令和５年度

高等学校　数学III

電子教科書

2025年2月6日

熊本県立第二高等学校数学科

スライド

第 1 章　関数　[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

1.1 関数
- 1.1.1　分数関数　教科書 pp.8-11
- 1.1.2　無理関数　教科書 pp.12-15
- 1.1.3　逆関数と合成関数　教科書 pp.16-20
- 1.1.4　問題　教科書 p.21

1.2　章末問題　教科書 p.22

第 2 章　極限　[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

2.1 数列の極限
- 2.1.1　数列の極限　教科書 pp.24-30
- 2.1.2　無限等比数列　教科書 pp.31-34
- 2.1.3　無限級数　教科書 pp.35-42
- 2.1.4　問題　教科書 p.43

2.2 関数の極限
- 2.2.1　関数の極限 (1)　教科書 pp.45-51
- 2.2.2　関数の極限 (2)　教科書 pp.52-55
- 2.2.3　三角関数と極限　教科書 pp.56-60
- 2.2.4　関数の連続性　教科書 pp.61-65
- 2.2.5　問題　教科書 p.66

2.3　章末問題　教科書 p.67-68

第 3 章　微分法　[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

3.1 導関数
- 3.1.1　微分係数と導関数　教科書 pp.70-73
- 3.1.2　導関数の計算　教科書 pp.74-82
- 3.1.3　問題　教科書 p.83

3.2 いろいろな関数の導関数
- 3.2.1　いろいろな関数の導関数　教科書 pp.84-91
- 3.2.2　第 n 次導関数　教科書 p.92
- 3.2.3　曲線の方程式と導関数　教科書 pp.93-96
- 3.2.4　問題　教科書 p.97

3.3　章末問題　教科書 pp.98-99

第 4 章　微分法の応用　[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

4.1 導関数の応用
- 4.1.1　接線の方程式　教科書 pp.102-105
- 4.1.2　平均値の定理　教科書 pp.106-107
- 4.1.3　関数の値の変化　教科書 pp.108-114
- 4.1.4　関数のグラフ　教科書 pp.115-123
- 4.1.5　問題　教科書 p.124

4.2 いろいろな応用
- 4.2.1　方程式，不等式への応用　教科書 pp.125-126
- 4.2.2　速度と加速度　教科書 pp.127-130
- 4.2.3　近似式　教科書 pp.131-132
- 4.2.4　問題　教科書 p.133

4.3　章末問題　教科書 p.134-135

第 5 章　積分法とその応用　[内容 ①] [内容 ②] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

5.1 不定積分
- 5.1.1　不定積分とその基本性質　教科書 pp.138-141
- 5.1.2　置換積分法と部分積分法　教科書 pp.142-147
- 5.1.3　いろいろな関数の不定積分　教科書 pp.148-149
- 5.1.4　問題　教科書 p.150

5.2 定積分
- 5.2.1　定積分とその基本性質　教科書 pp.151-153
- 5.2.2　置換積分法と部分積分法　教科書 pp.154-160
- 5.2.3　定積分のいろいろな問題　教科書 pp.161-167
- 5.2.4　問題　教科書 p.168

5.3 積分法の応用
- 5.3.1　面積　教科書 pp.169-173
- 5.3.2　体積　教科書 pp.174-180
- 5.3.3　道のり　教科書 pp.181-184
- 5.3.4　曲線の長さ　教科書 pp.185-187
- 5.3.5　問題　教科書 p.188

5.4　章末問題　教科書 pp.189-190

目 次

スライド i

第 1 章　関数 **1**
1.1 関数 . . . 1
1.1.1 分数関数 . . . 1
1.1.2 無理関数 . . . 5
1.1.3 逆関数と合成関数 . . . 9
1.1.4 問題 . . . 15
1.2 章末問題 . . . 16
1.2.1 章末問題 A . . . 16
1.2.2 章末問題 B . . . 17

第 2 章　極限 **19**
2.1 数列の極限 . . . 19
2.1.1 数列の極限 . . . 19
2.1.2 無限等比数列 . . . 26
2.1.3 無限級数 . . . 31
2.1.4 問題 . . . 40
2.2 関数の極限 . . . 42
2.2.1 関数の極限 (1) . . . 42
2.2.2 関数の極限 (2) . . . 52
2.2.3 三角関数と極限 . . . 56
2.2.4 関数の連続性 . . . 62
2.2.5 問題 . . . 67
2.3 章末問題 . . . 69
2.3.1 章末問題 A . . . 69
2.3.2 章末問題 B . . . 72

第 3 章　微分法 **75**
3.1 導関数 . . . 75
3.1.1 微分係数と導関数 . . . 75
3.1.2 導関数の計算 . . . 79
3.1.3 問題 . . . 89
3.2 いろいろな関数の導関数 . . . 91
3.2.1 いろいろな関数の導関数 . . . 91

3.2.2 第 n 次導関数 . . . 99
3.2.3 曲線の方程式と導関数 . . . 100
3.2.4 問題 . . . 104
3.3 章末問題 . . . 107
3.3.1 章末問題 A . . . 107
3.3.2 章末問題 B . . . 109

第 4 章 微分法の応用 111
4.1 導関数の応用 . . . 111
4.1.1 接線の方程式 . . . 111
4.1.2 平均値の定理 . . . 118
4.1.3 関数の値の変化 . . . 121
4.1.4 関数のグラフ . . . 132
4.1.5 問題 . . . 144
4.2 いろいろな応用 . . . 146
4.2.1 方程式，不等式への応用 . . . 146
4.2.2 速度と加速度 . . . 148
4.2.3 近似式 . . . 152
4.2.4 問題 . . . 155
4.3 章末問題 . . . 156
4.3.1 章末問題 A . . . 156
4.3.2 章末問題 B . . . 158

第 5 章 積分法とその応用 159
5.1 不定積分 . . . 159
5.1.1 不定積分とその基本性質 . . . 159
5.1.2 置換積分法と部分積分法 . . . 163
5.1.3 いろいろな関数の不定積分 . . . 169
5.1.4 問題 . . . 171
5.2 定積分 . . . 172
5.2.1 定積分とその基本性質 . . . 172
5.2.2 置換積分法と部分積分法 . . . 176
5.2.3 定積分のいろいろな問題 . . . 184
5.2.4 問題 . . . 192
5.3 積分法の応用 . . . 194
5.3.1 面積 . . . 194
5.3.2 体積 . . . 203
5.3.3 道のり . . . 212
5.3.4 曲線の長さ . . . 216

5.3.5 問題 . . . 220
5.4 章末問題 . . . 222
5.4.1 章末問題 A . . . 222
5.4.2 章末問題 B . . . 226
5.4.3 微分方程式 . . . 228

第 6 章 発展問題 **231**
6.1 相加平均・相乗平均 . . . 231
6.1.1 相加平均・相乗平均・調和平均 . . . 231
6.1.2 相加平均・相乗平均の応用 . . . 234
6.2 極展開 . . . 243
6.2.1 2 次関数の極展開 . . . 243
6.2.2 放物線の接線と面積 . . . 244
6.2.3 放物線の 2 接線と面積 . . . 245
6.3 放物線の面積 . . . 250
6.3.1 相似比を利用した解法 . . . 250
6.3.2 長方形との面積比を利用した解法 . . . 253
6.4 3 次関数のグラフ . . . 255
6.4.1 3 次関数の極展開 . . . 255
6.4.2 3 次関数のグラフと接線 . . . 258
6.4.3 3 次関数の積分公式 . . . 260
6.5 極限 . . . 267
6.5.1 オイラーの定数 . . . 267
6.5.2 ネイピア数 e . . . 270
6.5.3 e の無理性 . . . 273
6.5.4 π の無理性 . . . 275
6.5.5 $\zeta(2),\ \zeta(4)$ . . . 282
6.6 微分法公式 . . . 290
6.6.1 ライプニッツの公式 . . . 290
6.6.2 第 n 階微分方程式 (線形微分方程式) . . . 294
6.6.3 オイラーの公式 (九大理系 2023 年 4 番) . . . 298
6.6.4 線形微分方程式の具体例 . . . 303
6.7 テイラー展開 . . . 308
6.7.1 テイラー展開・マクローリン展開 . . . 308
6.7.2 オイラーの公式 . . . 310
6.8 積分公式 . . . 326
6.8.1 部分積分法 . . . 326
6.8.2 ベータ関数・ガンマ関数 . . . 328

6.8.3 ウォリス (Wallis) の積分 331
6.8.4 ガウス積分 334
6.9 求積法 335
6.9.1 拡縮を用いた求積法 335
6.9.2 バウムクーヘン型求積法 353
6.9.3 パップス・ギュルダンの定理 354
6.9.4 ガウス・グリーンの定理 368
6.9.5 極方程式による求積問題 386
6.10 いろいろな曲線 395
6.10.1 アストロイド 395
6.10.2 焦線 (caustic) 398
6.10.3 懸垂曲線 404
6.10.4 最速降下曲線 406

解答 **415**

第 1 章　関数

1.1　関数

1.1.1　分数関数

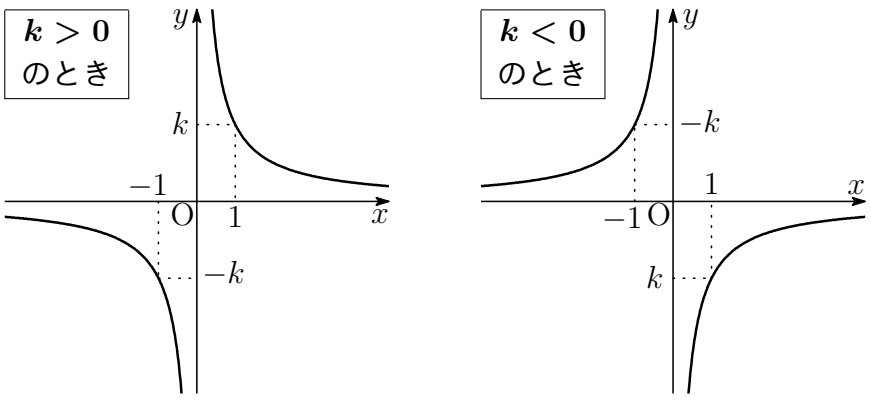
A 》分数関数とそのグラフ

数学 I では多項式，数学 II では分数式の計算について学んだ．また，1 次関数 $y = ax + b$ や 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ など，多項式で表される関数についても学んできた．

x の分数式で表される関数を，x の**分数関数**という．ここでは，この分数関数について調べよう．とくに断りがない場合，分数関数の定義域は，分母を0とするxの値を除く実数 x 全体の集合である．

k を 0 でない定数とする．関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフは下の図のようになり，x 軸と y 軸が漸近線(ぜんきんせん)である．分数関数 $y = \dfrac{k}{x}$ の定義域は $x \neq 0$，値域は $y \neq 0$ である．

注意　「0 を除く実数 x 全体」を「$x \neq 0$」と表している．



補足　上のグラフは，原点 O に関して対称であり，x 軸，y 軸は漸近線である．このように直交する 2 つの漸近線をもつ双曲線を**直角双曲線**という．

[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

練習 1.1 次の関数のグラフをかけ．解

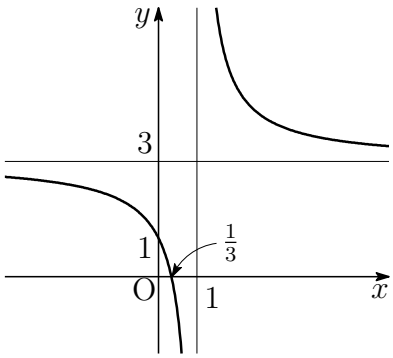
(1)　$y=\dfrac{1}{x}$　　(2)　$y=\dfrac{2}{x}$　　(3)　$y=-\dfrac{3}{x}$

一般に，関数 $y=f(x-p)+q$ のグラフは，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである．

分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフと定義域，値域について調べよう．

例 1.1 関数 $\boldsymbol{y=\dfrac{2}{x-1}+3}$　S

このグラフは，$y=\frac{2}{x}$ のグラフを，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，右の図のようになる．漸近線は，2 直線 $x=1$，$y=3$ である．定義域は $x\neq 1$，値域は $y\neq 3$ である．



分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ については，次のことがいえる．[分数関数とそのグラフ]

分数関数 $\boldsymbol{y=\dfrac{k}{x-p}+q}$

1 グラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線で，漸近線は 2 直線 $x=p$，$y=q$ である．

2 定義域は $x\neq p$，値域は $y\neq q$ である．

練習 1.2 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ．解

(1)　$y=-\dfrac{2}{x}+1$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x-2}-1$　　(3)　$y=\dfrac{2}{x+1}-3$

B》分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

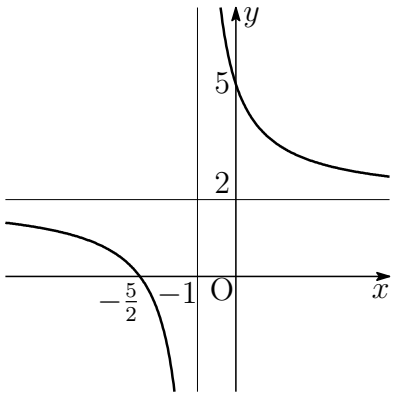
分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフと定義域，値域について調べてみよう．

例題 1.1 関数 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ． S

解答 $\dfrac{2x+5}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+3}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+2$

よって $y=\dfrac{3}{x+1}+2$

したがって，グラフは右の図のようになる．
漸近線は，2 直線 $x=-1$，$y=2$ である．
また，定義域は $x\neq -1$，値域は $y\neq 2$ である．



一般に，$c\neq 0$ のとき，分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形できる．

練習 1.3 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ． 解

(1) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$　　(2) $y=\dfrac{-2x+5}{x-1}$　　(3) $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$

