令和５年度

高等学校　数学II

電子教科書

2023 年 10 月 8 日

熊本県立第二高等学校数学科

スライド

第 1 章　式と証明　[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

1.1 式と計算
- 1.1.1　3 次式の展開と因数分解　教科書 pp.8-10
- 1.1.2　二項定理　教科書 pp.11-15
- 1.1.3　多項式の割り算　教科書 pp.16-18
- 1.1.4　分数式とその計算　教科書 pp.19-21
- 1.1.5　恒等式　教科書 pp.22-24
- 1.1.6　問題　教科書 p.25

1.2 等式・不等式の証明
- 1.2.1　等式の証明　教科書 pp.26-28
- 1.2.2　不等式の証明　教科書 pp.29-35
- 1.2.3　問題　教科書 p.36

1.3　章末問題　教科書 p.37-38

第 2 章　複素数と方程式　[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

2.1 複素数と 2 次方程式の解
- 2.1.1　複素数とその計算　教科書 pp.40-44
- 2.1.2　2 次方程式の解　教科書 pp.45-47
- 2.1.3　解と係数の関係　教科書 pp.48-54
- 2.1.4　問題　教科書 p.55

2.2 高次方程式
- 2.2.1　剰余の定理と因数定理　教科書 pp.56-59
- 2.2.2　高次方程式　教科書 pp.60-63
- 2.2.3　問題　教科書 p.64

2.3　章末問題　教科書 p.65

第 3 章　図形と方程式　[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

3.1 点と直線
- 3.1.1　直線上の点　教科書 pp.68-70
- 3.1.2　平面上の点　教科書 pp.71-75
- 3.1.3　直線の方程式　教科書 pp.76-78
- 3.1.4　2 直線の関係　教科書 pp.79-84
- 3.1.5　問題　教科書 p.85

3.2 円
3.2.1 円の方程式 教科書 pp.86-88
3.2.2 円と直線 教科書 pp.89-93
3.2.3 2 つの円 教科書 pp.94-97
3.2.4 問題 教科書 p.98
3.3 軌跡と領域
3.3.1 軌跡と方程式 教科書 pp.99-101
3.3.2 不等式の表す領域 教科書 pp.102-109
3.3.3 問題 教科書 p.110
3.4 章末問題 教科書 pp.111-112

第 4 章 三角関数 [内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

4.1 三角関数
4.1.1 角の拡張 教科書 pp.114-117
4.1.2 三角関数 教科書 pp.118-121
4.1.3 三角関数のグラフ 教科書 pp.122-127
4.1.4 三角関数の性質 教科書 pp.128-129
4.1.5 問題 教科書 pp.130-134
4.1.6 問題 教科書 p.135
4.2 加法定理
4.2.1 加法定理 教科書 pp.136-141
4.2.2 加法定理の応用 教科書 pp.142-148
4.2.3 問題 教科書 p.149
4.3 章末問題 教科書 p.150-151

第 5 章 指数関数と対数関数 [内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

5.1 指数関数
5.1.1 指数の拡張 教科書 pp.154-159
5.1.2 指数関数 教科書 pp.160-164
5.1.3 問題 教科書 p.165
5.2 対数関数
5.2.1 対数とその性質 教科書 pp.166-169
5.2.2 対数関数 教科書 pp.170-174
5.2.3 常用対数 教科書 pp.175-177
5.2.4 問題 教科書 p.178
5.3 章末問題 教科書 pp.179-180

第 6 章　微分法と積分法　[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

6.1 微分係数

- 6.1.1　微分係数　教科書 pp.182-185
- 6.1.2　導関数とその計算　教科書 pp.186-191
- 6.1.3　接線の方程式　教科書 pp.192-193
- 6.1.4　問題　教科書 p.194

6.2 関数の値の変化

- 6.2.1　関数の増減と極大・極小　教科書 pp.195-201
- 6.2.2　関数の増減・グラフの応用　教科書 pp.202-206
- 6.2.3　問題　教科書 p.207

6.3 積分法

- 6.3.1　不定積分　教科書 pp.208-211
- 6.3.2　定積分　教科書 pp.212-217
- 6.3.3　定積分と面積　教科書 pp.218-227
- 6.3.4　問題　教科書 p.228

6.4　章末問題　教科書 pp.229-230

目 次

スライド i

第 1 章　式と証明 1
1.1　式と計算 1
1.1.1　3 次式の展開と因数分解 1
1.1.2　二項定理 4
1.1.3　多項式の割り算 9
1.1.4　分数式とその計算 12
1.1.5　恒等式 15
1.1.6　問題 18
1.2　等式・不等式の証明 21
1.2.1　等式の証明 21
1.2.2　不等式の証明 25
1.2.3　問題 32
1.3　章末問題 35
1.3.1　章末問題 A 35
1.3.2　章末問題 B 39

第 2 章　複素数と方程式 41
2.1　複素数と 2 次方程式の解 41
2.1.1　複素数とその計算 41
2.1.2　2 次方程式の解 46
2.1.3　解と係数の関係 50
2.1.4　問題 61
2.2　高次方程式 64
2.2.1　剰余の定理と因数定理 64
2.2.2　高次方程式 69
2.2.3　問題 76
2.3　章末問題 79
2.3.1　章末問題 A 79
2.3.2　章末問題 B 82

第 3 章　図形と方程式 85
3.1　点と直線 85
3.1.1　直線上の点 85

3.1.2 平面上の点 . . . 88
3.1.3 直線の方程式 . . . 95
3.1.4 2 直線の関係 . . . 98
3.1.5 問題 . . . 107
3.2 円 . . . 110
3.2.1 円の方程式 . . . 110
3.2.2 円と直線 . . . 115
3.2.3 2 つの円 . . . 125
3.2.4 問題 . . . 130
3.3 軌跡と領域 . . . 133
3.3.1 軌跡と方程式 . . . 133
3.3.2 不等式の表す領域 . . . 136
3.3.3 問題 . . . 148
3.4 章末問題 . . . 150
3.4.1 章末問題 A . . . 150
3.4.2 章末問題 B . . . 153

第 4 章 三角関数 157
4.1 三角関数 . . . 157
4.1.1 角の拡張 . . . 157
4.1.2 三角関数 . . . 162
4.1.3 三角関数のグラフ . . . 169
4.1.4 三角関数の性質 . . . 178
4.1.5 三角関数の応用 . . . 180
4.1.6 問題 . . . 190
4.2 加法定理 . . . 193
4.2.1 加法定理 . . . 193
4.2.2 加法定理の応用 . . . 199
4.2.3 問題 . . . 212
4.3 章末問題 . . . 215
4.3.1 章末問題 A . . . 215
4.3.2 章末問題 B . . . 218

第 5 章 指数関数と対数関数 221
5.1 指数関数 . . . 221
5.1.1 指数の拡張 . . . 221
5.1.2 指数関数 . . . 227
5.1.3 問題 . . . 232
5.2 対数関数 . . . 234

5.2.1 対数とその性質 . . . 234
5.2.2 対数関数 . . . 239
5.2.3 常用対数 . . . 246
5.2.4 問題 . . . 249
5.3 章末問題 . . . 252
5.3.1 章末問題 A . . . 252
5.3.2 章末問題 B . . . 255
常用対数表 (1) . . . 258
常用対数表 (2) . . . 259

第 6 章 微分法と積分法 **261**
6.1 微分係数と導関数 . . . 261
6.1.1 微分係数 . . . 261
6.1.2 導関数とその計算 . . . 266
6.1.3 接線の方程式 . . . 272
6.1.4 問題 . . . 275
6.2 関数の値の変化 . . . 278
6.2.1 関数の増減と極大・極小 . . . 278
3 次関数のグラフのまとめ . . . 288
6.2.2 関数の増減・グラフの応用 . . . 289
6.2.3 問題 . . . 298
6.3 積分法 . . . 301
6.3.1 不定積分 . . . 301
6.3.2 定積分 . . . 305
6.3.3 定積分と面積 . . . 313
6.3.4 問題 . . . 329
6.4 章末問題 . . . 332
6.4.1 章末問題 A . . . 332
6.4.2 章末問題 B . . . 335

解答 **343**
代数方程式の解の性質 . . . 390
3 次方程式・4 次方程式の解法 . . . 401
中線定理および角の二等分線に関する公式 . . . 405
三角形の外心・垂心・重心 . . . 411
ベクトルの基本性質 . . . 415
直線の法線ベクトル . . . 416
三角形 OAB の面積 . . . 419
9 点円 (オイラー円) . . . 423

ド・モアブルの定理 486
累乗根 503
相乗平均・相乗平均・調和平均 506
ネイピア数 509
負の数の累乗根 510
複素数平面 511
3 次方程式の実数解の個数 553
2 次関数と定積分 569
カヴァリエリの原理 573
積分公式 1 576
3 次関数のグラフと接線 580
積分公式 2 583
積の微分法 602

第 1 章　式と証明

1.1　式と計算

1.1.1　3 次式の展開と因数分解

2 次式について，次の展開の公式や，これらを逆に利用した因数分解の公式は，すでに学んでいる．

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

ここでは，3 次式についての展開，因数分解について学ぼう．

A 》3 次式の展開の公式

$(a+b)^3$ を展開すると，次のようになる．

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)a+(a^2+2ab+b^2)b\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} & a^2+2ab+b^2\\ \times) & a\ \ +b\\ \hline & a^3+2a^2b+\ \ ab^2\\ & \quad\ a^2b+2ab^2+b^3\\ \hline & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{array}$$

よって　　$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　$\cdots$①

また，① において，b を $-b$ に置き換えると

$$\{a+(-b)\}^3 = a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$$

よって　　$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

したがって，次の展開の公式が成り立つ．

展開の公式

1　$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$
$\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

例 1.1　(1)　$(x+1)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 1 + 3\cdot x\cdot 1^2 + 1^3$　S
$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(2)　$(2x-y)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot y + 3\cdot 2x\cdot y^2 - y^3$
$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

練習 1.1　次の式を展開せよ．　解

(1)　$(x+2)^3$

(2)　$(x-1)^3$

(3)　$(3a+b)^3$

(4)　$(x-2y)^3$

次の式の展開の結果も，公式として利用できる．

展開の公式

2　$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3}$
$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3}$

練習 1.2　展開公式 **2** が成り立つことを，左辺を展開して確かめよ．　解

例 1.2　(1)　$(x+1)(x^2-x+4) = (x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$　S
$= x^3 + 1^3 = x^3 + 1$

(2)　$(x-2y)(x^2+2xy+4y^2) = (x-2y)\{x^2 + x\cdot 2y + (2y)^2\}$
$= x^3 - (2y)^3 = x^3 - 8y^3$

練習 1.3　次の式を展開せよ．　解

(1)　$(x+2)(x^2-2x+4)$

(2)　$(x-3)(x^2+3x+9)$

(3)　$(x+3y)(x^2-3x+9y^2)$

(4)　$(2x-a)(4x^2+2ax+a^2)$

B 》3 次式の因数分解

前ページの展開の公式 **2** を逆に利用する因数分解は，次のようになる．

因数分解の公式

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

例 1.3 (1) $x^3+64=x^3+4^3$ S
$$=(x+4)(x^2-x\cdot 4+4^2)$$
$$=(x+4)(x^2-4x+16)$$

(2) $27x^3-a^3=(3x)^3-a^3$
$$=(3x-a)\{(3x)^2+3x\cdot a+a^2\}$$
$$=(3x-a)(9x^2+3ax+a^2)$$

練習 1.4 次の式を因数分解せよ． 解

(1) x^3-1

(2) x^3+27a^3

(3) x^3-64

(4) $125x^3-y^3$

例題 1.1 次の式を因数分解せよ． S

$$x^6-y^6$$

解答 $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$$

練習 1.5 次の式を因数分解せよ． 解

(1) x^6-1

(2) a^6-64b^6

深化 1.1 例題 1.1 を $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3$ と考えて因数分解してみよう． 解

1.1.2　二項定理

$(a+b)^2$, $(a+b)^3$ の展開式は，次のようになる．

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

ここでは，自然数 n について，$(a+b)^n$ の展開式を調べてみよう．

A 》パスカルの三角形

$(a+b)^4$ の展開式は，

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

として，右の計算より

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$\begin{array}{rl} & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \times) & a\ \ +b \\ \hline & a^4+3a^3b+3a^2b^2+\ \ ab^3 \\ & \qquad a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{array}$$

この計算で，各項の係数だけを取り出してみると，右のようになる．

$$\begin{array}{rl} & 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ \times) & 1\ \ 1 \\ \hline & 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ & \ \ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ \hline & 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \end{array}$$

練習 1.6 次の □ に入る各数を，係数だけを取り出す計算によって求めよ． 解

$$(a+b)^5 = a^5+\square a^4b+\square a^3b^2+\square a^2b^3+\square ab^4+b^5$$

$(a+b)^n$ の展開式の各項の係数を n =1, 2, 3, 4, 5 の場合について順に並べると，右の図のようになる．

この三角形状の数の配列を**パスカルの三角形**という．

$(a+b)^1$　1　1
$(a+b)^2$　1　2　1
$(a+b)^3$　1　3　3　1
$(a+b)^4$　1　4　6　4　1
$(a+b)^5$　1　5　10　10　5　1

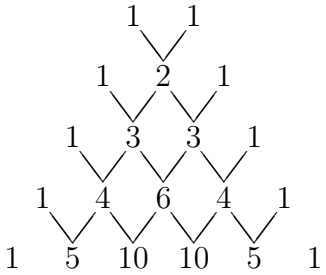
パスカルの三角形には，次の性質がある．

パスカルの三角形

1　数の配列は左右対称で，各行の両端の数は 1 である．

2　2 行目以降の両端以外の数は，左上と右上の数の和に等しい．

[パスカルの三角形]



練習 1.7 パスカルの三角形の性質を用いて，$(a+b)^6$ の展開式の各項の係数の配列を求めよ． 解

B 》二項定理

$(a+b)^5$ の展開式の項の係数を，組合せ[1] の考えを用いて求めてみよう．

$$(a+b)^5=\overset{①}{(a+b)}\overset{②}{(a+b)}\overset{③}{(a+b)}\overset{④}{(a+b)}\overset{⑤}{(a+b)}$$

$(a+b)^5$ の展開式は，①〜⑤ の $(a+b)$ のそれぞれから，a か b のどちらかを取って掛け合わせた積の和になる．

たとえば，①〜⑤ のうち，3 個から a を取り，残り 2 個から b を取ると，その積は a^3b^2 となる．

積が a^3b^2 となる a，b の取り方の総数は，①〜⑤ の 5個からb を取る2個を選ぶ組合せの総数に等しく，これは${}_5\mathrm{C}_2$で表される．

したがって，$(a+b)^5$ の展開式における a^3b^2 の項の係数は ${}_5\mathrm{C}_2$ である．

①	$a+b$
②	$a+b$
③	$a+b$
④	$a+b$
⑤	$a+b$

同様に考えて，一般の $(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-r}b^r$ の項の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ である．一般に次の**二項定理**が成り立つ．

二項定理

$$\boldsymbol{(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots}$$
$$\boldsymbol{\cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n}$$

注意 $a^0=1$，$b^0=1$ と定めると，上の展開式の各項は ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ の形である．

二項定理における ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ を，$(a+b)^n$ の展開式の**一般項**といい，係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を**二項係数**という．

4 ページで示したパスカルの三角形は，$(a+b)^n$ の展開式に現れる係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を取り出して順に並べたものである．

$(a+b)^1$	1 1	${}_1\mathrm{C}_0$ ${}_1\mathrm{C}_1$
$(a+b)^2$	1 2 1	${}_2\mathrm{C}_0$ ${}_2\mathrm{C}_1$ ${}_2\mathrm{C}_2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	${}_3\mathrm{C}_0$ ${}_3\mathrm{C}_1$ ${}_3\mathrm{C}_2$ ${}_3\mathrm{C}_3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	${}_4\mathrm{C}_0$ ${}_4\mathrm{C}_1$ ${}_4\mathrm{C}_2$ ${}_4\mathrm{C}_3$ ${}_4\mathrm{C}_4$

[1] 組合せについては，数学 A で扱っている．n 個から r 個取る組合せの総数は

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ただし，$n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ である．また，$0!=1$，${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$ である．

例 1.4 $(x-2)^5$ の展開式を求める． S

二項定理の等式

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots$$
$$\cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

で，$n=5$ として，a を x，b を -2 におきかえると

$$\begin{aligned}(x-2)^5 &= {}_5\mathrm{C}_0 x^5 + {}_5\mathrm{C}_1 x^4(-2) + {}_5\mathrm{C}_2 x^3(-2)^2 \\ &\quad + {}_5\mathrm{C}_3 x^2(-2)^3 + {}_5\mathrm{C}_4 x(-2)^4 + {}_5\mathrm{C}_5(-2)^5 \\ &= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32\end{aligned}$$

練習 1.8 次の式の展開式を，二項定理を使って求めよ． 解

(1) $(x+1)^4$

(2) $(x-2)^6$

例題 1.2 $(2x-1)^6$ の展開式における x^3 の項の係数を求めよ． S

解答　$(2x-1)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}(-1)^r = {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r x^{6-r}$$

$6-r=3$ とすると　　$r=3$

よって，求める係数は　　${}_6\mathrm{C}_3 \times 2^3 \times (-1)^3 = -160$

注意 $(2x)^{6-r} = 2^{6-r}x^{6-r}$ である．一般に，$(ab)^n = a^n b^n$ が成り立つ．

練習 1.9 次の式の展開式において，[　] 内に指定された項の係数を求めよ． 解

(1) $(2x+3)^4$　$[x^3]$

(2) $(3x-1)^5$　$[x^2y^3]$

深化 1.2 4 ページのパスカルの三角形の性質 **1, 2** を，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いて表してみよう． 解

C》二項定理の応用

二項定理の等式

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

において，$a=1$，$b=x$ とすると，次の等式が得られる．

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \qquad \cdots ①$$

この等式に $x=1$ を代入すると，次の等式が得られる．

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$

練習 1.10 次の等式を，上の等式 ① を利用して導け． 解

$${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0$$

応用例題 1.1 $(a+b+c)^7$ の展開式における $a^3b^2c^2$ の項の係数を求めよ． S

考え方》 $a+b$ を 1 つのまとまりとみて，$\{(a+b)+c\}^7$ の展開式で $(a+b)^5c^2$ の項の係数を求める．さらに $(a+b)^5$ の展開式で a^3b^2 の項の係数を求める．

解答 $\{(a+b)+c\}^7$ の展開式において，c^2 を含む項は ${}_7\mathrm{C}_2(a+b)^5c^2$

$(a+b)^5$ の展開式において a^3b^2 の項は ${}_5\mathrm{C}_2 a^3b^2$

よって，求める係数は

$${}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 21 \times 10 = 210$$

練習 1.11 $(a+b+c)^6$ の展開式における次の項の係数を求めよ． 解

(1) a^3bc^2

(2) $a^2b^2c^2$

(3) a^2b^4

深化 1.3 $2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$ の等式から，4 ページのパスカルの三角形において，どのようなことがいえるか説明してみよう． 解

研究

$(a+b+c)^n$ の展開式

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の項の係数を求めよう．
$\{(a+b)+c\}^n$ の展開式において，c^r を含む項は

$$ {}_n\mathrm{C}_r(a+b)^{n-r}c^r $$

$(a+b)^{n-r}$ の展開式において，a^pb^q の項は

$$ {}_{n-r}\mathrm{C}_q a^pb^q $$

よって，求める係数は

$$ {}_n\mathrm{C}_r \times {}_{n-r}\mathrm{C}_q = \frac{n!}{r!(n-r)!} \times \frac{(n-r)!}{q!(n-r-q)!} = \frac{n!}{p!q!r!} $$

したがって，次のことがいえる．

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の項の係数は

$$ \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{p!q!r!}} \qquad \text{ただし} \quad \boldsymbol{p+q+r=n} $$

Ex 1.1 $(a+b+c)^7$ の展開式における $a^3b^2c^2$ の項の係数は

$$ \frac{7!}{3!2!2!} = 210 $$

演習 1.1 $(a+b+c)^{10}$ の展開式における $a^5b^2c^3$ の項の係数を求めよ． 解

深化 1.4 $(a+b+c)^n$ の n 展開式は，n 個の $(a+b+c)$ のそれぞれから，a, b, c のいずれかを取って掛け合わせた積の和になる．このことを利用して，$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の項の係数が $\dfrac{n!}{p!q!r!}$ と表されることを確かめよ． 解

1.1.3 多項式の割り算

158 を 12 で割った商と余りを求めるには，右のような計算をして，商は 13，余りは 2 となる．このことは，次の等式で表される．

$$158 \quad = \quad 12 \times 13 + 2$$

```
      13  ←(商)
12 ) 158
     12
     38
     36
      2  ←(余り)
```

すなわち，割り算では

$$(\text{割られる数}) = (\text{割る数}) \times (\text{商}) + (\text{余り})$$

という等式が成り立つ．
ここでは，多項式[2]についても，整数の場合と同じようにして，商と余りを求める割り算を考えよう．

A 》多項式の割り算

たとえば，多項式 x^2+5x+8 について，次の等式が成り立つ．

$$x^2+5x+8 = (x+2)(x+3)+2$$

そこで，x^2+5x+8 を $x+2$ で割った商は $x+3$ で，余りは 2 と考える．この割り算は，整数の割り算と似た方法で，次のように行う． [多項式の割り算]

```
          x  +3
      ┌──────────
x+2 ) x²+5x+8
  ×x ↓ x²+2x      ← x² を消すために，(x+2)×x を引く．
      ──────
        3x+8
  ×3 ↓ 3x+6      ← 3x を消すために，(x+2)×3 を引く．
      ──────
           2
```

[2] 多項式には単項式も含めて考える．また，多項式を整式ということがある．

A，B が同じ 1 つの文字についての多項式[3] で，B は 0 でないとする．このとき，A を B で割った商と余りを求めるとは，次の等式を満たす多項式 Q，R を求めることである．

$$\boldsymbol{A = BQ + R}$$

ただし，R は 0 か，B より次数の低い多項式

A，B に対して，Q，R は 1 通りに定まり，Q を**商**，R を**余り**という．

とくに，$R = 0$ すなわち $A = BQ$ のとき，A は B で**割り切れる**という．

$$\underset{\text{(割られる式)}}{\boldsymbol{A}} \quad = \quad \underset{\text{(割る式)}}{\boldsymbol{B}} \quad \underset{\text{(商)}}{\boldsymbol{Q}} + \underset{\text{(余り)}}{\boldsymbol{R}}$$

R は 0 か，B より次数の低い多項式

多項式 A を多項式 B で割った商と余りを求める計算では，A，B を降べきの順に整理してから行う．

例題 1.3 次の多項式 A を多項式 B で割った商と余りを求めよ． S

$$A = 2x^3 - 7x^2 + 8, \qquad B = x^2 + 3 - 4x$$

解答

$$\begin{array}{r|l} & 2x \ +1 \\ \hline x^2-4x+3 & 2x^3-7x^2 \qquad +8 \\ & \underline{2x^3-8x^2+6x} \\ & \qquad\quad x^2-6x+8 \\ & \qquad\quad \underline{x^2-4x+3} \\ & \qquad\quad\ -2x+5 \end{array}$$

← 割られる式で，ある次数の項がない場合は，その場所は空けておくと，計算しやすい．

(答) 商 $2x + 1$，余り $-2x + 5$

練習 1.12 次の多項式 A，B について，A を B で割った商と余りを求めよ． 解

(1) $A = x^3 - 4x^2 - 5,\ B = x - 3$

(2) $A = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4,\ B = x^2 - x + 2$

(3) $A = x^3 - 7x + 6,\ B = x^2 - 3 + 2x$

[3] 文字の種類が 2 つのときは，どちらかの文字についての多項式とみて割り算を行うこともある．

例題 1.4 多項式 x^3+2x-1 を多項式 B で割ると，商が $x+2$，余りが $6x-1$ であるという．B を求めよ． S

解答 この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$x^3+2x-1=B\times(x+2)+6x-1$$

$$\begin{array}{r} x^2-2x \\ x+2\ \big)\ x^3\qquad -4x \\ \underline{x^3+2x^2} \\ -2x^2-4x \\ \underline{-2x^2-4x} \\ 0 \end{array}$$

整理すると

$$x^3-4x=B\times(x+2)$$

よって，x^3-4x は $x+2$ で割り切れて，その商が B である．
右の計算により

$$B=x^2-2x$$

練習 1.13 多項式 x^3+4x^2+4x-2 を多項式 B で割ると，商が $x+3$，余りが $2x+1$ であるという．B を求めよ． 解

2 種類以上の文字を含む多項式でも，その中の 1 つの文字についての多項式とみて割り算を行うことができる．

応用例題 1.2 $A=4x^2-5ax-6a^2$，$B=x-2a$ を，x についての多項式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ． S
考え方 》 a は数と同じように扱う．

解答

$$\begin{array}{r} 4x\ +3a \\ x-2a\ \big)4x^2-5ax-6a^2 \\ \underline{4x^2-8ax} \\ 3ax-6a^2 \\ \underline{3ax-6a^2} \\ 0 \end{array}$$

(答) 商 $4x+3a$，余り 0

練習 1.14 $A=6x^2-11ax-10a^2$，$B=3x+2a$ を，x についての多項式とみて，A を B で割った余りを求めよ． 解

1.1.4　分数式とその計算

たとえば，$\dfrac{2}{x}$，$\dfrac{2x+5}{x+1}$ などのように，2 つの多項式 A，B によって，$\dfrac{A}{B}$ の形で表され，Bに文字を含む式を，**分数式**という．
ここでは，分数式の計算について学ぶことにしよう．

A 》分数式の約分

分数式 $\dfrac{A}{B}$ において，B をその**分母**，A をその**分子**という [4]．

分数式では，次のように，その分母と分子に 0 以外の同じ多項式を掛けても，分母と分子を共通な因数で割っても，もとの式と等しい．

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}=\frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{BC}}\quad(\text{ただし}\quad C\neq 0),\qquad \frac{\boldsymbol{A}\cancel{\boldsymbol{D}}}{\boldsymbol{B}\cancel{\boldsymbol{D}}}=\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$$

分数式の分母と分子をその共通な因数で割ることを**約分**するという．

例 1.5　分数式の約分　S

(1) $\dfrac{6ab^4}{4a^2b^3}=\dfrac{3b}{2a}$　　← $\dfrac{6ab^4}{4a^2b^3}=\dfrac{3b\cdot\cancel{2ab^3}}{2a\cdot\cancel{2ab^3}}=\dfrac{3b}{2a}$

(2) $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\dfrac{x}{x+1}$

例 1.5 で約分して得られた分数式のように，それ以上約分できない分数式を**既約分数式**（きやく）という．

練習 1.15　次の分数式を約分して，既約分数式で表せ．　解

(1) $\dfrac{15ab^4}{6a^3b^2}$

(2) $\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}$

(3) $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3}$

[4] 分数式に含まれる文字も，一般的に数を表す．したがって，分数に関する性質は分数式についても成り立つ．また，与えられた分数式の分母は 0 でないと考えるものとする．

B 》分数式の四則計算

分数式の四則計算は，分数の場合と同じように行う．

分数式の乗法・除法

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} \times \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{D}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{BD}}, \qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} \div \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{D}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} \times \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{BC}}$$

分数式の計算では，結果は既約分数式または多項式の形にしておく．

例 1.6 (1) $\dfrac{x^2-x}{x+1} \times \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{\cancel{x(x-1)} \times 2}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{2x}{x+1}$ S

(2) $\dfrac{x^2+x}{x+2} \div \dfrac{x+1}{x^2-4} = \dfrac{x(x+1)}{x+2} \times \dfrac{(x+2)(x-2)}{x+1}$

$= \dfrac{\cancel{x(x+1)}\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x+1)}} = x(x-2)$

練習 1.16 次の計算をせよ． 解

(1) $\dfrac{2x}{2x+1} \times \dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$

(2) $\dfrac{x-2}{x^2+3x} \div \dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$

分数式の加法・減法

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}, \qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}} - \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}$$

例 1.7 (1) $\dfrac{3x}{x+2} + \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{3x+x}{x+2} = \dfrac{4x}{x+2}$ S

(2) $\dfrac{3x+2}{x+2} - \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{(3x+2)-(x-2)}{x+2} = \dfrac{2x+4}{x+2} = \dfrac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = 2$

練習 1.17 次の計算をせよ． 解

(1) $\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{x+9}{x+3}$

(2) $\dfrac{3x+1}{2x-1} - \dfrac{2x-3}{2x-1}$

(3) $\dfrac{2x^2}{x-1} - \dfrac{x+1}{x-1}$

分母が異なる分数式の加法，減法では，各分数式の分母と分子に適当な多項式を掛けて，分母を同じ多項式にしてから計算する．2 つ以上の分数式の分母を同じ多項式にすることを**通分**するという．

例 1.8
$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+x}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x(x+1)}$$
$$=\frac{2x}{x(x+1)(x-1)}-\frac{x-1}{x(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{2x-(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{\cancel{x+1}}{x\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)}$$
S

練習 1.18 次の計算をせよ．解

(1) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}$

(2) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-x}$

(3) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x^2-2x-3}$

(4) $\dfrac{3x+5}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x}$

分母や分子に分数式を含む式 (繁(はん)分数式) について考えよう．

例 1.9
$$\frac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{x}\div\frac{x-1}{x}=\frac{1}{x}\times\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$$
S

例 1.9 では，分母と分子に同じ式を掛けて，次のように計算してもよい．

$$\frac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{1}{x}\times x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times x}=\frac{1}{x-1}$$

練習 1.19 $A=1+\dfrac{1}{x}$，$B=x-\dfrac{1}{x}$ のとき，$\dfrac{A}{B}$ を簡単にせよ．解

1.1.5 恒等式

次の等式 ①，②，③ について考えよう．

① $(x-1)(x-2)=0$

② $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$

③ $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$

等式 ① は x に1または2を代入したときに限り成り立つ．一方，等式 ②，③ は，両辺の値が存在する限り，x にどのような値を代入しても成り立つ．
ここでは，①，③ のような式について学ぼう．

A 》恒等式

上に示した等式 ②，③ のように，含まれている文字にどのような値を代入しても，両辺の値が存在する限り等式が常に成り立つとき，その等式をそれらの文字についての**恒等式**という．

例 1.10 (1) 式変形によって導かれる等式は，恒等式である． S

たとえば，等式 $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$ は，恒等式である．

(2) 等式 $x(x-2)=x$ は，恒等式ではない．

この等式は，$x=0$ または $x=3$ を代入したときに限り成り立つ．

補足 例 1.10(2) のような等式は，x についての方程式である．

練習 1.20 次の等式のうち，x についての恒等式はどれか． 解

(1) $(x+1)(x-1)=x^2-1$ (2) $x(x-1)+x=2x$

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{2x+1}$ (4) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2}{x(x+2)}$

B 》恒等式の性質

恒等式の両辺が x の多項式のとき，同類項を整理すると，次のことが成り立つ．

両辺の同じ次数の項の係数は，それぞれ等しい．

たとえば，$a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c'$ を定数とするとき，次のことが成り立つ．

恒等式の性質

1　$\boldsymbol{ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'}$ が $\boldsymbol{x}$ についての恒等式である

$$\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a=a',\quad b=b',\quad c=c'}$$

2　$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ が $\boldsymbol{x}$ についての恒等式である

$$\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a=b=c=0}$$

注意　「P ならば Q　かつ　Q ならば P」を「P $\Longleftrightarrow$ Q」と書き表す．

例題 1.5　等式 $3x^2+8x+1=(x+1)(ax+b)+c$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を求めよ．　S

解答　等式の右辺を x について整理すると

$$3x^2+8x+1=ax^2+(a+b)x+(b+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$3=a,\quad 8=a+b,\quad 1=b+c$$

これを解いて　　$a=3$，$b=2$，$c=-3$

練習 1.21　等式 $2x^2-7x+8=(x-3)(ax+b)+c$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を求めよ．　解

例題 1.6 等式 $\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を求めよ． S

考え方 》 分数式の恒等式では，分母をはらって得られる等式もまた恒等式である．このことを利用する．

解答 等式の両辺に $(x+1)(x+2)$ をかけると，次の等式が得られる．

$$x+3 = a(x+2) + b(x+1)$$

右辺を整理すると

$$x+3 = (a+b)x + (2a+b)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$1 = a+b, \qquad 3 = 2a+b$$

これを解いて $\quad a=2,\ b=-1$

練習 1.22 等式 $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b の値を求めよ． 解

研究 代入による恒等式の係数決定

16 ページの例題 1.5 は，等式の両辺の x に具体的な値を代入して，次のように解くこともできる．

解答 等式の両辺の x に $0,\ 1,\ -1$ をそれぞれ代入すると

$$1 = b+c, \quad 12 = 2a+2b+c, \quad -4 = c$$

これを解くと $\quad a=3,\ b=5,\ c=-4$ ← 必要条件

逆に，これらの値を右辺に代入し整理すると左辺と一致し，

与えられた等式は x についての恒等式である． ← 十分条件の確認

よって $\quad a=3,\ b=5,\ c=-4$

演習 1.2 等式 $x+2 = ax(x-1) + b(x-1)(x-2) + c(x-2)x$ が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ． 解

1.1.6　問題

問題 1.1 次の式を展開せよ．解

(1) $(2x-3y)^3$ →p.2

(2) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2$ →p.2

問題 1.2 次の式を因数分解せよ．解

(1) $8a^3+b^3$ →p.3

(2) $(x+y)^3-1$ →p.3

(3) a^6-7a^3-8 →p.3

問題 1.3 次の展開式において，[　] 内に指定された項の係数を求めよ．解

(1) $(3x^2+2)^6 \quad [x^2]$ →p.6

(2) $(x+y+3z)^5 \quad [xy^2z^2]$ →p.8

問題 1.4 次の条件を満たす多項式 A, B を求めよ． 解

(1) A を $x+2$ で割ると，商が x^2-x-3，余りが 5

(2) $2x^3+5x^2-6x+3$ を B で割ると，商が $2x-1$，余りが $x+1$ →p.11

問題 1.5 次の計算をせよ． 解 →p.14

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

問題 1.6 $A=x^2-\dfrac{1}{x}$, $B=x+1+\dfrac{1}{x}$ のとき，$\dfrac{A}{B}$ を簡単にせよ． 解 →p.14

問題 1.7 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を定めよ． 解 →p.16

(1) $(x+1)a+(2x-1)b+2x+5=0$

(2) $x^3=ax(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d$

問題 1.8 x についての多項式 $6x^4+x^3-ax^2+2x+1$ を $2x^2+x+1$ で割ると，商が bx^2-x-3 で，余りが $cx+d$ となるように，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を定めよ． 解

1.2 等式・不等式の証明

1.2.1 等式の証明

ここでは，等式の証明について考えよう．等式の証明には，常に成り立つ恒等式の証明と，ある条件のもとで成り立つ等式の証明とがある．

A 》恒等式の証明

恒等式 $A=B$ を証明するには，たとえば次のような方法がある．

$A=B$ の証明

1 A か B の一方を変形して，他方を導く．

2 A と B の両方を変形して，同じ式を導く．

3 $A-B$ を変形して，0 になることを示す．　← $A-B=0$ を示す．

例題 1.7 次の等式を証明せよ． S

(1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(2) $(a^2+1)(b^2+1)=(ab+1)^2+(a-b)^2$

証明 (1) 右辺 $=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-3a^2b-3ab^2=a^3+b^3$

よって　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(2) 左辺 $=a^2b^2+a^2+b^2+1$

右辺 $=(ab)^2+2ab+1+a^2-2ab+b^2=a^2b^2+a^2+b^2+1$

左辺と右辺が同じ式になるから

$(a^2+1)(b^2+1)=(ab+1)^2+(a-b)^2$　**証終**

補足 例題 1.7(1) は **1** の方法で，(2) は **2** の方法で証明している．

練習 1.23 次の等式を証明せよ．解

(1) $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

(2) $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2$

(3) $(1+x)^3 = 1 + x + x(1+x) + x(1+x)^2$

B 》条件つきの等式の証明

ある条件のもとで成り立つ等式を証明してみよう．

例題 1.8 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ．S

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

考え方 》 $a+b+c=0$ のとき $c=-(a+b)$ であるから，c を $-(a+b)$ に置き換えた等式を証明すればよい．

証明 $a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ =\ & a^3 + b^3 - (a+b)^3 + 3ab(a+b) \\ =\ & a^3 + b^3 - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + 3a^2b + 3ab^2 \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

よって　　$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$　　**証終**

補足 例題 1.8 は，前ページの **3** の方法で証明している．**1** または **2** の方法で証明することもできる．

別証 (因数分解の利用) $a+b+c=0$ のとき

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc && \leftarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\\
&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\
&=(a+b)^3+c^3-3ab\{(a+b)+c\}\\
&=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab\{(a+b)+c\}\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-bc-ca)-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0
\end{aligned}$$

よって $a^3+b^3+c^3=3abc$ **証終**

練習 1.24 $a+b=c$ のとき，次の等式を証明せよ． 解

$$a^2+ca=b^2+bc$$

練習 1.25 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ． 解

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$$

C 》条件が比例式の等式の証明

比 $a:b$ について $\dfrac{a}{b}$ を**比の値**という．また，比 $a:b$ と $c:d$ が等しいことを表す式 $a:b=c:d$ を**比例式**という．比が等しいとき，比の値も等しく，$a:b=c:d$ は $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ とも表される．

条件が比例式で与えられたときの等式の証明について考えてみよう．

応用例題 1.3 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ．　S

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

考え方 》 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$\dfrac{a}{b}=k$，$\dfrac{c}{d}=k$ であるから，$a=bk$，$c=dk$ となる．
これらを左辺と右辺に代入してみる．

証明 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　　$a=bk$，$c=dk$

よって

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{bk-dk}{b-d}=\frac{k(b-d)}{b-d}=k$$

したがって

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

証終

練習 1.26 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ．　解

(1) $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$

(2) $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$

深化 1.5 応用例題 1.3 を，22 ページの例題 1.8 のように，条件式を用いて文字を減らす方法で証明してみよう．　解

1.2.2 不等式の証明

等式の証明に引き続き，不等式の証明方法について調べてみよう．

A 》実数の大小関係

不等式では，とくに断らない限り，文字は実数を表すものとする．

2 つの実数 a，b については，　$a > b$，　$a = b$，　$a < b$　のうち，どれか1つの関係だけが成り立つ．

また，実数の大小関係について，次の基本性質が成り立つ．

1 $a > b,\ b > c \implies a > c$　(推移律)

2 $a > b \implies a + c > b + c,\ a - c > b - c$

3 $a > b,\ c > 0 \implies ac > bc,\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

4 $a > b,\ c < 0 \implies ac < bc,\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

例 1.11 $a > b$ かつ $c > d$ のとき，$a + c > b + d$ であることを証明する． S

証明　$a > b$ であるから　$a + c > b + c$　$\cdots$① ← 基本性質 **2**

$c > d$ であるから　$c + b > d + b$　$\cdots$② ← 基本性質 **2**

①，② より　$a + c > b + d$　**証終** ← 基本性質 **1**

上の基本性質から，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{a > 0,\ b > 0 \implies a + b > 0} \qquad \boldsymbol{a > 0,\ b > 0 \implies ab > 0}$$
$$\boldsymbol{a < 0,\ b < 0 \implies a + b < 0} \qquad \boldsymbol{a < 0,\ b < 0 \implies ab > 0}$$

実数 a，b の大小関係と差 $a - b$ について，次のことがいえる．

2 数の大小関係と差

5 $\boldsymbol{a > b \iff a - b > 0}$

6 $\boldsymbol{a < b \iff a - b < 0}$

上の「2 数の大小関係と差」より，次のことがいえる．

不等式 $\boldsymbol{A > B}$ を証明するには，$\boldsymbol{A - B > 0}$ であることを示せばよい．

例 1.12 $x > y$ のとき，$2x + y > x + 2y$ であることを証明する． S

証明 $(2x + y) - (x + 2y) = x - y$

$x > y$ であるから　　$x - y > 0$

よって　　$(2x + y) - (x + 2y) > 0$

したがって　　$2x + y > x + 2y$　　証終

練習 1.27 $x > y$ のとき，次の不等式を証明せよ． 解

$$3x - 4y > 2x - 3y$$

例題 1.9 $x > 1$，$y > 1$ のとき，次の不等式を証明せよ． S

$$xy + 1 > x + y$$

証明 $(xy + 1) - (x + y) = xy - x - y + 1$

$= x(y - 1) - (y - 1)$

$= (x - 1)(y - 1)$

$x > 1$，$y > 1$ であるから

$x - 1 > 0$，$y - 1 > 0$

よって　　$(x - 1)(y - 1) > 0$

したがって　　$xy + 1 > x + y$　　証終

補足 例題 1.9 では，「$a > 0$，$b > 0$ ならば $ab > 0$」であることを用いている．

練習 1.28 $x > 2$，$y > 3$ のとき，次の不等式を証明せよ． 解

$$xy + 6 > 3x + 2y$$

B 》実数の平方

実数の平方について，次の性質 **1**，**2** が成り立つ．

実数の平方の性質

1 実数 a について $\quad \boldsymbol{a^2 \geqq 0}$

等号が成り立つのは，$a = 0$ のときである．

2 実数 a，b について $\quad \boldsymbol{a^2 + b^2 \geqq 0}$

等号が成り立つのは，$a = b = 0$ のときである．

例 1.13 不等式 $x^2 + y^2 \geqq 2xy$ を証明し，等号が成り立つときを調べる． S

証明 $(x^2 + y^2) - 2xy = x^2 - 2xy + y^2$

$= (x - y)^2 \geqq 0$

したがって $\quad x^2 + y^2 \geqq 2xy$

この不等式で等号が成り立つのは，$x - y = 0$ すなわち $x = y$ のときである．

証終

例題 1.10 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ． S

$$x^2 + 5y^2 \geqq 4xy$$

証明 $(x^2 + 5y^2) - 4xy = x^2 - 4xy + 5y^2 = (x - 2y)^2 - (2y)^2 + 5y^2$

$= (x - 2y)^2 + y^2$

$(x - 2y)^2 \geqq 0$，$y^2 \geqq 0$ であるから $\quad (x - 2y)^2 + y^2 \geqq 0$

よって $\quad x^2 + 5y^2 \geqq 4xy$

等号が成り立つのは，$x - 2y = 0$ かつ $y = 0$，すなわち

$x = y = 0$ のときである． 証終

別証 $(x^2 + 5y^2) - 4xy = x^2 - 4xy + 5y^2 = \dfrac{1}{5}(5x^2 - 20xy + 25y^2)$

$= \dfrac{1}{5}\{x^2 + (4x^2 - 20xy + 25y^2)\} = \dfrac{1}{5}\{x^2 + (2x - 5y)^2\}$

$x^2 \geqq 0$，$(2x - 5y)^2 \geqq 0$ であるから $\quad \dfrac{1}{5}\{x^2 + (2x - 5y)^2\} \geqq 0$

よって $\quad x^2 + 5y^2 \geqq 4xy$

等号が成り立つのは，$x = 0$ かつ $2x - 5y = 0$，すなわち

$x = y = 0$ のときである． 証終

練習 1.29 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ． 解

(1) $x^2 + 9y^2 \geqq 6xy$

(2) $(a+b)^2 \geqq 4ab$

(3) $2x^2 + 9y^2 \geqq 6xy$

(4) $a^2 - ab + b^2 \geqq 0$

C》平方の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき，a，b の大小と，a^2，b^2 の大小の関係について考えよう．

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

において，$a+b>0$ であるから，a^2-b^2 と $a-b$ の符号は同じである．

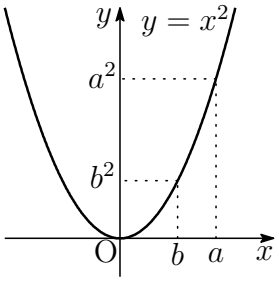
したがって，次のことが成り立つ．

平方の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき

$$\boldsymbol{a^2>b^2} \iff \boldsymbol{a>b}$$

$$\boldsymbol{a^2\geqq b^2} \iff \boldsymbol{a\geqq b}$$



注意 このことは，$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のときにも成り立つ．

平方の大小関係を使って，不等式を証明してみよう．

例題 1.11 $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ． S

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

考え方》 不等式の両辺について，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a+b}>0$ であるから，まず両辺の平方の大小から示す．

証明 両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2&=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)\\&=2\sqrt{ab}>0\end{aligned}$$

よって $\quad (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a+b}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

証終

練習 1.30 $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ． 解

$$1+x>\sqrt{1+2x}$$

D 》絶対値を含む不等式の証明

実数 a の絶対値 $|a|$ は，その定義より，次のようになる．

$$\boldsymbol{a \geqq 0} \text{ のとき } \boldsymbol{|a| = a}, \qquad \boldsymbol{a < 0} \text{ のとき } \boldsymbol{|a| = -a}$$

また，実数の絶対値について，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{|a| \geqq 0}, \quad \boldsymbol{|a| \geqq a}, \quad \boldsymbol{|a| \geqq -a}, \quad \boldsymbol{|a|^2 = a^2}, \quad \boldsymbol{|ab| = |a||b|}$$

応用例題 1.4 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．　S

$$|a| + |b| \geqq |a + b|$$

考え方 》 $|a| + |b| \geqq 0$，$|a + b| \geqq 0$ であるから，両辺の平方の大小から示す．
このとき，上で述べた絶対値についての性質を用いる．

証明　$(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$

$= 2(|ab| - ab) \geqq 0$　　← $|ab| \geqq ab$

よって　　$(|a| + |b|)^2 \geqq |a + b|^2$

$|a| + |b| \geqq 0$，$|a + b| \geqq 0$ であるから

$$|a| + |b| \geqq |a + b|$$

等号が成り立つのは，$|ab| = ab$ すなわち $ab \geqq 0$ のときである．　**証終**

練習 1.31 次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．　解

$$|a| + |b| \geqq |a - b|$$

E》相加平均と相乗平均

2つの実数 a，b について，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**という．
また，$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**という．
$a>0$，$b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq 0$$

であるから $\qquad \dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ すなわち $a=b$ のときである．

したがって，次のことがいえる．

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき $\qquad \boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである．

← この不等式は $a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ の形で使うことも多い．

注意 このことは，$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のときにも成り立つ．

例題 1.12 $a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$ を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ． S

証明 $a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

よって $\qquad a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$

等号が成り立つのは，$a>0$ かつ $a=\dfrac{1}{a}$，すなわち $a=1$ のときである．**証終**

別証 $a>0$ であるから

$$a+\frac{1}{a}-2=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqq 0 \quad \text{よって} \quad a+\frac{1}{a}\geqq 2$$

等号が成立するとき $\quad \sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=0 \quad$ すなわち $\quad a=1$ **証終**

練習 1.32 $a > 0$，$b > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ． 解

(1) $a + \dfrac{4}{a} \geqq 4$

(2) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqq 2$

1.2.3　問題

問題 1.9 次の等式を証明せよ． 解 → p.21 例題 1.7

(1) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$

(2) $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

問題 1.10 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ． 解 → p.22 例題 1.8

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$$

問題 1.11 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ． 解 → p.24 例題 1.3

$$\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{a}{b}$$

問題 1.12 $a<b,\ x<y$ のとき，$ax+by$ と $bx+ay$ の大小を，不等式で表せ． 解 → p.26 例題 1.9

問題 1.13 $a > 0,\ b > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．解　　→ p.29 例題 1.11

$$\sqrt{2(a+b)} \geqq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

問題 1.14 $a > 0,\ b > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．解　　→ p.31 例題 1.12

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 4$$

問題 1.15 次のようなゲームを行う．

> 1 から 7 までの数字が書かれた 7 枚のカードがある．このカードを 2 つの組に分けて，それぞれの組の和の積をこのゲームの得点とする．たとえば，1，2，3，4 と 5，6，7 の 2 つの組に分けた場合，得点は $(1{+}2{+}3{+}4)(5{+}6{+}7) = 10{\cdot}18 = 180$ で 180 点となる．

このゲームの得点の最大値を求めよ．また，得点が最大となるような組の分け方を 1 つ示せ．解

1.3 章末問題

1.3.1 章末問題 A

章末 1.1 $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$ のとき，次の式の値を求めよ． 解

(1) $x + \dfrac{1}{x}$

(2) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

(3) $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

章末 1.2 次の多項式 A，B について，A を B で割った商と余りを求めよ． 解

(1) $A = x^4 - 1,\ B = x - 1$

(2) $A = 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3,\ B = 2x^2 + 4x - 3$

章末 1.3 次の計算をせよ．解

(1) $\dfrac{x^2+3x}{x^2-2x+1} \times \dfrac{x-1}{x+3}$

(2) $\dfrac{a^2+4a+4}{a^2-4a} \div \dfrac{a^2+2a}{a-4}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{2}{x^2-1}$

(4) $\dfrac{x-y}{xy} + \dfrac{y-z}{yz} + \dfrac{z-x}{zx}$

章末 1.4 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

(1) $x^3 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 解

(2) $\dfrac{3}{x^3+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

章末 1.5 次の不等式を証明せよ． 解

(1) $|a| - |b| \leqq |a-b|$

(2) $|a| - |b| \leqq |a+b|$

章末 1.6 次の等式，不等式を証明せよ． 解

(1) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(2) $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

章末 1.7 次の不等式を証明せよ． 解

(1) $ab+\dfrac{16}{ab} \geqq 8$

(2) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right) \geqq 9$

1.3.2 章末問題 B

章末 1.8 次の問いに答えよ． 解

(1) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$ を因数分解せよ．

(2) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ であることを用いて，$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ を因数分解せよ．

章末 1.9 次の計算をせよ． 解

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2}$$

章末 1.10 x についての多項式 $ax^3 + bx^2 + 2x + 1$ を $x^2 + x - 2$ で割ると，余りが $2x + 5$ となるように，定数 a の値を定めよ．また，そのときの商を求めよ． 解

章末 1.11 等式 $(k+2)x+(k+1)y-3k-4=0$ が，どんな k の値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ． 解

章末 1.12 $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3},\ x+y+z=24$ のとき，$x,\ y,\ z$ の値を求めよ． 解

章末 1.13 二項定理を用いて，次のことを証明せよ． 解

$$x>0 \text{ のとき} \quad (1+x)^n>1+nx \qquad \text{ただし，} n \text{ は 2 以上の自然数}$$

章末 1.14 $a>b>0$，$a+b=1$ のとき，次の数を大きい順に並べよ． 解

$$\frac{1}{2},\quad 2ab,\quad a^2+b^2$$

ヒント

章末 1.11　k についての恒等式と考える．

章末 1.12　$x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}=k$ とおくと　$x=k,\ y=2k,\ z=3k$

章末 1.14　a，b に適する数を代入して，大小の見当をつけて証明する．

第 2 章　複素数と方程式

2.1　複素数と 2 次方程式の解

2.1.1　複素数とその計算

2 次方程式 $x^2 = 3$ は，実数の範囲で解 $x = \pm\sqrt{3}$ をもつ．
しかし，実数の2乗は負にならないから，2 次方程式 $x^2 = -3$ は，実数の範囲では解を持たない．そこで，2 次方程式 $x^2 = k$ が実数 k の符号に関係なく常に解をもつように，実数を含む新しい「数」を考えることにしよう．

A 》複素数

2 乗して -1 になる新しい数を 1 つ考え，これを文字 $\boldsymbol{i}$ で表す．

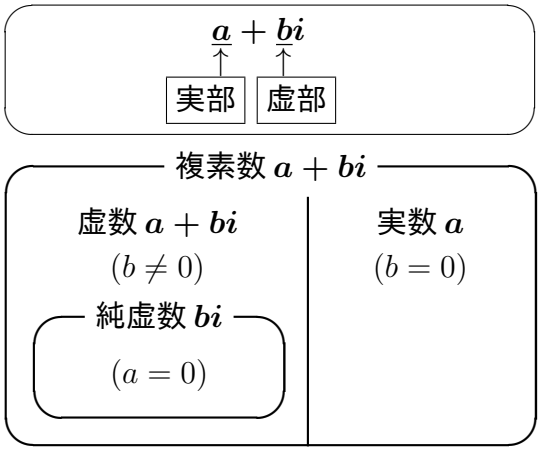
すなわち　　$\boldsymbol{i^2 = -1}$

とする．この i を**虚数単位**という．

そして，i と 2 つの実数 a，b を用いて $\boldsymbol{a + bi}$ の形で表される数を考える．この数を**複素数**という．

複素数 $a + bi$ では，a を**実部**，b を**虚部**，という．たとえば，$2 + 3i$ の実部は 2，虚部は 3 である．

実数全体が複素数全体に含まれるように，$b = 0$ のときの複素数 $a + 0i$ は実数 a を表すものとする．$b \neq 0$ のとき複素数 $a + bi$ を**虚数**といい，とくに $a = 0$ であるときの虚数 $0 + bi$ は bi と表し，**純虚数**という．



複素数における i は文字のように扱い，たとえば次のように書く．

$$2 + 1i = 2 + i, \quad 3 + (-5)i = 3 - 5i, \quad 1 + (-1)i = 1 - i$$

[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

例 2.1　$3-2i$ の　実部は 3，虚部は -2　← $3-2i=3+(-2)i$　S

$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ の　実部は $\dfrac{1}{2}$，虚部は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　← $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2 の　実部は 2，虚部は 0　← $2=2+0i$

i の　実部は 0，虚部は 1　← $i=0+1i$

練習 2.1　次の複素数の実部と虚部をいえ．　解

(1)　$-3+5i$

(2)　$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

(3)　1

(4)　$-i$

2 つの複素数が**等しい**のは，実部，虚部が，それぞれ一致する場合とする．すなわち，次のように定める．

複素数の相等

$$\boldsymbol{a+bi=c+di} \iff \boldsymbol{a=c} \text{ かつ } \boldsymbol{b=d}$$

$$\text{とくに } \boldsymbol{a+bi=0} \iff \boldsymbol{a=0} \text{ かつ } \boldsymbol{b=0}$$

以下，複素数 $a+bi$ や $c+di$ などでは，文字 a，b，c，d は実数を表すものとする．

例題 2.1　次の等式を満たす実数 x，y を求めよ．　S

$$(x+y)+(x+2)i=4+5i$$

解答　$x+y$，$x+2$ は実数であるから　← 実数の和は実数

$$x+y=4,\ x+2=5$$

これを解いて　$x=3,\ y=1$

練習 2.2　次の等式を満たす実数 x，y を求めよ．　解

(1)　$(x-2y)+(x+3)i=2-i$

(2)　$(2x+y)+(x-y+3)i=0$

B 》複素数の計算

複素数の加法，減法は，実部と虚部のそれぞれの和と差を計算する．

例 2.2 (1) $(4-3i)+(2+5i)=(4+2)+(-3+5)i=6+2i$ S

(2) $(4-3i)-(2+5i)=(4-2)+(-3-5)i=2-8i$

練習 2.3 次の計算をせよ． 解

(1) $(2+3i)+(4+i)$

(2) $(-1+2i)+(3-4i)$

(3) $(6+4i)-(3+2i)$

(4) $(2-3i)-(4-2i)$

複素数の加法，減法は，文字 i の式の場合と同じような計算である．乗法についても，文字 i の式と考えて行い，i^2 が出てくればそれを -1 におき換える．

例 2.3 (1) $(1+2i)(4+i)=4+i+8i+2i^2$ S

$=\{4+2\cdot(-1)\}+(1+8)i$

$=2+9i$

(2) $(1+2i)(1-2i)=1^2-(2i)^2=1-4i^2$

$=1-4\cdot(-1)=5$

練習 2.4 次の計算をせよ． 解

(1) $(1+2i)(4+3i)$

(2) $(2-i)(3+4i)$

(3) $(2+3i)^2$

(4) $(3+4i)(3-4i)$

2 つの複素数 $a+bi$，$a-bi$ を，互いに**共役**（きょうやく）な**複素数**という．

実数 a と共役な複素数は，a 自身である．

共役な複素数

$\boldsymbol{a+bi}$ と $\boldsymbol{a-bi}$

例 2.4 (1) $1+2i$ と共役な複素数は $1-2i$ である． S

(2) $-3i$ と共役な複素数は $3i$ である．

練習 2.5 次の複素数と共役な複素数をいえ． 解

(1) $2+3i$

(2) $1-i$

(3) $\sqrt{3}i$

(4) $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

(5) -4

互いに共役な複素数 $a+bi$，$a-bi$ の和と積は

$$(a+bi)+(a-bi)=2a$$

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2 \qquad \leftarrow\ a^2-(bi)^2=a^2-b^2(-1)$$

となり，ともに実数である．

次に，複素数の除法について考える．

例 2.5

$$\frac{2+9i}{1+2i}=\frac{(2+9i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2-4i+9i-18i^2}{1^2+2^2}$$

$$=\frac{20+5i}{5}=4+i$$

← 分母と共役な複素数を，分母，分子に掛けて計算する． S

練習 2.6 次の計算をせよ． 解

(1) $\dfrac{1+2i}{2+3i}$

(2) $\dfrac{1-i}{1+i}$

(3) $\dfrac{5i}{2-i}$

一般に，複素数の四則計算の結果は，次のようになる．

加法 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

減法 $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

乗法 $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

除法 $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

複素数について，次のことがいえる [1]．

1 2 つの複素数の和，差，積，商は常に複素数である．

2 実数の場合と同様に，複素数 α, β に対しても次が成り立つ．

$$\alpha\beta=0 \quad \text{ならば} \quad \alpha=0 \quad \text{または} \quad \beta=0$$

なお，虚数については大小関係や正，負を考えない．

C》負の数の平方根

たとえば，$\sqrt{3}\,i$ と $-\sqrt{3}\,i$ を 2 乗すると，次のようになる．

$$(\sqrt{3}\,i)^2=(\sqrt{3})^2i^2=-3, \qquad (-\sqrt{3}\,i)^2=(-\sqrt{3})^2i^2=-3$$

したがって，$\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{3}\,i$ はともに -3 の平方根である．

逆に，-3 の平方根は $\sqrt{3}\,i$ と $-\sqrt{3}\,i$ である．そこで，$\sqrt{3}\,i$ を $\sqrt{-3}$ で表すことにすると，-3 の平方根は $\pm\sqrt{-3}$ であるといえる．

一般に，記号 $\boldsymbol{\sqrt{-a}}$ の意味を次のように定める．

$$a>0 \text{ のとき} \qquad \boldsymbol{\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i} \qquad \text{とくに} \quad \boldsymbol{\sqrt{-1}=i}$$

このように定めることにより，次のことがいえる．

負の数の平方根

$a>0$ のとき，　$-a$ の平方根は　$\boldsymbol{\pm\sqrt{-a}}$　すなわち　$\boldsymbol{\pm\sqrt{a}i}$

例 2.6 (1) $\sqrt{-8}=\sqrt{8}\,i=2\sqrt{2}\,i$ S

(2) -6 の平方根は　$\pm\sqrt{-6}=\pm\sqrt{6}\,i$

練習 2.7 次の数を i を用いて表せ． 解

(1) $\sqrt{-5}$　　(2) $\sqrt{-9}$　　(3) -18 の平方根

[1] 実数の場合と同様に，複素数の加法と乗法では，交換法則，結合法則，分配法則も成り立つ．

例 2.7　(1) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}$　S

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,i}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}\,i\sqrt{3}\,i}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}i$

補足　(1) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\neq\sqrt{(-2)(-3)}$ である．　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}\neq\sqrt{\dfrac{2}{-3}}$ である．

練習 2.8　次の計算をせよ．　解

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}$

(2) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}$

(4) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}}$

2.1.2　2 次方程式の解

複素数の範囲では，負の数にも平方根が存在する．
ここでは，2 次方程式について，解を複素数の範囲で考えよう．

A 》 2 次方程式 $x^2=k$ の解

2 次方程式 $x^2=k$ の解は k の平方根である．

例 2.8　2 次方程式 $x^2=-12$ を解く．　S

$$x=\pm\sqrt{-12}=\pm\sqrt{12}\,i=\pm2\sqrt{3}\,i$$

2 次方程式 $x^2=k$ の解について，次のことがいえる．

> 複素数の範囲では，2 次方程式 $x^2=k$ は k の正・負に関係なく常に解をもち，その解は　$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{k}}$　である．

練習 2.9　次の 2 次方程式を解け．　解

(1) $x^2=-1$　　(2) $x^2=-8$

$a,\ b,\ c$ は実数とする．2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，解を複素数の範囲で考えると，b^2-4ac の符号に関係なく常に解をもつ．

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $\quad \boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

とくに，上の公式において $b=2b'$ であるとき，次の公式が成り立つ．

2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は $\quad \boldsymbol{x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$

例 2.9 2 次方程式 $3x^2-7x+5=0$ を解く． S

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot3\cdot5}}{2\cdot3}=\frac{7\pm\sqrt{-11}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{11}\,i}{6}$$

練習 2.10 次の 2 次方程式を解け． 解

(1) $x^2+3x+4=0$

(2) $3x^2-4x+2=0$

(3) $x^2+\sqrt{2}x+1=0$

(4) $x^2-2\sqrt{3}x+4=0$

B 》2 次方程式の解の種類の判別

以下，とくに断りがない場合，方程式の係数はすべて実数とし，方程式の解は複素数の範囲で考えるものとする．

方程式の解のうち，実数であるものを**実数解**といい，虚数であるものを**虚数解**という．2 次方程式の重解は実数解である．2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

がどんな種類の解であるかを判別するためには，解における根号の中の $\boldsymbol{b^2-4ac}$ の符号を調べればよい．この b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式**といい，ふつう $\boldsymbol{D}$ で表す[2]．

2 次方程式	$2x^2+5x+1=0$	$9x^2+12x+4=0$	$3x^2-7x+5=0$
判別式 $\boldsymbol{D}$	$D=5^2-4\cdot2\cdot1$ $=17>0$	$D=12^2-4\cdot9\cdot4$ $=0$	$D=(-7)^2-4\cdot3\cdot5$ $=-11<0$
解	$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$	$x=-\dfrac{2}{3}$	$x=\dfrac{7\pm\sqrt{11}\,i}{6}$
解の種類	異なる 2 つの 実数解	重解 (実数解)	異なる 2 つの 虚数解

注意　2 次方程式の異なる 2 つの虚数解は，互いに共役な複素数である．

一般に，次のことがいえる．

2 次方程式の解の種類の判別

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，その解について次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{D>0} \iff \textbf{異なる 2 つの実数解}$$
$$\boldsymbol{D=0} \iff \textbf{重解}$$
$$\boldsymbol{D<0} \iff \textbf{異なる 2 つの虚数解}$$

注意　重解も実数解であるから，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{D\geqq 0} \iff \textbf{実数解をもつ}$$

2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ では，$D=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$ であるから，D の代わりに $D/4=b'^2-ac$ を用いても，解の種類を判別できる．

[2] D は「判別式」を意味する英語 discriminant の頭文字である．

例題 2.2 次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ. S

(1) $3x^2+5x+1=0$ (2) $2x^2+2\sqrt{6}\,x+3=0$

(3) $2x^2-x+3=0$

解答 2 次方程式の判別式を D とする.

(1) 2 次方程式 $3x^2+5x+1=0$ の判別式は

$$D=5^2-4\cdot3\cdot1=13>0$$

よって, この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ.

(2) 2 次方程式 $2x^2+2\sqrt{6}\,x+3=0$ の判別式は

$$D/4=(\sqrt{6})^2-2\cdot3=0$$

よって, この 2 次方程式は重解をもつ.

(3) 2 次方程式 $2x^2-x+3=0$ の判別式は

$$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot3=-23<0$$

よって, この 2 次方程式は異なる 2 つの虚数解をもつ.

練習 2.11 次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ. 解

(1) $x^2+5x+5=0$ (2) $x^2-2\sqrt{3}\,x+2=0$

(3) $-4x^2+x-1=0$ (4) $3x^2-4\sqrt{6}\,x+8=0$

例題 2.3 m は定数とする. 次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ. S

$$x^2+mx+4=0$$

考え方》 m の値によって判別式 D の符号が変わる.
D の符号によって場合分けする.

解答 この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=m^2-4\cdot1\cdot4=m^2-16=(m+4)(m-4)$$

よって, 2 次方程式の解は次のようになる.

$D>0$ すなわち	$m<-4,\ 4<m$ のとき	異なる 2 つの実数解
$D=0$ すなわち	$m=\pm4$ のとき	重解
$D<0$ すなわち	$-4<m<4$ のとき	異なる 2 つの虚数解

練習 2.12 m は定数とする．次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ． 解

$$x^2+(m+1)x+1=0$$

2.1.3　解と係数の関係

2 次方程式の解は，解の公式によって求めることができるが，解の和や積は解を求めることなく知ることができる．
ここでは，2 次方程式の解と係数の関係について学ぶことにしよう．

A 》解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，これらの和 $\alpha+\beta$ と積 $\alpha\beta$ を計算してみよう．

$D=b^2-4ac$ とすると

$$\text{和}\quad \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\text{積}\quad \alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-b)^2-D}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

このように，2 次方程式の 2 つの解の和と積は，方程式の係数を用いて表すことができる．これを，2 次方程式の**解と係数の関係**という．

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

例 2.10 2 次方程式 $2x^2+x-6=0$ の 2 つの解を α，β とすると S

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\qquad \alpha\beta=\frac{-6}{2}=-3$$

練習 2.13 次の 2 次方程式の 2 つの解の和と積を，それぞれ求めよ． 解

(1) $x^2+4x+2=0$ (2) $3x^2-6x-4=0$

例題 2.4 2 次方程式 $x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ． S

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$

解答 解と係数の関係から $\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=5$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot5=6$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ ←p.21 例題 1.7(1) 参照

$=4^3-3\cdot5\cdot4=4$

補足 例題 2.4(2) では，等式 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ を利用してもよい．

練習 2.14 2 次方程式 $x^2+3x-1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ． 解

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha-\beta)^2$

例題 2.5 2 次方程式 $x^2+3x+m=0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍であるとき，定数 m の値と 2 つの解を求めよ． S

解答 2 つの解は，α，2α と表すことができる．

解と係数の関係から	$\alpha+2\alpha=-3,\quad \alpha\cdot 2\alpha=m$
すなわち	$3\alpha=-3,\qquad 2\alpha^2=m$
よって，1 つの解 α は	$\alpha=-1$
このとき	$m=2\alpha^2=2(-1)^2=2$
また，他の解 2α は	$2\alpha=2(-1)=-2$
	(答) $m=2$，2 つの解は $-1,\ -2$

練習 2.15 2 次方程式 $x^2+5x+m=0$ の 2 つの解が次の条件を満たすとき，定数 m の値と 2 つの解を，それぞれ求めよ． 解

(1) 1 つの解が他の解の 4 倍である．

(2) 2 つの解の差が 1 である．

深化 2.1 例題 2.4 において，$(\alpha-\beta)^2$ の値を求めることにより，$\alpha-\beta$ の値を求めてみよう．また，このとき $\alpha-\beta$ の値が 1 つに定まらない理由を考えてみよう． 解

B 》 2 次式の因数分解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 2 つの解 α，β をもつとき

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \qquad \leftarrow \text{解と係数の関係を用いた} \\ &= a(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned}$$

となるから，2 次式の因数分解について，次のことがいえる．

> **2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 2 つの解 α，β をもつとき**
>
> $$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

このように，係数が実数である 2 次式は，複素数の範囲で常に1次式の積に因数分解できる．

例題 2.6 次の 2 次式を，複素数の範囲で因数分解せよ． S

(1) $2x^2-2x-1$ (2) x^2-2x+4

解答 (1) 2 次方程式 $2x^2-2x-1=0$ の解は

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

よって $\quad 2x^2-2x-1=2\left(x-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) 2 次方程式 $x^2-2x+4=0$ の解は

$$x=1\pm\sqrt{3}\,i$$

よって $\quad x^2-2x+4=\{x-(1+\sqrt{3}\,i)\}\{x-(1-\sqrt{3}\,i)\}$

$$=(x-1-\sqrt{3}\,i)(x-1+\sqrt{3}\,i)$$

練習 2.16 次の 2 次式を，複素数の範囲で因数分解せよ． 解

(1) $x^2 - 3x - 2$

(2) $2x^2 - 2x - 3$

(3) $x^2 + 4x + 6$

C》2 次方程式の決定

2 数 α，β を解とする 2 次方程式は，次の形に表される．

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \qquad \text{ただし，} a\neq 0$$

とくに，$a=1$ として左辺を展開すると，次のことが成り立つ．

α，β を解とする 2 次方程式

2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0}$$

← 和が p，積が q である 2 数は $x^2-px+q=0$ の解であるといえる．

例 2.11 2 数 $3+i$，$3-i$ を解とする 2 次方程式を作る． S

解の和は $(3+i)+(3-i)=6$

解の積は $(3+i)(3-i)=3^2-i^2=10$

解の 解の
$x^2-(\text{和})x+(\text{積})=0$

よって，このような解をもつ 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-6x+10=0$$

練習 2.17 次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ． 解

(1) $2,\ -1$

(2) $2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$

(3) $1+2i,\ 1-2i$

和が p，積が q である 2 数は，2 次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の解である．

例 2.12 和が 2，積が 3 であるような 2 数を求める． S

求める 2 数は，次の 2 次方程式の解である．

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

これを解くと　　$x = 1 \pm \sqrt{2}\,i$

よって，求める 2 数は　　$1 + \sqrt{2}\,i,\ 1 - \sqrt{2}\,i$

練習 2.18 和と積が次のようになる 2 数を求めよ． 解

(1) 和が -2，積が 6

(2) 和と積がともに 3

応用例題 2.1 2次方程式$x^2+2x+4=0$の2つの解をα, βとするとき，2数$\alpha-1$, $\beta-1$を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ． S

考え方 》 2 数を解とする 2 次方程式は，その 2 数の和と積から求められる．

和 $(\alpha - 1) + (\beta - 1)$，積 $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ を求める．

解答 解と係数の関係から　　$\alpha + \beta = -2,\ \ \alpha\beta = 4$

ここで　$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = (\alpha + \beta) - 2 = -2 - 2 = -4$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 4 - (-2) + 1 = 7$

よって，$\alpha - 1,\ \beta - 1$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - (-4)x + 7 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 4x + 7 = 0$$

補足 $\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$ であるから，$x = \alpha - 1$ を解にもつ 2 次方程式は，$\alpha = x + 1$ をこれに代入して

$$(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 4 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 4x + 7 = 0 \qquad (*)$$

また，β についても同一であるから，$(*)$ が求める 2 次方程式である．

練習 2.19 2 次方程式 $x^2-3x-1=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ． 解

(1) $1-\alpha,\ 1-\beta$

(2) $\alpha^2,\ \beta^2$

D 》2 次方程式の実数解の符号

2 つの実数α，β については，次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\alpha>0 \text{ かつ } \beta>0 &&\iff \alpha+\beta>0 \text{ かつ } \alpha\beta>0\\
&\alpha<0 \text{ かつ } \beta<0 &&\iff \alpha+\beta<0 \text{ かつ } \alpha\beta>0\\
&\alpha \text{ と } \beta \text{ の符号が異なる} &&\iff \alpha\beta<0
\end{aligned}$$

よって，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解 α，β と判別式 D について，次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\alpha,\ \beta\text{は異なる 2 つの正の解} &&\iff D>0 \text{ で, } \alpha+\beta>0 \text{ かつ } \alpha\beta>0\\
&\alpha,\ \beta\text{は異なる 2 つの負の解} &&\iff D>0 \text{ で, } \alpha+\beta<0 \text{ かつ } \alpha\beta>0\\
&\alpha,\ \beta\text{は符号の異なる解} &&\iff \alpha\beta<0
\end{aligned}$$

補足 解と係数の関係により，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ であるから，$\alpha\beta<0$ ならば $ac<0$ である．
よって，$\alpha\beta<0$ のとき $D=b^2-4ac>0$ は成り立っている．

応用例題 2.2　2 次方程式 $x^2-2mx-m+6=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．　S

考え方 》 方程式の 2 つの解を α，β とすると，方程式が条件を満たすのは
$D>0$ で $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$ が成り立つときである．

解答　2 次方程式の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする．

2 次方程式が，異なる 2 つの正の解をもつのは，次が成り立つときである．

$$D>0 \text{ で, } \alpha+\beta>0 \text{ かつ } \alpha\beta>0$$

ここで　$D/4=(-m)^2-1\cdot(-m+6)=(m+3)(m-2)$

$D>0$ より　　$(m+3)(m-2)>0$

よって　　$m<-3,\ 2<m$　$\cdots$①

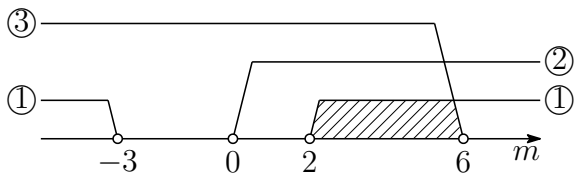
解と係数の関係により　$\alpha+\beta=2m,\ \ \alpha\beta=-m+6$

$\alpha+\beta>0$ より　$2m>0$　　よって　$m>0$　$\cdots$②

$\alpha\beta>0$ より　　$-m+6>0$　よって　$m<6$　$\cdots$③

①, ②, ③ の共通範囲を求めて

$$2<m<6$$



練習 2.20 2 次方程式 $x^2+2(m-3)x+4m=0$ が次のような解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ． 解

(1) 異なる 2 つの正の解

(2) 異なる 2 つの負の解

(3) 正の解と負の解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解 α，β と判別式 D について，次のことも成り立つ．

深化 2.2 応用例題 2.2 において，条件 $D>0$ がないと「2 次方程式が異なる 2 つの正の解をもつ」という条件を満たさないことを，例にあげて示してみよう． 解

発見　2 次方程式と 2 次関数のグラフ

次の問題は，数学 I の「2 次関数」の問題です．

問題　2 次関数 $y = x^2 - 2mx - m + 6$ のグラフと x 軸の正の部分が，異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

確認　上の問題のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わることと，前ページの**応用例題** 2.2 の 2 次方程式が異なる 2 つの正の解をもつことは，同じことであることを確認しよう．

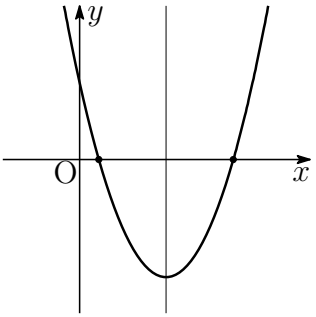
上の問題では，

［1］グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる．

［2］グラフの軸が y 軸の右側にある．

［3］グラフと y 軸の交点の y 座標が正である．

が同時に成り立つことを利用して，定数 m の値の範囲を求めることができます．



一方で，前ページの**応用例題** 2.2 では，与えられた 2 次方程式の 2 つの解を α，β，判別式を D としたとき，

① $D > 0$　　② $\alpha + \beta > 0$　　③ $\alpha\beta > 0$

が同時に成り立つことを利用して，定数 m の値の範囲を求めました．

発見　2 次方程式 $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$ の 2 つの解を α, β とすると，2 次関数 $y = x^2 - 2mx - m + 6$ は $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ と表されます．ここで，$y = (x - \alpha)(x - \beta)$ のグラフと x 軸の正の部分が，異なる 2 点で交わるとして，［1］，［2］，［3］が成り立つための条件を考えよう．このとき，どのようなことがいえるだろうか．　[2 次方程式と 2 次関数のグラフ]

整理　前ページの**練習** 2.20 を 2 次関数のグラフを利用して解け．(別解参照)

2.1.4 問題

問題 2.1 次の等式を満たす実数 $x,\ y$ の値を求めよ． 解

(1) $(x-3y)+(2x+y)i=1-12i$

(2) $(5+i)(x+yi)=13+13i$

問題 2.2 次の計算をせよ． 解

(1) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2$

(2) $i+\dfrac{1}{i}$

(3) $i+i^2+i^3+i^4$

問題 2.3 次の 2 次方程式を解け．解

(1) $2x^2 - \sqrt{5}\,x + 1 = 0$

(2) $2(x+1)^2 - 4(x+1) + 3 = 0$

問題 2.4 2 次方程式 $2x^2 + 4x + 3 = 0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の値を求めよ．解

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$

問題 2.5 2 次方程式 $x^2 - 7x - 1 = 0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ． 解

(1) $\alpha - 2,\ \beta - 2$

(2) $\dfrac{2}{\alpha},\ \dfrac{2}{\beta}$

(3) $\alpha + \beta,\ \alpha\beta$

問題 2.6 次の ①〜④ の等式が成り立つかどうか答えよ．また，成り立たないものは，右辺を直して正しい等式にせよ． 解

① $\sqrt{-3}\sqrt{-5} = \sqrt{15}$　　② $\sqrt{2}\sqrt{-7} = \sqrt{-14}$

③ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{-2}{5}}$　　④ $\dfrac{1}{\sqrt{-3}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}}$

2.2　高次方程式

2.2.1　剰余の定理と因数定理

ここでは，x の 3 次式や 4 次式で表される方程式を解くための準備として，x の多項式を因数分解する方法について学ぼう．

A 》剰余の定理

以下では，x の多項式を $\boldsymbol{P(x)}$，$Q(x)$ などと書く．また，多項式 $P(x)$ の x に数 k を代入したときの値を $\boldsymbol{P(k)}$ と書く．

多項式 $P(x)$ を x の 1 次式 $x-k$ で割った商が $Q(x)$，余りが R であることは，次の等式で表される．

$$P(x)=(x-k)Q(x)+R \qquad \leftarrow R \text{ は定数である．}$$

ここで，両辺の x に k を代入すると，$P(k)=R$ が得られる．

したがって，次の**剰余(じょうよ)の定理**が成り立つ．

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を $x-k$ で割った余りは，$P(k)$ に等しい．

例 2.13　(1)　$P(x)=x^3-2x^2+3$ を $x-1$ で割った余りは $P(1)$ で　S

$$P(1)=1^3-2\cdot1^2+3=2$$

(2)　$P(x)=x^3+2x^2+x+5$ を $x+2$ で割った余りは $P(-2)$ で

$$P(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)^2+(-2)+5=3$$

練習 2.21　$P(x)=x^3+x^2-3x-2$ を次の 1 次式で割った余りを求めよ．　解

(1)　$x-1$

(2)　$x+1$

(3)　$x+2$

練習 2.22　次のことを示せ．　解

多項式 $P(x)$ を x の 1 次式 $ax+b$ で割った余りは，$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ に等しい．

例題 2.7 多項式 $P(x)=x^3+ax^2+3x-2a$ を $x-2$ で割った余りが 12 であるとき，定数 a の値を求めよ． S

解答 剰余の定理により $P(2)=12$ であるから

$$2^3+a\cdot 2^2+3\cdot 2-2a=12$$

整理すると $2a=-2$

よって $a=-1$

練習 2.23 多項式 $P(x)=2x^3+5ax^2+ax+1$ を $x+1$ で割った余りが -5 であるとき，定数 a の値を求めよ． 解

応用例題 2.3 多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 5，$x+2$ で割った余りが -1 である．$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ． S

考え方》 $P(x)$ を 2 次式 $(x-1)(x+2)$ で割った余りは，1 次式か定数であるから，$ax+b$ とおく．

解答 $P(x)$ を 2 次式 $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

この等式より $P(1)=a+b$，$P(-2)=-2a+b$

また，$x-1$ で割った余りが 5 であるから $P(1)=5$

$x+2$ で割った余りが -1 であるから $P(-2)=-1$

よって $a+b=5$，$-2a+b=-1$

これを解くと $a=2$，$b=3$

したがって，求める余りは $2x+3$

練習 2.24 多項式 $P(x)$ を $x-3$ で割った余りが 1，$x+1$ で割った余りが 5 である．$P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割った余りを求めよ． 解

B 》因数定理

剰余の定理により，次が成り立つ．

$$\text{多項式 } P(x) \text{ が 1 次式 } x-k \text{ で割り切れる} \iff P(k)=0$$

よって，$P(k)=0$ のとき，$P(x)$ は $P(x)=(x-k)Q(x)$ の形である．
以上から，次の**因数定理**が成り立つ．

因数定理

多項式 $P(x)$ が 1 次式 $x-k$ を因数にもつ $\iff$ $P(k)=0$

例 2.14 $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$ において，$P(2)$ を計算すると S

$$P(2)=2\cdot 2^3-5\cdot 2^2+2+2=0$$

よって，多項式 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ．

練習 2.25 次のうち，多項式 x^3+2x^2-5x-6 の因数であるものはどれか． 解

① $x-1$　　② $x+1$　　③ $x-2$　　④ $x+2$

例 2.15 x^3-4x^2+x+6 を因数分解する． S

$P(x)=x^3-4x^2+x+6$ とすると

$$P(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)^2+(-1)+6$$
$$=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．

右の割り算から

$$x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x^2-5x+6)$$

さらに因数分解して

$$x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$\begin{array}{r} x^2-5x+6 \\ x+1\overline{)\ x^3-4x^2+x+6} \\ \underline{x^3+x^2} \\ -5x^2+x \\ \underline{-5x^2-5x} \\ 6x+6 \\ \underline{6x+6} \\ 0 \end{array}$$

練習 2.26 次の式を因数分解せよ． 解

(1) x^3-3x^2-6x+8

(2) x^3-5x^2+3x+9

(3) $2x^3+3x^2-11x-6$

研究　組立除法

たとえば，3 次式 ax^3+bx^2+cx+d を 1 次式 $x-k$ で割った商を lx^2+mx+n とし，余りを R とする．
この商の係数 l，m，n と余り R は，次のような方法でも求められる．この方法を**組立除法**という．

a	b	c	d	k
	$\times k\nearrow$ lk	$\times k\nearrow$ mk	$\times k\nearrow$ nk	
l	m	n	R	

$$l=a,\quad m=b+lk,\quad n=c+mk,\quad R=d+nk$$

証明　次の等式が成り立つ．

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-k)(lx^2+mx+n)+R$$

この等式は，x についての恒等式である．

右辺を展開して左辺と係数を比較すると

$$a=l,\quad b=m-lk,\quad c=n-mk,\quad d=R-nk$$

したがって

$$l=a,\quad m=b+lk,\quad n=c+mk,\quad R=d+nk$$

証終

例　x^3-2x^2+3x-9 を $x-3$ で割った商 x^2+x+6 と余り 9 は，右のようにして求められる．

1	-2	3	-9	3
$\downarrow$	$\times 3\nearrow$ 3	$\times 3\nearrow$ 3	$\times 3\nearrow$ 18	
1	1	6	9	

Ex 2.1　x^3-4x^2+x+6 を $x+1$ で割る組立除法は，次のようになり，商は x^2-5x+6，余りは 0 である (67 ページの例 2.15 で行った割り算)．　[組立除法]

1	-4	1	6	-1
	-1	5	-6	
1	-5	6	0	

演習 2.1　x^3-4x^2+3 を $x-1$ で割った商と余りを求めよ．　解

2.2.2 高次方程式

x の多項式 $P(x)$ が n 次式のとき，方程式 $P(x)=0$ を，x の **n 次方程式**という．また，3 次以上の方程式を**高次方程式**という．
ここでは，高次方程式を解く方法について学ぼう．

A 》高次方程式の解き方 (1)

まず，因数分解の公式を利用して高次方程式を解いてみよう．

例題 2.8 次の 3 次方程式を解け． S

$$x^3-1=0$$

解答 左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \qquad \leftarrow a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

よって

$$x-1=0 \quad \text{または} \quad x^2+x+1=0$$

したがって $x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

練習 2.27 次の 3 次方程式を解け． 解

(1) $x^3-8=0$ (2) $x^3+1=0$

例題 2.8 は，$x^3 = 1$ となる x を求めている．

3 乗すると a になる数を a の **3 乗根**という．すなわち，$x^3 = a$ となる数 x が a の 3 乗根である．

例題 2.8 より，1 の 3 乗根は，$1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ である．

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}, \quad \left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

であるから，1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを $\overset{オメガ}{\omega}$ とすると，1の3乗根は，$1,\ \omega,\ \omega^2$ と表される．また，$x^2+x+1=0$ の解であるから，$\omega^2+\omega+1=0$ が成り立つ．

深化 2.3 $(\omega^2)^3$ の値を求めよ． 解

例題 2.9 次の 4 次方程式を解け． S

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

解答 左辺を因数分解すると　$(x^2-2)(x^2+1)=0$　← $x^4=(x^2)^2$ より $(x^2)^2-x^2-2=0$

よって　$x^2-2=0$　または　$x^2+1=0$

したがって　$x = \pm\sqrt{2},\ \pm i$

練習 2.28 次の 4 次方程式を解け． 解

(1)　$x^4+x^2-20=0$　　(2)　$x^4-1=0$

B 》高次方程式の解き方 (2)

因数定理を用いて高次方程式を解いてみよう.

例題 2.10 次の 3 次方程式を解け. S

$$x^3 - 4x^2 + 8 = 0$$

解答 $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8$ とすると

$$P(2) = 2^3 - 4\cdot 2^2 + 8 = 0 \qquad \leftarrow \text{定数項 8 の約数の 1 つである 2 を代入}$$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもち

$$P(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 4)$$

1	−4	0	8	2
	2	−4	−8	
1	−2	−4	0	

$P(x) = 0$ から

$$x - 2 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 - 2x - 4 = 0$$

したがって $\qquad x = 2,\ 1 \pm \sqrt{5}$

補足 $P(k) = 0$ となる k をみつけるには，$P(x)$ の定数項 8 の約数 ± 1，± 2，± 4，± 8 のいずれかを k として調べてみる.

練習 2.29 次の 3 次方程式を解け. 解

(1) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

(2) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$

(3) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

(4) $2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$

多項式 $P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ を因数にもつとき，方程式 $P(x) = 0$ の解 α を **2 重解**という．また，$P(x)$ が $(x-\alpha)^3$ を因数にもつとき，方程式 $P(x) = 0$ の解 α を **3 重解**という．

たとえば，方程式 $(x-1)^2(x+2) = 0$ の解 $x = 1, -2$ のうち，解 $x = 1$ は 2 重解である．また，方程式 $(x-1)^3(x+2) = 0$ の解 $x = 1, -2$ のうち，解 $x = 1$ は 3 重解である．

高次方程式の解の個数を，2 重解は 2 個，3 重解は 3 個などと数えることにすると，n次方程式はn個の解をもつことが知られている．

応用例題 2.4 $a,\ b$ は実数とする．3 次方程式 $x^3-3x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ．また，他の解を求めよ． S

考え方 》 方程式 $P(x)=0$ が α を解にもつ $\iff$ $P(\alpha)=0$

解答 $1+2i$ がこの方程式の解であるから

$$(1+2i)^3-3(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0$$

整理して $(a+b-2)+(2a-14)i=0$

a，b は実数であるから $a+b-2=0$，$2a-14=0$

これを解くと $a=7$，$b=-5$

このとき，方程式は $x^3-3x^2+7x-5=0$

左辺を因数分解すると $(x-1)(x^2-2x+5)=0$

したがって $x=1,\ 1\pm 2i$

	1	−3	7	−5	1
		1	−2	5	
	1	−2	5	0	

(答) $a=7$，$b=-5$，　他の解は 1，$1-2i$

応用例題 2.4 において，2 つの解 $1+2i,\ 1-2i$ は互いに共役な複素数である．一般に，実数を係数とする n 次方程式の解の 1 つが虚数 $a+bi$ ならば，それと共役な複素数 $a-bi$ も解であることが知られている．

別解 $P(x)=x^3-3x^2+ax+b$ とし，$\alpha=1+2i$ と共役な複素数を $\overline{\alpha}=1-2i$ とおくと，$P(\alpha)=0,\ P(\overline{\alpha})=0$ であるから，$P(x)$ は $x-\alpha,\ x-\overline{\alpha}$ を因数にもつ．

このとき，$P(x)$ は

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}=x^2-2x+5$$

で割り切れる．

$$\begin{array}{r} x\quad -1 \\ \hline x^2-2x+5\,)\,x^3-3x^2+ax+b \\ \quad x^3-2x^2+5x \\ \hline \quad -x^2+(a-5)x+b \\ \quad -x^2+2x-5 \\ \hline \quad (a-7)x+b+5 \end{array}$$

したがって　$a-7=0,\ b+5=0$　ゆえに　$a=7,\ b=-5$

$P(x)=(x-1)(x^2-2x+5)$ より，方程式 $P(x)=0$ の解は　$x=1,\ 1\pm 2i$

よって，求める他の解は　$1,\ 1-2i$

練習 2.30 a, b は実数とする．3 次方程式 $x^3+x^2+ax+b=0$ が $1+i$ を解にもつとき，定数 a, b の値を求めよ．また，他の解を求めよ． 解

発展 3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$（ガンマ）とすると，次の等式が成り立つ．

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

右辺を展開して整理すると

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

この等式は x についての恒等式である．
両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$b=-a(\alpha+\beta+\gamma),\quad c=a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),\quad d=-a\alpha\beta\gamma$$

したがって，次のことが成り立つ．

3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$$

Ex 2.2 3次方程式 $x^3+2x^2+3x+4=0$ の3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値を求めよ．

解答 解と係数の関係から　$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

$$\begin{aligned}\text{よって}\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=(-2)^2-2\cdot3=-2\end{aligned}$$

演習 2.2 3次方程式 $x^3-3x^2+x+2=0$ の3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，次の式の値を求めよ． 解

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(2) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

2.2.3　問題

問題 2.7　$P(x) = 3x^3 + x^2 + x + 1$ を $3x + 1$ で割った余りを求めよ．　解

→ p.64 練習 2.22

問題 2.8　$P(x) = x^3 + ax + b$ を $(x + 1)(x - 3)$ で割った余りが $3x - 2$ であるとき，次の問いに答えよ．　解

→ p.65 応用例題 2.3

(1)　$P(-1)$，$P(3)$ の値を，a，b で表せ．

(2)　定数 a，b の値を求めよ．

問題 2.9　1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，$\omega^4 + \omega^2 + 1$ の値を求めよ．　解

→ p.70

問題 2.10 次の方程式を解け. 解

(1) $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$ → p.70 例題 2.9

(2) $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0$ → p.71 例題 2.10

(3) $x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ → p.71 例題 2.10

問題 2.11 3 次方程式 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 0$ が 1 と -1 を解にもつとき，次の問いに答えよ． 解 → p.73 応用例題 2.4

(1) 定数 a，b の値を求めよ．

(2) 他の解を求めよ．

問題 2.12 ある立方体から，底面の縦を 1cm，横を 2cm それぞれ延ばし，高さを 1cm 縮めた直方体を作ったら，体積が $\frac{3}{2}$ 倍になった．もとの立方体の 1 辺の長さを求めよ． 解

2.3 章末問題

2.3.1 章末問題 A

章末 2.1 次の計算をせよ. 解

(1) $(1+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-8})$

(2) $(1-i)^3$

(3) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-2i}$

章末 2.2 次の方程式を解け. 解

(1) $8x^3 - 1 = 0$

(2) $2x^4 + x^2 - 6 = 0$

(3) $x(x+1)(x+2) = 2{\cdot}3{\cdot}4$

(4) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

章末 2.3 $a,\ b$ は実数とする．3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ が $2 + i$ を解にもつとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ．また，他の解を求めよ． 解

2.3.2　章末問題 B

章末 2.4 2 乗して $5+12i$ となる複素数 z は 2 つある．このような複素数 z を求めよ． 解

章末 2.5 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つ解から，それぞれ 1 を引いた数を解にもつ 2 次方程式が $x^2+bx+a=0$ であるという．定数 $a,\ b$ の値を求めよ． 解

章末 2.6 2 次方程式 $x^2-2(m-1)x+m+5=0$ が異なる 2 つの解をもち，その解がともに 1 より大きいとき，定数 m の値の範囲を求めよ． 解

章末 2.7 $x=-1+\sqrt{2}\,i$ のとき，次の問いに答えよ． 解

(1) $x^2+2x+3=0$ であることを示せ．

(2) (1) の結果を用いて，x^3+6x^2+8x+7 の値を求めよ．

章末 2.8 a，b は定数とする．3 次方程式 $x^3+(a-1)x^2+(1-a)x+b=0$ の実数解が $x=1$ だけであるとき，a の値の範囲と b の値を求めよ． 解

ヒント

4　$z=a+bi$ とおく．

8　まず b の値を求める．方程式の左辺は $(x-1)(\quad\quad)$ の形に因数分解できる．

第 3 章　図形と方程式

3.1　点と直線

3.1.1　直線上の点

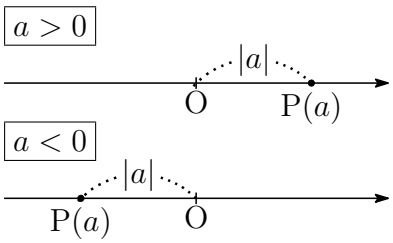
数直線上では，1 つの点に対応した実数がただ 1 つ定まる．
ここでは，数直線上の点について調べよう．

A 》数直線上の点

数直線上で点 P に実数 a が対応しているとき，a を点 P の座標といい，座標が a である点 P を $\mathrm{P}(a)$ で表す．

数直線上の原点 O と点 $\mathrm{P}(a)$ の距離を，a の絶対値 $|a|$ で表す．すなわち，2 点 O，P 間の距離 OP は次のように表される．

$$\mathbf{OP} = |\boldsymbol{a}|$$

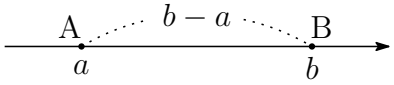


補足 $a \geqq 0$ のとき $|a| = a$，$a < 0$ のとき $|a| = -a$

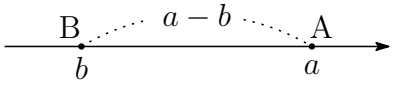
数直線上の 2 点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ 間の距離 AB は

$a \leqq b$ のとき　$\mathrm{AB} = b - a$,　　$a > b$ のとき　$\mathrm{AB} = a - b = -(b - a)$

$a < b$ のとき



$a > b$ のとき



一般に，2 点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ 間の距離 AB は　　$\mathbf{AB} = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$

例 3.1　(1)　2 点 $\mathrm{A}(2)$，$\mathrm{B}(5)$ 間の距離 AB は　　$\mathrm{AB} = |5 - 2| = |3| = 3$　　S

(2)　2 点 $\mathrm{A}(3)$，$\mathrm{B}(-1)$ 間の距離 AB は　$\mathrm{AB} = |-1 - 3| = |-4| = 4$

練習 3.1　次の 2 点間の距離を求めよ．　解

(1)　$\mathrm{A}(-1)$，$\mathrm{B}(6)$　　(2)　$\mathrm{A}(4)$，$\mathrm{B}(2)$　　(3)　$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{B}(-3)$

[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

B 》線分の内分点・外分点

m，n を正の数とする．
線分 AB 上の点 P が

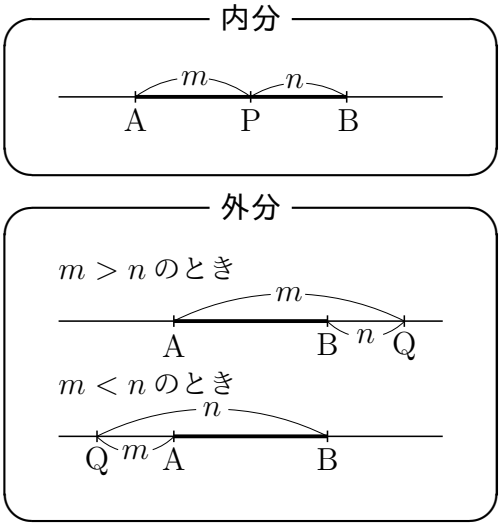
$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

を満たすとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分する**という．

また，線分 AB 上の延長上の点 Q が

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n \quad (m \neq n)$$

を満たすとき，点 Q は線分 AB を $m : n$ に**外分する**という．



点 P を線分 AB の**内分点**，点 Q を線分 AB の**外分点**という．

練習 3.2 数直線上の 3 点 A(1)，B(7)，C(3) について，次の□に適する数または用語を入れよ． 解

(1) 点 C は線分 AB を □ : □ に □ する．

(2) 点 B は線分 AC を □ : □ に □ する．

(3) 点 A は線分 CB を □ : □ に □ する．

2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 p を求めてみよう．

$a < b$ のとき，$a < p < b$ であるから，$\mathrm{AP} = p - a$，$\mathrm{PB} = b - p$ である．

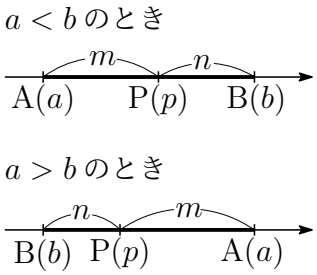
$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ より

$$(p - a) : (b - p) = m : n$$

よって　　$n(p - a) = m(b - p)$

したがって　　$p = \dfrac{na + mb}{m + n}$　　$\cdots$①

$a > b$ のときも，同様にして ① が得られる．



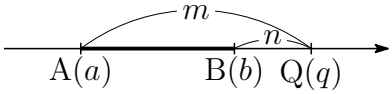
次に，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の座標 q を求めてみよう．

$m>n$，$a<b$ のとき，点 B は線分 AQ を $(m-n):n$ に内分するから

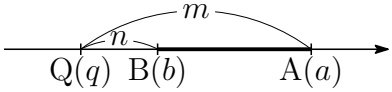
$$b=\frac{na+(m-n)q}{(m-n)+n}$$

したがって　$q=\dfrac{-na+mb}{m-n}$　$\cdots$②

$m>n$，$a<b$ のとき



$m>n$，$a>b$ のとき



$m>n$，$a>b$ のときも，同様にして ② が得られる．

また，点 Q の座標は m と n の大小にも関係なく ② で表され，一般に次のことが成り立つ．

線分の内分点・外分点

2 点 A(a)，B(b) を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点を P，
外分する点を Q とする．

点 P の座標は $\boldsymbol{\dfrac{na+mb}{m+n}}$，　点 Q の座標は $\boldsymbol{\dfrac{-na+mb}{m-n}}$

とくに，線分 AB の中点の座標は $\boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}}$ である．

補足 内分点の座標で n を $-n$ におき換えたものが，外分点の座標である．

例 3.2 2 点 A(3)，B(6) に対して，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P，2 : 1 に外分する点 Q の座標を求めると　S

内分点 P の座標は　$\dfrac{1\times3+2\times6}{2+1}=\dfrac{15}{3}=5$

外分点 Q の座標は　$\dfrac{-1\times3+2\times6}{2-1}=9$

練習 3.3 2 点 A(4)，B(8) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ．　解

(1) 3 : 2 に内分する点 C　　(2) 3 : 1 に外分する点 D

(3) 2 : 3 に外分する点 E　　(4) 中点 M

3.1.2　平面上の点

A 》座標平面上の 2 点間の距離

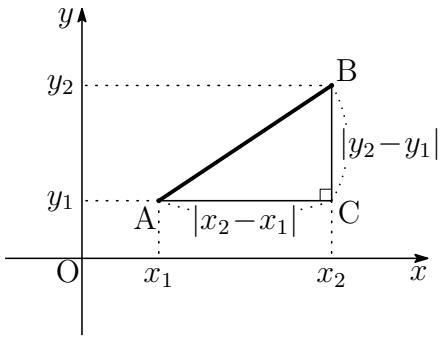
2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB を求めてみよう．

直線 AB が座標軸に平行でないとき，
右の図の直角三角形 ABC において

$$\mathrm{AC} = |x_2 - x_1|, \quad \mathrm{BC} = |y_2 - y_1|$$

三平方の定理により，$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$
が成り立つから

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\end{aligned}$$



一般に，次のことが成り立つ．

2 点間の距離

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB は

$$\mathbf{AB} = \sqrt{(\boldsymbol{x_2 - x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2 - y_1})^2}$$

とくに，原点 O と点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ との距離 OA は

$$\mathbf{OA} = \sqrt{\boldsymbol{x_1}^2 + \boldsymbol{y_1}^2}$$

例 3.3　2 点 $\mathrm{A}(2, -1)$，$\mathrm{B}(4,\ 3)$ 間の距離 AB は　S

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + \{3-(-1)\}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

原点 O と点 $\mathrm{A}(2, -1)$ との距離 OA は

$$\mathrm{OA} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

練習 3.4　次の 2 点間の距離を求めよ．　解

(1)　$\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(4,\ 6)$　　(2)　$\mathrm{A}(-3,\ 1)$，$\mathrm{B}(2, -4)$

(3)　$\mathrm{A}(5, -2)$，$\mathrm{B}(3, -2)$　　(4)　原点 O，$\mathrm{A}(2, -3)$

例題 3.1 点 P は x 軸上にあり，2 点 A$(-1,\ 2)$，B$(4,\ 3)$ から等距離にある点 P の座標を求めよ． S

解答 点 P の座標を $(x,\ 0)$ とする．

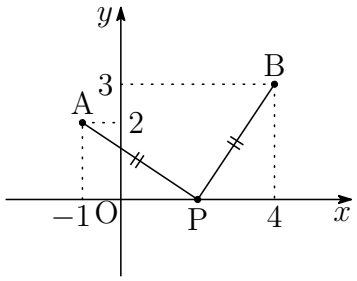
AP = BP すなわち $\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$ より

$$\{x-(-1)\}^2+(0-2)^2=(x-4)^2+(0-3)^2$$

式を整理すると $10x = 20$

これを解くと $x = 2$

よって，点 P の座標は $(2,\ 0)$



練習 3.5 点 P は y 軸上にあり，2 点 A$(-4,\ 2)$，B$(1,\ -1)$ から等距離にある．P の座標を求めよ． 解

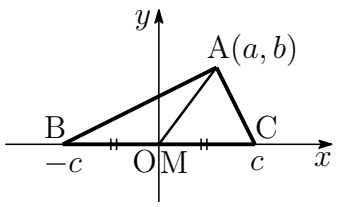
応用例題 3.1 △ABC の辺 BC の中点を M とするとき，等式 S
$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ が成り立つ．このことを証明せよ．

考え方 》 座標平面上に △ABC をとって証明する．そのとき，辺の長さの計算がしやすいように座標軸を定めるとよい． [三平方の定理を用いた証明]

証明 M は辺 BC の中点であるから，M を原点にとり，右の図のように

A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$

とする．このとき



$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$$
$$\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2$$

よって $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ **証終**

補足 応用例題 3.1 の等式 $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ を中線定理 (パップスの定理) という．また，△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，等式 $\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$ が成立する． 証

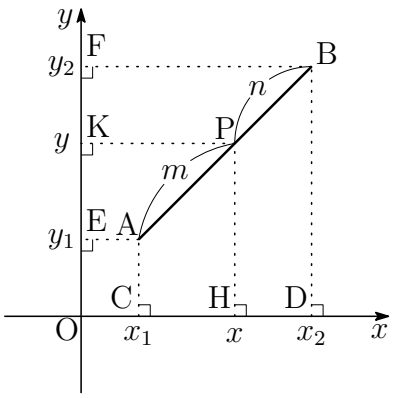
練習 3.6 △ABC において，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とするとき，等式 $2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2)$ が成り立つ．このことを証明せよ． 解

深化 3.1 応用例題 3.1 の証明において，B，C の座標をそのままで $A(0,\ b)$ とするとさらに計算がしやすくなるが，このようにおくのは不適切である．その理由を説明してみよう． 解

B 》内分点・外分点の座標

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB について，$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ となる点 P の座標を求めてみよう．

直線 AB が座標軸に平行でないとき，右の図のように，点 A，B，P から x 軸，y 軸にそれぞれ垂線を下ろすと，



$$\mathrm{CH} : \mathrm{HD} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$
$$\mathrm{EK} : \mathrm{KF} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

となる．x 軸上の点 C，H，D について，数直線上の内分点の公式から

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} \quad \cdots ①$$

また，y 軸上の点 E，K，F について，数直線上の内分点の公式から

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \quad \cdots ②$$

①，② の式は，直線 AB が座標軸に平行でないときにも成り立つ．
外分点の座標についても，同様に考えて求めることができる．

内分点・外分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を，$m : n$ に内分する点を P，外分する点を Q とする．点 P，Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\boldsymbol{nx_1 + mx_2}}{\boldsymbol{m+n}},\ \frac{\boldsymbol{ny_1 + my_2}}{\boldsymbol{m+n}}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{\boldsymbol{-nx_1 + mx_2}}{\boldsymbol{m-n}},\ \frac{\boldsymbol{-ny_1 + my_2}}{\boldsymbol{m-n}}\right)$$

とくに，線分 AB の中点の座標は $\left(\dfrac{\boldsymbol{x_1 + x_2}}{\boldsymbol{2}},\ \dfrac{\boldsymbol{y_1 + y_2}}{\boldsymbol{2}}\right)$

補足 内分点の座標で n を $-n$ におき換えたものが，外分点の座標である．

例 3.4 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 6)$，$\mathrm{B}(4,\ 1)$ を結ぶ線分 AB について S

3 : 2 に内分する点 P の座標は

$$\left(\frac{2\times(-1)+3\times 4}{3+2},\ \frac{2\times 6+3\times 1}{3+2}\right) \text{より} \qquad (2,\ 3)$$

5 : 2 に外分する点 Q の座標は

$$\left(\frac{-2\times(-1)+5\times 4}{5-2},\ \frac{-2\times 6+5\times 1}{5-2}\right) \text{より} \qquad \left(\frac{22}{3},-\frac{7}{3}\right)$$

練習 3.7 2 点 A$(-3,\ 2)$，B$(4,\ 5)$ を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ．

(1) 2 : 1 に内分する点 C　解

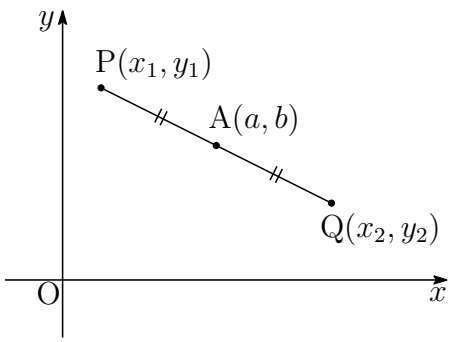
(2) 2 : 1 に外分する点 D

(3) 2 : 3 に外分する点 E

(4) 中点 M

点 A$(a,\ b)$ に関して，2 点 P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ が対称であるとき，A は線分 PQ の中点である．このとき，次の等式が成り立つ．

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad b = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



例題 3.2 点 A$(2,\ 1)$ に関して，点 P$(-2,\ 3)$ と対称な点 Q の座標を求めよ．　S

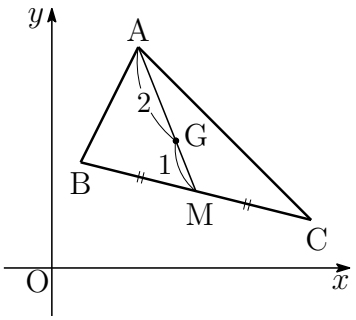
解答 点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，線分 PQ の中点が点 A であるから

$$\frac{-2+x}{2} = 2, \quad \frac{3+y}{2} = 1 \quad \text{これを解くと} \quad x = 6,\ y = -1$$

よって，点 Q の座標は　$(6, -1)$

練習 3.8 点 A$(-3,\ 2)$ に関して，点 P$(0, -4)$ と対称な点 Q の座標を求めよ．　解

例題 3.3 3点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC において，辺 BC の中点を M，線分 AM を 2 : 1 に内分する点を G とする．G の座標を求めよ． S



解答 辺 BC の中点 M の座標は

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

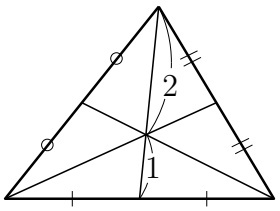
G は線分 AM を 2 : 1 に内分するから，その座標は

$$\left(\frac{1\times x_1+2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \frac{1\times y_1+2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)$$

すなわち $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

練習 3.9 例題 3.3 の △ABC において，辺 AB の中点を N，線分 CN を 2 : 1 に内分する点を G′ とする．G′ の座標を求めよ． 解

三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点とを結ぶ線分を，三角形の**中線**という．三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その点は各中線を 2 : 1 に内分する．三角形の 3 本の中線が交わる点を，三角形の**重心**という．例題 3.3 で求めたのは，△ABC の重心の座標である．



3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{\boldsymbol{x_1+x_2+x_3}}{\boldsymbol{3}},\ \frac{\boldsymbol{y_1+y_2+y_3}}{\boldsymbol{3}}\right)$$

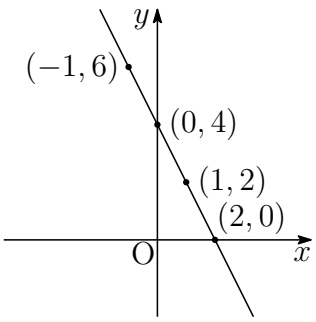
練習 3.10 次の 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ．解

(1) $\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(5,\ 2)$，$\mathrm{C}(3,\ 4)$

(2) $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(0,\ -3)$，$\mathrm{C}(2,\ 1)$

3.1.3 直線の方程式

座標平面上で，x，y の 1 次方程式 $2x+y-4=0$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，右の図のような直線になる． [方程式の表す図形]



一般に，x，y の方程式を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を**方程式の表す図形**といい，その方程式を**図形の方程式**という．

