $(3x^2 - x + 1) - 2(x^2 + x - 2)$

$$\begin{aligned} &= 3x^2 - x + 1 - 2x^2 - 2x + 4 \\ &= (3-2)x^2 + (-1-2)x + (1+4) \\ &= x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$

S

練習 1.8  $A = x^2 + 4x - 3$ ,  $B = 2x^2 - x + 4$  とする. 次の式を計算せよ. 解

(1)  $A + 2B$                       (2)  $2A - 3B$                       (3)  $A + B + 2(A - B)$

### 1.1.2 多項式の乗法

ここでは、多項式の乗法について学ぶ。多項式の乗法では、単項式の積の計算が基本になる。そこで、まず単項式の乗法から調べることにしよう。

#### A》単項式の乗法

$a$  を  $n$  個掛けたものを  **$a$  の  $n$  乗** といい、 $a^n$  と書く。とくに、 $a^1 = a$  である。 $a^n$  における  $n$  を、 $a^n$  の<sup>しすう</sup>指数という。

また、 $a, a^2, a^3, \dots$  をまとめて  $a$  の<sup>るいじょう</sup>累乗という。

累乗についての積は、次のように計算される。

$$\begin{aligned} a^3 \times a^2 &= (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^{3+2} = a^5 \\ (a^3)^2 &= (a \times a \times a) \times (a \times a \times a) = a^{3 \times 2} = a^6 \\ (ab)^2 &= ab \times ab = (a \times a) \times (b \times b) = a^2 b^2 \end{aligned}$$

一般に、次の指数法則が成り立つ。

指数法則

$m, n$  を正の整数とする。

$$1 \quad a^m \times a^n = a^{m+n} \quad 2 \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad 3 \quad (ab)^n = a^n b^n$$

単項式の積は、指数法則を用いて計算する。

例 1.8 (1)  $3a^2 \times a^4 = 3 \times a^{2+4} = 3a^6$

**S**

(2)  $2x^3y \times (-5xy^2) = 2 \times (-5) \times x^{3+1} \times y^{1+2} = -10x^4y^3$

(3)  $(-2xy^2)^3 = (-2)^3 \times x^3 \times (y^2)^3 = -8x^3y^6$

練習 1.9 次の式を計算せよ。 **解**

(1)  $2a^3 \times 4a^2$

(2)  $3x^2y \times (-2x^3y^2)$

(3)  $(-3x^2y)^3$

## B 》多項式の乗法

多項式の積は、次の分配法則を用いて計算する.

分配法則

$$A(B + C) = AB + AC \quad (A + B)C = AC + BC$$

## 例 1.9 分配法則を使った積の計算

S

$$\begin{aligned} (1) \quad 3x^2(x^2 + 2x - 4) &= 3x^2 \cdot x^2 + 3x^2 \cdot 2x + 3x^2 \cdot (-4) \\ &= 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (2a^2 - 3a + 1)a &= 2a^2 \cdot a + (-3a) \cdot a + 1 \cdot a \\ &= 2a^3 - 3a^2 + a \end{aligned}$$

注意 例 1.9 で用いた  $\cdot$  は、積を表す記号であり、 $\times$  と同じ意味である。

多項式の積の形をした式について、その積を計算して1つの多項式に表すことを、その式を展開するという。

例 1.10  $(4x^2 - 3x + 1)(x + 2)$  を展開する. S

$$\begin{aligned} &(4x^2 - 3x + 1)(x + 2) \\ &= (4x^2 - 3x + 1)x + (4x^2 - 3x + 1) \cdot 2 \\ &= 4x^3 - 3x^2 + x + 8x^2 - 6x + 2 \\ &= 4x^3 + 5x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 3x + 1 \\ \times) \quad x + 2 \\ \hline 4x^3 - 3x^2 + x \\ \quad 8x^2 - 6x + 2 \\ \hline 4x^3 + 5x^2 - 5x + 2 \end{array}$$

注意 展開した式において、同類項はまとめておく。また、こうべきの順にしておく  
とよい。

## 練習 1.10 次の式を展開せよ. 解

$$(1) \quad 4x^2(2x^2 - 3x + 5)$$

$$(2) \quad (2x - 1)(4x^2 + 3)$$

$$(3) \quad (2x^2 + x - 3)(x - 2)$$

$$(4) \quad (2x^2 + 3)(x^2 - 4x - 1)$$

練習 1.11 次の式を展開し、 $x$  について降べきの順に整理せよ. 解

$$(1) \quad (x^2 + ax - 1)(x + a)$$

$$(2) \quad (ax + b)(cx + d)$$

## C》展開の公式

代表的な式の展開の結果は、公式として利用すると便利である。

展開の公式

$$1 \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$2 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$3 \quad (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

例 1.11 (1)  $(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$  S

(2)  $(4x + 3y)(4x - 3y) = (4x)^2 - (3y)^2 = 16x^2 - 9y^2$

(3)  $(x + 2)(x - 5) = x^2 + \{2 + (-5)\}x + 2 \cdot (-5)$   
 $= x^2 - 3x - 10$

練習 1.12 次の式を展開せよ。 解

(1)  $(2x + 5)^2$

(2)  $(2x - 3y)^2$

(3)  $(5x + 4y)(5x - 4y)$

(4)  $(x + 1)(x + 5)$

(5)  $(x - 3)(x + 8)$

(6)  $(x - y)(x - 4y)$

積  $(ax + b)(cx + d)$  を展開すると、次の公式が得られる。

展開の公式

$$4 \quad (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

例 1.12 (1)  $(3x + 2)(4x + 1) = 3 \cdot 4x^2 + (3 \cdot 1 + 2 \cdot 4)x + 2 \cdot 1 = 12x^2 + 11x + 2$  S

(2)  $(2x - 5y)(3x + 4y) = 2 \cdot 3x^2 + \{2 \cdot 4 + (-5) \cdot 3\}xy + (-5) \cdot 4y^2$   
 $= 6x^2 - 7xy - 20y^2$

練習 1.13 次の式を展開せよ。 解

(1)  $(2x + 1)(4x + 5)$

(2)  $(x + 4)(2x - 3)$

(3)  $(3x - 7)(x + 2)$

(4)  $(2x - 5)(2x - 1)$

(5)  $(x + 3y)(2x - y)$

(6)  $(3x - 2a)(4x - 3a)$

## D》式の展開の工夫

複雑な式を展開するとき、式の一部を1つのまとまりとみると、展開の公式を利用できることがある。

例題 1.1  $(a + b + c)^2$  を展開すると次のようになることを確かめよ。

S

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

解答  $(a + b + c)^2 = \{(a + b) + c\}^2$

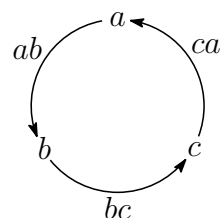
$$= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

←  $a + b = A$  とおくと  
 $(A + c)^2$  の展開になる。

補足 上のような式の展開では、 $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$  の項の順で式を整理しておくことが多い。



練習 1.14 次の式を展開せよ。 解

(1)  $(a + b - c)^2$

(2)  $(x + 2y + 3z)^2$

和や積の組み合わせを工夫することで、計算しやすくなる場合もある。

例題 1.2 次の式を展開せよ.

**S**

$$(1) (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$(2) (a + b)^2(a - b)^2$$

解答 (1)  $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$  ←  $x^2+1=A$  とおくと  
( $A+x$ )( $A-x$ ) の展開になる.

$$= \{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\}$$

$$= (x^2 + 1)^2 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$$

$$= x^4 + x^2 + 1$$

(2)  $(a + b)^2(a - b)^2 = \{(a + b)(a - b)\}^2$  ← 掛ける順序を変えれば、  
展開の公式 2 が使える.

$$= (a^2 - b^2)^2$$

$$= (a^2)^2 - 2a^2b^2 + (b^2)^2$$

$$= a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

練習 1.15 次の式を展開せよ. **解**

$$(1) (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 3x + 2)$$

$$(2) (x - y - z)(x - y + z)$$

$$(3) (x + 1)^2(x - 1)^2$$

$$(4) (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

## 1.1.3 因数分解

$(x+2)(x+3)$ を展開すると、次の等式が成り立つことがわかる。

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

このように、1つの多項式を1次以上の多項式の積の形に表すことを、式を因数分解するといい、積を作っている各式をもとの式の因数という。ここでは、因数分解について学ぼう。

## A 》 共通因数による因数分解

多項式の各項に共通な因数があれば、その共通因数をカッコの外にくくり出して、式を因数分解することができる。

$$AB + AC = A(B + C)$$

$A$  が共通因数

例 1.13  $2ax^2 + 6axy$  の因数分解

共通因数  $2ax$  があるから

$$2ax^2 + 6axy = 2ax(x + 3y)$$

$$2ax^2 = 2ax \cdot x$$

$$6axy = 2ax \cdot 3y$$

S

注意 共通因数はすべてカッコの外にくくり出す。

## 練習 1.16 次の式を因数分解せよ。 解

$$(1) 12x^3 - 8x^2y$$

$$(2) 3a^2x + 6ax^2 - 2ax$$

## 例題 1.3 次の式を因数分解せよ。

S

$$(a-b)x + (b-a)y$$

$$\begin{aligned} \text{解答 } (a-b)x + (b-a)y &= (a-b)x - (a-b)y \\ &= (a-b)(x-y) \end{aligned}$$

←  $(a-b)$  が共通因数

## 練習 1.17 次の式を因数分解せよ。 解

$$(1) (a+b)c + d(a+b)$$

$$(2) (x-2y)a + (2y-x)b$$

## B 》 2 次式の因数分解

展開の公式を逆に利用すると，因数分解の公式が得られる．

因数分解の公式

$$1 \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$2 \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$3 \quad x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

因数分解の公式 1, 2 が利用できる因数分解の例を示す．

例 1.14 (1)  $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = (x + 4)^2$

S

$$(2) \quad 9x^2 - 6xy + y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = (3x - y)^2$$

$$(3) \quad 4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$$

練習 1.18 次の式を因数分解せよ． 解

$$(1) \quad x^2 + 10x + 25$$

$$(2) \quad x^2 - 12x + 36$$

$$(3) \quad x^2 + 6xy + 9y^2$$

$$(4) \quad 4a^2 - 4ab + b^2$$

$$(5) \quad x^2 - 9y^2$$

$$(6) \quad 16a^2 - 25b^2$$

次に、因数分解の公式 3 が利用できる因数分解の例を示す。

例 1.15 (1)  $x^2 + 6x + 8 = x^2 + (2 + 4)x + 2 \cdot 4$   
 $= (x + 2)(x + 4)$

[S]

(2)  $x^2 + 2xy - 8y^2 = x^2 + (-2y + 4y)x + (-2y) \cdot 4y$   
 $= (x - 2y)(x + 4y)$

練習 1.19 次の式を因数分解せよ。 [解]

(1)  $x^2 + 8x + 12$

(2)  $x^2 - 13x + 36$

(3)  $a^2 + a - 20$

(4)  $x^2 + 5xy + 6y^2$

(5)  $a^2 - 8ab + 15b^2$

(6)  $x^2 - ax - 12a^2$

展開の公式 4 を逆に利用する因数分解は、次のようになる。

因数分解の公式

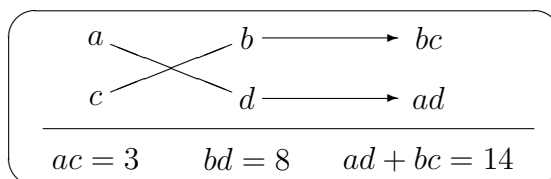
$$4 \quad acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

$3x^2 + 14x + 8$  の因数分解

公式 4 において

$$ac = 3, ad + bc = 14, bd = 8$$

となる  $a, b, c, d$  をみつけられよう。



①  $ac = 3$  の 3 を  $1 \times 3$

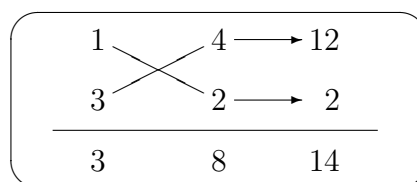
$bd = 8$  の 8 を  $1 \times 8, 2 \times 4, 4 \times 2, 8 \times 1$

などと、積に分解する。

②  $a = 1, c = 3$  として,  $b, d$  の候補から

$$ad + bc = 14$$

となるものを, 上の図のような形式で計算してみると, 右の場合が適する。



$$a = 1, b = 4, c = 3, d = 2$$

よって  $3x^2 + 14x + 8 = (x + 4)(3x + 2)$

補足 上の図式のような計算をたすき掛けという。

[たすき掛け]

深化 1.1 上の ② の計算において,  $b, d$  の候補として  $-1$  と  $-8, -2$  と  $-4$  はたすき掛けの計算をしなくても適さないことがわかる。その理由を説明してみよう。 [解]

例題 1.4 次の式を因数分解せよ.

**S**

(1)  $2x^2 - 5x + 3$

(2)  $4x^2 - 8xy - 5y^2$

解答 (1)  $2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$

(2)  $4x^2 - 8xy - 5y^2 = (2x + y)(2x - 5y)$

|                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $  \begin{array}{rcl}  1 & \searrow & -1 \longrightarrow -2 \\  2 & \swarrow & -3 \longrightarrow -3 \\  \hline  2 & & 3 \quad -5  \end{array}  $ | $  \begin{array}{rcl}  2 & \searrow & y \longrightarrow 2y \\  2 & \swarrow & -5y \longrightarrow -10y \\  \hline  4 & & -5y^2 \quad -8y  \end{array}  $ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

練習 1.20 次の式を因数分解せよ. **解**

(1)  $3x^2 + 7x + 2$

(2)  $2x^2 + 9x + 10$

(3)  $2x^2 - 13x + 6$

(4)  $4y^2 + 5y - 21$

(5)  $3x^2 + 5xy - 2y^2$

(6)  $6x^2 - 7ax - 3a^2$

## C》因数分解の工夫

複雑な式を因数分解するとき、式の一部を1つのまとまりとみるなど、式の形の特徴に着目すると、因数分解の公式を利用できることがある。

例題 1.5 次の式を因数分解せよ。

**S**

$$(1) (x+y)^2 + 2(x+y) - 15$$

$$(2) x^4 - 3x^2 - 4$$

|                                                                                                                                        |                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>解答 (1) <math>(x+y)^2 + 2(x+y) - 15</math></p> <p><math>= \{(x+y) - 3\}\{(x+y) + 5\}</math></p> <p><math>= (x+y-3)(x+y+5)</math></p> | <p><math>\leftarrow x+y=A</math> とおくと</p> <p><math>A^2+2A-15</math></p> <p><math>= (A-3)(A+5)</math></p> |
| <p>(2) <math>x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2+1)(x^2-4)</math></p> <p><math>= (x^2+1)(x+2)(x-2)</math></p>                                        | <p><math>\leftarrow x^2=A</math> とおくと</p> <p><math>A^2-3A-4</math></p> <p><math>= (A+1)(A-4)</math></p>  |

練習 1.21 次の式を因数分解せよ。 **解**

$$(1) (x-y)^2 - 5(x-y) + 6$$

$$(2) 2(x+3y)^2 - (x+3y) - 1$$

$$(3) (x+y)^2 - 9$$

$$(4) x^2 - (y-1)^2$$

$$(5) x^4 - 8x^2 - 9$$

$$(6) x^4 - 16$$

2種類以上の文字を含む式は、次数の最も低い文字に着目して降べきの順に整理すると、見通しよく因数分解できることがある。

応用例題 1.1 次の式を因数分解せよ。

**S**

$$x^2 + xy + x + 2y - 2$$

考え方》この式は、 $x$ については2次式、 $y$ については1次式であるから、次数の低い方の文字 $y$ について整理する。

$$\begin{aligned} \text{解答 } x^2 + xy + x + 2y - 2 &= (x+2)y + (x^2 + x - 2) \\ &= (x+2)y + (x+2)(x-1) \\ &= (x+2)\{y + (x-1)\} \\ &= (x+2)(x+y-1) \end{aligned}$$

練習 1.22 次の式を因数分解せよ。 **解**

$$(1) \quad x^2 + xy - 4x - y + 3$$

$$(2) \quad x^2 + ax - 3a - 9$$

応用例題 1.2 次の式を因数分解せよ。

**S**

$$2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$$

考え方》この式は、 $x$ についても $y$ についても2次式であるから、たとえば $x$ について降べきの順に整理する。定数項にあたる $y$ の2次式を因数分解し、12ページの因数分解の公式4を利用する。

$$\begin{aligned} \text{解答 } 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2 &= 2x^2 + (5y-3)x + (3y^2 - 5y - 2) \\ &= 2x^2 + (5y-3)x + (y-2)(3y+1) \\ &= \{x + (y-2)\}\{2x + (3y+1)\} \\ &= (x+y-2)(2x+3y+1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & y-2 \longrightarrow 2y-4 \\ 2 & \times & 3y+1 \longrightarrow 3y+1 \\ \hline & & 5y-3 \end{array}$$

練習 1.23 次の式を因数分解せよ。 **解**

$$(1) \quad x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x - 3y + 1$$

$$(2) \quad 3x^2 - 5ax + 2a^2 - 3x + a - 6$$

応用例題 1.3 次の式を因数分解せよ.

**S**

$$(a+b)c^2 + (b+c)a^2 + (c+a)b^2 + 2abc$$

考え方 》 この式は,  $a, b, c$  のどの文字についても2次式であるから, たとえば  $a$  について降べきの順に整理する.

解答

$$\begin{aligned} & (a+b)c^2 + (b+c)a^2 + (c+a)b^2 + 2abc \\ &= (b+c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a + (b^2c + bc^2) \\ &= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c) \\ &= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\} = (b+c)(a+b)(a+c) \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

練習 1.24 次の式を因数分解せよ. **解**

$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$$

**発展** 3次式の展開と因数分解

$(a+b)^3$  を展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\
 &= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
 &= (a^2+2ab+b^2)a + (a^2+2ab+b^2)b \\
 &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 a^2+2ab+b^2 \\
 \times) \quad a+b \\
 \hline
 a^3+2a^2b+ab^2 \\
 \hline
 a^2b+2ab^2+b^3 \\
 \hline
 a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
 \end{array}$$

よって  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \cdots \textcircled{1}$

また、 $\textcircled{1}$ において、 $b$ を $-b$ で置き換えると

$$(a-b)^3 = \{a+(-b)\}^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

よって  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

したがって、次の展開公式が成り立つ。

展開の公式

$$\begin{aligned}
 \mathbf{5} \quad (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
 \end{aligned}$$

**Ex 1.1** (1)  $(x+1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$   
 $= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(2)  $(2x-y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 - y^3$   
 $= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

**演習 1.1** 次の式を展開せよ。 解

(1)  $(x+2)^3$

(2)  $(x-1)^3$

(3)  $(3a+b)^3$

(4)  $(2x-3y)^3$

次の式の展開の結果も、公式として利用すると便利である。

展開の公式

$$\begin{aligned} 6 \quad (a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3+b^3 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3-b^3 \end{aligned}$$

演習 1.2 展開の公式 6 が成り立つことを、左辺を展開して確かめよ。 解

$$\begin{aligned} \text{Ex 1.2} \quad (1) \quad (x+2)(x^2-2x+4) &= (x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2) \\ &= x^3+2^3=x^3+8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (x-2y)(x^2+2xy+4y^2) &= (x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\} \\ &= x^3-(2y)^3=x^3-8y^3 \end{aligned}$$

演習 1.3 次の式を展開せよ。 解

$$(1) \quad (x+2)(x^2-2x+4) \qquad (2) \quad (x-3)(x^2+3x+9)$$

$$(3) \quad (x+3y)(x^2-3xy+9y^2) \qquad (4) \quad (2x-3a)(4x^2+6ax+9a^2)$$

展開の公式 6 を逆に利用する因数分解は、次のようになる。

因数分解の公式

$$\begin{aligned} 5 \quad a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex 1.3} \quad (1) \quad x^3+64 &= x^3+4^3=(x+4)(x^2-x\cdot 4+4^2) \\ &= (x+4)(x^2-4x+16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 27x^3-a^3 &= (3x)^3-a^3 \\ &= (3x-a)\{(3x)^2+3x\cdot a+a^2\} \\ &= (3x-a)(9x^2+3ax+a^2) \end{aligned}$$

演習 1.4 次の式を因数分解せよ。 解

$$(1) \quad x^3-1 \qquad (2) \quad x^3+27a^3$$

$$(3) \quad x^3-64 \qquad (4) \quad 125x^3-8y^3$$

### 1.1.4 問題

問題 1.1 次の式を計算せよ. 解

→ p.4~6

$$(1) (6x^3 - 3x - 4) + (5 + 8x^2 + 2x - x^3) + 2(x - 4x^2 - 3)$$

$$(2) (7x^3 - 4x - 5) + x(3x + 6 - 2x^2) - 3x(2x^2 - x + 4)$$

問題 1.2 次の式を展開せよ. 解

→ p.6~8

$$(1) (2m + 5)(m - 2)$$

$$(2) (6a - 5b)(6a + 5b)$$

$$(3) (3 - 2x)(1 + x)$$

$$(4) (x - a + 1)^2$$

$$(5) (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

$$(6) (x + y - z)(x - y + z)$$

$$(7) (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$$(8) (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

$$(9) (x + 4)(x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

問題 1.3 次の式を因数分解せよ. 解

→ p.10~13

(1)  $2ax^2 - 8a$

(2)  $ax^2 + by^2 - ay^2 - bx^2$

(3)  $(x-4)(3x+1) + 10$

(4)  $2n^3 + 3n^2 + n$

問題 1.4 次の式を因数分解せよ. 解

→ p.13~16

(1)  $4x^2 - y^2 + 2y - 1$

(2)  $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$

(3)  $x^3 + ax^2 - x^2 - a$

(4)  $6x^2 + 7xy + 2y^2 + x - 2$

(5)  $3x^2 + 2xy - y^2 + 7x + 3y + 4$

(6)  $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$

(7)  $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

問題 1.5 35 のように一の位の数<sup>けた</sup>が5である2桁の自然数を2乗した値を簡単に求める方法を,  $a$  を9以下の自然数として  $(10a+5)^2$  の展開式から考察せよ. 解

## 1.2 実数

### 1.2.1 実数

自然数  $1, 2, 3, \dots$  に,  $0$  と  $-1, -2, -3, \dots$  とを合わせて**整数**という. また, 整数  $m$  と  $0$  でない整数  $n$  を用いて分数  $\frac{m}{n}$  の形に表される数を**有理数**という. たとえば,  $\frac{1}{3}$  や  $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$  は有理数である. 整数  $m$  は  $\frac{m}{1}$  と表されるから, 整数は有理数である. ここでは, 数についてまとめよう.

#### A》有理数

整数以外の有理数を小数で表すと, たとえば次のようになる.

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{4} = 0.25 \qquad \textcircled{2} \quad \frac{2}{3} = 0.666\dots \qquad \textcircled{3} \quad \frac{7}{22} = 0.3181818\dots$$

①のように, 小数第何位かで終わる小数を**有限小数**という. これに対し, 小数点以下の数字が限りなく続く小数を**無限小数**という. 無限小数のうち, ②, ③のように, ある位以下では数字の同じ並びが繰り返される小数を**循環小数**という.

循環小数を次のように書き表すことがある.

$$\begin{array}{ll} 0.666\dots = 0.\dot{6} & 0.3181818\dots = 0.3\dot{1}\dot{8} \\ 1.234234234\dots = 1.\dot{2}\dot{3}\dot{4} & 1.2342341234\dots = 1.\dot{2}\dot{3}\dot{4}\dot{1} \end{array}$$

**練習 1.25** 次の分数を小数に直し, 循環小数の表し方で書け. 解

$$(1) \quad \frac{1}{8} \qquad (2) \quad \frac{8}{9} \qquad (3) \quad \frac{10}{27} \qquad (4) \quad \frac{25}{22}$$

有理数について, 次のことが知られている.

整数以外の有理数は, 有限小数か循環小数のいずれかで表される.

逆に, 有限小数と循環小数は必ず分数の形に表され, 有理数である.

$$\text{有理数} \left\{ \begin{array}{l} \text{整数} \\ \text{有限小数} \\ \text{循環小数} \end{array} \right.$$

ここでは、 $m, n$  が正の整数のとき、分数  $\frac{m}{n}$  が整数、有限小数、循環小数のいずれかで表されることを、数の割り算の仕組みから確かめてみよう。

たとえば、 $\frac{9}{7}$  を小数で表すには、  
次のような割り算を行う。

- ① 9 を 7 で割ると 商 1, 余り 2
- ② 2 の横に 0 を書いて 20 にする。
- ③ 20 を 7 で割ると 商 2, 余り 6
- ④ 6 の横に 0 を書いて 60 にする。

以下、同じ手順を繰り返す。

上の手順で、①、③ はいずれも  
「7 で割ったときの商と余りを求める」  
計算である。整数を 7 で割った余りは  
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである。

右の割り算はいつまでも続くが、割り算を続けると同じ余りが出てくる。

一般の場合について考えてみよう。 $m, n$  は正の整数とする。 $m$  を  $n$  で割ることを考えると、各段階の割り算の余りは、 $n$  個の整数

$$0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

のいずれかである。割り算の途中で余りに 0 が出てきたら、分数  $\frac{m}{n}$  は整数か有限小数で表される。あまりに 0 が出てこない場合、余りの種類は  $(n-1)$  個しかないから、割り算を続けると必ず同じ余り出てくる。そこから先は、その間の計算の繰り返しになり、分数  $\frac{m}{n}$  は循環小数で表される。

$$\begin{array}{r}
 \overline{1.2857142 \dots} \\
 7 \overline{) 9} \\
 \underline{7} \phantom{0} \\
 20 \phantom{0} \leftarrow \\
 \underline{14} \phantom{0} \\
 60 \phantom{0} \\
 \underline{56} \phantom{0} \\
 40 \phantom{0} \\
 \underline{35} \phantom{0} \\
 50 \phantom{0} \text{ 同じ余り} \\
 \underline{49} \phantom{0} \\
 10 \phantom{0} \\
 \underline{7} \phantom{0} \\
 30 \phantom{0} \\
 \underline{28} \phantom{0} \\
 20 \phantom{0} \leftarrow
 \end{array}$$

次に、循環小数を分数の形に表すことを考えよう.

例 1.16 循環小数  $0.\dot{1}8$  を分数で表す.  $x = 0.\dot{1}8$  とおく.

**S**

$$\begin{array}{rcl}
 x & = & 0.181818\cdots \\
 100x & = & 18.181818\cdots \\
 100x \text{ と } x \text{ の差を考えると, 右の計算から} & & \begin{array}{r} 100x = 18.181818\cdots \\ -) \quad x = 0.181818\cdots \\ \hline 99x = 18 \end{array} \\
 99x = 18 \quad \text{よって} \quad x & = & \frac{18}{99} = \frac{2}{11}
 \end{array}$$

練習 1.26 次の循環小数を分数で表せ. **解**

- (1)  $0.\dot{1}$                       (2)  $0.2\dot{7}$                       (3)  $0.\dot{6}4\dot{8}$                       (4)  $0.2\dot{5}\dot{4}$

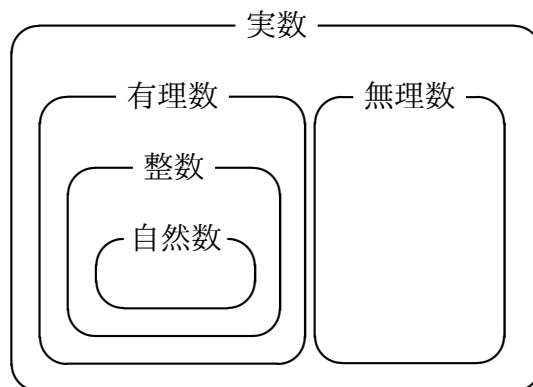
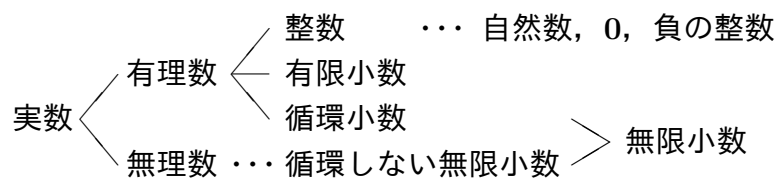
## B》実数

整数と、有限小数または無限小数で表される数とを合わせて**実数**という. 実数のうち、有理数でない数を**無理数**という.

無理数は、循環しない無限小数で表される数であり、分母、分子がともに整数である分数で表すことはできない.

たとえば、 $\sqrt{2}$  や円周率  $\pi$  は無理数であることが知られている.

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309\cdots, \quad \pi = 3.14159265358979\cdots$$



## C》数の範囲と四則計算

2つの数  $a, b$  の四則<sup>3</sup>計算の結果について考えてみよう.

例 1.17 (1)  $a, b$  が自然数のとき  $\leftarrow a = 1, b = 2$  など S  
 和  $a + b$ , 積  $ab$  は常に自然数であるが,  
 差  $a - b$ , 商  $\frac{a}{b}$  は必ずしも自然数であるとは限らない.

(2)  $a, b$  が整数のとき  $\leftarrow a = -2, b = 3$  など  
 和  $a + b$ , 差  $a - b$ , 積  $ab$  は常に整数であるが,  
 商  $\frac{a}{b}$  は必ずしも整数であるとは限らない.

自然数, 整数は, それぞれの数の範囲で常に四則計算ができるとは限らない. 一方, 有理数, 実数は, それぞれの数の範囲で常に四則計算ができる. すなわち, 次のことがいえる.

2つの有理数の和, 差, 積, 商は常に有理数である.  
 2つの実数の和, 差, 積, 商は常に実数である.

練習 1.27 下の表は数の範囲と四則計算についてまとめたものである. 表の空らん  
 に○か×のうち適切なものを入れよ. また, ×の場合は, 結果がその範囲にない計  
 算の例を1つあげよ. 解

| 数の範囲 | 加法 | 減法 | 乗法 | 除法 |
|------|----|----|----|----|
| 自然数  | ○  | ×  |    |    |
| 整数   |    |    |    |    |
| 有理数  |    |    |    |    |
| 実数   |    |    |    |    |

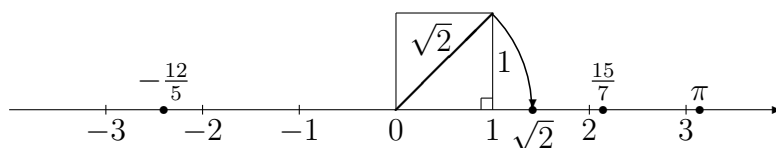
■表の説明■

○は計算がその範囲で常にできる場合  
 ×は計算がその範囲で常にはできるとは  
 限らない場合

<sup>3</sup> 加法, 減法, 乗法, 除法をまとめて四則といい, 四則計算の結果が, それぞれ和, 差, 積, 商である. ただし, 除法において0で割ることは考えない.

## D》実数と数直線

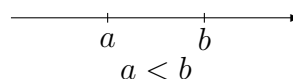
直線上に基準となる点  $O$  をとり，実数  $0$  を対応させる．単位の長さ  $1$  と正の向きを定めると，この直線上の点に対して実数を対応させることができる．[実数と数直線]



この直線上では，それぞれの点に 1 つの実数が対応している．逆に，どんな実数でもこの直線上の 1 点で表される．

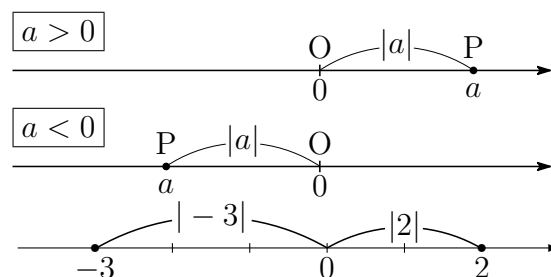
このように点と実数を対応させた直線を数直線といい，点  $O$  を原点という．

実数の大小関係は，数直線上では右の図のように，点の左右の位置関係で表される．



数直線上で，点  $P$  に実数  $a$  が対応しているとき， $a$  を点  $P$  の座標といい，座標が  $a$  である点  $P$  を  $P(a)$  で表す．

数直線上の原点  $O$  と点  $P(a)$  の距離を実数  $a$  の絶対値といい，記号  $|a|$  で表す． $0$  の絶対値は  $|0| = 0$  である．



例 1.18 2 の絶対値は  $|2| = 2$  [S]  
 $-3$  の絶対値は  $|-3| = 3$

練習 1.28 次の値を求めよ．[解]

- (1)  $|3|$                       (2)  $|-4|$                       (3)  $|\sqrt{-2}|$

実数  $a$  の絶対値について，次のことが成り立つ．

絶対値

- 1  $|a| \geq 0$
- 2  $a \geq 0$  のとき  $|a| = a$   
 $a < 0$  のとき  $|a| = -a$

例 1.19 (1)  $|5 - 3| = |2| = 2$  [S]  
 (2)  $|3 - 5| = |-2| = -(-2) = 2$   
 (3)  $1 - \sqrt{2} < 0$  であるから  
 $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

練習 1.29 次の値を求めよ．[解]

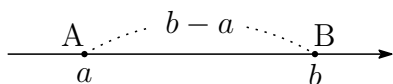
- (1)  $|-2 + 3|$                       (2)  $|1 - 5|$                       (3)  $|3 - \pi|$

**研究** 数直線上の2点間の距離

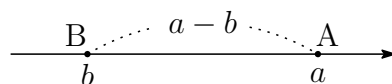
数直線上の2点  $A(a)$ ,  $B(b)$  間の距離  $AB$  は

$$a \leq b \text{ のとき } AB = b - a, \quad a > b \text{ のとき } AB = a - b = -(b - a)$$

$a < b$  のとき



$a > b$  のとき



一般に、2点  $A(a)$ ,  $B(b)$  間の距離  $AB$  は  $AB = |b - a|$

**Ex 1.4** 2点  $A(4)$ ,  $B(-2)$  の距離  $AB$  は

$$AB = |-2 - 4| = |-6| = 6$$

**演習 1.5** 次の2点間の距離を求めよ。 解

- (1)  $A(2)$ ,  $B(5)$       (2)  $A(3)$ ,  $B(-1)$       (3)  $A(-2)$ ,  $B(-6)$

### 1.2.2 根号を含む式の計算

2乗すると $a$ になる数を $a$ の平方根という．実数は2乗して負になることがないから，負の数の平方根は実数の範囲には存在しない．ここでは負でない数の平方根を考えよう<sup>4</sup>．

#### A》平方根

正の数 $a$ の平方根は2つあり，それらは絶対値が等しく符号が異なる．その正の平方根を $\sqrt{a}$ と書く．負の平方根は $-\sqrt{a}$ である．

0の平方根は0だけであり， $\sqrt{0} = 0$ と定める．記号 $\sqrt{\quad}$ を根号といい， $\sqrt{a}$ を「ルート $a$ 」と読む．また， $\sqrt{a} \geq 0$ である．

$a$ の平方根 $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ を合わせて $\pm\sqrt{a}$ と書く．

補足 記号 $\pm$ を複号といい，「プラスマイナス」と読む．

例 1.20 (1) 3の平方根は $\sqrt{3}$ と $-\sqrt{3}$ ，すなわち $\pm\sqrt{3}$ である．

**S**

(2)  $\sqrt{49}$ は49の正の平方根で， $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$ である．

練習 1.30 次の問いに答えよ． **解**

(1) 6の平方根は何か．

(2)  $\sqrt{16}$ ， $\sqrt{\frac{9}{25}}$ の値を，それぞれ求めよ．

実数 $x$ について， $\sqrt{x^2}$ を考えてみよう．

$$x = 6 \text{ のとき } \sqrt{x^2} = \sqrt{6^2} = 6 \quad \leftarrow \sqrt{6^2} = 6$$

$$x = -6 \text{ のとき } \sqrt{x^2} = \sqrt{(-6)^2} = 6 \quad \leftarrow \sqrt{(-6)^2} = 6 = -(-6)$$

一般に，次のことが成り立つ．

$$\left. \begin{array}{ll} x \geq 0 \text{ のとき } & \sqrt{x^2} = x \\ x < 0 \text{ のとき } & \sqrt{x^2} = -x \end{array} \right\} \text{すなわち } \sqrt{x^2} = |x|$$

<sup>4</sup>負の数の平方根は，数学 II で扱っている．

## B》根号を含む式の計算

平方根の積と商について、次のことが成り立つ.

$a, b$  が正の数のとき

$$1 \quad \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad 2 \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

【1の証明】  $\sqrt{a}\sqrt{b}$  を2乗すると  $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$

ここで、 $\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$  であるから、 $\sqrt{a}\sqrt{b}$  は  $ab$  の正の平方根である.

すなわち  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

証終

【2の証明】  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  を2乗すると  $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$

ここで、 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} > 0$  であるから、 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  は  $\frac{a}{b}$  の正の平方根である.

すなわち  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

証終

また、1 から、次のことが成り立つ.

$a > 0, k > 0$  のとき

$$\sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}$$

例 1.21 (1)  $\sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$

S

$$(2) \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{40}{2}} = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

練習 1.31 次の計算をせよ. 解

$$(1) \sqrt{2}\sqrt{3} \qquad (2) \sqrt{2}\sqrt{8} \qquad (3) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \qquad (4) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$$

根号を含む式の加法, 減法は, 次のように行う.

例 1.22 (1)  $6\sqrt{2} + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (6 + 1 - 3)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

S

$$(2) 4\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ = (4 - 2 + 3)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

練習 1.32 次の計算をせよ. 解

$$(1) 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \qquad (2) \sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{72}$$

例 1.23 (1)  $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + 4\sqrt{5})$  [S]

$$= 2\sqrt{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{5} - \sqrt{5}\sqrt{3} - \sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}$$

$$= 2\cdot 3 + 8\sqrt{15} - \sqrt{15} - 4\cdot 5 = -14 + 7\sqrt{15}$$

(2)  $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$

練習 1.33 次の計算をせよ。 [解]

(1)  $(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$  (2)  $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

(3)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$  (4)  $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})$

### C》分母の有理化

次のように、分母に根号を含む式を変形して、分母に根号を含まない式にすることを、分母を有理化するという。

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \leftarrow \frac{b}{a} = \frac{bc}{ac}$$

練習 1.34 次の数の分母を有理化せよ。 [解]

(1)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  (2)  $\frac{4}{\sqrt{2}}$  (3)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  (4)  $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

分母が  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  または  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  の形の場合は、次のことを利用する。

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

例題 1.6  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$  の分母を有理化せよ。 [S]

解答  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5} - (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}$

$$= \frac{\sqrt{10} - 2}{3}$$

練習 1.35 次の数の分母を有理化せよ。 [解]

(1)  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$  (2)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$  (3)  $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6} + 2}$  (4)  $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

## D》式の値

ここでは、式の値を工夫して求めてみよう。

応用例題 1.4  $x = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$  のとき、次の式の値を求めよ。 S

$$(1) \ x + y, \ xy \qquad (2) \ x^2 + y^2$$

考え方》(2)  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  であるから、次の等式が成り立つ。

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$x^2 + y^2$  の値は、 $x + y$  と  $xy$  の値から求めることができる。

解答

$$x = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$$

$$(1) \ x + y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{5}$$

$$xy = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \ x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

練習 1.36  $x = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$  のとき、次の式の値を求めよ。 解

$$(1) \ x + y, \ xy \qquad (2) \ x^2 + y^2$$

練習 1.37  $x = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$  のとき、次の式の値を求めよ。 解

$$(1) \ x + y, \ xy \qquad (2) \ x^2 + y^2 \qquad (3) \ x^2y + xy^2$$

深化 1.2 応用例題 1.4, 練習 1.36, 練習 1.37 の式  $x + y$ ,  $xy$ ,  $x^2y + xy^2$  にはある共通な性質がある。その性質を説明してみよう。 解

**発展** 2重根号

根号を2重に含む式を簡単な形に変形する方法について考えてみよう.

たとえば,  $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 0$ ,  $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$  であるから

$$\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

ここで  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2 = 3 + 2 + 2\sqrt{3 \cdot 2}$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2 = 3 + 2 - 2\sqrt{3 \cdot 2}$$

であるから, 次のことが成り立つ.

$$\sqrt{(3+2) + 2\sqrt{3 \cdot 2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad \sqrt{(3+2) - 2\sqrt{3 \cdot 2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

すなわち  $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

一般に, 次のことが成り立つ.

**2重根号**

$a > 0$ ,  $b > 0$  とする.

$$\sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a > b \text{ のとき } \sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

**補足** このように変形することを **2重根号をはずす** という.

**Ex 1.5** (1)  $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3) + 2\sqrt{5 \cdot 3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

(2)  $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(6+2) - 2\sqrt{6 \cdot 2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

(3)  $\sqrt{4 + \sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}$   
 $= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$

**演習 1.6** 次の式の2重根号をはずして簡単にせよ. 解

(1)  $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$       (2)  $\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$       (3)  $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

**注意** 2重根号をはずす変形がいつでもできるわけではない.

## 1.2.3 問題

問題 1.6  $a$  が次の値をとるとき,  $|a-3|-|a+2|$  の値を求めよ. 解 → p.25

- (1)  $a=0$                       (2)  $a=5$                       (3)  $a=-4$

問題 1.7  $x$  が次の値をとるとき,  $\sqrt{(x+1)^2}$  の値を求めよ. 解 → p.27

- (1)  $x=3$                       (2)  $x=-1$                       (3)  $x=-3$

問題 1.8 次の (1), (2) の式を計算せよ. また, (3)~(6) の式の分母を有理化せよ.  
解 → p.28, 29

(1)  $2\sqrt{27}-3\sqrt{12}+\sqrt{54}$                       (2)  $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

(3)  $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$                       (4)  $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(5)  $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$                       (6)  $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$

問題 1.9  $\sqrt{2}=1.4142$  とするとき, 分母の有理化を利用して, 次の値を求めよ. 解

(1)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$                       (2)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$  → p.29

問題 1.10  $x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}, y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$  のとき, 次の式の値を求めよ. 解 → p.30

(1)  $x^2+y^2$                       (2)  $x^3y+xy^3$                       (3)  $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

問題 1.11  $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$  の整数の部分を  $a$ , 小数の部分を  $b$  とする. このとき,  $a$  と  $b$  の値を求めよ. 解

問題 1.12  $\sqrt{5}$  と  $\sqrt{2}+\sqrt{3}$  は等しくないことを説明せよ. 解

## 1.3 1 次不等式

### 1.3.1 不等式の性質

不等号の種類と意味について，復習しておこう．

| 不等号    | 使い方の例      | 意 味             |
|--------|------------|-----------------|
| $<$    | $A < B$    | $A$ は $B$ より小さい |
| $>$    | $A > B$    | $A$ は $B$ より大きい |
| $\leq$ | $A \leq B$ | $A$ は $B$ 以下    |
| $\geq$ | $A \geq B$ | $A$ は $B$ 以上    |

数量の間の大小関係を不等号を用いて表した式を不等式という．  
ここでは，不等式の性質について学ぼう．

#### A 》 不等式

以下，本書では，不等式で使う文字が表す数は，断りがなければ実数の範囲で考えるものとする．

数量の大小関係を述べた事柄を不等式で表してみよう．

例 1.24 (1) ある数  $x$  の 3 倍から 5 を引いた数は 10 より小さい.

**S**

このことを不等式で表すと  $3x - 5 < 10$

(2) 2 数  $a$ ,  $b$  の和は正で，かつ 5 以下である．

このことを不等式で表すと  $0 < a + b \leq 5$

練習 1.38 次の数量の大小関係を不等式で表せ. **解**

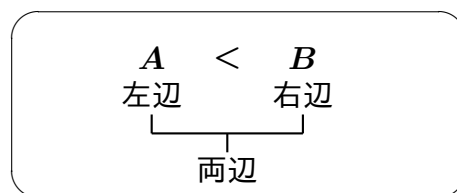
(1) ある数  $x$  の 2 倍に 3 を足した数は 5 以上である．

(2) 2 数  $a$ ,  $b$  の和は負で，かつ  $-2$  より大きい．

(3) 1 個 150 円の菓子を  $x$  個買って 120 円の箱に詰めてもらったところ，代金を支払うには 1000 円では足りなかった。

## B 》不等式の性質

不等式でも等式の場合と同様に，不等号の左側の部分を左辺，右側の部分を右辺といい，左辺と右辺を合わせて両辺という．



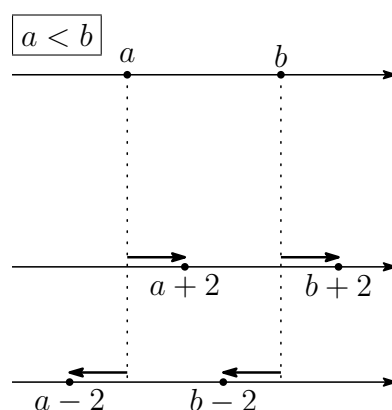
不等式を利用するために，不等式の両辺に同じ数を足したり，同じ数を掛けたりしたときに，不等式がどのように変化するか数直線を使って調べてみよう．

2つの実数  $a, b$  の大小関係  $a < b$  は，数直線上の位置関係として，右の図のように表される．

実数を数直線上の点で表して考えると，次のことがいえる．

$a < b$  のとき

$$a + 2 < b + 2, \quad a - 2 < b - 2$$



不等式について，次のことがいえる．

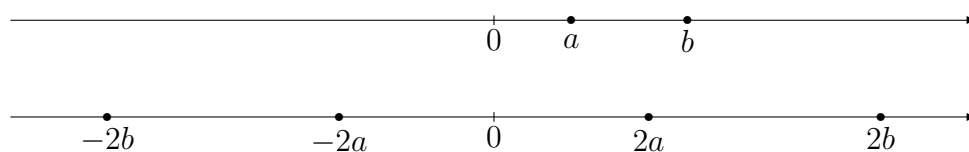
両辺に同じ数を足しても，両辺の大小関係は変わらない．

両辺から同じ数を引いても，両辺の大小関係は変わらない．

例 1.25  $a > 0, b > 0$  とする．

**S**

$a < b$  のとき， $2a$  と  $2b$ ， $-2a$  と  $-2b$  の数直線上の位置関係は，下の図のようになる．



図から，次のことがいえる．

$$「a < b \text{ のとき } 2a < 2b, \quad -2a > -2b」 \quad \cdots \textcircled{1}$$

練習 1.39 次の各場合にも，例 1.25 が成り立つことを数直線を用いて確かめよ。 解

(1)  $a < 0, b < 0$

(2)  $a < 0, b > 0$

練習 1.40  $a < b$  のとき，次の  $\square$  に適する不等号は何か。 解

(1)  $3a \square 3b$

(2)  $-3a \square -3b$

(3)  $\frac{a}{2} \square \frac{b}{2}$

(4)  $\frac{a}{-2} \square \frac{b}{-2}$

不等式の性質についてまとめると，次のようになる。

不等式の性質

1  $A < B$  ならば  $A + C < B + C$

2  $A < B$  ならば  $A - C < B - C$

3  $A < B, C > 0$  ならば  $AC < BC, \frac{A}{C} < \frac{B}{C}$

4  $A < B, C < 0$  ならば  $AC > BC, \frac{A}{C} > \frac{B}{C}$

不等式では，

両辺に負の数を掛けたり，  
両辺を負の数で割ったりすると，  
両辺の大小関係が入れかわる。

$$\begin{array}{ll} A < B & -2 \text{ をかけると} \\ \downarrow & \text{不等号の向きが} \\ -2A > -2B & \text{変わる} \end{array}$$

練習 1.41  $a < b$  のとき，次の  $\square$  に適する不等号は何か。 解

(1)  $4a + 1 \square 4b + 1$

(2)  $1 - a \square 1 - b$

(3)  $\frac{a}{2} - 3 \square \frac{b}{2} - 3$

(4)  $-\frac{a}{5} + 2 \square -\frac{b}{5} + 2$

## 1.3.2 1次不等式

$x$  のとるべき値を決める条件を表した不等式を,  $x$  についての不等式という.  $x$  についての不等式において, 不等式を成り立たせる  $x$  の値を, その不等式の解という. ここでは, 不等式の解の求め方について学ぼう.

## A 》 1次不等式とその解き方

例 1.26 不等式  $3x - 5 < 10$  の解

S

$x = 1$  とすると, 不等式  $3x - 5 < 10$  は成り立つ.

よって,  $x = 1$  はこの不等式の解である.

$x = 6$  とすると, 不等式  $3x - 5 < 10$  は成り立たない.

よって,  $x = 6$  はこの不等式の解ではない.

不等式のすべての解を求めることを, その不等式を解くという.

不等式のすべての解の集まりを, その不等式の解ということもある.

例 1.27 不等式  $3x - 5 < 10$  を解く.

S

$$3x - 5 + 5 < 10 + 5$$

← 両辺に 5 をたす

$$3x < 15$$

(左辺を  $x$  だけの項にする)

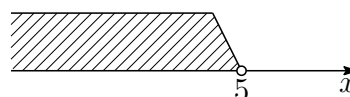
$$\frac{3x}{3} < \frac{15}{3}$$

← 両辺を 3 で割る

$$x < 5$$

(左辺の  $x$  の係数を 1 にする)

例 1.27 の不等式の解  $x < 5$  を, 数直線を用いて図示すると, 右のようになる.



注意 図中の白丸はその数が範囲に含まれないことを表している.

「不等式の性質」の 1 と 2 が成り立つから, 不等式でも方程式の場合と同じように移項による式の変形ができる.

$$\begin{array}{ccc} 3x - 5 < 10 & & \\ \text{.....} & \searrow & \text{符号が変わる} \\ \text{移項} & & \\ 3x < 10 + 5 & & \\ \text{.....} & & \end{array}$$

不等式の項を移項して、 $(x \text{ の } 1 \text{ 次式}) > 0$ ,  $(x \text{ の } 1 \text{ 次式}) \leq 0$  などのような形に表される不等式を、 $x$  の 1 次不等式という。

### 1 次不等式の解き方

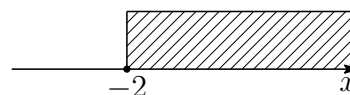
不等式を  $ax > b$ ,  $ax \leq b$  などの形に整理する。  
整理された不等式の両辺を  $x$  の係数  $a$  で割る。

例 1.28 1 次不等式  $2x - 7 \leq 5x - 1$  を解く

$$\text{移項すると} \quad 2x - 5x \leq -1 + 7$$

$$\text{整理すると} \quad -3x \leq 6$$

$$\text{両辺を } -3 \text{ で割って} \quad x \geq -2$$



← 不等号の向きが変わる。

**S**

注意 図中の黒丸はその数が範囲に含まれることを表している。

練習 1.42 次の 1 次不等式を解け。 **解**

$$(1) \quad 5x - 2 < 2x + 4$$

$$(2) \quad 6x - 3 \geq 8x + 7$$

$$(3) \quad 2(4x - 1) > 5x - 11$$

$$(4) \quad 3(3 - 2x) \leq 4 - 3x$$

例題 1.7 次の 1 次不等式を解け。

**S**

$$\frac{4}{3}x + 1 \geq \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$$

解答 両辺に 6 を掛けると  $6 \left( \frac{4}{3}x + 1 \right) \geq 6 \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \right)$

すなわち  $8x + 6 \geq 3x - 2$

移項して整理すると  $5x \geq -8$

よって  $x \geq -\frac{8}{5}$

← 分母をはらう  
ために 2 と 3  
の最小公倍数  
6 を掛ける

練習 1.43 次の 1 次不等式を解け。 **解**

$$(1) \quad \frac{1}{2}x - 1 \leq \frac{2}{7}x + \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \frac{1}{3}x + 1 < \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

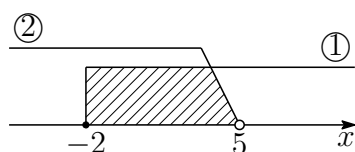
## A 》連立不等式

いくつかの不等式があるとき、それらの不等式の解に共通する範囲について考えてみよう.

例 1.29 (1) 2つの不等式

$$x \geq -2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

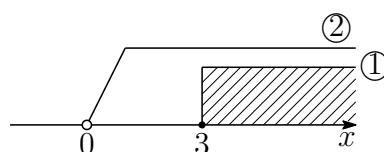
$$x < 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$



(2) 2つの不等式

$$x \geq 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$



S

いくつかの不等式を組み合わせたものを連立不等式といい、それらの不等式の解に共通する範囲を、この連立不等式の解という。また、連立不等式の解を求めることを、連立不等式を解くという。

例題 1.8 次の連立不等式を解け。

S

$$\begin{cases} 5x + 3 > 3x + 1 \\ -x + 4 \geq 2(x - 1) \end{cases}$$

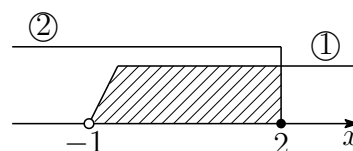
解答  $5x + 3 > 3x + 1$  から  $2x > -2$

$$\text{よって } x > -1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-x + 4 \geq 2(x - 1) \text{ から } -3x \geq -6$$

$$\text{よって } x \leq 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ の共通部分を求めて } -1 < x \leq 2$$



練習 1.44 次の連立不等式を解け。解

$$(1) \begin{cases} 6x - 9 < 2x - 1 \\ 3x + 7 \leq 4(2x + 3) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 1 \geq 7x - 5 \\ -x + 6 \geq 3(1 - 2x) \end{cases}$$

不等式  $A < B < C$  は,  $A < B$  と  $B < C$  が同時に成り立つことを表した式である. たとえば, 不等式  $4 - x < 3x < x + 4$  は, 連立不等式

$$\begin{cases} 4 - x < 3x \\ 3x < x + 4 \end{cases}$$

と同じである.

練習 1.45 次の不等式を解け. 解

$$3x < x + 12 < 2x + 8$$

### C 》 1 次不等式の応用

応用例題 1.5 次の不等式を満たす最小の自然数  $n$  を求めよ. S

$$200 + 12(n - 10) \leq 15n$$

考え方 》 まず,  $n$  についての不等式を解く. 次に,  $n$  が自然数であることに注意して, 最小となる  $n$  の値を求める.

解答 不等式を変形すると  $-3n \leq -80$   
 よって  $n \geq \frac{80}{3} = 26.6\cdots$   
 これを満たす最小の自然数  $n$  は  $n = 27$

練習 1.46 次の不等式を満たす最小の自然数  $n$  を求めよ. 解

$$600 + 25(n - 20) \leq 32n$$

練習 1.47 次の不等式を満たす最大の自然数  $n$  を求めよ. 解

$$4 + \frac{1}{5}(n - 4) > \frac{1}{2}n$$

深化 1.3 解が存在しない連立不等式もある.  $2x - 4 \geq 0$  のように左辺が  $x$  の 1 次式, 右辺が数であるような 1 次不等式を 2 つ組み合わせた連立不等式で解が存在しないものを 1 つ作ってみよう. 解

1次不等式を使って、身近な問題を解いてみよう.

**応用例題 1.6** 1個 60 円の品物 A と 1 個 100 円の品物 B を合わせて 50 個買い、100 円の箱に詰めてもらう. 品物代と箱代の合計金額を 4000 円以下にすると、品物 B は最大で何個買えるか. S

**考え方** 》品物 B を  $x$  個買うとして、条件から不等式を作る.

$x$  は自然数であることに注意する.

**解答** 品物 B を  $x$  個買うとすると、品物 A は  $(50 - x)$  個買うことになる.

条件から

$$60(50 - x) + 100x + 100 \leq 4000$$

整理すると  $40x \leq 900$

よって  $x \leq \frac{900}{40} = 22.5$

$x$  は自然数であるから  $x \leq 22$  (答) 22 個

**練習 1.48** 1 個 120 円の洋菓 A と 1 個 80 円の菓子 B を合わせて 30 個買い、100 円の箱に詰めてもらう. 菓子代と箱代の合計金額を 3000 円以下にすると、洋菓 A は最大何個買えるか. 解

**練習 1.49** 案内状を作ることになったので再作費を調べた. A 店では、100 部までは 5000 円、100 部を超える分は 1 部につき 40 円である. また、B 店では、100 部までは 4500 円、100 部を超える分は 1 部につき 43 円である. B 店で作るより A 店で作る方が安くなるのは、何部以上作るときか. 解

## 1.3.3 絶対値と方程式・不等式

絶対値については25ページで学んだが，ここでは，絶対値を含む方程式，不等式について考えよう．

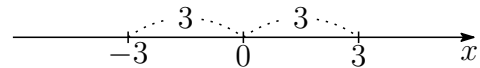
## A》絶対値を含む方程式・不等式

実数  $x$  の絶対値  $|x|$  は，数直線上で実数  $x$  に対応する点と原点との距離を表す．このことから，絶対値を含む方程式，不等式を解いてみよう．

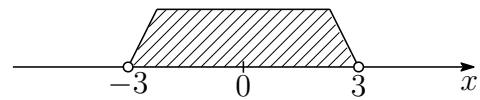
[絶対値を含む方程式・不等式]

例 1.30 (1) 方程式  $|x| = 3$  の解は  
 $x = \pm 3$

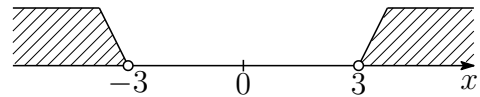
S



(2) 不等式  $|x| < 3$  の解は  
右の図より  $-3 < x < 3$



(3) 不等式  $|x| > 3$  の解は  
右の図より  $x < -3$  と  $3 < x$



注意 (1) 解は  $x = 3$  と  $x = -3$  で，これを合わせて  $x = \pm 3$  と書く．

(3) 解は  $x < -3$  と  $x > 3$  で，これを合わせて  $x < -3, 3 < x$  と書く．

一般に，次のことがいえる．

|              |                   |                 |
|--------------|-------------------|-----------------|
| $c$ が正の定数のとき | 方程式 $ x  = c$ の解は | $x = \pm c$     |
|              | 不等式 $ x  < c$ の解は | $-c < x < c$    |
|              | 不等式 $ x  > c$ の解は | $x < -c, c < x$ |

練習 1.50 次の方程式，不等式を解け． 解

(1)  $|x| = 2$

(2)  $|x| < 5$

(3)  $|x| \geq 4$

例題 1.9 次の方程式，不等式を解け.

**S**

$$(1) |x-2|=3 \quad (2) |x+1|<4 \quad (3) |2x+1|\geq 3$$

解答 (1)  $|x-2|=3$  から  $x-2=\pm 3$   
 よって  $x=5, -1$

(2)  $|x+1|<4$  から  $-4<x+1<4$   
 各辺から1を引いて  $-5<x<3$

(3)  $|2x+1|\geq 3$  から  $2x+1\leq -3, 3\leq 2x+1$   
 すなわち  $2x\leq -4, 2\leq 2x$   
 よって  $x\leq -2, 1\leq x$

注意 (1) 解は  $x=5$  と  $x=-1$  で，これを合わせて， $x=5, -1$  と書く.

練習 1.51 次の方程式，不等式を解け. **解**

$$(1) |x+4|=2 \quad (2) |x+1|<1 \quad (3) |x-2|\geq 1$$

$$(4) |2x-3|=1 \quad (5) |3x-2|\leq 4 \quad (6) |2x+5|>2$$

### 研究 絶対値と場合分け

絶対値の定義から，次のことが成り立つ.

$$A\geq 0 \text{ のとき } |A|=A, \quad A<0 \text{ のとき } |A|=-A$$

$x$  の値の範囲で場合分けをして，絶対値記号をはずしてみよう.

Ex 1.6  $|x-2|$  の絶対値記号をはずす.

$$\begin{aligned} x-2\geq 0 \text{ のとき } & |x-2|=x-2 \\ x-2<0 \text{ のとき } & |x-2|=-(x-2)=-x+2 \\ \text{すなわち } x\geq 2 \text{ のとき } & |x-2|=x-2 \\ & x<2 \text{ のとき } |x-2|=-x+2 \end{aligned}$$

演習 1.7 Ex1.6 にならって，次の式の絶対値記号をはずせ. **解**

$$(1) |x-3| \quad (2) |x+2| \quad (3) |2x-3|$$

**Ex 1.7** 次の方程式，不等式を解け.

(1)  $|x - 2| = 3x$

(2)  $|x - 2| \leq 3x$

解答 (1) [1]  $x - 2 \geq 0$  すなわち  $x \geq 2$  のとき

方程式は  $x - 2 = 3x$

よって  $x = -1$  これは  $x \geq 2$  を満たさない.

[2]  $x - 2 < 0$  すなわち  $x < 2$  のとき

方程式は  $-(x - 2) = 3x$

よって  $x = \frac{1}{2}$  これは  $x < 2$  を満たす.

[1], [2] から，求める解は  $x = \frac{1}{2}$

(2) [1]  $x \geq 2$  のとき

不等式は  $x - 2 \leq 3x$

よって  $x \geq -1$

これと  $x \geq 2$  との共通範囲は  $x \geq 2 \cdots \textcircled{1}$

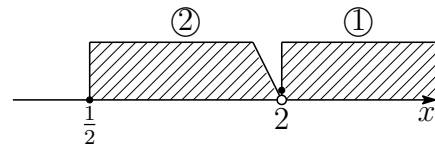
[2]  $x < 2$  のとき

不等式は  $-(x - 2) \leq 3x$

よって  $x \geq \frac{1}{2}$

これと  $x < 2$  との共通範囲は

$$\frac{1}{2} \leq x < 2 \cdots \textcircled{2}$$



求める解は，①と②を合わせた範囲で  $x \geq \frac{1}{2}$

**演習 1.8** 次の方程式，不等式を解け. 解

(1)  $|x - 3| = 2x$

(2)  $|x - 4| \leq 2x + 1$

(3)  $|2x - 3| > 5x$

## やや複雑な方程式

次の方程式を解いてみよう.

$$|x| + |x - 4| = 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x$  の値の範囲で場合分けをして, 絶対値記号をはずす.

$$[1] \ x < 0 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ は } -x - (x - 4) = 6 \quad \leftarrow x < 0, \ x - 4 < 0$$

$$\text{これを解くと } x = -1$$

これは,  $x < 0$  を満たすから, 解である.

$$[2] \ 0 \leq x < 4 \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ は } x - (x - 4) = 6 \quad \leftarrow x \geq 0, \ x - 4 < 0$$

この方程式の解はない.

$$[3] \ 4 \leq x \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ は } x + (x - 4) = 6 \quad \leftarrow x > 0, \ x - 4 \geq 0$$

$$\text{これを解くと } x = 5$$

これは,  $4 \leq x$  を満たすから, 解である.

以上から,  $\textcircled{1}$  の解は  $x = -1, 5$

## 1.3.4 問題

問題 1.13 次の不等式を解け. 解

→ p.37~39

(1)  $36 - x < 2(12 + x)$

(2)  $\frac{x}{3} + \frac{10 - x}{2} \geq 4$

(3) 
$$\begin{cases} 2x + 6 > 5x - 12 \\ 3x - 7 \leq 2(4 - x) \end{cases}$$

(4)  $0.05 \leq 0.2 - \frac{x}{100} \leq 0.1$

問題 1.14  $x$  について不等式  $x + a \geq 3x + 5$  の解が  $x \leq 3$  のとき, 定数  $a$  の値を求めよ. 解

→ p.37

問題 1.15 和が 40 である異なる 2 つの数がある. 大きい数を  $\frac{1}{4}$  倍すると小さい数よりも小さくなるという. 大きい数のとりうる値の範囲を求めよ. 解

→ p.40

問題 1.16 次の方程式, 不等式を解け. 解

→ p.42

(1)  $|x - 3| = 5$

(2)  $|x + 4| \geq 1$

(3)  $|2x - 1| < 7$

(4)  $|3x + 5| \geq 2$

問題 1.17 次の方程式, 不等式を解け. 解

→ p.43 Ex1.7

(1)  $|2x - 4| = x + 1$

(2)  $|2x - 4| > x + 1$

問題 1.18 不等式  $5 - x < 4x < 2x + 8 \cdots (A)$  に対して, 次の連立不等式を考える.

$$\begin{cases} 5 - x < 4x \\ 5 - x < 2x + 8 \end{cases} \cdots (B)$$

このとき, 次の問いに答えよ. 解

(1) 連立不等式 (B) の解のうち, 不等式 (A) を満たさない最小の整数を求めよ.

(2) 連立不等式 (B) を解いて不等式 (A) を求めることができない理由を説明せよ.

## 1.4 章末問題

### 1.4.1 章末問題 A

章末 1.1 次の式を展開し， $x$  について降べきの順に整理せよ. 解

$$(1) (x^3 + 4 - 3x)(1 - 2x) \qquad (2) (x - a)(x - b)(x - c)$$

$$(3) (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 3) \qquad (4) (x + 1)(x + 2)(x - 5)(x - 6)$$

$$(5) (x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 6)$$

章末 1.2 次の式を因数分解せよ. 解

$$(1) 6x^2 + (3a - 2b)x - ab \qquad (2) x^2 + y^2 - 2xy - z^2$$

$$(3) 3x^2 + ax - 2a^2 + 4x - a + 1 \qquad (4) ab^2 - bc^2 - b^2c - c^2a$$

章末 1.3 次の式を計算せよ. 解

$$(1) (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \qquad (2) (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{32}} \qquad (4) \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$(5) \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + 2}$$

章末 1.4 次の場合について、 $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$  を  $x$  の多項式で表せ. 解

(1)  $x \geq 1$

(2)  $x < 1$

章末 1.5 次の不等式を成り立たせる正の整数  $n$  をすべて求めよ. 解

$$\frac{1}{2}(n+3) + \frac{1}{6} > \frac{1}{3}(4n-1)$$

章末 1.6 4km の道のりを、歩くか走るかして行くことにした. ただし、歩くときの速さは分速 80m で、走るときの速さは分速 200m である. 目的地に着くまでにかかる時間を 32 分以上 35 分以下にすると、歩く道のりを何 m 以上何 m 以下にすればよいか. 解

章末 1.7 不等式  $|4x + 2| < 11$  を満たす整数  $x$  の個数を求めよ. 解

**1.4.2 章末問題 B****章末 1.8** 次の計算をせよ. 解

$$(1) (a+b+c+d)(a+b-c-d) \quad (2) (a+b+c)^2 - (a-b-c)^2$$

**章末 1.9** 次の式を因数分解せよ. 解

$$(1) (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 \quad (2) (b+c)(c+a)(a+b) + abc$$

**章末 1.10**  $x+y+z=2$ ,  $xy+yz+zx=-$  のとき,  $x^2+y^2+z^2$  の値を求めよ. 解**章末 1.11** 次の問いに答えよ. 解

$$(1) (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \text{ を計算せよ.}$$

$$(2) \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \text{ の分母を有理化せよ.}$$

章末 1.12  $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$  の整数の部分を  $a$ , 小数の部分を  $b$  とする. 解

- (1)  $a, b$  の値を求めよ.                      (2)  $b + \frac{1}{b}, b^2 + \frac{1}{b^2}$  の値を求めよ.

章末 1.13 定価が 1 個 100 円の商品がある. この商品を, A 店では定価の 12% 引きで売っている. また, B 店では 10 個までは定価であるが, 10 個を超える分について 1 個につき定価の 25% 引きで売っている. この商品を A 店で買うより B 店で買った方が安くなるのは, 何個以上買うときか. 解

章末 1.14 不等式  $3(x-1) < 2(x+a)$  を満たす最大の整数  $x$  が  $x=3$  であるとき, 定数  $a$  の値の範囲を求めよ. 解

章末 1.15 方程式  $|x| + |x-2| = 4$  を解け. 解

ヒント

10  $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

12 (2)  $\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}$

15  $x < 0, 0 \leq x < 2, 2 \leq x$  で場合分けをして, 絶対値記号をはずす.

### 発展 4次式の因数分解

これまでは2次式, 3次式を因数分解してきたが, ここでは4次式の因数分解を考えてみよう. 4次式でも, 文字をおき換えると因数分解の公式を利用できるものがある.

#### 例1 $x^4 - 3x^2 - 4$ の因数分解

$x^4 = (x^2)^2$  であるから,  $x^2 = A$  とおくと

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^2 - 4 &= A^2 - 3A - 4 \\&= (A + 1)(A - 4)\end{aligned}$$

のように因数分解できる.

このことから, 次のようになる.

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^2 - 4 &= (x^2 + 1)(x^2 - 4) \\&= (x^2 + 1)(x + 2)(x - 2)\end{aligned}$$

#### 例2 $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ の因数分解

$x^2 - x = A$  とおくと

$$\begin{aligned}(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 &= A^2 - 8A + 12 \\&= (A - 2)(A - 6)\end{aligned}$$

のように因数分解できる.

このことから, 次のようになる.

$$\begin{aligned}(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 &= \{(x^2 - x) - 2\}\{(x^2 - x) - 6\} \\&= (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) \\&= (x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3)\end{aligned}$$

練習 次の式を因数分解せよ.

(1)  $x^4 - 8x^2 - 9$

(2)  $(x^2 + x)^2 - (x^2 + x) - 2$

【解】 (1)  $x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$   
 $= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$

(2)  $(x^2 + x)^2 - (x^2 + x) - 2 = \{(x^2 + x) + 1\}\{(x^2 + x) - 2\}$   
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 2)$   
 $= (x^2 + x + 1)(x - 1)(x + 2)$

## 第 2 章 集合と命題

### 2.1 集合と命題

#### 2.1.1 集合

数学では、「ものの集まり」や「ものの集まり」どうしの関係を考える場合がよくある。ここでは、数学における「ものの集まり」の表現の方法を学ぼう。

##### A 》集合と要素

数学では、「1 から 10 までの自然数の集まり」のように、範囲がはっきりしたものの集まりを集合といい、集合を構成している 1 つ 1 つのものを、その集合の要素という。

たとえば、「1 から 10 までの自然数の集まり」を  $A$  とすると、 $A$  は

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

を要素とする集合である。

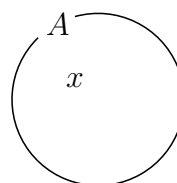
$x$  が集合  $A$  の要素であるとき、 $x$  は集合  $A$  に属するという。

また、集合とその要素について、

$x$  が集合  $A$  の要素であることを  $x \in A$

$y$  が集合  $A$  の要素でないことを  $y \notin A$

と表す。



例 2.1 1 桁の素数全体の集合を  $A$  とすると、 $A$  は

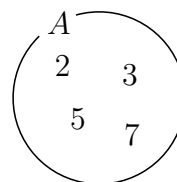
**S**

$$2, 3, 5, 7$$

を要素とする集合である。

このとき、集合  $A$  について、たとえば

$$2 \in A, \quad 1 \notin A \quad \text{である。}$$



練習 2.1 有理数全体の集合を  $Q$  とする。次の□に適する記号  $\in$  または  $\notin$  を入れよ。

(1)  $4 \square Q$

(2)  $-\frac{2}{3} \square Q$

(3)  $\sqrt{2} \square Q$

**解**

[\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

## B》集合の表し方

集合の表し方には、 $\{ \}$ の中に要素を書き並べて表す方法がある。

## 例 2.2 要素を書き並べて表す方法

S

- (1) 18 の正の約数全体の集合  $A$  は

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

- (2) 20 以下の正の偶数全体の集合  $B$  は

$$B = \{2, 4, 6, \dots, 20\}$$

- (3) 自然数全体の集合  $N$  は

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

補足 (2), (3) のように、規則性が明らかであれば、要素が多い場合や、無限に多くの要素がある場合には、省略記号  $\dots$  を用いて表すことがある。

要素の満たす条件を書いて、集合を表す場合もある。例 2.2 の集合  $A$ ,  $B$  は、それぞれ次のようにも表される。

## 例 2.3 要素の満たす条件を書いて表す方法

S

- (1)  $A = \{x \mid x \text{ は } 18 \text{ の正の約数} \}$

- (2)  $B = \{2n \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の自然数} \}$

例 2.3(2) では、 $2n$  の  $n$  に  $1, 2, 3, \dots, 10$  を代入して得られる数が  $B$  の各要素であることを表している。

## 練習 2.2 次の集合を、要素を書き並べて表せ。解

- (1) 20 の正の約数全体の集合  $A$

- (2)  $B = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ 以下の正の奇数} \}$

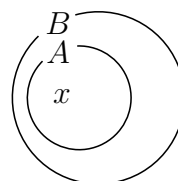
- (3)  $C = \{3n + 1 \mid n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$

深化 2.1 集合  $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$  を例 2.3 のような要素の表す条件を書いて表す方法で表してみよう。解

## C》部分集合

集合  $A$  と集合  $B$  について、 $A$  のすべての要素が  $B$  の要素でもあるとき、すなわち

$$x \in A \quad \text{ならば} \quad x \in B$$



が成り立つとき、 $A$  を  $B$  の部分集合という。

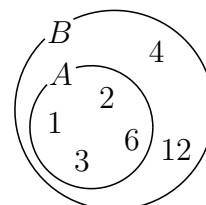
このとき、 $A$  は  $B$  に含まれる、または  $B$  は  $A$  を含むといい、 $A \subset B$ 、または  $B \supset A$  で表す。集合  $A$  自身は  $A$  の部分集合である。すなわち、 $A \subset A$  である。

また、 $A$  と  $B$  の要素がすべて一致しているとき、 $A$  と  $B$  は等しいといい、 $A = B$  で表す。

注意  $A = B$  であることは、「 $A \subset B$  かつ  $A \supset B$ 」であることと同じである。

例 2.4  $A = \{1, 2, 3, 6\}$  と  $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  については、 $A \subset B$  である。

また、6 の正の約数全体の集合を  $C$  とすると、 $A = C$  である。



S

練習 2.3 次の2つの集合の関係を、 $\subset$ 、 $=$  を使って表せ。解

(1)  $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(2)  $C = \{1, 2, 5, 10\}$ ,  $D = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ の正の約数}\}$

(3)  $P = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ 以下の自然数}\}$ ,  $Q = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$

要素が1つもない集合も考える。これを<sup>くうしゅうごう</sup>空集合といい、 $\phi$  で表す。空集合  $\phi$  は、どんな集合に対しても、その部分集合であると約束する。

例 2.5 集合  $\{a, b\}$  の部分集合は、次の4個である。

S

$$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

← 空集合  $\phi$  および  $\{a, b\}$  自身も部分集合である。

練習 2.4 次の集合の部分集合をすべてあげよ。解

(1)  $\{1, 2\}$

(2)  $\{a, b, c\}$

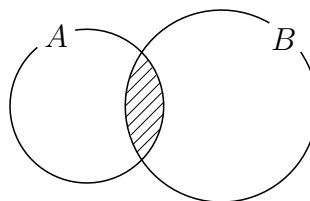
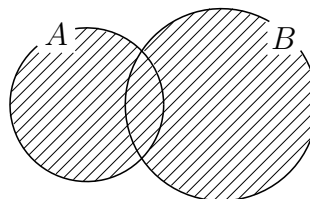
## D》共通部分と和集合

集合  $A$ ,  $B$  のどちらにも属する要素全体の集合を,  $A$  と  $B$  の共通部分といい,  $A \cap B$  で表す.