C 》分数関数の応用

応用例題 1.1 関数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ． S

考え方 》 方程式 $\dfrac{2}{x-1}=x$ の解が共有点の x 座標である．

解答 $\dfrac{2}{x-1}=x$ より　　$2=x(x-1)$

すなわち　　$x^2-x-2=0$

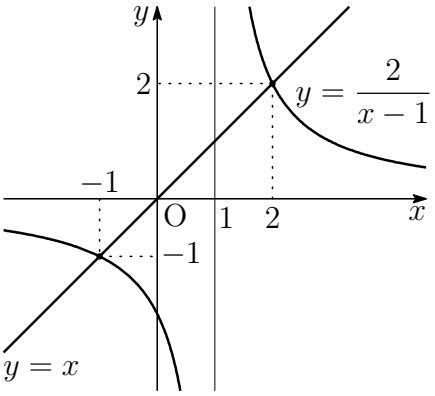
これを解くと　　$x=-1,\ 2$

これが共有点の x 座標である．

$y=x$ に代入して

$x=-1$　のとき　$y=-1$

$x=2$　　のとき　$y=2$



したがって，共有点の座標は　$(-1,-1),\ (2,\ 2)$

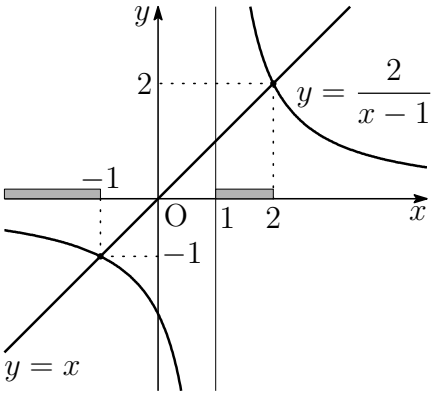
練習 1.4 関数 $y=\dfrac{3}{x+1}$ のグラフと次の直線の共有点の座標を求めよ． 解

(1)　$y=x-1$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x$　　(3)　$y=-3$

不等式 $\dfrac{2}{x-1}>x$　　$\cdots$①

の解は，関数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ のグラフが直線 $y=x$ より上側にある x の値の範囲である．右の図から，不等式 ① の解は

$$x<-1,\quad 1<x<2$$



練習 1.5 次の方程式，不等式を解け． 解

(1)　$\dfrac{2}{x+2}=x+3$　　(2)　$\dfrac{2}{x+2}\leqq x+3$

1.1.2 無理関数

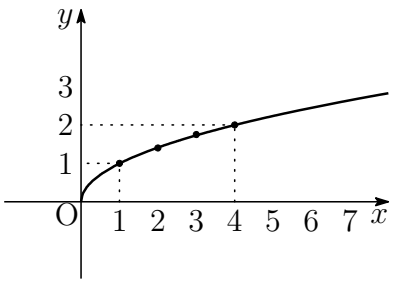
A 》無理関数とそのグラフ

根号 $\sqrt{\ }$ の中に文字を含む式を**無理式**といい，x についての無理式で表された関数を，x の**無理関数**という．とくに断りがない場合，その定義域は，根号の中が0以上となる実数 x 全体である．

無理関数 $y=\sqrt{x}\quad\cdots①$ の定義域は $x \geqq 0$，値域は $y \geqq 0$ である．

無理関数 ① の x と y の対応表は次のようになる．

x	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\cdots$

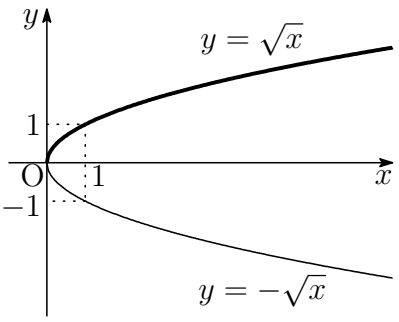


この表の x，y を座標にもつ点 $(x,\ y)$ は，右の図のような曲線上にある．この曲線が無理関数 ① のグラフである．

ここで，① の両辺を 2 乗すると

$$y^2=x\quad\cdots②$$

② は軸が x 軸，頂点が原点である放物線を表すから，① のグラフは，放物線 ② の $y \geqq 0$ の部分，すなわち x 軸より上側の部分である．ただし，原点を含む．

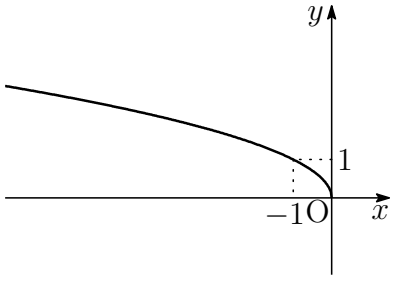


同様に，無理関数 $y=-\sqrt{x}\quad\cdots③$ のグラフは，放物線 ② の $y \leqq 0$ の部分，すなわち x 軸より下側の部分である．ただし，原点を含む．③ の定義域は $x \geqq 0$，値域は $y \leqq 0$ である．③ と ① のグラフは，x 軸に関して対称である．

無理関数

$$y=\sqrt{-x}\quad\cdots④$$

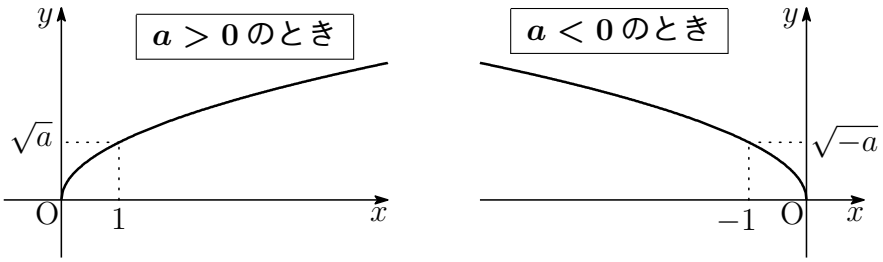
のグラフは，右の図のようになる．
これは，放物線 $y^2=-x$ の $y \geqq 0$ の部分，すなわち x 軸より上側の部分である．
ただし，原点を含む．



④ の定義域は $x \leqq 0$，値域は $y \geqq 0$ である．

← 定義域は $-x \geqq 0$ より $x \leqq 0$

一般に，関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフと特徴は，次のようになる．



無理関数 $y=\sqrt{ax}$ については，次のことがいえる．　[無理関数とそのグラフ]

$a>0$ のとき	$a<0$ のとき
定義域は　$x \geqq 0$,	定義域は $x \leqq 0$,
値域は $y \geqq 0$ で,	値域は $y \geqq 0$ で,
増加関数である．	減少関数である．

練習 1.6 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域と値域を求めよ． 解

(1)　$y=\sqrt{2x}$　　(2)　$y=-\sqrt{2x}$　　(3)　$y=\sqrt{-2x}$

深化 1.1 関数 $y=-\sqrt{-x}$ のグラフをかいてみよう．関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフとの位置関係はどのようになるだろうか． 解

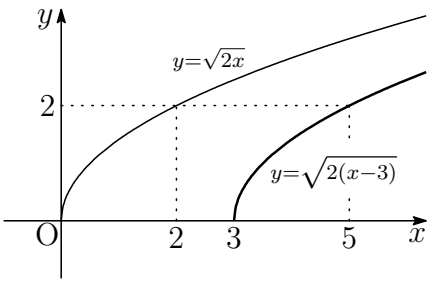
例題 1.2 関数 $y=\sqrt{2x-6}$ のグラフをかけ．また，その定義域と値域を求めよ． S

解答　変形すると

$$y=\sqrt{2(x-3)}$$

このグラフは，$y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，右の図のようになる．

定義域は $x \geqq 3$，値域は $y \geqq 0$ である．



$a \neq 0$ のとき $\sqrt{ax+b}=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}$ であるから，$y=\sqrt{ax+b}$ は $y=\sqrt{a(x-p)}$ の形に変形できる．

一般に，無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}$ について，次のことがいえる．

無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}$

1 グラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを

x 軸方向に p だけ平行移動

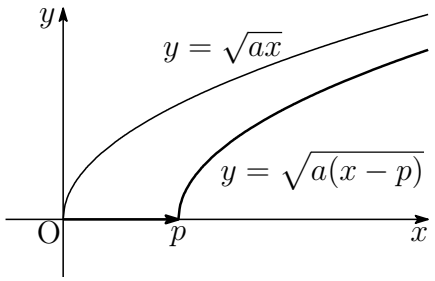
した曲線である．

2 $a>0$ のとき

定義域は $x \geqq p$，値域は $y \geqq 0$

$a<0$ のとき

定義域は $x \leqq p$，値域は $y \geqq 0$



補足 定義域は，$a(x-p) \geqq 0$ を満たす実数 x 全体である．

練習 1.7 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ． 解

(1) $y=\sqrt{x-1}$　　(2) $y=\sqrt{-2x+4}$　　(3) $y=-\sqrt{3x+3}$

B 》無理関数の応用

応用例題 1.2 関数 $y=\sqrt{x+2}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ． S

考え方 》 $\sqrt{x+2}=x$ の両辺を 2 乗した方程式の解は，もとの方程式の解とは限らない．得られた x の値がもとの方程式を満たすかどうかを調べて，解を決定する．

解答　$\sqrt{x+2}=x$　　$\cdots$①

の両辺を 2 乗して整理すると

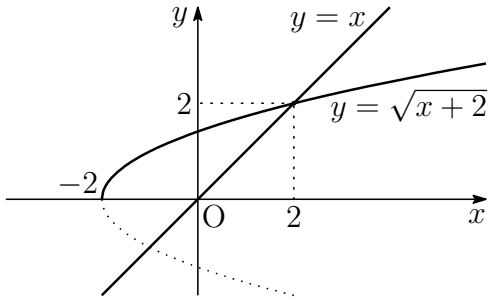
$$x^2-x-2=0$$

これを解いて　　$x=-1,\ 2$

このうち，① を満たすのは $x=2$ で，

このとき ① の両辺の値は 2 である．

よって，共有点の座標は　　$(2,\ 2)$



補足 $x=-1$ は，関数 $y=-\sqrt{x+2}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の x 座標で，方程式 $-\sqrt{x+2}=x$ の解である．

練習 1.8 次の 2 つの関数について，グラフの共有点の座標を求めよ． 解

(1)　$y=\sqrt{2x+2}$，$y=x-3$　　(2)　$y=-\sqrt{x+1}$，$y=x-1$

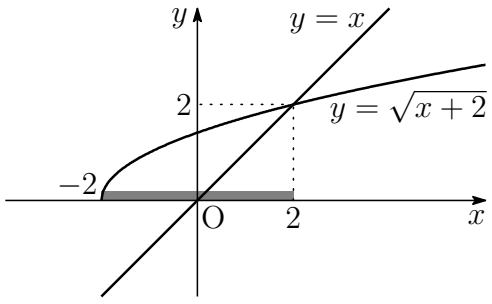
不等式

$$\sqrt{x+2}>x$$

の解は，$y=\sqrt{x+2}$ のグラフが直線 $y=x$ より上側にある x の値の範囲である．

右の図から，不等式 $\sqrt{x+2}>x$ の解は

$$-2\leqq x<2$$



練習 1.9 次の方程式，不等式を解け． 解

(1)　$\sqrt{x-1}=-x+3$　　(2)　$\sqrt{x-1}\leqq -x+3$

1.1.3 逆関数と合成関数

A 》逆関数

2 つの変数 x，y について，x の値を定めると，それに対応して y の値がただ 1 つ定まるとき，y は x の関数である．ここでは，逆に，関数 $y=f(x)$ について，y の値に対応する x の値を考えてみよう．

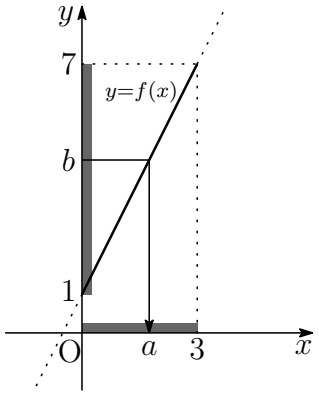
$$f(x)=2x+1 \quad (0 \leqq x \leqq 3) \quad \cdots ①$$

とする．

この関数の定義域は $0 \leqq x \leqq 3$，値域は $1 \leqq y \leqq 7$ である．

$f(x)$ は増加関数であるから，$1 \leqq b \leqq 7$ である値 b に対して，$b=f(a)$ となる a の値がただ 1 つ定まる．$b=2a+1$ から，この a は次の式で表される．

$$a=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$$



一般に，関数 $y=f(x)$ において，値域の中の y の値を定めると，それに対応して x の値がただ 1 つ定まるとき，x は y の関数である．この関数を $x=g(y)$ で表す．このとき，変数 y を x に書き直した関数 $g(x)$ を，もとの関数 $f(x)$ の**逆関数**といい，$\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ で表す．とくに，$f(x)$ が増加関数または減少関数であるとき，その逆関数が存在する．