ここでは，直線の方程式について考えることにしよう．

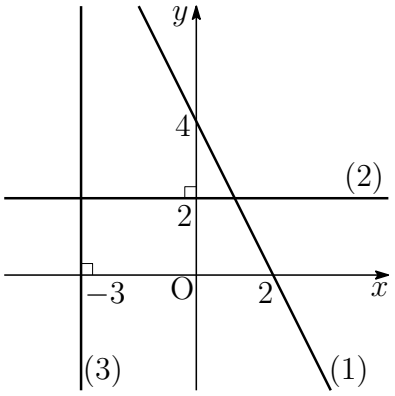
A 》 x，y の 1 次方程式の表す図形

例 3.5 (1) **方程式 $2x+y-4=0$ の表す図形** S

この方程式を変形すると

$$y=-2x+4$$

よって，この方程式の表す図形は，傾きが -2，切片が 4 の直線である．



(2) **方程式 $y-2=0$ の図形**

$y=2$ であるから，この方程式の表す図形は，点 $(0,\ 2)$ を通り y 軸に垂直な直線である．

(3) **方程式 $x+3=0$ の表す図形**

$x=-3$ であるから，この方程式の表す図形は，点 $(-3,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線である．

練習 3.11 次の方程式の表す直線を座標平面上にかけ． 解

(1) $3x-y+1=0$ (2) $y+1=0$ (3) $x-2=0$

一般に，x，y の 1 次方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形は直線である．ここで，a，b，c は定数で，$a\neq 0$ または $b\neq 0$ である．実際に

$b\neq 0$ のとき，直線 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ を表し，　← 傾きが $-\dfrac{a}{b}$ の直線

$b=0$ のとき，直線 $x=-\dfrac{c}{a}$ を表す．　← x 軸に垂直な直線

B 》直線の方程式のいろいろな形

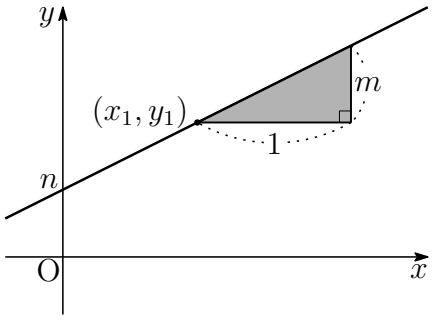
傾き m の直線

$$y=mx+n \quad \cdots ①$$

が点 $(x_1,\ y_1)$ を通るとき，

$$y_1=mx_1+n \quad \cdots ②$$

である．① − ② により n を消去すると，次のことが得られる．



直線の方程式 (1)

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は

$$\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$$

例 3.6　点 $(1,-3)$ を通り，傾きが 2 の直線の方程式は　S

$$y-(-3)=2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=2x-5$$

練習 3.12　次のような直線の方程式を求めよ．　解

(1)　点 $(2,-4)$ を通り，傾きが 3 の直線

(2)　点 $(-3,\ 1)$ を通り，傾きが -2 の直線

異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式を求めよう．

［1］$x_1 \neq x_2$ のとき，直線 AB は

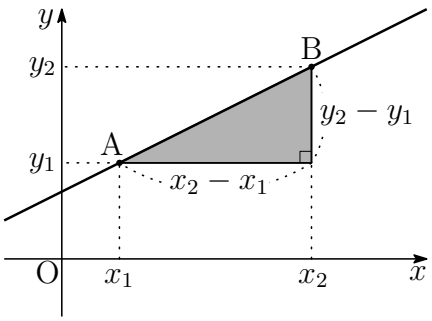
点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り，

傾きが $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

であるから，その方程式は

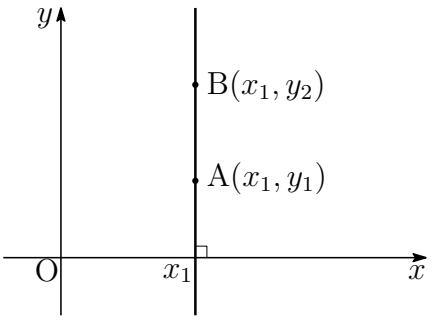
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

である．



［2］$x_1 = x_2$ のとき，x 座標が等しく，y 座標の異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_1,\ y_2)$ を通る直線 AB は x 軸に垂直である．x 軸とは点 $(x_1, 0)$ で交わるから，その方程式は，次のようになる．

$$x=x_1$$



直線の方程式 (2)

異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　$\boldsymbol{y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$　(∗)

$x_1 = x_2$ のとき　$\boldsymbol{x=x_1}$

補足 $y_1 = y_2$ のとき，これを (∗) に代入すると　$\boldsymbol{y=y_1}$

これは，点 $(0,\ y_1)$ を通り，y 軸に垂直な直線である．

一般に，異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線は，

$$\boldsymbol{-(y_2-y_1)(x-x_1)+(x_2-x_1)(y-y_1)=0}$$

で表される ($x_2-x_1,\ y_2-y_1$ は同時に 0 でない)．

例 3.7 2 点 $(1,\ 2)$，$(3,-4)$ を通る直線の方程式は　S

$$y-2=\frac{-4-2}{3-1}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad y=-3x+5$$

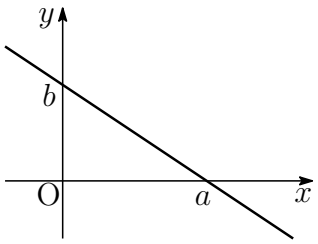
練習 3.13 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ．解

(1)　$(3,\ 2)$，$(5,\ 6)$　　(2)　$(-1,\ 4)$，$(2,\ -2)$

(3)　$(2, -1)$，$(1, -1)$　　(4)　$(3, -1)$，$(3,\ 4)$

直線が x 軸，y 軸とそれぞれ点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ で交わるとき，a をこの直線の **x 切片**，b をこの直線の **y 切片**という．

練習 3.14 $a \neq 0$，$b \neq 0$ とする．x 切片が a，y 切片が b である直線の方程式は，$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ で表されることを示せ．解

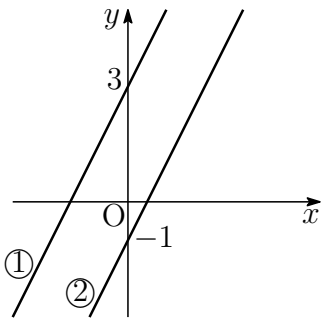


3.1.4　2 直線の関係

2 直線の位置関係では，平行，垂直という 2 つの場合がとくに大切である．
ここでは，2 直線の関係について学ぼう．

A 》2 直線の平行と垂直

例 3.8　2 直線　$y = 2x + 3$　$\cdots$①
$y = 2x - 1$　$\cdots$②
は，傾きがどちらも 2 で等しい．
よって，この 2 直線は平行である．S



練習 3.15 次の中で，直線 $y = -2x$ と平行であるものはどれか．解

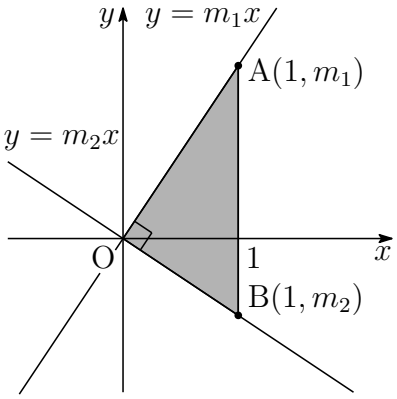
①　$y = 2x - 3$　　②　$y = -2x + 4$　　③　$2x + y + 5 = 0$

次に，原点 O を通る 2 直線 $y = m_1x,\ y = m_2x$ が垂直なとき，傾き $m_1,\ m_2$ の関係を調べよう．

点 $\mathrm{A}(1,\ m_1)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ m_2)$ をそれぞれ直線上にとり，△OAB を作る．△OAB は $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ の直角三角形であるから

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2$$
$$(m_1 - m_2)^2 = (1^2 + {m_1}^2) + (1^2 + {m_2}^2)$$

よって　　$m_1m_2 = -1$



2 直線 $y = m_1x,\ y = m_2x$ が垂直ならば，それらに平行な 2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ も垂直で，同様に $m_1m_2 = -2$ である．

逆に，$m_1m_2 = -1$ であるとき，2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ は垂直である．

2 直線の平行，垂直

異なる 2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ について

$\boldsymbol{m_1 = m_2}$　　$\Longleftrightarrow$　　**2 直線が平行**

$\boldsymbol{m_1m_2 = -1}$　　$\Longleftrightarrow$　　**2 直線が垂直**

練習 3.16 次の 2 直線は，それぞれ平行と垂直のいずれであるか． 解

(1) $y = 4x + 1$，$y = 4x - 3$　　(2) $y = 3x - 1$，$x + 3y + 2 = 0$

(3) $2x + 3y = 3$，$4x + 6y = 5$　　(4) $3x + 4y = 2$，$4x - 3y = 1$

例題 3.4　点 $\mathrm{A}(2,1)$ を通り，直線 $2x+3y+4=0$ に垂直な直線 ℓ の方程式を求めよ．
S

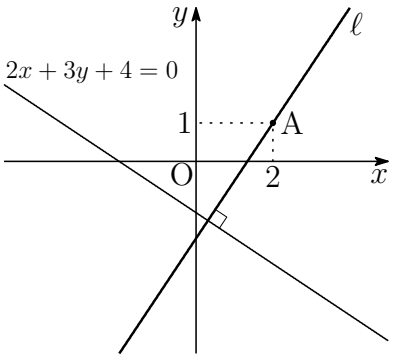
解答　直線 $2x+3y+4=0$ の傾きは　$-\dfrac{2}{3}$

直線 ℓ の傾きを m とすると

$$-\frac{2}{3}m=-1 \quad \text{から} \quad m=\frac{3}{2}$$

よって，直線 ℓ の方程式は

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad 3x-2y-4=0$$



例題 3.4 の直線 ℓ の方程式は $3(x-2)-2(y-1)=0$ の形に表される．

一般に，点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ ($a,\ b$ は同時に 0 でない) に平行な直線，垂直な直線の方程式は，それぞれ次の方程式で表される．

平行　$\boldsymbol{a(x-x_1)+b(y-y_1)=0}$

垂直　$\boldsymbol{b(x-x_1)-a(y-y_1)=0}$

証明　$b\neq 0$ のとき，直線 $ax+by+c=0\cdots(*)$ の傾きは　$-\dfrac{a}{b}$

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $(*)$ に平行な直線は

$$y-y_1=-\frac{a}{b}(x-x_1) \quad \text{すなわち} \quad a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \qquad (1)$$

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $(*)$ に垂直な直線は

$$y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1) \quad \text{すなわち} \quad b(x-x_1)-a(y-y_1)=0 \qquad (2)$$

$b=0$ のとき，$(*)$ は　$x=-\dfrac{c}{a}$,　　(1) は　$x=x_1$,　　(2) は　$y=y_1$

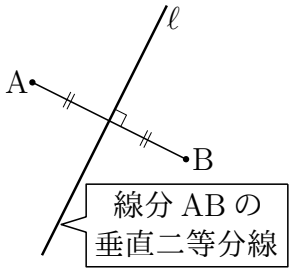
したがって，(1)，(2) は $b=0$ のときも成立する．

よって，b の値に関係なく，(1)，(2) は成立する．　　証終

練習 3.17　点 $\mathrm{A}(3,-1)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に垂直な直線，平行な直線の方程式をそれぞれ求めよ．　解

B》直線に関して対称な点

2点A，Bが直線ℓに関して対称であるのは，
次の［1］,［2］が成り立つときである．



［1］直線 AB はℓに垂直である．

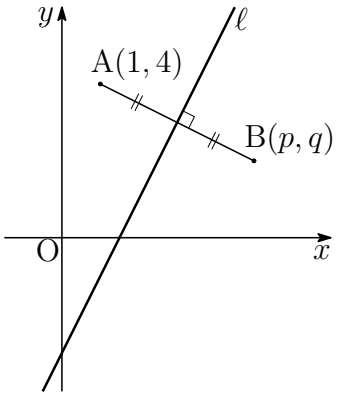
［2］線分 AB の中点はℓ上にある．

補足 直線ℓは線分 AB の垂直二等分線である．

応用例題 3.2 直線 $2x-y-3=0$ をℓとする．直線ℓに関して点 A$(1,4)$ と対称な点 B の座標を求めよ． S

考え方》 点 B の座標を $(p,\ q)$ として，上の［1］,［2］が成り立つように p，q についての方程式を作る．

解答 点 B の座標を $(p,\ q)$ とする．



［1］直線ℓの傾きは2，直線 AB の傾きは $\dfrac{q-4}{p-1}$ である．
AB$\perp\ell$ であるから

$$2\cdot\frac{q-4}{p-1}=-1$$

すなわち　$p+2q-9=0$　$\cdots$①

［2］線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+1}{2},\ \dfrac{q+4}{2}\right)$ が直線ℓ上にあるから

$$2\cdot\frac{p+1}{2}-\frac{q+4}{2}-3=0 \quad \text{すなわち} \quad 2p-q-8=0 \quad \cdots②$$

①，② を連立させた方程式を解くと　$p=5$，$q=2$

よって，点 B の座標は　$(5,\ 2)$

別解 点 A$(1,\ 4)$ を通り，ℓに垂直な直線の方程式は

$$1(x-1)+2(y-4)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+2y-9=0$$

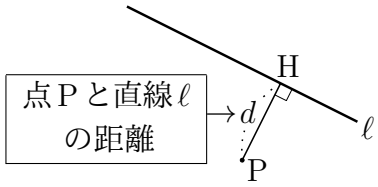
この直線とℓの交点を M とすると　M$(3,\ 3)$

M$(3,\ 3)$ は2点 A$(1,\ 4)$，B$(p,\ q)$ の中点であるから

$$\frac{1+p}{2}=3,\quad \frac{4+q}{2}=3 \quad \text{よって} \quad \text{B}(5,\ 2)$$

練習 3.18 直線 $2x - y + 2 = 0$ を ℓ とする．直線 ℓ に関して点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ と対称な点 B の座標を求めよ． 解

C》点と直線の距離



点Pから直線ℓに引いた垂線とℓとの交点をHとする．このとき，線分PHの長さdを，点Pと直線ℓの距離という．

まず，原点Oと次の直線の距離dを求めてみよう．

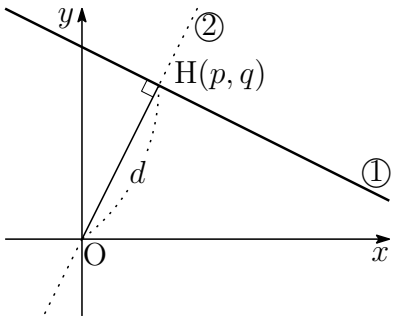
$$ax+by+c=0 \qquad \cdots ①$$

Oを通り直線①に垂直は

$$bx-ay=0 \qquad \cdots ②$$

で表される．2直線①，②の交点を$\mathrm{H}(p,q)$とすると

$$p=-\frac{ac}{a^2+b^2},\ q=-\frac{bc}{a^2+b^2}$$



← ①，② を連立させた方程式を解いた．

$d=\mathrm{OH}$であるから

$$d=\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}=\frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

原点と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は $\quad \boldsymbol{d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

補足 ①$\times a$ + ②$\times b$ より

$$a(ax+by+c)+b(bx-ay)=0 \quad \text{整理すると} \quad (a^2+b^2)x+ac=0$$

①$\times b$ − ②$\times a$ より

$$b(ax+by+c)-a(bx-ay)=0 \quad \text{整理すると} \quad (a^2+b^2)y+bc=0$$

$a^2+b^2\neq 0$であるから $\quad \mathrm{H}\left(-\dfrac{ac}{a^2+b^2},-\dfrac{bc}{a^2+b^2}\right)$

練習 3.19 原点と次の直線の距離を求めよ． 解

(1) $2x-y+5=0$

(2) $2x+3y-4=0$

次に，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d を求めてみよう．

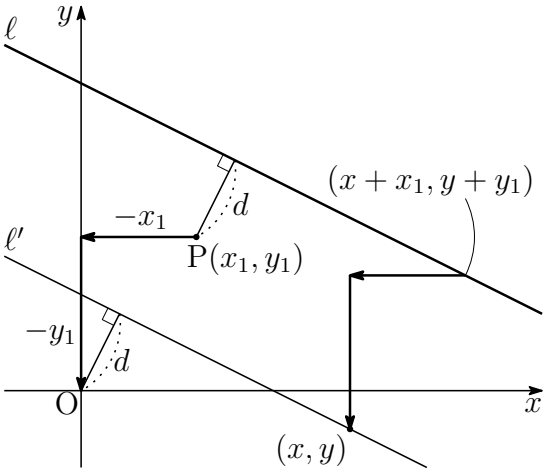
直線 $ax+by+c=0$ を ℓ とする．

点 P と直線 ℓ の両方を，点 P が原点 O に重なるように平行移動し，移動後の直線を ℓ' とする．ℓ' 上のどんな点 $(x,\ y)$ に対しても，点 $(x+x_1, y+y_1)$ が ℓ 上にあることから

$$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$$

が成り立つ．

すなわち　　$ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$



これが ℓ' の方程式である．原点と直線 ℓ' の距離は $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で，これが求める d に等しいので，次のことが成り立つ．

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$\boldsymbol{d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

別証　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $\ell: ax+by+c=0$ に垂直な直線を m とすると

$$m: b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$$

2 直線 ℓ と m の交点を $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とすると，Q は ℓ 上の点であるから

$ax_2+by_2+c=0$　ゆえに　$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=-(ax_1+by_1+c)$

$L=ax_1+y_1+c$ とおくと　　$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=-L$　$\cdots$①

Q は m 上の点であるから　　$b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0$　　$\cdots$②

① $\times a$ + ② $\times b$ および ① $\times b$ − ② $\times a$ より

$$(a^2+b^2)(x_2-x_1)=-La,\quad (a^2+b^2)(y_2-y_1)=-Lb$$

$x_2-x_1=-\dfrac{La}{a^2+b^2},\ y_2-y_1=-\dfrac{Lb}{a^2+b^2}$ であるから

$$d=\mathrm{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\frac{L^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{L^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|L|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

例 3.9 点 $(1, -2)$ と直線 $3x + 4y + 4 = 0$ の距離 d は S

$$d = \frac{|3\cdot 1 + 4\cdot(-2) + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

練習 3.20 次の点と直線の距離を求めよ． 解

(1) 点 $(1,\ 2)$，直線 $3x - 4y - 1 = 0$

(2) 点 $(2, -3)$，直線 $2x + y - 3 = 0$

(3) 点 $(-1,\ 5)$，直線 $y = 3x - 2$

研究

2 直線の交点を通る直線

2 直線

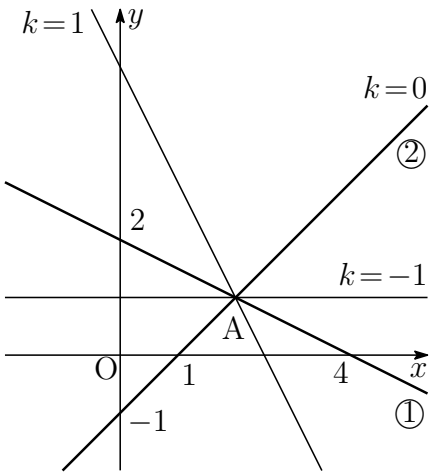
$$x+2y-4=0 \quad \cdots ①$$
$$x-y-1=0 \quad \cdots ②$$

は 1 点で交わる．その交点を A とする．

ここで，k を定数として，方程式

$$k(x+2y-4)+(x-y-1)=0 \quad \cdots ③$$

を考える．点 A は直線 ① 上にあり，かつ直線 ② 上にあるから，k がどんな値をとっても，③ の表す図形は A を通る．



③ を整理すると　　$(k+1)x+(2k-1)y-4k-1=0$

係数 $k+1$，$2k-1$ は同時に 0 になることはないから，③ は x，y の 1 次方程式である．したがって，③ は 2 直線 ①，② の交点を通る直線を表す．ただし，直線 ① は表さない．　　[2 直線の交点を通る直線]

Ex 3.1　上の 2 直線 ①，② の交点と，点 $(0,\ 3)$ を通る直線の方程式を求めてみよう．k を定数として

$$k(x+2y-4)+(x-y-1)=0 \quad \cdots ③$$

とすると，③ は 2 直線の交点を通る直線を表す．

直線 ③ が点 $(0,\ 3)$ を通るから，③ に $x=0$，$y=3$ を代入して

$$2k-4=0 \quad \text{よって} \quad k=2$$

これを ③ に代入して整理すると　　$x+y-3=0$

演習 3.1　2 直線 $2x-y+1=0$，$x+y-4=0$ の交点と，点 $(-2,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ．　解

深化 3.2　l を定数とする．$(x+2y-4)+l(x-y-1)=0 \quad \cdots ④$ とするとき，③ が表すことのできる図形と ④ が表すことのできる図形は同じだろうか．　解

3.1.5 問題

問題 3.1 原点 O と点 A(6, 2)，B(2, 4) の 3 点を頂点とする △OAB は，直角二等辺三角形であることを示せ． 解 → p.88

問題 3.2 4 点 A(1, 1)，B(4, 3)，C(2, 6)，D を頂点とする平行四辺形 ABCD について，次の点の座標を求めよ． 解 → p.91

(1) 対角線 AC の中点 M

(2) 頂点 D

問題 3.3 3 点 A(1, 5)，B(6, −3)，C(x, y) を頂点とする △ABC の重心の座標が (1, 3) であるとき，x，y の値を求めよ． 解 → p.93

問題 3.4　2 点 A$(4,\ 0)$，B$(0,\ 2)$ を通る直線の方程式を求めよ．解　→ p.97

問題 3.5　2 直線 $3x-4y+5=0$，$2x+y-4=0$ の交点を通り，次の条件を満たす方程式を，それぞれ求めよ．解　→ p.100

(1)　直線 $2x+3y=0$ に平行

(2)　直線 $2x+3y=0$ に垂直

問題 3.6　2 直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ について，次のことを証明せよ．ただし，$b\neq 0,\ b'\neq 0$ とする．解　→ p.99

$$\begin{aligned} &2\text{ 直線が平行} &&\iff &&ab'-ba'=0\\ &2\text{ 直線が垂直} &&\iff &&aa'+bb'=0 \end{aligned}$$

問題 3.7 2 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(b,\ a)$ は，直線 $y = x$ に関して対称であることを示せ．ただし，$a \neq b$ とする． 解

→ p.101 応用例題 3.2

問題 3.8 次の問いに答えよ． 解

(1) 2 点 $\mathrm{A}(4, -2)$，$\mathrm{B}(-2,\ 0)$ を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

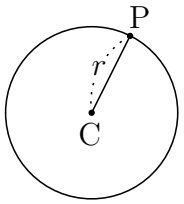
(2) 原点 O と直線 ℓ の距離を求めよ．

(3) △OAB の面積を求めよ．

3.2　円

3.2.1　円の方程式

中心が C，半径が r の円は，CP $= r$ を満たす点 P 全体の集合である．このことを座標を用いて表すと，円の方程式を導くことができる．
ここでは，円の方程式について学ぼう．



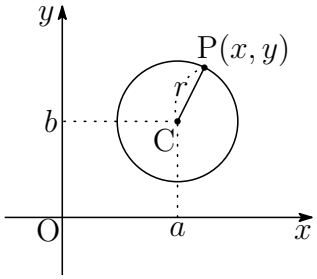
A 》円の方程式

点 C$(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円を考える．
円上の点を P$(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{CP} = r \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{CP}^2 = r^2$$

よって　　$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

したがって，次のことがいえる．



円の方程式

点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は　　$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$

例 3.10　点 $(4, -3)$ を中心とする半径 5 の円の方程式は　S

$$(x-4)^2 + \{y-(-3)\}^2 = 5^2 \quad \text{すなわち} \quad (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

練習 3.21　次のような円の方程式を求めよ．　解

(1)　中心が原点，半径が 2　　(2)　中心が点 $(2,\ 3)$，半径が 4

(3) 中心が点 $(-2,\ 1)$，半径が $\sqrt{10}$

練習 3.22　円 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$ の中心の座標と半径を求めよ．　解

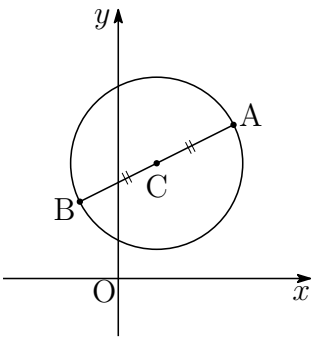
例 3.11 2 点 A(3, 4)，B(−1, 2) を直径の両端とする円について，中心 C の座標と半径 r を求める． S

解答 C は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{3+(-1)}{2},\ \frac{4+2}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (1,\ 3)$$

また

$$r = \mathrm{CA} = \sqrt{(3-1)^2+(4-3)^2} = \sqrt{5} \qquad \boxed{終}$$



補足 この円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-3)^2 = (\sqrt{5})^2$$

すなわち $(x-1)^2+(y-3)^2 = 5$

練習 3.23 2 点 A(−3, 2)，B(1, 6) を直径の両端とする円について，中心 C の座標と半径 r を求めよ．また，その方程式を求めよ． 解

B》$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

円の方程式 $(x+2)^2+(y+3)^2=5$ を変形すると

$$x^2+y^2+4x+6y+8=0$$

となる．このように，円の方程式は，l，m，n を定数として

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \qquad \leftarrow x^2 \text{ と } y^2 \text{ の係数が } 1 \text{ で，} xy \text{ の項がない．}$$

の形にも表される．

例 3.12　方程式 $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ の表す図形　S

この方程式を変形すると

$$(x^2-6x+9)+(y^2+2y+1)=6+9+1 \qquad \leftarrow \text{ 平方完成と同じ}$$

すなわち　　$(x-3)^2+(y+1)^2=4^2$

これは，中心が点 $(3,-1)$，半径が 4 の円である．

注意　方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ において，$k=0$ ならば，この方程式は点 $(a,\ b)$ を表す．また，$k<0$ ならば，この方程式が表す図形はない．

練習 3.24　次の方程式はどのような図形を表すか．　解

(1)　$x^2+y^2+4x-2y-4=0$

(2)　$x^2+y^2+6x+8y+9=0$

C》3 点を通る円の方程式

例題 3.5 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ. S

$$A(-1,\ 7),\ B(2,-2),\ C(6,\ 0)$$

解答 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする.

点 A を通るから $(-1)^2+7^2-l+7m+n=0$

点 B を通るから $2^2+(-2)^2+2l-2m+n=0$

点 C を通るから $6^2+6l+n=0$

整理すると

$$\begin{aligned} -l+7m+n&=-50\\ 2l-2m+n&=-8\\ 6l+n&=-36 \end{aligned}$$

これを解くと $l=-4$, $m=-6$, $n=-12$

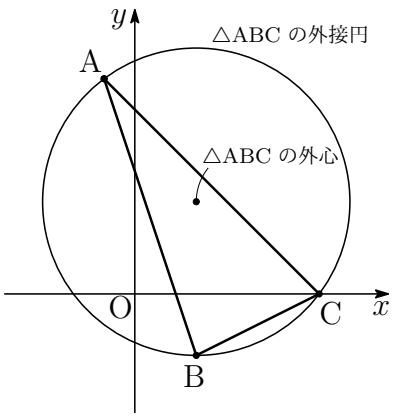
よって, 求める円の方程式は $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

例題 3.5 で求めた円の方程式を変形すると

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25$$

よって, 円の中心の座標は $(2,\ 3)$ である.

この円のように, △ABC の 3 つの頂点を通る円を △ABC の**外接円**といい, その円の中心を △ABC の**外心**という.



練習 3.25 次の 3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ． 解

(1) A(1, 1)，B(2, 1)，C(−1, 0)

(2) A(1, 3)，B(5, −5)，C(4, 2)

3.2.2 円と直線

2 直線の共有点の座標は，それらの方程式を連立させた連立方程式の解である．同様に，円と直線が共有点をもつとき，その共有点の座標は，それら方程式を連立させた連立方程式を解くことによって，求めることができる．

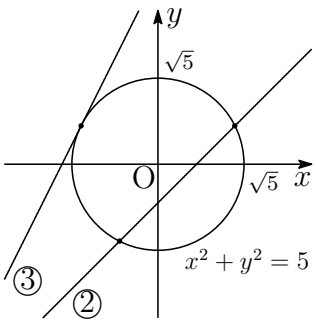
A 》円と直線の位置関係

例題 3.6 円 $x^2+y^2=5$ と次の直線の共有点の座標を求めよ． S

(1) $y=x-1$ (2) $y=2x+5$

解答 (1) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ① \\ y=x-1 & \cdots ② \end{cases}$$



② を ① に代入して

$$x^2+(x-1)^2=5$$

整理すると $x^2-x-2=0$
これを解くと $x=-1,\ 2$
② に代入して

$$x=-1 \text{ のとき } y=-2,\quad x=2 \text{ のとき } y=1$$

よって，共有点の座標は $(-1,-2),\ (2,\ 1)$

(2) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ① \\ y=2x+5 & \cdots ③ \end{cases}$$

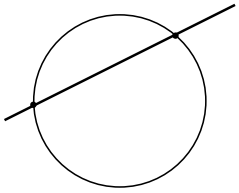
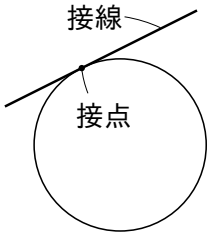
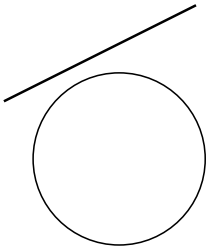
③ を ① に代入して $x^2+(2x+5)^2=5$
整理すると $x^2+4x+4=0$
これを解くと $x=-2$ で，③ に代入して $y=1$
よって，共有点の座標は $(-2,\ 1)$

練習 3.26 次の円と直線の共有点の座標を求めよ．解

(1) $x^2+y^2=25$，$y=x+1$

(2) $x^2+y^2=8$，$x+y=4$

115 ページの例題 3.6 のように，円の方程式と直線の方程式から y を消去して得られる x の 2 次方程式を $ax^2+bx+c=0$ とする．この 2 次方程式が実数解をもつとき，円と直線は共有点をもつ．実数解をもたないときは共有点をもたない．よって，その判別式 D を用いると，円と直線の位置関係は次のようになる．

D の符号	$\boldsymbol{D>0}$	$\boldsymbol{D=0}$	$\boldsymbol{D<0}$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる 2 つの実数解	重解 (ただ 1 つ)	実数解をもたない
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点をもたない 
共有点の個数	2 個	1 個	0 個

[円と直線の位置関係]

例題 3.7 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+m$ が共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ． S

解答 $x^2+y^2=1$ と $y=x+m$ から y を消去して整理すると

$$2x^2+2mx+(m^2-1)=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4=m^2-2(m^2-1)=-m^2+2$$

円と直線が共有点をもつのは，$D\geqq 0$ のときである．

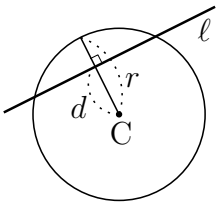
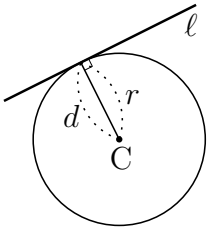
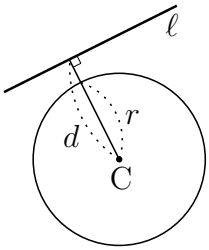
よって，$-m^2+2\geqq 0$ より　$-\sqrt{2}\leqq m\leqq\sqrt{2}$ ← $m^2-2\leqq 0$

練習 3.27 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+m$ について，次の問いに答えよ． 解

(1) 円と直線が共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(2) 円と直線が接するとき，定数 m の値と接点の座標を求めよ．

点 C を中心とする半径 r の円と直線 ℓ の位置関係は，円の中心 C と直線 ℓ の距離を d とするとき，次のようになる．

d と r の大小	$\boldsymbol{d < r}$	$\boldsymbol{d = r}$	$\boldsymbol{d > r}$
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点をもたない 

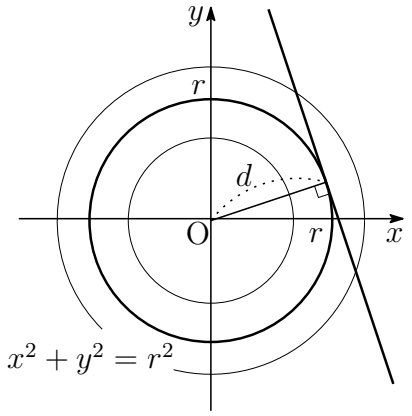
例題 3.8 半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $3x + y - 10 = 0$ が接するとき，r の値を求めよ． S

解答 円の中心は原点であり，原点と直線 $3x + y - 10 = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

円と直線が接するのは $d = r$ のときである．

よって $\quad r = \sqrt{10}$



例題 3.8 において，円と直線が共有点をもつのは $r \geqq \sqrt{10}$ のときである．また，共有点をもたないのは $0 < r < \sqrt{10}$ のときである．

練習 3.28 半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $x + 2y - 5 = 0$ が接するとき，r の値を求めよ． 解

深化 3.3 例題 3.8 の r の値を 117 ページの例題 3.7 のように判別式を利用して求めてみよう．また，接点の座標も求めてみよう． 解

B 》円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

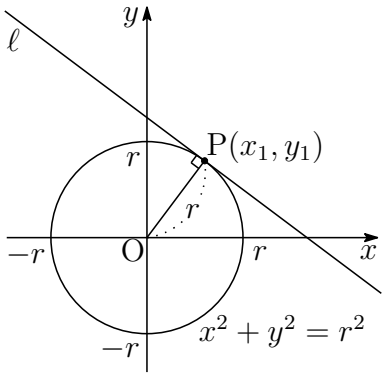
接線 ℓ は直線 OP に垂直である．

［1］$x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0$ のとき，直線 OP の傾きは $\dfrac{y_1}{x_1}$ であるから，直線 ℓ の傾きは $-\dfrac{x_1}{y_1}$ である．また，ℓ は点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を通るから，その方程式は

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

分母を払って整理すると　$x_1x+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2$
点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は円上にあるから　${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$
よって，求める円の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2 \quad \cdots ①$$



［2］$y_1=0$ のとき　$x_1=\pm r$

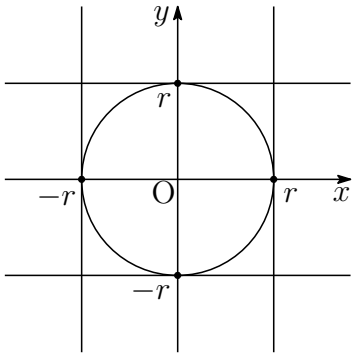
よって，求める接線の方程式は

$$x=r \quad \text{または} \quad x=-r$$

［3］$x_1=0$ のとき　$y_1=\pm r$

よって，求める接線の方程式は

$$y=r \quad \text{または} \quad y=-r$$



したがって，次のことが成り立つ．

円上の点における接線の方程式 (1)

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{x_1x+y_1y=r^2}$$

例 3.13 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,-4)$ における接線の方程式は S

$$3x+(-4)y=25 \quad \text{すなわち} \quad 3x-4y=25$$

練習 3.29 次の円上の点 P における接線の方程式を求めよ． 解

(1) $x^2+y^2=10$，$\mathrm{P}(3,\ 1)$　　(2) $x^2+y^2=13$，$\mathrm{P}(2,-3)$

(3) $x^2+y^2=16$，$\mathrm{P}(4,\ 0)$　　(4) $x^2+y^2=5$，$\mathrm{P}(0,-\sqrt{5})$

一般には，次のことが成り立つ．

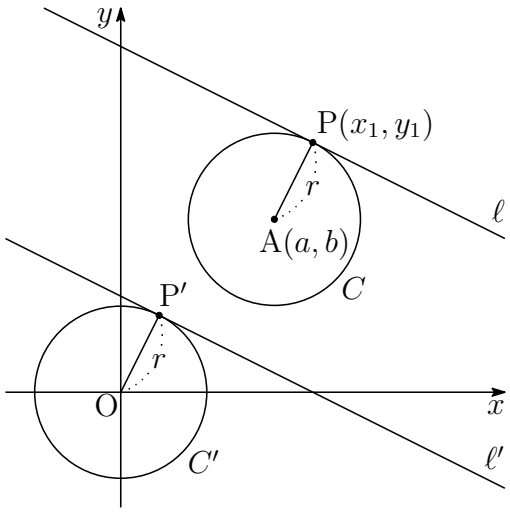
円上の点における接線の方程式 (2)

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2}$$

証明 円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線を ℓ とし，C，P および ℓ を x 軸方向に $-a$，y 軸方向に $-b$ だけ平行移動したものをそれぞれ C'，P′，ℓ' とすると

$$C':x^2+y^2=r^2,$$
$$\mathrm{P}'(x_1-a,\ y_1-b)$$



C' 上の点 P′ における接線 ℓ' の方程式は

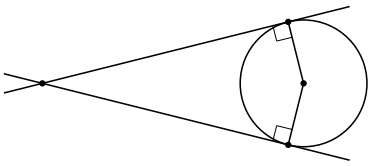
$$\ell':(x_1-a)x+(y_1-b)y=r^2$$

ℓ は ℓ' を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したものであるから

$$\ell:(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

証終

円の外部の点から円に引いた接線は 2 本ある．このような接線の方程式と接点の座標を求めてみよう．



応用例題 3.3 点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ． S

考え方》 接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする．円 $x^2+y^2=5$ 上の点 P における接線が，点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ を通るように，x_1，y_1 の値を定める．

解答 接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると，P は円上にあるから

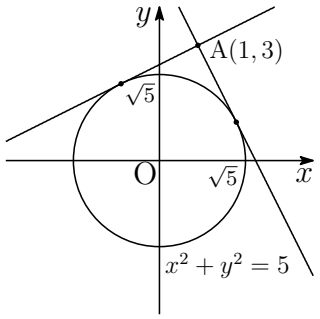
$$x_1{}^2+y_1{}^2=5 \quad \cdots ①$$

また，P における円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=5 \quad \cdots ②$$

で，この直線が点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ を通るから

$$x_1+3y_1=5 \quad \cdots ③$$



①，③ から x_1 を消去して整理すると

$$y_1{}^2-3y_1+2=0 \qquad \text{これを解くと} \quad y_1=1,\ 2$$

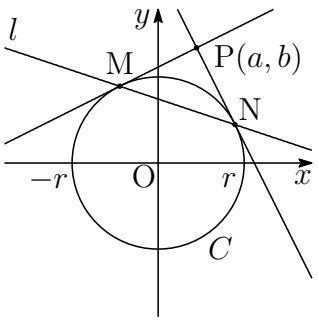
③ に代入して　$y_1=1$ のとき　$x_1=2$,　　$y_1=2$ のとき　$x_1=-1$

よって，接線の方程式 ② と接点 P の座標は，次のようになる．

接線 $2x+y=5$，接点 $(2,\ 1)$
接線 $-x+2y=5$，接点 $(-1,\ 2)$

円の極と極線

円 $C : x^2 + y^2 = r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．



2 本の接線

$$x_1x + y_1y = r^2, \quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2, \quad ax_2 + by_2 = r^2$$

上の 2 式から直線 $l : ax + by = r^2$ は 2 点 M，N を通る．

このとき，l を P を**極**とする C の**極線**という．

122 ページの応用例題 3.3 は，極線を利用した次の別解もある．

別解 点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ を極とする円 $C : x^2 + y^2 = 5$ の極線は　$x + 3y = 5$

極線と円の交点，すなわち，点 A から C に引いた接点の座標は

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$ これを解いて　$(2,\ 1),\ (-1,\ 2)$

よって　**接点 $(2,\ 1)$，接線 $2x + y = 5$**

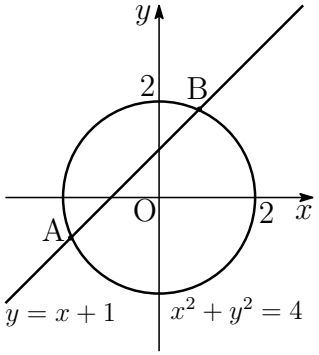
接点 $(-1,\ 2)$，接線 $-x + 2y = 5$

練習 3.30 点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ． 解

研究

円と直線の交点を通る円

円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+1$ は，右の図のように異なる 2 点で交わる．
この交点 A，B と他の 1 点を通る円の方程式について考えてみよう．
円と直線の交点の座標 $(x,\ y)$ は，次の条件を満たす．



$$x^2+y^2-4=0 \text{ かつ } x-y+1=0$$

← 円上の点であり，かつ直線上の点である．

ここで，k を定数として，方程式

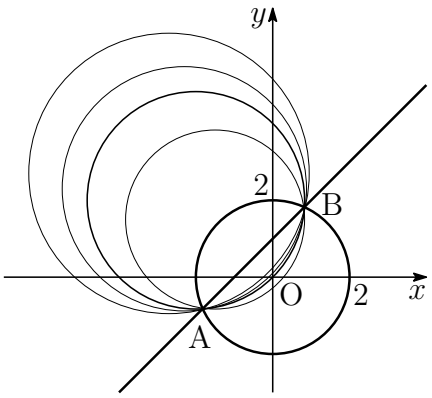
$$(x^2+y^2-4)+k(x-y+1)=0 \qquad \cdots ①$$

を考えると，① の表す図形は，2 点 A，B を通ることがわかる．

このことを利用して，円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+1$ の交点 A，B と原点 O の 3 点を通る円の方程式を求めてみよう．

① に $x=0$，$y=0$ を代入すると

$$(-4)+k=0$$
$$\text{よって} \qquad k=4$$



① に代入して整理すると

$$x^2+y^2+4x-4y=0$$

すなわち

$$(x+2)^2+(y-2)^2=8$$

これが，求める円の方程式である．

演習 3.2 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $x+3y-5=0$ の共有点を A，B とする．原点 O と A，B の 3 点を通る円の方程式を求めよ． 解

3.2.3 2つの円

これまで，2直線の関係や，円と直線の位置関係について調べてきた．
ここでは，2つの円の位置関係について調べてみよう．

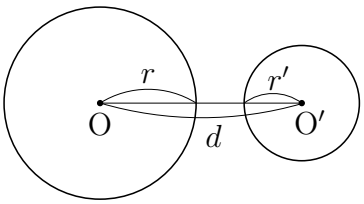
A 》2つの円の位置関係

半径がそれぞれ r，r' である2つの円の中心O，O′ 間の距離を d とする．このとき，$r > r'$ とすると，2つの円の位置関係は［1］～［5］の場合がある．

［1］ 互いに外部にある

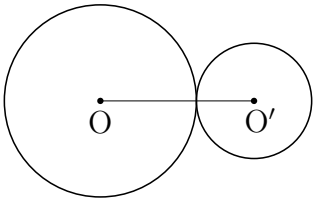
円Oの半径を r，円O′ の半径を r' とし，円の中心間の距離を d とすると

$$d > r + r'$$



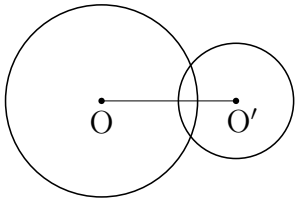
設問 次の［2］～［5］の各場合について，円Oの半径を r，円O′ の半径を r' とし，円の中心間の距離を d とするとき，□に適する記号として，等号 $=$，不等号 $>$，$<$ のうちのいずれかを入れよ． 解

［2］ 外接する (1点を共有する)



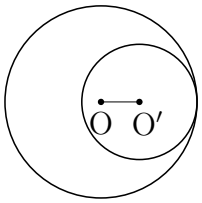
d □ $r + r'$

［3］ 2点で交わる



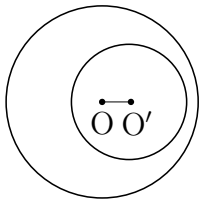
$r - r'$ □ d □ $r + r'$

［4］ 内接する (1点を共有する)



d □ $r - r'$

［5］ 一方が他方の内部にある



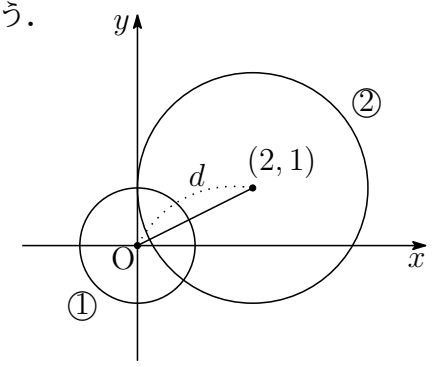
d □ $r - r'$

［2］, ［4］のように，2つの円がただ1つの共有点をもつとき，2つの円は**接する**といい，この共有点を**接点**という．［2］のように接する場合，2つの円は**外接する**という．［4］のように接する場合，2つの円は**内接する**という．

注意 $r = r'$ の場合も，［1］～［3］の位置関係と関係式は成り立つ．

次の 2 つの円 ①，② の位置関係について考えよう．

$$x^2+y^2=1 \qquad \cdots ①$$
$$(x-2)^2+(y-1)^2=4 \quad \cdots ②$$



円 ① は中心が原点，半径が 1 の円である．
また，円 ② は中心が点 $(2,\ 1)$，半径が 2 の円である．

2 つの円の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5} \qquad \leftarrow \sqrt{5}=2.23$$

また，2 つの円の半径の差は　$2-1=1$，　半径の和は　$1+2=3$

よって，　　半径の差 $<d<$ 半径の和　　$\leftarrow 1<\sqrt{5}<3$

であるから，2 つの円 ①，② は 2 点で交わる．

練習 3.31 円 $x^2+y^2=4$ と次の円について，その位置関係を調べよ．　解

(1) $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

(2) $(x-3)^2+(y-3)^2=8$

例題 3.9 中心が点 $(4,\ 2)$ である円 C と，円 $x^2+y^2=5$ が外接するとき，円 C の方程式を求めよ． S

解答 円 $x^2+y^2=5$ は中心が原点，半径が $\sqrt{5}$ の円である．

2 つの円の中心間の距離 d は　　$d=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

2 つの円が外接するとき，円 C の半径を r とすると

$$2\sqrt{5}=r+\sqrt{5}\quad \text{これを解くと}\quad r=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

よって，円 C の方程式は　　$(x-4)^2+(y-2)^2=5$

練習 3.32 中心が点 $(-3,\ 4)$ である円 C と，円 $x^2+y^2=1$ が内接するとき，円 C の方程式を求めよ． 解

B 》2 つの円の共有点の座標

2 つの円が共有点をもつとき，その共有点の座標は，2 つの円の方程式を連立させた方程式を解くことによって，求めることができる．

2 つの円について，共有点の座標を求めてみよう．

応用例題 3.4 次の 2 つの円の共有点の座標を求めよ． S

$$x^2+y^2=5, \quad x^2+y^2-6x-2y+5=0$$

考え方 》 $x^2+y^2=5$ と $x^2+y^2-6x-2y+5=0$ の辺々を引いて x^2，y^2 の項を消去すると，x，y の 1 次方程式が得られる．

解答

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 & \cdots ① \\ x^2+y^2-6x-2y+5=0 & \cdots ② \end{cases}$$

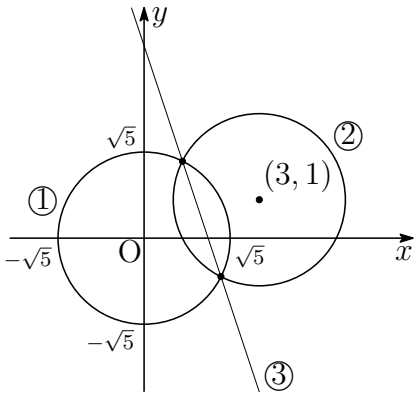
① − ② から　$6x+2y-10=0$

すなわち　　$y=-3x+5 \quad \cdots ③$

③ を ① に代入して整理すると

$$x^2-3x+2=0$$

これを解くと　$x=1,\ 2$



③ に代入して　$x=1$ のとき　$y=2$,　　$x=2$ のとき　$y=-1$

よって，共有点の座標は　　$(1,\ 2),\ (2,-1)$

補足 応用例題 3.4 の ③ の方程式は，2 つの円の共有点を通る直線を表す．

練習 3.33 次の 2 つの円の共有点の座標を求めよ． 解

$$x^2+y^2=10, \quad x^2+y^2-2x-y-5=0$$

研究

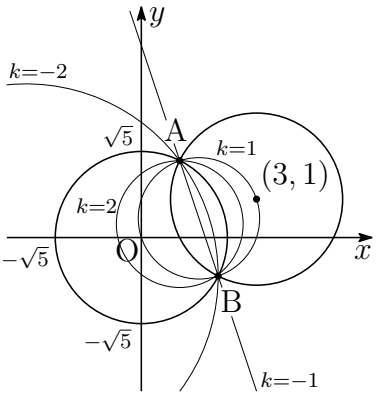
2つの円の交点を通る図形

2つの円 $x^2+y^2-5=0\cdots①$，$x^2+y^2-6x-2y+5=0\cdots②$ は2点で交わる．その交点をA，Bとする．

ここで，k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0 \quad \cdots③$$

を考える．2点A，Bは円①上にあり，かつ円②上にあるから，k がどんな値をとっても，③の表す図形はA，Bを通る．



③を整理すると

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2-6x-2y-5k+5=0$$

よって，$k\neq -1$ のとき，③は①，②の交点を通る円を表し，

$k=-1$ のとき，③は①，②の交点を通る直線を表す．

[2つの円の交点を通る図形]

Ex 3.2 上の円①，②の2つの交点と，点 $(0,\ 3)$ を通る円の方程式を求めてみよう．k を定数として

$$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0 \quad \cdots③$$

とすると，③は2つの円の交点を通る図形を表す．
③の表す図形が点 $(0,\ 3)$ を通るから，③に $x=0$，$y=3$ を代入して

$$4k+8=0 \quad \text{よって} \quad k=-2$$

これを③に代入して整理すると

$$x^2+y^2+6x+2y-15=0$$

演習 3.3 2つの円 $x^2+y^2-4=0$，$x^2+y^2-4x+2y-6=0$ の2つの交点と点 $(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ． 解

3.2.4　問題

問題 3.9 円 $x^2+y^2+x-3y=0$ について，次の問いに答えよ． 解 → p.112

(1) この円の中心の座標と半径を求めよ．

(2) この円と中心が同じで点 $(2,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ．

問題 3.10 3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 4)$，$\mathrm{C}(0,\ 5)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径と，外心の座標を求めよ． 解 → p.113

問題 3.11 直線 $y = x - 2$ が円 $x^2 + y^2 = 10$ によって切り取られてできる線分の長さを求めよ． 解 → p.115

問題 3.12 円 $x^2 + y^2 = 5 \cdots ①$ と直線 $x + 3y + c = 0 \cdots ②$ が異なる 2 点で交わるとする． 解 → p.113〜119

(1) 定数 c の値の範囲を求めよ．

(2) $c = -5$ とする．このとき，円 ① と直線 ② の共有点を A，B と原点 O の 3 点を通る円の方程式を求めよ．

問題 3.13 点 $(4,\ 2)$ から円 $x^2+y^2=10$ に引いた 2 つの接線の接点を A，B とする．
(1)　2 点 A，B の座標を求めよ．　　(2)　直線 AB の方程式を求めよ．　解
→ p.122 応用例題 3.3

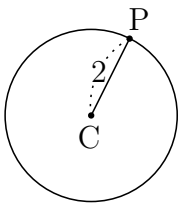
問題 3.14 円 $(x+1)^2+(y-3)^2=r^2$ が円 $(x-2)^2+(y+1)^2=49$ の内部にあるとき，半径 r の値の範囲を求めよ．　解
→ p.127

問題 3.15 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 上の点 P と点 $\mathrm{A}(4,\ 6)$ との距離について，最小値と最大値を求めよ．また，2 点 P，A 間の距離が最小となるときの点 P の座標を求めよ．　解

3.3 軌跡と領域

3.3.1 軌跡と方程式

平面上で，点 C に対して点 P が条件 CP = 2 を満たしながら動くとき，P の描く図形は，点 C を中心とする半径 2 の円である．



一般に，ある条件を満たしながら動く点が描く図形を，その条件を満たす点の**軌跡**という．すなわち，軌跡はその条件を満たす点全体の集合である．ここでは，軌跡について学ぼう．

なお，軌跡の予想や確認をする活動には，図形描画ソフトの利用も有効である．

A 》座標平面上の点の軌跡

例 3.14 **2 点 A(0, 2)，B(4, 0) に対して，AP = BP を満たす点 P の軌跡** S

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．

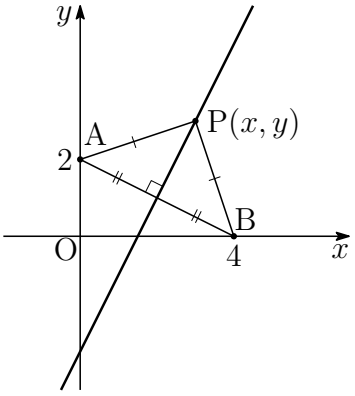
P に関する条件は

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BP} \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$$

よって $x^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + y^2$

整理すると $2x - y - 3 = 0$

したがって，点 P は直線 $2x - y - 3 = 0$ 上にある．



逆に，この直線上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$

すなわち AP = BP が成り立つ．

よって，点 P の軌跡は，直線 $2x - y - 3 = 0$ である． [軌跡と方程式]

補足 例 3.14 で求めた点 P の軌跡は，線分 AB の垂直二等分線である．

練習 3.34 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ に対して，$\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2 = 8$ を満たす点 P の軌跡を求めよ． 解

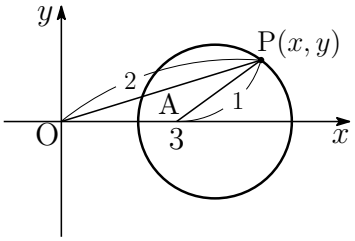
座標を用いて点 P の軌跡を求める手順は，次のようになる．

1　条件を満たす点 P の座標を $(x,\ y)$ として，P に関する条件を x，y の式で表し，この方程式が表す図形を調べる．

2　逆に，**1** で求めた図形上のすべての点 P が，与えられた条件を満たすことを確かめる．

例題 3.10　2 点 O$(0,\ 0)$，A$(3,\ 0)$ からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡を求めよ．
[軌跡と方程式] S

解答　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．



P に関する条件は

$$\mathrm{OP} : \mathrm{AP} = 2 : 1$$

これより　　$2\mathrm{AP} = \mathrm{OP}$

すなわち　　$4\mathrm{AP}^2 = \mathrm{OP}^2$

$$\mathrm{AP}^2 = (x-3)^2 + y^2, \quad \mathrm{OP}^2 = x^2 + y^2$$

を代入すると　　$4\{(x-3)^2 + y^2\} = x^2 + y^2$

整理すると　　$x^2 - 8x + y^2 + 12 = 0$

すなわち　　$(x-4)^2 + y^2 = 2^2$

よって，点 P は円 $(x-4)^2 + y^2 = 2^2$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，点 $(4,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円である．

練習 3.35　2 点 A$(-3,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ からの距離の比が 3 : 2 である点 P の軌跡を求めよ．解

補足　一般に，2 点 A，B からの距離の比が $m : n$ である点 P の軌跡は，$m \neq n$ のとき円になる．この円を**アポロニウスの円**という．この円は，線分 AB を $m : n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円である．

B 》線分の内分点の軌跡

ここでは，点 Q が与えられた条件を満たしながら動くとき，Q に対応して定まる点 P の軌跡について調べてみよう．

応用例題 3.5 点 Q が円 $x^2+y^2=4$ 上を動くとき，点 A$(4,\ 0)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ． S

考え方 》 P$(x,\ y)$，Q$(s,\ t)$ とする．Q の満たす条件を表す s，t の式と，P と Q の座標の関係式から，x，y の方程式を導く． [軌跡と方程式]

解答 点 P，Q の座標をそれぞれ $(x,\ y)$，$(s,\ t)$ とする．

Q は円 $x^2+y^2=4$ 上にあるから

$$s^2+t^2=4 \quad \cdots ①$$

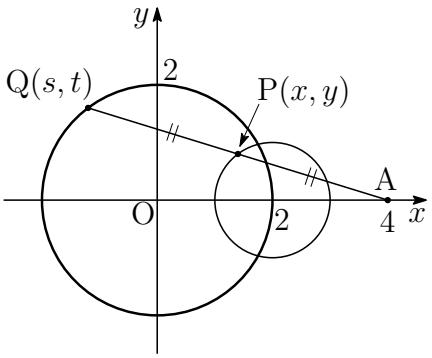
また，P は線分 AQ の中点であるから

$$x=\frac{s+4}{2},\quad y=\frac{t}{2}$$

すなわち　　$s=2x-4$，$t=2y$

これらを ① に代入すると　　$(2x-4)^2+(2y)^2=4$

整理すると　　$(x-2)^2+y^2=1^2$



よって，点 P は円 $(x-2)^2+y^2=1^2$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円である．

練習 3.36 点 Q が直線 $y=x+2$ 上を動くとき，点 A$(1,\ 6)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ を $2:1$ に内分する点 P の軌跡を求めよ． 解

3.3.2　不等式の表す領域

座標平面上で，x，y の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合がどのような図形であるか調べてみよう．

A ≫ 直線を境界線とする領域

座標平面上で，x，y の 1 次方程式

$$y = x - 2 \quad \cdots ①$$

を満たす点 $(x,\ y)$ 全体は直線である．

ここでは，不等式

$$y > x - 2 \quad \cdots ②$$

を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合について考えよう．

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ が，不等式 ② を満たすならば

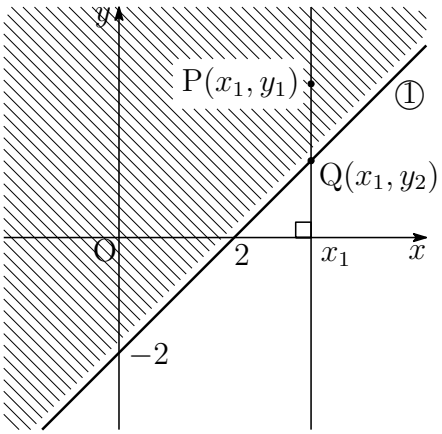
$$y_1 > x_1 - 2 \quad \cdots ③$$

が成り立つ．

また，P を通り，x 軸に垂直な直線と直線 ① の交点を $\mathrm{Q}(x_1,\ y_2)$ とすると

$$y_2 = x_1 - 2 \quad \cdots ④$$

である．



③，④ から　　$y_1 > y_2$

よって，点 P は直線 ① より上側にある．

逆に，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ が直線 ① より上側にあれば，不等式 ③ が成り立つ．

したがって，不等式 ② を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，直線 ① の上側の部分である．

同様にして，不等式 $y < x - 2$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，直線 ① の下側の部分である．

一般に，座標平面上で，x，y の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の全体の集合を，その不等式の表す**領域**という．

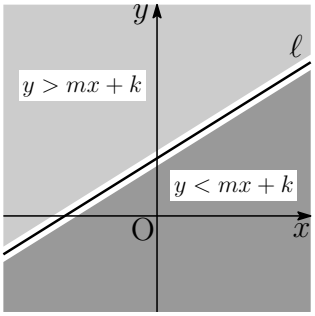
直線で分けられた領域について，一般に次のことがいえる． [直線と領域]

直線と領域

直線 $y = mx + k$ を ℓ とする．

1 不等式 $y > mx + k$ の表す領域は，
直線 ℓ の上側の部分

2 不等式 $y < mx + k$ の表す領域は，
直線 ℓ の下側の部分



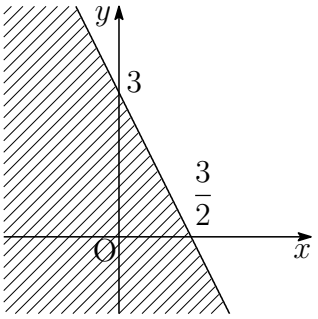
注意 $y \geqq mx + k$ や $y \leqq mx + k$ の表す領域は，直線 $y = mx + n$ を含む．

例 3.15 不等式 $2x + y - 3 \leqq 0$ の表す領域 S

不等式を変形すると

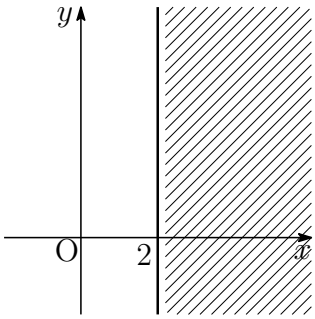
$$y \leqq -2x + 3$$

したがって，この領域は，直線 $y = -2x + 3$ およびその下側の部分で，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



例 3.16 不等式 $x > 2$ の表す領域 S

この領域は，x 座標が 2 より大きい点 $(x,\ y)$ 全体の集合である．
したがって，この領域は，直線 $x = 2$ の右側の部分で，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



練習 3.37 次の不等式の表す領域を図示せよ． 解

(1) $3x + y + 2 \leqq 0$ (2) $2x - 3y + 6 \leqq 0$

(3) $y > 2$ (4) $x \leqq -1$

B 》円を境界線とする領域

次の不等式の表す領域を調べてみよう．

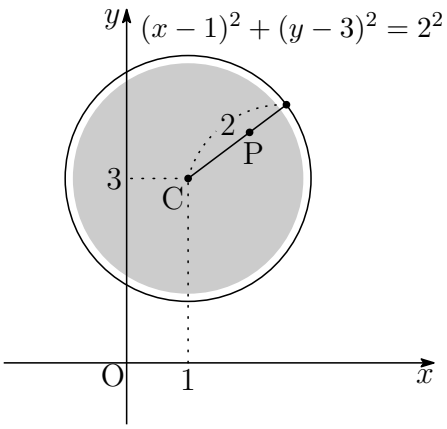
$$(x-1)^2+(y-3)^2<2^2 \quad \cdots ①$$

2 点 C(1, 3)，P(x, y) 間の距離 CP は

$$\mathrm{CP}=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

であり，不等式 ① は次のことを意味する．

$$\mathrm{CP}^2<2^2 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{CP}<2$$



したがって，不等式 ① の表す領域は，

円 $(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$ の内部である．ただし，境界線を含まない．　[円と領域]

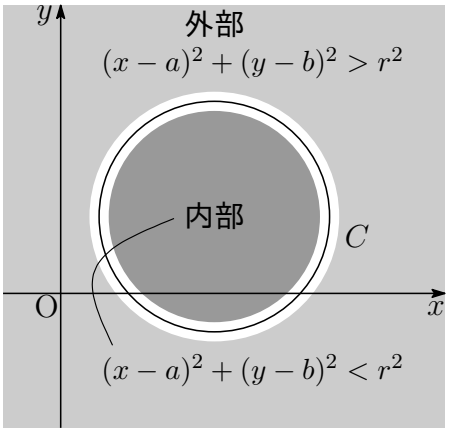
半径 r の円で分けられた領域について，一般に次のことがいえる．

円と領域

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とする．

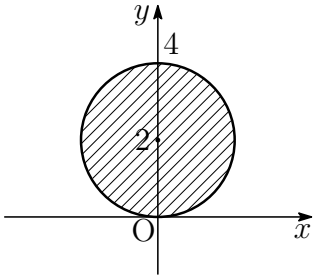
1　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は，円 C の**内部**

2　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は，円 C の**外部**



注意　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2\leqq r^2$ や不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2\geqq r^2$ の表す領域は，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を含む．

例 3.17　不等式 $x^2+(y-2)^2\leqq 4$ の表す領域は，
円 $x^2+(y-2)^2=2^2$ およびその内部である．
すなわち，右の図の斜線部分である．
ただし，境界線を含む．　S



練習 3.38 次の不等式の表す領域を図示せよ． 解

(1) $x^2 + y^2 < 4$

(2) $x^2 + y^2 \geqq 6$

(3) $(x+2)^2 + y^2 \leqq 4$

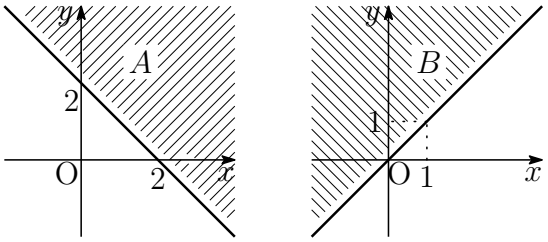
(4) $(x-1)^2 + (y+3)^2 > 9$

C》連立不等式の表す領域

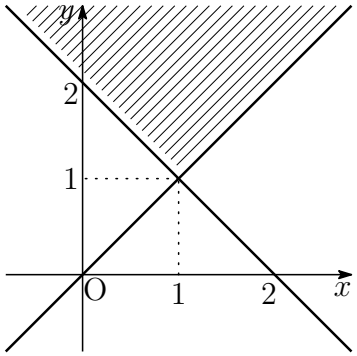
連立不等式の表す領域を図示してみよう.

例 3.18 連立不等式 $\begin{cases} \boldsymbol{x+y-2>0} \\ \boldsymbol{x-y<0} \end{cases}$ の表す領域 S

不等式　$x+y-2>0$
の表す領域を A,
不等式　$x-y<0$
の表す領域を B とすると,
A, B は, それぞれ右の図の斜線部分である.



この連立不等式の表す領域は, 領域 A と B に共通部分 $A \cap B$ である. よって, この領域は, 右の図の斜線部分である. ただし, 境界線を含まない.



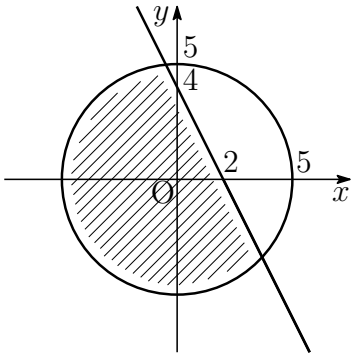
例題 3.11 次の連立不等式の表す領域を図示せよ. S

$$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ 2x+y<4 \end{cases}$$

解答　この領域は

円 $x^2+y^2=25$ の内部と
直線 $2x+y=4$ の下側の部分

の共通部分である. すなわち, 右の図の斜線部分である. ただし, 境界線を含まない.



練習 3.39 次の連立不等式の表す領域を図示せよ． 解

(1) $\begin{cases} x-y+1>0 \\ 2x+y-1>0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y-3 \leqq 0 \\ 4x-y-2 \geqq 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ 3x-y+3<0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} (x+1)^2+y^2 \geqq 1 \\ x+2y+2 \geqq 0 \end{cases}$

応用例題 3.6 次の不等式の表す領域を図示せよ．　S

$$(x-y+1)(x+y-1)<0$$

考え方》 不等式の次の性質を利用する．

$$ab<0 \iff \begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$$

解答 不等式 $(x-y+1)(x+y-1)<0$ が成り立つことは

$$\begin{cases} x-y+1>0 \\ x+y-1<0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

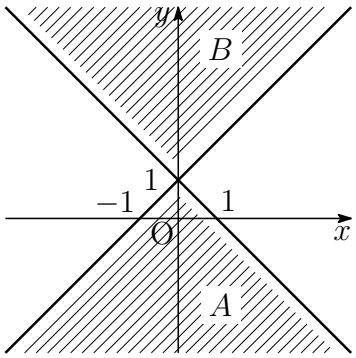
または

$$\begin{cases} x-y+1<0 \\ x+y-1>0 \end{cases} \quad \cdots ②$$

が成り立つことと同じである．

よって，求める領域は，① の表す領域 A と ② の表す領域 B の和集合 $A \cup B$ である．

すなわち，上の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



注意 $ab>0 \iff \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases}$

練習 3.40 次の不等式の表す領域を図示せよ．　解

(1) $(x+y)(x-y+1)<0$

(2) $(x+y+2)(x+y-1) \geqq 0$

D 》領域と最大・最小

不等式の表す領域を図示して解決できる問題を調べてみよう.

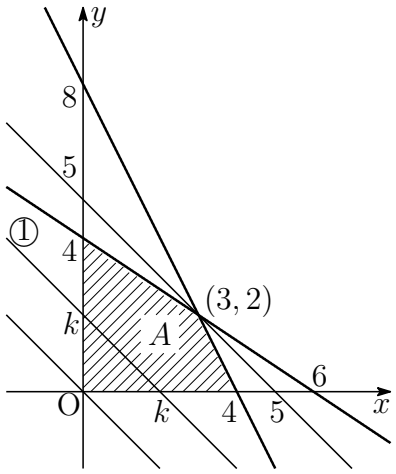
応用例題 3.7 x, y が 4 つの不等式 S

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad 2x + y \leqq 8, \quad 2x + 3y \leqq 12$$

を同時に満たすとき, $x + y$ の最大値, 最小値を求めよ.

考え方 》 $x + y = k$ とおくと, $y = -x + k$ であり, これは傾きが -1, y 切片が k である直線を表す. この直線が連立不等式の表す領域と共有点をもつときの k の値の範囲を調べる. [領域と最大・最小]

解答 与えられた連立不等式の表す領域を A とする.



領域 A は 4 点

$$(0,\ 0),\quad (4,\ 0),\quad (3,\ 2),\quad (0,\ 4)$$

を頂点とする四角形の周および内部である.

$$x + y = k \quad \cdots ①$$

とおくと, $y = -x + k$ であり, これは傾きが -1, y 切片が k である直線を表す. この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの k の値の最大値, 最小値を求めればよい. 領域 A においては, 直線 ① が

$(3,\ 2)$ を通るとき k は最大で, そのとき $\quad k = 5$

$(0,\ 0)$ を通るとき k は最小で, そのとき $\quad k = 0$

である. したがって, $x + y$ は

$x = 3$, $y = 2$ のとき最大値 5 をとり,

$x = 0$, $y = 0$ のとき最小値 0 をとる.

練習 3.41 x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad 2x+y \leqq 10,\quad 2x-3y \geqq -6$$

を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ． 解

深化 3.4 $x,\ y$ が応用例題 3.7 の 4 つの不等式を同時に満たすとき，$3x+y$ が最大値をとるような x，y の値を求めよう． 解

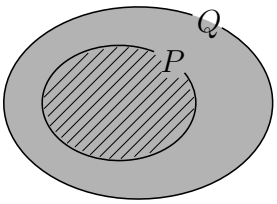
E》領域を利用した証明

2つの条件 $p,\ q$ について

条件 p を満たすもの全体の集合を P

条件 q を満たすもの全体の集合を Q

とすると，次のことがいえる．



$$\text{「}p\text{ならば}q\text{が真である」} \iff \text{「}P \subset Q\text{が成り立つ」}$$

条件 $p,\ q$ が $x,\ y$ の不等式で表されるとき，「p ならば q が真である」ことを，領域を利用して証明してみよう．

応用例題 3.8 $x,\ y$ は実数とする．次のことを証明せよ． S

$$x^2+y^2<1 \quad \text{ならば} \quad (x+1)^2+y^2<4$$

考え方》 $x^2+y^2<1,\ (x+1)^2+y^2<4$ の表す領域を，それぞれ P，Q として，$P \subset Q$ が成り立つことを示す．

解答 不等式

$$x^2+y^2<1$$

の表す領域を P，不等式を

$$(x+1)^2+y^2<4$$

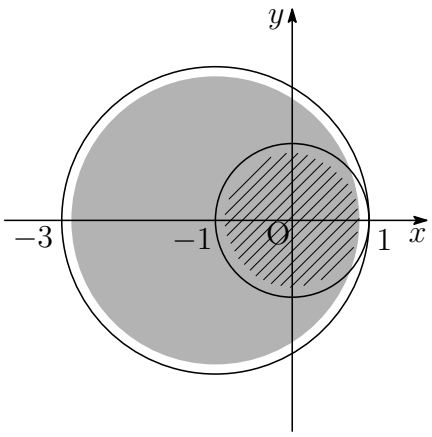
の表す領域を Q とする．

P は円 $x^2+y^2=1$ の内部，Q は

円 $(x+1)^2+y^2=4$ の内部であり，

右の図から $P \subset Q$ が成り立つ．

よって，$x^2+y^2<1$ ならば $(x+1)^2+y^2<4$ である．



補足 応用例題 3.8 を式変形で証明すると，次のようになる．

$$x^2 \leqq x^2+y^2<1 \text{ より} \quad x^2<1 \quad \text{これを解いて} \quad -1<x<1 \quad \cdots ①$$

① および $x^2+y^2<1$ より

$$(x+1)^2+y^2=(x^2+y^2)+2x+1<2x+2<4$$

練習 3.42 x, y は実数とする．次のことを証明せよ． 解

$$x^2+y^2 \leqq 1 \quad \text{ならば} \quad x+y \leqq \sqrt{2}$$

研究

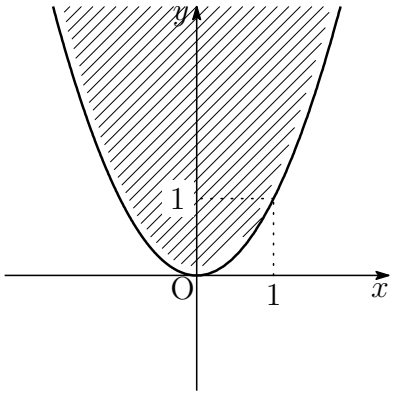
放物線を境界線とする領域

境界線が直線や円の場合について学んだ．ここでは，境界線が放物線である場合について，不等式の表す領域を調べよう．

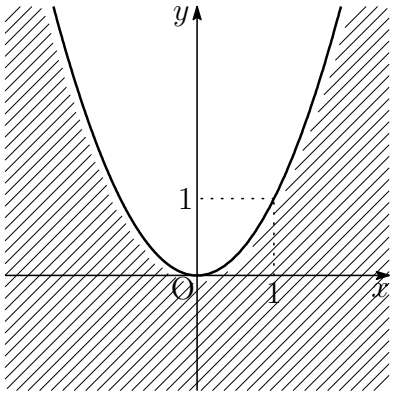
Ex 3.3 (1) 不等式 $y > x^2$ の表す領域は，放物線 $y = x^2$ の上側の部分である．すなわち，下の図 (1) の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．

(2) 不等式 $y < x^2$ の表す領域は，放物線 $y = x^2$ の下側の部分である．すなわち，下の図 (2) の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．

(1)



(2)



一般に，次のことがいえる．

関数 $y = f(x)$ のグラフを F とする．

不等式 $y > f(x)$ の表す領域は，曲線 F の上側の部分である．

不等式 $y < f(x)$ の表す領域は，曲線 F の下側の部分である．

注意 $y \geqq f(x)$ や $y \leqq f(x)$ の表す領域は，曲線 F を含む．

演習 3.4 次の不等式の表す領域を図示せよ． 解

(1) $y > x^2 - 4x + 3$ (2) $y \leqq 1 - x^2$

3.3.3　問題

問題 3.16　2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ に対して，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=10$ を満たす点 P の軌跡を求めよ．　解　→ p.133 例 3.14

問題 3.17　直線 $3x-2y-4=0$ に対して，点 P$(1,-2)$ と同じ側にある点を，次の中から選べ．　解　→ p.137

原点 O，A$(-2,-6)$，B$(-1,\ 3)$，C$(3,\ 2)$

問題 3.18　次の不等式の表す領域を図示せよ．　解　→ p.140

(1)　$1 \leqq x+y \leqq 3$　　(2)　$4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$

問題 3.19 次の不等式の表す領域を図示せよ． 解 → p.142 応用例題 3.6

$$(3x-y-5)(x^2+y^2-25) \geqq 0$$

問題 3.20 不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たす $x,\ y$ に対して，$x+y$ の最大値および最小値と，そのときの $x,\ y$ の値を求めよ． 解 → p.143 応用例題 3.7

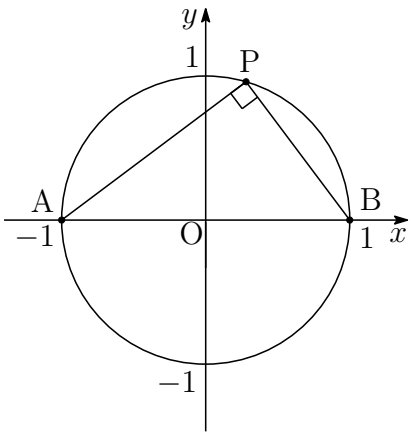
問題 3.21 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ とする． 解

(1) 次が成り立つことを示せ．

P が $\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$ を満たすならば点 P は原点を中心とする半径 1 の円上にある．

(2) 次が成り立たないことを示せ．

点 P が原点を中心とする半径 1 の円上にあるならば点 P は $\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$ を満たす．



3.4　章末問題

3.4.1　章末問題 A

章末 3.1 三角形の各辺の中点の座標が，$(-1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 0)$ であるとき，この三角形の 3 つの頂点の座標を求めよ． 解

章末 3.2 2 直線 $ax+3y+1=0$，$2x+(a-1)y=0$ が平行であるとき，および垂直であるときの定数 a の値を，それぞれ求めよ． 解

章末 3.3 k は定数とする．直線 $(2k+3)x+(k-4)y-4k+5=0$ は，k の値に関係なく定点を通る．その定点の座標を求めよ．また，この直線が点 $(-1,\ 0)$ を通るように，k の値を定めよ． 解

章末 3.4 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を頂点とする △OAB がある． 解

(1) 点 B と直線 OA の距離を $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2$ を用いて表せ．

(2) △OAB の面積は，$\dfrac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ で表されることを示せ．

章末 3.5 直線 $x - y + 2 = 0$ が円 $x^2 + (y-1)^2 = 25$ によって切り取られてできる線分の長さを求めよ． 解

章末 3.6 点 C$(2,\ 1)$ を中心として，直線 $x + 2y + 1 = 0$ に接する円の方程式を求めよ． 解

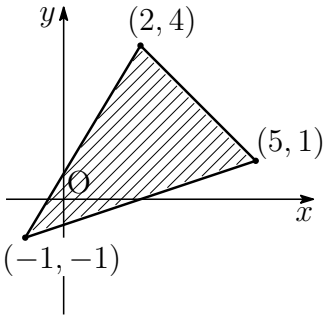
章末 3.7 点 A$(2,\ 1)$ について点 Q$(a,\ b)$ と対称な点を P とする． 解

(1) P の座標を a，b を用いて表せ．

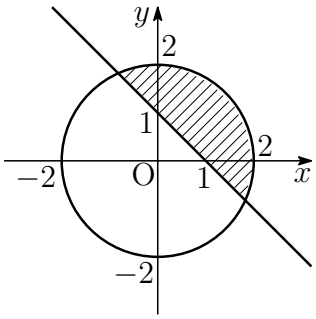
(2) Q が直線 $2x+y+1=0$ 上を動くとき，P の軌跡を求めよ．

章末 3.8 図の斜線部分を表す不等式を求めよ．ただし，境界線を含むものとする． 解

(1)



(2)



3.4.2 章末問題 B

章末 3.9 次の 3 点が同一直線上にあるとき，a の値を求めよ． 解

$$\mathrm{A}(1, -2),\quad \mathrm{B}(3,\ a),\quad \mathrm{C}(a,\ 0)$$

章末 3.10 3 つの直線 $3x - y = 0$，$2x + y = 0$，$4x - 3y + 6 = 0$ で囲まれた三角形の面積を求めよ． 解

章末 3.11 円 $x^2 + y^2 - 4x + ay = 0$ 上の点 $\mathrm{A}(4,\ 2)$ における接線を ℓ とする． 解

(1) a の値を求めよ．

(2) 円の中心 C の座標を求めよ．

(3) ℓ の傾きを求めよ．

(4) ℓ の方程式を求めよ．

章末 3.12 a は定数とする．放物線 $y = x^2 - 2(a+3)x + 4a^2 + 12a + 8$ について，次の問いに答えよ． 解

(1) 頂点の座標を a で表せ．

(2) a がすべての実数値をとって変化するとき，頂点の軌跡を求めよ．

章末 3.13 2 つの不等式 $x^2 + y^2 < 9$，$x - 3y + 3 < 0$ を同時に満たす点 $(x,\ y)$ で，x，y がともに整数であるものは，全部で何個あるか． 解

章末 3.14 ある工場の製品 A，B を 1 トン生産するのに必要な原料 P，Q の量と製品 A，B の価格は，それぞれ右の表の通りとする．

	原料 P	原料 Q	価格
A	3 トン	1 トン	2 万円
B	1 トン	2 トン	1 万円

この工場へ 1 日に供給できる原料 P が最大 9 トン，原料 Q が最大 8 トンであるとき，工場で 1 日に生産される製品 A，B の総価格を最大にするには，A，B をそれぞれ，1 日に何トンずつ生産すればよいか． 解

ヒント

9 直線 AB 上に点 C がある．

14 143 ページの応用例題 3.7 を参照する．

第 4 章　三角関数

4.1　三角関数

4.1.1　角の拡張

時計の針を 5 分進めても 5 分もどしても，長針は 30° だけ回転するが，針が回転する向きは逆である．ここでは，図形的な角を拡張して回転量としての角を考えてみよう．

A 》一般角

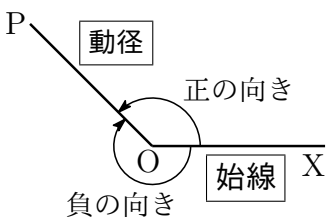
平面上で，点 O を中心に半直線 OP を回転させるとき，この半直線 OP を**動径**という．また，動径の最初の位置を示す半直線 OX を**始線**という．

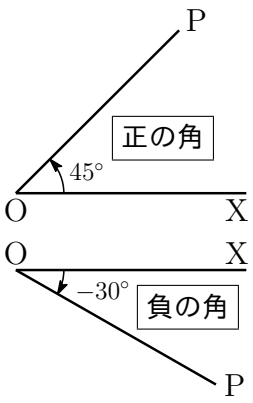
回転の向きについて，時計の針の回転と逆の向きを**正の向き**といい，同じ向きを**負の向き**という．また，始線 OX から正の向きに測った回転の角を**正の角**といい，負の向きに測った回転の角を**負の角**という．

正の角は，たとえば +45° または 45° と表す．負の角は，たとえば −30° と表す．

また，動径が正の向きに 1 回転すると 360°，2 回転すると 720°，負の向きに 1 回転すると −360° の角を表す．

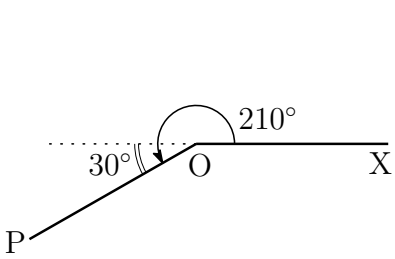
このように回転の向きと大きさをもつ量として拡張した角を**一般角**という．

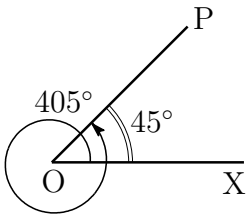




θ を一般角とする．始線 OX から θ だけ回転した位置にある動径 OP を，**θ の動径**という．

例 4.1　210°，405° の動径　S





練習 4.1　次の角の動径を図示せよ．　解

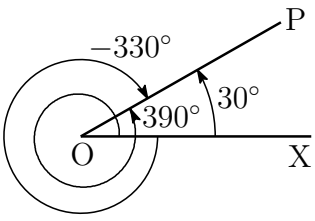
(1)　260°　　(2)　−45°　　(3)　420°

(4)　750°　　(5)　−240°

B 》動径の表す角

動径は 1 回転 360° でもとの位置にもどるから，30° の動径 OP と，たとえば

$$30^\circ + 360^\circ = 390^\circ,$$
$$30^\circ + 360^\circ \times 2 = 750^\circ$$
$$30^\circ + 360^\circ \times (-1) = -330^\circ$$



として得られる 390°，750°，−330° の動径は，すべて同じ位置にある．これらの角を**動径 OP の表す角**という．

一般に，次のことがいえる．

> 動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角は $\boldsymbol{\alpha + 360^\circ \times n}$ である．ただし，n は整数である．

練習 4.2 次の角のうち，その動径が 60° の動径と同じ位置にある角はどれか． 解

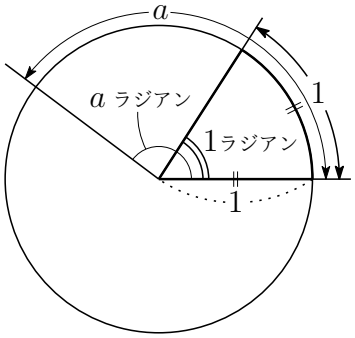
$$300^\circ,\ 420^\circ,\ 1040^\circ,\ -60^\circ,\ -300^\circ,\ -780^\circ$$

C》弧度法

30°，180° などのように，これまで使ってきた度 (°) を単位とする角の表し方を，**度数法**という．これに対して，円における弧の長さに着目した角の測り方がある．

円において，半径と同じ長さの弧に対する中心角の大きさを **1 ラジアン**または **1 弧度**という．半径 1 の円では，長さ 1 の弧に対する中心角の大きさが 1 ラジアンであり，長さ a の弧に対する中心角の大きさは，a ラジアンである．

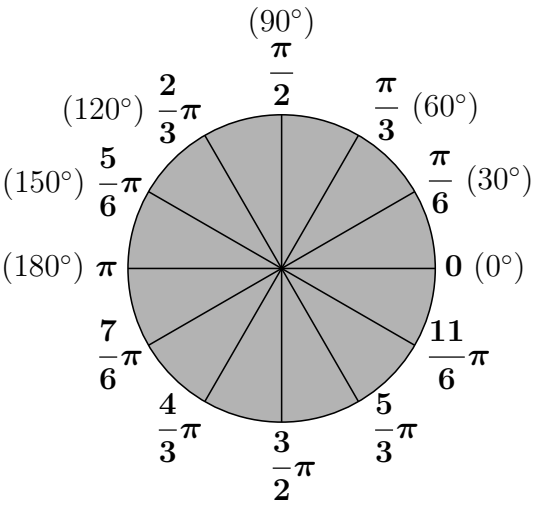
ラジアンを単位とする角の表し方を**弧度法**という．

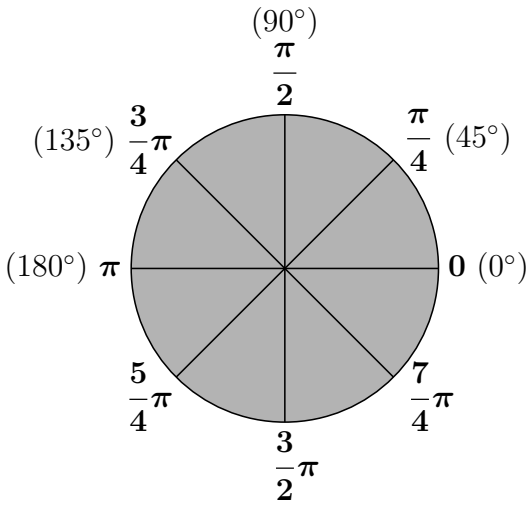


練習 4.3 次のことを確かめよ． 解

(1) 180° は π ラジアン　　(2) 1 ラジアンは $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

ラジアンと度の換算 (0°から 180°まで)





注意 弧度法では，単位のラジアン (radian) を省略するのがふつうである．

練習 4.4 次の (1)〜(3) の角を弧度法で表せ．また，(4)，(5) の角を度数法で表せ．角を弧度法で表せ．　解

(1)　210°　　(2)　240°　　(3)　330°

(4)　$\frac{5}{4}\pi$　　(5)　$\frac{3}{2}\pi$

動径の表す角について，弧度法では次のことがいえる．

> 動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角は $\boldsymbol{\alpha + 2n\pi}$ である．ただし，n は整数である．

D 》弧度法と扇形

弧度法を用いると，扇形について，次のことが成り立つ．

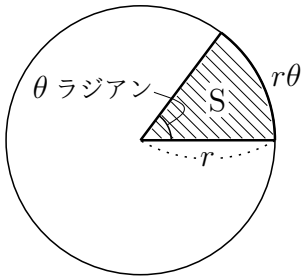
扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ(ラジアン) の扇形の弧の長さ l，面積 S は

$$\boldsymbol{l = r\theta}, \qquad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}r^2\theta} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}lr}$$

証明 半径 1 の円では，中心角が θ ラジアンの弧の長さは θ であるから，半径 r の円では，$l = r\theta$ となる．
扇形の面積は，中心角の大きさに比例するから

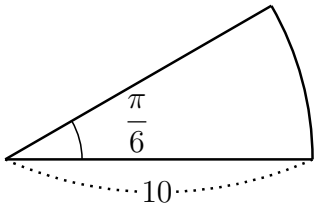
$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$ **証終**



例 4.2 半径 10，中心角 $\dfrac{\pi}{6}$ の扇形の弧の長さ l，面積 S は S

$$l = 10\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{5}{3}\pi$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{25}{3}\pi$$



練習 4.5 次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ． 解

(1) 半径 4，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$

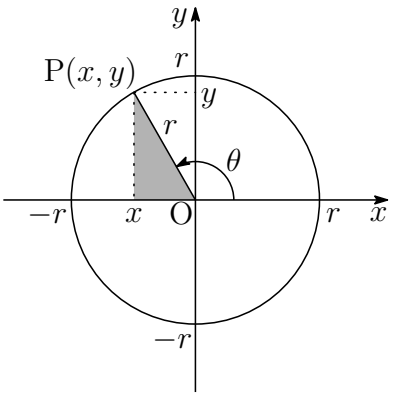
(2) 半径 6，中心角 $\dfrac{7}{6}\pi$

4.1.2　三角関数

三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ における θ を一般角 θ に拡張してみよう．

A 》三角関数

座標平面上で，右の図のように x 軸の正の部分に始線として，一般角 θ の動径と原点を中心とする半径 r の円との交点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．



このとき，$\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$ の各値は，円の半径 r には関係なく，いずれも θ だけで決まる．そこで，三角比と同様に，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

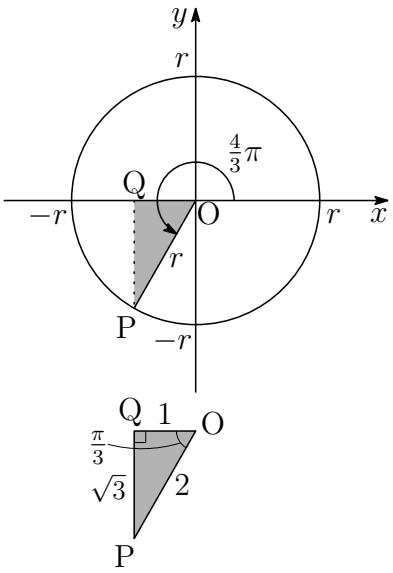
と定め，それぞれ一般角 θ の**正弦**，**余弦**，**正接**という．これらはいずれも θ の関数であり，まとめて θ の**三角関数**という．

注意　$\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) に対しては，$\tan\theta$ は定義されない．

例 4.3　$\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi}$ **の正弦，余弦，正接**　S

右の図で，円の半径が $r = 2$ のとき，点 P の座標は $(-1, -\sqrt{3})$ である．

そこで，$x = -1$，$y = -\sqrt{3}$ として



$$\sin\frac{4}{3}\pi = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4}{3}\pi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

練習 4.6 次の θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ． 解

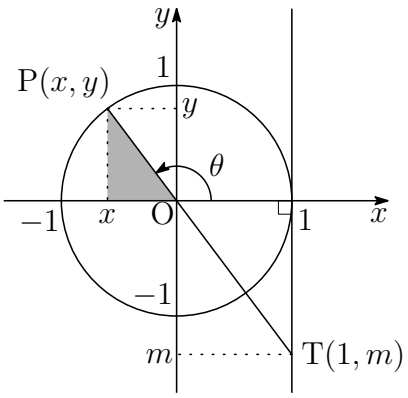
(1) $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$

(2) $\theta = \dfrac{11}{6}\pi$

(3) $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$

原点を中心とする半径 1 の円を**単位円**という．

右の図のように，一般角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると



$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y, \quad \cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

また，右の図において，直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1} = m$$

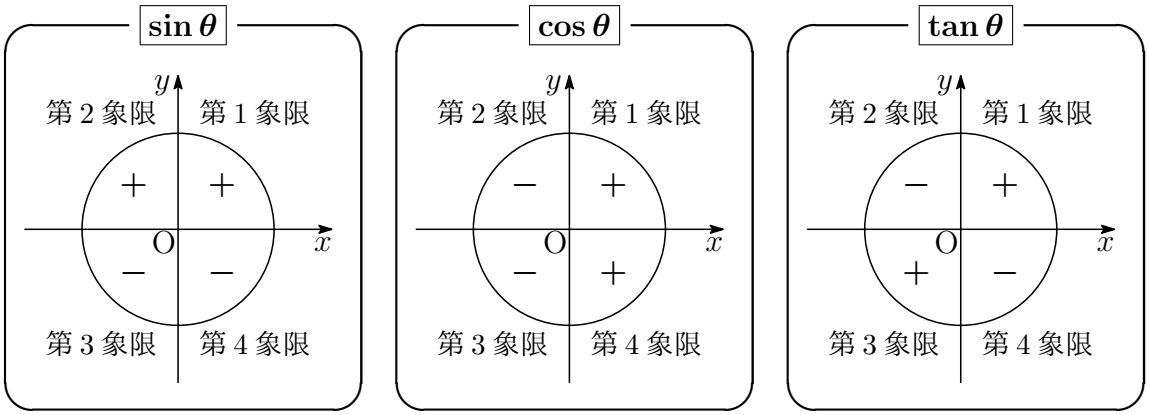
よって　$\boldsymbol{y = \sin\theta,\ x = \cos\theta,\ m = \tan\theta}$　　[三角関数のグラフ]

右上の図において，点 P は単位円の周上を動き，そのとき点 T は直線 $x = 1$ 上のすべての点を動く．

したがって，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta \leqq 1}, \qquad \boldsymbol{-1 \leqq \cos\theta \leqq 1}, \qquad \boldsymbol{\tan\theta}\ \text{の値の範囲は実数全体}$$

三角関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値の符号は，θ の動径がどの象限にあるかで決まる．これを図で示すと，次のようになる．



練習 4.7 次のような θ の動径は，第何象限にあるか．　解

(1)　$\sin\theta < 0$ かつ $\cos\theta > 0$　　(2)　$\cos\theta < 0$ かつ $\tan\theta > 0$

B 》三角関数の相互関係

三角比と同様に，三角関数についても次の相互関係が成り立つ．

三角関数の相互関係

1 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ **3** $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

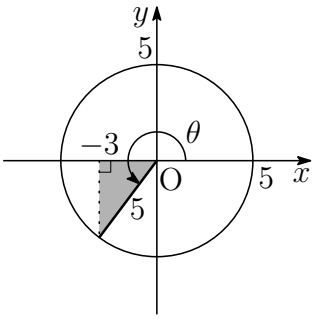
2 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

三角関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のどれか 1 つの値が与えられたとき，これらの公式を用いて，他の三角関数の値を求めてみよう．

例題 4.1 θ の動径が第 3 象限にあり，$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ． S

解答 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$



θ の動径が第 3 象限にあるとき，$\sin\theta < 0$ であるから

$$\sin\theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

また $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\dfrac{4}{5}\right) \div \left(-\dfrac{3}{5}\right) = \left(-\dfrac{4}{5}\right) \times \left(-\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$

別解 $\cos\theta = -\dfrac{3}{5} = \dfrac{-3}{5}$ より，$r = 5$，$x = -3$ とし，$x^2 + y^2 = r^2$ に代入すると

$$(-3)^2 + y^2 = 5^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 16$$

θ の動径が第 3 象限にあるから，$y < 0$ より $y = -4$

よって $\sin\theta = \dfrac{-4}{5} = -\dfrac{4}{5}$, $\tan\theta = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$

補足 θ の動径が第 3 象限にあるとき，θ を**第 3 象限の角**ということがある．
他の象限についても同様である．

練習 4.8 θ の動径が第 4 象限にあり，$\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

解

練習 4.9 θ の動径が第 3 象限にあり，$\tan\theta = 2$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ．

解

深化 4.1 例題 4.1 を，$\sin\theta$ の値からではなく，$\tan\theta$ の値から求めて解いてみよう．

解

例題 4.2 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ． S

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

考え方》 (1) $\sin\theta\cos\theta$ は $(\sin\theta+\cos\theta)^2$ の展開式に現れる．
(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ が利用できる．

解答 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4} \qquad \leftarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

よって $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

したがって $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{11}{8}=\frac{11}{16}$$

補足 応用例題 4.2(2) では，等式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を利用できる．

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$$

練習 4.10 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ． 解

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

例題 4.3 次の等式を証明せよ．　S

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

証明

$$\text{左辺} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{\tan\theta}=\tfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \qquad \leftarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

よって　$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$　証終

練習 4.11 等式 $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ を証明せよ．　解

4.1.3 三角関数のグラフ

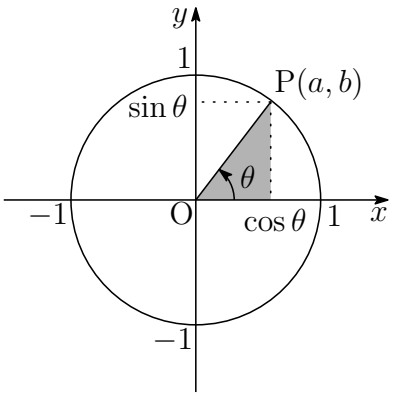
三角関数のグラフについて調べてみよう．

A 》三角関数のグラフ

右の図のように，一般角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，

$$\sin\theta = b, \quad \cos\theta = a$$

である．よって，次のことがいえる．

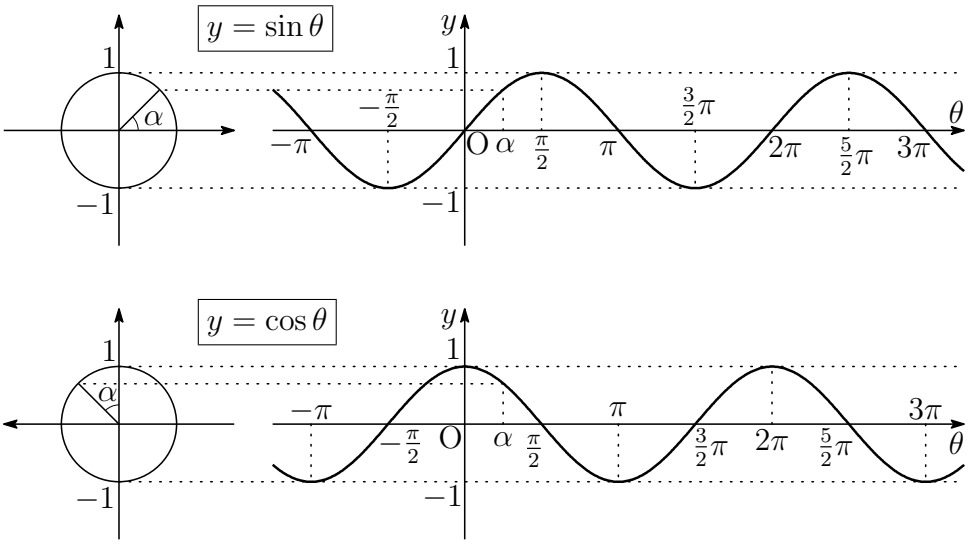


［1］$\sin\theta$ の値は，P の y 座標に等しい．

［2］$\cos\theta$ の値は，P の x 座標に等しい．

［1］,［2］を使って，関数 $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフをかくと，次のようになる[1]．

[三角関数のグラフ]



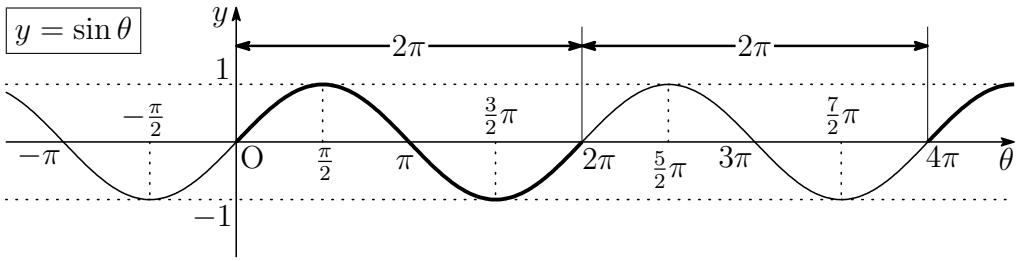
[1] θ は弧度法の角であり，θ 軸上の目盛りはラジアンでとっている．
$y=\sin\theta$ のグラフの形の曲線を**正弦曲線**または**サインカーブ**という．グラフのかき方からわかるように，$y=\cos\theta$ のグラフも正弦曲線である．

動径は 1 回転してもとの位置にもどるから，次のことが成り立つ．

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta,\qquad \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$$

この性質により，関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$ はいずれも 2π の**周期**をもつ[2] という．

グラフについていうと，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフは，いずれも 2π ごとに同じ形を繰り返す．



さらに，次のことがいえる．

> **$y=\sin\theta$ のグラフは，原点に関して対称である．**
>
> **$y=\cos\theta$ のグラフは，y 軸に関して対称である．**

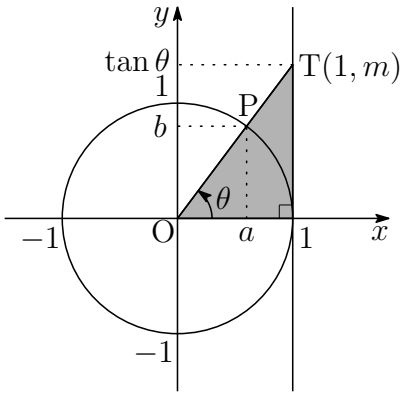
$y=\tan\theta$ のグラフについても調べよう．

右の図のように，角 θ の動径と単位円の交点を P とし，直線 OP と直線 $x=1$ の交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると，

$$\tan\theta=m$$

である．よって，次のことがいえる．

> ［3］ $\tan\theta$ の値は，T の y 座標に等しい．

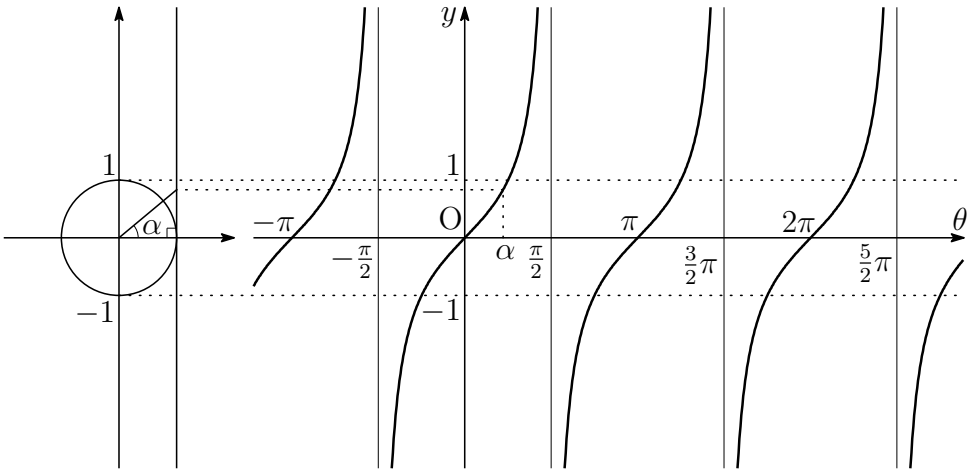


[2] 一般に，0 でない定数 p に対して，関数 $f(x)$ が常に $f(x+p)=f(x)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は p を**周期**とする**周期関数**であるという．

このとき，$2p$，$3p$ や $-p$ なども周期であるが，周期関数の周期といえば，ふつう正の周期のうち最小のものをさす．

前ページの [3] を使って，関数 $y = \tan\theta$ のグラフをかくと，次のようになる．

[三角関数のグラフ]



$\tan\theta$ は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ では定義されないが，$y = \tan\theta$ のグラフは θ が $\dfrac{\pi}{2}$ に近づくにしたがって，直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づく．

グラフが限りなく近づく直線を，そのグラフの**漸近線**（ぜんきんせん）という．

関数 $y = \tan\theta$ には，次のような性質がある．

1 $\boldsymbol{\tan(\theta + \pi) = \tan\theta}$ が成り立つ．すなわち，$\boldsymbol{\tan\theta}$ は $\boldsymbol{\pi}$ の周期をもつ．

2 グラフは原点に関して対称である．

また，直線 $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi}$ ($\boldsymbol{n}$ は整数) を漸近線にもつ．

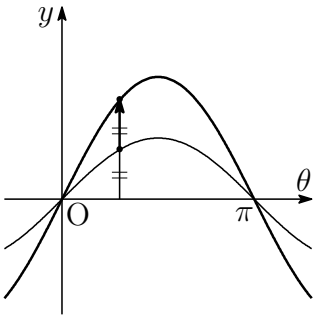
三角関数の周期，値域，グラフの対称性についてまとめると，次のようになる．

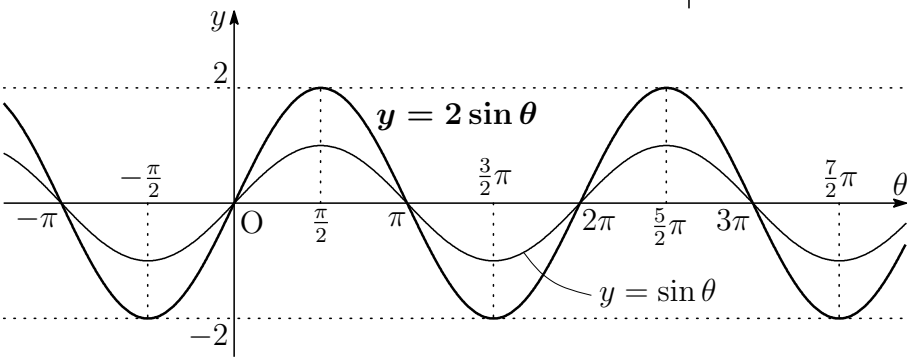
	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$	$y = \tan\theta$
周期	2π	2π	π
値域	$-1 \leqq y \leqq 1$	$-1 \leqq y \leqq 1$	実数全体
グラフの対称性	原点に関して対称	y 軸に関して対称	原点に関して対称

B 》いろいろな三角関数のグラフ

例 4.4 $\boldsymbol{y = 2\sin\theta}$ **のグラフ**　S

このグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ 2 倍に拡大したもので，次のようになる．周期は 2π である．　[$y = 2\sin\theta$ のグラフ]





練習 4.12 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．　解

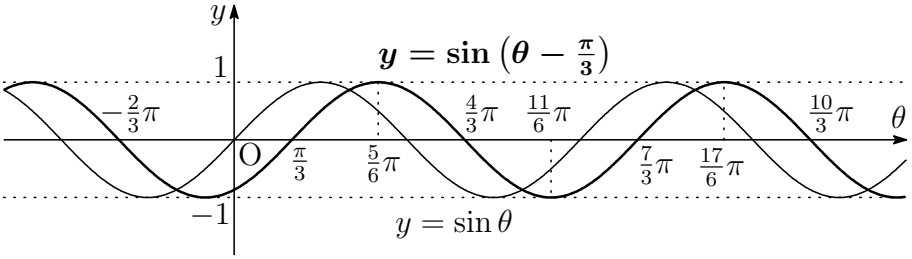
(1) $y = 2\cos\theta$

(2) $y = \dfrac{1}{2}\sin\theta$

(3) $y = \dfrac{1}{2}\tan\theta$

例 4.5 $\boldsymbol{y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)}$ のグラフ S

このグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，次のようになる．周期は 2π である． $[y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフ$]$



練習 4.13 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ． 解

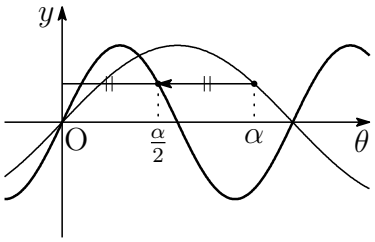
(1) $y = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $y = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$

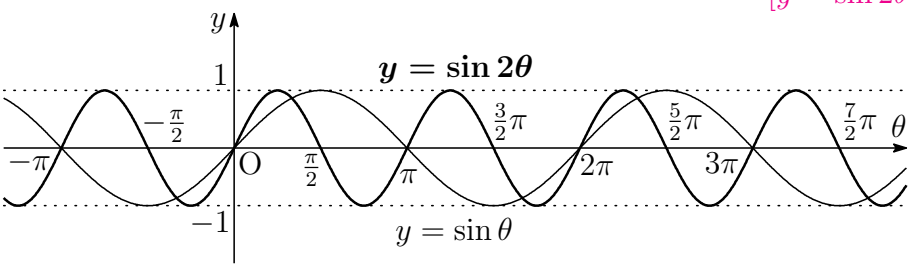
(3) $y = \tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

例 4.6　$y = \sin 2\theta$ のグラフ　S

$\theta = \dfrac{\alpha}{2}$ における $\sin 2\theta$ の値と，$\theta = \alpha$ における $\sin\theta$ の値が等しい．したがって，このグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したもので，次のようになる．周期は $2\pi \times \dfrac{1}{2} = \pi$ である．



[$y = \sin 2\theta$ のグラフ]



三角関数の周期について，一般に，次のことがいえる．

> k を正の定数とするとき
> $\sin k\theta$，$\cos k\theta$ の周期はともに $\dfrac{2\pi}{k}$ である．
> $\tan k\theta$ の周期は $\dfrac{\pi}{k}$ である．

← $\sin(k\theta+2\pi)=\sin k\theta$ から $\sin k\left(\theta+\frac{2\pi}{k}\right)=\sin k\theta$

練習 4.14 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ． 解

(1) $y = \cos 2\theta$

(2) $y = \sin \dfrac{\theta}{2}$

(3) $y = \tan 2\theta$

172，174 ページで学んだように，$y=\sin\theta$ のグラフを F とすると

$y=\mathbf{2}\sin\theta$ のグラフは，F を θ 軸をもとにして y 軸方向に $\mathbf{2}$ 倍

$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)$ のグラフは，F を θ 軸方向に $\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ だけ平行移動