また,  $A$ ,  $B$  の少なくとも一方に属する要素全体の集合を  $A$  と  $B$  の和集合といい,  $A \cup B$  で表す. すなわち, 次のように表される.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

共通部分  $A \cap B$ 和集合  $A \cup B$ 

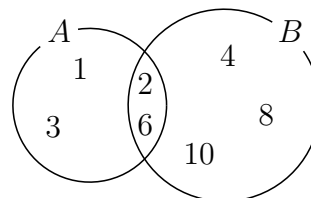
例 2.6 (1)  $A = \{1, 2, 3, 6\}$ ,

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  について

$$A \cap B = \{2, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$$

S

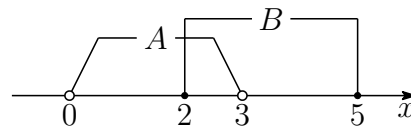


(2)  $A = \{x \mid 0 < x < 3, x \text{ は実数}\}$ ,

$B = \{x \mid 2 \leq x \leq 5, x \text{ は実数}\}$  について

$$A \cap B = \{x \mid 2 \leq x < 3, x \text{ は実数}\}$$

$$A \cup B = \{x \mid 0 < x \leq 5, x \text{ は実数}\}$$



練習 2.5  $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{1, 3\}$  について, 次の集合を求めよ. 解

(1)  $A \cap B$

(2)  $A \cup B$

(3)  $B \cap C$

(4)  $B \cup C$

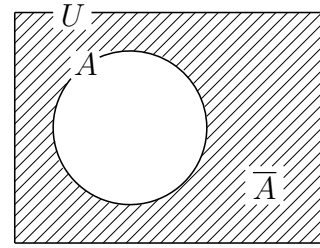
練習 2.6  $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \text{ は実数}\}$ ,  $B = \{x \mid 0 < x < 4, x \text{ は実数}\}$  について,  $A \cap B$  と  $A \cup B$  を求めよ. 解

## E》補集合

集合を考えるときは、1つの集合  $U$  を決めて、その部分集合について考えることが多い。このとき、 $U$  を全体集合という。

全体集合  $U$  の部分集合  $A$  に対して、 $U$  の要素で、 $A$  には属さない要素全体の集合を、 $U$  に関する  $A$  の補集合といい、 $\overline{A}$  で表す。すなわち、次のように表される。

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A\}$$



例 2.7  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  を全体集合とする。

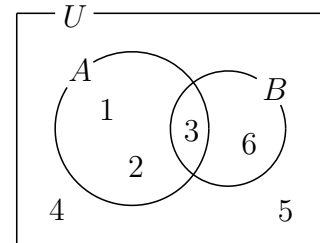
$U$  の部分集合

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 6\}$$

について  $\overline{A} = \{4, 5, 6\}$

また、 $A \cup B = \{1, 2, 3, 6\}$  であるから

$$\overline{A \cup B} = \{4, 5\}$$



S

練習 2.7 例 2.7 の集合  $A, B$  について、次の集合を求めよ。解

- |                           |                                      |
|---------------------------|--------------------------------------|
| (1) $\overline{B}$        | (2) $\overline{A \cap B}$            |
| (3) $\overline{A \cup B}$ | (4) $\overline{\overline{A \cap B}}$ |
| (5) $\overline{A \cap B}$ | (6) $A \cap \overline{B}$            |

補集合の定義から、次のことが成り立つ。

補集合の性質

$U$  を全体集合とし、 $A, B$  をその部分集合とするとき

$$A \cap \overline{A} = \phi, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad \overline{\overline{A}} = A$$

$$A \subset B \quad \text{ならば} \quad \overline{A} \supset \overline{B}$$

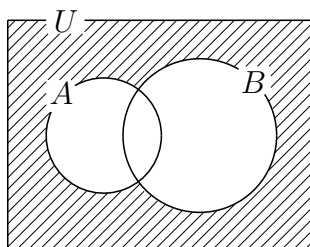
注意  $\overline{\overline{A}}$  は  $\overline{A}$  の補集合を表す。

$A \cup B$ ,  $A \cap B$  の補集合について, 次のド・モルガンの法則が成り立つ<sup>1</sup>.

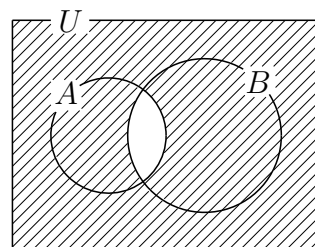
ド・モルガンの法則

$$1 \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$2 \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



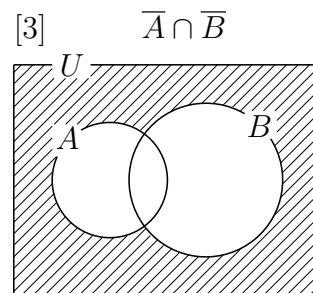
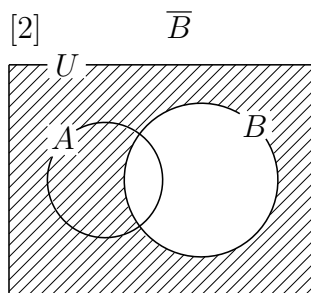
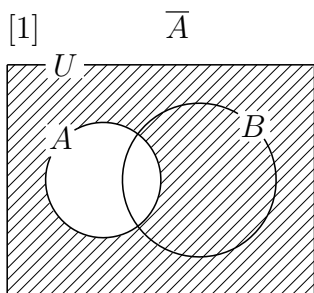
$\overline{A \cup B}$  と  $\overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B}$  と  $\overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A}$  と  $\overline{B}$  は, それぞれ図 [1] と図 [2] の斜線部分であり, その共通部分  $\overline{A} \cap \overline{B}$  は, 図 [3] の斜線部分である.

図 [3] の斜線部分は  $\overline{A \cup B}$  であるから,  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  が成り立つ.



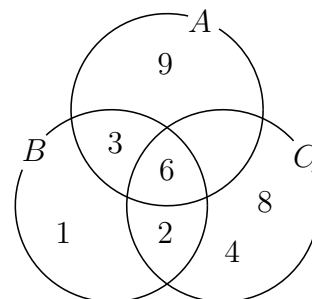
練習 2.8  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  が成り立つことを, 図を用いて確かめよ. 解

### 研究 3つの集合の共通部分と和集合

集合  $A$ ,  $B$ ,  $C$  のすべてに属する要素全体の集合を,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の共通部分といい,  $A \cap B \cap C$  で表す.

また,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の少なくとも1つに属する要素全体の集合を,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の和集合といい,  $A \cup B \cup C$  で表す.

**Ex 2.1**  $A = \{3, 6, 9\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  
 $C = \{2, 4, 6, 8\}$  について  
 $A \cap B \cap C = \{6\}$   
 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$



演習 2.1  $A = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  について,  $A \cap B \cap C$  と  $A \cup B \cup C$  を求めよ. 解

<sup>1</sup>この法則が成り立っていることは, 例 2.7 と練習 2.7(2), (3), (4) の結果からも確かめられる.

### 2.1.2 命題と条件

次の2つの文は、正しいことを述べているといえるだろうか。

(A) 「整数4は偶数である」      (B) 「 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ である」

ここでは、ある事柄について述べられてた文や式が、正しいか正しくないかを論理的に考えるために、命題と条件について学ぼう。

#### A》命題

上の2つの文について、(A)の文は正しく、(B)の文は正しくない。

一般に、正しいか正しくないかが定まる文や式を**命題**という。また、命題が正しいとき、その命題は**真**であるといい、正しくないとき、その命題は**偽**であるという。たとえば、上の命題(A)は真であり、命題(B)は偽である。

**練習 2.9** 次の命題の真偽を述べよ。 解

- (1) 円周率  $\pi$  は有理数である。
- (2) 実数  $-1$  について  $(-1)^2 \geq 0$  である。

#### B》条件

文字  $x$  を含む文や式には、 $x$  の値によって、その真偽が変わるものがある。たとえば「 $x > 3$ 」という式は、 $x = 4$  のときは真であるが、 $x = 2$  のときは偽である。

「 $x > 3$ 」, 「 $x$  は素数である」

などのように、文字  $x$  を含む文や式で、 $x$  に値を代入することで真偽が定まるものを、 $x$  に関する**条件**という。

条件を考える場合には、条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく。この集合を、その条件の**全体集合**という。

A》命題  $p \implies q$ 

今後、条件を単に  $p$ ,  $q$  などで表すことにする.

実数について述べた命題「3 より大きければ, 1 より大きい」は, 実数  $x$  に関する 2 つの条件

$$p : x > 3, \quad q : x > 1$$

を用いて,

$$p \text{ ならば } q$$

$$\leftarrow x > 3 \text{ ならば } x > 1$$

と表現することができる. このような命題を,  $p \implies q$  と書く.

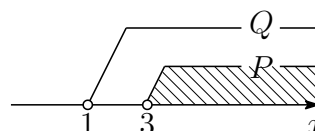
命題  $p \implies q$  について,  $p$  を仮定,  $q$  を結論という.

$x$  を実数とすると, 命題「 $x > 3 \implies x > 1$ 」は真である.

また, 実数全体の集合  $R$  の要素のうち,

$x > 3$  を満たす  $x$  の値全体の集合を  $P$ ,

$x > 1$  を満たす  $x$  の値全体の集合を  $Q$



とすると,  $P \subset Q$  が成り立つ.

$$\leftarrow P = \{x \mid x > 3, x \text{ は実数}\}, Q = \{x \mid x > 1, x \text{ は実数}\}$$

一般に, 全体集合を  $U$  とし,  $U$  の要素のうち,

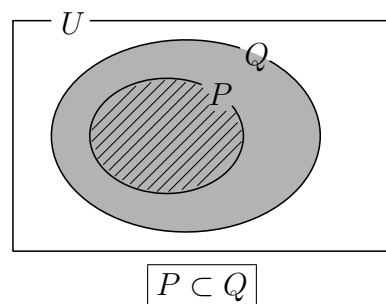
条件  $p$  を満たすものの全体の集合を  $P$ ,

条件  $q$  を満たすものの全体の集合を  $Q$

とすると, 命題  $p \implies q$  は

$P$  の要素はすべて  $Q$  の要素である

ということを表している.



すなわち  $P \implies Q$  が真ならば,  $P \subset Q$  が成り立つ. 逆に,  $P \subset Q$  が成り立てば,  $P \implies Q$  は真である.

前ページで調べたことから、次のことがいえる.

命題  $p \implies q$

- 1 命題  $p \implies q$  は,「 $p$  を満たすものはすべて  $q$  を満たす」ということを表す.
- 2 条件  $p$  を満たすものの全体の集合を  $P$ , 条件  $q$  を満たすものの全体の集合を  $Q$  とするとき,「命題  $p \implies q$  が真である」と「 $P \subset Q$  が成り立つ」とは同じことである.

練習 2.10 次の条件  $p, q$  について, 命題  $p \implies q$  の真偽を, 集合を用いて調べよ.

- (1) 実数  $x$  に関する 2 つの条件  $p: x \leq 2, q: x \leq 4$  解

- (2) 自然数  $m$  に関する 2 つの条件  
 $p: m$  は 12 の約数,  $q: m$  は 24 の約数

- (3) 実数  $x$  に関する条件  $p: -1 < x < 1, q: x > 0$

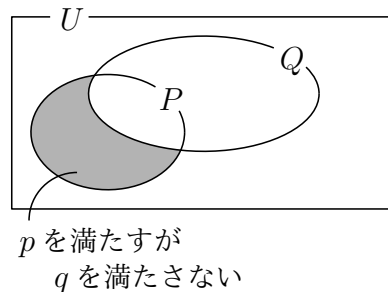
命題  $p \implies q$  が偽であるときは

$p$  を満たすが,  $q$  を満たさないもの (\*)

が存在する.

したがって, 命題  $p \implies q$  が偽であることをいうには, (\*) の例を 1 つだけ示せばよい.

そのような例を反例という.



例 2.8  $x, y$  を実数とすると, 命題「 $x^2 = y^2 \implies x = y$ 」の真偽 S

$x = 1, y = -1$  は,  $x^2 = y^2$  を満たすが,  $x = y$  を満たさない.

よって, この命題は偽である.

←  $x = 1, y = -1$  が反例の 1 つ

練習 2.11  $n$  は自然数とする. 次の命題が偽であることを示せ. 解

$n$  が素数ならば,  $n$  は奇数である.

## D 》必要条件と十分条件

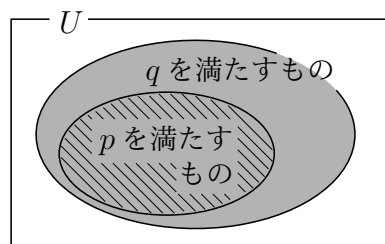
2つの条件  $p, q$  を考える.

命題  $p \implies q$  が真であるとき,

$q$  は  $p$  であるための必要条件である,

$p$  は  $q$  であるための十分条件である

という.



例 2.9  $x$  は実数とする.

命題「 $x = 3 \implies x^2 = 9$ 」は真であるから,

$x = 3$  は  $x^2 = 9$  であるための十分条件であり,

$x^2 = 9$  は  $x = 3$  であるための必要条件である.

$p \implies q$  が真  
十分条件 必要条件

練習 2.12  $x, y$  は実数とする. 次の  に, 「必要」, 「十分」のうち, 適する言葉を入れよ. 解

- (1)  $x = -2$  は  $x^2 = 4$  であるための  条件である.
- (2)  $x > 0$  は  $x > 1$  であるための  条件である.
- (3)  $x = y$  は  $(x - y)x = 0$  であるための  条件である.

2つの条件  $p, q$  について, 「 $p \implies q$  かつ  $q \implies p$ 」を  $p \iff q$  と書く. 2つの命題  $p \implies q$  と  $q \implies p$  がともに真のとき, すなわち  $p \iff q$  が成り立つとき,

$p$  は  $q$  であるための必要十分条件である

という. 同様に,  $q$  は  $p$  であるための必要十分条件である.

また, このとき,  $p$  と  $q$  は同値であるという.

条件  $p, q$  を満たすものの全体の集合を, それぞれ  $P, Q$  とすると,  
 $p \iff q$  が成り立つことと  $P = Q$  が成り立つことは同じである.

例 2.10  $x$  は実数とする.

**S**

命題「 $x = 0 \implies x^2 = 0$ 」と「 $x^2 = 0 \implies x = 0$ 」はともに真であるから、「 $x = 0 \implies x^2 = 0$ 」が成り立つ.

よって、 $x = 0$  は  $x^2 = 0$  であるための必要十分条件である.

同様に、 $x^2 = 0$  は  $x = 0$  であるための必要十分条件である.

すなわち、 $x = 0$  と  $x^2 = 0$  は同値である.

練習 2.13  $x, y, z$  は実数とする. 次の中で、 $x = y$  と同値な条件をすべて選べ. **解**

- ①  $x + z = y + z$       ②  $x^2 = y^2$       ③  $(x - y)^2 = 0$

練習 2.14  $x, y$  は実数とする. 次の  に,

「必要条件であるが十分条件ではない」,

「十分条件であるが必要条件ではない」,

「必要十分条件である」

のうち、適する言葉を入れよ. **解**

(1)  $\triangle ABC$  が正三角形であることは、 $\triangle ABC$  が二等辺三角形であるための .

(2)  $x < 3$  は  $-1 < x < 1$  であるための .

(3)  $|x| = |y|$  は  $x^2 = y^2$  であるための .

## E 》条件の否定

条件  $p$  に対して、「 $p$  でない」も条件である. これを  $p$  の否定といい、 $\bar{p}$  で表す. 条件  $\bar{p}$  の否定は  $p$  である.

深化 2.2 自然数  $n$  に関する条件  $p$  を「 $p: n$  は 6 の倍数」とする. このとき、「 $p$  は  $q$  であるための十分条件であるが、必要条件ではない」が正しくなるような条件  $q$  を考えてみよう. **解**

例 2.11  $x$  は実数とする.

**S**

(1) 条件「 $x$  は有理数」の否定は

「 $x$  は有理数でない」すなわち「 $x$  は無理数である」

(2) 条件「 $x > 0$ 」の否定は

「 $x > 0$  でない」すなわち「 $x \leq 0$ 」

練習 2.15  $n$  は自然数とする. 次の条件の否定を述べよ. **解**

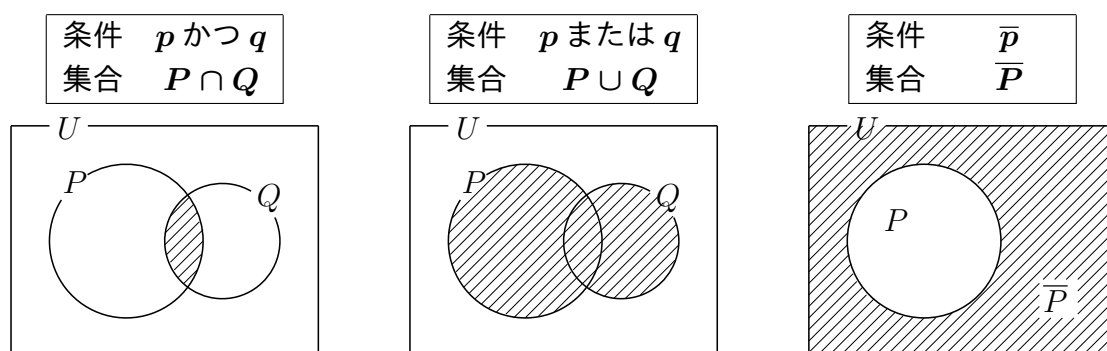
(1)  $n$  は偶数である

(2)  $n$  は5より小さい

**F** 》「かつ」、「または」と否定

全体集合を  $U$  とし,  $U$  の要素の中で, 条件  $p, q$  を満たすものの全体の集合を, それぞれ  $P, Q$  で表す.

条件「 $p$  かつ  $q$ 」, 「 $p$  または  $q$ 」,  $\bar{p}$  と集合の関係は, 次のようになる.



56 ページで学んだド・モルガンの法則により, 2つの集合  $P, Q$  について,

$$\overline{P \cap Q} = \bar{P} \cup \bar{Q}, \quad \overline{P \cup Q} = \bar{P} \cap \bar{Q}$$

が成り立つ. したがって, 条件  $p, q$  に対して, 次が成り立つ.

条件「かつ」の否定, 「または」の否定

$$\begin{aligned} \overline{p \text{ かつ } q} &\iff \bar{p} \text{ または } \bar{q} \\ \overline{p \text{ または } q} &\iff \bar{p} \text{ かつ } \bar{q} \end{aligned}$$

例 2.12  $x, y$  は実数とする.

S

- (1) 「 $x = 0$  かつ  $y = 0$ 」の否定は「 $x \neq 0$  または  $y \neq 0$ 」
- (2) 「 $x > 0$  または  $y > 0$ 」の否定は「 $x \leq 0$  かつ  $y \leq 0$ 」
- (3) 「 $x, y$  の少なくとも一方は有理数」の否定は  
「 $x, y$  はともに無理数」

練習 2.16  $x, y$  は実数とする. 次の条件の否定を述べよ. 解

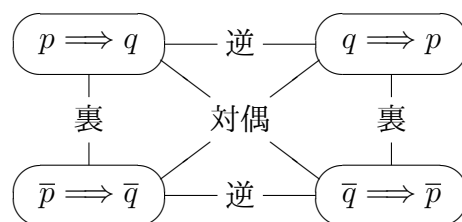
- (1)  $x \geq 0$  かつ  $y \geq 0$
- (2)  $x = 0$  または  $y = 0$
- (3)  $x, y$  はともに有理数

## 2.1.3 命題と証明

命題  $p \Rightarrow q$  に対して

$q \Rightarrow p$  を  $p \Rightarrow q$  の逆  
 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$  を  $p \Rightarrow q$  の対偶  
 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$  を  $p \Rightarrow q$  の裏

という. 命題  $p \Rightarrow q$  とその逆, 対偶, 裏は, 互いに右の図のような関係にある.



ここでは, 命題とその逆, 対偶, 裏の真偽について学ぼう.

## A》命題の逆・対偶, 裏

例 2.13  $x$  を実数とするとき, 命題「 $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ 」の逆, 対偶, 裏 S

逆は  $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$   
 対偶は  $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$   
 裏は  $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$

例 2.13 の命題「 $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ 」は真である. このとき, もとの命題の逆「 $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ 」の真偽を調べてみよう.

$x = -1$  は  $x^2 = 1$  を満たすが,  $x = 1$  を満たさない. よって,  $x = -1$  が反例となり, 命題「 $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ 」は偽である.

一般に, 命題とその逆の真偽については, 次のことがいえる.

もとの命題が真であっても, その逆が真であるとは限らない.

練習 2.17  $x, y$  は実数とする. 次の命題の真偽を調べよ. また, その逆, 対偶, 裏を調べ, それらの真偽を調べよ. 解

(1)  $x > y \Rightarrow x - y > 0$

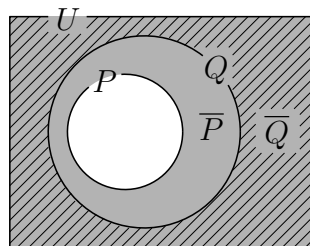
(2)  $x \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$

## B 》対偶を利用する証明

命題とその対偶の真偽について考えよう.

全体集合  $U$  の要素の中で, 条件  $p, q$  を満たすものの全体の集合をそれぞれ  $P, Q$  で表す.

命題  $p \implies q$  が真であることは,  $P \subset Q$  が成り立つことと同じである.  $P, Q$  について



$$P \subset Q \iff \overline{Q} \subset \overline{P}$$

が成り立つから, 命題  $p \implies q$  と, その対偶  $\bar{q} \implies \bar{p}$  について, 次のことがいえる.

命題  $p \implies q$  とその対偶  $\bar{q} \implies \bar{p}$  の真偽は一致する.

したがって, 命題  $p \implies q$  を証明するのに, その対偶  $\bar{q} \implies \bar{p}$  を証明してもよい.

**例題 2.1**  $n$  は整数とする. 対偶を利用して, 次の命題を証明せよ. S

$n^2$  が偶数ならば,  $n$  は偶数である.

**証明** 対偶「 $n$  が奇数ならば,  $n^2$  は奇数である」を証明する.

$n$  が奇数のとき,  $n$  はある整数  $k$  を用いて  $n = 2k + 1$  と表される. このとき

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$2k^2 + 2k$  は整数であるから,  $n^2$  は奇数である.

よって, 対偶は真であり, もとの命題も真である. 証終

**練習 2.18**  $n$  は整数とする. 対偶を利用して, 次の命題を証明せよ. 解

$n^2$  が奇数ならば,  $n$  は奇数である.

## C》背理法を利用する証明

ある命題について、その命題が成り立たないと仮定して、矛盾を導くことでもとの命題を証明する方法がある。

例題 2.2  $\sqrt{2}$  が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

S

$1 + \sqrt{2}$  は無理数である。

証明  $1 + \sqrt{2}$  が無理数でないと仮定すると、 $1 + \sqrt{2}$  は有理数である。

その有理数を  $r$  とすると、 $1 + \sqrt{2} = r$  より

$$\sqrt{2} = r - 1$$

$r$  が有理数ならば  $r - 1$  も有理数であるから、この等式は  $\sqrt{2}$  が無理数であることに矛盾する。

したがって、 $1 + \sqrt{2}$  は無理数である。

証明

補足  $\sqrt{2}$  が無理数であることは次ページで証明している。

例題 2.2 の証明は、次のような流れである。

- ① 命題が成り立たないと仮定する。
- ② ① の仮定のもとで矛盾を導く。
- ③ ② で矛盾が生じたのは、① の仮定が間違っているからである。
- ④ したがって、もとの命題が成り立つ。

このような証明法を背理法という。

背理法を利用する証明

命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより、  
もとの命題が真であると結論する。

練習 2.19  $\sqrt{2}$  が無理数であることを利用して、次の命題を証明せよ。 解

$1 + 3\sqrt{2}$  は無理数である。

## 研究

 $\sqrt{2}$  が無理数であることの証明

例題 2.2 では、「 $\sqrt{2}$  は無理数である」ということを認めていた.  
この事実を、背理法を利用して証明してみよう.

「 $\sqrt{2}$  は無理数でない」すなわち

「 $\sqrt{2}$  は有理数である」

と仮定すると、 $\sqrt{2}$  は自然数  $m, n$  を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表すことができる. このとき、できる限り約分して、 $m$  と  $n$  に 1 以外の  
正の公約数がないような分数にする. ← このような分数を既約分数という.

① より  $\sqrt{2}n = m$

この両辺を 2 乗すると

$$2n^2 = m^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

よって、 $m^2$  は偶数である.

65 ページの例題 2.1 により、 $m^2$  が偶数ならば、 $m$  も偶数となる.

偶数  $m$  は、ある自然数  $k$  を用いて、 $m = 2k$  と表されるから、② に代入して

$$2n^2 = 4k^2$$

すなわち  $n^2 = 2k^2$

よって、 $n^2$  は偶数となり、 $n$  も偶数となる.

$m$  と  $n$  がともに偶数となることは、 $m$  と  $n$  に 1 以外の公約数がないことに  
矛盾する.

したがって、 $\sqrt{2}$  は有理数ではなく、無理数である.

証終

## 2.1.4 問題

問題 2.1 次の2つの集合  $A, B$  について,  $A \cap B$  と  $A \cup B$  を求めよ. 解 → p.54

(1)  $A = \{x \mid x \text{ は } 16 \text{ の正の約数}\}, B = \{x \mid x \text{ は } 8 \text{ 以下の自然数}\}$

(2)  $A = \{n \mid -2 \leq n < 3, n \text{ は整数}\}, B = \{2n - 1 \mid n = 0, 1, 2\}$

問題 2.2  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  を全体集合とする.  $U$  の部分集合  $A = \{2, 3, 5, 8\}, B = \{1, 3, 5\}$  について, 次の集合を求めよ. 解 → p.55, 56

(1)  $A \cap B$       (2)  $\overline{A \cup B}$       (3)  $\overline{A \cup B}$       (4)  $A \cap \overline{B}$

問題 2.3 次の  に, 「必要十分条件である」, 「必要条件であるが十分条件ではない」, 「十分条件であるが必要条件ではない」, 「必要条件でも十分条件でもない」のうち適する言葉を入れよ. ただし,  $n$  は自然数とし, 集合  $A, B$  を

$$A = \{k \mid k \text{ は } 5 \text{ で割り切れる自然数}\},$$

$$B = \{k \mid k \text{ は } 6 \text{ で割り切れる自然数}\}$$

とする. 解 → p.60, 61

(1)  $n$  が  $A$  に属することは,  $n$  が 10 で割り切れるための .

(2)  $n$  が  $B$  に属することは,  $n$  が 2 で割り切れるための .

(3)  $n$  が  $A \cap B$  に属することは,  $n$  が 30 で割り切れるための .

問題 2.4  $a, b$  は実数とする. 次の命題の真偽を調べよ. 解 → p.65

$$a + b \text{ は無理数} \implies a, b \text{ の少なくとも一方は無理数}$$

問題 2.5 2つの集合  $A = \{x \mid x \text{ は正の奇数}\}, B = \{2n + 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  について, 次の中から成り立つ関係を正しく表現しているものをすべて選び, 選んだものがそれぞれ何を表しているのか説明せよ. 解

①  $1 \in A$

②  $\{3\} \in A$

③  $\{7\} \subset B$

④  $\phi \subset A$

⑤  $A = B$

⑥  $A \supset B$

## 2.2 章末問題

### 2.2.1 章末問題 A

章末 2.1  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  を全体集合とする.  $U$  の部分集合  $A, B$  について

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 2, 5, 8\}, \quad A \cap B = \{3\}, \quad \overline{A} \cap B = \{4, 7, 10\}$$

であるとき, 集合  $A, B$  を求めよ. 解

章末 2.2  $m, n, k$  は自然数とする. 次の命題の逆, 対偶, 裏をそれぞれ述べ, それらの真偽を調べよ. 解

$$\text{積 } mnk \text{ は偶数} \implies m, n, k \text{ の少なくとも 1 つは偶数}$$

### 2.2.2 章末問題 B

章末 2.3 整数全体を全体集合  $U$  とする.  $U$  の部分集合  $A, B$  について

$$A = \{1, a, a+1\}, \quad B = \{6, 8-a, a-3\}$$

であるとき,  $A \cap B = \{1, 4\}$  となるように定数  $a$  の値を定めよ. また, そのときの集合  $A \cup B$  を求めよ. 解

章末 2.4  $a, b$  は実数とする. 次の命題の真偽を調べ, 真である場合には証明し, 偽である場合には反例をあげよ. 解

- (1)  $a, b$  がともに無理数ならば,  $a+b$  は無理数である.
- (2)  $a, b$  がともに無理数ならば,  $a+b, a-b$  の少なくとも一方は無理数である.

章末 2.5 次の問いに答えよ. 解

- (1)  $a, b$  は有理数とする.  $\sqrt{2}$  が無理数であることを用いて,  
命題「 $a+b\sqrt{2}=0 \implies a=b=0$ 」を証明せよ.
- (2)  $(a-2)+(b+3)\sqrt{2}=0$  を満たす有理数  $a, b$  の値を求めよ.

**発展** 「すべて」と「ある」の否定

命題の否定とは、その命題が成り立たないことを表す命題である。  
 一般に、命題とその否定では、真偽が逆になる。  
 ここでは、命題の否定について調べてみよう。

次の命題①は真である。

$$\text{「すべての実数 } x \text{ について } x^2 \geq 0\text{」} \quad \dots \text{①}$$

①が成り立たないとは、 $x^2 \geq 0$ ではない実数  $x$  が存在するということである。すなわち、命題①の否定は

$$\text{「ある実数 } x \text{ について } x^2 < 0\text{」} \quad \dots \text{②}$$

である。実数は2乗して負になることがないから、命題②は偽である。

命題とその否定について、次のことが成り立つ。

$p$  は  $x$  に関する条件とする。

命題「すべての  $x$  について  $p$ 」の否定は「ある  $x$  について  $\bar{p}$ 」

命題「ある  $x$  について  $p$ 」の否定は「すべての  $x$  について  $\bar{p}$ 」

**Ex 2.2** 命題「ある実数  $x$  について  $x^2 = 4$ 」  $\dots$  ③ とその否定

$x = 2$  のとき  $x^2 = 4$  であるから、命題③は真である。

③の否定は「すべての実数  $x$  について  $x^2 \neq 4$ 」で、これは偽である。

**演習 2.2** 次の命題の否定を述べよ。また、もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

(1) すべての実数  $x$  について  $x + 1 > 0$

**解**

(2) ある素数  $n$  について  $n + 2$  は素数である。

## 第 3 章 2 次関数

### 3.1 2 次関数とグラフ

#### 3.1.1 関数とグラフ

自然現象や社会現象の中には、2つの量が互いに関連しながら変化する現象が多くある。変化する量  $x$ ,  $y$  について、 $y$  が  $x$  の 1 次式や 2 次式で表される場合を調べてみよう。

#### A 》関数

2 つの変数  $x$ ,  $y$  について、 $x$  の値を定めるとそれに対応して  $y$  の値がただ 1 つ定まるとき、 $y$  は  $x$  の関数であるという。

例 3.1 1 辺の長さが  $x$  cm の正方形の周の長さを  $y$  cm とすると、 $y = 4x$  であり、 $y$  は  $x$  の関数である。ただし、 $x > 0$  である。 S

例 3.2 1 辺の長さが  $x$  cm の正方形の面積を  $y$  cm<sup>2</sup> とすると、 $y = x^2$  であり、 $y$  は  $x$  の関数である。ただし、 $x > 0$  である。 S

$y$  が  $x$  の 1 次式で表されるとき、 $y$  は  $x$  の 1 次関数であるといい、 $y$  が  $x$  の 2 次式で表されるとき、 $y$  は  $x$  の 2 次関数であるという。

#### 1 次関数、2 次関数の一般形

1 次関数は  $y = ax + b$                       ただし、 $a \neq 0$

2 次関数は  $y = ax^2 + bx + c$                       ただし、 $a \neq 0$

$y$  が  $x$  の関数であるとき、 $y$  を表す  $x$  の式を  $f(x)$  や  $g(x)$  のように書くことがある。また、 $x$  の関数  $y = f(x)$  を単に、関数  $f(x)$  ともいう。

関数  $y = f(x)$  において、 $x$  の値  $a$  に対応して定まる  $y$  の値を  $f(a)$  と書き、 $f(a)$  を関数  $f(x)$  の  $x = a$  における値という。

[\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

例 3.3 2次関数  $f(x) = x^2 + 2x$  において

S

$$f(5) = 5^2 + 2 \cdot 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\begin{aligned} f(a-1) &= (a-1)^2 + 2(a-1) \\ &= a^2 - 2a + 1 + 2a - 2 = a^2 - 1 \end{aligned}$$

練習 3.1 2次関数  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  において、次の値を求めよ。 解

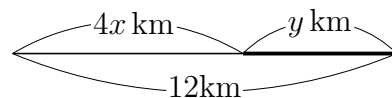
(1)  $f(3)$

(2)  $f(-1)$

(3)  $f(-a)$

(4)  $f(a+1)$

例 3.4 12km の道のりを時速 4km で歩く。  $x$  時間歩いたとき、残りの道のりを  $y$  km とすると、 $y = 12 - 4x$  となり、 $y$  は  $x$  の関数である。



この関数で、変数  $x$  のとりうる値の範囲は  $0 \leq x \leq 3$  である。

また、変数  $y$  のとりうる値の範囲は  $0 \leq y \leq 12$  である。

S

$y$  が  $x$  の関数であるとき、変数  $x$  のとりうる値の範囲を、その関数の定義域という。また、定義域の  $x$  に対応して  $y$  の値がとる値の範囲を値域という。例 3.4 では、定義域が  $0 \leq x \leq 3$ 、値域が  $0 \leq y \leq 12$  である。

関数の定義域を示すのに、関数の式の後にかっこをつけて示すことがある。たとえば、例 3.4 の関数では、次のように書く。

$$y = 12 - 4x \quad (0 \leq x \leq 3)$$

練習 3.2 底辺の長さが 4cm、高さが  $x$  cm の三角形の面積を  $y$  cm<sup>2</sup> とする。ただし、高さは 4cm 以上であるとする。  $y$  を  $x$  の式で表せ。 解

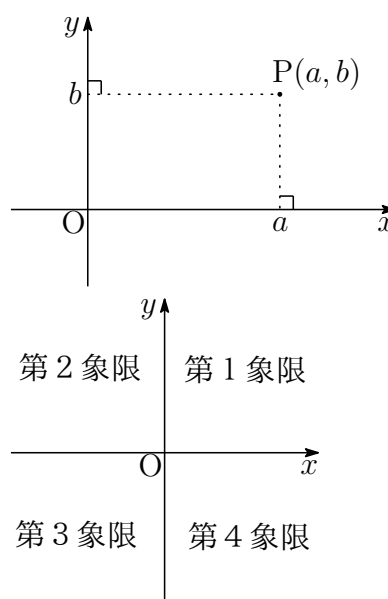
$y$  が  $x$  の関数であるとき、断りがなければ、その定義域は  $y$  の値が定まるような  $x$  の値全体であるとする。たとえば、関数  $y = x$  の定義域は実数全体であり、関数  $y = \frac{1}{x}$  の定義域は 0 以外の実数全体である。

## B 》関数のグラフ

平面上に座標軸を定めると、その平面上の点  $P$  の位置は、右の図のように 2 つの実数の組  $(a, b)$  で表される．この組  $(a, b)$  を点  $P$  の座標といい、このような点  $P$  を  $P(a, b)$  と書く．また、座標が  $(a, b)$  である点を、点  $(a, b)$  ということがある．座標が定められた平面を座標平面という．

座標平面は座標軸によって 4 つの部分に分けられる．これらの各部分を象限しやうげんといい、右の図のように、それぞれを

第 1 象限、第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限  
という．座標軸はどの象限にも含めない．



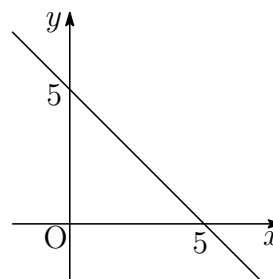
練習 3.3 次の点はどの象限にあるか。 解

- (1) 点  $A(2, 3)$       (2) 点  $B(2, -3)$       (3) 点  $C(-2, 3)$       (4) 点  $D(-2, -3)$

例 3.5 1 次関数  $y = -x + 5$  のグラフ S

この関数のグラフは、点  $(0, 5)$  を通り、傾きが  $-1$  の直線である．

この直線は、 $y = -x + 5$  を満たす点  $(x, y)$ ，すなわち点  $(x, -x + 5)$  の全体で作られる図形である．

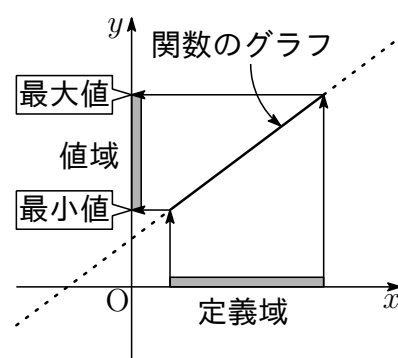


$x$  の 1 次関数  $y = ax + b$  のグラフは、傾きが  $a$ ，切片が  $b$  の直線である．このグラフを、直線  $y = ax + b$  ということもある．また、 $y = ax + b$  をこの直線の方程式という．

深化 3.1 そのグラフが点  $(2, 5)$  を通る 1 次関数を 1 つ選び、 $y = ax + b$  の形で表してみよう．また、そのグラフは点  $(-1, -1)$  を通るだろうか。 解

一般に、関数  $y = f(x)$  のグラフとは、関係  $y = f(x)$  を満たすような点  $(x, f(x))$  全体で作られる図形のことである。

関数の値域に最大の値があるとき、その値を関数の最大値という。また、最小の値があるとき、その値を関数の最小値という。



例題 3.1 関数  $y = 2x + 1$  ( $1 \leq x \leq 3$ ) について、次の問いに答えよ。

**S**

- (1) グラフをかけ。また、値域を求めよ。
- (2) 関数の最大値、最小値と、そのときの  $x$  の値を求めよ。

解答 (1) この関数のグラフは、 $y = 2x + 1$  のグラフのうち、 $1 \leq x \leq 3$  に対応する部分である。

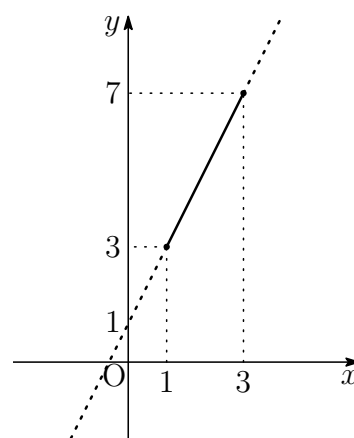
$$x = 1 \text{ のとき } y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$x = 3 \text{ のとき } y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

よって、グラフは右の図の実線部分である。

関数の値域は  $3 \leq y \leq 7$

- (2)  $x = 3$  で最大値 7 をとり、  
 $x = 1$  で最小値 3 をとる。



補足 関数のグラフをかく場合、定義域内は実線でかくが、定義域外は破線でかくことが多い。

練習 3.4 次の関数のグラフをかけ。また、関数の値域を求めよ。 **解**

- (1)  $y = 3x - 2$  ( $0 \leq x \leq 3$ )
- (2)  $y = -2x + 4$  ( $-2 \leq x \leq 2$ )

練習 3.5 次の関数の値域を求めよ。また、関数の最大値、最小値と、そのときの  $x$  の値を求めよ。 **解**

- (1)  $y = 2x - 1$  ( $-1 \leq x \leq 2$ )
- (2)  $y = -3x + 5$  ( $0 \leq x \leq 3$ )

### 発展 絶対値を含む関数のグラフ

次のような関数もある.

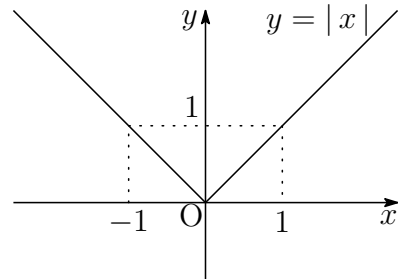
**Ex 3.1** 関数  $y = |x|$

絶対値記号をははずと

$$x \geq 0 \text{ のとき } y = x$$

$$x < 0 \text{ のとき } y = -x$$

そのグラフは, 右の図のような折れ線になる.



**演習 3.1** 次の関数のグラフをかけ. 解

(1)  $x \geq 1$  のとき  $y = x - 1$ ,  $x < 1$  のとき  $y = -x + 1$

(2)  $y = |x - 2|$

### 研究

#### 座標平面上の対称な点

点  $A(a, b)$  が第1象限にあるとき,  $A$  と

$x$  軸について対称な点  $B$

$y$  軸について対称な点  $C$

原点について対称な点  $D$

の座標は, それぞれ次のようになる.

点  $B$

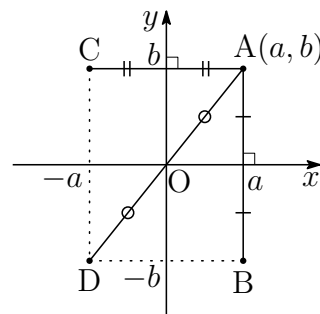
$$(a, -b)$$

点  $C$

$$(-a, b)$$

点  $D$

$$(-a, -b)$$



このことは, 点  $A$  が他の象限にあるときも同じである.

## 3.1.2 2次関数のグラフ

ここでは、いろいろな2次関数のグラフについて学ぼう。

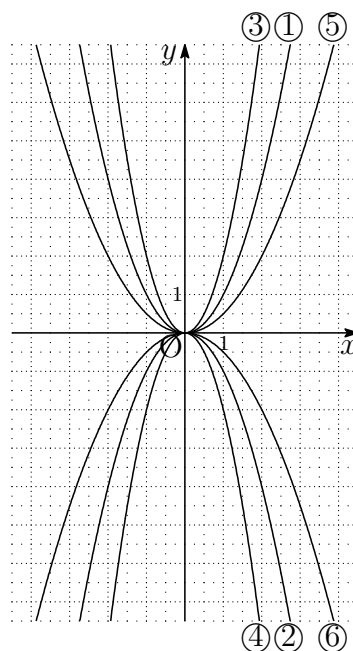
まず、2次関数  $y = ax^2$  のグラフを調べ、それをもとにいろいろな2次関数のグラフについて調べていこう。

A » 2次関数  $y = ax^2$  のグラフ

2次関数

- |                        |                         |
|------------------------|-------------------------|
| ① $y = x^2$            | ② $y = -x^2$            |
| ③ $y = 2x^2$           | ④ $y = -2x^2$           |
| ⑤ $y = \frac{1}{2}x^2$ | ⑥ $y = -\frac{1}{2}x^2$ |

のグラフは、それぞれ右の図のような曲線になる。



①と②は  $x$  軸に関して対称。  
③と④、⑤と⑥も、それぞれ  $x$  軸に関して対称。

2次関数  $y = ax^2$  のグラフには、次のような特徴がある。

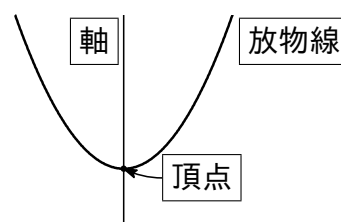
- 1 原点を通り、 $y$  軸に関して対称である。
- 2  $a > 0$  のとき、上に開いた形をしている。  
 $a < 0$  のとき、下を開いた形をしている。

2次関数  $y = ax^2$  のグラフの形の曲線を放物線という。放物線は限りなくのびた曲線であり、対称の軸をもつ。その対称の軸を放物線の軸といい、軸と放物線の交点を放物線の頂点という。

2次関数  $y = ax^2$  のグラフは

軸が  $y$  軸、頂点が原点

の放物線である。

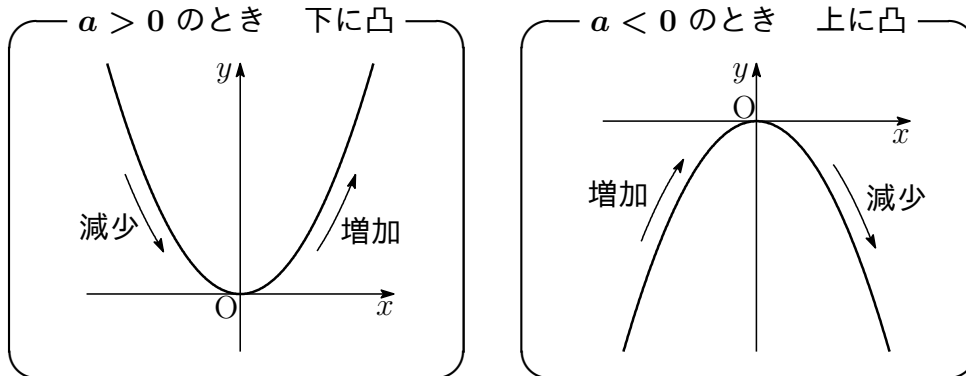


上に開いた形の放物線は下に凸であるといい、下に開いた形の放物線は上に凸であるという。

2次関数  $y = ax^2$  の  $y$  の値の変化については、次のことがいえる。

$a > 0$  のとき、 $x = 0$  の前後で減少から増加に変わる。

$a < 0$  のとき、 $x = 0$  の前後で増加から減少に変わる。



2次関数  $y = ax^2$  のグラフについてまとめると、次のようになる。

#### 2次関数 $y = ax^2$ のグラフ

2次関数  $y = ax^2$  のグラフは放物線である。

その軸は  $y$  軸、頂点は原点である。

$a > 0$  のとき 下に凸       $a < 0$  のとき 上に凸

**練習 3.6** 次の2次関数のグラフをかけ。また、その放物線は上に凸、下に凸のどちらであるか。 解

(1)  $y = 3x^2$

(2)  $y = -3x^2$

(3)  $y = \frac{1}{3}x^2$

B 》2次関数  $y = ax^2 + q$  のグラフ

次の2つの2次関数のグラフの関係を調べてみよう.

$$y = 2x^2, \quad y = 2x^2 + 1$$

2つの関数の値を比べると、右の表のように、 $x$ のどの値についても、それに対応する  $2x^2 + 1$  の値は  $2x^2$  の値より1だけ大きい.

| $x$        | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | ... |
|------------|-----|----|----|---|---|---|-----|
| $2x^2$     | ... | 8  | 2  | 0 | 2 | 8 | ... |
| $2x^2 + 1$ | ... | 9  | 3  | 1 | 3 | 9 | ... |

よって、 $y = 2x^2 + 1$  のグラフ上の各点は、 $y = 2x^2$  のグラフ上の各点を、

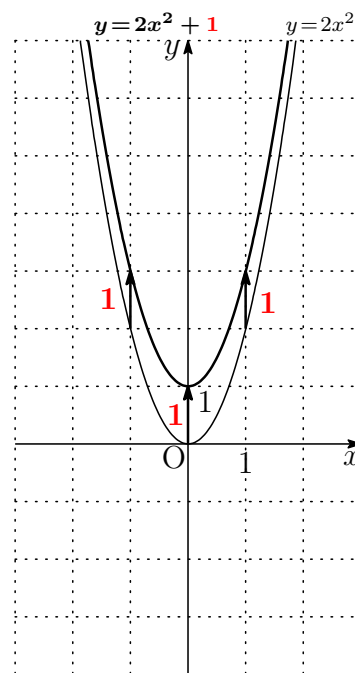
$y$  軸方向に **1** だけ移動させたもの

になっている.

したがって、 $y = 2x^2 + 1$  のグラフは右の図のようになる.

その軸は  $y$  軸、頂点は点  $(0, 1)$  である.

演習 3.2  $y = 2x^2 - 3$  のグラフを右の図にかけ. また、その放物線の軸と頂点をいえ. 解



平面上で、図形上の各点を一定の方向に一定の距離だけ動かす移動を、平行移動という. 一般に、次のことがいえる.

$y = ax^2 + q$  のグラフ

2次関数  $y = ax^2 + q$  のグラフは、 $y = ax^2$  のグラフを、 $y$  軸方向に  **$q$**  だけ平行移動した放物線である.  
その軸は  $y$  軸、頂点は点  $(0, q)$

注意 「 $y$  軸方向に  $q$ 」とは「 $y$  軸の正の向きに  $q$ 」ということである. なお、

「 $y$  軸方向に  $-1$ 」とは「 $y$  軸の負の向きに  $1$ 」ということである.

練習 3.7 次の2次関数のグラフをかけ. また、その頂点を求めよ. 解

(1)  $y = x^2 + 3$

(2)  $y = 2x^2 - 1$

(3)  $y = -x^2 + 2$

C 》 2次関数  $y = a(x - p)^2$  のグラフ

次の2つの2次関数のグラフの関係を調べてみよう.

$$y = 2x^2, \quad y = 2(x - 3)^2$$

2つの関数の値を比べると、次のような表ができる.

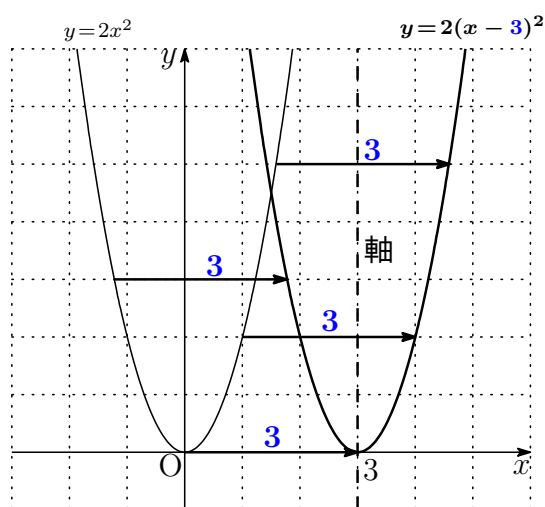
| $x$          | ... | -2 | -1 | 0  | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | ... |
|--------------|-----|----|----|----|---|---|----|----|----|-----|
| $2x^2$       | ... | 8  | 2  | 0  | 2 | 8 | 18 | 32 | 50 | ... |
| $2(x - 3)^2$ | ... | 50 | 32 | 18 | 8 | 2 | 0  | 2  | 8  | ... |

よって、 $y = 2(x - 3)^2$  のグラフは、  
 $y = 2x^2$  のグラフを、

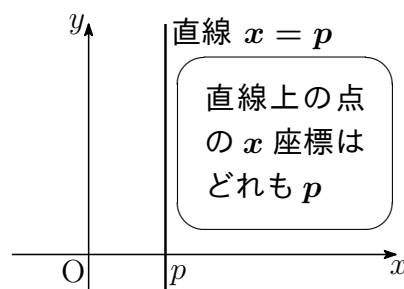
$x$  軸方向に **3** だけ平行移動したものであり、右の図のようになる.

その軸は、点  $(3, 0)$  を通り  $y$  軸に平行な直線  $x = 3$  である. また、その頂点は点  $(3, 0)$  である.

演習 3.3 2つの2次関数  $y = 2x^2$  と  $y = 2(x + 3)^2$  の関係を調べよ. 解



注意 点  $(p, 0)$  を通り  $y$  軸に平行な直線を、  
直線  $x = p$  という.



一般に次のことがいえる.

$y = a(x - p)^2$  のグラフ

2次関数  $y = a(x - p)^2$  のグラフは、 $y = ax^2$  のグラフを、  
 $x$  軸方向に  $p$  だけ平行移動した放物線である.  
その軸は直線  $x = p$  である. 頂点は点  $(p, 0)$  である.

練習 3.8 次の2次関数のグラフをかけ. また、その頂点と軸を求めよ. 解

- (1)  $y = (x - 2)^2$       (2)  $y = 2(x + 1)^2$       (3)  $y = -2(x + 2)^2$

D 》2次関数  $y = a(x - p)^2 + q$  のグラフ

これまでに調べたことから、 $y = a(x - p)^2 + q$  の形で表される2次関数のグラフについてもわかる.

[2次関数の平行移動]

例 3.6 2次関数  $y = 2(x - 3)^2 + 1$  のグラフ

S

$y = 2x^2$  と  $y = 2(x - 3)^2 + 1$  のグラフの関係は、次のようになる.

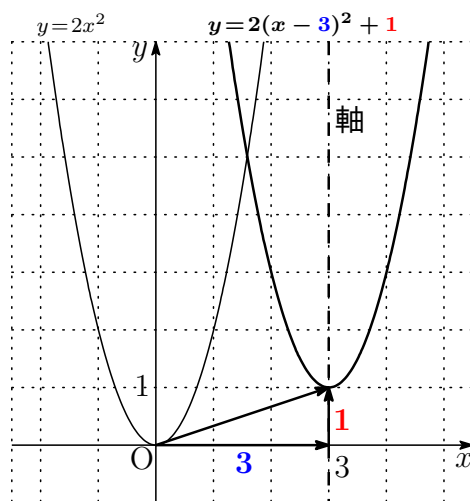
$$y = 2x^2 \xrightarrow[\substack{x \text{ 軸方向に } 3 \\ \text{だけ平行移動}}]{\quad} y = 2(x - 3)^2 \xrightarrow[\substack{y \text{ 軸方向に } 1 \\ \text{だけ平行移動}}]{\quad} y = 2(x - 3)^2 + 1$$

したがって、 $y = 2(x - 3)^2 + 1$  のグラフは、 $y = 2x^2$  のグラフを

$x$  軸方向に  $3$ 、 $y$  軸方向に  $1$

だけ平行移動したものであり、右の図のようになる.

その軸は直線  $x = 3$  であり、頂点は点  $(3, 1)$  である.



一般に、次のことがいえる.

$y = a(x - p)^2 + q$  のグラフ

2次関数  $y = a(x - p)^2 + q$  のグラフは、 $y = ax^2$  のグラフを、 $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動した放物線である.  
その軸は直線  $x = p$ 、頂点は点  $(p, q)$  である.

練習 3.9 次の2次関数のグラフをかけ. また、その頂点と軸を求めよ. 解

(1)  $y = (x - 1)^2 + 2$

(2)  $y = 2(x - 2)^2 - 4$

(3)  $y = -2(x + 1)^2 + 2$

(4)  $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$

演習 3.4 2次関数  $y = 2x^2$  のグラフを次のように平行移動させると、どのような2次関数のグラフになるか. その関数の式を求めよ. 解

(1)  $x$  軸方向に  $1$ 、 $y$  軸方向に  $3$  だけ平行移動

(2)  $x$  軸方向に  $1$ 、 $y$  軸方向に  $-3$  だけ平行移動

(3)  $x$  軸方向に  $-1$ 、 $y$  軸方向に  $3$  だけ平行移動

E 》 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフ

2次式  $2(x-3)^2 + 3$  を展開して整理すると

$$\begin{aligned} 2(x-3)^2 + 1 &= 2(x^2 - 6x + 9) + 1 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 + 1 \\ &= 2x^2 - 12x + 19 \end{aligned}$$

となる．すなわち，次の等式が成り立つ．

$$2x^2 - 12x + 19 = 2(x-3)^2 + 1$$

## 平方完成

$a(x + \square)^2 + \bigcirc$  の形  
の2次式に表すこと

2次関数  $y = 2x^2 - 12x + 19$  が与えられたとき，これを  $y = 2(x-3)^2 + 1$  に変形すると，そのグラフの軸と頂点がわかる．

一般に，2次式  $ax^2 + bx + c$  を  $a(x-p)^2 + q$  の形に変形することを，平方完成するという．

[平行完成]

例 3.7 (1)  $x^2 + 4x$  を平方完成する．

S

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= (x+2)^2 - 2^2 \\ &= (x+2)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$x^2 + \blacksquare x = \left(x + \frac{\blacksquare}{2}\right)^2 - \left(\frac{\blacksquare}{2}\right)^2$$

(2)  $3x^2 + 6x + 2$  を平方完成する．

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 5 &= 3(x^2 - 2x) + 5 \\ &\quad \text{①} \quad \text{②} \\ &= 3\{(x-1)^2 - 1^2\} + 5 \\ &\quad \text{③} \\ &= 3(x-1)^2 - 3 \cdot 1 + 5 \\ &= 3(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

①  $x^2, x$  を含む項だけを  $x^2$  の係数  
3 でくくる．

②  $x^2 + 2x = \left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2$

③ 3 をかけて { } をはずす．

練習 3.10 次の2次式を平方完成せよ． 解

(1)  $x^2 + 8x$

(2)  $x^2 - 6x + 8$

(3)  $2x^2 - 8x + 5$

(4)  $3x^2 + 6x + 2$

(5)  $x^2 + x - 2$

(6)  $-2x^2 + 6x + 4$

2次式の平方完成を利用して、2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフをかいてみよう.

例題 3.2 次の2次関数のグラフをかけ. また, その頂点と軸を求めよ. S

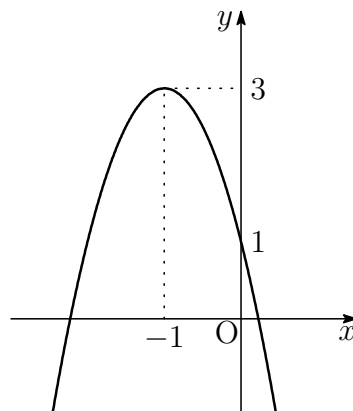
$$y = -2x^2 - 4x + 1$$

解答  $-2x^2 - 4x + 1 = -2(x^2 + 2x) + 1$   
 $= -2\{(x+1)^2 - 1^2\} + 1$   
 $= -2(x+1)^2 + 3$

よって  $y = -2(x+1)^2 + 3$

したがって, この関数のグラフは  
 右の図のような放物線である.

その軸は直線  $x = -1$ , 頂点は  
 点  $(-1, 3)$  である.



練習 3.11 次の2次関数のグラフをかけ. また, その頂点と軸を求めよ. 解

(1)  $y = x^2 - 4x + 3$

(2)  $y = 2x^2 + 8x + 3$

(3)  $y = -3x^2 + 6x + 1$

(4)  $y = -x^2 - 3x$

一般に, 次のことがいえる

[2次関数の平行移動]

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは,  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線である.

補足 2次式  $ax^2 + bx + c$  の平方完成は次ページで示している.

深化 3.2 そのグラフが点  $(2, 5)$  を通る2次関数を1つ選び,  $y = ax^2 + bx + c$  の形で表してみよう. また, そのグラフは点  $(-1, -1)$  を通るだろうか. 解

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフを，放物線  $y = ax^2 + bx + c$  ということもある．また， $y = ax^2 + bx + c$  をこの放物線の方程式という．

応用例題 3.1 放物線  $y = x^2 + 2x + 2$  を平行移動して放物線  $y = x^2 - 6x + 11$  に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。 S

考え方 》  $x^2$  の係数が等しいから，2つの放物線は平行移動によって重ねることができる．2つの放物線の頂点の移動に注目する．

解答  $y = x^2 + 2x + 2$  を変形すると

$$y = (x + 1)^2 + 1$$

$y = x^2 - 6x + 11$  を変形すると

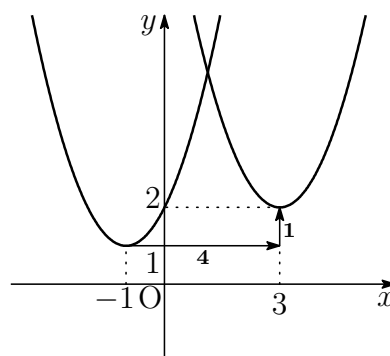
$$y = (x - 3)^2 + 2$$

よって，頂点は点  $(-1, 1)$  から点  $(3, 2)$  に移動する．

したがって，

$x$  軸方向に 4， $y$  軸方向に 1

だけ平行移動すればよい．



練習 3.12 放物線  $y = 2x^2 - 4x$  を平行移動して放物線  $y = 2x^2 + 4x - 3$  に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。 解

### ■ 2次式 $ax^2 + bx + c$ の平方完成

$x$  の2次式  $ax^2 + bx + c$  は，次のように平方完成することができる．

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left\{ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \right\} + c \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

よって，放物線  $y = ax^2 + bx + c$  の軸と頂点は次のようになる．

$$\text{軸は 直線 } x = -\frac{b}{2a}, \quad \text{頂点は 点 } \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

## 研究

## グラフの平行移動

2次関数  $y = 2x^2$  のグラフ  $F$  を,  $x$  軸方向に 4,  $y$  軸方向に 3 だけ平行移動することを, グラフ上の点の移動で考えてみよう. 移動後の放物線を  $G$  とする.

$F$  上に点  $P(s, t)$  をとり, この平行移動によって, 点  $P$  が  $G$  上の点  $Q(x, y)$  へ動くとする

$$t = 2s^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x = s + 4, y = t + 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ.  $\textcircled{2}$  から

$$s = x - 4, t = y - 3$$

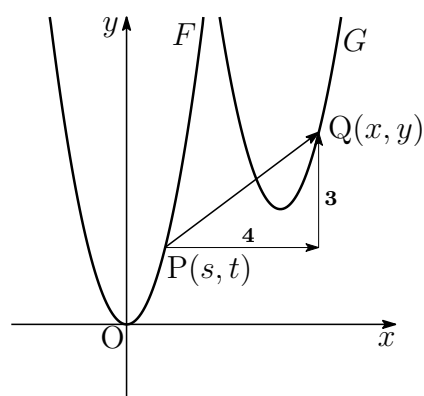
$\textcircled{1}$  に代入すると  $y - 3 = 2(x - 4)^2$

すなわち  $y = 2(x - 4)^2 + 3$

この2次関数のグラフが, 放物線  $G$  である.

一般に, 2次関数  $y = f(x)$  のグラフを,  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動すると, 移動後の放物線は, 次のようになる. [グラフの平行移動]

$$y - q = f(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = f(x - p) + q$$



**Ex 3.2**  $y = 2x^2 + 3x + 1$  のグラフを,  $x$  軸方向に 1,  $y$  軸方向に 3 だけ平行移動すると, 移動後の放物線の方程式は

$$y - 3 = 2(x - 1)^2 + 3(x - 1) + 1 \quad \text{すなわち} \quad y = 2x^2 - x + 3$$

**演習 3.5** 2次関数  $y = 2x^2 - 5x + 3$  のグラフを,  $x$  軸方向に  $-2$ ,  $y$  軸方向に  $1$  だけ平行移動するとき, 移動後の放物線の方程式を求めよ. 解

## 発展

## グラフの対称移動

平面上で図形上の各点を，直線または点に関して対称な位置に動かすことを，直線または点に関して対称移動するという．

2次関数  $y = x^2 - 4x + 5$  のグラフ  $F$  を， $x$  軸に関して対称移動するとき，移動後の放物線を  $G$  とする．

$F$  上に点  $P(s, t)$  をとり，この対称移動によって，点  $P$  が  $G$  上の点  $Q(x, y)$  へ動くとする

$$t = s^2 - 4s + 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x = s, \quad y = -t \quad \cdots \textcircled{2}$$

②より  $s = x, t = -y$  である．これを①に代入すると

$$-y = x^2 - 4x + 5 \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 + 4x - 5$$

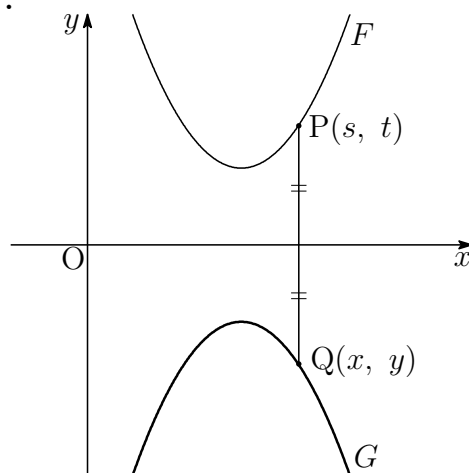
一般に，2次関数  $y = f(x)$  のグラフを， $x$  軸， $y$  軸，原点それぞれに関して対称移動すると，移動後の放物線の方程式は，次のようになる．

[グラフの対称移動]

$$x \text{ 軸} : -y = f(x) \quad \text{すなわち} \quad y = -f(x)$$

$$y \text{ 軸} : y = f(-x)$$

$$\text{原点} : -y = f(-x) \quad \text{すなわち} \quad y = -f(-x)$$



**Ex 3.3** 2次関数  $y = x^2 - 2x + 3$  のグラフの， $y$  軸，原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式は，次のようになる．

$$x \text{ 軸} : -y = x^2 - 2x + 3 \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 + 2x - 3$$

$$y \text{ 軸} : y = (-x)^2 - 2(-x) + 3 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 + 2x + 3$$

$$\text{原点} : -y = (-x)^2 - 2(-x) + 3 \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 - 2x - 3$$

**演習 3.6** 2次関数  $y = x^2 + 4x + 1$  のグラフの， $x$  軸， $y$  軸，原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。 解

## 3.1.3 問題

問題 3.1  $a, b$  は定数とする. 2次関数  $f(x) = ax^2 - bx - a + b$  において, 次の値を求めよ. 解 → p.72 例 3.3

- (1)  $f(1)$                       (2)  $f(0)$                       (3)  $f(-2)$

問題 3.2 関数  $y = ax + b$  ( $-1 \leq x \leq 5$ ) の値域が,  $1 \leq y \leq 13$  となるような定数  $a, b$  の値を求めよ. ただし,  $a < 0$  とする. 解 → p.74

問題 3.3 放物線  $y = -2x^2$  を, 頂点が次の点となるように平行移動する. このとき, 移動後の方程式を求めよ. 解 → p.80

- (1) 点  $(1, -3)$                       (2) 点  $(-2, 5)$

問題 3.4 次の2次関数のグラフをかけ. また, その軸と頂点を求めよ. 解

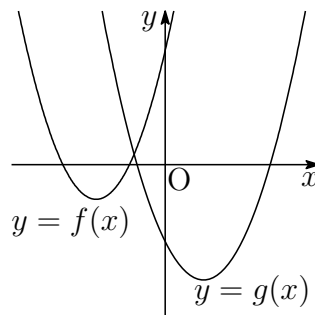
- (1)  $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$                       (2)  $y = -3x^2 + 3x + \frac{1}{4}$                       → p.82 例題 3.2  
 (3)  $y = (x - 1)(x - 5)$                       (4)  $y = (2x - 1)(x + 3)$

問題 3.5 放物線  $y = 2x^2 - 4x - 1$  について, 次の問いに答えよ. 解 → p.82, 83

- (1) この放物線の頂点を  $A$  とするとき,  $A$  の座標を求めよ.  
 (2) この放物線を,  $x$  軸方向に 2,  $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動したとき, 移動後の放物線の方程式を求めよ.

問題 3.6 右の図は 2 つの 2 次関数  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  のグラフである. 次の問いに答えよ. 解

- (1)  $y = f(x)$  のグラフの頂点と  $y = g(x)$  のグラフの頂点について,  $y$  座標が大きいのはどちらか.  
 (2)  $f(0)$ ,  $g(0)$  の符号を答えよ.