① の関数 $f(x)$ の逆関数は，次のようになる．

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad (1 \leqq x \leqq 7)$$

関数とその逆関数では，定義域と値域が入れかわる．

逆関数を求めるための一般的な手順は，次のようになる．

$\boldsymbol{f(x)}$ の逆関数 $\boldsymbol{g(x)}$ の求め方

1 $y=f(x)$ を x について解き，$x=g(y)$ の形にする．

2 x と y を入れ替えて，$y=g(x)$ とする．
逆関数 $g(x)$ の定義域は，もとの関数 $f(x)$ の値域と同じにとる．

例 1.2 関数 $y=\sqrt{x}$ の逆関数 S

もとの関数の値域は，$y \geqq 0$ である．

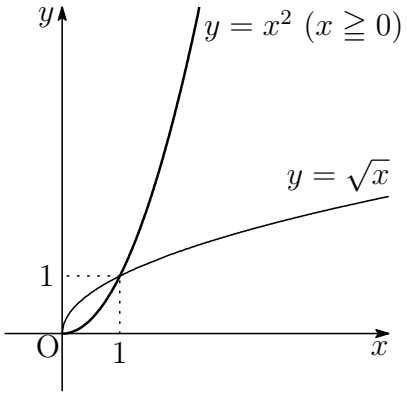
$y=\sqrt{x}$ を x について解くと

$$x=y^2 \quad (y \geqq 0)$$

x と y を入れ替えて

$$y=x^2 \quad (x \geqq 0)$$

これが，$y=\sqrt{x}$ の逆関数である．



注意 関数 $y=\sqrt{x}$ では，定義域 $x \geqq 0$ の表示は省略することが多い．

例 1.3 指数関数 $y=2^x$ の逆関数 S

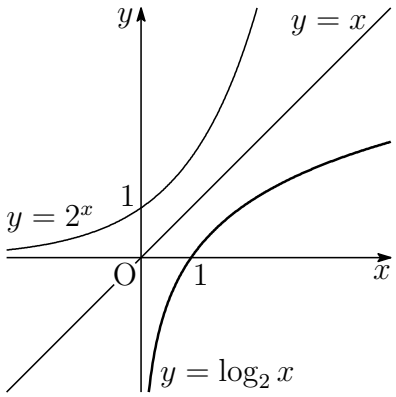
$y=2^x$ を x について解くと

$$x=\log_2 y \quad (y>0)$$

x と y を入れ替えて

$$y=\log_2 x \quad (x>0)$$

これが指数関数 $y=2^x$ の逆関数である．



注意 関数 $y=\log_2 x$ $(x>0)$ では，定義域の表示は省略することが多い．

練習 1.10 次の関数の逆関数を求めよ． 解

(1) $y=3x-1$ $(0 \leqq x \leqq 2)$　　(2) $y=-\sqrt{x}$

(3) $y=3^x$　　(4) $y=\log_4 x$

例題 1.3 関数 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ の逆関数を求めよ． S

解答 $\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+1$ であるから，関数 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ の値域は $y\neq 1$ である．

$y(x-2)=x+1$ より　　$(y-1)x=2y+1$

ここで，$y\neq 1$ であるから　　$x=\dfrac{2y+1}{y-1}$

よって，求める逆関数は　　$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

練習 1.11 次の関数の逆関数を求めよ． 解

(1) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$　　(2) $y=\dfrac{-x+2}{x+3}$

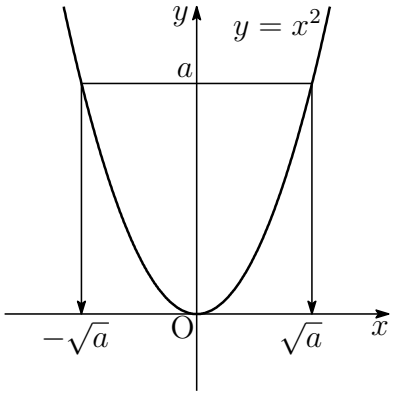
関数が逆関数をもたない場合もある．

例 1.4 関数 $y=x^2$ の逆関数 S

$y=x^2$ を x について解くと

$$x=\pm\sqrt{y}$$

この場合，y の値を定めても x の値はただ 1 つには定まらない．よって，関数 $y=x^2$ は逆関数をもたない．



注意 定義域を制限した関数 $y=x^2$ $(x\geqq 0)$ は逆関数をもつ．その逆関数は $y=\sqrt{x}$ である．

練習 1.12 次の関数の逆関数を求めよ． 解

(1) $y=x^2+2$ $(x\geqq 0)$　　(2) $y=-x^2$ $(x\leqq 0)$

B 》逆関数の性質

逆関数の定義から，次のことが成り立つ．

> 関数 $\boldsymbol{f(x)}$ が逆関数 $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ をもつとき
>
> $$\boldsymbol{b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)}$$

例 1.5 関数 $f(x)$ が逆関数をもち，$f(4) = 2$ であるとき　S

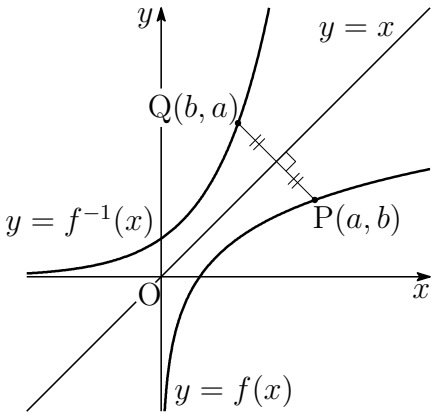
$$f^{-1}(2) = 4$$

練習 1.13 $a \neq 0$ とする．関数 $f(x) = ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(2) = 4$，$f^{-1}(1) = -4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ．　解

例 1.2 や例 1.3 の図からもわかるように，一般に次のことが成り立つ．

> 関数 $\boldsymbol{y = f(x)}$ のグラフとその逆関数 $\boldsymbol{y = f^{-1}(x)}$ のグラフは，
> 直線 $\boldsymbol{y = x}$ について対称である．

証明　$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$ が成り立つから，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が関数 $y = f(x)$ のグラフ上にあることと，点 $\mathrm{Q}(b,\ a)$ が関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上にあることとは同値である．
また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と点 $\mathrm{Q}(b,\ a)$ は，直線 $y = x$ に関して対称である．
よって，関数 $y = f(x)$ のグラフとその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y = x$ について対称である．　**証終**



練習 1.14 次の関数およびその逆関数のグラフを同じ図中にかけ．　解

(1)　$y = \sqrt{-x}$　　(2)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

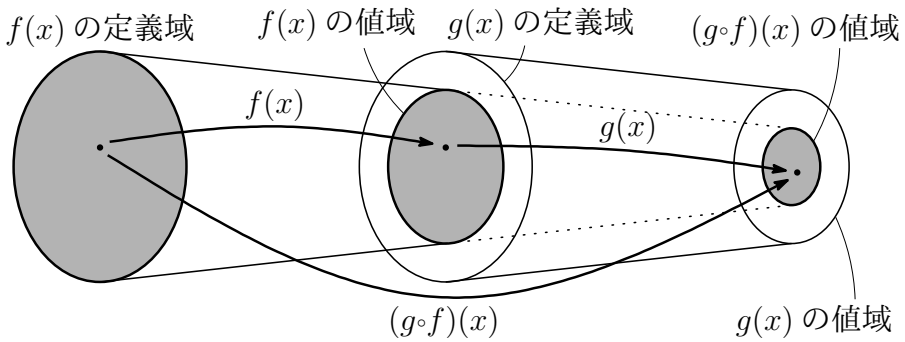
C》合成関数

2 つの関数 $f(x)=x-1$，$g(x)=x^2$ について，$g(f(x))$ を

$$g(f(x))=g(x-1)=(x-1)^2$$

のように考えると，$g(f(x))$ は x に $(x-1)^2$ を対応させる関数といえる．

一般に，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について，$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれているとき，新しい関数 $g(f(x))$ が考えられる．この関数を，$f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という．$g(f(x))$ を $\boldsymbol{(g\circ f)(x)}$ とも書く．



なお，2 つの関数 $f(x)=x-1$，$g(x)=x^2$ について，$(f\circ g)(x)$ は次のようになる．

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2-1$$

注意 一般に，$(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ は同じ関数ではない．

例題 1.4 $f(x)=x+1$，$g(x)=2^x$ について，次の合成関数を求めよ． S

(1) $(g\circ f)(x)$ (2) $(f\circ g)(x)$

解答 (1) $f(x)$ の値域は実数全体で，$g(x)$ の定義域と同じである．

よって $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=2^{x+1}$

(2) $g(x)$ の値域は正の数全体で，$f(x)$ の定義域に含まれる．

よって $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2^x)=2^x+1$

練習 1.15　$f(x)=x^2$，$g(x)=\log_2(x+1)$，$h(x)=2^x-1$ について，次の合成関数を求めよ．解

(1)　$(g\circ f)(x)$

(2)　$(f\circ g)(x)$

(3)　$(g\circ h)(x)$

注意　$f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$ のとき，$f(x)$ の値域は $g(x)$ の定義域に含まれないが，$f(x)$ の定義域を $x\neq -1$ に制限すると $g(f(x))$ を求めることができる．すなわち，$g(f(x))=\dfrac{1}{x+1}$ $(x\neq -1)$ である．

また，関数 $f(x)$ の逆関数が $g(x)$ であるとき，$(f\circ g)(x)$，$(g\circ f)(x)$ はそれぞれの定義域において $(f\circ g)(x)=x$，$(g\circ f)(x)=x$ となる．

1.1.4 問題

問題 1.1 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ． 解

(1) $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ (2) $y = \dfrac{4x}{2x-1}$ → p.3 例題 1.1

問題 1.2 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ． 解

(1) $y = \sqrt{2-x}$ (2) $y = -\sqrt{2x+1}$ → p.6 例題 1.2

問題 1.3 次の方程式，不等式を解け． 解 → p.4, 8

(1) $\dfrac{2x-4}{x-1} = x-2$ (2) $\dfrac{2x-4}{x-1} \leqq x-2$

(3) $\sqrt{x-1} = 7-x$ (4) $\sqrt{x-1} \leqq 7-x$

問題 1.4 次の関数のグラフ上に点 $(2, -a)$ があるように，定数 a の値を定めよ． 解

(1) $y = \dfrac{3x-a}{x-a}$ (2) $y = \sqrt{3x-a}$

問題 1.5 次の関数の逆関数を求めよ． 解 → p.10, 11

(1) $y = \dfrac{x}{x-1}$ (2) $y = \sqrt{1-x}$

問題 1.6 関数 $f(x) = 4^x$，$g(x) = \log_2 x$ について，次の合成関数を求めよ． 解

(1) $(g \circ f)(x)$ (2) $(f \circ g)(x)$ → p.13 例題 1.4

問題 1.7 関数 $y = 3$ が，逆関数をもてばそれを求め，逆関数をもたなければその理由を説明せよ． 解

1.2　章末問題

1.2.1　章末問題 A

章末 1.1 関数 $y = \dfrac{3x+4}{x+2}$ のグラフは，関数 $y = \dfrac{x+3}{x+5}$ のグラフを，どのように平行移動したものか． 解

章末 1.2 次の関数のグラフをかけ．また，その値域を求めよ． 解

(1) $y = \dfrac{3+x}{3-x} \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = -\sqrt{2x+6} \quad (-1 \leqq x \leqq 5)$

章末 1.3 $k \neq 0$ とする．関数 $f(x) = kx+k^2$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(1) = 6$，$f^{-1}(2) = -1$ であるとき，定数 k の値を求めよ． 解

1.2.2 章末問題 B

章末 1.4 次の不等式を解け. 解

(1) $\sqrt{3x-5} = x-1$

(2) $\sqrt{3x-5} < x-1$

(3) $\sqrt{1-2x} = -x+1$

(4) $\sqrt{1-2x} \geqq -x+1$

章末 1.5 関数 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-a}$ について，$f^{-1}(x) = f(x)$ が成り立つように，定数 a の値を定めよ. 解

章末 1.6 2 つの関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$，$g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ について，次の合成関数を求めよ. 解

(1) $f(g(x))$

(2) $g(g(x))$

ヒント

1 漸近線の位置関係を利用する.

3 $f^{-1}(a) = b \iff a = f(b)$

5 $y = \dfrac{x+1}{x-a}$ として逆関数を求め，恒等式の性質から a の値を定める.

第 2 章　極限

2.1　数列の極限

2.1.1　数列の極限

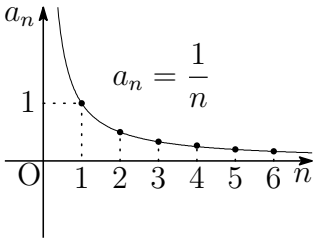
A 》数列と極限

数を一列に並べたものを数列といい，数列における各数を項という．数列の項は，最初の項を初項，n 番目の項を第 n 項という．

数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$ を記号で $\{a_n\}$ と書くこともある．a_1 が初項，a_n が第 n 項である．以下では，項が限りなく続く**無限数列**を考える．

たとえば，無限数列　　$1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots$　　①

においては，n を限りなく大きくすると，第 n 項は 0 に限りなく近づく．



このように，無限数列において，n を限りなく大きくするに従って第 n 項がどのようになっていくかを調べることにしよう．

一般に，数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n がある値 α に限りなく近づくならば，$\{a_n\}$ は α に**収束**する，または $\{a_n\}$ の**極限**は α であるという．また，値 α を $\{a_n\}$ の**極限値**という．

このことを，記号では次のように書き表す[1]．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow \alpha$$

たとえば，数列 ① では，次のようになる．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{または} \quad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

[1] 記号 ∞ は「無限大」と読む．∞ は，値すなわち数を表すものではない．

例 2.1　(1) 数列 1.1，1.01，1.001，$\cdots$，$1+(0.1)^n$，$\cdots$　S
は，1 に収束する．　$\leftarrow \lim_{n\to\infty}\{1+(0.1)^n\}=1$
すなわち，この数列の極限値は 1 である．

(2) 数列 -0.1，0.01，-0.001，$\cdots$，$(-0.1)^n$，$\cdots$
は，各項の符号は負，正，負，$\cdots$ と交互に変わりながら数列は 0 に収束する．　$\leftarrow \lim_{n\to\infty}\{(-0.1)^n\}=0$
すなわち，この数列の極限値は 0 である．

1 つの数 c が無限に続く数列 c，c，c，$\cdots$，c，$\cdots$ は c に収束し，その極限値は c である．すなわち，$\lim_{n\to\infty} c = c$ である．

練習 2.1　次の数列の極限値をいえ．　解

(1) $\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\cdots$，$\dfrac{n+1}{n}$，$\cdots$