$y=\sin\mathbf{2}\theta$ のグラフは，F を y 軸をもとにして θ 軸方向に $\dfrac{1}{\mathbf{2}}$ 倍

したものである．これらの考え方を合わせると，いろいろな関数のグラフをかくことができる．

例題 4.4 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．　S

$$y=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

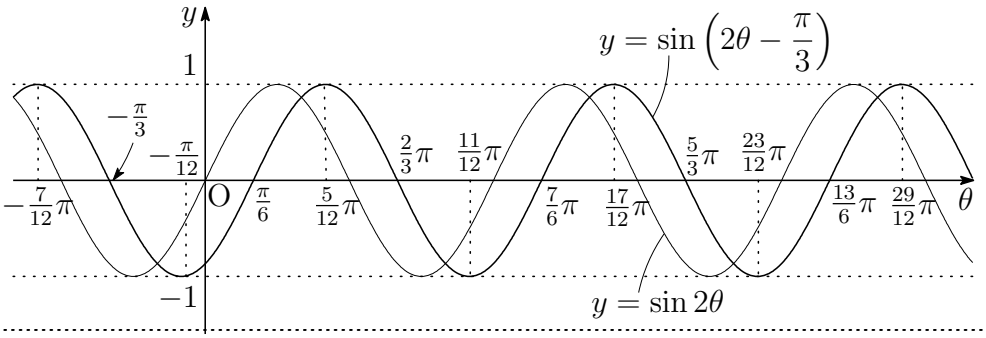
[$y=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフ]

解答　$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

であるから，$y=\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\sin 2\theta$ のグラフを，

θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもので，下の図のようになる．

周期は $\sin 2\theta$ の周期に等しく，$2\pi\times\dfrac{1}{2}=\pi$ である．



練習 4.15 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ． 解

(1) $y = \sin 2\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $y = \cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

4.1.4　三角関数の性質

三角関数で成り立ついろいろな等式について調べよう．

A 》三角関数で成り立つ等式

三角関数の周期性は，次の等式で表される．

1
$$\begin{cases} \sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta \\ \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta \\ \tan(\theta+n\pi)=\tan\theta \end{cases}$$
ただし，n は整数

←$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$ も成り立つ．

例 4.7　(1)　$\sin\dfrac{13}{3}\pi=\sin\dfrac{7}{3}\pi=\sin\dfrac{\pi}{3}$　← $\frac{13}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+4\pi$　S

(2)　$\tan\dfrac{7}{3}\pi=\tan\dfrac{4}{3}\pi=\tan\dfrac{\pi}{3}$　← $\frac{7}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+2\pi$

三角関数のグラフの対称性は，次の等式で表される．

2
$$\begin{cases} \sin(-\theta)=-\sin\theta \\ \cos(-\theta)=\cos\theta \\ \tan(-\theta)=-\tan\theta \end{cases}$$

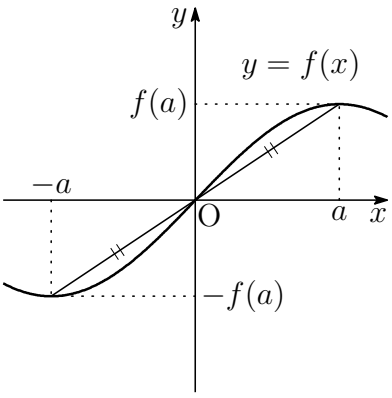
← $y=\sin\theta$　のグラフは原点に関して対称
← $y=\cos\theta$　のグラフは y 軸に関して対称
← $y=\tan\theta$　のグラフは原点に関して対称

一般に，関数 $y=f(x)$ について，次のことが成り立つ．

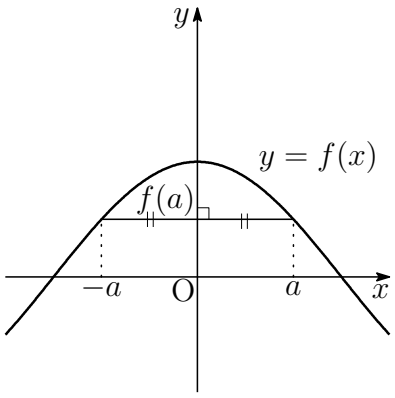
［1］常に $f(-x)=-f(x)$ である　$\Longleftrightarrow$　グラフは原点に関して対称

［2］常に $f(-x)=f(x)$ である　$\Longleftrightarrow$　グラフは y 軸に関して対称

［1］



［2］



［1］の関数 $f(x)$ は**奇関数**，［2］の関数 $f(x)$ は**偶関数**であるという．

例 4.8 (1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ S

(2) $\cos\left(-\dfrac{13}{3}\pi\right) = \cos\dfrac{13}{3}\pi = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}+4\pi\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

練習 4.16 次の値を求めよ． 解

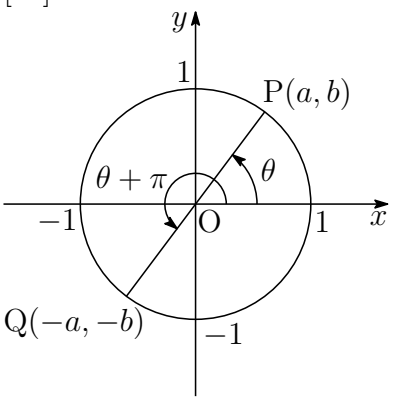
(1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $\cos\left(-\dfrac{13}{6}\pi\right)$　　(3) $\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)$

下の図［1］と［2］からは，次の等式が成り立つことがわかる．

3 $\begin{cases} \boldsymbol{\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta} \\ \boldsymbol{\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta} \\ \boldsymbol{\tan(\theta+\pi) = \tan\theta} \end{cases}$

4 $\begin{cases} \boldsymbol{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta} \\ \boldsymbol{\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta} \\ \boldsymbol{\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta}} \end{cases}$

［1］



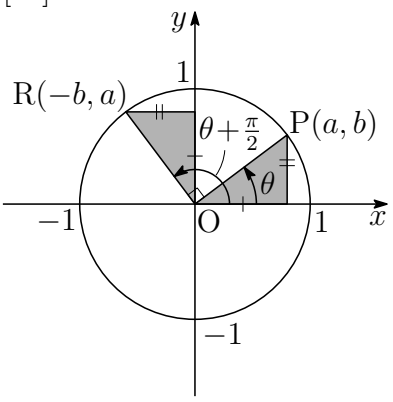
$a = \cos\theta$，$b = \sin\theta$ から

$\sin(\theta+\pi) = -b = -\sin\theta$

$\cos(\theta+\pi) = -a = -\cos\theta$

など

［2］



$a = \cos\theta$，$b = \sin\theta$ から

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = a = \cos\theta$

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -b = -\sin\theta$

など

4.1.5　三角関数の応用

三角関数を含む方程式・不等式を，単位円や関数の周期性，グラフなどを利用して解いてみよう．また，三角関数を含む関数について，その最大値，最小値を求めてみよう．

A 》三角関数を含む方程式

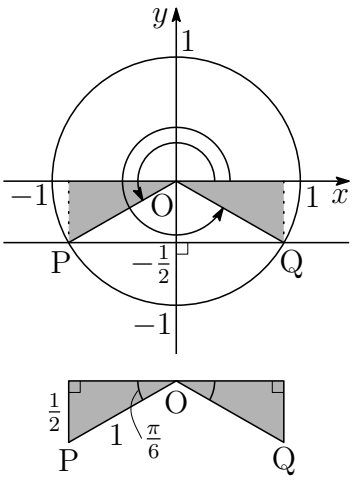
例 4.9　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $2\sin\theta + 1 = 0$ を解く．　S

方程式を変形すると

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

右の図のように，直線 $y = -\dfrac{1}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である．
$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$



練習 4.17 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け． 解

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $2\cos\theta + 1 = 0$

(3) $\sin\theta + 1 = 0$

例 4.9 で，θ の範囲を制限しなければ，178 ページの性質 **1** により，解は次のようになる．

$$\theta = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi,\ \theta = \frac{11}{6}\pi + 2n\pi \qquad (n \text{ は整数})$$

練習 4.18 次の方程式を解け. 解

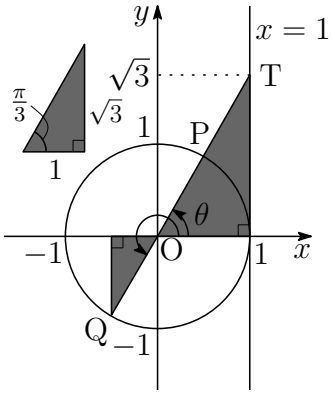
(1) $2\sin\theta = -\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta = -1$

例 4.10 $\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi}$ **のとき，方程式** $\boldsymbol{\tan\theta = \sqrt{3}}$ **を解く．** S

右の図のように，点 $\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である．$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$



例 4.10 で θ の範囲に制限がないとき，解は次のようになる．

$$\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

← $\tan\theta$ は周期 π の周期関数

練習 4.19 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\tan\theta = -\sqrt{3}$ を解け．また，θ の範囲に制限がないときの解を求めよ． 解

応用例題 4.1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ を解け． S

考え方》 $\theta + \dfrac{\pi}{3} = t$ とおくと $\sin t = \dfrac{1}{2}$ である．t の値の範囲に注意する．

解答 $\theta + \dfrac{\pi}{3} = t$ とおくと　$\sin t = \dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

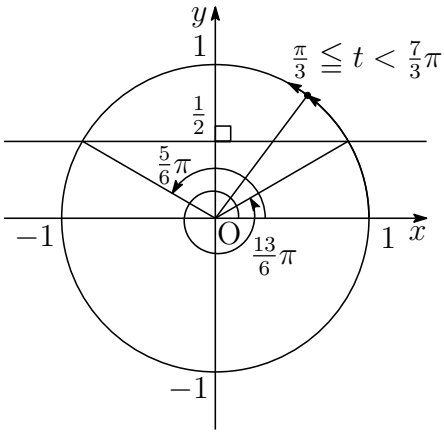
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{3} \leqq t < \dfrac{7}{3}\pi$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$t = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

すなわち　$\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$

よって　$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{11}{6}\pi$



練習 4.20 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け． 解

(1) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B 》三角関数を含む不等式

例題 4.5 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解け． S

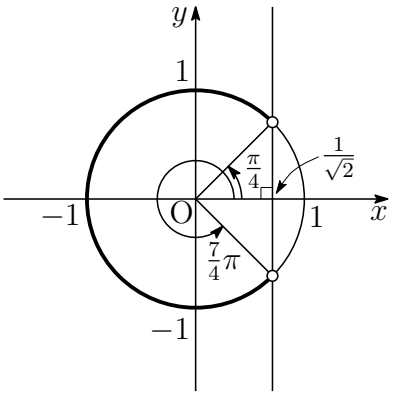
[三角関数を含む不等式]

解答 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$$

よって，不等式の解は，右の図から

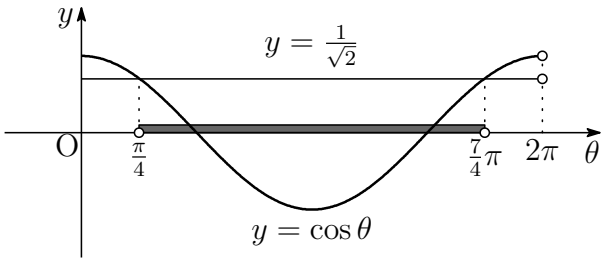
$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7}{4}\pi$$



補足 $\cos\theta$ の値は，θ の動径と単位円の交点の x 座標に等しいから，その x 座標が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より小さくなる θ の範囲を求めればよい．

例題 4.5 は，関数のグラフを利用して解くこともできる．

右の図において，$y = \cos\theta$ のグラフが直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の下側にある θ の値の範囲を求めてもよい．



なお，$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の解は

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\quad \frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$$

練習 4.21 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．解

(1) $\cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

(2) $\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\sin\theta < \dfrac{1}{2}$

例題 4.6 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta > 1$ を解け． S

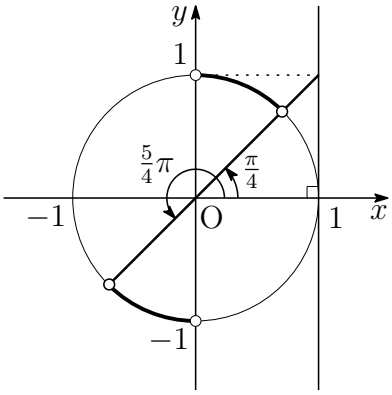
[三角関数を含む不等式]

解答 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = 1$ となる θ は

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

よって，不等式の解は，右の図から

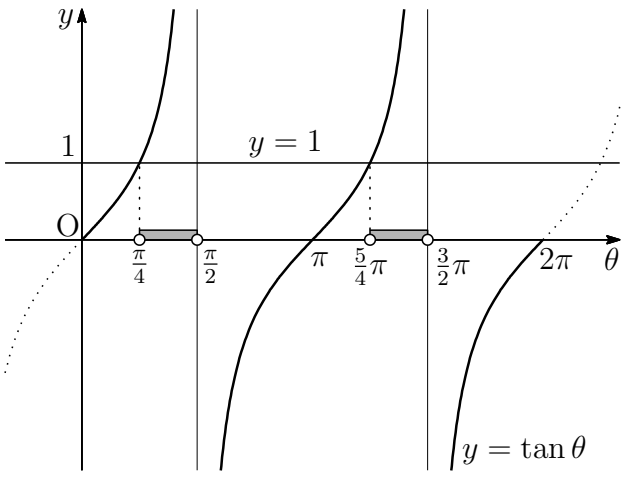
$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2},\quad \frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$$



補足 $\tan\theta$ の値は θ の動径を延長した直線 $x = 1$ との交点の y 座標に等しいから，その y 座標が 1 より大きくなる θ の値の範囲を求めている．$\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $\theta \neq \frac{3}{2}\pi$ であることに注意する．

例題 4.6 は，関数のグラフを利用して解くこともできる．

右の図において，$y = \tan\theta$ のグラフが，直線 $y = 1$ より上側にある θ の値の範囲を求めてもよい．



なお，$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta \leqq 1$ の解は

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{5}{4}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

練習 4.22 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta \leqq \sqrt{3}$ を解け． 解

C 》三角関数を含む関数の最大値，最小値

応用例題 4.2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．　S

考え方 》 $\sin\theta = t$ とおくと，y は t の 2 次式で表される．このとき，t の値の範囲に注意する．　[三角関数を含む関数の最大値・最小値]

解答　$\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$$-1 \leqq t \leqq 1 \quad \cdots ①$$　← $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$

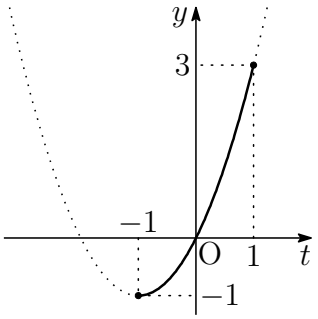
y を t で表すと　$y = t^2 + 2t$

すなわち　$y = (t+1)^2 - 1$

よって，① の範囲において，y は

$t = 1$ で　最大値 3 をとり，

$t = -1$ で　最小値 -1 をとる．



また，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$$t = 1 \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad t = -1 \text{ のとき } \theta = \frac{3}{2}\pi$$

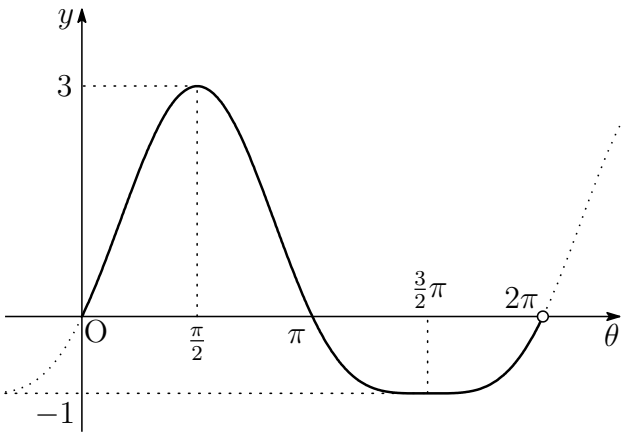
したがって，この関数は

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ で最大値 3 をとり，} \theta = \frac{3}{2}\pi \text{ で最小値 } -1 \text{ をとる．}$$

補足　右の図は，$0 \leqq \theta < \pi$ における，関数

$$y = \sin^2\theta + 2\sin\theta$$

のグラフの概形である．



練習 4.23 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数

$$y = \cos^2\theta - \cos\theta$$

の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ． 解

4.1.6　問題

問題 4.1　$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．　解　　→ p.165 例題 4.1

問題 4.2　次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ．　解　→ p.172〜176

(1)　$y = -\tan\theta$

(2)　$y = 3\cos\dfrac{\theta}{2}$

(3)　$y = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(4)　$y = \sin 3\theta + 1$

問題 4.3 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け． 解 → p.180〜187

(1) $2\sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$

(2) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

(3) $2\sin\theta + \sqrt{3} < 0$

(4) $\tan\theta + \sqrt{3} \leqq 0$

(5) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

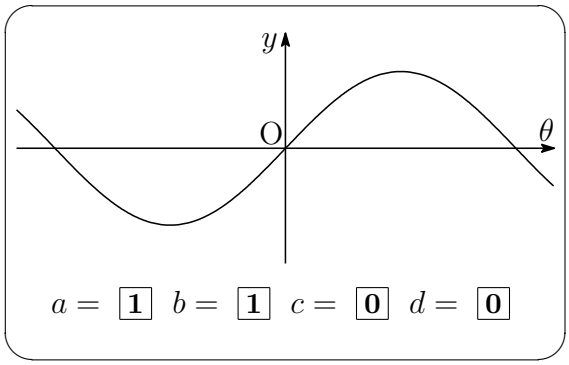
(6) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

問題 4.4 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta - \cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ． 解

→ p.188 応用例題 4.2

問題 4.5

関数 $f(\theta) = a\sin(b\theta+c)+d$ について，a, b, c, d の値に応じた $y = f(\theta)$ のグラフが表示されるコンピュータソフトがある．いま，$a = b = 1$, $c = d = 0$ として，$y = \sin\theta$ のグラフが表示されている．この状態から，a, b, c, d の値のうち，いずれか 1 つの値だけ変化させたとき，次の ①〜③ の変化が起こりうるのは，どの値を変化させたときか，それぞれすべて答えよ． 解



$a =$ **1**　$b =$ **1**　$c =$ **0**　$d =$ **0**

① 関数 $f(\theta)$ の周期が変わった．

② 関数 $f(\theta)$ の最大値と最小値が変わった．

③ 関数 $f(\theta)$ が奇関数から偶関数に変わった．

4.2 加法定理

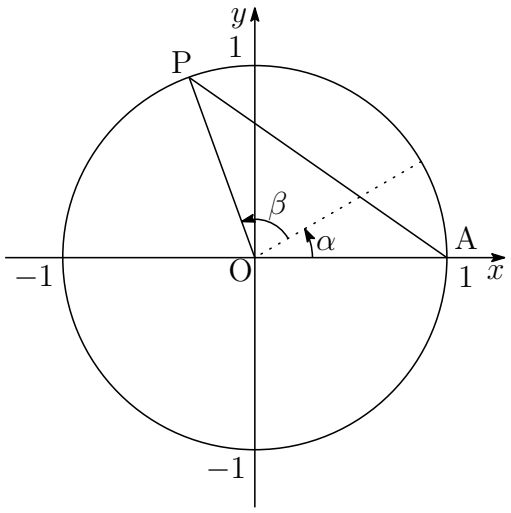
4.2.1 加法定理

2 つの角 α，β の正弦・余弦を用いて，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ などを表してみよう．また，α，β の正接を用いて，$\tan(\alpha+\beta)$ などを表してみよう．

A 》正弦・余弦の加法定理

次の等式を証明しよう．

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$



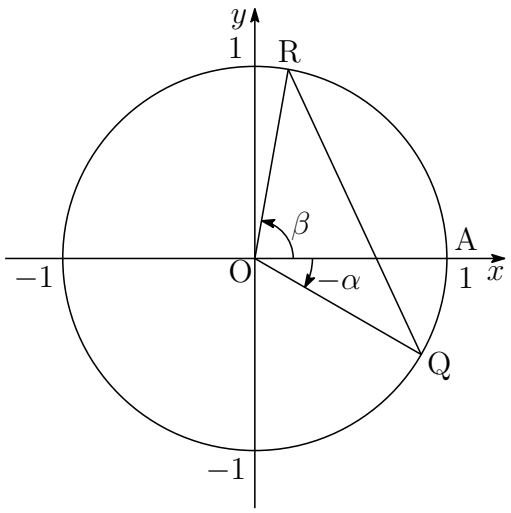
【証明】右の図のように，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を $\alpha+\beta$ とする．
A，P の座標はそれぞれ

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\quad \mathrm{P}(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$$

である．2 点間の距離の公式により

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=\{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)\\&=2-2\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

次に 2 点 A，P を，原点 O を中心に $-\alpha$ だけ回転した位置にある点を，それぞれ Q，R とすると，Q，R の座標は



$$\mathrm{Q}(\cos\alpha,-\sin\alpha),\quad \mathrm{R}(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

である．2 点間の距離の公式により

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2&=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta+\sin\alpha)^2\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

$\mathrm{AP}=\mathrm{QR}$ より $\mathrm{AP}^2=\mathrm{QR}^2$ であるから

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

よって　　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

正弦・余弦について，次の**加法定理**が成り立つ．

正弦・余弦の加法定理

1　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

4　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

前ページでは等式 **3** を証明した．

【4 の証明】等式 **3** で β を $-\beta$ におき換えると

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

178 ページの **2** より，$\cos(-\beta)=\cos\beta$，$\sin(-\beta)=-\sin\beta$ であるから

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

【1 の証明】等式 **3** で α を $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ に置き換えると

$$\cos\left\{\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\beta\right\}=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta$$

179 ページの **4** より

$$\cos\left\{\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\beta\right\}=\cos\left\{(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\right\}=-\sin(\alpha+\beta),$$
$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha,\quad \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$$

であるから　$-\sin(\alpha+\beta)=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

すなわち　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

等式 **1** で β を $-\beta$ におき換えると，等式 **2** が得られる．

深化 4.2 178, 179 ページの等式のうち，正弦と余弦に関する等式について，等式が成り立つことを，加法定理を用いて確かめてみよう． 解

例 4.11 $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$ S

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

練習 4.24 加法定理を用いて，$\cos 75^\circ$ の値を求めよ． 解

練習 4.25 $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$ であることを用いて，$\sin \dfrac{\pi}{12}$，$\cos \dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ． 解

例題 4.7 α の動径が第 3 象限，β の動径が第 4 象限にあり，$\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta = \dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ． S

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\cos(\alpha-\beta)$

解答 α の動径が第 3 象限にあるから　$\cos\alpha < 0$

β の動径が第 4 象限にあるから　$\sin\beta < 0$

よって　$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2} = -\dfrac{4}{5}$

$$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

(1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{4}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = 0$$

(2) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{25}$$

練習 4.26 α の動径が第 2 象限，β の動径が第 1 象限にあり，$\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$，$\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin(\alpha-\beta)$ と $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ． 解

B 》正接の加法定理

正弦・余弦の加法定理から，正接の加法定理が得られる．

正接の加法定理

5　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

6　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

証明　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$　であるから

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

右辺の分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割って変形すると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

公式 **5** で β を $-\beta$ におきかえると，公式 **6** が得られる．　証終

例 4.12　$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$　S

$$=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

練習 4.27　加法定理を用いて，$\tan 105^\circ$ の値を求めよ．　解

練習 4.28　$\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ であることを用いて，$\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．　解

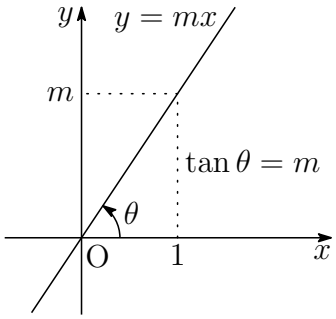
C》2 直線のなす角

右の図のように，x 軸の正の部分から直線 $y=mx$ まで測った角を θ とすると，

$$\tan\theta = m$$

である．

このことと正接の加法定理を利用して，2 直線のなす角を求めてみよう．

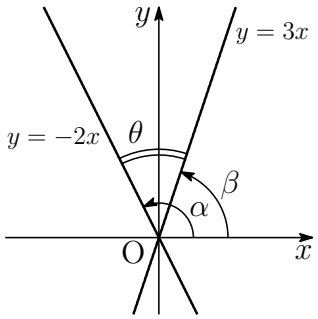


例題 4.8 2 直線 $y=-2x$，$y=3x$ の作る鋭角を求めよ．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする． S

解答 右の図のように，2 直線

$$y=-2x, \quad y=3x$$

と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，$\theta=\alpha-\beta$ である．



$$\tan\alpha=-2, \quad \tan\beta=3$$

であるから

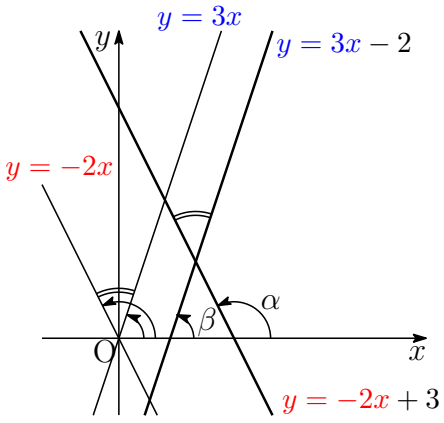
$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-2-3}{1+(-2)\cdot 3}=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

一般に，2 直線のなす角は，それぞれと平行で原点を通る 2 直線のなす角に等しい．たとえば，2 直線

$$y=-2x+3, \quad y=3x-2$$

のなす角は，例題 4.8 に等しい．また，2 直線 $y=-2x+3$，$y=3x-2$ と x 軸の正の向きとのなす角は，それぞれ例題 4.8 の α，β に等しい．



練習 4.29 2 直線 $y=2x-1$，$y=\dfrac{1}{3}x+1$ のなす角 θ を求めよ．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする． 解

研究

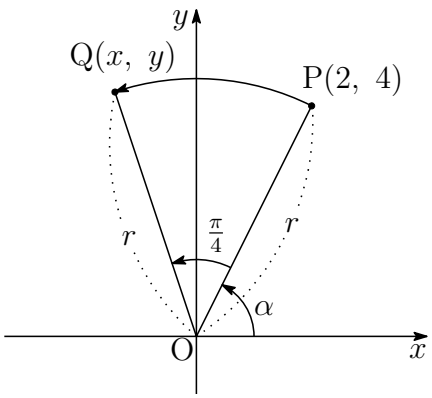
加法定理と点の回転

座標平面上を，原点 O を中心として一定の角度だけ回転した位置にある点の座標を求めてみよう．

Ex 4.1 点 $\mathrm{P}(2,\ 4)$ を，原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した位置にある点 Q の座標を求める．

$\mathrm{OP} = r$，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると

$$2 = r\cos\alpha, \quad 4 = r\sin\alpha$$



点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = r\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y = r\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

よって，加法定理により

$$\begin{aligned} x &= r\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4} \\ &= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \\ y &= r\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} \\ &= 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

したがって，点 Q の座標は　　$(-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$

演習 4.1 点 $\mathrm{P}(4,\ 3)$ を，原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した位置にある点 Q の座標を求めよ．解

4.2.2 加法定理の応用

正弦・余弦の加法定理を使って，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ から $\sin 2\alpha$ や $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ などを求める公式を導こう．

A 》2 倍角の公式

194 ページの等式 **1**, **3**，196 ページの等式 **5** において，β を α におき換えると，次の **2 倍角の公式** が得られる．

2 倍角の公式

$$\boldsymbol{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \\ \boldsymbol{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha} \\ \boldsymbol{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1} \end{cases}$$

$\leftarrow \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$
$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$
を代入している．

$$\boldsymbol{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

例 4.13 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$ の値を求める． S

$\cos\alpha > 0$ であるから　　$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}$

よって　　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{24}{25}$

練習 4.30 $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ． 解

(1) $\sin 2\alpha$　　(2) $\cos 2\alpha$　　(3) $\tan 2\alpha$

練習 4.31 $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ であることを用いて，次の等式を証明せよ． 解

(1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(2) $\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$

B》半角の公式

2 倍角の公式 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$，$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ から

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

これから $\tan^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

ここで，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ におき換えると，次の**半角の公式**が得られる．

半角の公式

$$\boldsymbol{\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \boldsymbol{\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

例 4.14 半角の公式を使って，$\cos\dfrac{\pi}{8}$ の値を求める． S

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\dfrac{\pi}{8} > 0$ より $\quad \cos\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

練習 4.32 半角の公式を使って，次の値を求めよ． 解

(1) $\sin\dfrac{\pi}{8}$

(2) $\sin\dfrac{3}{8}\pi$

(3) $\cos\dfrac{3}{8}\pi$

練習 4.33 $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ． 解

(1) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$　　(2) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$　　(3) $\tan\dfrac{\alpha}{2}$

C》三角関数を含む方程式，不等式

応用例題 4.3 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け． S

(1) $\cos 2\theta - \cos\theta = 0$ (2) $\cos 2\theta - \cos\theta < 0$

考え方》 $\cos\theta$ があるから，2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を用いると，$\cos\theta$ の 2 次方程式，2 次不等式が得られる．

解答 (1) 方程式を変形すると $(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta = 0$

整理すると $2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$

すなわち $(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$

よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ または $\cos\theta = 1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

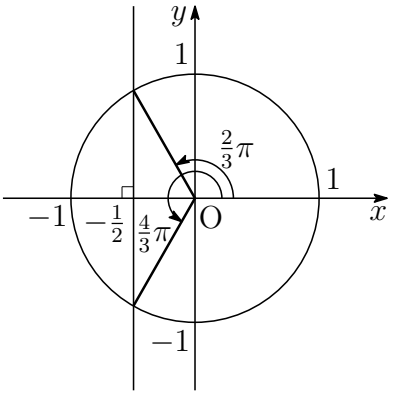
$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ から

$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\quad \frac{4}{3}\pi$$

$\cos\theta = 1$ から

$$\theta = 0$$

したがって $\theta = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$



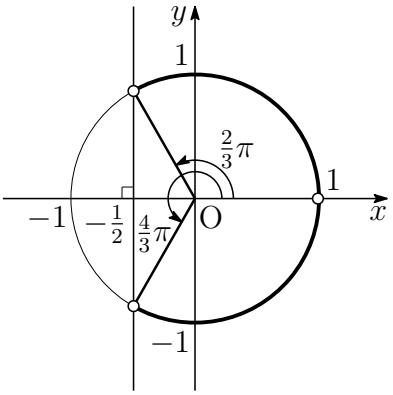
(2) (1) より，不等式を変形すると

$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) < 0$$

よって $-\dfrac{1}{2} < \cos\theta < 1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$$0 < \theta < \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$$



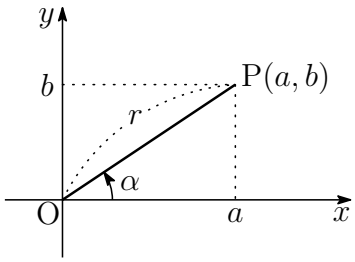
練習 4.34 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け． 解

(1) $\cos 2\theta + \sin\theta = 1$

(2) $\cos 2\theta + \sin\theta > 1$

D》三角関数の合成

右の図のように，座標が $(a,\ b)$ である点を P とし，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とする．また，線分 OP の長さを r とすると



$$a = r\cos\alpha,\quad b = r\sin\alpha$$

よって
$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta \\ &= r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \\ &= r\sin(\theta+\alpha), \\ a\cos\theta + b\sin\theta &= r\cos\alpha\cos\theta + r\sin\alpha\sin\theta \\ &= r(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) \\ &= r\cos(\theta-\alpha) \end{aligned}$$

$a\sin\theta + b\cos\theta$ のこのような変形を，**三角関数の合成**という．
この $r,\ \alpha$ を求めるには，上で述べたように，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとるとよい．

ここで，$r = \sqrt{a^2+b^2}$ であるから，次のことが成り立つ．

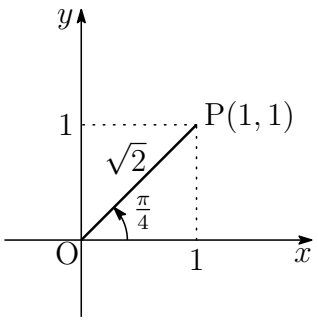
三角関数の合成

$$\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$
$$\boldsymbol{a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)}$$
$$\text{ただし}\quad \boldsymbol{\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

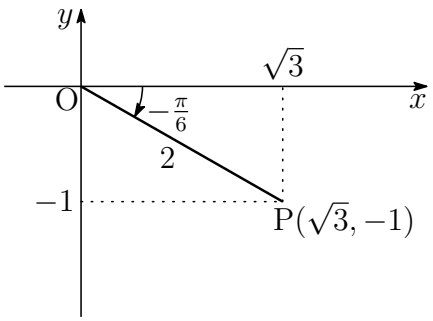
例 4.15 (1) $\sin\theta+\cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$,　$\cos\theta+\sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ S

(2) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta = 2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$,　$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta = 2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

(1)



(2)



補足 cos への合成は，sin の合成および 179 ページの **4** を用いても得られる．

$$\begin{aligned}\cos\theta+\sin\theta&=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\sin\left\{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\\\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta&=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\\&=2\sin\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

練習 4.35 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする．

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$　　解

応用例題 4.4 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け． S

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

考え方》 左辺の三角関数を合成して，$r\sin(x+\alpha)$ の形に変形する．
次に，$x+\alpha$ の範囲に注意して，$\sin(x+\alpha)$ の値から $x+\alpha$ を求める．
184 ページの応用例題 4.1 を参照する．

解答 左辺の三角関数を合成すると

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$$ ← 例 4.15(2) 参照

よって $$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ①$$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき

$$-\frac{\pi}{6} \leqq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

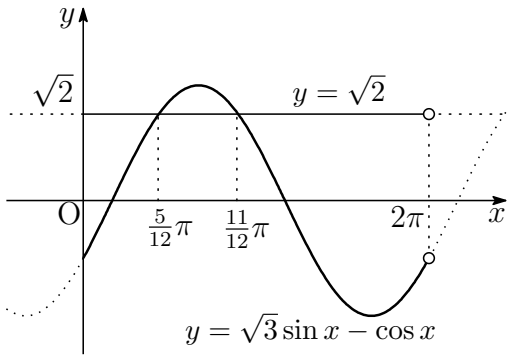
$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \quad \text{または} \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi$$

したがって $$x = \frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

応用例題 4.4 で求めた方程式の解は，$0 \leqq x < 2\pi$ における関数

$$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$$
$$y = \sqrt{2}$$

のグラフの交点の x 座標である．



練習 4.36 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け． 解

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$$

応用例題 4.5 次の関数の最大値，最小値，およびそのときの x の値を求めよ． S

$$y = \sin x + \cos x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

考え方 》 三角関数を合成して，$r\sin(x+\alpha)$ の形にする．

解答 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから ← 例 4.15(1) 参照

$$y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ であるから

$$-1 \leqq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 1 \quad \text{よって} \quad -\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$$

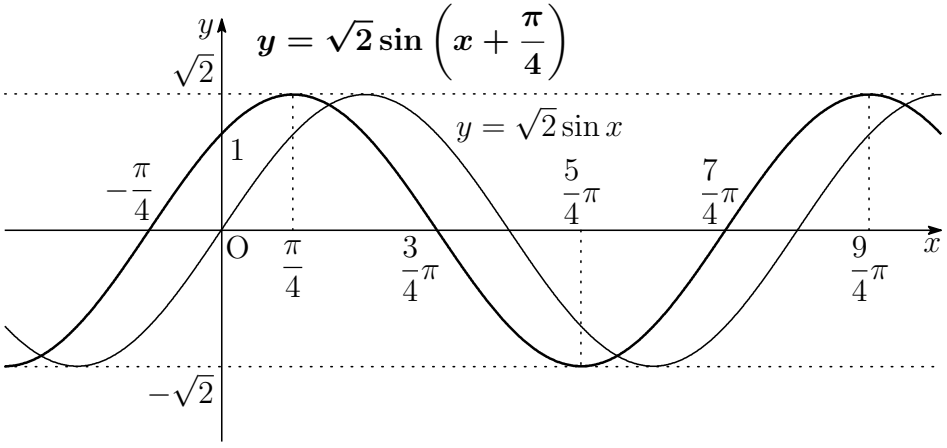
$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ のとき， $x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ から $x = \dfrac{\pi}{4}$

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ のとき， $x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi$ から $x = \dfrac{5}{4}\pi$

よって，この関数は

$x = \dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとり，$x = \dfrac{5}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$ をとる．

関数 $y = \sin x + \cos x$ すなわち $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，次のようになる．



上のグラフは，$y = \sqrt{2}\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである．

練習 4.37 次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ． 解

$$y = \sqrt{3}\sin x + \cos x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

深化 4.3 応用例題 4.5 について，次の解答が誤りである理由を説明しよう． 解

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1, \quad -1 \leqq \cos x \leqq 1 \text{ より} \quad -2 \leqq \sin x + \cos x \leqq 2$$

よって　　y の最大値は 2，最小値は -2

発展

和と積の公式

三角関数において，正弦，余弦の積を和や差に変形する次の公式が成り立つ．これらは，右辺を計算して左辺を導くことで得られる．

1 $\boldsymbol{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}}$

2 $\boldsymbol{\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}}$

3 $\boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}}$

4 $\boldsymbol{\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}}$

上の公式**1**〜**4**において，

$$\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B \text{ とおくと} \qquad \alpha=\frac{A+B}{2},\ \beta=\frac{A-B}{2}$$

となるから，正弦，余弦の和や差を積に変形する次の公式が得られる．

5 $\boldsymbol{\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$

6 $\boldsymbol{\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$

7 $\boldsymbol{\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$

8 $\boldsymbol{\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$

Ex 4.2 (1) $\sin 3\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\{\sin(3\theta+\theta)+\sin(3\theta-\theta)\}$

$$=\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)$$

(2) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$

$$=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

4.2.3　問題

問題 4.6　α, β の動径がいずれも第 4 象限にあり，$\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ．　解　→ p.195 例題 4.7

(1)　$\sin(\alpha - \beta)$　　(2)　$\cos(\alpha + \beta)$

問題 4.7　直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 1$ とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ である直線で，原点を通るものの方程式を求めよ．　解　→ p.197

問題 4.8 次の等式を証明せよ． 解 → p.199

(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$

(2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$

問題 4.9 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け． 解 → p.203 応用例題 4.3

(1) $\sin 2\theta=\sin\theta$

(2) $\cos 2\theta<\sin\theta+1$

問題 4.10 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け． 解

→ p.207 応用例題 4.4

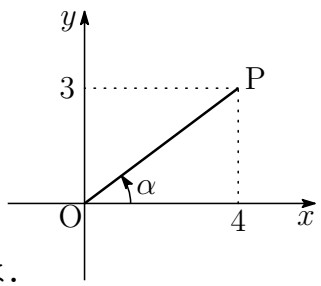
(1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x \leqq \sqrt{3}$

問題 4.11 次の問いに答えよ． 解

(1) 右の図のように，座標が $(4,\ 3)$ である点を P とし，動径 OP と x 軸の向きとのなす角を α とする．このとき，$\cos\alpha$, $\sin\alpha$ の値を求めよ．

(2) $4\sin x + 3\cos x = r\sin(x+\alpha)$ を満たす r の値を求めよ．

(3) 関数 $y = 4\sin x + 3\cos x$ の最大値と最小値を求めよ．



4.3 章末問題

4.3.1 章末問題 A

章末 4.1 次の値を求めよ． 解

(1) $\sin\dfrac{16}{3}\pi$ (2) $\cos\dfrac{7}{2}\pi$ (3) $\tan\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)$

章末 4.2 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，θ は第 4 象限の角であるとする． 解

(1) $\sin\theta-\cos\theta$ (2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

章末 4.3 次の等式を証明せよ． 解

(1) $\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin^2\theta}$

(2) $\dfrac{1}{\tan\theta}-\tan\theta=\dfrac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

章末 4.4 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け． 解

(1) $\cos 2x = \sin x$

(2) $\cos 2x < \sin x$

章末 4.5 次の等式が成り立つことを示せ．ただし，加法定理を用いてよい． 解

(1) $\begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$

章末 4.6 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + 2\sin\theta + \dfrac{1}{2}$ の最小値と，そのときの θ の値を求めよ． 解

章末 4.7 関数 $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ について，次のものを求めよ． 解

(1) 関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(2) $y = 0$ となる x の値を求めよ．

(3) $y \leqq 0$ となる x の値の範囲を求めよ．

4.3.2　章末問題 B

章末 4.8 次の値を求めよ．解

(1) $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$ の値

(2) $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=4$，$\tan\gamma=13$ のとき，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ の値

章末 4.9 次の等式を証明せよ．解

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

章末 4.10 O を原点とする座標平面上に点 A(2, 6) と第 2 象限の点 B がある．△OAB が ∠AOB を頂角とする二等辺三角形で $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$ であるとき，点 B の座標を求めよ． 解

→ p.198 研究

章末 4.11 次の関数のグラフをかけ．また，その周期を求めよ． 解

(1) $y = \sin x \cos x$

(2) $y = \cos^2 x$

章末 4.12 次の関数の最大値，最小値を求めよ． 解

$$y = \sin x \cos x - \sin^2 x + \frac{1}{2} \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

章末 4.13 関数 $y = 2\sin x \cos x + \sin x + \cos x$ について，次の問いに答えよ． 解

(1) $t = \sin x + \cos x$ として，y を t の関数で表せ．

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) y の最大値と最小値を求めよ．

ヒント

8　(1) $\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$ の値が必要．　(2) $\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}$

10　点 A を，原点 O を中心として回転した点が B であると考える．

11　2 倍角の公式，半角の公式を用いる．

12　2 倍角の公式，半角の公式と三角関数の合成を用いる．

第 5 章　指数関数と対数関数

5.1　指数関数

5.1.1　指数の拡張

a の累乗 a^n については，指数 n が正の整数の場合を学んでいる．ここでは，指数の範囲を整数，有理数，実数と順に拡張しよう．

$$\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{a \text{ が } n \text{ 個}} = a^{n \leftarrow (\text{指数})}$$

A 》整数の指数

次の指数法則が成り立つことは，すでに学んでいる．

m，n を正の整数とする．

1　$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$　　**2**　$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　　**3**　$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

$a \neq 0$ とする．このとき，指数が 0 や負の整数である場合にも，上の指数法則が成り立つように，a の累乗の意味を定めよう．

指数が 0 や負の整数の場合にも **1** が成り立つとすると，たとえば

$$a^2\boldsymbol{a^0} = a^{2+0} = a^2 \qquad \text{よって} \quad \boldsymbol{a^0} = \frac{a^2}{a^2} = \boldsymbol{1}$$

$$a^2\boldsymbol{a^{-2}} = a^{2+(-2)} = a^0 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a^{-2}} = \boldsymbol{\frac{1}{a^2}}$$

そこで，指数が 0 や負の整数の場合の累乗を，次のように定める．

$\boldsymbol{a^0}$，$\boldsymbol{a^{-n}}$ の定義

$a \neq 0$ で，n を正の整数とするとき

$$\boldsymbol{a^0 = 1}, \qquad \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad \text{とくに} \quad \boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

例 5.1 (1)　$3^0 = 1$　S

(2)　$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

練習 5.1 次の値を求めよ．解

(1)　4^0　　(2)　$(-5)^0$　　(3)　3^{-1}　　(4)　10^{-2}　　(5)　$(-2)^{-3}$

指数が 0 や負の整数である場合の累乗の定義から，$a \neq 0,\ b \neq 0$ のとき，次のことがいえる．

$$a^5 a^{-2} = a^5 \times \frac{1}{a^2} = a^3 = a^{5+(-2)}$$

$$\frac{a^5}{a^{-2}} = a^5 \div \frac{1}{a^2} = a^5 a^2 = a^{5+2} = a^{5-(-2)}$$

$$(a^5)^{-2} = \frac{1}{(a^5)^2} = \frac{1}{a^{5\times 2}} = a^{-(5\times 2)} = a^{5\times(-2)}$$

$$(ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{b^2} = a^{-2} b^{-2}$$

一般に，指数が整数の場合に，次の指数法則が成り立つ．

指数法則 (指数が整数)

$a \neq 0$，$b \neq 0$，m，n を整数とする．

1　$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$　　**2**　$\boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

3　$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　　**4**　$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

例 5.2　$a^4 a^{-5} = a^{4+(-5)} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$,　$\dfrac{a^3}{a^{-4}} = a^{3-(-4)} = a^7$　S

$$(a^{-1}b^3)^{-2} = (a^{-1})^{-2}(b^3)^{-2} = a^{(-1)\times(-2)} b^{3\times(-2)} = a^2 b^{-6} = \frac{a^2}{b^6}$$

練習 5.2 次の式を計算せよ．解

(1)　$a^5 a^{-2}$　　(2)　$\dfrac{a^{-3}}{a^2}$　　(3)　$(a^{-4})^{-1}$　　(4)　$(a^{-2}b)^3$

B 》累乗根

n を正の整数とするとき，n 乗すると a になる数を a の **n 乗根**という．すなわち，方程式 $x^n = a$ の解が a の n 乗根である．また，a の 2 乗根，3 乗根，4 乗根，$\cdots$ をまとめて a の**累乗根**という．

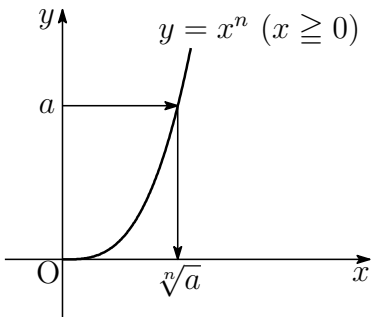
例 5.3 (1) $2^3 = 8$ であるから，
2 は 8 の 3 乗根である．
(2) $3^4 = (-3)^4 = 81$ であるから，
3 と -3 は 81 の 4 乗根である．

S

□ ^{n} = ○
□ は ○ の n 乗根

正の数 a の n 乗根のうち，正であるもの，すなわち a の正の n 乗根について考える．

関数 $y = x^n$ $(x \geqq 0)$ のグラフの概形は，右の図のようになる．グラフによると，正の数 a に対して，$x^n = a$ を満たす正の数 x がただ 1 つあることがわかる．この正の数 x を $\sqrt[n]{a}$ で表す．
また，$\sqrt[n]{0} = 0$ である．



注意 $\sqrt[n]{a}$ は「n 乗根 a」と読む．
また，$\sqrt[2]{a}$ は，ふつう $\sqrt{a}$ と書く．

例 5.4 (1) $2^3 = 8$ であるから $\sqrt[3]{8} = 2$
(2) $3^4 = 81$ であるから $\sqrt[4]{81} = 3$

S

補 ← □ ^{n} = ○ $\iff$ $\sqrt[n]{○}$ = □

$x > 0,\ a > 0$ のとき，$x^n = a \iff x = \sqrt[n]{a}$ であるから

$$\sqrt[n]{a} = x > 0, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a, \quad x = \sqrt[n]{x^n}$$

したがって，次が成立する．

$a > 0$ のとき $\quad \sqrt[n]{a} > 0, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad \sqrt[n]{a^n} = a$

補足 例 5.4 は次のように計算できる．

(1) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ (2) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$ $\leftarrow \sqrt[n]{○^n} = ○$

練習 5.3 次の値を求めよ． 解

(1) $\sqrt[3]{1}$ (2) $\sqrt[3]{27}$ (3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$

$\sqrt[n]{a}$ の定義から，累乗根について，次の性質が得られる．

累乗根の性質

$a > 0$，$b > 0$ で，m，n を整数とする．

1 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　**2** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　**3** $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

4 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$　　**5** $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

証明 $A = \sqrt[n]{a}$, $B = \sqrt[n]{b}$ とおくと　$a = A^n$, $b = B^n$

1　$(AB)^n = A^nB^n = ab$ より　$\sqrt[n]{ab} = AB = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

2　$\left(\dfrac{A}{B}\right)^n = \dfrac{A^n}{B^n} = \dfrac{a}{b}$ より　$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3　$(\sqrt[n]{a})^m = A^m = \sqrt[n]{(A^m)^n} = \sqrt[n]{(A^n)^m} = \sqrt[n]{a^m}$　　$\leftarrow \bigcirc = \sqrt[n]{\bigcirc^n}$

4　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{A} = C$ とおくと，$A = C^m$ より

$$a = A^n = (C^m)^n = C^{mn}$$

したがって　$C = \sqrt[mn]{a}$　よって　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

5　$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[np]{(A^n)^{mp}} = \sqrt[np]{(A^m)^{np}} = A^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$　　$\leftarrow$ **3** より

証終

深化 5.1 累乗根の性質 **1** を用いて，累乗根の性質 **3** が成り立つことを説明しよう．　解

例 5.5　(1)　$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \times 9} = \sqrt[3]{3^3} = 3$　　S

(2)　$\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(3)　$\sqrt[5]{\sqrt{10}} = \sqrt[5]{\sqrt[2]{10}} = \sqrt[5\times 2]{10} = \sqrt[10]{10}$

(4)　$\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt[2\times 4]{2^{1\times 4}} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$

練習 5.4 次の計算をせよ．　解

(1)　$\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}$

(3)　$(\sqrt[4]{5})^3$　　(4)　$\sqrt[3]{\sqrt{27}}$

C》有理数の指数

$a>0$ とする．指数が有理数の場合にも指数法則が成り立つとすると，

たとえば $(a^{\frac{2}{3}})^3 = a^{\frac{2}{3}\times 3} = a^2$ よって $\boldsymbol{a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}}$

$a^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^0 = 1$ よって $\boldsymbol{a^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}}}$

指数が有理数の場合の累乗の意味を，次のように定める．

有理数の指数

$a>0$ で，m，n を正の整数，r を正の有理数とする．

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}} \quad \text{とくに} \quad \boldsymbol{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}, \qquad \boldsymbol{a^{-r} = \frac{1}{a^r}}$$

例 5.6 (1) $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$ S

(2) $27^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{1}{3}$

練習 5.5 次の値を求めよ． 解

(1) $9^{\frac{1}{2}}$ (2) $16^{\frac{3}{4}}$ (3) $125^{-\frac{2}{3}}$

指数が有理数の場合にも，次の指数法則が成り立つ．

指数法則 (指数が有理数)

$a>0$，$b>0$，r，s を有理数とする．

1 $\boldsymbol{a^r \times a^s = a^{r+s}}$ **2** $\boldsymbol{\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}}$

3 $\boldsymbol{(a^r)^s = a^{rs}}$ **4** $\boldsymbol{(ab)^r = a^r b^r}$

$a>0$ のとき，たとえば，$r=\dfrac{2}{3}$，$s=\dfrac{1}{2}$ の場合について，**1**，**3** が成り立つことが，次のようにして確かめられる．

$$a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{6}}a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^4}\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a^{4+3}} = a^{\frac{4+3}{6}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$$

$$(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}$$

例 5.7 (1) $5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} = 5^2 = 25$ S

(2) $(4^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

例題 5.1 次の計算をせよ． S

(1) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{6}}$　　(2) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2}$

解答 (1) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\times\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

(2) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2^1 = 2$

練習 5.6 次の計算をせよ． 解

(1) $2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{5}{6}}$　　(2) $3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

(3) $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[8]{5^3} \div \sqrt{5}$　　(4) $\sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4} \times \sqrt[4]{4}$

$a > 0$ のとき，a^r の指数 r は実数まで拡張することができる．たとえば，$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ に対して，累乗の列

$$2^{1.4},\quad 2^{1.41},\quad 2^{1.414},\quad 2^{1.4142},\quad \cdots$$

は，次第に一定の値に近づく．その値を $2^{\sqrt{2}}$ と定めるのである．

前ページの指数法則は，r，s が実数のときにも成り立つ．

研究

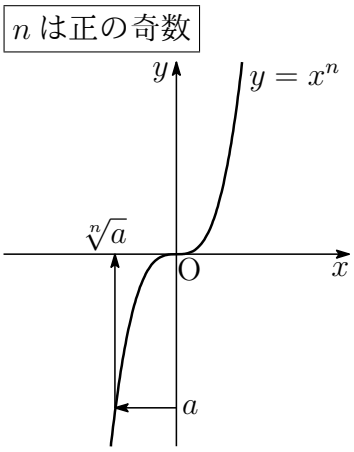
負の数の n 乗根

n が正の奇数のときは，負の数 a に対して，$x^n = a$ を満たす実数 x がただ 1 つある．この数 x も $\sqrt[n]{a}$ で表す．

たとえば　$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$

n が正の偶数のときは，常に $x^n \geqq 0$ であるから，負の数 a に対して，$x^n = a$ を満たす実数 x は存在しない．



5.1.2 指数関数

a を 1 と異なる正の定数とするとき，$y = a^x$ は x の関数である．この関数を，a を**底**とする x の**指数関数**という．指数関数の特徴を調べよう．

A》 指数関数 $y = a^x$ のグラフ

2 を底する指数関数 $y = 2^x$ のグラフを調べてみよう．

たとえば，x が -2，-0.5，1.5 のときの 2^x の値は，次のようになる．

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

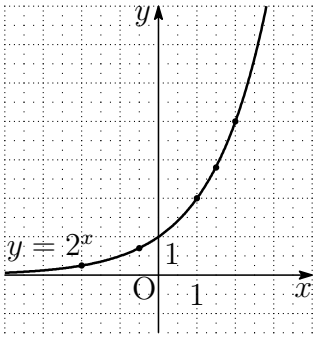
$$2^{-0.5} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.71$$

$$2^{1.5} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.83$$

練習 5.7 上の計算にならって，下の表の空らんをうめよ． 解

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	0.25			0.71			2	2.83	4

座標平面上で，上の表の x，y を座標にもつ点 $(x,\ y)$ は，右の図のような曲線上にある．



この曲線が指数関数

$$y = 2^x$$

のグラフである．

次に，$\frac{1}{2}$ を底とする指数関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを調べてみよう．

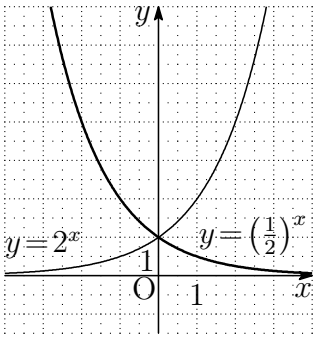
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

であるから，指数関数

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

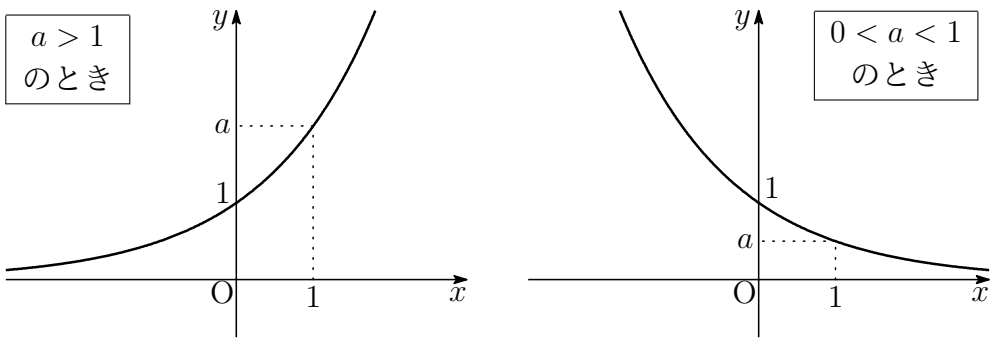
は，$y = 2^{-x}$ と同じである．

したがって，$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y = 2^x$ のグラフと y 軸に関して対称であり，右の図のようになる．



補足 一般に，関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = f(-x)$ のグラフは，y 軸に関して対称である．

一般に，指数関数 $y = a^x$ のグラフは，下の図のようになる．[指数関数のグラフ]



いずれの場合も，x 軸を漸近線としてもち，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る．
$a > 1$ のとき右上がりの曲線，$0 < a < 1$ のとき右下がりの曲線である．

練習 5.8 次の指数関数のグラフをかけ．解

(1)　$y = 3^x$　　(2)　$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

B 》指数関数の特徴

x の値が増加すると y の値も増加する関数を**増加関数**といい，x の値が減少すると y の値は減少する関数を**減少関数**という．

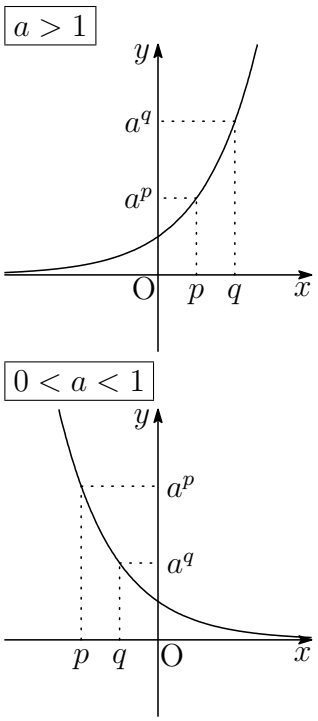
指数関数 $y=a^x$ は，次のような特徴をもつ．

指数関数 $y=a^x$ の特徴

1 定義域は実数全体，
値域は正の数全体である．

2 $a>1$ のとき，増加関数である．
すなわち $\quad p<q \iff a^p<a^q$

3 $0<a<1$ のとき，減少関数である．
すなわち $\quad p<q \iff a^p>a^q$



注意 $a>0$，$a\neq 1$ のとき，次が成り立つ．

$$p=q \iff a^p=a^q$$

例題 5.2 次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表せ． S

$$\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{4},\quad \sqrt[5]{8}$$

解答 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$ ← 2 の累乗で表す

指数の大小を調べると $\quad \dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{5}<\dfrac{2}{3}$

底 2 が 1 より大きいから ← 関数 $y=2^x$ は増加関数

$$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{5}}<2^{\frac{2}{3}}$$

すなわち $\quad \sqrt{2}<\sqrt[5]{8}<\sqrt[3]{4}$

練習 5.9 次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表せ． 解

(1) $\sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{8},\ \sqrt[5]{8}$ (2) $1,\ 0.2^3,\ 0.2^{-1}$

C》指数関数を含む方程式と不等式

指数関数を含む方程式，不等式を解いてみよう．

例題 5.3 次の方程式を解け． S

(1)　$8^x = 4$　　(2)　$9^x = 3^{x+1}$

解答　(1)　方程式を変形すると　$2^{3x} = 2^2$　← $8^x=(2^3)^x=2^{3x}$

$3x = 2$ より　$x = \dfrac{2}{3}$

(2)　方程式を変形すると　$3^{2x} = 3^{x+1}$　← $9^x=(3^2)^x=3^{2x}$

$2x = x + 1$ より　$x = 1$

練習 5.10 次の方程式を解け． 解

(1)　$4^x = 8$　　(2)　$8^x = \dfrac{1}{16}$　　(3)　$27^x = 3^{2-x}$

例題 5.4 次の不等式を解け． S

(1)　$2^x \geqq 8$　　(2)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} < \left(\dfrac{1}{9}\right)^x$

解答　(1)　不等式を変形すると　$2^x \geqq 2^3$

底 2 が 1 より大きいから　$x \geqq 3$　← 関数 $y = 2^x$ は増加関数

(2)　不等式を変形すると　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

底 $\dfrac{1}{3}$ が 1 より小さいから　$x + 1 > 2x$　← 関数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ は減少関数

これを解いて　$x < 1$

練習 5.11 次の不等式を解け． 解

(1)　$3^x < 81$　　(2)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geqq \dfrac{1}{32}$　　(3)　$2^{3x-4} > \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

深化 5.2 例題 5.4(2) を，両辺の底を 3 にそろえて解いてみよう． 解

応用例題 5.1 次の方程式，不等式を解け． S

(1) $4^x - 3\cdot 2^x - 4 = 0$ (2) $4^x - 7\cdot 2^x - 8 > 0$

考え方》 $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$ であるから，$2^x = t$ とおくと，(1) は t の 2 次方程式，(2) は t の 2 次不等式になる．このとき，$2^x > 0$ から，$t > 0$ であることに注意する．

解答 (1) 方程式を変形すると $(2^x)^2 - 3\cdot 2^x - 4 = 0$

$2^x = t$ とおくと，$t > 0$ であり，方程式は

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$
$$(t+1)(t-4) = 0$$

$t > 0$ であるから $t = 4$

よって $2^x = 4$ すなわち $2^x = 2^2$

したがって $x = 2$

(2) 不等式を変形すると $(2^x)^2 - 7\cdot 2^x - 8 > 0$

$2^x = t$ とおくと，$t > 0$ であり，不等式は

$$t^2 - 7t - 8 > 0$$
$$(t+1)(t-8) > 0$$

$t + 1 > 0$ であるから

$t - 8 > 0$ すなわち $t > 8$

よって $2^x > 8$ すなわち $2^x > 2^3$

底 2 は 1 より大きいから $x > 3$

練習 5.12 次の方程式を解け． 解

(1) $4^x + 2\cdot 2^x - 3 = 0$ (2) $9^x - 4\cdot 3^x + 3 = 0$

練習 5.13 次の方程式を解け． 解

(1) $9^x + 3^x - 12 > 0$ (2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x - 10 \leqq 0$

5.1.3　問題

問題 5.1 光の進む速さは，毎秒 3.0×10^8m である．すると，光は 1km を進むのに約 $3.3 \times 10^{\square}$ 秒かかる．$\square$ に適する整数を求めよ． 解 → p.222

問題 5.2 次の式を計算をせよ． 解 → p.224〜226

(1) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{9}$　　(2) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$

(3) $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})$　　(4) $(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})(2^{\frac{2}{3}} + 1 + 2^{-\frac{2}{3}})$

問題 5.3 次の関数のグラフをかけ． 解 → p.227〜228

(1) $y = 2^{x-1}$　　(2) $y = 2^x + 1$

問題 5.4 次の方程式，不等式を解け． 解 → p.230 例題 5.3, 5.4

(1) $3^{3x-1} = 81$

(2) $2^{1-x} = \sqrt[3]{2}$

(3) $4^x - 32 > 0$

(4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{1-x} \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

問題 5.5 次の方程式，不等式を解け． 解 → p.231 応用例題 5.1

(1) $2^{2x+1} - 2^{x+3} - 64 = 0$

(2) $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 > 0$

問題 5.6 関数 $y = 4^x - 2^{x+1} + 3$ $(x < 2)$ について，次の問いに答えよ． 解

(1) $2^x = t$ として，y を t の関数で表せ．

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) y の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

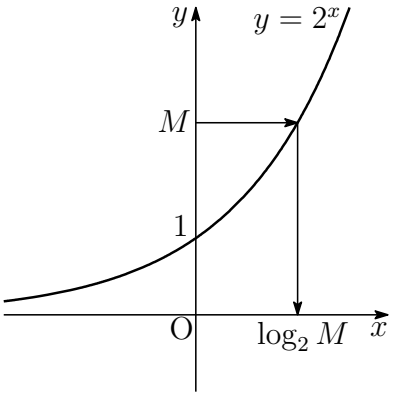
5.2　対数関数

5.2.1　対数とその性質

$2^x = 4$ を満たす実数 x は $x = 2$ であるが，$2^x = 3$ を満たす実数 x の値はどのようになるだろうか．ここでは，正の数 M が与えられたとき，$2^x = M$ を満たす実数 x の値について考えてみよう．

A 》対数

指数関数 $y = 2^x$ は増加関数で，値域は正の数全体であるから，どんな正の数 M に対しても，$M = 2^x$ となる実数 x がただ 1 つ定まる．この x を $\boldsymbol{\log_2 M}$ で表す．



例 5.8　(1)　$8 = 2^3$ から　$\log_2 8 = 3$　S

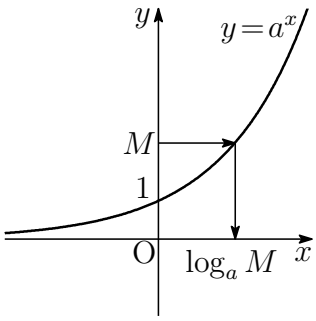
(2)　$\dfrac{1}{2} = 2^{-1}$ から　$\log_2 \dfrac{1}{2} = -1$

一般に，指数関数 $y = a^x$ のグラフからわかるように，どんな正の数 M に対しても

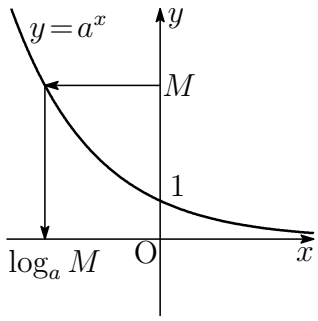
$$M = a^p$$

となる実数 p がただ 1 つ定まる．

$a > 1$



$0 < a < 1$



この p を $\boldsymbol{\log_a M}$ で表し，a を**底**とする M の**対数**という．

また，$\log_a M$ における正の数 M を，この対数の**真数**という．

指数と対数[1] の関係は，次のようになる．

指数と対数

$a > 0$，$a \neq 1$ で $M > 0$ とするとき，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{M = a^p} \iff \boldsymbol{\log_a M = p}$$

注意　以下 $\log_a M$ と書くとき，$a > 0$，$a \neq 1$，$M > 0$ であるとする．

[1] log は「対数」を意味する英語 logarithm を略したものである．

例 5.9 (1) $81 = 3^4$ から $\log_3 81 = 4$ S

(2) $\dfrac{1}{49} = 7^{-2}$ から $\log_7 \dfrac{1}{49} = -2$

練習 5.14 次の関係を $\log_a M = p$ の形に書け. 解

(1) $9 = 3^2$ (2) $\dfrac{1}{25} = 5^{-2}$ (3) $\dfrac{1}{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

練習 5.15 次の関係を $M = a^p$ の形に書け. 解

(1) $\log_4 16 = 2$ (2) $\log_{10} \dfrac{1}{100} = -2$ (3) $\log_9 3 = \dfrac{1}{2}$

$M = a^p$ のとき，$\log_a M = p$ であるから，次の等式が得られる.

$$\log_a a^p = p$$

← $\log_a M = p$ の M を a^p におきかえたもの

例 5.10 (1) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$ S

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

(3) $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

練習 5.16 次の値を求めよ. 解

(1) $\log_2 2^5$ (2) $\log_5 25$ (3) $\log_3 \dfrac{1}{27}$ (4) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}$

(5) $\log_{10} 0.1$ (6) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ (7) $\log_2 \sqrt[3]{2}$ (8) $\log_{\sqrt{5}} 5$

B 》対数の性質

a を底とする対数の性質を調べてみよう.
まず，$1 = a^0$，$a = a^1$ であることから，次が成り立つ.

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

また，指数法則から，次の性質が得られる.

対数の性質

$M > 0$，$N > 0$ で，k を実数とする.

1　$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

2　$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3　$\log_a M^k = k \log_a M$

← これらの等式を用いると，右辺の形を左辺の形に変形することもできる.

補足　また，**2** において，とくに $M = 1$ のときは　$\log_a \dfrac{1}{N} = -\log_a N$

1 の証明　$\log_a M = p$，$\log_a N = q$ とすると

$$M = a^p, \quad N = a^q$$

よって　　$MN = a^p \times a^q = a^{p+q}$
したがって　$\log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$　　証終

練習 5.17　上の証明にならって，性質 **2**，**3** が成り立つことを示せ.　解

例 5.11 (1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \times 5) = \log_{10} 10 = 1$ S

(2) $\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \dfrac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(3) $4\log_3 \sqrt{2} - \log_3 12 = \log_3 (\sqrt{2})^4 - \log_3 12 = \log_3 \dfrac{4}{12}$
$= \log_3 \dfrac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$

練習 5.18 次の計算をせよ. 解

(1) $\log_4 2 + \log_4 8$

(2) $\log_5 2 - \log_5 50$

(3) $\log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2$

(4) $\log_3 \sqrt[3]{6} - \dfrac{1}{3}\log_3 2$

C》底の変換公式

a を底とする対数 $\log_a b$ を，c を底とする対数で表してみよう．

$\log_a b = p$ とすると　　$b = a^p$

c を底とする両辺の対数をとると

$$\log_c b = \log_c a^p$$

すなわち　　$\log_c b = p\log_c a$

$a \neq 1$ より $\log_c a \neq 0$ であるから　　$p = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

したがって，次の**底の変換公式**が得られる．

底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a \neq 1$，$b \neq 1$，$c \neq 1$ とするとき

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \qquad \text{とくに} \quad \boldsymbol{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

参考　1 でない正数 a，b，c，d について，$p = \log_a b$ の底 a を c，d に変換すると

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_d b}{\log_d a} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\log_c a \cdot \log_d b = \log_d a \cdot \log_c b}$$

2 つの対数の積について，底の互換性が成立する．

例 5.12　(1)　$\log_8 16$ の値は　　← $8 = 2^3$，$16 = 2^4$ に注目　　S

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4}{3}$$

(2)　$\log_2 3 \cdot \log_3 8$ の値は　　← $\log_a \square \cdot \log_\square b$ の形

$$\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_2 3 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

(別解) 2 つの対数の積について，底の互換性により

$$\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_3 3 \cdot \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

練習 5.19　次の値を簡単にせよ．　解

(1)　$\log_4 8$　　(2)　$\log_9 3$　　(3)　$\log_3 2 \cdot \log_2 27$

5.2.2 対数関数

a を 1 と異なる正の定数とするとき，$y = \log_a x$ は x の関数である．この関数を，a を底とする x の**対数関数**という．対数関数の特徴を調べよう．

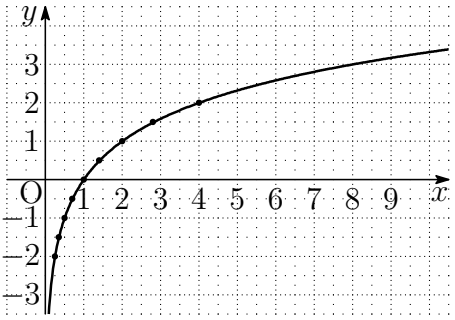
A 》対数関数とそのグラフ

2 を底とする対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフを調べてみよう．

$y = \log_2 x$ は $x = 2^y$ と同じである．そこで，227 ページで調べた $y = 2^x$ の対応表で x と y を入れかえると，次の対応表が得られる．

x	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4
y	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2

この表の x，y を座標にもつ点 $(x,\ y)$ は，右の図のような曲線上にある．



この曲線が，対数関数

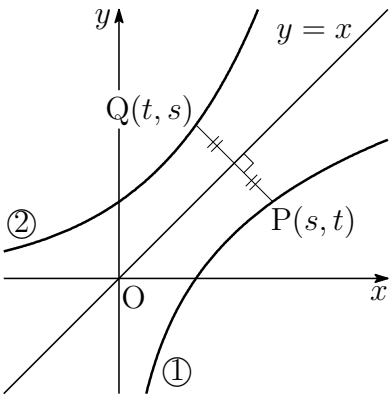
$$y = \log_2 x \quad \cdots ①$$

のグラフである．

このグラフは，指数関数

$$y = 2^x \qquad \cdots ②$$

のグラフと，直線 $y = x$ に関して対称である．



このことは，次の **1**，**2** から説明できる．

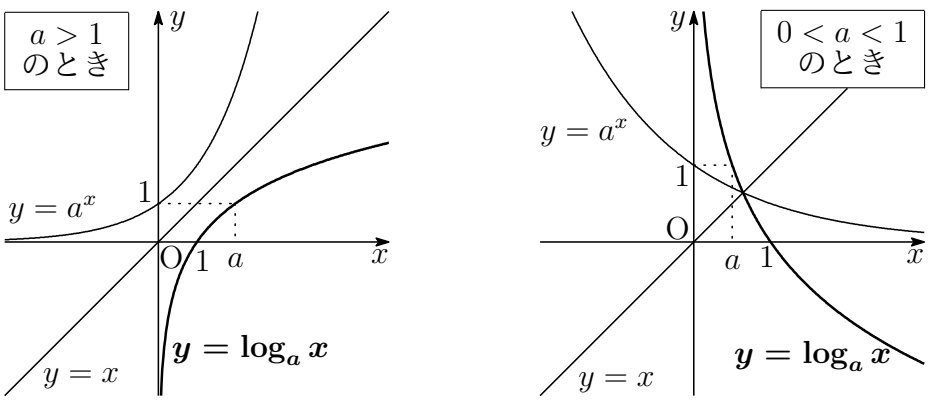
1. 「$t = \log_2 s \iff s = 2^t$」が成り立つ．

よって，① のグラフ上に点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ があれば，② のグラフ上に点 $\mathrm{Q}(t,\ s)$ がある．

この逆も成り立つ．

2. 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ と点 $\mathrm{Q}(t,\ s)$ は，直線 $y = x$ に関して対称である．

一般に，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，指数関数 $y = a^x$ のグラフと $y = x$ に関して対称であり，下の図のようになる．　[対数関数のグラフ]



いずれの場合も，y 軸を漸近線としてもち，点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る．
$a > 1$ のとき右上がりの曲線，$0 < a < 1$ のとき右下がりの曲線である．

練習 5.20 次の対数関数のグラフをかけ．　解

(1) $y = \log_3 x$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

B 》対数関数の特徴

対数関数 $y=\log_a x$ は，次のような特徴をもつ．

対数関数 $y=\log_a x$ の特徴

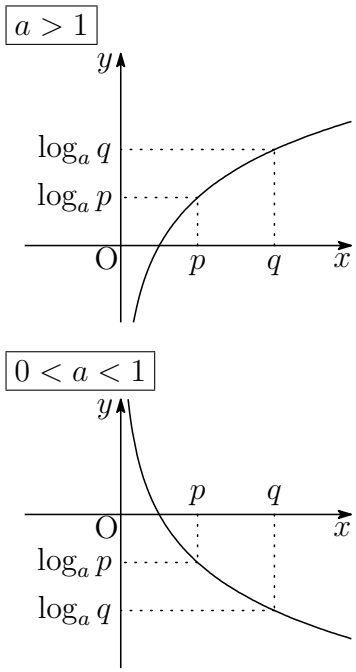
1 定義域は正の数全体，
値域は実数全体である．

2 **$a>1$ のとき**，増加関数である．すなわち

$$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$$

3 **$0<a<1$ のとき**，減少関数である．すなわち

$$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$$



注意 $a>0,\ a\neq 1,\ p>0,\ q>0$ のとき，次が成り立つ．

$$p=q \iff \log_a p=\log_a q$$

例題 5.5 次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ． S

$$2\log_5 3,\quad 3\log_5 2$$

解答

$2\log_5 3=\log_5 3^2=\log_5 9$

$3\log_5 2=\log_5 2^3=\log_5 8$

底 5 は 1 より大きいから ← 関数 $y=\log_5 x$ は増加関数

$\log_5 8<\log_5 9$

すなわち $3\log_5 2<2\log_5 3$

練習 5.21 次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ． 解

(1) $3\log_4 3,\quad 2\log_4 5$

(2) $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8,\quad \log_{\frac{1}{4}} 3$

(3) $\log_2 3,\quad 2$

C 》対数関数を含む方程式，不等式

例題 5.6 次の方程式，不等式を解け． S

(1) $\log_2 x = 3$　　(2) $\log_2 x \leqq 3$

解答　(1) 対数の定義から　$x = 2^3 = 8$

(2) 真数は正であるから　$x > 0$　$\cdots$①

不等式を変形すると　$\log_2 x \leqq \log_2 2^3$

すなわち　$\log_2 x \leqq \log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$x \leqq 8$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて

$$0 < x \leqq 8$$

練習 5.22 次の方程式，不等式を解け． 解

(1) $\log_2 x = 4$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$

(3) $\log_2 x \leqq 4$　　(4) $\log_{\frac{1}{2}} x < 2$

(5) $\log_3 x > 2$　　(6) $\log_{0.5} x \geqq 2$

応用例題 5.2 方程式 $\log_3 x + \log_3(x-8) = 2$ を解け. S

考え方》 まず，$\log_3 x$ と $\log_3(x-8)$ の真数がともに正である x の値の範囲を求める．
また，次の対数の性質を用いる．

$$M > 0,\ N > 0 \text{ のとき} \quad \log_a M + \log_a N = \log_a MN$$

解答

真数は正であるから	$x > 0$ かつ $x - 8 > 0$	
すなわち	$x > 8$ $\cdots$①	
方程式を変形すると	$\log_3 x(x-8) = 2$	
よって	$x(x-8) = 3^2$	
式を整理すると	$x^2 - 8x - 9 = 0$ すなわち	$(x+1)(x-9) = 0$
① より	$x = 9$	← $x = -1$ は ① を満たさない.

練習 5.23 次の方程式を解け. 解

(1) $\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$

(2) $\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$

応用例題 5.3 不等式 $\log_2(2-x) \geqq \log_2 x$ を解け． S

考え方 》 まず，$\log_2(2-x)$ と $\log_2 x$ の真数がともに正である x の値の範囲を求める．

解答 真数は正であるから　　$2-x>0$　かつ　$x>0$

すなわち　　$0<x<2$　　$\cdots$①

$\log_2(2-x) \geqq \log_2 x$ において，底 2 は 1 より大きいから

$$2-x \geqq x \quad \text{すなわち} \quad x \leqq 1 \quad \cdots②$$

①, ② の共通範囲を求めて　　$0<x \leqq 1$

練習 5.24 次の不等式を解け． 解

(1) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leqq \log_{\frac{1}{3}} x$

(2) $2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$

深化 5.3 方程式 $\log_3 x(x-8)=2$ を解いてみよう．応用例題 5.2 と答えは同じだろうか． 解

D 》対数関数を含む関数の最大値，最小値

対数関数を含む関数の最大値，最小値について考えよう．

応用例題 5.4 $1 \leqq x \leqq 27$ のとき，関数 $y = (\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 - 1$ の最大値と最小値を求めよ． S

考え方 》 $\log_3 x = t$ とおくと，y は t の 2 次式で表される．

解答 $\log_3 x = t$ とおく．

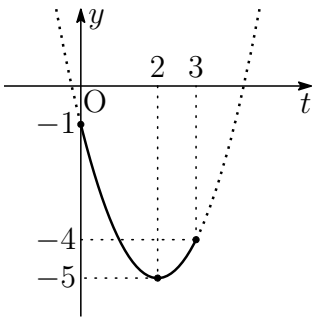
$\log_3 x$ の底 3 は 1 より大きいから，$1 \leqq x \leqq 27$ のとき

$$\log_3 1 \leqq \log_3 x \leqq \log_3 27$$

すなわち $\quad 0 \leqq t \leqq 3 \quad \cdots ①$

与えられた関数の式を変形すると

$$y = (\log_3 x)^2 - 4\log_3 x - 1$$



y を t の式で表すと

$$y = t^2 - 4t - 1$$

すなわち

$$y = (t-2)^2 - 5$$

① の範囲において，y は

$t = 0$ で最大値 -1 をとり，

$t = 2$ で最小値 -5 をとる．

また $\quad t = 0$ のとき $\log_3 x = 0$ このとき $x = 3^0 = 1$

$t = 2$ のとき $\log_3 x = 2$ このとき $x = 3^2 = 9$

よって，この関数は

$x = 1$ で最大値 -1 をとり，$x = 9$ で最小値 -5 をとる．

練習 5.25 $1 \leqq x \leqq 16$ のとき，関数 $y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2$ の最大値と最小値を求めよ． 解

5.2.3　常用対数

大きな数や小さな数は，

$$1620000 = 1.62 \times 10^6, \qquad 0.000618 = 6.18 \times 10^{-4}$$

のように，10^n を用いて表すと便利である．
そこで，10 を底とする対数を考えて，いろいろな問題に利用してみよう．

A 》常用対数

正の数 M は，次の形に表すことができる．

$$M = a \times 10^n \qquad \text{ただし，} n \text{ は整数で } 1 \leqq a < 10$$

このとき，$\log_{10} M$ は整数 n と $\log_{10} a$ の和で表される．

$$\log_{10} M = \log_{10} a + \log_{10} 10^n = \log_{10} a + n$$

10 を底とする対数を**常用対数**という．
章末に常用対数表を載せた．この数表では，a が

$$1.00,\ 1.01,\ 1.02,\ \cdots,\ 9.99$$

のときの $\log_{10} a$ の近似値[2] を，小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで載せてある．

例 5.13 常用対数表によると　S

$$\log_{10} 1.62 = 0.2095$$

この値を用いて　[常用対数表の使い方]

$$\begin{aligned}
\log_{10} 1620000 &= \log_{10}(1.62 \times 10^6) \\
&= \log_{10} 1.62 + \log_{10} 10^6 \\
&= 0.2095 + 6 = 6.2095 \\
\log_{10} 0.00162 &= \log_{10}(1.62 \times 10^{-3}) \\
&= \log_{10} 1.62 + \log_{10} 10^{-3} \\
&= 0.2095 - 3 = -2.7905
\end{aligned}$$

数	0	1	2	3
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239
1.4	.1461	.1492	.1523	.1533
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075

練習 5.26 常用対数表を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めよ．　解

(1)　$\log_{10} 3450$　　(2)　$\log_{10} 92000$　　(3)　$\log_{10} 0.000618$

[2] $1 \leqq a < 10$ であるから，$\log_{10} a$ の値の範囲は $0 \leqq \log_{10} a < 1$ である．

B 》常用対数の応用

正の数 N の整数部分の桁(けた)数と常用対数 $\log_{10} N$ の値の関係を調べてみよう．
たとえば，正の数 N の整数部分が 3 桁であるとは，N が

$$100 \leqq N < 1000 \quad \text{すなわち} \quad 10^2 \leqq N < 10^3$$

を満たすということである．常用対数をとると，次のようになる．

$$\log_{10} 10^2 \leqq \log_{10} N < \log_{10} 10^3 \quad \text{すなわち} \quad 2 \leqq \log_{10} N < 3$$

例題 5.7 3^{20} の桁数を求めよ．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする． S

解答 $\log_{10} 3^{20} = 20 \log_{10} 3 = 20 \times 0.4771 = 9.542$

$9 < \log_{10} 3^{20} < 10$ であるから

$10^9 < 3^{20} < 10^{10}$ ← $\log_{10} 10^9 < \log_{10} 3^{20} < \log_{10} 10^{10}$

よって，3^{20} は 10 桁の数である．

練習 5.27 2^{100} は何桁の数か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする． 解

応用例題 5.5 2^n が 10 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ．ただし，
$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする． S

考え方 》 2^n が 10 桁の数のとき，$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$ が成り立つ．
常用対数をとると n の 1 次不等式が得られる．

解答 2^n が 10 桁の数となるのは，$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$ のときである．

常用対数をとると $9 \leqq n \log_{10} 2 < 10$

$\log_{10} 2 = 0.3010 > 0$ であるから $\dfrac{9}{\log_{10} 2} \leqq n < \dfrac{10}{\log_{10} 2}$ $\cdots$①

$$\frac{9}{\log_{10} 2} = \frac{9}{0.3010} = 29.9\cdots, \quad \frac{10}{\log_{10} 2} = \frac{10}{0.3010} = 33.2\cdots$$

よって，① を満たす自然数 n は $n = 30,\ 31,\ 32,\ 33$

練習 5.28　3^n が 8 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ．ただし，
$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．　解

$0 < M < 1$ である小数 M と常用対数 $\log_{10} M$ の値の関係についても調べてみよう．
たとえば，M の小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れるとは，M が

$$0.001 \leqq M < 0.01$$

すなわち

$$10^{-3} \leqq M < 10^{-2}$$

を満たすということである．常用対数をとると，次のようになる．

$$\log_{10} 10^{-3} \leqq \log_{10} M < \log_{10} 10^{-2}$$

すなわち

$$-3 \leqq \log_{10} M < -2$$

例題 5.8　$\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が表れるか．
ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．　S

解答　$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{30} = 30\log_{10}\frac{1}{3} = -30\log_{10} 3 = -14.313$

$-15 < \log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{30} < -14$ であるから

$10^{-15} < \left(\frac{1}{3}\right)^{30} < 10^{-14}$　← $\log_{10} 10^{-15} < \log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{30} < \log_{10} 10^{-14}$

よって，$\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$ を小数で表したとき，小数第 15 位に初めて 0 でない数字が表れる．

練習 5.29　$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が表れるか．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．　解

5.2.4 問題

問題 5.7 $\log_{10} 2 = a$，$\log_{10} 3 = b$ とするとき，次の値を a，b を用いて表せ． 解

(1) $\log_{10} \dfrac{3}{8}$　(2) $\log_{10} \sqrt[3]{6}$　(3) $\log_2 3$　(4) $\log_{10} 15$ → p.237, 238

問題 5.8 a，b，c を 1 と異なる正の数とするとき，次の等式を証明せよ． 解

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

→ p.238 例 5.12

問題 5.9 関数 $y = \log_2(x-1)$ のグラフをかけ． 解 → p.240

問題 5.10 次の方程式，不等式を解け． 解 → p.242〜244

(1) $\log_3(x+1)^2 = 2$

(2) $\log_2 x + \log_2(x+7) = 3$

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 2$

(4) $\log_2(x+1) + \log_2(x-2) < 2$

問題 5.11 $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10^4}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする． 解 → p.247 応用例題 5.5

問題 5.12 $\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が表れるか．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする． 解 → p.248 例題 5.8

問題 5.13 方程式 $2(\log_2 x)^2 + \log_2 x^3 - 2 = 0$ について，次の問いに答えよ． 解

(1) $\log_2 x = t$ とおいて得られる t の方程式を作れ．

(2) 与えれた方程式を解け．

問題 5.14 $3^{23} = 94143178827$ より $9 \times 10^{10} < 3^{23} < 10^{11}$ が成り立つ．このことを用いて，$\log_{10} 3$ の値を小数第 2 位まで求めよ． 解

5.3　章末問題

5.3.1　章末問題 A

章末 5.1 次の計算をせよ．解

(1)　$64^{\frac{2}{3}} \times 16^{-\frac{1}{4}}$　　(2)　$\sqrt[3]{9} \times \sqrt[6]{9} \div \sqrt[4]{27}$

章末 5.2 次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ．解

(1)　$\dfrac{1}{2} \leqq 2^x \leqq 8$　　(2)　$1 \leqq 0.5^x \leqq 4$

章末 5.3 次の方程式，不等式を解け．解

(1)　$3^{x+1} = \sqrt[3]{9}$　　(2)　$8^x \leqq 4^{x+1}$　　(3)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geqq (\sqrt{2})^x$

章末 5.4 次の計算をせよ． 解

(1) $\dfrac{1}{2}\log_5 3 + 3\log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$

(2) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

章末 5.5 次の方程式，不等式を解け． 解

(1) $\log_{0.5}(x+1)(x+2) = -1$

(2) $\log_3(x-2) + \log_3(2x-7) = 2$

(3) $2\log_{0.5}(3-x) \geqq \log_{0.5} 4x$

(4) $\log_3 x + \log_3(x-2) \geqq 1$

章末 5.6　6^{20} は何桁の数か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．　解

章末 5.7　0.4^n が，小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れる小数となるような自然数 n をすべて求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．　解

章末 5.8　ある菌は，30 分ごとにその個数が 2 倍に増えるという．菌の個数がある時点の 10 万倍を超えるのは，その時点から何時間後か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とし，答えは整数で求めよ．　解

5.3.2 章末問題 B

章末 5.9 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ のとき，次の式の値を求めよ． 解

(1) $x+x^{-1}$ (2) x^2+x^{-2}

章末 5.10 次の関数の値域を求めよ． 解

(1) $y=2^{x+1}\quad(-3\leqq x\leqq 3)$ (2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{2})\quad(0\leqq x\leqq\sqrt{2})$

章末 5.11 次の式を簡単にせよ． 解

(1) $2^{\log_2 3}$ (2) $100^{\log_{10}\sqrt{2}}$

章末 5.12 関数 $y = \log_2(x-1) + \log_2(5-x)$ の最大値を求めよ．解

章末 5.13 0 でない実数 x, y, z が $2^x = 5^y = 10^z$ を満たすとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．解

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

章末 5.14 4 と $3^{\sqrt{2}}$ の大小を不等号を用いて表せ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．解

章末 5.15 $M = \sqrt[3]{9}$ とする．常用対数表を用いて，次の問いに答えよ． 解

(1) $\log_{10} M$ の値を，小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで求めよ．

(2) M の近似値を小数第 2 位まで求めよ．

章末 5.16 $2^n < 3^{20} < 2^{n+1}$ を満たす自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする． 解

ヒント

13 $2^x = 5^y = 10^z$ の各辺において，10 を底とする対数をとる．

15 (2) $\log_{10} M$ の値に近い数を常用対数表からみつける．

常用対数表 (1)

(練習 5.26, 章末 5.15)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

常用対数表 (2)

(練習 5.26, 章末 5.15)

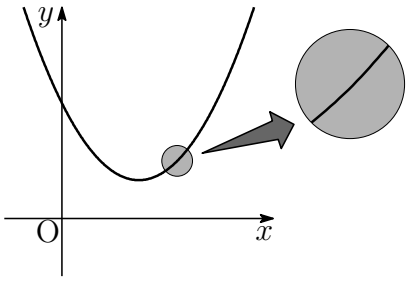
数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.6523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

第 6 章　微分法と積分法

6.1　微分係数と導関数

6.1.1　微分係数

なめらかな曲線の非常にせまい部分を拡大してみると，ほとんど直線のようにみえる．
このことを，極限という概念から考えることにしよう．



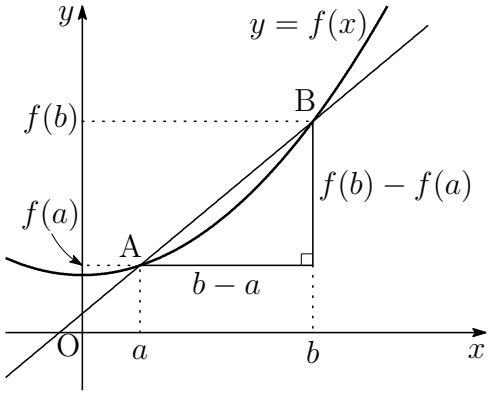
A 》平均変化率

関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，

$$\frac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

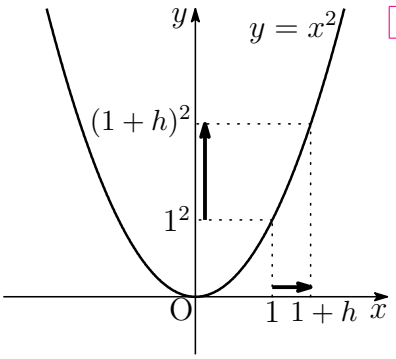
を，$x=a$ から $x=b$ までの，$f(x)$ の**平均変化率**という．　[平均変化率]

この平均変化率は，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を通る直線 AB の傾きを表している．



例 6.1　2 次関数 $y=x^2$ において，$x=1$ から $x=1+h$ までの平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{(1+h)^2-1^2}{(1+h)-1}&=\frac{2h+h^2}{h}\\&=\frac{h(2+h)}{h}\\&=2+h\end{aligned}$$



S

[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

練習 6.1 次の平均変化率を求めよ． 解

(1) 1 次関数 $y = 2x$ の，$x = a$ から $x = b$ までの平均変化率

(2) 2 次関数 $y = -x^2$ の，$x = 2$ から $x = 2 + h$ までの平均変化率

B 》極限値

例 6.1 で求めた平均変化率 $2 + h$ の値について，xの変化量hを

0.1，0.01，0.001，0.0001，$\cdots$

または　-0.1，-0.01，-0.001，-0.0001，$\cdots$　← h<0 でもよい.

のように，0 の両側から限りなく0に近づけてみよう．下の表からもわかるように，$2 + h$ は 2 に限りなく近づくことがわかる．

h	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	$\cdots$	0	$\cdots$	0.0001	0.001	0.01	0.1
$2 + h$	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$	2	$\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1

このことを，

h が 0 に限りなく近づくとき，$2 + h$ の**極限値**は 2 である

といい，記号 **lim** を用いて次のように書く[1]．

$$\lim_{h \to 0}(2 + h) = 2$$

注意 h が 0 に限りなく近づく場合，h は0と異なる値であると約束する．

一般に，関数 $f(x)$ において，x がa と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の**極限値**という．このことを，次のように書く．

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \longrightarrow a \ \text{のとき} \ f(x) \longrightarrow \alpha$$

例 6.2 (1) $\lim_{x \to 1}(3x + 1) = 4$ S

(2) $\lim_{h \to 0}(3 + 3h + h^2) = 3$　← $3h$ と h^2はどちらも 0 に限りなく近づく.

[1] lim は「極限」を意味する英語 limit の略したものである．

練習 6.2 次の極限値を求めよ． 解

(1) $\lim_{x\to 2}(x^2+1)$　　(2) $\lim_{h\to 0}(6+h)$　　(3) $\lim_{h\to 0}(12-6h+h^2)$

C》微分係数

関数 $f(x)$ の，$x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

← x の変化量は　$(a+h)-a=h$

において，h が限りなく 0 に近づくとき，この平均変化率が限りなく一定の値に近づくならば，その極限値を

関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**または変化率

といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す．

$f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

例 6.3 (1) $f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数は S

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

(2) 関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2a+h)$$
$$=2a$$

練習 6.3 関数 $f(x) = 3x^2$ について，次の微分係数を求めよ． 解

(1) $f'(1)$

(2) $f'(-2)$

(3) $f'(a)$

D 》微分係数の図形的な意味

関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分係数 $f'(a)$ をもつとき，グラフにおけるその図形的な意味を調べてみよう．

関数 $f(x)$ が微分係数 $f'(a)$ をもつとする．

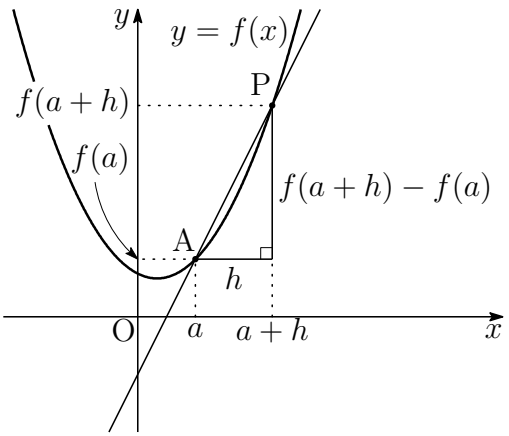
関数 $y=f(x)$ のグラフ上に 2 点

$$\mathrm{A}(a,\ f(a)),\ \mathrm{P}(a+h,\ f(a+h))$$

をとると，直線 AP の傾き

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

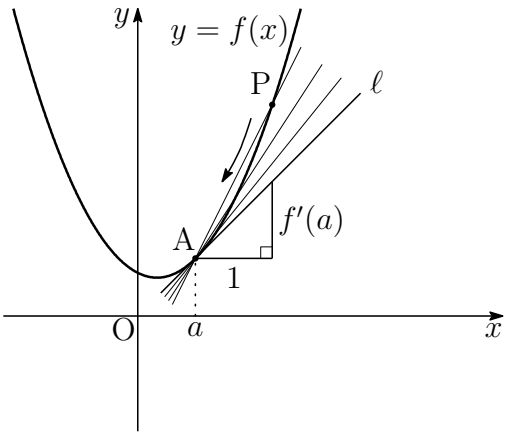
は，関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率に等しい．



h が 0 に限りなく近づくとき，点 P は点 A に限りなく近づく．このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

であるから，直線 AP は点 A を通り傾きが $f'(a)$ の直線 ℓ に限りなく近づく．



この直線 ℓ を，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 A における**接線**といい，A を**接点**という．また，直線 ℓ はこの曲線に**接する**という．

以上をまとめると，次のことがいえる．

[微分係数の図形的な意味]

接線の傾きと微分係数

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい．

例 6.4 $y=x^2$ のグラフ上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾き m を求める． S

$f(x)=x^2$ とすると　　$m=f'(3)$

例 6.3 より，$f'(3)=6$ であるから　　$m=6$

練習 6.4 $y=x^2$ のグラフ上の次の点における接線の傾きを求めよ． 解

(1) 点 $(1,\ 1)$　　(2) 点 $(-2,\ 4)$

6.1.2　導関数とその計算

関数 $f(x)$ が与えられたとき，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は a の式で表される．ここでは，微分係数をもっと一般的に考えてみよう．

A 》導関数

関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は，次のようになる．

$$f'(a)=2a \qquad \cdots ① \qquad \leftarrow 263 \text{ ページ 例 } 6.3(2)$$

たとえば，微分係数 $f'(3)$ を求めるには，① に $a=3$ を代入すればよい．

$$f'(3)=2\cdot 3=6$$

① において，a の値を決めるとそれに対応して，$f'(a)$ の値がただ 1 つ定まる．すなわち a を変数とみると，$f'(a)$ は a の関数である．

一般に，関数 $f(x)$ において，x のとる各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると，x の関数が得られる．このようにして得られる新しい関数を，もとの関数 $f(x)$ の**導関数**といい，$\boldsymbol{f'(x)}$ で表す．

たとえば，関数 $f(x)=x^2$ の導関数は $f'(x)=2x$ である．

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で求められる．

導関数 $\boldsymbol{f'(x)}$

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

上の式において，h は x の変化量を表している．h を $\boldsymbol{x}$ **の増分** といい，関数 $y=f(x)$ の変化量 $f(x+h)-f(x)$ を $\boldsymbol{y}$ **の増分** という．x の増分，y の増分を，それぞれ $\boldsymbol{\Delta x}$, $\boldsymbol{\Delta y}$ で表すことがある．この記号を用いると

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

注意 Δ はギリシャ語で,「デルタ」と読む.