## 3.2 2次関数の値の変化

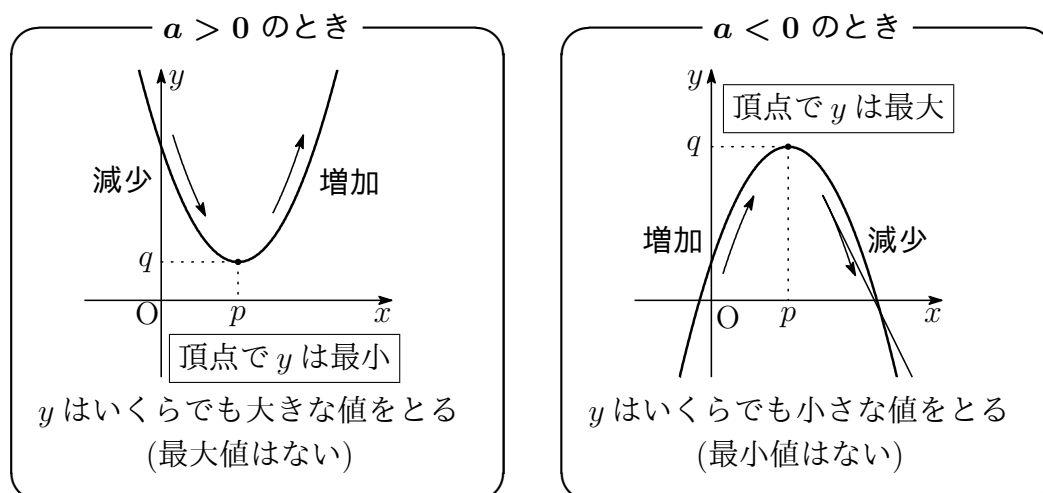
### 3.2.1 2次関数の最大・最小

関数のグラフを利用すると、関数の値の変化のようすを知ることができる。  
ここでは、2次関数の値の変化を調べよう。

#### A 》 2次関数の最大・最小

2次関数  $y = ax^2$  の値の変化については、77 ページで述べた。

2次関数  $y = a(x - p)^2 + q$  の変化についても、 $a$  の値が正か負かによって次のような2つの場合がある。



したがって、次のことがいえる。

#### 2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ の最大・最小

$a > 0$  のとき、 $x = p$  で最小値  $q$  をとる。最大値はない。

$a < 0$  のとき、 $x = p$  で最大値  $q$  をとる。最小値はない。

**練習 3.13** 次の2次関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。 解

(1)  $y = 2(x - 3)^2 + 4$

(2)  $y = -2(x + 1)^2 - 3$

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  の最大値，最小値を調べるには，2次式を平方完成して  $y = a(x - p)^2 + q$  の形にすればよい。

例題 3.3 次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

**S**

(1)  $y = x^2 - 4x + 3$

(2)  $y = -2x^2 - 4x$

解答 (1) 関数の式を変形すると  $y = (x - 2)^2 - 1$

よって， $y$  は  $x = 2$  で最小値  $-1$  をとる。

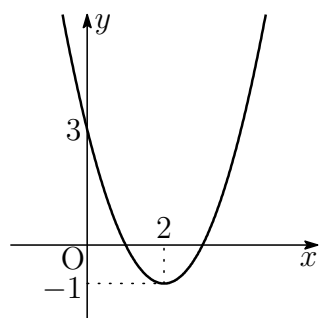
最大値はない。

(2) 関数の式を変形すると  $y = -2(x + 1)^2 + 2$

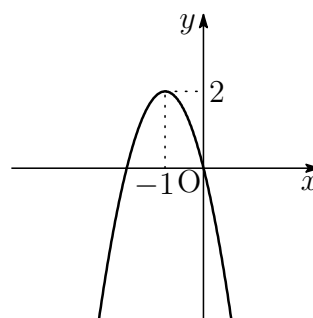
よって， $y$  は  $x = -1$  で最大値  $2$  をとる。

最小値はない。

(1)



(2)



練習 3.14 次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。 **解**

(1)  $y = x^2 - 6x + 5$

(2)  $y = -2x^2 + 5x$

深化 3.3  $x = -1$  で最小値をとる2次関数を1つ定めてみよう。 **解**

## B 》定義域に制限がある場合の関数の最大・最小

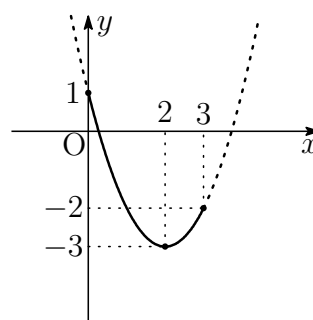
例題 3.4 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

[S]

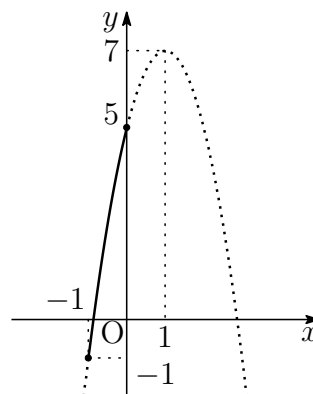
$$(1) y = x^2 - 4x + 1 \quad (0 \leq x \leq 3) \qquad (2) y = -2x^2 + 4x + 5 \quad (-1 \leq x \leq 0)$$

解答 (1)  $y = x^2 - 4x + 1$  を変形すると

$$y = (x - 2)^2 - 3$$

 $0 \leq x \leq 3$  でのグラフは，右の図の実線部分である．よって， $y$  は $x = 0$  で最大値 1 をとり， $x = 2$  で最小値  $-3$  をとる．(2)  $y = -2x^2 + 4x + 5$  を変形すると

$$y = -2(x - 1)^2 + 7$$

 $-1 \leq x \leq 0$  でのグラフは，右の図の実線部分である．よって， $y$  は $x = 0$  で最大値 5 をとり， $x = -1$  で最小値  $-1$  をとる．

補足 例題 3.4(1) の定義域の中央  $\frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$  は，軸  $x = 2$  より左側にあるから，左端  $x = 0$  で最大値をとる．

練習 3.15 次の関数の最大値，最小値を求めよ。 [解]

$$(1) y = x^2 + 2x + 3 \quad (-2 \leq x \leq 2) \qquad (2) y = -x^2 + 4x - 3 \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$(3) y = 3x^2 + 6x - 1 \quad (1 \leq x \leq 3) \qquad (4) y = -2x^2 + 12x \quad (0 \leq x \leq 6)$$

演習 3.7 関数  $y = -2x^2 + 8x$  ( $1 < x < 4$ ) の最大値と最小値を求めよ。 [解]

深化 3.4 例題 3.4(2) の関数  $y = -2x^2 + 4x + 5$  に対して，次の条件を満たすように定義域を 1 つ定めてみよう。 [解]

条件：定義域の両端以外で最大値をとる，定義域の右端のみで最小値をとる．

応用例題 3.2 次の条件を満たすように、定数  $c$  の値を定めよ。

**S**

- (1) 関数  $y = x^2 - 4x + c$  ( $1 \leq x \leq 5$ ) の最大値が 8 である。  
 (2) 関数  $y = -x^2 - 2x + c$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) の最小値が  $-3$  である。

考え方 》 (1) 下に凸の放物線 → 軸から遠いほど  $y$  の値は大きい。

(2) 上に凸の放物線 → 軸から遠いほど  $y$  の値は小さい。

解答 (1) 式を変形すると

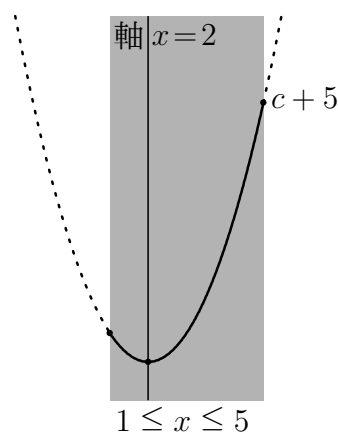
$$y = (x - 2)^2 + c - 4$$

$1 \leq x \leq 5$  であるから、 $x = 5$   
で最大値をとる。

$x = 5$  のとき

$$y = 5^2 - 4 \cdot 5 + c = c + 5$$

$$c + 5 = 8 \text{ より } c = 3$$



(2) 式を変形すると

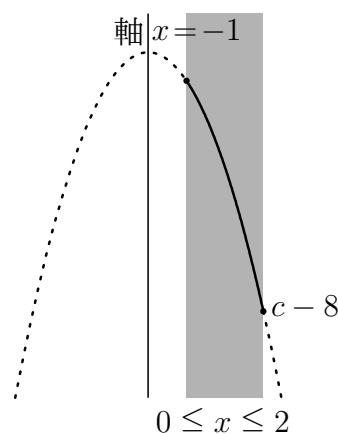
$$y = -(x + 1)^2 + c + 1$$

$0 \leq x \leq 2$  であるから、 $x = 2$   
で最小値をとる。

$x = 2$  のとき

$$y = -2^2 - 2 \cdot 2 + c = c - 8$$

$$c - 8 = -3 \text{ より } c = 5$$



補足 応用例題 3.2(1) は下に凸の放物線で定義域の中央  $\frac{1+5}{2} = 3$  が、軸  $x = 2$  より右側にあるから、定義域の右端の  $x = 5$  で最大値をとる。(2) は上に凸の放物線で定義域の中央  $\frac{0+2}{2} = 1$  が、軸  $x = -1$  より右側にあるから、定義域の右端  $x = 2$  で最小値をとる。

練習 3.16 次の条件を満たすように、定数  $c$  の値を定めよ。 **解**

- (1) 関数  $y = x^2 - 2x + c$  ( $-2 \leq x \leq 0$ ) の最大値が 5 である。  
 (2) 関数  $y = -x^2 + 6x + c$  ( $1 \leq x \leq 4$ ) の最小値が  $-7$  である。

## C》関数の最大・最小と場合分け

応用例題 3.3  $a$  は正の定数とする. 次の関数の最小値を求めよ.

S

$$y = x^2 - 4x + 1 \quad (0 \leq x \leq a)$$

考え方》放物線  $y = x^2 - 4x + 1$  は下に凸で, 軸は直線  $x = 2$  である.

[1]  $0 < a < 2$       定義域  $0 \leq x \leq a$  は  $2$  を含まない

[2]  $2 \leq a$       定義域  $0 \leq x \leq a$  は  $2$  を含む

で, 場合分けをする.

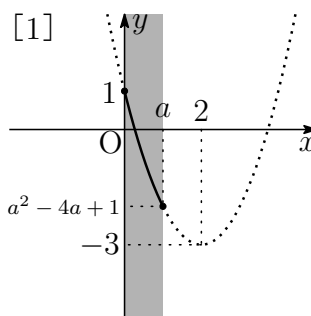
[2次関数の最大・最小]

解答 関数の式を変形すると  $y = (x - 2)^2 - 3 \quad (0 \leq x \leq a)$

[1]  $0 < a < 2$  のとき

関数のグラフは図 [1] の  
実線部分である.

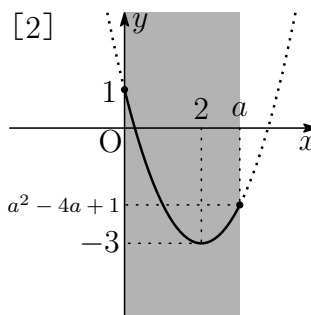
よって,  $y$  は  $x = a$  で  
最小値  $a^2 - 4a + 1$  をとる.



[2]  $2 \leq a$  のとき

関数のグラフは図 [2] の  
実線部分である.

よって,  $y$  は  $x = 2$  で  
最小値  $-3$  をとる.



(答)  $0 < a < 2$  のとき  $x = a$  で最小値  $a^2 - 4a + 1$

$2 \leq a$  のとき  $x = 2$  で最小値  $-3$

補足 応用例題 3.3 は, 次のように場合分けを行ってもよい (結果は同じ).

[1]  $0 < a \leq 2$ , [2]  $2 < a$       または      [1]  $0 < a \leq 2$ , [2]  $2 \leq a$

練習 3.17  $a$  は正の定数とする. 次の関数の最大値を求めよ. 解

$$y = -x^2 + 2x + 1 \quad (0 \leq x \leq a)$$

応用例題 3.4  $a$  は定数とする. 次の関数の最小値を求めよ.

**S**

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

考え方 》 放物線  $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$  は下に凸, 軸は直線  $x = a$  である.  $a$  が定義域  $0 \leq x \leq 2$  の左外, 内, 右外である場合で次のように場合分けをする.

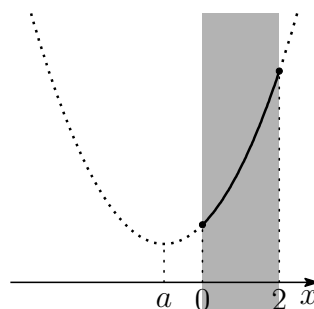
[1]  $a < 0$       [2]  $0 \leq a \leq 2$       [3]  $2 < a$       [2次関数の最大・最小]

解答 関数の式を変形すると  $y = (x - a)^2 + 1 \quad (0 \leq x \leq 2)$

[1]  $a < 0$  のとき

関数のグラフは図 [1] の  
実線部分である.

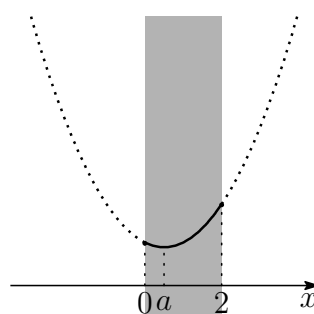
よって,  $y$  は  $x = 0$  で  
最小値  $a^2 + 1$  をとる.



[2]  $0 \leq a \leq 2$  のとき

関数のグラフは図 [2] の  
実線部分である.

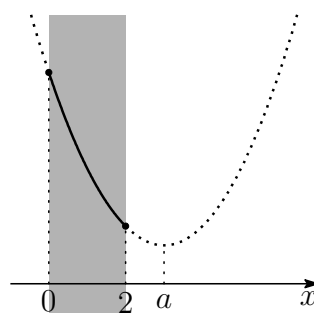
よって,  $y$  は  $x = a$  で  
最小値 1 をとる.



[3]  $2 < a$  のとき

関数のグラフは図 [3] の  
実線部分である.

よって,  $y$  は  $x = 2$  で  
最小値  $a^2 - 4a + 5$  をとる.



(答)  $a < 0$  のとき       $x = 0$  で最小値  $a^2 + 1$   
 $0 \leq a \leq 2$  のとき       $x = a$  で最小値 1  
 $2 < a$  のとき       $x = 2$  で最小値  $a^2 - 4a + 5$

練習 3.18  $a$  は正の定数とする. 次の関数の最大値を求めよ. **解**

$$y = 2x^2 - 4ax + 2a^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

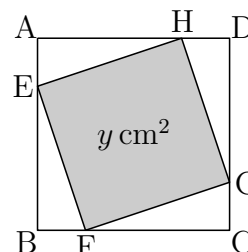
## D 》 最大・最小の応用

2 次関数を使って解決できる問題について、考えてみよう。

応用例題 3.5 1 辺が 10cm の正方形 ABCD に、それより小さい正方形 EFGH を右の図のように内接させる。

正方形 EFGH の面積を  $y \text{ cm}^2$  とするとき、 $y$  の最小値を求めよ。

**S**



考え方 》  $AH = x$  (cm) として  $y$  を  $x$  で表す。  $x$  の値の範囲にも注意。

解答  $AH = x$  (cm) とすると、 $AE = HD = 10 - x$  (cm) である。

$x > 0$  かつ  $10 - x > 0$  から

$$0 < x < 10 \quad \dots \textcircled{1}$$

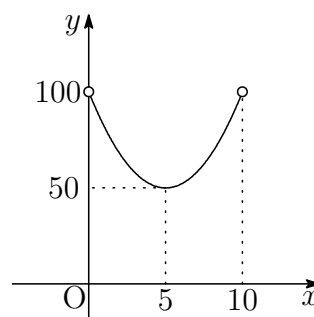
また、 $y = EH^2$  である。

三平方の定理により

$$\begin{aligned} EH^2 &= AE^2 + AH^2 \\ &= (10 - x)^2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \end{aligned}$$

よって  $y = 2(x - 5)^2 + 50$

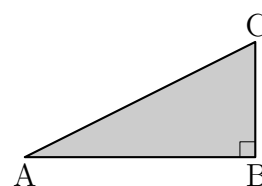
① において、 $y$  は  $x = 5$  すなわち  $AH = 5$  で最小値 50 をとる。



補足 正方形 EFGH の面積が最小のとき、1 辺 EH の長さも最小となる。

[正方形の面積の最大・最小]

練習 3.19 直角三角形 ABC において、直角をはさむ 2 辺 AB, BC の長さの和が 14cm であるとする。このような三角形の面積の最大値を求めよ。 **解**



## 3.2.2 2次関数の決定

ここでは、与えられた条件を満たす2次関数を求めてみよう。

## A 》放物線の頂点や軸から関数を決定

例題 3.5 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

S

- (1) 頂点が点  $(2, 5)$  で、点  $(-1, -4)$  を通る。  
 (2) 軸が直線  $x = -1$  で、2点  $(0, -4)$ ,  $(1, 2)$  を通る。

解答 (1) 頂点が点  $(2, 5)$  であるから、この2次関数は

$$y = a(x - 2)^2 + 5$$

の形に表される。グラフが点  $(-1, -4)$  を通るから

$$-4 = a(-1 - 2)^2 + 5$$

よって  $a = -1$

したがって、求める2次関数は  $y = -(x - 2)^2 + 5$

(2) 軸が直線  $x = -1$  であるから、この2次関数は

$$y = a(x + 1)^2 + q$$

の形に表される。グラフが

$$\text{点 } (0, -4) \text{ を通るから } -4 = a(0 + 1)^2 + q$$

$$\text{点 } (1, 2) \text{ を通るから } 2 = a(1 + 1)^2 + q$$

$$\text{よって } a + q = -4, 4a + q = 2$$

$$\text{これを解くと } a = 2, q = -6$$

したがって、求める2次関数は  $y = 2(x + 1)^2 - 6$

練習 3.20 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

解

(1) 頂点が点  $(-2, 4)$  で、点  $(-4, 2)$  を通る。

(2) 軸が直線  $x = 2$  で、2点  $(-1, 5)$ ,  $(1, -11)$  を通る。

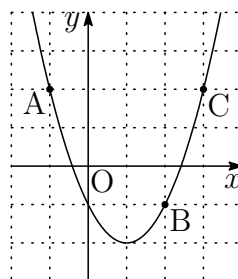
## B》放物線上の3点から関数を決定

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフが3点  $A(-1, 2)$ ,  $B(2, -1)$ ,  $C(3, 2)$  を通るとする.  
このとき、次の3つの等式が成り立つ.

点Aを通るから  $2 = a(-1)^2 + b(-1) + c$

点Bを通るから  $-1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$

点Cを通るから  $2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$



そこで、これらを同時に成り立たせる  $a$ ,  $b$ ,  $c$  の値を求めてみよう.

例 3.8 次の等式を同時に満たす  $a$ ,  $b$ ,  $c$  の値を求める.

**S**

$$\begin{cases} a - b + c = 2 & \cdots \text{①} \\ 4a + 2b + c = -1 & \cdots \text{②} \\ 9a + 3b + c = 2 & \cdots \text{③} \end{cases}$$

①と②を用いて  $c$  を消去する.

② - ① から  $3a + 3b = -3$

すなわち  $a + b = -1 \quad \cdots \text{④}$

①と③を用いて  $c$  を消去する.

③ - ① から  $8a + 4b = 0$

すなわち  $2a + b = 0 \quad \cdots \text{⑤}$

④と⑤を連立させた方程式を解くと  $a = 1$ ,  $b = -2$

これらを①に代入して  $c = -1$

よって  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = -1$

② - ① の計算

$$\begin{array}{r} 4a + 2b + c = -1 \\ -) \quad a - b + c = 2 \\ \hline 3a + 3b = -3 \end{array}$$

例 3.8 から、グラフが3点  $A(-1, 2)$ ,  $B(2, -1)$ ,  $C(3, 2)$  を通る2次関数は  $y = x^2 - 2x - 1$  であることがわかる.

例 3.8 のような、3文字を含む1次方程式を組にした連立方程式を連立3元1次方程式という.

連立3元1次方程式の解き方は、次のようになる。

連立3元1次方程式の解き方

- ① 1文字を消去して，残りの2文字の連立方程式を導く．
- ② 2文字の連立方程式を解く．
- ③ 残りの1文字の値を求める．

練習 3.21 次の連立3元1次方程式を解け。 解

$$(1) \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2y - z = -2 \\ 3x + 2y - z = 12 \end{cases}$$

例題 3.6 2次関数のグラフが3点(1, 5), (2, 1), (3, -7)を通るとき，その2次関数を求めよ。 S

解答 求める2次関数を  $y = ax^2 + bx + c$  とする。

グラフが3点(1, 5), (2, 1), (3, -7)を通るから

$$5 = a + b + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$1 = 4a + 2b + c \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$-7 = 9a + 3b + c \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ から } 3a + b = -4 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \text{ から } 5a + b = -8 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } a = -2, b = 2$$

$$\text{これらを } \textcircled{1} \text{ に代入して } c = 5$$

$$\text{よって，求める2次関数は } y = -2x^2 + 2x + 5$$

練習 3.22 2次関数のグラフが3点(2, -2), (3, 5), (-1, 1)を通るとき，その2次関数を求めよ。 解

## 3.2.3 問題

問題 3.7 次の関数の最大値，最小値を求めよ。 解 → p.89 例題 3.4

$$(1) y = x^2 - 3x - 1 \quad (0 \leq x \leq 2) \quad (2) y = -3x^2 - 5x \quad (-2 \leq x \leq 1)$$

問題 3.8  $a$  は定数とする．関数  $y = x^2 - 2ax$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) について，次の問いに答えよ。 解 → p.92 応用例題 3.4

- (1) 最小値を求めよ。 (2) 最大値を求めよ。

問題 3.9 ある商品について，次のことがわかっている。

- [1] 1個 200 円で仕入れて売り値を 250 円として売ると 1日に 600 個売れる。  
 [2] 1個につき売り値を 1 円値下げするごとに 1日の売り上げ個数は 15 個ずつ増加する。  
 [3] 1個につき売り値を 1 円値上げするごとに 1日の売り上げ個数は 15 個ずつ減少する。

この商品を 1 個 200 円で何個か仕入れ，仕入れた商品をその日のうちに完売させるとする．このとき，1 日の利益を最大にする仕入れの個数と 1 個あたりの売り値を求めよ。 解 → p.93 応用例題 3.5

問題 3.10 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。 解 → p.94~96

- (1) 頂点は放物線  $y = 2x^2 + 4x + 1$  の頂点と同じであり， $y$  軸と点  $(0, 2)$  で交わる。  
 (2) 3 点  $(3, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(2, 6)$  を通る。

問題 3.11  $x = 2$  で最大値 8 をとり， $x = 1$  で  $y = 5$  となる 2 次関数を求めよ。 解 → p.94

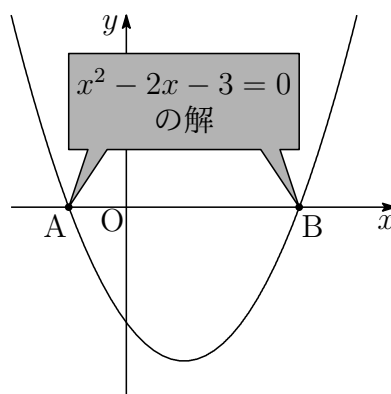
問題 3.12 秒速 20 m の速さで進んでいた自動車が，急ブレーキをかけてから  $t$  秒後に進んだ距離を  $y$  m とするとき， $y$  は  $t$  の 2 次関数になるという． $t$ ,  $y$  を計測すると右の表が得られた．3 秒間に進んだ距離を求めよ。 解

|     |    |    |    |
|-----|----|----|----|
| $t$ | 2  | 4  | 5  |
| $y$ | 32 | 48 | 50 |

### 3.3 2次方程式と2次不等式

#### 3.3.1 2次方程式

2次関数  $y = x^2 - 2x - 3$  のグラフは、右の図のように  $x$  軸と2点 A, B で交わる．点 A, B の  $y$  座標は0であるから、その  $x$  座標は、2次方程式  $x^2 - 2x - 3 = 0$  の解である．2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは、2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  と深く関係している．ここでは、まず、2次方程式とその解について学ぼう．



#### A 》 因数分解を使う解き方

まず、因数分解を使って2次方程式を解く方法について調べよう．

例 3.9 2次方程式  $x^2 - 2x - 3 = 0$  を解く．

S

左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x-3) = 0$$

よって  $x+1=0$  または  $x-3=0$

したがって、解は  $x = -1, 3$

この解き方では、次が成り立つことを使っている．

数の積の性質

2つの実数  $A, B$  について

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ または } B = 0$$

練習 3.23 次の2次方程式を解け． 解

(1)  $x(x+4) = 0$

(2)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

(3)  $2x^2 + 3x + 1 = 0$

(4)  $3x^2 - 4x - 4 = 0$

## B 》2次方程式の解の公式

$$x \text{ の 2 次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の左辺は、83 ページで示したように

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

と変形される．よって，2次方程式①は次のように書ける．

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \text{すなわち} \quad \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$b^2 - 4ac > 0 \text{ のとき} \quad x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{したがって} \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac = 0$  のときも含めて考えると，次の解の公式が得られる．

## 2次方程式の解の公式

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  は， $b^2 - 4ac \geq 0$  のとき解をもち，

$$\text{その解は} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

注意  $b^2 - 4ac = 0$  のとき，2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は  $x = -\frac{b}{2a}$  である．

また，負の数の平方根は実数の範囲に存在しないから， $b^2 - 4ac < 0$  のとき，  
2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  は実数の解をもたない．

例 3.10 2次方程式  $3x^2 - 7x + 1 = 0$  を解く．  $\leftarrow a=3, b=-7, c=1$  S

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

練習 3.24 次の2次方程式を解け． 解

(1)  $x^2 + 7x + 4 = 0$

(2)  $3x^2 + 4x - 1 = 0$

(3)  $3x^2 - 8x - 3 = 0$

(4)  $4x^2 + 12x + 9 = 0$

前ページの解の公式において、 $b = 2b'$  とおくと

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$

よって、次の公式が得られる。

2次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  は、 $b'^2 - ac \geq 0$  のとき解をもち、

その解は 
$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

例 3.11 2次方程式  $5x^2 + 2x - 1 = 0$  を解く。

←  $a=5, b'=1, c=-1$

**S**

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 5 \cdot (-1)}}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$$

練習 3.25 次の2次方程式を解け。 **解**

(1)  $x^2 + 2x - 2 = 0$

(2)  $3x^2 - 4x - 2 = 0$

(3)  $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

(4)  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

## C》2次方程式の係数と実数解

方程式における実数の解を、単に**実数解**という。

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の実数解は、解の公式における根号の中の式  $b^2 - 4ac$  の符号によって次のように分類される。

[1]  $b^2 - 4ac > 0$  のとき

異なる2つの実数解  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  をもつ。

[2]  $b^2 - 4ac = 0$  のとき 実数解  $x = -\frac{b}{2a}$  をもつ。

2つの解が重なったものと考えて、この解を**重解**という。

[3]  $b^2 - 4ac < 0$  のとき 実数解をもたない。

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  について  $b^2 - 4ac$  を判別式といい、ふつう  $D$  で表す<sup>1</sup>。

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の実数解とその個数については、判別式  $D = b^2 - 4ac$  の符号によって、次のようにまとめられる。

**2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の実数解と判別式  $D = b^2 - 4ac$**

| $D = b^2 - 4ac$ | $D > 0$                                                 | $D = 0$                         | $D < 0$ |
|-----------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------|---------|
| 実数解             | $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$<br>(異なる2つの実数解) | $x = -\frac{b}{2a}$<br>重解 (実数解) | 実数解はない  |
| 実数解の個数          | 2個                                                      | 1個                              | 0個      |

特に、「 $D \geq 0 \iff$  2次方程式が実数解をもつ」が成り立つ。

**注意** 2次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  においては、 $D = 4(b'^2 - ac)$  であるから、 $D$  の代わりに  $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$  の符号を調べてもよい。

**例 3.12** 2次方程式の実数解の個数

**[S]**

(1) 2次方程式  $x^2 + 7x + 9 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13 > 0 \quad \leftarrow D = b^2 - 4ac > 0$$

であるから 2個

(2) 2次方程式  $4x^2 - 12x + 9 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0 \quad \leftarrow D = b^2 - 4ac = 0$$

であるから 1個

**注意** (2) は  $\frac{D}{4}$  を用いて、 $\frac{D}{4} = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0$  としてもよい。

**練習 3.26** 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。 **[解]**

(1)  $x^2 + 3x - 5 = 0$

(2)  $3x^2 - 5x + 4 = 0$

(3)  $3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

<sup>1</sup> $D$  は判別式を意味する英語 discriminant の頭文字である。

例題 3.7 2次方程式  $x^2 - 2x + m = 0$  が異なる2つの実数解をもつとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。 S

解答 この2次方程式の判別式を  $D$  とすると

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 4 - 4m$$

2次方程式が異なる2つの実数解をもつのは  $D > 0$  のときであるから

$$4 - 4m > 0 \quad \text{これを解いて} \quad m < 1$$

練習 3.27 2次方程式  $x^2 - 4x + m + 8 = 0$  が実数解をもたないとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。 解

例題 3.8 2次方程式  $x^2 + mx + m = 0$  が重解をもつとき、定数  $m$  の値を求めよ。また、そのときの重解を求めよ。 S

解答 この2次方程式の判別式を  $D$  とすると

$$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m^2 - 4m$$

2次方程式が重解をもつのは  $D = 0$  のときであるから

$$m^2 - 4m = 0 \quad \text{これを解いて} \quad m = 0, 4$$

また、重解は  $x = -\frac{m}{2}$  であるから

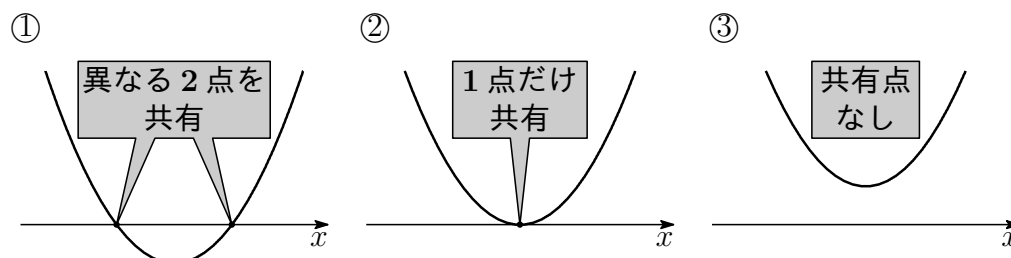
$$m = 0 \text{ のとき } x = 0, \quad m = 4 \text{ のとき } x = -2$$

練習 3.28 2次方程式  $x^2 + (m+2)x + m + 5 = 0$  が重解をもつとき、定数  $m$  の値を求めよ。また、そのときの重解を求めよ。 解

### 3.3.2 2次関数のグラフと $x$ 軸の位置関係

2次関数のグラフと  $x$  軸の位置関係は、共有点の個数に着目すると、次の①、②、③のような3つの場合に分類できる。

ここでは、これらの場合についてもう少し詳しく調べることにしよう。



#### A 》 2次関数のグラフと $x$ 軸の共有点の座標

まず、2次関数のグラフが  $x$  軸と共有点をもつとき、その共有点の座標を求めてみよう。

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフが  $x$  軸と共有点をもつとき、共有点の  $x$  座標は、 $y = 0$  となる  $x$  の値、すなわち2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の実数解である。

#### ① 2次関数のグラフが $x$ 軸と異なる2点で交わる場合

例 3.13 2次関数  $y = x^2 - 4x + 1$  のグラフと  $x$  軸の共有点の座標

**S**

このグラフと  $x$  軸の共有点の  $x$  座標は

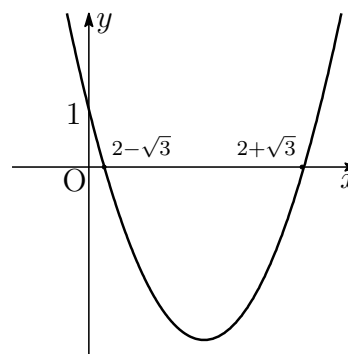
$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

の実数解である。

これを解くと  $x = 2 \pm \sqrt{3}$

よって、共有点の座標は

$$(2 - \sqrt{3}, 0), (2 + \sqrt{3}, 0)$$



② 2次関数のグラフが  $x$  軸と1点だけを共有する場合例 3.14 2次関数  $y = x^2 - 4x + 4$  のグラフと  $x$  軸の共有点の座標

S

このグラフと  $x$  軸の共有点の  $x$  座標は

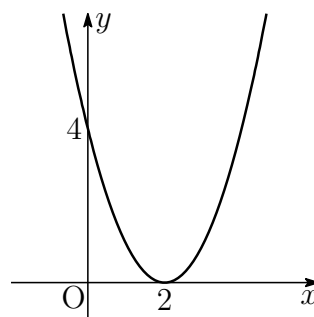
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

の実数解である.

これを解くと  $x = 2$ 

よって, 共有点の座標は

$$(2, 0)$$



例 3.14 の場合のように, 2次関数のグラフと  $x$  軸の共有点がただ1つのとき, グラフは  $x$  軸に接するといい, その共有点を  $x$  軸との接点という.  $x$  軸との接点は, 放物線の頂点でもある.

練習 3.29 次の2次関数のグラフと  $x$  軸の共有点の座標を求めよ. また, グラフが  $x$  軸に接するものはどれか. 解

(1)  $y = x^2 - 2x - 3$

(2)  $y = -x^2 + 3x - 1$

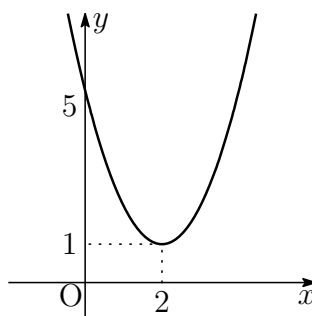
(3)  $y = 2x^2 + 4x + 2$

(4)  $y = 2x^2 - 5x - 3$

② 2次関数のグラフが  $x$  軸と共有点をもたない場合2次関数  $y = x^2 - 4x + 5$  について

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

であるから, この関数のグラフは右の図のように  $x$  軸より上側にあり,  $x$  軸と共有点をもたない.



また, このとき, 2次方程式  $x^2 - 4x + 5 = 0$  は, 判別式  $D$  について

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$$

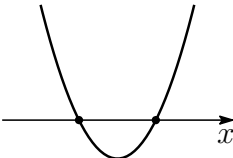
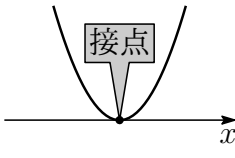
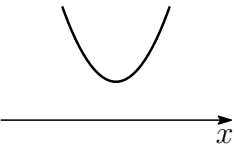
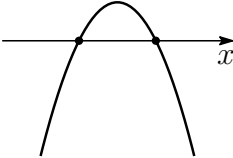
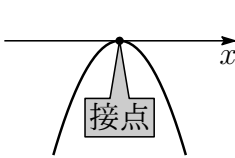
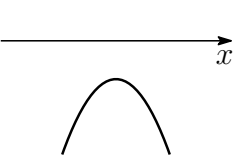
であり, 実数解をもたない.

B 》2次関数のグラフと  $x$  軸の位置関係

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフと、2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  について、次のことがいえる。

1. 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフと  $x$  軸の共有点の個数は、  
2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の実数解の個数と一致する。
2. 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の実数解の個数は、101 ページの表のように  
 $D = b^2 - 4ac$  の符号によって分類される。

以上のことから、2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフと  $x$  軸の位置関係は、2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の判別式  $D = b^2 - 4ac$  の符号によって次のようにまとめられる。

| 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと $x$ 軸の位置関係 |                                                                                     |                                                                                      |                                                                                       |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $D = b^2 - 4ac$                           | $D > 0$                                                                             | $D = 0$                                                                              | $D < 0$                                                                               |
| $a > 0$ のとき                               |   |   |   |
| $a < 0$ のとき                               |  |  |  |
| $x$ 軸との位置関係                               | 異なる2点で交わる                                                                           | 接する                                                                                  | 共有点をもたない                                                                              |
| $x$ 軸との共有点の個数                             | 2個                                                                                  | 1個                                                                                   | 0個                                                                                    |
| $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解                  | $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$                                            | $x = -\frac{b}{2a}$                                                                  | ない                                                                                    |

例 3.15 2次関数  $y = x^2 + 5x + 3$  のグラフと  $x$  軸の共有点の個数

[S]

2次方程式  $x^2 + 5x + 3 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13 > 0$$

よって、グラフと  $x$  軸の共有点の個数は2個である。

練習 3.30 次の2次関数のグラフと  $x$  軸の共有点の個数を求めよ。 [解]

(1)  $y = x^2 + 3x + 3$       (2)  $y = -2x^2 + 5x + 1$       (3)  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

応用例題 3.6 2次関数  $y = -x^2 + 4x + m$  のグラフと  $x$  軸の共有点の個数は、定数  $m$  の値によってどのように変わるか. S

考え方 》 2次方程式  $-x^2 + 4x + m = 0$  の判別式を  $D$  として、

$$D > 0, \quad D = 0, \quad D < 0$$

の場合に分ける.

解答 2次方程式  $-x^2 + 4x + m = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot m = 4(m + 4)$$

$D > 0$  となるのは  $m > -4$  のとき

$D = 0$  となるのは  $m = -4$  のとき

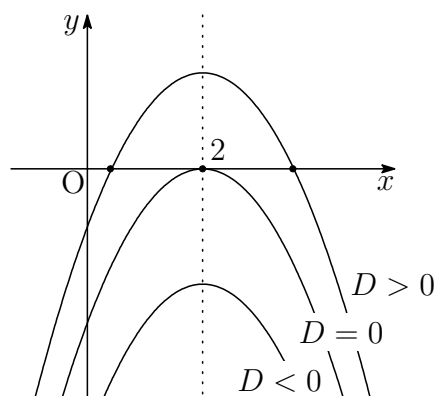
$D < 0$  となるのは  $m < -4$  のとき

である. よって、グラフと  $x$  軸の共有点の個数は

$m > -4$  のとき 2 個

$m = -4$  のとき 1 個

$m < -4$  のとき 0 個



練習 3.31 2次関数  $y = x^2 - 2x - m - 1$  のグラフと  $x$  軸の共有点の個数は、定数  $m$  の値によってどのように変わるか. 解

**発展** 放物線と直線の共有点

放物線  $y = ax^2 + bx + c$  と直線  $y = mx + n$  が共有点をもったとき、その点の  $x$  座標は、2つの方程式から  $y$  を消去して得られる2次方程式  $ax^2 + bx + c = mx + n$  の実数解である。

このことを利用して、放物線と直線の共有点について調べよ。

**Ex 3.4** 放物線  $y = x^2 - 4x + 5$  と直線  $y = x + 1$  の共有点の座標

共有点の  $x$  座標は、次の2次方程式の実数解である。

$$x^2 - 4x + 5 = x + 1$$

式を整理すると  $x^2 - 5x + 4 = 0$

これを解くと  $x = 1, 4$

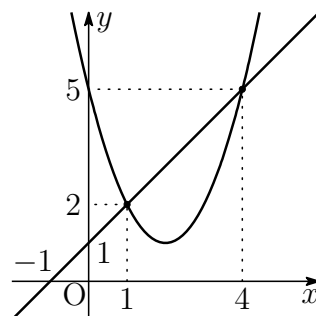
$y = x + 1$  に代入すると

$$x = 1 \text{ のとき } y = 1 + 1 = 2$$

$$x = 4 \text{ のとき } y = 4 + 1 = 5$$

よって、共有点の座標は

$$(1, 2), (4, 5)$$

**Ex 3.5** 放物線  $y = x^2 - 4x + 5$  と直線  $y = 2x - 4$  の共有点の座標

共有点の  $x$  座標は、次の2次方程式の実数解である。

$$x^2 - 4x + 5 = 2x - 4$$

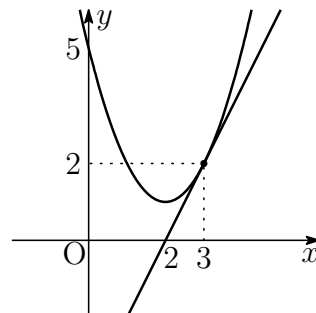
式を整理すると  $x^2 - 6x + 9 = 0$

これを解くと  $x = 3$

$y = 2x - 4$  に代入すると

$$y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

よって、共有点の座標は  $(3, 2)$



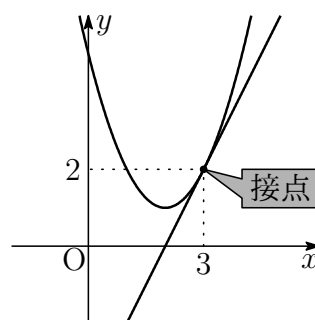
**演習 3.8** 放物線  $y = x^2 - 6x + 10$  と次の直線の共有点の座標を求めよ。 解

(1)  $y = 2x - 5$

(2)  $y = -2x + 6$

前ページの Ex 3.5 では、放物線と直線の方程式から  $y$  を消去して得られる2次方程式  $x^2 - 6x + 9 = 0$  は重解  $x = 3$  をもち、共有点はただ1つの点  $(3, 2)$  である。

このようなとき、放物線と直線は接するといいい、その共有点を接点という。



一般に、放物線  $y = ax^2 + bx + c$  と直線  $y = mx + n$  が接するのは、2次方程式  $ax^2 + bx + c = mx + n$  が重解をもつときである。

**Ex 3.6** 放物線  $y = x^2$  と直線  $y = 2x + k$  が接するとき、定数  $k$  の値を求めよ。

**解答**  $y = x^2$  と  $y = 2x + k$  から  $y$  を消去すると

$$x^2 = 2x + k$$

すなわち

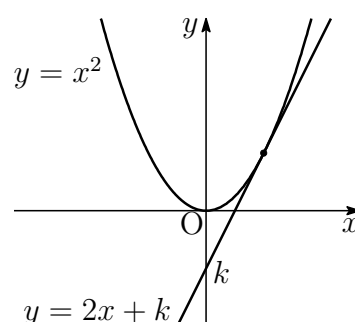
$$x^2 - 2x - k = 0$$

この2次方程式の判別式を  $D$  とすると

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = 4(k + 1)$$

放物線  $y = x^2$  と直線  $y = 2x + k$  が接するのは、 $D = 0$  のときであるから

$$k + 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = -1$$



**演習 3.9** 放物線  $y = x^2 - 3x$  と直線  $y = x + k$  が接するとき、定数  $k$  の値を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。 解

## 3.3.3 2次不等式

これまでは、2次関数のグラフと  $x$  軸の位置関係について調べた。  
ここでは、関数のグラフを利用して、不等式を解くことを考えよう。

## A 》 1次不等式と1次関数

1次不等式の解を、関数のグラフで考えてみよう。

例 3.16 1次不等式  $2x - 6 < 0$  の解

S

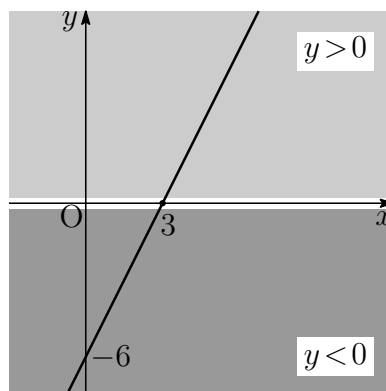
1次関数  $y = 2x - 6$  のグラフは  
右の図のようになる。

この直線と  $x$  軸の交点の  $x$  座標  
は、1次方程式

$$2x - 6 = 0$$

の解  $x = 3$  である。

右の図から、 $y = 2x - 6$  につい  
て  $y < 0$  となる  $x$  の値の範囲は  
 $x < 3$  である。



よって、1次不等式  $2x - 6 < 0$  の解は、 $x < 3$  である。

[終]

1次不等式  $2x - 6 > 0$  の解は、  
 $y = 2x - 6$  について  $y > 0$  となる  
 $x$  の範囲で、 $x > 3$  である。

| $x$          | $x < 3$ | 3 | $3 < x$ |
|--------------|---------|---|---------|
| $y = 2x - 6$ | -       | 0 | +       |

練習 3.32 1次関数のグラフを利用して、次の1次不等式の解を求めよ。 解

(1)  $2x + 4 < 0$

(2)  $-3x + 6 \leq 0$

## B 》 2次不等式と2次関数

不等式のすべての項を左辺に移項して整理したとき,

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

などのように, 左辺が  $x$  の2次式になる不等式を,  $x$  の2次不等式という. ただし,  $a, b, c$  は定数で,  $a \neq 0$  とする.

2次関数のグラフを利用して, 2次不等式を解いてみよう.

① 2次関数のグラフが  $x$  軸と異なる2点で交わる場合

2次関数のグラフが  $x$  軸と異なる2点で交わるとき, その2次関数の値の符号について調べよう.

例 3.17 2次関数  $y = x^2 - 6x + 5$  の値の符号

S

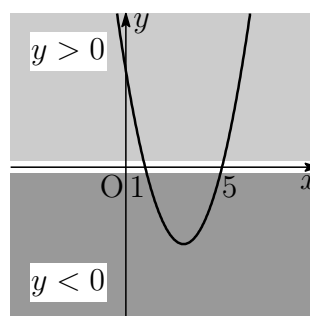
この関数のグラフは, 右の図のように  $x$  軸と2点で交わる.

交点の  $x$  座標は, 2次方程式

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

の実数解  $x = 1, 5$  である.

右の図から,  $y = x^2 - 6x + 5$  の値の符号について, 次の表が得られる.



| $x$                | $x < 1$ | 1 | $1 < x < 5$ | 5 | $5 < x$ |
|--------------------|---------|---|-------------|---|---------|
| $y = x^2 - 6x + 5$ | +       | 0 | -           | 0 | +       |

例 3.17 の表から, 次のことがいえる.

2次不等式  $x^2 - 6x + 5 < 0$  の解は,  $y = x^2 - 6x + 5$  について  $y < 0$  となる  $x$  の値の範囲であるから,  $1 < x < 5$  である.

2次不等式  $x^2 - 6x + 5 > 0$  の解は,  $y = x^2 - 6x + 5$  について  $y > 0$  となる  $x$  の値の範囲であるから,  $x < 1, 5 < x$  である.

$a > 0$  のとき, 2次関数  
 $y = ax^2 + bx + c$  のグラフが右の図のよう  
 に  $x$  軸と異なる2点で交わるとする.

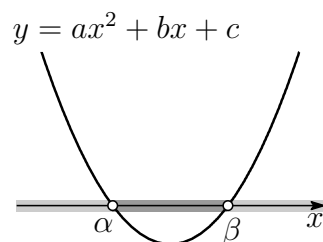
このとき, 次のことがいえる.

2次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  の解は

$$x < \alpha, \beta < x$$

2次不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  の解は

$$\alpha < x < \beta$$



$ax^2 + bx + c = 0$  の  
 実数解が  $\alpha$ ,  $\beta$

注意 2次不等式  $ax^2 + bx + c \geq 0$  の解は  $x \leq \alpha, \beta \leq x$

2次不等式  $ax^2 + bx + c \leq 0$  の解は  $\alpha \leq x \leq \beta$

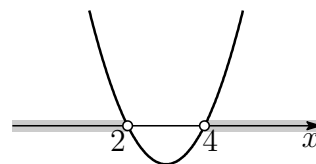
例 3.18 (1) 2次不等式  $(x-2)(x-4) > 0$  を解く.

S

$(x-2)(x-4) = 0$  を解くと

$$x = 2, 4$$

$y = (x-2)(x-4)$  のグラフで  $y > 0$   
 となる  $x$  の値の範囲を求めて



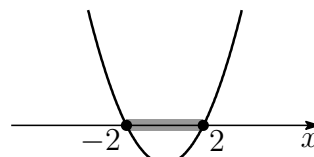
$$x < 2, 4 < x$$

(2) 2次不等式  $(x+2)(x-2) \leq 0$  を解く.

$(x+2)(x-2) = 0$  を解くと

$$x = -2, 2$$

$y = (x+2)(x-2)$  のグラフで  $y \leq 0$   
 となる  $x$  の値の範囲を求めて



$$-2 \leq x \leq 2$$

練習 3.33 次の2次不等式を解け. 解

(1)  $(x-1)(x-3) > 0$

(2)  $(x+2)(x-5) < 0$

(3)  $x(x+1) \leq 0$

(4)  $x^2 - x - 2 \geq 0$

(5)  $x^2 + 5x + 6 > 0$

(6)  $x^2 \leq 9$

例題 3.9 次の2次不等式を解け.

S

(1)  $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$

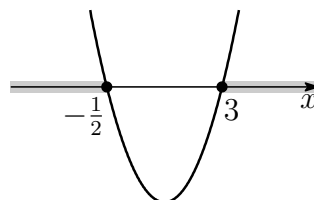
(2)  $x^2 - 2x - 2 < 0$

解答 (1)  $2x^2 - 5x - 3 = 0$  を解くと

$$x = -\frac{1}{2}, 3$$

よって, この2次不等式の解は

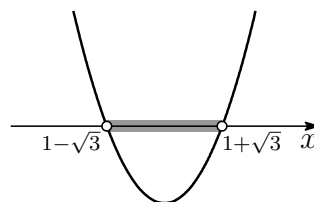
$$x \leq -\frac{1}{2}, 3 \leq x$$

(2)  $x^2 - 2x - 2 = 0$  を解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$

よって, この2次不等式の解は

$$1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$$



練習 3.34 次の2次不等式を解け. 解

(1)  $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

(2)  $2x^2 + 5x + 3 < 0$

(3)  $x^2 + 2x - 1 \leq 0$

(4)  $x^2 - 5 > 0$

 $x^2$  の係数が負の2次不等式は, 両辺に  $-1$  を掛けて2次の係数を正にして解けばよい.例題 3.10 次の2次不等式  $-x^2 + 4x + 1 \leq 0$  を解け.

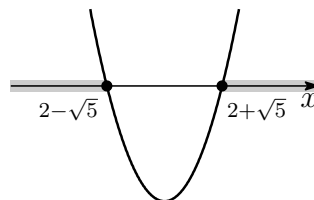
S

解答 両辺に  $-1$  を掛けると  $x^2 - 4x - 1 \geq 0$  $x^2 - 4x - 1 = 0$  を解くと

$$x = 2 \pm \sqrt{5}$$

よって, この2次不等式の解は

$$x \leq 2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5} \leq x$$



練習 3.35 次の2次不等式を解け. 解

(1)  $-2x^2 + x + 1 < 0$

(2)  $-3x^2 + 5x - 1 \geq 0$

2次関数のグラフが $x$ 軸と異なる2点で交わらない場合について、2次関数の値の符号を調べてみよう.

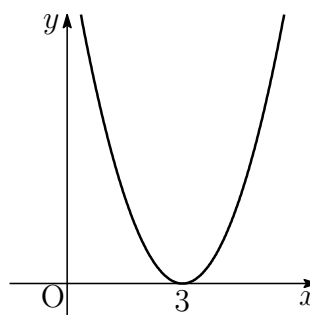
例 3.19 2次関数  $y = x^2 - 6x + 9$  の値の符号

**S**

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

であるから、この関数のグラフは、右の図のように $x$ 軸と点 $(3, 0)$ で接する. 右の図から、 $y = x^2 - 6x + 9$ の値の符号について、次の表が得られる.

| $x$                | $x < 3$ | $3$ | $3 < x$ |
|--------------------|---------|-----|---------|
| $y = x^2 - 6x + 9$ | +       | 0   | +       |



例 3.19 の表から、次のことがわかる.

| 2次不等式                 | 解          |
|-----------------------|------------|
| $x^2 - 6x + 9 > 0$    | 3以外のすべての実数 |
| $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ | すべての実数     |
| $x^2 - 6x + 9 < 0$    | 解はない       |
| $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ | $x = 3$    |

←  $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$   
であることに着目しよう.

練習 3.36 次の2次不等式を解け. **解**

(1)  $x^2 - 4x + 4 > 0$

(2)  $x^2 - 10x + 25 < 0$

(3)  $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

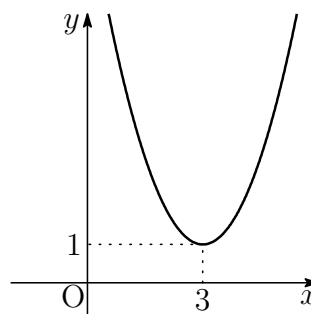
(4)  $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$

例 3.20 2次関数  $y = x^2 - 6x + 10$  の値

$$x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1$$

であるから，この関数のグラフは，右の図のように  $x$  軸より上側にあり， $x$  軸と共有点をもたない．

この関数の値は，常に正である．



S

例 3.20 で調べたことから，次のことがわかる．

| 2次不等式                  | 解      |
|------------------------|--------|
| $x^2 - 6x + 10 > 0$    | すべての実数 |
| $x^2 - 6x + 10 \geq 0$ | すべての実数 |
| $x^2 - 6x + 10 < 0$    | 解はない   |
| $x^2 - 6x + 10 \leq 0$ | 解はない   |

←  $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1$   
であることに着目しよう．

練習 3.37 次の2次不等式を解け。解

(1)  $x^2 - 4x + 6 > 0$

(2)  $x^2 - 2x + 2 \leq 0$

(3)  $2x^2 + 4x + 3 < 0$

(4)  $2x^2 + 8x + 10 \geq 0$

## C 》 2次不等式の解き方のまとめ

2次不等式は，不等式のすべての項を左辺に移項して整理し，2次関数のグラフと  $x$  軸の位置関係を利用して解くことができる．したがって，105 ページの表のように，2次不等式

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

などの解についても，2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の判別式

$$D = b^2 - 4ac$$

の符号によって分類することができる．

なお， $a < 0$  のときは，不等式の両辺に  $-1$  を掛けて  $x^2$  の係数を正にして解けばよいから， $a > 0$  の場合だけを次ページにまとめた．

| 2次不等式の解についてのまとめ ( $a > 0$ の場合)              |                               |                        |         |
|---------------------------------------------|-------------------------------|------------------------|---------|
| $D = b^2 - 4ac$                             | $D > 0$                       | $D = 0$                | $D < 0$ |
| $y = ax^2 + bx + c$<br>のグラフと $x$ 軸<br>の位置関係 |                               |                        |         |
| $ax^2 + bx + c = 0$<br>の実数解                 | $x = \alpha, \beta$           | $x = \alpha$           | 実数解はない  |
| $ax^2 + bx + c > 0$<br>の解                   | $x < \alpha, \beta < x$       | $\alpha$ 以外の<br>すべての実数 | すべての実数  |
| $ax^2 + bx + c \geq 0$<br>の解                | $x \leq \alpha, \beta \leq x$ | すべての実数                 | すべての実数  |
| $ax^2 + bx + c < 0$<br>の解                   | $\alpha < x < \beta$          | 解はない                   | 解はない    |
| $ax^2 + bx + c \leq 0$<br>の解                | $\alpha \leq x \leq \beta$    | $x = \alpha$           | 解はない    |

[2次不等式の解]

例題 3.11 次の2次不等式を解け.

[S]

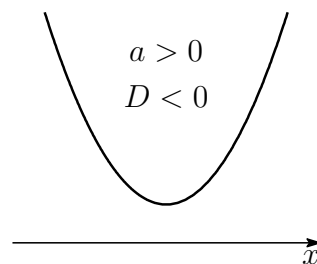
$$2x^2 - 3x + 4 > 0$$

解答 2次方程式  $2x^2 - 3x + 4 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -23 < 0$$

$x^2$  の係数が正であるから, この2次不等式の解は

すべての実数



練習 3.38 次の2次不等式を解け. [解]

(1)  $x^2 - 3x + 5 > 0$

(2)  $-x^2 + x - 1 \geq 0$

(3)  $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 \leq 0$

(4)  $x^2 - 3x + 2 > 2x^2 - x$

## D 》2次不等式の応用

応用例題 3.7 2次方程式  $2x^2 + mx + 1 = 0$  が実数解をもつとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

S

考え方 》 判別式を  $D$  とすると、実数解をもつのは  $D \geq 0$  のときである。

解答 この2次方程式の判別式を  $D$  とすると

$$D = m^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = m^2 - 8$$

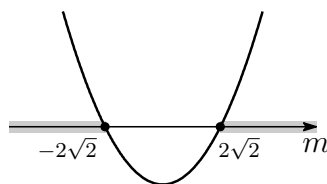
2次方程式が実数解をもつのは  $D \geq 0$  のときであるから

$$m^2 - 8 \geq 0$$

$$m^2 - 8 = 0 \text{ を解くと } m = \pm\sqrt{2}$$

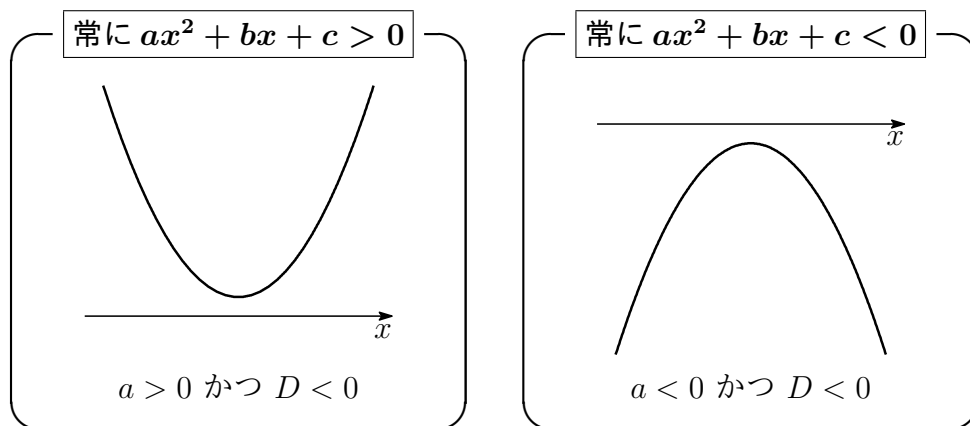
よって、求める  $m$  の値の範囲は

$$m < -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} < m$$



練習 3.39 2次関数  $y = x^2 + 2mx + 3$  のグラフが  $x$  軸と共有点をもつとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  の値の符号が一定になる場合がある。それは、2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の判別式を  $D$  とするとき、 $a$  の符号と  $D$  の符号が次のような場合である。



深化 3.5 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  の値の符号が一定になる場合を、2次方程式の判別式を利用して調べることができる理由について、次の言葉を使って説明してみよう。「2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の判別式」, 「2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフ」

解

応用例題 3.8 2次不等式  $x^2 + 2mx + m + 2 > 0$  の解がすべての実数であるとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ. S

考え方 》 2次関数  $ax^2 + bx + c = 0$  の判別式を  $D$  とすると、常に  $ax^2 + bx + c > 0$  であるのは、 $a > 0$  かつ  $D < 0$  のときである.

解答 2次方程式  $x^2 + 2mx + m + 2 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 2) = 4(m^2 - m - 2)$$

2次不等式の  $x^2$  の係数が正であるから、その解がすべての実数であるのは  $D < 0$  のときである.

$$m^2 - m - 2 < 0 \text{ から } (m + 1)(m - 2) < 0$$

$$\text{これを解いて } -1 < m < 2$$

補足  $\frac{D}{4} = m^2 - 1 \cdot (m + 2) = m^2 - m - 2$  でもよい.

練習 3.40 2次不等式  $-x^2 + mx + m < 0$  の解がすべての実数であるとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ. 解

## E 》 連立不等式

例題 3.12 次の連立不等式を解け.

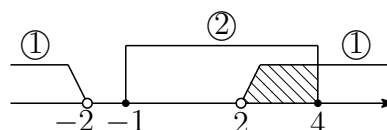
S

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

解答  $x^2 - 4 > 0$  から  $(x+2)(x-2) > 0$ よって  $x < -2, 2 < x \cdots \textcircled{1}$  $x^2 - 3x - 4 \leq 0$  から  $(x+1)(x-4) \leq 0$ よって  $-1 \leq x \leq 4 \cdots \textcircled{2}$ 

① と ② の共通範囲を求めて

$$2 < x \leq 4$$



練習 3.41 次の連立不等式を解け. 解

$$(1) \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

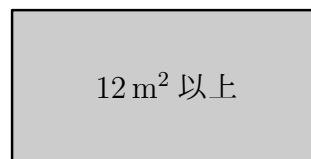
練習 3.42 次の不等式を解け. 解

$$(1) -2 \leq x^2 + 3x \leq 4$$

$$(2) 5 < x^2 - 4x \leq 6 - 3x$$

応用例題 3.9 周の長さが16mで、縦の長さが横の長さ以下の長方形の囲いを作る。

囲いの中の面積を  $12\text{m}^2$  以上にするには、縦の長さをどのような範囲にとればよいか。 S



考え方 縦の長さを  $x\text{m}$  として、条件から不等式を作る。

$x$  は正の数であることに注意する。

解答 縦の長さを  $x\text{m}$  とすると、横の長さは  $(8-x)\text{m}$  である。

$x > 0$  かつ  $x \leq 8-x$  から

$$0 < x \leq 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

囲いの中の面積が  $12\text{m}^2$  であるから  $x(8-x) \geq 12$

式を整理すると  $x^2 - 8x + 12 \leq 0$

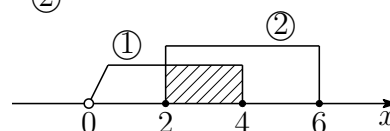
すなわち  $(x-2)(x-6) \leq 0$

これを解くと  $2 \leq x \leq 6 \quad \dots \textcircled{2}$

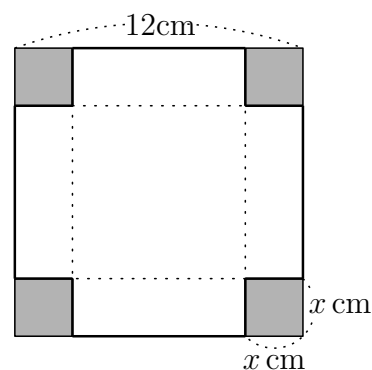
①と②の共通範囲を求めて

$$2 \leq x \leq 4$$

(答) 2m 以上 4m 以下



練習 3.43 1辺が12cmの正方形の厚紙がある。この厚紙の四隅から合同な正方形を切り取り、ふたのない箱を作る。底面の正方形の1辺を6cm以上で、側面の4個の長方形の面積の和を  $40\text{cm}^2$  以上にするとき、切り取る正方形の1辺の長さをどのような範囲にとればよいか。 解



応用例題 3.10 2次関数  $y = x^2 - 2mx - m + 6$  のグラフと  $x$  軸の正の部分が、異なる2点で交わる時、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。 S

考え方》 グラフの軸の位置、グラフと  $y$  軸の交点の位置などに着目する。

解答 関数の式を変形すると

$$y = (x - m)^2 - m^2 - m + 6$$

グラフは下に凸の放物線で、その軸は直線

$$x = m$$

である。グラフと  $x$  軸の正の部分が、異なる2点で交わるのは、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。

- [1] グラフと  $x$  軸が異なる2点で交わる。
- [2] グラフの軸が  $y$  軸の右側にある。
- [3] グラフと  $y$  軸の交点の  $y$  座標が正である。

[1] より、2次方程式  $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$  の判別式を  $D$  とすると、 $D > 0$  である。

$$D = (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m + 6) = 4(m^2 + m - 6)$$

よって  $m^2 + m - 6 > 0$  すなわち  $(m + 3)(m - 2) > 0$

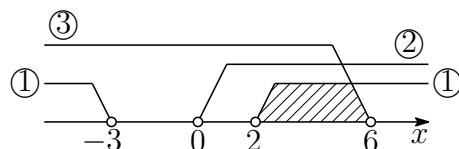
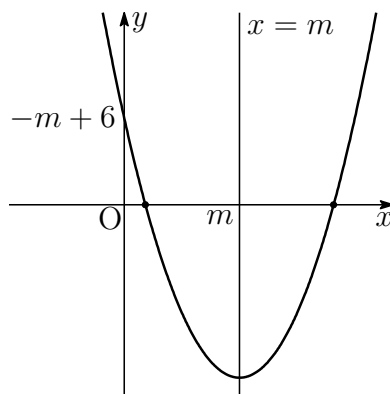
これを解くと  $m < -3, 2 < m \cdots \textcircled{1}$

[2] から  $m > 0 \cdots \textcircled{2}$

[3] から  $-m + 6 > 0$  ゆえに  $m < 6 \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③ の共通範囲を求めて

$$2 < m < 6$$



[2次関数のグラフと  $x$  軸の位置関係]

練習 3.44 2次関数  $y = x^2 + 2mx + m + 6$  のグラフと  $x$  軸の負の部分が、異なる2点で交わる時、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。 解

### 研究 絶対値を含む関数のグラフ

Ex 3.7 次の関数のグラフをかけ.

(1)  $y = |x - 1|$

(2)  $y = |x^2 - 2x|$

解答 (1)  $x - 1 \geq 0$  すなわち  $x \geq 1$  のとき  $y = x - 1$

$x - 1 < 0$  すなわち  $x < 1$  のとき  $y = -x + 1$

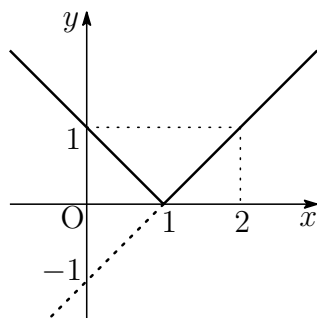
よって、関数  $y = |x - 1|$  のグラフは、下の図の実線部分である.

(2)  $x^2 - 2x \geq 0$  すなわち  $x \leq 0, 2 \leq x$  のとき  $y = x^2 - 2x$

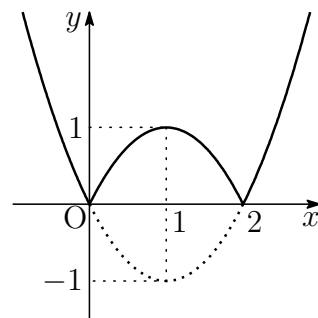
$x^2 - 2x < 0$  すなわち  $0 < x < 2$  のとき  $y = -x^2 + 2x$

よって、関数  $y = |x^2 - 2x|$  のグラフは、下の図の実線部分である.

(1)



(2)



補足 Ex 3.7(1) のグラフは、関数  $y = x - 1$  のグラフで  $x$  軸より下側の部分を  $x$  軸に関して対称に折り返したものになっている。(2) についても同様である。一般に、関数  $y = |f(x)|$  のグラフは、関数  $y = f(x)$  のグラフで  $x$  軸より下側の部分を  $x$  軸に関して対称に折り返して得られる。

演習 3.10 次の関数のグラフをかけ。 解

(1)  $y = |x + 2|$

(2)  $y = |x^2 - 1|$

(3)  $y = |x^2 - 2x - 3|$

## 3.3.4 問題

問題 3.13 放物線  $y = x^2 + 2x - 2$  は  $x$  軸と2点で交わる. その交点を A, B とする. この放物線が  $x$  軸から切り取る線分 AB の長さを求めよ. 解 → p.103

問題 3.14 2次関数  $y = x^2 + mx - m + 3$  のグラフが  $x$  軸に接するとき, 定数  $m$  の値を求めよ. また, そのときの接点の座標を求めよ. 解 → p.105

問題 3.15 次の2次不等式を満たす整数  $x$  をすべて求めよ. 解 → p.111~115

(1)  $2x^2 + x - 6 < 0$

(2)  $4x - 2 \geq x^2$

問題 3.16 2次不等式  $ax^2 + 2x + 4a < 0$  の解がすべての実数であるとき, 定数  $a$  の値の範囲を求めよ. 解 → p.117 応用例題 3.8

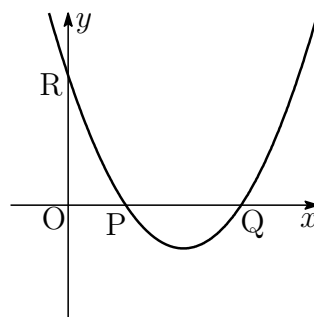
問題 3.17 ある速さで真上に打ち上げたボールの, 打ち上げてから  $x$  秒後の地上からの高さを  $h$  m とする.  $h$  の値が  $h = -5x^2 + 40x$  で与えられるとき, ボールが地上から 60m 以上 75m 以下の高さにあるのは,  $x$  の値がどのような範囲にあるときか.

解 → p.119 応用例題 3.9

問題 3.18 2次不等式  $ax^2 + bx + c \leq 0$  の解が  $\alpha \leq x \leq \beta$  (ただし,  $\alpha \neq \beta$ ) であるとき,  $\beta - \alpha$  をこの解の「幅」と呼ぶことにする. 2次関数

$y = ax^2 + bx + c$  のグラフが右の図のうになるとき, 2次不等式  $ax^2 + bx + c \leq 0$  の解の「幅」は右の図のある線分の長さとも一致する. それは次の①~④のうちのどの線分か. 解

- ① 線分 OP      ② 線分 OQ  
③ 線分 OR      ④ 線分 PQ



注意 「幅」はこの問題の中で定めた用語であり, 一般的なものではない.

## 3.4 章末問題

### 3.4.1 章末問題 A

章末 3.1 放物線  $y = -2x^2 + 3x + 1$  を平行移動したものが、2点  $(-2, 0)$ ,  $(1, 12)$  を通るとき、その放物線の方程式を求めよ。 解

章末 3.2 次の2つの放物線の頂点が一致するとき、定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。 解

$$y = 2x^2 + 4x, \quad y = x^2 + ax + b$$

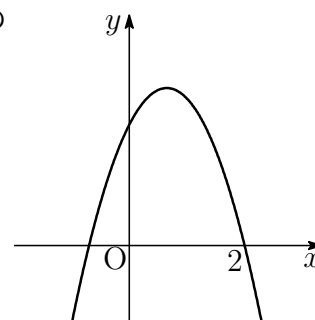
章末 3.3  $x$  の2次関数  $y = x^2 - mx + m$  の最小値を  $k$  とする。 解

(1)  $k$  を  $m$  の式で表せ。

(2)  $k$  の値を最大にする  $m$  の値と、 $k$  の最大値を求めよ。

章末 3.4 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフが右の図のようになるとき、次の値の符号を求めよ。 解

- (1)  $a$       (2)  $c$       (3)  $-\frac{b}{2a}$       (4)  $b$   
 (4)  $b^2 - 4ac$       (5)  $a + b + c$



章末 3.5 2次不等式  $ax^2 + bx + 4 > 0$  の解が  $-1 < x < 2$  となるように、定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。 解

章末 3.6  $a$  は定数とする。2次不等式  $x^2 - ax - 2a^2 < 0$  を次の場合について解け。

(1)  $a > 0$  のとき

(2)  $a < 0$  のとき

解

章末 3.7 次の2つの方程式がともに実数解をもつとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

$$x^2 + (a + 1)x + a^2 = 0, \quad x^2 + 2ax + 2a = 0$$

解

章末 3.8 2次関数  $y = x^2 - 2ax + a$  において、 $y$  の値が常に正であるように、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。 解

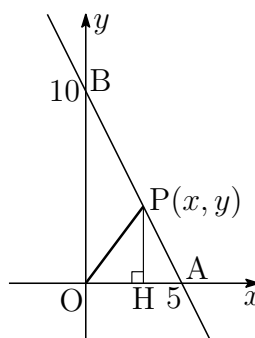
## 3.4.2 章末問題 B

章末 3.9 放物線  $y = 2x^2 - 4x + 5$  の頂点を P とする．次の問いに答えよ． 解

- (1)  $x$  軸に関して点 P と対称な点 Q の座標を求めよ．
- (2) この放物線と  $x$  軸に関して対称な放物線の方程式を求めよ．

章末 3.10 1 次関数  $y = -2x + 10$  のグラフが、 $x$  軸、 $y$  軸と交わる点を、それぞれ A、B とする．点  $P(x, y)$  が線分 AB 上を動くとき、次の問いに答えよ． 解

- (1)  $OP^2$  を  $x$  で表せ．
- (2) 線分 OP の長さの最小値を求めよ．



章末 3.11  $a$  は定数とする．関数  $y = x^2 - 4x$  ( $a \leq x \leq a + 2$ ) について、次の問いに答えよ． 解

- (1) 最小値を求めよ．
- (2) 最大値を求めよ．

章末 3.12 2 次関数  $y = x^2 - 2x + m(1 - m)$  について、 $0 \leq x \leq 3$  の範囲で  $y$  の値が常に負となるように、定数  $m$  の値の範囲を定めよ． 解

章末 3.13 2 次関数  $y = x^2 - 2mx + m - \frac{1}{2}$  のグラフは、定数  $m$  の値に関係なく常に  $x$  軸と共有点をもつことを示せ． 解

章末 3.14 2 次方程式  $x^2 - 2mx + m + 12 = 0$  が、次のような実数解をもつように、定数  $m$  の値の範囲を定めよ． 解

- (1) 異なる 2 つの正の解
- (2) 異なる 2 つの負の解
- (3) 正の解と負の解

## ヒント

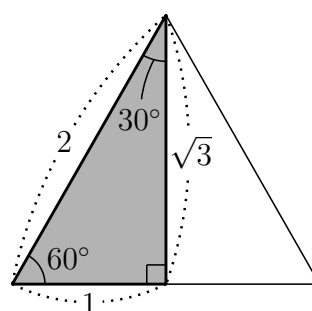
- 9 (1) 点  $(a, b)$  と  $x$  軸について対称な点の座標は  $(a, -b)$  である．
- 14 2 次関数  $y = x^2 - 2mx + m + 12$  のグラフを考える．(3) はグラフと  $y$  軸の交点に着目する．

## 第 4 章 図形と計量

### 4.1 三角比

#### 4.1.1 三角比

1 辺の長さが 2 の正三角形を半分に折ってできる直角三角形を考えると、3 辺の長さは、右の図のようになっている。以下では、直角三角形の 2 辺の長さと角の関係に着目してみよう。



#### A 》正弦・余弦・正接

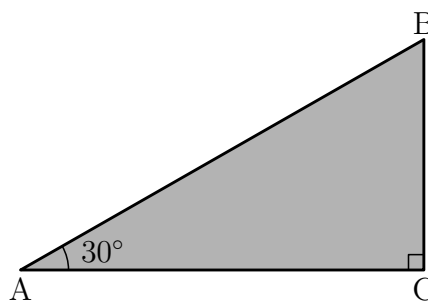
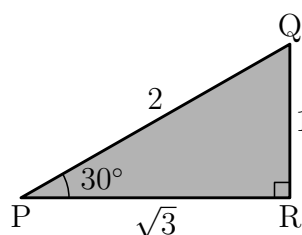
右の図の 2 つの直角三角形は、2 組の角がそれぞれ等しいので相似である。

直角三角形 ABC における

$$\frac{BC}{AB}, \frac{AC}{AB}, \frac{BC}{AC} \quad \dots \textcircled{1}$$

の値は、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AB} &= \frac{QR}{PQ} = \frac{1}{2} \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{PR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{BC}{AC} &= \frac{QR}{PR} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$



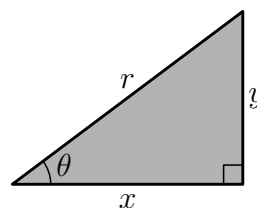
これから、次のことがわかる。

① の各値は、直角三角形 ABC の大きさに関係なく、  
いずれも一定になる。

[\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

直角三角形の鋭角の1つを<sup>シータ</sup> $\theta$ とし、斜辺の長さを $r$ 、他の辺の長さを右の図のように $x$ 、 $y$ とすると、

$$\frac{y}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{x}$$



の各値は、三角形の大きさに関係なく、  
いずれも角 $\theta$ の大きさだけで決まる。これらを、それぞれ $\theta$ の

[三角比の値]

正弦 (sine), 余弦 (cosine), 正接 (tangent)

といい、 $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  と書く。

正弦をサイン、余弦をコサイン、正接をタンジェントともいう。

正弦、余弦、正接をまとめて三角比という。

[三角比の覚え方]

三角比の定義

$\sin \theta = \frac{y}{r}$

$\cos \theta = \frac{x}{r}$

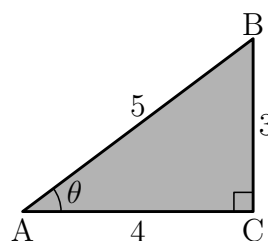
$\tan \theta = \frac{y}{x}$

例 4.1  $\theta$  の正弦, 余弦, 正接

右の図の直角三角形 ABC では

[S]

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5} \\ \cos \theta &= \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5} \\ \tan \theta &= \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



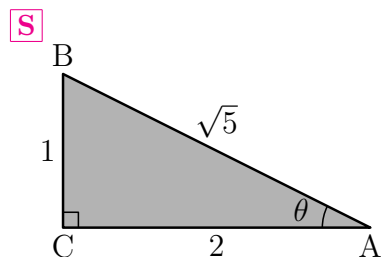
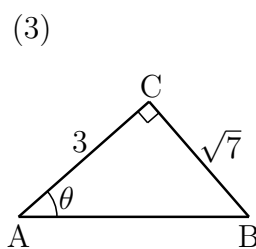
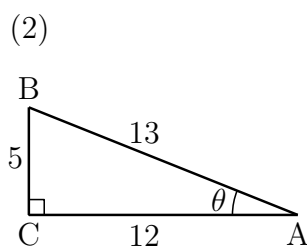
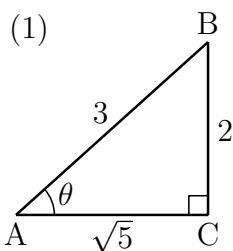
例 4.2  $\theta$  の正弦, 余弦, 正接

右の図の直角三角形 ABC では

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

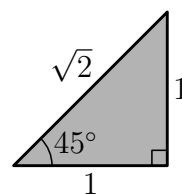
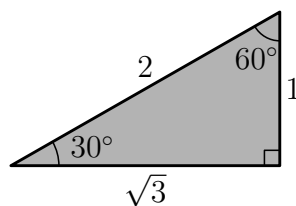
$$\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

練習 4.1 下の図において,  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  の値を, それぞれ求めよ. **解**B 》  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  の三角比 $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  の三角比は, 下の図から求められる.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

練習 4.2 右の表の空らんに適する数値を入れて, 表を完成させよ. **解**

| $\theta$      | $30^\circ$    | $45^\circ$           | $60^\circ$ |
|---------------|---------------|----------------------|------------|
| $\sin \theta$ | $\frac{1}{2}$ |                      |            |
| $\cos \theta$ |               | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |            |
| $\tan \theta$ |               |                      | $\sqrt{3}$ |

## C》三角比の表

三角比  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  の値は,  $\theta$  に対して決まっている. 166 ページには,  $1^\circ$  ごとの角  $\theta$  について, それらの値を表にして載せた.