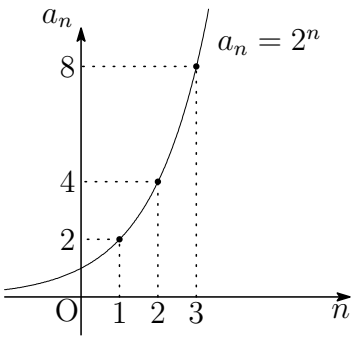
(2) -1，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{3}$，$\cdots$，$\dfrac{(-1)^n}{n}$，$\cdots$

(3) $\cos\pi$，$\cos 3\pi$，$\cos 5\pi$，$\cdots$，$\cos(2n-1)\pi$，$\cdots$

B 》収束しない数列

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は**発散**するという．発散する数列には次のように 3 つの場合がある．

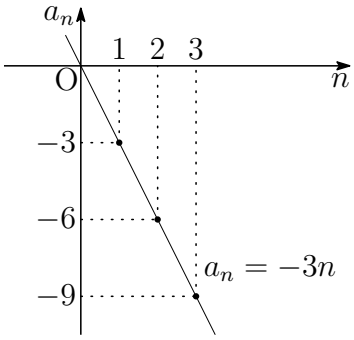
［1］　数列 2，4，8，$\cdots$，2^n，$\cdots$
では，n を限りなく大きくすると，2^n の値は，限りなく大きくなる．



［1］のような場合，数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散**する，または $\{a_n\}$ の**極限は正の無限大**であるといい，次のように書き表す．

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$　　または　　$n \longrightarrow \infty$ のとき　$a_n \longrightarrow \infty$

［2］ 数列 -3，-6，-9，$\cdots$，$-3n$，$\cdots$
では，n を限りなく大きくすると，$-3n$ の値は負で，絶対値は限りなく大きくなる．



［2］のような場合，数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散**する，または $\{a_n\}$ の**極限は負の無限大**であるといい，次のように書き表す．

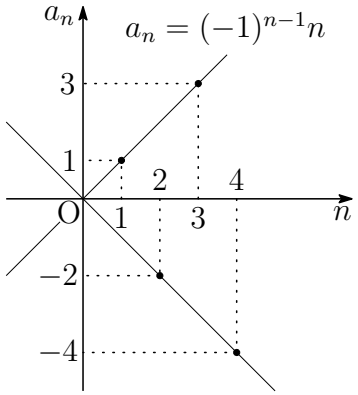
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{または} \qquad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow -\infty$$

［1］,［2］の数列については，次のように書き表される．

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} (-3n) = -\infty$$

注意 数列の極限が ∞ または $-\infty$ の場合，これらを極限値とはいわない．

［3］ 数列 -1，1，-1，$\cdots$，$(-1)^n$，$\cdots$
では，n を限りなく大きくすると，$(-1)^n$ の値は収束しない．また，正の無限大に発散もせず，負の無限大に発散もしない．



［3］のような場合，数列は**振動**するという．

数列 $\{a_n\}$ の収束，発散についてまとめると，次のようになる．

数列の収束・発散

収束	値 α に収束	$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$	$\cdots$	極限は	α
発散 **(収束しない)**	正の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\cdots$	極限は	∞
	負の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\cdots$	極限は	$-\infty$
	振動		$\cdots$	極限は	ない

練習 2.2 第 n 項が次の式で表される数列について，その極限を調べよ． 解

(1) $2n$ (2) $-\dfrac{1}{n}$ (3) $-n^2$ (4) $1+(-1)^n$

C》数列の極限の性質 (1)

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束するとき，次のことが成り立つ．

数列の極限の性質 (1)

数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．

1　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} k\,a_n = k\,\alpha}$　　ただし，k は定数

2　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta}$，　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta}$

3　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta}$

4　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}}$　　ただし，$\beta \neq 0$

例 2.2　$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -3$ のとき　S

$$\lim_{n\to\infty} (3a_n + b_n) = 3\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 3\cdot 2 + (-3) = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - 2) = \lim_{n\to\infty} a_n - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n + 4}{a_n - 3} = \frac{\lim_{n\to\infty} (b_n + 4)}{\lim_{n\to\infty} (a_n - 3)} = \frac{-3 + 4}{2 - 3} = -1$$

練習 2.3　$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -2$ のとき，次の極限値を求めよ．　解

(1)　$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)$　　(2)　$\lim_{n\to\infty} (3a_n + 2b_n)$　　(3)　$\lim_{n\to\infty} (a_n - 1)$

(4)　$\lim_{n\to\infty} a_n b_n$　　(5)　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n + 5}{2a_n - 1}$　　(6)　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ であるとき,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$$

は明らかである. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ と $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ はどうなるだろうか.

例 2.3 (1) $\lim_{n\to\infty}(n^2 - 3n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \dfrac{3}{n}\right) = \infty$ ← $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{3}{n}\right) = 1$ S

(2) $\lim_{n\to\infty}(n^2 - 4n^3) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(\dfrac{1}{n} - 4\right) = -\infty$ ← $\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} - 4\right) = -4$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$ ← 分母が 0 以外の値に収束するように分母と分子を n で割る.

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n^2 - 2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{3}{n}}{1 - \dfrac{2}{n^2}} = 0$ ← 分母と分子を n^2 で割る.

練習 2.4 次の極限を求めよ. 解

(1) $\lim_{n\to\infty}(2n^3 - n^2)$

(2) $\lim_{n\to\infty}(n - 3n^2)$

(3) $\lim_{n\to\infty}(2n - n^3)$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3n-2}$

(5) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n-1}{n^2+3}$

(6) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2n}{2n+1}$

深化 2.1 p を整数とするとき，数列 $\left\{\dfrac{n^3+2n}{n^p}\right\}$ の極限が p の値によってどのように変化するか調べてみよう． 解

例題 2.1 次の極限を求めよ． S

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

解答
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

練習 2.5 次の極限を求めよ． 解

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

これまで調べたように，$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ であるとき，$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ や $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ はいろいろな場合が考えられる．

D 》 数列の極限の性質 (2)

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の極限について，さらに次のことが成り立つ．

数列の極限の性質 (2)

数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．

5 すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば $\alpha \leqq \beta$

6 すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

注意 性質 **6** を「はさみうちの原理」ということがある．

上の **5** において，常に $a_n < b_n$ でも，$\alpha = \beta$ の場合がある．

たとえば，$a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$，$b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ では，$a_n < b_n$ であるが，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

[数列の極限と大小関係]

また，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ のとき，次のことも成り立つ．

すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

応用例題 2.1 極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sin\dfrac{n\pi}{3}$ を求めよ． S

考え方 》 $-1 \leqq \sin\dfrac{n\pi}{3} \leqq 1$ であることから，上の性質 **6** を使う．

解答 $-1 \leqq \sin\dfrac{n\pi}{3} \leqq 1$ より $\quad -\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{3} \leqq \dfrac{1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3} = 0$$

練習 2.6 θ を定数とするとき，次の極限値を求めよ． 解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$$

深化 2.2 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを，$-|a_n| \leqq a_n \leqq |a_n|$ が成り立つことを利用して示してみよう． 解

2.1.2　無限等比数列

A 》数列 $\{r^n\}$ の極限

初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列を等比数列，r を公比といい，項が無限に続く等比数列を**無限等比数列**という．

初項 r，公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限を調べてみよう．

［1］$r>1$ のとき　　$r=1+h$ とおくと　　$h>0$，$r^n=(1+h)^n$

二項定理により　　$(1+h)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n$

$$=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n$$

$h>0$ であるから　　$r^n \geqq 1+nh$

$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ であるから　　$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

［2］$r=1$ のとき　　$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 1^n=\lim_{n\to\infty} 1=1$

［3］$0<r<1$ のとき　　$\dfrac{1}{r}=s$ とおくと　　$s>1$，$r^n=\dfrac{1}{s^n}$

［1］により，$\lim_{n\to\infty} s^n=\infty$ であるから　　$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{s^n}=0$

［4］$r=0$ のとき　　$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 0^n=\lim_{n\to\infty} 0=0$

［5］$-1<r<0$ のとき　　$-r=s$ とおくと　　$0<s<1$，$|r^n|=s^n$

［3］により，$\lim_{n\to\infty} s^n=0$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$

よって　　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

［6］$r=-1$ のとき　　数列 $\{r^n\}$ は，-1，1，-1，$\cdots$ となる．

よって，数列 $\{r^n\}$ は振動する．すなわち，極限はない．

［7］$r<-1$ のとき　　$-r=s$ とおくと　　$s>1$，$r^n=(-1)^n s^n$

［1］により，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty} s^n=\infty$ で，数列 $\{r^n\}$ の項の符号は交互に変わる．よって，数列 $\{r^n\}$ は振動する．すなわち，極限はない．

数列 $\{r^n\}$ の極限についてまとめると，次のようになる．

数列 $\{r^n\}$ の極限

$r > 1$ のとき	$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$
$r = 1$ のとき	$\lim_{n\to\infty} r^n = 1$
$\lvert r\rvert < 1$ のとき	$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$
$r \leqq -1$ のとき	振動する　・・・　極限はない

例 2.4 (1) 数列 $\{(\sqrt{2})^n\}$ では $\sqrt{2} > 1$ であるから $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2})^n = \infty$ S

(2) 数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ では $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ であるから $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

(3) 数列 $\{(-2)^n\}$ では $-2 < -1$ であるから，極限はない．

練習 2.7 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ． 解

(1) $(\sqrt{3})^n$　　(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

(3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$　　(4) $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

B 》 数列 $\{r^n\}$ の極限の応用

上で示した「数列 $\{r^n\}$ の極限」から，次のことが成り立つ．

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は，$-1 < r \leqq 1$ である．

例 2.5 数列 $\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^n\right\}$ が収束するための必要十分条件は S

$$-1 < \frac{x}{2} \leqq 1 \qquad \text{すなわち} \qquad -2 < x \leqq 2$$

極限値は $-2 < x < 2$ のとき 0，$x = 2$ のとき 1 である．

練習 2.8 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ．また，そのときの極限値を求めよ． 解

例題 2.2 次の極限を求めよ． S

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^n}{4^n-3^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}$

解答　(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^n}{4^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=4$　← 分母が 0 以外の値に収束するように分母と分子を 4^n で割る．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\infty$　← 分母と分子を 3^n で割る．

練習 2.9 次の極限を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}$

応用例題 2.2 数列 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の場合について求めよ． S

(1) $|r|<1$ (2) $r<-1$

考え方》 (2) 分母が 0 以外の値に収束するように変形する．

$$\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}$$

解答 (1) $|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=0$$

(2) $r<-1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

練習 2.10 数列 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ． 解

(1) $r>1$ (2) $r=1$

(3) $|r|<1$ (4) $r<-1$

C》漸化式で表された数列の極限

例題 2.3 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．　S

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

解答 与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

よって，数列 $\{a_n - 2\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である．

その初項は，$a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$ であるから

$$a_n - 2 = (-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = (-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

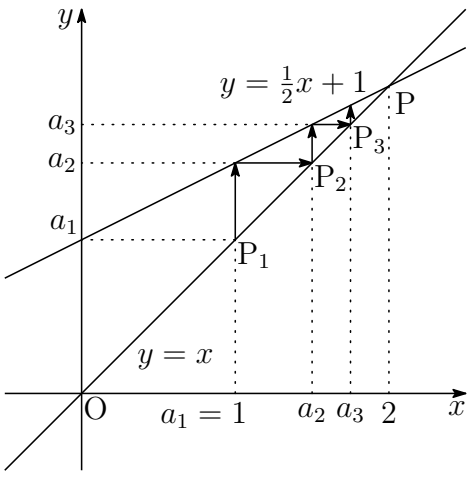
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから　$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

注意 数列$\{a_n\}$の極限値αが存在するならば，$n \longrightarrow \infty$ のとき $a_{n+1} \longrightarrow \alpha$，

$a_{n+1} \longrightarrow \alpha$ であるから $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$ が成り立ち，これから $\alpha = 2$ が得られる．

例題 2.3 について，関数 $y = \frac{1}{2}x + 1$，$y = x$ のグラフで考えてみよう．

直線 $y = x$ 上に点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ をとる．右の図の矢印のように，順に $\mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3, \cdots$ をとると，$\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3, \cdots$ の x 座標として $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ が現れる．2 直線の交点 P の x 座標 2 が数列 $\{a_n\}$ の極限である．[漸化式で表された数列の極限]



練習 2.11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．　解

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

2.1.3 無限級数

A 》無限級数の収束・発散

無限数列　$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$
の各項を順に＋の記号で結んだ式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad ①$$

を**無限級数**という.

この式を和の記号 $\sum$ を用いて，$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$ と書き表すこともある.

無限級数 ① において，a_1 をその**初項**，a_n を**第 $\boldsymbol{n}$ 項**という.

無限数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す.

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1,\quad S_2 = a_1 + a_2,\quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ &S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

この S_n を無限級数 ① の第 n 項までの**部分和**という.

部分和 S_n を第 n 項として，新たに次の無限数列 $\{S_n\}$ を作る.

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

無限数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が S のとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

となるとき，無限級数 ① は S に**収束**する，または無限級数 ① の**和**は S であるという．この和 S も $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$ で書き表すことがある.

無限級数の和

無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ の部分和 S_n から作られる無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，この無限級数の和は S である.

無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 ① は**発散**するという.