例 6.5 (1)　関数 $f(x)=x$ の導関数は　S

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2)　関数 $f(x)=x^3$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

例 6.6 c を定数とするとき，関数 $f(x)=c$ の導関数は S

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

注意 c を定数とするとき，$f(x)=c$ の形の関数を**定数関数**という．

練習 6.5 導関数の定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ． 解

(1) $f(x)=3x$

(2) $f(x)=-x^2$

関数 $y=f(x)$ の導関数を，$\boldsymbol{y'}$ や $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$ で表すこともある．また，たとえば，関数 $y=x^3$ を，「関数 x^3」のように x の式だけで表記することもある．このときは，関数 x^3 の導関数を $(x^3)'$ で表す．

これまでに調べたことから，次のことがいえる．

$$(x)'=1,\quad (x^2)'=2x,\quad (x^3)'=3x^2,\quad (c)'=0\quad (c\text{ は定数})$$

一般に，次の公式が成り立つ．ただし，n は正の整数とする．

関数 x^n と定数関数の導関数

関数 x^n の導関数は　$\boldsymbol{(x^n)'=nx^{n-1}}$
定数関数 c の導関数は　$\boldsymbol{(c)'=0}$

← 271 ページで証明している．

練習 6.6 上の公式を用いて，次の関数の導関数を求めよ． 解

(1) $y=x^4$　　(2) $y=x^5$

B 》関数の微分

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を $\boldsymbol{x}$ **で微分する**または単に**微分する**という．

今後，本書では関数 $f(x)$，$g(x)$ は x の多項式で表される関数とする．

2 つの関数 $f(x)=x^3$，$g(x)=x^2$ の導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ をもとに，関数 $y=2f(x)$ や関数 $y=f(x)+g(x)$ などを微分してみよう．

まず，関数 $y=2f(x)$ すなわち $y=2x^3$ の導関数は

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3-2x^3}{h} = \lim_{h\to 0} 2\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0} 2(3x^2+3xh+h^2) = \lim_{h\to 0}(2{\cdot}3x^2+2{\cdot}3xh+2h^2) \\ &= 2{\cdot}3x^2 \end{aligned}$$

ここで，$f'(x)=3x^2$ であるから，次のことがいえる．

$$y=2f(x) \text{ を微分すると} \qquad y'=2f'(x)$$

次に，関数 $y=f(x)+g(x)$ すなわち $y=x^3+x^2$ の導関数は

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3+(x+h)^2\}-(x^3+x^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}+\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\{(3x^2+3xh+h^2)+(2x+h)\} \\ &= 3x^2+2x \end{aligned}$$

ここで，$f'(x)=3x^2$，$g'(x)=2x$ であるから，次のことがいえる．

$$y=f(x)+g(x) \text{ を微分すると} \qquad y'=f'(x)+g'(x)$$

同様にして，次のこともいえる．

$$y=f(x)-g(x) \text{ を微分すると} \qquad y'=f'(x)-g'(x)$$

一般に，関数 $f(x)$, $g(x)$ について，次の性質が成り立つことが知られている．

関数の定数倍および和，差の導関数

k を定数とする．

1　$y=kf(x)$ を微分すると　　$\boldsymbol{y'=kf'(x)}$

2　$y=f(x)+g(x)$ を微分すると　$\boldsymbol{y'=f'(x)+g'(x)}$

3　$y=f(x)-g(x)$ を微分すると　$\boldsymbol{y'=f'(x)-g'(x)}$

例 6.7 関数 $y = 3x^2 - 4x + 2$ を微分すると S

$$\begin{aligned} y' &= 3(x^2)' - 4(x)' + (2)' \\ &= 3\cdot 2x - 4\cdot 1 + 0 \\ &= 6x - 4 \end{aligned}$$

$\leftarrow y'=(3x^2)'-(4x)'+(2)'$
$=3(x^2)'-4(x)'+(2)'$

練習 6.7 次の関数を微分せよ． 解

(1) $y = 4x^2 + 3x - 4$

(2) $y = -3x^2 + x - 2$

(3) $y = 4x^3 - 2x^2 - 5x$

(4) $y = -x^4 - x + 3$

(5) $y = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x$

(6) $y = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}$

例題 6.1 次の関数を微分せよ． S

$$y = x(x+1)(x-2)$$

解答 $x(x+1)(x-2) = x(x^2 - x - 2) = x^3 - x^2 - 2x$

よって $y = x^3 - x^2 - 2x$

したがって $y' = 3x^2 - 2x - 2$

練習 6.8 次の関数を微分せよ． 解

(1) $y = (x+2)(x+3)$

(2) $y = x(x+2)(x-2)$

(3) $y = -2x(x+1)(x-3)$

(4) $y = 3(x^2-2)^2$

導関数を利用して，微分係数を求めてみよう．

例題 6.2 関数 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ の導関数を利用して，$x = -1$ における微分係数を求めよ． S

解答 $f(x)$ を微分すると　$f'(x) = -2x + 4$

求める微分係数は　$f'(-1) = -2\cdot(-1) + 4 = 6$

練習 6.9 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ について，次の x の値における微分係数を求めよ． 解

(1) $x = 2$　　(2) $x = 0$　　(3) $x = -2$

例題 6.3 次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ． S

$$f'(0) = 3, \quad f'(1) = -1, \quad f(2) = -2$$

解答 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると　$f'(x) = 2ax + b$

$f'(0) = 3$ より　$b = 3$

$f'(1) = -1$ より　$2a + b = -1$

$f(2) = -2$ より　$4a + 2b + c = -2$

よって　$a = -2,\ b = 3,\ c = 0$

したがって　$f(x) = -2x^2 + 3x$

練習 6.10 次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ． 解

$$f'(0) = -3, \quad f'(1) = 1, \quad f(0) = 2$$

C》変数が x，y でない場合の導関数

変数が x，y 以外の関数についても，同様に導関数を考える．たとえば，t の関数 $s=f(t)$ の導関数は，$\boldsymbol{s'}$，$\boldsymbol{f'(t)}$，$\boldsymbol{\dfrac{ds}{dt}}$ などで表す．

例 6.8 g は定数とする．t の関数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ を t の関数とみて t で微分すると　S

$$s'=\frac{1}{2}g\cdot 2t=gt$$

補足 s が t の関数であり，その導関数を求めていることを，式で明確にしたいときは，s' の代わりに $\dfrac{ds}{dt}$ を用いることがある．

練習 6.11 次の関数を t で微分せよ．ただし，a，b は定数とする．　解

(1) $s=3t^2-4t+2$　　(2) $f(t)=at^3+bt^2$

練習 6.12 半径 r の球の体積を V，表面積を S とすると，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，$S=4\pi r^2$ である．V と S を，それぞれ r で微分せよ．　解

研究

関数 $\boldsymbol{x^n}$ の導関数

267 ページで学んだ，次の導関数の公式を証明してみよう．

n を正の整数とするとき　$(x^n)'=nx^{n-1}$

【証明】導関数の定義より　$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}$

二項定理より

$$\begin{aligned}(x+h)^n&={}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n\\&=x^n+nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots+h^n\end{aligned}$$

よって　$(x+h)^n-x^n=nx^{n-1}h+\dfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots+h^n$

両辺を 0 でない数 h で割ると

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}$$

したがって　$\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$　すなわち　$(x^n)'=nx^{n-1}$　　証終

6.1.3　接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾き $f'(a)$ は，導関数 $f'(x)$ から求められる．ここでは，接線の方程式について考えよう．

A 》接線の方程式

グラフ上の点における接線の方程式について，次のことがいえる．

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

例題 6.4 関数 $y=-x^2+4x$ のグラフ上に x 座標が 1 である点 A をとる．点 A における接線 ℓ の方程式を求めよ． S

解答 $f(x)=-x^2+4x$ とすると

$$f(1)=-1^2+4\cdot 1=3$$

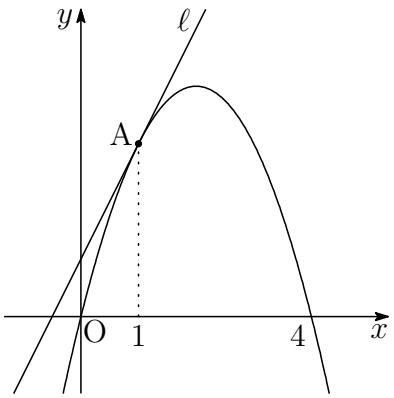
よって，点 A の座標は $(1,\ 3)$ である．
また，$f'(x)=-2x+4$ であるから

$$f'(1)=-2\cdot 1+4=2$$

したがって，点 A における接線 ℓ の方程式は

$$y-3=2(x-1)$$

すなわち　　$y=2x+1$



← 点 $(1,\ 3)$ を通り，傾きが 2 の直線

練習 6.13 関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフ上に x 座標が 2 である点 A をとる．点 A における接線の方程式を求めよ． 解

深化 6.1 例題 6.4 の放物線 $y=-x^2+4x$ の頂点における接線の傾きを予想して，それが正しいかどうか確かめてみよう． 解

B》グラフ上にない点から引いた接線

応用例題 6.1 関数 $y=x^2+3$ のグラフに点 $\mathrm{C}(1,\ 0)$ から引いた接線は 2 本ある．この 2 本の接線の方程式を求めよ． S

考え方》 接点の x 座標を a とすると，y 座標は a^2+3 である．点 $(a,\ a^2+3)$ における接線の方程式を求め，接線が点 C を通ることを式で表すと，a の値が求められる．

解答 $y=x^2+3$ を微分すると　　$y'=2x$

接点の座標を (a, a^2+3) とすると，接線の傾きは $2a$ となるから，

その方程式は

$$y-(a^2+3)=2a(x-a)$$

すなわち　　$y=2ax-a^2+3$　　$\cdots$①

この直線が点 $\mathrm{C}(1,\ 0)$ を通るから

$$0=2a-a^2+3$$

よって　　$a^2-2a-3=0$

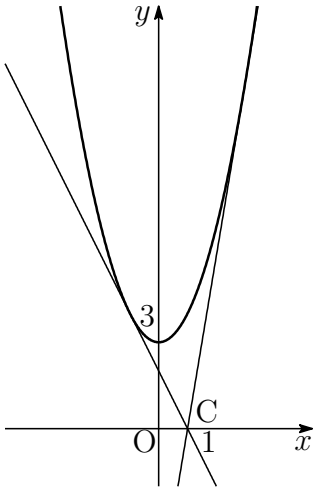
すなわち　　$(a+1)(a-3)=0$

$$a=-1,\ 3$$

したがって，接線の方程式は，① より

$a=-1$ のとき　　$y=-2x+2$

$a=3$ のとき　　$y=6x-6$



(答)　$y=-2x+2$ と $y=6x-6$

練習 6.14 次の接線の方程式を求めよ．解

(1) 関数 $y = x^2 + 1$ のグラフに点 $\mathrm{C}(-1, -7)$ から引いた接線

(2) 関数 $y = x^2 - 2x + 4$ のグラフに原点 O から引いた接線

深化 6.2 放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ が接するとき，$f(x) = g(x)$ を整理して得られる 2 次方程式は重解をもつ．このことを，応用例題 6.1 の結果を用いて確かめよう．解

6.1.4 問題

問題 6.1 次の極限値を求めよ． 解 → p.262, 263

(1) $\lim_{x\to 1}(x+2)$ (2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

問題 6.2 次の関数を微分せよ． 解 → p.266〜269

(1) $y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ (2) $y = (2x-1)(x+1)$

(3) $y = (x+1)(x^2-x+1)$ (4) $y = x(x-1)^2$

問題 6.3 次のことを証明せよ．ただし，a, b は定数とする． 解 → p.269 例題 6.1

(1) $y = (ax+b)^2$ のとき $y' = 2a(ax+b)$

(2) $y = (ax+b)^3$ のとき $y' = 3a(ax+b)^2$

問題 6.4 次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ．解　→ p.270 例題 6.3

$$f'(0) = -4, \quad f'(2) = 0, \quad f(0) = 8$$

問題 6.5 関数 $y = x^2 - 2x$ のグラフについて，傾きが 4 であるような接線の方程式を求めよ．解　→ p.273 応用例題 6.1

問題 6.6 関数 $y = x^3 + 2$ のグラフに点 $\mathrm{C}(1,\ 2)$ から引いた接線の方程式を求めよ．

解

問題 6.7 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ とする．また，この関数の導関数を $g(x)$ とする．

(1) 関数 $g(x)$ の最小値を求めよ． 解

(2) 関数 $f(x)$ のグラフの接線のうち，傾きが最小である接線の方程式を求めよ．

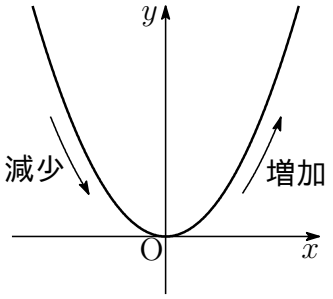
6.2　関数の値の変化

6.2.1　関数の増減と極大・極小

関数 $y = x^2$ の y の値は，$x < 0$ では減少し，$x > 0$ では増加する．
実数 $a,\ b$ に対して，不等式

$$a < x < b,\quad a \leqq x \leqq b,\quad a \leqq x,\quad x < b$$

などを満たす実数 x 全体の集合を**区間**という．



ここでは，区間における関数の増減の様子について調べてみよう．

A ≫ 関数の増減と導関数

関数 $f(x) = x^2 - 4x$ の導関数は　　$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$

よって，$y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは

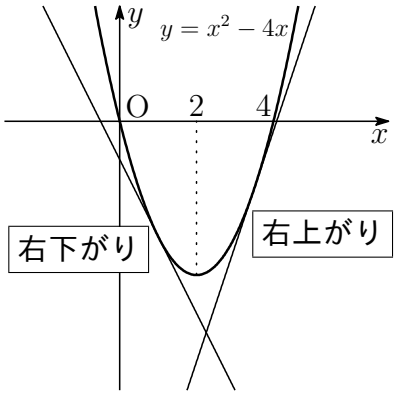
$$f'(a) = 2(a - 2)$$

［1］$a < 2$ では　$f'(a) < 0$

このとき，A における接線は右下がりである．

［2］$a > 2$ では　$f'(a) > 0$

このとき，A における接線は右上がりである．



注意　$a = 2$ では，$f'(a) = 0$ で，このとき点 A における接線は x 軸に平行である．

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の 1 点 A に近いところでは，関数のグラフは A における接線とほぼ一致しているとみなしてよい．

よって，関数 $f(x) = x^2 - 4x$ の増減については，次のようになる．

［1］区間 $x < 2$ では $f'(x) < 0$ である．このとき，関数は減少する．

［2］区間 $x > 2$ では $f'(x) > 0$ である．このとき，関数は増加する．

一般に，関数 $f(x)$ の増減と導関数 $f'(x)$ の符号については，次のようになる．

$f'(x)$ の符号と $f(x)$ の増減

ある区間で

常に $f'(x) > 0$ ならば，$f(x)$ はその区間で**増加**する．

常に $f'(x) < 0$ ならば，$f(x)$ はその区間で**減少**する．

常に $f'(x) = 0$ ならば，$f(x)$ はその区間で**定数**である．

例 6.9 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べる． S

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$= 3(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ とすると　　$x = -1,\ 1$

$f'(x) > 0$ を解くと　　$x < -1,\ 1 < x$

$f'(x) < 0$ を解くと　　$-1 < x < 1$

よって，$f(x)$ の増減は，次のような表で表される．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

← ↗ は増加，↘ は減少を表す．

したがって，関数 $f(x)$ は

$x \leqq -1$，$1 \leqq x$ で増加し，$-1 \leqq x \leqq 1$ で減少する．

注意 関数が増加または減少する区間には，$f'(x) = 0$ となる x の値も含まれる．

例 6.9 で示したような表を**増減表**という．表の中の記号 ↗ はその区間で関数が増加することを示し，↘ はその区間で関数が減少することを示す．

練習 6.15 次の関数の増減を調べよ． 解

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$　　(2) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$

B 》関数の極大・極小

例 6.9 の関数 $f(x)=x^3-3x$ の増減表をみると，$f(x)$ の増減が入れ替わるような x の値がある．

一般に，関数 $f(x)$ が $x=a$ を境目として増加から減少に移るとき，

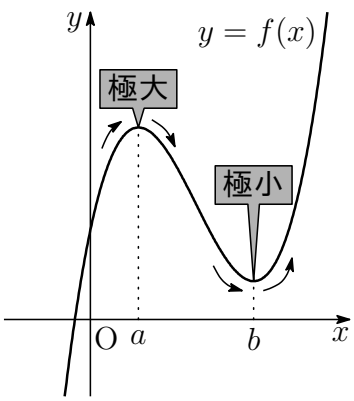
$f(x)$ は $x=a$ で**極大**である

といい，$f(a)$ を**極大値**という．

また，$x=b$ を境目として減少から増加に移るとき，

$f(x)$ は $x=b$ で**極小**である

といい，$f(b)$ を**極小値**という．



極大値と極小値をまとめて**極値**という．

関数の極値を求めたりグラフをかいたりするためには，まず増減表を作って関数の増減減を調べるとよい．

例題 6.5　関数 $y=x^3-3x^2+3$ の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．　S

解答　$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 2$

y の増減表は，右のようになる．

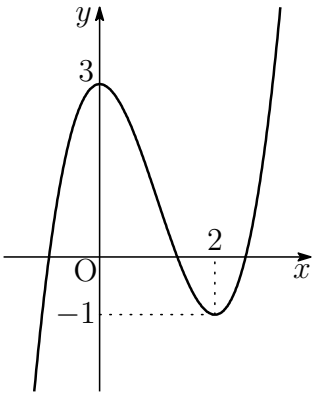
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

したがって，この関数は

$x=0$ で極大値 3，

$x=2$ で極小値 -1

をとる．また，グラフは右の図のようになる．



練習 6.16 次の関数の極値を求めよ．また，そのグラフをかけ． 解

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

(2) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$

関数が常に増加または常に減少する区間では，増減が入れ替わることはないから，関数は極値をもたない．

例 6.10 関数 $f(x) = x^3$ の増減を調べる． S

$$f'(x) = 3x^2$$

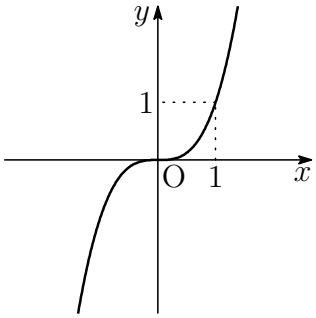
$f'(x) = 0$ とすると

$$x = 0$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

よって，$f(x)$ は常に増加し，極値をもたない．



補足 グラフは右の図のようになる．

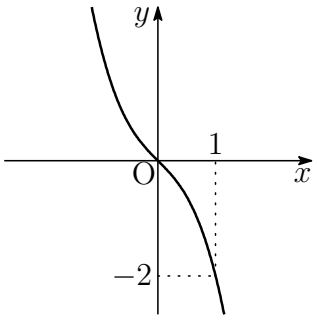
例 6.11 関数 $f(x) = -x^3 - x$ の増減を調べる． S

$$f'(x) = -3x^2 - 1$$

$-3x^2 \leqq 0$ であるから，常に

$$f'(x) < 0$$

よって，$f(x)$ は常に減少し，極値をもたない．



補足 グラフは右の図のようになる．

練習 6.17 次の関数の増減を調べ，極値をもたないことを確かめよ． 解

(1)　$f(x) = -x^3$　　(2)　$f(x) = x^3 + 2x$

応用例題 6.2 関数 $y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2$ の極値を求め，そのグラフをかけ． S

考え方》 y' の符号を調べ，増減表を作って関数の増減を調べればよい．
$y' = 3x(x+1)(x-2)$ であるから，$x = -1,\ 0,\ 2$ を境目として増減表を作る．たとえば，$x < 0,\ x+1 > 0,\ x-2 < 0$ であるから，$y' > 0$ である．

解答 $y' = 3x^3 - 3x^2 - 6x = 3x(x^2 - x - 2) = 3x(x+1)(x-2)$

$y' = 0$ とすると　　$x = -1,\ 0,\ 2$

y の増減表は次のようになる．

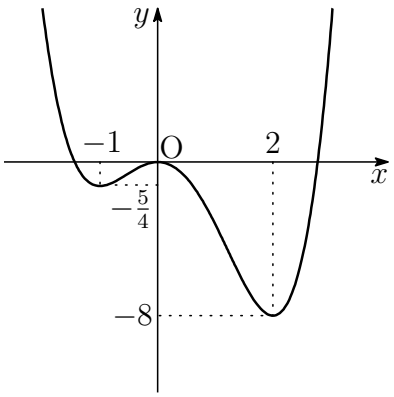
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 $-\frac{5}{4}$	↗	極大 0	↘	極小 -8	↗

よって，この関数は

$x = -1$ で極小値 $-\frac{5}{4}$,
$x = 0$ で極大値 0,
$x = 2$ で極小値 -8

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



注意 n 次の多項式で表される関数を **n 次関数** という．前ページの例 6.10 や例 6.11 の関数は 3 次関数，上の応用例題 6.2 は 4 次関数である．

練習 6.18 次の関数の極値を求めよ．また，そのグラフをかけ． 解

(1) $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$

(2) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

(3) $y = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$

(4) $y = x^4 - 4x^3 + 12$

x の多項式で表される関数 $f(x)$ について，次のことがいえる．

> **関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとれば，$f'(a)=0$ である．**

ただし，このことの逆は成り立たない．すなわち，次のことがいえる．

> **$f'(a)=0$ であっても，$f(x)$ は $x=a$ で極値をとるとは限らない．**

たとえば，282 ページの例 6.10 で調べたように，$f(x)=x^3$ については $f'(0)=0$ であるが，$f(x)$ は $x=0$ で極値をとらない．

応用例題 6.3 関数 $f(x)=x^3+ax+b$ が $x=2$ で極小値 -6 をとるように，定数 a，b の値を定めよ．また，極大値を求めよ． S

考え方》 $f(x)$ が $x=2$ で極小値 -6 をとるならば，$f'(2)=0$ であり，
かつ $f(2)=-6$ が成り立つ．

解答 $f(x)=x^3+ax+b$ を微分すると　　$f'(x)=3x^2+a$

$f(x)$ が $x=2$ で極小値 -6 をとるとき　$f'(2)=0$，　$f(2)=-6$

よって　　$12+a=0$，　$8+2a+b=-6$

これを解くと　　$a=-12$，$b=10$

逆に，$a=12$，$b=10$ のとき $f(x)$ が $x=2$ で極小値 -6 をとることを示す．

$$f(x)=x^3-12x+10,\quad f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

したがって，右の増減表が得られ，
$f(x)$ は $x=2$ で極小値 -6 をとり，
条件を満たす．
(答) $a=-12$，$b=10$，
$x=-2$ で極大値 26 をとる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 26	↘	極小 -6	↗

補足 $f'(2)=0$ であっても $f(x)$ が $x=2$ で極値をとるとは限らないため，増減表によって，$x=2$ で極小値をとることを確認している．

練習 6.19 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$ が $x = -1$ で極大値 8 をとるように，定数 a，b の値を定めよ．また，極小値を求めよ． 解

発見

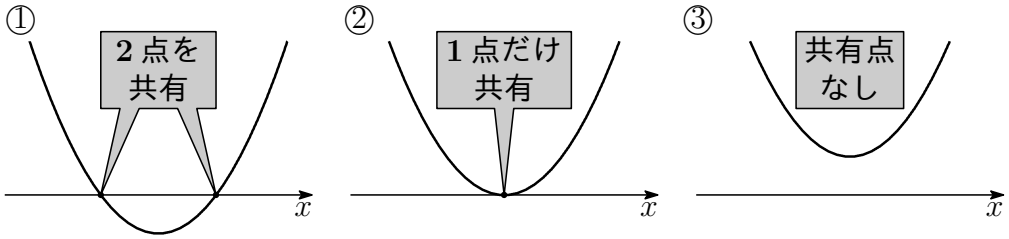
3 次関数の導関数のグラフと極値

280 ページの例題 6.5 や 282 ページの例 6.10，例 6.11 では 3 次関数の極値について学習しました．ここでは，3 次関数の導関数のグラフと極値の関係について考察してみましょう．

確認 3 次関数の導関数は，2 次関数であることを確認しよう．

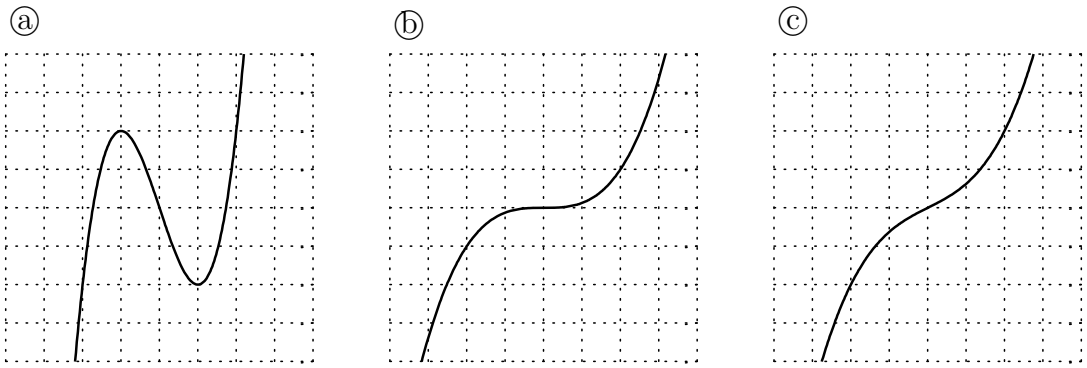
3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ において，$a > 0$ とします．

このとき，$y = f'(x)$ のグラフと x 軸の位置関係は，共有点の個数に着目すると，次の ①，②，③ のような 3 つの場合に分類できます．



発見 $y = f'(x)$ のグラフが ①，②，③ のようになるとき，それぞれの場合について，$f(x)$ の増減を調べよう．$f(x)$ が極値をもつのはどのようなときだろうか．

まとめ $y = f'(x)$ のグラフが ①，②，③ のようになるとき，$y = f(x)$ のグラフは次の ⓐ，ⓑ，ⓒ のどれになるか，それぞれ答えよう．



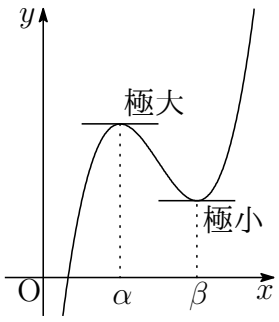
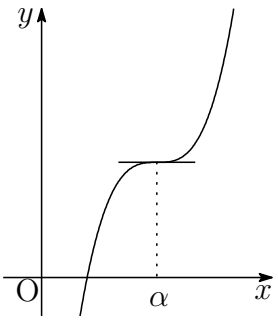
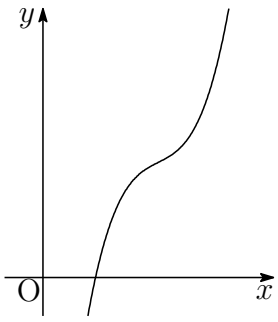
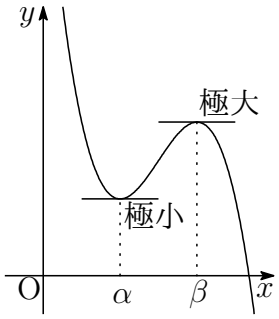
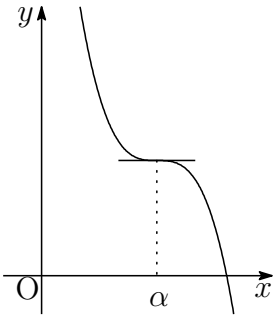
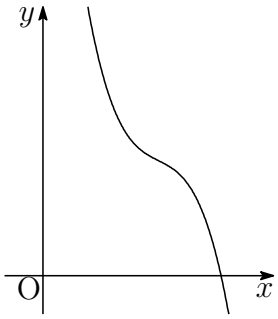
(答) ① は ⓐ，② は ⓑ，③ は ⓒ

3 次関数のグラフのまとめ

3 次関数 $y = ax^3+bx^2+cx+d$ について，$y' = 0$ すなわち 2 次方程式 $3ax^2+2bx+c = 0$ の判別式を D とすると $D/4 = b^2 - 3ac$

$D/4 > 0$　ならば　y'は正にも，負にも，また 0 にもなりうる．
$D/4 = 0$　ならば　y'は 0 または a と同符号．
$D/4 < 0$　ならば　y'は常に a と同符号．

したがって，$D/4 = b^2 - 3ac > 0$ のとき極値をもち，$D/4 = b^2 - 3ac \leqq 0$ のとき極値がない．3 次関数についてまとめると，次のようになる．

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$	$y' = 3ax^2 + 2bx + c$　判別式 $D/4 = b^2 - 3ac$		
$D/4$	$D/4 = b^2 - 3ac > 0$	$D/4 = b^2 - 3ac = 0$	$D/4 = b^2 - 3ac < 0$
$y' = 0$	異なる 2 実数解 α, β	重解 α	実数解がない
極値	極値がある	極値がない	極値がない
$a > 0$			
$a < 0$			

6.2.2 関数の増減・グラフの応用

関数の増減やグラフを利用して，関数の最大値，最小値を求めたり，方程式の実数解の個数を調べたりしてみよう．

A 》関数の最大・最小

例題 6.6 次の関数の最大値，最小値を求めよ． [関数の最大・最小] S

$$y = -x^3 + 3x^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 4)$$

解答

$y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$

$y' = 0$ とすると $x = 0,\ 2$

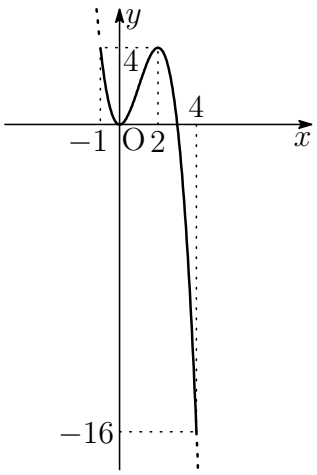
y の増減表は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	4	↘	極小 0	↗	極大 4	↘	-16

よって，この関数は

$x = -1,\ 2$ で最大値 4 をとり，

$x = 4$ で最小値 -16 をとる．



例題 6.6 の関数では，関数の極大値は最大値と一致しているが，極小値は最小値と一致していない．関数の最大値，最小値を求めるには，極値と定義域の端における関数の値との大小も調べる必要がある．

練習 6.20 次の関数の最大値，最小値を求めよ． 解

(1) $y = x^3 + 3x^2 \quad (-3 \leqq x \leqq 2)$

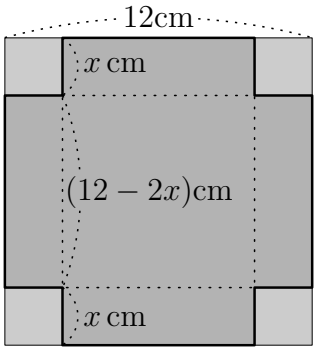
(2) $y = -x^3 + x^2 + x \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

(3) $y = x^4 - 2x^3 + 3 \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$

深化 6.3 関数 $y = x^2 - 4x + 3$ の最小値を，次の 2 通りの方法で求めよう． 解

① 平方完成を利用する　　② 微分して増減を調べる

応用例題 6.4 1 辺が 12cm の正方形の厚紙の四隅から，合同な正方形を切り取り，ふたのない直方体の箱を作る．箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか． S



考え方》 求める長さを x cm，箱の容積を y cm^3 として，x の関数 y の増減を調べる．
x のとる値の範囲にも注意する． [微分法の文章題]

解答 切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm，箱の容積を y cm^3 とする．

箱が作れるためには，

$x>0$ かつ $12-2x>0$ から

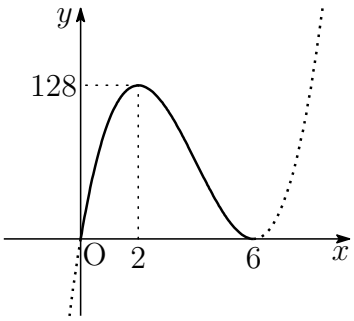
$$0<x<6 \qquad \cdots ①$$

このとき $\quad y=x(12-2x)^2$

$$=4(x^3-12x^2+36x)$$

$$y'=12(x^2-8x+12)$$

$$=12(x-2)(x-6)$$



① の範囲において，$y'=0$ となるのは，$x=2$ のときであり，y の増減表は，次のようになる (上のグラフは，参考までに図示したものである)．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
y'		+	0	−	
y		↗	極大	↘	

したがって，y は $x=2$ で最大になる． (答) 2cm

別解 $0<x<6$ のとき，$y=4x(6-x)^2$ を最大にする x の値を求めればよい．

3 正数 $2x,\ 6-x,\ 6-x$ の相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2x+2(6-x)\geqq 3\sqrt[3]{2x(6-x)^2} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt[3]{2x(6-x)^2}\leqq 4$$

上の第 2 式の両辺を 3 乗すると

$$2x(6-x)^3\leqq 64 \quad \text{ゆえに} \quad y=4x(6-x)^2\leqq 128$$

y が最大となるのは $\quad 2x=6-x \quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{x=2}$ 終

練習 6.21 縦 10cm，横 16cm の長方形の厚紙の四隅から，合同な正方形を切り取り，ふたのない直方体の箱を作る．箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか． 解

B 》方程式への応用

方程式 $f(x)=0$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標である．したがって，方程式の実数解の個数を調べるのに，次のように関数のグラフを利用する方法がある．

例題 6.7 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ． S

$$x^3-3x-1=0$$

解答 関数 $y=x^3-3x-1$ について

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2-3=3(x^2-1) \\ &= 3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$y'=0$ とすると

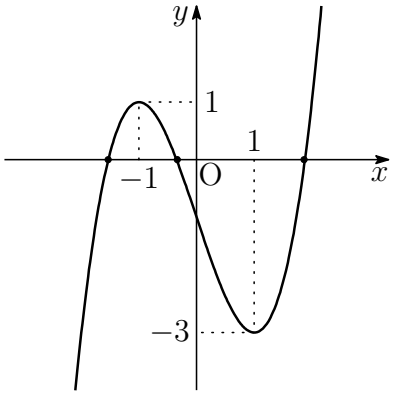
$$x=-1,\ 1$$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 1	↘	極小 -3	↗

よって，関数 $y=x^3-3x-1$ のグラフは，右の図のようになり，グラフと x 軸は異なる 3 点で交わる．

したがって，方程式 $x^3-3x-1=0$ の異なる実数解の個数は，3 個である．



練習 6.22 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ． 解

(1) $2x^3-6x+3=0$

(2) $x^3 + 3x^2 + 2 = 0$

(3) $-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

(4) $x^4 - 8x^2 + 1 = 0$

応用例題 6.5 方程式 $x^3+3x^2-a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ． [方程式の実数解の個数] S

考え方 》 方程式 $f(x)=a$ の形に変形する．この方程式の異なる実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい．

解答 与えられた方程式を変形すると $x^3+3x^2=a$

この方程式の異なる実数解の個数は，関数 $y=x^3+3x^2$ $\cdots$①

のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい．

関数 ① について

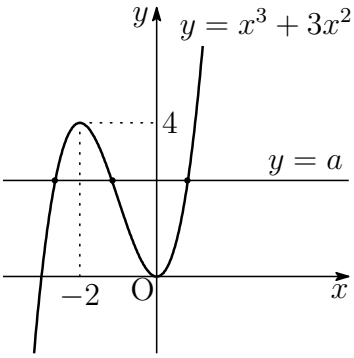
$$y'=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$y'=0$ とすると $x=0,\ 2$

y の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

よって，$y=x^3+3x^2$ のグラフは，右の図のようになる．



求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$0<a<4$$

方程式 $x^3+3x^2-a=0$ の異なる実数解の個数について，さらに次のことがいえる．

$a=0,\ 4$ のとき 2 個 (1 個は 2 重解)

$a<0,\ 4<a$ のとき 1 個

練習 6.23 方程式 $2x^3-3x^2-a=0$ がただ 1 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ． 解

C 》不等式への応用

関数 $f(x)$ の最小値が m であるとき，$f(x) \geqq m$ が成り立つ．
このことを利用して，不等式を証明してみよう．

応用例題 6.6　$x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．　S

$$x^3 + 4 \geqq 3x^2$$

考え方 》 不等式を変形して，$x \geqq 0$ のとき，$(x^3+4) - 3x^2 \geqq 0$ であることを証明する．すなわち，$x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x) = (x^3+4) - 3x^2$ の最小値が 0 であることを示す．

証明　$f(x) = (x^3+4) - 3x^2$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	極小 0	↗

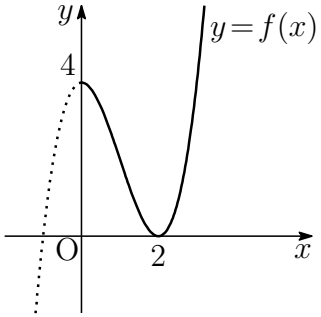
$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ 2$
$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，右のようになる．
よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x = 2$ で最小値 0 をとるから

$$f(x) \geqq 0$$

すなわち　$(x^3+4) - 3x^2 \geqq 0$
したがって，$x \geqq 0$ のとき

$$x^3 + 4 \geqq 3x^2$$

証終



補足　応用例題 6.6 で，不等式の等号が成り立つのは $x = 2$ のときである．

別解　$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ について，$f(2) = 0$ であるから，$f(x)$ が $x-2$ を因数にもつことに注意して，$f(x)$ を因数分解すると

$$f(x) = (x-2)(x^2 - x - 2) = (x-2)^2(x+1)$$

$x \geqq 0$ のとき，$x+1 > 0$，$(x-2)^2 \geqq 0$ であるから　$f(x) \geqq 0$　(以下同様) 終

練習 6.24 $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ． 解

$$x^3 + 3x^2 + 5 \geqq 9x$$

6.2.3　問題

問題 6.8 次の関数の増減を調べ，極値があればその極値を求めよ．解 → p.280〜283

(1) $y = x^3 - 6x + 2$

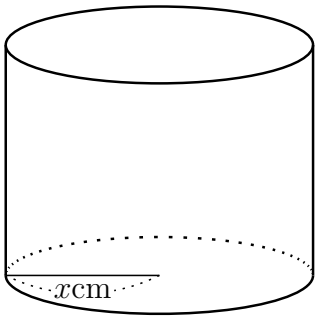
(2) $y = (1 - x)^3$

(3) $y = x^4 + 2x^3 + 1$

問題 6.9 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が，$x = -3$ で極大値をとり，$x = 1$ で極小値 -12 をとるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．解 → p.285 応用例題 6.3

問題 6.10 底面の直径と高さの和が 18cm である直円柱の体積を $V\text{cm}^3$ とする． 解

→ p.291 応用例題 6.4



(1) 底面の半径を x cm とするとき，V を x の式で表せ．

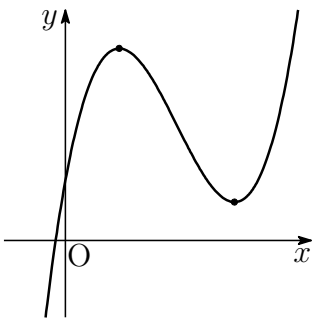
(2) V が最大となるのは，円柱の高さが何 cm のときか．

問題 6.11 方程式 $x^3 - 6x^2 + a = 0$ が異なる 2 個の正の解と 1 個の負の解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ． 解

→ p.295 応用例題 6.5

問題 6.12 関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + (1-2a)x + 4$ が極大値と極小値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．解

問題 6.13 3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフが右の図のようになるとき，a, b, c, d の値の符号をそれぞれ求めよ．ただし，図中の黒丸は極値をとる点を表している．解



6.3 積分法

6.3.1 不定積分

これまでは関数の導関数を求めることを学んできたが，逆に導関数が与えられた場合に，もとの関数を求めることを考えてみよう．

A 》導関数と不定積分

微分すると $f(x)$ になる関数を，$f(x)$ の**原始関数**という．
すなわち，$F'(x) = f(x)$ のとき，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

例 6.12 $(x^2)' = 2x$ であるから，x^2 は $2x$ の原始関数である． S
さらに $(x^2+3)' = 2x$, $(x^2-5)' = 2x$
であるから，x^2+3，x^2-5 も，$2x$ の原始関数である．

$2x$ の原始関数はいくつもあるが，その違いは，定数部分だけである．

練習 6.25 次の中から，$3x^2$ の原始関数であるものを選べ． 解

① $6x$ ② x^3 ③ x^3+2x ④ x^3-4

一般に，関数 $f(x)$ の 1 つの原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の任意の原始関数は，次のように表示される [2]．

$$F(x)+C \qquad \text{ただし } C \text{ は定数}$$

この表示を $f(x)$ の**不定積分**といい，$\boldsymbol{\int f(x)\,dx}$ で表す．

注意 記号 $\int$ は「積分」または「インテグラル」と読む．

[2] $f(x)$ の任意の導関数を $G(x)$ とすると $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$
$G(x) - F(x)$ を微分すると $(G(x)-F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$
導関数が常に 0 である関数は，ある定数 C に等しいから
$G(x) - F(x) = C$ すなわち $G(x) = F(x) + C$

関数 $f(x)$ の不定積分については，次のようにまとめられる．

$f(x)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき　　$\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + C}$　　C は定数

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する**といい，上の定数 C を**積分定数**という．

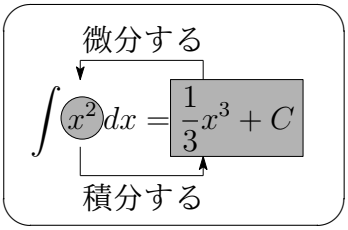
積分することと微分することとは，互いに逆の計算であるといえる．

例 6.13　$(x)' = 1$，$\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$，$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ であるから　S

$$\int 1\,dx = x + C \qquad C \text{ は積分定数}$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad C \text{ は積分定数}$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C \qquad C \text{ は積分定数}$$



注意　$\displaystyle\int 1\,dx$ は 1 を省略して $\displaystyle\int dx$ と書くことがある．

一般に，次の公式が成り立つ．ただし，n は 0 または正の整数とする．

x^n の不定積分

$$\int \boldsymbol{x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C} \qquad C \text{ は積分定数}$$

注意　$\displaystyle\int x^0\,dx$ は $\displaystyle\int 1\,dx$ のことである．

練習 6.26　上の公式が成り立つことを，右辺の関数を x で微分して確かめよ．

また，この公式を用いて，不定積分 $\displaystyle\int x^3\,dx$ を求めよ．　解

今後，とくに断らなくても，C は積分定数を表すものとする．

B 》不定積分の性質

関数の定数倍および和，差の不定積分について調べよう．

$F'(x)=f(x)$ であるとする．このとき，定数 k に対して

$$(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$$

となるから，$kF(x)$ は関数 $kf(x)$ の原始関数の 1 つである．

すなわち $$\int kf(x)\,dx=kF(x)+C$$

同様にして，次のことがいえる．

関数の定数倍および和，差の不定積分

$F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)$ のとき

1 $\displaystyle\int \boldsymbol{kf(x)\,dx=kF(x)+C}$ k は定数

2 $\displaystyle\int \boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}\,dx=F(x)+G(x)+C}$

3 $\displaystyle\int \boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}\,dx=F(x)-G(x)+C}$

x の多項式で表される関数の不定積分を求めてみよう．

例 6.14 (1) $\displaystyle\int 4x^2\,dx=4\cdot\frac{1}{3}x^3+C=\frac{4}{3}x^3+C$ S

(2) $\displaystyle\int(3x^2-5x+2)\,dx=3\cdot\frac{1}{3}x^3-5\cdot\frac{1}{2}x^2+2x+C$

$\displaystyle=x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+C$

練習 6.27 次の不定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int 5x^2\,dx$ (2) $\displaystyle\int(x^2+x-1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int(x^3-6x^2-2x+5)\,dx$ (4) $\displaystyle\int(-2x^2-x+7)\,dx$

変数が x 以外の文字で表される関数についても，同様に不定積分を考えることができる．

$$\int (\bigcirc\text{の関数})\, d\bigcirc$$

例題 6.8 次の不定積分を求めよ．

$$\int (t+1)(t-2)\, dt$$

解答
$$\int (t+1)(t-2)\, dt = \int (t^2 - t - 2)\, dt$$
$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t + C$$

練習 6.28 次の不定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int (t+2)(3t-1)\, dt$　　(2) $\displaystyle\int 3(t-1)^2\, dt$

応用例題 6.7　次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ． S

［1］ $F'(x) = 6x^2 - 2x$　　［2］ $F(1) = 2$

考え方 》 ［1］から $6x^2 - 2x$ の不定積分として $F(x)$ を求める．さらに，
［2］から積分定数 C の値を決める．

解答　［1］から　$F(x) = \displaystyle\int (6x^2 - 2x)\, dx$
$$= 2x^3 - x^2 + C$$

よって　$F(1) = 2\cdot 1^3 - 1^2 + C = 1 + C$

［2］から，$1 + C = 2$ であるから

$$C = 1$$

したがって　$F(x) = 2x^3 - x^2 + 1$

練習 6.29 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ． 解

［1］ $F'(x) = 3x^2 - 4$　　［2］ $F(-1) = 5$

6.3.2 定積分

関数 $f(x) = 2x$ の原始関数 $F(x)$ は 1 つに定まらないが，たとえば $F(3) - F(1)$，$F(2) - F(4)$ などの値は，$F(x)$ の選び方に関係なく，それぞれ 1 つに定まる．このことについて学ぼう．

A 》 定積分

関数 $f(x) = 2x$ の任意の原始関数 $F(x)$ は，

$$F(x) = x^2 + C \qquad C \text{ は定数}$$

の形で表される．ここで，たとえば，$F(3) - F(1)$ の値は

$$F(3) - F(1) = (3^2 + C) - (1^2 + C) = 8$$

となり，定数 C を含まない値になる．

一般に，関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とし，a，b を $f(x)$ の定義域内の任意の値とするとき， $F(b) - F(a)$ の値は $F(x)$ の選び方とは関係なく，a，b の値だけで定まる．この $F(b) - F(a)$ を関数 $f(x)$ の a から b までの **定積分** [3] といい，次のように書く．

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx}$$

また，$F(b) - F(a)$ を $\Big[\boldsymbol{F(x)}\Big]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$ とも書く．

定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx} = \Big[\,\boldsymbol{F(x)}\,\Big]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{F(b) - F(a)}$

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ において，a を下端（かたん），b を上端（じょうたん）という．また，この定積分を求めることを，関数 $f(x)$ を a から b まで **積分する** という．a と b の大小関係は，$a < b$，$a = b$，$a > b$ のいずれでもよい．

例 6.15 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$ の計算 S

$\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$ であるから

$$\int_1^2 x^2\,dx = \Big[\,\frac{x^3}{3}\,\Big]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

[3] 定積分は，図形の面積に関するものである．このことは 313 ページ以降で述べている．

練習 6.30 次の定積分を求めよ．解

(1) $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^3\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_3^0 2\,dx$

例題 6.9 次の定積分を求めよ．S

(1) $\displaystyle\int_0^1 (-x^2+3x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 (t-2)(t+4)\,dt$

解答　(1)
$$\int_0^1 (-x^2+3x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \left(-\frac{1^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot 1^2\right) - \left(-\frac{0^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot 0^2\right) = \frac{7}{6}$$

(2)
$$\int_{-1}^2 (t-2)(t+4)\,dt = \int_{-1}^2 (t^2+2t-8)\,dt$$
$$= \left[\frac{t^3}{3}+t^2-8t\right]_{-1}^2$$
$$= \left(\frac{2^3}{3}+2^2-8\cdot 2\right) - \left\{\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2-8(-1)\right\} = -18$$

注意 変数を表す文字が違うだけの定積分の値は等しい．たとえば，

$\displaystyle\int_{-1}^2 (t-2)(t+4)\,dt = \int_{-1}^2 (x-2)(x+4)\,dx$ である．

練習 6.31 次の定積分を求めよ．解

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^2+4x-5)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_2^3 (x-2)(x-3)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 (-t^3+2t)\,dt$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 t(t+2)^2\,dt$

B》定積分の性質

関数の定数倍および和，差の定積分について調べよう．

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ とすると

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx &= \Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b \\ &= \{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\} \\ &= \{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\} \\ &= \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

となる．同様にして，次の公式 **1, 3** も得られる．

関数の定数倍および和，差の定積分

1 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{k}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$　　k は定数

2 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\}\boldsymbol{dx}=\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}+\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$

3 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\}\boldsymbol{dx}=\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}-\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$

証明　1　$F'(x)=f(x)$ とすると，$\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$ であるから

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,dx &= \Big[\ kF(x)\ \Big]_a^b = kF(b)-kF(a) \\ &= k\{F(b)-F(a)\}=k\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

3　$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ とすると

$$\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx &= \Big[F(x)-G(x)\Big]_a^b \\ &= \{F(b)-G(b)\}-\{F(a)-G(a)\} \\ &= \{F(b)-F(a)\}-\{G(b)-G(a)\} \\ &= \int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

証終

例 6.16 $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^2-5x+4)\,dx = \int_{-1}^{2}x^2\,dx - 5\int_{-1}^{2}x\,dx + 4\int_{-1}^{2}dx$ S

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} + 4\left[x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{2^3-(-1)^3}{3} - \frac{5\{2^2-(-1)^2\}}{2} + 4\{2-(-1)\}$$

$$= \frac{15}{2}$$

練習 6.32 次の定積分を求めよ． 解

$$\int_{1}^{3}(x^3-3x+2)\,dx$$

前ページの公式は，右辺を左辺の形に変形するときにも用いられる．

例 6.17 $\displaystyle\int_{1}^{2}(x^2+3x)\,dx + \int_{1}^{2}(x^2-3x)\,dx$ ← 前ページの公式 **2** の右辺から左辺を導く変形 S

$$= \int_{1}^{2}\{(x^2+3x)+(x^2-3x)\}dx$$

$$= \int_{1}^{2}2x^2\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} = \frac{2(2^3-1^3)}{3} = \frac{14}{3}$$

練習 6.33 次の定積分を求めよ． 解

$$\int_{-1}^{1}(x+2)^2dx - \int_{-1}^{1}(x-2)^2dx$$

定積分の上端，下端に関する性質として，次のことが成り立つ．

定積分の性質

1 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{0}$

2 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx} = -\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx}$

3 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx} + \int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx}$

注意 性質 **3** は，a，b，c の大小に関係なく成り立つ．

3 の証明 $F'(x) = f(x)$ とすると

$$\begin{aligned}&\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^c + \Big[F(x)\Big]_c^b\\ &= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\} = F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

証終

練習 6.34 上の定積分の性質 **1, 2** を証明せよ． 解

例 6.18 $\displaystyle\int_0^1 (x^2-x)dx - \int_2^1 (x^2-x) = \int_0^1 (x^2-x)dx + \int_1^2 (x^2-x)dx$ S

$$= \int_0^2 (x^2-x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

練習 6.35 次の定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int_1^2 (3x^2-4x)dx + \int_2^3 (3x^2-4x)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^3 (x^2+2x)dx - \int_1^3 (x^2+2x)dx$

応用例題 6.8 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ． S

$$f(x) = 2x + 3\int_0^1 f(t)\,dt$$

考え方》 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから，a を定数として $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ とおける．

解答 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = a$ とおくと　　$f(x) = 2x + 3a$

よって　　$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (2t + 3a)dt$

$$= \Big[\, t^2 + 3at \,\Big]_0^1 = 1 + 3a$$

これより，$1 + 3a = a$ であるから　　$a = -\dfrac{1}{2}$

したがって　　$f(x) = 2x - \dfrac{3}{2}$

練習 6.36 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ． 解

(1) $f(x) = 4x + 2\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$

(2) $f(x) = 3x^2 + \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt$

a は定数とする．関数 $f(t)$ に対して $F'(t) = f(t)$ のとき，$f(t)$ の定積分

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \qquad \leftarrow \text{上端が } x \text{ で，下端が定数 } a$$

は，x の関数である．右辺の関数を x で微分すると

$$F'(x) - (F(a))' = f(x) \qquad \leftarrow F(a) \text{ は定数で } (F(a))' = 0$$

となるから，次のことが成り立つ．

> **a を定数とするとき　x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数は $f(x)$ である．**
>
> **すなわち　　$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$**

注意 x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数を $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$ で表す．

練習 6.37 x の関数 $\displaystyle\int_0^x (3t^2 - 2t - 1)\,dt$ の導関数を求めよ．　解

応用例題 6.9 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．　S

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 3x + 2$$

考え方》 等式の両辺を x で微分する．また，与えられた等式で $x = a$ とおくと，左辺は $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$ となる．

解答　等式の両辺を x で微分すると　　$f(x) = 2x - 3$

また，与えられた等式で $x = a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$$0 = a^2 - 3a + 2$$

これを解いて　　$a = 1,\ 2$　　(答) $f(x) = 2x - 3,\ a = 1,\ 2$

練習 6.38 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．　解

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - x - 2$$

6.3.3 定積分と面積

定積分は，図形の面積と関係がある．ここでは，定積分を使っていろいろな図形の面積を求めてみよう．

A ≫ 定積分の図形的な意味

関数 $f(x) = 2x$ について考えよう．

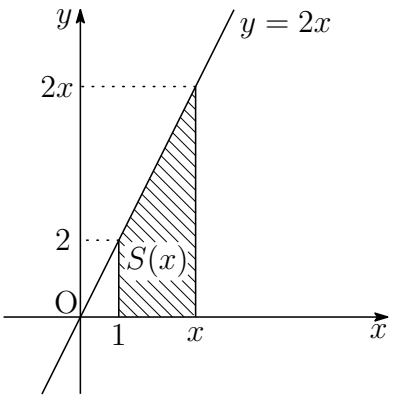
右の図において，関数 $y = 2x$ のグラフと x 軸，および x 軸に垂直な 2 直線で囲まれた斜線部分の面積は

$$\frac{1}{2}(2 + 2x)(x - 1) = x^2 - 1$$

であり，これは x の関数である．

ここで，この面積を $S(x)$ とおくと

$$S(x) = x^2 - 1, \quad S'(x) = 2x$$

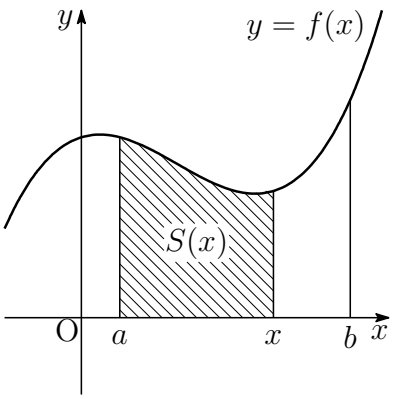


$f(x) = 2x$ であるから，$S'(x) = 2x$ が成り立つ．すなわち，面積を表す関数$S(x)$が，関数$f(x)$の原始関数の1つになっている．

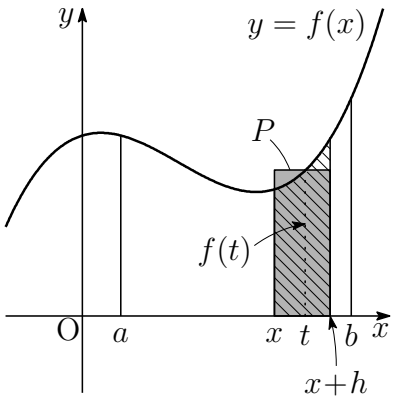
関数 $y = f(x)$ のグラフと面積について調べたことを，一般の関数 $y = f(x)$ について考えてみよう．

関数 $f(x)$ は，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ であるとする．

右の図において，$y = f(x)$ のグラフと x 軸の間の部分のうち，x 座標が a から x までの斜線部分は x の関数である．この関数を $S(x)$ とする．



$h>0$ のとき，右の図の斜線部分の面積は $S(x+h)-S(x)$ である．また，$x \leqq t \leqq x+h$ で，P は横の長さ h，縦の長さ $f(t)$ の長方形である．この P の面積と斜線部分の面積が等しくなるように t をとると



$$S(x+h)-S(x)=hf(t)$$

よって　$\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(t)$　$\cdots(*)$

$h<0$ のときは，斜線部の面積は $S(x)-S(x+h)$ である．$x+h \leqq t \leqq x$ で，P は横の長さ $-h$，高さ $f(t)$ の長方形であるから，同様に

$$S(x)-S(x+h)=-hf(t) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(t)$$

となり，$(*)$ と一致する．

$h \longrightarrow$ のとき，$t \longrightarrow x$ であるから，$f(t) \longrightarrow f(x)$ となり

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x) \quad \text{すなわち} \quad S'(x)=f(x)$$

したがって，面積 $S(x)$ は関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つである．

ここで，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとすると

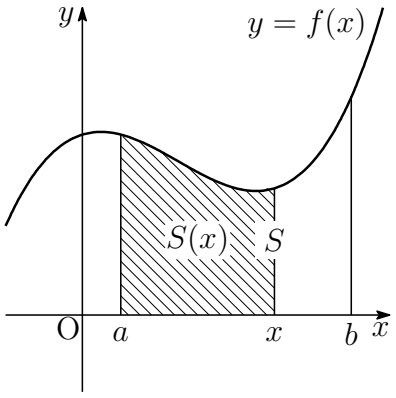
$$S(x)=F(x)+C \qquad (C \text{ は定数}) \quad \cdots①$$

$S(x)$ の意味から，$S(a)=0$ であるから，
① で $x=a$ とすると

$$0=F(a)+C \quad \text{すなわち} \quad C=-F(a)$$

これを ① に代入すると

$$S(x)=F(x)-F(a)$$



よって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および
2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=S(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

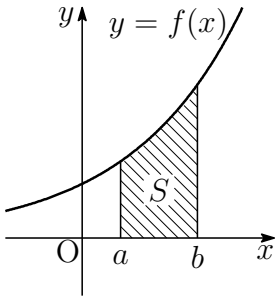
B 》曲線と x 軸の間の面積

313 ページで学んだことから，関数 $y=f(x)$ について，次のことが成り立つ．

定積分と図形の面積 (1)

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，
$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x=a,\ x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

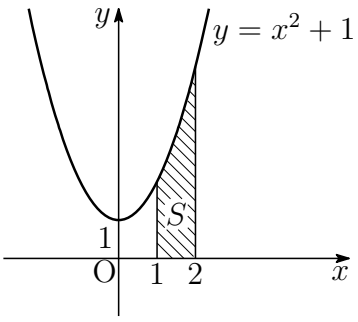
$$\boldsymbol{S=\int_a^b f(x)\,dx}$$



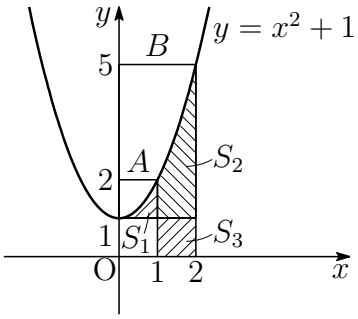
例題 6.10 放物線 $y=x^2+1$ と x 軸および 2 直線 $x=1,\ x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ． S

解答 $1 \leqq x \leqq 2$ では $y>0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_1^2 (x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^2=\frac{10}{3}$$



補足 例題 6.10 の面積は，右の図の正方形 A と長方形 B の面積を利用して求めることもできる．



S_1 は A の面積の $1/3$ であるから

$$S_1=1^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

S_1+S_2 は B の面積の $1/3$ であるから

$$S_1+S_2=2\cdot4\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\quad\text{ゆえに}\quad S_2=\frac{8}{3}-S_1=\frac{7}{3}$$

よって $\quad S=S_2+S_3=\frac{7}{3}+1=\frac{10}{3}$

練習 6.39 次の放物線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ． 解

(1) 放物線 $y = x^2$，2 直線 $x = 1$，$x = 3$

(2) 放物線 $y = x^2 + 2$，2 直線 $x = -1$，$x = 2$

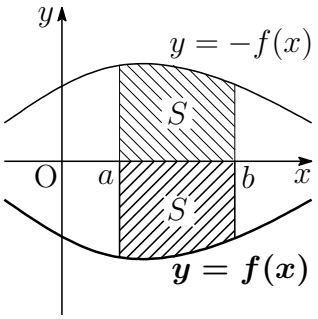
深化 6.4 309 ページにおいて，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$　$\cdots$① が成り立つことを確かめている．ここでは，$a < c < b$ とし，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ とした場合に ① が成り立つことを，上の定積分と面積 (1) を利用して確かめてみよう． 解

$y=f(x)$ のグラフと $y=-f(x)$ のグラフは，x 軸に関して対称である．
よって，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ のとき，次のことが成り立つ．

定積分と図形の面積 (2)

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \leqq 0$ のとき，
$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S=\int_a^b \{-f(x)\}dx}$$



例題 6.11 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ． S

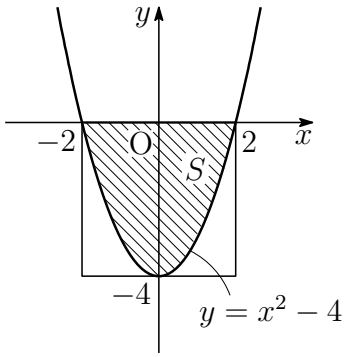
$$y=x^2-4$$

解答 放物線と x 軸の交点の x 座標は，
方程式 $x^2-4=0$ を解いて

$$x=-2,\ 2$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ では $y \leqq 0$ であるから，
求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{2}\{-(x^2-4)\}dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}$$



補足 斜線部分は y 軸について対称で，$S=2\displaystyle\int_0^2\{-(x^2-4)\}dx$ が成り立つ．

面積 S は，図の長方形 (正方形) の面積の 2/3 である．

1/6 公式を用いて，S を求めることもできる． → 練習 6.31 の解答 (補足)

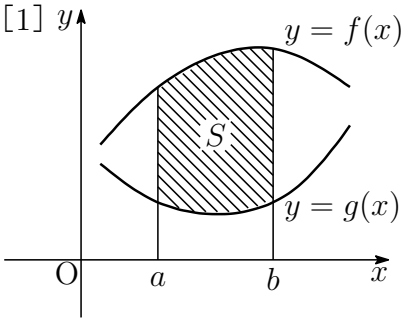
$$S=-\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)\,dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-2)\}^3=\frac{32}{3}$$

練習 6.40 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．解

(1) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$

(2) $y = x^2 - 2x$

C》2 つの曲線の間の面積



2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの間の部分の面積を考えてみよう．

右の図 [1] のように，$f(x) \geqq g(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフおよび 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた斜線部分の面積 S は，次の式で表される．

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{すなわち} \quad S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$

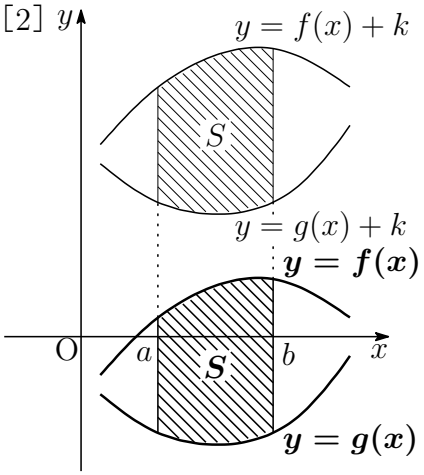


図 [2] のように，$f(x)$ や $g(x)$ が負の値をとることがある場合，2 つのグラフを y 軸方向に k だけ平行移動して，斜線部分全体が x 軸の上側にくるように移す．すると，上で示したことから

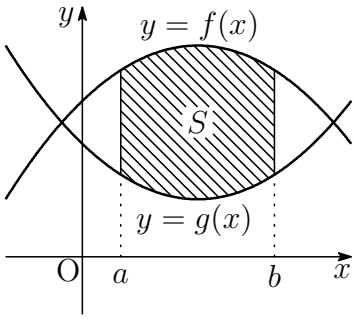
$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{(f(x)+k) - (g(x)+k)\}dx \\ &= \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx \end{aligned}$$

以上から，次のことが成り立つ．

定積分と図形の面積 (3)

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，
$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフおよび 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx}$$

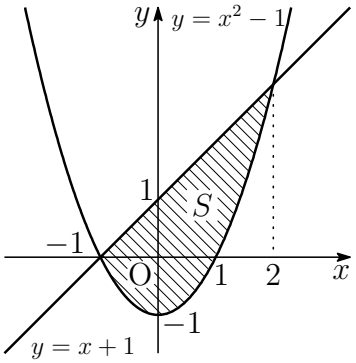


2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$h(x) = f(x) - g(x)$ とすると，$y = h(x)$ のグラフは，区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$h(x) \geqq 0$ であるから，次の定積分を求めてもよい．

$$S = \int_a^b h(x)\,dx$$

例 6.19 放物線 $y = x^2 - 1$ と直線 $y = x + 1$ で囲まれた部分の面積 S を求める． S

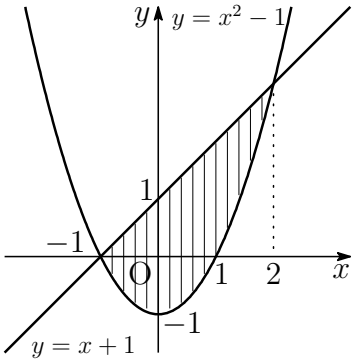
方程式と直線は右の図のようになり，
その交点の x 座標は，方程式
$x^2 - 1 = x + 1$ の解である．
$x^2 - x - 2 = 0$ より　$x = -1,\ 2$
よって，求める面積 S は，図から

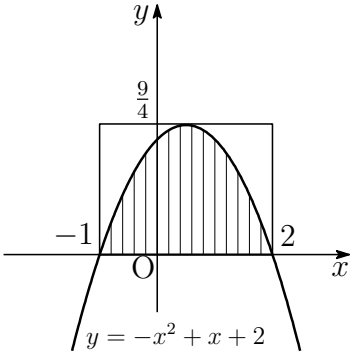


$$S = \int_{-1}^{2} \{(x+1) - (x^2 - 1)\} dx$$
$$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2) dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

別解（1/6 公式）　$S = -\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2)\, dx = -\left(-\frac{1}{6}\right) \{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2}$

例 6.19 に現れた定積分 $\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2) dx$ は，放物線 $y = -x^2 + x + 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を表している．これは，座標平面上の図形を y 軸に平行な直線で切ったとき，その切り口の長さがつねに等しいならば，2 つの図形の面積が等しいことを示している (**カヴァリエリの原理**).





放物線の方程式を変形すると　$y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

面積 S は図の長方形の面積の 2/3 であるから

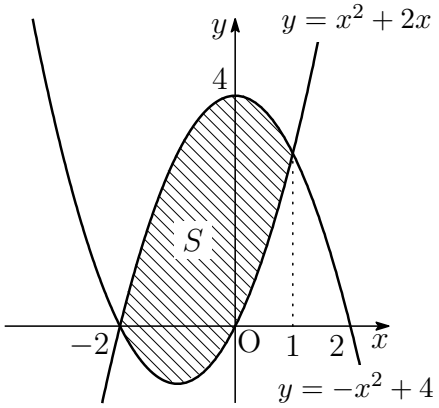
$$S = \{2 - (-1)\} \cdot \frac{9}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{2}$$

例題 6.12 次の 2 つの放物線で囲まれた部分の面積 S を求めよ. S

$$y = x^2 + 2x, \quad y = -x^2 + 4$$

解答 2 つの放物線は右の図のようになり，
その交点の x 座標は，方程式
$x^2 + 2x = -x^2 + 4$ の解である.
$2x^2 + 2x - 4 = 0$ より $\quad x = -2,\ 1$
よって，求める面積 S は，図から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} \{(-x^2 + 4) - (x^2 + 2x)\} dx \\ &= \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \right]_{-2}^{1} = 9 \end{aligned}$$



別解 定積分の計算を 1/6 公式を用いて求めることもできる.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4) dx \\ &= -2 \int_{-2}^{1} (x + 2)(x - 1) dx \\ &= (-2) \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \cdot \{1 - (-2)\}^3 = 9 \end{aligned}$$

補足 S は放物線 $y = -2x^2 + 2x + 4$ と x 軸で囲まれた部分の面積である.

$$y = -2\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{2}$$

交点の x 座標と放物線の頂点の y 座標により

$$S = \{1 - (-2)\} \cdot \frac{9}{2} \times \frac{2}{3} = 9$$

練習 6.41 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ．解

(1) $y = x^2,\ y = -x + 2$

(2) $y = -x^2 + 3,\ y = 2x$

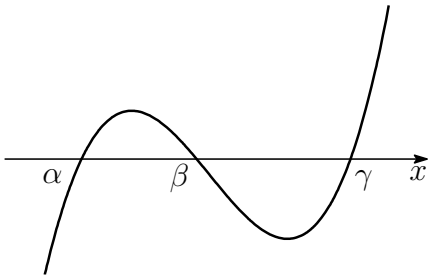
(3) $y = -x^2 + 3x,\ y = x^2 - x - 6$

D》いろいろなグラフと面積の和

$\alpha < \beta < \gamma$ のとき，3 次関数

$$y = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

のグラフは，x 軸と異なる 3 点で交わる．また，x^3 の係数が正であるから，このグラフの概形と x 軸の位置関係は，右の図のようになる．



例題 6.13 次の曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ． S

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x$$

解答 曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

の解である．

$x(x-1)(x-2) = 0$ より

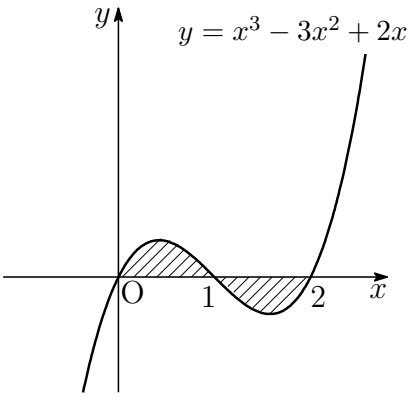
$$x = 0,\ 1,\ 2$$

グラフは右の図のようになり

$$0 \leqq x \leqq 1 \text{ で } \quad y \geqq 0$$
$$1 \leqq x \leqq 2 \text{ で } \quad y \leqq 0$$

よって，求める面積の和 S は

$$S = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx + \int_1^2 \{-(x^3 - 3x^2 + 2x)\}\,dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2}$$



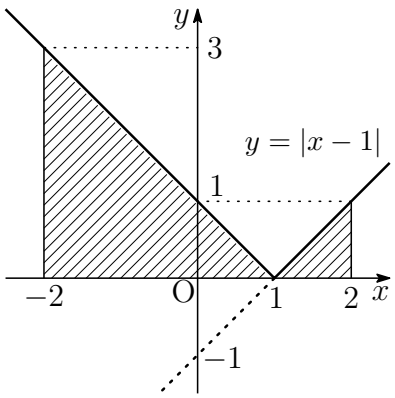
練習 6.42 次の曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ． 解

$$y = x^3 - x^2 - 2x$$

関数 $y=|x-1|$ は

$$x \geqq 1 \text{ のとき} \quad y=x-1$$
$$x \leqq 1 \text{ のとき} \quad y=-x+1$$

であり，そのグラフは右の図のようになる．



定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{2}|x-1|\,dx$ は，関数 $y=|x-1|$ のグラフと x 軸，および 2 直線 $x=-2$, $x=2$ で囲まれた部分の面積 S と考え，次のように表すことができる．

$$S=\int_{-2}^{2}|x-1|\,dx=\int_{-2}^{1}(-x+1)\,dx+\int_{1}^{2}(x-1)\,dx$$

この定積分を求めると (2 つの直角二等辺三角形の面積の和)

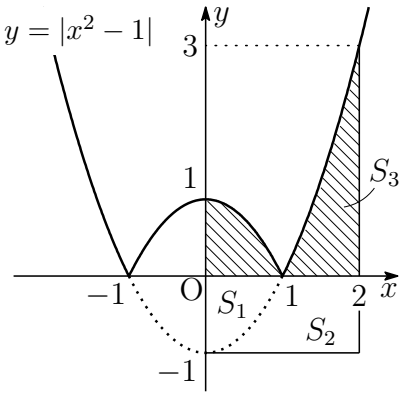
$$S=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{1}^{2}=5$$

例題 6.14 定積分 $\displaystyle\int_{0}^{2}|x^2-1|\,dx$ を求めよ． S

解答 関数 $y=|x^2-1|$ は

$$x \leqq -1,\ 1 \leqq x \text{ のとき} \quad y=x^2-1$$
$$-1 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} \quad y=-x^2+1$$

である．よって



$$\begin{aligned}&\int_{0}^{2}|x^2-1|\,dx\\ &=\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)\,dx\\ &=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2}=2\end{aligned}$$

補足　上の図において

$$S_1=\frac{2}{3}\cdot 1^2,\quad S_1+S_2=2\cdot 1,\quad S_2+S_3=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 4$$

したがって　$S_1=\dfrac{2}{3},\ S_2=\dfrac{4}{3},\ S_3=\dfrac{4}{3}$　　よって　$S=S_1+S_3=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=2$

練習 6.43 次の定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{1} |x^2 - 4|\, dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{5} |x(x-3)|\, dx$

研究

曲線と接線で囲まれた部分の面積

曲線とその接線とで囲まれた部分の面積を求めてみよう.

Ex 6.1 曲線 $C : y = x^3 - 4x$ 上に点 $\mathrm{A}(1, -3)$ をとる.

(1) 点 A における接線 ℓ の方程式を求めよ.

(2) 曲線 C と接線 ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

解答　(1) $f(x) = x^3 - 4x$ とすると，接線 ℓ の傾きは $f'(1)$ である.
$f'(x) = 3x^2 - 4$ であるから　　$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 = -1$
よって，接線 ℓ の方程式は

$$y - (-3) = -(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -x - 2$$

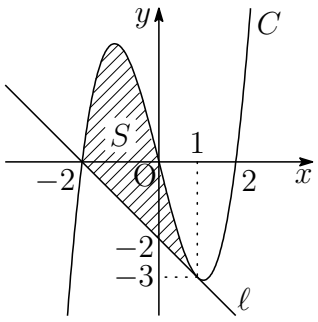
(2) 曲線 C と接線 ℓ の交点の x 座標を求める.
方程式 $x^3 - 4x = -x - 2$ を整理すると　$x^3 - 3x + 2 = 0$
左辺を因数分解すると

$$(x - 1)^2(x + 2) = 0$$

これを解くと

$$x = 1, -2$$

接線 ℓ が曲線 C と交わる点の x 座標は -2 であり，グラフは，右の図のようになる．よって，求める面積 S は



$$S = \int_{-2}^{1} \{(x^3 - 4x) - (-x + 2)\}\, dx$$
$$= \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{1} = \frac{27}{4}$$

補足 C の変曲点の x 座標は $y'' = 0$，すなわち，$x = 0$ である．C のグラフは，変曲点を境にグラフの凹凸が変化する．接点 A では C は下に凸であるから，接線 ℓ は斜線部分の下側を通る．したがって，ℓ の方程式を $g(x) = -x - 2$ とすると，区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ で，$f(x) \geqq g(x)$ である．よって

$$S = \int_{-2}^{1} \{f(x) - g(x)\}\, dx$$

因数分解の結果 $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x+2)$ を利用すると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)\,dx = \int_{-2}^{1}(x-1)^2\{(x-1)+3\}\,dx \\ &= \int_{-2}^{1}\{(x-1)^3+3(x-1)^2\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\ \right]_{-2}^{1} \\ &= 0-\left\{\frac{1}{4}(-3)^4+(-3)^3\right\}=\frac{27}{4} \end{aligned}$$

また，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと

$$h(x)=(x-1)^2(x+2)$$

区間 $-2\leqq x\leqq 1$ において，$h(x)\geqq 0$，$h(-2)=h(1)=0$ であるから，定理 5 を利用すると ($h(x)$ が 3 次以下の整式であることが利用条件)

$$S=\int_{-2}^{1}h(x)\,dx=\frac{2}{3}\{1-(-2)\}h\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\times 3\times\frac{27}{8}=\frac{27}{4}$$

演習 6.1 曲線 $C: y=x^3+x^2-2x$ と，その曲線上の点 $(1,\ 0)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ． 解

研究

放物線と x 軸で囲まれた部分の面積

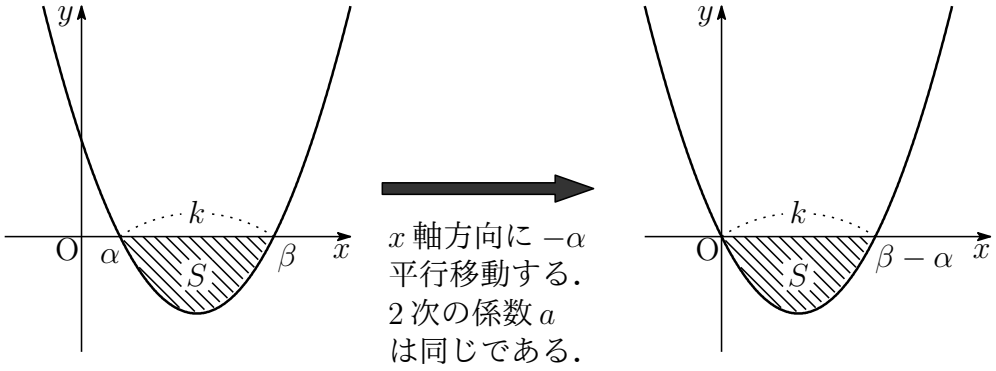
下の図 [1] のような放物線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ が x 軸から切り取る線分の長さは，$\beta-\alpha$ である．この放物線を x 軸方向に平行移動しても，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積は変わらない．$\beta-\alpha=k$ とおくと，面積 S は図 [2] により

$$S=\int_0^k\{-x(x-k)\}dx=\int_0^k(-x^2+kx)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k=\left(-\frac{k^3}{3}+\frac{k^3}{2}\right)=\frac{1}{6}k^3$$

$k=\beta-\alpha$ であるから，次のことがいえる．

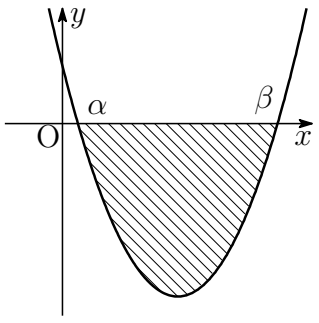
$$S=\int_\alpha^\beta\{-(x-\alpha)(x-\beta)\}dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

［1］ $y=(x-\alpha)(x-\beta)$　　［2］ $y=x(x-k)$



Ex 6.2 放物線 $y=x^2-4x+1$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求める．

放物線 x 軸の交点の x 座標は
$x^2-4x+1=0$ を解いて　$x=2\pm\sqrt{3}$
$\alpha=2-\sqrt{3},\ \beta=2+\sqrt{3}$ とすると



$$S=\int_\alpha^\beta\{-(x^2-4x+1)\}\,dx$$
$$=\int_\alpha^\beta\{-(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\beta-\alpha=2\sqrt{3}$ より　　$S=\dfrac{1}{6}(2\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}$

演習 6.2 放物線 $y=-x^2+6x-7$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ． 解

6.3.4 問題

問題 6.14 曲線 $y = f(x)$ は点 $(1,\ 2)$ を通り，その曲線上の各点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは $2x + 1$ で表される．この曲線の方程式を求めよ． 解 → p.304 応用例題 6.7

問題 6.15 次の定積分を求めよ． 解 → p.306 例題 6.9 p.324 例題 6.14

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x-1)^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (t+2)(t-1)\,dt$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{2} |x^2+x-2|\,dx$

問題 6.16 次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．解

(1) $y = x^2,\ y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2$

→ p.320〜323

(2) $y = x(x+2)^2,\ x$ 軸

Think

グラフの対称性を利用した定積分

317 ページの例題 6.11 について，先生と A さんが話しています．

A： 例題 6.11 の**補足**では，積分する関数のグラフの対称性を利用して，計算を簡単にしているんですね．

先生： その通りです．一般には，n を 0 または正の整数として，

$$\int_{-a}^{a} x^{2n}\,dx = 2\int_{0}^{a} x^{2n}\,dx, \quad \int_{-a}^{a} x^{2n+1}\,dx = 0 \qquad \cdots ①$$

が成り立ちますよ．

A： 積分する関数のグラフの対称性を考えてみても納得できそうです．

演習 6.3 $y = x^3 + x^2 + x + 3$ のグラフは原点や y 軸に関して対称ではないが，

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + x^2 + x + 3)\,dx$$

の計算において ① の公式を利用して，簡単に計算できる．どのように利用すればよいか考えてみよう． 解

6.4　章末問題

6.4.1　章末問題 A

章末 6.1 次の関数を微分せよ．解

(1)　$y = (2x+1)(1-x^2)$　　(2)　$y = (x-2)(x^2+2x+4)$

章末 6.2 曲線 $y = x^3 - 4x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(3, -9)$ における接線を ℓ とする．解

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) この曲線の接線には，ℓ に平行なもう 1 本の接線がある．その接点 B の x 座標を求めよ．

章末 6.3 関数 $y = x^2(x-a)$ の増減を次の各場合について調べ，極大値がある場合はその極大値を求めよ．ただし，a は定数とする．解

(1)　$a > 0$　　(2)　$a = 0$　　(3)　$a < 0$

章末 6.4 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，$x = 1$ で極大値 5 をとり，$x = 3$ で極小値 1 をとるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ． 解

章末 6.5 関数 $y = x^3 - x + 1$ のグラフと直線 $y = 2x + a$ が異なる 3 点で交わるように，定数 a の値の範囲を定めよ． 解

章末 6.6 次の定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2x-3)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (t^2-2) dt$

章末 6.7 等式 $f(x) = x^2 + 2\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ． 解

章末 6.8 関数 $f(x) = \displaystyle\int_1^x (t-1)(t-2)dt$ の極大値を求めよ． 解

章末 6.9 放物線 $y = x^2 - 3x$ と次の 2 直線で囲まれた部分の面積を求めよ． 解

(1) $y = 0$，$y = 4$

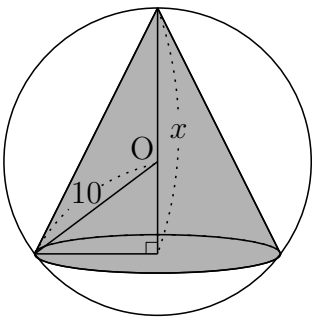
(2) $y = 2x$，$y = -x$

6.4.2 章末問題 B

章末 6.10 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx$ が常に増加するように，定数 k の値の範囲を定めよ． 解

章末 6.11 k は定数とする．$x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3 - 6x^2 + k \geqq 0$ が成り立つような k の値の最小値を求めよ． 解

章末 6.12 右の図のように，半径 10 の球に内接する直円錐(すい)がある．このような直円錐の体積 V の最大値 V_1 と球の体積 V_2 の比を求めよ． 解



章末 6.13 どのような 1 次関数 $f(x)$ に対しても，次の不等式が成り立つことを証明せよ． 解

$$\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2 < \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$$

章末 6.14 放物線 $y = x^2 - ax$ と x 軸で囲まれた部分の面積が $\dfrac{4}{3}$ になるような定数 a の値を求めよ． 解

章末 6.15 放物線 $y = x^2 - 2x + 4$ に原点 O から 2 本の接線を引くとき，放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ． 解

章末 6.16 曲線 $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ と，その曲線上の点 $(-2,\ 6)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ． 解

ヒント

10 常に $f'(x) \geqq 0$ が成り立つように，定数 k の値の範囲を定める．
12 直円錐の高さを x として考える．
13 $f(x) = ax + b$ とおく．

発展　4 次関数のグラフ

関数 x^n の導関数について，267 ページでは，$n = 1,\ 2,\ 3$ の場合を学んだが，一般に次のことが成り立つ．

関数 x^n の導関数

関数 x^n の導関数は　$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$　　n は正の整数

補足　このことについては，数学 III で詳しく扱っている．

例 1　関数 $y = x^4 + 2x^3 + 1$ の増減，極値とグラフ

$y' = 4x^3 + 6x^2$

$= 2x^2(2x + 3)$

$y' = 0$ とすると

$x = 0,\ -\dfrac{3}{2}$

y の増減表は，右のようになる．

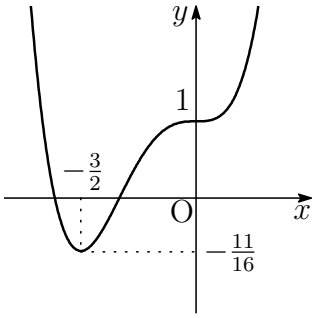
よって，この関数は

$x = -\dfrac{3}{2}$ で極小値 $-\dfrac{11}{16}$

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘	極小 $-\frac{11}{16}$	↗	1	↗



練習 1　次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

(1)　$y = x^4 - 4x^3 + 1$　　(2)　$y = x^4 - 2x^2$

【解】 (1) $y' = 4x^3 - 12x^2$

$= 4x^2(x-3)$

$y' = 0$ とすると

$x = 0,\ 3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	1	↘	極小 -26	↗

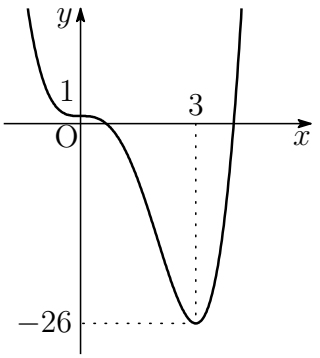
y の増減表は，右のようになる．

よって，この関数は

$x = 3$ で極小値 -26

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



(2) $y' = 4x^3 - 4x^2$

$= 4x(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると

$x = -1,\ 0,\ 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 -1	↗	極大 0	↘	極小 -1	↗

y の増減表は，右のようになる．

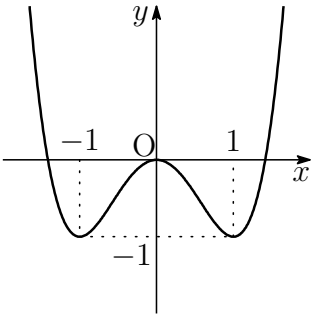
よって，この関数は

$x = \pm 1$ で極小値 -1

$x = 0$ で極大値 0

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



発展　**3 次関数のグラフと面積**

関数 x^n の不定積分について，302 ページでは $n = 0,\ 1,\ 2$ の場合について学んだ．また，前ページから，n が 0 または正の整数のとき，

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(x^{n+1})' = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^n = x^n$$

である．よって，一般に次のことが成り立つ．

関数 x^n の不定積分

n が 0 または正の整数のとき　$\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

補足　このことについては，数学 III で詳しく扱っている．

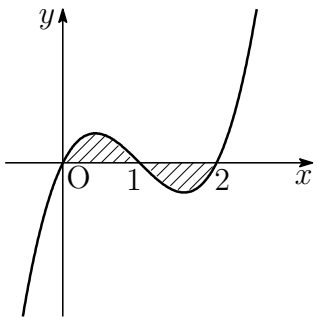
例 1　曲線 $y = x(x-1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和

方程式 $x(x-1)(x-2) = 0$ を解くと

$$x = 0,\ 1,\ 2$$

グラフは右の図のようになり

$$0 \leqq x \leqq 1 \text{ で } \quad y \geqq 0$$
$$1 \leqq x \leqq 2 \text{ で } \quad y \leqq 0$$



よって，求める面積の和 S は

$$S = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx + \int_1^2 \{-(x^3 - 3x^2 + 2x)\}\,dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

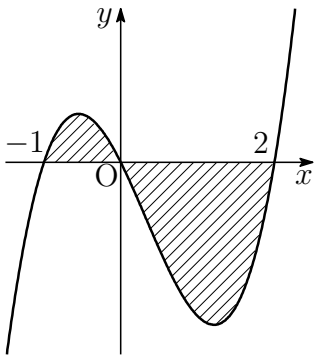
練習 1　曲線 $y = x(x+1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．

【解】方程式 $x(x+1)(x-2)=0$ を解くと

$$x=-1,\ 0,\ 2$$

グラフは右の図のようになり

$$-1 \leqq x \leqq 0 \text{ で } \quad y \geqq 0$$
$$0 \leqq x \leqq 2 \text{ で } \quad y \leqq 0$$



よって，求める面積の和 S は

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}\{-(x^3-x^2-2x)\}\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}=\frac{37}{12}$$

解答

練習 1.1 (1) $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 + 2^3$
$= \boldsymbol{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

(2) $(x-1)^3 = x^3 - 3\cdot x^2\cdot 1 + 3\cdot x\cdot 1^2 - 1^3$
$= \boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

(3) $(3a+b)^3 = (3a)^3 + 3\cdot(3a)^2\cdot b + 3\cdot 3a\cdot b^2 + b^3$
$= \boldsymbol{27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3}$

(4) $(x-2y)^3 = x^3 - 3\cdot x^2\cdot 2y + 3\cdot x\cdot(2y)^2 - (2y)^3$
$= \boldsymbol{x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3}$

練習 1.2 (左辺を展開し，右辺を導く)

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3$$

よって　$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - b^3$$

よって　$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

練習 1.3 (1) $(x+2)(x^2-2x+4) = (x+2)(x^2 - x\cdot 2 + 2^2)$
$= x^3 + 2^3 = \boldsymbol{x^3 + 8}$

(2) $(x-3)(x^2+3x+9) = (x-3)(x^2 + x\cdot 3 + 3^2)$
$= x^3 - 3^3 = \boldsymbol{x^3 - 27}$

(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2) = (x+3y)\{x^2 - x\cdot 3y + (3y)^2\}$
$= x^3 + (3y)^3 = \boldsymbol{x^3 + 27y^3}$

(4) $(2x-a)(4x^2+2ax+a^2) = (2x-a)\{(2x)^2 + 2x\cdot a + a^2\}$
$= (2x)^3 - a^3 = \boldsymbol{8x^3 - a^3}$

練習 1.4 (1) $x^3-1=x^3-1^3$
$=(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)$
$=\boldsymbol{(x-1)(x^2+x+1)}$

(2) $x^3+27a^3=x^3+(3a)^3$
$=(x+3a)\{x^2-x\cdot 3a+(3a)^2\}$
$=\boldsymbol{(x+3a)(x^2-3ax+9a^2)}$

(3) $x^3-64=x^3-4^3$
$=(x-4)(x^2+x\cdot 4+4^2)$
$=\boldsymbol{(x-4)(x^2+4x+16)}$

(4) $125x^3-y^3=(5x)^3-y^3$
$=(5x-y)\{(5x)^2+5x\cdot y+y^2\}$
$=\boldsymbol{(5x-y)(25x^2+5xy+y^2)}$

練習 1.5 (1) $x^6-1=(x^3)^2-1^2=(x^3+1)(x^3-1)$
$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)\quad\leftarrow$ OK
$=\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

別解 $x^6-1=(x^2)^3-1^3=(x^2-1)\{(x^2)^2+x^2+1\}$
$=(x^2-1)\{(x^2+1)^2-x^2\}$
$=(x+1)(x-1)\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}$
$=\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

(2) $a^6-64b^6=(a^3)^2-(8b^3)^2=(a^3+8b^3)(a^3-8b^3)$
$=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)\quad\leftarrow$ OK
$=\boldsymbol{(a+2b)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)}$

別解 $a^6-64b^6=(a^2)^3-(4b^2)^3=(a^2-4b^2)\{(a^2)^2+a^2\cdot 4b^2+(4b^2)^2\}$
$=(a^2-4b^2)\{(a^2+4b^2)^2-(2ab)^2\}$
$=(a+2b)(a-2b)\{(a^2+4b^2)+2ab\}\{(a^2+4b^2)-2ab\}$
$=\boldsymbol{(a+2b)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)}$

深化 1.1 $x^2+y^2=A,\ xy=B$ と考え，$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ を利用する．

$x^6-y^6=(x^2-y^2)\{(x^2)^2+x^2y^2+(y^2)^2\}$
$=(x^2-y^2)\{(x^2+y^2)^2-(xy)^2\}$
$=(x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)-xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}$
$=\boldsymbol{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}$

練習 1.6 $(a+b)^4$ の展開式 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ の係数により

$$\begin{array}{rccccccc} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ \times\ ) & 1 & & & & & & \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \hline & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

よって　$(a+b)^5 = a^5 + \boxed{5}\,a^4b + \boxed{10}\,a^3b^2 + \boxed{10}\,a^2b^3 + \boxed{5}\,ab^4 + b^5$

練習 1.7 $(a+b)^6$ の展開式の項の係数は　**1, 6, 15, 20, 15, 6, 1**

練習 1.8 (1) $(x+1)^4 = {}_4\mathrm{C}_0x^4 + {}_4\mathrm{C}_1x^3\cdot 1 + {}_4\mathrm{C}_2x^2\cdot 1^2 + {}_4\mathrm{C}_3x\cdot 1^3 + {}_4\mathrm{C}_4 1^4$
$= \boldsymbol{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}$

(2) $(x-2)^6 = {}_6\mathrm{C}_0x^6 + {}_6\mathrm{C}_1x^5\cdot(-2) + {}_6\mathrm{C}_2x^4\cdot(-2)^2 + {}_6\mathrm{C}_3x^3\cdot(-2)^3$
$+{}_6\mathrm{C}_4x^2(-2)^4 + {}_6\mathrm{C}_5x(-2)^5 + {}_6\mathrm{C}_6(-2)^6$
$= \boldsymbol{x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64}$

練習 1.9 (1) $(2x+3)^4$ の展開式の一般項は

$${}_4\mathrm{C}_r(2x)^{4-r}3^r = {}_4\mathrm{C}_r 2^{4-r}3^r x^{4-r}$$

$4-r=3$ とすると　　$r=1$

よって，求める係数は　${}_4\mathrm{C}_1\times 2^3\times 3^1 = \mathbf{96}$

(2) $(x-2y)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}(-2y)^r = {}_5\mathrm{C}_r(-2)^r x^{5-r}y^r$$

$r=3$ より，求める係数は　${}_5\mathrm{C}_3\times(-2)^3 = \mathbf{-80}$

深化 1.2 (性質 **1**) 自然数 n に対し　${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$　$(r = 0, 1, \cdots, n)$

証明 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ より

$$ {}_n\mathrm{C}_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_n\mathrm{C}_r $$

(性質 **2**) 2 以上の整数 n に対し　${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$　$(r = 0, 1, \cdots, n-1)$

証明 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ より

$$ \begin{aligned} {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \\ &= \frac{r\cdot(n-1)!}{r\cdot(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-r)\cdot(n-1)!}{r!\cdot(n-r)\cdot(n-1-r)!} \\ &= \frac{\{r+(n-r)\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_r \end{aligned} $$

別証 n 個から r 個取り出す場合の総数は ${}_n\mathrm{C}_r$ 通りある．このとき，n 個の中の特定の 1 つに着目すると，次の場合がある．

(i) 取り出す r 個の中に特定の 1 個が含まれる場合，残りの $n-1$ 個から $r-1$ 個取り出す ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 通り．

(ii) 取り出す r 個の中に特定の 1 個が含まれない場合，残りの $n-1$ 個から r 個取り出す ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ 通り．

(i)，(ii) より　${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$

補足 n が素数のとき，${}_n\mathrm{C}_r$ $(r = 1, 2, \cdots, n-1)$ は n で割り切れる．

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} $$

$r!(n-r)!$ は素数 n を因数に持たないから，$\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r)!}$ は整数．

よって，本題は成立する．

練習 1.10 等式 ① より

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n = (1+x)^n $$

これに $x = -1$ を代入すると

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1(-1) + {}_n\mathrm{C}_2(-1)^2 + \cdots + (-1)^n = (1-1)^n $$

よって　　$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1(-1) + {}_n\mathrm{C}_2(-1)^2 + \cdots + (-1)^n = 0 $

練習 1.11 (1) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において，c^2 を含む項は ${}_6\mathrm{C}_2(a+b)^4c^2$ であり，$(a+b)^4$ の展開式における a^3b の項の係数は ${}_4\mathrm{C}_1$ である．

よって，求める係数は　　${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1 = \dfrac{6\cdot5}{2\cdot1} \times 4 = \mathbf{60}$

(2) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において，c^2 を含む項は ${}_6\mathrm{C}_2(a+b)^4c^2$ であり，$(a+b)^4$ の展開式における a^2b^2 の項の係数は ${}_4\mathrm{C}_2$ である．

よって，求める係数は　　${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot5}{2\cdot1} \times \dfrac{4\cdot3}{2\cdot1} = \mathbf{90}$

(3) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において，c を含まない項は ${}_6\mathrm{C}_0(a+b)^6$ であり，$(a+b)^6$ の展開式における a^2b^4 の項の係数は ${}_6\mathrm{C}_4$ である．

よって，求める係数は　　${}_6\mathrm{C}_0 \times {}_6\mathrm{C}_4 = 1 \times {}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot5}{2\cdot1} = \mathbf{15}$

深化 1.3 n 行目にある数の総和は 2^n である．

演習 1.1 $\dfrac{10!}{5!2!3!} = \mathbf{2520}$

深化 1.4 $(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ 項の係数は，二項定理を導いたときと同様に考えると，a を p 個，b を q 個，c を r 個並べる順列の総数に等しい．

$$ {}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!} = \frac{n!}{p!q!r!} \quad (p+q+r=n) $$

練習 1.12 (1)

$$
\begin{array}{r}
x^2 \quad -x \quad -3 \\
\hline
x-3\,)\,x^3-4x^2 \quad\quad -\ 5 \\
\underline{\ x^3-3x^2\ \ \ \ \ \ \ \ } \\
-x^2 \\
\underline{\ -x^2+3x\ \ \ \ } \\
-3x-\ 5 \\
\underline{\ -3x+\ 9\ } \\
-14
\end{array}
$$

商 x^2-x-3，余り -14

(2)

$$
\begin{array}{r}
2x \quad +7 \\
\hline
x^2-x+2\,)\,2x^3+5x^2-2x+\ 4 \\
\underline{\ 2x^3-2x^2+4x\ \ \ \ } \\
7x^2-6x+\ 4 \\
\underline{\ 7x^2-7x+14\ } \\
x-10
\end{array}
$$

商 $2x+7$，余り $x-10$

(3)

$$
\begin{array}{r}
x \quad -2 \\
\hline
x^2+2x-3\,)\,x^3 \quad\quad -7x+6 \\
\underline{\ x^3+2x^2-3x\ \ \ \ } \\
-2x^2-4x+6 \\
\underline{\ -2x^2-4x+6\ } \\
0
\end{array}
$$

商 $x-2$，余り 0

練習 1.13 この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$x^3+4x^2+4x-2=B\times(x+3)+2x+1$$

整理すると

$$x^3+4x^2+2x-3=B\times(x+3)$$

よって，x^3+4x^2+2x-3 は $x+3$ で割り切れて，その商が B である．
右の計算により

$$\boldsymbol{B=x^2+x-1}$$

$$\begin{array}{r} x^2\ +x\ -1 \\ \hline x+3\,)\,x^3+4x^2+2x-3 \\ x^3+3x^2 \\ \hline x^2+2x \\ x^2+3x \\ \hline -x-3 \\ -x-3 \\ \hline 0 \end{array}$$

練習 1.14

$$\begin{array}{r} 2x\ \ -5a \\ \hline 3x+2a\,)\,6x^2-11ax-10a^2 \\ 6x^2\ +4ax \\ \hline -15ax-10a^2 \\ -15ax-10a^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

(答) 商 $\boldsymbol{2x-5a}$，余り $\boldsymbol{0}$

練習 1.15 (1) $\dfrac{15ab^4}{6a^3b^2}=\dfrac{5b^2\cdot 3ab^2}{2a^2\cdot 3ab^2}=\boldsymbol{\dfrac{5b^2}{2a^2}}$

(2) $\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+4)(x+3)}=\boldsymbol{\dfrac{x-3}{x+4}}$

(3) $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3}=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(2x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{2x-1}}$

練習 1.16 (1) $\dfrac{2x}{2x+1}\times\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}=\dfrac{2x}{2x+1}\times\dfrac{(x-2)(2x+1)}{x-2}=\boldsymbol{2x}$

(2) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}\div\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}=\dfrac{x-2}{x(x+3)}\times\dfrac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{x-2}{x^2}}$

練習 1.17 (1) $\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{x+9}{x+3}=\dfrac{2x+(x+9)}{x+3}=\dfrac{3x+9}{x+3}=\dfrac{3(x+3)}{x+3}=\boldsymbol{3}$

(2) $\dfrac{3x+1}{2x-1}-\dfrac{2x-3}{2x-1}=\dfrac{3x+1-(2x-3)}{2x-1}=\boldsymbol{\dfrac{x+4}{2x-1}}$

(3) $\dfrac{2x^2}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x-1}=\boldsymbol{2x+1}$

練習 1.18 (1) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)}$

$$=\frac{(2x-4)+(3x+3)}{(x+1)(x-2)}=\frac{\boldsymbol{5x-1}}{\boldsymbol{(x+1)(x-2)}}$$

(2) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{x^2}{x(x-1)}-\dfrac{1}{x(x-1)}$

$$=\frac{x^2-1}{x(x-1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}=\frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x}}$$

(3) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x^2-2x-3}=\dfrac{x(x-3)}{(x+1)(x-3)}+\dfrac{3x-1}{(x+1)(x-3)}$

$$=\frac{(x^2-3x)+(3x-1)}{(x+1)(x-3)}=\frac{x^2-1}{(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)}=\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x-3}}$$

(4) $\dfrac{3x+5}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{3x+5}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{1}{x(x+1)}$

$$=\frac{x(3x+5)}{x(x+1)(x-1)}-\frac{x-1}{x(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{(3x^2+5x)-(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{(x+1)(3x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{\boldsymbol{3x+1}}{\boldsymbol{x(x-1)}}$$

練習 1.19 (解法 1) $\dfrac{A}{B}=A\div B$ を利用する.

$$\frac{A}{B}=A\div B=\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{x+1}{x}\times\frac{x}{x^2-1}=\frac{x+1}{x}\times\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x-1}}$$

(解法 2) $\dfrac{A}{B}$ の分母分子に x を掛ける.

$$\frac{A}{B}=\frac{1+\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times x}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\times x}=\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x-1}}$$

練習 1.20 それぞれ左辺について

(1) 左辺 $= x^2 - 1$

(2) 左辺 $= x^2 - x + x = x^2$

(3) 左辺 $= \dfrac{(x+1)+x}{x(x+1)} = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$

(4) 左辺 $= \dfrac{(x+2)-x}{x(x+2)} = \dfrac{2}{x(x+2)}$

よって，x についての恒等式は　**(1)，(4)**

練習 1.21 等式の右辺を x について整理すると

$$2x^2 - 7x + 8 = ax^2 + (-3a+b)x + (-3b+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$2 = a, \quad -7 = -3a + b, \quad 8 = -3b + c$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = 2,\ b = -1,\ c = 5}$

練習 1.22 等式の両辺に $x(x+1)$ をかけると，次の等式が得られる．

$$1 = a(x+1) + bx$$

右辺を x について整理すると

$$1 = (a+b)x + a$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0 = a + b, \quad 1 = a$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = 1,\ b = -1}$

演習 1.2 等式の両辺の x に $0,\ 1,\ 2$ をそれぞれ代入すると

$$2 = 2b, \quad 3 = -c, \quad 4 = 2a$$

これを解くと　　$a = 2,\ b = 1,\ c = -3$

逆に，これらの値を右辺に代入し整理すると左辺と一致し，

与えられた等式は x についての恒等式である．

よって　　$\boldsymbol{a = 2,\ b = 1,\ c = -3}$

問題 1.1 (1) $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 3y + 3\cdot 2x\cdot(3y)^2 - (3y)^3$
$= \boldsymbol{8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3}$

(2) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2 = \{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}^2$
$= (a^3+b^3)^2 = (a^3)^2 + 2\cdot a^3\cdot b^3 + (b^3)^2$
$= \boldsymbol{a^6 + 2a^3b^3 + b^6}$

問題 1.2 (1) $8a^3+b^3 = (2a)^3+b^3 = (2a+b)\{(2a)^2 - 2a\cdot b + b^2\}$
$= \boldsymbol{(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)}$

(2) $(x+y)^3 - 1 = (x+y)^3 - 1^3$
$= \{(x+y)-1\}\{(x+y)^2 + (x+y)\cdot 1 + 1^2\}$
$= \boldsymbol{(x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)}$

(3) $a^6 - 7a^3 - 8 = (a^3)^2 - 7a^3 - 8 = (a^3+1)(a^3-8)$
$= (a+1)(a^2-a+1)(a-2)(a^2+2a+4)$ ← OK
$= \boldsymbol{(a+1)(a-2)(a^2-a+1)(a^2+2a+4)}$

問題 1.3 (1) $(3x^2+2)^6$ の展開式の一般項は

$$ {}_6\mathrm{C}_r(3x^2)^{6-r}2^r = {}_6\mathrm{C}_r\cdot 3^{6-r}2^r\cdot x^{2(6-r)} $$

$2(6-r) = 2$ とすると　　$r = 5$

よって，求める係数は　${}_6\mathrm{C}_5\cdot 3\cdot 2^5 = 6\times 3\times 32 = \boldsymbol{576}$

別解 $(3x^2+2)^6$ の展開式における x^2 の項は

$$ \frac{6!}{1!5!}(3x^2)^1\cdot 2^5 = 6\cdot 3\cdot 2^5 x^2 = 576x^2 $$

よって，求める係数は　**576**

(2) $(x-2y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項は

$$ \frac{5!}{1!2!2!}x^1(-2y)^2(3z)^2 = 30\cdot(-2)^2\cdot 3^2 xy^2z^2 = 1080xy^2z^2 $$

よって，求める係数は　**1080**

問題 1.4 (1) この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$A = (x+2)(x^2 - x - 3) + 5$$

したがって　　$A = (x^3 + x^2 - 5x - 6) + 5$

$$= \boldsymbol{x^3 + x^2 - 5x - 1}$$

(2) この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$2x^5 + 5x^2 - 6x + 3 = B \times (2x - 1) + x + 1$$

整理すると

$$2x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = B \times (2x - 1)$$

よって，$2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ は $2x - 1$ で割り切れて，その商が B である．

右の計算により　　$\boldsymbol{B = x^2 + 3x - 2}$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x - 2 \\ 2x-1 \,\overline{)\, 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2} \\ \underline{2x^3 - x^2} \\ 6x^2 - 7x \\ \underline{6x^2 - 3x} \\ -4x + 2 \\ \underline{-4x + 2} \\ 0 \end{array}$$

問題 1.5 **解 1** (3 つの分数式を同時に通分する)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{(x+2)(x+3)+x(x+3)+x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{3x^2+9x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{3(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \boldsymbol{\frac{3}{x(x+3)}}\end{aligned}$$

解 2 (最初の 2 つの分数式を先に計算する)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{x+2}{x(x+1)(x+2)} + \frac{x}{x(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{2(x+1)}{x(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{2}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{2(x+3)}{x(x+2)(x+3)} + \frac{x}{x(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{3(x+2)}{x(x+2)(x+3)} = \boldsymbol{\frac{3}{x(x+3)}}\end{aligned}$$

解 3 (部分分数分解を利用する)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}, \\ \frac{1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}, \\ \frac{1}{(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{(x+3)-x}{x(x+3)} = \boldsymbol{\frac{3}{x(x+3)}}\end{aligned}$$

問題 1.6 **解 1** (割り算に書きなす)

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} = A \div B &= \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \div \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{x^3 - 1}{x} \div \frac{x(x+1)+1}{x} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x} \times \frac{x}{x^2+x+1} = \boldsymbol{x+1}\end{aligned}$$

解 2 (分母と分子に x を掛ける)

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x + 1 + \frac{1}{x}} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \times x}{\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) \times x} \\ &= \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \boldsymbol{x+1}\end{aligned}$$

問題 1.7 (1) **解 1** (係数比較法) 等式の左辺を x について整理すると

$$(a+2b+2)x+(a-b+5)=0$$

この等式が x についての恒等式であるから

$$a+2b+2=0, \quad a-b+5=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=-4,\ b=1}$

解 2 (数値代入法) 等式の x に $-1,\ \dfrac{1}{2}$ をそれぞれ代入すると

$$-3b+3=0, \quad \frac{3}{2}a+6=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=-4,\ b=1$$

逆に，これらの値を左辺に代入し整理すると右辺と一致し，与えらえた等式は x についての恒等式である．よって　$\boldsymbol{a=-4,\ b=1}$

(2) **解 1** (係数比較法) 等式の右辺を x について整理すると

$$x^3=ax^3+(-3a+b)x^2+(2a-b+c)x+d$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$a=1, \quad -3a+b=0, \quad 2a-b+c=0, \quad d=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=1,\ d=0}$

解 2 (数値代入法) 等式の x に $0,\ 1,\ 2,\ 3$ をそれぞれ代入すると

$$d=0, \quad c+d=1, \quad 2b+2c+d=8, \quad 6a+6b+3c+d=27$$

これを解いて　$a=1,\ b=3,\ c=1,\ d=0$

逆に，これらの値を右辺に代入し整理すると左辺と一致し，与えらえた等式は x についての恒等式である．よって　$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=1,\ d=0}$

問題 1.8 $6x^4+x^3-ax^2+2x+1$ を $2x^2+x+1$ で割ると，商が bx^2-x-3 で，余りが $cx+d$ であるとき，次の等式が成り立つ．

$$6x^4+x^3-ax^2+2x+1=(2x^2+x+1)(bx^2-x-3)+cx+d$$

等式の右辺を x について整理すると

$$6x^4+x^3-ax^2+2x+1=2bx^4+(b-2)x^3+(b-7)x^2+(c-4)x+d-3$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$6=2b, \quad 1=b-2, \quad -a=b-7, \quad 2=c-4, \quad 1=d-3$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=4,\ b=3,\ c=6,\ d=4}$

練習 1.23 (1) 右辺 $= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + 3a^2b - 3ab^2 = a^3 - b^3$

よって　　$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

(2) 右辺 $= \left\{a^2 + 2a\cdot\dfrac{b}{2} + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2\right\} + \dfrac{3}{4}b^2 = a^2 + ab + b^2$

よって　　$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2$

(3) 左辺 $= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

右辺 $= 1 + x + x + x^2 + x(1 + 2x + x^2) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

左辺と右辺が同じ式になるから

$$(1+x)^3 = 1 + x + x(1+x) + x(1+x)^2$$

別証 (右辺から左辺を導く)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (1+x)\{1 + x + x(1+x)\} \\ &= (1+x)(1 + 2x + x^2) \\ &= (1+x)(1+x)^2 = (1+x)^3 = \text{左辺} \end{aligned}$$

練習 1.24 $c = -a - b$ であるから

$$\begin{aligned} a^2 + ca - (b^2 + bc) &= a^2 + (-a-b)a - b^2 - b(-a-b) \\ &= a^2 - a^2 - ab - b^2 + ab + b^2 = 0 \end{aligned}$$

よって　　$a^2 + ca = b^2 + bc$　　証終

練習 1.25 $a + b = -c$，$b + c = -a$，$c + a = -b$ であるから

$$\text{左辺} = ab(-c) + bc(-a) + ca(-b) + 3abc = 0$$

よって　　$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc = 0$　　証終

練習 1.26 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　　$a=bk$，$c=dk$

(1) $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{bk+dk}{b+d}=\dfrac{k(b+d)}{b+d}=k$

$\dfrac{2a-3c}{2b-3d}=\dfrac{2bk-3dk}{2b-3d}=\dfrac{k(2b-3d)}{2b-3d}=k$

よって　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$　　証終

(2) $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2+d^2}=\dfrac{k^2(b^2+d^2)}{b^2+d^2}=k^2$

$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{b^2k^2}{b^2}=k^2$

よって　　$\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$　　証終

深化 1.5 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ より，$d=\dfrac{bc}{a}$ であるから

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+c}{b+\dfrac{bc}{a}}=\frac{a(a+c)}{a\left(b+\dfrac{bc}{a}\right)}=\frac{a(a+c)}{ab+bc}=\frac{a(a+c)}{b(a+c)}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a-c}{b-\dfrac{bc}{a}}=\frac{a(a-c)}{a\left(b-\dfrac{bc}{a}\right)}=\frac{a(a-c)}{ab-bc}=\frac{a(a-c)}{b(a-c)}=\frac{a}{b}$$

よって　　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$　　証終

補足 応用例題 1.3 で証明したことから，次のことがいえる．

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき　　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{2a}{2b}=\dfrac{3c}{3d}$ であるから，上の結果により

$$\frac{2a+3c}{2b+3d}=\frac{2a-3c}{2b-3d}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}$$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$

一般に　$\boldsymbol{\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}}$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{ma+nc}{mb+nd}=\dfrac{a}{b}}$

練習 1.27 $(3x-4y)-(2x-3y)=x-y$

$x>y$ であるから $x-y>0$

よって $(3x-4y)-(2x-3y)>0$

したがって $3x-4y>2x-3y$ 証終

練習 1.28 $(xy+6)-(3x+2y)=xy-3x-2y+6$

$=x(y-3)-2(y-3)$

$=(x-2)(y-3)$

$x>2$，$y>3$ より，$x-2>0$，$y-3>0$ であるから

$(x-2)(y-3)>0$

よって $(xy+6)-(3x+2y)>0$

したがって $xy+6>3x+2y$ 証終

練習 1.29 (1) $(x^2+9y^2)-6xy = x^2-6xy+9y^2 = (x-3y)^2 \geqq 0$

よって　　$x^2+9y^2 \geqq 6xy$

等号が成立するのは，$x-3y=0$，すなわち $x=3y$ のときである．　証終

(2) $(a+b)^2-4ab = (a^2+2ab+b^2)-4ab = a^2-2ab+b^2$
$= (a-b)^2 \geqq 0$

よって　　$(a+b)^2 \geqq 4ab$

等号が成立するのは，$a-b=0$，すなわち $a=b$ のときである．　証終

(3) $2x^2+9y^2-6xy = x^2+(x^2-6xy+9y^2) = x^2+(x-3y)^2 \geqq 0$

よって　　$2x^2+9y^2 \geqq 6xy$

等号が成立するのは，$x=0$ かつ $x-3y=0$，すなわち $x=y=0$　証終

別証 $2x^2+9y^2-6xy = \dfrac{1}{2}(4x^2-12xy+18y^2)$
$= \dfrac{1}{2}\{(4x^2-12xy+9y^2)+9y^2\}$
$= \dfrac{1}{2}\{(2x-3y)^2+9y^2\} \geqq 0$

よって　　$2x^2+9y^2 \geqq 6xy$

等号が成立するのは，$2x-3y=0$ かつ $y=0$，すなわち $x=y=0$　証終

(4) $a^2-ab+b^2 = a^2-ab+\dfrac{1}{4}b^2+\dfrac{3}{4}b^2$
$= \left(a-\dfrac{1}{2}b\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2 \geqq 0$

よって　　$a^2-ab+b^2 \geqq 0$

等号が成立するのは，$a-\dfrac{1}{2}b=0$ かつ $b=0$，すなわち $a=b=0$　証終

練習 1.30 両辺の平方の差を考えると

$$(1+x)^2-(\sqrt{1+2x})^2 = 1+2x+x^2-(1+2x)$$
$$= x^2 > 0 \qquad (\because x>0)$$

よって　　$(1+x)^2 > (\sqrt{1+2x})^2$

$1+x>0$，$\sqrt{1+2x}>0$ であるから

$$1+x > \sqrt{1+2x}$$

証終

練習 1.31 両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2-|a-b|^2 &= |a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2\\ &= a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)\\ &= 2(|ab|+ab) \geqq 0 \qquad \leftarrow |ab| \geqq ab\end{aligned}$$

よって　　$(|a|+|b|)^2 \geqq |a-b|^2$

$|a|+|b| \geqq 0$，$|a-b| \geqq 0$ であるから　　$|a|+|b| \geqq |a-b|$

等号が成り立つのは，$|ab| = -ab$ すなわち $ab \leqq 0$ のときである．　　**証終**

補足 応用例題 1.4 の結論

$$|a|+|b| \geqq |a+b| \quad \text{等号が成立するのは } ab \geqq 0 \text{ のとき}$$

について，b を $-b$ に置き換えると

$$|a|+|-b| \geqq |a+(-b)| \quad \text{等号が成立するのは } a(-b) \geqq 0 \text{ のとき}$$

したがって，次の結論を得る．

$$|a|+|b| \geqq |a-b| \quad \text{等号が成立するのは } ab \leqq 0 \text{ のとき}$$

練習 1.32 (1) $a>0$, $\dfrac{4}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4 \quad \text{よって} \quad a+\frac{4}{a}\geqq 4$$

等号が成立するのは，$a>0$ かつ $a=\dfrac{4}{a}$，すなわち $a=2$ のときである．

証終

補足 等号が成立するとき，$a=\dfrac{4}{a}$, $a+\dfrac{4}{a}=4$ ゆえに $a+a=4$ $(a=2)$

別証 $a>0$ であるから

$$a+\frac{4}{a}-4=\left(\sqrt{a}-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2\geqq 0 \quad \text{よって} \quad a+\frac{4}{a}\geqq 4$$

等号が成立するとき $\sqrt{a}-\dfrac{2}{\sqrt{a}}=0$ すなわち $a=2$ 証終

(2) $\dfrac{a}{b}>0$, $\dfrac{b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2 \quad \text{よって} \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2$$

等号が成立するのは，$a>0$ かつ $b>0$ かつ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$，すなわち $a=b$ のときである．

証終

補足 等号が成立するとき，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=2$ ゆえに $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{b}=2$ $(a=b)$

別証 $\dfrac{a}{b}>0$, $\dfrac{b}{a}>0$ であるから

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\geqq 0 \quad \text{よって} \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2$$

等号が成立するとき，$\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}=0$ より

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{ab}\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{ab}\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{すなわち} \quad a=b$$

問題 1.9 (1) 右辺 $= \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + 2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$

$= x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} =$ 左辺

よって　　$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$　　証終

(2) 右辺 $= \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$= x^3 + 3x^2\cdot\dfrac{1}{x} + 3x\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$= x^3 + 3x + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3} - 3x - \dfrac{3}{x} = x^3 + \dfrac{1}{x^3} =$ 左辺

よって　　$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$　　証終

問題 1.10 $a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= a^2 + b^2 + \{-(a+b)\}^2 + 2ab - 2b(a+b) - 2(a+b)a \\ &= a^2 + b^2 + (a^2 + 2ab + b^2) + 2ab - 2ab - 2b^2 - 2a^2 - 2ab \\ &= 0 = \text{右辺} \end{aligned}$$

よって　　$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 0$　　証終

別証 (因数分解を利用する)

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (a^2 + 2ab + b^2) + 2bc + 2ca + c^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= \{(a+b)+c\}^2 = (a+b+c)^2 = 0 = \text{右辺} \end{aligned}$$

よって　　$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 0$　　証終

問題 1.11 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ とおくと　　$a = bk,\ c = dk$

$$\frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{m\cdot bk + n\cdot dk}{mb+nd} = \frac{(mb+nd)k}{mb+nd} = k, \quad \frac{a}{b} = k$$

よって　　$\dfrac{ma+nc}{mb+nd} = \dfrac{a}{b}$　　証終

問題 1.12 $(ax+by)-(bx+ay)=ax+by-bx-ay$
$=a(x-y)-b(x-y)$
$=(a-b)(x-y)$

$a<b,\ x<y$ のとき　　$a-b<0,\ x-y<0$

$(a-b)(x-y)>0$　ゆえに　$(ax+by)-(bx+ay)>0$

よって　　$\boldsymbol{ax+by>bx+ay}$

問題 1.13 両辺の平方差を考えると

$$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$$
$$=a-2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$$

したがって　　$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2\geqq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{2(a+b)}>0,\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ であるから

$$\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$　　証終

補足 等号が成立するのは，$a=b$ のときである．

問題 1.14 左辺を展開すると

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$$

$a>0,\ b>0$ のとき，$\dfrac{a}{b}>0,\ \dfrac{b}{a}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$$

よって　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{2}+2\geqq 2+2=4$　　証終

補足 等号が成立するのは，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a},\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=2$ のとき，

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{b}=2$　ゆえに　$\dfrac{a}{b}=1$　すなわち　$a=b$

問題 1.15 2 つの組に分けたときのそれぞれの組の和を $m,\ n$ とすると，ゲームの得点は mn 点である．このとき，$m>0,\ n>0,\ m+n=28$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{m+n}{2} \geqq \sqrt{mn} \quad \text{ゆえに} \quad mn \leqq 196$$

上式において，等号が成立するのは，$m=n,\ m+n=28$，すなわち $m=n=14$

よって，得点の最大値は **196** 点，このときの 2 組の分け方の 1 つは

$$\boldsymbol{\{1,2,4,7\}\ \text{と}\ \{3,5,6\}}$$

補足 これ以外に 2 組の分け方は，

$$\{1,2,5,6\}\ \text{と}\ \{3,4,7\},\ \{1,3,4,6\}\ \text{と}\ \{2,5,7\},\ \{2,3,4,5\}\ \text{と}\ \{1,6,7\}$$

別解 1 から 7 までの和が 28 であるから，一方の組の和を x とすると他方の組の和は $28-x$ である．したがって，得点は

$$x(28-x) = 28x - x^2 = -(x-14)^2 + 196$$

よって，$x=14$ のとき，得点は最大となる．(以下同様)

章末 1.1 (1) $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt{5}-2,\ \dfrac{1}{x} = \sqrt{5}+2$ より

$$x + \frac{1}{x} = (\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}+2) = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

(2) (1) の結果から [$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$]

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = (2\sqrt{5})^2 - 2 = 20 - 2 = \boldsymbol{18}$$

(3) (1) の結果から [$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$]