この表の値は, 小数第5位を四捨五入して小数第4位まで示したものである. たとえば

$$\sin 25^\circ = 0.4226, \quad \cos 28^\circ = 0.8829$$

$$\tan 32^\circ = 0.6249$$

として使う.

| $\theta$   | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| $\vdots$   | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      |
| $29^\circ$ | 0.4848        | 0.8746        | 0.5543        |
| $30^\circ$ | 0.5000        | 0.8660        | 0.5774        |
| $31^\circ$ | 0.5150        | 0.8572        | 0.6009        |
| $32^\circ$ | 0.5299        | 0.8480        | 0.6249        |
| $33^\circ$ | 0.5446        | 0.8387        | 0.6494        |
| $34^\circ$ | 0.5592        | 0.8290        | 0.6745        |
| $35^\circ$ | 0.5736        | 0.8192        | 0.7002        |
| $36^\circ$ | 0.5878        | 0.8090        | 0.7265        |
| $37^\circ$ | 0.6018        | 0.7986        | 0.7536        |
| $\vdots$   | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      |

練習 4.3 次の値を 166 ページの三角比の表から求めよ. 解

(1)  $\sin 12^\circ$

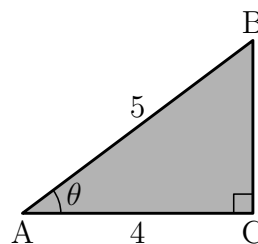
(2)  $\cos 48^\circ$

(3)  $\tan 75^\circ$

例 4.3 右の図における  $\theta$  のおよその大きさ S

$$\text{図より} \quad \cos \theta = \frac{4}{5} = 0.8$$

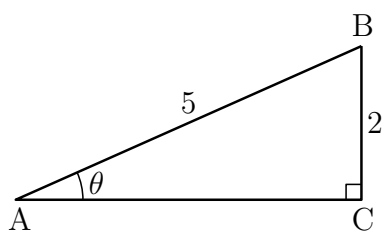
三角比の表から,  $\cos \theta$  の値が 0.8 に近い  $\theta$  を求めると  $\theta \approx 37^\circ$



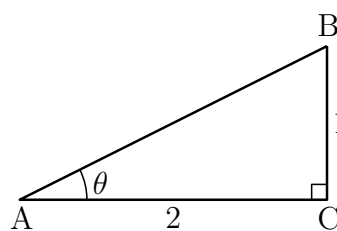
注意  $a \approx b$  は, 「 $a$  と  $b$  がほぼ等しい」ということを意味する.

練習 4.4 下の図における  $\theta$  のおよその大きさを, 166 ページの三角比の表を用いて求めよ. 解

(1)



(2)



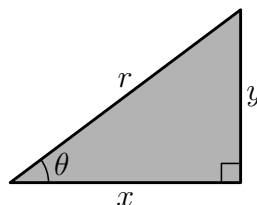
## D 》三角比の応用

右の図の直角三角形では、

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

であるから、次が成り立つ。

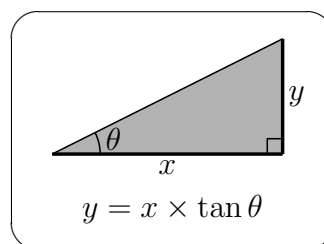
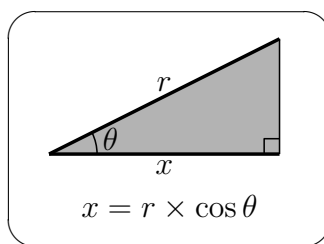
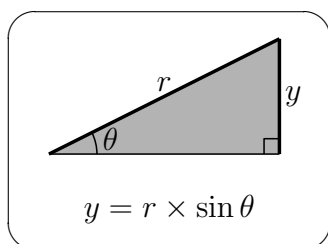
$$y = r \sin \theta$$



同様に、次が成り立つ。

$$x = r \cos \theta$$

$$y = x \tan \theta$$

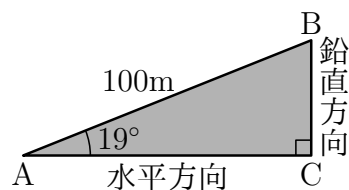


**例題 4.1** 傾斜角  $19^\circ$  の坂をまっすぐに 100m 登るとき、鉛直方向には何 m 登ったことになるか。1m 未満を四捨五入して求めよ。 S

**解答** 右の図において

$$\begin{aligned} BC &= AB \times \sin 19^\circ \\ &= 100 \times 0.3256 \\ &= 32.56 \end{aligned}$$

よって、鉛直方向に 33m 登ったことになる。



**練習 4.5** 例題 4.1 において、水平距離には何 m 進んだことになるか。1m 未満を四捨五入して求めよ。 解

応用例題 4.1 木の根もとから 10m 離れた地点に立って木の先端を見上げると、水平面とのなす角が  $21^\circ$  であった。目の高さを 1.6m として、木の高さを求めよ。ただし、小数第 2 位を四捨五入せよ。 S

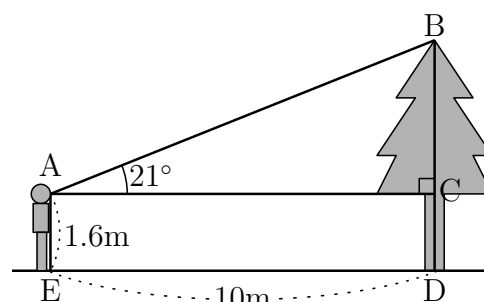
考え方》 まず、目の位置より上にある部分の木の高さを求める。

解答 右の図において

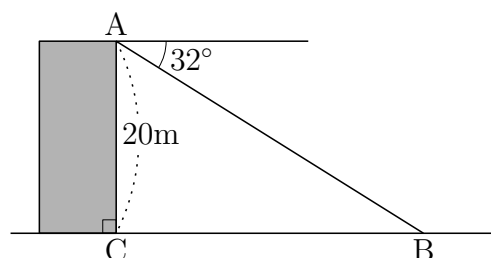
$$\begin{aligned} BC &= AC \times \tan 21^\circ \\ &= 10 \times 0.3839 \\ &= 3.839 \end{aligned}$$

よって、木の高さ BD は

$$\begin{aligned} BD &= BC + CD = 3.839 + 1.6 \\ &= 5.439 \approx 5.4 \\ &\text{(答) } 5.4 \text{ m} \end{aligned}$$

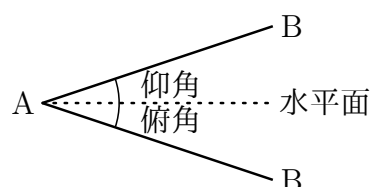


練習 4.6 地上から高さ 20m の地点 A で地上の場所 B を見下ろしたら、その角は右の図のように水平面に対して  $32^\circ$  であった。B は、A の真下の地点 C から何 m 離れているか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。 解



補足 測量などで、点 A から点 B を見るとき、A を通る水平面と AB とのなす角を、B が水平面より上にあれば ぎょうかく 仰角 といひ、下にあるならば ふかく 俯角 といふ。

応用例題 4.1 では仰角が  $21^\circ$ 、練習 4.6 では俯角が  $32^\circ$  である。



### 4.1.2 三角比の相互関係

直角三角形では3辺の長さの関係として、三平方の定理が成り立つ。ここでは、三角比  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  の間に、どのような関係が成り立つかを調べてみよう。

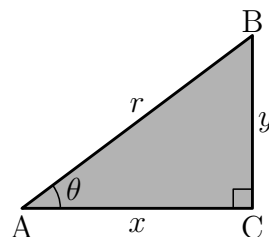
#### A》三角比の相互関係

右の図の直角三角形 ABC において

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

である。よって

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$



となる。また、三平方の定理により

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{すなわち} \quad r^2(\cos \theta)^2 + r^2(\sin \theta)^2 = r^2$$

が成り立つ。よって

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

となる。また、この等式の両辺を  $(\cos \theta)^2$  で割ると

$$1 + \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2} \quad \leftarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

となる。

以上から、三角比の間に次の関係が成り立つ。

三角比の相互関係

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

**注意**  $(\sin \theta)^2$ ,  $(\cos \theta)^2$ ,  $(\tan \theta)^2$  を、それぞれ  $\sin^2 \theta$ ,  $\cos^2 \theta$ ,  $\tan^2 \theta$  と書く。

例題 4.2  $\theta$  は鋭角とする.  $\sin \theta = \frac{2}{3}$  のとき,  $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ. [S]

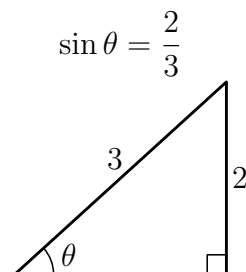
解答  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$\cos \theta > 0$  であるから

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



練習 4.7  $\theta$  は鋭角とする.  $\cos \theta = \frac{1}{3}$  のとき,  $\sin \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ. [解]

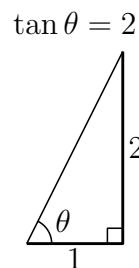
解答  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1^2 + 2^2 = 5$

$$\text{よって} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\cos \theta > 0 \text{ であるから} \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{また, } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ から}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



練習 4.8  $\theta$  は鋭角とする.  $\tan \theta = \sqrt{2}$  のとき,  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  の値を求めよ. [解]

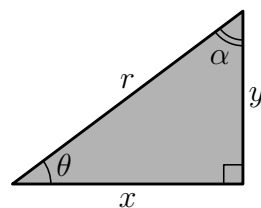
B 》  $90^\circ - \theta$  の三角比[ $90^\circ - \theta$  の三角比]

右の図において、次のことがいえる.

$$\sin \alpha = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\cos \alpha = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\text{また} \quad \tan \alpha \times \tan \theta = \frac{x}{y} \times \frac{y}{x} = 1$$

 $\alpha = 90^\circ - \theta$  であるから、鋭角  $\theta$  について、次の関係が成り立つ. $90^\circ - \theta$  の三角比

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\bigcirc + \triangle = 90^\circ$$

$$\sin \bigcirc = \cos \triangle$$

$$\cos \bigcirc = \sin \triangle$$

$$\tan \bigcirc = \frac{1}{\tan \triangle}$$

例 4.4 (1)  $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ$

$$\leftarrow 53^\circ + 37^\circ = 90^\circ$$

[S]

(2)  $\cos 80^\circ = \sin 10^\circ$

$$\leftarrow 80^\circ + 10^\circ = 90^\circ$$

(3)  $\tan 75^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ}$

$$\leftarrow 75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$$

練習 4.9 次の  に適する鋭角の角度を入れよ. [解]

(1)  $\sin 62^\circ = \cos \text{  }$

(2)  $\cos 78^\circ = \sin \text{  }$

(3)  $\tan 23^\circ \tan \text{  } = 1$

練習 4.10 次の三角比を  $45^\circ$  以下の角の三角比で表せ. [解]

(1)  $\sin 64^\circ$

(2)  $\cos 58^\circ$

(3)  $\tan 83^\circ$

## 4.1.3 三角比の拡張

これまでは、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$  の範囲にある  $\theta$  についての三角比を扱ってきたが、ここでは  $\theta$  の範囲を  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  に広げて三角比を定義しよう。

## A》座標を用いた三角比の定義

右の図のように、座標平面上において原点  $O$  を中心とする半径  $r$  の半円をかき、この半円と  $x$  軸の正の部分との交点を  $A$  とする。

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  の範囲にある  $\theta$  に対して、 $\angle AOP = \theta$  となる点  $P$  をこの半円上にとり、点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とする。

このとき、 $\theta$  の三角比を次の式で定義する。

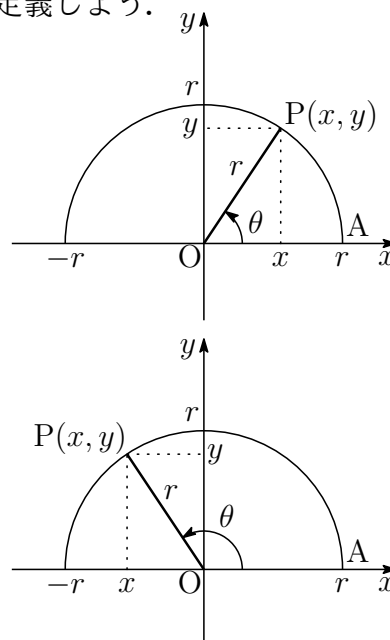
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  のときは、127 ページの定義と同じになる。

$\theta$  の範囲を  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  に広げた場合も、三角比  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  の値は、半円の半径  $r$  に関係なく、いずれも角  $\theta$  の大きさだけで定まる。

[三角比の値 ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ )]

注意  $\theta = 90^\circ$  のときは、 $x = 0$  であるから、 $\tan \theta \left( = \frac{y}{x} \right)$  は定義されない。したがって、 $\tan \theta$  と書いたときには  $\theta \neq 90^\circ$  であるものとする。



# 例 4.5 $120^\circ$ の正弦, 余弦, 正接

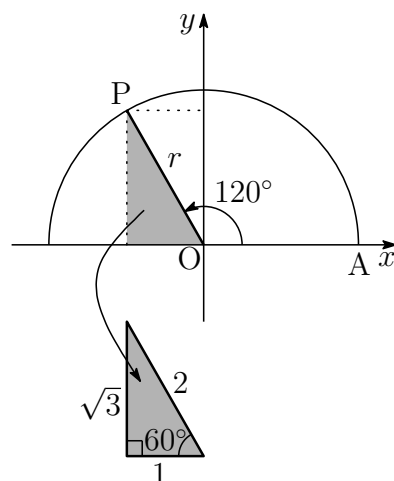
S

右の図で,  $\angle AOP = 120^\circ$  とする.  
半円の半径を  $r = 2$  にとると,  
点 P の座標は  $(-1, \sqrt{3})$  である.  
そこで  $x = -1$ ,  $y = \sqrt{3}$  として

$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

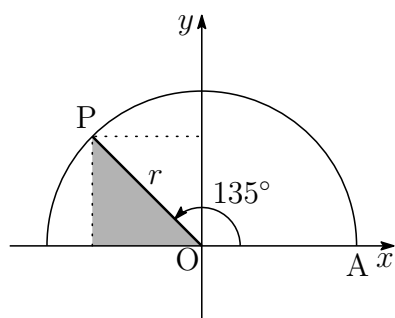


練習 4.11 次の角の正弦, 余弦, 正接の値を, 下の図などを用いて求めよ. 解

(1)  $135^\circ$

$r = \boxed{\phantom{00}}$  にとると,

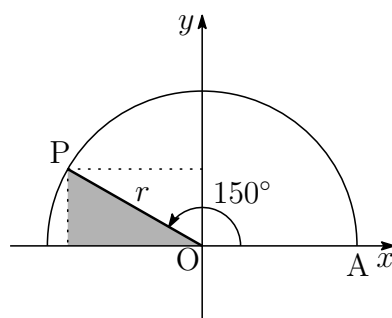
点 P の座標は  $\boxed{\phantom{00}}$



(2)  $150^\circ$

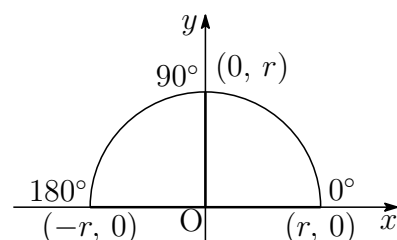
$r = \boxed{\phantom{00}}$  にとると,

点 P の座標は  $\boxed{\phantom{00}}$



$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  の三角比については, 次のようになる.

| $\theta$      | $0^\circ$          | $90^\circ$          | $180^\circ$           |
|---------------|--------------------|---------------------|-----------------------|
| $\sin \theta$ | $\sin 0^\circ = 0$ | $\sin 90^\circ = 1$ | $\sin 180^\circ = 0$  |
| $\cos \theta$ | $\cos 0^\circ = 1$ | $\cos 90^\circ = 0$ | $\cos 180^\circ = -1$ |
| $\tan \theta$ | $\tan 0^\circ = 0$ |                     | $\tan 180^\circ = 0$  |



$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  の範囲にある  $\theta$  の三角比について、134 ページで定義した．三角比の値は  $\theta$  だけで定まるから，ここからは  $r = 1$  として考えよう．

右の図のように，原点  $O$  を中心とする半径 1 の半円上に  $\angle AOP = \theta$  となる点  $P(x, y)$  をとる．

$$\sin \theta = y, \quad \cos \theta = x$$

であり，点  $P$  は半円上にあるから

$$0 \leq y \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

よって，次のことがいえる．

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき

$$0 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

右の図のように， $\theta \neq 90^\circ$  のとき，直線  $OP$  と直線  $x = 1$  の交点を  $T(1, m)$  とすると， $\tan \theta$  は次の式で表される．

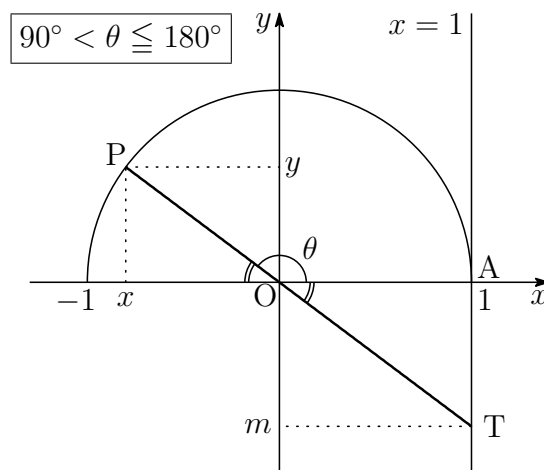
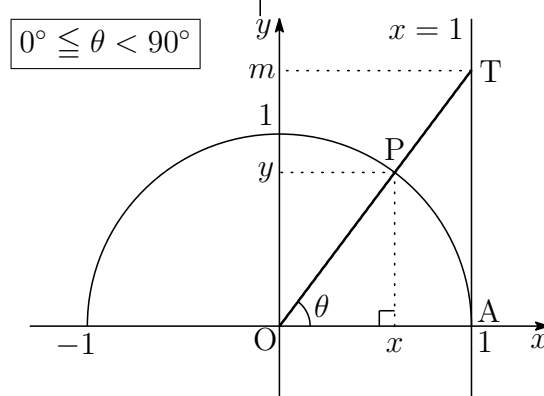
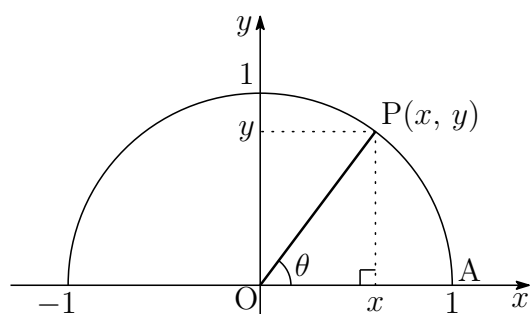
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1} = m$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ， $\theta \neq 90^\circ$  のとき， $m$  のとる値の範囲は実数全体である．したがって， $\tan \theta$  のとる値の範囲は実数全体である．

三角比の符号とそのとる値の範囲については，次のようになる．

| $\theta$      | $0^\circ$ | 鋭角 | $90^\circ$ | 鈍角 | $180^\circ$ | とる値の範囲                       |
|---------------|-----------|----|------------|----|-------------|------------------------------|
| $\sin \theta$ | 0         | +  | 1          | +  | 0           | $0 \leq \sin \theta \leq 1$  |
| $\cos \theta$ | 1         | +  | 0          | -  | -1          | $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ |
| $\tan \theta$ | 0         | +  |            | -  | 0           | 実数全体                         |

注意  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  の範囲の角  $\theta$  を鈍角という．



B 》  $180^\circ - \theta$  の三角比

右の図のように、半径  $r$  の半円上に  $\angle AOP = \theta$  となる点  $P(x, y)$  をとる.

$y$  軸に関して点  $P$  と対称な点  $Q$  をとると、 $Q$  の座標は  $(-x, y)$  である.

また、 $\angle AOQ = 180^\circ - \theta$  である.

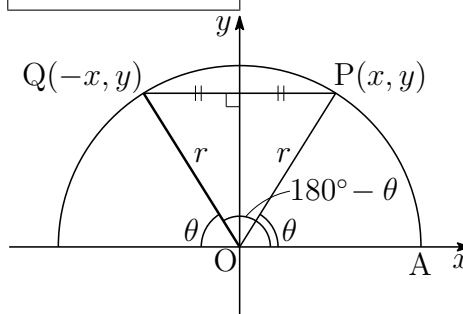
よって、 $180^\circ - \theta$  の三角比は、次のようになる.

$$\sin(180^\circ - \theta) = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

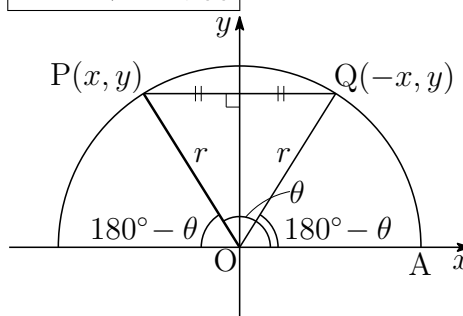
$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{-x}{r} = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{y}{-x} = -\tan \theta$$

$\theta$  が鋭角の場合



$\theta$  が鈍角の場合



よって、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の関係が成り立つ.

$180^\circ - \theta$  の三角比

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

$$\bigcirc + \square = 180^\circ$$

$$\sin \bigcirc = \sin \square$$

$$\cos \bigcirc = -\cos \square$$

$$\tan \bigcirc = -\tan \square$$

上の関係を使うと、鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すことができる.

例 4.6 (1)  $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$

$$\leftarrow 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

**S**

(2)  $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ$

$$\leftarrow 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

(3)  $\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ$

$$\leftarrow 150^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

練習 4.12 次の値を 166 ページの三角比の表を用いて求めよ. **解**

(1)  $\sin 140^\circ$

(2)  $\cos 156^\circ$

(3)  $\tan 100^\circ$

C》三角比の等式を満たす  $\theta$ 

ある角  $\theta$  の三角比の値が与えられたとき、その  $\theta$  を求めてみよう。

例 4.7 (1)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$  を満たす  $\theta$  を求める。

S

原点  $O$  を中心とする半径 1 の半円上で、 $y$  座標が  $\frac{1}{2}$  である点は 2 つある。  
求める  $\theta$  は、下の図 (1) で  $\angle AOP$  と  $\angle AOQ$  である。

よって  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

←  $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$

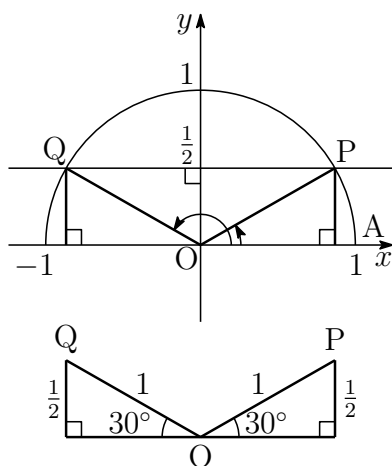
(2)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、 $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  を満たす  $\theta$  を求める。

原点  $O$  を中心とする半径 1 の半円上で、 $x$  座標が  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  である点は 1 つある。求める  $\theta$  は、下の図 (2) で  $\angle AOP$  である。

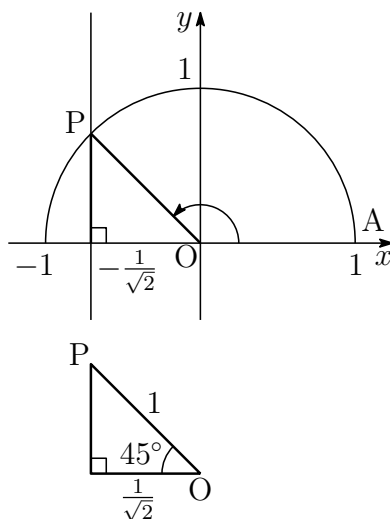
よって  $\theta = 135^\circ$

←  $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$

(1)



(2)



練習 4.13  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次のような  $\theta$  を求めよ。

解

(1)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

(3)  $\sin \theta = 0$

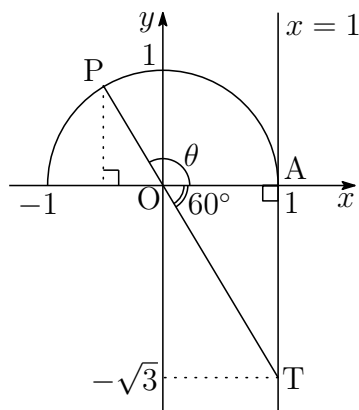
例 4.8  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき,  $\tan \theta = -\sqrt{3}$  を満たす  $\theta$  を求める.

**S**

直線  $x = 1$  上で,  $y$  座標が  $-\sqrt{3}$  である点は 1 つある.

求める  $\theta$  は右の図で  $\angle AOP$  である.

よって  $\theta = 120^\circ$

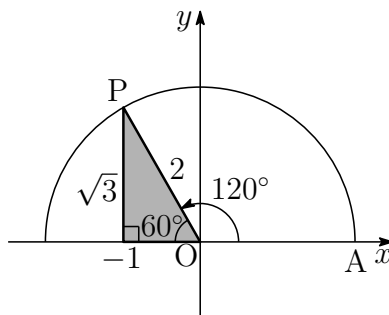


補足  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき,  $\tan \theta = -\sqrt{3}$  を満たす  $\theta$

$-\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{-1}$  であるから,

求める  $\theta$  は右の図で  $\angle AOP$  である.

よって  $\theta = 120^\circ$



練習 4.14  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき, 次のような  $\theta$  を求めよ. **解**

(1)  $\tan \theta = 1$

(2)  $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

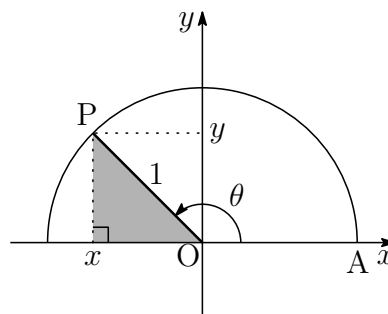
## D》三角比の相互関係

右の図のように、原点  $O$  を中心とする半径 1 の半円上に  $\angle AOP = \theta$  となる点  $P(x, y)$  をとると

$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

また、三平方の定理を用いると、

$$x^2 + y^2 = 1^2$$



が常に成り立つことがわかる。

したがって、131 ページで示した三角比の相互関係は、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  の範囲にある角  $\theta$  についても、そのまま成り立つ。

三角比の相互関係

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

例題 4.4  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする.  $\sin \theta = \frac{1}{4}$  のとき,  $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ. ■

解答  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

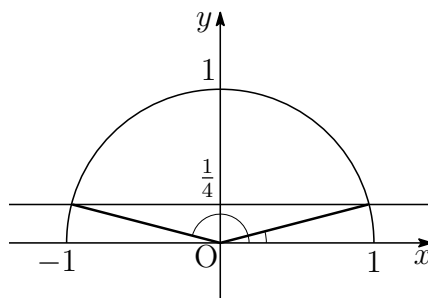
$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}\end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき,  $\cos \theta > 0$  であるから

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{4} \div \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{\sqrt{15}}\end{aligned}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき,  $\cos \theta < 0$  であるから

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}\end{aligned}$$



練習 4.15  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする.  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  のとき,  $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ. ■

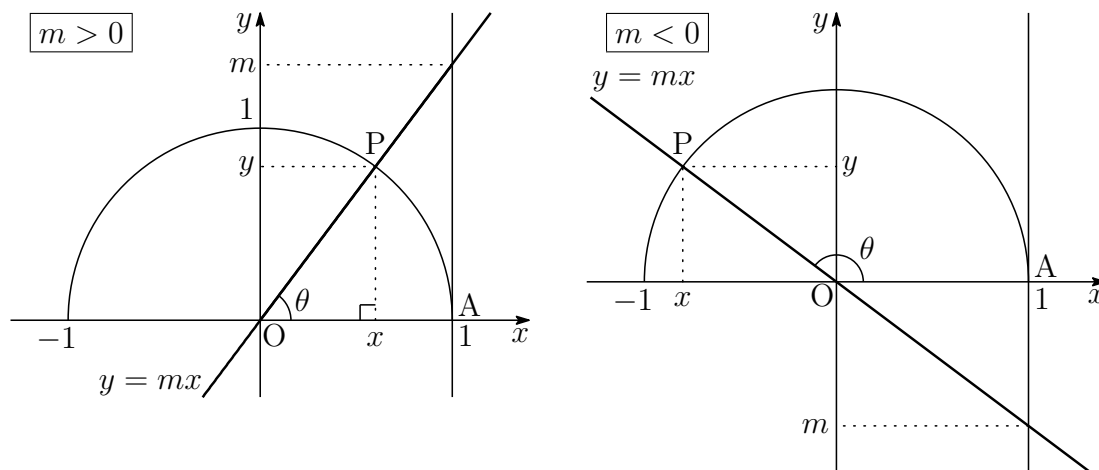
練習 4.16  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする.  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  のうち, 1つが次の値をとるとき, 他の2つの値を求めよ. ■

(1)  $\cos \theta = -\frac{1}{3}$

(2)  $\tan \theta = -2$

## E》直線の傾きと正接

下の図のように、原点  $O$  を中心とする半径1の半円と直線  $y = mx$  の交点を  $P(x, y)$  とする． $\angle AOP = \theta$  とすると、直線  $y = mx$  の傾き  $m$  と  $\tan \theta$  の値はいずれも  $\frac{y}{x}$  である．



上の図のように、 $y$  軸の正の部分から、時計の針の回転と逆向きに、直線  $y = mx$  まで測った角  $\theta$  を、直線  $y = mx$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角という．一般に、直線  $y = mx$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角  $\theta$  について、次の等式が成り立つ．

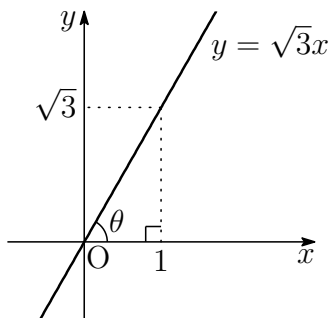
$$m = \tan \theta$$

注意  $m = 0$  のときは、 $\theta = 0^\circ$  とすると、この場合も  $m = \tan \theta$  が成り立つ．

例 4.9 直線  $y = \sqrt{3}x$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角  $\theta$  を求める． S  
直線の傾きが  $\sqrt{3}$  であるから

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

よって  $\theta = 60^\circ$



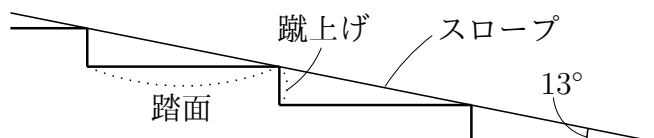
練習 4.17 次の直線と  $x$  軸の正の向きとのなす角  $\theta$  を求めよ． 解

(1)  $y = x$

(2)  $y = -\sqrt{3}x$

## 4.1.4 問題

**問題 4.1** 自転車を押して昇降できるスロープと階段を作る．下の図のように，階段の先端とスロープが接するように階段を作り，自転車用のスロープの傾斜を  $13^\circ$ ，階段の踏面<sup>ふみづら</sup>を 50cm にするとき，階段の蹴上げ<sup>けあ</sup>を求めよ．ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ．166 ページの三角比の表を用いてよい．解 → p.130 応用例題 4.1



**問題 4.2**  $\triangle ABC$  の 3 つの内角  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  の大きさを，それぞれ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．解 → p.133, 137

$$(1) \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2} \qquad (2) \sin A = \sin(B+C)$$

**問題 4.3**  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする． $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  のうち，1 つが次の等式を満たすとき，他の 2 つの値を求めよ．解 → p.141 例題 4.4

$$(1) 4 \sin \theta = 3 \qquad (2) \tan \theta + 3 = 0$$

**問題 4.4** 2 直線  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ ,  $y = -x$  のなす鋭角  $\theta$  を求めよ．解 → p.142

**問題 4.5** 次の三角比の値を，小さい方から順に並べよ．ただし，三角比の表は用いなものとする．解

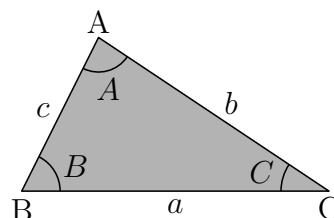
$$\sin 20^\circ, \sin 40^\circ, \sin 150^\circ, \sin 170^\circ$$

## 4.2 正弦定理と余弦定理

### 4.2.1 正弦定理

以下では， $\triangle ABC$ において頂点  $A$ ， $B$ ， $C$ に向かい合う辺  $BC$ ， $CA$ ， $AB$ の長さを，それぞれ  $a$ ， $b$ ， $c$ で表す．また， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ の大きさを，それぞれ  $A$ ， $B$ ， $C$ で表す．

$\triangle ABC$ において，3辺の長さ  $a$ ， $b$ ， $c$ と3つの角の正弦  $\sin A$ ， $\sin B$ ， $\sin C$ の間に成り立つ関係を調べてみよう．



#### A》三角形の外接円と正弦

三角形の3つの頂点を通る円を，その三角形の外接円という．

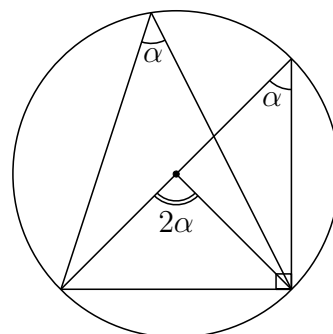
$\triangle ABC$ の外接円の半径を  $R$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$a = 2R \sin A$$

この等式が成り立つことを証明するために，次のことを用いる． [円周角の定理]

- 1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の大きさの半分である．

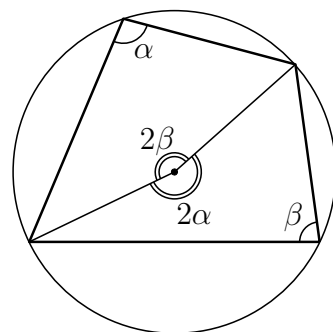
とくに，半円の弧に対する円周角の大きさは  $90^\circ$ である．



- 2 円に内接する四角形の向き合う角の和は  $180^\circ$ である．

1は，中学校で学んだ円周角の定理である．また，2は，円周角の大きさが中心角の大きさの半分であることから導かれる．

[円に内接する四角形]



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とするとき、等式  $a = 2R \sin A$  が成り立つことを示そう.

[1]  $0^\circ < A < 90^\circ$  のとき

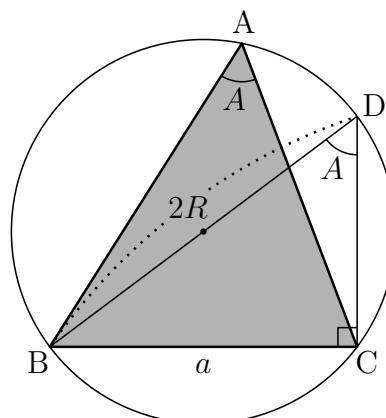
右の図で、線分  $BD$  は  $\triangle ABC$  の直径とする. 円周角の定理から

$$\angle BDC = \angle BAC = A, \quad \angle BCD = 90^\circ$$

よって、 $\triangle BCD$  において

$$a = BD \sin A$$

すなわち  $a = 2R \sin A$



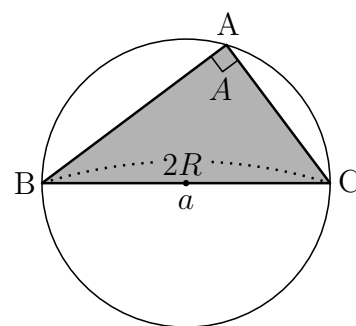
[2]  $A = 90^\circ$  のとき

辺  $BC$  は、 $\triangle ABC$  の外接円の直径である. 外接円の半径は  $R$  であるから

$$a = 2R$$

$\sin A = \sin 90^\circ = 1$  であるから、

$$a = 2R \sin A$$



[3]  $90^\circ < A < 180^\circ$  のとき

右の図で、線分  $BD$  は  $\triangle ABC$  の外接円の直径とする.  $\angle BDC = D$  とすると、四角形  $ABDC$  は円に内接するから

$$A + D = 180^\circ$$

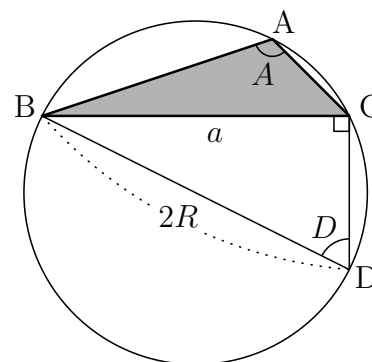
よって

$$\sin D = \sin(180^\circ - A) = \sin A \quad \dots \textcircled{1}$$

$\angle BDC = 90^\circ$  であるから、 $\triangle BCD$  において

$$a = BD \sin D$$

① より  $a = 2R \sin A$



以上により、等式  $a = 2R \sin A$  が成り立つことが示された.

## B 》 正弦定理

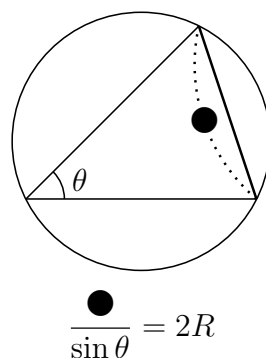
前ページで示したことから、 $\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とすると、次が成り立つ。

$$a = 2R \sin A \quad \text{すなわち} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

同様に、次が成り立つ。

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

よって、次の正弦定理が得られる。



## 正弦定理

$\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とすると、次が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

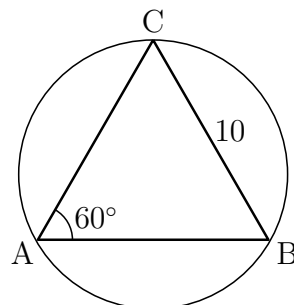
補足 上の関係式を比の形で書くと、 $a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C$  となる。  
この比の関係を、 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$  と書くことがある。

例 4.10 1 辺の長さが 10 の正三角形  $ABC$  の外接円の半径  $R$  を求める。

**S**

正弦定理により、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$  であるから

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = 2R$$



$$\text{よって} \quad R = \frac{10}{2 \sin 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$\leftarrow \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5.77\dots$$

練習 4.18 次のような  $\triangle ABC$  において、外接円の半径  $R$  を求めよ。 **解**

(1)  $a = 5, A = 45^\circ$

(2)  $b = \sqrt{3}, B = 120^\circ$

練習 4.19  $c = 10$  である  $\triangle ABC$  において、外接円の半径が  $R = 10$  のとき、 $C$  を求めよ。 **解**

正弦定理から、 $\triangle ABC$  において、次の等式が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

三角形の1辺の長さや2つの角の大きさが与えられている場合には、次のいずれかの等式を用いて、他の辺の長さを求めることができる。

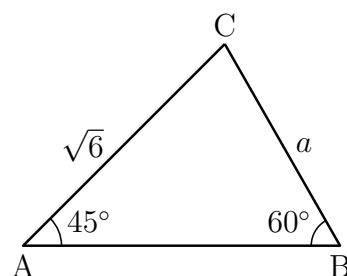
**例題 4.5**  $\triangle ABC$  において、 $b = \sqrt{6}$ ,  $A = 45^\circ$ ,  $B = 60^\circ$  のとき、 $a$  を求めよ。 S

**解答** 正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

であるから 
$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$

よって 
$$a = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sin 60^\circ} \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$



**練習 4.20** 次のような  $\triangle ABC$  において、指定されたものを求めよ。 解

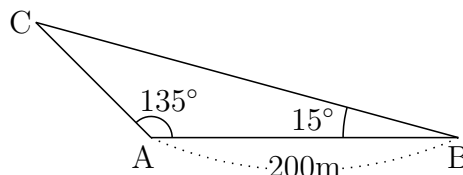
(1)  $x = \sqrt{2}$ ,  $B = 30^\circ$ ,  $C = 45^\circ$  のとき  $b$

(2)  $a = 2$ ,  $A = 45^\circ$ ,  $C = 120^\circ$  のとき  $c$

**練習 4.21** 右の図のように、200m 離れた海岸の2地点 A, B と、島にある地点 C について

$$\angle CAB = 135^\circ, \quad \angle CBA = 15^\circ$$

であった。B, C 間の距離を求めよ。 解

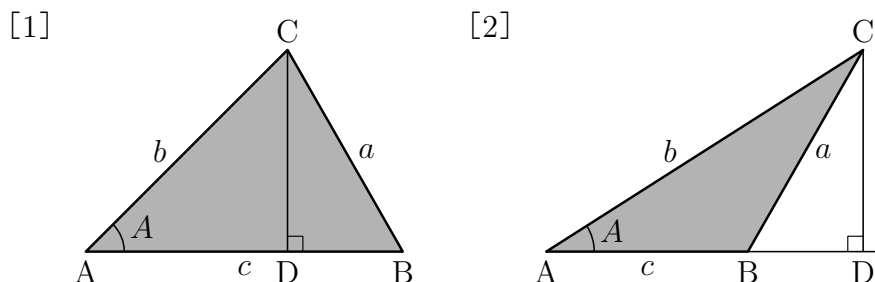


## 4.2.2 余弦定理

直角三角形においては、3辺の長さに関する三平方の定理が成り立つ。  
ここでは、一般の三角形の3辺の長さの間に成り立つ関係を調べよう。

## A》余弦定理

下の図 [1], [2] のように,  $\triangle ABC$  の  $A$  が鋭角の場合について調べる。  
 $\triangle ABC$  の頂点  $C$  から辺  $AB$  またはその延長に垂線  $CD$  を下ろす。



上の図 [1], [2] では, いずれの場合にも次が成り立つ。

$$BC^2 = CD^2 + BD^2,$$

← 三平方の定理

$$CD^2 = (b \sin A)^2, \quad BD^2 = (c - b \cos A)^2$$

← 図 [2] では  
 $BD = b \cos A - c$

よって,  $BC^2$  すなわち  $a^2$  は次のように表される。

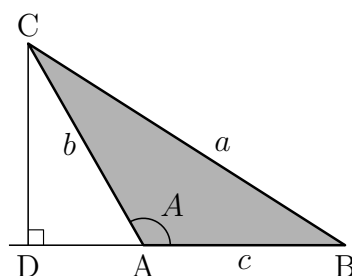
$$\begin{aligned} a^2 &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \\ &= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

←  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

**練習 4.22** 右の図のように,  $A$  が鈍角の場合にも

$$\begin{aligned} BC^2 &= CD^2 + BD^2, \\ CD^2 &= (b \sin A)^2, \\ BD^2 &= (c - b \cos A)^2 \end{aligned}$$

が成り立つことを確かめよ。 解



前ページで調べたことから、次の余弦定理が得られる。

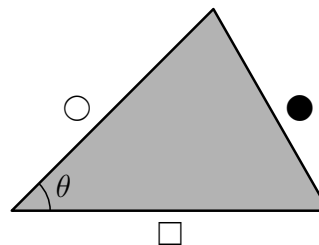
### 余弦定理

$\triangle ABC$  において、次が成り立つ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



$$\bullet^2 = \circ^2 + \square^2 - 2 \circ \square \cos \theta$$

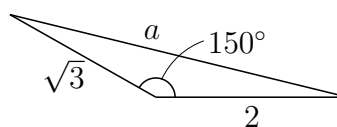
三角形の2辺の長さとその間の角の大きさがわかっている場合には、余弦定理を用いて、残りの辺の長さを求めることができる。

**例題 4.6**  $\triangle ABC$  において、 $b = \sqrt{3}$ ,  $c = 2$ ,  $A = 150^\circ$  であるとき、 $a$  を求めよ。 S

**解答** 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cos 150^\circ \\ &= 3 + 4 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 13 \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ であるから} \quad a = \sqrt{13}$$

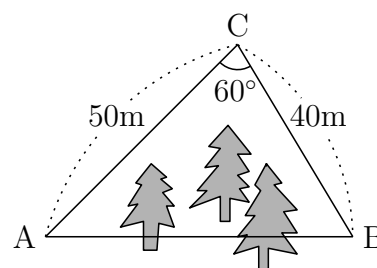


**練習 4.23** 次のような  $\triangle ABC$  において、指定されたものを求めよ。 解

(1)  $a = 3$ ,  $c = 2\sqrt{2}$ ,  $B = 45^\circ$  のとき  $b$

(2)  $a = 3$ ,  $b = 5$ ,  $C = 120^\circ$  のとき  $c$

**練習 4.24** 右の図のように、林をはさんで2地点 A, B がある。地点 C から A と B を見て  $\angle ACB$  を測ると  $60^\circ$  で、また A, C 間の距離は 50m, B, C 間の距離は 40m であった。A, B 間の距離を求めよ。 解



余弦定理から、 $\triangle ABC$ において、次が成り立つ。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

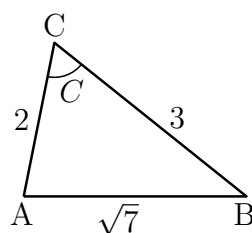
$\triangle ABC$ の3辺の長さがわかっている場合には、上の式を用いることにより、3つの角の大きさを求めることができる。

例題 4.7  $\triangle ABC$ において、 $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = \sqrt{7}$  のとき、 $C$ を求めよ。 S

解答 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{3^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって  $C = 60^\circ$



練習 4.25 次のような  $\triangle ABC$  において、指定されたものを求めよ。 解

(1)  $a = \sqrt{7}$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2\sqrt{3}$  のとき  $A$

(2)  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{5}$ ,  $c = \sqrt{2}$  のとき  $B$

$\triangle ABC$ において、 $\cos A$ の符号は $b^2 + c^2 - a^2$ の符号と同じなので、 $b^2 + c^2$ と $a^2$ の大小によって、次のことがいえる。

| $b^2 + c^2$ と $a^2$ の大小 | $b^2 + c^2 > a^2$ | $b^2 + c^2 = a^2$ | $b^2 + c^2 < a^2$ |
|-------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\cos A$ の符号            | $\cos A > 0$      | $\cos A = 0$      | $\cos A < 0$      |
| 角 $A$ の種類               | $A$ は鋭角           | $A$ は直角           | $A$ は鈍角           |

練習 4.26  $\triangle ABC$ の3辺の長さが次のようなとき、 $\cos A$ の符号から角  $A$ が鋭角、直角、鈍角のいずれであることを調べよ。 解

(1)  $a = 9$ ,  $b = 3\sqrt{2}$ ,  $c = 7$

(2)  $a = \sqrt{7}$ ,  $b = \sqrt{6}$ ,  $c = 2$

## 発見

## 正弦定理・余弦定理

147 ページ例題 4.5, 149 ページ例題 4.6, 150 ページ例題 4.7 において, 正弦定理や余弦定理を用いて, 三角形の辺の長さや角の大きさを求める方法を学びました.

ここでは, これらの例題で最初に与えられている辺や角の条件について, 考察してみましょう.

**確認** 例題 4.7 では問題文で三角形の 3 辺の長さが与えられている. 例題 4.6 の問題文で与えられている三角形の条件は何だろうか.

(2つの辺の長さとその間の角の大きさが与えられている.)

例題 4.5, 例題 4.6, 例題 4.7 で与えられている三角形の条件には, 中学校で学んだ三角形のある性質が関係しています.

**発見** 例題 4.7, 例題 4.6, 例題 4.5 の順に与えられている三角形の条件をまとめてみよう.

|        | 三角形の条件              |
|--------|---------------------|
| 例題 4.7 | 3 辺の長さ              |
| 例題 4.6 | 2 つの辺の長さとその間の角の大きさ  |
| 例題 4.5 | 1 つの辺の長さとその2つの角の大きさ |

これらに関連する中学校で学んだ三角形の性質とは何だろうか.

(三角形の合同条件)

上の発見の結果から, それぞれの例題で与えられた条件によって, 三角形の形が 1 つに定まり, 1 つだけの答えが求められることがわかります.

**整理** 上の発見で調べた 3 つの条件でないような条件を与えた上で, 例題 4.5, 例題 4.6, 例題 4.7 のような三角形の辺の長さや角の大きさを求める問題を作ってみよう. そのとき, 答えはどうなるだろうか.

解答例:  $b = 2\sqrt{2}$ ,  $c = 2$ ,  $C = 30^\circ$  (問題 4.6 を参照)

(答えが 1 つに定まらず, 答が 2 通り求められる場合がある.)

## 4.2.3 正弦定理・余弦定理の応用

三角形の辺や角についての条件が与えられたとき、その条件を満たす三角形の形状を調べよう。

## A》三角形の辺と角の決定

例題 4.8  $\triangle ABC$  において、 $a = 2$ ,  $b = \sqrt{3} + 1$ ,  $C = 60^\circ$  のとき、残りの辺の長さ  
と角の大きさを求めよ。 S

解答 余弦定理により

$$\begin{aligned} c^2 &= 2^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2 \cdot 2(\sqrt{3} + 1) \cos 60^\circ \\ &= 4 + (3 + 2\sqrt{3} + 1) - 4(\sqrt{3} + 1) \times \frac{1}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

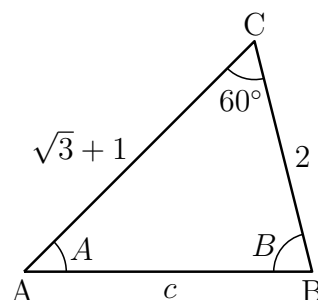
$$c > 0 \text{ であるから } c = \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \text{余弦定理により } \cos A &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2(\sqrt{3} + 1)\sqrt{6}} \\ &= \frac{2(3 + \sqrt{3})}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{よって } A = 45^\circ$$

$$\text{したがって } B = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$

$$(\text{答}) c = \sqrt{6}, A = 45^\circ, B = 75^\circ$$



練習 4.27  $\triangle ABC$  において、 $a = \sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{3} + 1$ ,  $B = 45^\circ$  のとき、残りの辺の長さ  
と角の大きさを求めよ。 解

深化 4.1 例題 4.8 において、 $c$  を求めた後、 $A$  を求めるのに正下定理を用いる方法もある。正弦定理により

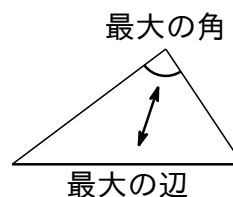
$$\frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \quad \text{よって} \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

① より  $A = 45^\circ, 135^\circ$  であるが、例題 4.8 では  $A = 135^\circ$  は適さない。その理由を説明してみよう。 解

三角形の辺と角の大小関係について、次のことが知られている。

三角形の2辺の大小関係は、その向かい合う角の大小関係と一致する。

よって、三角形の最大の辺に向かい合う角が、その三角形の最大の角である。



[三角形の辺と角]

応用例題 4.2  $\triangle ABC$  において次が成り立つとき、この三角形の最大の角の大きさを求めよ。 S

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$$

考え方 》 146 ページの「補足」を参照。三角形の角の大きさは、3辺の長さ  $a, b, c$  の比がわかれば、余弦定理から求められる。

解答 正弦定理により  $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

が成り立つから  $a : b : c = 7 : 5 : 3$

このとき、正の数  $k$  を用いて

$$a = 7k, b = 5k, c = 3k$$

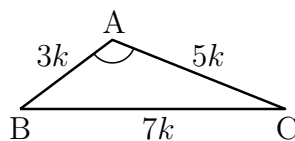
と表すことができる。

$a$  が最大の辺であるから、 $A$  が最大の角である。

余弦定理により

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 3k} = \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}$$

よって、最大の角の大きさは  $A = 120^\circ$



補足  $a : b : c = 7 : 5 : 3$  である  $\triangle ABC$  はどれも相似であり、大きさによらず常に  $A = 120^\circ$  となる。

練習 4.28  $\triangle ABC$  において次が成り立つとき、この三角形の最大の角を求めよ。 解

$$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 3$$

## 4.2.4 三角形の面積

三角形の面積を求めるには、次の計算式がある.

$$\text{三角形の面積} = \frac{1}{2} \times \text{底辺} \times \text{高さ}$$

ここでは、この計算式から三角比を使う計算式を導いてみよう.

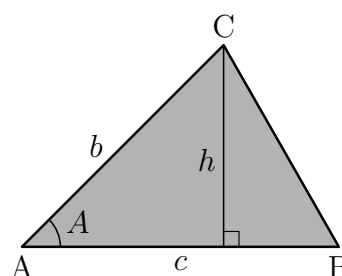
## A》三角形の面積と正弦

$\triangle ABC$ において、辺ABを底辺とするときの高さを $h$ とすると、常に

$$h = b \sin A$$

となる. よって、 $\triangle ABC$ の面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{2} \times c \times b \sin A$$



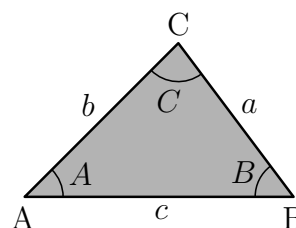
一般に、三角形の面積について、次のことが成り立つ.

## 三角形の面積

$\triangle ABC$ の面積 $S$ は、次の式で表される.

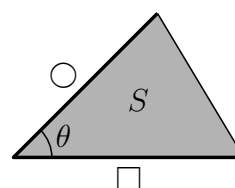
$$S = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2}ca \sin B,$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$



三角形の面積 $S$ は、2辺の長さとその間の角の大きさから求めることができる.

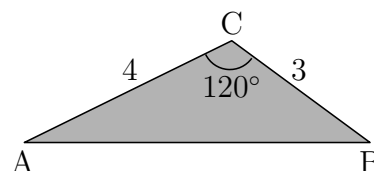
$$S = \frac{1}{2} \circ \square \sin \theta$$



例 4.11  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $C = 120^\circ$  である  $\triangle ABC$  の面積  $S$

**S**

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$



練習 4.29 次のような  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ. 解

- (1)  $b = 10, c = 8, A = 45^\circ$
- (2)  $a = 6, c = 5, B = 150^\circ$
- (3) 1 辺の長さが  $a$  の正三角形  $ABC$

## B 》 多角形の面積

例題 4.9  $\triangle ABC$  において, 3 辺の長さが  $a = 7, b = 8, c = 9$  であるとき, 次のものを求めよ. S

- (1)  $\cos A$  の値
- (2)  $\sin A$  の値
- (3) 面積  $S$

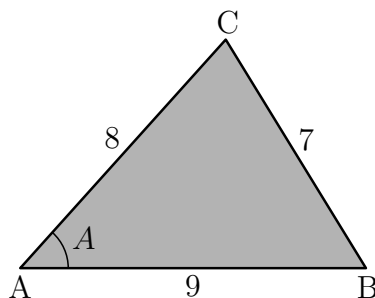
解答 (1) 余弦定理から

$$\cos A = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{96}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2}{3}$$

(2)  $\sin A > 0$  であるから

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

$$(3) S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 12\sqrt{5}$$



練習 4.30 3 辺の長さが次のような  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ. 解

- (1)  $a = 8, b = 5, c = 7$
- (2)  $a = 13, b = 14, c = 15$

応用例題 4.3 円に内接する四角形 ABCD において,

$$AB = 3, \quad BC = 2, \quad CD = 2, \quad \angle B = 60^\circ$$

のとき, 次のものを求めよ.

**S**

- (1) AC の長さ      (2) AD の長さ      (3) 四角形 ABCD の面積

考え方 》 (2) 円に内接する四角形の向かい合う角の和は  $180^\circ$  である.

$AD = x$  として  $\triangle ACD$  に余弦定理を使う.

解答 (1)  $\triangle ABC$  に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} AC^2 &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos 60^\circ \\ &= 9 + 4 - 6 = 7 \end{aligned}$$

$$AC > 0 \text{ であるから } AC = \sqrt{7}$$

- (2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle D = 180^\circ - \angle B = 180 - 60^\circ = 120^\circ$$

$AD = x$  として,  $\triangle ACD$  に余弦定理を使うと

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot CD \cdot AD \cos \angle D$$

$$\text{よって} \quad 7 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cos 120^\circ$$

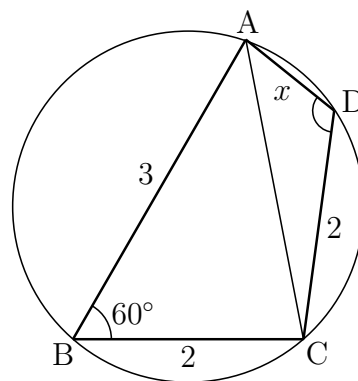
$$\text{整理すると} \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\text{これを解くと} \quad x = -3, 1$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 1 \quad \text{すなわち} \quad AD = 1$$

- (3) 四角形 ABCD の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \sin 120^\circ = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

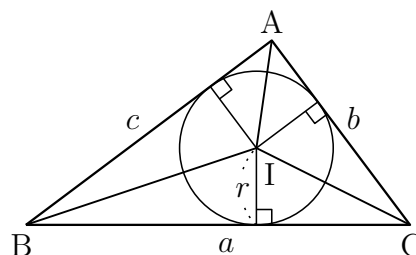


練習 4.31 円に内接する四角形 ABCD において,  $AB = 5, BC = 4, CD = 4, \angle B = 60^\circ$  のとき, 四角形 ABCD の面積  $S$  を求めよ. **解**

## C》三角形の内接円と面積

三角形の3辺に接する円を、その三角形の内接円という。

$\triangle ABC$  の内接円の半径を  $r$ ，中心を  $I$  とすると， $\triangle ABC$  の面積  $S$  は



$$S = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

よって，次の等式が成り立つ。

[三角形の内接円と面積]

$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

応用例題 4.4  $\triangle ABC$  において， $a = 5$ ， $b = 6$ ， $c = 7$  のとき，この三角形の内接円の半径  $r$  を求めよ。

[S]

考え方》まず， $\triangle ABC$  の面積を三角形を利用して求める。それが  $\frac{1}{2}r(a + b + c)$  に等しいことから， $r$  が求められる。

解答 余弦定理により  $\cos A = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7}$

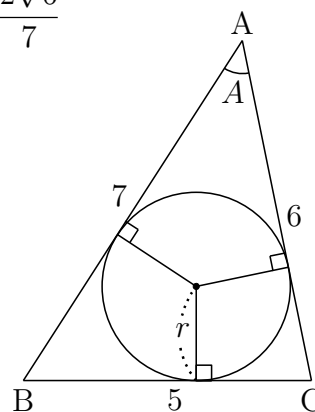
$$\sin A > 0 \text{ であるから } \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = 6\sqrt{6}$$

$$\text{また } S = \frac{1}{2}r(5 + 6 + 7) = 9r$$

$$\text{よって, } 9r = 6\sqrt{6} \text{ から } r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$



練習 4.32  $\triangle ABC$  において， $a = 4$ ， $b = 3$ ， $c = 2$  のとき，この三角形の内接円の半径を求めよ。

[解]

**発展** ヘロンの公式

△ABC の面積  $S$  を, 3 辺の長さ  $a, b, c$  で表してみよう.

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \cos^2 A} \\
 &= \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{1}{2bc} \sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)\} \{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)\}} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\{(b+c)^2 - a^2\} \{a^2 - (b-c)^2\}} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\{(b+c+a)(b+c-a)\} \{(a+b-c)(a-b+c)\}}
 \end{aligned}$$

ここで,  $a+b+c=2s$  とおくと

$$b+c-a=2(s-a), \quad a+b-c=2(s-c), \quad a-b+c=2(s-b)$$

よって

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-b)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

以上から, 次のヘロンの公式が成り立つ.

△ABC の面積  $S$  は

$$2s = a + b + c \text{ とすると } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

155 ページの例題 4.9 の △ABC の面積  $S$  は, ヘロンの公式を用いると, 次のように求められる.

$$2s = 7 + 8 + 9 \text{ から } s = 12$$

$$\text{よって } S = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}$$

**演習 4.1** 3 辺の長さが 7, 8, 13 である三角形の面積  $S$  を求めよ. 解

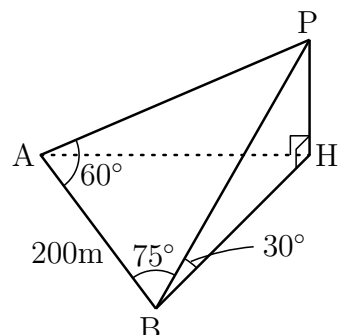
## 4.2.5 空間図形への応用

空間図形に含まれる三角形に着目して、長さや面積を求めてみよう.

**応用例題 4.5** 200m 離れた山のふもとの2地点 A と B から、山の頂上 P を見ると

$$\angle PAB = 60^\circ, \quad \angle PBA = 75^\circ$$

であった. また, B から P を見上げた角度は  $30^\circ$  であった. 図において, P と B の標高差 PH を求めよ. S



**考え方** 》図で,  $PH = BP \sin 30^\circ$  である. そこで,  $\triangle ABP$  に正弦定理を使って, まず BP の長さを求める.

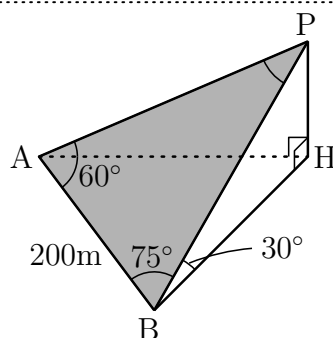
**解答**

$$\angle APB = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

$$\triangle ABP \text{ に正弦定理を使うと } \frac{BP}{\sin 60^\circ} = \frac{200}{\sin 45^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } BP &= 200 \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 60^\circ \\ &= 200 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{したがって } PH = BP \sin 30^\circ = 100\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 50\sqrt{6} \quad (\text{答}) 50\sqrt{6} \text{ m}$$

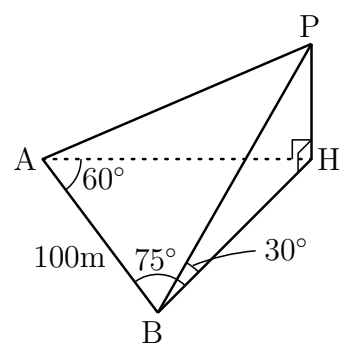


**補足**  $50\sqrt{6} = 122.4\dots$  となり, PH はおよそ 122m である.

**練習 4.33** 100m 離れた2地点 A と B から, 気球 P の真下で B と同じ標高の地点 H を見たとき,

$$\angle HAB = 60^\circ, \quad \angle HBA = 75^\circ$$

であった. また, B から P を見上げた角度は  $30^\circ$  であった. 図において, 気球 P の高さ PH を求めよ. 解

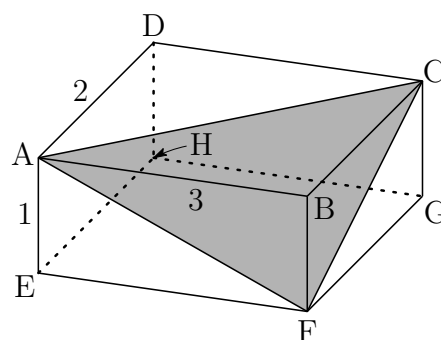


応用例題 4.6 右の図のように,

$$AB = 3, AD = 2, AE = 1$$

である直方体 ABCD-EFGH がある.  
△AFC の面積を求めよ. S

[直方体の切断面]



考え方》 三角形の面積は, 3 辺の長さから求めることができる. また, 直方体の頂点を結ぶ線分の長さは, 三平方の定理を使って求めることができる.

解答 三平方の定理により

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$CF^2 = BC^2 + BF^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

△AFC に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} \cos \angle AFC &= \frac{AF^2 + CF^2 - AC^2}{2 \cdot AF \cdot CF} = \frac{10 + 5 - 13}{2\sqrt{10}\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{50}} \end{aligned}$$

$\sin \angle AFC > 0$  であるから

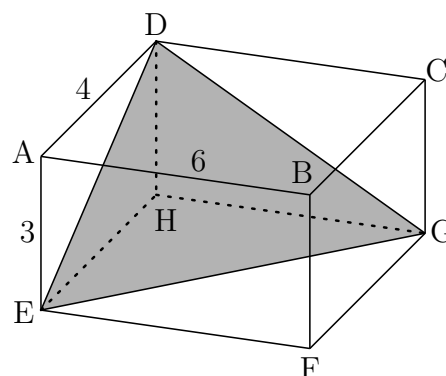
$$\sin \angle AFC = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7}{\sqrt{50}}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } S &= \frac{1}{2} \cdot AF \cdot CF \sin \angle AFC \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

練習 4.34 右の図のように,

$$AB = 6, AD = 4, AE = 3$$

である直方体 ABCD-EFGH がある.  
△DEG の面積  $S$  を求めよ. 解

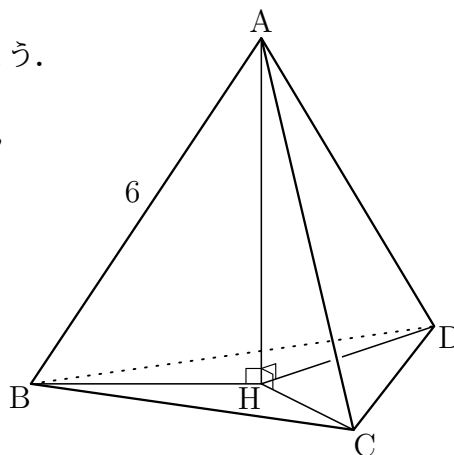


**研究** 正四面体の体積

三角比を利用して、正四面体の体積を求めてみよう。

**Ex 4.1** 1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD において、頂点 A から  $\triangle BCD$  に垂線 AH を下ろす。

- (1) 点 H は  $\triangle BCD$  の外接円の中心であることを示せ。
- (2) AH の長さを求めよ。
- (3) 正四面体 ABCD の体積  $V$  を求めよ。



[正四面体の体積]

**解答** (1)  $\triangle ABH$ ,  $\triangle ACH$ ,  $\triangle ADH$  はいずれも直角三角形で

$$AB = AC = AD, \quad AH \text{ は共通}$$

であるから、これらの直角三角形は合同である。

よって  $BH = CH = DH$

したがって、H は  $\triangle BCD$  の外接円の中心である。

- (2) BH は  $\triangle BCD$  の外接円の半径であるから、正弦定理より

$$\frac{6}{\sin 60^\circ} = 2BH \quad \text{すなわち} \quad BH = \frac{6}{2 \sin 60^\circ} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{よって} \quad AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

- (3)  $\triangle BCD$  の面積を  $S$  とすると  $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$

$$\text{よって} \quad V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 18\sqrt{2}$$

**演習 4.2**  $PA = PB = PC = 3$ ,  $AB = BC = CA = 4$  である三角錐<sup>すい</sup> PABC の体積  $V$  を求めよ。 解

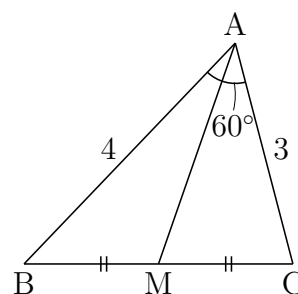
## 4.2.6 問題

問題 4.6  $\triangle ABC$  において,  $a : b = 7 : 3$ ,  $A = 60^\circ$  であるとき,  $\sin B$  の値を求めよ.