例題 2.4 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ． S

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

解答 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

したがって，この無限級数は収束して，その和は 1 である．

例題 2.5 次の無限級数は発散することを示せ． S

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\cdots$$

解答　$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1}-1 \end{aligned}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

したがって，この無限級数は発散する．

練習 2.12 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

(2) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}+\cdots$

B 》無限等比級数

初項が a，公比が r の無限等比数列から作られる無限級数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \qquad ①$$

を，初項 a，公比 r の**無限等比級数**という．

無限等比級数 ① の収束，発散について調べてみよう．

① の第 n 項までの部分和を S_n とする．$a = 0$ のとき，無限数列 $\{S_n\}$ は 0 に収束する．$a \neq 0$ のときは，次のようになる．

［1］$r = 1$ のとき

$$S_n = a + a + a + \cdots + a = na$$

$a \neq 0$ であるから，無限数列 $\{S_n\}$ は発散する．

［2］$r \neq 1$ のとき

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$
$$= \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} r^n \qquad ②$$

$|r| < 1$ のとき，$\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ であるから　　$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$

$r \leqq -1$ または $r > 1$ のとき，数列 $\{r^n\}$ は発散するから，② により無限数列 $\{S_n\}$ も発散する．

以上から，次のことがいえる．

無限等比級数の収束，発散

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ の収束，発散は次のようになる．

$a \neq 0$ のとき

$|r| < 1$ ならば収束し，その和は $\frac{a}{1 - r}$ である．

$|r| \geqq 1$ ならば発散する．

$a = 0$ のとき　収束し，その和は 0 である．

例題 2.6 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ．

(1)　初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$　　(2)　初項 1，公比 $-\sqrt{3}$

解答　(1) 初項が 2，公比について $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$ であるから収束して，

その和は　$\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{3}} = 3$

(2) 初項が 1，公比について $|-\sqrt{3}| > 1$ であるから，発散する．

練習 2.13 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ．

(1)　初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$　　(2)　初項 $\sqrt{2}$，公比 $-\sqrt{2}$

(3)　$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots$　　(4)　$(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots$

例題 2.7 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ． S

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots$$

解答 初項が x，公比が $1-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$$x = 0 \quad \text{または} \quad |1-x| < 1$$

$|1-x| < 1$ のとき $\quad -1 < 1-x < 1 \quad$ すなわち $\quad 0 < x < 2$

よって，求める x の値の範囲は $\quad 0 \leqq x < 2$

補足 例題 2.7 の無限等比級数は $0 \leqq x < 2$ において収束し，その和は

$x = 0$ のとき 0，$\quad 0 < x < 2$ のとき $\dfrac{x}{1-(1-x)} = 1$ である．

練習 2.14 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ． 解

(1) $1 + (2-x) + (2-x)^2 + \cdots$

(2) $x + x(2-x) + x(2-x)^2 + \cdots$

C》点の運動と無限等比級数

応用例題 2.3 数直線上で，点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み，そこから負の向きに $\frac{1}{2}$，そこから正の向きに $\frac{1}{2^2}$，そこから負の向きに $\frac{1}{2^3}$ と進む．以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ． S

考え方》 点 P が近づいていく点の座標は，無限等比級数で表される．

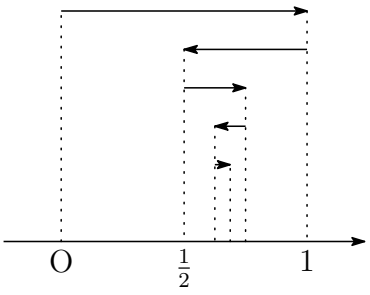
解答 点 P の座標は，順に次のようになる． [点の運動と無限等比級数]

$$1,\ \ 1-\frac{1}{2},\ \ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ \ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3},\ \ \cdots$$

よって，点 P が近づいていく点の座標は，初項 1，公比 $-\frac{1}{2}$ の無限等比級数で表される．

公比について $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$



したがって，点 P が近づいていく点の座標は　$\frac{2}{3}$

練習 2.15 数直線上で，点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み，そこから負の向きに $\frac{1}{2^2}$，そこから正の向きに $\frac{1}{2^4}$，そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む．以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ． 解

D》循環小数と無限等比級数

循環小数は無限等比級数として表される．このことを用いて，循環小数を分数に直してみよう．

例 2.6 循環小数 $0.3\dot{1}\dot{8}$ を分数で表す． S

$$0.3\dot{1}\dot{8} = 0.3 + 0.018 + 0.00018 + 0.0000018 + \cdots$$

であり，右辺の第 2 項以降は，初項 0.018，公比 0.01 の無限等比級数となる．公比について，$|0.01| < 1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$\begin{aligned} 0.3\dot{1}\dot{8} &= 0.3 + \frac{0.018}{1 - 0.01} = \frac{3}{10} + \frac{18}{990} \\ &= \frac{315}{990} = \frac{7}{22} \end{aligned}$$

練習 2.16 次の循環小数を分数で表せ． 解

(1) $0.\dot{6}$

(2) $0.2\dot{3}\dot{4}$

(3) $0.4\dot{7}0\dot{2}$

E 》無限級数の性質

22 ページで学んだ数列の「数列の極限の性質 (1)」から，次の性質が得られる．

無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束して，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ とする．

1　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{ka_n = kS}$　　ただし，k は定数

2　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{(a_n + b_n) = S + T}$，　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{(a_n - b_n) = S - T}$

例題 2.8　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$ の和を求めよ．　S

解答　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ は，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ は，初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数である．

公比について，$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$，$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

練習 2.17　次の無限級数の和を求めよ．　解

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n}$

F 》無限級数の収束と発散

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束，発散と，数列 $\{a_n\}$ の極限について調べよう．

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，その和を S，第 n 項までの部分和を S_n とすると，数列 $\{S_n\}$ は S に収束する．

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

これより，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．

上で調べたことから，次が成り立つ．**2** は **1** の対偶である．

1 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

注意 **1**，**2** の逆は成り立つ．たとえば，32 ページの例題 2.5 の無限級数について，

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ であるが無限級数は発散する．

例 2.7 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ の収束，発散を調べる． S

第 n 項を a_n とすると $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ であるから，この無限級数は発散する．

練習 2.18 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$ は発散することを示せ． 解

2.1.4　問題

問題 2.1 次の極限を求めよ．解　→ p.24 例題 2.1, p.28 例題 2.2

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}-n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^{n+1}}{2^{2n}-3^n}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-1}-2^n}{3^n+(-2)^n}$

問題 2.2 数列 $\left\{\dfrac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ．解

→ p.29 応用例題 2.2

(1) $|r|<1$　　(2) $|r|=1$　　(3) $|r|>1$

問題 2.3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ． 解

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

→ p.30 例題 2.3

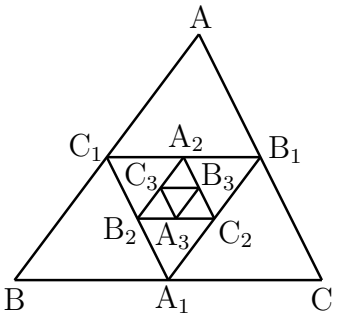
問題 2.4 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ．また，そのときの和を求めよ． 解

→ p.35 例題 2.7

$$x + x(1-x)^2 + x(1-x)^4 + x(1-x)^6 + \cdots$$

問題 2.5 面積 a の $\triangle$ABC がある．その各辺の中点を結んで $\triangle A_1B_1C_1$ を作り，次に $\triangle A_1B_1C_1$ の各辺の中点を結んで $\triangle A_2B_2C_2$ を作る．このようにして無数の三角形 $\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$，$\cdots$，$\triangle A_nB_nC_n$，$\cdots$ を作るとき，これらの面積の和 S を求めよ． 解

→ p.36 例題 2.3



問題 2.6 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について，次の命題の真偽を調べ，真である場合には証明し，偽である場合には反例をあげよ．ただし，α は定数とする． 解

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 0$ である．

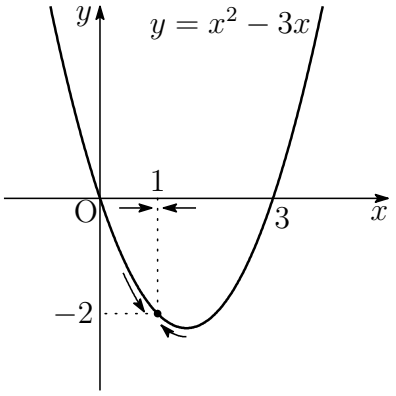
(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ である．

2.2　関数の極限

2.2.1　関数の極限 (1)

A 》関数の極限とその性質

関数 $f(x) = x^2 - 3x$ において，x が 1 と異なる値をとりながら 1 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は -2 に限りなく近づく．



一般に，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，この値 α を $x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限値**または**極限**という．また，$x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は α に**収束**するともいい，次のように書き表す．

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad x \longrightarrow a \text{ のとき } \quad f(x) \longrightarrow \alpha$$

数列の場合と同様に，関数の極限について，次のことが成り立つ．

関数の極限の性質 (1)

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする．

1　$\displaystyle \lim_{x \to a} k\,f(x) = k\,\alpha$　　ただし，k は定数

2　$\displaystyle \lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$，　$\displaystyle \lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$

3　$\displaystyle \lim_{x \to a} \{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$

4　$\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta \neq 0$

x の多項式で表される関数や分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数などについては，a が関数 $f(x)$ の定義域の値であれば，次のことが成り立つ．

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

例 2.8 (1) $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4)=2^2+3\cdot 2-4=6$ S

(2) $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{2\cdot(-1)+1}{-1+3}=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+4}=\sqrt{4}=2$

練習 2.19 次の極限を求めよ． 解

(1) $\lim_{x\to 1}(2x^2-3x-1)$ (2) $\lim_{x\to -2}(x-3)(x+2)$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+1}{2x-3}$ (4) $\lim_{x\to -1}\sqrt{1-x}$

B 》極限値の計算

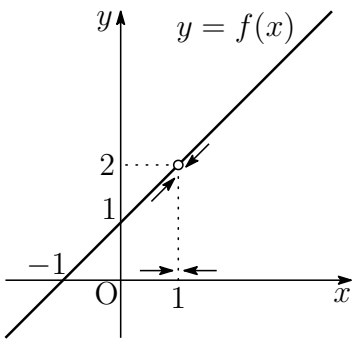
極限値の定義からもわかるように，関数 $f(x)$ が $x=a$ で定義されていなくても，$x\longrightarrow a$ のときの極限値が存在することがある．

例 2.9 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は，$x=1$ で定義されていないが，$x\neq 1$ のとき S

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

となる．よって

$x\longrightarrow 1$ のとき $f(x)\longrightarrow 2$



例題 2.9 次の極限を求めよ．　S

(1) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$　　(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2+x}\right)$

解答　(1)
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

(2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{2+x-2}{2(2+x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2(2+x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(2+x)}=\frac{1}{4}$$

練習 2.20 次の極限を求めよ．ただし，(3) の a は 0 でない定数とする．　解

(1) $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$

(2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+x}\right)$

例題 2.10 次の極限を求めよ. S

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

← 分子を有理化すると，約分できるタイプ.

解答
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+4)-2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}$$

練習 2.21 次の極限を求めよ. 解

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

応用例題 2.4 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ．　S

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$$

考え方 》 与えられた等式が成り立つとき

$$\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b)=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}\cdot(x-1)\right\}=2\cdot 0=0$$

であるから，$\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b)=0$ が成り立つ．このことを利用する．

解答

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2 \qquad \cdots ①$$

が成り立つとする．$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ であるから

$$\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b)=0$$

よって，$a+b=0$ となり　　$b=-a$　$\cdots ②$

このとき

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}$$

$\dfrac{a}{2}=2$ のとき ① が成り立つから　　$a=4$

このとき，② から　　$b=-4$　　(答) $a=4$，$b=-4$

補足 応用例題 2.4 の考え方について，一般に次のようにいえる．

関数 $f(x)$，$g(x)$ と一定の値 α について，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ であるとき

$$\lim_{x\to a}g(x)=0 \text{ ならば} \qquad \lim_{x\to a}f(x)=0$$

練習 2.22 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ． 解

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1$

C》極限が有限な値でない場合

関数の極限が有限な値でない場合について考えてみよう.

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば,

$x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は**正の無限大に発散**する

または　$x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限は** ∞ である

といい，次のように書き表す.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

または　$x \longrightarrow a$ のとき　$f(x) \longrightarrow \infty$

また，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなるならば,

$x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は**負の無限大に発散**する

または　$x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限は** $-\infty$ である

といい，次のように書き表す.

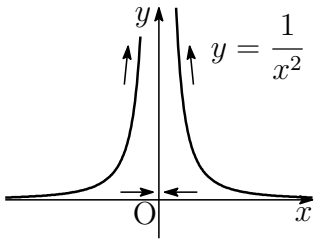
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

または　$x \longrightarrow a$ のとき　$f(x) \longrightarrow -\infty$

注意 関数の極限が ∞ または $-\infty$ の場合，これらを極限値とはいわない.