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= (2\sqrt{5})^3 - 3\cdot 2\sqrt{5} = 40\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = \boldsymbol{34\sqrt{5}} \end{aligned}$$

章末 1.2 (1)

$$
\begin{array}{r}
x^3+x^2\ \ +x+1 \\
x-1\,)\,x^4\qquad\qquad\ -1 \\
\underline{x^4-x^3\qquad\qquad\ \ } \\
x^3 \\
\underline{x^3-x^2\qquad\ \ } \\
x^2 \\
\underline{x^2-x\ \ } \\
x-1 \\
\underline{x-1} \\
0
\end{array}
$$

商 x^3+x^2+x+1，余り 0

(2)

$$
\begin{array}{r}
2x\quad -\frac{1}{2} \\
2x^2+4x-3\,)\,4x^3+7x^2-\ 9x+3 \\
\underline{4x^3+8x^2-\ 6x\ \ } \\
-x^2-\ 3x+3 \\
\underline{-x^2-\ 2x+\frac{3}{2}} \\
-x+\frac{3}{2}
\end{array}
$$

商 $2x-\dfrac{1}{2}$，余り $-x+\dfrac{3}{2}$

章末 1.3 (1) $\dfrac{x^2+3x}{x^2-2x+1}\times\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{x(x+3)}{(x-1)^2}\times\dfrac{x-1}{x+3}=\boldsymbol{\dfrac{x}{x-1}}$

(2) $\dfrac{a^2+4a+4}{a^2-4a}\div\dfrac{a^2+2a}{a-4}=\dfrac{(a+2)^2}{a(a-4)}\times\dfrac{a-4}{a(a+2)}=\boldsymbol{\dfrac{a+2}{a^2}}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{(x+1)-2x}{x(x-1)(x+1)}$

$$=\frac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\boldsymbol{-\frac{1}{x(x+1)}}$$

(4) $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}+\dfrac{z-x}{zx}=\dfrac{z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)}{xyz}=\boldsymbol{0}$

章末 1.4 (1) 等式の右辺を整理すると

$$x^3 = x^3 + (a-3)x^2 + (-2a+b+3)x + (a-b+c-1)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0 = a-3,\ \ 0 = -2a+b+3,\ \ 0 = a-b+c-1$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=3,\ b=3,\ c=1}$

(2) 等式の両辺に x^3+1 をかけると，次の等式が得られる．

$$3 = a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)$$

右辺を x について整理すると

$$3 = (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0 = a+b,\ \ 0 = -a+b+c,\ \ 3 = a+c$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=2}$

章末 1.5 (1) 与えられた不等式から

$$|a-b| + |b| \geqq |a| \quad \cdots ①$$

を示せばよい．両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}(|a-b|+|b|)^2 - |a|^2 &= |a-b|^2 + 2|a-b||b| + |b|^2 - |a|^2 \\ &= (a-b)^2 + 2|(a-b)b| + b^2 - a^2 \\ &= 2|(a-b)b| - 2ab + 2b^2 \\ &= 2|(a-b)b| - 2(a-b)b \\ &= 2\{|(a-b)b| - (a-b)b\} \geqq 0\end{aligned}$$

したがって　　$(|a-b|+|b|)^2 \geqq |a|^2$

$|a-b|+|b| \geqq 0,\ |a| \geqq 0$ であるから

$$|a-b| + |b| \geqq |a| \quad \text{よって} \quad |a| - |b| \leqq |a-b|$$

等号が成立するのは，次のときである．

$$|(a-b)b| = (a-b)b \quad \text{すなわち} \quad (a-b)b \geqq 0$$

証終

(2) 与えられた不等式から

$$|a+b|+|b| \geqq |a| \quad \cdots ②$$

を示せばよい．両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}(|a+b|+|b|)^2-|a|^2 &= |a+b|^2+2|a+b||b|+|b|^2-|a|^2\\ &= (a+b)^2+2|(a+b)b|+b^2-a^2\\ &= 2|(a+b)b|+2ab+2b^2\\ &= 2|(a+b)b|+2(a+b)b\\ &= 2\{|(a+b)b|+(a+b)b\} \geqq 0\end{aligned}$$

したがって　　$(|a+b|+|b|)^2 \geqq |a|^2$

$|a+b|+|b| \geqq 0,\ |a| \geqq 0$ であるから

$$|a+b|+|b| \geqq |a| \quad \text{よって} \quad |a|-|b| \leqq |a+b|$$

等号が成立するのは，次のときである．

$$|(a+b)b| = -(a+b)b \quad \text{すなわち} \quad (a+b)b \leqq 0$$ **証終**

補足 (1) の不等式 ① の b を $-b$ に置き換えると ② を得る．等号が成立するときの条件においても (1) の結論から，次の結論が導かれる．

$$\{a-(-b)\}(-b) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad (a+b)b \leqq 0$$

一般に，不等式の問題は，30 ページの応用例題 1.4 の不等式

$$|x|+|y| \geqq |x+y| \quad (\text{等号が成立するとき } xy \geqq 0)$$

を先に証明して，$x=a-b,\ y=b$ を代入すると，① および等号が成立する条件 $(a-b)b \geqq 0$ を得る．
同様に，$x=a+b,\ y=-b$ を代入すると，② および等号が成立する条件

$$(a+b)(-b) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad (a+b)b \leqq 0$$

を得る．

章末 1.6 (1) 左辺 $= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)$

$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) =$ 右辺

したがって

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

(2) (1) の結果から

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

したがって

$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geqq 0$

よって　　$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$

章末 1.7 (1) $ab>0$，$\dfrac{16}{ab}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{16}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}}=8$$

等号が成立するのは，次のときである．

$$ab=\frac{16}{ab},\ ab+\frac{16}{ab}=8 \quad \text{すなわち} \quad ab=4$$ 証終

別証 $a>0,\ b>0$ であるから

$$ab+\frac{16}{ab}-8=\left(\sqrt{ab}-\frac{4}{\sqrt{ab}}\right)^2\geqq 0 \quad \text{よって} \quad ab+\frac{16}{ab}\geqq 8$$

等号が成立するのは，次のときである．

$$\sqrt{ab}-\frac{4}{\sqrt{ab}}=0 \quad \text{すなわち} \quad ab=4$$ 証終

(2) 左辺を展開すると

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+\frac{4}{ab}+5$$

$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{4}{ab}+5\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5=9$$

等号が成立するのは，次のときである．

$$ab=\frac{4}{ab},\ ab+\frac{4}{ab}=4 \quad \text{すなわち} \quad ab=2$$ 証終

別証 $a>0,\ b>0$ であるから

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)-9=ab+\frac{4}{ab}-4=\left(\sqrt{ab}-\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^2\geqq 0$$

したがって $\quad \left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

等号が成立するのは，次のときである．

$$\sqrt{ab}-\frac{2}{\sqrt{ab}}=0 \quad \text{すなわち} \quad ab=2$$ 証終

章末 1.8 (1) 与式 $= (2x)^3 - y^3 - 6xy(2x-y)$

$= (2x-y)(4x^2+2xy+y^2) - 6xy(2x-y)$

$= (2x-y)\{(4x^2+2xy+y^2) - 6xy\}$

$= (2x-y)(4x^2-4xy+y^2) = (2x-y)(2x-y)^2 = \boldsymbol{(2x-y)^3}$

別解 与式 $= (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot y + 3\cdot 2x\cdot y^2 - y^3$

$= \boldsymbol{(2x-y)^3}$

(2) $x+y=A$ とおくと，$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = A^3 - 3xyA$ より

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= A^3 - 3xyA + z^3 - 3xyz \\ &= A^3 + z^3 - 3xy(A+z) \\ &= (A+z)(A^2 - Az + z^2) - 3xy(A+z) \\ &= (A+z)(A^2 - Az + z^2 - 3xy) \\ &= \{(x+y)+z\}\{(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 - 3xy\} \\ &= \boldsymbol{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)} \end{aligned}$$

章末 1.9 $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} = \dfrac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)} + \dfrac{2}{1+x^2}$

$= \dfrac{2}{1-x^2} + \dfrac{2}{1+x^2}$

$= \dfrac{2(1+x^2)+2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \boldsymbol{\dfrac{4}{1-x^4}}$

章末 1.10 多項式 ax^3+bx^2+2x+1 を x^2+x-2 で割った商を $cx+d$ とおくと

$$ax^3+bx^2+2x+1=(x^2+x-2)(cx+d)+2x+5 \qquad (*)$$

右辺を整理すると

$$ax^3+bx^2+2x+1=cx^3+(c+d)x^2+(-2c+d+2)x-2d+5$$

上式は x に関する恒等式で，両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a=c,\quad b=c+d,\quad 2=-2x+d+2,\quad 1=-2d+5$$

これを解いて　　$a=1,\ b=3,\ c=1,\ d=2$

よって　　$\boldsymbol{a=1,\ b=3,}$ **商** $\boldsymbol{x+2}$

別解 $(*)$ より　　$ax^3+bx^2-4=(x-1)(x+2)(cx+d)$

上式は x に関する恒等式であるから，$x=1,-2$ を代入すると

$$a+b-4=0,\quad -8a+4b-4=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=1,\ b=3}$$

したがって　　$x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)(cx+d)$

両辺の x^3 の係数および定数項を比較して

$$1=c,\quad -4=-2d \quad \text{ゆえに} \quad c=1,\ d=2$$

よって　**商** $\boldsymbol{x+2}$

章末 1.11 与えられた等式は k についての恒等式であり，これを k について整理すると

$$(x+y-3)k+(2x+y-4)=0$$

よって　$x+y-3=0$，$2x+y-4=0$　これを解いて　$\boldsymbol{x=1,\ y=2}$

章末 1.12 $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}=k$ とおくと　$x=k,\ y=2k,\ z=3k$

これらを $x+y+z=24$ に代入すると

$$k+2k+3k=24 \quad \text{これを解いて} \quad k=4$$

よって　　$\boldsymbol{x=4,\ y=8,\ z=12}$

補足 $y=2x$，$z=3x$ とおいて，$x+y+z=24$ に代入してもよい．

章末 1.13 二項定理により $(x>0)$

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \\ &= 1 + x + ({}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n) \\ &> 1 + x\end{aligned}$$

章末 1.14 $a+b=1$ であるから　　$b=1-a$

$a>b>0$ より

$$a > 1-a > 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} < a < 1$$

$$\begin{aligned}a^2+b^2-\frac{1}{2} &= a^2+(1-a)^2-\frac{1}{2} \\ &= 2a^2-2a+\frac{1}{2} = 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}-2ab &= \frac{1}{2}-2a(1-a) \\ &= 2a^2-2a+\frac{1}{2} = 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 > 0\end{aligned}$$

以上より　$a^2+b^2 > \dfrac{1}{2} > 2ab$

よって，3 つの数を大きい順に並べると　　a^2+b^2，$\dfrac{1}{2}$，$2ab$

別解 $a>b>0$ に注意して，相加平均・相乗平均の大小関係を利用すると

$$1 = a+b > 2\sqrt{ab}, \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} > 2ab$$

等式 $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ に $a+b=1$ を代入すると $(a \neq b)$

$$1+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2) \quad \text{ゆえに} \quad a^2+b^2-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(a-b)^2 > 0$$

よって　　$a^2+b^2 > \dfrac{1}{2} > 2ab$

練習 2.1 (1) 実部 $\boldsymbol{-3}$, 虚部 $\boldsymbol{5}$

(2) 実部 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$, 虚部 $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) 実部 $\boldsymbol{1}$, 虚部 $\boldsymbol{0}$

(4) 実部 $\boldsymbol{0}$, 虚部 $\boldsymbol{-1}$

練習 2.2 (1) $x,\ y$ が実数であるから，$x-2y,\ x+3$ は実数である．

$$x-2y=2,\ x+3=-1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=-4,\ y=-3}$$

(2) $x,\ y$ が実数であるから，$2x+y,\ x-y+3$ は実数である．

$$2x+y=0,\ x-y+3=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=-1,\ y=2}$$

練習 2.3 (1) $(2+3i)+(4+i)=(2+4)+(3+1)i$

$$=\boldsymbol{6+4i}$$

(2) $(-1+2i)+(3-4i)=(-1+3)+(2-4)i$

$$=\boldsymbol{2-2i}$$

(3) $(6+4i)-(3+2i)=(6-3)+(4-2)i$

$$=\boldsymbol{3+2i}$$

(4) $(2-3i)-(4-2i)=(2-4)+\{-3-(-2)\}i$

$$=\boldsymbol{-2-i}$$

練習 2.4 (1) $(1+2i)(4+3i)=4+3i+8i+6i^2$

$$=\{4+6\cdot(-1)\}+(3+8)i$$

$$=\boldsymbol{-2+11i}$$

(2) $(2-i)(3+4i)=6+8i-3i-4i^2$

$$=\{6-4\cdot(-1)\}+(8-3)i$$

$$=\boldsymbol{10+5i}$$

(3) $(2+3i)^2=4+12i+9i^2=\{4+9\cdot(-1)\}+12i=\boldsymbol{-5+12i}$

(4) $(3+4i)(3-4i)=9-16i^2=9-16\cdot(-1)=\boldsymbol{25}$

練習 2.5 (1) $\boldsymbol{2-3i}$ (2) $\boldsymbol{1+i}$ (3) $\boldsymbol{-\sqrt{3}i}$ (4) $\boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}}$ (5) $\boldsymbol{-4}$

練習 2.6 (1) $\dfrac{1+2i}{2+3i} = \dfrac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i+4i-6i^2}{2^2+3^2} = \dfrac{8+i}{13} = \boldsymbol{\dfrac{8}{13} + \dfrac{1}{13}i}$

補足 $\dfrac{8+i}{13}$ でもよいが，$\dfrac{8}{13} + \dfrac{1}{13}i$ は複素数の形 $a+bi$ を示している．

(2) $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-2i}{1^2+1^2} = \dfrac{-2i}{2} = \boldsymbol{-i}$

(3) $\dfrac{5i}{2-i} = \dfrac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{10i+5i^2}{2^2+1^2} = \dfrac{-5+10i}{5} = \boldsymbol{-1+2i}$

練習 2.7 (1) $\sqrt{-5} = \boldsymbol{\sqrt{5}\,i}$

(2) $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,i = \boldsymbol{3i}$

(3) $\pm\sqrt{-18} = \pm\sqrt{18}\,i = \boldsymbol{\pm 3\sqrt{2}\,i}$

練習 2.8 (1) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-6} = \sqrt{2}\,i \times \sqrt{6}\,i = \sqrt{12}\,i^2 = \boldsymbol{-2\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = \dfrac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{4}\,i} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{8}\,i}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{2i}$

(4) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,i} = \dfrac{3}{i} = \dfrac{3i}{i^2} = \boldsymbol{-3i}$

練習 2.9 (1) $x = \pm\sqrt{-1} = \boldsymbol{\pm i}$

(2) $x = \pm\sqrt{-8} = \pm\sqrt{8}i = \boldsymbol{\pm 2\sqrt{2}\,i}$

練習 2.10 (1) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{-3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}}$

(2) $x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3\cdot2}}{3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-2}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{2 \pm \sqrt{2}\,i}{3}}$

(3) $x = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\,i}{2}}$

(4) $x = \dfrac{-(-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 1\cdot4}}{1} = \sqrt{3} \pm \sqrt{-1} = \boldsymbol{\sqrt{3} \pm i}$

補足 (1)〜(4) はすべて一般的な 2 次方程式の解の公式で求めることができるが，(2) と (4) は次の公式を利用するとよい．

> 2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は　　$\boldsymbol{x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}}$

練習 2.11 2 次方程式の判別式を D とする．

(1) 2 次方程式 $x^2+5x+5=0$ の判別式は

$$D=5^2-4\cdot1\cdot5=5>0$$

よって，この 2 次方程式は**異なる 2 つの実数解**をもつ．

(2) 2 次方程式 $x^2-2\sqrt{3}\,x+2=0$ の判別式は

$$D/4=(-\sqrt{3})^2-1\cdot2=1>0$$

よって，この 2 次方程式は**異なる 2 つの実数解**をもつ．

(3) 2 次方程式 $-4x^2+x-1=0$ の判別式は

$$D=1^2-4\cdot(-4)\cdot(-1)=-15<0$$

よって，この 2 次方程式は**異なる 2 つの虚数解**をもつ．

(4) 2 次方程式 $3x^2-4\sqrt{6}\,x+8=0$ の判別式は

$$D/4=(-2\sqrt{6})^2-3\cdot8=0$$

よって，この 2 次方程式は**重解**をもつ．

練習 2.12 2 次方程式 $x^2+(m+1)x+1=0$ の判別式を D とすると

$$D=(m+1)^2-4\cdot1\cdot1=m^2+2m-3=(m+3)(m-1)$$

よって，2 次方程式の解は次のようになる．

$D>0$	すなわち	$\boldsymbol{m<-3,\ 1<m}$ のとき	異なる 2 つの実数解
$D=0$	すなわち	$\boldsymbol{m=-3,\ 1}$ のとき	重解
$D<0$	すなわち	$\boldsymbol{-3<m<1}$ のとき	異なる 2 つの虚数解

練習 2.13 2 次方程式の 2 つの解を α，β とする．

(1) $\alpha+\beta=\boldsymbol{-4}$，$\alpha\beta=\boldsymbol{2}$

(2) $\alpha+\beta=-\dfrac{-6}{3}=\boldsymbol{2}$，$\alpha\beta=\dfrac{-4}{3}=\boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$

練習 2.14 解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=-3$，$\alpha\beta=-1$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2\cdot(-1)=\boldsymbol{11}$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-3)^3-3\cdot(-1)\cdot(-3)=\boldsymbol{-36}$

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-3)^2-4\cdot(-1)=\boldsymbol{13}$

練習 2.15 (1) 2 つの解は α，4α と表すことができる．

解と係数の関係から　$\alpha + 4\alpha = -5$，$\alpha \cdot 4\alpha = m$

すなわち　$5\alpha = -5$，$4\alpha^2 = m$

よって，1 つの解 α は　$\alpha = -1$

このとき　$m = 4\alpha^2 = 4(-1)^2 = 4$

また，他の解 4α は　$4\alpha = 4(-1) = -4$

(答) $\boldsymbol{m = 4}$，**2 つの解は** $\boldsymbol{-1}$，$\boldsymbol{-4}$

(2) 2 つの解は α，$\alpha + 1$ と表すことができる．

解と係数の関係から　$\alpha + (\alpha + 1) = -5$，$\alpha(\alpha + 1) = m$

すなわち　$2\alpha + 1 = -5$，$\alpha(\alpha + 1) = m$

よって，1 つの解 α は　$\alpha = -3$

このとき　$m = \alpha(\alpha + 1) = -3(-3 + 1) = 6$

また，他の解 $\alpha + 1$ は　$\alpha + 1 = -3 + 1 = -2$

(答) $\boldsymbol{m = 6}$，**2 つの解は** $\boldsymbol{-3}$，$\boldsymbol{-2}$

深化 2.1 例題 2.4 の 2 次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の解と係数の関係を用いて

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 = -4$$

これから　$\alpha - \beta = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

したがって，α, β の値が 1 つに定まらない．

別解 例題 2.4 の 2 次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の解は

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 5}}{1} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$$

2 つの解 $2 + i$ と $2 - i$ をどちらを α, β に決定するかにより，$\alpha - \beta$ の値が異なることになる．

練習 2.16 (1) 2 次方程式 $x^2-3x-2=0$ の解は

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

よって　$x^2-3x-2=\left(\boldsymbol{x-\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right)\left(\boldsymbol{x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}}\right)$

(2) 2 次方程式 $2x^2-2x-3=0$ の解は

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-2\cdot(-3)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$$

よって　$2x^2-2x-3=\boldsymbol{2}\left(\boldsymbol{x-\frac{1+\sqrt{7}}{2}}\right)\left(\boldsymbol{x-\frac{1-\sqrt{7}}{2}}\right)$

(3) 2 次方程式 $x^2+4x+6=0$ の解は

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot6}}{1}=-2\pm\sqrt{-2}=-2\pm\sqrt{2}\,i$$

よって　$x^2+4x+6=\{x-(-2+\sqrt{2}\,i)\}\{x-(-2-\sqrt{2}\,i)\}$

$$=\boldsymbol{(x+2-\sqrt{2}\,i)(x+2+\sqrt{2}\,i)}$$

練習 2.17 (1) 解の和は　$2+(-1)=1$

解の積は　$2\times(-1)=-2$

よって，このような解をもつ 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-x-2=0}$$

(2) 解の和は　$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

解の積は　$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1$

よって，このような解をもつ 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-4x+1=0}$$

(3) 解の和は　$(1+2i)+(1-2i)=2$

解の積は　$(1+2i)(1-2i)=1^2+2^2=5$

よって，このような解をもつ 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-2x+5=0}$$

練習 2.18 (1) 求める 2 数は，次の 2 次方程式の解である．

$$x^2-(-2)x+6=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2+2x+6=0$$

これを解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot 6}}{1}=-1\pm\sqrt{5}\,i$

よって，求める 2 数は　$\boldsymbol{-1+\sqrt{5}\,i,\ -1-\sqrt{5}\,i}$

(2) 求める 2 数は，次の 2 次方程式の解である．

$$x^2-3x+3=0$$

これを解くと　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

よって，求める 2 数は　$\boldsymbol{\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{3-\sqrt{3}\,i}{2}}$

練習 2.19 (1) 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-1$

ここで　$(1-\alpha)+(1-\beta)=2-(\alpha+\beta)=2-3=-1$

$(1-\alpha)(1-\beta)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-1-3+1=-3$

よって，$1-\alpha,\ 1-\beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-(-1)x+(-3)=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x^2+x-3=0}$$

別解 $\alpha^2-3\alpha-1=0$ であるから，$x=1-\alpha$ を解にもつ 2 次方程式は $\alpha=1-x$ をこれに代入して

$$(1-x)^2-3(1-x)-1=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x^2+x-3=0} \qquad (*)$$

また，β についても同一であるから，$(*)$ が求める 2 次方程式である．

(2) 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-1$

ここで　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot(-1)=11$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1$

よって，$\alpha^2,\ \beta^2$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-11x+1=0}$$

別解 $\alpha^2=3\alpha+1,\ \beta^2=3\beta+1$ であるから，$3\alpha+1,\ 3\beta+1$ を解とする 2 次方程式を求めればよい．

$x=3\alpha+1$ を解にもつ 2 次方程式は，$\alpha=\dfrac{x-1}{3}$ を $\alpha^2-3\alpha-1=0$ に代入して

$$\left(\frac{x-1}{3}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{3}\right)-1=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x^2-11x+1=0} \qquad (*)$$

また，β についても同一であるから，$(*)$ が求める 2 次方程式である．

練習 2.20 2 次方程式 $x^2+2(m-3)x+4m=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$，判別式を D とすると

$$D/4=(m-3)^2-1\cdot 4m=m^2-10m+9=(m-1)(m-9)$$

解と係数の関係により　　$\alpha+\beta=-2(m-3),\quad \alpha\beta=4m$

(1) 異なる 2 つの正の解をもつとき，$D>0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$ より

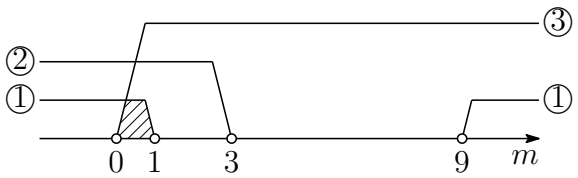
$$(m-1)(m-9)>0,\quad -2(m-3)>0,\quad 4m>0$$

これらの不等式をそれぞれ解くと

$$\begin{cases} m<1,\ 9<m & \cdots ① \\ m<3 & \cdots ② \\ m>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①〜③ の共通範囲を求めて

$\boldsymbol{0<m<1}$



(2) 異なる 2 つの負の解をもつとき，$D>0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$ より

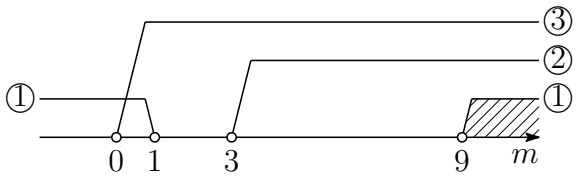
$$(m-1)(m-9)>0,\quad -2(m-3)<0,\quad 4m>0$$

これらの不等式をそれぞれ解くと

$$\begin{cases} m<1,\ 9<m & \cdots ① \\ m>3 & \cdots ② \\ m>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①〜③ の共通範囲を求めて

$\boldsymbol{m>9}$



(3) 正の解と負の解をもつとき，$\alpha\beta<0$ より

$$4m<0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{m<0}$$

別解 $f(x)=a(x-p)^2+q$ のとき $(a>0)$，2 次方程式 $f(x)=0$ の解について，次が成立する．

$$\begin{aligned}
&\alpha,\ \beta\text{は異なる 2 つの正の解} &&\Longleftrightarrow\quad p>0,\ q<0,\ f(0)>0\\
&\alpha,\ \beta\text{は異なる 2 つの負の解} &&\Longleftrightarrow\quad p<0,\ q<0,\ f(0)>0\\
&\alpha,\ \beta\text{は符号の異なる解} &&\Longleftrightarrow\quad f(0)<0
\end{aligned}$$

$f(x)=x^2+2(m-3)x+4m$ とすると

$$\begin{aligned}
f(x)&=\{x+(m-3)\}^2-(m-3)^2+4m\\
&=(x+m-3)^2-m^2+10m-9
\end{aligned}$$

したがって　　$p=-m+3,\ q=-m^2+10m-9,\ f(0)=4m$

(1) 異なる 2 つの正の解をもつとき，$p>0,\ q<0,\ f(0)>0$ より

$$-m+3>0,\quad -m^2+10m-9<0,\quad 4m>0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{0<m<1}$

(2) 異なる 2 つの正の解をもつとき，$p<0,\ q<0,\ f(0)>0$ より

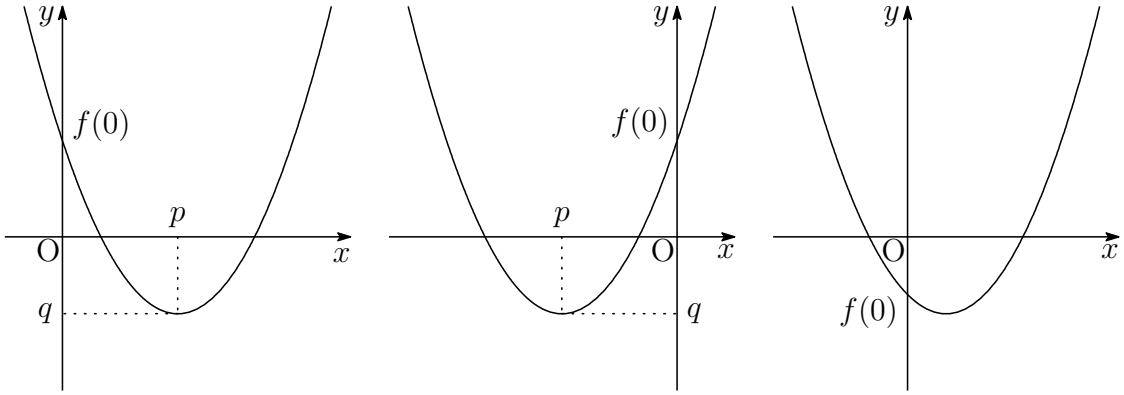
$$-m+3<0,\quad -m^2+10m-9<0,\quad 4m>0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{m>9}$

(3) 正の解と負の解をもつとき，$f(0)<0$ より

$$4m<0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{m<0}$$

(1) 異なる 2 つの正の解　(2) 異なる 2 つの負の解　(3) 正の解と負の解



深化 2.2 応用例題 2.2 において，条件 $D>0$ がない，すなわち，① がないと

$$\begin{cases} m>0 & \cdots ② \\ m<6 & \cdots ③ \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad 0<m<6$$

例えば，$m=1$ のとき，2 次方程式は $x^2-2x+5=0$ となる．これを解くと

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot 5}}{1}=1\pm 2i$$

これらの解は虚数解となり，条件を満たさない．

補足 $D>0$ がないと，$D=0$ のとき重解，$D<0$ のとき異なる 2 つの虚数解となるので，条件を満たさない．

問題 2.1 (1) $x-3y,\ 2x+y$ はそれぞれ実数であるから

$$x-3y=1,\quad 2x+y=-12 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x=-5,\ y=-2}$$

(2) 左辺 $=(5+i)(x+yi)=(5x-y)+(x+5y)i$ より

$$(5x-y)+(x+5y)i=13+13i$$

$5x-y,\ x+5y$ はそれぞれ実数であるから

$$5x-y=13,\ x+5y=13 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x=3,\ y=2}$$

別解 $(5+i)(x+yi)=13+13i$ より

$$x+yi=\frac{13(1+i)}{5+i}=\frac{13(1+i)(5-i)}{(5+i)(5-i)}=\frac{13(6+4i)}{25+1}=3+2i$$

よって　　$\boldsymbol{x=3,\ y=2}$

問題 2.2 (1) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}\,i+3i^2}{4}=\dfrac{1-2\sqrt{3}\,i-3}{4}$

$$=\frac{-2-2\sqrt{3}\,i}{4}=\boldsymbol{\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}}$$

(2) $i+\dfrac{1}{i}=i+\dfrac{i}{i^2}=i+\dfrac{i}{-1}=\boldsymbol{0}$

(3) $i+i^2+i^3+i^4=i+i^2+i^2\cdot i+(i^2)^2=i+(-1)+(-1)i+(-1)^2=\boldsymbol{0}$

問題 2.3 (1) 2 次方程式 $2x^2 - \sqrt{5}\,x + 1 = 0$ の解は，解の公式により

$$x = \frac{-(-\sqrt{5}) \pm \sqrt{(-\sqrt{5})^2 - 4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-3}}{4} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{5} \pm \sqrt{3}\,i}}{\boldsymbol{4}}$$

(2) 2 次方程式 $2(x+1)^2 - 4(x+1) + 3 = 0$ の左辺を整理すると

$$2x^2 + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = -\frac{1}{2}$$

よって $\quad x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,i = \pm\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}}\,\boldsymbol{i}$

別解 $x + 1 = X$ とおいて，$2X^2 - 4X + 3 = 0$ を解くと

$$X = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 2\cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$$

したがって $\quad x + 1 = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \quad$ よって $\quad \boldsymbol{x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,i}$

問題 2.4 解と係数の関係から $\quad \alpha + \beta = -\frac{4}{2} = -2, \quad \alpha\beta = \frac{3}{2}$

(1) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2\cdot\frac{3}{2} = \boldsymbol{1}$

(2) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{3}{2}(-2) = \boldsymbol{-3}$

(3) (1) の結果を利用すると

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = 1 \div \frac{3}{2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

問題 2.5 (1) 解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=7,\ \ \alpha\beta=-1$

ここで　$(\alpha-2)+(\beta-2)=(\alpha+\beta)-4=7-4=3$

$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=1-2\cdot7+4=-11$

よって，$\alpha-2,\ \beta-2$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-3x-11=0}$$

別解 $\alpha^2-7\alpha-1=0$ であるから，$x=\alpha-2$ を解にもつ 2 次方程式は $\alpha=x+2$ をこれに代入して

$$(x+2)^2-7(x+2)-1=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x^2-3x-11=0} \qquad (*)$$

また，β について同一であるから，$(*)$ が求める 2 次方程式である．

(2) 解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=7,\ \ \alpha\beta=-1$

ここで　$\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\dfrac{2\cdot7}{-1}=-14$

$\dfrac{2}{\alpha}\cdot\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{4}{\alpha\beta}=\dfrac{4}{-1}=-4$

$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=1-2\cdot7+4=-11$

よって，$\dfrac{2}{\alpha},\ \dfrac{2}{\beta}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-(-14)x-4=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2+14x-4=0$$

別解 $\alpha^2-7\alpha-1=0$ であるから，$x=\dfrac{2}{\alpha}$ を解にもつ 2 次方程式は $\alpha=\dfrac{2}{x}$ をこれに代入して

$$\left(\frac{2}{x}\right)^2-7\cdot\frac{2}{x}-1=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x^2+14x-4=0} \qquad (*)$$

また，β についても同一であるから，$(*)$ が求める 2 次方程式である．

(3) 解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=7,\ \ \alpha\beta=-1$

ここで　$(\alpha+\beta)+\alpha=7+(-1)=6,\quad (\alpha+\beta)\alpha\beta=7(-1)=-7$

よって，$\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-6x-7=0}$$

問題 2.6 ① 成立しない. $\sqrt{-3}\sqrt{-5} = \sqrt{3}\,i\sqrt{5}\,i = -\sqrt{15}$

② 成立する.

③ 成立する.

④ 成立しない. $\dfrac{1}{\sqrt{-3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}\,i} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}i = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i = -\sqrt{-\dfrac{1}{3}}i$

練習 2.21 (1) 求める余りは $P(1)$ で

$$P(1) = 1^3 + 1^2 - 3\cdot 1 - 2 = -3$$

(2) 求める余りは $P(-1)$ で

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3\cdot(-1) - 2 = 1$$

(3) 求める余りは $P(-2)$ で

$$P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 3\cdot(-2) - 2 = 0$$

練習 2.22 $P(x)$ を x の 1 次式 $ax+b$ で割った商を $Q(x)$，余りを R とすると，次の等式が成り立つ.

$$P(x) = (ax+b)Q(x) + R$$

この両辺に $x = -\dfrac{b}{a}$ を代入すると

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = \left\{a\left(-\frac{b}{a}\right) + b\right\} Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R = 0\cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R = R$$

よって，多項式 $P(x)$ を x の 1 次式 $ax+b$ で割った余りは，$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ に等しい.

証終

練習 2.23 剰余の定理により $P(-1) = -5$ であるから

$$2\cdot(-1)^3 + 5a\cdot(-1)^2 + a\cdot(-1) + 1 = -5$$

整理すると　　$4a = -4$　よって　$\boldsymbol{a = -1}$

練習 2.24 $P(x)$ を 2 次式 $(x-3)(x+1)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$P(x)=(x-3)(x+1)Q(x)+ax+b$$

この等式より　　$P(3)=3a+b$，$P(-1)=-a+b$

また，$x-3$ で割った余りが 1 であるから　$P(3)=1$

$x+1$ で割った余りが 5 であるから　$P(-1)=5$

よって　　$3a+b=1$，$-a+b=5$

これを解くと　　$a=-1$，$b=4$

したがって，求める余りは　　$\boldsymbol{-x+4}$

練習 2.25 $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ とおくと

① $P(1)=1^3+2\cdot1^2-5\cdot1-6=-8$

② $P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=0$

③ $P(2)=2^3+2\cdot2^2-5\cdot2-6=0$

④ $P(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)-6=4$

よって，多項式 $P(x)$ の因数であるものは　②，③

練習 2.26 (1) $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$ とすると

$$P(1)=1^3-3\cdot1^2-6\cdot1+8=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$x^3-3x^2-6x+8=(x-1)(x^2-2x-8)$$

さらに因数分解して

$$x^3-3x^2-6x+8=\boldsymbol{(x-1)(x+2)(x-4)}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x-8 \\ \hline x-1 & x^3-3x^2-6x+8 \\ & \underline{x^3-x^2} \\ & \quad -2x^2-6x \\ & \quad \underline{-2x^2+2x} \\ & \qquad -8x+8 \\ & \qquad \underline{-8x+8} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

(2) $P(x)=x^3-5x^2+3x+9$ とすると

$$P(-1)=(-1)^3-5\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+9=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$x^3-5x^2+3x+9=(x+1)(x^2-6x+9)$$

さらに因数分解して

$$x^3-5x^2+3x+9=\boldsymbol{(x+1)(x-3)^2}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-6x+9 \\ \hline x+1 & x^3-5x^2+3x+9 \\ & \underline{x^3+x^2} \\ & \quad -6x^2+3x \\ & \quad \underline{-6x^2-6x} \\ & \qquad 9x+9 \\ & \qquad \underline{9x+9} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

(3) $P(x)=2x^3+3x^2-11x-6$ とすると

$$P(2)=2\cdot2^3+3\cdot2^2-11\cdot2-6=0$$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$2x^3+3x^2-11x-6=(x-2)(2x^2+7x+3)$$

さらに因数分解して

$$2x^3+3x^2-11x-6=\boldsymbol{(x-2)(x+3)(2x+1)}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+7x+3 \\ \hline x-2 & 2x^3+3x^2-11x-6 \\ & \underline{2x^3-4x^2} \\ & \quad 7x^2-11x \\ & \quad \underline{7x^2-14x} \\ & \qquad 3x-6 \\ & \qquad \underline{3x-6} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

演習 2.1 組立除法により

商 $\boldsymbol{x^2-3x-3}$，余り $\boldsymbol{0}$

	1	−4	0	3	1
		1	−3	−3	
	1	−3	−3	0	

練習 2.27 (1) 左辺を因数分解すると

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

よって　$x-2=0$　または　$x^2+2x+4=0$

したがって　$\boldsymbol{x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i}$

(2) 左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

よって　$x+1=0$　または　$x^2-x+1=0$

したがって　$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

深化 2.3 $\omega^3=1$ より　$(\omega^2)^3=(\omega^3)^2=\boldsymbol{1}$

別解 ω^2 は，3 次方程式 $x^3=1$ の解であるから　$(\omega^2)^3=\boldsymbol{1}$

練習 2.28 (1) 左辺を因数分解すると

$$(x^2-4)(x^2+5)=0$$

よって　$x^2-4=0$　または　$x^2+5=0$

したがって　$\boldsymbol{x=\pm2,\ \pm\sqrt{5}\,i}$

(2) 左辺を因数分解すると

$$(x^2+1)(x^2-1)=0$$

よって　$x^2+1=0$　または　$x^2-1=0$

したがって　$\boldsymbol{x=\pm i,\ \pm1}$

練習 2.29 (1) $P(x)=x^3+4x^2+x-6$ とすると

$$P(1)=1^3+4\cdot1^2+1-6=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

1	4	1	−6	1
	1	5	6	
1	5	6	0	

$$P(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$$
$$=(x-1)(x+2)(x+3)$$

$P(x)=0$ から　$\boldsymbol{x=1,-2,-3}$

(2) $P(x)=x^3+4x^2+5x+2$ とすると

$$P(-1)=(-1)^3+4(-1)^2+5(-1)+2=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$$P(x)=(x+1)(x^2+3x+2)$$
$$=(x+1)^2(x+2)$$

				-1
1	4	5	2	
	-1	-3	-2	
1	3	2	0	

$P(x)=0$ から　$\boldsymbol{x=-1}$**(2 重解)**$\boldsymbol{,-2}$

(3) $P(x)=x^3-3x^2+2$ とすると

$$P(1)=1^3-3\cdot1^2+2=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$$

				1
1	-3	0	2	
	1	-2	-2	
1	-2	-2	0	

$P(x)=0$ から

$$x-1=0 \quad \text{または} \quad x^2-2x-2=0$$

したがって　$\boldsymbol{x=1,\ 1\pm\sqrt{3}}$

(4) $P(x)=2x^3-3x^2-4$ とすると

$$P(2)=2\cdot2^3-3\cdot2^2-4=0$$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもち

$$P(x)=(x-2)(2x^2+x+2)$$

				2
2	-3	0	-4	
	4	2	4	
2	1	2	0	

$P(x)=0$ から

$$x-2=0 \quad \text{または} \quad 2x^2+x+2=0$$

したがって　$\boldsymbol{x=2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}}$

練習 2.30　$1+i$ がこの方程式の解であるから

$$(1+i)^3+(1+i)^2+a(1+i)+b=0$$

整理して　　$(a+b-2)+(a+4)i=0$

a，b は実数であるから　　$a+b-2=0$，$a+4=0$

これを解くと　　$a=-4$，$b=6$

このとき，方程式は　　$x^3+x^2-4x+6=0$

左辺を因数分解すると　　$(x+3)(x^2-2x+2)=0$

したがって　　$x=-3,\ 1\pm i$

	1	1	−4	6	−3
		−3	6	−6	
	1	−2	2	0	

(答) $\boldsymbol{a=-4,\ b=6}$，　他の解は $\boldsymbol{-3,\ 1-i}$

別解　$P(x)=x^3+x^2+ax+b$ とし，$\alpha=1+i$ と共役な複素数を $\overline{\alpha}=1-i$ とおくと，$P(\alpha)=0,\ P(\overline{\alpha})=0$ であるから，$P(x)$ は $x-\alpha,\ x-\overline{\alpha}$ を因数にもつ．

このとき，$P(x)$ は

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}=x^2-2x+2$$

で割り切れる．

$$\begin{array}{rl} & x\quad +3 \\ \hline x^2-2x+2\,) & x^3-3x^2\quad +ax\quad +b \\ & x^3-2x^2\quad +2x \\ \hline & 3x^2+(a-2)x\quad +b \\ & 3x^2\quad -6x\quad +6 \\ \hline & (a+4)x+b-6 \end{array}$$

したがって　$a+4=0,\ b-6=0$　ゆえに　$\boldsymbol{a=-4,\ b=6}$

$P(x)=(x+3)(x^2-2x+2)$ より，方程式 $P(x)=0$ の解は　$x=-3,\ 1\pm i$

よって，求める他の解は　$\boldsymbol{-3,\ 1-i}$

代数方程式の解の性質

1 次方程式，2 次方程式，高次方程式をまとめて**代数方程式**という．

有理数を係数とする代数方程式が $u+v\sqrt{q}$ $(u,v$ は有理数，$\sqrt{q}$は無理数$)$ を解にもつとき，この代数方程式は $u-v\sqrt{q}$ を解にもつ．

また，実数を係数とする代数方程式が虚数 α を解にもつとき，これと共役な複素数 $\overline{\alpha}$ もその代数方程式の解である．

証明 Q を有理数，$\sqrt{q}$ を無理数とするとき

$$Q[\sqrt{q}\,]=\{u+v\sqrt{q}\,|\,u,v\in Q\}$$

を考える．$x,\overline{x}\in Q[\sqrt{q}\,]$ を

$$x=u+v\sqrt{q}$$
$$\overline{x}=u-v\sqrt{q}$$

と定義すると，$k\in Q,\ x,y\in Q[\sqrt{q}\,]$ について，次の 3 式が成り立つ．

$$(*)\quad \begin{cases} \overline{k}=k \\ \overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y} \\ \overline{xy}=\overline{x}\,\overline{y} \end{cases}$$

第 3 式から　$\overline{x^2}=(\overline{x})^2$，　さらに　$\overline{x^n}=(\overline{x})^n$　$(n$ は自然数$)$．

例えば，$a,b,c,d\in Q$ である 3 次方程式

$$(**)\quad ax^3+bx^2+cx+d=0$$

の解が $z\in Q[\sqrt{q}\,]$ のとき，$az^3+bz^2+cz+d=0$ であるから，$(*)$ により

$$\overline{az^3+bz^2+cz+d}=\overline{0}$$
$$\overline{az^3}+\overline{bz^2}+\overline{cz}+\overline{d}=0$$
$$\overline{a}\,\overline{z^3}+\overline{b}\,\overline{z^2}+\overline{c}\,\overline{z}+d=0$$
$$a(\overline{z})^3+b(\overline{z})^2+c\overline{z}+d=0$$

これから $\overline{z}$ が $(**)$ の解であることが分かる．

> $(*)$ において，k を実数，x,y を複素数とし，x と $\overline{x}$ を互いに共役な複素数と考えても成り立つ．ゆえに，a,b,c,d を実数とするとき，$(**)$ の方程式が複素数 z を解にもつとき，共役な複素数 $\overline{z}$ も $(**)$ の解であることがわかる．なお，n 次方程式についてもこれらのことが成立する．

証終

演習 2.2 解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\quad \alpha\beta\gamma=-2$$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=3^2-2\cdot1=\mathbf{7}$

(2) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=-2+1+3+1=\mathbf{3}$

補足 3 つの変数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の基本対称式 (文字を入れ替えても式が不変) について，$A_1=\alpha+\beta+\gamma$ を 1 次基本対称式，$A_2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ を 2 次基本対称式，$A_3=\alpha\beta\gamma$ を 3 次基本対称式という．

3 次方程式 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ の解の基本対称式と係数について，次が成立することを学んだ．

$$A_1=-\frac{a_1}{a_0},\quad A_2=\frac{a_2}{a_0},\quad A_3=-\frac{a_3}{a_0}$$

4 つの変数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ (デルタ) の基本対称式は次の通りである．

1 次基本対称式　$A_1=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

2 次基本対称式　$A_2=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta$

3 次基本対称式　$A_3=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta$

4 次基本対称式　$A_4=\alpha\beta\gamma\delta$

4 次方程式 $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ について

$$\begin{aligned}a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4&=a_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\\&=a_0(x^4-A_1x^3+A_2x^2-A_3x+A_4)\end{aligned}$$

係数を比較すると，次が成立する．

$$A_1=-\frac{a_1}{a_0},\quad A_2=\frac{a_2}{a_0},\quad A_3=-\frac{a_3}{a_0},\quad A_4=\frac{a_4}{a_0}$$

一般に，n 次方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ の解 $x_1,\ x_2,\ \cdots x_n$ の k 次基本対称式を A_k とすると $(k=1,2,\cdots,n)$

$$A_k=(-1)^k\cdot\frac{a_k}{a_0}$$

が成立する (ジラール [Albelt Girard] の定理)．

問題 2.7 $P(x)$ を $3x+1$ で割った商を $Q(x)$，余りを R とすると

$$P(x) = (3x+1)Q(x) + R$$

両辺に $x = -\dfrac{1}{3}$ を代入すると　　$P\left(-\dfrac{1}{3}\right) = R$

よって，$P(x)$ を $3x+1$ で割った余り R は $P\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ に等しい．

したがって，$P(x) = 3x^3 + x^2 + x + 1$ を $3x+1$ で割った余りは

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{3}\right) &= 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \\ &= -\frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

補足 64 ページの練習 2.22 の公式から，$R = P\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ から始めてもよい．

問題 2.8 (1) $P(-1) = (-1)^3 + a\cdot(-1) + b = \boldsymbol{-a+b-1}$

$P(3) = 3^3 + a\cdot 3 + b = \boldsymbol{3a+b+27}$

(2) $P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割った余りが $3x-2$ であるから，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$P(x) = (x+1)(x-3)Q(x) + 3x - 2$$

この等式より　　$P(-1) = 3\cdot(-1) - 2 = -5, \quad P(3) = 3\cdot 3 - 2 = 7$

(1) の結果から　　$-a+b-1 = -5, \quad 3a+b+27 = 7$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = -4,\ b = -8}$

問題 2.9 $\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0$ より

$$\omega^4 + \omega^2 + 1 = \omega^3\omega + \omega^2 + 1 = 1\cdot\omega + \omega^2 + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = \boldsymbol{0}$$

別解 ω^2 は方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解であるから

$$\omega^4 + \omega^2 + 1 = (\omega^2)^2 + \omega^2 + 1 = \boldsymbol{0}$$

問題 2.10 (1) 左辺を因数分解すると　$(x^2-4)(x^2+6)=0$

よって　　$x^2-4=0$　または　$x^2+6=0$

したがって　　$\boldsymbol{x=\pm 2,\ \pm\sqrt{6}\,i}$

(2) $P(x)=2x^3+7x^2+2x-3$ とすると

$P(-1)=2\cdot(-1)^3+7\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-3=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$$P(x)=(x+1)(2x^2+5x-3)$$
$$=(x+1)(x+3)(2x-1)$$

2	7	2	−3	−1
	−2	−5	3	
2	5	−3	0	

$P(x)=0$ から　$\boldsymbol{x=-1,-3,\ \dfrac{1}{2}}$

(3) $P(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$ とすると

$P(1)=1^4-1^3-2\cdot1^2+1+1=0$

$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$P(x)=(x-1)(x^3-2x-1)$$

1	−1	−2	1	1	1
	1	0	−2	−1	
1	0	−2	−1	0	

さらに，$Q(x)=x^3-2x-1$ とすると

$Q(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)-1=0$

$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$$Q(x)=(x+1)(x^2-x-1)$$

1	0	−2	−1	−1
	−1	1	1	
1	−1	−1	0	

よって　$P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-1)$

$P(x)=0$ から　$\boldsymbol{x=\pm 1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

問題 2.11 (1) 1，-1 がこの方程式の解であるから

$$1^3 - 2\cdot 1^2 + a\cdot 1 + b = 0, \quad (-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + a\cdot(-1) + b = 0$$

式を整理すると　$a + b - 1 = 0, \quad -a + b - 3 = 0$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = -1,\ b = 2}$

(2) (1) より，方程式は　　$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

左辺を因数分解すると　　$(x-1)(x+1)(x-2) = 0$

したがって，求める他の解は　　$\mathbf{2}$

問題 2.12 もとの立方体の 1 辺の長さを x cm とすると，直方体の辺の長さは，縦 $(x+1)$ cm，横 $(x+2)$ cm，高さ $(x-1)$ cm であるから，条件より

$$(x+1)(x+2)(x-1) = \frac{3}{2}x^3 \quad (x > 1)$$

展開して整理すると　　$x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$

左辺を因数分解すると　　$(x-2)(x^2 - 2x - 2) = 0$

したがって　　$x = 2,\ 1 \pm \sqrt{3}$

$x > 1$ であるから　　$x = 2,\ 1 + \sqrt{3}$

よって，立方体の 1 辺の長さは　$\mathbf{2cm}$　または　$\mathbf{(1+\sqrt{3})cm}$

章末 2.1 (1) $(1+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-8}) = (1+\sqrt{2}i)(3-2\sqrt{2}\,i)$

$$= 3 - 2\sqrt{2}\,i + 3\sqrt{2}\,i - 4i^2$$
$$= \{3 - 4\cdot(-1)\} + (-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2})i = \mathbf{7 + \sqrt{2}\,i}$$

(2) $(1-i)^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 - i^3$

$$= \{1 + 3\cdot(-1)\} + (-3+1)i$$
$$= \mathbf{-2 - 2i}$$

(3) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \dfrac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)}$

$$= \frac{1-i}{1^2+1^2} + \frac{1+2i}{1^2+2^2} = \frac{1-i}{2} + \frac{1+2i}{5}$$
$$= \frac{5(1-i) + 2(1+2i)}{10} = \mathbf{\frac{7}{10} - \frac{1}{10}i}$$

章末 2.2 (1) 左辺を因数分解すると

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)=0$$

よって　　$2x-1=0$　または　$4x^2+2x+1=0$

したがって　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{4}}$

(2) 左辺を因数分解すると

$$(2x^2-3)(x^2+2)=0$$

よって　　$2x^2-3=0$　または　$x^2+2=0$

したがって　$\boldsymbol{x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \pm\sqrt{2}\,i}$

(3) 展開して整理すると

$$x^3+3x^2+2x-24=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-2)(x^2+5x+12)=0$$

よって　$x-2=0$　または　$x^2+5x+12=0$

したがって　$\boldsymbol{x=2,\ \dfrac{-5\pm\sqrt{23}i}{2}}$

(4) $x^2-x=X$ とおくと

$$X^2-8X+12=0$$

左辺を因数分解すると

$$(X-2)(X-6)=0$$

よって　$(x^2-x-2)(x^2-x-6)=0$
$(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)=0$

したがって　　$\boldsymbol{x=-2,-1,\ 2,\ 3}$

章末 2.3　$2+i$ がこの方程式の解であるから

$$(2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)+5=0$$

整理して　　$(3a+2b+7)+(4a+b+11)i=0$

a，b は実数であるから　　$3a+2b+7=0$，$4a+b+11=0$

これを解くと　　$a=-3$，$b=1$

このとき，方程式は　　$x^3-3x^2+x+5=0$

左辺を因数分解すると　　$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

したがって　　$x=-1,\ 2\pm i$

	1	−3	1	5	−1
		−1	4	−5	
	1	−4	5	0	

(答) $\boldsymbol{a=-3,\ b=1}$，　他の解は $\boldsymbol{-1,\ 2-i}$

別解　$P(x)=x^3+ax^2+bx+5$ とし，$\alpha=2+i$ と共役な複素数を $\overline{\alpha}=2-i$ とおくと，$P(\alpha)=0,\ P(\overline{\alpha})=0$ であるから，$P(x)$ は $x-\alpha,\ x-\overline{\alpha}$ を因数にもつ．

このとき，$P(x)$ は

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}=x^2-4x+5$$

で割り切れる．

$$\begin{array}{rl}
 & x\ +(a+4) \\
\hline
x^2-4x+5\,) & x^3\ \ +ax^2\ \ +bx\ \ +5 \\
 & x^3\ \ -4x^2\ \ +5x \\
\hline
 & (a+4)x^2\ +(b-5)x\ +5 \\
 & (a+4)x^2\ -4(a+4)x+5(a+4) \\
\hline
 & (4a+b+11)x\ -5a-15
\end{array}$$

したがって　$4a+b+11=0,\ -5a-15=0$　ゆえに　$\boldsymbol{a=-3,\ b=1}$

$P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)$ より，方程式 $P(x)=0$ の解は　$x=-1,\ 2\pm i$

よって，求める他の解は　$\boldsymbol{-1,\ 2-i}$

章末 2.4 $z = a + bi$ とおくと ($a,\ b$ は実数)，$z^2 = 5 + 12i$ より

$$(a + bi)^2 = 5 + 12i \quad \text{ゆえに} \quad a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$$

$a^2 - b^2,\ 2ab$ は実数であるから

$$a^2 - b^2 = 5 \quad \cdots ①, \quad 2ab = 12 \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{6}{a} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$a^2 - \left(\frac{6}{a}\right)^2 = 5 \quad \text{整理すると} \quad a^4 - 5a^2 - 36 = 0$$

したがって $(a^2 + 4)(a^2 - 9) = 0$ a は実数であるから $a = \pm 3$

② より $a = \pm 3$ のとき $b = \pm 2$ (複号同順) よって $\boldsymbol{z = \pm(3 + 2i)}$

章末 2.5 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b \qquad (*)$$

条件から，$\alpha - 1,\ \beta - 1$ を解とする 2 次方程式が $x^2 + bx + a = 0$ であるから

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = -b, \quad (\alpha - 1)(\beta - 1) = a$$

整理すると $(\alpha + \beta) - 2 = -b, \quad \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = a$

上の 2 式に $(*)$ を代入すると

$$-a - 2 = -b, \quad b - (-a) + 1 = a \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = -3,\ b = -1}$$

章末 2.6 この 2 次方程式の解を $\alpha,\ \beta$ とし，判別式を D とする．

この 2 次方程式が，異なる 2 つの正の解をもつのは，次が成り立つときである．

$$D>0 \text{ で, } (\alpha-1)+(\beta-1)>0 \quad \text{かつ} \quad (\alpha-1)(\beta-1)>0$$

ここで　$D/4=\{-(m-1)\}^2-1\cdot(m+5)=m^2-3m-4=(m+1)(m-4)$

$D>0$ より　$(m+1)(m-4)>0$　これを解いて　$m<-1,\ 4<m$　$\cdots$①

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=2(m-1),\quad \alpha\beta=m+5$

$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$，すなわち，$\alpha+\beta-2>0$ のとき

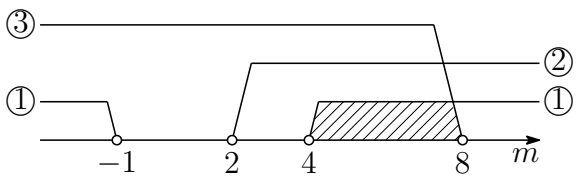
$$2(m-1)-2>0 \quad \text{これを解いて} \quad m>2 \quad \cdots②$$

$(\alpha-1)(\beta-1)>0$，すなわち，$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$ のとき

$$m+5-2(m-1)+1>0 \quad \text{これを解いて} \quad m<8 \quad \cdots③$$

①〜③ の共通範囲を求めて

$4<m<8$



別解　$f(x)=x^2-2(m-1)x+m+5$ とおくと

$$f(x)=(x-m+1)^2-m^2+3m+4$$

放物線 $y=f(x)$ の頂点を $(p,\ q)$ とすると　$p=m-1,\ q=-m^2+3m+4$

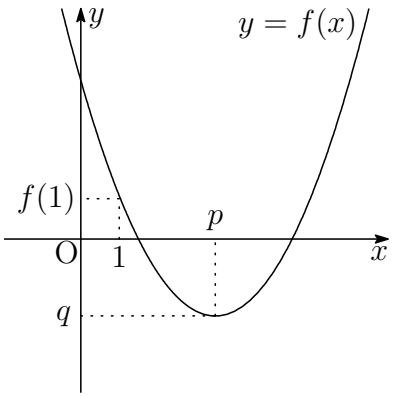
2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの解をもち，その解がともに 1 より大きいとき，次が成立する．

$$p>1,\quad q<0,\quad f(1)>0$$

$f(1)=8-m$ および上の諸式から

$$\begin{cases} m-1>1 \\ -m^2+3m+4<0 \\ 8-m>0 \end{cases}$$

したがって　$\begin{cases} m>2 \\ m<-1,\ 4<m \\ m<8 \end{cases}$



よって，求める m の値の範囲は　**$4<m<8$**

章末 2.7 (1) $x=-1+\sqrt{2}\,i$ より，$x+1=\sqrt{2}\,i$ の両辺を平方すると

$$(x+1)^2=-2 \quad \text{整理すると} \quad \boldsymbol{x^2+2x+3=0}$$

別解 $x^2+2x+3=(-1+\sqrt{2}\,i)^2+2(-1+\sqrt{2}\,i)+3$
$=(1-2\sqrt{2}\,i-2)-2+2\sqrt{2}\,i+3=\mathbf{0}$

(2) x^3+6x^2+8x+7 を x^2+2x+3 で割ると

$$\begin{array}{r} x+4 \\ \hline x^2+2x+3\,\big)\,x^3+6x^2+8x+7 \\ x^3+2x^2+3x \\ \hline 4x^2+5x+7 \\ 4x^2+8x+12 \\ \hline -3x-5 \end{array}$$

したがって　　$x^3+6x^2+8x+7=(x^2+2x+3)(x+4)-3x-5$

これに $x=-1+\sqrt{2}\,i$ および (1) の結果を代入すると

$$x^3+6x^2+8x+7=-3(-1+\sqrt{2}\,i)-5=\boldsymbol{-2-3\sqrt{2}\,i}$$

章末 2.8 $x=1$ がこの方程式の解であるから

$$1^3+(a-1)\cdot 1^2+(1-a)\cdot 1+b=0$$

これを解いて　　$b=-1$

$b=-1$ を方程式に代入すると

$$x^3+(a-1)x^2+(1-a)x-1=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^2+ax+1)=0$$

この方程式の実数解が $x=1$ だけであるのは，次の［1］,［2］の場合である．

［1］2 次方程式 $x^2+ax+1=0$ が実数解をもたない．

判別式を D とすると

$$D=a^2-4\cdot 1\cdot 1=(a+2)(a-2)$$

2 次方程式が実数解をもたないのは $D<0$ のときである．

よって　　$(a+2)(a-2)<0$

これを解いて　　$-2<a<2$

［2］2 次方程式 $x^2+ax+1=0$ が $x=1$ を重解にもつ．

$x=1$ が方程式の解であるから

$$1^2+a\cdot 1+1=0$$

これを解くと　　$a=-2$

このとき，方程式は $x^2-2x+1=0$ となり，重解 $x=1$ をもつ．

［1］,［2］より，求める a の値の範囲は　　$\boldsymbol{-2\leqq a<2}$

3 次方程式・4 次方程式の解法

名古屋大学理系 2015 年 2 番

次の問に答えよ.

(1) $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ.

(2) 8 つの実数

$$\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9+2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

(ただし，複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる) の中で，(1) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ.

(3) (2) で求めた $f(x) = 0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ.

解答 (1) $p = \sqrt{9+2\sqrt{17}}$，$q = \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおくと

$$p^2 + q^2 = 18, \quad pq = \sqrt{13}$$

であるから，$\alpha = pq + p + q$ より

$$(\alpha - pq)^2 = (p+q)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 - 2pq\alpha + (pq)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

したがって $\quad \alpha^2 - 2\sqrt{13}\alpha + 13 = 18 + 2\sqrt{13}$

$$\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{13}(\alpha + 1)$$

この両辺を平方すると

$$(\alpha^2 - 5)^2 = 52(\alpha+1)^2 \quad \text{すなわち} \quad \alpha^4 - 62\alpha^2 - 104\alpha - 27 = 0$$

よって $\quad \boldsymbol{f(x) = x^4 - 62x^2 - 104x - 27}$

(2) (1) の式変形に注意すると，$f(x) = 0$ は $\quad (x^2-5)^2 = 52(x+1)^2$

(i) $x^2 - 5 = 2\sqrt{13}(x+1)$ のとき

$$x^2 - 2\sqrt{13}x + 13 = 18 + 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x-pq)^2 = (p+q)^2$$

したがって $\quad x - pq = \pm(p+q) \quad$ すなわち $\quad x = pq+p+q,\ pq-p-q$

(ii) $x^2 - 5 = -2\sqrt{13}(x+1)$ のとき

$$x^2 + 2\sqrt{13}x + 13 = 18 - 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x+pq)^2 = (p-q)^2$$

したがって $\quad x + pq = \pm(p-q) \quad$ すなわち $\quad x = -pq+p-q, -pq-p+q$

(i)，(ii) から，$f(x)=0$ の解は

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

(3) (2) で求めた解を

$$\begin{aligned}
&\alpha=pq+p+q, \quad \beta=-pq+p-q,\\
&\gamma=pq-p-q, \quad \delta=-pq-p+q
\end{aligned}$$

とおく．ここで $\quad p=\sqrt{9+2\sqrt{17}}>\sqrt{9+2\sqrt{16}}=\sqrt{17},$

$$q=\sqrt{9-2\sqrt{17}}<\sqrt{9-2\sqrt{16}}=1$$

したがって $\qquad \alpha-\beta=2pq+2q=2q(p+1)>0$

$$\beta-\gamma=2p-2pq=2p(1-q)>0$$

$$\gamma-\delta=2pq-2q=2q(p-1)>0$$

上の 3 式から，$\alpha>\beta>\gamma>\delta$ となる．よって，大きい順に

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

解説 4 次方程式 $x^4-62x^2-104x-27=0\cdots(*)$ が

$$(x^2-5)^2=52(x+1)^2$$

と変形できることを利用して (フェラーリの方法)，解を求めている．

本題 (1) はこの変形につながる設問となっている．

手がかりになしに，方程式 $(*)$ を解くとすると

$$x^4-62x^2-104x-27=(x^2+k)^2-(px+q)^2$$

とおき ($k,\ p,\ q$ は定数)，上式の右辺を展開して整理すると

$$x^4-62x^2-104x-27=x^4+(2k-p^2)x^2-2pqx+k^2-q^2$$

同じ次数の項の係数を比較すると　$p^2=2k+62$，$pq=52$，$q^2=k^2+27$

これらの 3 式から，p，q を消去すると　$(2k+62)(k^2+27)=52^2$

整理すると　　$k^3+31k^2+27k-515=0$　$\cdots(**)$

因数定理により　　$(k+5)(k^2+26k-103)=0$

$k=-5$ とすると，$p=q=\pm2\sqrt{13}$ となり，$(*)$ の解が求まる．

余談だが，3 次方程式 $(**)$ を一般的な方法 (カルダノの方法) で解いてみる．

$k=t-\dfrac{31}{3}\cdots$① とおいて，$(**)$ に代入すると

$$\left(t-\frac{31}{3}\right)^3+31\left(t-\frac{31}{3}\right)^2+27\left(t-\frac{31}{3}\right)-515=0$$

整理すると　　$t^3-\dfrac{880}{3}t+\dfrac{38144}{27}=0$

$t=u+v$ とおいて，これに代入すると

$$(u+v)^3-\frac{880}{3}(u+v)+\frac{38144}{27}=0$$

$$3(u+v)\left(uv-\frac{880}{9}\right)+u^3+v^3+\frac{38144}{27}=0$$

$uv=\dfrac{880}{9}$，$u^3+v^3=-\dfrac{38144}{27}$ とし，u^3，v^3 を解とする 2 次方程式

$$X^2+\frac{38144}{27}X+\left(\frac{880}{9}\right)^3=0$$

これを解くと　$X=\dfrac{64}{27}(-298\pm39\sqrt{51}i)=\left\{\dfrac{4}{3}(2\mp\sqrt{51}i)\right\}^3$　(複号同順)

$z=\dfrac{4}{3}(2+\sqrt{51}i)$，$w=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ とおくと，uv は実数であるから

$$\begin{aligned}t&=z+\overline{z},\quad zw+\overline{z}\,\overline{w},\quad z\overline{w}+\overline{z}w\\&=\frac{16}{3},\ -\frac{8}{3}-4\sqrt{17},\ -\frac{8}{3}+4\sqrt{17}\end{aligned}$$

① より　　$k=-5,\ -13-4\sqrt{17},\ -13+4\sqrt{17}$

一般に，4 次方程式 $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ は，$x=y-\dfrac{a_3}{4}$ おくことにより，$y^4+b_2y^2+b_1y+b_0=0$ と変形でき，フェラーリの方法が適用できる．フェラーリの方法の中で，3 次方程式を解く必要があり，3 次方程式の一般的な解法がカルダノの方法である．さらにカルダノの方法の中で 2 次方程式の解の公式を用いている．

練習 3.1 (1) $\mathrm{AB} = |6-(-1)| = |7| = \mathbf{7}$

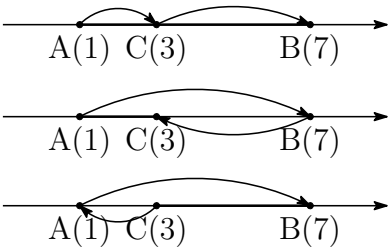
(2) $\mathrm{AB} = |2-4| = |-2| = \mathbf{2}$

(3) $\mathrm{OA} = |3| = \mathbf{3}$

練習 3.2 (1) $\mathrm{AC} : \mathrm{CB} = 2 : 4 = 1 : 2$ より
点 C は線分 AB を **1 : 2 に内分する.**

(2) $\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = 6 : 4 = 3 : 2$ より
点 B は線分 AC を **3 : 2 に外分する.**

(3) $\mathrm{CA} : \mathrm{AB} = 2 : 6 = 1 : 3$ より
点 A は線分 CB を **1 : 3 に外分する.**



練習 3.3 (1) 内分点 C の座標は $\dfrac{2\times 4+3\times 8}{3+2} = \dfrac{32}{5}$ $\quad \mathbf{C}\left(\dfrac{\mathbf{32}}{\mathbf{5}}\right)$

(2) 外分点 D の座標は $\dfrac{-1\times 4+3\times 8}{3-1} = \dfrac{20}{2} = 10$ $\quad \mathbf{D(10)}$

(3) 外分点 E の座標は $\dfrac{-3\times 4+2\times 8}{2-3} = \dfrac{4}{-1} = -4$ $\quad \mathbf{E(-4)}$

(4) 中点 M の座標は $\dfrac{4+8}{2} = 6$ $\quad \mathbf{M(6)}$

練習 3.4 (1) $\mathrm{AB} = \sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

(2) $\mathrm{AB} = \sqrt{\{2-(-3)\}^2+(-4-1)^2} = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{50} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

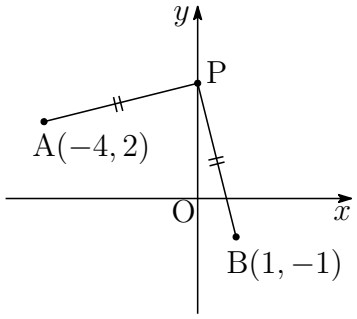
(3) $\mathrm{AB} = \sqrt{(3-5)^2+\{-2-(-2)\}^2} = \sqrt{(-2)^2+0^2} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$

(4) $\mathrm{OA} = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \mathbf{\sqrt{13}}$

練習 3.5 点 P の座標を $(0,\ y)$ とする.
AP = BP すなわち $\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$ より

$$\{0-(-4)\}^2+(y-2)^2 = (0-1)^2+\{y-(-1)\}^2$$

式を整理すると $\quad -6y = -18$
これを解くと $\quad y = 3$
よって，点 P の座標は $\quad \mathbf{(0,\ 3)}$



中線定理および角の二等分線に関する公式

応用例題 3.1 の中線定理は，余弦定理を用いて証明することもできる．$\angle \mathrm{AMB} = \theta$ とすると，$\angle \mathrm{AMC} = 180^\circ - \theta$．$\triangle \mathrm{ABM}$ および $\triangle \mathrm{AMC}$ に余弦定理を適用すると，$\mathrm{MC} = \mathrm{BM}$ より

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2 - 2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}\cos\theta \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AM}^2 + \mathrm{MC}^2 - 2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{MC}\cos(180^\circ - \theta)\\ &= \mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2 + 2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}\cos\theta \end{aligned}\tag{2}$$

(1)，(2) の辺々を加えると

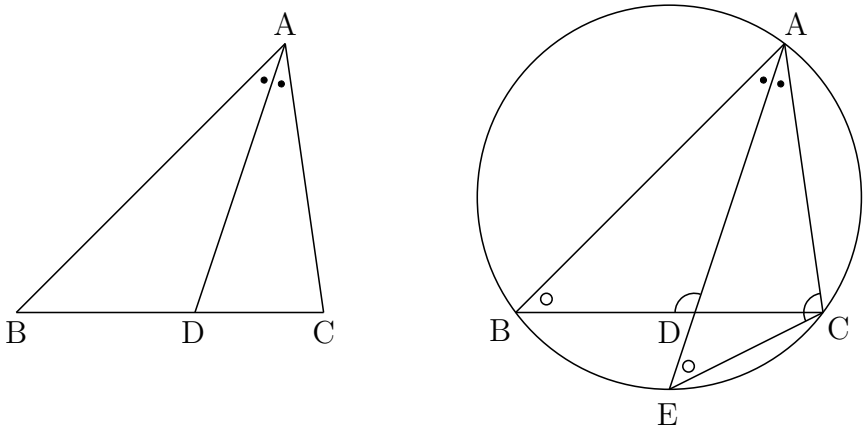
$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

三角形の角の二等分線に関する公式

$\triangle \mathrm{ABC}$ の $\angle \mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

$$\mathbf{AD^2 = AB\cdot AC - BD\cdot DC}$$

証明 右下の図のように $\triangle \mathrm{ABC}$ の外接円と AD の延長との交点を E とする．(p.89)



$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{AEC}$ より

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AD} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}$$

$\mathrm{AE} = \mathrm{AD} + \mathrm{DE}$ より

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{AD}(\mathrm{AD} + \mathrm{DE}) = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}$$

方べきの定理により，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE} = \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$ であるから

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC} \quad \text{よって} \quad \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} - \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$$ 証終

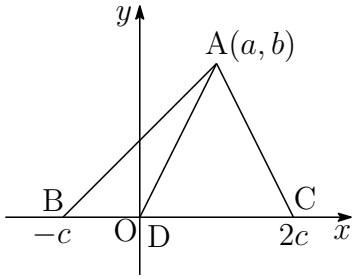
△ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC},\ b=\mathrm{AC},\ c=\mathrm{AB}$ とすると

$$\mathrm{BD}=\frac{c}{b+c}a,\quad \mathrm{DC}=\frac{b}{b+c}a$$

したがって　$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}=cb-\dfrac{ca}{b+c}\cdot\dfrac{ba}{b+c}$

$$=\frac{bc}{(b+c)^2}\{(b+c)^2-a^2\}=\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

練習 3.6 D は辺 BC を 1 : 2 に内分する点であるから，D を原点にとり，右の図のように $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(-c,\ 0)$，$\mathrm{C}(2c,\ 0)$ とする．このとき



$$\begin{aligned}2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2&=2\{(a+c)^2+b^2\}\\&\qquad+(a-2c)^2+b^2\\&=3(a^2+b^2+2c^2),\\ \mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2&=(a^2+b^2)+2c^2\end{aligned}$$

よって　$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2)$

補足 △ABC において，辺 BC を $m:n$ に内分する点を D を原点とし，$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(-mc,\ 0)$，$\mathrm{C}(nc,\ 0)$ とすると，次が成立する (スチュワートの定理)．

$$\begin{aligned}n\mathrm{AB}^2+m\mathrm{AC}^2&=n\{(-mc-a)^2+(-b)^2\}+m\{(nc-a)^2+(-b)^2\}\\&=(m+n)(a^2+b^2)+n(mc)^2+m(nc)^2\\&=(m+n)\mathrm{AD}^2+n\mathrm{BD}^2+m\mathrm{DC}^2\end{aligned}$$

同定理は，$\theta=\angle\mathrm{ADB}$ とおき，余弦定理を用いて証明することもできる．

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BD}\cos\theta\\ \mathrm{AC}^2&=\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}\cos(180^\circ-\theta)\end{aligned}$$

このとき，$n\mathrm{BD}=m\mathrm{DC}$ により

$$\begin{aligned}n\mathrm{AB}^2+m\mathrm{AC}^2&=(m+n)\mathrm{AD}^2+n\mathrm{BD}^2+m\mathrm{DC}^2\\&\qquad+2(-n\mathrm{BD}+m\mathrm{DC})\mathrm{AD}\cos\theta\\&=(m+n)\mathrm{AD}^2+n\mathrm{BD}^2+m\mathrm{DC}^2\end{aligned}$$

深化 3.1 $\mathrm{A}(0,\ b)$ とすると，AB = AC となり，△ABC が二等辺三角形という条件下での証明となる．したがって，一般的な三角形で証明したことにはならない．

練習 3.7 (1) 内分点 C の座標は

$$\left(\frac{1\times(-3)+2\times4}{2+1},\ \frac{1\times2+2\times5}{2+1}\right) \text{ より} \qquad \mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}},\ \mathbf{4}\right)$$

(2) 外分点 D の座標は

$$\left(\frac{-1\times(-3)+2\times4}{2-1},\ \frac{-1\times2+2\times5}{2-1}\right) \text{ より} \qquad \mathbf{D(11,\ 8)}$$

(3) 外分点 E の座標は

$$\left(\frac{-3\times(-3)+2\times4}{2-3},\ \frac{-3\times2+2\times5}{2-3}\right) \text{ より} \qquad \mathbf{E(-17,-4)}$$

(4) 中点 M の座標は

$$\left(\frac{-3+4}{2},\ \frac{2+5}{2}\right) \text{ より} \qquad \mathbf{M}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right)$$

練習 3.8 点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，線分 PQ の中点が点 A であるから

$$\frac{0+x}{2}=-3,\quad \frac{-4+y}{2}=2 \quad \text{これを解くと} \quad x=-6,\ y=8$$

よって，点 Q の座標は $\mathbf{(-6,\ 8)}$

練習 3.9 辺 AB の中点 N の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

G′ は線分 CN を 2 : 1 に内分するから，その座標は

$$\left(\frac{1\times x_3+2\times\dfrac{x_1+x_2}{2}}{2+1},\ \frac{1\times y_3+2\times\dfrac{y_1+y_2}{2}}{2+1}\right)$$

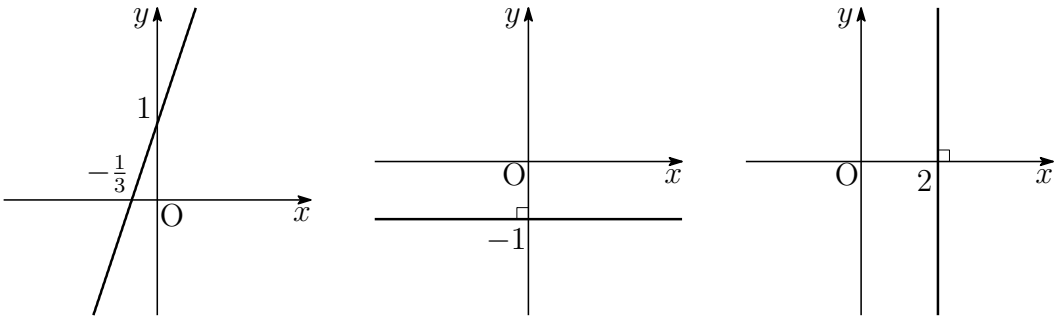
すなわち $\left(\dfrac{\boldsymbol{x_1+x_2+x_3}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\boldsymbol{y_1+y_2+y_3}}{\mathbf{3}}\right)$

補足 例題 3.3 で得られた重心 G の座標は，$x_1,\ x_2,\ x_3$ および $y_1,\ y_2,\ y_3$ の対称式である．練習 3.9 は例題 3.3 の C を A と交換したもので両者の結果は一致する．

練習 3.10 (1) $\left(\dfrac{1+5+3}{3},\ \dfrac{1+2+4}{3}\right)$ より $\left(\mathbf{3},\ \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right)$

(2) $\left(\dfrac{-2+0+2}{3},\ \dfrac{4+(-3)+1}{3}\right)$ より $\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$

練習 3.11 (1) $y = 3x + 1$ (2) $y = -1$ (3) $x = 2$



練習 3.12 (1) $y - (-4) = 3(x - 2)$ すなわち $\boldsymbol{y = 3x - 10}$

(2) $y - 1 = -2\{x - (-3)\}$ すなわち $\boldsymbol{y = -2x - 5}$

練習 3.13 (1) $y - 2 = \dfrac{6-2}{5-3}(x-3)$ すなわち $\boldsymbol{y = 2x - 4}$

(2) $y - 4 = \dfrac{-2-4}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$ すなわち $\boldsymbol{y = -2x + 2}$

(3) $y - (-1) = \dfrac{-1-(-1)}{1-2}(x-2)$ すなわち $\boldsymbol{y = -1}$

別解 2 点の y 座標が等しく -1 であるから $\boldsymbol{y = -1}$

(4) 2 点の x 座標が等しく 3 であるから $\boldsymbol{x = 3}$

練習 3.14 2 点 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ を通る直線であるから $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{b}{a}x + b$$

したがって $\dfrac{bx}{a} + y = b$ よって $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

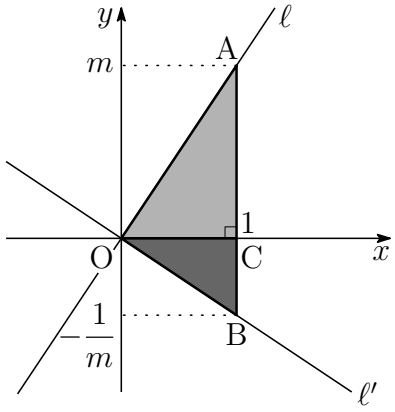
練習 3.15 直線の傾きは，それぞれ

① 2
② -2
③ $y = -2x - 5$ より -2

よって，直線 $y = -2x$ と平行であるものは ②，③

補足 傾き $m > 0$ の直線に垂直な直線の傾き m' を次のように求めることもできる．これらの 2 直線と平行で原点を通る 2 直線 ℓ, ℓ' について考えてもよい．

右の図のように，原点 O を通る 2 直線 ℓ，ℓ' および x 軸と直線 $x=1$ との交点を，それぞれ A，B，C とする．△OCA と △BCO は相似であるから



$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{BC}}$$

よって $\quad \dfrac{m}{1} = \dfrac{1}{\mathrm{BC}}$

したがって $\quad \mathrm{BC} = \dfrac{1}{m}$

このことから

傾き m の直線に垂直な直線の傾き m' は $\quad m' = -\dfrac{1}{m}$

逆に　傾き m' の直線に垂直な直線の傾き m は $\quad m = -\dfrac{1}{m'}$

一般に，傾き m の直線に垂直な直線の傾きは $\boldsymbol{-\dfrac{1}{m}}$ である．　**証終**

練習 3.16 (1) 直線の傾きは，どちらも 4 で等しい．

よって，この 2 直線は**平行**である．

(2) 直線の傾きは，それぞれ $\quad 3,\ -\dfrac{1}{3}$

$3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -1$ より，2 直線は**垂直**である．

(3) 直線の傾きは，どちらも $-\dfrac{2}{3}$ で等しい．

よって，この 2 直線は**平行**である．

(4) 直線の傾きは，それぞれ $\quad -\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{3}$

$-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{3} = -1$ より，2 直線は**垂直**である．

練習 3.17　　$3x+2y+1=0 \quad \cdots ①$

直線 ① の傾きは　　$-\dfrac{3}{2}$

直線 ① に垂直な直線の傾きは　　$\dfrac{2}{3}$

よって，点 $(3,-1)$ を通り，直線 ① に垂直な直線の方程式は

$$y-(-1)=\frac{2}{3}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{2x-3y-9=0}$$

直線 ① に平行な直線の傾きは　　$-\dfrac{3}{2}$

よって，点 $(3,-1)$ を通り，直線 ① に平行な直線の方程式は

$$y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{3x+2y-7=0}$$

別解　点 $\mathrm{A}(3,-1)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に垂直な直線の方程式は

$$2(x-3)-3(y+1)=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{2x-3y-9=0}$$

点 $\mathrm{A}(3,-1)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に平行な直線の方程式は

$$3(x-3)+2(y+1)=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{3x+2y-7=0}$$

三角形の外心・垂心・重心

△ABC の外心 O を原点にとり，頂点の座標を $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ とすると，$OA^2 = OB^2 = OC^2$ より

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2 = x_3{}^2 + y_3{}^2 \qquad (*)$$

直線 $BC : -(y_3 - y_2)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2) = 0$ に垂直で，点 $A(x_1,\ y_1)$ を通る直線の方程式は

$$(x_3 - x_2)(x - x_1) + (y_3 - y_2)(y - y_1) = 0 \qquad (1)$$

直線 $CA : -(y_1 - y_3)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3) = 0$ に垂直で，点 $B(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$$(x_1 - x_3)(x - x_2) + (y_1 - y_3)(y - y_2) = 0 \qquad (2)$$

直線 $AB : -(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$ に垂直で，点 $C(x_3,\ y_3)$ を通る直線の方程式は

$$(x_1 - x_3)(x - x_2) + (y_1 - y_3)(y - y_2) = 0 \qquad (3)$$

点 $H(x_1 + x_2 + x_3,\ y_1 + y_2 + y_3)$ をとり，$x = x_1 + x_2 + x_3$，$y = y_1 + y_2 + y_3$ を (1) の左辺に代入すると，$(*)$ より

$$\begin{aligned}(1)\text{ の左辺} &= (x_3 - x_2)\{(x_1 + x_2 + x_3) - x_1\} + (y_3 - y_2)\{(y_1 + y_2 + y_3) - y_1\} \\ &= (x_3 - x_2)(x_3 + x_2) + (y_3 - y_2)(y_3 + y_2) = (x_3{}^2 + y_3{}^2) - (x_2{}^2 + y_2{}^2) = 0\end{aligned}$$

したがって，点 H は直線 (1) 上の点である．これと同様にして，点 H が直線 (2)，(3) 上の点であることも確かめられる．すなわち，点 H は △ABC の垂心である．

また，△ABC の重心 $G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ は，線分 OH を 1 : 2 に内分する点であることが分かる．

注意 外心 $\tilde{O}(p,\ q)$ であれば，3 点 A，B，C を x 軸方向に $-p$，y 軸方向に $-q$ だけそれぞれ平行移動させた点を $A'(x_1 - p,\ y_1 - q)$，$B'(x_2 - p,\ y_2 - q)$，$C'(x_3 - p,\ y_3 - q)$ とすると，△A′B′C′ の重心 G′，垂心 H′ は

$$G'\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} - p,\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} - q\right), H'(x_1 + x_2 + x_3 - 3p,\ y_1 + y_2 + y_3 - 3q)$$

G，H は G′，H′ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものであるから

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right), H(x_1 + x_2 + x_3 - 2p,\ y_1 + y_2 + y_3 - 2q)$$

である．確かに，$\tilde{O}(p,\ q)$，$H(x_1 + x_2 + x_3 - 2p,\ y_1 + y_2 + y_3 - 2q)$ を 1 : 2 に内分する点が重心 $G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ である．

練習 3.18 点 B の座標を $(p,\ q)$ とする．

［1］直線 ℓ の傾きは 2，直線 AB の傾きは $\dfrac{q-1}{p-2}$ である．

AB$\perp\ell$ であるから

$$2\cdot\frac{q-1}{p-2}=-1$$

すなわち　$p+2q-4=0$　$\cdots$①

［2］線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q+1}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$2\cdot\frac{p+2}{2}-\frac{q+1}{2}+2=0$$

すなわち　$2p-q+7=0$　$\cdots$②

①，② を連立させた方程式を解くと　　$p=-2$，$q=3$

したがって，点 B の座標は　　$\boldsymbol{(-2,\ 3)}$

別解 点 B の座標を $(p,\ q)$ とする．

点 A$(2,\ 1)$ を通り，直線 $\ell:2x-y+2=0$ に垂直な直線の方程式は

$$1(x-2)+2(y-1)=0\quad\text{すなわち}\quad x+2y-4=0$$

この直線と ℓ の交点を M とすると　M$(0,\ 2)$

M$(0,\ 2)$ は 2 点 A$(2,\ 1)$，B$(p,\ q)$ の中点であるから

$$\frac{2+p}{2}=0,\quad \frac{1+q}{2}=2\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{B(-2,\ 3)}$$

練習 3.19 原点と直線の距離を d とする．

(1) $d=\dfrac{|5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(2) $d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{13}}=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{13}}{13}}$

練習 3.20 点と直線の距離を d とする．

(1) $d=\dfrac{|3\cdot1-4\cdot2-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{25}}=\boldsymbol{\dfrac{6}{5}}$

(2) $d=\dfrac{|2\cdot2+(-3)-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

(3) 点 $(-1,\ 5)$，直線 $3x-y-2=0$ の距離であるから

$$d=\frac{|3\cdot(-1)-5-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$$

演習 3.1 k を定数として

$$k(2x-y+1)+(x+y-4)=0 \quad \cdots ①$$

とすると，① は 2 直線の交点を通る直線を表す．

直線 ① が点 $(-2,\ 1)$ を通るから，① に $x=-2$，$y=1$ を代入して

$$-4k-5=0 \quad \text{ゆえに} \quad k=-\frac{5}{4}$$

これを ① に代入して整理すると　　$\boldsymbol{2x-3y+7=0}$

深化 3.2 次の直線 ③，④ は，ともに 2 直線 $x+2y-4=0 \cdots ①,\ x-y-1=0 \cdots ②$ の交点を通る直線である．

$$k(x+2y-4)+(x-y-1)=0 \quad \cdots ③$$
$$(x+2y-4)+l(x-y-1)=0 \quad \cdots ④$$

直線 ③ は，$k=0$ のとき直線 ② を表すが，直線 ① を表すことができない．直線 ④ は，$l=0$ のとき直線 ① を表すが，直線 ② を表すことができない．実際

$$\text{直線③の傾き} = -\frac{k+1}{2k-1} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2(2k-1)} \neq -\frac{1}{2} = \text{直線①の傾き}$$
$$\text{直線④の傾き} = \frac{l+1}{l-2} = 1 + \frac{3}{l-2} \neq 1 = \text{直線②の傾き}$$

問題 3.1

$$\mathrm{OA}^2 = 6^2 + 2^2 = 40$$
$$\mathrm{OB}^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$
$$\mathrm{AB}^2 = (2-6)^2 + (4-2)^2 = 20$$

よって　　$\mathrm{OB} = \mathrm{AB}$，$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OB}^2 + \mathrm{AB}^2$

したがって，△OAB は **OA を斜辺とする直角二等辺三角形**である．

問題 3.2 (1) 線分 AC の中点 M の座標は

$$\left(\frac{1+2}{2},\ \frac{1+6}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\boldsymbol{\frac{3}{2}},\ \boldsymbol{\frac{7}{2}}\right)$$

(2) 平行四辺形の対角線は，他を互いに二等分する．点 D$(x,\ y)$ とすると，BD の中点と AC の中点 M が一致するから

$$\frac{4+x}{2}=\frac{3}{2},\quad \frac{3+y}{2}=\frac{7}{2}$$

これを解いて　$x=-1,\ y=4$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{D}(-1,\ 4)}$

別解 点 C$(2,\ 6)$ は点 B$(4,\ 3)$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものであるから，点 D は点 A$(1,\ 1)$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである．よって，点 D の座標は

$$(1-2,\ 1+3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(-1,\ 4)}$$

発展 点 B$(4,\ 3)$ から点 C$(2,\ 6)$ への移動を，ベクトル (数学 C) を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2-4,\ 6-3)=(-2,\ 3) \qquad \leftarrow \text{ C の座標から B の座標を引く}$$

と表す．$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ はベクトル BC(有向線分 BC) と読む．B を $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の**始点**，C を $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の**終点**という．$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 3)$ の -2 を x 成分，3 を y 成分という．A$(1,\ 1)$，D$(x,\ y)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(x-1,\ y-1)$$

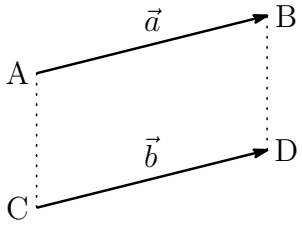
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の x 成分どうし，y 成分どうしが等しく，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とかく．すなわち

$$(x-1,\ y-1)=(-2,\ 3) \quad \text{ゆえに} \quad x=-1,\ y=4$$

ベクトルの基本性質

有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ で表す．また，ベクトルを $\vec{\boldsymbol{a}}$，$\vec{\boldsymbol{b}}$ などで表すこともある．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{a}$ の大きさは，それぞれ $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$，$|\vec{\boldsymbol{a}}|$ で表す．

向きが同じで大きさの等しい 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は**等しい**といい，$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ と書く．



公式 1 $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{a_1{}^2 + a_2{}^2}}$

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ のとき，$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (\boldsymbol{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1})$ より

$$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}| = \sqrt{(\boldsymbol{x_2 - x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2 - y_1})^2}$$

公式 2 $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}} \iff \boldsymbol{a_1 = b_1} \text{ かつ } \boldsymbol{a_2 = b_2}$$

公式 3 $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{\boldsymbol{a}} /\!/ \vec{\boldsymbol{b}} \iff \boldsymbol{a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0}$$
$$\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{b}} \iff \boldsymbol{a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0}$$

(証明) $\vec{a} /\!/ \vec{b}$ のとき，$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ より

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad \text{ゆえに} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ のとき，3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ をとると　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \text{すなわち} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$

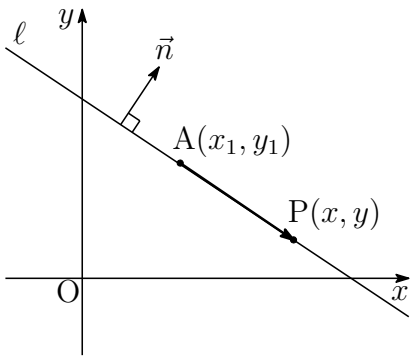
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$ より

$$({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

これを整理すると　　$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$　　**証終**

直線の法線ベクトル

直線に垂直なベクトルをその直線の**法線ベクトル**という．点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}=(a,\ b)$ である直線 ℓ の方程式を求めてみよう．ℓ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとると



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-x_1,\ y-y_1)$$

A 以外の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ より

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

これは，点 P が A のときも成立する．整理すると　$ax+by-ax_1-by_1=0$

$c=-ax_1-by_1$ とおくと　　$ax+by+c=0$

したがって，直線の方程式からその法線ベクトルがわかる．

> 直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトル $\vec{n}$ は　　$\boldsymbol{\vec{n}=(a,\ b)}$

問題 3.3　3 点 $\mathrm{A}(1,\ 5)$，$\mathrm{B}(6,-3)$，$\mathrm{C}(x,\ y)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心の座標が $(1,\ 3)$ であるから

$$\frac{1+6+x}{3}=1,\quad \frac{5-3+y}{3}=3\quad \text{これを解いて}\quad x=-4,\ y=7$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{C}(-4,\ 7)}$

問題 3.4　2 点 $(4,\ 0)$，$(0,\ 2)$ を通る直線の方程式は

$$y-0=\frac{2-0}{0-4}(x-4)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{x+2y-4=0}$$

別解 1　直線の x 切片が 4，y 切片が 2 であるから

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{x+2y-4=0}$$

別解 2　$\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$，直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,\ 2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-4,\ y)$$

A 以外の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}//\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より　$4y-2(x-4)=0$

上式は，点 P が A のときも成立するから　$\boldsymbol{x+2y-4=0}$

解説 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を通る直線上に任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1), \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x - x_1,\ y - y_1)$$

A 以外の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} // \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$$

上式は，点 P が A のときも成立し，97 ページの補足で解説した次の公式を得る．

$$\boldsymbol{-(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_2) = 0}$$

問題 3.5 2 直線 $3x - 4y + 5 = 0$，$2x + y - 4 = 0$ の交点は　$(1,\ 2)$

(1) 点 $(1,\ 2)$ を通り，直線 $2x + 3y = 0$ に平行な直線は

$$2(x - 1) + 3(y - 2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{2x + 3y - 8 = 0}$$

(2) 点 $(1,\ 2)$ を通り，直線 $2x + 3y = 0$ に垂直な直線は

$$3(x - 1) - 2(y - 2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{3x - 2y + 1 = 0}$$

別解 直線 $\ell : 2x + 3y = 0$ の法線ベクトルは　$\vec{n} = (2,\ 3)$

2 直線 $3x - 4y + 5 = 0$，$2x + y - 4 = 0$ の交点を通る直線は，定数 k を用いて

$$k(3x - 4y + 5) + (2x + y - 4) = 0$$

となる．これを整理すると

$$\ell' : (3k + 2)x + (-4k + 1)y + 5k - 4 = 0 \quad \cdots (*)$$

ℓ' の法線ベクトルは　$\vec{n'} = (3k + 2, -4k + 1)$

(1) $\ell // \ell'$ のとき，$\vec{n} // \vec{n'}$ より

$$2(-4k + 1) - 3(3k + 2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = -\frac{4}{17}$$

これを $(*)$ に代入して整理すると　$\boldsymbol{2x + 3y - 8 = 0}$

(2) $\ell \perp \ell'$ のとき，$\vec{n} \perp \vec{n'}$ より

$$2(3k + 2) + 3(-4k + 1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{7}{6}$$

これを $(*)$ に代入して整理すると　$\boldsymbol{3x - 2y + 1 = 0}$

問題 3.6 $b \neq 0,\ b' \neq 0$ より，2 直線 $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$ の傾きは，それぞれ $-\dfrac{a}{b}, -\dfrac{a'}{b'}$ である．2 直線の平行条件および垂直条件から

2直線が平行のとき　$-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$　ゆえに　$ab'-ba'=0$　(1)

2直線が垂直のとき　$\left(-\dfrac{a}{b}\right)\left(-\dfrac{a'}{b'}\right) = -1$　ゆえに　$aa'+bb'=0$　(2)

補足 上の (1)，(2) は，$b=0$，$b'=0$ でも成立する．$b=0$ のとき，2 直線は

$$ax+c=0\ (a\neq 0) \quad \cdots ①, \qquad a'x+b'y+c'=0 \quad \cdots ②$$

①//② のとき，$b'=0$ であるから，$b=0,\ b'=0$ となり，(1) を満たす．

①⊥② のとき，$a'=0$ であるから，$b=0,\ a'=0$ となり，(2) を満たす．

$b'=0$ のときも同様に，(1)，(2) を満たす．

解説 2 直線 $\ell : ax+by+c=0,\ \ell' : a'x+b'y+c'=0$ の法線ベクトルは，それぞれ $\vec{n}=(a,\ b),\ \vec{n'}=(a',\ b')$ であるから

$$\ell // \ell' \iff \vec{n} // \vec{n'} \iff ab'-ba'=0$$
$$\ell \perp \ell' \iff \vec{n} \perp \vec{n'} \iff aa'+bb'=0$$

問題 3.7 ［1］$a \neq b$ より，直線 AB の傾きは　$\dfrac{a-b}{b-a} = -1$，　直線 $y=x$ の傾きは　1

これら 2 直線の傾きについて　$(-1)\times 1 = -1$

したがって，これらの直線は垂直である．

［2］線分 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{b+a}{2}\right)$ は，直線 $y=x$ 上にある．

［1］，［2］より，2 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(b,\ a)$ は，直線 $y=x$ に関して対称である．

問題 3.8 (1) 2 点 A$(4, -2)$，B$(-2,\ 6)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$y-(-2)=\frac{6-(-2)}{-2-4}(x-4) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{4x+3y-10=0}$$

(2) 原点 O と直線 $\ell : 4x-3y-10=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|-10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{10}{5}=\boldsymbol{2}$$

(3) 線分 AB の長さは $\mathrm{AB}=\sqrt{(-2-4)^2+(6+2)^2}=\sqrt{100}=10$

よって $\triangle \mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 2=\boldsymbol{10}$

三角形 OAB の面積

座標平面に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ をとる．
2 点 OA を通る直線の方程式は

$$-(a_2-0)(x-0)+(a_1-0)(y-0) \quad \text{すなわち} \quad -a_2x+a_1y=0$$

点 B$(b_1,\ b_2)$ と直線 OA の距離を d とすると

$$d=\frac{|-a_2b_1+a_1b_2|}{\sqrt{(-a_2)^2+{a_1}^2}}=\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}}$$

線分 OA の長さは $\mathrm{OA}=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

よって $\triangle \mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot d=\dfrac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\cdot\dfrac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}}=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

三角形 OAB の面積

3 点 O$(0,\ 0)$，A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ を頂点とする $\triangle$OAB の面積 S は

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|}$$

補足 問題 3.8 を上の公式に適用すると，簡単に求められる．

3 点 P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$，R$(x_3,\ y_3)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1), \quad \overrightarrow{\mathrm{PR}}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1)$$

であるから，$a_1=x_2-x_1,\ a_2=y_2-y_1,\ b_1=x_3-x_1,\ b_2=y_3-y_1$ として同公式に代入すると，$\triangle$PQR の面積が求められる．

練習 3.21 (1) $x^2+y^2=2^2$　すなわち　$\boldsymbol{x^2+y^2=4}$

(2) $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$　すなわち　$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-3)^2=16}$

(3) $\{x-(-2)\}^2+(y-1)^2=(\sqrt{10})^2$　すなわち　$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-1)^2=10}$

練習 3.22 $(x-3)^2+\{y-(-2)\}^2=(2\sqrt{2})^2$ より　**中心 $(3,\,-2)$, 半径 $2\sqrt{2}$**

練習 3.23 C は線分 AB の中点で，その座標は

$$\left(\frac{-3+1}{2},\ \frac{2+6}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{(-1,\ 4)}$$

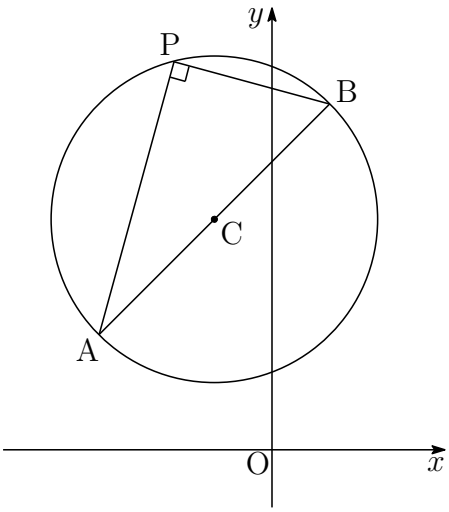
また　$r=\mathrm{CA}=\sqrt{(-3+1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{8}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

この円の方程式は

$$\{x-(-1)\}^2+(y-4)^2=(2\sqrt{2})^2\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{(x+1)^2+(y-4)^2=8}$$

別解 円周上に点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x+3,\ y-2),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ y-6)$$



P が 2 点 A，B を除く円周上の点であるとき，
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ であるから

$$(x+3)(x-1)+(y-2)(y-6)=0$$

上式は，P が 2 点 A，B のときも成立する．
これを整理して

$$x^2+2x+y^2-8y=-9 \qquad \leftarrow x,\ y \text{ で整理し，定数は右辺へ移項}$$
$$x^2+2x+1^2+y^2-8y+4^2=-9+1^2+4^2 \qquad \leftarrow \text{両辺に } 1^2,\ 4^2 \text{ を加える}$$
$$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-4)^2=8}$$

よって　**中心 $(-1,\ 4)$, 半径 $2\sqrt{2}$**

練習 3.24 (1) 方程式を変形すると

$$(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=4+1+4$$

すなわち　　$(x+2)^2+(y-1)^2=3^2$

これは，**中心が点 $(-2,\ 1)$，半径が 3 の円**である．

(2) 方程式を変形すると

$$(x^2+6x+9)+(y^2+8y+16)=-9+9+16$$

すなわち　　$(x+3)^2+(y+4)^2=4^2$

これは，**中心が点 $(-3, -4)$，半径が 4 の円**である．

練習 3.25 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする．

(1) 点 A を通るから　$1^2+1^2+l+m+n=0$

点 B を通るから　$2^2+1^2+2l+m+n=0$

点 C を通るから　$(-1)^2-l+n=0$

整理すると　$l+m+n=-2$

$2l+m+n=-5$

$-l+n=-1$

これを解くと　$l=-3$，$m=5$，$n=-4$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{x^2+y^2-3x+5y-4=0}$

(2) 点 A を通るから　$1^2+3^2+l+3m+n=0$

点 B を通るから　$5^2+(-5)^2+5l+(-5)m+n=0$

点 C を通るから　$4^2+2^2+4l+2m+n=0$

整理すると　$l+3m+n=-10$

$5l-5m+n=-50$

$4l+2m+n=-20$

これを解くと　$l=-2$，$m=4$，$n=-20$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{x^2+y^2-2x+4y-20=0}$

別解 2 点 A$(1,\ 3)$，B$(5,-5)$ の中点 $(3,-1)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,-8)$ に垂直な直線 (線分 AB の垂直二等分線) の方程式は

$$4(x-3)-8(y+1)=0 \quad \text{すなわち} \quad x-2y-5=0 \quad \cdots①$$

2 点 B$(5,-5)$，C$(4,\ 2)$ の中点 $\left(\dfrac{9}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 7)$ に垂直な直線 (線分 BC の垂直二等分線) の方程式は

$$-1\left(x-\frac{9}{2}\right)+7\left(x+\frac{3}{2}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad -x+7y+15=0 \quad \cdots②$$

①，② の交点，すなわち，△ABC の外心は　$(1,-2)$

外心 $(1,-2)$ と点 A$(1,\ 3)$ の距離，すなわち，外接円の半径は　5

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=25}$

9 点円 (オイラー円)

三角形 ABC の重心 G は外心 O と垂心 H を結ぶ線分 OH を 1 : 2 に内分することを 411 ページで学習した．これら 3 点は同一直線上にあり，この直線を**オイラー線**という．△ABC の外心 O を原点にとり，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ とすると，垂心 H の座標は $\mathrm{H}(x_1+x_2+x_3,\ y_1+y_2+y_3)$ であるから

$$\alpha=\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\quad \beta=\frac{y_1+y_2+y_3}{2}$$

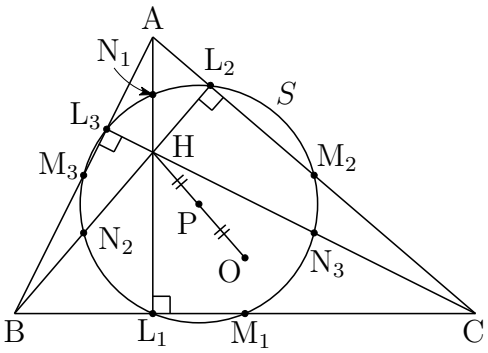
とおくと，$\mathrm{H}(2\alpha,\ 2\beta)$，$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$

S は $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ を中心とする半径 $\dfrac{R}{2}$ の円であるから，その方程式は

$$S:(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{R^2}{4}$$

となる．ただし，$R^2={x_1}^2+{y_1}^2={x_2}^2+{y_2}^2={x_3}^2+{y_3}^2$.

△ABC の外接円の半径 R に対して，OH の中点 P を中心とする半径 $\dfrac{R}{2}$ の円 S を考える．△ABC の垂心 H から辺 BC，CA，AB にそれぞれ垂線 $\mathrm{HL_1}$，$\mathrm{HL_2}$，$\mathrm{HL_3}$ を引く．また，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ $\mathrm{M_1}$，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{M_3}$ とし，さらに，HA，HB，HC の中点をそれぞれ $\mathrm{N_1}$，$\mathrm{N_2}$，$\mathrm{N_3}$ とする．



BC の中点 $\mathrm{M_1}$ の座標は

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\alpha-\frac{x_1}{2},\ \beta-\frac{y_1}{2}\right)$$

HA の中点 $\mathrm{N_1}$ の座標は $\left(\alpha+\dfrac{x_1}{2},\ \beta+\dfrac{y_1}{2}\right)$ であるから，$\mathrm{M_1}$，$\mathrm{N_1}$ は S 上にある．$\mathrm{M_1}$ と $\mathrm{N_1}$ の中点が P であるから，$\mathrm{M_1N_1}$ は S の直径である．さらに，$\angle\mathrm{M_1L_1N_1}$ は直角であるから，$\mathrm{L_1}$ は S 上の点である．同様に $(i=1,2,3)$

$$\mathrm{M}_i\left(\alpha-\frac{x_i}{2},\ \beta-\frac{y_i}{2}\right),\quad \mathrm{N}_i\left(\alpha+\frac{x_i}{2},\ \beta+\frac{y_i}{2}\right)$$

を結ぶ線分 $\mathrm{M_iN_i}$ は S の直径で，$\angle\mathrm{M_iL_iN_i}$ は直角であるから，$\mathrm{L_i}$ は S 上の点である．

したがって，これら 9 点 $\mathrm{L_i}$，$\mathrm{M_i}$，$\mathrm{N_i}(i=1,2,3)$ は，同一円周上にあり，この円を**9 点円 (オイラー円)** という．

入学試験では，2020 年長崎大学 4 番でベクトルを用いた証明問題が出題されている．これを理解するには，平面のベクトルの問題と解答から取り組んでください．

練習 3.26 (1) 次の連立方程式を解く.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 & \cdots ① \\ y=x+1 & \cdots ② \end{cases}$$

② を ① に代入して　　$x^2+(x+1)^2=25$

整理すると　　$x^2+x-12=0$

これを解くと　　$x=-4,\ 3$

② に代入して

$x=-4$ のとき　$y=-3$,　　$x=3$ のとき　$y=4$

よって，共有点の座標は　　$\mathbf{(-4,-3),\ (3,\ 4)}$

(2) 次の連立方程式を解く.