解 → p.146, 147

問題 4.7  $\triangle ABC$  において,  $c = 4$ ,  $b = 3$ ,  $A = 60^\circ$  とし, 辺  $BC$  の中点を  $M$  とする. このとき, 次のものを求めよ. 解 → p.149, 150

- (1)  $BM$  の長さ
- (2)  $\cos B$  の値
- (3)  $AM$  の長さ

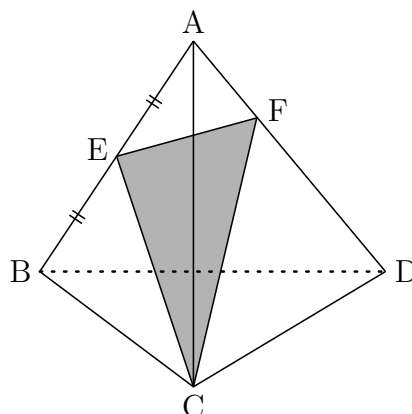


問題 4.8 次の図形の面積を求めよ. 解

→ p.154

- (1)  $AB = 6$ ,  $AD = 4$ ,  $\angle A = 60^\circ$  である平行四辺形  $ABCD$
- (2) 半径 2 の円に内接する正十二角形

問題 4.9 1 辺の長さが 6 の正四面体  $ABCD$  において, 辺  $AB$  の中点を  $E$ , 辺  $AD$  を  $1 : 2$  に分ける点を  $F$  とする.  $\triangle CFE$  の面積  $S$  を求めよ. 解 → p.160 応用例題 4.6



問題 4.10  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求める公式

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2}ca \sin B, \quad S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c) \quad (r \text{ は } \triangle ABC \text{ の内接円の半径})$$

から, 次のものをすべて用いて  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求める公式を作り出せ. 解

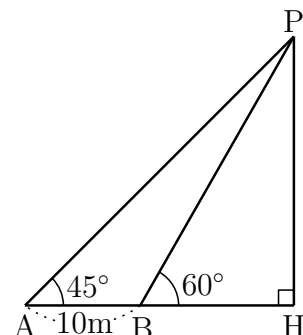
- (1) 3 辺の長さ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  と外接円の半径  $R$
- (2) 3 つの角の大きさ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の正弦と外接円の半径  $R$ , 内接円の半径  $r$

## 4.3 章末問題

### 4.3.1 章末問題 A

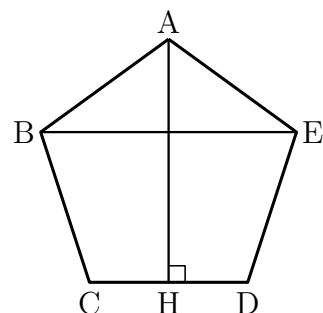
章末 4.1 地点 A から塔の先端 P を見上げた角は  $45^\circ$  であった．次に塔へ向かって水平に 10m 進んだ地点 B から P を見上げた角は  $60^\circ$  であった．図のように P の真下の地点を H とする．目の高さを無視するとき，次のものを求めよ． 解

- (1) B, H 間の距離      (2) 塔の高さ PH



章末 4.2 1 辺の長さが 10 の正五角形 ABCDE において，次の線分の長さを，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ． 解

- (1) 対角線 BE  
(2) 頂点 A から辺 CD に下ろした垂線 AH

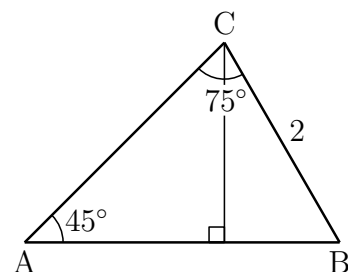


章末 4.3  $\triangle ABC$  において，

$$BC = 2, \angle BAC = 45^\circ, \angle ACB = 75^\circ$$

である． 解

- (1) 辺 AB の長さを求めよ．  
(2)  $\sin 75^\circ$  と  $\cos 75^\circ$  の値を求めよ．

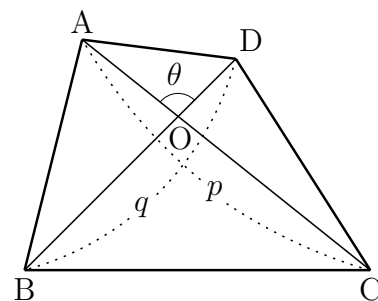


章末 4.4 右の図のような四角形 ABCD の 2 本の対角線の交点を O とし，

$$\angle AOD = \theta, AC = p, BD = q$$

とする．この四角形の面積  $S$  は，

$$S = \frac{1}{2}pq \sin \theta \text{ であることを示せ． } 解$$



章末 4.5  $\triangle ABC$  において， $AB = 8$ ， $AC = 4$ ， $A = 120^\circ$  であるとする． $\angle A$  の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，AD の長さを求めよ． 解

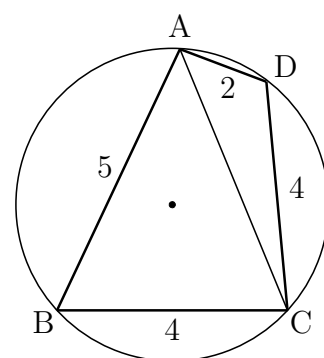
## 4.3.2 章末問題 B

章末 4.6  $\triangle ABC$  において,  $b = 2\sqrt{3}$ ,  $c = 2$ ,  $C = 30^\circ$  のとき, 残りの辺の長さや角の大きさを求めよ. 解

章末 4.7 円に内接する四角形 ABCD において,

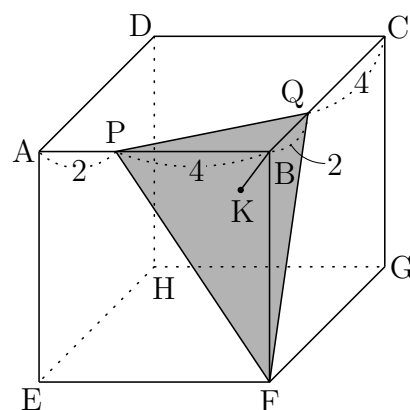
$$AB = 5, BC = 4, CD = 4, DA = 2$$

のとき, 四角形 ABCD の面積を求めよ. 解



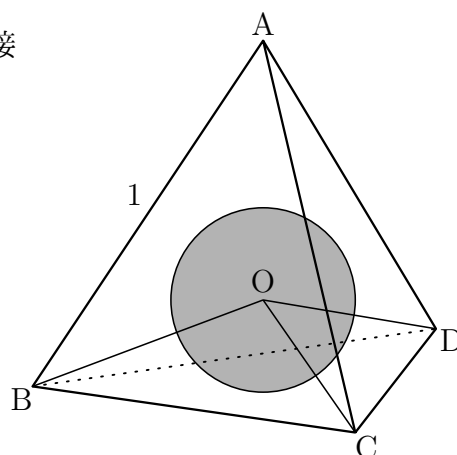
章末 4.8 1 辺の長さが 6 の立方体 ABCD-EFGH において, 辺 AB, BC 上に, それぞれ右の図のような点 P, Q をとる. 解

- (1)  $\triangle PFQ$  の面積を求めよ.
- (2) B から  $\triangle PFQ$  に下ろした垂線 BK の長さを求めよ.



章末 4.9 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD に内接する球の中心を O とする. 解

- (1) 四面体 ABCD の体積  $V$  を求めよ.
- (2) 四面体 OBCD の体積  $V'$  を求めよ.
- (3) 球の半径  $r$  を求めよ.



ヒント

- 6  $\sin B$  の値から  $B$  が 2 つ求められる.
- 7  $\angle B = \theta$  において,  $AC^2$  を 2 通りの式で表す.
- 8 (2) 四面体 BFPQ の体積を 2 通りの方法で計算する.
- 9 (2)  $V = 4V'$
- (3)  $\triangle BCD$  の面積  $\times r = 3V'$

## 4.4 三角比の表

(練習 4.3 ・ 練習 4.4 ・ 練習 4.12 ・ 問題 4.1)

| $\theta$ | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ | $\theta$ | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ |
|----------|---------------|---------------|---------------|----------|---------------|---------------|---------------|
| 0°       | 0.0000        | 1.0000        | 0.0000        | 45°      | 0.7071        | 0.7071        | 1.0000        |
| 1°       | 0.0175        | 0.9998        | 0.0175        | 46°      | 0.7193        | 0.6947        | 1.0355        |
| 2°       | 0.0349        | 0.9994        | 0.0349        | 47°      | 0.7314        | 0.6820        | 1.0724        |
| 3°       | 0.0523        | 0.9986        | 0.0524        | 48°      | 0.7431        | 0.6691        | 1.1106        |
| 4°       | 0.0698        | 0.9976        | 0.0699        | 49°      | 0.7547        | 0.6561        | 1.1504        |
| 5°       | 0.0872        | 0.9962        | 0.0875        | 50°      | 0.7660        | 0.6428        | 1.1918        |
| 6°       | 0.1045        | 0.9945        | 0.1051        | 51°      | 0.7771        | 0.6293        | 1.2349        |
| 7°       | 0.1219        | 0.9925        | 0.1228        | 52°      | 0.7880        | 0.6157        | 1.2799        |
| 8°       | 0.1392        | 0.9903        | 0.1405        | 53°      | 0.7986        | 0.6018        | 1.3270        |
| 9°       | 0.1564        | 0.9877        | 0.1584        | 54°      | 0.8090        | 0.5878        | 1.3764        |
| 10°      | 0.1736        | 0.9848        | 0.1763        | 55°      | 0.8192        | 0.5736        | 1.4281        |
| 11°      | 0.1908        | 0.9816        | 0.1944        | 56°      | 0.8290        | 0.5592        | 1.4826        |
| 12°      | 0.2079        | 0.9781        | 0.2126        | 57°      | 0.8387        | 0.5446        | 1.5399        |
| 13°      | 0.2250        | 0.9744        | 0.2309        | 58°      | 0.8480        | 0.5299        | 1.6003        |
| 14°      | 0.2419        | 0.9703        | 0.2493        | 59°      | 0.8572        | 0.5150        | 1.6643        |
| 15°      | 0.2588        | 0.9659        | 0.2679        | 60°      | 0.8660        | 0.5000        | 1.7321        |
| 16°      | 0.2756        | 0.9613        | 0.2867        | 61°      | 0.8746        | 0.4848        | 1.8040        |
| 17°      | 0.2924        | 0.9563        | 0.3057        | 62°      | 0.8829        | 0.4695        | 1.8807        |
| 18°      | 0.3090        | 0.9511        | 0.3249        | 63°      | 0.8910        | 0.4540        | 1.9626        |
| 19°      | 0.3256        | 0.9455        | 0.3443        | 64°      | 0.8988        | 0.4384        | 2.0503        |
| 20°      | 0.3420        | 0.9397        | 0.3640        | 65°      | 0.9063        | 0.4226        | 2.1445        |
| 21°      | 0.3584        | 0.9336        | 0.3839        | 66°      | 0.9135        | 0.4067        | 2.2460        |
| 22°      | 0.3746        | 0.9272        | 0.4040        | 67°      | 0.9205        | 0.3907        | 2.3559        |
| 23°      | 0.3907        | 0.9205        | 0.4245        | 68°      | 0.9272        | 0.3746        | 2.4751        |
| 24°      | 0.4067        | 0.9135        | 0.4452        | 69°      | 0.9336        | 0.3584        | 2.6051        |
| 25°      | 0.4226        | 0.9063        | 0.4663        | 70°      | 0.9397        | 0.3420        | 2.7475        |
| 26°      | 0.4384        | 0.8988        | 0.4877        | 71°      | 0.9455        | 0.3256        | 2.9042        |
| 27°      | 0.4540        | 0.8910        | 0.5095        | 72°      | 0.9511        | 0.3090        | 3.0777        |
| 28°      | 0.4695        | 0.8829        | 0.5317        | 73°      | 0.9563        | 0.2924        | 3.2709        |
| 29°      | 0.4848        | 0.8746        | 0.5543        | 74°      | 0.9613        | 0.2756        | 3.4874        |
| 30°      | 0.5000        | 0.8660        | 0.5774        | 75°      | 0.9659        | 0.2588        | 3.7321        |
| 31°      | 0.5150        | 0.8572        | 0.6009        | 76°      | 0.9703        | 0.2419        | 4.0108        |
| 32°      | 0.5299        | 0.8480        | 0.6249        | 77°      | 0.9744        | 0.2250        | 4.3315        |
| 33°      | 0.5446        | 0.8387        | 0.6494        | 78°      | 0.9781        | 0.2079        | 4.7046        |
| 34°      | 0.5592        | 0.8290        | 0.6745        | 79°      | 0.9816        | 0.1908        | 5.1446        |
| 35°      | 0.5736        | 0.8192        | 0.7002        | 80°      | 0.9848        | 0.1736        | 5.6713        |
| 36°      | 0.5878        | 0.8090        | 0.7265        | 81°      | 0.9877        | 0.1564        | 6.3138        |
| 37°      | 0.6018        | 0.7986        | 0.7536        | 82°      | 0.9903        | 0.1392        | 7.1154        |
| 38°      | 0.6157        | 0.7880        | 0.7813        | 83°      | 0.9925        | 0.1219        | 8.1443        |
| 39°      | 0.6293        | 0.7771        | 0.8098        | 84°      | 0.9945        | 0.1045        | 9.5144        |
| 40°      | 0.6428        | 0.7660        | 0.8391        | 85°      | 0.9962        | 0.0872        | 11.4301       |
| 41°      | 0.6561        | 0.7547        | 0.8693        | 86°      | 0.9976        | 0.0698        | 14.3007       |
| 42°      | 0.6691        | 0.7431        | 0.9004        | 87°      | 0.9986        | 0.0523        | 19.0811       |
| 43°      | 0.6820        | 0.7314        | 0.9325        | 88°      | 0.9994        | 0.0349        | 28.6363       |
| 44°      | 0.6947        | 0.7193        | 0.9657        | 89°      | 0.9998        | 0.0175        | 57.2900       |
| 45°      | 0.7071        | 0.7071        | 1.0000        | 90°      | 1.0000        | 0.0000        | —             |

## 第 5 章 データの分析

### 5.1 データの分析

#### 5.1.1 データの整理

問題解決や意思決定などのために、ある集団について調査や実験を行い、それによって得られた結果を分析することがある。たとえば、生徒の体力や運動能力の現状を明らかにし、体育やスポーツ活動に関する指導に役立てるという目的をもったとする。このとき、体力テストを行い、50m 走や握力などの記録、所属クラスなどの情報を集めて分析することがある。

運動の記録や所属クラスなどのように、ある特性を表すものを**変量**といい、ある変量の測定値や観測値、調査結果などの集まりを**データ**という。この章では、ある集団におけるある変量のデータがあるとき、その集団がどのような特性をもっているかを知るための方法を学ぼう。

#### A》度数分布表

次のデータは、東京の 2018 年 4 月の日ごとの最高気温である。[最高気温のデータ]

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 21.9 | 24.5 | 23.4 | 26.2 | 15.3 | 22.4 | 21.8 | 16.8 | 19.9 | 19.1 |
| 21.9 | 25.9 | 20.9 | 18.8 | 22.1 | 20.0 | 15.0 | 16.0 | 22.2 | 26.4 |
| 26.0 | 28.3 | 18.7 | 21.3 | 22.5 | 25.0 | 22.0 | 26.1 | 25.6 | 25.7 |

(気象庁ホームページより作成，単位は℃)

データの散らばりの様子を**分布**という。

上のデータは、右のような**度数分布表**に整理することができる。データを度数分布表に整理すると、その傾向がわかりやすくなる。

度数分布表において、区切られた各区間を**階級**、区間の幅を**階級の幅**、各階級に含まれる値の個数を**度数**という。また、各階級の真ん中の値を**階級値**という。

| 最高気温の度数分布表  |        |
|-------------|--------|
| 階級 (℃)      | 度数 (日) |
| 15 以上 18 未満 | 4      |
| 18 ～ 21     | 6      |
| 21 ～ 24     | 10     |
| 24 ～ 27     | 9      |
| 27 ～ 30     | 1      |
| 計           | 30     |

[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

前ページの度数分布表において，階級の幅は  $3^{\circ}\text{C}$  であり， $18^{\circ}\text{C}$  以上  $21^{\circ}\text{C}$  未満の階級値は  $19.5^{\circ}\text{C}$  である.

$$\leftarrow (18+21) \div 2 = 19.5$$

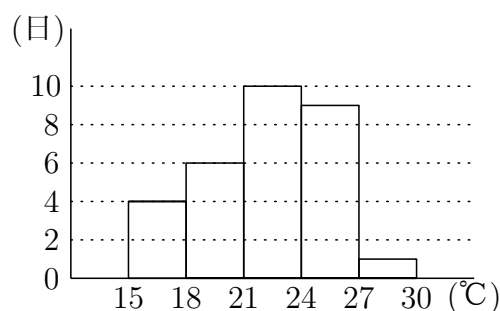
度数分布表の階級の幅は，データ全体の傾向がよく表されるように，適切な大きさを選ぶことが大切である.

**練習 5.1** 前ページの度数分布表について，次の問いに答えよ. 解

- (1) 度数が 9 である階級の階級値を求めよ.
- (2) 最高気温が  $21^{\circ}\text{C}$  以上の日は何日あるか.
- (3) 最高気温が低い方から数えて 12 番目の日が含まれる階級をいえ.

## B》ヒストグラム

度数分布表を，柱状のグラフで表したものをヒストグラムという. 度数分布表をヒストグラムで表すと，データの分布が，さらに見やすくなる. 右の図は，前ページに載せた最高気温のデータの度数分布表をヒストグラムで表したものである.



**練習 5.2** 次のデータは，ある高校の 1 年生女子 20 人の，ハンドボール投げの記録である. 解

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 16 | 13 | 14 | 13 | 14 | 11 | 14 | 17 | 16 | 15 |
| 18 | 16 | 17 | 15 | 17 | 16 | 21 | 16 | 20 | 19 |

(単位は m)

- (1) 11m 以上 13m 未満を階級の 1 つとして，どの階級の幅も 2m である度数分布表を作れ.
- (2) (1) で作った度数分布表をもとにして，ヒストグラムをかけ.

### 5.1.2 データの代表値

データ全体の特徴を適当な1つの数値で表せると便利である。

そのような値をデータの代表値という。

ここでは、データの代表値として、平均値、最頻値、中央値について調べよう。

#### A》平均値

日常において、「平均点」「平均気温」などの言葉を使うことがある。これらは平均値と呼ばれる身近な代表値である。

#### 例 5.1 データの平均値

S

次のデータは、ある生徒の5種類のテストの得点である。

72, 65, 88, 45, 76 (点)

このデータの平均値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}(72 + 65 + 88 + 45 + 76) &= \frac{1}{5} \times 346 \\ &= 69.2 \text{ (点)}\end{aligned}$$

データにおける測定値や観測値の個数を、データの大きさという。たとえば、例 5.1 のデータの大きさは5である。

変量  $x$  についてのあるデータの大きさが  $n$  であるとい、このデータの個々の値を

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

で表すことがある。

**注意** データの値を並べたとき、 $k$  番目の値を  $x_k$  と表している。

一般に、変量  $x$  について、大きさが  $n$  のデータの値の総和を  $n$  で割った値を、このデータの平均値といい、 $\bar{x}$  で表す。

### 平均値

変数  $x$  のデータの値が  $x_1, x_2, \dots, x_n$  であるとき, このデータの平均値  $\bar{x}$  は

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

**練習 5.3** 次のデータは, ある生徒のある1週間における1日あたりの睡眠時間である. このデータの平均値を求めよ. 解

400, 410, 420, 390, 430, 450, 440 (分)

### B》最頻値

データにおいて, もっとも個数の多い値を, そのデータの**最頻値**または**モード**という. データが度数分布表に整理されているときは, 度数が最も大きい階級の階級の階級値を最頻値とする.

### 例 5.2 データの最頻値

S

下の表は, 成人男子 100 人について, 靴のサイズを調べた結果である.

| サイズ (cm) | 24.0 | 24.5 | 25.0 | 25.5 | 26.0 | 26.5 | 27.0 | 計   |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| 人数       | 3    | 11   | 18   | 23   | 32   | 10   | 3    | 100 |

このデータの最頻値は 26.0 (cm)

例 5.2 のデータから, 最も売れると思われる靴のサイズは 26.0cm である. 商品の仕入れの計画を立てる場合などには, 代表値として最頻値が適しているといえる.

**練習 5.4** 167 ページの度数分布表において, 最頻値を求めよ. 解

## C》中央値

データを値の大きさの順に並べたとき、中央に位置にくる値を中央値またはメジアンという。データの大きさが偶数のときは、中央に2つの値が並ぶが、その場合は2つの値の平均値をとって中央値とする。

## 例 5.3 データの中央値

S

ある商品の価格について、A市とB市で調査した。

(1) A市では5店舗で調査して、次のデータが得られた。

260, 280, 280, 300, 270 (円)  
このデータを小さい順に並べると  
260, 270, 280, 280, 300  
よって、このデータの中央値は  
280 (円)

データの大きさが奇数  
小 ← データの値 → 大  
○ ○ ● ○ ○  
↑  
中央値

(2) B市では6店舗で調査して、次のデータが得られた。

280, 280, 260, 100, 280, 270 (円)  
このデータを小さい順に並べると  
100, 260, 270, 280, 280, 280  
よって、このデータの中央値は  
 $\frac{270 + 280}{2} = 275$  (円)

データの大きさが偶数  
小 ← データの値 → 大  
○ ○ ● ● ○ ○  
↑ ↑  
中央の2つの値の  
平均が中央値

例 5.3(2) のデータの平均値は 245 円で、100 円を除くすべての価格より安く、データの代表値として適切とはいえない。データの中に極端に離れた値がある場合、その影響を受けにくい中央値が代表値として適していることがある。



練習 5.5 次のデータは、8 人の生徒の右手の握力を測った結果である。その中央値を求めよ。 解

38, 56, 43, 41, 35, 49, 51, 31 (kg)

## 研究 データの分布と代表値

データの分布と、平均値と中央値の大小関係について考えてみよう。

[データの分布と代表値]

### [1] の場合

分布が左右対称の場合であり、平均値と中央値は一致する。

### [2] の場合

分布が左に偏っている場合であり、平均値と中央値の大小関係は次のようになる。

中央値 < 平均値

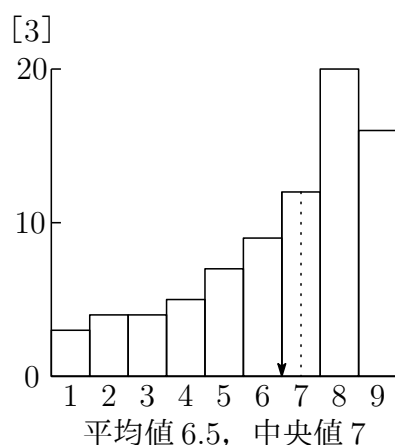
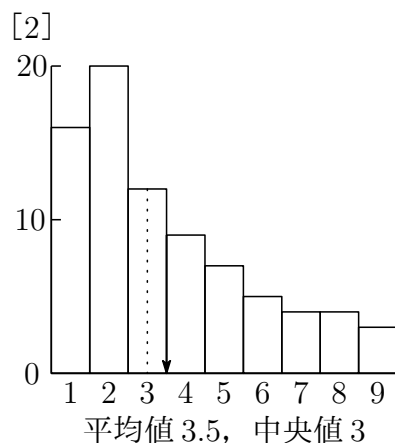
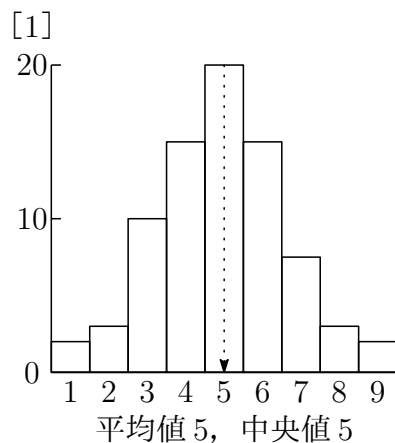
### [3] の場合

分布が右に偏っている場合であり、平均値と中央値の大小関係は次のようになる。

平均値 < 中央値

[2] や [3] のように分布が偏っている場合は、平均値を代表値とすることは必ずしも適切ではない。

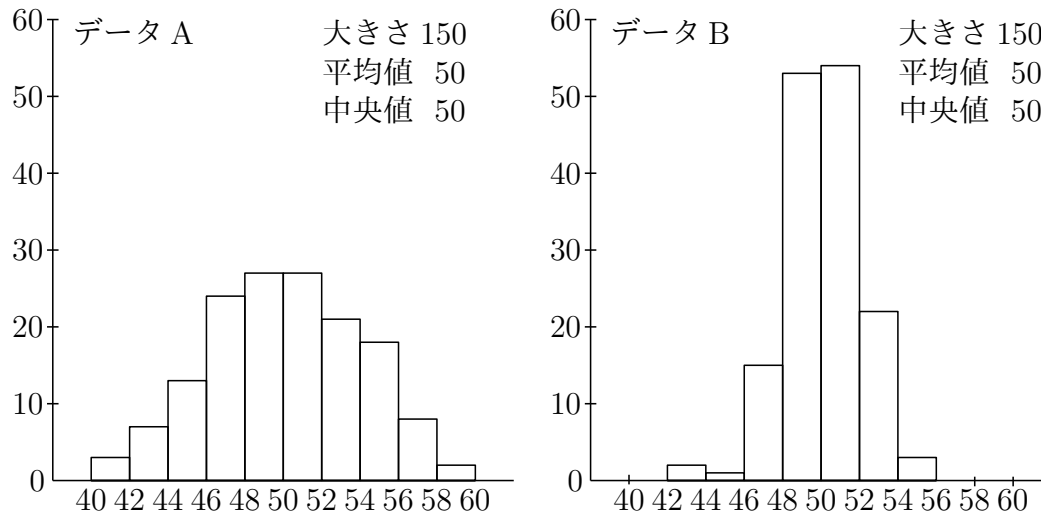
たとえば、総務省統計局がまとめた2018年の2人以上の世帯の貯蓄高のデータは、貯蓄の低い方に偏った、[2] に似た分布をしている。平均値は1752万円、中央値は1036万円であり、平均値以下の世帯は全体の7割近くを占める。よって、この場合、平均値を代表値とすることは、必ずしも適切でないと考えられる。



### 5.1.3 データの散らばりと四分位数

下の図は、データの大きさ、平均値、中央値がすべて等しい2つのデータ A, B のヒストグラムである.

[データ A, データ B]



データの平均値、中央値が等しくても、その散らばり具合は異なることがあり、代表値だけではデータの分布状態をとらえきれない。

ここでは、データの散らばりの度合いを表す数値や図について学ぼう。

#### A》範囲

データの散らばり度合いを表す値として、データの最大値から最小値を引いた差が考えられる。この差をデータの**範囲**という。

#### 例 5.4 データの範囲

[S]

次のデータは、ある年の A 市における月ごとの降水日数である。

7, 4, 9, 7, 10, 13, 14, 7, 4, 12, 13, 5 (日)

このデータの範囲は  $14 - 4 = 10$  (日)

データの範囲が大きいほど、散らばりの度合いが大きいと考えられる。

**練習 5.6** 次のデータは、例 5.4 と同じ年の B 市における月ごとの降水日数である。このデータの範囲を求めよ。また、データの散らばりの度合いが大きいのは A 市、B 市のどちらと考えられるか。得られた範囲によって比較せよ。 **[解]**

19, 16, 12, 11, 6, 8, 21, 13, 10, 14, 18, 22 (日)

## B》四分位数

データの中に極端に離れた値があるかどうかによって、データの範囲は大きく変わる。そこで、データの中央値の近くの値を取り出して散らばりの度合いを比較する方法について調べよう。

データの値の大きさの順に並べたとき、4等分する位置にくる値を四分位数という。四分位数は、小さい方から順に第1四分位数、第2四分位数、第3四分位数といい、順に  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$  で表す<sup>1</sup>。

四分位数は、具体的には次のように定める。

第2四分位数  $Q_2$  はデータの中央値である。

データを値の大きさの順に左から並べ、個数が同じになるように半分に分ける。

ただし、データの大きさが奇数のときは、中央にくる値を除いて2つに分ける。左半分のデータを下位のデータ、右半分のデータを上位のデータと呼ぶことにすると、第1四分位数  $Q_1$  は下位のデータの中央値であり、第3四分位数  $Q_3$  は上位のデータの中央値である。

## データの大きさが奇数

小 ← データの値 → 大

下位のデータ

上位のデータ

○○...○○ ○ ○○...○○

## データの大きさが偶数

小 ← データの値 → 大

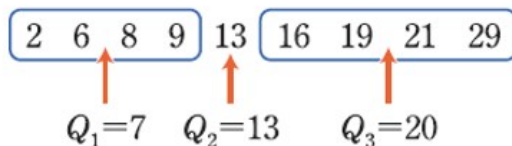
下位のデータ

上位のデータ

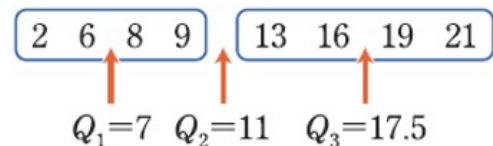
○○...○○ ○○...○○

[四分位数]

## データの大きさが9のとき



## データの大きさが8のとき



注意 四分位数は、他にもいくつかの定め方がある。以下、本書では上の方法で定めるものとする。

<sup>1</sup>四分位数を意味する英語は quartile である。

例 5.5 次のデータは、10 人の生徒に 100 点満点のテストを行った結果を、値の大きさの順に並べたものである。 S

21, 30, 36, 38, 41, 45, 52, 58, 60, 72

$$\text{第 2 四分位数は } Q_2 = \frac{41 + 45}{2} = 43 \text{ (点)}$$

$$\text{第 1 四分位数は } Q_1 = 36 \text{ (点)}$$

$$\text{第 3 四分位数は } Q_3 = 58 \text{ (点)}$$

データの第 3 四分位数  $Q_3$  から第 1 四分位数  $Q_1$  を引いた差  $Q_3 - Q_1$  を四分位範囲という。

四分位範囲は、データを値の大きさの順に並べたときの、中央に並ぶ約 50% のデータの散らばりの度合いを表している。よって、四分位範囲は、データの中に極端に離れた値がある場合でも、その影響を受けにくいといえる。データの値が中央値の周りに集中しているほど、四分位範囲は小さくなる傾向にある。すなわち、データの四分位範囲が大きいほど、散らばりの度合いが大きいと考えられる。

補足 四分位範囲を 2 で割った値を四分位偏差という。

例 5.6 例 5.5 のデータの四分位範囲を求める。 S

$$\text{四分位範囲は } Q_3 - Q_1 = 58 - 36 = 22 \text{ (点)}$$

練習 5.7 次のデータ A, B のそれぞれについて、四分位範囲を求めよ。また、データの散らばりの度合いが大きいのは A, B のどちらと考えられるか。得られた四分位範囲によって比較せよ。 解

A 21, 29, 32, 36, 38, 40, 49, 53, 55, 68, 80

B 25, 31, 39, 42, 45, 46, 50, 53, 54, 65, 80

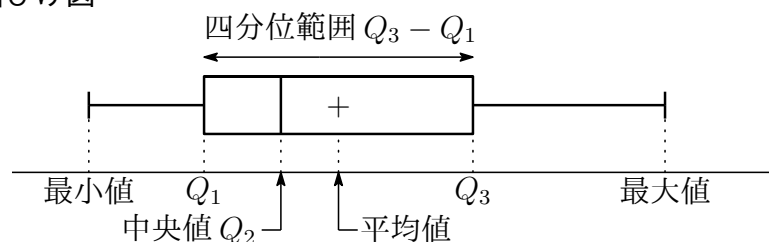
深化 5.1 データの散らばり具合を知ることのよさについて考えてみよう。たとえば、173 ページのデータ A, B が各店で手作りをするパンのチェーン店 A, B で作られた同じ商品 150 個の重さをヒストグラムにまとめたものとする。このとき、どちらのお店で買いたいと考えるか。理由もあわせて答えてみよう。 解

## C》箱ひげ図

データの分布を見るための図に箱ひげ図と呼ばれるものがある。

箱ひげ図はデータの最小値，第1四分位数，中央値，第3四分位数，最大値を，箱と線（ひげ）で表現する図である．箱の長さは四分位範囲を表す．なお，箱ひげ図に平均値を記入することもある．

箱ひげ図

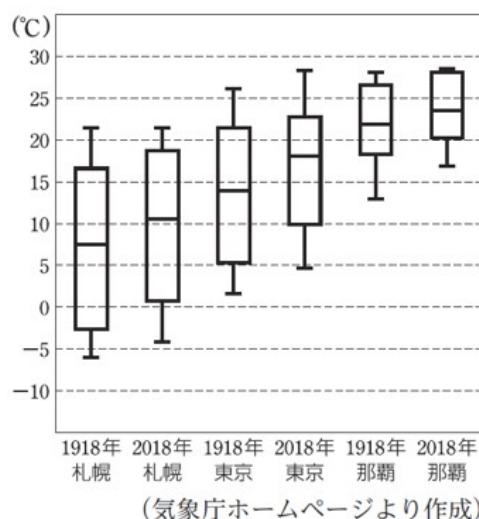


## 例 5.7 箱ひげ図によるデータの分析

S

右の図は，1918年と2018年の札幌，東京，那覇<sup>さつぱろ</sup>における，月ごとの平均気温のデータを箱ひげ図に表したものである．この図から，たとえば，次のようなことが読み取れる．

1. 那覇は1年を通して暖かく，寒暖の差が小さい，札幌は年間の寒暖の差が大きい．
2. どの都市も，1918年より2018年の方が気温が高めの傾向にある．



[平均気温のデータ]

補足 箱ひげ図は，例 5.7 のように縦に表示することもある．

**練習 5.8** 次のデータは、10 人の生徒に 100 点満点の数学、英語、国語のテストを行った結果である。単位は点である。 解

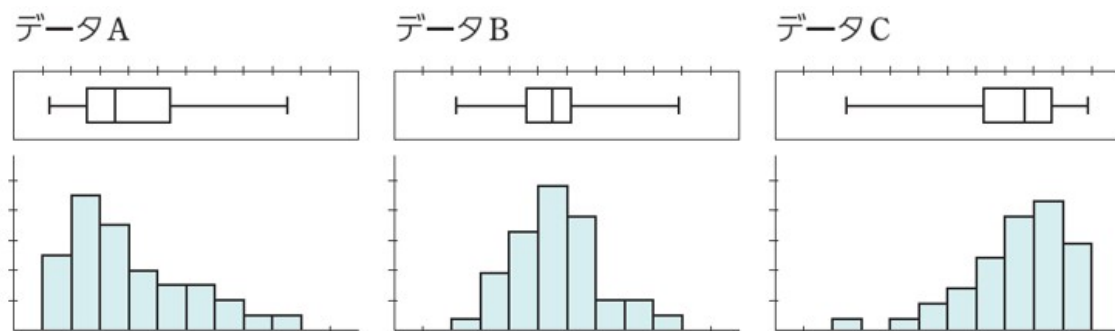
数学 68, 35, 86, 63, 30, 91, 50, 63, 46, 58  
 英語 75, 65, 90, 78, 52, 88, 70, 75, 59, 82  
 国語 63, 60, 73, 75, 58, 79, 68, 70, 66, 80

- (1) これらのデータの箱ひげ図を並べてかけ。
- (2) データの散らばりの度合いが最も大きいのは、数学、英語、国語のうちどれと考えられるか。(1) で得られた箱ひげ図を用いて比較せよ。

#### D》箱ひげ図とヒストグラム

下の図は、あるデータ A, B, C のヒストグラムと箱ひげ図との対応である。

[データ A, データ B, データ C]



ヒストグラムの山の位置と、箱ひげ図の位置がだいたい対応していることがわかる。また、ヒストグラムのすそにあたる部分が、箱ひげ図のひげに対応している。ヒストグラムのすそが右に伸びていけば、箱ひげ図のひげも右に伸びる。

箱ひげ図では、ヒストグラムほどにはデータの分布が詳しく表現されないが、大まかな様子はわかる。

## E》外れ値

データの中に、他の値から極端に離れた値が含まれることがある。そのような値を外れ値という。

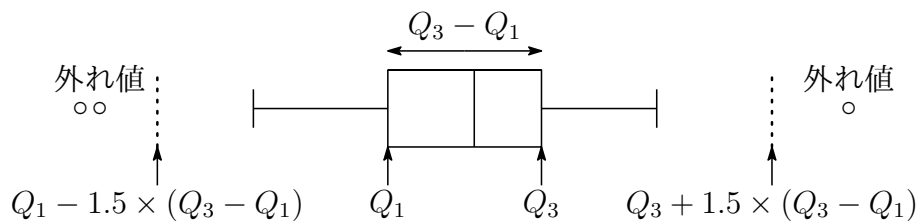
外れ値の基準は複数あるが、たとえば、次のような値を外れ値とする。

(第1四分位数  $- 1.5 \times$  四分位範囲) 以下の値

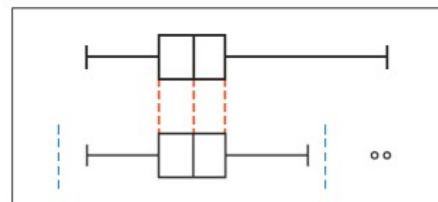
(第3四分位数  $+ 1.5 \times$  四分位範囲) 以上の値

外れ値がある場合、次の図のような箱ひげ図が用いられることがある。

外れ値は○で示している。また、箱ひげ図の左右のひげは、データから外れ値を除いたときの最小値または最大値まで引いている。

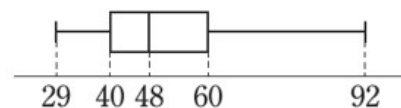


**注意** 外れ値を○で示す箱ひげ図をかく場合でも、四分位数は外れ値を除かないすべてのデータの四分位数であり、その値にもとづいて箱をかく。



外れ値は、測定ミスや入力ミスによる異常な値であることもある。一方で、外れ値の背景を探ることにより、問題発見があったり、問題解決の手がかりが得られたりすることもある。たとえば、販売員の販売成績を調べたとき、並外れて成績がよい販売員がいたら、その販売員の工夫を探ることで、全体の販売成績を上げる対策を見いだせる可能性がある。

**練習 5.9** 右の図はあるデータの箱ひげ図である。このデータの最大値92，最小値29は外れ値であるかを，四分位範囲を利用して調べよ。 解



### 5.1.4 分散と標準偏差

四分位範囲は、データを値の大きさの順に並べたとき、4等分する位置にくる値を用いて散らばりの度合いを表すものであった。ここでは、データのすべての値を用いて散らばりの度合いを表す値について学ぼう。

#### A》分散，標準偏差

データの平均値の周りに、データの各値がどのように分布しているかを示す値として、まず各値と平均値との差を考えてみる。

変量  $x$  のデータの値を  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 、その平均値を  $\bar{x}$  とするとき、各値と平均値との差を考えてみる。

変量  $x$  のデータの値から平均値を引いた差  $x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$  を、それぞれ平均値からの偏差といい、 $x - \bar{x}$  で表す。偏差の総和は

$$\begin{aligned} & (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n\bar{x} \\ &= 0 \end{aligned} \quad \leftarrow \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

になるから、偏差の平均値も 0 である。

よって、偏差の平均値では、散らばりの度合いを表すことはできない。そこで、偏差をそのまま用いずに、偏差の 2 乗の平均値を考えよう。

#### 例 5.8 偏差の 2 乗の平均値

S

変量  $x$  のデータの値が、下の表で与えられている。ただし、平均値  $\bar{x}$  は、

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \times 344 = 43$$

|                   |    |     |    |    |    |    |    |    |       |
|-------------------|----|-----|----|----|----|----|----|----|-------|
| $x$               | 38 | 53  | 43 | 41 | 35 | 46 | 50 | 38 | 計 344 |
| $(x - \bar{x})^2$ | 25 | 100 | 0  | 4  | 64 | 9  | 49 | 25 | 計 276 |

よって、このデータの偏差の 2 乗の平均値は

$$\frac{1}{8} \times 276 = 34.5$$

終

データにおいて、偏差の2乗の平均値を分散という。さらに、分散の平方根を標準偏差といい、 $s$ で表す。このとき、分散は $s^2$ で表される。

#### 分散と標準偏差

変量  $x$  のデータの値が  $x_1, x_2, \dots, x_n$  で、その平均値が  $\bar{x}$  のとき

$$\text{分散} \quad s^2 = \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \}$$

$$\text{標準偏差} \quad s = \sqrt{\text{分散}}$$

**注意** 標準偏差の単位は、変量  $x$  の単位と同じである。

データの値が平均値の周りに集中しているほど、それぞれの偏差の絶対値は小さくなり、分散、標準偏差も小さくなる傾向にある。たとえば、173 ページでヒストグラムに表した2つのデータ A, B では、データの値から標準偏差を計算すると、それぞれ4, 2である。このことから、データ Aの方がデータ Bより散らばりの度合いが大きいと考えられる。

#### 例 5.9 データの分散、標準偏差

**S**

10人の漢字テストの得点  $x$  が、下の表で与えられている。ただし、平均点  $\bar{x}$  は、

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \times 70 = 7$$

である。 $x$  の単位は点である。

|                   |   |    |   |    |    |   |   |   |    |    |      |
|-------------------|---|----|---|----|----|---|---|---|----|----|------|
| $x$               | 9 | 3  | 4 | 10 | 10 | 5 | 7 | 9 | 10 | 3  | 計 70 |
| $(x - \bar{x})^2$ | 4 | 16 | 9 | 9  | 9  | 4 | 0 | 4 | 9  | 16 | 計 80 |

$$\text{よって、分散 } s^2 \quad s^2 = \frac{1}{10} \times 80 = 8$$

$$\text{標準偏差 } s \text{ は} \quad s = \sqrt{8} \approx 2.8 \text{ (点)}$$

**練習 5.10** 次のデータは、10人の生徒に計算テストを行った結果である。このデータの分散、標準偏差を求めよ。 **解**

$$6, 10, 7, 7, 5, 4, 9, 10, 5, 7 \text{ (点)}$$

## B 》分散と平均値の関係式

前ページで示した分散を表す式を変形してみよう.

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 \} \\
 &= \frac{1}{n} \{ (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n(\bar{x})^2 \} \\
 &= \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2\bar{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}_{\bar{x}} + (\bar{x})^2 \\
 &= \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - (\bar{x})^2
 \end{aligned}$$

変量  $x$  の  $n$  個のデータが  $x_1, x_2, \dots, x_n$  のとき,  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$  を変量  $x^2$  の  $n$  個のデータと考えるとする. このとき, 次のことがいえる.

$$(x \text{ のデータの分散}) = (x^2 \text{ のデータの平均値}) - (x \text{ のデータの平均値})^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

注意 変量  $x^2$  のデータの平均値  $\overline{x^2}$  と書くと, 上の式は, 次のように書ける.

$$s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

関係式 ① を用いて, データの分散を求めることもできる.

例 5.10 関係式 ① を用いて, 前ページの例 5.9 のデータの分散を求める. S

|       |    |   |    |     |     |    |    |    |     |   |       |
|-------|----|---|----|-----|-----|----|----|----|-----|---|-------|
| $x$   | 9  | 3 | 4  | 10  | 10  | 5  | 7  | 9  | 10  | 3 | 計 70  |
| $x^2$ | 81 | 9 | 16 | 100 | 100 | 25 | 49 | 81 | 100 | 9 | 計 570 |

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \times 70 = 7, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{10} \times 570 = 57$$

$$\text{よって, 分散 } s^2 \text{ は } s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 57 - 7^2 = 8$$

練習 5.11 次のデータについて, 分散, 標準偏差を求めよ. 解

5, 3, 6, 8, 5, 8, 5, 4, 6, 5

**研究** 変量の変換

データの各値すべてに同じ数を足したりすべてに同じ数を掛けたとき、平均値、分散、標準偏差がどのように変化するかを考えてみよう。

データの各値すべてに  $b$  を足すと、データの各値も平均値も  $b$  だけ増加するから、データの各値から平均値を引いた差、すなわち偏差は変わらない。したがって、分散と標準偏差は変わらない。

また、データの各値すべてに  $a$  を掛けると、データの各値も平均値も  $a$  倍になるから、データの各値の偏差も  $a$  倍になる。したがって、分散は  $a^2$  倍になり、標準偏差は  $|a|$  倍になる。

一般に、次のことが成り立つ。

**変量の変換**

$a, b$  は定数とする。変量  $x$  のデータから  $y = ax + b$  によって新しい変量  $y$  のデータが得られるとき、 $x, y$  のデータの平均値を  $\bar{x}, \bar{y}$ 、分散  $s_x^2, s_y^2$ 、標準偏差を  $s_x, s_y$  とすると

$$\bar{y} = a\bar{x} + b, \quad s_y^2 = a^2 s_x^2, \quad s_y = |a| s_x$$

**Ex 5.1** 変量  $x$  のデータの平均値  $\bar{x}$  が 37、分散  $s_x^2$  が 25 であるとする。このとき、 $y = 2x + 10$  によって得られる新しい変量  $y$  のデータについて

$$\text{平均値 } \bar{y} = 2 \times 37 + 10 = 84, \quad \text{分散 } s_y^2 = 2^2 \times 25 = 100$$

**演習 5.1** ある都市の日ごとの最高気温を摂氏度 ( $^{\circ}\text{C}$ ) で計測し、20 日分のデータを得た。その平均値は  $15.0^{\circ}\text{C}$ 、分散は 9.0 であった。このデータを華氏度 ( $^{\circ}\text{F}$ ) に変更したときの、平均値、分散、標準偏差を求めよ。ただし摂氏度が  $x^{\circ}\text{C}$  のときの華氏度を  $y^{\circ}\text{F}$  とすると、 $x$  と  $y$  には次の関係がある。 解

$$y = 1.8x + 32$$

変量の変換によって、平均値や分散を求める計算が簡単になることがある。

**Ex 5.2** 5人の身長データ

176, 170, 167, 179, 168

の平均値  $\bar{x}$  と分散  $s_x^2$  を求めてみよう.  $x$  の単位は cm である.  $x_0 = 170$  として, 新しい変量  $u$  を  $u = x - x_0$  で定める. 変量  $u$  のデータ, 変量  $u^2$  のデータの値は, それぞれ次の表のようになる.

|       |    |   |    |    |    |       |
|-------|----|---|----|----|----|-------|
| $u$   | 6  | 0 | -3 | 9  | -2 | 計 10  |
| $u^2$ | 36 | 0 | 9  | 81 | 4  | 計 130 |

$$\bar{u} = \frac{1}{5} \times 10 = 2, \quad \overline{u^2} = \frac{1}{5} \times 130 = 26$$

よって,  $u$  のデータの分散  $s_u^2$  は

$$s_u^2 = \overline{u^2} - (\bar{u})^2 = 26 - 2^2 = 22$$

$x = x_0 + u$  より,  $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{u}$ ,  $s_x^2 = s_u^2$  であるから

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_0 + \bar{u} = 170 + 2 = 172 \text{ (cm)} \\ s_x^2 &= s_u^2 = 22 \end{aligned}$$

Ex5.2 では,  $x_0 = 170$  として  $x - x_0$  のデータを考えることにより, 変量  $x$  のデータの平均値や分散を求めている. この  $x_0$  を仮平均という.

**演習 5.2** 変量  $x$  のデータが次のように与えられている.

750, 740, 720, 770, 750, 740

いま,  $c = 10$ ,  $x_0 = 740$ ,  $u = \frac{x - x_0}{c}$  として新しい変量  $u$  を作る. 解

- (1) 変量  $u$  のデータの平均値と標準偏差を求めよ.
- (2) 変量  $x$  のデータの平均値と標準偏差を求めよ.

### 5.1.5 2つの変量の間関係

身長と体重の関係や、2種類のテストの結果の関係など、2つの変量の間について考えることがある。

ここでは、2つの変量の間関係について調べる方法を学ぼう。

#### A》散布図

下の表は、ある高校の1年生男子20人について、2つの変量  $x$ ,  $y$  からなるデータである。 $x$  は身長,  $y$  は体重であり、たとえば、①の人は、身長168.4cm, 体重59.0kgである。

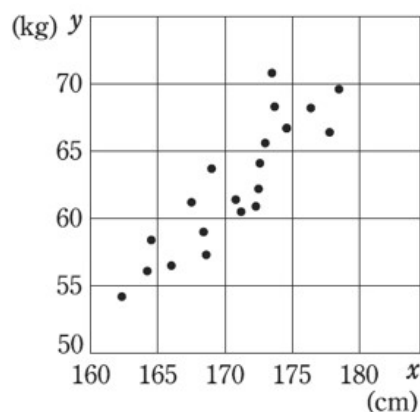
[身長と体重のデータ]

|     | ①     | ②     | ③     | ④     | ⑤     | ⑥     | ⑦     | ⑧     | ⑨     | ⑩     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x$ | 168.4 | 164.5 | 171.2 | 173.0 | 162.3 | 170.8 | 172.5 | 164.2 | 169.0 | 168.6 |
| $y$ | 59.0  | 58.4  | 60.5  | 65.6  | 54.2  | 61.4  | 62.2  | 56.1  | 63.7  | 57.3  |

|     | ⑪     | ⑫     | ⑬     | ⑭     | ⑮     | ⑯     | ⑰     | ⑱     | ⑲     | ⑳     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x$ | 172.6 | 166.0 | 173.7 | 176.4 | 178.5 | 167.5 | 177.8 | 174.6 | 172.3 | 173.5 |
| $y$ | 64.1  | 56.5  | 68.3  | 68.2  | 69.6  | 61.2  | 66.4  | 66.7  | 60.9  | 70.8  |

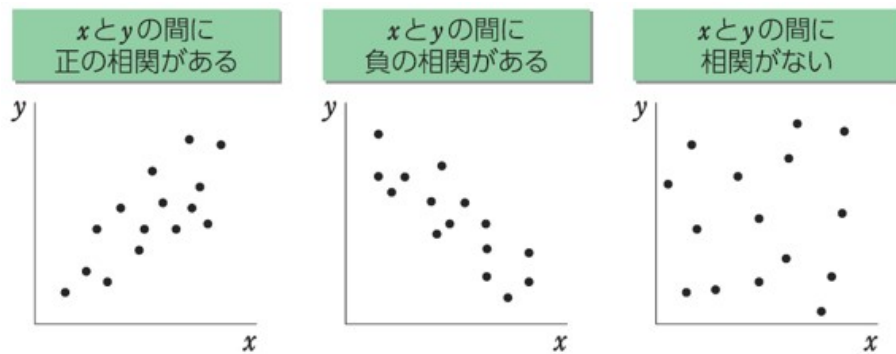
上の表を見ても、身長と体重の関係はわかりにくい。そこで、身長と体重の値を座標とする点を取り、右の図のように視覚化すると、身長が増えると体重も増える傾向にあることがわかる。この図のように、2つの変量からなるデータを点として平面上に図示したものを**散布図**という。散布図をかくと、データにおける2つの変量の間関係性を視覚的にとらえることができる。



## B 》正の相関，負の相関

2つの変量からなるデータにおいて，一方が増えると他方も増える傾向がみられるとき，2つの変量の間には正の相関があるという．また，一方が増えると他方が減る傾向がみられるとき，2つの変量の間には負の相関があるという．どちらの傾向もみられないときは，2つの変量の間には相関がないという．

補足 正の相関関係がある，負の相関関係がある，相関関係がない，ということもある．



2つの変量の間には正の相関あるいは負の相関があるとき，散布図における点の分布が1つの直線に接近しているほど相関が強いといい，散らばっているほど相関が弱いという．

練習 5.12 下の表は，角地点の緯度  $x$ (度) と 2018 年の平均気温  $y$ ( $^{\circ}\text{C}$ ) を調べた結果である。 解

| 地点  | 札幌   | 青森   | 仙台   | 東京   | 長野   | 大阪   | 高知   | 鹿児島  |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $x$ | 43.1 | 40.8 | 38.3 | 35.7 | 36.7 | 34.7 | 33.6 | 31.6 |
| $y$ | 8.2  | 9.6  | 12.5 | 17.0 | 13.1 | 16.9 | 17.3 | 18.5 |

(気象庁のホームページより作成)

- (1) 2つの変量  $x$ ,  $y$  の散布図をかけ．
- (2)  $x$  と  $y$  の間には，正，負どちらの相関があると考えられるか．

## C》相関係数

184 ページのデータでは,  $x$  と  $y$  の間に正の相関があると考えられる. このデータの散布図に, 身長  $x$  の平均値  $\bar{x}$ , 体重  $y$  の平均値  $\bar{y}$  を記すと右の図のようになり, 点の多くが色をつけた部分にある様子がわかる.

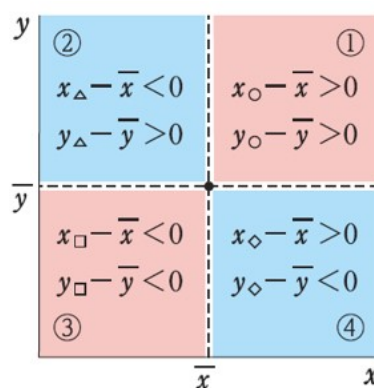
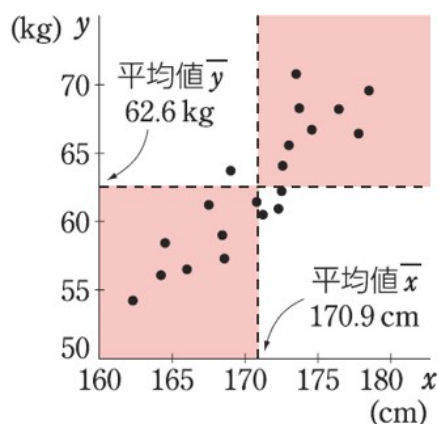
2つの変量  $x, y$  からなるデータが与えられたとき, データの値から,  $x$  と  $y$  の間の相関を調べる方法を考えてみよう.

2つ変量  $x, y$  からなるデータとして  $n$  個の値の組

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

が得られているとする.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  の平均値を  $\bar{x}$ ,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  の平均値を  $\bar{y}$  とし,  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  を境界として, データの分布図を右の図のように ①, ②, ③, ④ の領域に分ける.



このとき, データの散布図について, 次のことが考えられる. 点の多くが ① と ③ にあるとき,  $x$  と  $y$  の間に正の相関がある. 点の多くが ② と ④ にあるとき,  $x$  と  $y$  の間に負の相関がある. ここで, たとえば, 点  $(x, y)$  について考えてみると,

$$(x, y) \text{ が ① または ③ にあるとき} \quad (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) > 0,$$

$$(x, y) \text{ が ② または ④ にあるとき} \quad (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) < 0$$

である. したがって,  $x$  と  $y$  の間の相関を調べるのに,  $x$  の偏差と  $y$  の偏差の積

$$(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}), (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}), \dots, (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})$$

の値を利用することが考えられる.

前ページで考えた  $x$  の偏差と  $y$  の偏差の積について、その平均値

$$\frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\}$$

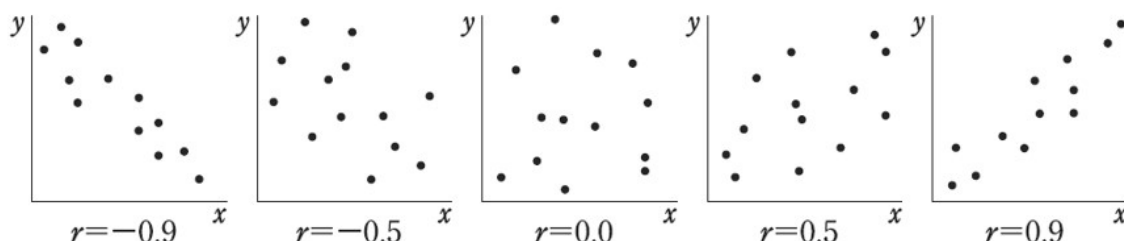
を  $x$  と  $y$  の共分散といい、 $s_{xy}$  で表す.  $x$  と  $y$  の間に、正の相関があるとき共分散は正となり、負の相関があるとき共分散は負となる.

相関の強弱をみるために、共分散  $s_{xy}$  を、 $x$  の標準偏差  $s_x$  と  $y$  の標準偏差  $s_y$  の積  $s_x s_y$  で割った値を考える. この値を  $x$  と  $y$  の相関係数といい、 $r$  で表す.

相関係数

$$\begin{aligned} r &= \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \\ &= \frac{\frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\}}{\sqrt{\frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\}} \sqrt{\frac{1}{n}\{(y_1 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2\}}} \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sqrt{\{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\} \{(y_1 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2\}}} \end{aligned}$$

相関係数  $r$  については、 $-1 \leq r \leq 1$  であることが知られている.  $r$  の値は、正の相関が強いほど 1 に近づき、負の相関が強いほど  $-1$  に近づく. また、相関がないとき、 $r$  の値は 0 に近い値をとる.



**練習 5.13** 184 ページのデータについて、 $x$  の標準偏差は 4.40,  $y$  の標準偏差は 4.71,  $x$  と  $y$  の共分散は 18.22 である. これらの数値を用いて、 $x$  と  $y$  の相関係数を計算せよ. ただし、小数第 3 位を四捨五入せよ. 解

例 5.11 次の表は、同じ種類の5本の木について、根もとの太さ  $x$  (cm) と高さ  $y$  (m) を測定した結果である。 S

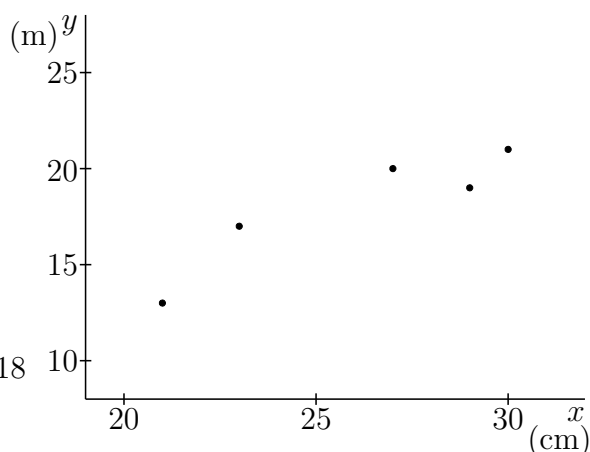
$x$  と  $y$  の相関係数  $r$  を求めよう。

|     | ①  | ②  | ③  | ④  | ⑤  |
|-----|----|----|----|----|----|
| $x$ | 21 | 27 | 29 | 23 | 30 |
| $y$ | 13 | 20 | 19 | 17 | 21 |

散布図は右の図のようになる。

$x$ ,  $y$  のデータの平均値は

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \times 130 = 26, \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \times 90 = 18$$



|   | $x$ | $y$ | $x - \bar{x}$ | $y - \bar{y}$ | $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(y - \bar{y})^2$ |
|---|-----|-----|---------------|---------------|------------------------------|-------------------|-------------------|
| ① | 21  | 13  | -5            | -5            | 25                           | 25                | 25                |
| ② | 27  | 20  | 1             | 2             | 2                            | 1                 | 4                 |
| ③ | 29  | 19  | 3             | 1             | 3                            | 9                 | 1                 |
| ④ | 23  | 17  | -3            | -1            | 3                            | 9                 | 1                 |
| ⑤ | 30  | 21  | 4             | 3             | 12                           | 16                | 9                 |
| 計 | 130 | 90  |               |               | 45                           | 60                | 40                |

上の表から、相関係数  $r$  は  $r = \frac{45}{\sqrt{60 \times 40}}$

例 5.11 では、相関係数が正で1に近いから、 $x$  と  $y$  には強い正の相関があると考えられる。

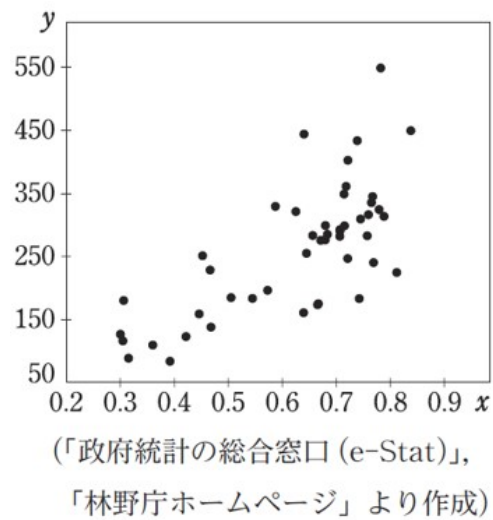
練習 5.14 下の表は、6人の生徒に10点満点の2種類のテストA, Bを行った結果である。A, Bの得点の相関係数を求めよ。また、これらの間にはどのような相関があると考えられるか。 解

|      | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ |
|------|---|---|---|---|---|---|
| テストA | 5 | 7 | 5 | 4 | 3 | 6 |
| テストB | 4 | 1 | 3 | 5 | 9 | 2 |

### D》相関関係と因果関係

47 都道府県において、2017 年度の森林面積の総面積に対する割合  $x$  と、人口 100 万人あたりの郵便局の数  $y$  のデータを調べ、散布図にしたところ、右の図のようになった。相関係数は 0.72 である。

$x$  と  $y$  の間には正の相関関係が認められる。しかし、森林面積の割合が大きいたことが原因で郵便局が増えるとか、逆に、郵便局が多いことが原因で森林面積の割合が大きくなるということは断定できないであろう。つまり、一方が原因で他方が起こる因果関係があるとは断定できない。



[森林面積の割合と郵便局の数のデータ]

一般に、2 つの変量の間に関係があるからといって、必ずしも因果関係があるとはいえない。

### E》質的データをとる 2 つの変量の間関係

これまでは、身長や体重などのように数値として得られるデータを主に扱ってきた。このような数値として得られるデータを量的データという。

これに対し、「A 組」「B 組」などの所属クラスや、「神奈川県」や「京都府」などの都道府県のデータのように、数値ではないものとして得られるデータを質的データという。

ここでは、質的データをとる 2 つの変量の間関係を調べるについて考えよう。

例 5.12 合否が判定されるある試験において、受験者 100 人全員を対象に、教材 A を使用して学習したか調べたところ、その人数は表 1 のようになった。

表 1

S

|             | 合  | 否  | 計   |
|-------------|----|----|-----|
| A の使用 : 有   | 9  | 5  | 14  |
| 5 A の使用 : 無 | 42 | 44 | 86  |
| 計           | 54 | 49 | 100 |

例 5.12 の表 1 のような表を分割表という。クロス集計表ともいう。

表 1 において、教材 A を使用した者、使用していない者のそれぞれにおいて、合格者、不合格者が占める割合を計算すると、表 2 のようになる。

表 2

|       | 合   | 否   |
|-------|-----|-----|
| A : 有 | 64% | 36% |
| A : 無 | 49% | 51% |

表 2 だけを見ると、教材 A の使用が合否に影響を及ぼしているようにみえる。ここでさらに、教材 B を使用して学習したかも調べてみたところ、その人数は表 3 のようになった。

表 3

|       |       | 合  | 否  |
|-------|-------|----|----|
| A : 有 | B : 有 | 6  | 1  |
| A : 有 | B : 無 | 3  | 4  |
| A : 無 | B : 有 | 31 | 9  |
| A : 無 | B : 無 | 11 | 35 |

練習 5.15 表 3 をもとに、次の問いに答えよ。解

- (1) 表 4 の空欄に適切な数を入れよ。
- (2) 教材 B を使用した者、使用していない者のそれぞれにおいて、合格者、不合格者の占める割合を計算して表 2 のようにまとめよ。

表 4

|       | 合  | 否 | 計   |
|-------|----|---|-----|
| B : 有 | 37 |   |     |
| B : 無 |    |   |     |
| 計     |    |   | 100 |

深化 5.2 上で得られたデータから、教材 A、B のどちらの方が、この試験の合否により影響を及ぼしていると予想できるだろうか。解

## 研究 統計的探究プロセス

実社会では、さまざまな社会的問題に応じて、統計的手法を用いた問題解決が行なわれている。そのときには、

「問題 → 計画 → データ → 分析 → 結論」

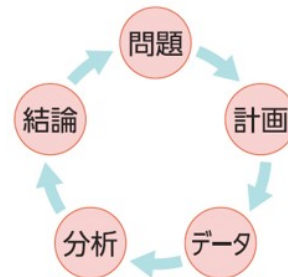
問 題 … 解決すべき事柄を把握し、統計で扱える問題を設定する。

計 画 … 設定した問題に対して、集めるべきデータと集め方を考える。

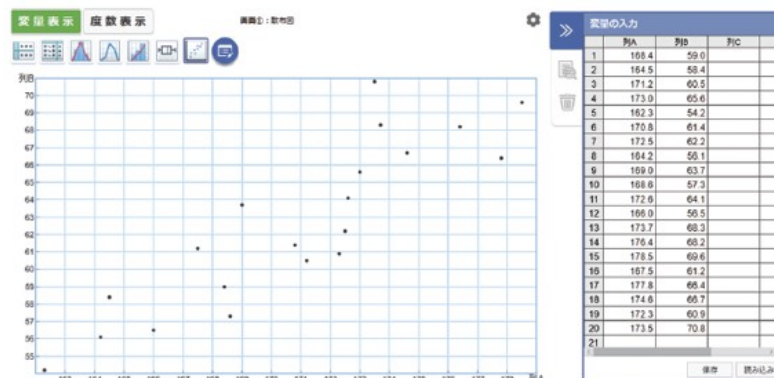
デ ー タ … 計画にしたがってデータを集め、表などに整理する。

分 析 … 目的やデータの種類に応じてグラフにまとめたり、データに関する数値を求めたりして、特徴や傾向を把握する。

結 論 … 見いだした特徴や傾向から結論をまとめて表現したり、さらなる課題や改善点を見いだしたりする。



また、実社会でのデータは、一般に非常に大量であり、手計算では処理しきれないことがほとんどである。そのような大量のデータを扱う際には、コンピュータなどの情報機器を用いて、グラフをかいたり、さまざまな計算を行うとよい。

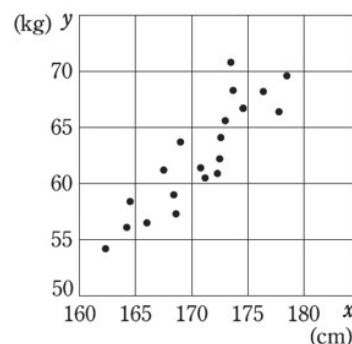


## Event

## 回帰分析

184 ページのある高校の1年生男子の身長  $x$  と体重  $y$  の散布図について、これらの点は、ある直線の近くに並んでいるようにも見える。

そこで、このデータの傾向を最もよく表す1次関数を見つけることを考えよう。



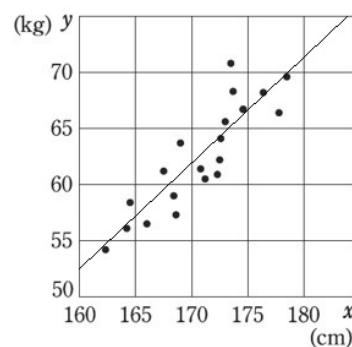
散布図において、点の配列に「できるだけ合うように引いた直線」を回帰直線という。そこで、この回帰直線をこの散布図の中に引くことを考える。

直線を引く基本的な方法は回帰分析と呼ばれるもので、コンピュータなどの情報機器を利用してかくこともできる。

上の  $x$  と  $y$  のデータでは、次の1次関数が得られる。実際に直線を引くと右の図のようになる。

$$y = 0.943x - 98.603$$

回帰分析は、自然科学のデータ分析で必須であるだけでなく、経済学や社会学などの社会科学を学ぶ上でも重要な手法である。



[回帰分析]

**演習 5.3** 右上の図のように回帰直線を引くことで、考えられるようになる事柄を説明してみよう。 解

### 5.1.6 仮説検定の考え方

集団に対して調査を行う場合、調べたい集団の全体のデータを集めることは困難な場合が多い。そのようなときに、調べたい集団から一部を抜き出して、そのデータから集団全体の状況を推測することがある。ここでは、その推測が正しいかどうかを判断する1つの考え方について学ぼう。

#### A》仮説検定の考え方

ボールペンを製造している会社が、すでに販売しているボールペン A を改良して新製品 B を開発した。B が A よりも書きやすいと消費者に評価されるかを調査したいと考えたが、すべての消費者を調査するのは不可能である。そこで、無作為に選んだ 30 人に 2 つのボールペン A, B を使ってもらい、どちらが書きやすいと感じるかを回答してもらった。その結果を集計したところ、70%にあたる 21 人が B と回答した。この回答のデータから、

[1] Bの方が書きやすいと評価される

と判断できるだろうか。

この問題を解決するために、[1] の主張に反する次の仮定を立てよう。

[2] A, B のどちらの回答も全くの偶然で起こる

すなわち、A, B のどちらの回答の起こる確率も  $\frac{1}{2} = 0.5$  である、という仮定を立てる。その仮定のもとで、30 人中 21 人以上が B と回答する確率がどれくらいかを考察しよう。

[2] の仮定は、公正な 1 枚のコインを投げる実験にあてはめることができる。ここでは、コインの表が出る場合を、B と回答する場合とする。

そして、コイン投げを30回行うことを1セットとし、1セットで表の出た回数を記録していく。この実験を200セット繰り返したところ、次の表のような結果となった。

|      |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 表の回数 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 計   |
| 度数   | 2 | 3 | 3  | 12 | 16 | 22 | 22 | 31 | 31 | 22 | 14 | 12 | 6  | 2  | 1  | 1  | 200 |

補足 この実験の代わりに、コンピュータでシミュレーションを行ってもよい。

上の表から、21回以上表が出たのは、200セットのうち  $2 + 1 + 1 = 4$  セットであり、相対度数は

$$\frac{4}{200} = 0.02 \quad (5.1)$$

である。

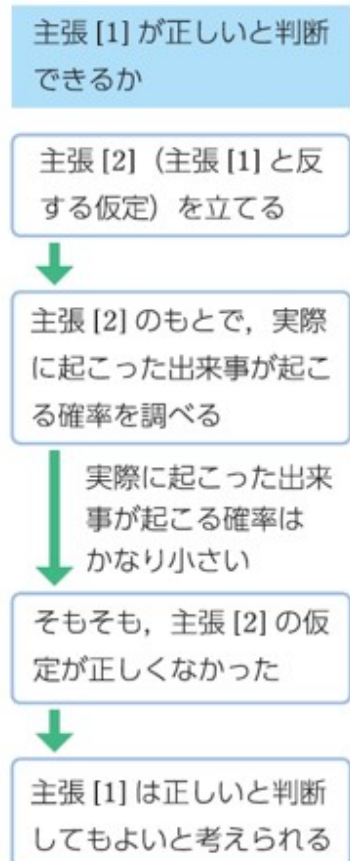
つまり、A、Bのどちらの回答も全くの偶然で起こるとした[2]の仮定のもとでは、21人以上がBと回答する確率は0.02程度であると考えられる。

これは見方を変えたと、0.02程度という確率の小さいことが起こったのだから、そもそも[2]の仮定が正しくなかったと考えられる。そう考えると、[1]の主張は正しい、つまりBの方が書きやすいと評価されると判断してよさそうである。

得られたデータをもとに、ある主張が正しいかどうかを判断する、上のような手法を仮説検定という。

また、上では0.02を確率が小さいとしたが、仮説検定では基準となる確率をあらかじめ決めておき、それより小さければ確率が小さいと判断する。

### [コイン投げのシミュレーション]



例 5.13 193 ページの調査で、30 人中 19 人が B と回答したとする。

**S**

主張 [1] Bの方が書きやすいと評価される

が正しいと判断できるか．基準となる確率を 0.05 として考察してみよう．

前ページのコイン投げの実験結果を利用すると、19 回以上表が出る場合の相対度数は

$$\frac{12 + 6 + 2 + 1 + 1}{200} = \frac{22}{200} = 0.11$$

これは 0.05 より大きいから、

主張 [2] A, B のどちらの回答も全くの偶然で起こる

は否定できない．

したがって、Bの方が書きやすいと評価されるとは判断できない．

注意 例 5.13 について、「主張 [2] が正しい」という判断ができるわけではない．

なお、前ページや上の例 5.13 ではコイン投げの実験結果を利用しているが、通常は計算で確率を求め、それを利用する．

練習 5.16 ある地域の水道局が、水道水の品質改善に取り組んでいる．無作為に選んだ地域の住民 20 人に以前に比べて水道水がおいしくなったと感じるか回答してもらったところ、15 人が以前よりおいしくなったと回答した．この回答のデータから、以前に比べて水道水がおいしくなったと住民から評価されていると判断してよいか．仮説検定の考え方を用い、基準となる確率を 0.05 として考察せよ．ただし、公正なコインを 20 回投げて表の出た回数を記録する実験を 200 セット行ったところ、次の表のようになったとし、この結果を用いよ。 **解**

|      |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 表の回数 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 計   |
| 度数   | 1 | 7 | 23 | 20 | 30 | 35 | 35 | 18 | 20 | 7  | 3  | 0  | 1  | 200 |

## 仮説検定と反復試行の確率

193, 194 ページのボールペンの書きやすさの調査に関する仮説検定において, 「A, B のどちらの回答も全くの偶然で起こる」という仮定のもとで, 30 人中 21 人以上が B と回答する確率を, コイン投げの実験を通して考えた. この確率は, 数学 A で学習する次の「反復試行の確率」を用いると, 計算することができる.

その結果が偶然によって決まる実験や観測を試行という. また, 試行の結果として起こる事柄を事象という.

### 反復試行の確率

1 回の試行で事象 A の起こる確率を  $p$  とする. この試行を  $n$  回繰り返すとき, 事象 A がちょうど  $r$  回起こる確率は

$${}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}$$

補足  ${}_nC_r$  は異なる  $n$  個のものから  $r$  個取り出して作る組合せの総数を表す.