例 2.10　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$　S

$$\lim_{x \to 1} \left\{ -\frac{1}{(x-1)^2} \right\} = -\infty$$



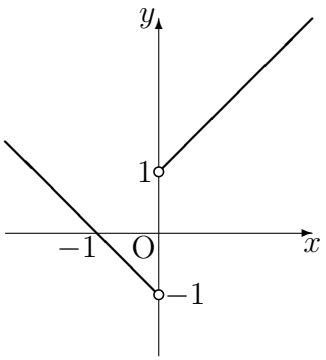
練習 2.23 次の極限を求めよ.　解

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x \to -1} \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} \right\}$

D 》片側からの極限

関数 $f(x)$ の極限において，x が a に限りなく近づく場合，$x > a$ あるいは $x < a$ など片方の範囲だけで考える場合がある．

例 2.11 関数 $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2 + x}{|x|}}$ の極限 S



$x > 0$ のとき

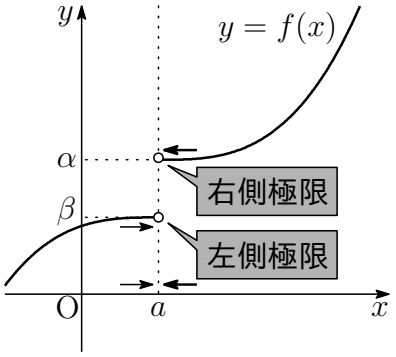
$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x} = x + 1$$

$x < 0$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{-x} = -x - 1$$

$x > 0$ の範囲で x が 0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は 1 に限りなく近づく．
$x < 0$ の範囲で x が 0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は -1 に限りなく近づく．

一般に，$x > a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に近づくときの $f(x)$ の**右側極限**といい，次のように書き表す．



$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$$

$x < a$ の範囲で x が a に限りなく近づくときの**左側極限**も同様に定義され，その極限値が β のとき，次のように書き表す．

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \beta$$

$a = 0$ のときは，$x \longrightarrow a + 0$，$x \longrightarrow a - 0$ を，それぞれ次のように書く．

$$x \longrightarrow +0, \qquad x \longrightarrow -0$$

関数 $f(x)$ において，次のことが成り立つ．

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

$\lim_{x\to a+0} f(x)$ と $\lim_{x\to a-0} f(x)$ が存在してもそれらが一致しないときもある．
このとき，$x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限はない．

例 2.12 関数 $f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x|}$ は　S

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x>0) \\ -x-1 & (x<0) \end{cases}$$

と表され　$\lim_{x\to+0} f(x) = 1$,　$\lim_{x\to-0} f(x) = -1$

したがって，$x \longrightarrow 0$ のときの $f(x)$ の極限はない．

練習 2.24 次の極限を求めよ．　解

(1) $\lim_{x\to+0} \dfrac{|x|}{x}$

(2) $\lim_{x\to-0} \dfrac{|x|}{x}$

(3) $\lim_{x\to1+0} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

(4) $\lim_{x\to1-0} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

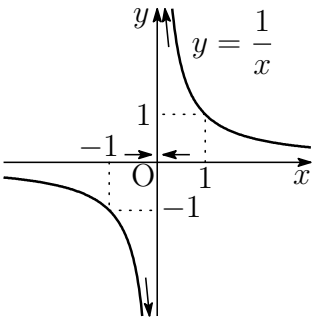
右側極限，左側極限が ∞ または $-\infty$ になる場合には，たとえば次のように書き表す．

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$$

例 2.13 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ について S

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty$$



練習 2.25 次の極限を求めよ． 解

(1) $\lim_{x\to1+0} \dfrac{1}{x-1}$

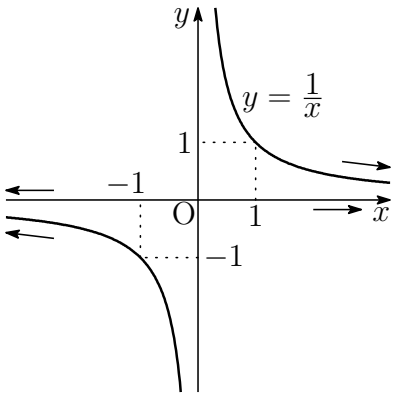
(2) $\lim_{x\to1-0} \dfrac{1}{x-1}$

2.2.2　関数の極限 (2)

A》 $x \longrightarrow \infty$，$x \longrightarrow -\infty$ のときの極限

変数 x が，限りなく大きくなることを，$x \longrightarrow \infty$ で書き表す．また，x が負であって，絶対値が限りなく大きくなることを，$x \longrightarrow -\infty$ で書き表す．このような場合について，関数 $f(x)$ の極限を調べてみよう．

関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ において，$x \longrightarrow \infty$ のとき，$f(x)$ の値は 0 に限りなく近づく．また，$x \longrightarrow -\infty$ のときも，$f(x)$ の値は 0 に限りなく近づく．



一般に，$x \longrightarrow \infty$ のとき $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，この値 α を $x \longrightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の**極限値**または**極限**という．このことを，次のように書き表す．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$$

$x \longrightarrow -\infty$ のときも同様に考える．たとえば，次のようになる．

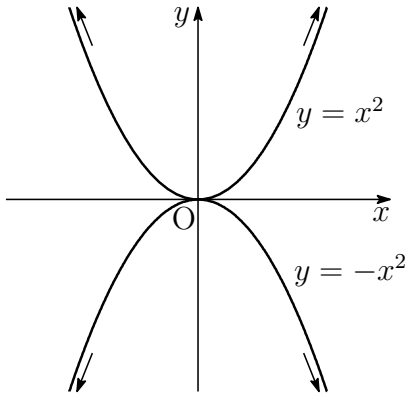
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$x \longrightarrow \infty$ や $x \longrightarrow -\infty$ のときに，関数 $f(x)$ の極限が ∞ または $-\infty$ になる意味も，$x \longrightarrow a$ のときと同様に考える．

たとえば，次のようになる．

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty$$



例 2.14 (1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ S ← $\dfrac{\text{定数}}{\infty}$ の形

(2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3+1}=0$ ← $\dfrac{\text{定数}}{-\infty}$ の形

(3) $\lim_{x\to\infty}(x-x^3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)=-\infty$

練習 2.26 次の極限を求めよ． 解

(1) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-x^2}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$

(4) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)$

例題 2.11 次の極限を求めよ． S

(1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5}{3x^2-4x+1}$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3}{x-2}$

解答 (1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5}{3x^2-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{5}{x^2}}{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$ ← 分母が 2 次式のとき，x^2 で分母と分子を割るとよい．

(2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=-\infty$ ← 分母が 1 次式のとき，x で分母と分子を割るとよい．

練習 2.27 次の極限を求めよ． 解

(1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{4x+3}$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4-x^2}{3x+2}$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3-2x}{x^2-4x+1}$

応用例題 2.5 次の極限値を求めよ．　S

(1)　$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$　　(2)　$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$

考え方》24 ページ例題 2.1 参照．

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ である．

解答　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$

$$=\frac{(4x^2+x)-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-t}-t)(\sqrt{t^2-t}+t)}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t)-t^2}{\sqrt{t^2-t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{t\sqrt{1-\dfrac{1}{t}}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{t}}+1}=-\frac{1}{2}$$

練習 2.28 次の極限値を求めよ．　解

(1)　$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

(2)　$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)$

深化 2.3 $x<0$ のとき $\sqrt{x^2}=-x$ であることを利用して，おき換えを利用せずに，応用例題 2.5(2) を解いてみよう．　解

B 》指数関数，対数関数の極限

指数関数の極限については，次のことがいえる． [指数関数の極限]

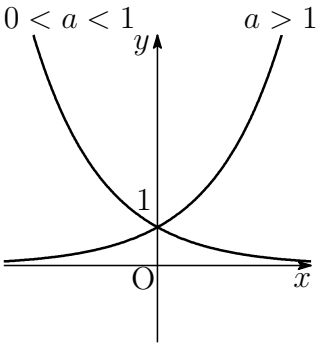
$a > 1$ のとき

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

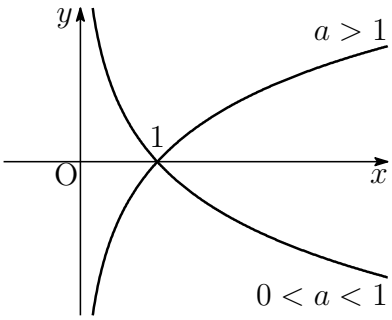
$0 < a < 1$ のとき

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$$

$y = a^x$ のグラフ



$y = \log_a x$ のグラフ



対数関数の極限については，次のことがいえる． [対数関数の極限]

$a > 1$ のとき $\quad \lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty, \quad \lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$

$0 < a < 1$ のとき $\quad \lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to+0} \log_a x = \infty$

練習 2.29 次の極限を求めよ． 解

(1) $\lim_{x\to-\infty} 2^x$ (2) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (3) $\lim_{x\to\infty} \log_2 x$ (4) $\lim_{x\to+0} \log_{0.5} x$

例題 2.12 次の極限を求めよ． S

(1) $\lim_{x\to\infty} 2^{-2x}$ (2) $\lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{2x+3}{x}$

解答 (1) $x \longrightarrow \infty$ のとき $-2x \longrightarrow -\infty$ であるから $\quad \lim_{x\to\infty} 2^{-2x} = 0$

(2) $\frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$ であるから，$x \longrightarrow \infty$ のとき $\quad \frac{2x+3}{x} \longrightarrow 2$

よって $\quad \lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{2x+3}{x} = \lim_{x\to\infty} \log_2 \left(2 + \frac{3}{x}\right) = \log_2 2 = 1$

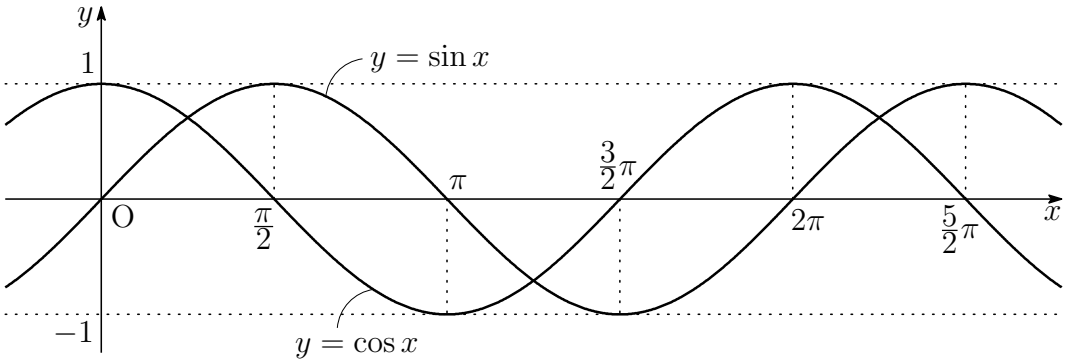
練習 2.30 次の極限を求めよ． 解

(1) $\lim_{x\to\infty} 2^{-3x}$ (2) $\lim_{x\to-\infty} 2^{-2x}$ (3) $\lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2}$

2.2.3　三角関数と極限

A 》三角関数の極限

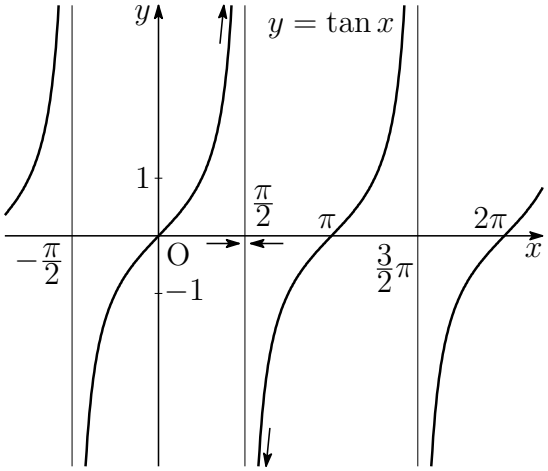
三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は周期関数であり，2π ごとに同じ値を繰り返すから，$x \longrightarrow \infty$ のときの関数の値は一定の値に近づかない．すなわち，$x \longrightarrow \infty$ のときの $\sin x$，$\cos x$ の極限はない．　[三角関数の極限]



また，$\tan x$ については，次のことがいえる．

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty$$



注意　$x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$ のときの $\tan x$ の極限はない．

例 2.15　$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$,　$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$　S

$\lim_{x \to \infty} \sin \dfrac{1}{x} = 0$,　$\lim_{x \to \infty} \cos \dfrac{1}{x} = 1$

練習 2.31　次の極限を求めよ．　解

(1)　$\lim_{x \to -\infty} \sin \dfrac{1}{x}$　　(2)　$\lim_{x \to -\infty} \cos \dfrac{1}{x}$　　(3)　$\lim_{x \to \pi} \tan x$

関数の極限には，次の性質もある．

関数の極限の性質 (2)

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ とする．

5 $x=a$ の近くで常に $f(x)\leqq g(x)$ ならば $\alpha\leqq\beta$

6 $x=a$ の近くで常に $f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$ かつ $\alpha=\beta$ ならば

$$\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$$

補足 性質 **6** を「はさみうちの原理」ということがある．

性質 **5**，**6** は，$x\longrightarrow a+0$ または $x\longrightarrow a-0$ のときも成り立つ．
さらに「$x=a$ の近くで」を「十分大きい x で」と読みかえると，$x\longrightarrow\infty$ のときにも成り立つ．同様に，$x\longrightarrow-\infty$ のときにも成り立つ．

また，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ のとき，次のことも成り立つ．

十分大きい x で常に $f(x)\leqq g(x)$ ならば $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$

応用例題 2.6 極限値 $\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$ を求めよ． S

考え方》 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$ と $0\leqq\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1$ より，上の性質 **6** を使う．

解答 $0\leqq\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1$ より $\quad 0\leqq\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$

ここで，$\lim_{x\to 0}|x|=0$ であるから $\quad \lim_{x\to 0}\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|=0$

よって $\quad \lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

練習 2.32 次の極限値を求めよ． 解

(1) $\lim_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x}{x}$

B》 $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

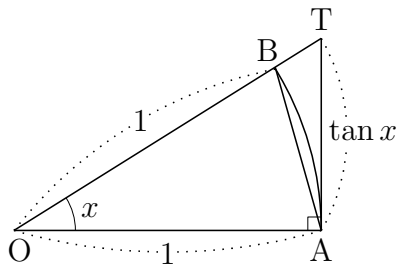
三角関数 $\sin x$ に関する極限については，次の重要な等式が成り立つ．

$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

証明　［1］$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

右の図のように，半径が 1，中心角が x ラジアンの扇形 OAB の点 A における円の接線と直線 OB の交点を T とすると，面積について



$$\triangle \mathrm{OAB}<\text{扇形 OAB}<\triangle \mathrm{OAT}$$

が成り立つから　$\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x<\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$