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 & \cdots ① \\ x+y=4 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より y を消去して　　$x^2+(4-x)^2=8$

整理すると　　$x^2-4x+4=0$

これを解くと　　$x=2$ (重解)

② に代入して　　$y=2$

よって，共有点の座標は　　$\mathbf{(2,\ 2)}$

練習 3.27 $x^2+y^2=5$ と $y=2x+m$ から y を消去して整理すると

$$5x^2+4mx+(m^2-5)=0 \quad \cdots ①$$

判別式は　$D/4=(2m)^2-5(m^2-5)=-m^2+25$

(1) この円と直線が共有点をもつのは，$D \geqq 0$ のときである．
よって，$-m^2+25 \geqq 0$ を解いて　　$\boldsymbol{-5 \leqq m \leqq 5}$

(2) この円と直線が接するのは，$D=0$ のときである．
よって，$m^2-25=0$ を解いて　　$m=\pm 5$
また，方程式 ① が重解をもつとき，その重解は

$$x=-\frac{4m}{2\cdot 5}=-\frac{2}{5}m$$

← $ax^2+bx+c=0\,(D=0)$ の重解は $x=-\frac{b}{2a}$

これを $y=2x+m$ に代入すると

$$y=2\left(-\frac{2}{5}m\right)+m=\frac{1}{5}m$$

したがって，接点の座標は　　$\left(-\frac{2}{5}m,\ \frac{1}{5}m\right)$

よって　　$\boldsymbol{m=5}$ のとき　　接点は $\boldsymbol{(-2,\ 1)}$
　　$\boldsymbol{m=-5}$ のとき　接点は $\boldsymbol{(2,-1)}$

練習 3.28 円の中心は原点であり，原点と直線 $x+2y-5=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

円と直線が接するのは $d=r$ のときである．
よって　　$\boldsymbol{r=\sqrt{5}}$

深化 3.3 $x^2+y^2=r^2$ と $y=-3x+10$ から y を消去して整理すると

$$10x^2-60x+(100-r^2)=0 \quad \cdots ①$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4=(-30)^2-10\cdot(100-r^2)=10(r^2-10)$$

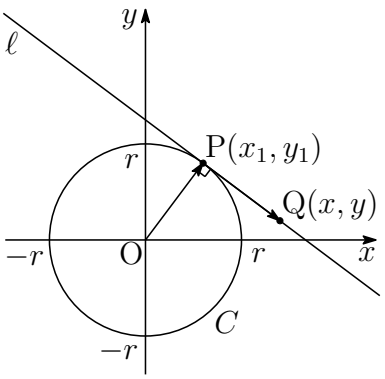
円と直線が接するのは，$D=0$ のときであるから $r>0$ に注意して　$\boldsymbol{r=\sqrt{10}}$
① が重解をもつとき，その重解は　$x=-\dfrac{-60}{2\cdot 10}=3$
これを $y=-3x+10$ に代入して　$y=1$　よって，接点の座標は　$\boldsymbol{(3,\ 1)}$

円上の点における接線の方程式 (1)

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{x_1x+y_1y=r^2}$$

証明 円 $C: x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線 ℓ 上に点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ をとると



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x_1,\ y_1),\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(x-x_1,\ y-y_1)$$

Q が P と異なるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$$

上式は，Q が P のときも成立する．

したがって　　$x_1x+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2$

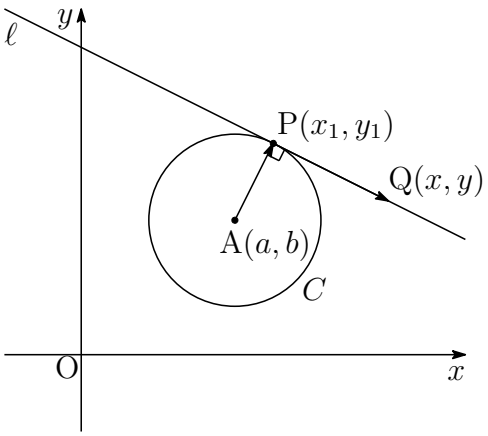
P は C 上の点であるから　　${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$　よって　$x_1x+y_1y=r^2$　　**証終**

円上の点における接線の方程式 (2)

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2}$$

証明 $C: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線 ℓ 上に点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ をとり，C の中心を A とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x_1-a,\ y_1-b)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(x-x_1,\ y-y_1)$$

Q が P でないとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから

$$(x_1-a)(x-x_1)+(y_1-b)(y-y_1)=0$$

上式は，Q が P のときも成立する．したがって

$$(x_1-a)\{(x-a)-(x_1-a)\}+(y_1-b)\{(y-b)-(y_1-b)\}=0$$
$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$$

点 P は C 上の点であるから　$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$

よって　　$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$　　**証終**

練習 3.29 (1) $3x+1\cdot y=10$　すなわち　$\boldsymbol{3x+y=10}$

(2) $2x+(-3)y=13$　すなわち　$\boldsymbol{2x-3y=13}$

(3) $4x+0\cdot y=16$　すなわち　$\boldsymbol{x=4}$

(4) $0\cdot x+(-\sqrt{5})y=5$　すなわち　$\boldsymbol{y=-\sqrt{5}}$

練習 3.30 接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると，P は円上にあるから

$$x_1{}^2+y_1{}^2=1 \quad \cdots ①$$

また，P における円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=1 \quad \cdots ②$$

で，この直線が点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ を通るから

$$2x_1+y_1=1 \quad \cdots ③$$

①，③ から y_1 を消去して整理すると

$$5x_1{}^2-4x_1=0 \quad \text{これを解くと} \quad x_1=0,\ \frac{4}{5}$$

③ に代入して　　$x_1=0$ のとき　$y_1=1$,　　$x_1=\dfrac{4}{5}$ のとき　$y_1=-\dfrac{3}{5}$

よって，接線の方程式 ② と接点 P の座標は，次のようになる．

$0\cdot x+1\cdot y=1$ から　**接線 $\boldsymbol{y=1}$，接点 $\boldsymbol{(0,\ 1)}$**

$\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y=1$ から　**接線 $\boldsymbol{4x-3y=5}$，接点 $\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{3}{5}}\right)$**

別解 点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ を極とする円 $C:x^2+y^2=1$ の極線は　$2x+y=1$

極線と円の交点，すなわち，点 A から C に引いた接点の座標は

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad (0,\ 1),\ \left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$$

よって　　**接点 $\boldsymbol{(0,\ 1)}$，接線 $\boldsymbol{y=1}$**

接点 $\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}}\right)$，接線 $\boldsymbol{4x-3y=5}$

演習 3.2 k を定数とするとき，方程式

$$(x^2+y^2-5)+k(x+3y-5)=0 \quad \cdots ①$$

の表す図形は 2 点 A，B を通る．① に $x=0$，$y=0$ を代入すると

$$-5-5k=0 \quad \text{すなわち} \quad k=-1$$

① に代入して整理すると　$\boldsymbol{x^2+y^2-x-3y=0}$

設問　［2］＝［3］<，＜［4］＝［5］＜

O，O′ を数直線上の 2 点と考え，O を原点に固定する．2 点 O, O′ 間の距離 $d \geqq 0$ より，半径 r' の円の数直線上の 2 点を A$(d+r')$，B$(d-r')$ とし，半径 r の円の数直線上の一方を C(r) とする $(r>r')$.

2 円が共有点をもつのは，AB の両端を含む線分上に点 C があるときに限る．$d=0$ のとき，2 円の中心が一致し，一方が他方の円の内部ある．この状態から d を増加させていく中で位置関係の変化を考えるとよい．

［5］A が C の左側にあるとき，$d+r'<r$，すなわち，$d<r-r'$ のとき，一方が他方の内部にある．

［4］A が C に一致するとき，$d+r'=r$，すなわち，$d=r-r'$ のとき，内接する．

［3］2 点 A，B の間に C があるとき，$d-r'<r<d+r'$，すなわち，$r-r'<d<r+r'$ のとき，2 点で交わる．

［2］B が C に一致するとき，$d-r'=r$，すなわち，$d=r+r'$ のとき，外接する．

［1］B が C の右側にあるとき，$r<d-r'$，すなわち，$d>r+r'$ のとき，互いに外部ある．

注意　$r'>r$ のときは，［3］$r'-r<d<r'+r$，［4］$d=r'-r$，［5］$d<r'-r$ となる．一般には［3］$|r-r'|<d<r+r'$，［4］$d=|r-r'|$，［5］$d<|r-r'|$ とする．

練習 3.31 円 $x^2+y^2=4\cdots$① は中心が原点，半径が 2 の円である．

(1) 円 $(x+3)^2+(y-4)^2=9\cdots$② は中心が点 $(-3,\ 4)$，半径が 3 の円である．
2 つの円 ①，② の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$$

$d=2+3=$ 半径の和 であるから，2 つの円 ①，② は**外接する**

(2) 円 $(x-3)^2+(y-3)^2=8\cdots$③ は中心が $(3,\ 3)$，半径が $2\sqrt{2}$ の円である．
2 つの円 ①，③ の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

2 つの円 ①，③ の半径の差 $2\sqrt{2}-2$，半径の和 $2\sqrt{2}+2$

$\sqrt{2}<2$ に注意すると　$2\sqrt{2}-2<3\sqrt{2}<2\sqrt{2}+2$

したがって　半径の差 $<d<$ 半径の和

よって，2 つの円 ①，③ は **2 点で交わる．**

練習 3.32 円 $x^2+y^2=1$ は中心が原点，半径が 1 の円である．

2 つの円の中心間の距離 d は　$d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

2 つの円が内接するとき，円の半径を r とすると $(r>0)$

$$5=|r-1|\quad\text{これを解いて}\quad r=6$$

よって，円 C の方程式は　$\boldsymbol{(x+3)^2+(y-4)^2=36}$

練習 3.33
$$\begin{cases} x^2+y^2-10=0 & \cdots① \\ x^2+y^2-2x-y-5=0 & \cdots② \end{cases}$$

① − ② から　$2x+y-5=0$

すなわち　$y=-2x+5\quad\cdots③$

③ を ① に代入して整理すると　$x^2-4x+3=0$

これを解くと　$x=1,\ 3$

③ に代入して　$x=1$ のとき　$y=3$,　$x=3$ のとき　$y=-1$

よって，共有点の座標は　$\boldsymbol{(1,\ 3),\ (3,-1)}$

演習 3.3 k を定数として

$$k(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x+2y-6)=0 \quad \cdots ①$$

とすると，① は 2 つの円の交点を通る図形を表す.

① の表す図形が点 $(1,\ 2)$ を通るから，① に $x=1$，$y=2$ を代入すると

$$k-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad k=1$$

これを ① に代入して整理すると

$$\boldsymbol{x^2+y^2-2x+y-5=0}$$

問題 3.9 (1) $x^2+y^2+x-3y=0$ より

$$x^2+x+\frac{1}{4}+y^2-3y+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$

よって　**中心** $\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}}\right)$，**半径** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2}}$

(2) 求める円は中心 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ で，半径を r とすると

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=r^2$$

これが点 $(2,\ 1)$ を通るから

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=r^2 \quad \text{ゆえに} \quad r^2=\frac{13}{2}$$

したがって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{2}}$$

問題 3.10 外接円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする．

3 点 A$(-2,\ 1)$，B$(1,\ 4)$，C$(0,\ 5)$ は外接円上の点であるから

$$\begin{array}{l}(-2)^2+1^2-2l+m+n=0,\\ 1^2+4^2+l+4m+n=0,\\ 5^2+5m+n=0\end{array} \qquad \text{整理すると} \qquad \begin{cases}-2l+m+n=-5\\ l+4m+n=-17\\ 5m+n=-25\end{cases}$$

これを解いて　　$l=2,\ m=-6,\ n=5$

したがって，外接円の方程式は

$$x^2+y^2+2x-6y+5=0 \quad \text{すなわち} \quad (x+1)^2+(y-3)^2=5$$

よって　**半径 $\sqrt{5}$，外心の座標 $(-1,\ 3)$**

別解 A$(-2,\ 1)$，B$(1,\ 4)$，C$(0,\ 5)$ より

$$\text{直線 AB の傾き}=\frac{4-1}{1-(-2)}=1, \quad \text{直線 BC の傾き}=\frac{5-4}{0-1}=-1$$

$\angle$ABC は直角であるから，$\triangle$ABC の外接円は AC を直径の両端とする円である．

AC の中点，すなわち，外心を M とすると

$$\left(\frac{-2+0}{2},\ \frac{1+5}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{M}(\mathbf{-1,\ 3})$$

外接円の半径を R とすると

$$R=\mathrm{MA}=\sqrt{(-2+1)^2+(1-3)^2}=\mathbf{\sqrt{5}}$$

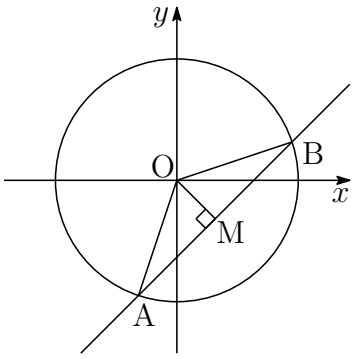
問題 3.11 直線と円の交点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \qquad \text{これを解いて} \quad (-1, -3),\ (3,\ 1)$$

よって，求める線分の長さは

$$\sqrt{(3+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{32} = \mathbf{4\sqrt{2}}$$

別解 円の中心 O から直線 $x - y - 2 = 0 \cdots$ ① に垂線 OM を引くと，OM は O と直線 ① の距離 d であるから



$$d = \mathrm{OM} = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

円の半径 r は　　$r = \sqrt{10}$

直線と円の交点を A，B とすると

$$\mathrm{AM} = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{10 - 2} = 2\sqrt{2} \quad \text{よって} \quad \mathrm{AB} = 2\mathrm{AM} = \mathbf{4\sqrt{2}}$$

一般に，次が成立する．

直線が円によって切り取られる線分の長さ

円の半径を r，円の中心から直線までの距離を d とすると，直線が円によって切り取られる線分の長さは，$d < r$ のとき

$$\boldsymbol{2\sqrt{r^2 - d^2}}$$

問題 3.12 (1) 2 つの方程式から x を消去して整理すると

$$10y^2 + 6cy + c^2 - 5 = 0 \qquad (*)$$

判別式を D とすると　$D/4 = (3c)^2 - 10(c^2 - 5) = -(c^2 - 50)$

①，② が異なる 2 点で交わるのは，$D > 0$ のときであるから

$$-(c^2 - 50) > 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-5\sqrt{2} < c < 5\sqrt{2}}$$

(2) $(*)$ に $c = -5$ を代入すると　$10y^2 - 30y + 20 = 0$

$$(y - 1)(y - 2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad y = 1,\ 2$$

$x = -3y + 5$ に代入して　$y = 1$ のとき　$x = 2$,　　$y = 2$ のとき　$x = -1$

求める円は原点を通るから，その方程式を $x^2 + y^2 + lx + my = 0$ とおく．

この円が点 $(2,\ 1)$，$(-1,\ 2)$ を通ることから

$$2l + m + 5 = 0, \quad -l + 2m + 5 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad l = -1,\ m = -3$$

よって　　$\boldsymbol{x^2 + y^2 - x - 3y = 0}$

別解 (1) 原点と直線 $x + 3y + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{10}}$$

$d < \sqrt{5}$ より　$|c| < 5\sqrt{2}$　これを解いて　$\boldsymbol{-5\sqrt{2} < c < 5\sqrt{2}}$

(2) k を定数とするとき，方程式

$$(x^2 + y^2 - 5) + k(x + 3y - 5) = 0 \qquad (**)$$

の表す図形は A，B を通る．これに $x = 0$，$y = 0$ を代入すると

$$-5 - 5k = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = -1$$

これを $(**)$ に代入して整理すると

$$\boldsymbol{x - 2 + y^2 - x - 3y = 0}$$

問題 3.13 (1) 接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると，P は円上にあるから

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = 10 \quad \cdots ①$$

また，P における円の接線の方程式は

$$x_1x + y_1y = 10 \quad \cdots ②$$

で，この直線が点 $\mathrm{A}(4,\ 2)$ を通るから

$$x_1{\cdot}4 + y_1{\cdot}2 = 10 \quad \text{すなわち} \quad 2x_1 + y_1 = 5 \quad \cdots ③$$

①，③ から y_1 を消去して整理すると

$$x_1{}^2 - 4x_1 + 3 = 0 \qquad \text{これを解くと} \quad x_1 = 1,\ 3$$

③ に代入して　$x_1 = 1$ のとき　$y_1 = 3$,　　$x_1 = 3$ のとき　$y_1 = -1$

よって，2 点 A，B の座標は　　$\boldsymbol{(1,\ 3),\ (3,\ -1)}$

(2) 2 点 A，B を通る直線の方程式は

$$y - 3 = \frac{-1-3}{3-1}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{2x + y - 5 = 0}$$

別解 直線 AB は点 $(4,\ 2)$ を極とする極線であるから

$$4x + 2y = 10 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{2x + y - 5 = 0}$$

2 点 A，B は，極線 $2x + y - 5 = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 10$ の共有点であるから

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \qquad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{(1,\ 3),\ (3,\ -1)}$$

問題 3.14 円 $C_1 : (x+1)^2 + (y-3)^2 = r^2$，円 $C_2 : (x-2) + (y+1)^2 = 7^2$ のそれぞれの中心の座標が $(-1,\ 3)$，$(2,\ -1)$ であるから，中心間の距離 d は

$$d = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

C_1 が C_2 の内部にあるから，$r < 7$ に注意して

$$d < 7 - r \quad \text{ゆえに} \quad 5 < 7 - r$$

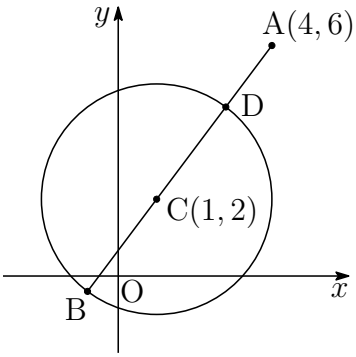
$r > 0$ であるから　　$\boldsymbol{0 < r < 2}$

問題 3.15 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ の中心を C とする．
A$(4,\ 6)$，C$(1,\ 2)$ 間の距離は

$$\mathrm{AC}=\sqrt{(1-4)^2+(2-6)^2}=5$$

円の半径は 3 であるから，最大となる点を B，
最小となる点を D とすると

$$\mathrm{AB}=5+3=8,\quad \mathrm{AD}=5-3=2$$



D は CA を 3 : 2 に内分する点であるから

$$\left(\frac{2\cdot1+3\cdot4}{3+2},\ \frac{2\cdot2+3\cdot6}{3+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{14}{5},\ \frac{22}{5}\right)$$

よって，距離の**最大値 8，最小値 2**，
距離が最小となる点 P の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{14}{5},\ \frac{22}{5}}\right)$

練習 3.34 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{AP}^2=\{x-(-1)\}^2+y^2=(x+1)^2+y^2$$
$$\mathrm{BP}^2=(x-1)^2+y^2$$

$\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=8$ に代入して

$$(x+1)^2+y^2-\{(x-1)^2+y^2\}=8$$

整理すると　　$x=2$

よって，点 P は直線 $x=2$ 上にある．
逆に，この直線上のすべての点 P$(x,\ y)$ について，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=8$ が成り立つ．
したがって，点 P の軌跡は　**直線 $\boldsymbol{x=2}$**　である．

練習 3.35 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．

P に関する条件は　　$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 3 : 2$

これより　　$2\mathrm{AP} = 3\mathrm{BP}$

すなわち　　$4\mathrm{AP}^2 = 9\mathrm{BP}^2$

$\mathrm{AP}^2 = \{x-(-3)\}^2 + y^2 = (x+3)^2 + y^2$，$\mathrm{BP}^2 = (x-2)^2 + y^2$ を代入すると

$$4\{(x+3)^2 + y^2\} = 9\{(x-2)^2 + y^2\}$$

整理すると　$x^2 + y^2 - 12x = 0$　すなわち　$(x-6)^2 + y^2 = 6^2$

よって，点 P は円 $(x-6)^2 + y^2 = 6^2$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，**点 $(6,\ 0)$ を中心とする半径 6 の円**である．

練習 3.36 点 P，Q の座標をそれぞれ $(x,\ y)$，$(s,\ t)$ とする．

Q は直線 $y = x + 2$ 上にあるから

$$t = s + 2 \quad \cdots ①$$

また，P は線分 AQ を $2 : 1$ に内分する点であるから

$$x = \frac{1+2s}{2+1}, \quad y = \frac{6+2t}{2+1} \quad \text{すなわち} \quad s = \frac{3x-1}{2}, \quad t = \frac{3y-6}{2}$$

これらを ① に代入して

$$\frac{3y-6}{2} = \frac{3x-1}{2} + 2 \quad \text{整理すると} \quad y = x + 3$$

よって，点 P は直線 $y = x + 3$ 上にある．

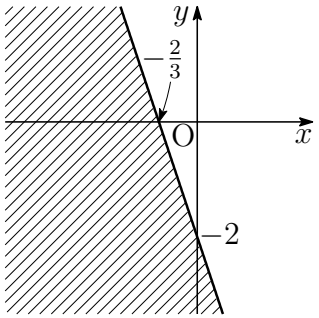
逆に，この直線上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，**直線 $\boldsymbol{y = x + 3}$** である．

練習 3.37 (1) 不等式を変形すると

$$y \leqq -3x - 2$$

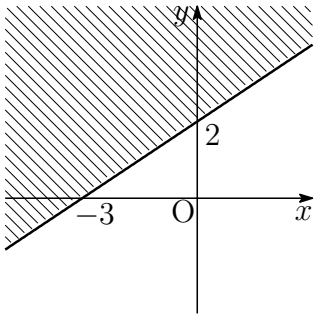
したがって，この領域は，直線 $y = -3x + 2$ およびその下側の部分である．すなわち，図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



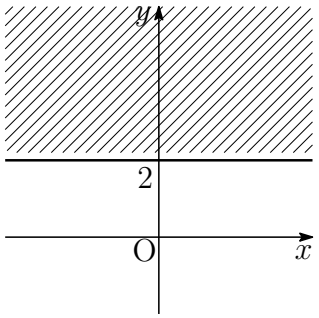
(2) 不等式を変形すると

$$y \geqq \frac{2}{3}x + 2$$

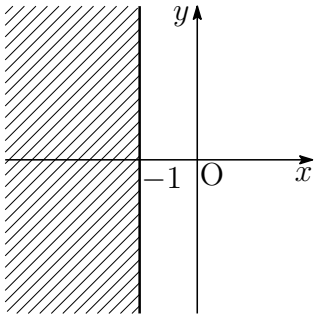
したがって，この領域は，直線 $y = \dfrac{2}{3}x + 2$ およびその上側の部分である．すなわち，図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



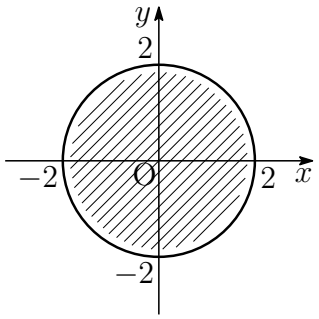
(3) この領域は，y 座標が 2 より大きい点 $(x,\ y)$ 全体の集合である．
したがって，この領域は，直線 $y = 2$ の上側の部分で，図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



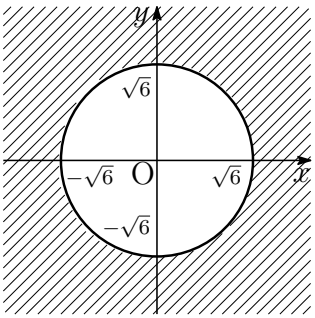
(4) この領域は，x 座標が -1 より小さい点 $(x,\ y)$ 全体の集合である．
したがって，この領域は，直線 $x = -1$ の左側の部分で，図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



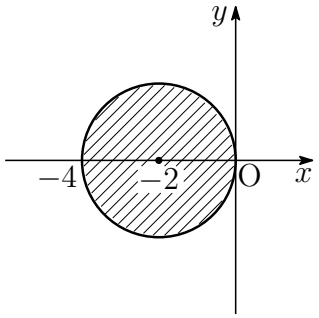
練習 3.38 (1) この領域は，円 $x^2+y^2=2^2$ の内部である．すなわち，図の斜線部分である．
ただし，境界線を含まない．



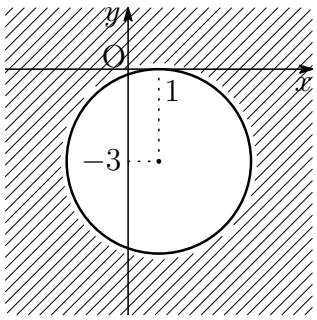
(2) この領域は，円 $x^2+y^2=(\sqrt{6})^2$ およびその外部である．すなわち，図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



(3) この領域は，円 $(x+2)^2+y^2=2^2$ およびその内部である．すなわち，図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



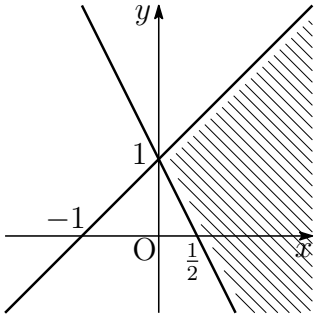
(4) この領域は，円 $(x-1)^2+(y+3)^2=3^2$ の外部である．すなわち，図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



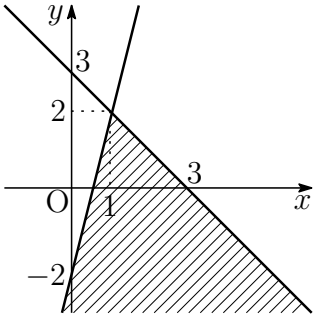
練習 3.39 (1) この領域は，直線 $x-y+1=0$ の下側と直線 $2x+y-1=0$ の上側に共通する部分である．すなわち，下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．

(2) この領域は，直線 $x+y-3=0$ およびその下側と直線 $4x-y-2=0$ およびその下側に共通する部分である．すなわち，下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

(1)



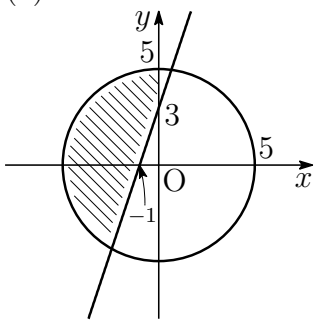
(2)



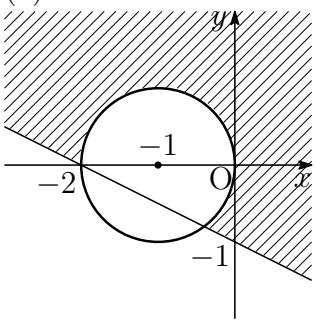
(3) この領域は，円 $x^2+y^2=25$ の内部と直線 $3x-y+3=0$ の上側に共通する部分である．すなわち，下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．

(4) この領域は，円 $(x+1)^2+y^2=1$ およびその外部と直線 $x+2y+2=0$ およびその上側に共通する部分である．すなわち，下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

(3)



(4)



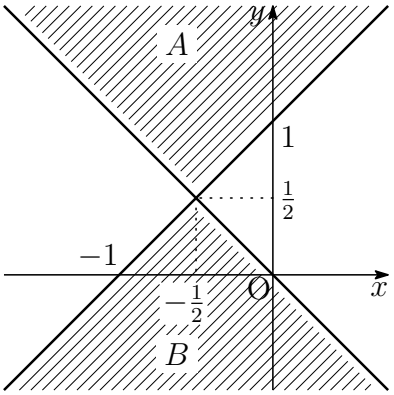
練習 3.40 (1) 不等式 $(x+y)(x-y+1)<0$ が成り立つことは

$$\begin{cases} x+y>0 \\ x-y+1<0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

または

$$\begin{cases} x+y<0 \\ x-y+1>0 \end{cases} \quad \cdots ②$$

が成り立つことと同じである．



よって，求める領域は，① の表す領域 A と ② の表す領域 B の和集合 $A \cup B$ である．
すなわち，上の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．

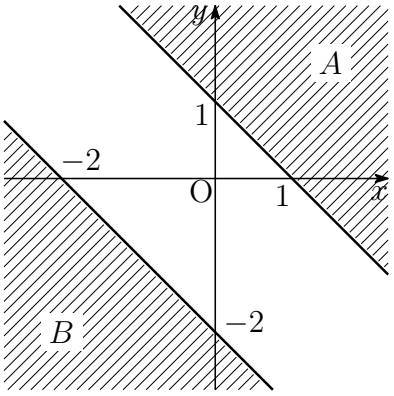
(2) 不等式 $(x+y+2)(x+y-1) \geqq 0$ が成り立つことは

$$\begin{cases} x+y+2 \geqq 0 \\ x+y-1 \geqq 0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

または

$$\begin{cases} x+y+2 \leqq 0 \\ x+y-1 \leqq 0 \end{cases} \quad \cdots ②$$

が成り立つことと同じである．



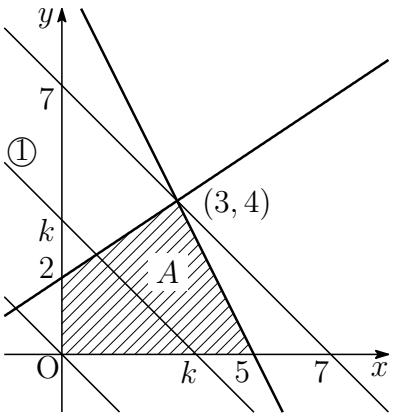
よって，求める領域は，① の表す領域 A と ② の表す領域 B の和集合 $A \cup B$ である．
すなわち，上の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

補足 上の (1)，(2) の解答で領域を表す斜線部に「A」「B」を書いているが，書かなくともよい．(2) であれば，「求める領域は，① と ② の和集合である．ただし，境界線を含む」と解答すればよい．

練習 3.41 与えられた連立不等式の表す領域を A とする．領域 A は 4 点

$$(0,\ 0),\quad (5,\ 0),\quad (3,\ 4),\quad (0,\ 2)$$

を頂点とする四角形の周および内部である．



$$x+y=k \quad \cdots ①$$

とおくと，$y=-x+k$ であり，これは傾きが -1，y 切片が k である直線を表す．この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい．領域 A においては，直線 ① が

$(3,\ 4)$ を通るとき k は最大で，そのとき　$k=7$

$(0,\ 0)$ を通るとき k は最小で，そのとき　$k=0$

である．したがって，$x+y$ は

$x=3$，$y=4$ のとき **最大値 7** をとり，

$x=0$，$y=0$ のとき **最小値 0** をとる．

別解 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad 2x+y \leqq 10,\quad 2x-3y \geqq -6 \qquad (*)$$

の第 1 式および第 2 式から　$x+y \geqq 0 \quad \cdots ①$

① で等号が成立するとき，$x=0,\ y=0$．これは第 3 式および第 4 式を満たすから，$x+y$ は

$x=0,\ y=0$ のとき **最小値 0** をとる

$(*)$ から

$$2x+y=s,\quad -2x+3y=t \quad (0 \leqq s \leqq 10,\ t \leqq 6)$$

とおくと

$$x=\frac{3s-t}{8},\quad y=\frac{s+t}{4} \quad \text{ゆえに} \quad x+y=\frac{5s+t}{8}$$

したがって，$x+y$ は

$s=10,\ t=6$　すなわち　$x=3,\ y=4$ のとき **最大値 7** をとる．

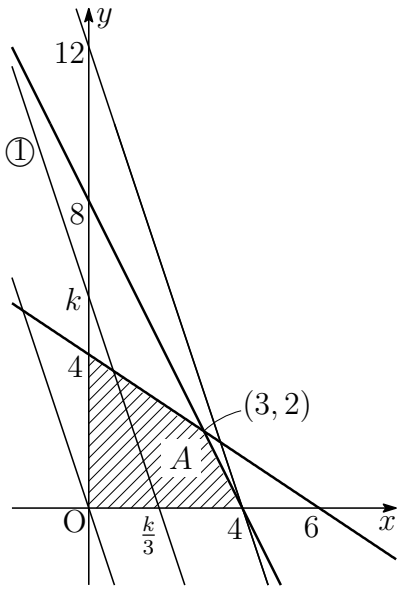
深化 3.4 与えられた連立不等式の表す領域を A とする．領域 A は 4 点

$$(0,\ 0),\quad (4,\ 0),\quad (3,\ 2),\quad (0,\ 4)$$

を頂点とする四角形の周および内部である．

$$3x+y=k \quad \cdots ①$$

とおくと，$y=-3x+k$ であり，これは傾きが -3，y 切片が k である直線を表す．この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい．領域 A においては，直線 ① が



$(4,\ 0)$ を通るとき k は最大で，そのとき　$k=12$

$(0,\ 0)$ を通るとき k は最小で，そのとき　$k=0$

である．したがって，$3x+y$ は

$x=4$，$y=0$ のとき最大値 12 をとり，

$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる．

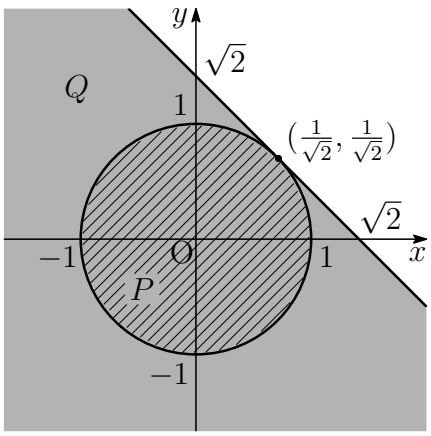
練習 3.42 不等式

$$x^2+y^2 \leqq 1$$

の表す領域を P，不等式

$$x+y \leqq \sqrt{2}$$

の表す領域を Q とする．



P は円 $x^2+y^2=1 \cdots$① およびその内部，
Q は直線 $x+y=\sqrt{2} \cdots$② およびその下側の部分である．
①，② を解くと

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

円 ① と直線 ② は上の図のように接し，$P \subset Q$ が成り立つ．

よって　$x^2+y^2 \leqq 1$　ならば　$x+y \leqq \sqrt{2}$

別解 $(x+y)^2 \leqq (x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$ であるから

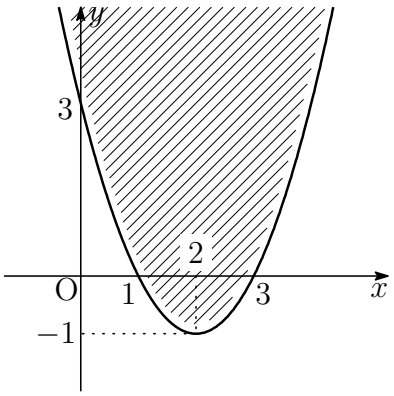
$$\begin{aligned} x^2+y^2 \leqq 1 &\implies (x+y)^2 \leqq 2 \\ &\iff -\sqrt{2} \leqq x+y \leqq \sqrt{2} \\ &\implies x+y \leqq \sqrt{2} \end{aligned}$$

よって　$x^2+y^2 \leqq 1$　ならば　$x+y \leqq \sqrt{2}$

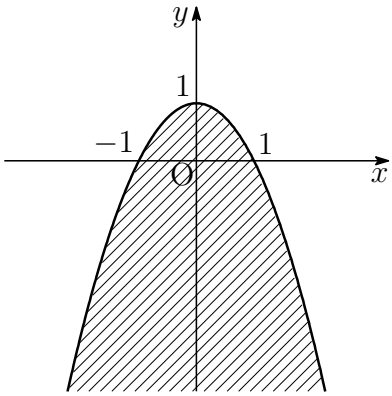
演習 3.4 (1) 不等式 $y > x^2-4x+3$ の表す領域は，放物線 $y=(x-2)^2-1$ の上側の部分で，下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．

(2) 不等式 $y \leqq 1-x^2$ の表す領域は，放物線 $y=-x^2+1$ およびその下側の部分で，下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

(1)



(2)



問題 3.16 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ より

$$\mathrm{AP}^2 = (x+1)^2 + y^2, \quad \mathrm{BP}^2 = (x-1)^2 + y^2$$

点 P の条件式 $\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 = 10$ により

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 10 \quad \text{整理すると} \quad x^2 + y^2 = 4$$

したがって，点 P は円 $x^2 + y^2 = 2^2$ 上にある．

逆に，この円周上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 = 10$ が成り立つ．

よって，点 P の軌跡は，**原点を中心とする半径 2 の円**である．

問題 3.17 $3x - 2y - 4$ に，$x = 1$，$y = -2$ を代入すると

$$3\cdot 1 - 2\cdot(-2) - 4 = 3 > 0$$

であるから，点 $\mathrm{P}(1, -2)$ は不等式 $3x - 2y - 4 > 0$ の表す領域にある．

同様にして，$3x - 2y - 4$ の値の符号は

原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$	について	$3\cdot 0 - 2\cdot 0 - 4 = -4 < 0$
$\mathrm{A}(-2, -6)$	について	$3\cdot(-2) - 2\cdot(-6) - 4 = 2 > 0$
$\mathrm{B}(-1,\ 3)$	について	$3\cdot(-1) - 2\cdot 3 - 4 = -13 < 0$
$\mathrm{C}(3,\ 2)$	について	$3\cdot 3 - 2\cdot 2 - 4 = 1 > 0$

よって，直線 $3x - 2y - 4 = 0$ に対して，点 P と同じ側にある点は　**A，C**

問題 3.18 (1) 与えらえた不等式から $\begin{cases} y \geqq -x+1 \\ y \leqq -x+3 \end{cases}$

よって，求める領域は

直線 $y=-x+1$ およびその上側の部分と
直線 $y=-x+3$ およびその下側の部分の

共通部分である．すなわち，下の図の斜線部分である．
ただし，境界線を含む．

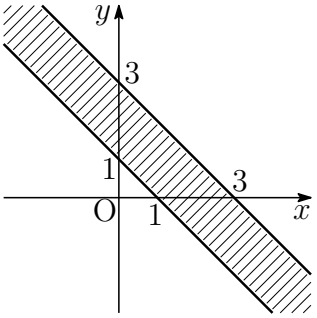
(2) 与えらえた不等式から $\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 4 \\ x^2+y^2 \leqq 9 \end{cases}$

よって，求める領域は

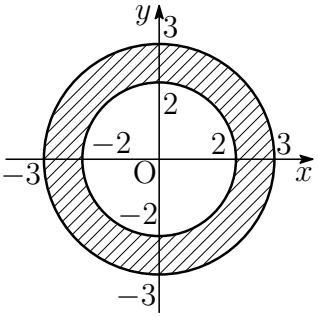
円 $x^2+y^2=2^2$ およびその外部と
円 $x^2+y^2=3^2$ およびその内部の

共通部分である．すなわち，下の図の斜線部分である．
ただし，境界線を含む．

(1) 境界線を含む



(2) 境界線を含む



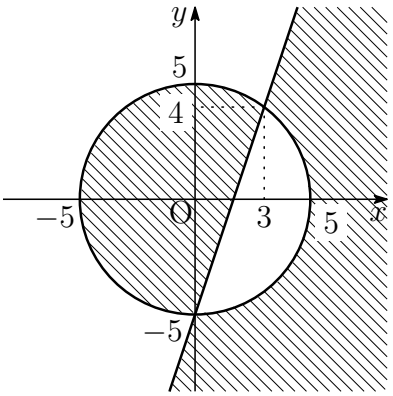
問題 3.19 不等式 $(3x-y-5)(x^2+y^2-25) \geqq 0$ が成り立つことは

$$\begin{cases} 3x-y-5 \geqq 0 \\ x^2+y^2-25 \geqq 0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

または

$$\begin{cases} 3x-y-5 \leqq 0 \\ x^2+y^2-25 \leqq 0 \end{cases} \quad \cdots ②$$

が成り立つことと同じである．



① の表す領域は

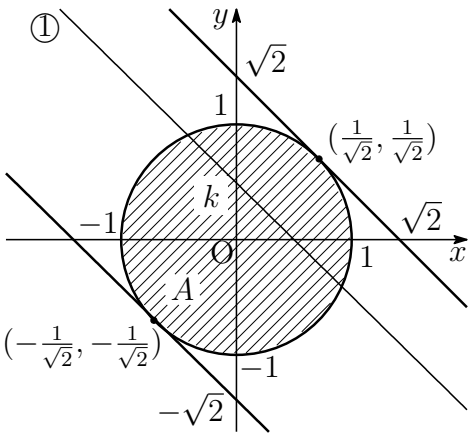
直線 $y=3x-5$ およびその下側の部分と
円 $x^2+y^2=5^2$ の外部の共通部分である．

② の表す領域は

直線 $y=3x-5$ およびその上側の部分と
円 $x^2+y^2=5^2$ の内部の共通部分である．

求める領域は，① の表す領域と ② の和集合である．すなわち，上の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

問題 3.20 不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ の表す領域を A とする．領域 A は原点を中心と半径1の円およびその内部である．



$$x+y=k \quad \cdots ①$$

とおくと，$y=-x+k$ であり，これは傾きが -1，y 切片が k である直線を表す．この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい．領域 A においては，直線 ① が

点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通るとき k は最大で，そのとき　$k=\sqrt{2}$

点 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通るとき k は最小で，そのとき　$k=-\sqrt{2}$

である．したがって，$x+y$ は

$\boldsymbol{x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき　**最大値 $\sqrt{2}$** をとり，

$\boldsymbol{x=y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき　**最小値 $-\sqrt{2}$** をとる．

別解 $x^2+y^2 \leqq 1$ のとき

$$(x+y)^2 \leqq (x+y)^2+(x-y)^2 = 2(x^2+y^2) \leqq 2 \qquad (*)$$

上式から　$-\sqrt{2} \leqq x+y \leqq \sqrt{2}$

$(*)$ から，$x+y=\pm\sqrt{2}$ となるとき

$$(x+y)^2 = (x+y)^2+(x-y)^2 = 2(x^2+y^2) = 2$$

したがって　$x-y=0,\ x^2+y^2=1$　すなわち　$x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$x+y$ は

$\boldsymbol{x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき　**最大値 $\sqrt{2}$** をとり，

$\boldsymbol{x=y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき　**最小値 $-\sqrt{2}$** をとる．

問題 3.21 (1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ より

$$\mathrm{AP}^2 = (x+1)^2 + y^2, \quad \mathrm{BP}^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad \mathrm{AB}^2 = 4$$

$\angle\mathrm{APB} = 90^\circ$ より，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 = \mathrm{AB}^2$ であるから

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + y^2 = 1$$

よって，題意は成立する．

(2) 点 P が 2 点 A，B と一致するとき，$\angle\mathrm{APB} = 90^\circ$ を満たさない．
よって，題意は成立しない．

章末 3.1 三角形の頂点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ とし，辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ $\mathrm{P}(-1,\ 1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 2)$，$\mathrm{R}(2,\ 0)$ とする．

点 P は 2 点 A，B の中点であるから

$$\frac{x_1+x_2}{2} = -1, \quad \frac{y_1+y_2}{2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x_1+x_2 = -2, \quad y_1+y_2 = 2$$

同様に，点 Q および点 R について

$$x_2+x_3 = 2, \quad y_2+y_3 = 4, \quad \text{および} \quad x_3+x_1 = 4, \quad y_3+y_1 = 0$$

したがって $\quad (*)\begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_2+x_3=2 \\ x_3+x_1=4 \end{cases}, \qquad (**)\begin{cases} y_1+y_2=2 \\ y_2+y_3=4 \\ y_3+y_1=0 \end{cases}$

$(*)$ を解いて $\quad x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 4$
$(**)$ を解いて $\quad y_1 = -1,\ y_2 = 3,\ y_3 = 1$
よって，求める 3 頂点は $\quad \mathbf{(0,-1),\ (-2,\ 3),\ (4,\ 1)}$

補足 $(*)$ の 3 式の辺々を加えると

$$2(x_1+x_2+x_3) = 4 \quad \text{ゆえに} \quad x_1+x_2+x_3 = 2$$

これと $(*)$ の第 1 式から $\quad (x_1+x_2)+x_3 = 2$

$$-2+x_3 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad x_3 = 4$$

$x_3 = 4$ を $(*)$ の第 2 式，第 3 式に代入すると $\quad x_2 = -2,\ x_1 = 0$

$(**)$ についても同様．

終

別解 P$(-1,\ 1)$，Q$(1,\ 2)$，R$(2,\ 0)$ に対して，三角形の頂点 S$(s_1,\ s_2)$，T$(t_1,\ t_2)$，U$(u_1,\ u_2)$ を下の図のようにとると，中点連結定理により，四角形 PRSQ は平行四辺形であるから，PS の中点と QR の中点が一致するから

$$\frac{-1+s_1}{2}=\frac{1+2}{2},\quad \frac{1+s_2}{2}=\frac{2+0}{2}\quad \text{ゆえに}\quad s_1=4,\quad s_2=1$$

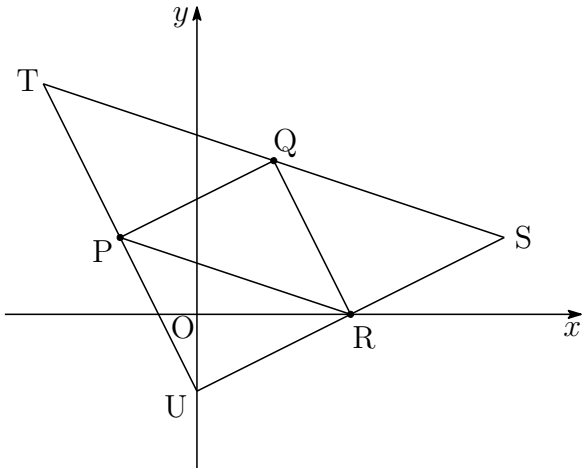
2 点 S$(4,\ 1)$，T$(t_1,\ t_2)$ の中点が Q$(1,\ 2)$ であるから

$$\frac{4+t_1}{2}=1,\quad \frac{1+t_2}{2}=2\quad \text{ゆえに}\quad t_1=-2,\quad t_2=3$$

2 点 S$(4,\ 1)$，U$(u_1,\ u_2)$ の中点が R$(2,\ 0)$ であるから

$$\frac{4+u_1}{2}=2,\quad \frac{1+u_2}{2}=0\quad \text{ゆえに}\quad u_1=0,\quad u_2=-1$$

よって，求める 3 頂点は　　$\boldsymbol{(4,\ 1),\ (-2,\ 3),\ (0,\ -1)}$



章末 3.2 $a-1=0$，すなわち，$a=1$ のとき，2 直線は

$$x+3y+1=0,\quad x=0$$

となり，平行でも垂直でもない．したがって　$a\neq 1$

2 直線 $\ell_1: ax+3y+1=0$，$\ell_2: 2x+(a-1)y=0$ の傾きは，それぞれ

$$-\frac{a}{3},\quad -\frac{2}{a-1}$$

$\ell_1 /\!/ \ell_2$ のとき　　$-\dfrac{a}{3}=-\dfrac{2}{a-1}$

$a^2-a-6=0$　ゆえに　$(a+2)(a-3)=0$　よって　$a=-2,\ 0$

$\ell_1 \perp \ell_2$ のとき　　$\left(-\dfrac{a}{3}\right)\left(\dfrac{2}{a-1}\right)=-1$

$5a-3=0$　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{5}}$

別解 2 直線 $\ell_1 : ax+3y+1=0$，$\ell_2 : 2x+(a-1)y=0$ の法線ベクトルは，それぞれ

$$\vec{n}_1 = (a,\ 3), \quad \vec{n}_2 = (2,\ a-1)$$

$\ell_1 // \ell_2$ のとき，$\vec{n}_1 // \vec{n}_2$ より

$$a(a-1)-3\cdot 2=0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2-a-6=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=2,\ -3}$$

$\ell_1 \perp \ell_2$ のとき，$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ より

$$a\cdot 2+3\cdot(a-1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad 5a-3=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=\frac{3}{5}}$$

章末 3.3 直線の方程式 $(2k+3)x+(k-4)y-4k+5=0$ を k について，整理すると

$$k(2x+y-4)+(3x-4y+5)=0 \qquad (*)$$

これが k の値に関係なく成立するから，k についての恒等式より

$$2x+y-4=0, \quad 3x-4y+5=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{(1,\ 2)}$$

また，直線 $(*)$ が点 $(-1,\ 0)$ を通るとき，$x=-1,\ y=0$ を $(*)$ に代入して

$$-6k+2=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=\frac{1}{3}}$$

章末 3.4 (1) 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通る直線 OA の方程式は

$$-(y_1-0)(x-0)+(x_1-0)(y-0)=0 \quad \text{すなわち} \quad -y_1x+x_1y=0$$

点 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ から直線 OA までの距離を d とすると

$$d=\frac{|-y_1x_2+x_1y_2|}{\sqrt{(-y_1)^2+{x_1}^2}}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}$$

(2) 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ の距離 OA は

$$\mathrm{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$$

したがって，△OAB の面積は

$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

章末 3.5

$$(*)\begin{cases} x-y+2=0 \\ x^2+(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式から $y=x+2\cdots$①，これを $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$x^2+\{(x+2)-1\}^2=25 \quad \text{整理すると} \quad x^2+x-12=0$$

これを解いて　$x=-4,\ 3$

① より　$x=-4$ のとき　$y=-2$，　$x=3$ のとき　$y=5$

よって，2 点 $(-4,-2)$，$(3,\ 5)$ 間の距離，すなわち，求める線分の長さは

$$\sqrt{(3+4)^2+(5+2)^2}=\sqrt{98}=\boldsymbol{7\sqrt{2}}$$

解説 問題 3.11 の別解でも示したように，円の半径 r と円の中心から直線までの距離 d を用いて，線分の長さは

$$\boldsymbol{2\sqrt{r^2-d^2}}$$

として求めることができる．本題では，$r=5$

円の中心 $(0,\ 1)$ から直線 $x-y+2=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|0-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，求める線分の長さは

$$2\sqrt{5^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2\sqrt{\frac{49}{2}}=\boldsymbol{7\sqrt{2}}$$

章末 3.6 求める円の半径は，点 $\mathrm{C}(2,\ 1)$ と直線 $x+2y+1=0$ の距離

$$\frac{|2+2\cdot1+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

に等しい．よって，求める円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2=(\sqrt{5})^2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(x-2)^2+(y-1)^2=5}$$

章末 3.7 (1) P の座標を $(x,\ y)$ とする．線分 PQ の中点が点 A であるから

$$\frac{x+a}{2}=2,\quad \frac{y+b}{2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad x=4-a,\quad y=2-b \qquad (*)$$

よって　　$\boldsymbol{P(4-a,\ 2-b)}$

(2) 点 $Q(a,\ b)$ が直線 $2x+y+1=0$ 上を動くから　$2a+b+1=0$　$\cdots$①

$(*)$ から　$a=4-x$，$b=2-y$　これを ① に代入して

$$2(4-x)+(2-y)+1=0 \quad \text{整理すると} \quad 2x+y-11=0$$

よって，点 P は直線 $2x+y-11=0$ 上にある．

逆に，この直線上のすべての点 $P(x,\ y)$ は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，直線 $\boldsymbol{2x+y-11=0}$ である．

章末 3.8 (1) 2 点 $(-1,-1)$，$(2,\ 4)$ を通る直線の方程式は

$$y-(-1)=\frac{4-(-1)}{2-(-1)}\{x-(-1)\} \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$$

2 点 $(2,\ 4)$，$(5,\ 1)$ を通る直線の方程式は

$$y-4=\frac{1-4}{5-2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y=-x+6$$

2 点 $(-1,-1)$，$(5,\ 1)$ を通る直線の方程式は

$$y-(-1)=\frac{1-(-1)}{5-(-1)}\{x-(-1)\} \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

よって，斜線部分の領域を表す不等式は

$$\boldsymbol{y\leqq\frac{5}{3}x+\frac{2}{3},\quad y\leqq -x+6,\quad y\geqq\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}$$

(2) 原点を中心とする半径 2 の円の方程式は　$x^2+y^2=4$

2 点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を通る直線の方程式は　$y=-x+1$

よって，斜線部分の領域を表す不等式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2\leqq 4,\quad y\geqq -x+1}$$

章末 3.9 直線 AB の方程式は

$$y-(-2)=\frac{a-(-2)}{3-1}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y+2=\frac{a+2}{2}(x-1)$$

点 $\mathrm{C}(a,\ 0)$ がこの直線上にあるから $\quad 0+2=\dfrac{a+2}{2}(a-1)$

$$a^2+a-6=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=-3,\ 2}$$

別解 直線 AB の傾きと直線 AC の傾きが等しいから

$$\frac{a-(-2)}{3-1}=\frac{0-(-2)}{a-1} \quad \text{整理すると} \quad a^2+a-6=0$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{a=-3,\ 2}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ a+2)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(a-1,\ 2)$ が平行であるから

$$2\cdot 2-(a+2)(a-1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2+a-6=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=-3,\ 2}$$

章末 3.10 $3x-y=0$ と $2x+y=0$ の交点の座標は

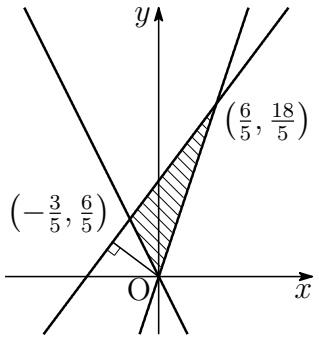
$$(0,\ 0)$$

$2x+y=0$ と $4x-3y+6=0$ の交点の座標は

$$\left(-\frac{3}{5},\ \frac{6}{5}\right)$$

$3x-y=0$ と $4x-3y+6=0$ の交点の座標は

$$\left(\frac{6}{5},\ \frac{18}{5}\right)$$



$\mathrm{A}\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$ とする．△OAB において，辺 AB を底辺とすると高さは直線 AB と原点 O の距離に等しい．

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left\{\frac{6}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)\right\}^2+\left(\frac{18}{5}-\frac{6}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{25}+\frac{144}{25}}=3$$

原点と直線 $4x-3y+6=0$ の距離 d は $\quad d=\dfrac{|6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{5}$

よって，求める面積は $\quad \dfrac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times d=\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{6}{5}=\boldsymbol{\dfrac{9}{5}}$

解説 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$ を頂点する三角形の面積であるから，419 ページの公式または章末 3.4 の結論を利用すると簡単に求まる．

$$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\left|-\frac{3}{5}\cdot\frac{18}{5} - \frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\right| = \frac{1}{2}\left|-\frac{18}{5}\right| = \boldsymbol{\frac{9}{5}}$$

章末 3.11 (1) $x^2+y^2-4x+ay=0$ に，$x=4$，$y=2$ を代入して

$$4^2+2^2-4\cdot 4+2a=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=-2}$$

(2) (1) の結果から，円の方程式は

$$x^2+y^2-4x-2y=0 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2+(y-1)^2=5$$

よって，円の中心 C の座標は $\boldsymbol{(2,\ 1)}$

(3) 直線 CA の傾きは $\dfrac{2-1}{4-2}=\dfrac{1}{2}$

接線 ℓ は直線 CA に垂直であるから，求める傾きを m とすると

$$\frac{1}{2}m=-1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{m=-2}$$

(4) ℓ は点 $\mathrm{A}(4,\ 2)$ を通り，傾きが -2 の直線であるから，その方程式は

$$y-2=-2(x-4) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-2x+10}$$

別解 121 ページで示した次の公式を利用する解法

円上の点における接線の方程式 (2)

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2}$$

円 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 上の点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式は

$$(4-2)(x-2)+(2-1)(y-1)=5 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-2x+10}$$

章末 3.12 (1) $y = x^2 - 2(a+3)x + 4a^2 + 12a + 8$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= \{x - (a+3)\}^2 - (a+3)^2 + 4a^2 + 12a + 8 \\ &= \{x - (a+3)\}^2 + 3a^2 + 6a - 1 \end{aligned}$$

よって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(a+3,\ 3a^2+6a-1)}$

(2) 頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，(1) の結果から

$$x = a + 3, \quad y = 3a^2 + 6a - 1$$

上の第 1 式から　$a = x - 3$　これを第 2 式に代入して

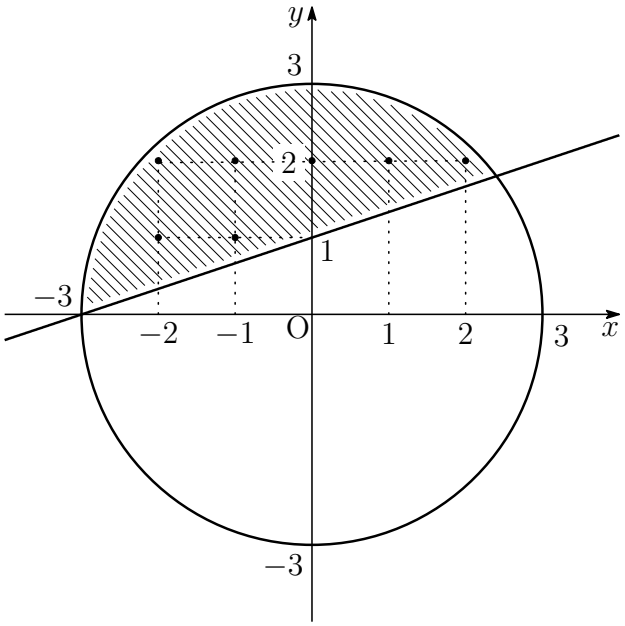
$$y = 3(x-3)^2 + 6(x-3) - 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = 3x^2 - 12x + 8$$

よって，点 P は放物線 $y = 3x^2 - 12x + 8$ 上にある．
逆に，この法部線上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす．
したがって，求める軌跡は　**放物線 $\boldsymbol{y = 3x^2 - 12x + 8}$**

章末 3.13 2 つの不等式

$$(*)\begin{cases} x^2+y^2<9 \\ x-3y+3<0 \end{cases}$$

を同時に満たす領域は，円 $x^2+y^2<3^2$ の内部と直線 $x-3y+3=0$ 上側の共通部分である．ただし，共通部分を含まない．



上の図から，$0<y<3$ であるから，これを満たす整数 y は　$1,\ 2$

(i)　$y=1$ を $(*)$ に代入すると

$$x^2<8,\quad x<0 \quad \text{これを満たす整数 } x \text{ は} \quad x=-2,-1$$

(ii)　$y=2$ を $(*)$ に代入すると

$$x^2<5,\quad x<3 \quad \text{これを満たす整数 } x \text{ は} \quad x=0,\ \pm 1,\ \pm 2$$

(i)，(ii) より，条件を満たす $(x,\ y)$ は次の **7 個**

$$(-2,\ 1),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 2),\ (\pm 1,\ 2),\ (\pm 2,\ 2)$$

章末 3.14 1日のA，Bの生産量をそれぞれ x トン，y トンとすると

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

原料Pは9トン以下であるから

$$3x + y \leqq 9$$

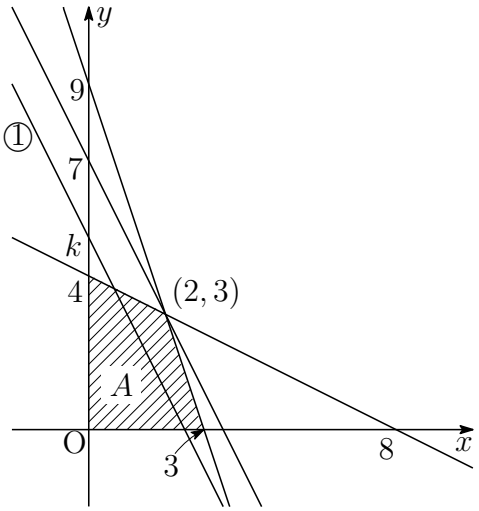
原料Qは8トン以下であるから

$$x + 2y \leqq 8$$

上の諸式をみたす領域を A とすると，A は4点

$$(0,\ 0),\ (3,\ 0),\ (2,\ 3),\ (0,\ 4)$$

を頂点とする四角形の周および内部である．



1日の総価格は $2x + y$ 万円であるから

$$2x + y = k \quad \cdots ①$$

とおくと，$y = -2x + k$ であり，これは傾きが -2，y 切片が k である直線を表す．この直線 ① が領域 A と共有点をもつとき，k が最大となるときの $x,\ y$ を求めればよい．領域 A においては，直線 ① が

$$\text{点 } (2,\ 3) \text{ を通るとき } k \text{ は最大で，そのとき} \quad k = 7$$

したがって，1日に生産する量は　**Aは2トン，Bは3トン**

別解

考え方

多角形で囲まれた領域における $x,\ y$ の 1 次式の最大値・最小値は，必ず境界線上でとる．また多角形の頂点の中にその最大値と最小値が存在するから，領域 A の頂点における $2x+y$ の値を調べればよい．

1 日の A，B の生産量をそれぞれ x トン，y トンとすると

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

原料 P は 9 トン以下であるから

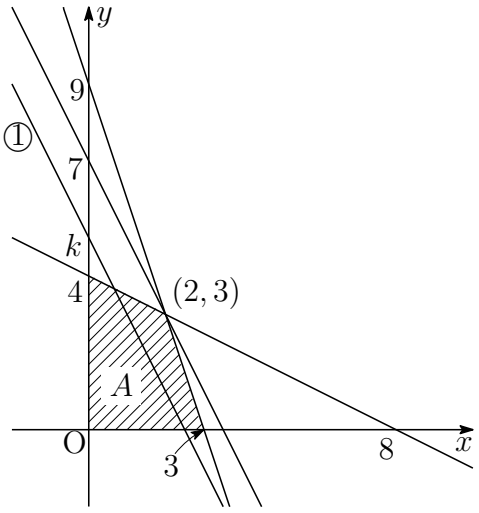
$$3x + y \leqq 9$$

原料 Q は 8 トン以下であるから

$$x + 2y \leqq 8$$

上の諸式をみたす領域を A とすると，A は 4 点

$$(0,\ 0),\ (3,\ 0),\ (2,\ 3),\ (0,\ 4)$$



を頂点とする四角形の周および内部である．

総価格を k 万円とすると

$$2x + y = k \quad \cdots ①$$

である．直線 ① が領域 A の点を通るときの k の値を調べる．

$(0,\ 0)$ を通るとき　$k = 0$

$(3,\ 0)$ を通るとき　$k = 6$

$(2,\ 3)$ を通るとき　$k = 7$

$(0,\ 4)$ を通るとき　$k = 4$

これ以外で領域 A の点を通るとき　$0 < k < 7$

よって，k の値は，$x = 2$，$y = 3$ のとき最大となる．

すなわち，総価格を最大にするには，1 日あたり **A を 3 トン，B を 2 トン**生産すればよい．

補足 1 日の A，B の生産量をそれぞれ x トン，y トンとし，1 日に供給した原料 P を p トン，原料 Q を q をトンとすると

$$3x+y=p,\quad x+2y=q \qquad (0\leqq p\leqq 9,\ 0\leqq q\leqq 8)$$

上の 2 式から

$$x=\frac{2p-q}{5},\quad y=\frac{-p+3q}{5} \qquad (*)$$

1 日の総価格 $2x+y$ 万円は

$$2x+y=2\cdot\frac{2p-q}{5}+\frac{-p+3q}{5}=\frac{3p+q}{5}\leqq\frac{3\cdot 9+8}{5}=7$$

$p=9,\ q=8$ のとき，総価格は最大 7 万円となる．

このとき，$(*)$ より，$x=2,\ y=3$　よって　**A は 2 トン，B は 3 トン**

注意 上の補足では，総価格 $\dfrac{3p+q}{5}$ の $p,\ q$ の係数がともに正であったから

$$\frac{3p+q}{5}\leqq\frac{3\cdot 9+8}{5}=7$$

とすることができただけである．必ずしも一般的な解法ではない．

応用例題 3.7 でも，この解法で求めることができる．

$$2x+y=s,\quad 2x+3y=t \quad (0\leqq s\leqq 8,\quad 0\leqq t\leqq 12)$$

とおく．上の 2 式から

$$x=\frac{3s-t}{4},\quad y=\frac{-s+t}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x+y=\frac{s+t}{4}$$

したがって，$x+y$ は

$s=8,\ t=12$　すなわち　$x=3,\ y=2$ のとき　**最大値 5** をとり，

$s=0,\ t=0$　すなわち　$x=0,\ y=0$ のとき　**最小値 0** をとる．

一方，深化 3.4 では，この解法が使えない．実際

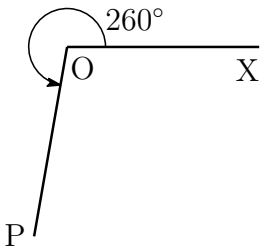
$$x=\frac{3s-t}{4},\quad y=\frac{-s+t}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 3x+y=\frac{7s-t}{4}$$

となる．$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ により

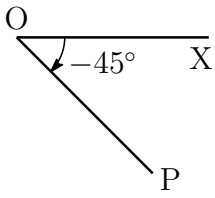
$$0\leqq s\leqq 8,\quad 0\leqq t\leqq 12,\quad s\leqq t\leqq 3s$$

これは $(s,\ t)$ 平面上の 4 点 $(0,\ 0)$, $(8,\ 8)$, $(8,\ 12)$, $(4,\ 12)$ を頂点とする四角形の周およびその内部であるから，$(s,\ t)=(8,\ 8)$，すなわち，$(x,\ y)=(4,\ 0)$ で $3x+y$ は最大値 12 をとる．結局は領域を用いた解法となる．

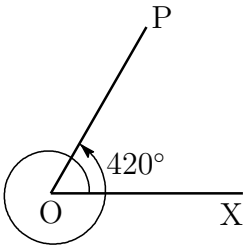
練習 4.1 (1)



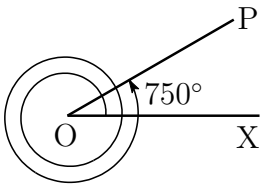
(2)



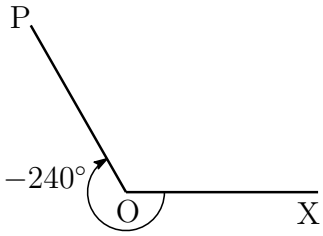
(3)



(4)



(5)



練習 4.2 $420° = 60° + 360° \times 1$, $\quad -300° = 60° + 360° \times (-1)$

その他の角については，整数 n を用いて $60° + 360° \times n$ の形に表すことができない．よって，その動径が $60°$ の動径と同じ位置にある角は $\quad$ **$420°, -300°$**

練習 4.3 (1) 半径 1 の円において，中心角 $180°$ に対する弧の長さは

$$2\pi \times \frac{180}{360} = \pi$$

したがって $\quad$ **$180°$ は π ラジアン**

(2) (1) の結果から，π ラジアンは $180°$ であるから $\quad$ **1 ラジアンは $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)°$**

練習 4.4 $180°$はπ (rad) であるから $\quad 1°$は$\dfrac{\pi}{180}$ (rad)

(1) $210° = 210 \times 1°$ より $\quad 210 \times \dfrac{\pi}{180} = \boldsymbol{\dfrac{7}{6}\pi}$

(2) $240° = 240 \times 1°$ より $\quad 240 \times \dfrac{\pi}{180} = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi}$

(3) $330° = 330 \times 1°$ より $\quad 330 \times \dfrac{\pi}{180} = \boldsymbol{\dfrac{11}{6}\pi}$

(4) $\dfrac{5}{4} \times 180° = \mathbf{225°}$

(5) $\dfrac{3}{2} \times 180° = \mathbf{270°}$

練習 4.5 求める扇形の弧の長さを l，面積を S とする．

(1) $l = 4\cdot\dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi}$，$S = \dfrac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{8}{3}\pi}$

(2) $l = 6\cdot\dfrac{7}{6}\pi = \boldsymbol{7\pi}$，$S = \dfrac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\dfrac{7}{6}\pi = \boldsymbol{21\pi}$

別解 $S = \dfrac{1}{2}lr$ を用いてもよい．

(1) $S = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi\cdot 4 = \dfrac{8}{3}\pi$,　　(2) $S = \dfrac{1}{2}\cdot 7\pi\cdot 6 = 21\pi$

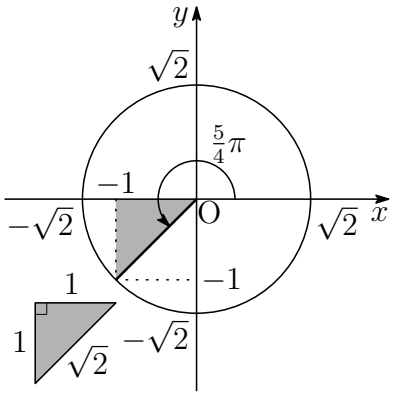
練習 4.6 (1) $r = \sqrt{2}$ のとき，

$x = -1$，$y = -1$ であるから

$\sin\dfrac{5}{4}\pi = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$,

$\cos\dfrac{5}{4}\pi = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$,

$\tan\dfrac{5}{4}\pi = \dfrac{-1}{-1} = \boldsymbol{1}$



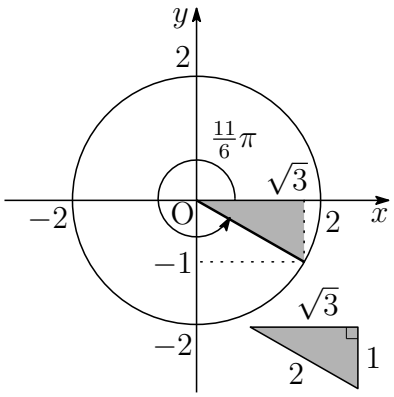
(2) $r = 2$ のとき，

$x = \sqrt{3}$，$y = -1$ であるから

$\sin\dfrac{11}{6}\pi = \dfrac{-1}{2} = -\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$,

$\cos\dfrac{11}{6}\pi = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$,

$\tan\dfrac{11}{6}\pi = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$



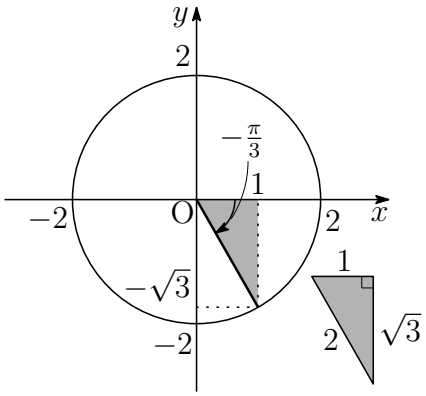
(3) $r = 2$ のとき，

$x = 1$，$y = -\sqrt{3}$ であるから

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$,

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$,

$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{1} = \boldsymbol{-\sqrt{3}}$



練習 4.7 (1) **第 4 象限**　(2) **第 3 象限**

練習 4.8 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

θ の動径が第 4 象限にあるとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{8}{9}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\div\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$

別解 $\sin\theta=-\dfrac{1}{3}=\dfrac{-1}{3}$ より，$r=3$，$y=-1$ とし，$x^2+y^2=r^2$ に代入すると

$$x^2+(-1)^2=3^2\quad\text{ゆえに}\quad x^2=8$$

θ の動径が第 4 象限にあるから，$x>0$ より　$x=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$，　$\tan\theta=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$

練習 4.9 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+2^2}=\dfrac{1}{5}$

θ の動径が第 3 象限にあるとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{5}}=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

別解 θ の動径が第 3 象限にあるとき，$x<0$，$y<0$ より　$\tan\theta=2=\dfrac{-2}{-1}$

$x=-1$，$y=-2$ とし，$r^2=x^2+y^2$ に代入すると $(r>0)$

$$r^2=(-1)^2+(-2)^2\quad\text{ゆえに}\quad r=\sqrt{5}$$

よって　$\sin\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$，　$\cos\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

深化 4.1 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}-1=\frac{16}{9}$$

θ の動径が第 3 象限にあるとき，$\tan\theta>0$ であるから

$$\tan\theta=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{4}{5}}$

練習 4.10 (1) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

よって　$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{4}{9}\right)=\boldsymbol{\dfrac{13}{27}}$

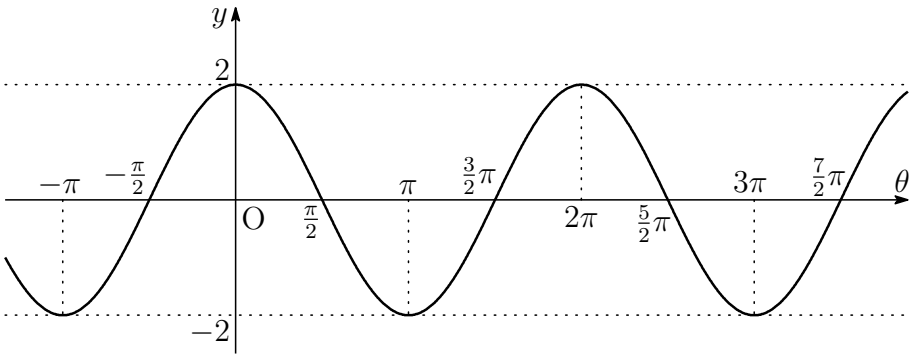
別解　等式 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$ を利用できる．

$$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{13}{27}}$$

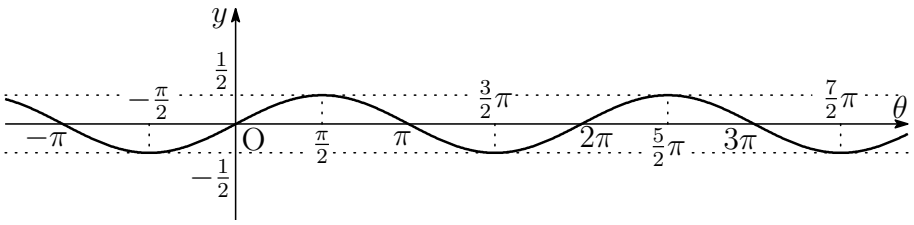
練習 4.11 $\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$ より

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta-(\tan\theta\cos\theta)^2$$
$$=\tan^2\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$=\tan^2\theta\sin^2\theta$$

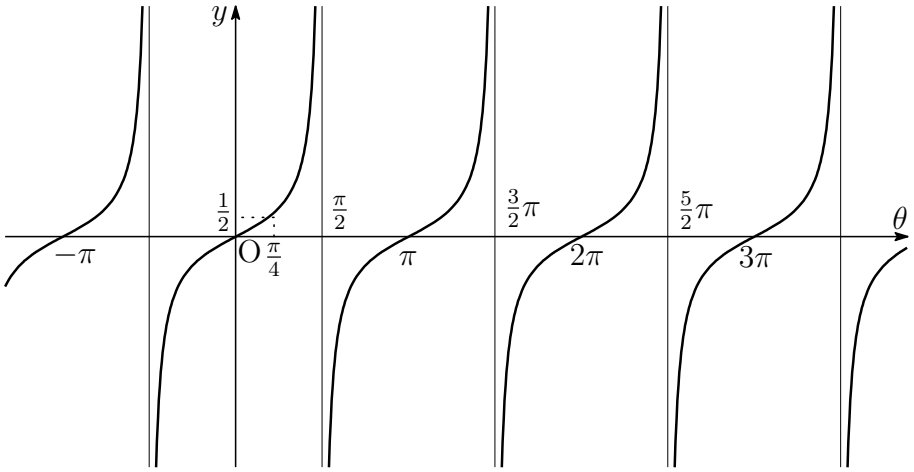
練習 4.12 (1) $y = \cos\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ 2 倍に拡大したものである．周期は $\boldsymbol{2\pi}$ である．



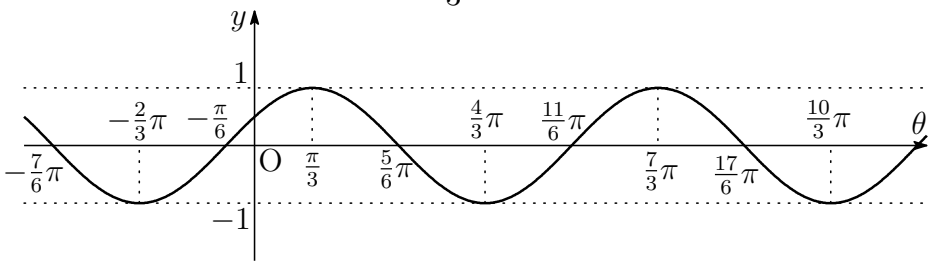
(2) $y = \sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものである．周期は $\boldsymbol{2\pi}$ である．



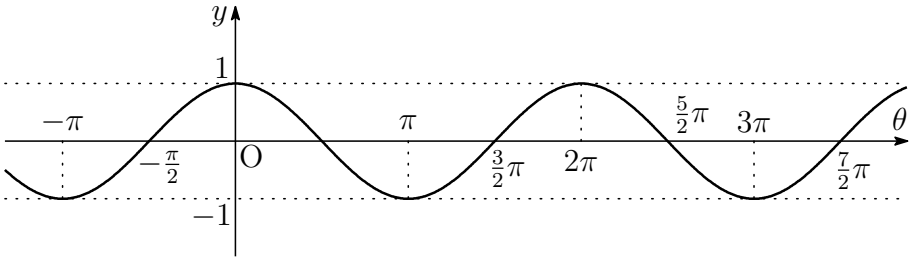
(3) $y = \tan\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものである．周期は $\boldsymbol{\pi}$ である．



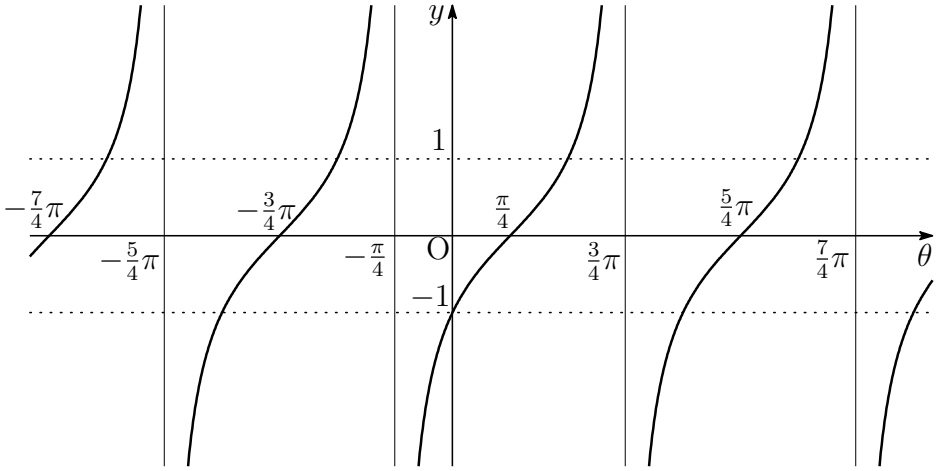
練習 4.13 (1) $y = \cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもの．周期は $\boldsymbol{2\pi}$．



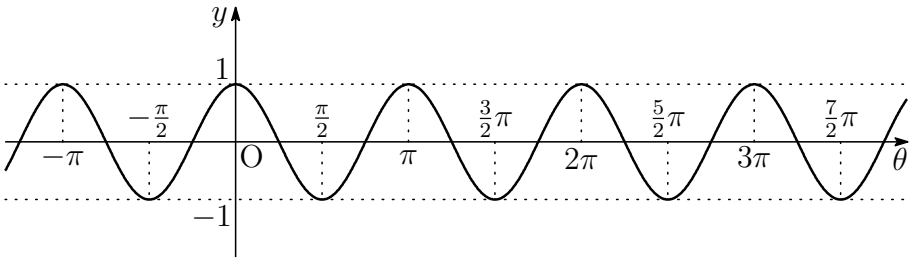
(2) $y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したもの．周期は $\boldsymbol{2\pi}$．



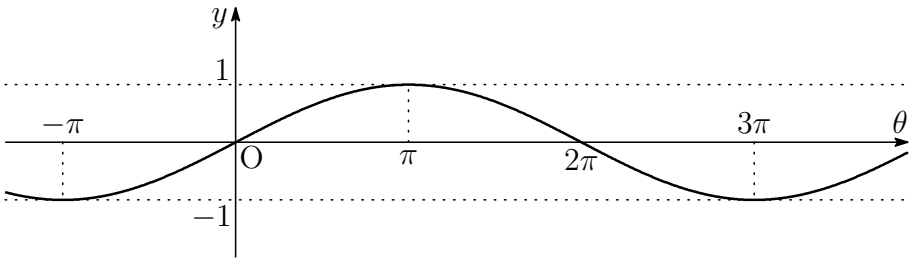
(3) $y = \tan\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したもの．周期は $\boldsymbol{\pi}$．



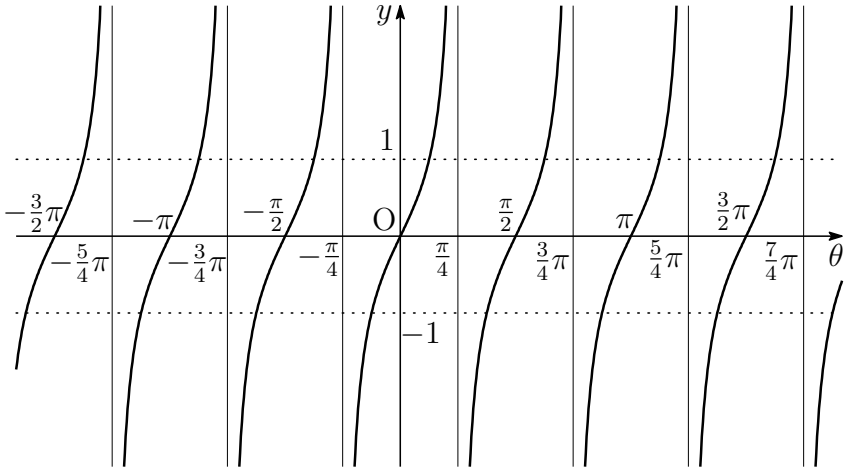
練習 4.14 (1) $y = \cos\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものである．周期は $2\pi \times \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\pi}$ である．



(2) $y = \sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ 2 倍に拡大したものである．周期は $2\pi \times 2 = \boldsymbol{4\pi}$ である．



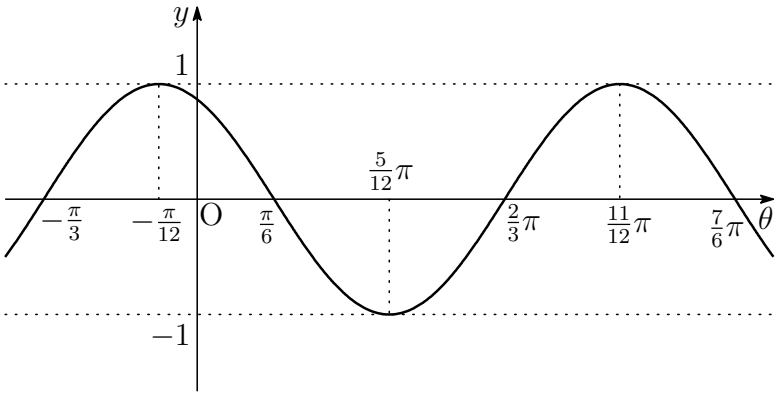
(3) $y = \tan\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものである．周期は $\pi \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$ である．



練習 4.15 (1) $y = \sin 2\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y = \sin 2\theta$ のグラフを，

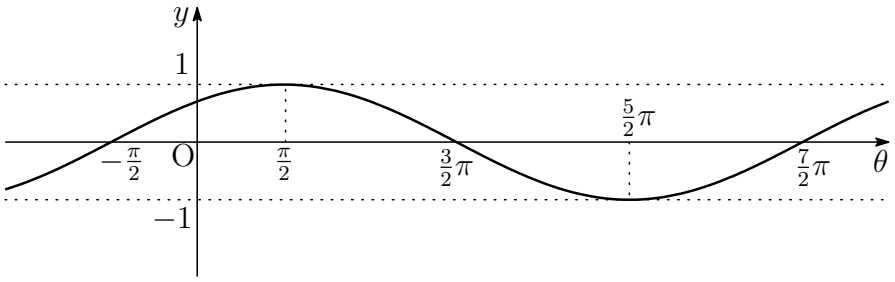
θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，図のようになる．

周期は $\sin 2\theta$ の周期に等しく，$2\pi \times \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\pi}$ である．



(2) $\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{1}{2}\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$y = \cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，

$y = \cos\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したもので，図のようになる．周期は $\cos\dfrac{\theta}{2}$ の周期に等しく，$2\pi \times 2 = \boldsymbol{4\pi}$



練習 4.16 (1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

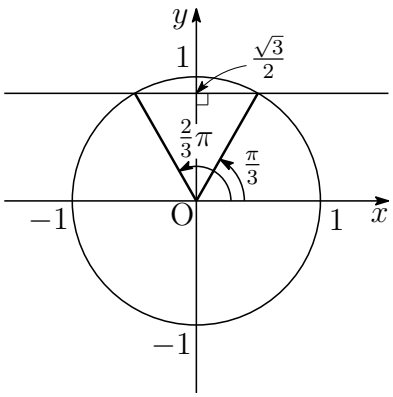
(2) $\cos\left(-\dfrac{13}{6}\pi\right) = \cos\dfrac{13}{6}\pi = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right) = -\tan\dfrac{9}{4}\pi = -\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right) = -\tan\dfrac{\pi}{4} = \boldsymbol{-1}$

練習 4.17 (1) 求める角 θ の動径と単位円の交点の y 座標は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である.

右の図より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi}$$

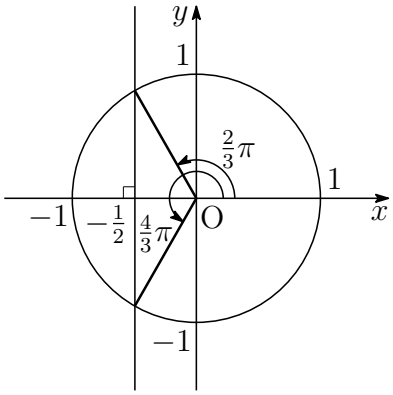


(2) $2\cos\theta + 1 = 0$ より　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

求める角 θ の動径と単位円の交点の x 座標は $-\dfrac{1}{2}$ である.

右の図より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi}$$

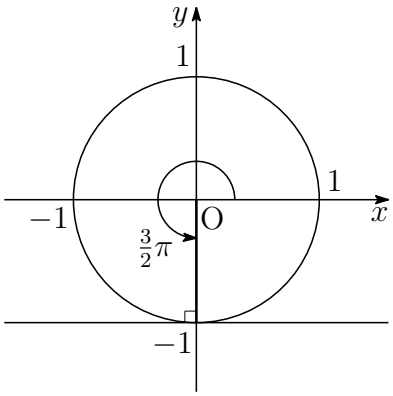


(3) $\sin\theta + 1 = 0$ より　$\sin\theta = -1$

求める角 θ の動径と単位円の交点の y 座標は -1 である.

右の図より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{2}\pi}$$



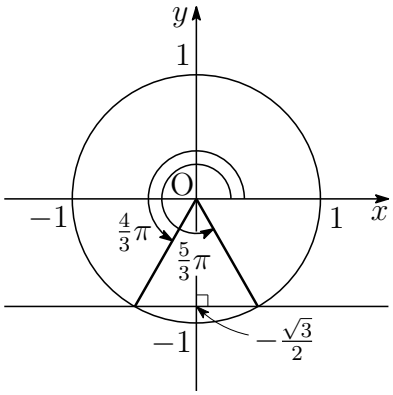
練習 4.18 (1) $2\sin\theta = -\sqrt{3}$ より　$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

求める角 θ の動径と単位円の交点の y 座標は $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

右の図より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi,\ \frac{5}{3}\pi + 2n\pi}$$

($\boldsymbol{n}$ は整数)



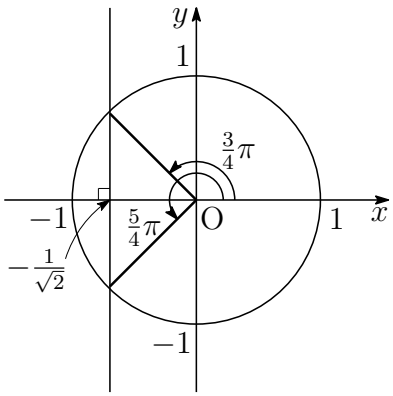
(2) $\sqrt{2}\cos\theta = -1$ より　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

求める角 θ の動径と単位円の交点の x 座標は $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．

右の図より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 2n\pi}$$

($\boldsymbol{n}$ は整数)



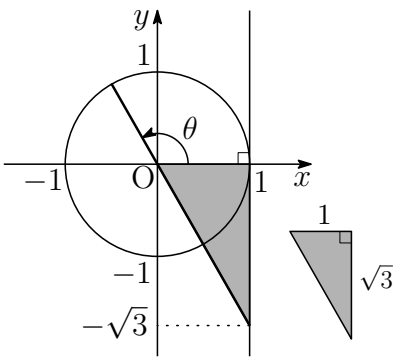
練習 4.19 求める角 θ の動径の延長と直線 $x = 1$ の交点の y 座標は $-\sqrt{3}$ である．

よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi}$$

したがって，方程式の解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi}\quad (\boldsymbol{n}\text{ は整数})$$



練習 4.20 (1) $\theta - \dfrac{\pi}{6} = t$ とおくと　$\sin t = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\cdots$①

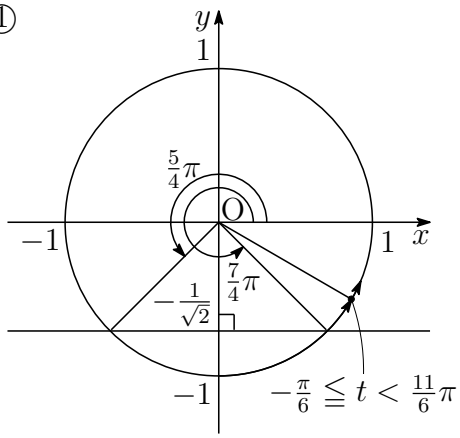
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq t < \dfrac{11}{6}\pi$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$t = \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

すなわち　$\theta - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{17}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi}$



(2) $\theta + \dfrac{\pi}{4} = t$ とおくと　$\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\cdots$①

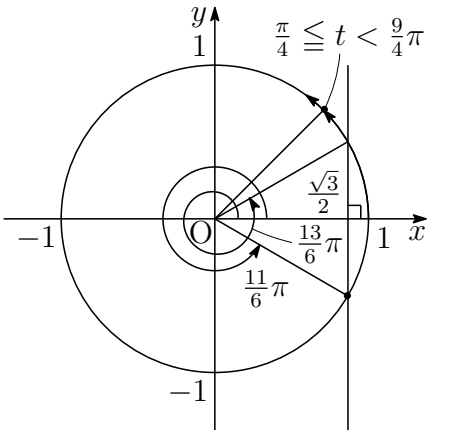
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{4} \leqq t < \dfrac{9}{4}\pi$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$t = \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

すなわち　$\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$

よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{19}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi}$

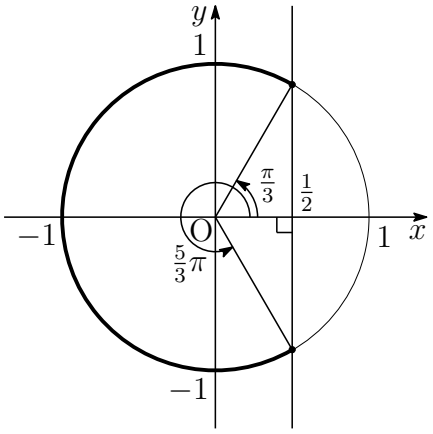


練習 4.21 (1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ となる θ は

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

よって，不等式の解は，右の図から

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi}$$

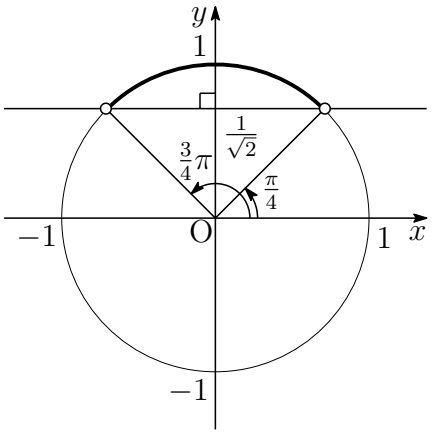


(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

よって，不等式の解は，右の図から

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi}$$

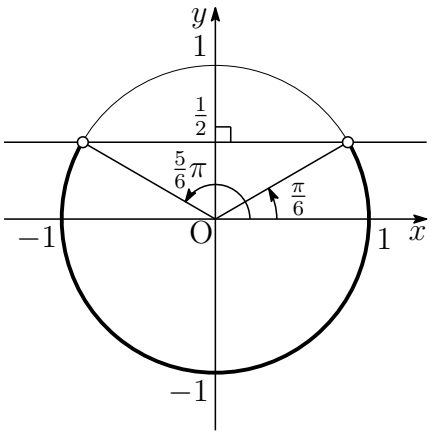


(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ となる θ は

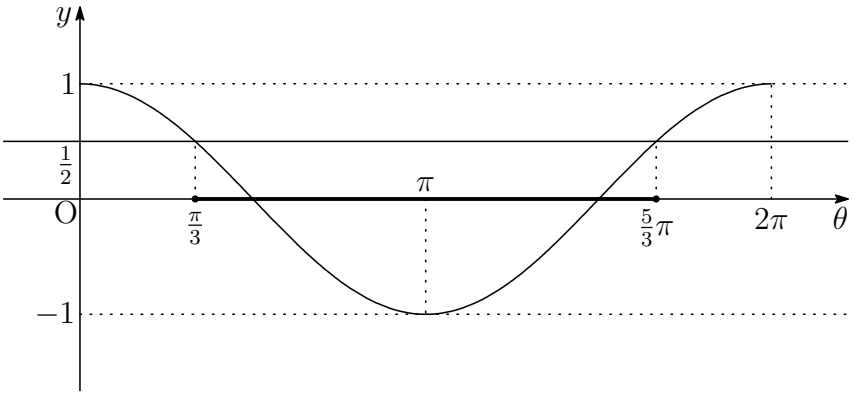
$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって，不等式の解は，右の図から

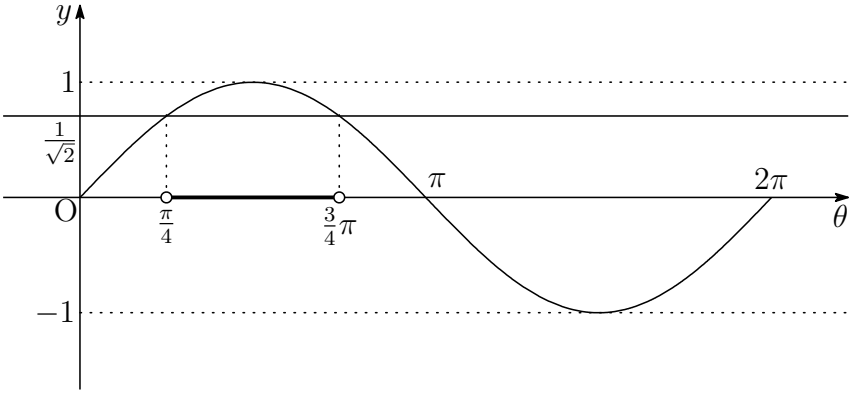
$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\quad \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi}$$



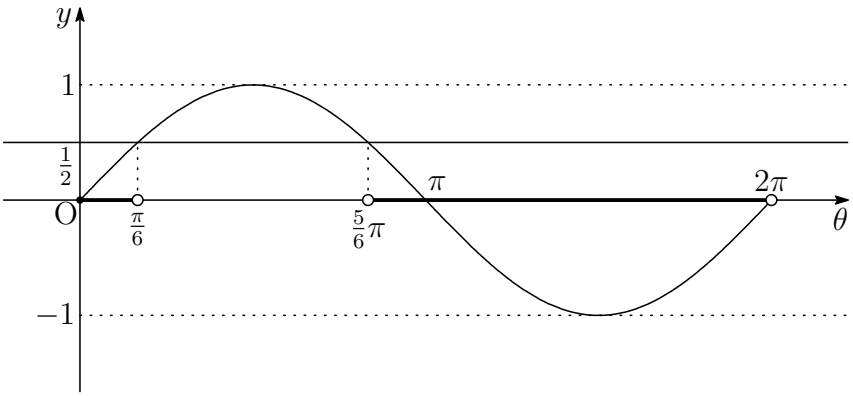
別解 (1) 区間 $0 \leqq \theta < 2\pi$ で $y = \cos\theta$ のグラフが直線 $y = \dfrac{1}{2}$ およびその下側にある θ の範囲であるから　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi}$



(2) 区間 $0 \leqq \theta < 2\pi$ で $y = \sin\theta$ のグラフが直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の上側にある θ の範囲であるから　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3}{4}\pi}$



(3) 区間 $0 \leqq \theta < 2\pi$ で $y = \sin\theta$ のグラフが直線 $y = \dfrac{1}{2}$ の下側にある θ の範囲であるから　$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6},\quad \dfrac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi}$



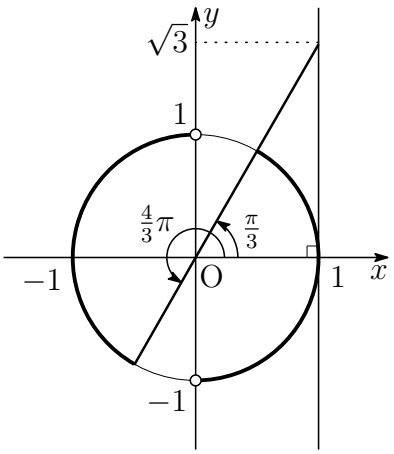
練習 4.22 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = \sqrt{3}$ となる θ は

$$\theta = \frac{\pi}{3},\quad \frac{4}{3}\pi$$

よって，不等式の解は，右の図から

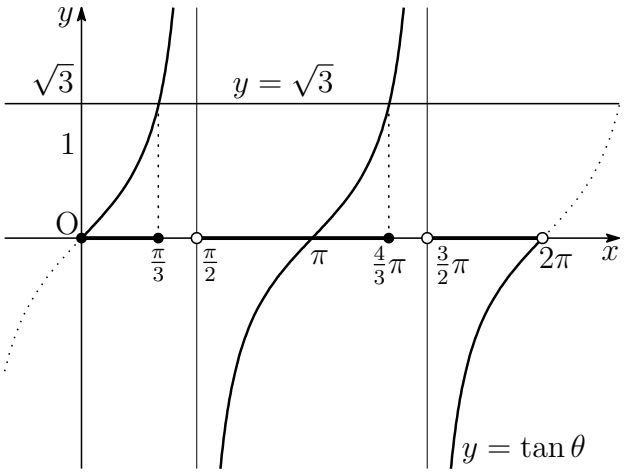
$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\quad \frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{4}{3}\pi,}$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi}$$



別解 区間 $0 \leqq \theta < 2\pi$ で $y = \tan\theta$ のグラフが直線 $y = \sqrt{3}$ およびその下側にある θ の範囲であるから

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\quad \frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{4}{3}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi}$$



練習 4.23 $\cos\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$$-1 \leqq t \leqq 1 \quad \cdots ①$$

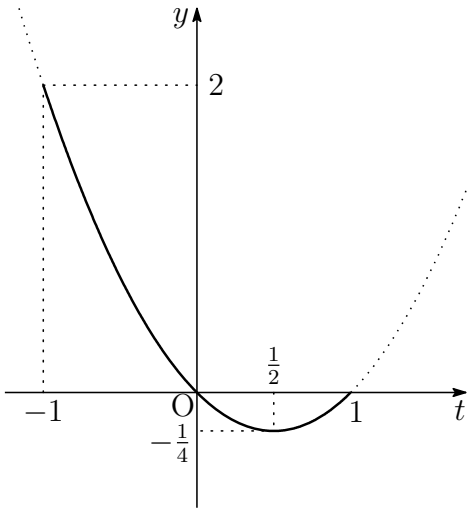
y を t で表すと　　$y = t^2 - t$

すなわち　　$y = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$

よって，① の範囲において，y は

$t = -1$ で　最大値 2 をとり，

$t = \dfrac{1}{2}$ で　最小値 $-\dfrac{1}{4}$ をとる．



また，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$t = -1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \pi}$ のとき　　**最大値 2** をとり，

$t = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{3}\pi}$ のとき　**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$ をとる．

問題 4.1 $\tan\theta = -2$ を $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると　$1 + (-2)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

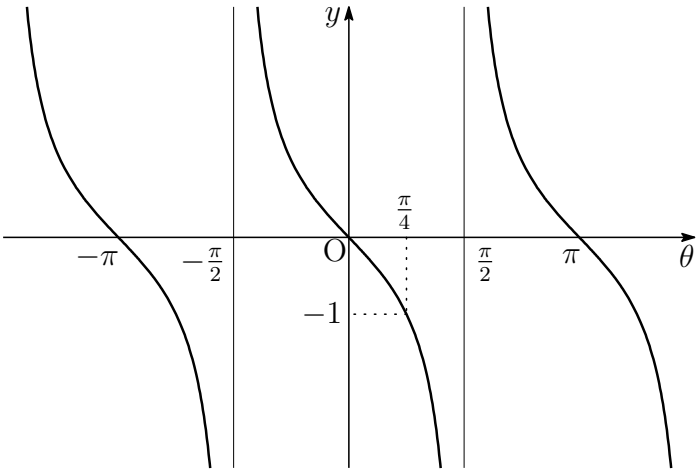
$$\cos^2\theta = \frac{1}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$ により

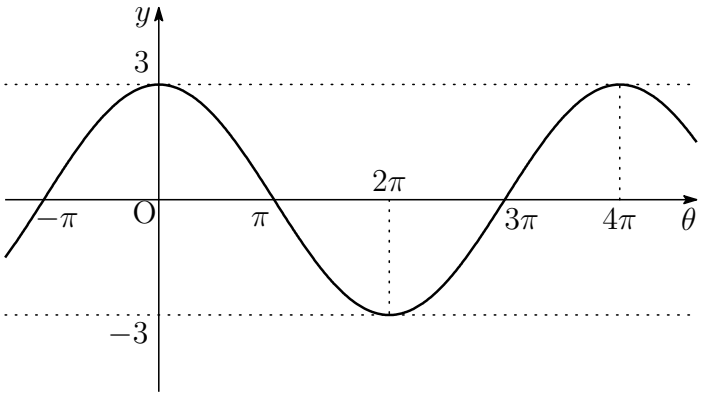
$$\sin\theta = -2 \times \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって　　$\boldsymbol{\sin\theta = \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \ \cos\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$　(複号同順)

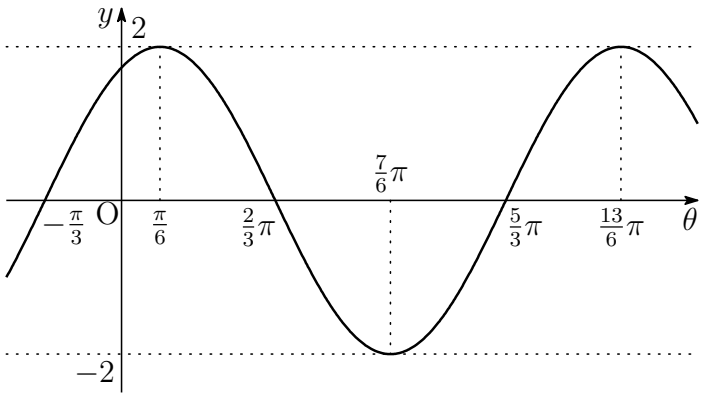
問題 4.2 (1) **周期は $\boldsymbol{\pi}$**



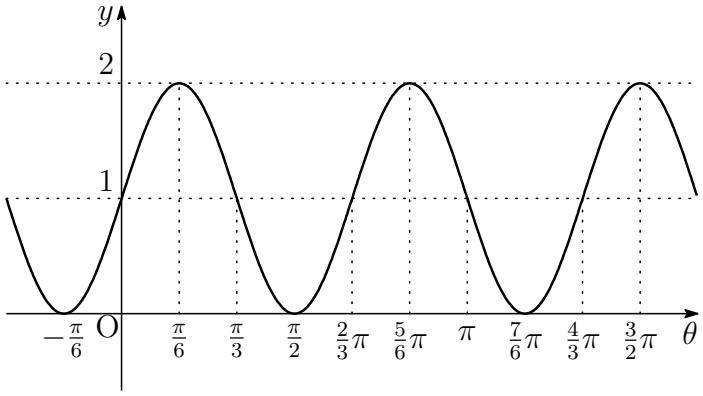
(2) 周期は $\mathbf{4\pi}$



(3) 周期は $\mathbf{2\pi}$



(4) 周期は $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$

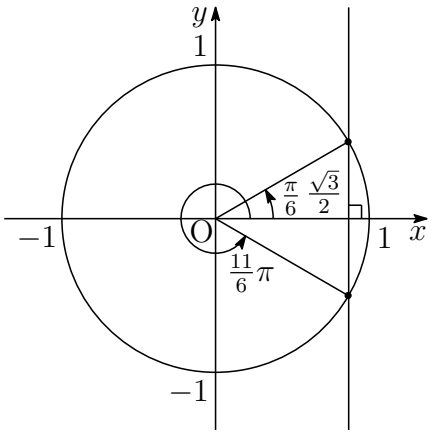


問題 4.3 (1) $2\sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$ より　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

求める角 θ の動径と単位円の交点の x 座標は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

右の図より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6},\quad \frac{11}{6}\pi}$$

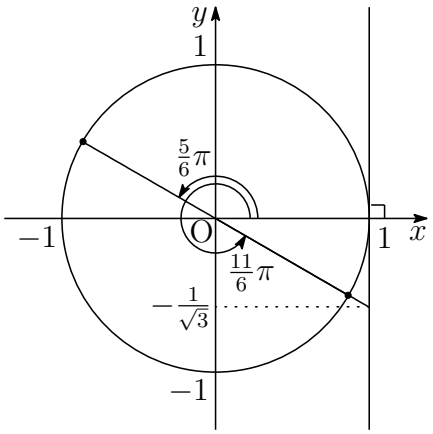


(2) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$ より　$\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

求める角 θ の動径の延長と直線 $x = 1$ の交点の y 座標は $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．

右の図より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{6}\pi,\quad \frac{11}{6}\pi}$$



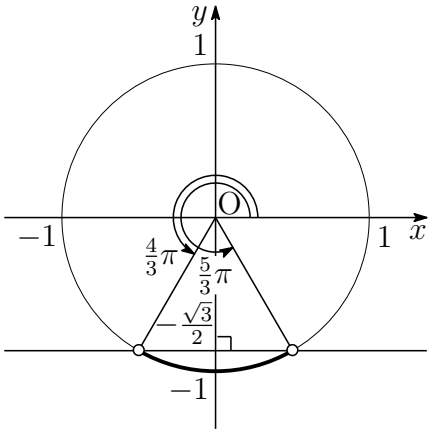
(3) $2\sin\theta + \sqrt{3} < 0$ より　$\sin\theta < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるのは

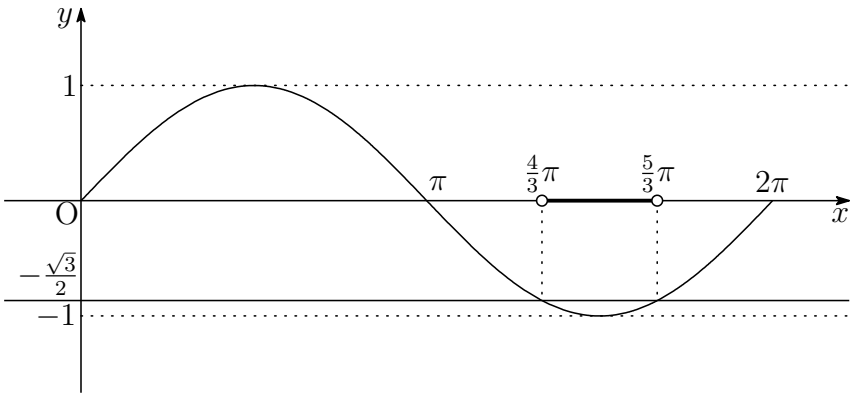
$$\theta = \frac{4}{3}\pi,\quad \frac{5}{3}\pi$$

よって，不等式の解は，右の図から

$$\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi}$$



別解 区間 $0 \leqq \theta < 2\pi$ で $y = \sin\theta$ のグラフが直線 $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の下側にある θ の範囲であるから　$\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{3}\pi}$



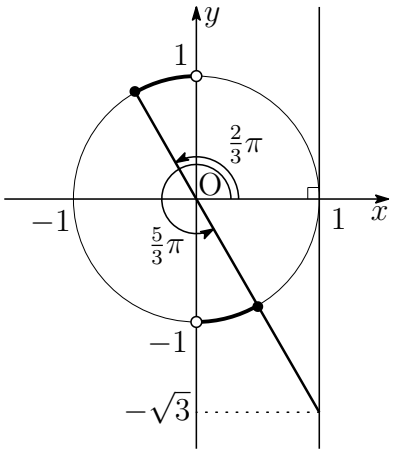
(4) $\tan\theta + \sqrt{3} \leqq 0$ より　$\tan\theta \leqq -\sqrt{3}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = -\sqrt{3}$ となるのは

$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\quad \frac{5}{3}\pi$$

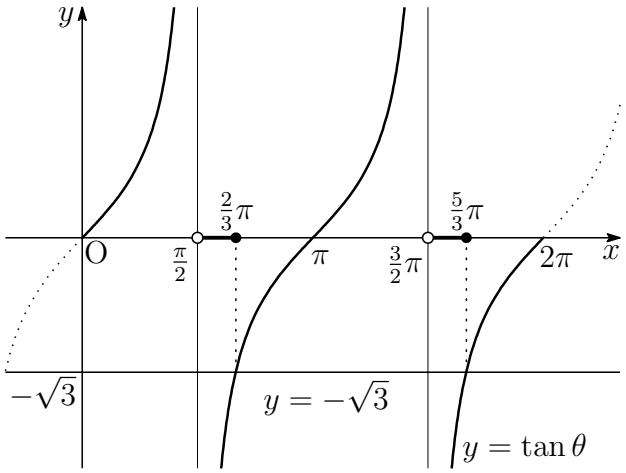
よって，不等式の解は，右の図から

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi < \theta \leqq \frac{5}{3}\pi}$$



別解 区間 $0 \leqq \theta < 2\pi$ で $y = \tan\theta$ のグラフが直線 $y = -\sqrt{3}$ およびその下側にある θ の範囲であるから

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < \theta \leqq \frac{5}{3}\pi}$$



(5) $\theta + \dfrac{\pi}{3} = t$ とおくと　$\cos t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\cdots$①

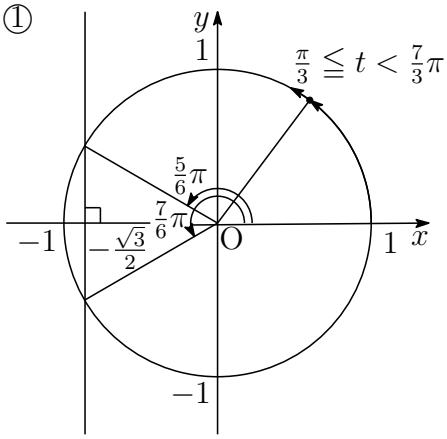
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{3} \leqq t < \dfrac{7}{3}\pi$

であるから，この範囲で① を解くと

$$t = \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{7}{6}\pi$$

すなわち　$\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{6}\pi, \ \dfrac{7}{6}\pi$

よって　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}, \ \frac{5}{6}\pi}$



(6) $\theta + \dfrac{\pi}{3} = t$ とおくと　$\cos t > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\left(\dfrac{\pi}{3} \leqq t < \dfrac{7}{3}\pi\right)$

これを解くと　$\dfrac{\pi}{3} \leqq t < \dfrac{5}{6}\pi, \ \dfrac{7}{6}\pi < t < \dfrac{7}{3}\pi$

すなわち　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{6}\pi, \quad \dfrac{7}{6}\pi < \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$

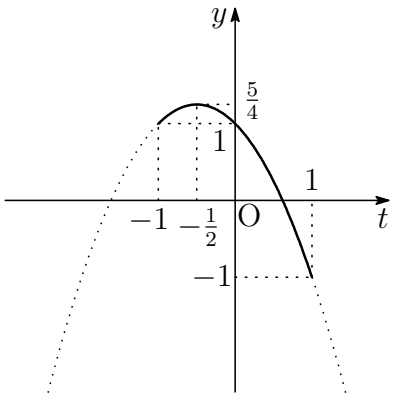
よって　$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi}$

問題 4.4 $\cos\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$$-1 \leqq t \leqq 1 \quad \cdots ①$$

y を t で表すと

$$y = (1 - \cos^2\theta) - \cos\theta = -t^2 - t + 1$$
$$= -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$



よって，① の範囲において，y は

$t = -\dfrac{1}{2}$ で　最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとり，

$t = 1$ で　最小値 -1 をとる．

また，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$t = -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi}$ のとき　**最大値 $\dfrac{5}{4}$** をとり，