A, B どちらの回答の起こる確率も  $\frac{1}{2}$  であるという仮定が正しいとする. このとき, 30 人中 21 人以上が B と回答する確率は

$$\begin{aligned} & {}_{30}C_{21} \left(\frac{1}{2}\right)^{21} \left(\frac{1}{2}\right)^{30-21} + {}_{30}C_{22} \left(\frac{1}{2}\right)^{22} \left(\frac{1}{2}\right)^{30-22} + \cdots \\ & \quad + {}_{30}C_{29} \left(\frac{1}{2}\right)^{29} \left(\frac{1}{2}\right)^{30-29} + \left(\frac{1}{2}\right)^{30} \end{aligned}$$

となる. これをコンピュータで計算すると,  $\frac{22964087}{1073741824} = 0.0213\cdots$  となる. 194 ページのコイン投げの実験で求めた相対度数 0.02 は, この確率と近い値である.

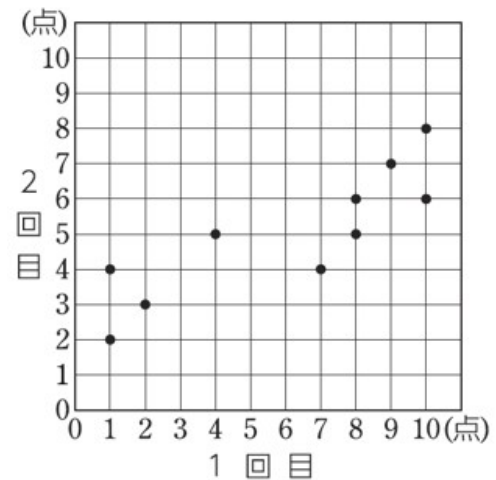
演習 5.4 1 枚のコインを 6 回投げたところ, 表が 5 回出た. このコインは表が出やすいと判断してよいか. 仮説検定の考え方をを用い, 基準となる確率を 0.05 として考察せよ. 解

## 5.1.7 問題

**問題 5.1** 右の図は、10 人の生徒に漢字テストを 2 回行い、得点のデータを散布図にしたものである。1 回目のデータを横軸に、2 回目のデータを縦軸にとっている。次の値を求めよ。なお、得点は整数である。 解

→ p.169～171, 187, 188

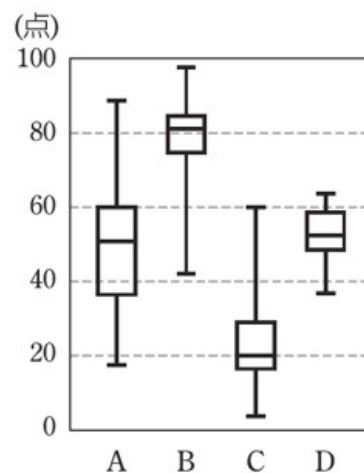
- (1) 1 回目のデータの平均値
- (2) 1 回目のデータの中央値
- (3) 1 回目のデータと 2 回目のデータの相関係数



**問題 5.2** 5 個の値 2, 3,  $a$ , 8, 12 からなるデータの平均値が 6 であるとき、 $a$  の値を求めよ。また、このデータの分散を求めよ。 解 → p.169, 170, 180, 181

**問題 5.3** 右の図は、ある学校で行った 4 種類のテスト A, B, C, D についての、300 人の得点の箱ひげ図である。なお、どのテストも 100 点満点である。 解

- (1) 80 点以上の生徒が半数以上いたのはどのテストか。
- (2) 40 点以下の生徒がいて、その人数が 75 人未満である可能性があるのはどのテストか。

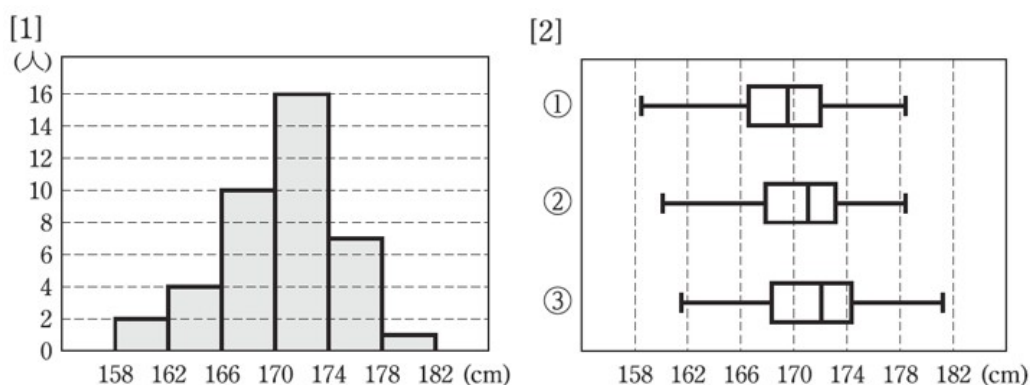


## 5.2 章末問題

### 5.2.1 章末問題 A

章末 5.1 下の図 [1] は、40 人の生徒の身長データをヒストグラムにしたものである。ただし、各階級は 158cm 以上 162cm 未満のように区切っている。 解

- (1) 170cm 以上の人は何人いるか。
- (2) このデータの箱ひげ図として矛盾するものを、下の図 [2] の ①～③ からすべて選べ。



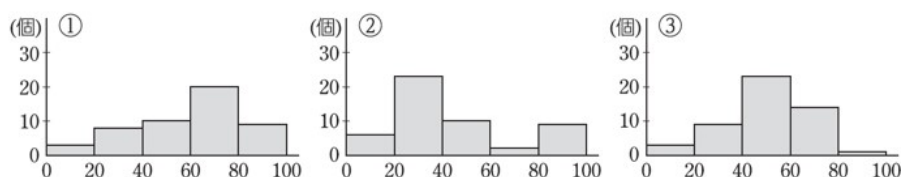
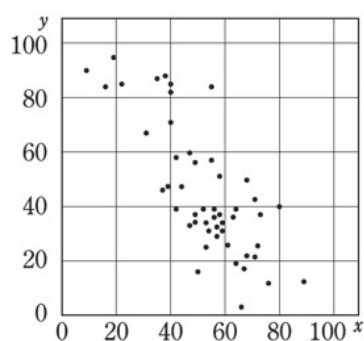
章末 5.2 生徒 7 人のテストの得点が次のようになった。 解

57, 46, 37, 38, 54, 48, 35 (点)

- (1) このデータの平均値, 中央値, 分散を求めよ。
- (2) 生徒全員の得点に 10 点ずつ足したときの平均値および分散を求めよ。

章末 5.3 右の図は、ある 2 つの変数  $x$ ,  $y$  のデータについての散布図である。 $x$  のとる値についてのヒストグラムを下の ①～③ から選べ。また、 $x$  と  $y$  の相関係数は、次のうちのどれに近い。 解

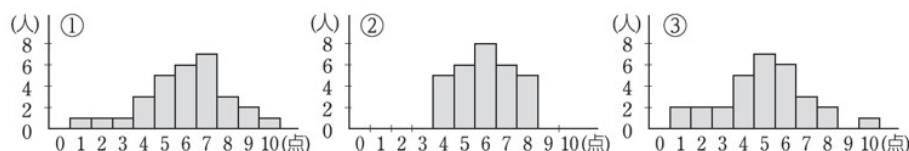
0.3, 0.8, -0.8, -1



## 5.2.2 章末問題 B

章末 5.4 3つのクラス A, B, Cで, 10点満点の小テストを行った. 右の表は, 各クラスの成績の結果である. それぞれのクラスの成績を表すヒストグラムを, 下の①~③から選べ. 解

|   | 人数 | 平均値 | 標準偏差 |
|---|----|-----|------|
| A | 30 | 6.0 | 1.3  |
| B | 30 | 5.0 | 2.0  |
| C | 30 | 6.0 | 2.0  |



章末 5.5 25個の値からなるデータがあり, そのうちの10個の値の平均値は4, 分散は14, 残りの15個の値の平均値は9, 分散は19である. 解

- (1) このデータの平均値を求めよ.
- (2) このデータの分散を求めよ.

章末 5.6 ある種子 A の発芽する確率は  $\frac{2}{3}$  である. 種子 A を改良した種子 B について, 発芽試験を行ったところ, 30 個の種子のうち, 25 個が発芽した. この結果から種子 B は A に比べ, 発芽する確率が高いかどうかを仮説検定の考え方を用いて考察したい. 解

- (1) 「種子 B が発芽する確率は種子 A と変わらない」という仮定のもとで, 30 個中 25 個以上が発芽する確率を実験を通して考える. このとき, 次の実験を用いることが適切でない理由を述べよ.

公正なコインを 30 枚投げて表が出た枚数の記録を 500 回行う.

- (2) 公正なさいころを 30 個投げて 3 以上の目が出る個数を記録する実験を 500 回行ったところ下の表のようになった.

| 3 以上の目<br>が出た個数 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 計   |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 度数              | 4  | 9  | 13 | 26 | 33 | 55 | 62 | 70 | 81 | 61 | 42 | 27 | 11 | 6  | 500 |

基準となる確率を 0.05 とするとき, 種子 B の発芽する確率は A に比べ高いと判断してよいかをこの実験結果を用いて考察せよ.



# 解答

練習 1.1 (1) 係數 6, 次數 2

(2) 係數 1, 次數 1

(3) 係數  $-1$ , 次數 4

(4) 係數  $-3$ , 次數 3

練習 1.2 (1) 係數  $2a$ , 次數 3

(2) 係數  $3bc^3$ , 次數 2

(3) 係數  $-6a$ , 次數 3

練習 1.3 (1) 
$$\begin{aligned} & 4x^2 + 3x - 1 - 2x^2 - 4x + 6 \\ &= (4 - 2)x^2 + (3 - 4)x + (-1 + 6) \\ &= 2x^2 - x + 5 \end{aligned}$$

(2) 
$$\begin{aligned} & 3a^2 - 2ab - 4b^2 - 5a^2 + 2ab - 8b^2 \\ &= (3 - 5)a^2 + (-2 + 2)ab + (-4 - 8)b^2 \\ &= -2a^2 - 12b^2 \end{aligned}$$

練習 1.4 (1) 3 次式

(2) 4 次式

練習 1.5 (1) 3 次式, 定數項  $by^2 + c$

(2) 2 次式, 定數項  $ax^3 + c$

(3) 3 次式, 定數項  $c$

練習 1.6 (1)  $(a + 2)x + (4a^2 - 3a)$

(2)  $2x^2 + (5y - 3)x + (3y^2 - 5y - 2)$

$$\begin{aligned}\text{練習 1.7 (1) } A + B &= (2x^2 + 3x - 1) + (4x^2 - 5x - 6) \\ &= (2 + 4)x^2 + (3 - 5)x + (-1 - 6) \\ &= \mathbf{6x^2 - 2x - 7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A - B &= (2x^2 + 3x - 1) - (4x^2 - 5x - 6) \\ &= 2x^2 + 3x - 1 - 4x^2 + 5x + 6 \\ &= (2 - 4)x^2 + (3 + 5)x + (-1 + 6) \\ &= \mathbf{-2x^2 + 8x + 5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \ A + B &= (-3x^2 - 2x + 4x^3 + 5) + (2x^3 + 7 - 3x^2) \\ &= (4 + 2)x^3 + (-3 - 3)x^2 - 2x + (5 + 7) \\ &= \mathbf{6x^3 - 6x^2 - 2x + 12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A - B &= (-3x^2 - 2x + 4x^3 + 5) - (2x^3 + 7 - 3x^2) \\ &= -3x^2 - 2x + 4x^3 + 5 - 2x^3 - 7 + 3x^2 \\ &= (4 - 2)x^3 + (-3 + 3)x^2 - 2x + (5 - 7) \\ &= \mathbf{2x^3 - 2x - 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{練習 1.8 (1) } A + 2B &= (x^2 + 4x - 3) + 2(2x^2 - x + 4) \\ &= x^2 + 4x - 3 + 4x^2 - 2x + 8 \\ &= (1 + 4)x^2 + (4 - 2)x + (-3 + 8) \\ &= \mathbf{5x^2 + 2x + 5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \ 2A - 3B &= 2(x^2 + 4x - 3) - 3(2x^2 - x + 4) \\ &= 2x^2 + 8x - 6 - 6x^2 + 3x - 12 \\ &= (2 - 6)x^2 + (8 + 3)x + (-6 - 12) \\ &= \mathbf{-4x^2 + 11x - 18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \ A + B + 2(A - B) &= A + B + 2A - 2B = 3A - B \\ &= 3(x^2 + 4x - 3) - (2x^2 - x + 4) \\ &= 3x^2 + 12x - 9 - 2x^2 + x - 4 \\ &= (3 - 2)x^2 + (12 + 1)x + (-9 - 4) \\ &= \mathbf{x^2 + 13x - 13}\end{aligned}$$

$$\text{練習 1.9 (1) } 2a^3 \times 4a^2 = (2 \times 4) \times a^{3+2} = \mathbf{8a^5}$$

$$(2) \ 3x^2y \times (-2x^3y^2) = 3 \times (-2) \times x^{2+3} \times y^{1+2} = \mathbf{-6x^5y^3}$$

$$(3) \ (-3x^2y)^3 = (-3)^3 \times (x^2)^3 \times y^3 = \mathbf{-27x^6y^3}$$

練習 1.10 (1)  $4x^2(2x^2 - 3x + 5) = 4x^2 \cdot 2x^2 + 4x^2 \cdot (-3x) + 4x^2 \cdot 5$   
 $= 8x^4 - 12x^3 + 20x^2$

(2)  $(2x - 1)(4x^2 + 3) = (2x - 1) \cdot 4x^2 + (2x - 1) \cdot 3$   
 $= 8x^3 - 4x^2 + 6x - 3$

(3)  $(2x^2 + x - 3)(x - 2)$   
 $= (2x^2 + x - 3)x + (2x^2 + x - 3) \cdot (-2)$   
 $= 2x^3 + x^2 - 3x - 4x^2 - 2x + 6$   
 $= 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$

(4)  $(2x^2 + 3)(x^2 - 4x - 1)$   
 $= (2x^2 + 3) \cdot x^2 + (2x^2 + 3) \cdot (-4x) + (2x^2 + 3) \cdot (-1)$   
 $= 2x^4 + 3x^2 - 8x^3 - 12x - 2x^2 - 3$   
 $= 2x^4 - 8x^3 + x^2 - 12x - 3$

練習 1.11 (1)  $(x^2 + ax - 1)(x + a)$   
 $= (x^2 + ax - 1)x + (x^2 + ax - 1)a$   
 $= x^3 + ax^2 - x + ax^2 + a^2x - a$   
 $= x^3 + 2ax^2 + (a^2 - 1)x - a$

(2)  $(ax + b)(cx + d) = (ax + b)cx + (ax + b)d$   
 $= acx^2 + bcx + adx + bd$   
 $= acx^2 + (ad + bc)x + bd$

練習 1.12 (1)  $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$

(2)  $(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

(3)  $(5x + 4y)(5x - 4y) = (5x)^2 - (4y)^2 = 25x^2 - 16y^2$

(4)  $(x + 1)(x + 5) = x^2 + (1 + 5)x + 1 \cdot 5 = x^2 + 6x + 5$

(5)  $(x - 3)(x + 8) = x^2 + (-3 + 8)x + (-3) \cdot 8 = x^2 + 5x - 24$

(6)  $(x - y)(x - 4y) = x^2 + (-y - 4y)x + (-y) \cdot (-4y) = x^2 - 5xy + 4y^2$

練習 1.13 (1)  $(2x + 1)(4x + 5) = 2 \cdot 4x^2 + (2 \cdot 5 + 1 \cdot 4)x + 1 \cdot 5 = 8x^2 + 14x + 5$

(2)  $(x + 4)(2x - 3) = 1 \cdot 2x^2 + \{1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2\}x + 4 \cdot (-3) = 2x^2 + 5x - 12$

(3)  $(3x - 7)(x + 2) = 3 \cdot 1x^2 + \{3 \cdot 2 + (-7) \cdot 1\}x + (-7) \cdot 2 = 3x^2 - x - 14$

(4)  $(2x - 5)(2x - 1) = 2 \cdot 2x^2 + \{2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2\}x + (-5) \cdot (-1) = 4x^2 - 12x + 5$

(5)  $(x + 3y)(2x - y) = 1 \cdot 2x^2 + \{1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2\}xy + 3 \cdot (-1)y^2 = 2x^2 + 5xy - 3y^2$

(6)  $(3x - 2a)(4x - 3a) = 3 \cdot 4x^2 + \{3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4\}ax + (-2) \cdot (-3)a^2$   
 $= 12x^2 - 17ax + 6a^2$

練習 1.14 (1)  $(a + b - c)^2 = \{(a + b) - c\}^2$   
 $= (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$   
 $= a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$   
 $= \mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca}$

(2)  $(x + 2y + 3z)^2 = \{(x + 2y) + 3z\}^2$   
 $= (x + 2y)^2 + 2(x + 2y) \cdot 3z + (3z)^2$   
 $= x^2 + 4xy + 4y^2 + 6xz + 12yz + 9z^2$   
 $= \mathbf{x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6zx}$

別解 例題 1.1 の式

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

を利用する.

(1)  $(a + b - c)^2 = \{a + b + (-c)\}^2$   
 $= a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2b(-c) + 2(-c)a$   
 $= \mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca}$

(2)  $(x + 2y + 3z)^2 = x^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + 2 \cdot 2y \cdot 3z + 2 \cdot 3z \cdot x$   
 $= \mathbf{x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6zx}$

練習 1.15 (1)  $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 3x + 2)$   
 $= \{(x^2 + 2) + 3x\}\{(x^2 + 2) - 3x\} = (x^2 + 2)^2 - (3x)^2$   
 $= x^4 + 4x^2 + 4 - 9x^2 = \mathbf{x^4 - 5x^2 + 4}$

(2)  $(x - y - z)(x - y + z)$   
 $= \{(x - y) - z\}\{(x - y) + z\} = (x - y)^2 - z^2$   
 $= \mathbf{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}$

(3)  $(x + 1)^2(x - 1)^2 = \{(x + 1)(x - 1)\}^2 = (x^2 - 1)^2$   
 $= \mathbf{x^4 - 2x^2 + 1}$

練習 1.16 (1)  $12x^3 - 8x^2y = 4x^2(3x - 2y)$

(2)  $3a^2x + 6ax^2 + ax = \mathbf{ax(3a + 6x + 1)}$

練習 1.17 (1)  $(a + b)c + d(a + b) = \mathbf{(a + b)(c + d)}$

(2)  $(x - 2y)a + (2y - x)b = (x - 2y)a - (x - 2y)b$   
 $= \mathbf{(x - 2y)(a - b)}$

練習 1.18 (1)  $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2$

(2)  $x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = (x - 6)^2$

(3)  $x^2 + 6xy + 9y^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 = (x + 3y)^2$

(4)  $4a^2 - 4ab + b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot b + b^2 = (2a - b)^2$

(5)  $x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2 = (x + 3y)(x - 3y)$

(6)  $16a^2 - 25b^2 = (4a)^2 - (5b)^2 = (4a + 5b)(4a - 5b)$

練習 1.19 (1)  $x^2 + 8x + 12 = x^2 + (2 + 6)x + 2 \cdot 6 = (x + 2)(x + 6)$

(2)  $x^2 - 13x + 36 = x^2 + (-4 - 9)x + (-4) \cdot (-9) = (x - 4)(x - 9)$

(3)  $a^2 + a - 20 = a^2 + (-4 + 5)a + (-4) \cdot 5 = (a - 4)(a + 5)$

(4)  $x^2 + 5xy + 6y^2 = x^2 + (2y + 3y)x + 2y \cdot 3y = (x + 2y)(x + 3y)$

(5)  $x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2 = (x + 3y)(x - 3y)$

(6)  $16a^2 - 25b^2 = (4a)^2 - (5b)^2 = (4a + 5b)(4a - 5b)$

深化 1.1  $-1$  と  $-8$ ,  $-2$  と  $-4$  のように  $b$ ,  $d$  がともに負の場合は因数分解する式の  $x$  の係数は負の数となる. しかし, 因数分解する式  $3x^2 + 14x + 8$  の  $x$  の係数は正であるから,  $b$  と  $d$  がともに負にはならないため.

練習 1.20 (1)  $3x^2 + 7x + 2 = (x + 2)(3x + 1)$

(2)  $2x^2 + 9x + 10 = (x + 2)(2x + 5)$

(3)  $2x^2 - 13x + 6 = (x - 6)(2x - 1)$

(4)  $4y^2 + 5y - 21 = (y + 3)(4y - 7)$

(5)  $3x^2 + 5xy - 2y^2 = (x + 2y)(3x - y)$

(6)  $6x^2 - 7ax - 3a^2 = (2x - 3a)(3x + a)$

練習 1.21 (1)  $(x - y)^2 - 5(x - y) + 6 = \{(x - y) - 2\}\{(x - y) - 3\}$   
 $= (x - y - 2)(x - y - 3)$

(2)  $2(x + 3y)^2 - (x + 3y) - 1 = \{(x + 3y) - 1\}\{2(x + 3y) + 1\}$   
 $= (x + 3y - 1)(2x + 6y + 1)$

(3)  $(x + y)^2 - 9 = (x + y)^2 - 3^2 = (x + y + 3)(x + y - 3)$

(4)  $x^2 - (y - 1)^2 = \{x + (y - 1)\}\{x - (y - 1)\}$   
 $= (x + y - 1)(x - y + 1)$

(5)  $x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9) = (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$

(6)  $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

練習 1.22 (1) 次数の低い方の文字  $y$  について整理する

$$\begin{aligned}
 x^2 + xy - 4x - y + 3 &= (x-1)y + (x^2 - 4x + 3) \\
 &= (x-1)y + (x-1)(x-3) \\
 &= (x-1)\{y + (x-3)\} \\
 &= (x-1)(x+y-3)
 \end{aligned}$$

(2) 次数の低い方の文字  $a$  について整理する

$$\begin{aligned}
 x^2 + ax - 3a - 9 &= (x-3)a + (x^2 - 9) \\
 &= (x-3)a + (x+3)(x-3) \\
 &= (x-3)\{a + (x+3)\} \\
 &= (x-3)(x+a+3)
 \end{aligned}$$

練習 1.23 (1)  $x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x - 3y + 1$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 + (3y-2)x + (2y^2 - 3y + 1) \\
 &= x^2 + (3y-2)x + (y-1)(2y-1) \\
 &= (x+y-1)(x+2y-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \begin{array}{l} y-1 \longrightarrow y-1 \\ 2y-1 \longrightarrow 2y-1 \end{array} \\
 1 & & \\
 \hline
 & & 3y-2
 \end{array}$$

(2)  $3x^2 - 5ax + 2a^2 - 3x + a - 6$

$$\begin{aligned}
 &= 3x^2 + (-5a-3)x + (2a^2 + a - 6) \\
 &= 3x^2 + (-5a-3)x + (a+2)(2a-3) \\
 &= \{x - (a+2)\}\{3x - (2a-3)\} \\
 &= (x-a-2)(3x-2a+3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \begin{array}{l} -(a+2) \longrightarrow -3a-6 \\ -(2a-3) \longrightarrow -2a+3 \end{array} \\
 3 & & \\
 \hline
 & & -5a-3
 \end{array}$$

練習 1.24  $a$  に着目して整理する.

$$\begin{aligned}
 &ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) \\
 &= a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2 \\
 &= (b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + bc(b-c) \\
 &= (b-c)a^2 - (b+c)(c-c)a + bc(b-c) \\
 &= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} = (b-c)(a-b)(a-c) \\
 &= -(a-b)(b-c)(c-a)
 \end{aligned}$$

演習 1.1 (1)  $(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$   
 $= \mathbf{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

(2)  $(x-1)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3$   
 $= \mathbf{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

(3)  $(3a+b)^3 = (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot b + 3 \cdot 3a \cdot b^2 + b^3$   
 $= \mathbf{27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3}$

(4)  $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3$   
 $= \mathbf{8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3}$

## 演習 1.2

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2) \\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 \\ &= \mathbf{a^3 + b^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2) \\ &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\ &= \mathbf{a^3 - b^3}\end{aligned}$$

演習 1.3 (1)  $(x+2)(x^2-2x+4) = (x-2)(x^2-x \cdot 2+2^2)$   
 $= x^3 + 2^3 = \mathbf{x^3 + 8}$

(2)  $(x-3)(x^2+3x+9) = (x-3)(x^2+x \cdot 3+3^2)$   
 $= x^3 - 3^3 = \mathbf{x^3 - 27}$

(3)  $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2) = (x+3y)\{x^2-x \cdot 3y+(3y)^2\}$   
 $= x^3 + (3y)^3 = \mathbf{x^3 + 27y^3}$

(4)  $(2x-3a)(4x^2+6ax+9a^2) = (2x-3a)\{(2x)^2+2x \cdot 3a+(3a)^2\}$   
 $= (2x)^3 - (3a)^3 = \mathbf{8x^3 - 27a^3}$

演習 1.4 (1)  $x^3-1 = x^3-1^3 = (x-1)(x^2+x \cdot 1+1^2)$   
 $= \mathbf{(x-1)(x^2+x+1)}$

(2)  $x^3+27a^3 = x^3+(3a)^3 = (x+3a)\{x^2-x \cdot 3a+(3a)^2\}$   
 $= \mathbf{(x+3a)(x^2-3ax+9a^2)}$

(3)  $x^3-64 = x^3-4^3 = (x-4)(x^2+x \cdot 4+4^2)$   
 $= \mathbf{(x-4)(x^2+4x+16)}$

(4)  $125x^3-8y^3 = (5x)^3-(2y)^3 = (5x-2y)\{(5x)^2+5x \cdot 2y+(2y)^2\}$   
 $= \mathbf{(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)}$

問題 1.1 (1)  $(6x^3 - 3x - 4) + (5 + 8x^2 + 2x - x^3) + 2(x - 4x^2 - 3)$   
 $= 6x^3 - 3x - 4 + 5 + 8x^2 + 2x - x^3 + 2x - 8x^2 - 6$   
 $= (6 - 1)x^3 + (8 - 8)x^2 + (-3 + 2 + 2)x + (-4 + 5 - 6)$   
 $= 5x^3 + x - 5$

(2)  $(7x^3 - 4x - 5) + x(3x + 6 - 2x^2) - 3x(2x^2 - x + 4)$   
 $= 7x^3 - 4x - 5 + 3x^2 + 6x - 2x^3 - 6x^3 + 3x^2 - 12x$   
 $= (7 - 2 - 6)x^3 + (3 + 3)x^2 + (-4 + 6 - 12)x - 5$   
 $= -x^3 + 6x^2 - 10x - 5$

問題 1.2 (1)  $(2m + 5)(m - 2) = 2m^2 + \{2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1\}m + 5 \cdot (-2)$   
 $= 2m^2 + m - 10$

(2)  $(6a - 5b)(6a + 5b) = (6a)^2 - (5b)^2 = 36a^2 - 25b^2$

(3)  $(3 - 2x)(1 + x) = 3 + 3x - 2x - 2x^2 = -2x^2 + x + 3$

(4)  $(x - a + 1)^2 = \{(x - a) + 1\}^2$   
 $= (x - a)^2 + 2(x - a) + 1^2$   
 $= x^2 - 2ax + a^2 + 2x - 2a + 1$

別解  $(x - a + 1)^2 = \{x + (-a) + 1\}^2$   
 $= x^2 + (-a)^2 + 1^2 + 2 \cdot x \cdot (-a) + 2 \cdot (-a) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot x$   
 $= x^2 + a^2 + 1 - 2ax - 2a + 2x$

(5)  $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = \{(x^2 + 2) + 2x\}\{(x^2 + 2) - 2x\}$   
 $= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$   
 $= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = x^4 + 4$

(6)  $(x + y - z)(x - y + z) = \{x + (y - z)\}\{x - (y - z)\}$   
 $= x^2 - (y - z)^2$   
 $= x^2 - (y^2 - 2yz + z^2)$   
 $= x^2 - y^2 + 2yz - z^2$

(7)  $(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$   
 $= (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$   
 $= (x^4 + 1)(x^4 - 1) = x^8 - 1$

(8)  $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$   
 $= x^4 - 5x^2 + 4$

(9)  $(x + 4)(x + 2)(x - 1)(x - 3) = (x + 4)(x - 3) \times (x + 2)(x - 1)$   
 $= (x^2 + x - 12)(x^2 + x - 2) = (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$   
 $= x^4 + 2x^3 + x^2 - 14x^2 - 14x + 24$   
 $= x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

問題 1.3 (1)  $2ax^2 - 8a = 2a(x^2 - 4) = \mathbf{2a(x + 2)(x - 2)}$

$$\begin{aligned} (2) \quad ax^2 + by^2 - ay^2 - bx^2 &= (a - b)x^2 - (a - b)y^2 \\ &= (a - b)(x^2 - y^2) \\ &= \mathbf{(a - b)(x + y)(x - y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (x - 4)(3x + 1) + 10 &= 3x^2 - 11x - 4 + 10 \\ &= 3x^2 - 11x + 6 \\ &= \mathbf{(x - 3)(3x - 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad 2n^3 + 3n^2 + n &= n(2n^2 + 3n + 1) \\ &= \mathbf{n(n + 1)(2n + 1)} \end{aligned}$$

問題 1.4 (1)  $4x^2 - y^2 + 2y - 1 = 4x^2 - (y^2 - 2y + 1) = (2x)^2 - (y - 1)^2$   
 $= \{2x + (y - 1)\}\{2x - (y - 1)\}$   
 $= \mathbf{(2x + y - 1)(2x - y + 1)}$

$$\begin{aligned} (2) \quad (x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 \\ &= (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) \\ &= \mathbf{(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad x^3 + ax^2 - x^2 - a &= (x^2 - 1)a + x^3 - x^2 \\ &= (x + 1)(x - 1)a + x^2(x - 1) \\ &= (x - 1)\{(x + 1)a + x^2\} \\ &= \mathbf{(x - 1)(x^2 + ax + a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad 6x^2 + 7xy + 2y^2 + x - 2 \\ &= 6x^2 + (7y + 1)x + 2y^2 - 2 \\ &= 6x^2 + (7y + 1)x + 2(y + 1)(y - 1) \\ &= \{2x + (y - 1)\}\{3x + 2(y + 1)\} \\ &= \mathbf{(2x + y - 1)(3x + 2y + 2)} \end{aligned}$$

別解  $6x^2 + 7xy + 2y^2 + x - 2$   
 $= 2y^2 + 7xy + 6x^2 + x - 2$   
 $= 2y^2 + 7xy + (2x - 1)(3x + 2)$   
 $= \{y + (2x - 1)\}\{2y + (3x + 2)\}$   
 $= \mathbf{(2x + y - 1)(3x + 2y + 2)}$

$$\begin{aligned} (5) \quad 3x^2 + 2xy - y^2 + 7x + 3y + 4 \\ &= 3x^2 + (2y + 7)x - (y^2 - 3y - 4) \\ &= 3x^2 + (2y + 7)x - (y + 1)(y - 4) \\ &= \{x + (y + 1)\}\{3x - (y - 4)\} \\ &= \mathbf{(x + y + 1)(3x - y + 4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad & (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\
&= \{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\} - abc \\
&= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c) \\
&= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\} \\
&= (b+c)(a+b)(a+c) = \mathbf{(a+b)(b+c)(c+a)} \\
(7) \quad & a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) \\
&= -(b-c)a^2 + (b^2 - c^2)a - b^2c + bc^2 \\
&= -(b-c)a^2 + (b+c)(b-c)a - bc(b-c) \\
&= -(b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\
&= -(b-c)(a-b)(a-c) = \mathbf{(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}$$

**問題 1.5**  $(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$

一の位の数か5である2桁の自然数を2乗した値は、連続する2数の積  $a(a+1)$  を100倍したものに25を加えた数である。

たとえば35は  $a=3$  より、 $3 \times 4 \times 100 + 25 = 1200 + 25 = 1225$  となる。

**練習 1.25** (1)  $\frac{1}{8} = \mathbf{0.125}$

(2)  $\frac{8}{9} = 0.888\cdots = \mathbf{0.\dot{8}}$

(3)  $\frac{10}{27} = 0.370370370\cdots = \mathbf{0.\dot{3}7\dot{0}}$

(4)  $\frac{25}{22} = 1.1363636 = \mathbf{1.1\dot{3}\dot{6}}$

練習 1.26 (1)  $x = 0.\dot{1}$  とおく.

$$\begin{aligned} x &= 0.111\ldots \\ 10x &= 1.111\ldots \\ 10x \text{ と } x \text{ の差を考えると, 右の計算から} & \\ 9x &= 1 \quad \text{よって} \quad x = \frac{1}{9} \end{aligned} \qquad \begin{array}{r} 10x = 1.111\ldots \\ -) \quad x = 0.111\ldots \\ \hline 9x = 1 \end{array}$$

(2)  $x = 0.\dot{2}7$  とおく.

$$\begin{aligned} x &= 0.272727\ldots \\ 100x &= 27.272727\ldots \\ 100x \text{ と } x \text{ の差を考えると, 右の計算から} & \\ 99x &= 27 \quad \text{よって} \quad x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11} \end{aligned} \qquad \begin{array}{r} 100x = 27.272727\ldots \\ -) \quad x = 0.272727\ldots \\ \hline 99x = 27 \end{array}$$

(3)  $x = 0.\dot{6}48$  とおく.

$$\begin{aligned} x &= 0.648648\ldots \\ 1000x &= 648.648648\ldots \\ 1000x \text{ と } x \text{ の差を考えると, 右の計算から} & \\ 999x &= 648 \quad \text{よって} \quad x = \frac{648}{999} = \frac{24}{37} \end{aligned} \qquad \begin{array}{r} 1000x = 648.648648\ldots \\ -) \quad x = 0.648648\ldots \\ \hline 999x = 648 \end{array}$$

(4)  $x = 0.2\dot{5}4$  とおく.

$$\begin{aligned} 10x &= 2.545454\ldots \\ 1000x &= 254.545454\ldots \\ 1000x \text{ と } 10x \text{ の差を考えると, 右の計算から} & \\ 990x &= 252 \quad \text{よって} \quad x = \frac{252}{990} = \frac{14}{55} \end{aligned} \qquad \begin{array}{r} 1000x = 254.545454\ldots \\ -) \quad 10x = 2.545454\ldots \\ \hline 990x = 252 \end{array}$$

練習 1.27

| 数の範囲 | 加法 | 減法 | 乗法 | 除法 |
|------|----|----|----|----|
| 自然数  | ○  | ×  | ○  | ×  |
| 整数   | ○  | ○  | ○  | ×  |
| 有理数  | ○  | ○  | ○  | ○  |
| 実数   | ○  | ○  | ○  | ○  |

練習 1.28 (1)  $|3| = 3$

(2)  $|-4| = 4$

(3)  $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

練習 1.29 (1)  $|-2+3| = |1| = 1$

(2)  $|1-5| = |-4| = -(-4) = 4$

(3)  $3-\pi < 0$  であるから  $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi-3$

演習 1.5 (1)  $AB = |5-2| = 3$

(2)  $AB = |-1-3| = |-4| = 4$

(3)  $AB = |-6-(-2)| = |-4| = 4$

練習 1.30 (1)  $\pm\sqrt{6}$

(2)  $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4, \quad -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$

練習 1.31 (1)  $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{6}$

(2)  $\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

(3)  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$

(4)  $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{24}{2}} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2\cdot 3} = 2\sqrt{3}$

練習 1.32 (1)  $5\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3} = (5-2+1)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(2)  $\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{72} = \sqrt{2}+4\sqrt{2}-6\sqrt{2}$   
 $= (1+4-6)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

練習 1.33 (1)  $(4\sqrt{2}+3\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$   
 $= 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\sqrt{5} + 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}\sqrt{5}$   
 $= 8\cdot 2 - 4\sqrt{10} + 6\sqrt{10} - 3\cdot 5 = 1 + 2\sqrt{10}$

(2)  $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$   
 $= 4\cdot 3 - 4\sqrt{6} + 2 = 14 - 4\sqrt{6}$

(3)  $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3-2 = 1$

(4)  $(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9-5 = 4$

練習 1.34 (1)  $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2)  $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

(3)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(4)  $\frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

練習 1.35 (1)  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$   
 $= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

(2)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})}$   
 $= \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$

(3)  $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6} + 2} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)}$   
 $= \frac{6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{(\sqrt{6})^2 - 2^2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

(4)  $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$   
 $= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$

練習 1.36  $x = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$

$y = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$

(1)  $x + y = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{7}$

$xy = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(2)  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 6$

練習 1.37  $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$$

(1)  $x+y = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1) = 2\sqrt{2}$

$$xy = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$$

(2)  $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 = 6$

(3)  $x^2y + xy^2 = xy(x+y) = 1 \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

深化 1.2 それぞれの式において、 $x$  と  $y$  を入れ替えても式を整理するともとの式と同じになる。

演習 1.6 (1)  $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(5+2)+2\sqrt{5}\sqrt{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$

(2)  $\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{12-2\sqrt{27}} = \sqrt{(9+3)-2\sqrt{9 \cdot 3}}$   
 $= \sqrt{9} - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$

(3)  $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$   
 $= \frac{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3 \cdot 1}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

問題 1.6 (1)  $|0-3| - |0+2| = |-3| - |2| = 3-2 = 1$

(2)  $|5-3| - |5+2| = |2| - |7| = 2-7 = -5$

(3)  $|-4-3| - |-4+2| = |-7| - |-2| = 7-2 = 5$

問題 1.7 (1)  $x=3$  のとき

$$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(3+1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

(2)  $x=-1$  のとき

$$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(-1+1)^2} = \sqrt{0} = 0$$

(3)  $x=-3$  のとき

$$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(-3+1)^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

別解  $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

(1)  $x=3$  のとき  $|x+1| = |3+1| = |4| = 4$

(2)  $x=-1$  のとき  $|x+1| = |-1+1| = |0| = 0$

(3)  $x=-3$  のとき  $|x+1| = |-3+1| = |-2| = 2$

問題 1.8 (1)  $2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{54} = 2 \cdot 3\sqrt{3} - 3 \cdot 2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$   
 $= 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} = \mathbf{3\sqrt{6}}$

(2)  $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2$   
 $= 3 + 6\sqrt{2} + 6 = \mathbf{9 + 6\sqrt{2}}$

(3)  $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{8}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(4)  $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$   
 $= \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$   
 $= 2 \cdot 3 + 2\sqrt{6} + \sqrt{6} + 2 = \mathbf{8 + 3\sqrt{6}}$

(5)  $\frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{1^2 - (\sqrt{3})^2}$   
 $= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{-2} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

(6)  $\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

問題 1.9 (1)  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.4142}{2} = \mathbf{07071}$

(2)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{2 + \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$   
 $= 2 + \sqrt{2} = 2 + 1.4142 = \mathbf{3.4142}$

問題 1.10  $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}$

$y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{2} = 4 + \sqrt{15}$

$x + y = (4 - \sqrt{15}) + (4 + \sqrt{15}) = 8$

$xy = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = 1$

(1)  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 8^2 - 2 \cdot 1 = \mathbf{62}$

(2)  $x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = 1 \cdot 62 = \mathbf{62}$

(3)  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{62}{1} = \mathbf{62}$

問題 1.11  $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1$

$1 < \sqrt{3} < 2$  であるから  $2 < \sqrt{3}+1 < 3$

よって  $a = 2$ ,  $b = (\sqrt{3}+1) - 2 = \sqrt{3} - 1$

問題 1.12  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{3}$

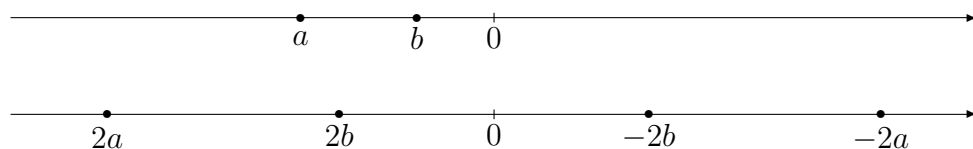
よって,  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  は正で, 2 乗すると 5 と等しくない数になるから,  $\sqrt{5}$  とは等しくない.

練習 1.38 (1)  $2x + 3 \geq 5$

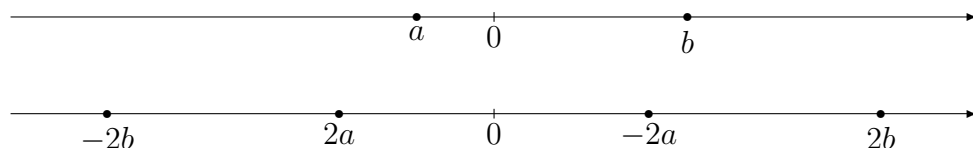
(2)  $-2 < a + b < 0$

(3)  $150x + 120 > 1000$

練習 1.39 (1) 図より,  $a < b$  ( $a < 0, b < 0$ ) のとき  $2a < 2b$ ,  $-2a > -2b$



(2) 図より,  $a < b$  ( $a < 0, b > 0$ ) のとき  $2a < 2b$ ,  $-2a > -2b$



練習 1.40 (1)  $a < b$  の両辺に正の数 3 を掛けても, 両辺の大小関係は変わらない.

よって  $3a < 3b$

(2)  $a < b$  の両辺に負の数  $-3$  を掛けると, 両辺の大小関係は入れかわる.

よって  $-3a > -3b$

(3)  $a < b$  の両辺を正の数 2 で割っても, 両辺の大小関係は変わらない.

よって  $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$

(4)  $a < b$  の両辺に負の数  $-2$  で割ると, 両辺の大小関係は入れかわる.

よって  $\frac{a}{-2} > \frac{b}{-2}$

- 練習 1.41 (1)  $a < b$  の両辺に正の数 4 を掛けると  $4a < 4b$   
 この両辺に 1 を足すと  $4a + 1 < 4b + 1$
- (2)  $a < b$  の両辺に負の数  $-1$  を掛けると  $-a > -b$   
 この両辺に 1 を足すと  $1 - a > 1 - b$
- (3)  $a < b$  の両辺を正の数 2 で割ると  $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$   
 この両辺から 3 を引くと  $\frac{a}{2} - 3 < \frac{b}{2} - 3$
- (4)  $a < b$  の両辺を負の数  $-5$  で割ると  $-\frac{a}{5} > -\frac{b}{5}$   
 この両辺に 2 を足すと  $-\frac{a}{5} + 2 > -\frac{b}{5} + 2$

- 練習 1.42 (1)  $5x - 2 < 2x + 4$  より  
 移項すると  $5x - 2x < 4 + 2$   
 整理すると  $3x < 6$   
 両辺を 3 で割って  $x < 2$
- (2)  $6x - 3 \geq 8x + 7$  より  
 移項すると  $6x - 8x < 7 + 3$   
 整理すると  $-2x \geq 10$   
 両辺を  $-2$  で割って  $x \leq -5$
- (3)  $2(4x - 1) \geq 5x - 11$  より  
 $8x - 2 \geq 5x - 11$   
 移項すると  $8x - 5x < -11 + 2$   
 整理すると  $3x \geq -9$   
 両辺を 3 で割って  $x \geq -3$
- (4)  $3(3 - 2x) < 4 - 3x$  より  
 $9 - 6x < 4 - 3x$   
 移項すると  $-6x + 3x < 4 - 9$   
 整理すると  $-3x < -5$   
 両辺を 3 で割って  $x > \frac{5}{3}$

練習 1.43 (1) 両辺に 14 を掛けると

$$14 \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) \leq 14 \left( \frac{2}{7}x + \frac{1}{2} \right)$$

すなわち

$$7x - 14 \leq 4x + 7$$

移項して整理すると

$$3x \leq 21$$

よって

$$x \leq 7$$

(2) 両辺に 12 を掛けると

$$12 \left( \frac{1}{3}x + 1 \right) < 12 \left( \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \right)$$

すなわち

$$4x + 12 < 9x - 6$$

移項して整理すると

$$-5x < -18$$

よって

$$x > \frac{18}{5}$$

練習 1.44 (1)  $6x - 9 < 2x - 1$  から  $4x < 8$

よって  $x < 2$

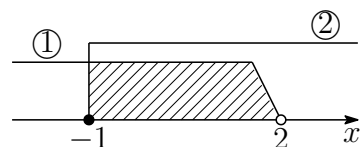
… ①

$3x + 7 \leq 4(2x + 3)$  から  $-5x \leq 5$

よって  $x \geq -1$

… ②

① と ② の共通部分を求めて  $-1 \leq x < 2$



(2)  $3x + 1 \geq 7x - 5$  から  $-4x \geq -6$

よって  $x \leq \frac{3}{2}$

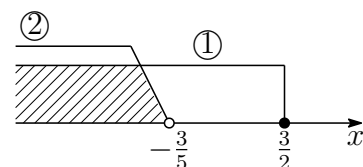
… ①

$-x + 6 < 3(1 - 2x)$  から  $5x < -3$

よって  $x < -\frac{3}{5}$

… ②

① と ② の共通部分を求めて  $x < -\frac{3}{5}$



練習 1.45 与えられた不等式から

$$\begin{cases} 3x < x + 12 \\ x + 12 < 2x + 8 \end{cases}$$

$3x < x + 12$  から

$$2x < 12$$

よって  $x < 6$  … ①

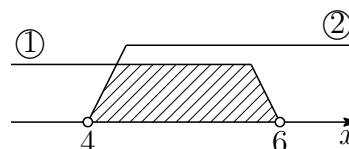
$x + 12 < 2x + 8$  から

$$-x < -4$$

よって  $x > 4$  … ②

①と②の共通範囲を求めて

$$4 < x < 6$$



練習 1.46 不等式を変形すると  $-7n \leq -100$

$$\text{よって } n \geq \frac{100}{7} = 14.2\cdots$$

これを満たす最小の自然数  $n$  は  $n = 15$

練習 1.47 両辺に 10 をかけると  $40 + 2(n - 4) > 5n$

整理すると  $-3n > -32$

$$\text{よって } n < \frac{32}{3} = 10.6\cdots$$

これを満たす最大の自然数  $n$  は  $n = 10$

深化 1.3 [解答例] 共通範囲のない 2 つの不等式  $x < -1$ ,  $x \geq 2$  から作る.

$$x < -1 \text{ から } x + 1 < 0$$

$$x \geq 2 \text{ から } x - 2 \geq 0$$

よって, 次の連立不等式は解をもたない.

$$\begin{cases} x + 1 < 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

練習 1.48 菓子 A を  $x$  個買うとすると、菓子 B は  $(30 - x)$  個買うことになる。  
このとき、菓子代と箱代の合計金額は

$$120x + 80(30 - x) + 100 \quad (\text{円})$$

これが 3000 円以下であるから

$$120x + 80(30 - x) + 100 \leq 3000$$

整理すると  $40x \leq 500$

よって  $x \leq \frac{500}{40} = 12.5$

これを満たす最大の整数  $x$  は  $x = 12$  (答) 12 個

練習 1.49 案内状を  $x$  部作るとする。  $x > 100$  のとき

A 店の製作費は  $5000 + 40(x - 100) = 40x + 1000$  (円)

B 店の製作費は  $4500 + 43(x - 100) = 43x + 200$  (円)

よって  $40x + 1000 < 43x + 200$

$$-3x < -800$$

$$x > \frac{800}{3} = 266.6\cdots$$

これを満たす最小の整数  $x$  は  $x = 267$  (答) 267 部以上

練習 1.50 (1)  $x = \pm 2$

(2)  $-5 < x < 5$

(3)  $x \leq -4, 4 \leq x$

- 練習 1.51 (1)  $|x + 4| = 2$  から  $x + 4 = \pm 2$   
よって  $x = -2, -6$
- (2)  $|x + 1| < 1$  から  $-1 < x + 1 < 1$   
各辺から 1 を引いて  $-2 < x < 0$
- (3)  $|x - 2| \geq 1$  から  $x - 2 \leq -1, 1 \leq x - 2$   
よって  $x \leq 1, 3 \leq x$
- (4)  $|2x - 3| = 1$  から  $2x - 3 = \pm 1$   
よって  $x = 2, 1$
- (5)  $|3x - 2| \leq 4$  から  $-4 \leq 3x - 2 \leq 4$   
各辺に 2 を足して  $-2 \leq 3x \leq 6$   
よって  $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$
- (6)  $|2x + 5| > 2$  から  $2x + 5 < -2, 2 < 2x + 5$   
すなわち  $2x < -7, -3 < 2x$   
よって  $x < -\frac{7}{2}, -\frac{3}{2} < x$

- 演習 1.7 (1)  $x - 3 \geq 0$  のとき  $|x - 3| = x - 3$   
 $x - 3 < 0$  のとき  $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$   
すなわち  $x \geq 3$  のとき  $|x - 3| = x - 3$   
 $x < 3$  のとき  $|x - 3| = -x + 3$
- (2)  $x + 2 \geq 0$  のとき  $|x + 2| = x + 2$   
 $x + 2 < 0$  のとき  $|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$   
すなわち  $x \geq -2$  のとき  $|x + 2| = x + 2$   
 $x < -2$  のとき  $|x + 2| = -x - 2$
- (3)  $2x - 3 \geq 0$  のとき  $|2x - 3| = 2x - 3$   
 $2x - 3 < 0$  のとき  $|2x - 3| = -(2x - 3) = -2x + 3$   
すなわち  $x \geq \frac{3}{2}$  のとき  $|2x - 3| = 2x - 3$   
 $x < \frac{3}{2}$  のとき  $|2x - 3| = -2x + 3$

演習 1.8 (1) [1]  $x - 3 \geq 0$  すなわち  $x \geq 3$  のとき

方程式は  $x - 3 = 2x$

よって  $x = -3$

これは,  $x \geq 3$  を満たさない.

[2]  $x - 3 < 0$  すなわち  $x < 3$  のとき

方程式は  $-(x - 3) = 2x$

よって  $x = 1$  これは,  $x < 3$  を満たす.

[1], [2] から, 求める解は  $x = 1$

(2) [1]  $x - 4 \geq 0$  すなわち  $x \geq 4$  のとき

不等式は  $x - 4 \leq 2x + 1$

よって  $x \geq -5$

これと  $x \geq 4$  との共通範囲は  $x \geq 4$  ... ①

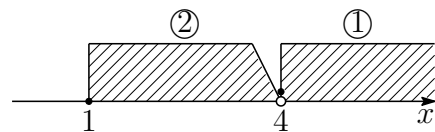
[2]  $x - 4 < 0$  すなわち  $x < 4$  のとき

不等式は  $-(x - 4) \leq 2x + 1$

よって  $x \geq 1$

これと  $x < 4$  との共通範囲は  $1 \leq x < 4$  ... ②

求める範囲は, ① と ② を合わせ  
た範囲で  $x \geq 1$



(3) [1]  $x + 1 \geq 0$  すなわち  $x \geq -1$  のとき

不等式は  $x + 1 \leq 5x$

よって  $x < \frac{1}{4}$

これと  $x \geq -1$  との共通範囲は  $-1 \leq x < \frac{1}{4}$  ... ①

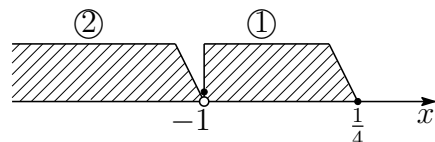
[2]  $x + 1 < 0$  すなわち  $x < -1$  のとき

不等式は  $-(x + 1) \leq 5x$

よって  $x < -\frac{1}{6}$

これと  $x < -1$  との共通範囲は  $x < -1$  ... ②

求める範囲は, ① と ② を合わせ  
た範囲で  $x < \frac{1}{4}$



問題 1.13 (1)  $36 - x < 2(12 + x)$  を整理すると

$$-3x < -12$$

$$\text{よって} \quad x > 4$$

$$(2) \quad \frac{x}{3} + \frac{10 - x}{2} \geq 4$$

$$\text{両辺に 6 を掛けると} \quad 2x + 3(10 - x) \geq 24$$

$$\text{不等式を整理すると} \quad -x \geq -6$$

$$\text{よって} \quad x \leq 6$$

$$(3) \quad 2x + 6 > 5x - 12 \text{ から} \quad -3x > -18$$

$$\text{よって} \quad x < 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$3x - 7 \leq 2(4 - x) \text{ から} \quad 5x \leq 15$$

$$\text{よって} \quad x \leq 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて} \quad x \leq 3$$

$$(4) \quad \text{各辺に 100 を掛けると} \quad 100 \times 0.05 \leq 100 \left( 0.2 - \frac{x}{100} \right) \leq 100 \times 0.1$$

$$\text{すなわち} \quad 5 \leq 20 - x \leq 10$$

$$\text{各辺から 20 を引くと} \quad -15 \leq -x \leq -10$$

$$\text{各辺に } -1 \text{ を掛けると} \quad 15 \geq x \geq 10$$

$$\text{よって} \quad 10 \leq x \leq 15$$

$$\text{問題 1.14} \quad x + a \geq 3x + 5 \text{ より} \quad x \leq \frac{a - 5}{2}$$

$$\frac{a - 5}{2} = 3 \text{ より} \quad a = 11$$

問題 1.15 大きい数を  $x$  とすると、小さい数は  $40 - x$  である.

$$\frac{1}{4}x < 40 - x < x \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} \frac{1}{4}x < 40 - x & \cdots \textcircled{1} \\ 40 - x < x & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ の両辺に 4 を掛けると} \quad x < 160 - 4x$$

$$\text{すなわち} \quad 5x < 160$$

$$\text{よって} \quad x < 32 \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \text{ から} \quad -2x < -40$$

$$\text{よって} \quad x > 20 \quad \cdots \textcircled{2}'$$

$$\textcircled{1}' \text{ と } \textcircled{2}' \text{ の共通範囲を求めて} \quad 20 < x < 32$$

よって、大きい数は 20 より大きく 32 より小さい.

問題 1.16 (1)  $|x - 3| = 5$  から  $x - 3 = \pm 5$   
よって  $x = 8, -2$

(2)  $|x + 4| \geq 1$  から  $x + 4 \leq -1, 1 \leq x + 4$   
すなわち  $x \leq -5, -3 \leq x$

(3)  $|2x - 1| < 7$  から  $-7 < 2x - 1 < 7$   
 $-6 < 2x < 8$   
よって  $-3 < x < 4$

(4)  $|3x + 5| \geq 2$  から  $3x + 5 \leq -2, 2 \leq 3x + 5$   
すなわち  $3x \leq -7, -3 \leq 3x$   
よって  $x \leq -\frac{7}{3}, -1 \leq x$

問題 1.17 (1) [1]  $2x - 4 \geq 0$  すなわち  $x \geq 2$  のとき  
方程式は  $2x - 4 = x + 1$   
よって  $x = 5$  これは,  $x \geq 2$  を満たす.

[2]  $2x - 4 < 0$  すなわち  $x < 2$  のとき  
方程式は  $-(2x - 4) = x + 1$   
よって  $x = 1$  これは,  $x < 2$  を満たす.

[1], [2] から, 求める解は  $x = 1, 5$

(2) [1]  $2x - 4 \geq 0$  すなわち  $x \geq 2$  のとき  
不等式は  $2x - 4 > x + 1$   
よって  $x > 5$   
これと  $x \geq 2$  との共通範囲は  $x > 5 \dots \textcircled{1}$

[2]  $2x - 4 < 0$  すなわち  $x < 2$  のとき  
不等式は  $-(2x - 4) > x + 1$   
よって  $x < 1$   
これと  $x < 2$  との共通範囲は  $x < 1 \dots \textcircled{2}$

求める解は, ①と②を合わせた範囲で  $x < 1, 5 < x$

問題 1.18 (1) 不等式 (A) から  $5 - x < 4x$ ,  $4x < 2x + 8$

ゆえに  $1 < x$ ,  $x < 4$

すなわち  $1 < x < 4 \quad \cdots \textcircled{1}$

不等式 (B) から  $5 - x < 4x$ ,  $5 - x < 2x + 8$

ゆえに  $1 < x$ ,  $-1 < x$

すなわち  $1 < x \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$  の解のうち,  $\textcircled{1}$  を満たさない最小の整数であるから  $x = 4$

(2) 不等式 (A) を求めるには, 不等式 (B) および不等式  $4x < 2x + 8$  を同時に満たす  $x$  の値の範囲を求める必要がある.

章末 1.1 (1) 
$$\begin{aligned} & (x^3 + 4 - 3x)(1 - 2x) \\ &= (x^3 + 4 - 3x) \cdot 1 + (x^3 + 4 - 3x) \cdot (-2x) \\ &= x^3 + 4 - 3x - 2x^4 - 8x + 6x^2 \\ &= -2x^4 + x^3 + 6x^2 - 11x + 4 \end{aligned}$$

(2) 
$$\begin{aligned} & (x - a)(x - b)(x - c) = \{x^2 - (a + b)x + ab\}(x - c) \\ &= \{x^2 - (a + b)x + ab\} \cdot x + \{x^2 - (a + b)x + ab\} \cdot (-c) \\ &= x^3 - (a + b)x^2 + abx - cx^2 + (ca + bc)x - abc \\ &= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc \end{aligned}$$

(3) 
$$\begin{aligned} & (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 3) \\ &= (x^2 - x)^2 + 4(x^2 - x) + 3 \\ &= x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x^2 - 4x + 3 \\ &= x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

(4) 
$$\begin{aligned} & (x + 1)(x + 2)(x - 5)(x - 6) \\ &= (x + 1)(x - 5) \times (x + 2)(x - 6) \\ &= (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x - 12) \\ &= (x^2 - 4x)^2 - 17(x^2 - 4x) + 60 \\ &= x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 17x^2 + 68x + 60 \\ &= x^4 - 8x^3 - x^2 + 68x + 60 \end{aligned}$$

(5) 
$$\begin{aligned} & (x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 6) \\ &= (x - 1)(x + 6) \times (x - 2)(x + 3) \\ &= (x^2 + 5x - 6)(x^2 + x - 6) \\ &= \{(x^2 - 6) + 5x\}\{(x^2 - 6) + x\} \\ &= (x^2 - 6)^2 + 6x(x^2 - 6x) + 5x^2 \\ &= x^4 - 12x^2 + 36 + 6x^3 - 36x^2 + 5x^2 \\ &= x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 36x + 36 \end{aligned}$$

章末 1.2 (1)  $6x^2 + (3a - 2b)x - ab = (2x + a)(3x - b)$

$$\begin{aligned} (2) \quad x^2 + y^2 - 2xy - z^2 &= (x - y)^2 - z^2 \\ &= \{(x - y) + z\}\{(x - y) - z\} \\ &= (x - y + z)(x - y - z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad &3x^2 + ax - 2a^2 + 4x - a + 1 \\ &= 3x^2 + (a + 4)x - (2a^2 + a - 1) \\ &= 3x^2 + (a + 4)x - (a + 1)(2a - 1) \\ &= \{x + (a + 1)\}\{3x - (2a - 1)\} \\ &= (x + a + 1)(3x - 2a + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad &ab^2 - bc^2 - b^2c - c^2a = (b^2 - c^2)a - bc(b + c) \\ &= (b + c)(b - c)a - bc(b + c) = (b + c)\{(b - c)a - bc\} \\ &= (b + c)(ab - bc - ca) \end{aligned}$$

章末 1.3 (1)  $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

$$\begin{aligned} &= (1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1^2 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 3 \\ &= 6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad &(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 5 = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad &\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad &\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} + \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2^2 - 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 2^2 + 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{2^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad &\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} = 1 \end{aligned}$$

章末 1.4  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$

(1)  $x \geq 1$  のとき,  $x - 1 \geq 0$  であるから

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$$

(2)  $x < 1$  のとき,  $x - 1 < 0$  であるから

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = -x + 1$$

章末 1.5 両辺に 6 をかけると  $6 \left\{ \frac{1}{2}(n + 3) + \frac{1}{6} \right\} > 6 \times \frac{1}{3}(4n - 1)$

すなわち  $3n + 9 + 1 > 8n - 2$

移項して整理すると  $-5n > -12$

よって  $n < \frac{12}{5} = 2.4$

不等式を満たす自然数  $n$  は  $n = 1, 2$

章末 1.6 歩く道のりを  $x$  m とすると

$$32 \leq \frac{x}{80} + \frac{4000 - x}{200} \leq 35$$

各辺に 400 をかけると

$$12800 \leq 5x + 2(4000 - x) \leq 14000$$

よって  $12800 \leq 3x + 8000 \leq 14000$

各辺から 8000 を引くと  $4800 \leq 3x \leq 6000$

各辺を 3 で割ると  $1600 \leq x \leq 2000$

(答) 1600m 以上 2000m 以下

章末 1.7  $|4x + 2| < 11$  より  $-11 < 4x + 2 < 11$

$$-13 < 4x < 9$$

よって  $-\frac{13}{4} < x < \frac{9}{4}$

$-\frac{13}{4} = -3.25, \frac{9}{4} = 2.25$  であるから, 不等式を満たす整数  $x$  の個数は 6 個

$$\begin{aligned}
\text{章末 1.8 (1)} \quad & (a+b+c+d)(a+b-c-d) \\
&= \{(a+b)+(c+d)\}\{(a+b)-(c+d)\} \\
&= (a+b)^2 - (c+d)^2 \\
&= (a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 + 2cd + d^2) \\
&= \mathbf{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab - 2cd} \\
(2) \quad & (a+b+c)^2 - (a-b-c)^2 \\
&= \{(a+b+c)+(a-b-c)\}\{(a+b+c)-(a-b-c)\} \\
&= 2a(2b+2c) = \mathbf{4ab + 4ac}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{章末 1.9 (1)} \quad & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 \\
&= (x+1)(x+4) \times (x+2)(x+3) - 24 \\
&= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24 \\
&= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) \\
&= (x^2 + 5x)\{(x^2 + 5x) + 10\} \\
&= \mathbf{x(x+5)(x^2 + 5x + 10)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & (b+c)(c+a)(a+b) + abc \\
&= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\} + abc \\
&= (b+c)a^2 + \{(b+c)^2 + bc\}a + bc(b+c) \\
&= \{a + (b+c)\}\{(b+c)a + bc\} \\
&= \mathbf{(a+b+c)(ab+bc+ca)}
\end{aligned}$$

章末 1.10  $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$  であるから

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\
&= 2^2 - 2 \cdot (-1) = \mathbf{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{章末 1.11 (1)} \quad & (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 \\
&= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = \mathbf{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} \\
&= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}}{4}
\end{aligned}$$

章末 1.12 (1)  $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \sqrt{5}+2$

$2 < \sqrt{5} < 3$  であるから  $4 < \sqrt{5}+2 < 5$

よって  $a = 4, b = (\sqrt{5}+2) - 4 = \sqrt{5} - 2$

(2)  $b + \frac{1}{b} = \sqrt{5} - 2 + \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$   
 $= \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} + 2 = 2\sqrt{5}$

$b^2 + \frac{1}{b^2} = \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 - 2 = (2\sqrt{5})^2 - 2 = 18$

章末 1.13 買う商品の個数を  $x$  個とする ( $x > 10$ ).

A 店で買うと  $x \times 100 \times \frac{88}{100} = 88x$  (円)

B 店で買うと  $10 \times 100 + (x - 10) \times 100 \times \frac{75}{100} = 1000 + 75(x - 10)$  (円)

よって  $88x > 1000 + 75(x - 10)$

整理すると  $13x > 250$

$x > \frac{250}{13} = 19.2 \dots$

B 店で買った方が安くなるのは、20 個以上買うときである。 (答) 20 個以上

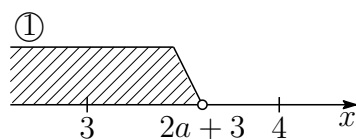
章末 1.14  $3(x-1) < 2(x+a)$  から  $x < 2a+3 \dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$  を満たす最大の整数  $x$  が  $x = 3$  であるから

$3 < 2a+3 \leq 4$

よって  $0 < 2a \leq 1$

したがって  $0 < a < \frac{1}{2}$



章末 1.15 [1]  $x < 0$  のとき  $|x| + |x-2| = -x - (x-2) = -2x+2$

$-2x+2 = 4$  を解くと  $x = -1$  これは  $x < 0$  を満たす.

[2]  $0 \leq x < 2$  のとき  $|x| + |x-2| = x - (x-2) = 2$

このとき、方程式の解はない.

[3]  $x \geq 2$  のとき  $|x| + |x-2| = x + (x-2) = 2x-2$

$2x-2 = 4$  を解くと  $x = 3$  これは  $x \geq 2$  を満たす.

[1] ~ [3] より  $x = -1, 3$

練習 2.1 (1)  $4 \in Q$

(2)  $-\frac{2}{3} \in Q$

(3)  $\sqrt{2} \notin Q$

練習 2.2 (1)  $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

(2)  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(3)  $C = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$

深化 2.1  $C = \{x \mid x \text{ は } 15 \text{ 以下の正の奇数}\}$

$$C = \{2n + 1 \mid n = 0, 1, \dots, 7\}$$

$$C = \{2n - 1 \mid n = 1, 2, \dots, 8\} \quad \text{など}$$

練習 2.3 (1)  $A \subset B$

(2)  $D = \{1, 2, 5, 10\}$  より  $C = D$

(3)  $P = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ ,  $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  より  $Q \subset P$

練習 2.4 (1)  $\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

(2)  $\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

練習 2.5 (1)  $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

(2)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

(3)  $B \cap C = \phi$

(4)  $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

練習 2.6  $A \cap B = \{x \mid 0 < x \leq 2, x \text{ は実数}\}$

$$A \cup B = \{x \mid -2 \leq x < 4, x \text{ は実数}\}$$

練習 2.7 (1)  $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$

(2)  $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

(3)  $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 5\}$

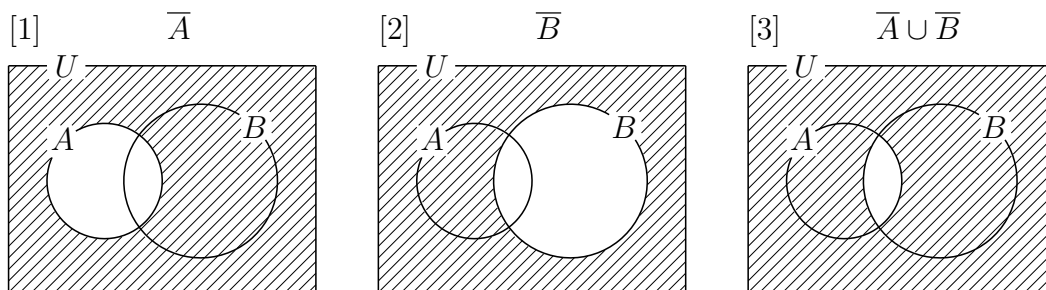
(4)  $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

(5)  $\overline{A} \cap B = \{6\}$

(6)  $A \cap \overline{B} = \{1, 2\}$

練習 2.8  $\overline{A}$  と  $\overline{B}$  は、それぞれ図 [1] と図 [2] の斜線部分であり、その和集合  $\overline{A \cap B}$  は、図 [3] の斜線部分である。

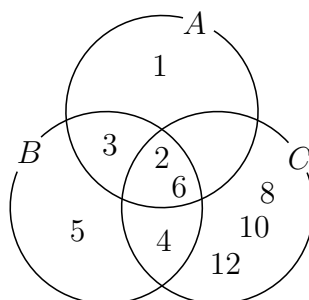
図 [3] の斜線部分は  $\overline{A \cap B}$  であるから、 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  が成り立つ。



演習 2.1  $A = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  について

$$A \cap B \cap C = \{2, 6\}$$

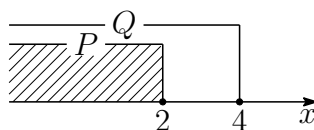
$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$$



練習 2.9 (1) 偽

(2) 真

練習 2.10 (1) 条件  $p$  を満たすものの集合を  $P$ , 条件  $q$  を満たすものの集合を  $Q$  とする.  
 下の図より  $P \subset Q$  が成り立つから, 命題  $p \implies q$  は真である.



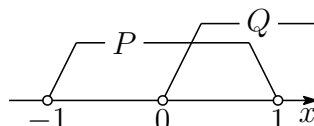
(2) 条件  $p$  を満たすものの集合を  $P$ , 条件  $q$  を満たすものの集合を  $Q$  とする.

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

よって,  $P \subset Q$  が成り立つから, 命題  $p \implies q$  は真である.

(3) 条件  $p$  を満たすものの集合を  $P$ , 条件  $q$  を満たすものの集合を  $Q$  とする.  
 下の図より  $P \subset Q$  が成り立たないから, 命題  $p \implies q$  は偽である.



練習 2.11  $n = 2$  は素数であるが, 奇数ではない.

よって, この命題は偽である.

練習 2.12 (1) 「 $x = -2 \implies x^2 = 4$ 」は真,  
 「 $x^2 = 4 \implies x = -2$ 」は偽 (反例:  $x = 2$ )  
 よって 十分

(2) 「 $x > 0 \implies x > 1$ 」は偽 (反例:  $x = 1$ )  
 「 $x > 1 \implies x > 0$ 」は真  
 よって 必要

(3) 「 $x = y \implies (x - y)x = 0$ 」は真,  
 「 $(x - y)x = 0 \implies x = y$ 」は偽 (反例:  $x = 0, y = 1$ )  
 よって 十分

練習 2.13 ① 「 $x + z = y + z \iff x = y$ 」が成り立つ.

② 「 $x^2 = y^2 \implies x = y$ 」は偽 (反例:  $x = 1, y = -1$ )

③ 「 $(x - y)^2 = 0 \iff x - y = 0$ 」が成り立つ.

すなわち 「 $(x - y)^2 = 0 \iff x = y$ 」が成り立つ.

よって,  $x = y$  と同値な条件は ①, ③

- 練習 2.14 (1) 「 $\triangle ABC$  が正三角形  $\implies \triangle ABC$  は二等辺三角形」は真  
「 $\triangle ABC$  が二等辺三角形  $\implies \triangle ABC$  は正三角形」は偽  
よって 十分条件であるが必要条件ではない.
- (2) 「 $x < 3 \implies -1 < x < 1$ 」は偽 (反例:  $x = 2$ )  
「 $-1 < x < 1 \implies x < 3$ 」は真  
よって 必要条件であるが十分条件ではない
- (3) 「 $|x| = |y| \implies x^2 = y^2$ 」は真,  
「 $x^2 = y^2 \implies |x| = |y|$ 」は真  
よって 必要十分条件である

深化 2.2  $q: n$  は 3 の倍数

$q: n$  は偶数 など

- 練習 2.15 (1)  $n$  は奇数である ( $n$  は偶数でない)  
(2)  $n$  は 5 以上である

- 練習 2.16 (1)  $x < 0$  または  $y < 0$   
(2)  $x \neq 0$  かつ  $y \neq 0$   
(3)  $x, y$  の少なくとも一方は無理数

- 練習 2.17 (1) 命題「 $x > y \implies x - y > 0$ 」は真である.  
逆は 「 $x - y > 0 \implies x > y$ 」 これは真である.  
対偶は 「 $x - y \leq 0 \implies x \leq y$ 」 これは真である.  
裏は 「 $x \leq y \implies x - y \leq 0$ 」 これは真である.
- (2) 命題「 $x \neq 0 \implies xy \neq 0$ 」は偽である. (反例:  $x = 1, y = 0$ )  
逆は 「 $xy \neq 0 \implies x \neq 0$ 」 これは真である.  
対偶は 「 $xy = 0 \implies x = 0$ 」 これは偽である. (反例:  $x = 1, y = 0$ )  
裏は 「 $x = 0 \implies xy = 0$ 」 これは真である.

練習 2.18 証明 対偶「 $n$  が偶数ならば,  $n^2$  は偶数である」を証明する.

$n$  が偶数のとき,  $n$  はある整数  $k$  を用いて  $n = 2k$  と表される. このとき

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$$

$2k^2$  は整数であるから,  $n^2$  は偶数である.

よって, 対偶は真であり, もとの命題も真である.