すなわち　$\sin x<x<\tan x$

$\sin x>0$ より　$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$　← 各辺を $\sin x$ で割った．

よって　$1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$

$\lim\limits_{x\to+0}\cos x=1$ であることから

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

← $x\longrightarrow a+0$ のときの，前ページの性質 **6** を利用している．

［2］$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき　$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{x}$ において，$x=-\theta$ とおくと

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

［1］，［2］から　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　**証終**

例題 2.13 次の極限値を求めよ. S

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

解答 (1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)=2\cdot 1=2$ ← $x\longrightarrow 0$ のとき $2x\longrightarrow 0$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

練習 2.33 次の極限値を求めよ. 解

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

応用例題 2.7 次の極限値を求めよ．　S

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

考え方》 $\sin x$ を作るために，次のことを利用する．

$$(\cos x+1)(\cos x-1)=\cos^2 x-1=-\sin^2 x$$

解答

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x+1}\right)=-1\cdot\frac{0}{1+1}=0$$

練習 2.34 次の極限値を求めよ．　解

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

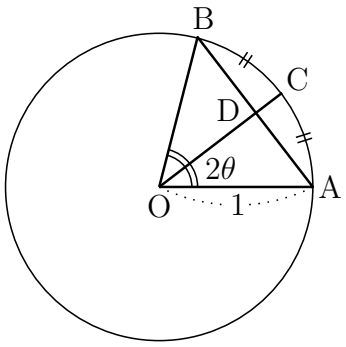
(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$

C》三角関数の極限の応用

応用例題 2.8 半径1の円Oの周上に中心角2θラジアンの弧ABをとり，弧ABを2等分する点をCとする．また，線分OCと弧ABの交点をDとする．
このとき，極限 S

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2}$$

を求めよ．



考え方》 線分の長さをθの関数で表す．

解答 AB⊥ODで，ODは∠AOBの二等分線であるから

$$\angle\mathrm{AOD}=\theta$$

よって $\mathrm{AB}=2\mathrm{AD}=2\sin\theta$

$\mathrm{CD}=\mathrm{OC}-\mathrm{OD}=1-\cos\theta$

したがって，求める極限は

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2}&=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\theta}{(2\sin\theta)^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\theta}{4\sin^2\theta}\\&=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\theta}{4(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4(1+\cos\theta)}=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

練習 2.35 応用例題2.8において，弧ABの長さを$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$で表すとき，極限$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}^2}$を求めよ． 解

深化 2.4 応用例題2.8において，直線OCと円Oの交点をEとする．このとき，$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2}=\dfrac{1}{4\mathrm{DE}}$が成り立つことを示してみよう．応用例題2.8の極限値についてどのような考察ができるだろうか． 解

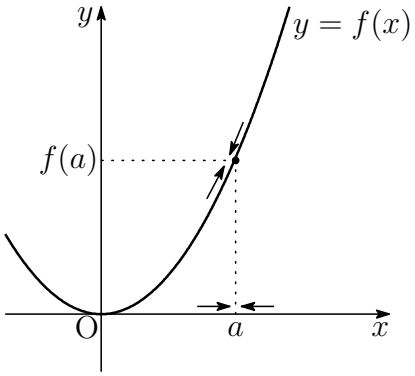
2.2.4　関数の連続性

A 》関数の連続性

x の多項式で表された関数 $f(x)$ については，定義域内の値 a に対して

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つ．このことは，$y = f(x)$ のグラフが切れ目のない曲線になっているということでもある．しかし，これらことが成り立たない関数もある．

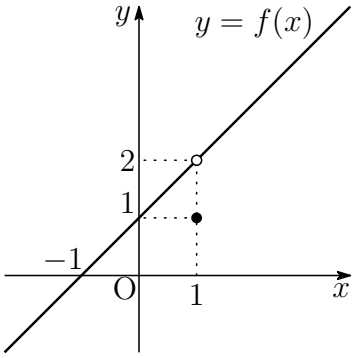


例 2.16 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ S

とすると，関数 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり，$x = 1$ でグラフは切れている．

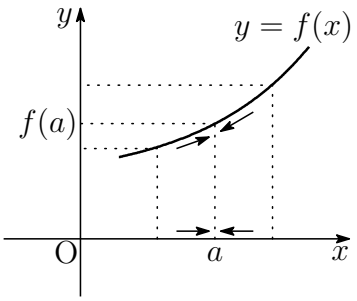
また　　$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$，$f(1) = 1$

となるから，$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ である．



補足　例 2.16 の関数 $f(x)$ は，$x \neq 1$ のとき $f(x) = x + 1$ である．

一般に，関数 $f(x)$ において，その定義域の x の値 a に対して，極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，かつ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき，$f(x)$ は $x = a$ で**連続**であるという．このとき，$y = f(x)$ のグラフは $x = a$ でつながっている．



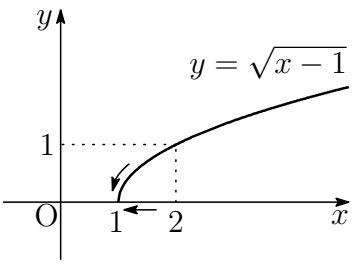
例 2.17　関数 $f(x)$ が指数関数，対数関数，三角関数，分数関数であるとき，$f(x)$ はその定義域内のすべての x の値で連続である．　S　終

値 a が関数 $f(x)$ の定義域の左端または右端であるときは，それぞれ

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{または} \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$$

が成り立つならば，$f(x)$ は $x = a$ で連続であるという．

例 2.18 関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ の定義域は S



$x \geqq 1$ である．

$\lim_{x\to 1+0}\sqrt{x-1}=0$，$f(1)=0$ より

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$$

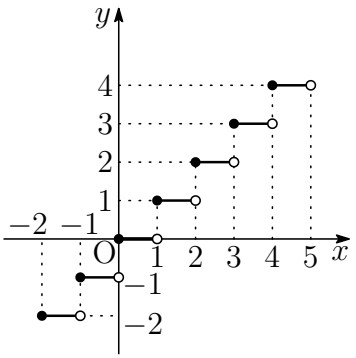
が成り立つ．

よって，関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ は $x=1$ で連続である． 終

注意 無理関数は定義域内のすべての x の値で連続である．

x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．記号 $[\ \ ]$ を**ガウス記号**という．たとえば，$[1.5]=1$，$[-1.5]=-2$ である．

$f(x)=[x]$ とすると，関数 $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，x が整数の値をとるところで切れている．



補足 実数 x について，$n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n が $[x]$ である．

例 2.19 関数 $f(x)=[x]$ について S

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=1,\quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=0$$

であるから，$x \longrightarrow 1$ のときの $f(x)$ の極限はない．

よって，関数 $f(x)=[x]$ は $x=1$ で連続でない． 終

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続でないとき，$x=a$ で**不連続**であるという．このとき，グラフは $x=a$ で切れている．

たとえば，関数 $f(x)=[x]$ は，x の整数値で不連続である．

練習 2.36 次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ． 解

(1) $f(x)=x[x]$

(2) $f(x)=(x+1)[x]$

(3) $f(x)=\sqrt{x}$

42 ページで示した関数の極限の性質 **1**〜**4** により，関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに $x=a$ で連続ならば，次の関数はいずれも $x=a$ で連続である．

$$k\,f(x),\quad f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

ただし，k は定数であり，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ においては $g(a)\neq 0$ とする．

B 》区間における連続

不等式 $a<x<b$，$a\leqq x\leqq b$，$a\leqq x$，$x<b$ などを満たす実数 x 全体の集合を**区間**といい，それぞれ $(a,\ b)$，$[a,\ b]$，$[a,\ \infty)$，$(-\infty,\ b)$ のように書き表す．実数全体の集合は，$(-\infty,\ \infty)$ で表す．

また，区間 $(a,\ b)$ を**開区間**といい，区間 $[a,\ b]$ を**閉区間**という．

関数 $f(x)$ が，ある区間のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$ はその**区間で連続**であるという．また，定義域のすべての x の値で連続な関数を**連続関数**という．

例 2.20 (1) x の多項式で表された関数や，指数関数 2^x，三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は，区間 $(-\infty,\ \infty)$ で連続である．

(2) 対数関数 $\log_2 x$ は，区間 $(0,\ \infty)$ で連続である．

(3) 分数関数 $\dfrac{x}{x-1}$ は，実数全体のうち，$x=1$ を除いた 2 つの区間 $(-\infty,\ 1)$，$(1,\ \infty)$ のそれぞれで連続である．

(4) 無理関数 $y=\sqrt{x-1}$ は，区間 $[1,\ \infty)$ で連続である． S 終

一般に，関数 $f(x)$ と $g(x)$ が区間 I でともに連続ならば，次の関数はいずれも区間 I で連続である．ただし，k は定数とする．

$$k\,f(x), \quad f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)g(x)$$

また，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は区間 I から $g(x)=0$ となる x の値を除いたそれぞれの区間で定義され，それらの各区間で連続である．

練習 2.37 次の関数が連続である区間を求めよ． 解

(1) $f(x)=\sqrt{1-x}$ (2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

C 》連続関数の性質

閉区間で連続な関数には，次のような性質がある．

> **閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもつ．**

例 2.21 関数 $f(x)=\sin x$ は，閉区間 $[0,\ \pi]$ で連続である．この区間において，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 1，$x=0,\ \pi$ で最小値 0 をとる． S

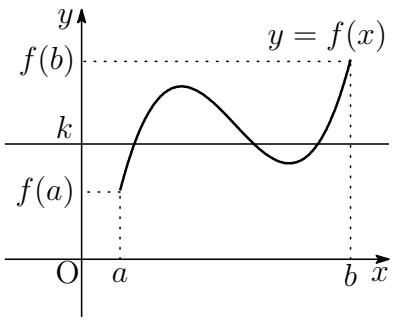
← $y=\sin x$ のグラフは 56 ページ参照.

練習 2.38 次の区間における関数 $f(x)=\cos x$ の最大値，最小値について調べよ．

(1) $[0,\ \pi]$ (2) $[-\pi,\ \pi]$ 解

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続であるとき，そのグラフはこの区間で切れ目なくつながっている．

とくに，$f(a)\neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間のどの値 k に対しても，直線 $y=k$ と曲線 $y=f(x)$ は，$a<x<b$ の範囲で共有点を少なくとも 1 つもつ．



前ページのことから，次の**中間値の定理**が成り立つ．

中間値の定理

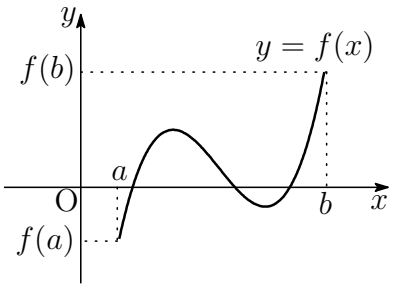
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$$f(c) = k, \qquad a < c < b$$

を満たす数 c が少なくとも 1 つある．

中間値の定理を用いると，次に述べるように，方程式の実数解の範囲を推測するための重要な事実が成り立つ．

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば，方程式 $f(x) = 0$ は $a < x < b$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ．



例題 2.14 方程式 $x - \cos x = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ． S

解答 $f(x) = x - \cos x$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $[0,\ \pi]$ で連続である．

また　　$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$

$f(\pi) = \pi - \cos \pi = \pi + 1 > 0$

よって，方程式 $f(x) = 0$ すなわち $x - \cos x = 0$ は，

$0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

練習 2.39 方程式 $2^x - 3x = 0$ は，$3 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ． 解

2.2.5 問題

問題 2.7 次の極限を求めよ． 解 → p.44 例題 2.9, p.45 例題 2.10

(1) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$

(2) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}$

問題 2.8 関数 $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x-2}$ が $x \longrightarrow 2$ のとき収束するように，定数 a の値を定め，極限値 $\lim_{x\to 2} f(x)$ を求めよ． 解 → p.46 例題 2.4

問題 2.9 次の極限値を求めよ． 解 → p.54 例題 2.5

(1) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(2) $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}+x)$

問題 2.10 次の極限を求めよ． 解 → p.55 例題 2.12

(1) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

(2) $\lim_{x\to\infty} \{\log_2(x^2+4)-\log_2 2x^2\}$

問題 2.11 次の極限を求めよ． 解　→ p.59 例題 2.13，p.60 応用例題 2.7

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin 3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos 2x-1}$

問題 2.12 $x-\pi=\theta$ とおくことにより，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$ を求めよ． 解

→ p.60 応用例題 2.7

問題 2.13 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるように定数 a の値を定めよ． 解

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$$

→ p.62

問題 2.14 3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ は負の解をもつことを示せ． 解

→ p.66 例題 2.14

問題 2.15 半径 r の円に内接する正 n 角形の面積を S_n とする． 解

(1) S_n を n を用いて表せ．

(2) 半径 r の円の面積を S とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=S$ であることを示せ．

2.3 章末問題

2.3.1 章末問題 A

章末 2.1 次の極限を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{(1+2+3+\cdots+n)^2}$

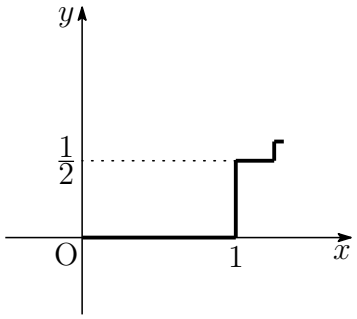
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}}{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}$

章末 2.2 n を自然数とするとき，次の問いに答えよ． 解

(1) 不等式 $2^n \geqq 1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) (1) の不等式を用いて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$ を求めよ．

章末 2.3 座標平面上で，点 P が原点 O から x 軸の正の向きに 1 だけ進み，次に y 軸の正の向きに $\frac{1}{2}$ だけ進み，次に x 軸の正の向きに $\frac{1}{2^2}$ だけ進み，次に y 軸の正の向きに $\frac{1}{2^3}$ だけ進む．以下，同様な運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ． 解