$t = 1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0}$ のとき　**最小値 -1** をとる．

問題 4.5 ① $\boldsymbol{b}$　② $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$　③ $\boldsymbol{c}$

深化 4.2

1 $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta\cos 2n\pi + \cos\theta\sin 2n\pi = \sin\theta$
$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta\cos 2n\pi - \sin\theta\sin 2n\pi = \cos\theta$

2 $\sin(-\theta) = \sin(0 - \theta) = \sin 0\cos\theta - \cos 0\sin\theta = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos(0 - \theta) = \cos 0\cos\theta + \sin 0\sin\theta = \cos\theta$

3 $\sin(\theta + \pi) = \sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi = -\sin\theta$
$\cos(\theta + \pi) = \cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi = -\cos\theta$

4 $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\theta\cos\dfrac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{2} = \cos\theta$
$\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta\cos\dfrac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\dfrac{\pi}{2} = -\sin\theta$

練習 4.24 $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$
$= \cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ\sin 30^\circ$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

練習 4.25 $\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

$\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

練習 4.26 α の動径が第 2 象限にあるから　　$\cos\alpha<0$

β の動径が第 1 象限にあるから　　$\sin\beta>0$

よって　　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

したがって　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{5}-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\dfrac{4}{5}=\boldsymbol{\dfrac{6+4\sqrt{5}}{15}}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cdot\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}=\boldsymbol{-\dfrac{3\sqrt{5}+8}{15}}$

練習 4.27 $\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\dfrac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{1+2\sqrt{3}+3}{1^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{\boldsymbol{4+2\sqrt{3}}}{\boldsymbol{-2}}=\boldsymbol{-2-\sqrt{3}}$

練習 4.28 $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\dfrac{\pi}{6}}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{6}}$

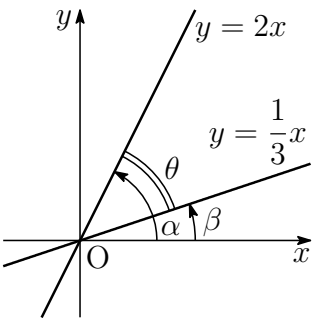
$=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$

練習 4.29 2 直線 $y=2x-1$, $y=\dfrac{1}{3}+1$ のなす角 θ は，2 直線

$$y=2x, \quad y=\frac{1}{3}x$$

のなす角に等しい．これらの 2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，右の図より $\theta=\alpha-\beta$ である．



$$\tan\alpha=2, \quad \tan\beta=\frac{1}{3}$$

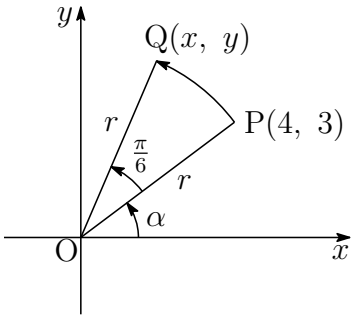
であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$

演習 4.1 OP $=r$，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると

$$4=r\cos\alpha, \quad 3=r\sin\alpha$$



点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$y=r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$

よって，加法定理により

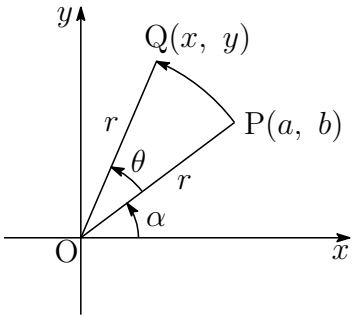
$$\begin{aligned}x&=r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}\\&=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cdot\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}-3}{2},\\y&=r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\\&=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}+4}{2}\end{aligned}$$

したがって，点 Q の座標は　　$\boldsymbol{\left(\dfrac{4\sqrt{3}-3}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}+4}{2}\right)}$

解説 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を，原点を中心として θ だけ回転した位置にある点 Q の座標

$\mathrm{OP} = r$，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin\alpha$$



点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = r\cos(\alpha+\theta)$$
$$y = r\sin(\alpha+\theta)$$

よって，加法定理により

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ &= a\cos\theta - b\sin\theta, \\ y &= r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \\ &= b\cos\theta + a\sin\theta = a\sin\theta + b\cos\theta \end{aligned}$$

したがって，点 Q の座標は　　$\boldsymbol{(a\cos\theta - b\sin\theta,\ a\sin\theta + b\cos\theta)}$

原点 O の周りに角 θ だけ回転する移動

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を，原点を中心として θ だけ回転した位置にある点 Q の座標は

$$\boldsymbol{(a\cos\theta - b\sin\theta,\ a\sin\theta + b\cos\theta)}$$

練習 4.30 $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ から　　$\sin\alpha > 0$

よって　　$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \dfrac{2}{3}$

(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}}$

(2) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 1 = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

別解 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \Big/ \frac{1}{9} = \boldsymbol{-4\sqrt{5}}$$

別解 $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{3} \Big/ \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \boldsymbol{-4\sqrt{5}}$$

練習 4.31 (3 倍角の公式)

(1) $\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\end{aligned}$

(2) $\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha \\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha \\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha\end{aligned}$

解説 $(n\pm1)\theta = n\theta \pm \theta$ により (複号同順)

$$\begin{aligned}
\sin(n+1)\theta &= \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta \\
\sin(n-1)\theta &= \sin n\theta\cos\theta - \cos n\theta\sin\theta \\
\cos(n+1)\theta &= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta \\
\cos(n-1)\theta &= \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta
\end{aligned}$$

上の第 1 式と第 2 式，第 3 式と第 4 式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}
\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta &= 2\sin n\theta\cos\theta \\
\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta &= 2\cos n\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

したがって，次式が成立する．

$$(*)\begin{cases}
\sin(n+1)\theta = 2\cos\theta\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \\
\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta
\end{cases}$$

上式から，$\sin(n+1)\theta$ は，$\sin n\theta$ と $\sin(n-1)\theta$ を用いて表記でき，$\cos(n+1)\theta$ は，$\cos n\theta$ と $\cos(n-1)\theta$ を用いて表記できることがわかる．$n=2$ とすると

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= 2\cos\theta\sin 2\theta - \sin\theta \\
&= 2\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta \\
&= 4\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta, \\
\cos 3\theta &= 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta \\
&= 2\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

$\cos 4\theta$ であれば，$n=3$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
\cos 4\theta &= 2\cos\theta\cos 3\theta - \cos 2\theta \\
&= 2\cos\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - (2\cos^2\theta - 1) \\
&= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1
\end{aligned}$$

4θ を 2θ の 2 倍角と考えて求めることもできる．

$$\begin{aligned}
\cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 \\
&= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1
\end{aligned}$$

このように，三角関数の証明は様々である．

ド・モアブルの定理

2 つの複素数 $\cos\alpha + i\sin\alpha$, $\cos\beta + i\sin\beta$ を考え，これらの積を計算すると

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta\\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

となり，余弦と正弦の加法定理の式が現れる．したがって，次式が成立する．

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \qquad (*)$$

$(*)$ において，$\alpha = \theta,\ \beta = \theta$ とすると

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta \qquad (1)$$

また，$(*)$ において，$\alpha = 2\theta,\ \beta = \theta$ とすると，(1) により

$$\begin{aligned}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) &= \cos(2\theta+\theta) + i\sin(2\theta+\theta)\\ (\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta \qquad (2)\end{aligned}$$

さらに，(2) の両辺に $\cos\theta + \sin\theta$ を掛けると，$(*)$ より

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$

を得る．一般に，次の定理が成立する．

ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n \text{ は整数})$$

Ex 6.3 $n = 3$ のとき，同定理の左辺を展開すると

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

このとき，同定理の右辺と比較して (複素数の相等)

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\\ \sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\\ &= 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

練習 4.32 (1) 半角の公式により

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\mathbf{2-\sqrt{2}}}{\mathbf{4}}$$

$$\sin\frac{\pi}{8}>0 \text{ より} \qquad \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\mathbf{\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{\mathbf{2}}$$

(2) 半角の公式により

$$\sin^2\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{3}{8}\pi>0 \text{ より} \qquad \sin\frac{3}{8}\pi=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\mathbf{\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\mathbf{2}}$$

(3) 半角の公式により

$$\cos^2\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{3}{8}\pi>0 \text{ より} \qquad \cos\frac{3}{8}\pi=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\mathbf{\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{\mathbf{2}}$$

練習 4.33 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より，$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから

$$\sin\frac{\alpha}{2}>0, \quad \cos\frac{\alpha}{2}>0, \quad \tan\frac{\alpha}{2}>0$$

(1) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}=\frac{9}{10}$

$\sin\frac{\alpha}{2}>0$ であるから $\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{\sqrt{10}}}$

(2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}=\frac{1}{10}$

$\cos\frac{\alpha}{2}>0$ であるから $\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt{10}}}$

(3) $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=9$

$\tan\frac{\alpha}{2}>0$ であるから $\qquad \tan\frac{\alpha}{2}=\mathbf{3}$

別解 (1)，(2) の結果から $\quad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\Big/\frac{1}{\sqrt{10}}=\mathbf{3}$

練習 4.34 (1) 方程式を変形すると　$(1-2\sin^2\theta)+\sin\theta=1$

整理すると　$2\sin^2\theta-\sin\theta=0$

すなわち　$\sin\theta(2\sin\theta-1)=0$

よって　$\sin\theta=0$　または　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

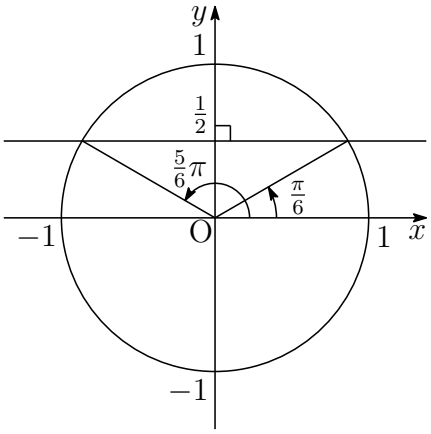
$\sin\theta=0$ から

$$\theta=0,\ \ \pi$$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ から

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

したがって　$\boldsymbol{\theta=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \pi}$



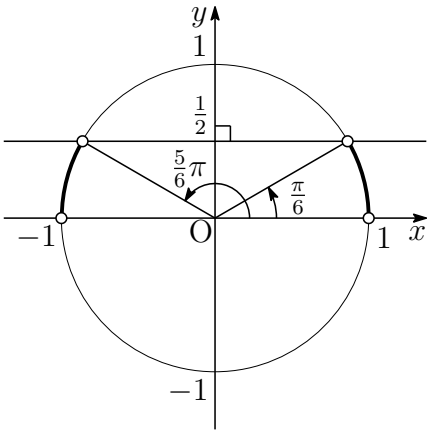
(2) (1) より，不等式を変形すると

$$\sin\theta(2\sin\theta-1)<0$$

よって　$0<\sin\theta<\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

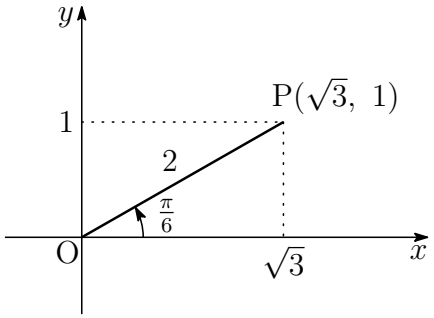
$$\boldsymbol{0<\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi<\theta<\pi}$$



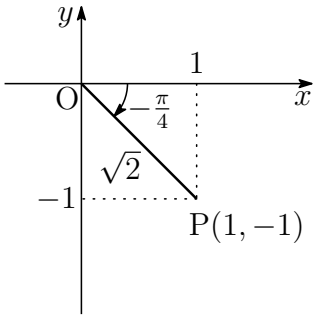
練習 4.35 (1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

(2) $\sin\theta-\cos\theta=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$

(1)



(2)



練習 4.36 左辺を変形すると　　$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

よって　　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\quad\cdots①$

→ p.184 応用例題 4.1 参照

$0\leqq x<2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi\quad\text{または}\quad x+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{6}\pi$$

したがって　　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{11}{6}\pi}$

練習 4.37 $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから

$$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$ であるから

$$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1 \quad \text{よって} \quad -2\leqq y\leqq 2$$

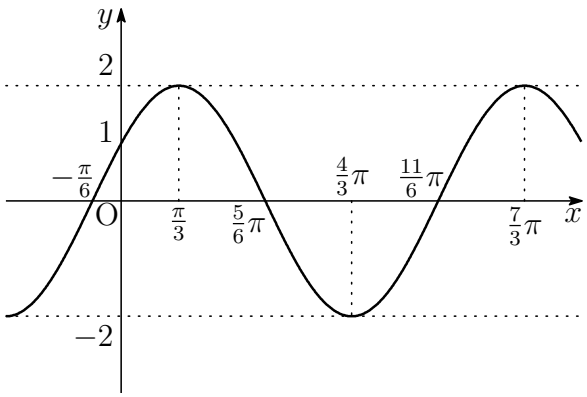
$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ のとき　$x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ から　$x=\dfrac{\pi}{3}$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$ から　$x=\dfrac{4}{3}\pi$

よって，この関数は

$x=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 2 をとり，$x=\dfrac{4}{3}\pi$ で最小値 -2 をとる．

補足 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ すなわち $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，$y=\sin x$ のグラフを，x 軸をもとにして y 軸方向へ 2 倍に拡大し，さらに x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもので，下の図のようになる．



深化 4.3 $-1\leqq\sin x\leqq 1$，$-1\leqq\cos x\leqq 1$ より

$$-2\leqq\sin x+\cos x\leqq 2$$

において等号が成立するとき

$$\sin x=\cos x=\pm 1$$

これを満たす x は存在しない．したがって，この解答は誤りである．

問題 4.6 α の動径が第 4 象限にあるから　　$\cos\alpha > 0$

β の動径が第 4 象限にあるから　　$\sin\beta < 0$

よって　　$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2} = \dfrac{12}{13}$

$$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

(1) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$= -\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5} - \frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{33}{65}}$$

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5} - \left(-\frac{5}{13}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{16}{65}}$$

問題 4.7 直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ の偏角 (x 軸の正の向きとなす角) は，$\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　$\dfrac{\pi}{6}$

求める直線の偏角は　$\dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{4}$　ゆえにその傾きは　$\tan\left(\dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = \sqrt{3}+2,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{-2} = \sqrt{3}-2$$

よって，求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{y = (\sqrt{3}+2)x, \quad y = (\sqrt{3}-2)x}$$

問題 4.8 (1) 左辺 $= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

2 倍角の公式により　$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

よって　　$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

(2) 2 倍角の公式により

$$\text{左辺} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + (2\cos^2\alpha - 1)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \text{右辺}$$

よって　　$\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan\alpha$

問題 4.9 (1) 方程式を変形すると　$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$

$$\sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0$$

したがって　　$\sin\theta = 0$　または　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\sin\theta = 0$ より　$\theta = 0,\ \pi$　　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ より　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって　　$\boldsymbol{\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(2) 不等式を変形すると

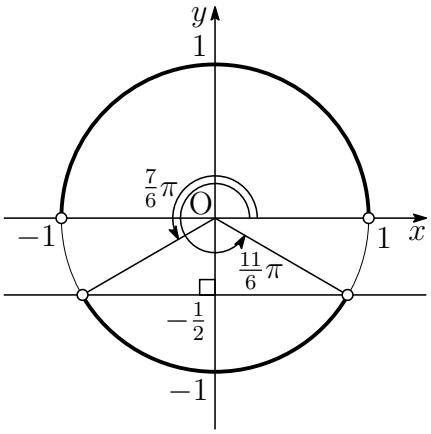
$$1 - 2\sin^2\theta < \sin\theta + 1$$

$$\sin\theta(2\sin\theta + 1) > 0$$

よって　　$\sin\theta < -\dfrac{1}{2},\quad 0 < \sin\theta$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$$\boldsymbol{0 < \theta < \pi,\quad \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi}$$



問題 4.10 (1) 方程式を変形すると　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x-\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと　$\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\cdots$①

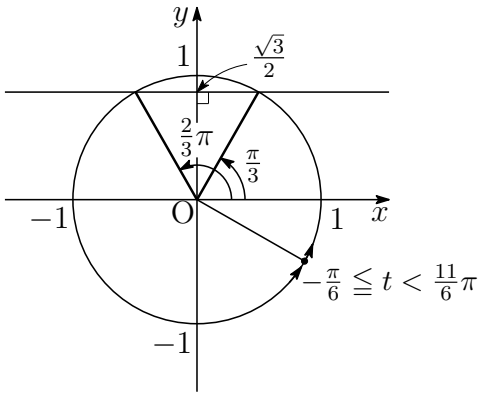
$0\leqq x<2\pi$ のとき　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{11}{6}\pi$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$$

したがって　$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

よって　　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi}$



(2) (1) より，不等式を変形すると

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$t=x-\dfrac{\pi}{6}$ とおくと　$\sin t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\cdots$②

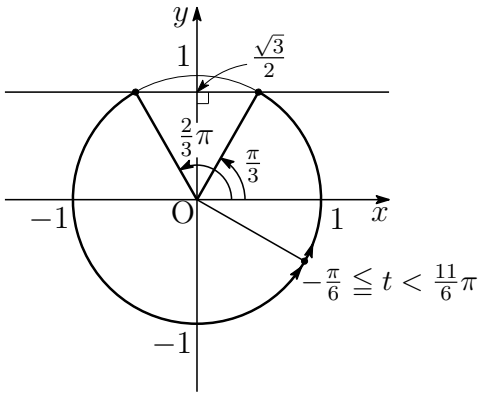
$0\leqq x<2\pi$ のとき　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{11}{6}\pi$

であるから，この範囲で ② を解くと

$$-\frac{\pi}{6}\leqq t\leqq\frac{\pi}{3},\quad\frac{2}{3}\pi\leqq t<\frac{11}{6}\pi$$

したがって　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{3},\quad\dfrac{2}{3}\pi\leqq x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11}{6}\pi$

よって　　$\boldsymbol{0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2},\quad\dfrac{5}{6}\pi\leqq x<2\pi}$



問題 4.11 (1) $\mathrm{OP}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ より　$\boldsymbol{\cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}4\sin x+3\cos x&=5\left(\frac{4}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x\right)\\&=5(\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x)\\&=5\sin(x+\alpha)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{r=5}$

(3) $-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ であるから　$-5\leqq y\leqq 5$

したがって　y の**最大値は 5, 最小値は −5**

章末 4.1 (1) $\sin\frac{16}{3}\pi=\sin\left(\frac{4}{3}\pi+2\times 2\pi\right)=\sin\frac{4}{3}\pi=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\cos\frac{7}{2}\pi=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2\pi\right)=\cos\frac{3}{2}\pi=\boldsymbol{0}$

(3) $\tan\left(-\frac{11}{6}\pi\right)=\tan\left\{\frac{\pi}{6}+(-1)\times 2\pi\right\}=\tan\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

章末 4.2 (1) θ は第 4 象限の角であるから　$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

したがって　$\sin\theta-\cos\theta<0$　$\cdots$①

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

① より　$\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{2}}$

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$\begin{aligned}&=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)\\&=-\frac{\sqrt{6}}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\boldsymbol{-\frac{3\sqrt{6}}{8}}\end{aligned}$$

章末 4.3 (1) 左辺 $=\frac{(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}$

よって　$\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}$

(2) 左辺 $=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos 2\theta}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}=\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

よって　$\frac{1}{\tan\theta}-\tan\theta=\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

章末 4.4 (1) 方程式を変形すると　$1-2\sin^2 x=\sin x$

整理すると　$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

すなわち　$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$0 \leqq x<2\pi$ であるから　$\sin x=\dfrac{1}{2}, -1$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ より　$x=\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$,　　$\sin x=-1$ より　$x=\dfrac{3}{2}\pi$

したがって　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{3}{2}\pi}$

(2) 不等式を変形すると　$1-2\sin^2 x<\sin x$

$2\sin^2 x+\sin x-1>0$　ゆえに　$(2\sin x-1)(\sin x+1)>0$

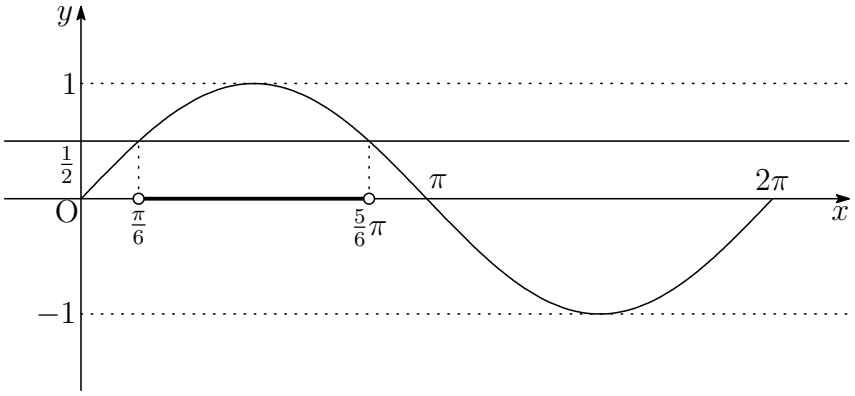
$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より　$\sin x>\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x<2\pi$ であるから　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi}$

補足 2 次不等式 $(2t-1)(t+1)>0$ の解は，$t<-1,\ \dfrac{1}{2}<t$ であるが，不等式 $(2\sin x-1)(\sin x+1)>0$ の解は，$\sin x<-1$ が除外されるため

$$(*)\ \sin x>\frac{1}{2}\ (0 \leqq x<2\pi)\quad \text{すなわち}\quad \frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$$

となる．上の不等式の解は，$y=\sin x$ のグラフが，直線 $y=\dfrac{1}{2}$ の上側にある x の値の範囲である．



不等式 $(*)$ は，不等式 $\sin\theta>\dfrac{1}{2}\ (0 \leqq \theta<2\pi)$ を単位円を用いた解法で求めてもよい．

章末 4.5 (1) $\sin(\pi-\theta)=\sin\pi\cos\theta-\cos\pi\sin\theta=0\cdot\cos\theta-(-1)\cdot\sin\theta=\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=\cos\pi\cos\theta+\sin\pi\sin\theta=(-1)\cdot\cos\theta+0\cdot\sin\theta=-\cos\theta$

上の 2 式から

$$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

別解 $\tan(\pi-\theta)=\dfrac{\tan\pi-\tan\theta}{1+\tan\pi\tan\theta}=\dfrac{0-\tan\theta}{1+0\cdot\tan\theta}=-\tan\theta$

(2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{2}\sin\theta=1\cdot\cos\theta-0\cdot\sin\theta=\cos\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\dfrac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$

上の 2 式から

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

注意 $\tan\dfrac{\pi}{2}$ は定義されないため，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ は加法定理を用いて証明することはできない．

章末 4.6 2 倍角の公式により

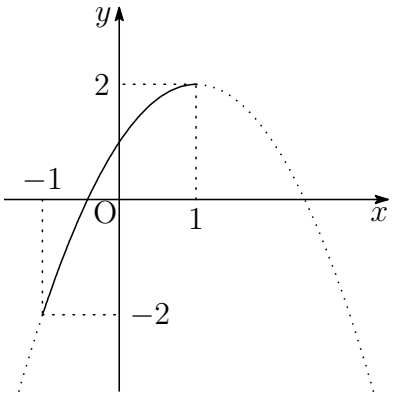
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cos2\theta+2\sin\theta+\frac{1}{2}&=\frac{1}{2}(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta+\frac{1}{2}\\&=-\sin^2\theta+2\sin\theta+1\end{aligned}$$

$x=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned}y&=-x^2+2x+1\quad(-1\leqq x\leqq1)\\&=-(x-1)^2+2\end{aligned}$$

$x=-1$，すなわち，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{3}{2}\pi}$ のとき

最小値 -2 をとる．



章末 4.7 (1) 式を変形すると　$y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$

$-1 \leqq \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 1$ であるから　$-2 \leqq y \leqq 2$

よって　$x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{6}\pi}$ のとき**最大値 2** をとり，

$x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}\pi$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{11}{6}\pi}$ のとき**最小値 −2** をとる．

(2) $y = 0$ より　$2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$　すなわち　$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$　$\cdots$①

$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$ の範囲で ① を解くと

$x - \dfrac{\pi}{3} = 0$　または　$x - \dfrac{\pi}{3} = \pi$　よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi}$

(3) $y \leqq 0$ より　$2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 0$　すなわち　$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 0$　$\cdots$②

$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$ の範囲で ② を解くと

$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} \leqq 0$　または　$\pi \leqq x - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$

よって　$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3},\quad \dfrac{4}{3}\pi \leqq x < 2\pi}$

章末 4.8 (1) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}\quad\cdots①$$

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗すると

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{9}\quad\cdots②$$

①，② の辺々を加えると

$$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{13}{36}$$

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{59}{72}$$

したがって　$\cos(\alpha-\beta)=\boldsymbol{-\dfrac{59}{72}}$

(2) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2+4}{1-2\cdot4}=-\dfrac{6}{7}$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}$$

$$=\frac{-\dfrac{6}{7}+13}{1-\left(-\dfrac{6}{7}\right)\cdot13}=\frac{-6+91}{7+78}=\frac{85}{85}=\boldsymbol{1}$$

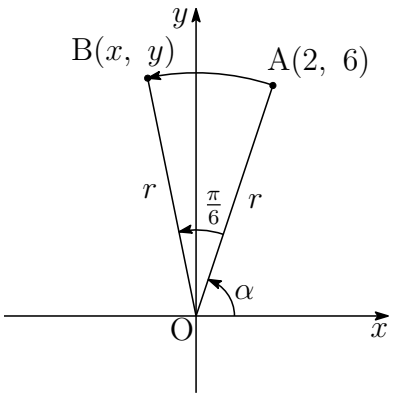
章末 4.9 左辺 $=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

分母，分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割って

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

よって　$\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$

章末 4.10 OA $= r$，動径 OA と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると



$$2 = r\cos\alpha, \quad 6 = r\sin\alpha$$

点 B の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = r\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$y = r\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

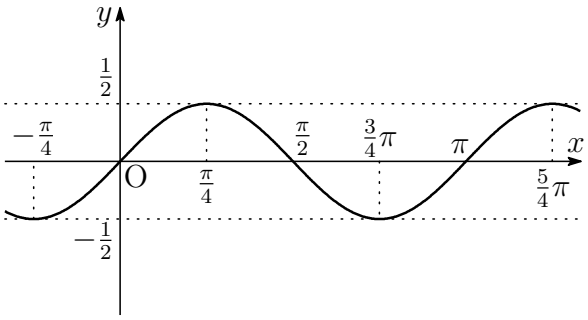
よって，加法定理により

$$\begin{aligned} x &= r\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} - r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} \\ &= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3} - 3, \\ y &= r\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} \\ &= 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = 3\sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

したがって，点 B の座標は　　$\boldsymbol{(\sqrt{3} - 3,\ 3\sqrt{3} + 1)}$

章末 4.11 (1) $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ より　　$y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

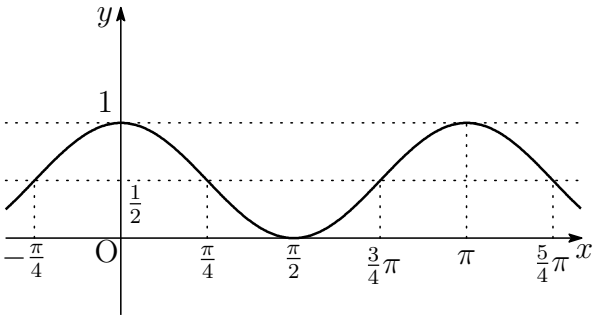
このグラフは，$y = \sin x$ のグラフを，x 軸をもとに y 軸方向へ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小し，さらに y 軸をもとに x 軸方向へ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したもので，グラフは下の図のようになる．周期は $2\pi \times \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\pi}$



(2) 半角の公式より　$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}$

よって　　$y = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}$

このグラフは，$y = \dfrac{1}{2}\cos 2x$ のグラフを y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ平行移動したもので，下の図のようになる．周期は　$2\pi \times \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\pi}$



章末 4.12 $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$，$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ であるから

$$y = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{4} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{9}{4}\pi$

よって　$2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{8}}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{8}\pi}$ で最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

章末 4.13 (1) $t = \sin x + \cos x$ の両辺を平方すると

$$t^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x\cos x \quad \text{ゆえに} \quad 2\sin x\cos x = t^2 - 1$$

したがって　$2\sin x\cos x + \sin x + \cos x = (t^2 - 1) + t$

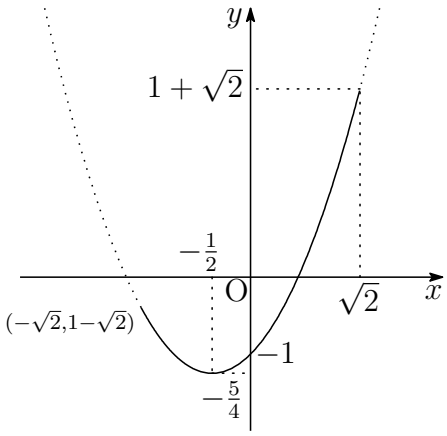
よって　$\boldsymbol{y = t^2 + t - 1}$

(2) $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$-1 \leqq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ であるから　$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$y = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad (-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$$



したがって

$t = \sqrt{2}$で　最大値 $1 + \sqrt{2}$をとり

$t = -\dfrac{1}{2}$で　最小値 $-\dfrac{5}{4}$をとる

よって　**最大値 $\boldsymbol{1 + \sqrt{2}}$，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{5}{4}}$**

練習 5.1 (1) $4^0 = \mathbf{1}$

(2) $(-5)^0 = \mathbf{1}$

(3) $3^{-1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

(4) $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}$

(5) $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$

練習 5.2 (1) $a^5a^{-2} = a^{5+(-2)} = \boldsymbol{a^3}$

(2) $\dfrac{a^{-3}}{a^2} = a^{-3-2} = a^{-5} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^5}}$

(3) $(a^{-4})^{-1} = a^{(-4)\times(-1)} = \boldsymbol{a^4}$

(4) $(a^{-2}b)^3 = a^{(-2)\times3}b^3 = a^{-6}b^3 = \dfrac{\boldsymbol{b^3}}{\boldsymbol{a^6}}$

補足 指数法則 $a^0 = 1,\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\ (a \neq 0)$ は，a が複素数の場合も成立する．

486 ページのド・モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

について，n が正の整数について成立することを学んだ．指数法則により，n を正の整数とすると

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} &= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i\sin n\theta} \\ &= \frac{\cos n\theta - i\sin n\theta}{(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos n\theta - i\sin n\theta)} \\ &= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\end{aligned}$$

となり，ド・モアブルの定理は，整数 n について成立することがわかる．また，$n = 0$ のときも成立する．

例 5.4 $a>0$，n は正の整数のとき，a の n 乗根の中で正の実数であるものが $\sqrt[n]{a}$.

(1) 8 の 3 乗根は，3 次方程式 $x^3=8$ の解であるから

$$x^3-2^3=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)(x^2+2x+4)=0$$

これを解いて　$x=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i$

8 の 3 乗根の中で，正の実数であるものが $\sqrt[3]{8}$ であるから

$$\sqrt[3]{8}=2$$

(2) 81 の 4 乗根は，4 次方程式 $x^4=81$ の解であるから

$$(x^2)^2-9^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x^2-9)(x^2+9)=0$$

これを解いて　$x=\pm 3,\ \pm 3i$

81 の 4 乗根の中で，正の実数であるものが $\sqrt[4]{81}$ であるから

$$\sqrt[4]{81}=3$$

練習 5.3 (1) $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1^3}=\mathbf{1}$

(2) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=\mathbf{3}$

(3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

累乗根

0 でない複素数 $a+bi$ ($a,\ b$ は実数) について

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\theta=\frac{a}{r},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}$$

とおくと

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表せる．右辺の式を**極形式**という．このとき，$r>0$ であり，$0\leqq\theta<2\pi$ とすれば，$a+bi$ について r と θ が一意に対応する．

n を正の整数，$c>0$ とする．n 次方程式

$$(*)\quad x^n=c$$

の解を

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)\qquad (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

とすると，ド・モアブルの定理により

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n=c\quad\text{ゆえに}\quad r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=c$$

したがって　　$r^n\cos n\theta=c,\quad r^n\sin n\theta=0$

$\sin n\theta=0$ であるから，$r^n>0,\ c>0$ に注意して，$\cos n\theta=1$. これから

$$r^n=c,\ \ n\theta=2k\pi\ (k\text{ は整数})\quad\text{ゆえに}\quad r=\sqrt[n]{c},\ \ \theta=\frac{2k\pi}{n}$$

となる．このとき

$$0\leqq\frac{2k\pi}{n}<2\pi\quad\text{ゆえに}\quad 0\leqq k<n$$

よって，n 次方程式 $(*)$ の解，すなわち，c の n 乗根は次のとおりである．

n 次方程式 $x^n=c\ (c>0)$ の解は

$$x=\sqrt[n]{c}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

- 3 次方程式 $x^3=8$ の解は

$$\begin{aligned}x&=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)\quad (k=0,1,2)\\&=2,\ \ -1+\sqrt{3}i,\ \ -1-\sqrt{3}i\end{aligned}$$

- 4 次方程式 $x^4=81$ の解は

$$\begin{aligned}x&=\sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\right)\quad (k=0,1,2,3)\\&=3,\ 3i,\ -3,\ -3i\end{aligned}$$

深化 5.1 $(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\cdots\sqrt[n]{a}}_{\sqrt[n]{a}\text{ が }m\text{ 個}} = \underbrace{\sqrt[n]{a\cdot a\cdots a}}_{a\text{ が }m\text{ 個}} = \sqrt[n]{a^m}$

練習 5.4 (1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2\times 8} = \sqrt[4]{2^4} = \mathbf{2}$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{12}{3}} = \boldsymbol{\sqrt[3]{4}}$

補足 $\sqrt[3]{4}$ は簡単にはならないが，例えば，次のように簡単にできる計算もある．

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

(3) $(\sqrt[4]{5})^3 = \sqrt[4]{5^3} = \boldsymbol{\sqrt[4]{125}}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{3^3}} = \sqrt[3\times 2]{3^{3\times 1}} = \sqrt[2]{3} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

練習 5.5 (1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \mathbf{3}$

(2) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = \mathbf{8}$

(3) $125^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{125^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125^2}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{5^3})^2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}$

別解 指数が有理数のときも指数法則は成立する (例 5.7 を参照).

$$9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^1 = \mathbf{3}, \qquad 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = \mathbf{8},$$
$$125^{-\frac{2}{3}} = (5^3)^{-\frac{2}{3}} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}$$

練習 5.6 (1) $2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}} = 2^2 = \mathbf{4}$

(2) $3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}} = 3^0 = \mathbf{1}$

(3) $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[8]{5^3} \div \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{8}} \div 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{8}} = \boldsymbol{\sqrt[8]{5}}$

(4) $\sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4} \times \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{3}} \div 4^{\frac{1}{12}} \times 4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{2}$

相加平均・相乗平均・調和平均

31 ページで，正の 2 数 $a,\ b$ について

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad (\text{等号が成立するのは, } a=b \text{ のとき})$$

であることを学んだ．

n 個の数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の相加平均 A_n は

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

であり，n 個の正数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の相乗平均 G_n は

$$G_n = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

である．3 正数 $a,\ b,\ c$ の相加平均と相乗平均の大小関係について考えてみる．

3 正数の相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

等号が成立するのは, $a=b=c$ のときに限る．

について，38 ページの章末 1.6(2) および 39 ページの章末 1.8 を利用して証明できる．

証明 $x>0,\ y>0,\ z>0$ とすると，次式が

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\ &= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0 \end{aligned}$$

成立する．等号が成立するのは，$x+y+z>0$ より

$$x-y=0 \quad \text{かつ} \quad y-z=0 \quad \text{かつ} \quad z-x=0$$

したがって　$\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqq xyz$

等号が成立が成立するのは，$x=y=z$ のときに限る．

$x^3=a,\ y^3=b,\ z^3=c$ とおくと　$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

等号が成立するのは，$x=y=z$ より，$a=b=c$ のときに限る．　**証終**

$n=4$ のときの証明は，$n=2$ の結果を利用して証明できる．

4 つの正数 $a,\ b,\ c,\ d$ について

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}, \quad c+d \geqq 2\sqrt{cd}$$

であるから

$$(a+b)+(c+d) \geqq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}) \geqq 2\cdot 2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = 4\sqrt[4]{abcd}$$

したがって

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

上式において，等号が成立するのは

$$a=b, \quad c=d, \quad \sqrt{ab}=\sqrt{cd} \quad \text{すなわち} \quad a=b=c=d$$

したがって，次のことがいえる．

4 正数の相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ のとき

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

等号が成立するのは, $a=b=c=d$ のときに限る．

これを利用して，$n=8$ のときも証明できる．

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8) &\geqq 4(\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}+\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}) \\ &\geqq 4\cdot 2\sqrt{\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}} \\ &= 8\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}\end{aligned}$$

等号が成立するのは

$$a_1=a_2=a_3=a_4, \quad a_5=a_6=a_7=a_8, \quad \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}=\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}$$

すなわち，$a_1=a_2=\cdots=a_8$ のときに限る．

これを繰り返すことにより，$n=2^k$ (k は自然数) のとき

$$A_n \geqq G_n$$

が成立することがわかる．

次に，$n=p+q$ ($p,\ q$ は2以上自然数) が成立するとき，$A_p \geqq G_p$ が成立することを示す．ここで

$$A_p=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_p}{p},\quad G_p=\sqrt[p]{a_1a_2\cdots a_p}$$

とすると，$a_1+a_2+\cdots+a_p=pA_p,\ a_1a_2\cdots a_p={G_p}^p$ である．

n 個の正数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,a_p,\ \overbrace{A_p,\ A_p,\ \cdots,A_p}^{q\text{ 個}}$$

の相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_p)+qA_p}{n}\geqq\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_p){A_p}^q}\quad\text{ゆえに}\quad A_p\geqq\sqrt[n]{{G_p}^p{A_p}^q}$$

両辺を n 乗すると $(n=p+q)$

$${A_p}^{p+q}\geqq{G_p}^p{A_p}^q\quad\text{ゆえに}\quad {A_p}^p\geqq{G_p}^p\quad\text{すなわち}\quad A_p\geqq G_p$$

等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots a_p$ のときに限る．

よって，2以上のすべての自然数 p について，上の結果は成立する．

相加平均・相乗平均・調和平均の大小関係

定理 0 n 個の正数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の相加平均 A_n，相乗平均 G_n，調和平均 H_n

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$
$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$
$$\frac{1}{H_n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

について，$A_n\geqq G_n\geqq H_n$ が成立する．
等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限る．

証明 $A_n\geqq G_n$ が成り立つから n 個の整数 $\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2},\ \cdots,\ \dfrac{1}{a_n}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{H_n}\geqq\frac{1}{G_n}$$

したがって　　$A_n\geqq G_n\geqq H_n$

なお，等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限る．　　**証終**

ネイピア数

1 と n 個の $1+\dfrac{1}{n}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+1}\left\{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} > \sqrt[n+1]{1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

両辺を $n+1$ 乗すると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列である．

また，1 と $n+1$ 個の $\dfrac{n}{n+1}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+2}\left\{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\right\} > \sqrt[n+2]{1\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

両辺を $n+2$ 乗すると

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

上式の逆数をとると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ とすると，数列 $\{b_n\}$ は単調減少列である．したがって

$$2 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_2 < b_1 = 4$$

また，$b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ であるから

$$0 < b_n - a_n = \frac{a_n}{n} < \frac{4}{n}$$

はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

この極限値をネイピア数といい，e ($\fallingdotseq 2.71828\cdots$) で表す (数学 III)．$e$ に関する公式として，次が重要である (証明は数学 III の知識が必要)．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

例えば，これに $\theta = \pi$ を代入すると，次が成立する．

$$e^{i\pi} = -1$$

負の数の累乗根

503 ページの累乗根では，正の数の累乗根について解説した．同様にして，負の数の累乗根について解説する．

n を正の整数，$c>0$ とする．n 次方程式

$$(*)\quad x^n=-c$$

の解を

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)\qquad (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

とすると，ド・モアブルの定理により

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n=-c\quad\text{ゆえに}\quad r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=-c$$

したがって　　$r^n\cos n\theta=-c,\quad r^n\sin n\theta=0$

$\sin n\theta=0$ であるから，$r^n>0,\ c>0$ に注意して，$\cos n\theta=-1$．これから

$$r^n=c,\ \ n\theta=(2k+1)\pi\ (k\text{ は整数})\quad\text{ゆえに}\quad r=\sqrt[n]{c},\ \ \theta=\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

となる．このとき

$$0\leqq\frac{2k+1}{n}\pi<2\pi\quad\text{ゆえに}\quad 0\leqq k<n$$

よって，n 次方程式 $(*)$ の解，すなわち，$-c\ (c>0)$ の n 乗根は次のとおりである．

n 次方程式 $x^n=-c\ (c>0)$ の解は

$$x=\sqrt[n]{c}\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)\qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

- 3 次方程式 $x^3=-8$ の解は

$$\begin{aligned}x&=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2k+1}{3}\pi+i\sin\frac{2k+1}{3}\pi\right)\quad (k=0,1,2)\\&=1+\sqrt{3}i,\ \ -2,\ \ 1-\sqrt{3}i\end{aligned}$$

- 4 次方程式 $x^4=-81$ の解は

$$\begin{aligned}x&=\sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi\right)\quad (k=0,1,2,3)\\&=\frac{3}{\sqrt{2}}(1+i),\ \ \frac{3}{\sqrt{2}}(-1+i),\ \ \frac{3}{\sqrt{2}}(-1-i),\ \ \frac{3}{\sqrt{2}}(1-i)\end{aligned}$$

複素数平面

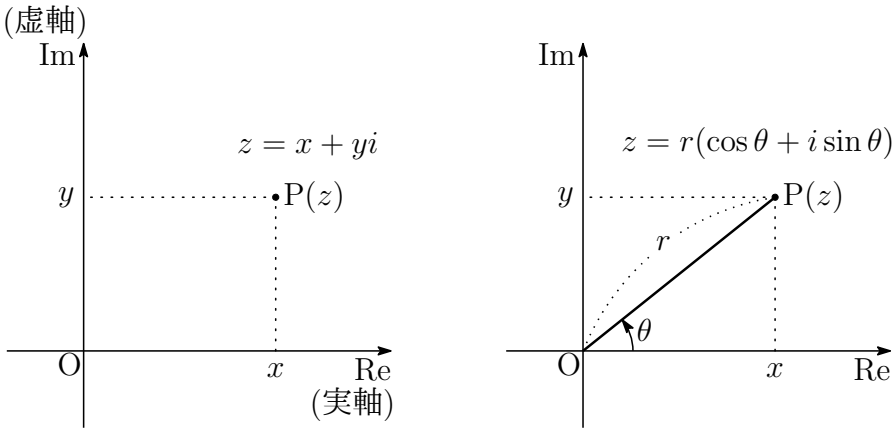
複素数平面とは，複素数 $z = x + yi$ を点 $(x,\ y)$ に対応させた直交座標平面をいう．複素数平面上の点 z の表す点 P を $\mathrm{P}(z)$ とかく．原点 O と点 P の距離を r とし，OP と x 軸の正の向きとのなす角 (偏角) を θ とすると

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

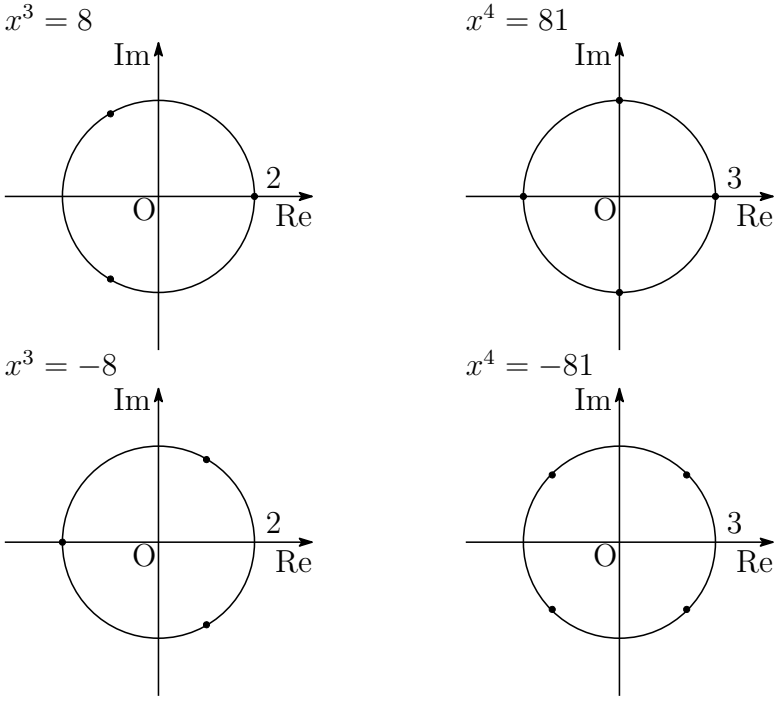
であるから

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

が成立する．OP の長さを $|z|$ で表し，$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ とかくことが多い．



503 ページの累乗根および 510 ページの負の累乗根で求めた方程式の解を複素数平面上にとると，複素数平面の原点を中心とする円周上に等間隔で並んでいる．



練習 5.7　$2^{-1.5} = 2^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \fallingdotseq 0.35,$

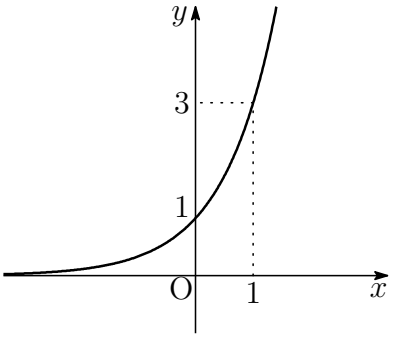
$2^{-1} = \dfrac{1}{2} = 0.5, \quad 2^0 = 1,$

$2^{0.5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$

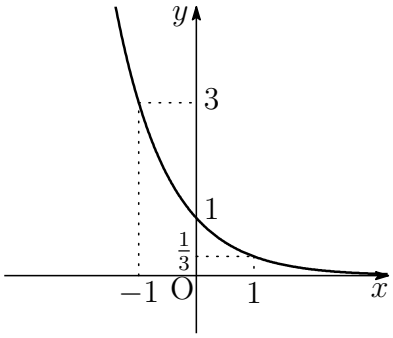
よって，表は次のようになる．

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	0.25	$\mathbf{0.35}$	$\mathbf{0.5}$	0.71	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1.41}$	2	2.83	4

練習 5.8　(1)



(2)



練習 5.9　(1)　$\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}}, \quad \sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$

指数の大小を調べると　$\dfrac{3}{5} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$

底 2 が 1 より大きいから

$$2^{\frac{3}{5}} < 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$$

すなわち　$\mathbf{\sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{8}}$

(2)　$1 = 0.2^0, \quad 0.2^3, \quad 0.2^{-1}$

指数の大小を調べると　$-1 < 0 < 3$

底 0.2 が 1 より小さいから

$$0.2^3 < 0.2^0 < 0.2^{-1}$$

すなわち　$\mathbf{0.2^3 < 1 < 0.2^{-1}}$

練習 5.10 (1) 方程式を変形すると　$2^{2x} = 2^3$

$2x = 3$ より　$\boldsymbol{x = \dfrac{3}{2}}$

(2) 方程式を変形すると　$2^{3x} = 2^{-4}$

$3x = -4$ より　$\boldsymbol{x = -\dfrac{4}{3}}$

(3) 方程式を変形すると　$3^{3x} = 3^{2-x}$

$3x = 2 - x$ より　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$

練習 5.11 (1) 不等式を変形すると　$3^x < 3^4$

底 3 が 1 より大きいから　$\boldsymbol{x < 4}$

(2) 不等式を変形すると　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

底 $\dfrac{1}{2}$ が 1 より小さいから　$\boldsymbol{x \leqq 5}$

(3) 不等式を変形すると　$2^{3x-4} > 2^{-2x}$

底 2 が 1 より大きいから　$3x - 4 > -2x$

これを解いて　$\boldsymbol{x > \dfrac{4}{5}}$

深化 5.2 不等式を変形すると　$(3^{-1})^{x+1} < (3^{-2})^x$

$3^{-x-1} < 3^{-2x}$

底 3 が 1 より大きいから　$-x - 1 < -2x$

これを解いて　$\boldsymbol{x < 1}$

練習 5.12 (1) 方程式を変形すると　　$(2^x)^2 + 2\cdot 2^x - 3 = 0$

$2^x = t$ とおくと，$t > 0$ であり，方程式は

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$
$$(t-1)(t+3) = 0$$

$t > 0$ であるから　　$t = 1$

よって　　$2^x = 1$　すなわち　$2^x = 2^0$

したがって　　$\boldsymbol{x = 0}$

(2) 方程式を変形すると　　$(3^x)^2 - 4\cdot 3^x + 3 = 0$

$3^x = t$ とおくと，$t > 0$ であり，方程式は

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$(t-1)(t-3) = 0$$

$t > 0$ であるから　　$t = 1,\ 3$

よって　$t = 1$ のとき　$3^x = 3^0$　すなわち　$x = 0$

　　$t = 3$ のとき　$3^x = 3^1$　すなわち　$x = 1$

したがって　　$\boldsymbol{x = 0,\ 1}$

練習 5.13 (1) 不等式を変形すると　　$(3^x)^2 + 3^x - 12 > 0$

$3^x = t$ とおくと，$t > 0$ であり，不等式は

$$t^2 + t - 12 > 0$$
$$(t+4)(t-3) > 0$$

$t + 4 > 0$ であるから

$t - 3 > 0$　すなわち　$t > 3$

よって　　$3^x > 3$　　すなわち　$3^x > 3^1$

底 3 は 1 より大きいから　　$\boldsymbol{x > 1}$

(2) 不等式を変形すると　　$(2^{-x})^2 + 3 \cdot 2^{-x} - 10 > 0$

$2^{-x} = t$ とおくと，$t > 0$ であり，不等式は

$$t^2 + 3t - 10 \leqq 0$$
$$(t+5)(t-2) \leqq 0$$

$t + 5 > 0$ であるから

$t - 2 \leqq 0$　すなわち　$t \leqq 2$

よって　　$2^{-x} \leqq 2$　　すなわち　$2^{-x} \leqq 2^1$

底 2 は 1 より大きいから　$-x \leqq 1$　したがって　$\boldsymbol{x \geqq -1}$

問題 5.1 $10^3 \div (3.0 \times 10^8) = \dfrac{1}{3.0} \times 10^{-5}$

$= 0.33\cdots \times 10^{-5} \fallingdotseq 3.3 \times 10^{-6}$ (秒)

よって，□ は $\mathbf{-6}$

問題 5.2 (1) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{2} = \mathbf{3\sqrt[3]{2}}$

(2) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4}\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = \mathbf{\sqrt[4]{3}}$

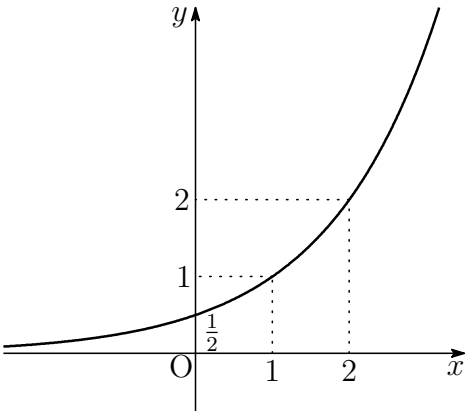
(3) $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}) = (\sqrt[4]{3})^2 - (\sqrt[4]{2})^2 = \mathbf{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

(4) $(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})\{(2^{\frac{1}{3}})^2 + 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} + (2^{-\frac{1}{3}})^2\} = (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 = 2 - 2^{-1} = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$

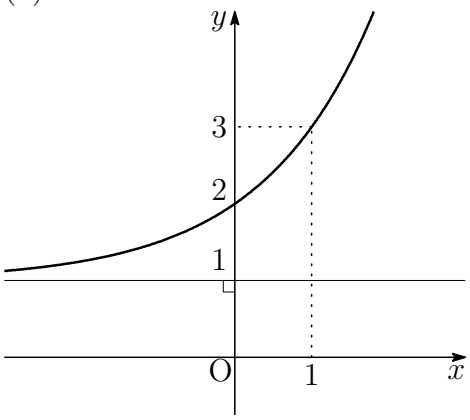
問題 5.3 (1) $y = 2^{x-1}$ のグラフは，$y = 2^x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，下の図のようになる．

(2) $y = 2^x + 1$ は，$y = 2^x$ のグラフを y 軸方向 1 だけ平行移動したものである．漸近線は直線 $y = 1$ で，下の図のようになる．

(1)



(2)



問題 5.4 (1) 方程式を変形すると　$3^{3x-1} = 3^4$

$3x-1=4$ から　$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{3}}$

(2) 方程式を変形すると　$2^{1-x} = 2^{\frac{1}{3}}$

$1-x = \dfrac{1}{3}$ から　$\boldsymbol{x = \dfrac{2}{3}}$

(3) 不等式を変形すると　$2^{2x} > 2^5$

底 2 は 1 より大きいから　$2x > 5$

これを解いて　$\boldsymbol{x > \dfrac{5}{2}}$

(4) 不等式を変形すると　$(3^{-2})^{1-x} \leqq (3^{-1})^{2x}$

$3^{-2(1-x)} \leqq 3^{-2x}$

底 3 は 1 より大きいから　$-2(1-x) \leqq -2x$

これを解いて　$\boldsymbol{x \leqq \dfrac{1}{2}}$

問題 5.5 (1) 方程式を変形すると　$2\cdot(2^x)^2 - 8\cdot 2^x - 64 = 0$

$2^x = t$ とおくと，$t > 0$ であり，方程式は

$$2t^2 - 8t - 64 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2(t+4)(t-8) = 0$$

$t+4 > 0$ であるから　$t = 8$　よって　$2^x = 2^3$

したがって　$\boldsymbol{x = 3}$

(2) 不等式を変形すると　$3\cdot(3^x)^2 - 28\cdot 3^x + 9 > 0$

$3^x = t$ とおくと，$t > 0$ であり，方程式は

$$3t^2 - 28t + 9 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (3t-1)(t-9) > 0$$

これを解くと　$t < \dfrac{1}{3},\ 9 < t$　ゆえに　$3^x < 3^{-1},\ 3^2 < 3^x$

底 3 は 1 より大きいから　$\boldsymbol{x < -1,\ 2 < x}$

問題 5.6 (1) 関数を変形すると　　$y=(2^x)^2-2\cdot 2^x+3$

$2^x=t$ より　　$\boldsymbol{y=t^2-2t+3}$

(2) $x<2$ より　$2^x<2^2$

$t=2^x>0$ に注意して　　$\boldsymbol{0<t<4}$

(3) (1)，(2) の結果から　$y=(t-1)^2+2\quad(0<t<4)$

$t=2^x$ より，$t=1$，すなわち，$\boldsymbol{x=0}$ のとき，**最小値 2** をとる．

練習 5.14 (1) $\boldsymbol{\log_3 9=2}$　(2) $\boldsymbol{\log_5 \dfrac{1}{25}=-2}$　(3) $\boldsymbol{\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{8}=3}$

練習 5.15 (1) $\boldsymbol{16=4^2}$　(2) $\boldsymbol{\dfrac{1}{100}=10^{-2}}$　(3) $\boldsymbol{3=9^{\frac{1}{2}}}$

練習 5.16 (1) $\log_2 2^5=\mathbf{5}$

(2) $\log_5 25=\log_5 5^2=\mathbf{2}$

(3) $\log_3 \dfrac{1}{27}=\log_3 3^{-3}=\mathbf{-3}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}=\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\mathbf{4}$

(5) $\log_{10} 0.1=\log_{10} \dfrac{1}{10}=\log_{10} 10^{-1}=\mathbf{-1}$

(6) $\log_{\frac{1}{3}} 3=\log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=\mathbf{-1}$

(7) $\log_2 \sqrt[3]{2}=\log_2 2^{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(8) $\log_{\sqrt{5}} 5=\log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^2=\mathbf{2}$

練習 5.17［**2 の証明**］　$\log_a M=p$，$\log_a N=q$ とすると

$M=a^p,\quad N=a^q$

よって　　$\dfrac{M}{N}=\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$

したがって　$\log_a \dfrac{M}{N}=p-q=\log_a M-\log_a N$　　証終

［**3 の証明**］　$\log_a M=p$ とすると　$M=a^p$

よって　　$M^k=(a^p)^k=a^{kp}$

したがって　$\log_a M^k=kp=k\log_a M$　　証終

練習 5.18 (1) $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2) = \log_4 16 = \log_4 4^2 = \mathbf{2}$

(2) $\log_5 2 - \log_5 50 = \log_5 \dfrac{2}{50} = \log_5 \dfrac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = \mathbf{-2}$

(3) $\log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2 = \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 2^3$

$= \log_3 \dfrac{4 \times 18}{8} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = \mathbf{2}$

(4) $\log_3 \sqrt[3]{6} - \dfrac{1}{3}\log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{6} - \log_3 2^{\frac{1}{3}} = \log_3 \sqrt[3]{6} - \log_3 \sqrt[3]{2}$

$= \log_3 \dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

別解 $\log_3 \sqrt[3]{6} - \dfrac{1}{3}\log_3 2 = \log_3 6^{\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{3}\log_3 2 = \dfrac{1}{3}\log_3 6 - \dfrac{1}{3}\log_3 2$

$= \dfrac{1}{3}(\log_3 6 - \log_3 2) = \dfrac{1}{3}\log_3 \dfrac{6}{2} = \dfrac{1}{3}\log_3 3 = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

練習 5.19 (1) $\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \dfrac{3}{2}$

(2) $\log_9 3 = \dfrac{1}{\log_3 9} = \dfrac{1}{\log_3 3^2} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

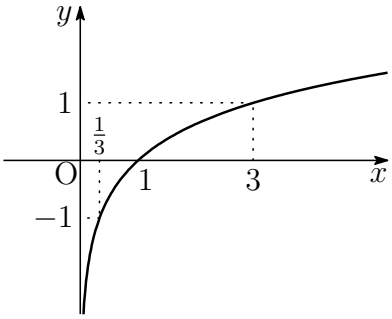
(3) $\log_3 2 \cdot \log_2 27 = \log_3 2 \times \dfrac{\log_3 27}{\log_3 2} = \log_3 27 = \log_3 3^3 = \mathbf{3}$

別解 $\log_3 2 \cdot \log_2 27 = \log_2 2 \cdot \log_3 27 = \log_3 3^3 = \mathbf{3}$

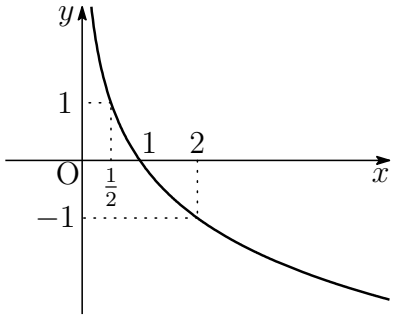
練習 5.20 (1) $y = \log_3 x$ のグラフは，y 軸を漸近線としてもち，点 $(1,\ 0)$, $(3,\ 1)$ を通る右上がりの曲線で，下の図のようになる．

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは，y 軸を漸近線としてもち，点 $(1,\ 0)$, $(\frac{1}{2},\ 1)$ を通る右下がりの曲線で，下の図のようになる．

(1)



(2)



練習 5.21 (1) $3\log_4 3 = \log_4 3^3 = \log_4 27$,
$2\log_4 5 = \log_4 5^2 = \log_4 25$

底 4 は 1 より大きいから

$$\log_4 25 < \log_4 27$$

すなわち $\quad \mathbf{2\log_4 5 < 3\log_4 3}$

(2) $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$, $\quad \log_{\frac{1}{4}} 3 = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{9}$

底 $\frac{1}{4}$ は 1 より小さいから

$$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{9} < \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$$

すなわち $\quad \mathbf{\log_{\frac{1}{4}} 3 < \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8}$

(3) $2 = \log_2 2^2 = \log_2 4$ $\qquad \leftarrow p = \log_a a^p$

底 2 は 1 より大きいから

$$\log_2 3 < \log_2 4$$

すなわち $\quad \mathbf{\log_2 3 < 2}$

練習 5.22 (1) 対数の定義から　$x = 2^4 = \mathbf{16}$

(2) 対数の定義から　$x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(3) 真数は正であるから　$x > 0$　$\cdots$①

不等式を変形すると　$\log_2 x \leqq \log_2 2^4$

すなわち　$\log_2 x \leqq \log_2 16$

底 2 は 1 より大きいから　$x \leqq 16$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\mathbf{0 < x \leqq 16}$

(4) 真数は正であるから　$x > 0$　$\cdots$①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{4}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x > \dfrac{1}{4}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{x > \dfrac{1}{4}}$

(5) 真数は正であるから　$x > 0$　$\cdots$①

不等式を変形すると　$\log_3 x > \log_3 3^2$

すなわち　$\log_3 x > \log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$x > 9$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{x > 9}$

(6) 真数は正であるから　$x > 0$　$\cdots$①

不等式を変形すると　$\log_{0.5} x \geqq \log_{0.5} 0.5^2$

すなわち　$\log_{0.5} x \geqq \log_{0.5} 0.25$

底 0.5 は 1 より小さいから　$x \leqq 0.25$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\mathbf{0 < x \leqq 0.25}$

練習 5.23 (1) 真数は正であるから　$x > 0$　かつ　$x - 6 > 0$

すなわち　$x > 6 \quad \cdots ①$

方程式を変形すると　$\log_4 x(x-6) = 2$

よって　$x(x-6) = 4^2$

式を整理すると　$x^2 - 6x - 16 = 0$

したがって　$(x+2)(x-8) = 0$

① より　$\boldsymbol{x = 8}$

(2) 真数は正であるから　$x + 5 > 0$　かつ　$x - 2 > 0$

すなわち　$x > 2 \quad \cdots ①$

方程式を変形すると　$\log_2(x+5)(x-2) = 3$

よって　$(x+5)(x-2) = 2^3$

式を整理すると　$x^2 + 3x - 18 = 0$

したがって　$(x+6)(x-3) = 0$

① より　$\boldsymbol{x = 3}$

練習 5.24 (1) 真数は正であるから　$3 - 2x > 0$　かつ　$x > 0$

すなわち　$0 < x < \dfrac{3}{2} \quad \cdots ①$

$\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leqq x$ において，底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから

$3 - 2x \geqq x$　すなわち　$x \leqq 1 \quad \cdots ②$

①, ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{0 < x \leqq 1}$

(2) 真数は正であるから　$2 - x > 0$　かつ　$x + 4 > 0$

すなわち　$-4 < x < 2 \quad \cdots ①$

不等式を変形すると　$\log_3(2-x)^2 < \log_3(x+4)$

底 3 は 1 より大きいから　$(2-x)^2 < x+4$ 式を整理すると　$x^2 - 5x < 0$

ゆえに　$x(x-5) < 0$

これを解いて　$0 < x < 5 \quad \cdots ②$

①, ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{0 < x < 2}$

深化 5.3 $\log_3 x(x-8) = 2$ より　$x(x-8) = 3^2$　← 真数は正である.

$x^2 - 8x - 9 = 0$　ゆえに　$(x+1)(x-9) = 0$

これを解いて　$\boldsymbol{x = -1,\ 9}$　(応用例題 5.2 と異なる)

練習 5.25 $\log_2 x = t$ とおく.

$\log_2 x$ の底 2 は 1 より大きいから，$1 \leqq x \leqq 16$ のとき

$$\log_2 1 \leqq \log_2 x \leqq \log_2 16$$

すなわち　　$0 \leqq t \leqq 4$　$\cdots$①

与えられた関数の式を変形すると

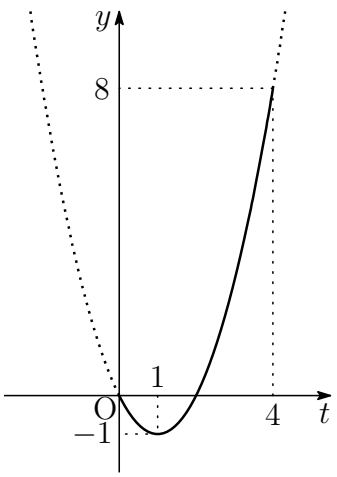
$$y = (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x$$

y を t の式で表すと

$$y = t^2 - 2t$$

すなわち

$$y = (t-1)^2 - 1$$



① の範囲において，y は

$t = 4$ で最大値 8 をとり，

$t = 1$ で最小値 -1 をとる.

また　　$t = 4$ のとき　$\log_2 x = 4$　このとき　$x = 2^4 = 16$

　　$t = 1$ のとき　$\log_2 x = 1$　このとき　$x = 2^1 = 2$

よって，この関数は

$x = 16$ で最大値 8 をとり，$x = 2$ で最小値 -1 をとる.

練習 5.26 (1) 常用対数表より　$\log_{10} 3.45 = 0.5378$

$$\begin{aligned}\log_{10} 3450 &= \log_{10}(3.45 \times 10^3)\\ &= \log_{10} 3.45 + \log_{10} 10^3\\ &= 0.5378 + 3 = \mathbf{3.5378}\end{aligned}$$

(2) 常用対数表より　$\log_{10} 9.20 = 0.9638$

$$\begin{aligned}\log_{10} 92000 &= \log_{10}(9.20 \times 10^4)\\ &= \log_{10} 9.20 + \log_{10} 10^4\\ &= 0.9638 + 4 = \mathbf{4.9638}\end{aligned}$$

(3) 常用対数表より　$\log_{10} 6.18 = 0.7910$

$$\begin{aligned}\log_{10} 0.000618 &= \log_{10}(6.18 \times 10^{-4})\\ &= \log_{10} 6.18 + \log_{10} 10^{-4}\\ &= 0.7910 - 4 = \mathbf{-3.2090}\end{aligned}$$

練習 5.27　$\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$

$30 < \log_{10} 2^{100} < 31$ であるから

$$10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

よって，2^{100} は **31 桁**の数である．

補足 一般に，自然数 N, k について，次のことがいえる．

$$\boldsymbol{N}\text{ が }\boldsymbol{k}\text{ 桁の数} \iff \boldsymbol{k-1 \leqq \log_{10} N < k}$$

練習 5.28 3^n が 8 桁の数となるのは，$10^7 \leqq 3^n < 10^8$ のときである．

常用対数をとると　$7 \leqq n \log_{10} 3 < 8$

$\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから　$\dfrac{7}{\log_{10} 3} \leqq n < \dfrac{8}{\log_{10} 3}$　$\cdots$①

$$\frac{7}{\log_{10} 3} = \frac{7}{0.4771} = 14.6\cdots, \quad \frac{8}{\log_{10} 3} = \frac{8}{0.4771} = 16.7\cdots$$

よって，不等式 ① を満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n = 15,\ 16}$

練習 5.29　$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 20\log_{10}\frac{1}{2} = -20\log_{10}2 = -6.020$

$-7 < \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} < -6$ であるから

$10^{-7} < \left(\frac{1}{2}\right)^{20} < 10^{-6}$　　$\leftarrow \log_{10}10^{-7} < \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} < \log_{10}10^{-6}$

よって，$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表したとき，**小数第 7 位に初めて 0 でない数字**が表れる．

補足　一般に，$0 < M < 1$ である小数 M と自然数 k について，次のことがいえる．

$$\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{M}\text{ の小数第 }\boldsymbol{k}\text{ 位に初めて}\\ \textbf{0 でない数字が現れる}\end{array}\right] \iff \boldsymbol{-k \leqq \log_{10} M < -k+1}$$

問題 5.7　(1) $\log_{10}\frac{3}{8} = \log_{10}3 - \log_{10}2^3$
$= \log_{10}3 - 3\log_{10}2 = \boldsymbol{b - 3a}$

(2) $\log_{10}\sqrt[3]{6} = \frac{1}{3}\log_{10}6 = \frac{1}{3}(\log_{10}2 + \log_{10}3) = \boldsymbol{\frac{1}{3}(a+b)}$

(3) $\log_2 3 = \dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2} = \boldsymbol{\dfrac{b}{a}}$

(4) $\log_{10}15 = \log_{10}5 + \log_{10}3 = \log_{10}\frac{10}{2} + \log_{10}3$
$= \log_{10}10 - \log_{10}2 + \log_{10}3 = \boldsymbol{1 - a + b}$

問題 5.8　底の変換公式より

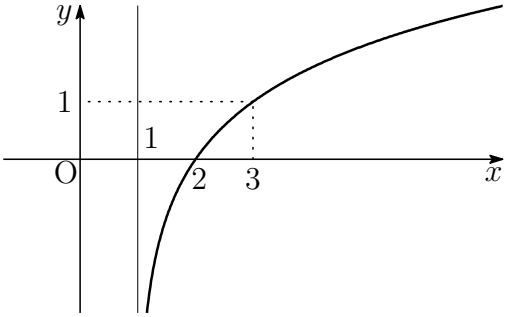
$$\text{左辺} = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} = \log_a a = 1$$

よって　$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

別解　2 つの対数の積に関する底の互換性により

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \cdot \log_c c \cdot \log_b a$$
$$= \log_a b \cdot \log_b a = \log_b b \cdot \log_a a = 1$$

問題 5.9 $y=\log_2(x-1)$ のグラフは $y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである．直線 $x=1$ を漸近線としてもち，点 $(2,\ 0)$, $(3,\ 1)$ を通る．



問題 5.10 (1) $(x+1)^2=3^2$ より　$x+1=\pm 3$　よって　$\boldsymbol{x=2,\ -4}$

(2) 真数は正であるから

$$x>0 \text{ かつ } x+7>0 \quad \text{すなわち} \quad x>0 \quad \cdots ①$$

方程式を変形すると　$\log_2 x(x+7)=3$

$$x(x+7)=2^3 \quad \text{整理すると} \quad x^2+7x-8=0$$

ゆえに　$(x+8)(x-1)=0$　① に注意して解くと　$\boldsymbol{x=1}$

(3) 不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

真数は正であり，底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$$0<x-1<\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{1<x<\frac{5}{4}}$$

(4) 真数は正であるから

$$x+1>0 \text{ かつ } x-2>0 \quad \text{すなわち} \quad x>2 \quad \cdots ①$$

不等式を変形すると　$\log_2(x+1)(x-2)<\log_2 2^2$

底 2 は 1 より大きいから　$(x+1)(x-2)<2^2$

整理すると　$x^2-x-6<0$　ゆえに　$(x+2)(x-3)<0$

これを解いて　$-2<x<3 \quad \cdots ②$

①, ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{2<x<3}$

問題 5.11 与えられた不等式から　　$2^{-n} < 10^{-4}$

両辺の常用対数をとると　$\log_{10} 2^{-n} < \log_{10} 10^{-4}$

$$-n \log_{10} 2 < -4 \quad \text{ゆえに} \quad n \log_{10} 2 > 4$$

$\log_{10} 2 = 0.3010 > 0$ であるから　$n > \dfrac{4}{0.3010} = 13.2\cdots$

よって，求める最小の自然数 n は　　$\boldsymbol{n = 14}$

問題 5.12 $\log_{10} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{10} = 10 \log_{10} \dfrac{1}{5} = 10 \log_{10} \dfrac{2}{10}$

$= 10(\log_{10} 2 - \log_{10} 10) = 10(0.3010 - 1) = -6.990$

$-7 < \log_{10} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{10} < -6$ より　　$10^{-7} < \left(\dfrac{1}{5}\right)^{10} < 10^{-6}$

よって，$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}$ を小数で表したとき，**小数第 7 位**に初めて 0 でない数字が表れる．

問題 5.13 (1) 与えられた方程式を変形すると　　$2(\log_2 x)^2 + 3 \log_2 x - 2 = 0$

$\log_2 x = t$ とおくと　　$\boldsymbol{2t^2 + 3t - 2 = 0}$

(2) (1) の結果から　$(t+2)(2t-1) = 0$　ゆえに　$t = -2,\ \dfrac{1}{2}$

$t = -2$ のとき　$\log_2 x = -2$　すなわち　$x = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

$t = \dfrac{1}{2}$ のとき　$\log_2 x = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

したがって　　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{4},\ \sqrt{2}}$

問題 5.14 各辺の常用対数をとると　$\log_{10}(3^2 \times 10^{10}) < \log_{10} 3^{23} < \log_{10} 10^{11}$

$$2 \log_{10} 3 + 10 < 23 \log_{10} 3 < 11$$

$\log_{10} 3 = x$ とおくと　$2x + 10 < 23x < 11$　これを解くと　$\dfrac{10}{21} < x < \dfrac{11}{23}$

$$\frac{10}{21} = 0.476\cdots, \quad \frac{11}{23} = 0.478\cdots$$

よって，$\log_{10} 3$ を小数第 2 位まで求めると　　$\boldsymbol{0.47}$

章末 5.1 (1) $64^{\frac{2}{3}} \times 16^{-\frac{1}{4}} = (2^6)^{\frac{2}{3}} \times (2^4)^{-\frac{1}{4}} = 2^4 \times 2^{-1} = 2^{4+(-1)} = 2^3 = \mathbf{8}$

(2) $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[6]{9} \div \sqrt[4]{27} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[6]{3^2} \div \sqrt[4]{3^3}$

$= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{6}} \div 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} = \mathbf{\sqrt[4]{3}}$

章末 5.2 (1) 不等式を変形すると　$2^{-1} \leqq 2^x \leqq 2^3$

よって　$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 3}$

(2) 不等式を変形すると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 0}$

章末 5.3 (1) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$ より　$3^{x+1} = 3^{\frac{2}{3}}$

$x+1 = \frac{2}{3}$ より　$\boldsymbol{x = -\frac{1}{3}}$

(2) 不等式を変形すると　$2^{3x} \leqq 2^{2(x+1)}$

底 2 は 1 より大きいから　$3x \leqq 2(x+1)$

これを解いて　$\boldsymbol{x \leqq 2}$

(3) 不等式を変形すると　$2^{-(x-1)} \geqq 2^{\frac{1}{2}x}$

底 2 は 1 より大きいから　$-(x-1) \geqq \frac{1}{2}x$

これを解いて　$\boldsymbol{x \leqq \frac{2}{3}}$

章末 5.4 (1) $\dfrac{1}{2}\log_5 3+3\log_5\sqrt{2}-\log_5\sqrt{24}$

$=\log_5\sqrt{3}+\log_5(\sqrt{2})^3-\log_5\sqrt{24}$

$=\log_5\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{8}}{\sqrt{24}}=\log_5 1=\mathbf{0}$

(2) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

$=\log_2 3\cdot\log_3 4+\log_2 3\cdot\log_9 2+\log_4 9\cdot\log_3 4+\log_4 9\cdot\log_9 2$

$=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 3}+\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3^2}+\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}\cdot\dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3^2}$

$=2+\dfrac{1}{2}+2+\dfrac{1}{2}=\mathbf{5}$

別解 $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

$=\left(\log_2 3+\dfrac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 2}{\log_2 9}\right)$

$=\left(\log_2 3+\dfrac{2\log_2 3}{2}\right)\left(\dfrac{2}{\log_2 3}+\dfrac{1}{2\log_2 3}\right)$

$=2\log_2 3\times\dfrac{5}{2\log_2 3}=\mathbf{5}$

章末 5.5 (1) $(x+1)(x+2)=0.5^{-1}$ より　$x^2+3x+2=2$

ゆえに　$x(x+3)=0$　よって　$\boldsymbol{x=0,-3}$

(2) 真数は正であるから

$$x-2>0 \quad \text{かつ} \quad 2x-7>0 \quad \text{すなわち} \qquad x>\frac{7}{2} \quad \cdots ①$$

方程式を変形すると　$\log_3(x-2)(2x-7)=2$

$(x-2)(2x-7)=3^2$　整理すると　$2x^2-11x+5=0$

したがって　$(2x-1)(x-5)=0$　① に注意して解くと　$\boldsymbol{x=5}$

(3) 真数は正であるから

$3-x>0$ かつ $4x>0$　すなわち　$0<x<3$　$\cdots ①$

不等式を変形すると　$\log_{0.5}(3-x)^2 \geqq \log_{0.5} 4x$

底 0.5 は 1 より小さいから　$(3-x)^2 \leqq 4x$

整理すると　$x^2-10x+9 \leqq 0$　ゆえに　$(x-1)(x-9) \leqq 0$

これを解くと　$1 \leqq x \leqq 9$　$\cdots ②$

①, ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1 \leqq x < 3}$

(4) 真数は正であるから

$x>0$ かつ $x-2>$　すなわち　$x>2 \cdots ①$

不等式を変形すると　$\log_3 x(x-2) \geqq \log_3 3$

底 3 は 1 より大きいから　$x(x-2) \geqq 3$

整理すると　$x^2-2x-3 \geqq 0$　ゆえに　$(x+1)(x-3) \geqq 0$

これを解くと　$x \leqq -1,\ 3 \leqq x$　$\cdots ②$

①, ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{x \geqq 3}$

章末 5.6　$\log_{10} 6^{20} = 20\log_{10} 6 = 20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$
$= 20(0.3010 + 0.4771) = 15.562$

$15 < \log_{10} 6^{20} < 16$ であるから　　$10^{15} < 6^{20} < 10^{16}$

よって，6^{20} は **16 桁**の数である．

章末 5.7　0.4^n が，小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れる小数となるとき

$$10^{-3} \leqq 0.4^n < 10^{-2}$$

各辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 10^{-3} \leqq \log_{10} 0.4^n < \log_{10} 10^{-2} \quad \text{ゆえに} \quad -3 \leqq n\log_{10} 0.4 < -2$$

ここで　$\log_{10} 0.4 = \log_{10} \dfrac{2^2}{10} = 2\log_{10} 2 - 1$
$= 2 \times 0.3010 - 1 = -0.398 < 0$

したがって　　$\dfrac{-3}{\log_{10} 0.4} \geqq n > \dfrac{-2}{\log_{10} 0.4}$

$$\frac{-3}{\log_{10} 0.4} = \frac{-3}{-0.398} = 7.5\cdots, \quad \frac{-2}{\log_{10} 0.4} = \frac{-2}{-0.398} = 5.02\cdots$$

よって，求める自然数 n は　$\boldsymbol{n = 6,\ 7}$

章末 5.8　ある時点から x 時間後に，菌はもとの 2^{2x} 倍に増えている．x 時間後に 10 万倍を超えるとすると

$$2^{2x} > 100000$$

両辺の常用対数をとると　　$\log_{10} 2^{2x} > \log_{10} 10^5$

$$2x\log_{10} 2 > 5$$

$2\log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020 > 0$ であるから

よって　　$x > \dfrac{5}{2\log_{10} 2} = \dfrac{5}{0.6020} = 8.3\cdots$

したがって，10 万倍を超えるのは　**9 時間後**

章末 5.9 (1) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ の両辺を平方すると　$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=3^2$

$$(x^{\frac{1}{2}})^2+2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+(x^{-\frac{1}{2}})^2=9 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x+x^{-1}=7}$$

(2) (1) の結果を平方すると　$(x+x^{-1})^2=7^2$

$$x^2+2\cdot x\cdot x^{-1}+x^{-2}=49 \quad \text{よって} \quad x^2+x^{-2}=\mathbf{47}$$

章末 5.10 (1) 関数 $y=2^{x+1}$ は増加関数である.

よって，$-3\leqq x\leqq 3$ では

$$2^{-3+1}\leqq y\leqq 2^{3+1} \quad \text{すなわち} \quad 2^{-2}\leqq y\leqq 2^4$$

したがって，値域は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\leqq y\leqq 16}$

(2) 関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{2})$ は減少関数である.

よって，$0\leqq x\leqq \sqrt{2}$ では　$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{2})\leqq y\leqq \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$

$$\log_{\frac{1}{2}}2^{\frac{3}{2}}\leqq y\leqq \log_{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\leqq y\leqq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

したがって，値域は　$\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}}$

章末 5.11 $a^p=M\Longleftrightarrow p=\log_a M$ より　$\boldsymbol{a^{\log_a M}=M}$

(1) $2^{\log_2 3}=\mathbf{3}$

別解　$x=2^{\log_2 3}$ とおき，底 2 の対数をとると　$\log_2 x=\log_2 2^{\log_2 3}$

$$\log_2 x=\log_2 3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x=3}$$

(2) $100^{\log_{10}\sqrt{2}}=10^{2\log_{10}\sqrt{2}}=10^{\log_{10}2}=\mathbf{2}$

別解　$x=100^{\log_{10}\sqrt{2}}$ とおき，常用対数をとると　$\log_{10}x=\log_{10}100^{\log_{10}\sqrt{2}}$

$$\log_{10}x=\log_{10}\sqrt{2}\cdot\log_{10}100=2\log_{10}\sqrt{2}=\log_{10}2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x=3}$$

章末 5.12 真数は正であるから

$$x-1>0 \ \text{かつ} \ 5-x>0 \quad \text{すなわち} \quad 1<x<5 \quad \cdots①$$

関数を変形すると

$$\begin{aligned} y&=\log_2(x-1)(5-x)=\log_2(-x^2+6x-5)\\ &=\log_2\{-(x-3)^2+4\}\end{aligned}$$

① より，$x=3$ のとき，最大値 $\log_2 4=\mathbf{2}$ をとる.

章末 5.13 $2^x = 5^y = 10^z$ より $(x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0)$　$2 = 10^{\frac{z}{x}}$,　$5 = 10^{\frac{z}{y}}$

上の 2 式の辺々を掛けると　$2 \times 5 = 10^{\frac{z}{x}} \times 10^{\frac{z}{y}}$

$$10 = 10^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}} \quad \text{ゆえに} \quad 1 = \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

別解 $2^x = 5^y = 10^z$ について，各辺の常用対数をとると $(x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0)$

$$x \log_{10} 2 = y \log_{10} 5 = z \quad \text{ゆえに} \quad \log_{10} 2 = \frac{z}{x},\quad \log_{10} 5 = \frac{z}{y}$$

したがって　$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{y}$

$$1 = \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

章末 5.14 $3^{\sqrt{2}} > 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{81} > \sqrt[3]{64} = 4$　よって　$\mathbf{3^{\sqrt{2}} > 4}$

別解　$\log_{10} 4 = 2 \log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$

$\log_{10} 3^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \log_{10} 3 > 1.4 \log_{10} 3 = 1.4 \times 0.4771 = 0.66794$

したがって　$\log_{10} 3^{\sqrt{2}} > \log_{10} 4$　よって　$\mathbf{3^{\sqrt{2}} > 4}$

章末 5.15 (1) 常用対数表より，$\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから

$$\log_{10} M = \log_{10} \sqrt[3]{9} = \frac{2}{3} \log_{10} 3 = \frac{2}{3} \times 0.4771 \fallingdotseq \mathbf{0.3181}$$

(2) $\log_{10} M = 0.3181$ となる M の値は，常用対数表により　$\mathbf{2.08}$

章末 5.16 $3^{20}=2^x$ とすると　　$2^n<2^x<2^{n+1}$　　$\cdots$①

$3^{20}=2^x$ の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}3^{20}=\log_{10}2^x \quad \text{ゆえに} \quad 20\log_{10}3=x\log_{10}2$$

よって　　$x=20\times\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2}=20\times\dfrac{0.4771}{0.3010}=31.7\cdots$

したがって，① より　　$n<31.7\cdots<n+1$

これを満たす自然数 n は　　$\boldsymbol{n=31}$

別解 $2^n<3^{20}<2^{n+1}$ の各辺の常用対数をとると

$$n\log_{10}2<20\log_{10}3<(n+1)\log_{10}2$$

$n\log_{10}2<20\log_{10}3$ より

$$n<\frac{20\log_{10}3}{\log_{10}2}=\frac{20\times0.4771}{0.3010}=31.7\cdots$$

$20\log_{10}3<(n+1)\log_{10}2$ より

$$n>\frac{20\log_{10}3}{\log_{10}2}-1=30.7\cdots$$

したがって，求める自然数 n は　$\boldsymbol{n=31}$

練習 6.1 (1) 求める平均変化率は

$$\frac{2b-2a}{b-a}=\frac{2(b-a)}{b-a}=\mathbf{2}$$

(2) 求める平均変化率は

$$\frac{-(2+h)^2-(-2^2)}{(2+h)-2}=\frac{-4h-h^2}{h}=\frac{-h(4+h)}{h}=\boldsymbol{-4-h}$$

練習 6.2 (1) $\lim_{x\to 2}(x^2+1)=\mathbf{5}$

(2) $\lim_{h\to 0}(6+h)=\mathbf{6}$

(3) $\lim_{h\to 0}(12-6h+h^2)=\mathbf{12}$

練習 6.3 (1) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{3(1+h)^2-3\cdot 1^2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}3(2+h)=\mathbf{6}$$

(2) $f'(-2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{3(-2+h)^2-3\cdot(-2)^2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h(-4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}3(-4+h)=\mathbf{-12}$$

(3) $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{3(a+h)^2-3a^2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h(2a+h)}{h}=\lim_{h\to 0}3(2a+h)=\boldsymbol{6a}$$

別解 (3) を先に求め，その結果に (1) は $a=1$，(2) は $a=-2$ を代入してもよい．

練習 6.4 $f(x)=x^2$ とおくと，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを m とすると

$$m=f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

(1) 点 $(1,\ 1)$ における接線の傾き m は　$m=f'(1)=2\cdot 1=\mathbf{2}$

(2) 点 $(-2,\ 4)$ における接線の傾き m は　$m=f'(-2)=2\cdot(-2)=\mathbf{-4}$

練習 6.5 (1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)-3x}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{3h}{h}=\mathbf{3}$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{h(-2x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-2x-h)=\mathbf{-2x}$

練習 6.6 (1) $y'=(x^4)'=4x^{4-1}=\mathbf{4x^3}$

(2) $y'=(x^5)'=5x^{5-1}=\mathbf{5x^4}$

練習 6.7 (1) $y'=4(x^2)'+3(x)'-(4)'$

$=4\cdot 2x+3\cdot 1-0=\mathbf{8x+3}$

(2) $y'=-3(x^2)'+(x)'-(2)'$

$=-3\cdot 2x+1-0=\mathbf{-6x+1}$

(3) $y'=4(x^3)'-2(x^2)'-5(x)'$

$=4\cdot 3x^2-2\cdot 2x-5\cdot 1=\mathbf{12x^2-4x-5}$

(4) $y'=-(x^4)'-(x)'+(3)'=\mathbf{-4x^3-1}$

(5) $y'=\dfrac{2}{3}(x^3)'+\dfrac{3}{4}(x^2)'-\dfrac{1}{2}(x)'$

$=\dfrac{2}{3}\cdot 3x^2+\dfrac{3}{4}\cdot 2x-\dfrac{1}{2}\cdot 1=\mathbf{2x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}}$

(6) $y'=-\dfrac{1}{2}(x^3)'+\dfrac{3}{2}(x^2)'+\left(\dfrac{1}{4}\right)'$

$=-\dfrac{1}{2}\cdot 3x^2+\dfrac{3}{2}\cdot 2x+0=\mathbf{-\dfrac{3}{2}x^2+3x}$

練習 6.8 (1) $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$

よって　$y=x^2+5x+6$　したがって　$\boldsymbol{y'=2x+5}$

(2) $x(x+2)(x-2)=x(x^2-4)=x^3-4x$

よって　$y=x^3-4x$　したがって　$\boldsymbol{y'=3x^2-4}$

(3) $-2x(x+1)(x-3)=-2x(x^2-2x-3)=-2x^3+4x^2+6x$

よって　$y=-2x^3+4x^2+6x$　したがって　$\boldsymbol{y'=-6x^2+8x+6}$

(4) $3(x^2-2)^2=3(x^4-4x^2+4)=3x^4-12x^2+12$

よって　$y=3x^4-12x^2+12$　したがって　$\boldsymbol{y'=12x^3-24x}$

練習 6.9 $f(x)$ を微分すると　　$f'(x) = 3x^2 - 6x$

(1) $x = 2$ における微分係数は $f'(2)$ であるから

$$f'(2) = 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2 = \mathbf{0}$$

(2) $x = 0$ における微分係数は $f'(0)$ であるから

$$f'(0) = 3\cdot 0^2 - 6\cdot 0 = \mathbf{0}$$

(3) $x = -2$ における微分係数は $f'(-2)$ であるから

$$f'(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 6\cdot(-2) = \mathbf{24}$$

練習 6.10 $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ とすると　　$f'(x) = 2ax + b$

$f'(0) = -3$ より　　$b = -3$

$f'(1) = 1$ より　　$2a + b = 1$

$f(0) = 2$ より　　$c = 2$

よって　　$a = 2,\ b = -3,\ c = 2$

したがって　　$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 3x + 2}$

練習 6.11 (1) $s' = 3(t^2)' - 4(t)' + (2)' = 3\cdot 2t - 4\cdot 1 + 0 = \mathbf{6t - 4}$

(2) $f'(t) = a(t^3)' + b(t^2)' = a\cdot 3t^2 + b\cdot 2t = \mathbf{3at^2 + 2bt}$

練習 6.12 $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{4}{3}\pi(r^3)' = \mathbf{4\pi r^2}$,　$\dfrac{dS}{dr} = 4\pi(r^2)' = 4\pi\cdot 2r = \mathbf{8\pi r}$

練習 6.13 $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ とすると

$$f(2) = 2\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = 3$$

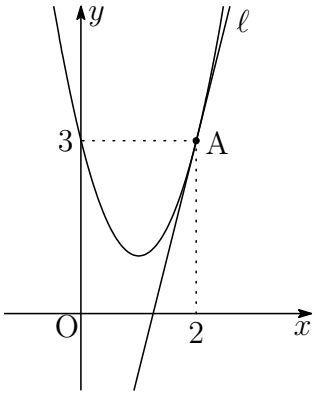
よって，点 A の座標は $(2,\ 3)$ である．
また，$f'(x) = 4x - 4$ であるから

$$f'(2) = 4\cdot 2 - 4 = 4$$

したがって，点 A における接線 ℓ の方程式は

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

すなわち　　$\boldsymbol{y = 4x - 5}$



← 点 $(2,\ 3)$ を通り，傾きが 4 の直線

深化 6.1 放物線の頂点における接線は x 軸に平行な直線で，その傾きを 0 と予想する．

$y = -x^2 + 4x$ より　$y = -(x - 2)^2 + 4$　頂点の座標は　$(2,\ 4)$

$f'(x) = -2x + 4$ より，頂点における接線の傾きは　$f'(2) = -2\cdot 2 + 4 = 0$

よって，予想は正しい．

練習 6.14 (1) $y = x^2 + 1$ を微分すると　　$y' = 2x$

接点の座標を $(a,\ a^2+1)$ とすると，接線の傾きは $2a$ となるから，
その方程式は

$$y - (a^2+1) = 2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 + 1 \quad \cdots ①$$

この直線が点 $\mathrm{C}(-1, -7)$ を通るから

$$-7 = -2a - a^2 + 1 \quad \text{整理すると} \quad a^2 + 2a - 8 = 0$$

すなわち　$(a+4)(a-2) = 0$　これを解いて　$a = -4,\ 2$

したがって，求める接線の方程式は，① より

$a = -4$ のとき　　$\boldsymbol{y = -8x - 15}$

$a = 2$ のとき　　$\boldsymbol{y = 4x - 3}$

(2) $y = x^2 - 2x + 4$ を微分すると　　$y' = 2x - 2$

接点の座標を $(a,\ a^2-2a+4)$ とすると，接線の傾きは $2a-2$ となるから，
その方程式は

$$y - (a^2 - 2a + 4) = (2a-2)(x-a)$$

すなわち　　$y = (2a-2)x - a^2 + 4 \quad \cdots ①$

この直線が原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通るから

$$0 = -a^2 + 4 \quad \text{これを解いて} \quad a = \pm 2$$

したがって，求める接線の方程式は，① より

$a = 2$ のとき　　$\boldsymbol{y = 2x}$

$a = -2$ のとき　　$\boldsymbol{y = -6x}$

補足 (1) の 2 つの接点の x 座標 $-4,\ 2$ の中央が C の x 座標 -1 である．
(2) の 2 つの接点の x 座標 $2, -2$ の中央が原点 O の x 座標である．
このことは一般に成立する．次のページの解説で証明している．

解説 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とする．放物線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ における接線を，それぞれ $\ell_1,\ \ell_2$ とすると

$$\ell_1 : y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha),\quad \ell_2 : y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$$

上の 2 式から，y を消去して整理すると

$$\{f'(\beta)-f'(\alpha)\}x=\{\beta f'(\beta)-f(\beta)\}-\{\alpha f'(\alpha)-f(\alpha)\} \qquad (*)$$

$f'(x)=2ax+b$ であるから

$$\begin{aligned} f'(\beta)-f'(\alpha)&=(2a\beta+b)-(2b\alpha+b)=2a(\beta-\alpha),\\ \beta f'(\beta)-f(\beta)&=\beta(2a\beta+b)-(a\beta^2+b\beta+c)=a\beta^2-c,\\ \alpha f'(\alpha)-f(\alpha)&=a\alpha^2-c \end{aligned}$$

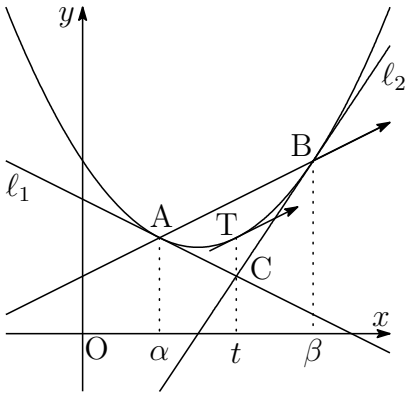
これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} 2a(\beta-\alpha)x&=(a\beta^2-c)-(a\alpha^2-c)\\ &=a(\beta^2-\alpha^2) \end{aligned}$$

$a\neq 0,\ \beta-\alpha\neq 0$ より　$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

ℓ_1 と ℓ_2 の交点 C の x 座標を t とすると

$$\boldsymbol{t=\frac{\alpha+\beta}{2}}$$



放物線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}&=\frac{(a\beta^2+b\beta+c)-(a\alpha^2+b\alpha+c)}{\beta-\alpha}\\ &=\frac{a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=a(\alpha+\beta)+b \end{aligned}$$

放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ f(t))$ における接線の傾きは

$$f'(t)=2at+b=2a\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}+b=a(\alpha+\beta)+b$$

よって，放物線 $y=f(x)$ 上の点 T おける接線と直線 AB は平行である．　終

深化 6.2 点 C$(1,\ 0)$ を通る接線の方程式は，傾きを m とすると　$y = m(x-1)$　$\cdots(*)$

これと放物線の方程式 $y = x^2+3$ から y を消去すると

$$x^2+3 = m(x-1)　\text{ゆえに}　x^2 - mx + m + 3 = 0$$

この 2 次方程式は重解をもつから，$D = (-m)^2 - 4\cdot1(m+3) = 0$ より

$$m^2 - 4m - 12 = 0　\text{ゆえに}　(m+2)(m-6) = 0$$

これを解いて　　$m = -2,\ 6$

$(*)$ より，求める接線は　$\boldsymbol{y = -2x+2,\ y = 6x-6}$

問題 6.1 (1) $\lim_{x\to1}(x+2) = \mathbf{3}$

(2) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+2) = \mathbf{3}$

問題 6.2 (1) $y = 1+x+x^2+x^3+x^4$ より

$$y' = (1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + (x^4)' = \mathbf{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}$$

(2) $y = (2x-1)(x+1) = 2x^2+x-1$ より

$$y' = 2(x^2)' + (x)' - (1)' = 2\cdot2x + 1 = \mathbf{4x+1}$$

(3) $y = (x+1)(x^2-x+1) = x^3+1$ より

$$y' = (x^3)' + (1)' = \mathbf{3x^2}$$

(4) $y = x(x-1)^2 = x(x^2-2x+1) = x^3-2x^2+x$ より

$$y' = (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' = 3x^2 - 2\cdot2x + 1 = \mathbf{3x^2 - 4x + 1}$$

問題 6.3 (1) $y = (ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$ より

$$\begin{aligned} y' &= a^2(x^2)' + 2ab(x)' + (b^2)' \\ &= a^2\cdot2x + 2ab\cdot1 = 2a^2x + 2ab = 2a(ax+b) \end{aligned}$$

(2) $y = (ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$ より

$$\begin{aligned} y' &= a^3(x^3)' + 3a^2b(x^2)' + 3ab^2(x)' + (b^3)' \\ &= 3a^3x^2 + 6a^2bx + 3ab^2 = 3a(a^2x^2 + 2abx + b^2) = 3a(ax+b)^2 \end{aligned}$$

解説 先ず

$$(s-t)(s+t),\quad (s-t)(s^2+st+t^2),\quad (s-t)(s^3+s^2t+st^2+t^3)$$

をそれぞれ展開すると

$$s^2-t^2,\quad s^3-t^3,\quad s^4-t^4$$

となる．一般に，n を自然数とすると

$$(s-t)(s^{n-1}+s^{n-2}t+s^{n-3}t^2+\cdots+st^{n-2}+t^{n-1})$$

を展開すると s^n-t^n となる．したがって

$$s^n-t^n=(s-t)(s^{n-1}+s^{n-2}t+s^{n-3}t^2+\cdots+st^{n-2}+t^{n-1})$$

が成立する．これから

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t}\frac{s^n-t^n}{s-t}&=\lim_{s\to t}(s^{n-1}+s^{n-2}t+s^{n-3}t^2+\cdots+st^{n-2}+t^{n-1})\\&=\overbrace{t^{n-1}+t^{n-1}+t^{n-1}+\cdots+t^{n-1}+t^{n-1}}^{n\text{ 個}}=nt^{n-1}\end{aligned}$$

導関数の公式

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

について，$x+h=u$ とおくと，$h\to 0$ のとき，$u\to x$ であるから

$$f'(x)=\lim_{u\to x}\frac{f(u)-f(x)}{u-x}$$

と表すことができる．$f(x)=(ax+b)^n$ のとき

$$f'(x)=\lim_{u\to x}\frac{(au+b)^n-(ax+b)^n}{u-x}$$

ここで，$s=au+b,\ t=ax+b$ とおくと　$\dfrac{s-t}{u-x}=a$

$u\to x$ のとき，$s\to t$ であるから

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{s\to t}\frac{s^n-t^n}{u-x}=\lim_{s\to t}\frac{s^n-t^n}{s-t}\cdot\frac{s-t}{u-x}\\&=nt^{n-1}\cdot a=na(ax+b)^{n-1}\end{aligned}$$

よって，$y=(ax+b)^n$ の導関数は　　$\boldsymbol{y'=na(ax+b)^{n-1}}$　　終

問題 6.4 $f(x)=ax^2+bx+c$ とすると　　$f'(x)=2ax+b$

$f'(0)=-4$ より　　$b=-4$

$f'(2)=0$ より　　$4a+b=0$

$f(0)=8$ より　　$c=8$

よって　　$a=1,\ b=-4,\ c=8$

したがって　　$\boldsymbol{f(x)=x^2-4x+8}$

問題 6.5 $f(x)=x^2-2x$ とおくと　$f'(x)=2x-2$

接点の x 座標を a とすると，$f'(a)=4$ より

$$2a-2=4 \quad \text{すなわち} \quad a=3 \quad \text{ゆえに} \quad f(3)=3^2-2\cdot 3=3$$

求める接線は，点 $(3,\ 3)$ を通り，傾き 4 の直線であるから

$$y-3=4(x-3) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y=4x-9}$$

問題 6.6 $y=x^3+2$ を微分すると　$y'=3x^2$

接点の座標を $(a,\ a^3+2)$ とすると，接線の傾きは $3a^2$ で，その方程式は

$$y-(a^3+2)=3a^2(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y=3a^2x-2a^3+2\cdots ①$$

この接線が点 $\mathrm{C}(1,\ 2)$ を通るから

$$2=3a^2\cdot 1-2a^3+2 \quad \text{整理すると} \quad 2a^3-3a^2=0$$

したがって　$a^2(2a-3)=0$　これを解くと　$a=0,\ \dfrac{3}{2}$

接線の方程式は，① より

$a=0$ のとき　$y=2$

$a=\dfrac{3}{2}$ のとき　$y=\dfrac{27}{4}x-\dfrac{19}{4}$

よって　　$\boldsymbol{y=2,\ \ y=\dfrac{27}{4}x-\dfrac{19}{4}}$

問題 6.7 (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ より，$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ であるから

$$g(x) = 3x^3 - 6x + 5 = 3(x-1)^2 + 2$$

よって，求める最小値は　$g(1) = \mathbf{2}$

(2) (1) の結果から，$f(x)$ のグラフの接線の傾きが最小となる接点の座標は

$$(1,\ f(1)) \quad \text{すなわち} \quad (1,\ 3)$$

よって，求める接線の方程式は

$$y - 3 = 2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2x + 1}$$

練習 6.15 (1) $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ 4$

$f(x)$ の増減は，次の増減表で表される．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

したがって，関数 $f(x)$ は

$$\boldsymbol{x \leqq 0,\ 4 \leqq x}\ \textbf{で増加し，}\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 4}\ \textbf{で減少する．}$$

(2) $f'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x+1)$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = -1,\ 0$

$f(x)$ の増減は，次の増減表で表される．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘

したがって，関数 $f(x)$ は

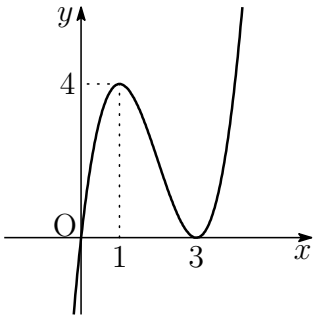
$$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 0}\ \textbf{で増加し，}\boldsymbol{x \leqq -1,\ 0 \leqq x}\ \textbf{で減少する．}$$

練習 6.16 (1) $y' = 3x^2 - 12x + 9$
$= 3(x-1)(x-3)$
$y' = 0$ とすると　$x = 1,\ 3$
y の増減表は，右のようになる．
したがって，この関数は

$x = 1$ で極大値 4
$x = 3$ で極小値 0

をとる．
また，グラフは右の図のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

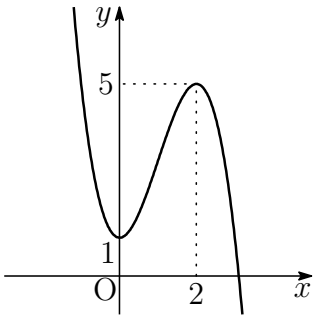


(2) $y' = -3x^2 + 6x$
$= -3x(x-2)$
$y' = 0$ とすると　$x = 0,\ 2$
y の増減表は，右のようになる．
したがって，この関数は

$x = 0$ で極小値 1
$x = 2$ で極大値 5

をとる．
また，グラフは右の図のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 1	↗	極大 5	↘



練習 6.17 (1) $f'(x) = -3x^2$
$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0$
$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↘

よって，$f(x)$ は常に減少し，極値をもたない．

(2) $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$
よって，$f(x)$ は常に増加し，極値をもたない．

補足 $f'(a) = 0$ は $f(a)$ が極値であるための必要条件である．

練習 6.18 (1) $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$ より

$$y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) = 12x(x+2)(x-1)$$

$y' = 0$ とすると　　$x = -2,\ 0,\ 1$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 -27	↗	極大 5	↘	極小 0	↗

よって，この関数は

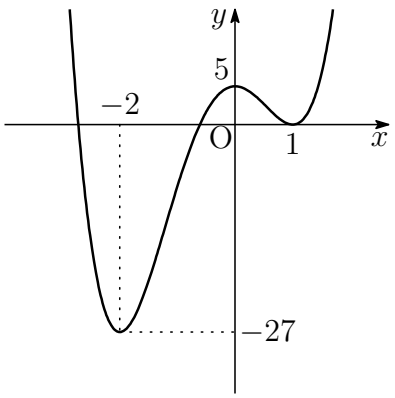
$x = -2$ で極小値 -27,

$x = 0$ で極大値 5,

$x = 1$ で極小値 0

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



(2) $y = x^4 - 8x^2 + 2$ より

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2)$$

$y' = 0$ とすると　　$x = -2,\ 0,\ 2$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 -14	↗	極大 2	↘	極小 -14	↗

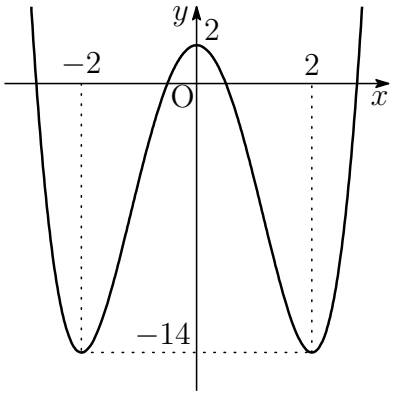
よって，この関数は

$x = 0$ で極大値 2,

$x = \pm 2$ で極小値 -14

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



(3) $y = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$ より

$$y' = -4x^3 + 12x^2 - 8x = -4x(x^2 - 3x + 2) = -4x(x-1)(x-2)$$

$y' = 0$ とすると　　$x = 0,\ 1,\ 2$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	極大 0	↘	極小 -1	↗	極大 0	↘

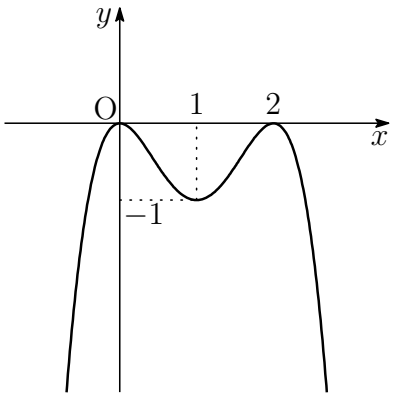
よって，この関数は

$x = 0$，2 で極大値 0,

$x = 1$ で極小値 -1

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



(4) $y = x^4 - 4x^3 + 12$ より

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

$y' = 0$ とすると　　$x = 0,\ 3$

y の増減表は次のようになる．

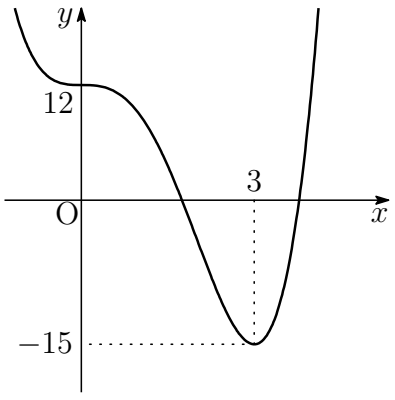
x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	12	↘	極小 -15	↗

よって，この関数は

$x = 3$ で極小値 -15

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



練習 6.19 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$ を微分すると　　$f'(x)=3x^2+2ax-9$

$f(x)$ が $x=-1$ で極大値 8 をとるとき　$f'(-1)=0,\quad f(-1)=8$

よって　　$3-2a-9=0,\quad -1+a+9+b=8$

これを解くと　　$a=-3,\ b=3$

逆に，$a=-3$，$b=3$ のとき $f(x)$ が $x=-1$ で極大値 8 をとることを示す．

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+3,\quad f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

したがって，右の増減表が得られ，
$f(x)$ は $x=-1$ で極大値 8 をとり，
条件を満たす．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 8	↘	極小 -24	↗

(答) $\boldsymbol{a=-3,\ b=3,}$
$\boldsymbol{x=3}$ **で極小値** $\boldsymbol{-24}$ **をとる．**

練習 6.20 (1) $y=x^3+3x^2\quad(-3\leqq x\leqq 2)$ より

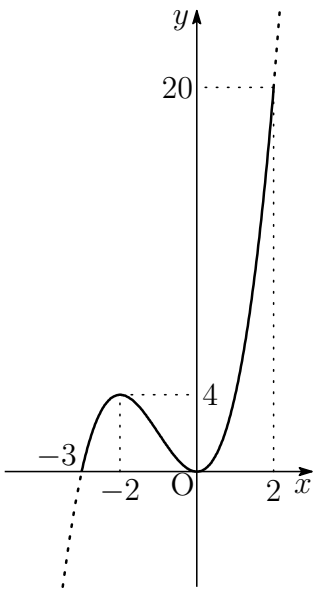
$$y'=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$y'=0$ とすると　　$x=-2,\ 0$

y の増減表は，次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗	20

よって，この関数は
$\boldsymbol{x=2}$ **で最大値** $\boldsymbol{20}$ **をとり，**
$\boldsymbol{x=-3,\ 0}$ **で最小値** $\boldsymbol{0}$ **をとる．**



(2) $y=-x^3+x^2+x \quad (0 \leqq x \leqq 2)$ より

$$y'=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$$

$y'=0$ とすると　　$x=-\dfrac{1}{3},\ 1$

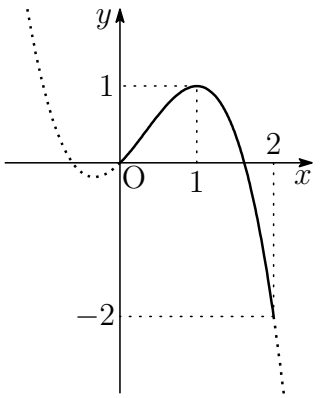
y の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大 1	↘	-2