証終

練習 2.19 証明  $1+3\sqrt{2}$  が無理数でないとは定すると、 $1+3\sqrt{2}$  は有理数である。その有理数を  $r$  とすると、 $1+3\sqrt{2}=r$  より

$$\sqrt{2} = \frac{r-1}{3}$$

$r$  が有理数ならば  $\frac{r-1}{3}$  も有理数であるから、この等式は  $\sqrt{2}$  が無理数であることに矛盾する。したがって、 $1+3\sqrt{2}$  は無理数である。 証終

問題 2.1 (1)  $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  であるから

$$A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16\}$$

(2)  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{-1, 1, 3\}$  であるから

$$A \cap B = \{-1, 1\}$$

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

問題 2.2 (1)  $A \cap B = \{3, 5\}$

$$(2) \overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

$$(3) \overline{A \cup B} = \{4, 6, 7, 9\}$$

$$(4) A \cap \overline{B} = \{2, 8\}$$

問題 2.3 (1) 「 $n$  が  $A$  に属する  $\implies n$  が 10 で割り切れる」は偽（反例： $n=5$ ）

「 $n$  が 10 で割り切れる  $\implies n$  が  $A$  に属する」は真

よって 必要条件であるが十分条件ではない

(2) 「 $n$  が  $B$  に属する  $\implies n$  が 2 で割り切れる」は真

「 $n$  が 2 で割り切れる  $\implies n$  が  $B$  に属する」は偽（反例： $n=2$ ）

よって 十分条件であるが必要条件ではない

(3)  $A \cap B = \{k \mid k \text{ は } 30 \text{ で割り切れる自然数}\}$

よって 必要十分条件である

問題 2.4 対偶「 $a, b$  はともに有理数  $\implies a+b$  は有理数」は真である。

よって、もとの命題も真である。

問題 2.5  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \{3, 5, 7, 9\}$  である.

- ①  $1 \in A$  は, 1 が集合  $A$  の要素であることを表している. これは正しい.
- ②  $\{3\}$  は 3 だけが属する集合を表し,  $\in$  は要素と集合の関係を表す記号であるから, 記号の使い方が誤っている.
- ③  $\{7\} \subset B$  は, 集合  $\{7\}$  が集合  $B$  の部分集合であることを表している. これは正しい.
- ④  $\phi \in A$  は, 空集合が集合  $A$  の部分集合であることを表している. これは正しい.
- ⑤  $A = B$  は集合  $A$  と集合  $B$  の要素が一致していることを表している. これは誤りである.
- ⑥  $A \supset B$  は, 集合  $B$  が集合  $A$  の部分集合であることを表している. これは正しい.

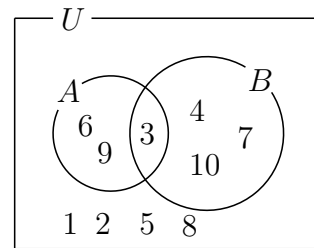
よって, 正しく表現しているものは ①, ③, ④, ⑥

章末 2.1  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 2, 5, 8\},$$

$$A \cap B = \{3\},$$

$$\overline{A} \cap B = \{4, 7, 10\}$$



右の図から  $A = \{3, 6, 9\}$ ,  $B = \{3, 4, 7, 10\}$

章末 2.2 逆「 $m, n, k$  の少なくとも 1 つは偶数  $\implies$  積  $mnk$  は偶数」は真  
 対偶「 $m, n, k$  はいずれも奇数  $\implies$  積  $mnk$  は奇数」は真  
 裏「積  $mnk$  は奇数  $\implies m, n, k$  はいずれも奇数」は真

章末 2.3  $A \cap B = \{1, 4\}$  より,  $A$  の要素に 4 が含まれるから

$$a = 4 \quad \text{または} \quad a + 1 = 4$$

(i)  $a = 4$  のとき,  $A = \{1, 4, 5\}$ ,  $B = \{6, 4, 1\}$

$A \cap B = \{1, 4\}$  となり, 条件を満たす.

このとき  $A \cup B = \{1, 4, 5, 6\}$

(ii)  $a + 1 = 4$ , すなわち,  $a = 3$  のとき,  $A = \{1, 3, 4\}$ ,  $B = \{6, 5, 0\}$

このとき,  $A \cap B = \phi$  となり, 条件に反する.

よって  $a = 4$ ,  $A \cup B = \{1, 4, 5, 6\}$

章末 2.4 (1) 偽である. 反例:  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = -\sqrt{2}$

(2) 真である.

証明 対偶「 $a + b$ ,  $a - b$  がともに有理数ならば,  $a$ ,  $b$  の少なくとも一方は有理数である」を証明する.

$a + b$ ,  $a - b$  は有理数であるから,  $p$ ,  $q$  を有理数として

$$p = a + b, \quad q = a - b$$

とおくことができる. これを  $a$ ,  $b$  について解くと

$$a = \frac{p+q}{2}, \quad b = \frac{p-q}{2}$$

$p$ ,  $q$  はともに有理数であるから,  $a$ ,  $b$  もともに有理数である.

よって, 対偶は真であり, もとの命題も真である.

証終

章末 2.5 (1)  $a + b\sqrt{2} = 0 \quad \dots (*)$

$b \neq 0$  とすると,  $(*)$  より  $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$

$a$ ,  $b$  が有理数であるから,  $-\frac{a}{b}$  は有理数である.

このことは,  $\sqrt{2}$  が無理数であることに矛盾する.

したがって,  $b = 0$  となり, これを  $(*)$  に代入すると  $a = 0$

よって, 本命題は真である.

(2)  $a$ ,  $b$  が有理数ならば,  $a - 2$ ,  $b + 3$  はともに有理数である.

(1) の結論を  $(a - 2) + (b + 3)\sqrt{2} = 0$  に適用すると

$$a - 2 = 0, \quad b + 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = 2, \quad b = -3$$

演習 2.2 (1) 与えられた命題の否定は 「ある実数  $x$  について  $x + 1 \leq 0$ 」  
もとの命題は偽であり，その否定は真である．

補足  $x = -2$  のとき， $x + 1 \leq 0$  であるから，もとの命題は偽である．

(2) 与えられた命題の否定は

「すべての素数  $n$  について  $n + 2$  は素数ではない．」

もとの命題は真であり，その否定は偽である．

補足  $n = 3$  のとき， $n + 2$  は素数であるから，もとの命題は真である．

練習 3.1 (1)  $f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$

$$(2) f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$(3) f(-a) = (-a)^2 - 2 \cdot (-a) + 1 = a^2 + 2a + 1$$

$$(4) f(a+1) = (a+1)^2 - 2(a+1) + 1 \\ = a^2 + 2a + 1 - 2a - 2 + 1 = a^2$$

練習 3.2 三角形の面積は  $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x = 2x$

$$\text{したがって } y = 2x \quad (x \geq 4)$$

練習 3.3 (1) 第 1 象限

(2) 第 4 象限

(3) 第 2 象限

(4) 第 3 象限

深化 3.1 点 (2, 5) を通り、傾き  $a$  の直線は

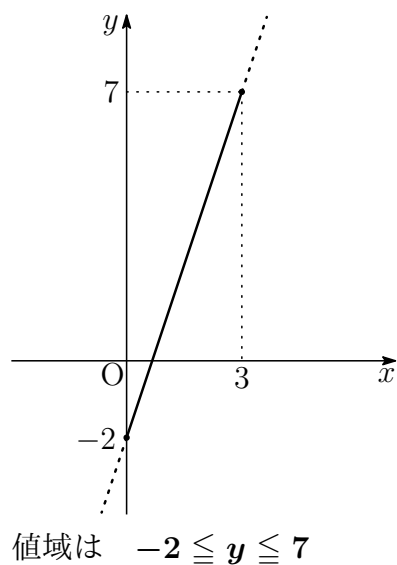
$$y = a(x - 2) + 5 \quad \text{すなわち} \quad y = ax - 2a + 5$$

とくに点  $(-1, -1)$  を通るとき

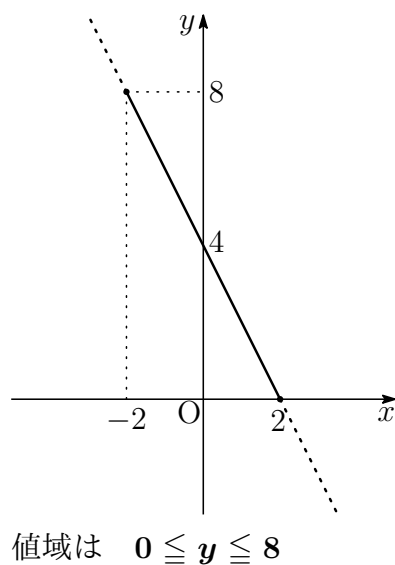
$$-1 = a \cdot (-1) - 2a + 5 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

$$\text{よって} \quad y = 2x + 1$$

練習 3.4 (1)



(2)

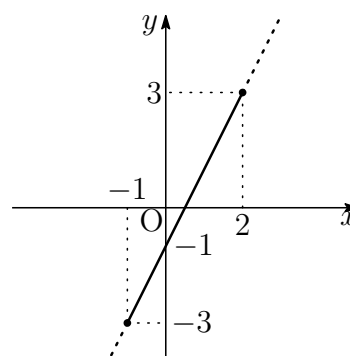


- 練習 3.5 (1) この関数のグラフは右の図の実線部分である。  
よって、関数の値域は

$$-3 \leq y \leq 3$$

である。

また、この関数は  $x = 2$  で最大値  $3$  をとり、 $x = -1$  で最小値  $-3$  をとる。

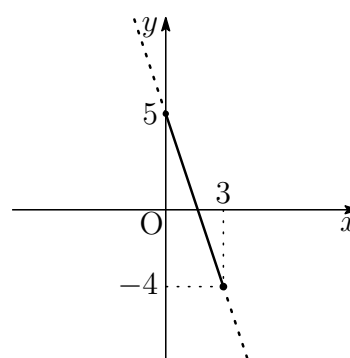


- (2) この関数のグラフは右の図の実線部分である。  
よって、関数の値域は

$$-4 \leq y \leq 5$$

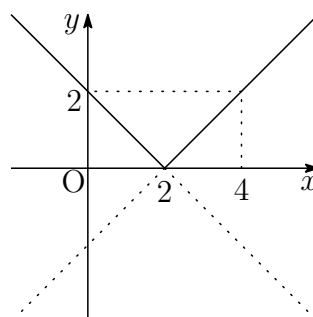
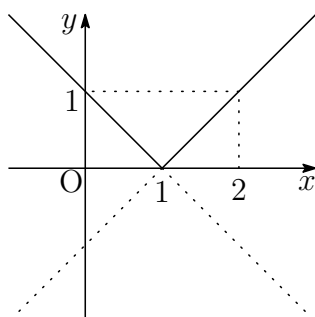
である。

また、この関数は  $x = 0$  で最大値  $5$  をとり、 $x = 3$  で最小値  $-4$  をとる。

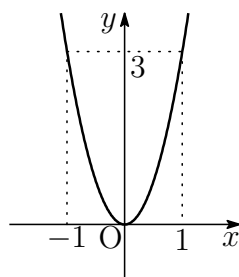


- 演習 3.1 (1)

- (2)  $x \geq 2$  のとき  $y = x - 2$   
 $x < 2$  のとき  $y = -x + 2$

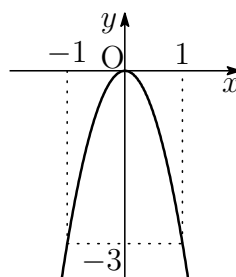


- 練習 3.6 (1)



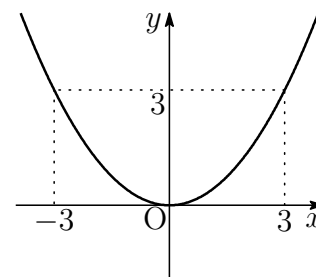
下に凸

- (2)



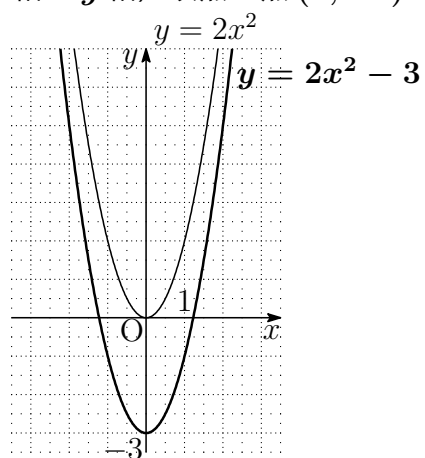
上に凸

- (3)

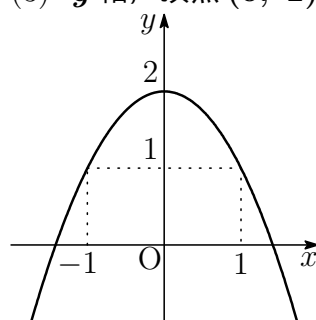
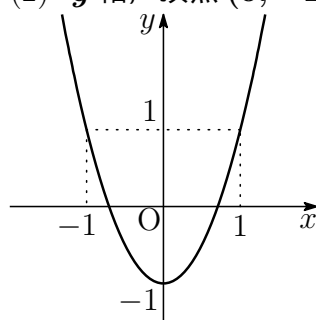
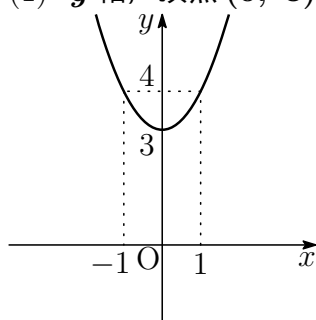


下に凸

演習 3.2 軸は  $y$  軸, 頂点は点  $(0, -3)$



練習 3.7 (1)  $y$  軸, 頂点  $(0, 3)$  (2)  $y$  軸, 頂点  $(0, -1)$  (3)  $y$  軸, 頂点  $(0, 2)$



演習 3.3  $y = 2x^2$  と  $y = 2(x + 3)^2$  の関数の値を調べると、次のような表ができる。

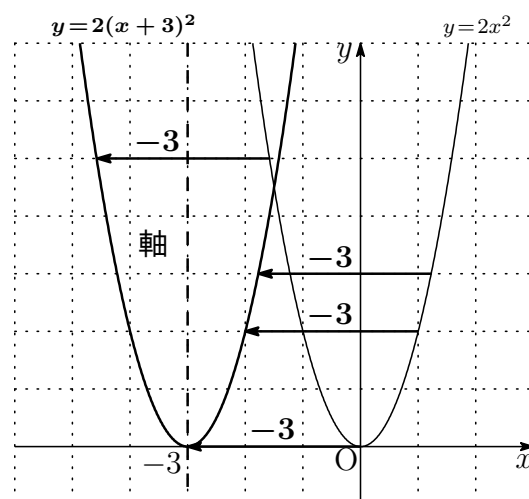
|              |          |    |    |    |    |    |    |    |    |          |
|--------------|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----------|
| $x$          | $\cdots$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0  | 1  | 2  | $\cdots$ |
| $2x^2$       | $\cdots$ | 50 | 32 | 18 | 8  | 2  | 0  | 2  | 8  | $\cdots$ |
| $2(x + 3)^2$ | $\cdots$ | 8  | 2  | 0  | 2  | 8  | 18 | 32 | 50 | $\cdots$ |

したがって、 $y = 2(x + 3)^2$  のグラフは、 $y = 2x^2$  のグラフを、

$x$  軸方向に  $-3$  だけ平行移動したもの

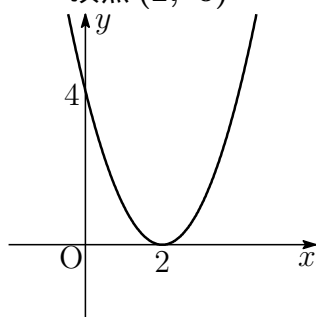
であり、右の図のようになる。

その軸は直線  $x = -3$  である。また、頂点は点  $(-3, 0)$  である。



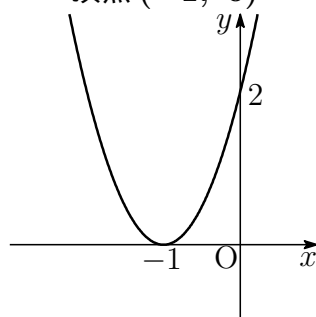
練習 3.8 (1) 軸  $x = 2$

頂点  $(2, 0)$



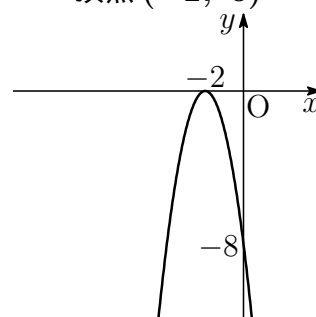
(2) 軸  $x = -1$

頂点  $(-1, 0)$

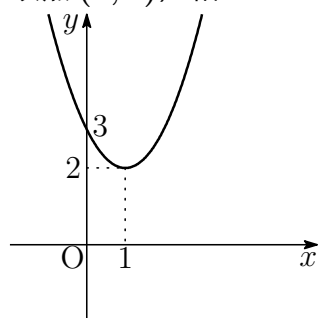


(3) 軸  $x = -2$

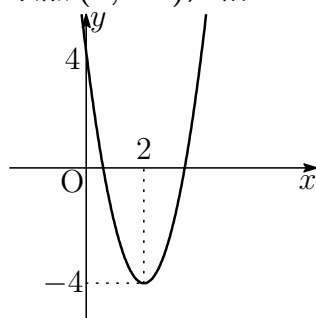
頂点  $(-2, 0)$



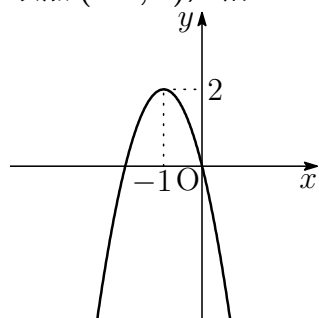
練習 3.9 (1) 頂点  $(1, 2)$ , 軸  $x = 1$



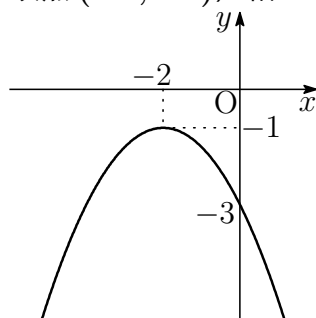
(2) 頂点  $(2, -4)$ , 軸  $x = 2$



(3) 頂点  $(-1, 2)$ , 軸  $x = -1$



(4) 頂点  $(-2, -1)$ , 軸  $x = -2$



演習 3.4 (1)  $y = (x - 1)^2 + 3$

(2)  $y = 2(x - 1)^2 - 3$

(3)  $y = 2(x + 1)^2 + 3$

補足 2次関数  $y = ax^2$  のグラフを,  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動させると,  $y = a(x - p)^2 + q$  のグラフになる.

| もとの式           | $x$ 軸方向 | $y$ 軸方向 | 平行移動後の式                                                   |
|----------------|---------|---------|-----------------------------------------------------------|
| (1) $y = 2x^2$ | 1       | 3       | $y = 2(x - 1)^2 + 3$                                      |
| (2) $y = 2x^2$ | 1       | -3      | $y = 2(x - 1)^2 - 3$                                      |
| (3) $y = 2x^2$ | -1      | 3       | $y = 2\{x - (-1)\}^2 + 3$<br>すなわち<br>$y = 2(x + 1)^2 + 3$ |

練習 3.10 (1)  $x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 4^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{4})^2 - \mathbf{16}$

(2)  $x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 3^2 + 8 = (\mathbf{x} - \mathbf{3})^2 - \mathbf{1}$

(3)  $2x^2 - 8x + 5 = 2(x^2 - 4x) + 5 = 2\{(x - 2)^2 - 2^2\} + 5$   
 $= 2(x - 2)^2 - 2 \cdot 4 + 5 = \mathbf{2(x - 2)^2 - 3}$

(4)  $3x^2 + 6x + 2 = 3(x^2 + 2x) + 2 = 3\{(x + 1)^2 - 1^2\} + 2$   
 $= 3(x + 1)^2 - 3 \cdot 1 + 2 = \mathbf{3(x + 1)^2 - 1}$

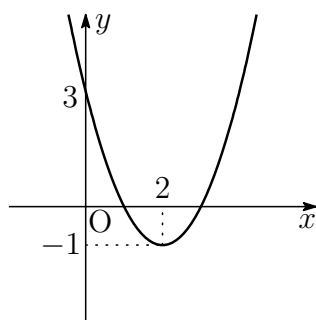
(5)  $x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^2 - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$

(6)  $-2x^2 + 6x + 4 = -2(x^2 - 3x) + 4 = -2\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} + 4$   
 $= -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{9}{4} + 4 = \mathbf{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2}}$

練習 3.11 (1)  $y = x^2 - 4x + 3$   
 $= (x - 2)^2 - 2^2 + 3$   
 $= (x - 2)^2 - 1$

軸は直線  $x = 2$

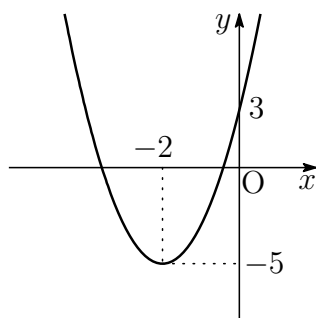
頂点は点  $(2, -1)$



(2)  $y = 2x^2 + 8x + 3$   
 $= 2(x^2 + 4x) + 3$   
 $= 2\{(x + 2)^2 - 2^2\} + 3$   
 $= 2(x + 2)^2 - 5$

軸は直線  $x = -2$

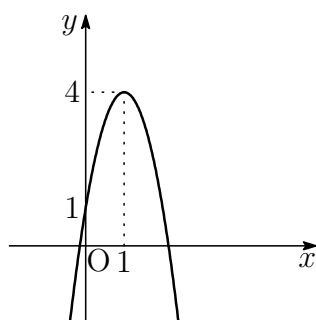
頂点は点  $(-2, -5)$



(3)  $y = -3x^2 + 6x + 1$   
 $= -3(x^2 - 2x) + 1$   
 $= -3\{(x - 1)^2 - 1^2\} + 1$   
 $= -3(x - 1)^2 + 4$

軸は直線  $x = 1$

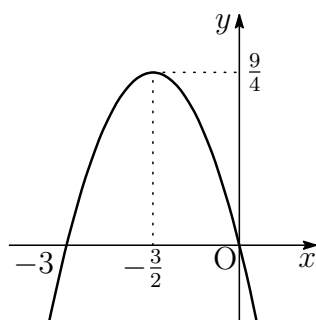
頂点は点  $(1, 4)$



(4)  $y = -x^2 - 3x$   
 $= -(x^2 + 3x)$   
 $= -\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}$   
 $= -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

軸は直線  $x = -\frac{3}{2}$

頂点は点  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$



深化 3.2 (例)  $y = x^2 + x - 1$ ,  $y = x^2 - x + 3$ ,  $y = -x^2 + 3x + 3$ ,  $y = 2x^2 - 3$  など. このうち, 点  $(-1, -1)$  を通るのは  $y = x^2 + x - 1$ ,  $y = 2x^2 - 3$

別解  $y = a(x - 2)^2 + 5$ , すなわち,  $y = ax^2 - 4ax + 4a + 5$  ( $a$  は定数)

このうち, 点  $(-1, -1)$  を通るとき

$$-1 = a(-3)^2 + 5 \quad \text{これを解いて} \quad a = -\frac{2}{3}$$

$$\text{よって, 点 } (-1, -1) \text{ を通るのは } y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$$

練習 3.12  $y = 2x^2 - 4x$  を変形すると  $y = 2(x - 1)^2 - 2$

$y = 2x^2 + 4x - 3$  を変形すると  $y = 2(x + 1)^2 - 5$

よって, 頂点は点  $(1, -2)$  から点  $(-1, -5)$  に移動する.

したがって,  $x$  軸方向に  $-2$ ,  $y$  軸方向に  $-3$  だけ平行移動すればよい.

演習 3.5  $y - 1 = 2(x + 2)^2 - 5(x + 2) + 3$  すなわち  $y = 2x^2 + 3x + 2$

演習 3.6  $x$  軸:  $-y = x^2 + 4x + 1$  すなわち  $y = -x^2 - 4x - 1$

$y$  軸:  $y = (-x)^2 + 4(-x) + 1$  すなわち  $y = x^2 - 4x + 1$

原点:  $-y = (-x)^2 + 4(-x) + 1$  すなわち  $y = -x^2 + 4x - 1$

問題 3.1 (1)  $f(1) = a \cdot 1^2 - b \cdot 1 - a + b = a - b - a + b = 0$

(2)  $f(0) = a \cdot 0^2 - b \cdot 0 - a + b = -a + b$

(3)  $f(-2) = a \cdot (-2)^2 - b \cdot (-2) - a + b$   
 $= 4a + 2b - a + b = 3a + 3b$

問題 3.2  $a < 0$  であるから, この関数のグラフは右下がりである.

よって,  $x = -1$  のとき  $y = 13$  より  $-a + b = 13 \quad \cdots \textcircled{1}$

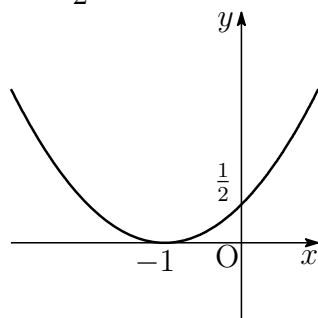
$x = 5$  のとき  $y = 1$  より  $5a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$

$a < 0$  に注意して, ①, ② を解くと  $a = -2$ ,  $b = 11$

問題 3.3 (1)  $y = -2(x - 1)^2 - 3$  ( $y = -2x^2 + 4x - 5$ )

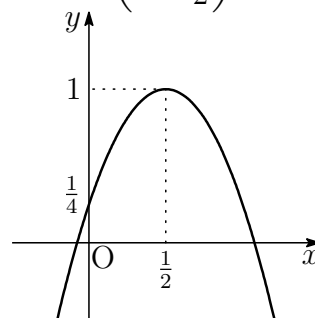
(2)  $y = -2(x + 2)^2 + 5$  ( $y = -2x^2 - 8x - 3$ )

問題 3.4 (1)  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$



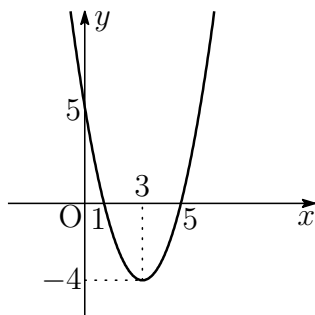
軸  $x = -1$ , 頂点  $(-1, 0)$

(2)  $y = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$



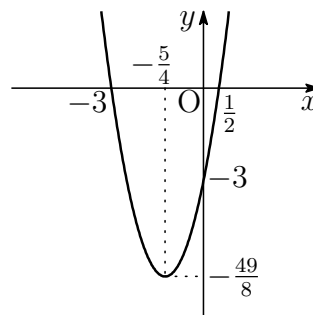
軸  $x = \frac{1}{2}$ , 頂点  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(3)  $y = (x-3)^2 - 4$



軸  $x = 3$ , 頂点  $(3, -4)$

(4)  $y = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$



軸  $x = -\frac{5}{4}$ , 頂点  $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8}\right)$

問題 3.5 (1)  $y = 2(x-1)^2 - 3$

したがって  $A(1, -3)$

(2) 移動後の放物線の頂点の座標は

$(1+2, -3-1)$  すなわち  $(3, -4)$

放物線  $y = 2x^2 - 4x - 1$  を平行移動するから,

求める式は  $y = 2(x-3)^2 - 4$  ( $y = 2x^2 - 12x + 14$ )

別解 (2)  $y - (-1) = 2(x-2)^2 - 4(x-2) - 1$  より  $y = 2x^2 - 12x + 14$

問題 3.6 (1)  $y = f(x)$  のグラフの頂点

(2)  $f(0)$  は正,  $g(0)$  は負

練習 3.13 (1)  $x = 3$  で最小値 4, 最大値はなし

(2)  $x = -1$  で最大値  $-3$ , 最小値はなし

練習 3.14 (1) 関数の式を変形すると  $y = (x - 3)^2 - 4$

よって  $x = 3$  で最小値  $-4$ , 最大値はない

(2) 関数の式を変形すると  $y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$

よって  $x = \frac{5}{4}$  で最大値  $\frac{25}{8}$ , 最小値はない

深化 3.3 (例)  $y = (x + 1)^2 + 3$ ,  $y = 2x^2 + 4x + 5$  など

別解  $y = a(x + 1)^2 + q$  ( $a, q$  は定数. ただし,  $a > 0$ )

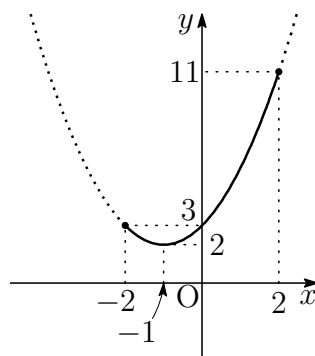
練習 3.15 (1)  $y = x^2 + 2x + 3$  を変形すると

$$y = (x + 1)^2 + 2$$

$-2 \leq x \leq 2$  でのグラフは、  
右の図の実線部分である。

よって、 $y$  は

$x = 2$  で最大値 11 をとり、  
 $x = -1$  で最小値 2 をとる。



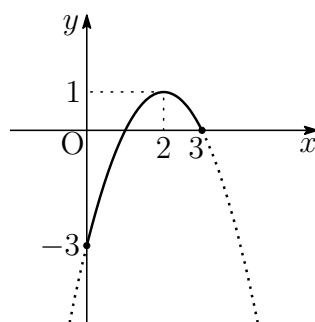
(2)  $y = -x^2 + 4x - 3$  を変形すると

$$y = -(x - 2)^2 + 1$$

$0 \leq x \leq 3$  でのグラフは、  
右の図の実線部分である。

よって、 $y$  は

$x = 2$  で最大値 1 をとり、  
 $x = 0$  で最小値 -3 をとる。



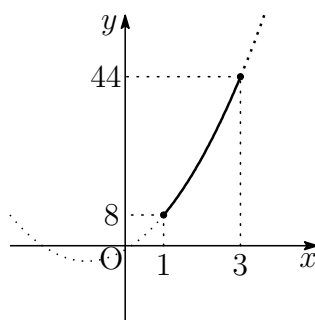
(3)  $y = 3x^2 + 6x - 1$  を変形すると

$$y = 3(x + 1)^2 - 4$$

$1 \leq x \leq 3$  でのグラフは、  
右の図の実線部分である。

よって、 $y$  は

$x = 3$  で最大値 44 をとり、  
 $x = 1$  で最小値 8 をとる。



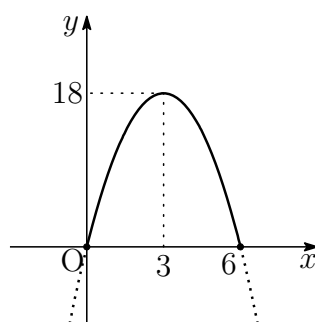
(4)  $y = -2x^2 + 12x$  を変形すると

$$y = -2(x - 3)^2 + 18$$

$0 \leq x \leq 6$  でのグラフは、  
右の図の実線部分である。

よって、 $y$  は

$x = 3$  で最大値 18 をとり、  
 $x = 0, 6$  で最小値 0 をとる。



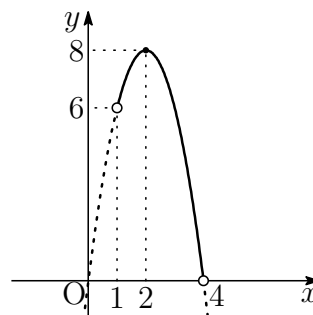
演習 3.7  $y = -2x^2 + 8x$  を変形すると

$$y = -2(x-2)^2 + 8$$

$1 < x < 4$  でのグラフは、右の図の実線部分である。よって、 $y$  は

$x = 2$  で最大値 8 をとる。

最小値はない。



補足  $y$  は 0 にいくらでも近い値をとるが、定義域のどんな  $x$  に対しても  $y = 0$  とはならないので、最小値は存在しない。

深化 3.4 (例)  $0 \leq x \leq 3$ ,  $-1 \leq x \leq 4$  など

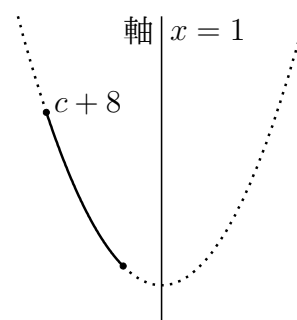
練習 3.16 (1) 式を変形すると  $y = (x-1)^2 + c - 1$

$-2 \leq x \leq 0$  であるから、 $x = -2$  で最大値をとる。

$x = -2$  のとき

$$y = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + c = c + 8$$

$$c + 8 = 5 \text{ より } c = -3$$



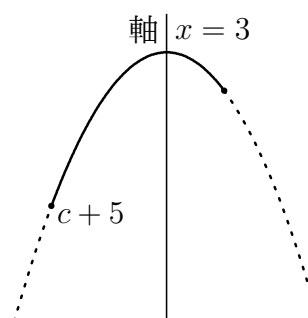
(2) 式を変形すると  $y = -(x-3)^2 + c + 9$

$1 \leq x \leq 4$  であるから、 $x = 3$  で最小値をとる。

$x = 3$  のとき

$$y = -1^2 + 6 \cdot 1 + c = c + 5$$

$$c + 5 = -7 \text{ より } c = -12$$



練習 3.17 関数の式を変形すると  $y = -(x-1)^2 + 2$  ( $0 \leq x \leq a$ )

[1]  $0 < a < 1$  のとき

図 [1] の実線部分である.

よって,  $y$  は  $x = a$  で最大値  $-a^2 + 2a + 1$  をとる.

[2]  $1 \leq a$  のとき

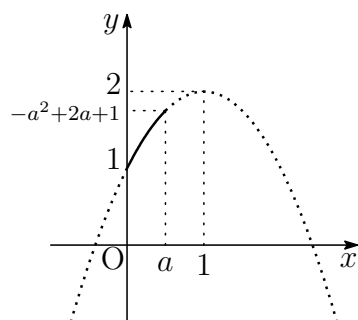
図 [2] の実線部分である.

よって,  $y$  は  $x = 1$  で最大値 2 をとる.

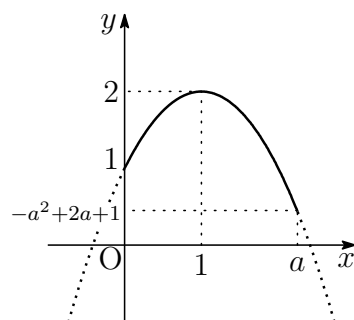
(答)  $0 < a < 1$  のとき  $x = a$  で最大値  $-a^2 + 2a + 1$

$1 \leq a$  のとき  $x = 1$  で最大値 2

[1]  $0 < a < 1$



[2]  $1 \leq a$



練習 3.18 関数の式を変形すると  $y = 2(x - a)^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

[1]  $a < 0$  のとき

この関数のグラフは図 [1] の実線部分である.

よって,  $y$  は  $x = 0$  で最小値  $2a^2$  をとる.

[2]  $0 \leq a \leq 1$  のとき

この関数のグラフは図 [2] の実線部分である.

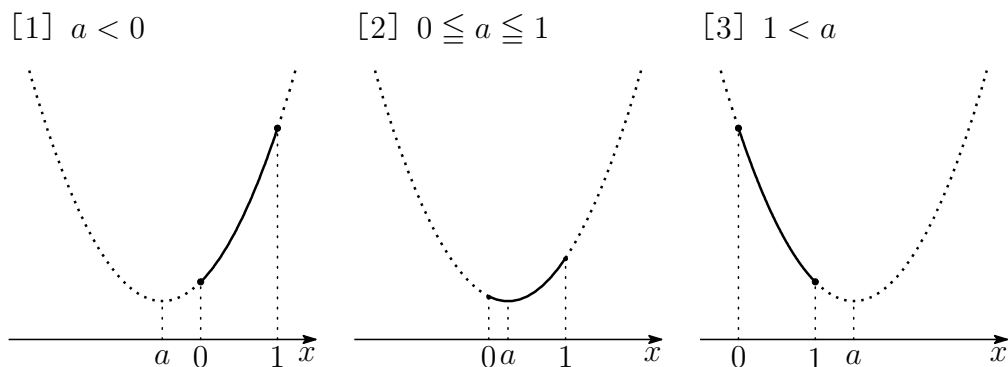
よって,  $y$  は  $x = a$  で最小値 0 をとる.

[3]  $1 < a$  のとき

この関数のグラフは図 [3] の実線部分である.

よって,  $y$  は  $x = 1$  で最小値  $2a^2 - 4a + 2$  をとる.

(答)  $a < 0$  のとき  $x = 1$  で最小値  $2a^2$   
 $0 \leq a \leq 1$  のとき  $x = a$  で最小値 0  
 $1 < a$  のとき  $x = 1$  で最小値  $2a^2 - 4a + 2$



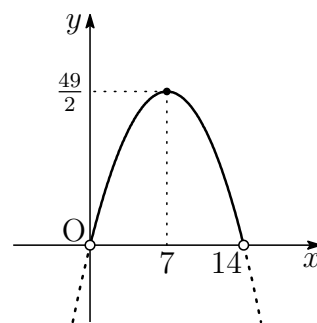
練習 3.19  $AB = x$  (cm) とすると  $BC = 14 - x$  (cm)

$x > 0$  かつ  $14 - x > 0$  から

$$0 < x < 14 \quad \cdots \textcircled{1}$$

三角形の面積を  $y$  cm<sup>2</sup> とすると

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \cdot x(14 - x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 14x) = -\frac{1}{2}\{(x - 7)^2 - 7^2\} \\ &= -\frac{1}{2}(x - 7)^2 + \frac{49}{2} \end{aligned}$$



① において,  $y$  は  $x = 7$  すなわち  $AB = 7$  で最大値  $\frac{49}{2}$  をとる. (答)  $\frac{49}{2}$  cm<sup>2</sup>

練習 3.20 (1) 頂点が点  $(-2, 4)$  であるから, この 2 次関数は

$$y = a(x + 2)^2 + 4$$

の形に表される. グラフが点  $(-4, 2)$  を通るから

$$2 = a(-4 + 2)^2 + 4 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{2}$$

したがって, 求める 2 次関数は  $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$

(2) 軸が直線  $x = 2$  であるから, この 2 次関数は

$$y = a(x - 2)^2 + q$$

の形に表される. グラフが

$$\text{点 } (-1, 5) \text{ を通るから} \quad 5 = a(-1 - 2)^2 + q$$

$$\text{点 } (1, -11) \text{ を通るから} \quad -11 = a(1 - 2)^2 + q$$

$$\text{よって} \quad 9a + q = 5, \quad a + q = -11$$

$$\text{これを解くと} \quad a = 2, \quad q = -13$$

したがって, 求める 2 次関数は  $y = 2(x - 2)^2 - 13$

$$\text{練習 3.21 (1) } \begin{cases} a + b + c = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ 4a + 2b + c = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ 9a + 3b + c = 4 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ から } 3a + b = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \text{ から } 5a + b = 4 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } a = 2, b = -6$$

$$\text{これらを } \textcircled{1} \text{ に代入すると } c = 4$$

$$\text{よって } a = 2, b = -6, c = 4$$

$$(2) \begin{cases} x + y + z = 6 & \cdots \textcircled{1} \\ x - 2y - z = -2 & \cdots \textcircled{2} \\ 3x + 2y - z = 12 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ から } 2x - y = 4 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \text{ から } 2x + 4y = 14 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } x = 3, y = 2$$

$$\text{これらを } \textcircled{1} \text{ に代入すると } z = 1$$

$$\text{よって } x = 3, y = 2, z = 1$$

練習 3.22 求める 2 次関数を  $y = ax^2 + bx + c$  とする.

グラフが 3 点  $(2, -2)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(-1, 1)$  を通るから

$$-2 = 4a + 2b + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$5 = 9a + 3b + c \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$1 = a - b + c \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ から } 5a + b = 7 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \text{ から } 3a + 3b = -3 \quad \text{すなわち} \quad a + b = -1 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } a = 2, b = -3$$

$$\text{これらを } \textcircled{3} \text{ に代入して } c = -4$$

$$\text{よって, 求める 2 次関数は } y = 2x^2 - 3x - 4$$

別解 グラフが異なる 3 点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  を通るとき, その方程式は

$$y = y_1 \cdot \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

となる (ラグランジュの補間公式). これを利用すると

$$\begin{aligned} y &= -2 \cdot \frac{(x - 3)(x + 1)}{(2 - 3)(2 + 1)} + 5 \cdot \frac{(x - 2)(x + 1)}{(3 - 2)(3 + 1)} + 1 \cdot \frac{(x - 2)(x - 3)}{(-1 - 2)(-1 - 3)} \\ &= \frac{2}{3}(x^2 - 2x - 3) + \frac{5}{4}(x^2 - x - 2) + \frac{1}{12}(x^2 - 5x + 6) \\ &= 2x^2 - 3x - 4 \end{aligned}$$

問題 3.7 (1)  $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$

よって,  $y$  は  $x = 0$  で最大値  $-1$ ,  $x = \frac{3}{2}$  で最小値  $-\frac{13}{4}$  をとる.

(2)  $y = -3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{25}{12}$

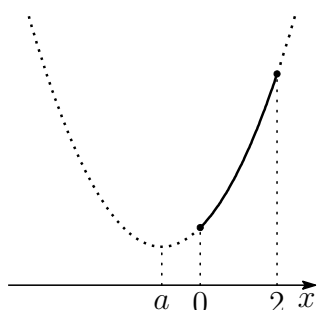
よって,  $y$  は  $x = -\frac{5}{6}$  で最大値  $\frac{25}{12}$ ,  $x = 1$  で最小値  $-8$  をとる.

問題 3.8 関数の式を変形すると  $y = (x - a)^2 - a^2$  ( $0 \leq x \leq 2$ )

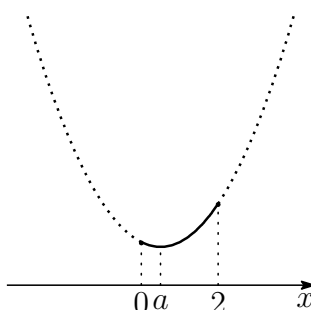
- (1) [1]  $a < 0$  のとき, この関数のグラフは図 [1] の実線部分である.  
 よって,  $y$  は  $x = 0$  で最小値  $0$  をとる.  
 [2]  $0 \leq a \leq 2$  のとき, この関数のグラフは図 [2] の実線部分である.  
 よって,  $y$  は  $x = a$  で最小値  $-a^2$  をとる.  
 [3]  $2 < a$  のとき, この関数のグラフは図 [3] の実線部分である.  
 よって,  $y$  は  $x = 2$  で最小値  $-4a + 4$  をとる.

(答)  $a < 0$  のとき  $x = 0$  で最小値  $0$   
 $0 \leq a \leq 2$  のとき  $x = a$  で最小値  $-a^2$   
 $2 < a$  のとき  $x = 2$  で最小値  $-4a + 4$

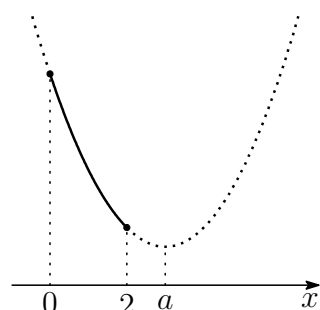
[1]  $a < 0$



[2]  $0 \leq a \leq 2$



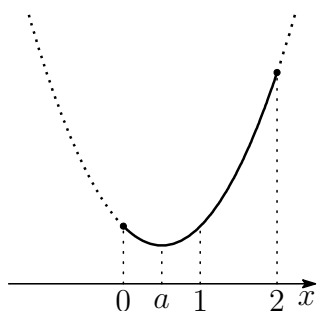
[3]  $2 < a$



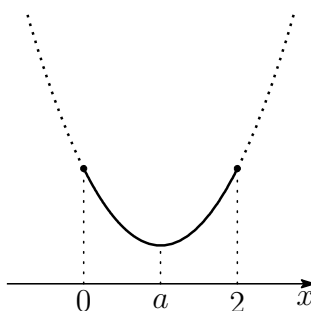
- (2) [1]  $a < 1$  のとき, この関数のグラフは図 [1] の実線部分である.  
 よって,  $y$  は  $x = 2$  で最大値  $-4a + 4$  をとる.  
 [2]  $a = 1$  のとき, この関数のグラフは図 [2] の実線部分である.  
 よって,  $y$  は  $x = 0, 2$  で最大値  $0$  をとる.  
 [3]  $1 < a$  のとき, この関数のグラフは図 [3] の実線部分である.  
 よって,  $y$  は  $x = 0$  で最大値  $0$  をとる.

(答)  $a < 1$  のとき  $x = 2$  で最大値  $-4a + 4$   
 $a = 1$  のとき  $x = 0, 2$  で最大値  $0$   
 $1 < a$  のとき  $x = 0$  で最大値  $0$

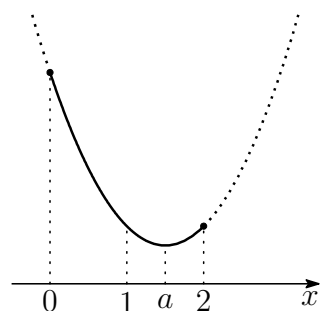
[1]  $a < 1$



[2]  $a = 1$



[3]  $1 < a$



問題 3.9 商品を 1 個 200 円で仕入れて、 $(250 + x)$  円で売ると、1 個あたりの利益は

$$(250 + x) - 200 = 50 + x \quad (\text{円})$$

ただし、 $50 + x > 0$  より  $x > -50$  … ①

また、1 日の売上個数は  $600 - 15x$  (個)

ただし、 $600 - 15x > 0$  より  $x < 40$  … ②

①, ② から  $-50 < x < 40$  … ③

1 日の利益を  $y$  円とすると

$$\begin{aligned} y &= (50 + x)(600 - 15x) = -15(x + 50)(x - 40) \\ &= -15(x^2 + 10x - 2000) = -15\{(x + 5)^2 - 2025\} \\ &= -15(x + 5)^2 + 30375 \end{aligned}$$

③ において、 $y$  は  $x = -5$  で最大値をとる.

$x = -5$  のとき  $250 + x = 245$ ,  $600 - 15x = 675$

よって、**675 個仕入れて 1 個 245 円**で販売すればよい.

問題 3.10 (1)  $y = 2x^2 + 4x + 1$  を変形すると  $y = 2(x+1)^2 - 1$   
 よって、求める 2 次関数は

$$y = a(x+1)^2 - 1$$

と表される．この放物線が点  $(0, 2)$  を通るから

$$2 = a(0+1)^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = 3$$

したがって、求める 2 次関数は  $y = 3(x+1)^2 - 1$

(2) 求める 2 次関数を  $y = ax^2 + bx + c$  とする．

グラフが 3 点  $(3, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(2, 6)$  を通るから

$$0 = 9a + 3b + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$0 = a - b + c \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$6 = 4a + 2b + c \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } 8a + 4b = 0$$

$$\text{すなわち } 2a + b = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \text{ から } 5a + b = -6 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } a = -2, b = 4$$

$$\text{これらを } \textcircled{2} \text{ に代入して } c = 6$$

$$\text{よって、求める 2 次関数は } y = -2x^2 + 4x + 6$$

別解  $x = 3, -1$  で  $y = 0$  であるから、求める 2 次関数は

$$y = a(x-3)(x+1)$$

と表される．この放物線が点  $(2, 6)$  を通るから

$$6 = a(2-3)(2+1) \quad \text{ゆえに} \quad a = -2$$

したがって、求める 2 次関数は

$$y = -2(x-3)(x+1) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x^2 + 4x + 6$$

補足 練習 3.22 の別解 (ラグランジュの補間公式) を用いると

$$y = 6 \cdot \frac{(x-3)(x+1)}{(2-3)(2+1)} = -2(x-3)(x+1) = -2x^2 + 4x + 6$$

問題 3.11 求める 2 次関数は  $y = a(x-2)^2 + 8$  とおき ( $a < 0$ ),  $x = 1, y = 5$  を代入すると

$$5 = a(1-2)^2 + 8 \quad \text{ゆえに} \quad a = -3$$

これは  $a < 0$  を満たす．よって、求める 2 次関数は  $y = -3(x-2)^2 + 8$

問題 3.12  $y = at^2 + bt + c$  とおくと、表より

$$4a + 2b + c = 32 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$16a + 4b + c = 48 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$25a + 5b + c = 50 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ から } 6a + b = 8 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{1} \text{ から } 7a + b = 6 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } a = -2, b = 20$$

$$\text{これらを } \textcircled{1} \text{ に代入すると } c = 0$$

$$\text{したがって } y = -2t^2 + 20t$$

$$\text{よって、3 秒間に進んだ距離は } -2 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 = \mathbf{42} \text{ (m)}$$

補足 ラグランジュの補間公式を用いると

$$\begin{aligned} y &= 32 \cdot \frac{(t-4)(t-5)}{(2-4)(2-5)} + 48 \cdot \frac{(t-2)(t-5)}{(4-2)(4-5)} + 50 \cdot \frac{(t-2)(t-4)}{(5-2)(5-4)} \\ &= \frac{16}{3}(t^2 - 9t + 20) - 24(t^2 - 7t + 10) + \frac{50}{3}(t^2 - 6t + 8) \\ &= -2t^2 + 20t \end{aligned}$$

練習 3.23 (1)  $x(x+4) = 0$  より  $x = 0$  または  $x + 4 = 0$

$$\text{したがって、解は } \mathbf{x = 0, -4}$$

$$(2) \text{ 左辺を因数分解すると } (x-2)(x-3) = 0$$

$$\text{よって } x - 2 = 0 \text{ または } x - 3 = 0$$

$$\text{したがって、解は } \mathbf{x = 2, 3}$$

$$(3) \text{ 左辺を因数分解すると } (x+1)(2x+1) = 0$$

$$\text{よって } x + 1 = 0 \text{ または } 2x + 1 = 0$$

$$\text{したがって、解は } \mathbf{x = -1, -\frac{1}{2}}$$

$$(4) \text{ 左辺を因数分解すると } (x-2)(3x+2) = 0$$

$$\text{よって } x - 2 = 0 \text{ または } 3x + 2 = 0$$

$$\text{したがって、解は } \mathbf{x = 2, -\frac{2}{3}}$$

練習 3.24 (1)  $x^2 + 7x + 4 = 0$  を解の公式に適用すると

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

(2)  $3x^2 + 4x - 1 = 0$  を解の公式に適用すると

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

(3)  $3x^2 - 8x - 3 = 0$  を解の公式に適用すると

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} = 3, -\frac{1}{3}$$

(4)  $4x^2 + 12x + 9 = 0$  を解の公式に適用すると

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

別解 左辺を因数分解すると  $(2x + 3)^2 = 0$

$$\text{したがって } 2x + 3 = 0 \quad \text{すなわち } x = -\frac{3}{2}$$

練習 3.25 (1)  $x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-2)} = -1 \pm \sqrt{3}$

$$(2) x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \cdot (-2)}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$(3) x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 3} = -\sqrt{3}$$

$$(4) x = -(-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 2} = \sqrt{3} \pm 1$$

練習 3.26 (1) 2 次方程式  $x^2 + 3x - 5 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 29 > 0$$

したがって、実数解の個数は **2 個**

(2) 2 次方程式  $3x^2 - 5x + 4 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -23 < 0$$

したがって、実数解の個数は **0 個**

(3) 2 次方程式  $3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1 = 0$$

したがって、実数解の個数は **1 個**

練習 3.27 2 次方程式  $x^2 - 4x + m + 8 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot (m + 8) = -m - 4$$

2 次方程式が実数解をもたないのは  $D < 0$  のときであるから

$$-m - 4 < 0 \quad \text{これを解いて} \quad m > -4$$

練習 3.28 2 次方程式  $x^2 + (m + 2)x + m + 5 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = (m + 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 5) = m^2 - 16$$

この方程式が重解をもつのは  $D = 0$  のときであるから

$$m^2 - 16 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad m = \pm 4$$

また、重解は  $x = -\frac{m+2}{2}$  であるから

$$m = 4 \text{ のとき } x = -3, \quad m = -4 \text{ のとき } x = 1$$

練習 3.29 (1) 2 次方程式  $x^2 - 2x - 3 = 0$  を解くと

$$(x + 1)(x - 3) = 0 \quad \text{より} \quad x = -1, 3$$

よって、共有点の座標は  $(-1, 0), (3, 0)$

(2) 2 次方程式  $-x^2 + 3x - 1 = 0$  を解くと

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \text{より}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

よって、共有点の座標は  $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)$

(3) 2 次方程式  $2x^2 + 4x + 2 = 0$  を解くと

$$(x + 1)^2 = 0 \quad \text{より} \quad x = -1$$

よって、共有点の座標は  $(-1, 0)$

(4) 2 次方程式  $2x^2 - 5x - 3 = 0$  を解くと

$$(x - 3)(2x + 1) = 0 \quad \text{より} \quad x = 3, -\frac{1}{2}$$

よって、共有点の座標は  $(3, 0), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

グラフが  $x$  軸に接するものは (3)

練習 3.30 (1) 2 次関数  $y = x^2 + 3x + 3$  について

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0$$

であるから，共有点の個数は 0 個

(2) 2 次関数  $y = -2x^2 + 5x + 1$  について

$$D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 33 > 0$$

であるから，共有点の個数は 2 個

(3) 2 次関数  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$  について

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

であるから，共有点の個数は 1 個

練習 3.31 2 次方程式  $x^2 - 2x - m - 1 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \cdot (-m - 1) = m + 2$$

よって，グラフと  $x$  軸の共有点の個数は

$D > 0$  すなわち  $m > -2$  のとき 2 個

$D = 0$  すなわち  $m = -2$  のとき 1 個

$D < 0$  すなわち  $m < -2$  のとき 0 個

演習 3.8 (1) 共有点の  $x$  座標は、次の 2 次方程式の実数解である.

$$x^2 - 6x + 10 = 2x - 5$$

式を整理すると  $x^2 - 8x + 15 = 0$

これを解くと  $x = 3, 5$

$y = 2x - 5$  に代入すると

$$x = 3 \text{ のとき } y = 1, \quad x = 5 \text{ のとき } y = 5$$

よって、共有点の座標は  $(3, 1), (5, 5)$

(2) 共有点の  $x$  座標は、次の 2 次方程式の実数解である.

$$x^2 - 6x + 10 = -2x + 6$$

式を整理すると  $x^2 - 4x + 4 = 0$

これを解くと  $x = 2$

$y = -2x + 6$  に代入すると

$$x = 2 \text{ のとき } y = 2$$

よって、共有点の座標は  $(2, 2)$

演習 3.9  $y = x^2 - 3x$  と  $y = x + k$  から  $y$  を消去すると

$$x^2 - 3x = x + k \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 4x - k = 0$$

この 2 次方程式の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot (-k) = k + 4$$

放物線  $y = x^2 - 3x$  と直線  $y = x + k$  が接するのは、 $D = 0$  のときであるから

$$k + 4 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = -4$$

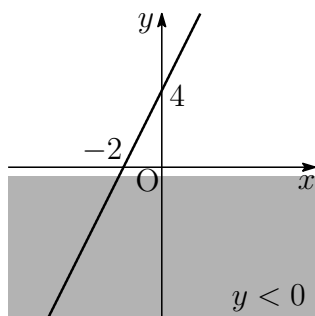
そのときの接点の  $x$  座標は  $x = -\frac{-4}{2} = 2$

$y = x - 4$  に代入すると

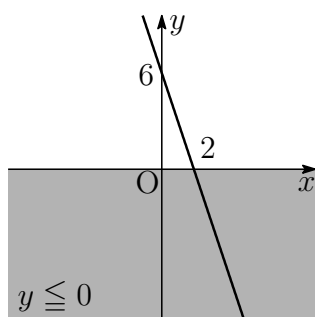
$$x = 2 \text{ のとき } y = -2$$

よって、接点の座標は  $(2, -2)$

練習 3.32 (1) 下図から  $x < -2$

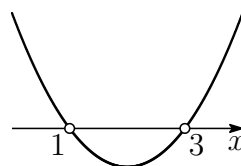


(2) 下図から  $x \geq 2$



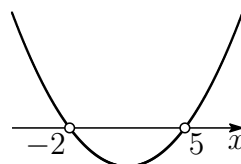
練習 3.33 (1)  $(x-1)(x-3)=0$  の解は  $x=1, 3$   
 $y=(x-1)(x-3)$  のグラフで  $y>0$   
 となる  $x$  の値の範囲を求めて

$$x < 1, 3 < x$$



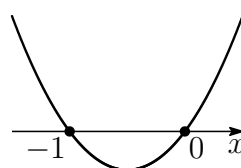
(2)  $(x+2)(x-5)=0$  の解は  $x=-2, 5$   
 $y=(x+2)(x-5)$  のグラフで  $y<0$   
 となる  $x$  の値の範囲を求めて

$$-2 < x < 5$$



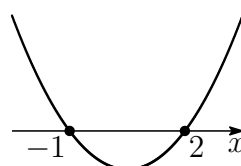
(3)  $x(x+1)=0$  の解は  $x=-1, 0$   
 $y=x(x+1)$  のグラフで  $y \leq 0$   
 となる  $x$  の値の範囲を求めて

$$-1 \leq x \leq 0$$



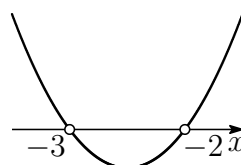
(4)  $x^2 - x - 2 = 0$  の解は  $x=-1, 2$   
 $y=x^2 - x - 2$  のグラフで  $y \geq 0$   
 となる  $x$  の値の範囲を求めて

$$x \leq -1, 2 \leq x$$



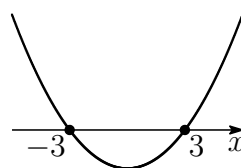
(5)  $x^2 + 5x + 6 = 0$  の解は  $x=-3, -2$   
 $y=x^2 + 5x + 6$  のグラフで  $y > 0$   
 となる  $x$  の値の範囲を求めて

$$x < -3, -2 < x$$



(6)  $x^2 - 9 = 0$  の解は  $x=-3, 3$   
 $y=x^2 - 9$  のグラフで  $y \leq 0$   
 となる  $x$  の値を求めて

$$-3 \leq x \leq 3$$



補足 実際は、次のように答だけでよい。

(1)  $x < 1, 3 < x$

(2)  $-2 < x < 5$

(3)  $-1 \leq x \leq 0$

(4)  $x \leq -1, 2 \leq x$

(5)  $x < -3, -2 < x$

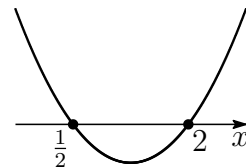
(6)  $-3 \leq x \leq 3$

練習 3.34 (1)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  を解くと

$$(2x - 1)(x - 2) = 0 \text{ より } x = \frac{1}{2}, 2$$

よって、この 2 次不等式の解は

$$x \leq \frac{1}{2}, 2 \leq x$$

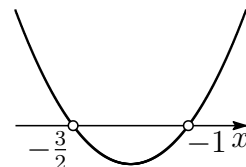


(2)  $2x^2 + 5x + 3 = 0$  を解くと

$$(2x + 3)(x + 1) = 0 \text{ より } x = -\frac{3}{2}, -1$$

よって、この 2 次不等式の解は

$$-\frac{3}{2} < x < -1$$

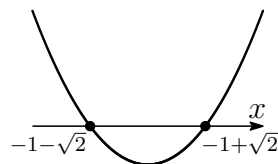


(3)  $x^2 + 2x - 1 = 0$  を解くと

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

よって、この 2 次不等式の解は

$$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$$

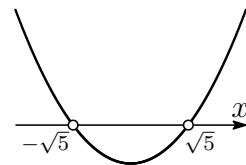


(4)  $x^2 - 5 = 0$  を解くと

$$x = -\sqrt{5}, \sqrt{5}$$

よって、この 2 次不等式の解は

$$x < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < x$$



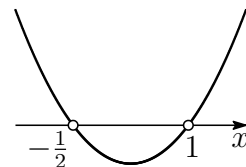
練習 3.35 (1) 両辺に  $-1$  をかけると  $2x^2 - x - 1 > 0$

$2x^2 - x - 1 = 0$  を解くと

$$(x - 1)(2x + 1) = 0 \text{ より } x = -\frac{1}{2}, 1$$

よって、この 2 次不等式の解は

$$x < -\frac{1}{2}, 1 < x$$



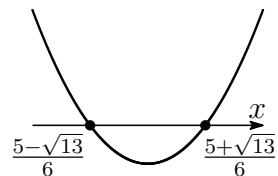
(2) 両辺に  $-1$  をかけると  $3x^2 - 5x + 1 \leq 0$

$3x^2 - 5x + 1 = 0$  を解くと

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

よって、この 2 次不等式の解は

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{6} \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$$



練習 3.36 (1)  $(x-2)^2 > 0$  より 2 以外のすべての実数

(2)  $(x-5)^2 < 0$  より 解はない

(3)  $(x+3)^2 \leq 0$  より  $x = -3$

(4)  $(2x+1)^2 \geq 0$  より すべての実数

練習 3.37 (1)  $(x-2)^2 + 2 > 0$  より すべての実数

(2)  $(x-1)^2 + 1 \leq 0$  より 解はない

(3)  $2(x+1)^2 + 1 < 0$  より 解はない

(4)  $2(x+2)^2 + 2 \geq 0$  より すべての実数

別解  $2x^2 + 8x + 10 \geq 0$  より  $x^2 + 4x + 5 \geq 0$

ゆえに  $(x+2)^2 + 1 \geq 0$  よって すべての実数

練習 3.38 (1) 2 次方程式  $x^2 - 3x + 5 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$$

2 次不等式  $x^2 - 3x + 5 > 0$  の  $x^2$  の係数が正であるから、  
この 2 次不等式の解は **すべての実数**

(2) 2 次不等式  $-x^2 + x - 1 \geq 0$  の両辺に  $-1$  を掛けると

$$x^2 - x + 1 \leq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

2 次方程式  $x^2 - x + 1 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

2 次不等式  $\textcircled{1}$  の  $x^2$  の係数が正であるから、  
この 2 次不等式の解はない

(3) 2 次方程式  $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = (-\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1 = 0$$

$$3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0 \text{ を解くと } x = -\frac{-2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{よって、不等式 } 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 \leq 0 \text{ の解は } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{別解 } (\sqrt{3}x - 1)^2 \leq 0 \text{ より } x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(4) 式を整理すると  $x^2 + 2x - 2 < 0$

2 次方程式  $x^2 + 2x - 2 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot (-2) = 3 > 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \text{ を解くと } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{1} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{よって、この不等式の解は } -1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$$

別解 式を整理すると  $x^2 + 2x - 2 < 0$

$$(x+1)^2 - 3 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3}) < 0$$

$$\text{よって} \quad -1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$$

深化 3.5 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の判別式を  $D$  とすると, 83 ページの平方完成により

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{すなわち} \quad y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}$$

である. 放物線の頂点の  $y$  座標  $-\frac{D}{4a}$  の符号に注目すると, 次のことがわかる.

- $a > 0, D < 0$  のとき, グラフは常に  $x$  軸より上側にあるから, 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  の値は常に正である.
- $a < 0, D < 0$  のとき, グラフは常に  $x$  軸より下側にあるから, 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  の値は常に負である.

練習 3.40 2 次不等式

$$-x^2 + mx + m < 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - mx - m > 0$$

の解がすべての実数であるから, 上の第 2 式の係数について

$$(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad m(m+4) < 0$$

これを解いて  $-4 < m < 0$

練習 3.41 (1)  $x^2 - 5x + 4 \leq 0$  から  $(x-1)(x-4) \leq 0$

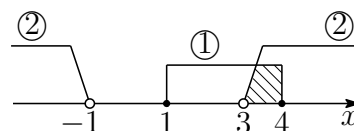
$$\text{よって} \quad 1 \leq x \leq 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \text{ から } (x+1)(x-3) > 0$$

$$\text{よって} \quad x < -1, 3 < x \quad \cdots \textcircled{2}$$

① と ② の共通範囲を求めて

$$3 < x \leq 4$$



(2)  $x^2 + x > 0$  から  $x(x+1) > 0$

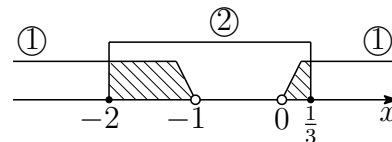
$$\text{よって} \quad x < -1, 0 < x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$3x^2 + 5x - 2 \leq 0 \text{ から } (x+2)(3x-1) \leq 0$$

$$\text{よって} \quad -2 \leq x \leq \frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

① と ② の共通範囲を求めて

$$-2 \leq x < -1, 0 < x \leq \frac{1}{3}$$

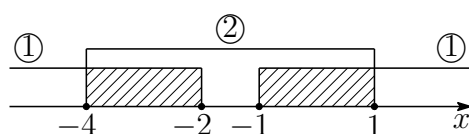


練習 3.42 (1)  $-2 \leq x^2 + 3x \leq 4$  から 
$$\begin{cases} -2 \leq x^2 + 3x \\ x^2 + 3x \leq 4 \end{cases}$$

第1式から  $x^2 + 3x + 2 \geq 0$  ゆえに  $(x+2)(x+1) \geq 0$   
これを解くと  $x \leq -2, -1 \leq x \cdots \textcircled{1}$

第2式から  $x^2 + 3x - 4 \leq 0$  ゆえに  $(x+4)(x-1) \leq 0$   
これを解くと  $-4 \leq x \leq 1 \cdots \textcircled{2}$

①と②の共通範囲を求めて  $-4 \leq x \leq -2, -1 \leq x \leq 1$

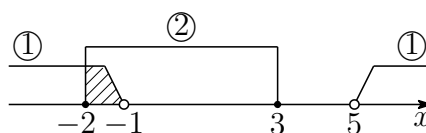


(2)  $5 < x^2 - 4x \leq 6 - 3x$  から 
$$\begin{cases} 5 < x^2 - 4x \\ x^2 - 4x \leq 6 - 3x \end{cases}$$

第1式から  $x^2 - 4x - 5 > 0$  ゆえに  $(x+1)(x-5) > 0$   
これを解くと  $x < -1, 5 < x \cdots \textcircled{1}$

第2式から  $x^2 - x - 6 \leq 0$  ゆえに  $(x+2)(x-3) \leq 0$   
これを解くと  $-2 \leq x \leq 3 \cdots \textcircled{2}$

①と②の共通範囲を求めて  $-2 \leq x < -1$



練習 3.43 切り取る正方形の一辺の長さを  $x$  cm とすると、底面の正方形の1辺の長さは  $(12 - 2x)$  である.  $x > 0$  かつ  $12 - 2x \geq 0$  から

$$0 < x \leq 3 \cdots \textcircled{1}$$

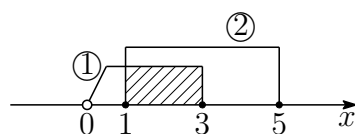
4個の側面は、その面積の和が  $40 \text{ cm}^2$  以上であるから

$$x(12 - 2x) \times 4 \geq 40$$

式を整理すると  $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

すなわち  $(x-1)(x-5) \leq 0$

これを解くと  $1 \leq x \leq 5 \cdots \textcircled{2}$



①と②の共通範囲を求めて  $1 \leq x \leq 3$  (答) 1cm 以上 3cm 以下

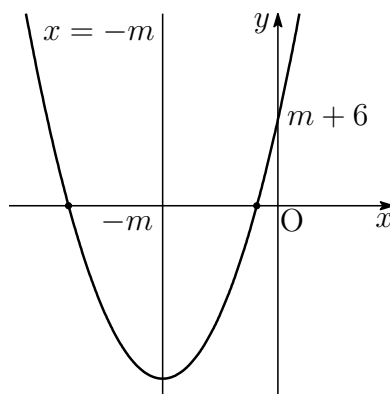
練習 3.44 関数の式を変形すると

$$y = (x + m)^2 - m^2 + m + 6$$

グラフは下に凸の放物線で、その軸は直線

$$x = -m$$

である。グラフと  $x$  軸の負の部分で、異なる 2 点で交わるのは、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。



- [1] グラフと  $x$  軸が異なる 2 点で交わる。
- [2] グラフの軸が  $y$  軸の左側にある。
- [3] グラフと  $y$  軸の交点の  $y$  座標が正である。

[1] より、2 次方程式  $x^2 + 2mx + m + 6 = 0$  の判別式を  $D$  とすると、 $D > 0$  である。

$$\frac{D}{4} = m^2 - 1 \cdot (m + 6) = m^2 - m - 6$$

よって  $m^2 - m - 6 > 0$  すなわち  $(m + 2)(m - 3) > 0$

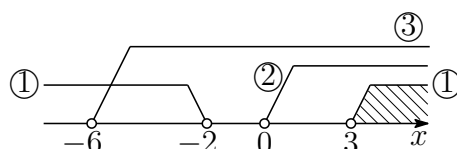
これを解くと  $m < -2, 3 < m \dots \textcircled{1}$

[2] から  $-m < 0$  ゆえに  $m > 0 \dots \textcircled{2}$

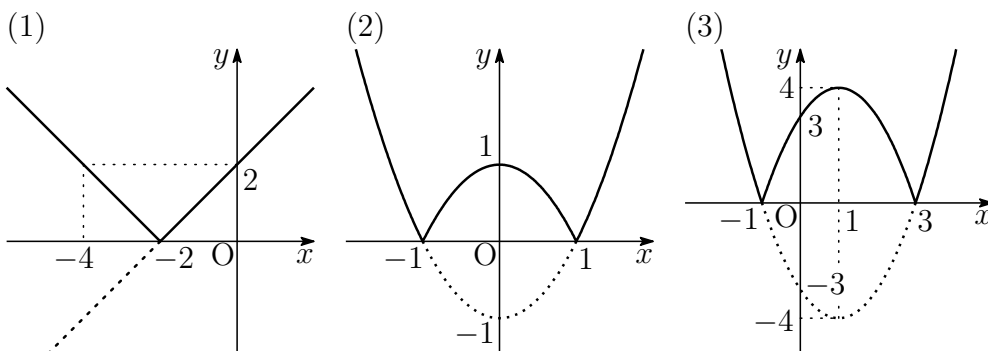
[3] から  $m + 6 > 0$  ゆえに  $m > -6 \dots \textcircled{3}$

①, ②, ③ の共通範囲を求めて

$$m > 3$$



演習 3.10 (1)



問題 3.13 放物線  $y = x^2 + 2x - 2$  と  $x$  軸の交点の  $x$  座標は、 $x^2 + 2x - 2 = 0$  を解いて

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

よって、線分 AB の長さは  $(-1 + \sqrt{3}) - (-1 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

問題 3.14 2 次方程式  $x^2 + mx - m + 3 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m + 3) = m^2 + 4m - 12 = (m + 6)(m - 2)$$

2 次関数  $y = x^2 + mx - m + 3$  のグラフが  $x$  軸に接するとき  $D = 0$

このとき、接点の  $x$  座標は  $x = -\frac{m}{2}$

よって  $m = -6$  のとき、接点  $(3, 0)$

$m = 2$  のとき、接点  $(-1, 0)$

問題 3.15 (1)  $(x + 2)(2x - 3) < 0$  より  $-2 < x < \frac{3}{2}$

この不等式を満たす整数  $x$  は  $-1, 0, 1$

(2) 式を整理すると  $x^2 - 4x + 2 \leq 0$

$x^2 - 4x + 2 = 0$  を解くと  $x = 2 \pm \sqrt{2}$

よって、この 2 次不等式の解は  $2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$

$1 < \sqrt{2} < 2$  であるから、整数  $x$  の値の範囲は  $1 \leq x \leq 3$

この不等式を満たす整数  $x$  は  $1, 2, 3$

問題 3.16 2 次方程式  $ax^2 + 2x + 4a = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = 1^2 - a \cdot 4a = 1 - 4a^2$$

2 次不等式  $ax^2 + 2x + 4a < 0$  の解がすべての実数であるのは、 $a < 0$  かつ  $D < 0$  のときであるから

$$(*) \begin{cases} a < 0 \\ 1 - 4a^2 < 0 \end{cases}$$

(\*) の第 2 式から  $4a^2 - 1 < 0$  ゆえに  $(2a + 1)(2a - 1) > 0$

これ解いて  $a < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a$

(\*) の第 1 式との共通範囲を求めて  $a < -\frac{1}{2}$

問題 3.17  $60 \leq -5x^2 + 40x \leq 75$  であるから、次の連立不等式を解く.