よって，この関数は

$x=1$ で最大値 1 をとり，

$x=2$ で最小値 -2 をとる．



(3) $y=x^4-2x^3+3 \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$ より

$$y'=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ \dfrac{3}{2}$

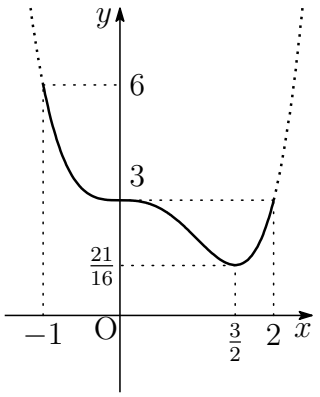
y の増減表は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	6	↘	3	↘	極小 $\frac{21}{16}$	↗	3

よって，この関数は

$x=-1$ で最大値 6 をとり，

$x=\dfrac{3}{2}$ で最小値 $\dfrac{21}{16}$ をとる．



深化 6.3　① 関数の式を変形すると　$y=(x-2)^2-1$

よって，この関数は **$x=2$ で最小値 -1** をとる．

② $y'=2x-4$

$y'=0$ とすると　$x=2$

y の増減表は，右のようになる．

よって，この関数は

$x=2$ で最小値 -1 をとる．

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小 -1	↗

練習 6.21 切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm，箱の容積を y cm^3 とする．

$x > 0$，$10 - 2x > 0$，$16 - 2x > 0$ より

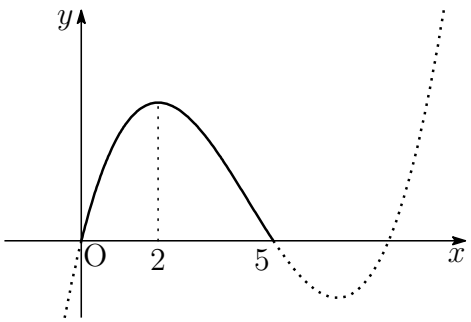
$$0 < x < 5 \qquad \cdots ①$$

このとき $\quad y = x(10 - 2x)(16 - 2x)$

$$= 4(x^3 - 13x^2 + 40x)$$

$$y' = 4(3x^2 - 26x + 40)$$

$$= 4(x - 2)(3x - 20)$$



① の範囲において，y の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大	↘	

したがって，y は $x = 2$ で最大になる．　　(答) **2cm**

補足 グラフは参考までに図示したものである．

練習 6.22 (1) 関数 $y = 2x^3 - 6x + 3$ について

$$y' = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$$
$$= 6(x+1)(x-1)$$

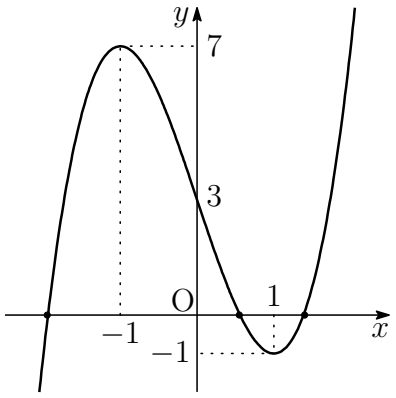
$y' = 0$ とすると

$$x = -1,\ 1$$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 7	↘	極小 -1	↗

よって，関数 $y = 2x^3 - 6x + 3$ のグラフは，右の図のようになり，グラフと x 軸は異なる 3 点で交わる．



したがって，方程式 $2x^3 - 6x + 3 = 0$ の異なる実数解の個数は，**3 個**である．

(2) 関数 $y = x^3 + 3x^2 + 2$ について

$$y' = 3x^2 + 6x$$
$$= 3x(x+2)$$

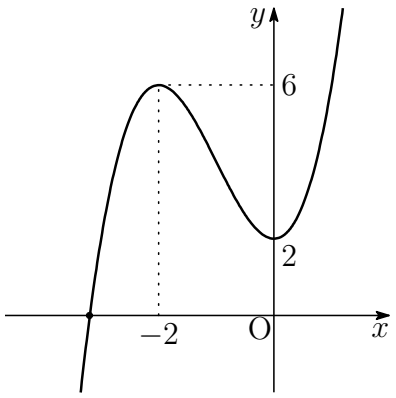
$y' = 0$ とすると

$$x = -2,\ 0$$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 6	↘	極小 2	↗

よって，関数 $y = x^3 + 3x^2 + 2$ のグラフは，右の図のようになり，グラフと x 軸は 1 点で交わる．



したがって，方程式 $x^3 + 3x^2 + 2 = 0$ の異なる実数解の個数は，**1 個**である．

(3) 関数 $y=-x^3+3x^2-4$ について

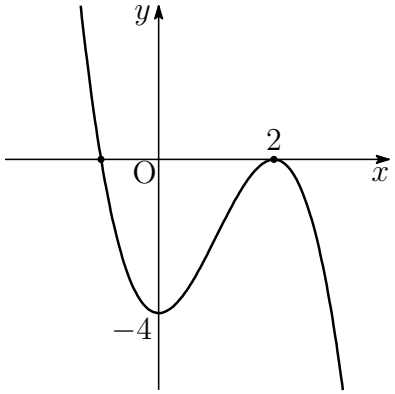
$$\begin{aligned} y' &= -3x^2+6x \\ &= -3x(x-2) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 -4	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$

$y'=0$ とすると

$$x=0,\ 2$$

y の増減表は右のようになる．
よって，関数 $y=-x^3+3x^2-4$ のグラフは，右の図のようになり，グラフと x 軸は 2 点を共有する．
したがって，方程式 $-x^3+3x^2-4=0$ の異なる実数解の個数は，**2 個**である．



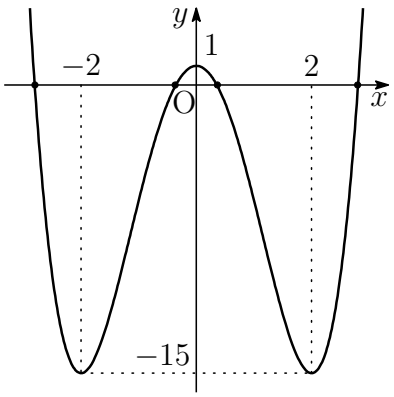
(4) 関数 $y=x^4-8x^2+1$ について

$$y' = 4x^3-16x = 4x(x^2-4) = 4x(x+2)(x-2)$$

$y'=0$ とすると　　$x=-2,\ 0,\ 2$
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	極小 -15	$\nearrow$	極大 1	$\searrow$	極小 -15	$\nearrow$

よって，関数 $y=x^4-8x^2+1$ のグラフは，右の図のようになり，グラフと x 軸は 4 点で交わる．
したがって，方程式 $x^4-8x^2+1=0$ の異なる実数解の個数は，**4 個**である．



別解 方程式 $x^4-8x^2+1=0$ について，$x^2=t$ とおくと

$$t^2-8t+1=0 \quad \text{これを解くと} \quad t=4\pm\sqrt{15}$$

$4\pm\sqrt{15}$ はともに正であるから　$x=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{15}}$　(複号任意)
よって，実数解の個数は　**4 個**

練習 6.23 与えられた方程式を変形すると　　$2x^3 - 3x^2 = a$

この方程式の異なる実数解の個数は，関数　$y = 2x^3 - 3x^2$　$\cdots$①

のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数に等しい．

関数 ① について

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$y' = 0$ とすると　　$x = 0,\ 1$

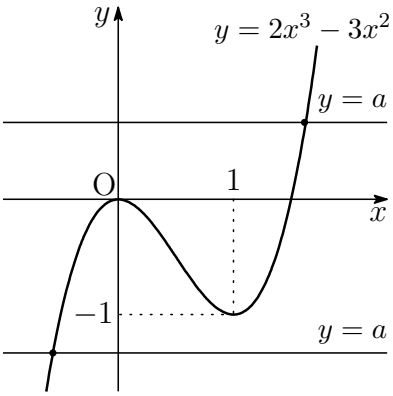
y の増減表は，右のようになる．

よって，$y = 2x^3 - 3x^2$ のグラフは，右の図のようになる．

求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y = a$ が 1 個の共有点をもつ範囲であるから

$$\boldsymbol{a < -1,\ 0 < a}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -1	↗

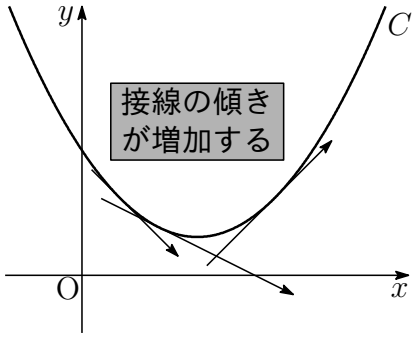


3 次方程式の実数解の個数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は x の関数である．この関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，さらに微分して得られる導関数を，関数 $y=f(x)$ の**第 2 次導関数**といい，$\boldsymbol{y''}$，$\boldsymbol{f''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)}$ などの記号で表す．さらに，$f''(x)$ の導関数を $y=f(x)$ の**第 3 次導関数**といい，$\boldsymbol{y'''}$，$\boldsymbol{f'''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3y}{dx^3}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)}$ などの記号で表す．

関数 $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ の正負が何を表すか調べてみよう．

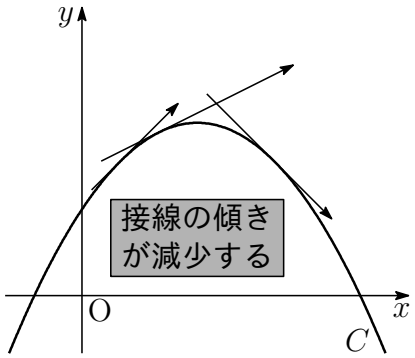
関数 $y=f(x)$ のグラフを C とする．$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数であるから，$f'(x)$ の値の増減は $f''(x)$ の符号で調べることができる．また，$f'(x)$ の値の増減は，接線の傾きの増減を表す．



よって，次のことがいえる．

$f''(x)>0$ である区間では，$f'(x)$ の値は増加する．すなわち，曲線 C の接線の傾きが増加する．

$f''(x)<0$ である区間では，$f'(x)$ の値は減少する．すなわち，曲線 C の接線の傾きが減少する．



一般に，ある区間で，x の値が増加すると曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが増加するとき，曲線はこの区間で**下に凸**であるという．また，接線の傾きが減少するとき，曲線はこの区間で**上に凸**であるという．

上で調べたことをまとめると，次のことがいえる．

$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

1　$f''(x)>0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸である．

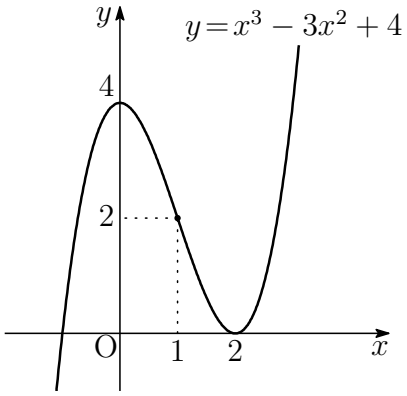
2　$f''(x)<0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は上に凸である．

例 1 曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ の凹凸

$$y' = 3x^2 - 6x$$
$$y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$$

y'' の符号により，この曲線の凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	2	下に凸



［終］

例 1 の曲線では，点 $(1,\ 2)$ を境目として曲線の凹凸が入れ替わる．このように，曲線の凹凸が入れ替わる境目の点を**変曲点**という．

とくに 3 次関数のグラフには変曲点がただ 1 つ存在し，変曲点に関して 3 次関数のグラフは対称である (後で証明)．

変曲点について，次のことが成り立つ．

曲線 $y = f(x)$ の変曲点

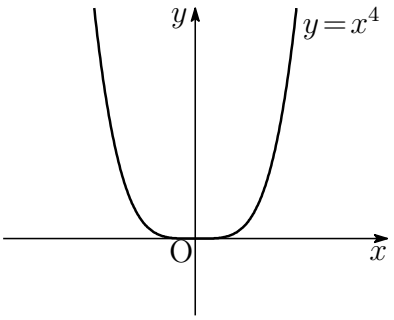
$f''(a) = 0$ のとき，$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，
点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y = f(x)$ の変曲点である．

点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点ならば $f''(a) = 0$ である．
しかし，$f''(a) = 0$ でも，点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点であるとは限らない．

例 2 $f(x) = x^4$ を考える．$f'(x) = 4x^3$，$f''(x) = 12x^2$ より，曲線 $y = f(x)$ の凹凸は，下の表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	下に凸	2	下に凸

よって，$f''(0) = 0$ でも，原点 $(0,\ 0)$ はこの曲線の変曲点ではない．



定理 1 2 次関数 $f(x)$ の x^2 の係数が a であるとき，$x=k$ を極として展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^2 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明 $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$ より

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^2+bk+c+(2ak+b)(x-k)+a(x-k)^2 \\ &= ax^2+bx+c=f(x) \end{aligned}$$

証終

例えば，定理 1 において，$f'(k)=0$ のとき，$k=-\dfrac{b}{2a}$ であるから

$$f(k)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

このとき，$f(x)$ は平方完成の式となる．

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

定理 2 3 次関数 $f(x)$ の x^3 の係数が a であるとき，$x=k$ を極として展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2}f''(k)(x-k)^2+a(x-k)^3 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c, \quad f''(x)=6ax+2b$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^3+bk^2+ck+d+(3ak^2+2bk+c)(x-k) \\ &\quad +\frac{1}{2}(6ak+2b)(x-k)^2+a(x-k)^3 \\ &= ax^3+bx^2+cx+d=f(x) \end{aligned}$$

証終

n 次多項式についても数学 III で学習する部分積分法を使って証明できる [4] ．

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

定理 3 3次関数 $C : y = f(x)$ のグラフは変曲点 $\mathrm{M}(k,\ f(k))$ に関して対称である．

証明 変曲点を $\mathrm{M}(k,\ f(k))$ とすると，$f''(k) = 0$ であるから

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x-k) + a(x-k)^3 \quad (a \text{ は } f(x) \text{ の } x^3 \text{の係数}) \tag{6.1}$$

C 上の2点 $\mathrm{A}(k+t,\ f(k+t))$，$\mathrm{B}(k-t,\ f(k-t))$ について (t は任意の定数)

$$\begin{aligned}(k+t) + (k-t) &= 2k,\\ f(k+t) + f(k-t) &= \{f(k) + f'(k)t + at^3\} + \{f(k) - f'(k)t - at^3\}\\ &= 2f(k)\end{aligned}$$

したがって，A，B の中点は変曲点 M である．よって，C は変曲点 M に関して対称である． **証終**

補足 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のとき，$f''(x) = 6ax + 2b$ より $\quad k = -\dfrac{b}{3a}$ $\qquad$ 終

次に，3次関数 $f(x)$ の増減を (6.1) を利用して調べてみる．$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = f'(k) + 3a(x-k)^2 \tag{6.2}$$

(i) $f'(k) = 0$ または $f'(k)$ が a と同符号であるとき ($f(x)$ は極値をもたない)

$f(x)$ は単調増加または単調減少であるから，このとき，3次方程式 $f(x) = 0$ の実数解は1個である．

(ii) $f'(k)$ が a と異符号であるとき ($f(x)$ は極大値と極小値をもつ)

$$f'(k) = -3as^2 \tag{6.3}$$

とおくと ($s > 0$)，(6.1)，(6.2) は

$$\begin{aligned}f(x) &= f(k) - 3as^2(x-k) + a(x-k)^3 \qquad (6.4)\\ f'(x) &= -3as^2 + 3a(x-k)^2 = 3a(x-k+s)(x-k-s)\end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると，$x = k \pm s$ であるから，$f(x)$ の極値は

$$f(k+s) = f(k) - 2as^3, \quad f(k-s) = f(k) + 2as^3 \tag{6.5}$$

上の2式および (6.3) より

$$\begin{aligned}f(k+s)f(k-s) &= f(k)^2 - 4a^2s^6 = g(k)^2 - 4a^2\left\{-\frac{f'(k)}{3a}\right\}^3\\ &= f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a}\end{aligned}$$

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数について

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}>0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 1 個}$$

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}=0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 2 個}$$

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}<0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 3 個}$$

(i)，(ii) より，3 次方程式の実数解の個数について，次の定理が成立する．

3 次方程式の実数解の個数

定理 4 3 次方程式 $f(x)=0$ の x^3 の係数を a，$f''(x)=0$ の解を k とすると

$$f'(k)=0 \quad \text{または} \quad f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}>0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 1 個}$$

$$f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}=0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 2 個}$$

$$f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}<0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 3 個}$$

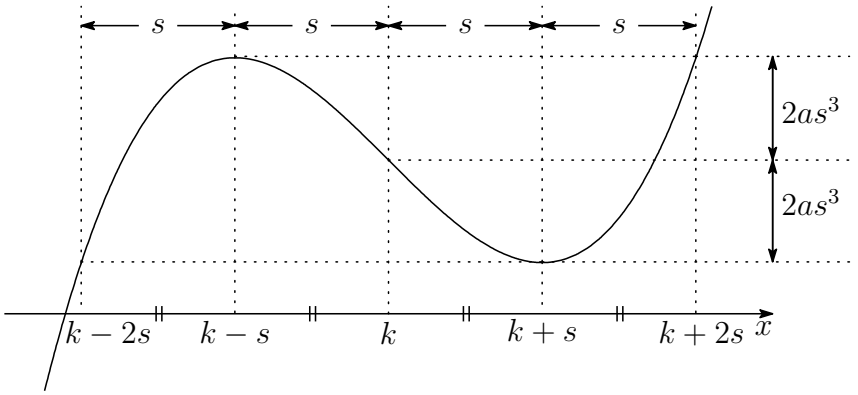
また，(6.4) に $x=k-2s,\ k+2s$ を代入すると

$$f(k-2s)=f(k)-2as^3,\quad f(k+2s)=f(k)+2as^3$$

したがって，上の 2 式と (6.5) より，次が成立する．

$$f(k-2s)=f(k+s),\quad f(k+2s)=f(k-s)$$

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ について，グラフの概形は次のようになる．
$(k,\ f(k))$ は変曲点，$f(k-s)$ は極大値，$f(k+s)$ は極小値である．



s は (6.3) より　　$s=\sqrt{-\dfrac{f'(k)}{3a}}$

終

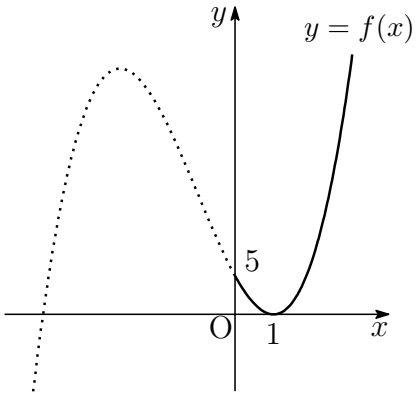
練習 6.24 $f(x)=(x^3+3x^2+5)-9x$ とすると

$$f'(x)=3x^2+6x-9 \quad =3(x-1)(x+3)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-3,\ 1$

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	5	↘	極小 0	↗



よって，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は $x=1$ で最小値 0 をとるから

$$f(x) \geqq 0$$

すなわち　$(x^3+3x^2+5)-9x \geqq 0$

したがって，$x \geqq 0$ のとき

$$x^3+3x^2+5 \geqq 9x$$

証終

別解 $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ について，$f(1)=0$ であるから，$f(x)$ が $x-1$ を因数にもつことに注意して，$f(x)$ を因数分解すると

$$f(x)=(x-1)(x^2+4x-5)=(x-1)^2(x+5)$$

$x \geqq 0$ のとき，$x+5>0$，$(x-1)^2 \geqq 0$ であるから　$f(x) \geqq 0$　(以下同様) 終

問題 6.8 (1) $y' = 3x^2 - 6 = 3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$y' = 0$ とすると　$x = -\sqrt{2},\ \sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

$x = -\sqrt{2}$ のとき

$y = (-\sqrt{2})^3 - 6\cdot(-\sqrt{2}) + 2 = 2 + 4\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2}$ のとき

$y = (\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} + 2 = 2 - 4\sqrt{2}$

$x = -\sqrt{2}$ で**極大値 $\mathbf{2+4\sqrt{2}}$**，$x = \sqrt{2}$ で**極小値 $\mathbf{2-4\sqrt{2}}$**

(2) $y = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

$y' = -3 + 6x - 3x^2 = -3(x-1)^2 \leqq 0$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	↘	0	↘

よって，この関数は常に減少するから，**極値はない.**

補足 275 ページの問題 6.3 の微分の公式を用いて微分してもよい.

$y = (1-x)^3$ より　$y' = 3(-1)(1-x)^2 = -3(x-1)^2$

(3) $y' = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3)$

$y' = 0$ とすると　$x = -\dfrac{3}{2},\ 0$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘	極小 $-\frac{11}{16}$	↗	1	↗

よって，$x = -\dfrac{3}{2}$ で**極小値 $\mathbf{-\dfrac{11}{16}}$**

問題 6.9　　$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f(x)$ が $x = -3$ で極大値をとるとき

$f'(-3) = 0$　$\cdots$①

また，$x = 1$ で極小値 -12 をとるとき

$f'(1) = 0$，$f(1) = -12$　$\cdots$②

①，② より　$27 - 6a + b = 0$，$3 + 2a + b = 0$，$1 + a + b + c = -12$

これを解くと　$a = 3$，$b = -9$，$c = -7$

このとき　$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって　$\boldsymbol{a = 3}$，$\boldsymbol{b = -9}$，$\boldsymbol{c = -7}$

補足　$x = -3,\ 1$ は方程式 $f'(x) = 0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$-3 + 1 = -\frac{2a}{3},\quad -3 \cdot 1 = \frac{b}{3}\quad \text{ゆえに}\quad a = 3,\ \ b = -9$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ となり，これが $f(1) = -12$ を満たすから

$$1 + 3 - 9 + c = -12\quad \text{ゆえに}\quad c = -7$$

問題 6.10 (1) 直円柱の高さは $(18-2x)$ cm である．

$x>0$，$18-2x>0$ から　$0<x<9$　$\cdots$①

このとき　　$V=\pi x^2\times(18-2x)$

よって　　$\boldsymbol{V=\pi x^2(18-2x)}$　$\boldsymbol{(0<x<9)}$

(2) $V=-2\pi x^3+18\pi x^2$ より

$V'=-6\pi x^2+36\pi x=-6\pi x(x-6)$

① の範囲において，V の増減表は

x	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

したがって，V は $x=6$ で最大となる．

このとき，円柱の高さは　$18-2\cdot6=\mathbf{6}$ (cm)

別解 $V=\pi x^2(18-2x)$ $(0<x<9)$ より，$x>0$, $18-2x>0$ であるから，

3 正数 x, x, $18-2x$ の相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{x+x+(18-2x)}{3}\geqq\sqrt[3]{xx(18-2x)}\quad\text{ゆえに}\quad\sqrt[3]{x^2(18-2x)}\leqq6$$

上の第 2 式の両辺を 3 乗すると

$$x^2(18-2x)\leqq216\quad\text{ゆえに}\quad V=\pi x^2(18-2x)\leqq216\pi$$

V が最大となる，すなわち，上式で等号が成立するのは

$$x=18-2x\quad\text{これを解いて}\quad x=6\ (\text{cm})$$

問題 6.11 与えられた方程式を変形すると　　$-x^3+6x^2=a$

この方程式の実数解の個数は，関数　$y=-x^3+6x^2$　$\cdots$①

のグラフと直線 $y=a$ の共有点の x 座標に等しい．

関数 ① について

$$y'=-3x^2+12x=-3x(x-4)$$

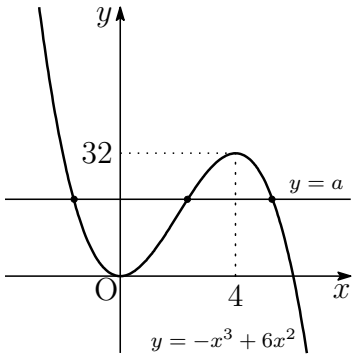
$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 4$

y の増減表は，右のようになる．

よって，$y=-x^3+6x^2$ のグラフは，右の図のようになる．

求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が $x>0$ で 2 個の共有点，$x<0$ で 1 個の共有点をもつ範囲であるから

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 0	↗	極大 32	↘



$$\boldsymbol{0<a<32}$$

問題 6.12 $f(x)=x^3-ax^2+(1-2a)x+4$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2-2ax+(1-2a)$$

$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことが必要十分条件であるから

$$D/4=(-a)^2-3(1-2a)=a^2+6a-3>0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a<-3-2\sqrt{3},\ -3+2\sqrt{3}<a}$

別解　$f''(x)=6x-2a=0$ を解くと　　$x=\dfrac{a}{3}$

$y=f(x)$ の 3 次の係数が正であるから，変曲点での接線の傾きが負である．

$$f'\left(\frac{a}{3}\right)=3\left(\frac{a}{3}\right)^2-2a\left(\frac{a}{3}\right)+1-2a=-\frac{a^2}{3}-2a+1<0$$

したがって　$a^2+6a-3>0$　よって　$\boldsymbol{a<-3-2\sqrt{3},\ -3+2\sqrt{3}<a}$

問題 6.13 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を微分すると

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$x = \alpha$ で極大，$x = \beta$ で極小とすると，グラフの概形から　$\alpha > 0,\ \beta > 0$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

y' は 2 次関数で，上の増減表から，a の符号は　　$\boldsymbol{a > 0}$

$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式 $y' = 0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{3a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{3a}$$

$\alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$ であるから，$a > 0$ に注意して

$$-\frac{2b}{3a} > 0, \quad \frac{c}{3a} > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b < 0,\ c > 0}$$

$x = 0$ のとき，$y = d$ で，グラフの概形から　　$\boldsymbol{d > 0}$

別解 $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ より，$x = 0$ のとき，$y' = c$

$x = 0$ における接線の傾きは正であるから　$\boldsymbol{c > 0}$

$y'' = 6ax + 2b$ より，$y'' = 0$ とすると　$x = -\dfrac{b}{3a}$

変曲点の x 座標 $-\dfrac{b}{3a}$ は，グラフより正であるから，$a > 0$ に注意して

$$-\frac{b}{3a} > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b < 0}$$

練習 6.25 $(6x)' = 6$，$(x^3)' = 3x^2$，$(x^3 + 2x)' = 3x^2 + 2$，$(x^3 - 4)' = 3x^2$

よって，$3x^2$ の原始関数であるものは　　②，④

練習 6.26 n を 0 または正の整数とし，$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ とすると

$$F'(x) = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^n = x^n$$

→ p.271 研究を参照

よって，$F(x)$ は x^n の原始関数の 1 つである．

したがって　　$\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$　(C は積分定数)　　**証終**

また，上式に $n = 3$ を代入すると　　$\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$　　(C は積分定数)

練習 6.27 (1) $\displaystyle\int 5x^2\,dx = 5\cdot\frac{1}{3}x^3 + C = \boldsymbol{\frac{5}{3}x^3 + C}$

(2) $\displaystyle\int (x^2 + x - 1)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C}$

(3) $\displaystyle\int (x^3 - 6x^2 - 2x + 5)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - 6\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 5x + C$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + C}$

(4) $\displaystyle\int (-2x^2 - x + 7)\,dx = -2\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + C$

$\displaystyle = \boldsymbol{-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + C}$

練習 6.28 (1) $\displaystyle\int (t+2)(3t-1)\,dt = \int (3t^2 + 5t - 2)\,dt$

$\displaystyle = 3\cdot\frac{t^3}{3} + 5\cdot\frac{t^2}{2} - 2t + C = \boldsymbol{t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 2t + C}$

(2) $\displaystyle\int 3(t-1)^2\,dt = \int (3t^2 - 6t + 3)\,dt$

$\displaystyle = 3\cdot\frac{t^3}{3} - 6\cdot\frac{t^2}{2} + 3t + C = \boldsymbol{t^3 - 3t^2 + 3t + C}$

補足 問題 6.3 の解答の解説にある微分公式

$$y = (ax+b)^n \text{ のとき} \qquad \boldsymbol{y' = na(ax+b)^{n-1}}$$

を利用して，関数 $F(x) = \dfrac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}$ を微分すると

$$F'(x) = \frac{1}{(n+1)a}\cdot(n+1)a(ax+b)^n = (ax+b)^n$$

これから，$F(x)$ が $(ax+b)^n$ の原始関数の 1 つであるから，次が成立する．

$$\boldsymbol{\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1} + C}$$

この積分公式を利用すると

$$\int 3(t-1)^2\,dt = 3\cdot\frac{1}{3}(t-1)^3 + C = \boldsymbol{(t-1)^3 + C}$$

注意 上式を展開すると，$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 + C$ となるが，不定積分では定数の違いは同じ原始関数とみなすので，$t^3 - 3t^2 + 3t + C$ も $(t-1)^3 + C$ のどちらとも正解である．

練習 6.29　［1］から　　$F(x)=\displaystyle\int(3x^2-4)\,dx$

$$=x^3-4x+C$$

よって　　$F(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)+C=3+C$

［2］から，$3+C=5$ であるから

$$C=2$$

したがって　　$\boldsymbol{F(x)=x^3-4x+2}$

練習 6.30　(1) $\displaystyle\int_1^3 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3=\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}=\frac{9-1}{2}=\mathbf{4}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2=\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}=\frac{8-(-1)}{3}=\mathbf{3}$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^1=\frac{1^4}{4}-\frac{(-2)^4}{4}=\frac{1-16}{4}=\mathbf{-\frac{15}{4}}$

(4) $\displaystyle\int_3^0 2\,dx=\Big[2x\Big]_3^0=2\cdot0-2\cdot3=\mathbf{-6}$

練習 6.31　(1) $\displaystyle\int_0^2(x^2+4x-5)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2-5x\right]_0^2$

$$=\left(\frac{2^3}{3}+2\cdot2^2-5\cdot2\right)-0=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(2) $\displaystyle\int_2^3(x-2)(x-3)\,dx=\int_2^3(x^2-5x+6)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x\right]_2^3$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-\frac{5}{2}\cdot3^2+6\cdot3\right)-\left(\frac{2^3}{3}-\frac{5}{2}\cdot2^2+6\cdot2\right)=\mathbf{-\frac{1}{6}}$$

別解　$\displaystyle\int_2^3(x-2)(x-3)\,dx=\int_2^3(x-2)\{(x-2)-1\}\,dx$

$$=\int_2^3\{(x-2)^2-(x-2)\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3-\frac{1}{2}(x-2)^2\right]_2^3$$

$$=\left\{\frac{1}{3}(3-2)^3-\frac{1}{2}(3-2)^2\right\}-0=\mathbf{-\frac{1}{6}}$$

補足 次の計算は，公式 (通称「1/6 公式」) として利用することが多い.

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx\\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx\\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\ \right]_{\alpha}^{\beta}\\ &= \left\{\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\right\}-0=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{dx}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{3}}}$$

(3) $$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(-t^3+2t)\,dt &= \left[-\frac{t^4}{4}+t^2\ \right]_{-1}^{2}\\ &= \left(-\frac{2^4}{4}+2^2\right)-\left\{-\frac{(-1)^4}{4}+(-1)^2\right\}=\boldsymbol{-\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}t(t+2)^2\,dt &= \int_{-2}^{2}(t^3+4t^2+4t)\,dt=\left[\ \frac{t^4}{4}+\frac{4}{3}t^3+2t^2\ \right]_{-2}^{2}\\ &= \left(\frac{2^4}{4}+\frac{4}{3}\cdot2^3+2\cdot2^2\right)-\left\{\frac{(-2)^4}{4}+\frac{4}{3}\cdot(-2)^3+2\cdot(-2)^2\right\}\\ &= \boldsymbol{\frac{64}{3}}\end{aligned}$$

別解 $$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}t(t+2)^2\,dt &= \int_{-2}^{2}\{(t+2)-2\}(t+2)^2\,dt\\ &= \int_{-2}^{2}\{(t+2)^3-2(t+2)^2\}\,dt\\ &= \left[\ \frac{1}{4}(t+2)^4-\frac{2}{3}(t+2)^3\ \right]_{-2}^{2}\\ &= \left(\frac{1}{4}\cdot4^4-\frac{2}{3}\cdot4^3\right)-0=\boldsymbol{\frac{64}{3}}\end{aligned}$$

補足 t を変数とする関数の定積分は，次のようになる．

$$F'(t)=f(t)\ \text{のとき}\qquad \int_a^b f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

すなわち，次の等式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx}$$

したがって，定積分の値は変数が違っても同じになる．

練習 6.32 $\displaystyle\int_1^3 (x^3-3x+2)\,dx=\int_1^3 x^3\,dx-3\int_1^3 x\,dx+2\int_1^3 dx$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3-3\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3+2\Big[x\Big]_1^3$$

$$=\frac{3^4-1^4}{4}-\frac{3(3^2-1^2)}{2}+2(3-1)=20-12+4=\mathbf{12}$$

練習 6.33 $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+2)^2\,dx-\int_{-1}^1 (x-2)^2\,dx=\int_{-1}^1\{(x+2)^2-(x-2)^2\}\,dx$

$$=\int_{-1}^1 8x\,dx=4\Big[x^2\Big]_{-1}^1$$

$$=4\{1^2-(-1)^2\}=\mathbf{0}$$

練習 6.34 ［**1** の証明］$F'(x)=f(x)$ とすると

$$\int_a^a f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^a=F(a)-F(a)=0$$

証終

［**2** の証明］性質 **3** より $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^a f(x)\,dx=\int_a^a f(x)\,dx$

性質 **1** より，$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$ であるから

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^a f(x)\,dx=0$$

よって $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

証終

練習 6.35 (1) $\displaystyle\int_1^2 (3x^2-4x)dx+\int_2^3 (3x^2-4x)dx=\int_1^3 (3x^2-4x)dx=\Big[\,x^3-2x^2\,\Big]_1^3$

$=(3^3-2\cdot 3^2)-(1^3-2\cdot 1^2)=\mathbf{10}$

(2) $\displaystyle\int_0^3 (x^2+2x)dx-\int_1^3 (x^2+2x)dx=\int_0^3 (x^2+2x)dx+\int_3^1 (x^2+2x)dx$

$\displaystyle=\int_0^1 (x^2+2x)dx=\Big[\,\frac{x^3}{3}+x^2\,\Big]_0^1$

$\displaystyle=\left(\frac{1^3}{3}+1^2\right)-0=\mathbf{\frac{4}{3}}$

練習 6.36 (1) $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=a$ とおくと　　$f(x)=4x+2a$

よって　　$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 (4t+2a)dt$

$\displaystyle=\Big[\,2t^2+2at\,\Big]_0^2=8+4a$

これより，$8+4a=a$ であるから　　$\displaystyle a=-\frac{8}{3}$

したがって　　$\boldsymbol{f(x)=4x-\frac{16}{3}}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt=a$ とおくと　　$f(x)=3x^2+a$

よって　　$\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt=\int_{-1}^1 (3t^2+a)dt$

$\displaystyle=\Big[\,t^3+at\,\Big]_{-1}^1=2+2a$

これより，$2+2a=a$ であるから　　$a=-2$

したがって　　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-2}$

練習 6.37 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x (3t^2-2t-1)\,dt=\mathbf{3x^2-2x-1}$

練習 6.38 等式の両辺を x で微分すると　　$f(x)=2x-1$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$$0=a^2-a-2$$

これを解くと　　$a=-1,\ 2$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=2x-1,\ a=-1,\ 2}$

2 次関数と定積分

定積分と面積の関係を 2 次関数 $y = x^2$ のグラフで考えてみよう．

下の図 [1] において，$y = x^2$ のグラフと x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた斜線部分の面積は，t の関数である．この関数を $S(t)$ とする．

このとき，$S'(t) = t^2$ であることを示そう．そのために，

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} \qquad \cdots ①$$

を考え，h を限りなく 0 に近づけてみる．

まず，$h > 0$ の場合で考える．

図 [2] において，斜線部分の面積は $S(t+h) - S(t)$ であり，これと横の長さが h である 2 つの長方形 APQB，APRC の面積の大小関係を考えると，次の不等式が成り立つ．

$$ht^2 < S(t+h) - S(t) < h(t+h)^2$$

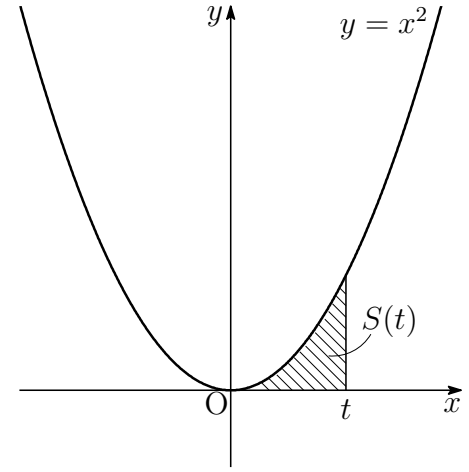
$h > 0$ であるから $\qquad t^2 < \dfrac{S(t+h) - S(t)}{h} < (t+h)^2$

ここで，h を限りなく 0 に近づけると $(t+h)^2$ は限りなく t^2 に近づく．

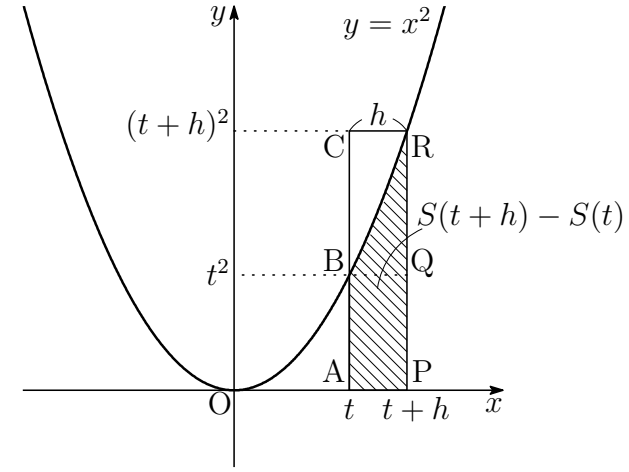
よって，このとき，① の値も限りなく t^2 に近づくといえる．

$h < 0$ の場合も，同様である．

[1]



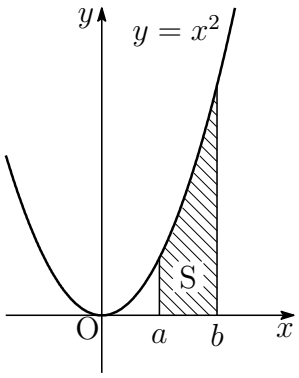
[2]



前ページで調べたことから，次のことがいえる．

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}=t^2 \qquad \text{すなわち} \qquad S'(t)=t^2$$

ところで，$y=x^2$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を S とすると，S は $S(t)$ を使って



$$S=S(b)-S(a)$$

と表される．

よって，定積分の定義と性質により

$$S=\Big[S(t)\Big]_a^b=\int_a^b t^2\,dt=\int_a^b x^2\,dx$$

が成り立つ．

次に，下の fig-1 について，2 つの面積 S_1 と S_2 の面積比を考えてみよう．

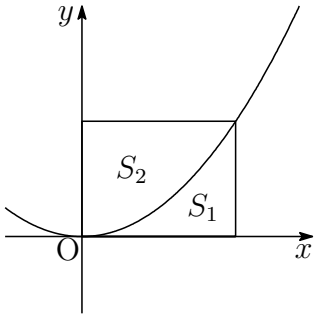


fig-1

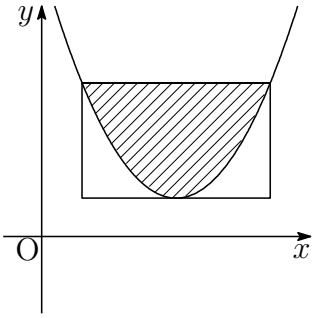


fig-2

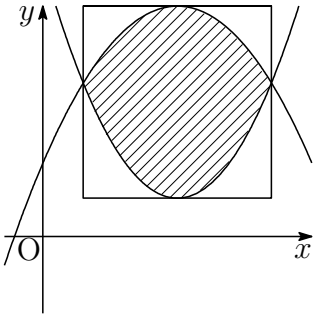


fig-3

S_1 を放物線 $y=kx^2$ と直線 $x=a$ と x 軸で囲まれた部分の面積とすると

$$S_1=\int_0^a kx^2\,dx=k\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^a=\frac{1}{3}ka^3$$

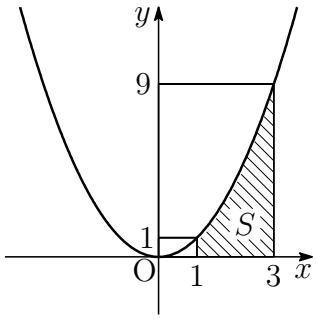
S_1+S_2 は x 軸，y 軸，直線 $x=a$，直線 $y=ka^2$ で囲まれた部分の面積であるから

$$S_1+S_2=a\cdot ka^2=ka^3 \quad \text{上の結果から} \quad S_2=\frac{2}{3}ka^3 \quad \text{よって} \quad S_1:S_2=1:2$$

fig-2 の放物線は fig-1 の放物線を平行移動したものとする．fig-2 の放物線の軸に関する対称性により，斜線部の面積は長方形の面積の 2/3 であることがわかる．

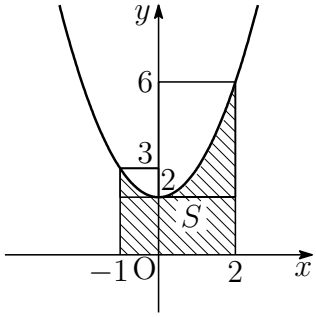
さらに，fig-2 の面積比を利用すると，fig-3 における斜線部分の面積も長方形の面積の 2/3 であることもわかる．

練習 6.39 (1) 放物線 $y=x^2$ と x 軸および 2 直線 $x=1$, $x=3$ で囲まれた部分の面積 S は



$$S=\int_1^3 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$
$$=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\mathbf{\frac{26}{3}}$$

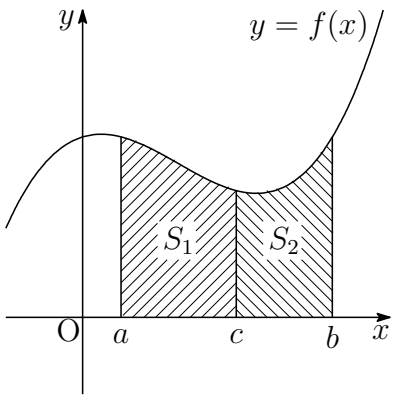
(2) 放物線 $y=x^2+2$ と x 軸および 2 直線 $x=-1$, $x=2$ で囲まれた部分の面積 S は



$$S=\int_{-1}^2 (x^2+2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^2$$
$$=\left(\frac{2^3}{3}+2\cdot 2\right)-\left\{\frac{(-1)^3}{3}+2\cdot(-1)\right\}=\mathbf{9}$$

考察 図の長方形を利用して，面積 S を求めてみよう．

深化 6.4 区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq 0$ であるとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積を S とすると



$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

区間 $a\leqq x\leqq c$ で，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=c$ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_a^c f(x)\,dx$$

区間 $c\leqq x\leqq b$ で，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=c$, $x=b$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

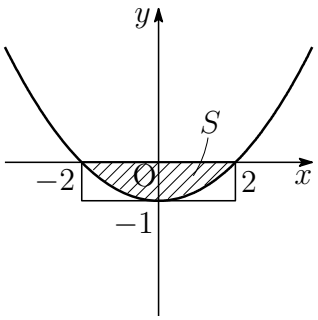
$$S_2=\int_c^b f(x)\,dx$$

このとき，$S=S_1+S_2$ であるから，次式が成立する．

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

証終

練習 6.40 (1) 放物線と x 軸の交点の x 座標は，



方程式 $\dfrac{1}{4}x^2-1=0$ を解いて

$$x=-2,\ 2$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ では $y \leqq 0$ であるから，
求める面積 S は

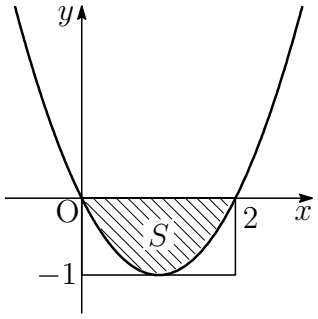
$$S=\int_{-2}^{2}\left\{-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{12}+x\right]_{-2}^{2}=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

別解 1/6 公式を用いると

$$S=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)dx=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-2)\}^3=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

補足 面積 S は図の長方形の面積の 2/3 であるから　$S=4\times\dfrac{2}{3}=\mathbf{\frac{8}{3}}$

(2) 放物線と x 軸の交点の x 座標は，



$x^2-2x=0$ を解いて

$$x=0,\ 2$$

$0 \leqq x \leqq 2$ では $y \leqq 0$ であるから，
求める面積 S は

$$S=\int_{0}^{2}\{-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

別解 1/6 公式を用いると

$$S=-\int_{0}^{2}x(x-2)\,dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

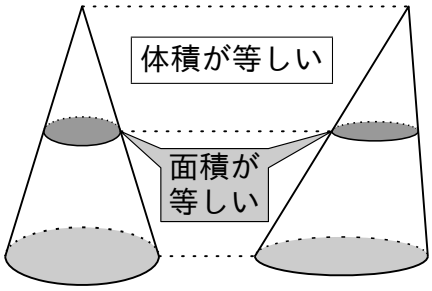
補足 $y=-(x-1)^2-1$ より，図の長方形の面積は　$2\times 1=2$

面積 S は長方形の面積の 2/3 であるから　$S=2\times\dfrac{2}{3}=\mathbf{\frac{4}{3}}$

カヴァリエリの原理

カヴァリエリの原理

底面積も高さも等しい 2 つの立体を，底面に平行な同じ高さの平面で切ったとき，2 つの切り口の面積がいつも等しいならば，2 つの立体の体積は等しい．

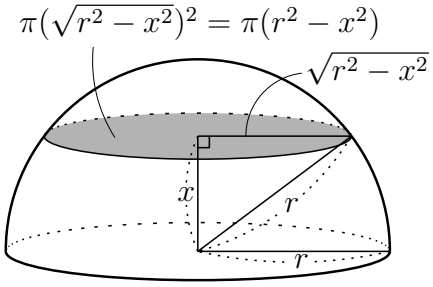


球の体積 V を求める式の説明

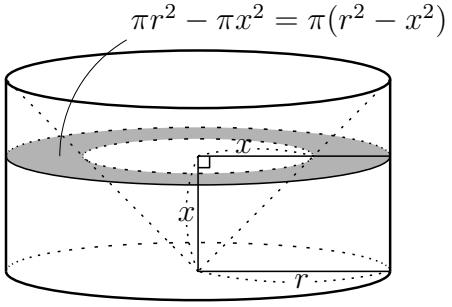
半径が r の半球を P，下の右図のように直円柱から円錐をくりぬいてできるすり鉢(ばち)型の立体を Q とする．ただし，直円柱と円錐について，底面の半径と高さはすべて r とする．2 つの立体を底面から高さ x のところで，底面に平行な平面で切ったときの切り口の面積は，ともに $\pi(r^2-x^2)$ である．よって，半球 P と立体 Q の体積は等しい．半径が r の球の体積 V は，P の体積の 2 倍であるから

$$V = 2\times(\text{立体 } Q \text{ の体積}) = 2\times\left(\pi r^2\times r - \frac{1}{3}\times\pi r^2\times r\right) = 2\times\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

半球 P

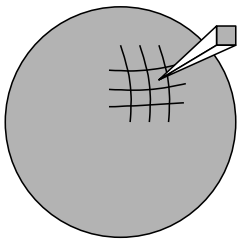


立体 Q



球の表面積を求める式の説明

球の表面を細かく分け，1 つの面を底面とし，球の中心を頂点とする角錐状の立体を考える．球の表面の分割を非常に多くすることにより，球の体積 V は，次のように考えられる．



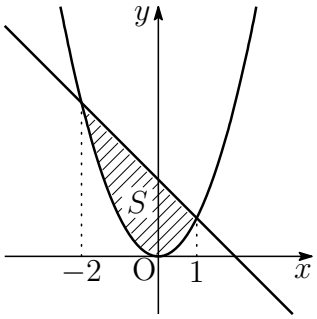
V = 角錐の体積の総和

$$= \frac{1}{3}\times(\text{角錐の底面積の総和})\times(\text{角錐の高さ})$$

$$= \frac{1}{3}\times(\text{球の表面積})\times(\text{球の半径}) = \frac{1}{3}Sr$$

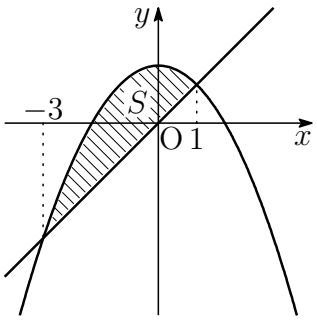
ここで，$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを使うと，$S = 4\pi r^2$ が得られる．

練習 6.41 (1) 放物線と直線は右の図のようになり，
その交点の x 座標は，方程式
$x^2 = -x + 2$ の解である．
$x^2 + x - 2 = 0$ より　$x = -2,\ 1$
よって，求める面積 S は，図から



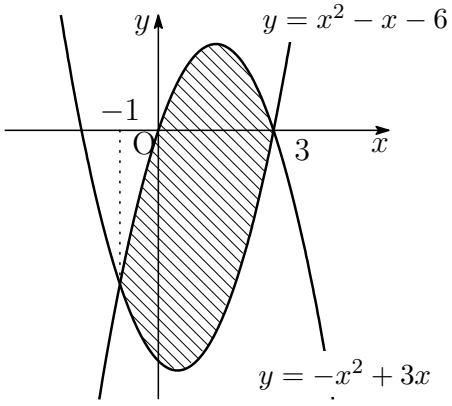
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} \{(-x+2) - x^2\}\, dx \\ &= \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} = \mathbf{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

(2) 放物線と直線は右の図のようになり，
その交点の x 座標は，方程式
$-x^2 + 3 = 2x$ の解である．
$x^2 + 2x - 3 = 0$ より　$x = -3,\ 1$
よって，求める面積 S は，図から



$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{1} \{(-x^2+3) - 2x\}\, dx \\ &= \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^{1} = \mathbf{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

(3) 2 つの放物線は右の図のようになり，
その交点の x 座標は，方程式
$-x^2 + 3x = x^2 - x - 6$ の解である．
$x^2 - 2x - 3 = 0$ より　$x = -1,\ 3$
よって，求める面積 S は，図から



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} \{(-x^2+3x) - (x^2 - x - 6)\}\, dx \\ &= \int_{-1}^{3} (-2x^2 + 4x + 6)\, dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^{3} = \mathbf{\frac{64}{3}} \end{aligned}$$

別解 1/6 の公式を用いた解法

$$(1)\ S=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)\,dx=-\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-2)\}^3=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

$$(2)\ S=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)\,dx=-\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-3)\}^3=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

$$(3)\ S=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x-6)\,dx=-2\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)\,dx$$
$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{64}{3}}$$

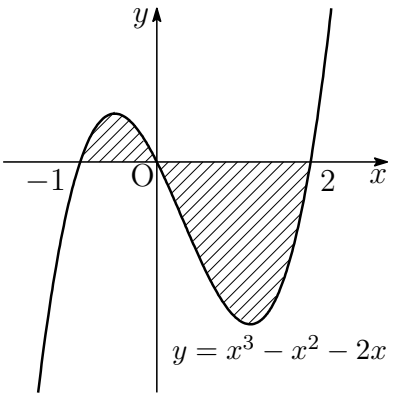
練習 6.42 曲線 $y=x^3-x^2-2x$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$$x^3-x^2-2x=0$$

の解である．

$x(x+1)(x-2)=0$ より

$$x=-1,\ 0,\ 2$$



グラフは右の図のようになり

$$-1\leqq x\leqq 0\text{ で}\quad y\geqq 0$$
$$0\leqq x\leqq 2\text{ で}\quad y\leqq 0$$

よって，求める面積の和 S は

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}\{-(x^3-x^2-2x)\}\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}=\boldsymbol{\frac{37}{12}}$$

積分公式 1

555 ページの定理 2 の関数 $f(x)$ について，次の定積分を考える．$k,\ t$ は任意の定数とする．

$$\begin{aligned}\int_k^{k+t} f(x)\,dx &= \int_k^{k+t} \{f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2}f''(k)(x-k)^2+a(x-k)^3\}\,dx \\ &= \left[\, f(k)(x-k)+\frac{f'(k)}{2}(x-k)^2+\frac{f''(k)}{6}(x-k)^3+\frac{a}{4}(x-k)^4 \,\right]_k^{k+t} \\ &= f(k)t+\frac{f'(k)}{2}t^2+\frac{f''(k)}{6}t^3+\frac{a}{4}t^4 \qquad (6.6)\end{aligned}$$

(6.6) の t を $-t$ に置き換えると

$$\int_k^{k-t} f(x)\,dx = -f(k)t+\frac{f'(k)}{2}t^2-\frac{f''(k)}{6}t^3+\frac{a}{4}t^4 \qquad (6.7)$$

(6.6)−(6.7) より

$$\int_{k-t}^{k+t} f(x)\,dx = 2t\left\{f(k)+\frac{f''(k)t^2}{6}\right\} \qquad (6.8)$$

また，定理 2 の等式に $x=k+t,\ k-t$ をそれぞれ代入すると

$$f(k+t) = f(k)+f'(k)t+\frac{f''(k)}{2}t^2+at^3$$
$$f(k-t) = f(k)-f'(k)t+\frac{f''(k)}{2}t^2-at^3$$

上の 2 式の辺々をそれぞれ加えると

$$f(k+t)+f(k-t) = 2f(k)+f''(k)t^2 \qquad (6.9)$$

(6.8) と (6.9) から $f''(k)t^2$ を消去すると

$$\int_{k-t}^{k+t} f(x)\,dx = \frac{1}{3}t\{f(k-t)+4f(k)+f(k+t)\}$$

$k=\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ t=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ とおくと，次の積分公式が成立する．

定理 5 $f(x)$ を 3 次以下の多項式とするとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\left\{f(\alpha)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\beta)\right\}$$

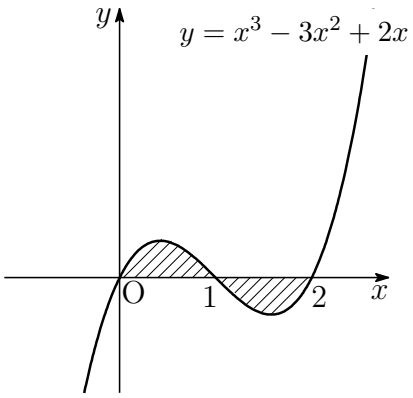
とくに，$f(\alpha)=f(\beta)=0$ のとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{2}{3}(\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

例えば，323 ページの例題 6.13 について
$f(x)=x^3-3x^2+2x$ とおくと

$$f(x)=x(x-1)(x-2)$$

$f(0)=f(1)=f(2)=0$ より，面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_1^2 f(x)\,dx\\&=\frac{2}{3}(1-0)f\left(\frac{0+1}{2}\right)-\frac{2}{3}(2-1)f\left(\frac{1+2}{2}\right)\\&=\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$



注意 $f(x)=x^3-3x^2+2x$ より

$$f'(x)=3x^2-6x+2,\quad f''(x)=6x-6$$

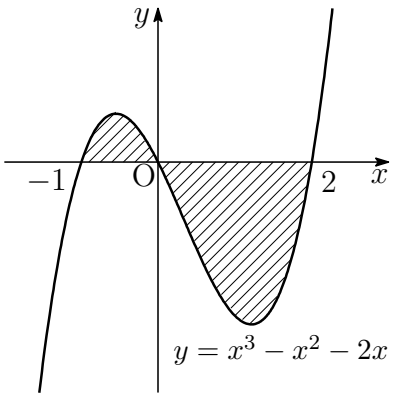
極値を与える x の値は，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ であり，$\dfrac{1}{2}$ や $\dfrac{3}{2}$ ではない (557 ページの図を参照)．なお，変曲点は $(1,\ 0)$ である．

同様に，323 ページの練習 6.42 について
$f(x)=x^3-x^2-2x$ とおくと

$$f(x)=x(x+1)(x-2)$$

$f(-1)=f(0)=f(2)=0$ より，面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^0 f(x)\,dx-\int_0^2 f(x)\,dx\\&=\frac{2}{3}\cdot1\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\cdot2\cdot f(1)\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot2\cdot(-2)=\mathbf{\frac{37}{12}}\end{aligned}$$

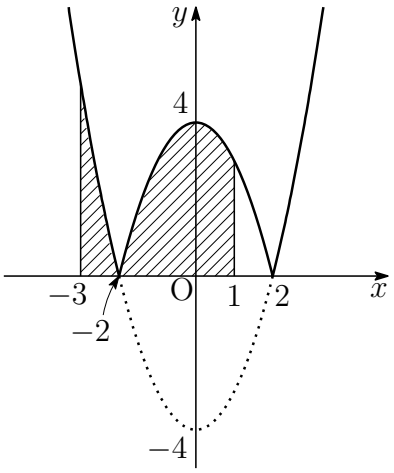


練習 6.43 (1) 関数 $y = |x^2 - 4|$ は

$$\begin{array}{ll} x \leqq -2,\ 2 \leqq x \text{ のとき} & y = x^2 - 4 \\ -2 \leqq x \leqq 2 \text{ のとき} & y = -x^2 + 4 \end{array}$$

である．よって

$$\begin{aligned} &\int_{-3}^{1} |x^2 - 4|\, dx \\ &= \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4)\, dx + \int_{-2}^{1} (-x^2 + 4)\, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^{1} = \mathbf{\frac{34}{3}} \end{aligned}$$

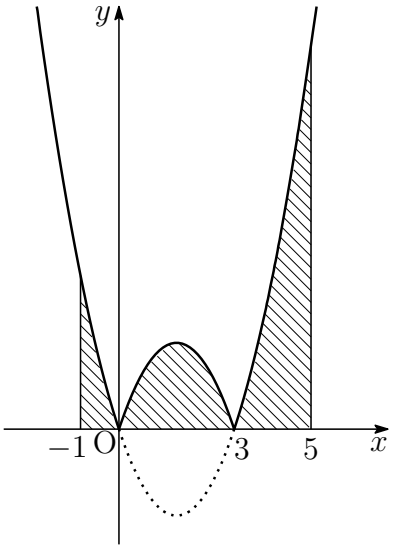


(2) 関数 $y = |x(x-3)|$ は，$f(x) = x(x-3)$ とおくと

$$\begin{array}{ll} x \leqq 0,\ 3 \leqq x \text{ のとき} & y = f(x) \\ 0 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき} & y = -f(x) \end{array}$$

である．よって

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{5} |x(x-3)|\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} f(x)\, dx - \int_{0}^{3} f(x)\, dx + \int_{3}^{5} f(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{3} f(x)\, dx + \int_{3}^{5} f(x)\, dx \\ &\qquad - 2\int_{0}^{3} f(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{5} f(x)\, dx - 2\int_{0}^{3} f(x)\, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^{5} - 2\left(-\frac{1}{6} \right)(3-0)^3 = \mathbf{15} \end{aligned}$$



演習 6.1 $f(x)=x^3+x^2-2x$ とすると，接線 ℓ の傾きは $f'(1)$ である．

$f'(x)=3x^2+2x-2$ であるから　　$f'(1)=3\cdot1^2+2\cdot1-2=3$

よって，接線 ℓ の方程式は

$$y-0=3(x-1)\quad \text{すなわち}\quad y=3x-3$$

曲線 C と接線 ℓ の交点の x 座標を求める．

方程式 $x^3+x^2-2x=3x-3$ を整理すると

$$x^3+x^2-5x+3=0$$

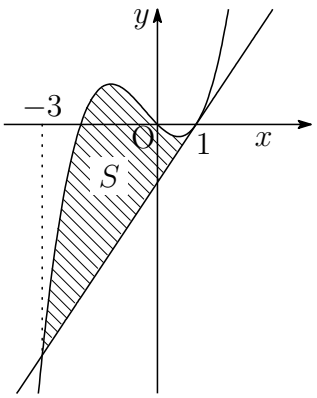
左辺を因数分解すると

$$(x-1)^2(x+3)=0$$

これを解くと

$$x=1,\ -3$$

接線 ℓ が曲線 C と交わる点の x 座標は -3 であり，グラフは，右の図のようになる．よって，求める面積 S は



$$\begin{aligned}S&=\int_{-3}^{1}\{(x^3+x^2-2x)-(3x-3)\}\,dx\\&=\int_{-3}^{1}(x^3+x^2-5x+3)\,dx=\left[\,\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+3x\,\right]_{-3}^{1}=\mathbf{\frac{64}{3}}\end{aligned}$$

別解 因数分解の結果を利用すると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-3}^{1}(x-1)^2(x+3)\,dx=\int_{-3}^{1}(x-1)^2\{(x-1)+4\}\,dx\\&=\int_{-3}^{1}\{(x-1)^3+4(x-1)^2\}\,dx=\left[\,\frac{1}{4}(x-1)^4+\frac{4}{3}(x-1)^3\,\right]_{-3}^{1}\\&=0-\left\{\frac{1}{4}\cdot(-4)^4+\frac{4}{3}\cdot(-4)^3\right\}=\mathbf{\frac{64}{3}}\end{aligned}$$

別解 $h(x)=(x-1)^2(x+3)$ とおくと，区間 $-3\leqq x\leqq 1$ において $h(x)\geqq 0$，$h(-3)=h(1)=0$ であるから，定理 5 により

$$S=\int_{-3}^{1}h(x)\,dx=\frac{2}{3}\{1-(-3)\}h(-1)=\frac{2}{3}\times4\times8=\mathbf{\frac{64}{3}}$$

3 次関数のグラフと接線

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ の表す曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 ℓ の方程式を $y=g(x)$ とすると

$$g(x)=f(p)+f'(p)(x-p)$$

定理 2 にしたがって，$x=p$ を極として，$f(x)$ を展開すると

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+a(x-p)^3$$

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，C と ℓ の共有点の x 座標は，3 次関数 $y=h(x)$ の x 軸との共有点の x 座標と等しい．

$$h(x)=\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+a(x-p)^3$$

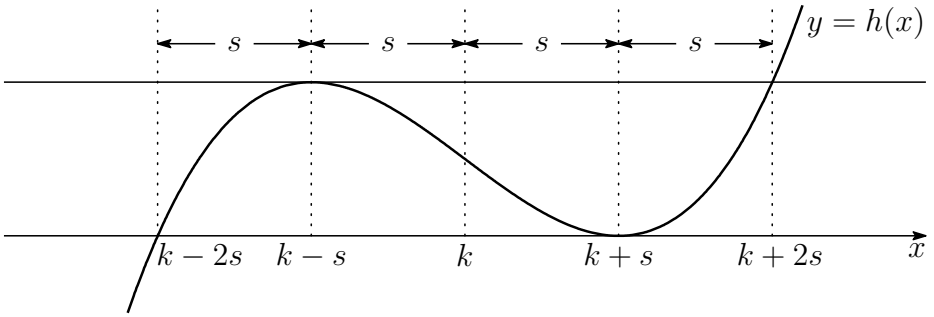
$f''(x)=6ax+2b$ より，変曲点の x 座標を k とすると，$f''(k)=0$ より

$$6ak+2b=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=-3ak, \quad f''(x)=6a(x-k)$$

$f''(p)=6a(p-k)$ であるから，$h(x)$ は

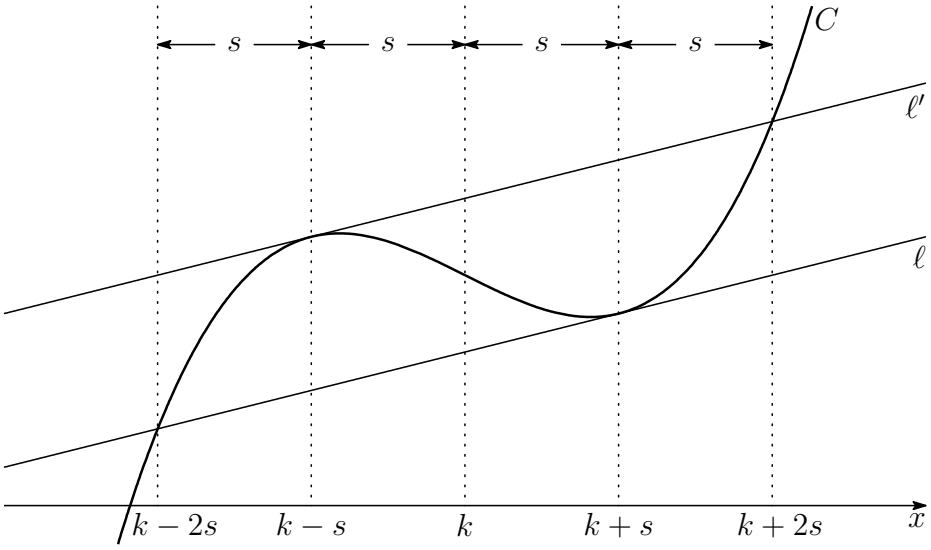
$$\begin{aligned} h(x)&=\frac{1}{2}\cdot 6a(p-k)(x-p)^2+a(x-p)^3 \\ &=a(x-p)^2\{3(p-k)+(x-p)\}=a(x-p)^2\{x-(3k-2p)\} \end{aligned}$$

$y=h(x)$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標は　$x=p,\ 3k-2p$
$p=k+s$ とおくと，これらの共有点の x 座標は，それぞれ　$x=k+s,\ k-2s$
$s>0$ のとき，$y=h(x)$ のグラフの概形は，次のようになる (p.557 を参照)．



変曲点の x 座標を基準に考えると分かりやすい．接点の x 座標が変曲点の x 座標より s だけ大きければ，もう一方の共有点の x 座標は変曲点の x 座標より $2s$ だけ小さい．逆に，接点の x 座標が変曲点の x 座標より s だけ小さければ，もう一方の共有点の x 座標は変曲点の x 座標より $2s$ だけ大きい．

ℓ と平行な C の接線を ℓ' とすると，これらのグラフの概形は，次のようになる．
なお，C と 2 接線 $\ell,\ \ell'$ との位置関係は C が極値をもたいない場合にも成立する．



定理 3 で述べたように，3 次関数 $y=f(x)$ のグラフは変曲点に関して対称である．
このことからも変曲点に関して対称な 2 点における接線が平行であることを証明できる．変曲点の x 座標 k を極として $f(x)$ を展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^3$$

これを微分すると　　$f'(x)=f'(k)+3a(x-k)^2$
変曲点に関して対称な 2 点 $(k+s,\ f(k+s)),\ (k-s,\ f(k-s))$ における接線の傾きは

$$f'(k+s)=f'(k-s)=f'(k)+3as^2$$

よって，ℓ と ℓ' は平行である．
ℓ は，点 $(k+s,\ f(k)+f'(k)s+as^3)$ を通り，傾き $f'(k)+3as^2$ の直線

$$\begin{aligned} y&=(f'(k)+3as^2)(x-k-s)+f(k)+f'(k)s+as^3\\ &=f(k)-2as^3+(f'(k)+3as^2)(x-k)\end{aligned}$$

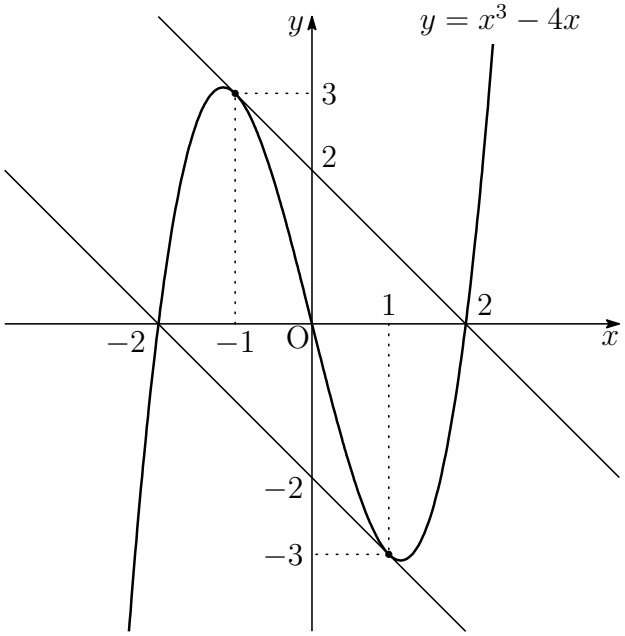
C と ℓ の方程式　　$C:y=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^3$
$\ell:y=f(k)-2as^3+(f'(k)+3as^2)(x-k)$

上の 2 式から y を消去して整理すると

$$2as^3-3as^2(x-k)+a(x-k)^3=0 \quad \text{ゆえに} \quad a(x-k-s)^2(x-k+2s)=0$$

したがって，C と ℓ は $x=k-2s$ で交わる．
s を $-s$ に置き換えたものが ℓ' であるから，C と ℓ' は $x=k+2s$ で交わる．　終

確認 326 ページの Ex6.1 の曲線 $y = x^3 - 4x$ と接点 $\mathrm{A}(1, -3)$ との関係を変曲点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を基準に考えると前ページのことが確認できる．

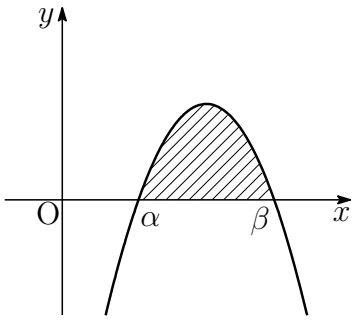


3 次関数のグラフの特徴を調べる上で，変曲点の考察は非常に重要である．

演習 6.2 放物線 x 軸の交点の x 座標は

$-x^2 + 6x - 7 = 0$ を解いて　$x = 3 \pm \sqrt{2}$

$\alpha = 3 - \sqrt{3},\ \beta = 3 + \sqrt{2}$ とすると



$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 + 6x - 7\}\, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{-(x - \alpha)(x - \beta)\}\, dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$\beta - \alpha = 2\sqrt{2}$ より　　$S = \frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3 = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$

積分公式 2

次の定積分を求める．

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx &= \int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\beta)-(\alpha-\beta)\}(x-\beta)^2\,dx\\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\beta)^3-(\alpha-\beta)(x-\beta)^2\}\,dx\\ &= \left[\ \frac{1}{4}(x-\beta)^4-\frac{1}{3}(\alpha-\beta)(x-\beta)^3\ \right]_{\alpha}^{\beta}\\ &= 0-\left\{\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^4-\frac{1}{3}(\alpha-\beta)^4\right\}\\ &= \frac{1}{12}(\alpha-\beta)^4=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \qquad (6.10)\end{aligned}$$

(6.10) の α と β を入れ替えると

$$\int_{\beta}^{\alpha}(x-\beta)(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

上式の左辺の上端と下端を入れ替えて書き替えると

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \qquad (6.11)$$

(6.10) は，次のように書くこともできる．

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \qquad (6.12)$$

(6.11) および (6.12) より，次式を得る．

定理 6　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

例えば，326 ページの積分計算は，定理 6 により

$$S=\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)\,dx=\int_{-2}^{1}(x+2)(1-x)^2\,dx=\frac{1}{12}\{1-(-2)\}^4=\frac{27}{4}$$

数学 III の部分積分法を利用すると，次を証明できる [5]．

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

問題 6.14 $f(x)$ は 次の 2 つの条件をともに満たす.

［1］ $f'(x) = 2x + 1$　　［2］ $f(1) = 2$

［1］から　$f(x) = \displaystyle\int (2x+1)\,dx = x^2 + x + C$　(C は積分定数)

［2］から　$1^2 + 1 + C = 2$　ゆえに　$C = 0$

したがって　$f(x) = x^2 + x$　よって　$\boldsymbol{y = x^2 + x}$

問題 6.15 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x-1)^2\,dx = \int_{-1}^{1} (9x^2 - 6x + 1)\,dx$

$$= \Big[\, 3x^3 - 3x^2 + x \,\Big]_{-1}^{1} = \mathbf{8}$$

別解　練習 6.28 の補足で解説した公式

$$\boldsymbol{\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1} + C}$$

を利用すると

$$\int_{-1}^{1} (3x-1)^2\,dx = \Big[\, \frac{1}{3\cdot 3}(3x-1)^3 \,\Big]_{-1}^{1} = \frac{2^3}{9} - \frac{(-4)^3}{9} = \mathbf{8}$$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (t+2)(t-1)\,dt = \int_{-2}^{1} (t^2 + t - 2)\,dt$

$$= \Big[\, \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \,\Big]_{-2}^{1} = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$$

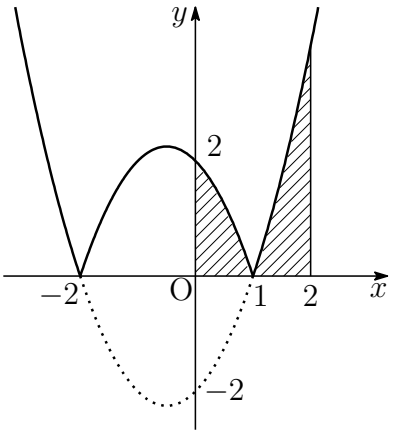
別解　1/6 公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

を利用すると

$$\int_{-2}^{1} (t+2)(t-1)\,dt = -\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3 = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$$

(3) 関数 $y=|x^2+x-2|$ は



$x \leqq -2,\ 1 \leqq x$ のとき　$y=x^2+x-2$
$-2 \leqq x \leqq 1$ のとき　$y=-x^2-x+2$

である．よって

$$\int_0^2 |x^2+x-2|\,dx$$
$$=\int_0^1 (-x^2-x+2)\,dx+\int_1^2 (x^2+x-2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=\mathbf{3}$$

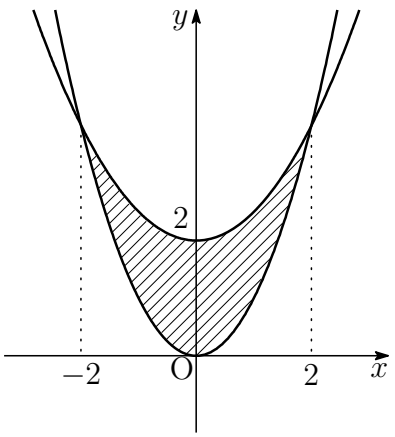
別解　$F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x$ とおくと

$$F(0)=0,\quad F(1)=-\frac{7}{6},\quad F(2)=\frac{2}{3}$$

求める定積分は，斜線部の面積 S であるから

$$S=\left[-F(x)\right]_0^1+\left[F(x)\right]_1^2$$
$$=F(0)-2F(1)+F(2)=0-2\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)+\frac{2}{3}=\mathbf{3}$$

問題 6.16　(1)　$x^2=\dfrac{1}{2}x^2+2$ を解いて　$x=-2,\ 2$



$$S=\int_{-2}^2\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-x^2\right\}dx$$
$$=\int_{-2}^2\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{6}+2x\right]_{-2}^2=\mathbf{\frac{16}{3}}$$

別解　1/6 公式により

$$S=-\frac{1}{2}\int_{-2}^2(x+2)(x-2)\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-2)\}^3=\mathbf{\frac{16}{3}}$$

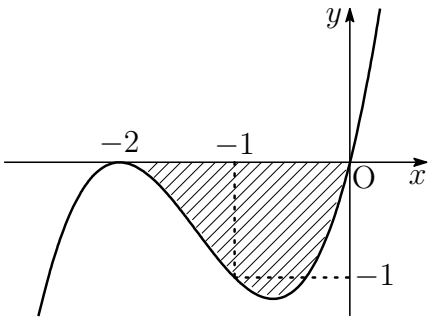
別解 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2$ とおくと，$f(-2)=f(2)=0$ であるから，定理 5 により

$$S=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\frac{2}{3}\{2-(-2)\}f(0)=\frac{2}{3}\times 4\times 2=\mathbf{\frac{16}{3}}$$

(2) 曲線 $y=x(x+2)^2$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式 $x(x+2)^2=0$ を解いて

$$x=-2,\ 0$$

$-2\leqq x\leqq 0$ では $y\leqq 0$ であるから，求める面積 S は



$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{0}\{-x(x+2)^2\}\,dx\\&=\int_{-2}^{0}(-x^3-4x^2-4x)\,dx\\&=\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-2}^{0}=\mathbf{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

別解 $S=\displaystyle\int_{-2}^{0}\{-x(x+2)^2\}\,dx=\int_{-2}^{0}\{-(x+2)+2\}(x+2)^2\,dx$

$$\begin{aligned}&=\int_{-2}^{0}\{-(x+2)^3+2(x+2)^2\}\,dx=\left[-\frac{1}{4}(x+2)^4+\frac{2}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{0}\\&=\left(-\frac{1}{4}\cdot 2^4+\frac{2}{3}\cdot 2^3\right)-0=\mathbf{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

別解 $f(x)=x(x+2)^2$ とおくと，$-2\leqq x\leqq 0$ において　$f(x)\leqq 0$

$f(-2)=f(0)=0$ であるから，定理 5 により

$$S=-\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=-\frac{2}{3}\{0-(-2)\}f(-1)=-\frac{2}{3}\times 2\times(-1)=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

別解 定理 6 により

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{0}\{-x(x+2)^2\}\,dx\\&=\int_{-2}^{0}(x+2)^2(0-x)\,dx=\frac{1}{12}\{0-(-2)\}^4=\mathbf{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

演習 6.3 (偶数次数の項と奇数次数の項に分けて計算する)

$$\int_{-2}^{2}(x^3+x^2+x+3)\,dx=\int_{-2}^{2}(x^2+3)\,dx+\int_{-2}^{2}(x^3+x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(x^2+3)\,dx+0$$
$$=2\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{52}{3}}$$

章末 6.1 (1) $y=-2x^3-x^2+2x+1$

よって　$\boldsymbol{y'=-6x^2-2x+2}$

(2) $y=x^3-8$

よって　$\boldsymbol{y'=3x^2}$

章末 6.2 (1) $f(x)=x^3-4x^2$ とすると，接線 ℓ の傾きは $f'(3)$ である．

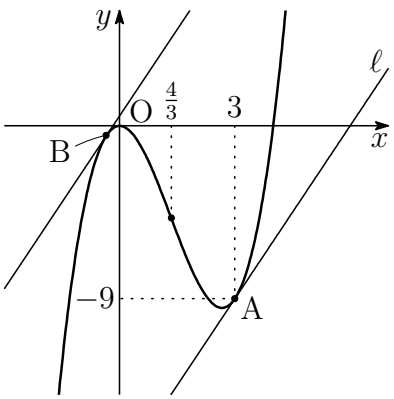
$f'(x)=3x^2-8x$ より

$$f'(3)=3\cdot3^2-8\cdot3=3$$

ℓ は点 $(3,-9)$ を通り傾き 3 の直線であるから，その方程式は

$$y-(-9)=3(x-3)$$

すなわち　$\boldsymbol{y=3x-18}$



(2) この曲線の接線で ℓ に平行なものの傾きは 3 であるから

$$f'(x)=3\quad\text{すなわち}\quad 3x^2-8x=3$$

したがって　$(x-3)(3x+1)=0$　これを解くと　$x=3,\ -\dfrac{1}{3}$

接点 A の x 座標が 3 であるから，接点 B の x 座標は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

別解 (3 次関数のグラフと接線を参照)

$f''(x)=6x-8$ より，$f''(x)=0$ を解くと，変曲点の x 座標は　$x=\dfrac{4}{3}$

2 点 A，B は変曲点に関して対称であるから，B の x 座標を b とすると

$$\frac{3+b}{2}=\frac{4}{3}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{b=-\frac{1}{3}}$$

章末 6.3 $y' = 3x^2 - 2ax = 3x\left(x - \dfrac{2}{3}a\right)$

(1) $a > 0$ のとき，y の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$\boldsymbol{x = 0}$ で極大値 $\mathbf{0}$ をとる．

(2) $a = 0$ のとき　$y' = 3x^2 \geqq 0$

y の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	0	↗

よって，y は常に増加し，極大値はない．

(3) $a < 0$ のとき，y の増減表は

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

$x = \dfrac{2}{3}a$ のとき

$$y = \left(\frac{2}{3}a\right)^2\left(\frac{2}{3}a - a\right) = -\frac{4}{27}a^3$$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{2}{3}a}$ で極大値 $\boldsymbol{-\dfrac{4}{27}a^3}$ をとる．

章末 6.4　　$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(x)$ が $x = 1$ で極大値 5 をとるとき

$$f'(1) = 0, \quad f(1) = 5$$

よって　　$3a + 2b + c = 0$　　$\cdots$①

$a + b + c + d = 5$　　$\cdots$②

$f(x)$ が $x = 3$ で極小値 1 をとるとき

$$f'(3) = 0, \quad f(3) = 1$$

よって　　$27a + 6b + c = 0$　　$\cdots$③

$27a + 9b + 3c + d = 1$　　$\cdots$④

④ − ② から　$26a + 8b + 2c = -4$

すなわち　$13a + 4b + c = -2$　　$\cdots$⑤

③ − ① から　$24a + 4b = 0$

すなわち　$6a + b = 0$　　$\cdots$⑥

⑤ − ① から　$10a + 2b = -2$

すなわち　$5a + b = -1$　　$\cdots$⑦

⑥，⑦ を解くと　$a = 1$，$b = -6$

これを ①，② に代入して　$c = 9$，$d = 1$

このとき　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x - 1)(x - 3)$

よって，次の増減表が得られ，条件を満たす．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 5	↘	極小 1	↗

したがって　$\boldsymbol{a = 1}$，$\boldsymbol{b = -6}$，$\boldsymbol{c = 9}$，$\boldsymbol{d = 1}$

別解 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を微分すると　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1,\ 3$ で極値をとるから，これらは $f'(x)=0$ の解である．

2 次方程式 $f'(x)=0$ の解と係数の関係により

$$1+3=-\frac{2b}{3a},\quad 1\cdot 3=\frac{c}{3a}\quad \text{ゆえに}\quad b=-6a,\ c=9a \qquad (*)$$

これから，$f(x)=a(x^3-6x^2+9x)+d$ とおくと，$(1)=5$，$f(3)=1$ より

$$4a+d=5,\quad d=1\quad \text{ゆえに}\quad a=1$$

$a=1$ を $(*)$ に代入して　$b=-6,\ c=9$

このとき　$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

よって，次の増減表が得られ，条件を満たす．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 5	↘	極小 1	↗

したがって　$\boldsymbol{a=1,\ b=-6,\ c=9,\ d=1}$

章末 6.5 与えられた方程式を変形すると　$x^3-3x+1=a$

この方程式の異なる実数解の個数は，関数　$y=x^3-3x+1$　$\cdots$①

のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい．

関数 ① について

$$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

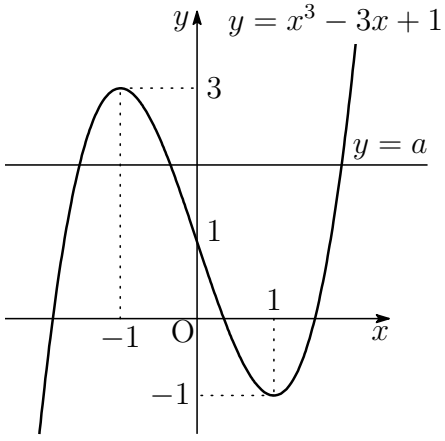
y の増減表は，右のようになる．

よって，$y=x^3-3x+1$ のグラフは，右の図のようになる．

求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$\boldsymbol{-1<a<3}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗



章末 6.6 (1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x-3)^2dx=\int_{-2}^{2}(4x^2-12x+9)dx$

$$=\left[\ \frac{4}{3}x^3-6x^2+9x\ \right]_{-2}^{2}$$

$$=\left(\frac{4}{3}\cdot 2^3-6\cdot 2^2+9\cdot 2\right)-\left\{\frac{4}{3}\cdot(-2)^3-6\cdot(-2)^2+9\cdot(-2)\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{172}{3}}$$

(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(t^2-2)dt=\left[\ \frac{t^3}{3}-2t\ \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$

$$=\left\{\frac{(\sqrt{2})^3}{3}-2\sqrt{2}\right\}-\left\{\frac{(-\sqrt{2})^3}{3}-2\cdot(-\sqrt{2})\right\}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{8\sqrt{2}}{3}}$$

別解 (1) 練習 6.28 の補足で解説した公式

$$\boldsymbol{\int(ax+b)^n\,dx=\frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}+C}$$

を利用すると

$$\int_{-2}^{2}(2x-3)^2\,dx=\left[\ \frac{1}{3\cdot 2}(2x-3)^3\ \right]_{-2}^{2}=\frac{1^3}{6}-\frac{(-7)^3}{6}=\boldsymbol{\frac{172}{3}}$$

(2) 1/6 公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

を利用すると

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(t^2-2)\,dt=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})\,dt$$

$$=-\frac{1}{6}\{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\}^3=\boldsymbol{-\frac{8\sqrt{2}}{3}}$$

章末 6.7 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = a$ とおくと　　$f(x) = x^2 + 2a$

よって　　$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (t^2 + 2a)dt$

$$= \left[\ \frac{t^3}{3} + 2at\ \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 2a$$

これより，$\dfrac{1}{3} + 2a = a$ であるから　　$a = -\dfrac{1}{3}$

したがって　　$\boldsymbol{f(x) = x^2 - \dfrac{2}{3}}$

章末 6.8 $f(x)$ を微分すると　$f'(x) = (x-1)(x-2)$

よって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$f(1) = \int_1^1 (t-1)(t-2)dt = 0$$

したがって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x = 1}$ で極大値 $\boldsymbol{0}$ をとる．

章末 6.9 (1) 放物線と直線 $y = 0$ の交点の x 座標は，

$x^2 - 3x = 0$ を解いて

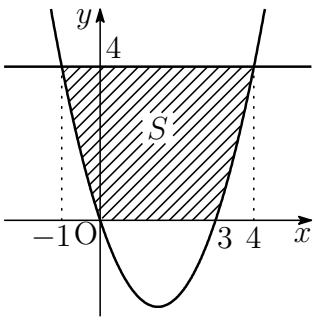
$$x = 0,\ 3$$

放物線と直線 $y = 4$ の交点の x 座標は，

$x^2 - 3x = 4$ を解いて

$$x = -1,\ 4$$

求める面積 S は右の図の斜線部分で



$$S = \int_{-1}^{4} \{4 - (x^2 - 3x)\}\,dx - \int_0^3 \{-(x^2 - 3x)\}\,dx$$

$$= \left[\ 4x - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\ \right]_{-1}^{4} + \left[\ \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\ \right]_0^3$$

$$= \left(4\cdot 4 - \frac{4^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot 4^2\right) - \left\{4\cdot(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot(-1)^2\right\}$$

$$+ \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right) - 0 = \boldsymbol{\frac{49}{3}}$$

別解 (1/6 公式)

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{4} \{4-(x^2-3x)\}\,dx - \int_{0}^{3} \{-(x^2-3x)\}\,dx \\ &= -\int_{-1}^{4} (x+1)(x-4)\,dx + \int_{0}^{3} x(x-3)\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{4-(-1)\}^3 - \frac{1}{6}(3-0)^3 = \frac{5^3}{6} - \frac{3^3}{6} = \mathbf{\frac{49}{3}} \end{aligned}$$

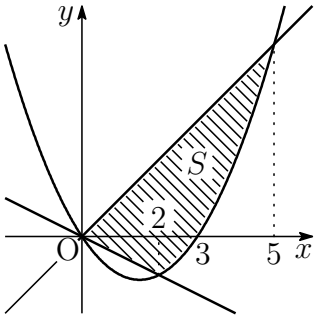
(2) 放物線と直線 $y=2x$ の交点の x 座標は，
$x^2-3x=2x$ を解いて

$$x=0,\ 5$$

放物線と直線 $y=-x$ の交点の x 座標は，$x^2-3x=-x$ を解いて

$$x=0,\ 2$$

求める面積 S は右の図の斜線部分で



$$\begin{aligned} S &= \int_{0}^{2} \{2x-(-x)\}dx + \int_{2}^{5} \{2x-(x^2-3x)\}dx \\ &= \int_{0}^{2} 3x\,dx + \int_{2}^{5} (-x^2+5x)\,dx \\ &= \left[\ \frac{3}{2}x^2\ \right]_0^2 + \left[\ -\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2\ \right]_2^5 \\ &= \frac{3}{2}\cdot 2^2 - 0 + \left(-\frac{5^3}{3}+\frac{5}{2}\cdot 5^2\right) - \left(-\frac{2^3}{3}+\frac{5}{2}\cdot 2^2\right) = \mathbf{\frac{39}{2}} \end{aligned}$$

別解 (1/6 公式)

$$\begin{aligned} S &= \int_{0}^{5} \{2x-(x^2-3x)\}\,dx - \int_{0}^{2} \{-x-(x^2-3x)\}\,dx \\ &= -\int_{0}^{5} x(x-5)\,dx + \int_{0}^{2} x(x-2)\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(5-0)^3 - \frac{1}{6}(2-0)^3 = \mathbf{\frac{39}{2}} \end{aligned}$$

章末 6.10 関数 $f(x)$ について，常に $f'(x) \geqq 0$ であれば，$f(x)$ は常に増加する．

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + k = 3(x+1)^2 + k - 3$$

よって，$3x^2 + 6x + k \geqq 0$ が常に成り立つには

$$k - 3 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{k \geqq 3}$$

別解 関数 $f(x)$ について，常に $f'(x) \geqq 0$ であれば，$f(x)$ は常に増加する．

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + k$$

$3x^2 + 6x + k \geqq 0$ が常に成り立つのは，2 次方程式 $3x^2 + 6x + k = 0$ の判別式について $D \leqq 0$ のときである．

$$D/4 = 3^2 - 3k \leqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k \geqq 3}$$

章末 6.11 $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	k	$\searrow$	極小	$\nearrow$

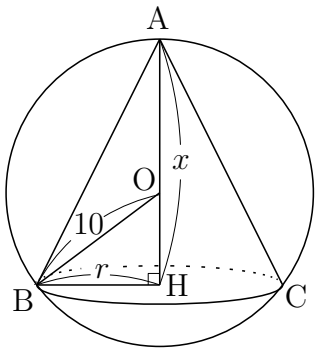
$x \geqq 0$ において，$f(x) \geqq 0$ が成り立つには $f(4) \geqq 0$ であればよい．

$$f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + k = k - 32$$

よって　　$k - 32 \geqq 0$　すなわち　$k \geqq 32$

したがって，k の最小値は　$\boldsymbol{k = 32}$

章末 6.12 直円錐の底面の半径を r とすると，右の図の直角三角形OBHにおいて，三平方の定理より



$$\begin{aligned} r^2 &= \mathrm{BH}^2 = \mathrm{OB}^2 - \mathrm{OH}^2 \\ &= 10^2 - (x-10)^2 = 20x - x^2 \end{aligned}$$

よって，直円錐の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times x \\ &= \frac{1}{3}\pi x^2(20-x) \quad (0 < x < 20) \end{aligned}$$

$$V' = -\pi x^2 + \frac{40}{3}\pi x = -\pi x\left(x - \frac{40}{3}\right)$$

V の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{40}{3}$	$\cdots$	20
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

V は $x = \dfrac{40}{3}$ で最大となり，最大値 V_1 は

$$V_1 = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{40}{3}\right)^2\left(20 - \frac{40}{3}\right) = \frac{32000}{81}\pi$$

また，球の体積 V_2 は　　$V_2 = \dfrac{4}{3}\pi\cdot 10^3 = \dfrac{4000}{3}\pi$

したがって　　$V_1 : V_2 = \dfrac{32000}{81}\pi : \dfrac{4000}{3}\pi = \mathbf{8 : 27}$

別解 3 正数 $x,\ x,\ 2(20-x)$ の相加平均と相乗平均の大小関係により (定理 0 を参照)

$$x + x + 2(20-x) \geqq 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot 2(20-x)}$$

したがって　$40^3 \geqq 27\cdot 2x^2(20-x)$　ゆえに　$V = \dfrac{1}{3}\pi x^2(20-x) \leqq \dfrac{32000}{81}\pi$

上式において，等号が成立するのは　$x = 2(20-x)$　すなわち　$x = \dfrac{40}{3}$

よって　　$V_1 : V_2 = \dfrac{32000}{81}\pi : \dfrac{4}{3}\pi\cdot 10^3 = \mathbf{8 : 27}$

章末 6.13 1 次関数を $f(x)=ax+b$ とおく．ただし，$a\neq 0$ とする．

$$\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2=\left\{\int_0^1 (ax+b)\,dx\right\}^2$$
$$=\left\{\left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^1\right\}^2=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2=\frac{a^2}{4}+ab+b^2$$

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx=\int_0^1 (ax+b)^2\,dx$$
$$=\int_0^1 (a^2x^2+2abx+b^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{a^2}{3}x^3+abx^2+b^2x\right]_0^1=\frac{a^2}{3}+ab+b^2$$

これより

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx-\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2$$
$$=\left(\frac{a^2}{3}+ab+b^2\right)-\left(\frac{a^2}{4}+ab+b^2\right)=\frac{a^2}{12}>0$$

したがって　$\left\{\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2<\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$

解説 上の結果は，定数関数以外の関数 $f(x)$ について成立する．

t の 2 次関数 $g(t)=\displaystyle\int_0^1 \{t-f(x)\}^2\,dx$ を考えると

$$g(t)=t^2-2t\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$$

すべての t について，$g(t)>0$ であるから，係数について

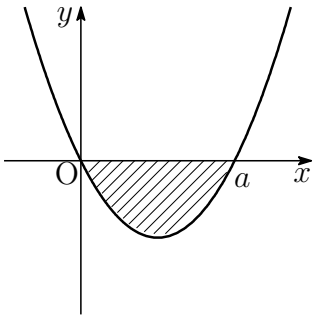
$$D/4=\left\{-\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2-\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx<0$$

したがって　$\left\{\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2<\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$　　**証終**

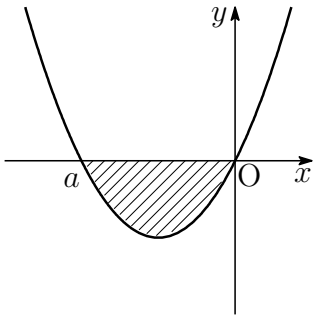
補足 定数関数のときに限り，上式の両辺は等しくなる．

章末 6.14 放物線と x 軸との交点の x 座標は，$x^2-ax=0$ を解いて　$x=0,\ a$

［1］$a>0$



［2］$a<0$



$a=0$ は条件を満たさないから，次の場合に分けて求める．

［1］$a>0$ のとき

$$\int_0^a \{-(x^2-ax)\}\,dx=-\int_0^a x(x-a)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(a-0)^3=\frac{a^3}{6}$$

条件から　$\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{4}{3}$　ゆえに　$a^3=8$

$a>0$ に注意してこれを解くと　$a=2$

［2］$a<0$ のとき

$$\int_a^0 \{-(x^2-ax)\}\,dx=-\int_a^0 x(x-a)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(0-a)^3=-\frac{a^3}{6}$$

条件から　$-\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{4}{3}$　ゆえに　$a^3=-8$

$a<0$ に注意してこれを解くと　$a=-2$

［1］，［2］より　　$\boldsymbol{a=2,\ -2}$

章末 6.15 $y=x^2-2x+4$ を微分すると　$y'=2x-2$

接点の x 座標を a とすると，接線の傾きは $2a-2$ となるから，その方程式は

$$y-(a^2-2a+4)=(2a-2)(x-a)$$

すなわち　　$y=(2a-2)x-a^2+4$　　$\cdots$①

この直線が原点 $\mathrm{O}(0,0)$ を通るから

$$0=-a^2+4$$

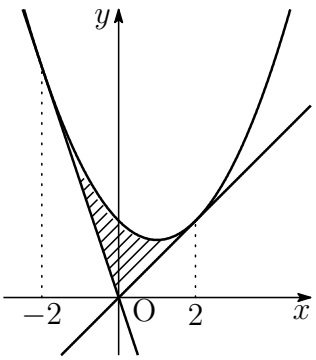
整理すると　　$a^2=4$

よって　　$a=-2,\ 2$

接線の方程式は，① より

$a=-2$ のとき　$y=-6x$

$a=2$ のとき　$y=2x$



したがって，求める面積 S は右の図から

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{0}\{(x^2-2x+4)-(-6x)\}\,dx+\int_{0}^{2}\{(x^2-2x+4)-2x\}\,dx\\&=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{0}^{2}=\mathbf{\frac{16}{3}}\end{aligned}$$

別解 接線の方程式を $y=mx$ とおき，これと放物線の方程式から y を消去すると

$$x^2-2x+4=mx\quad\text{ゆえに}\quad x^2-(m+2)x+4=0\quad\cdots(*)$$

上の第 2 式の係数について　$D=(m+2)^2-4\cdot1\cdot4=(m+6)(m-2)=0$

これを解いて　$m=-6,\ 2$　接点の x 座標は，$(*)$ より　$x=\dfrac{m+2}{2}$

よって，2 接線 $y=-6x,\ y=2x$ の接点の x 座標は，それぞれ　$-2,\ 2$

補足 2 接線の交点の x 座標は，2 接点の x 座標の中央である (練習 6.14 の解説).
定積分は，次のように求めることもできる．

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{0}\{(x^2-2x+4)-(-6x)\}\,dx+\int_{0}^{2}\{(x^2-2x+4)-2x\}\,dx\\&=\int_{-2}^{0}(x+2)^2\,dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^2\right]_{0}^{2}=\frac{2^3}{3}-0+0-\frac{(-2)^3}{3}=\mathbf{\frac{16}{3}}\end{aligned}$$

解説 放物線 $y = f(x)$ の x^2 の係数を $a > 0$ とする．放物線上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ における接線を $(\alpha < \beta)$，それぞれ $\ell_1,\ \ell_2$ とすると

$$\ell_1 : y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha), \quad \ell_2 : y = f(\beta) + f'(\beta)(x-\beta)$$

定理 1 により，2 次関数 $f(x)$ を $x = \alpha,\ \beta$ を極として，それぞれ展開すると

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + a(x-\alpha)^2 \quad \cdots ①$$
$$f(x) = f(\beta) + f'(\beta)(x-\beta) + a(x-\beta)^2 \quad \cdots ②$$

ℓ_1 と ℓ_2 の交点 C の x 座標を t とすると，放物線 $y = f(x)$ と 2 接線 $\ell_1,\ \ell_2$ で囲まれた部分の面積 S_1 は，ℓ_1 と ①，ℓ_2 と ② の方程式を対応させて

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_\alpha^t a(x-\alpha)^2\,dx + \int_t^\beta a(x-\beta)^2\,dx \\ &= \left[\ \frac{a}{3}(x-\alpha)^3\ \right]_\alpha^t + \left[\ \frac{a}{3}(x-\beta)^3\ \right]_t^\beta = \frac{a}{3}(t-\alpha)^3 + \frac{a}{3}(\beta-t)^3 \end{aligned}$$

練習 6.14 の解説で示した $t = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ より，$t-\alpha = \beta-t = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$ であるから

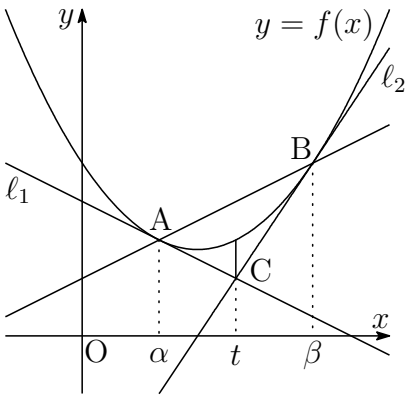
$$S_1 = \frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 + \frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3}$$

直線 AB の方程式を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) + f(\alpha)$$

$h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと

$$h(x) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) + f(\alpha) - f(x)$$



$h(\alpha) = h(\beta) = 0$ より，2 次式 $h(x)$ は $x-\alpha$ および $x-\beta$ を因数にもつ．$h(x)$ の 2 次の係数は $-f(x)$ の 2 次の係数 $-a$ であるから

$$h(x) = -a(x-\alpha)(x-\beta)$$

となる．直線 AB と放物線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 S_2 は

$$S_2 = \int_\alpha^\beta h(x)\,dx = -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \boldsymbol{\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

以上の結果から　$S_1 : S_2 = 1 : 2$　　終

章末 6.16 $f(x)=x^3+2x^2-3x$ とすると，接線 ℓ の傾きは $f'(-2)$ である．

$f'(x)=3x^2+4x-3$ であるから　　$f'(-2)=3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)-3=1$

よって，接線 ℓ の方程式は

$$y-6=x+2 \quad \text{すなわち} \quad y=x+8$$

曲線 $C: y=f(x)$ と接線 ℓ の交点の x 座標を求める．

方程式 $x^3+2x^2-3x=x+8$ を整理すると

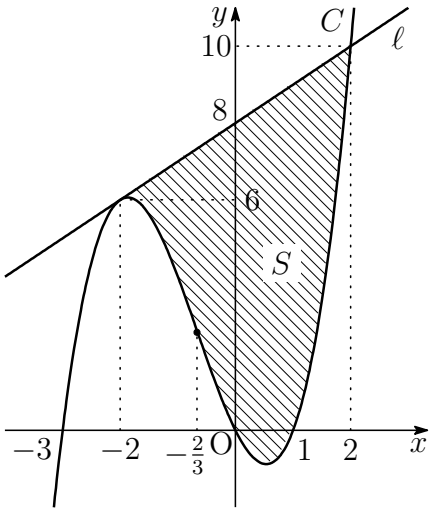
$$x^3+2x^2-4x-8=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x+2)^2(x-2)=0$$

これを解くと　$x=-2,\ 2$

接線 ℓ が曲線 C と交わる点の x 座標は 2 であり，グラフは，右の図のようになる．



よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-2}^{2}\{(x+8)-(x^3+2x^2-3x)\}\,dx\\
&=\int_{-2}^{2}(-x^3-2x^2+4x+8)\,dx=\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+2x^2+8x\right]_{-2}^{2}\\
&=\left(-\frac{2^4}{4}-\frac{2}{3}\cdot2^3+2\cdot2^2+8\cdot2\right)-\left\{-\frac{(-2)^4}{4}-\frac{2}{3}\cdot(-2)^3+2\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{64}{3}}
\end{aligned}$$

別解 (331 ページの演習 6.3 を参照) 偶数次数の項と奇数次数の項に分けて積分する．

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-2}^{2}\{(x+8)-(x^3+2x^2-3x)\}\,dx\\
&=\int_{-2}^{2}(-x^3-2x^2+4x+8)\,dx\\
&=\int_{-2}^{2}(-2x^2+8)\,dx+\int_{-2}^{2}(x^3+4x)\,dx\\
&=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)\,dx+0=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_{0}^{2}=\boldsymbol{\frac{64}{3}}
\end{aligned}$$

別解 因数分解の結果を利用すると

$$S=\int_{-2}^{2}\{-(x+2)^2(x-2)\}\,dx=\int_{-2}^{2}\{-(x+2)^2\}\{(x+2)-4\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\{-(x+2)^3+4(x+2)^2\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}(x+2)^4+\frac{4}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{2}=\left(-\frac{1}{4}\cdot 4^4+\frac{4}{3}\cdot 4^3\right)-0=\mathbf{\frac{64}{3}}$$

別解 $h(x)=-(x+2)^2(x-2)$ とおくと，$h(-2)=h(2)=0$．定理 5 により

$$S=\int_{-2}^{2}h(x)\,dx=\frac{2}{3}\{2-(-2)\}h(0)=\frac{2}{3}\times 4\times 8=\mathbf{\frac{64}{3}}$$

別解 定理 6 により

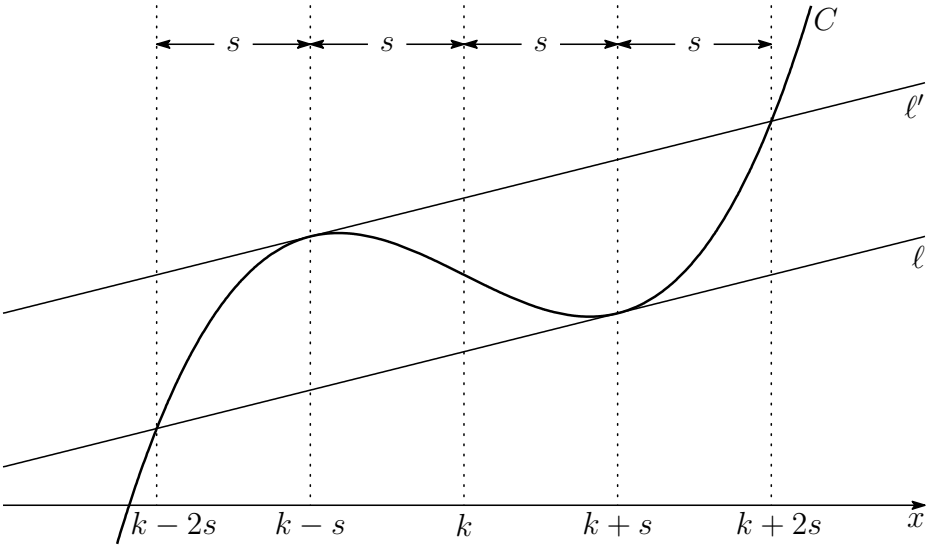
$$S=\int_{-2}^{2}\{-(x+2)^2(x-2)\}\,dx=\int_{-2}^{2}(x+2)^2(2-x)\,dx=\frac{1}{12}\{2-(-2)\}^4=\mathbf{\frac{64}{3}}$$

補足 $f''(x)=6x+4$ より，$f''(x)=0$ とすると，変曲点の x 座標は　$x=-\dfrac{2}{3}$

$x<-\dfrac{2}{3}$ で C は上に凸，$-\dfrac{2}{3}<x$ で C は下に凸．点 $(-2,\ 6)$ ではグラフは上に凸であるから，接線は，求める面積の上側にある．

下図を本題に適用すると (3 次関数のグラフと接線を参照)

$$k-s=-2,\quad k=-\frac{2}{3}\quad \text{ゆえに}\quad s=\frac{4}{3},\quad k+2s=2$$



積の微分法

導関数について，次の公式が成り立つ．

導関数の公式

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

1 $\boldsymbol{\{k\,f(x)\}' = k\,f'(x)}$　　ただし，k は定数

2 $\boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)}$

3 $\boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}' = f'(x)-g'(x)}$

4 $\boldsymbol{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$

1〜3 は，すでに学んだ公式である．そこで，**4** を証明する．

4 の証明

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから　　$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

よって　　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　　**証終**

Ex 6.4 $y=(x^2-3)(4x^2+5)$ の微分

$$\begin{aligned} y' &= (x^2-3)'(4x^2+5)+(x^2-3)(4x^2+5)' \\ &= 2x(4x^2+5)+(x^2-3)\cdot 8x \\ &= 8x^3+10x+8x^3-24x \\ &= 16x^3-14x \end{aligned}$$

演習 6.4 関数 $y = f(x)g(x)h(x)$ の導関数は

$$y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

であることを示せ．また，これを用いて，次の関数を微分せよ．

$$y = (x^2 + 1)(x + 2)(3x - 4)$$

解答 $y = \{f(x)g(x)\}h(x)$ より

$$\begin{aligned} y' &= \{f(x)g(x)\}'h(x) + \{f(x)g(x)\}h'(x) \\ &= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

$y = (x^2 + 1)(x + 2)(3x - 4)$ を微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x + 2)(3x - 4) + (x^2 + 1)\cdot 1\cdot(3x - 4) + (x^2 + 1)(x + 2)\cdot 3 \\ &= 12x^3 + 6x^2 - 10x + 2 \end{aligned}$$

演習 6.5 次の導関数を求めよ．

(1) $y = f(x)^2$　　(2) $y = f(x)^3$

解答 (1) $y = f(x)f(x)$ より

$$\begin{aligned} y' &= f'(x)f(x) + f(x)f'(x) \\ &= 2f(x)f'(x) \end{aligned}$$

(2) $y = f(x)f(x)f(x)$ より

$$\begin{aligned} y' &= f'(x)f(x)f(x) + f(x)f'(x)f(x) + f(x)f(x)f'(x) \\ &= 3f(x)^2f'(x) \end{aligned}$$

Ex 6.5 $y = f(x)^4$ の導関数を $y = f(x)^3f(x)$ と考えて求めることもできる．

$$\begin{aligned} y' &= \{f(x)^3\}'f(x) + f(x)^3f'(x) \\ &= 3f(x)^2f'(x)f(x) + f(x)^3f'(x) \\ &= 4f(x)^3f'(x) \end{aligned}$$

数学的帰納法を用いると，n を自然数とすると，$y = f(x)^n$ の導関数は

$$\boldsymbol{y' = nf(x)^{n-1}f'(x)}$$

であることを証明できる．

また，導関数の定義を用いて証明する場合は，問題 6.3 の解説で示した極限

$$\lim_{s\to t}\frac{s^n-t^n}{s-t}=nt^{n-1}$$

を用いる．$t=f(x),\ s=f(x+h)$ とおくと，

$$\lim_{h\to 0}\frac{s-t}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

$h\to 0$ のとき，$s\to t$ であるから，$y=f(x)^n$ の導関数は

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{s^n-t^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{s^n-t^n}{s-t}\cdot\frac{s-t}{h}=nf(x)^{n-1}f'(x)$$

275 ページの問題 6.3 は，この公式を用いると簡単に求めることができる．

- $y=(ax+b)^2$ の導関数は

$$\begin{aligned}y'&=2(ax+b)(ax+b)'\\&=2a(ax+b)\end{aligned}$$

- $y=(ax+b)^3$ の導関数は

$$\begin{aligned}y'&=3(ax+b)^2(ax+b)'\\&=3a(ax+b)^2\end{aligned}$$