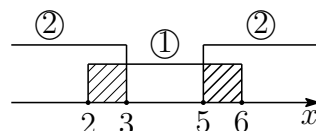
$$\begin{cases} -5x^2 + 40x \geq 60 \\ -5x^2 + 40x \leq 75 \end{cases}$$

第1式から  $x^2 - 8x + 12 \leq 0$   
これを解くと  $2 \leq x \leq 6 \quad \dots \textcircled{1}$

第2式から  $x^2 - 8x + 15 \geq 0$   
これを解くと  $x \leq 3, 5 \leq x \quad \dots \textcircled{2}$

① と ② の共通範囲を求めて

$$2 \leq x \leq 3, 5 \leq x \leq 6$$



問題 3.18 2点 P, Q の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha, \beta$  とすると、2次不等式  $ax^2 + bx + c \leq 0$  の解は

$$\alpha \leq x \leq \beta$$

したがって、解の幅は  $\beta - \alpha$  であり、これは線分 PQ の長さを表す.

(答) ④

章末 3.1 放物線  $y = -2x^2 + 3x + 1$  を平行移動した放物線をグラフにもつ2次関数は  $y = -2x^2 + bx + c$  の形で表される.

点  $(-2, 0), (1, 12)$  を通るので

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ 12 &= -2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \end{aligned}$$

よって  $-2b + c = 8, \quad b + c = 14$

これを解くと  $b = 2, c = 12$

よって、求める2次関数は  $y = -2x^2 + 2x + 12$

章末 3.2  $2x^2 + 4x = 2(x+1)^2 - 2$  より,

放物線  $y = 2x^2 + 4x$  の頂点の座標は  $(-1, -2)$

$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$  より,

放物線  $y = x^2 + ax + b$  の頂点の座標は  $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$

よって  $-\frac{a}{2} = -1, \quad -\frac{a^2}{4} + b = -2$

これを解いて  $\mathbf{a = 2, b = -1}$

別解  $y = x^2 + ax + b$  の頂点が  $(-1, -2)$  であるから

$$x^2 + ax + b = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$$

係数を比較して  $\mathbf{a = 2, b = -1}$

章末 3.3 (1)  $x^2 - mx + m = \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + m$

よって, 2次関数  $y = x^2 - mx + m$  は,

$x = \frac{m}{2}$  で最小値  $-\frac{m^2}{4} + m$  をとるから

$$\mathbf{k = -\frac{m^2}{4} + m}$$

(2)  $-\frac{m^2}{4} + m = -\frac{1}{4}(m-2)^2 + 1$  であるから,

$k = -\frac{m^2}{4} + m$  は,  $\mathbf{m = 2}$  で最大値  $\mathbf{1}$  をとる.

章末 3.4 (1) 放物線が上に凸なので  $a < 0$   
 よって、符号は 負

(2) 放物線と  $y$  軸の交点の  $y$  座標が正だから  $c > 0$   
 よって、符号は 正

(3) 頂点の  $x$  座標は  $x = -\frac{b}{2a}$  で、 $y$  軸の右側にあるから  $-\frac{b}{2a} > 0$   
 よって、符号は 正

(4)  $a < 0$  かつ  $-\frac{b}{2a} > 0$  より  $b > 0$   
 よって、符号は 正

(5) 放物線と  $x$  軸は異なる 2 点を共有しているから  $b^2 - 4ac > 0$   
 よって、符号は 正

(6) グラフ上の点で、 $x$  座標が 1 である点の  $y$  座標が  $a + b + c$  である。  
 この点は  $x$  軸の上側にあるから  $a + b + c > 0$   
 よって、符号は 正

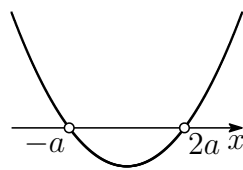
章末 3.5 解が  $-1 < x < 2$  である 2 次不等式の 1 つは

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - x - 2 < 0$$

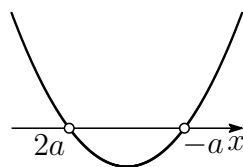
定数項に着目して  $-2x^2 + 2x + 4 > 0$  よって  $a = -2, b = 2$

章末 3.6  $x^2 - ax - 2a^2 = (x+a)(x-2a)$  より、放物線  $y = x^2 - ax - 2a^2$  は、  
 $x$  軸と 2 点  $(-a, 0), (2a, 0)$  で交わる。

(1)  $a > 0$  のとき  $-a < 2a$   
 このとき、2 次不等式の解は  
 $-a < x < 2a$



(2)  $a < 0$  のとき  $2a < -a$   
 このとき、2 次不等式の解は  
 $2a < x < -a$



章末 3.7 2 次方程式  $x^2 + (a+1)x + a^2 = 0$ ,  $x^2 + 2ax + 2a = 0$  の判別式を, それぞれ  $D_1$ ,  $D_2$  とすると

$$\begin{aligned} D_1 &= (a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a^2 = -3a^2 + 2a + 1 \\ &= -(a-1)(3a+1) \end{aligned}$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 1 \cdot 2a = a(a-2)$$

2 次方程式がともに実数解をもつのは,  $D_1 \geq 0$  かつ  $D_2 \geq 0$  のときである.

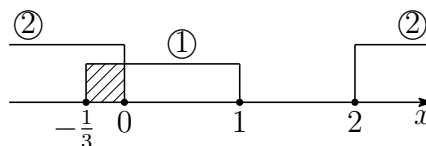
$D_1 \geq 0$  のとき  $-(a-1)(3a+1) \geq 0$  ゆえに  $(a-1)(3a+1) \leq 0$

これを解くと  $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

$D_2 \geq 0$  のとき  $a(a-2) \geq 0$  ゆえに  $a \leq 0, 2 \leq a \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ② の共通範囲を求めて

$$-\frac{1}{3} \leq a \leq 0$$



章末 3.8 2 次方程式  $x^2 - 2ax + a = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1 \cdot a = a^2 - a = a(a-1)$$

2 次関数の  $x^2$  の係数が正であるから,  $y$  の値が常に正であるのは  $D < 0$  のときであるから

$$a(a-1) < 0 \quad \text{これを解いて} \quad 0 < a < 1$$

別解  $x^2 - 2ax + a = (x-a)^2 - a^2 + a$  より, 2 次関数  $y = x^2 - 2ax + a$  は,  $x = a$  で最小値  $-a^2 + a$  をとる.

$y$  の値が常に正であるのは  $-a^2 + a > 0$  のときである.

両辺に  $-1$  をかけて  $a^2 - a < 0$  これを解いて  $0 < a < 1$

章末 3.9 (1) Q の座標は  $(1, -3)$

(2) 2 次の係数は  $-2$  で, Q を頂点とするから, 求める方程式は

$$y = -2(x-1)^2 - 3$$

章末 3.10 (1) [1] 点 P が点 A, 点 B と異なるとき

P から  $x$  軸へ下ろした垂線と  $x$  軸との交点を H とする.

直角三角形 OHP において,  $OH = x$ ,  $PH = y$  であるから, 三平方の定理により

$$OP^2 = OH^2 + PH^2 = x^2 + y^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

[2] 点 P が点 A と一致するとき

$$OP^2 = x^2 = x^2 + 0^2$$

点 P が点 B と一致するとき

$$OP^2 = y^2 = 0^2 + y^2$$

であるから,  $\textcircled{1}$  が成り立つ.

よって  $OP^2 = x^2 + y^2$ ,  $y = -2x + 10$  であるから

$$\begin{aligned} OP^2 &= x^2 + (-2x + 10)^2 \\ &= 5x^2 - 40x + 100 \end{aligned}$$

別解 一般に, 座標平面上の点  $P(x, y)$  と原点 O を結ぶ線分の長さ (距離) は

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

したがって  $OP^2 = x^2 + y^2$

$$y = -2x + 10 \text{ より } OP^2 = x^2 + (-2x + 10)^2 = 5x^2 - 40x + 100$$

(2)  $OP > 0$  であるから,  $OP^2$  が最小のとき  $OP$  も最小となる.

点 P は線分 AB 上を動くから

$$0 \leq x \leq 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また } OP^2 = 5(x - 4)^2 + 20$$

$\textcircled{2}$  の範囲で,  $x = 4$  のとき  $OP^2$  は最小値 20 をとる.

よって,  $x = 4$  のとき  $OP$  は最小で, 最小値は  $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

章末 3.11 関数の式を変形すると  $y = (x - 2)^2 - 4$  ( $a \leq x \leq a + 2$ )

(1) [1]  $2 < a$  のとき (図 [1] の実線部分)

よって,  $y$  は  $x = a$  で最小値  $a^2 - 4a$  をとる.

[2]  $a \leq 2 \leq a + 2$ , すなわち,  $0 \leq a \leq 2$  のとき (図 [2] の実線部分)

よって,  $y$  は  $x = 2$  で最小値  $-4$  をとる.

[3]  $a + 2 < 2$ , すなわち,  $a < 0$  のとき (図 [3] の実線部分)

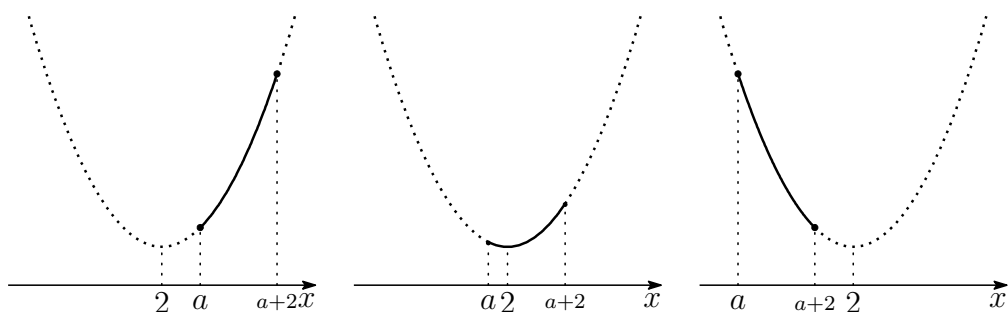
よって,  $y$  は  $x = a + 2$  で最小値  $a^2 - 4$  をとる.

(答)  $2 < a$  のとき  $x = a$  で最小値  $a^2 - 4a$   
 $0 \leq a \leq 2$  のとき  $x = 2$  で最小値  $-4$   
 $a < 0$  のとき  $x = a + 2$  で最小値  $a^2 - 4$

[1]  $2 < a$

[2]  $0 \leq a \leq 2$

[3]  $a < 0$



(2) [1]  $2 < a + 1$ , すなわち,  $1 < a$  のとき (図 [1] の実線部分)

よって,  $y$  は  $x = a + 2$  で最大値  $a^2 - 4$  をとる.

[2]  $a + 1 = 2$ , すなわち,  $a = 1$  のとき (図 [2] の実線部分)

よって,  $y$  は  $x = 0, 2$  で最大値  $0$  をとる.

[3]  $a + 1 < 2$ , すなわち,  $a < 1$  のとき (図 [3] の実線部分)

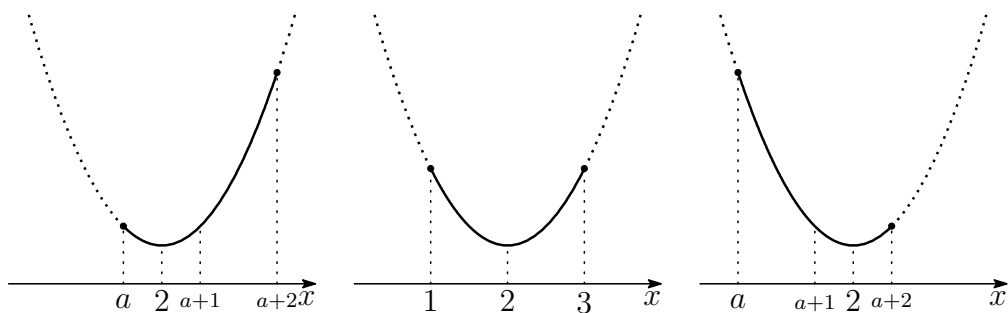
よって,  $y$  は  $x = a$  で最大値  $a^2 - 4a$  をとる.

(答)  $1 < a$  のとき  $x = a + 2$  で最大値  $a^2 - 4$   
 $a = 1$  のとき  $x = 0, 2$  で最大値  $0$   
 $a < 1$  のとき  $x = a$  で最大値  $a^2 - 4a$

[1]  $1 < a$

[2]  $a = 1$

[3]  $a < 1$



章末 3.12  $y = x^2 - 2x + m(1 - m)$  を変形すると  $y = (x - 1)^2 - m^2 + m - 1$

定義域  $0 \leq x \leq 3$  の中央  $\frac{3}{2}$  は、軸  $x = 1$  より右側にあるから、 $x = 3$  (定義域の右端) で最大値  $-m^2 + m + 3$  をとる。よって、 $y$  の値が常に負となるのは

$$-m^2 + m + 3 < 0 \quad \text{すなわち} \quad m < \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} < m$$

章末 3.13 2 次方程式  $x^2 - 2mx + m - \frac{1}{2} = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = (-m)^2 - 1 \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right) = m^2 - m + \frac{1}{2} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$$

グラフは  $x$  軸と異なる 2 点で交わり、 $x$  軸と共有点をもつ。

章末 3.14 2 次関数  $y = x^2 - 2mx + m + 12$  を変形すると  $y = (x - m)^2 - m^2 + m + 12$

このグラフの頂点は  $(m, -m^2 + m + 12)$ 、 $y$  軸との交点の  $y$  座標は  $m + 12$

(1) 2 次関数のグラフと  $x$  軸の正の部分が、異なる 2 点で交わるから

$$\begin{cases} m > 0 \\ -m^2 + m + 12 < 0 \\ m + 12 > 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} m > 0 \\ m < -3, 4 < m \\ m > -12 \end{cases}$$

よって  $m > 4$

(2) 2 次関数のグラフと  $x$  軸の負の部分が、異なる 2 点で交わるから

$$\begin{cases} m < 0 \\ -m^2 + m + 12 < 0 \\ m + 12 > 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} m < 0 \\ m < -3, 4 < m \\ m > -12 \end{cases}$$

よって  $-12 < m < -3$

(3) 2 次関数のグラフが  $x$  軸の正の部分と負の部分のそれぞれと交わる、すなわち、グラフと  $y$  軸との交点の  $y$  座標が負であるから

$$m + 12 < 0 \quad \text{よって} \quad m < -12$$

練習 4.1 (1)  $\sin \theta = \frac{2}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(2)  $\sin \theta = \frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}$

(3)  $AB = \sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{16} = 4$  であるから

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \cos \theta = \frac{3}{4}, \tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

練習 4.2

| $\theta$      | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \theta$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\tan \theta$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |

練習 4.3 (1)  $\sin 12^\circ = 0.2079$

(2)  $\cos 48^\circ = 0.6691$

(3)  $\tan 75^\circ = 3.7321$

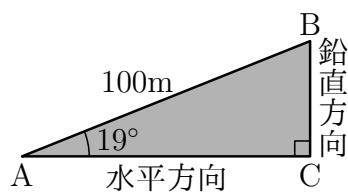
練習 4.4 (1)  $\sin \theta = \frac{2}{5} = 0.4$  三角比の表から  $\theta \approx 24^\circ$

(2)  $\tan \theta = \frac{1}{2} = 0.5$  三角比の表から  $\theta \approx 27^\circ$

練習 4.5 右の図において

$$\begin{aligned} AC &= AB \cos 19^\circ \\ &= 100 \times 0.9455 \\ &= 94.55 \approx 95 \end{aligned}$$

(答) 95 (m)



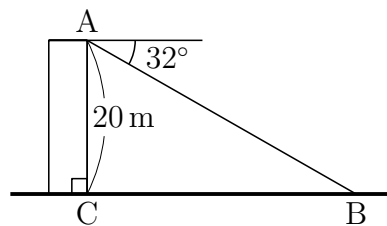
練習 4.6  $\triangle ABC$  において

$$\angle BAC = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$$

したがって

$$\begin{aligned} BC &= AC \tan 58^\circ = 20 \times 1.6003 \\ &= 32.006 \approx 32 \end{aligned}$$

(答) **32 m**



練習 4.7  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta > 0 \text{ であるから } \sin \theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3 = 2\sqrt{2}$$

練習 4.8  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (\sqrt{2})^2 = 3$

$$\text{よって } \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\cos \theta > 0 \text{ であるから } \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{また, } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ から}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

練習 4.9 (1)  **$28^\circ$**

(2)  **$12^\circ$**

(3)  **$67^\circ$**

練習 4.10 (1)  **$\cos 26^\circ$**

(2)  **$\sin 32^\circ$**

(3)  **$\frac{1}{\tan 7^\circ}$**

練習 4.11 (1)  $r = \sqrt{2}$  にとると、点 P の座標は  $(-1, 1)$

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 135^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 135^\circ = \frac{1}{-1} = -1$$

(2)  $r = 2$  にとると、点 P の座標は  $(-\sqrt{3}, 1)$

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

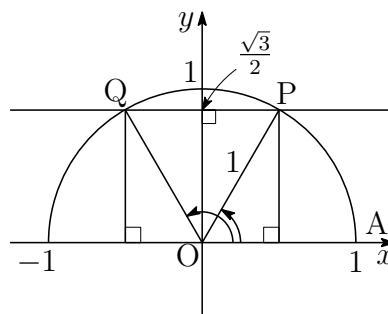
練習 4.12 (1)  $\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ = \mathbf{0.6428}$

(2)  $\cos 156^\circ = \cos(180^\circ - 24^\circ) = -\cos 24^\circ = \mathbf{-0.9135}$

(3)  $\tan 100^\circ = \tan(180^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ = \mathbf{-5.6713}$

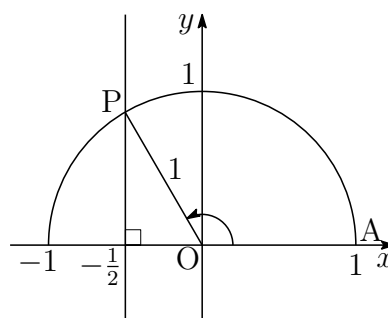
練習 4.13 (1) 原点 O を中心とする半径 1 の半円上で、

$y$  座標が  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  である点は 2 つある。  
求める  $\theta$  は右の図で  $\angle AOP$  と  $\angle AOQ$  である。よって  $\theta = 60^\circ, 120^\circ$



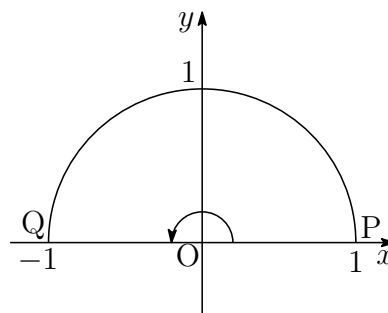
(2) 原点 O を中心とする半径 1 の半円上で、

$x$  座標が  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  である点は 1 つある。  
求める  $\theta$  は右の図で  $\angle AOP$  である。  
よって  $\theta = 120^\circ$



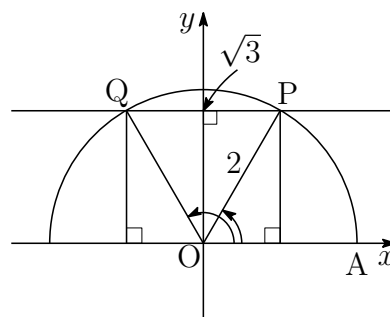
(3) 原点 O を中心とする半径 1 の半円上で、

$y$  座標が 0 である点は 2 つあり、右の図の 2 点 P, Q である。  
よって  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$



別解 (1) 半径2の半円上で、 $y$ 座標が $\sqrt{3}$ である点は2つある．求める $\theta$ は、右の図で $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である．

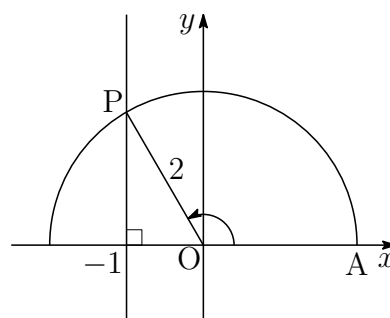
よって  $\theta = 60^\circ, 120^\circ$



(2)  $\cos \theta = \frac{-1}{2}$

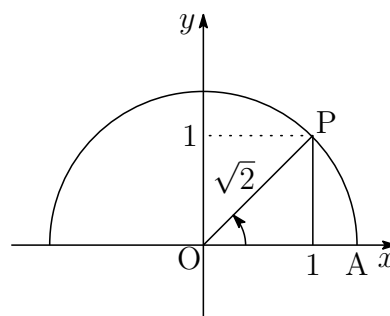
半径2の半円上で、 $x$ 座標が $-1$ である点は1つある．求める $\theta$ は、右の図で $\angle AOP$ である．

よって  $\theta = 120^\circ$



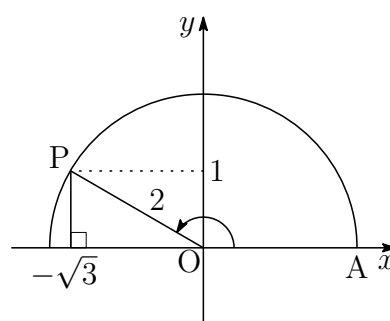
練習 4.14 (1)  $1 = \frac{1}{1}$  であるから、求める $\theta$ は右の図で $\angle AOP$ である．

よって  $\theta = 45^\circ$



(2)  $-\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{-\sqrt{3}}$  であるから、求める $\theta$ は右の図で $\angle AOP$ である．

よって  $\theta = 150^\circ$



練習 4.15  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  から,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  または  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  である.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき,  $\cos \theta > 0$  であるから

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき,  $\cos \theta < 0$  であるから

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

練習 4.16 (1)  $\cos \theta = -\frac{1}{3}$  から,  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  である.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき,  $\sin \theta > 0$  であるから

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) = -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(2)  $\tan \theta = -2$  から,  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  である.

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ から } \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (-2)^2 = 5$$

$$\text{よって } \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき,  $\cos \theta < 0$  であるから

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin \theta &= \tan \theta \times \cos \theta = -2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

練習 4.17 (1) 直線の傾きが 1 であるから  $\tan \theta = 1$

よって  $\theta = 45^\circ$

(2) 直線の傾きが  $-\sqrt{3}$  であるから  $\tan \theta = -\sqrt{3}$

よって  $\theta = 120^\circ$

問題 4.1 蹴上げを  $x$  cm とすると  $\frac{x}{50} = \tan 13^\circ$

したがって  $x = 50 \tan 13^\circ = 50 \times 0.2309$   
 $= 11.545 \approx 11.5$  (答) **11.5**(cm)

問題 4.2 三角形の内角の和は  $180^\circ$  であるから

$$A + B + C = 180^\circ \quad \text{ゆえに} \quad B + C = 180^\circ - A$$

$$(1) \quad \frac{B + C}{2} = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

$$\text{よって} \quad \cos \frac{B + C}{2} = \cos \left( 90^\circ - \frac{A}{2} \right) = \sin \frac{A}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B + C}{2}$$

$$(2) \quad \sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$\text{よって} \quad \sin A = \sin(B + C)$$

問題 4.3 (1)  $\sin \theta = \frac{3}{4}$  から,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  または  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  である.

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき,  $\cos \theta > 0$  であるから

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき,  $\cos \theta < 0$  であるから

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

(2)  $\tan \theta = -3$  から,  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  である.

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ から } \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (-3)^2 = 10$$

$$\text{よって } \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき,  $\cos \theta < 0$  であるから

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \\ \sin \theta &= \tan \theta \times \cos \theta = -3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

問題 4.4  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$  と  $x$  軸の正の向きとなす角を  $\alpha$  とすると

$$\tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 150^\circ$$

$y = -x$  と  $x$  軸の正の向きとなす角を  $\beta$  とすると

$$\tan \beta = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \beta = 135^\circ$$

したがって, 2 直線  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ ,  $y = -x$  のなす鋭角  $\theta$  は

$$\theta = 150^\circ - 135^\circ = 15^\circ$$

問題 4.5  $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$ ,  $\sin 170^\circ = \sin 10^\circ$

また  $\sin 10^\circ < \sin 20^\circ < \sin 30^\circ < \sin 40^\circ$

よって  $\sin 170^\circ < \sin 20^\circ < \sin 150^\circ < \sin 40^\circ$

練習 4.18 (1) 正弦定理により  $\frac{5}{\sin 45^\circ} = 2R$

$$\text{よって} \quad R = \frac{5}{2 \sin 45^\circ} = \frac{5}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

(2) 正弦定理により  $\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R$

$$\text{よって} \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

練習 4.19 正弦定理により  $\frac{10}{\sin C} = 2 \cdot 10$     よって  $\sin C = \frac{1}{2}$

これを満たす  $C$  は  $C = 30^\circ, 150^\circ$

練習 4.20 (1) 正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{よって} \quad b = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

(2) 正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 120^\circ}$$

$$\text{よって} \quad b = 2 \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 120^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

練習 4.21  $\angle C = 180^\circ - (135^\circ + 15^\circ) = 30^\circ$

正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{AB}{\sin C} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{200}{\sin 30^\circ}$$

$$\text{よって} \quad BC = 200 \cdot \frac{1}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 135^\circ = 200 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 200\sqrt{2} \quad (\text{答}) \quad 200\sqrt{2} \text{ (m)}$$

練習 4.22 直角三角形 BCD において、三平方の定理により  $BC^2 = CD^2 + BD^2$   
 直角三角形 ADC において、 $\angle CAD = 180^\circ - A$  であるから

$$CD = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A \quad \text{よって} \quad CD^2 = (b \sin A)^2$$

$$\text{また} \quad AD = b \cos(180^\circ - A) = -b \cos A$$

$$\text{ゆえに} \quad BD = BA + AD = c + (-b \cos A) = c - b \cos A$$

$$\text{よって} \quad BD^2 = (c - b \cos A)^2$$

練習 4.23 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos 45^\circ \\ &= 8 + 9 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 \end{aligned}$$

$$b > 0 \text{ であるから} \quad b = \sqrt{5}$$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49 \end{aligned}$$

$$c > 0 \text{ であるから} \quad c = 7$$

練習 4.24 余弦定理により

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + CA^2 - 2 \cdot BC \cdot CA \cos 60^\circ \\ &= 40^2 + 50^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} = 2100 \end{aligned}$$

$$AB > 0 \text{ であるから} \quad AB = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21} \quad (\text{答}) \quad 10\sqrt{21} \text{ (m)}$$

練習 4.25 (1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって} \quad A = 30^\circ$$

(2) 余弦定理により

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(\sqrt{2})^2 + 1^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって} \quad B = 135^\circ$$

練習 4.26  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

(1)  $b^2 = 18, c^2 = 49, a^2 = 81$  であるから  $b^2 + c^2 < a^2$

よって **A は鈍角**

(2)  $b^2 = 6, c^2 = 4, a^2 = 7$  であるから  $b^2 + c^2 > a^2$

よって **A は鋭角**

練習 4.27 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ \\ &= (3 + 2\sqrt{3} + 1) + 2 - 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \end{aligned}$$

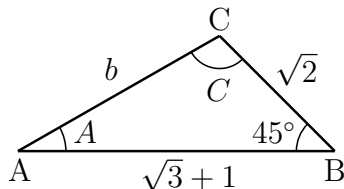
$b > 0$  であるから  $b = 2$

正弦定理により  $\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$  よって  $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$A + C = 135^\circ$  より,  $A < 135^\circ$  であるから  $A = 30^\circ$

したがって  $C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

(答)  **$b = 2, A = 30^\circ, C = 105^\circ$**



深化 4.1  $A = 135^\circ$  とすると,  $A + C = 135^\circ + 60^\circ = 195^\circ$  となり,  $180^\circ$  より大きくなってしまうから.

練習 4.28 正弦定理により  $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

が成り立つから  $a : b : c = 8 : 7 : 13$

このとき, 正の数  $k$  を用いて, 次のように表すことができる.

$$a = 8k, \quad b = 7k, \quad c = 13k$$

$c$  が最大の辺であるから,  $C$  が最大の角である.

余弦定理により

$$\cos C = \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} = \frac{-56k^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} = -\frac{1}{2}$$

よって, 最大の角の大きさは  **$C = 120^\circ$**

練習 4.29 (1)  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$

(2)  $S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$

(3)  $S = \frac{1}{2}a \cdot a \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

練習 4.30 (1) 余弦定理から  $\cos A = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{10}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{7}$

$\sin A > 0$  であるから  $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

よって  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$

(2) 余弦定理から  $\cos A = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{252}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{3}{5}$

$\sin A > 0$  であるから  $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

よって  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \frac{4}{5} = 84$

練習 4.31  $\triangle ABC$  に余弦定理を使うと

$$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 60^\circ = 25 + 16 - 20 = 21$$

$$AC > 0 \text{ であるから } AC = \sqrt{21}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle D = 180 - 60^\circ = 120^\circ$$

$AD = x$  として,  $\triangle ACD$  に余弦定理を使うと

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot CD \cdot AD \cos \angle D$$

$$\text{よって} \quad 21 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cos 120^\circ$$

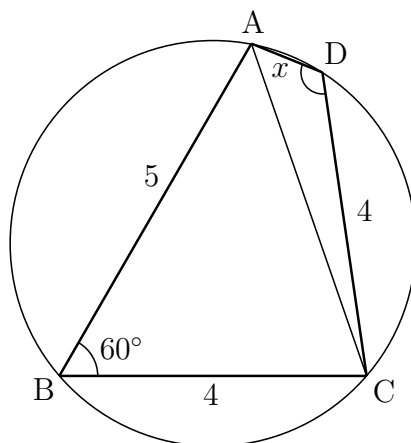
$$\text{整理すると} \quad x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\text{これを解くと} \quad x = 1, -5$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 1 \quad \text{すなわち} \quad AD = 1$$

したがって, 四角形 ABCD の面積を  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \sin 120^\circ \\ &= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$



練習 4.32 余弦定理により  $\cos A = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$

$\sin A > 0$  であるから  $\sin A = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

△ABC の面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

また  $S = \frac{1}{2}r(4 + 3 + 2) = \frac{9}{2}r$

よって,  $\frac{9}{2}r = \frac{3\sqrt{15}}{4}$  から  $r = \frac{\sqrt{15}}{6}$

演習 4.1  $2s = 7 + 8 + 13$  から  $s = 14$

よって  $S = \sqrt{14(14-7)(14-8)(14-13)} = \sqrt{14 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1} = 14\sqrt{3}$

練習 4.33  $\angle AHB = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

△ABH に正弦定理を使うと  $\frac{BH}{\sin 60^\circ} = \frac{100}{\sin 45^\circ}$

よって  $BH = 100 \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 60^\circ = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{6}$

求める気球の高さは  $PH = BH \tan 30^\circ = 50\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{2}$  (m)

練習 4.34 三平方の定理により

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$DG^2 = CG^2 + CD^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

△DEG に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} \cos \angle DEG &= \frac{DE^2 + EG^2 - DG^2}{2 \cdot DE \cdot EG} = \frac{25 + 52 - 45}{2 \cdot \sqrt{25} \sqrt{52}} \\ &= \frac{32}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{8}{5\sqrt{13}} \end{aligned}$$

$\sin \angle DEG > 0$  であるから

$$\sin \angle DEG = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{5\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{29}}{5\sqrt{13}}$$

したがって  $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{13} \cdot \frac{3\sqrt{29}}{5\sqrt{13}} = 3\sqrt{29}$

演習 4.2 頂点 P から  $\triangle ABC$  に垂線 PH を下ろすと、 $\triangle PAH$ 、 $\triangle PBH$ 、 $\triangle PCH$  はいずれも直角三角形で

$$PA = PB = PC, \quad PH \text{ は共通}$$

であるから、これらの直角三角形は合同である。

$$\text{よって} \quad AH = BH = CH$$

したがって、H は  $\triangle ABC$  の外接円の中心である。

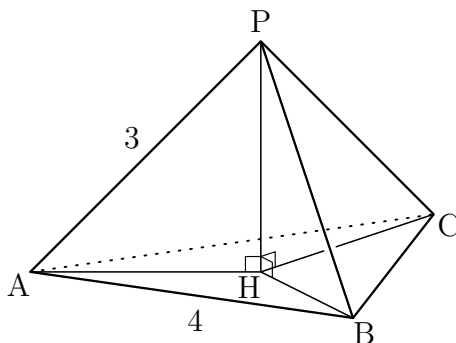
AH は  $\triangle ABC$  の外接円の半径であるから、正弦定理より

$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = 2AH \quad \text{すなわち} \quad AH = \frac{4}{2 \sin 60^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって} \quad PH = \sqrt{PA^2 - AH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$\triangle ABC \text{ の面積を } S \text{ とすると} \quad S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$$

$$\text{よって} \quad V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot PH = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{4\sqrt{11}}{3}$$



問題 4.6 正弦定理により  $a : b = \sin A : \sin B = 7 : 3$

$$\text{よって} \quad \sin B = \frac{3}{7} \sin 60^\circ = \frac{3}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

問題 4.7 (1)  $\triangle ABC$  に余弦定理を使うと

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 60^\circ = 13$$

$$BC > 0 \text{ であるから } BC = \sqrt{13}$$

$$\text{よって } BM = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

(2)  $\triangle ABC$  に余弦定理を使うと

$$\cos B = \frac{4^2 + (\sqrt{13})^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{13}} = \frac{5}{2\sqrt{13}} \quad \left( = \frac{5\sqrt{13}}{26} \right)$$

(3)  $\triangle ABM$  に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cos B \\ &= 4^2 + \left( \frac{\sqrt{13}}{2} \right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{13}} = \frac{37}{4} \end{aligned}$$

$$AM > 0 \text{ であるから } AM = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

解説  $\angle AMB = \theta$  とすると,  $\angle AMC = 180^\circ - \theta$ .  $\triangle ABM$  および  $\triangle AMC$  に余弦定理を適用すると,  $MC = BM$  より

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cos \theta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= AM^2 + MC^2 - 2AM \cdot MC \cos(180^\circ - \theta) \\ &= AM^2 + BM^2 + 2AM \cdot BM \cos \theta \quad (2) \end{aligned}$$

(1), (2) の辺々を加えると, 次の定理を得る.

中線定理

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

別解 中線定理に,  $AB = 4$ ,  $AC = 3$  および (1) の結果を代入すると

$$16 + 9 = 2 \left( AM^2 + \frac{13}{4} \right) \quad \text{ゆえに } AM^2 = \frac{37}{4}$$

$$AM > 0 \text{ であるから } AM = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

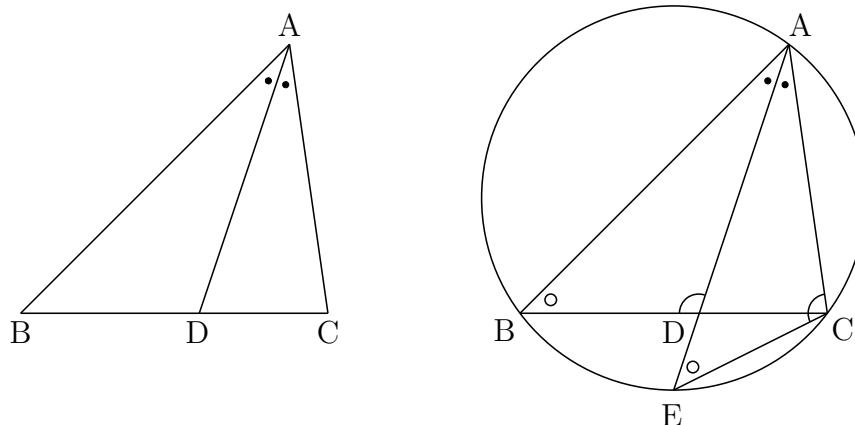
補足 中線定理と同様に，次も重要な公式である．

三角形の角の二等分線に関する公式

$\triangle ABC$  の  $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  との交点を  $D$  とすると

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC \quad (5.2)$$

証明 右下の図のように  $\triangle ABC$  の外接円と  $AD$  の延長との交点を  $E$  とする．



$\triangle ABD \sim \triangle AEC$  より

$$AB : AD = AE : AC \quad \text{ゆえに} \quad AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

$AE = AD + DE$  より

$$AB \cdot AC = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

方べきの定理により， $AD \cdot DE = BD \cdot DC$  であるから

$$AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC \quad \text{よって} \quad AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC \quad \text{証終}$$

問題 4.8 (1) この平行四辺形の面積は， $\triangle ABD$  の面積の 2 倍である．

$$2 \times \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin 60^\circ \right) = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

(2) 円の中心と正十二角形の各頂点を結ぶと，面積の等しい 12 個の二等辺三角形ができる．

この二等辺三角形の頂角は  $30^\circ$  である．

よって，正十二角形の面積は

$$12 \times \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 30^\circ \right) = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

問題 4.9  $\triangle AEF$  に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} EF^2 &= AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos 60^\circ \\ &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 7 \end{aligned}$$

$EF > 0$  であるから  $EF = \sqrt{7}$

$\triangle AEC$  に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} EC^2 &= AE^2 + AC^2 - 2AE \cdot AC \cos 60^\circ \\ &= 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 27 \end{aligned}$$

$EC > 0$  であるから  $EC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\triangle ACF$  に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} FC^2 &= AC^2 + AF^2 - 2 \cdot AC \cdot AF \cos 60^\circ \\ &= 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 28 \end{aligned}$$

$FC > 0$  であるから  $FC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\triangle EFC$  に余弦定理を使うと

$$\cos \angle EFC = \frac{EF^2 + FC^2 - EC^2}{2 \cdot EF \cdot FC} = \frac{7 + 28 - 27}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}} = \frac{2}{7}$$

$\sin \angle EFC > 0$  であるから

$$\sin \angle EFC = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

よって 
$$S = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot FC \sin \angle EFC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{7} = 3\sqrt{5}$$

問題 4.10 (1)  $\triangle ABC$  において，正弦定理により  $\sin A = \frac{a}{2R}$

$$\text{これを } S = \frac{1}{2}bc \sin A \text{ に代入すると } S = \frac{abc}{4R}$$

(2)  $\triangle ABC$  において，正弦定理により

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\text{すなわち } a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C$$

$$\text{これらを } S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{ に代入すると}$$

$$S = \frac{1}{2}r(2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C)$$

$$\text{したがって } S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$$

章末 4.1 (1)  $BH = x$  (m) とすると

$$PH = x \tan 60^\circ = \sqrt{3}x$$

$$PH = (x + 10) \tan 45^\circ = x + 10$$

$$\text{であるから } \sqrt{3}x = x + 10$$

$$\text{よって } (\sqrt{3} - 1)x = 10$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{10}{\sqrt{3} - 1} = \frac{10(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{10(\sqrt{3} + 1)}{2} = 5(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

$$\text{(答) } 5(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

$$(2) PH = x + 10 = 5(\sqrt{3} + 1) + 10 = 5(\sqrt{3} + 3)$$

$$\text{(答) } 5(\sqrt{3} + 3) \text{ m}$$

章末 4.2 (2) 対角線 BE と線分 AH の交点を F とする.

正五角形の 1 つの内角の大きさは

$$180^\circ \times 3 \div 5 = 108^\circ$$

$\angle ABE$  は, 二等辺三角形 ABE の底角であるから

$$\angle ABE = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$$

よって, 直角三角形 ABF において

$$BF = AB \times \cos 36^\circ = 10 \times 0.8090 = 8.09$$

したがって

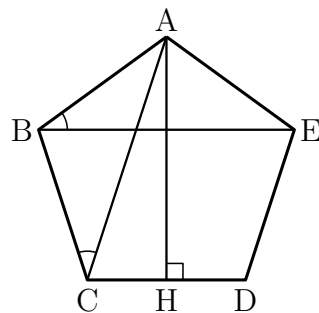
$$BE = 2BF = 2 \times 0.809 = 16.18 \approx \mathbf{16.2}$$

(2) 直角三角形 ACH において

$$\angle ACH = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

$$CH = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$$\begin{aligned} \text{よって } AH &= CH \tan 72^\circ = 5 \times 3.0777 \\ &= 15.3885 \approx \mathbf{15.4} \end{aligned}$$



補足 正五角形は円に内接するから, その中心を O とすると

$$\angle COD = 360^\circ \times \frac{1}{5} = 72^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \angle CAD = \angle COD \times \frac{1}{2} = 36^\circ$$

$$\angle CAH = \angle CAD \times \frac{1}{2} = 36^\circ \times \frac{1}{2} = 18^\circ \quad \text{より} \quad \angle ACH = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$$

章末 4.3 (1) 頂点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろすと

$$BD = 1, \quad CD = AD = \sqrt{3}$$

$$\text{よって} \quad AB = AD + DB = \sqrt{3} + 1$$

(2)  $\triangle ABC$  に正弦定理を使うと

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sin 75^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \quad \text{よって} \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$AC = \sqrt{6}$  であるから,  $\triangle ABC$  に余弦定理を使うと

$$\cos 75^\circ = \frac{2^2 + (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3} + 1)^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

章末 4.4  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OC = c$ ,  $OD = d$  とおくと

$$\triangle ODA = \frac{1}{2}da \sin \theta$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}ab \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2}bc \sin \theta$$

$$\triangle OCD = \frac{1}{2}cd \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}cd \sin \theta$$

したがって、四角形 ABCD の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \triangle ODA + \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD \\ &= \frac{1}{2}da \sin \theta + \frac{1}{2}ab \sin \theta + \frac{1}{2}bc \sin \theta + \frac{1}{2}cd \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(da + ab + bc + cd) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(a + c)(b + d) \sin \theta = \frac{1}{2}pq \sin \theta \end{aligned}$$

章末 4.5  $\triangle ABC$  の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

また、 $AD = x$  とすると

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}x$$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}x$$

$$\triangle ABD + \triangle ADC = \triangle ABC \text{ より } 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x = 8\sqrt{3} \quad \text{よって } x = \frac{8}{3}$$

別解  $\triangle ABC$  に余弦定理を適用すると  $BC^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cos 120^\circ = 16 \cdot 7$

293 ページ公式 5.2

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

に  $AB = 4$ ,  $AC = 3$ ,  $AD = \frac{2}{3}BC$ ,  $DB = \frac{1}{3}BC$  を代入すると

$$AD^2 = 4 \cdot 8 - \frac{2}{9}BC^2 = 32 - \frac{2}{9} \cdot 16 \cdot 7 = \frac{64}{9}$$

$$AD > 0 \text{ であるから } AD = \frac{8}{3}$$

章末 4.6  $\triangle ABC$  において、正弦定理により

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

$$\text{よって} \quad \sin B = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

これを満たす  $B$  は  $B = 60^\circ, 120^\circ$

$B = 60^\circ$  のとき

$$A = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$

$\triangle ABC$  は  $A = 90^\circ$  の直角三角形であるから、

三平方の定理により

$$a = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

$B = 120^\circ$  のとき

$$A = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

$\triangle ABC$  は  $AB = BC$  の二等辺三角形であるから

$$a = c = 2$$

(答)  $a = 4, A = 90^\circ, B = 60^\circ$  または  $a = 2, A = 30^\circ, B = 120^\circ$

章末 4.7  $\angle B = \theta$  とおくと

$\triangle ABC$  に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} AC^2 &= BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cos \theta \\ &= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos \theta \\ &= 41 - 40 \cos \theta \end{aligned}$$

$\triangle ACD$  に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} AC^2 &= DA^2 + DC^2 - 2 \cdot DA \cdot DC \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4(-\cos \theta) \\ &= 20 + 16 \cos \theta \end{aligned}$$

$$41 - 40 \cos \theta = 20 + 16 \cos \theta \quad \text{より} \quad \cos \theta = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

$$\sin \theta > 0 \text{ であるから} \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

よって、四角形 ABCD の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BA \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot DA \cdot DC \sin(180^\circ - \theta) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{55}}{8} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{55}}{8} = \frac{7\sqrt{55}}{4} \end{aligned}$$

別解 302 ページのブラーマグプタの公式 (5.3) を用いると

$$2s = a + b + c + d \text{ のとき} \quad S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$\text{であるから, } 2s = 5 + 4 + 4 + 2 \text{ より, } s = \frac{15}{2}$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\left(\frac{15}{2} - 5\right) \left(\frac{15}{2} - 4\right) \left(\frac{15}{2} - 4\right) \left(\frac{15}{2} - 2\right)} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2}} = \frac{7\sqrt{55}}{4} \end{aligned}$$

補足  $d = 0$  のとき、ブラーマグプタの公式はヘロンの公式になる。

章末 4.8 (1) 三平方の定理により

$$PQ = \sqrt{PB^2 + BQ^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$FP = \sqrt{PB^2 + BF^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$FQ = \sqrt{BQ^2 + BF^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

よって、 $\triangle PFQ$  に余弦定理を適用して

$$\cos \angle PQF = \frac{PQ^2 + FQ^2 - FP^2}{2 \cdot PQ \cdot FQ} = \frac{20 + 40 - 52}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$\sin \angle PQF > 0$  であるから

$$\sin \angle PQF = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

したがって、 $\triangle PFQ$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot FQ \cdot \sin \angle PQF = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 14$$

- (2)  $\triangle BPF$  を底面とし、 $BQ$  を高さとする三角錐と、 $\triangle PFQ$  を底面とし、 $BK$  を高さとする三角錐は同じ立体であるから、体積は等しい。

よって

$$\frac{1}{3} \times \triangle BPF \times BQ = \frac{1}{3} \times \triangle PFQ \times BK$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \times 2 = \frac{1}{3} \times 14 \times BK$$

$$\text{したがって} \quad \mathbf{BK = \frac{12}{7}}$$

章末 4.9 (1) 頂点 A から  $\triangle BCD$  に垂線 AH を下ろす.

$\triangle ABH$ ,  $\triangle ACH$ ,  $\triangle ADH$  はいずれも直角三角形で

$$AB = AC = AD, \quad AH \text{ は共通}$$

であるから, これらの直角三角形は合同である.

よって  $BH = CH = DH$

であるから, H は  $\triangle BCD$  の外接円の中心であり, BH は  $\triangle BCD$  の外接円の半径である. 正弦定理により

$$\frac{1}{\sin 60^\circ} = 2BH \quad \text{すなわち} \quad BH = \frac{1}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって} \quad AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\triangle BCD \text{ の面積 } S \text{ は} \quad S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{したがって} \quad V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$(2) \quad V = 4V' \text{ であるから} \quad \frac{\sqrt{2}}{12} = 4V'$$

$$\text{よって} \quad V' = \frac{\sqrt{2}}{48}$$

$$(3) \quad \triangle BCD \times r = 3V' \text{ であるから}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{48} \quad \text{よって} \quad r = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{48} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

## トレミーの定理とブラマーグプタの公式

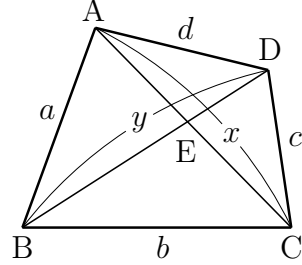
トレミーの定理とブラマーグプタの公式に関連する周辺公式を解説する.

円に内接する四角形 ABCD において,

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d,$$

$$AC = x, \quad BD = y$$

とすると, 次が成り立つ.



$$(1) \quad \cos A = \frac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(da + bc)}, \quad \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

$$(2) \quad x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \quad y^2 = \frac{(bd + ca)(ba + cd)}{bc + da}$$

$$(3) \quad xy = ac + bd \quad (\text{トレミーの定理})$$

(4)  $2s = a + b + c + d$  とすると, 四角形 ABCD の面積を  $S$ , 外接円の半径を  $R$  とすると (ブラマーグプタの公式)

$$S = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)} \quad (5.3)$$

$$R = \frac{\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}}{4S}$$

(5) AC と BD の交点を E とするとき

$$EA : EB : EC : ED = da : ab : bc : cd$$

(6)  $\theta = \angle AED$  とするとき

$$\cos \theta = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(ac + bd)}$$

証明 (1) 余弦定理により

$$y^2 = d^2 + a^2 - 2da \cos A$$

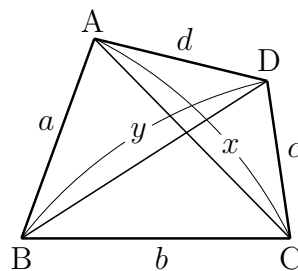
$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$$

このとき,  $\cos C = -\cos A$  であるから

$$d^2 + a^2 - 2da \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

よって  $\cos A = \frac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(da + bc)}$

上式から  $\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$



補足  $\cos B$  は  $\cos A$  の結果を  $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow a$  とすればよい.

(2) 余弦定理により  $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$

これに (1) の結果を代入すると

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

上式から  $y^2 = \frac{(bd + ca)(ba + cd)}{bc + da}$

(3) (2) の結果から  $x^2 y^2 = (ac + bd)^2$  よって  $xy = ac + bd$

(4) (1) の結果から

$$1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b - c + d)(a - b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

$$1 - \cos A = \frac{-(a - d)^2 + (b + c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b + c - d)(-a + b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

したがって  $\sin^2 A = (1 + \cos A)(1 - \cos A)$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2d)}{4(ad + bc)^2} \\ &= \frac{4(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}{(ad + bc)^2} \end{aligned}$$

$\sin A = \sin C$  より  $S = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin A$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(ad + bc) \times \frac{2\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}{ad + bc} \\ &= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)} \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}, \quad \sin A = \frac{2S}{ad+bc} \quad \text{であるから, 正弦定理により}$$

$$R = \frac{y}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

$$(5) \quad \triangle EDA \sim \triangle ECB \quad \text{より} \quad EA : EB = ED : EC = d : b$$

$$\triangle EAB \sim \triangle EDC \quad \text{より} \quad EA : ED = EB : EC = a : c$$

$$\text{よって} \quad EA : EB : EC : ED = da : ab : bc : cd$$

$$(6) \quad (2), (3), (5) \text{の結果から}$$

$$AE^2 = \left( \frac{ad}{ad+bc} x \right)^2 = \frac{a^2 d^2}{(ad+bc)^2} \times \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} = \frac{a^2 d^2 (ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$ED^2 = \left( \frac{cd}{ab+cd} y \right)^2 = \frac{c^2 d^2}{(ab+cd)^2} \times \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} = \frac{c^2 d^2 (ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$AE \cdot ED = \frac{ad}{ad+bc} x \times \frac{cd}{ab+cd} y = \frac{acd^2 xy}{(ad+bc)(ab+cd)} = \frac{acd^2 (ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)}$$

これらを  $2AE \cdot ED \cos \theta = AE^2 + ED^2 - d^2$  に代入して整理すると

$$\frac{2acd^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)} \cos \theta = \frac{acd^2}{(ad+bc)(ab+cd)} (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(ac+bd)}$$

$$(4) \text{の別解} \quad (6) \text{の結果から}$$

$$1 + \cos \theta = \frac{(a+c)^2 - (b-d)^2}{2(ac+bd)} = \frac{(a-b+c+d)(a+b+c-d)}{2(ac+bd)}$$

$$1 - \cos \theta = \frac{(b+d)^2 - (a-c)^2}{2(ac+bd)} = \frac{(-a+b+c+d)(a+b-c+d)}{2(ac+bd)}$$

$$2s = a + b + c + d \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}{4(ac+bd)^2} \\ &= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ac+bd)^2} \end{aligned}$$

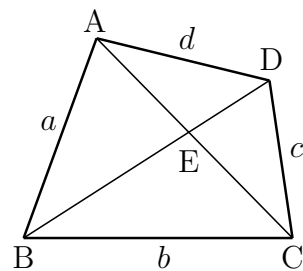
したがって, 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} xy \sin \theta = \frac{1}{2} (ac+bd) \times \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ac+bd} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \end{aligned}$$

補足 たとえば, (1), (6) から得られた

$$\cos \angle ABC = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

$$\cos \angle BEC = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(ac + bd)}$$



の符号から, これらの角の大きさに関する次の性質が分かる.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \begin{cases} \angle ABC \text{ が鋭角} & \Longleftrightarrow & a^2 + b^2 > c^2 + d^2 \\ \angle ABC \text{ が直角} & \Longleftrightarrow & a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ \angle ABC \text{ が鈍角} & \Longleftrightarrow & a^2 + b^2 < c^2 + d^2 \end{cases} \\ \text{ii)} \quad & \begin{cases} \angle BEC \text{ が鋭角} & \Longleftrightarrow & a^2 + c^2 > b^2 + d^2 \\ \angle BEC \text{ が直角} & \Longleftrightarrow & a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ \angle BEC \text{ が鈍角} & \Longleftrightarrow & a^2 + c^2 < b^2 + d^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$d = 0$  とすると, 四角形 ABCD は三角形 ABC に退化し,  $\angle ABC = B$ ,  $\angle BEC = A$  となり,  $\cos B$ ,  $\cos A$  は余弦定理に一致する.

また, i), ii) から, 三角形 ABC における関係式を得る.

同様に, ブラマーグプタの公式

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad (2s = a + b + c + d)$$

において,  $d = 0$  とすると, 次のヘロンの公式を得る.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (2s = a + b + c)$$

練習 5.1 (1)  $(24 + 27) \div 2 = 25.5$  ( $^{\circ}\text{C}$ )

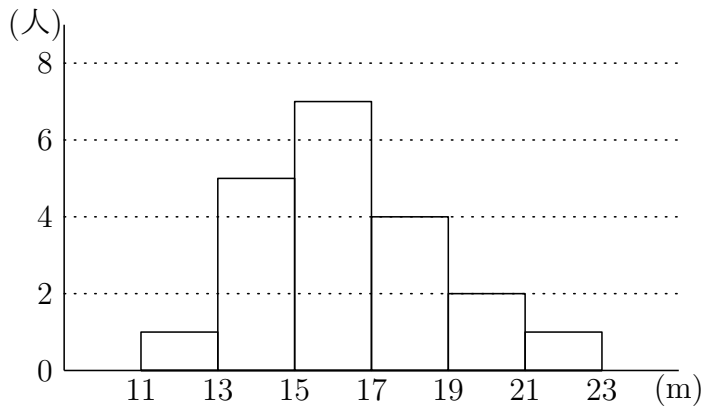
(2)  $10 + 9 + 1 = 20$  (日)

(3)  $21^{\circ}\text{C}$  以上  $24^{\circ}\text{C}$  未満

練習 5.2 (1)

| 階級 (m)      | 度数 (人) |
|-------------|--------|
| 11 以上 13 未満 | 1      |
| 13 ~ 15     | 5      |
| 15 ~ 17     | 7      |
| 17 ~ 19     | 4      |
| 19 ~ 21     | 2      |
| 21 ~ 23     | 1      |
| 計           | 20     |

(2)



練習 5.3  $\frac{1}{7}(400 + 410 + 420 + 390 + 430 + 450 + 440) = \frac{1}{7} \times 2940 = 420$  (分)

練習 5.4 度数が最も大きい階級は、 $21^{\circ}\text{C}$  以上  $24^{\circ}\text{C}$  未満である。

最頻値はこの階級の階級値であるから

$$\frac{21 + 24}{2} = 22.5$$
 ( $^{\circ}\text{C}$ )

練習 5.5 このデータを小さい順に並べると

31, 35, 38, 41, 43, 49, 51, 56

よって、このデータの中央値は

$$\frac{41 + 43}{2} = 42$$
 (kg)

練習 5.6 A 市のデータの範囲は  $14 - 4 = 10$  (日)

B 市のデータの範囲は  $22 - 6 = 16$  (日)

よって、データの散らばりの度合いが大きいと考えられるのは B 市である。

練習 5.7 データ A  $Q_3 = 55$ ,  $Q_1 = 32$

よって 四分位範囲は  $55 - 32 = 23$

データ B  $Q_3 = 54$ ,  $Q_1 = 39$

よって 四分位範囲は  $54 - 39 = 15$

したがって、データの散らばりの度合いが大きいと考えられるのは A である。

深化 5.1 例 1 損をしたくないので散らばりの小さい B の店で買いたい。

例 2 少し小さいパンになる可能性もあるけど、大きいパンになる可能性もあるので、A の店で買いたい。

練習 5.8 (1) 数学, 英語, 国語の各データを値の大きさの順に並べると

数学 30, 35, 46, 50, 58, 63, 63, 68, 86, 91

英語 52, 59, 65, 70, 75, 75, 78, 82, 88, 90

国語 58, 60, 63, 66, 68, 70, 73, 75, 79, 80

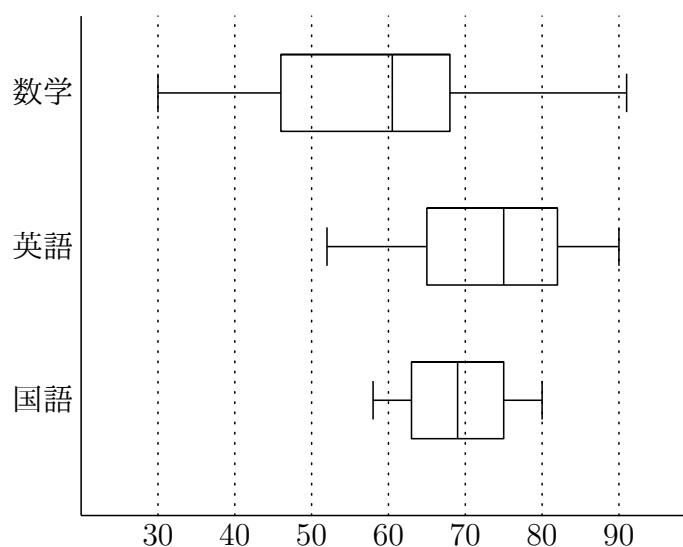
よって, それぞれのデータの最小値, 第1四分位数, 中央値, 第3四分位数, 最大値は, 順に

数学 30, 46,  $\frac{58+63}{2} = 60.5$ , 68, 91

英語 52, 65, 75, 82, 90

国語 58, 63,  $\frac{68+70}{2} = 69$ , 75, 80

したがって, 箱ひげ図は次のようになる.



(2) (1) の箱ひげ図から, データの散らばりの度合いが最も大きいと考えられるのは数学である.

練習 5.9  $Q_1 = 40$ ,  $Q_3 = 60$  であるから, 四分位範囲は  $Q_3 - Q_1 = 20$

したがって  $Q_1 - 1.5 \times (Q_3 - Q_1) = 40 - 1.5 \times 20 = 10$

$Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1) = 60 + 1.5 \times 20 = 90$

よって, 四分位範囲を利用して外れ値を調べると, 最小値 29 は外れ値ではなく, 最大値 92 は外れ値である.

練習 5.10

|                   |   |    |   |   |   |   |   |    |   |   |      |
|-------------------|---|----|---|---|---|---|---|----|---|---|------|
| $x$               | 6 | 10 | 7 | 7 | 5 | 4 | 9 | 10 | 5 | 7 | 計 70 |
| $(x - \bar{x})^2$ | 1 | 9  | 0 | 0 | 4 | 9 | 4 | 9  | 4 | 0 | 計 40 |

平均値  $\bar{x} = \frac{1}{10} \times 70 = 7$

分散  $s^2$  は  $s^2 = \frac{1}{10} \times 40 = 4$

標準偏差  $s$  は  $s = \sqrt{4} = 2$  (点)

練習 5.11

|                   |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |       |
|-------------------|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-------|
| $x$               | 5  | 3 | 6  | 8  | 5  | 8  | 5  | 4  | 6  | 5  | 計 55  |
| $(x - \bar{x})^2$ | 25 | 9 | 36 | 64 | 25 | 64 | 25 | 16 | 36 | 25 | 計 325 |

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \times 55 = 5.5, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{10} \times 325 = 32.5$$

よって、分散  $s^2$  は  $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 32.5 - 5.5^2 = 2.25$

標準偏差  $s$  は  $s = \sqrt{2.25} = 1.5$

演習 5.1 平均値  $1.8 \times 15.0 + 32 = 27.0 + 32 = 59.0$  (°F)

分散  $1.8^2 \times 9.0 = 29.16$

標準偏差  $1.8 \times \sqrt{9.0} = 1.8 \times 3.0 = 5.4$  (°F)

演習 5.2 (1) 変量  $u$  のデータ, 変量  $u^2$  のデータの値は, それぞれ次のようになる.

|       |   |   |    |   |   |   |      |
|-------|---|---|----|---|---|---|------|
| $u$   | 1 | 0 | -2 | 3 | 1 | 0 | 計 3  |
| $u^2$ | 1 | 0 | 4  | 9 | 1 | 0 | 計 15 |

$$\bar{u} = \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad \overline{u^2} = \frac{1}{6} \times 15 = \frac{5}{2}$$

よって、変量  $u$  のデータの分散は

$$s_u^2 = \overline{u^2} - (\bar{u})^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

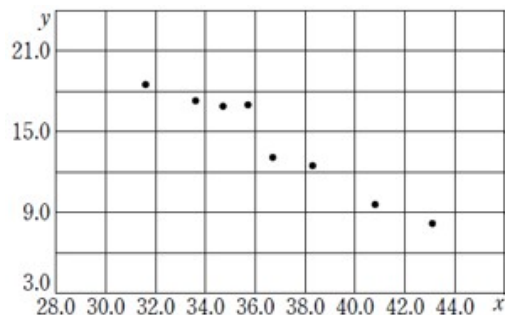
変量  $u$  のデータの標準偏差は  $s_u = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5$

(2)  $x = x_0 + cu$ ,  $c = 10$ ,  $x_0 = 740$  であるから

変量  $x$  の平均値は  $\bar{x} = 740 + 10 \times 0.5 = 745$

変量  $x$  のデータの標準偏差は  $s_x = 10 \times 1.5 = 10$

練習 5.12 (1)



(2) 負の相関があると考えられる.

練習 5.13  $\frac{18.22}{4.40 \times 4.71} = 0.879 \dots \approx \mathbf{0.88}$

練習 5.14 A の得点を  $x$ , B の得点を  $y$  とすると

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \times 30 = 5, \quad \bar{y} = \frac{1}{6} \times 24 = 4$$

|   | $x$ | $y$ | $x - \bar{x}$ | $y - \bar{y}$ | $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(y - \bar{y})^2$ |
|---|-----|-----|---------------|---------------|------------------------------|-------------------|-------------------|
| ① | 5   | 4   | 0             | 0             | 0                            | 0                 | 0                 |
| ② | 7   | 1   | 2             | -3            | -6                           | 4                 | 9                 |
| ③ | 5   | 3   | 0             | -1            | 0                            | 0                 | 1                 |
| ④ | 4   | 5   | -1            | 1             | -1                           | 1                 | 1                 |
| ⑤ | 3   | 9   | -2            | 5             | -10                          | 4                 | 25                |
| ⑥ | 6   | 2   | 1             | -2            | -2                           | 1                 | 4                 |
| 計 | 30  | 24  |               |               | -19                          | 10                | 40                |

上の表から,  $x$  と  $y$  の相関係数は

$$\frac{-19}{\sqrt{10 \times 40}} = -\frac{19}{20} = \mathbf{-0.95}$$

よって, A の得点と B の得点には強い負の相関があると考えられる.

練習 5.15 (1)

|       | 合  | 否  | 計   |
|-------|----|----|-----|
| B : 有 | 37 | 10 | 47  |
| B : 無 | 14 | 39 | 53  |
| 計     | 51 | 49 | 100 |

(2)

|       | 合   | 否   |
|-------|-----|-----|
| A : 有 | 79% | 21% |
| A : 無 | 26% | 74% |

深化 5.2 使用している受験者の合格する割合が多いことから、Bの方がより影響を及ぼしている。

演習 5.3 回帰直線を引くことによって、たとえば、170cm の人のおおよその体重を予測することができる。

練習 5.16 [1] 以前よりおいしくなったと評価されている。

と判断してよいかを考察するために、次の仮説を立てる。

[2] どちらの解答も全くの偶然で起こる

主張 [1] が正しいと判断してよいかを、基準となる確率を 0.05 として考察する。  
コイン投げの実験結果を利用すると、コインを 20 回投げて 15 回以上出る場合の相対度数は

$$\frac{3 + 0 + 1}{200} = \frac{4}{200} = 0.02$$

これは 0.05 より小さいから、[2] の仮説が正しくなかったと考えられる。

よって、[1] の主張は正しい、すなわち、水道水は以前に比べておいしくなったと評価されていると判断してよい。

演習 5.4 [1] 表が出やすい

と判断してよいかを考察するために、次の仮定を立てる。

[2] このコインの表が出る確率は  $\frac{1}{2}$  である

主張 [1] が正しいと判断できるかを、基準となる確率を 0.05 として考察する。  
1 枚のコインを 6 回投げて、5 回以上表が出る確率は

$${}_6C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{7}{64} = 0.109375$$

これは 0.05 より大きいから、[2] の仮定は否定できない。

よって、[1] の主張は正しいとは判断できない。

すなわち、このコインは表が出やすいとは判断できない。

問題 5.1 (1) 1 回目のデータの平均値は

$$\frac{1}{10}(1+1+2+4+7+8+8+9+10+10) = \frac{1}{10} \times 60 = 6 \text{ (点)}$$

(2) 1 回目のデータを値の小さい方から順に並べたとき

5 番目の値は 7, 6 番目の値は 8

である. よって, 1 回目のデータの中央値は

$$\frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ (点)}$$

(3) 1 回目のデータの平均値は, (1) より 6 (点)

2 回目のデータの平均値は

$$\frac{1}{10}(2+3+4+4+5+5+6+6+7+8) = \frac{1}{10} \times 50 = 5 \text{ (点)}$$

1 回目のデータを  $x$ , 2 回目のデータを  $y$  とする.

|   | $x$ | $y$ | $x - \bar{x}$ | $y - \bar{y}$ | $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(y - \bar{y})^2$ |
|---|-----|-----|---------------|---------------|------------------------------|-------------------|-------------------|
| ① | 1   | 2   | -5            | -3            | 15                           | 25                | 9                 |
| ② | 1   | 4   | -5            | -1            | 5                            | 25                | 1                 |
| ③ | 2   | 3   | -4            | -2            | 8                            | 16                | 4                 |
| ④ | 4   | 5   | -2            | 0             | 0                            | 4                 | 0                 |
| ⑤ | 7   | 4   | 1             | -1            | -1                           | 1                 | 1                 |
| ⑥ | 8   | 5   | 2             | 0             | 0                            | 4                 | 0                 |
| ⑦ | 8   | 6   | 2             | 1             | 2                            | 4                 | 1                 |
| ⑧ | 9   | 7   | 3             | 2             | 6                            | 9                 | 4                 |
| ⑨ | 10  | 6   | 4             | 1             | 4                            | 16                | 1                 |
| ⑩ | 10  | 8   | 4             | 3             | 12                           | 16                | 9                 |
| 計 | 60  | 50  |               |               | 51                           | 120               | 30                |

上の表から相関係数は

$$\frac{51}{\sqrt{120 \times 30}} = \frac{51}{60} = 0.85$$

問題 5.2  $\frac{1}{5}(2+3+a+8+12)=6$  これを解いて  $a=5$

データ  $x$  の値と偏差の 2 乗の値は、次の表のようになる。

|                 |    |   |   |   |    |      |
|-----------------|----|---|---|---|----|------|
| $x$             | 2  | 3 | 5 | 8 | 12 | 計 30 |
| $(x-\bar{x})^2$ | 16 | 9 | 1 | 4 | 36 | 計 66 |

したがって、分散は  $\frac{1}{5} \times 66 = 13.2$

別解

|       |   |   |    |    |     |       |
|-------|---|---|----|----|-----|-------|
| $x$   | 2 | 3 | 5  | 8  | 12  | 計 30  |
| $x^2$ | 4 | 9 | 25 | 64 | 144 | 計 246 |

よって  $\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{246}{5} - 6^2 = 13.2$

問題 5.3 (1) B のテストの中央値が 80 点より大きいから、B のテストでは、半数以上の生徒が 80 点以上であったといえる。

よって、条件を満たすテストは **B**

(2) 40 点以下の生徒がいたテストは A, C, D の 3 つ。このうち、A は箱の下端、すなわち第 1 四分位数が 40 点より小さいから、 $\frac{1}{4}$  以上、すなわち、75 人以上の生徒が 40 点以下であるといえる。

また、C については、中央値や第 3 四分位数が 40 点より小さいから、これも 75 人以上の生徒が 40 点以下であるといえる。

D は第 1 四分位数が 40 点より大きいから、40 点以下の生徒は 75 人未満であるといえる。

よって、条件を満たすテストは **D**

章末 5.1 (1) 170cm 以上 174cm 未満, 174cm 以上 178cm 未満, 178cm 以上 182cm 未満  
の各階級の度数を足し合わせて

$$16 + 7 + 1 = 24 \text{ (人)}$$

(2) ヒストグラム [1] から, データの最小値, 第 1 四分位数, 中央値, 第 3 四分  
位数, 最大値が入る階級は次のようになることがわかる。

|          |                   |       |
|----------|-------------------|-------|
| 最小値      | 158cm 以上 162cm 未満 | … (a) |
| 第 1 四分位数 | 166cm 以上 170cm 未満 | … (b) |
| 中央値      | 170cm 以上 174cm 未満 | … (c) |
| 第 3 四分位数 | 170cm 以上 174cm 未満 | … (d) |
| 最大値      | 178cm 以上 182cm 未満 | … (e) |

箱ひげ図 ① は, (c) に矛盾する.

箱ひげ図 ③ は, (d) に矛盾する.

箱ひげ図 ② は, (a)~(e) のどれにも矛盾しない.

よって, 矛盾する箱ひげ図は ①, ③

章末 5.2 データを大きさの順に並べると, 次のようになる.

$$35, 37, 38, 46, 48, 54, 57$$

(1) 平均値  $\frac{1}{7}(35 + 37 + 38 + 46 + 48 + 54 + 57) = \frac{1}{7} \times 315 = 45$  (点)

中央値 46 (点)

|                   |     |    |    |    |    |    |     |       |
|-------------------|-----|----|----|----|----|----|-----|-------|
| $x$               | 35  | 37 | 38 | 46 | 48 | 54 | 57  | 計 315 |
| $(x - \bar{x})^2$ | 100 | 64 | 49 | 1  | 9  | 81 | 144 | 計 448 |

上の表から, 分散  $\frac{1}{7} \times 448 = 64$

(2) 全員の得点に 10 点ずつ足したとき, データの値の総和は  $10 \times 7$ (点) 増加す  
る。よって, 平均値は

$$\frac{1}{7} \times (315 + 10 \times 7) = \frac{1}{7} \times 385 = 55 \text{ (点)}$$

全員の得点に 10 点ずつ足したとき, データの各値も平均値も 10 点だけ増  
加するから, 偏差はもとのデータと変わらない.

したがって, 分散は 64

章末 5.3 散布図より, 変量  $x$  のデータをヒストグラムで表したとき, 度数が最も大きい  
階級は 40 以上 60 未満である.

よって,  $x$  のとる値についてのヒストグラムは ③

また, 散布図より,  $x$  と  $y$  の相関係数は  $-0.8$  に近い.

章末 5.4 A : ②, B : ③, C : ①

章末 5.5 (1)  $\frac{1}{25}(4 \times 10 + 9 \times 15) = \frac{1}{25} \times 175 = 7$

(2) 10 個の値の 2 乗の平均値を  $a$  とすると

$$a - 4^2 = 14 \quad \text{ゆえに} \quad a = 30$$

のこりの 15 個の値の 2 乗の平均を  $b$  とすると

$$b - 9^2 = 19 \quad \text{ゆえに} \quad b = 100$$

よって, 25 個の値の 2 乗の和は

$$a \times 10 + b \times 15 = 30 \times 10 + 100 \times 15 = 1800$$

したがって, 25 個の値の分散は

$$\frac{1800}{25} - 7^2 = 72 - 49 = \mathbf{23}$$

章末 5.6 (1) 種子 B の発芽する確率は種子 A と変わらないという仮定を立てる. このとき, 必要となる実験は, 確率が  $\frac{2}{3}$  であるような実験である. 公正なコインを投げて表が出る確率は  $\frac{1}{2}$  であるからこの仮定のための実験にはならない.

(2) [1] 種子 B の発芽する確率は種子 A に比べて高い

と判断してよいかを考察するために次の仮定をたてる.

[2] 種子 B の発芽する確率は種子 A と変わらない

主張 [1] が正しいと判断してよいかを, 基準となる確率を 0.05 として考察する.

さいころ投げの実験結果を利用すると, さいころを 30 個投げて 25 個以上 3 以上の目が出る場合の相対度数は

$$\frac{11 + 6}{500} = \frac{17}{500} = 0.034$$

これは 0.05 より小さいから, [2] の仮定が正しくなかったと考えられる. よって, [1] の主張は正しい, すなわち, 種子 B の発芽する確率は種子 A に比べて高いと判断してよい.