章末 2.4 次の極限を求めよ．ただし，(4) の a は 1 でない正の定数とする． 解

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -0}2^{\frac{1}{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_a(ax^2+1)-\log_a x^2\}$

章末 2.5 次の極限を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\tan x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

章末 2.6 方程式 $\log_2 x+\dfrac{1}{2}x=1$ は，$1<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ． 解

2.3.2　章末問題 B

章末 2.7 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ． 解

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

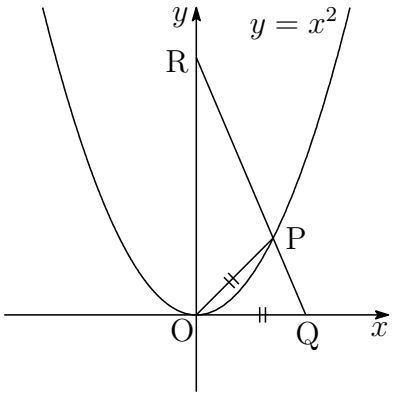
(1)　$a_n = \dfrac{2^{n-1} + 2}{2^{n-1} + 1}$ を示せ．　　(2)　数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

章末 2.8 和が 1 の無限等比級数がある．この各項を 2 乗して得られる無限等比級数の和は 2 である．もとの無限等比級数の初項と公比を求めよ． 解

章末 2.9 次の 2 つの条件［1］, ［2］をともに満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ． 解

［1］　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 2$　　［2］　$\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = -1$

章末 2.10 放物線 $y = x^2$ 上の点 P に対して，x 軸上の正の部分に OP = OQ である点 Q をとり，直線 PQ が y 軸と交わる点を R とする．P が y 軸と交わる点を R とする．P が第 1 象限にあって原点 O に限りなく近づくとき，R が近づいていく点の座標を求めよ． 解



章末 2.11 x を実数とするとき，次の問いに答えよ． 解

(1) 無限等比級数 $x^2 + \dfrac{x^2}{x^2+1} + \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2} + \cdots + \dfrac{x^2}{(x^2+1)^{n-1}} + \cdots$ が収束することを示せ．

(2) (1) の無限級数の和を $f(x)$ とするとき，関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ．

(3) 関数 $f(x)$ が不連続となる x の値を求めよ．

ヒント

7 (1) 数学的帰納法を用いる．

8 初項を a，公比を r とする．$\dfrac{a^2}{1-r^2} = \dfrac{a}{1+r} \cdot \dfrac{a}{1-r}$ を利用する．

9 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく．

11 初項が 0 の場合に注意する．

第 3 章　微分法

3.1　導関数

3.1.1　微分係数と導関数

A 》微分係数

関数 $f(x)$ について，極限値 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるという．また，この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**または変化率といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す．

微分係数

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

注意 $a+h=x$ とおくと $h=x-a$ であり，$h\longrightarrow 0$ のとき $x\longrightarrow a$ となる．

例 3.1 関数 $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$ の $\boldsymbol{x=3}$ における微分係数 $\boldsymbol{f'(3)}$ S

$$\begin{aligned}
f'(3)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

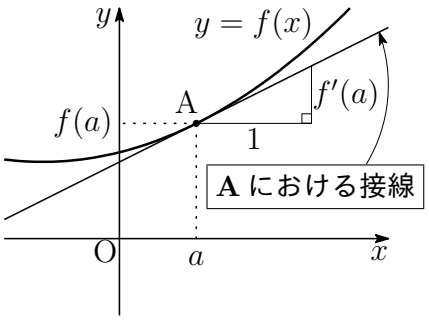
注意 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ では，定義域の端 $x=0$ では微分係数を考えない．

練習 3.1 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ について，$x=1$ における微分係数を定義に従って求めよ．解

[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きを表す[1].

たとえば，曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $(3, \sqrt{3})$ における接線の傾きは，前ページの例 3.1 より $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ である.



B 》微分可能と連続

関数 $f(x)$ について，次のことが成り立つ.

微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である.

証明　$x \neq a$ のとき　　$f(x)-f(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)$

ここで，関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

であり，かつ　$\lim_{x\to a}(x-a)=0$

が成り立つから

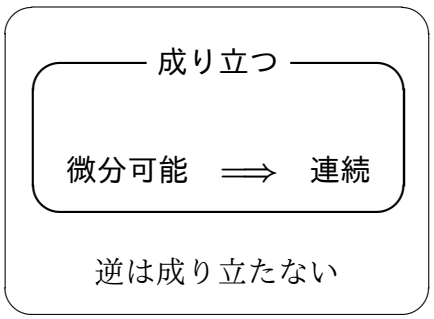
$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=f'(a)\cdot 0=0$$

よって　$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

したがって，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続である.　　証終

上で証明したように，関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $x=a$ で連続であるが，この逆は成り立たない.

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても，$x=a$ で微分可能であるとは限らない. すなわち，グラフが $x=a$ でつながっていても，その点における接線が存在しないような関数 $f(x)$ がある.



[1] 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能でないとき，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線が存在しないか，または接線が x 軸に垂直である.

例 3.2 関数の連続と微分可能 S

関数 $f(x)=|x|$ について，

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \qquad \leftarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0,\ f(0)=0$$

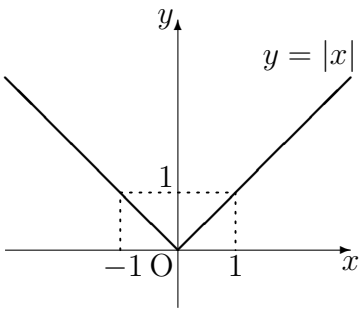
が成り立つから，$f(x)$ は $x=0$ で連続である．

一方 $f(x)=|x|$ について

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}$$

である．ここで

$$\lim_{h\to+0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=-1$$



であるから，$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ すなわち $f'(0)$ は存在しない．

よって，関数 $f(x)=|x|$ は $x=0$ で微分可能でない． 終

補足 関数 $y=|x|$ のグラフには，原点 $(0,\ 0)$ における接線が存在しない．

練習 3.2 関数 $f(x)=|x^2-1|$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ． 解

深化 3.1 関数 $f(x)=|x^2-1|$ は $x=1$ 以外にも微分可能でない x の値が存在する．このことを確かめよう． 解

C》導関数

関数 $f(x)$ が，ある区間のすべての x の値で微分可能であるとき，$f(x)$ はその**区間で微分可能**であるという．

関数 $f(x)$ が，ある区間で微分可能であるとき，その区間の各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると，1 つの新しい関数が得られる．この関数を，$f(x)$ の**導関数**といい，記号 $\boldsymbol{f'(x)}$ で表す．

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で定義される．

$f(x)$ の導関数

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

関数 $y = f(x)$ の導関数を，$\boldsymbol{y'}$，$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d}{dx} f(x)}$ などの記号でも表す．

関数 $y = f(x)$ において，x の変化量を表すのに，h の代わりに記号 $\boldsymbol{\Delta x}$ を用いることがある．Δx に対応する y の増分 $f(x + \Delta x) - f(x)$ を $\boldsymbol{\Delta y}$ で表す．このとき，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で表される．

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

例 3.3 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の導関数は　S

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} \right\} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

練習 3.3 導関数の定義に従って，次の導関数を求めよ．　解

(1) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

3.1.2 導関数の計算

A 》導関数の性質

関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を $\boldsymbol{x}$ **で微分する**または単に**微分する**という．数学 II では，次のことを学んでいる．

導関数の公式

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

1 $\boldsymbol{\{k\,f(x)\}' = k\,f'(x)}$ ただし，k は定数

2 $\boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)}$

3 $\boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}' = f'(x)-g'(x)}$

さらに，2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ の積で表される関数 $f(x)g(x)$ の導関数について，次の公式 **4** が成り立つ．

導関数の公式

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

4 $\boldsymbol{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$

4 の証明

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

よって $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ **証終**

公式 **1**〜**3** について，公式 **4** の証明と同様にして，証明することができる．

練習 3.4 公式 **4** の証明にならって，公式 **2** を証明せよ． 解

関数 x^n の導関数について，数学 II で次のことを学んでいる [2].

x^n の導関数

n が自然数のとき　　$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$

また，定数関数 c の導関数は $(c)' = 0$ である.
これらの公式を用いて，関数を微分してみよう.

例題 3.1 次の関数を微分せよ. S

(1)　$y = 2x^5 - 5x^4$　　(2)　$y = (x^3 - 3x)(4x^2 + 5)$

解答　(1)　$y' = 2 \cdot 5x^4 - 5 \cdot 4x^3 = 10x^4 - 20x^3$

(2)　$y' = (x^3 - 3x)'(4x^2 + 5) + (x^3 - 3x)(4x^2 + 5)'$　← 公式 **4** を用いている.

$= (3x^2 - 3)(4x^2 + 5) + (x^3 - 3x) \cdot 8x$

$= 12x^4 + 3x^2 - 15 + 8x^4 - 24x^2$

$= 20x^4 - 21x^2 - 15$

練習 3.5 次の関数を微分せよ. 解

(1)　$y = x^5 + 2x^4$

(2)　$y = 3x^6 - 4x^3$

(3)　$y = (x + 1)(x^3 - 4x)$

(4)　$y = (3x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$

[2] 数学的帰納法によって証明できる.
$n = k$ のとき成り立つ，すなわち $(x^k)' = kx^{k-1}$ であると仮定すると
$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)'x + x^k(x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k$
よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ.

B 》商の導関数

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき，和や積で表される関数 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ の導関数を計算してきた．次に，商で表される関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の導関数についても調べてみよう．

商の導関数については，次の公式が成り立つ．

商の導関数

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

5 $\left\{\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{g(x)}}\right\}' = -\dfrac{\boldsymbol{g'(x)}}{\boldsymbol{\{g(x)\}^2}}$

6 $\left\{\dfrac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}}\right\}' = \dfrac{\boldsymbol{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}}{\boldsymbol{\{g(x)\}^2}}$

5 の証明

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right\}$$

ここで，$g(x)$ は微分可能であるから $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$

また，微分可能ならば連続であるから $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

よって $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -g'(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)g(x)} = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ **証終**

練習 3.6 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ と 79 ページの公式 **4**，上の公式 **5** を用いて，公式 **6** を証明せよ． 解

例題 3.2 次の関数を微分せよ．　S

(1)　$y = \dfrac{1}{3x+2}$　　(2)　$y = \dfrac{x^2}{x-1}$

解答　(1)　$y' = -\dfrac{(3x+2)'}{(3x+2)^2} = -\dfrac{3}{(3x+2)^2}$

(2)　$y' = \dfrac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

練習 3.7 次の関数を微分せよ．　解

(1)　$y = \dfrac{1}{2x-3}$

(2)　$y = \dfrac{x}{x^2-2}$

(3)　$y = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は，正の整数nについて成り立つ．n が負の整数のとき，$n = -m$ とおくと，m は正の整数であるから

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \qquad \leftarrow \ \frac{x^{m-1}}{x^{2m}} = x^{(m-1)-2m} = x^{-m-1}$$

$$= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

よって，$(x^n)' = nx^{n-1}$ は，n が負の整数のときにも成り立つ．

一般に，次のことが成り立つ．

x^n の導関数

n が整数のとき　　$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$

注意 $n = 0$ の場合も，$(x^0)' = (1)' = 0$, $0 \cdot x^{-1} = 0$ であることから成り立つ．

例 3.4 $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$ S

練習 3.8 次の関数を微分せよ． 解

(1) $y = \dfrac{1}{x}$

(2) $y = -\dfrac{4}{x^2}$

(3) $y = \dfrac{1}{3x^3}$

C》合成関数の微分法

合成関数 $y=f(g(x))$ の導関数を，2 つの関数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ の導関数で表すことを考えてみよう．

u の関数 $y=f(u)$，x の関数 $u=g(x)$ がともに微分可能なとき，

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu，
u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とすると，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は次のように書くことができる．

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$u=g(x)$ は連続関数であるから，$\Delta x\longrightarrow 0$ のとき　$\Delta u\longrightarrow 0$ となる．

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)$　← $y=f(u)$, $u=g(x)$ はともに微分可能

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

以上から，次のことが成り立つ．

合成関数の微分法

$y=f(u)$ が u の関数として微分可能，$u=g(x)$ が x の関数として微分可能であるとする．このとき，合成関数 $y=f(g(x))$ は x の関数として微分可能で

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

例 3.5 関数 $\boldsymbol{y=(x^3+1)^2}$ の導関数　S

$u=x^3+1$ とすると $y=u^2$ である．
合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2u\cdot 3x^2$$
$$=6x^2(x^3+1)$$

← $\dfrac{dy}{du}=2u$, $\dfrac{du}{dx}=3x^2$

例 3.6 関数 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{(2x+1)^3}}$ の導関数　S

$u=2x+1$ とすると $y=\dfrac{1}{u^3}$ である．
合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(-\frac{3}{u^4}\right)\cdot 2$$
$$=-\frac{6}{(2x+1)^4}$$

← $\dfrac{dy}{du}=-\dfrac{3}{u^4}$, $\dfrac{du}{dx}=2$

練習 3.9 次の関数を微分せよ． 解

(1) $y = (3x+1)^4$

(2) $y = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

練習 3.10 関数 $f(x)$，$g(x)$ とその導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ について，次のことを示せ．ただし，a，b は定数，n は整数とする． 解

(1) $\dfrac{d}{dx}f(ax+b) = af'(ax+b)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\{g(x)\}^n = n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$

前ページに示した「合成関数の微分法」の公式において，

$$\frac{dy}{dx} = \{f(g(x))\}', \quad \frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x)), \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

であるから，この公式は次のようにも表される．

$$\boldsymbol{\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)}$$

例 3.7 関数 $\boldsymbol{y = (3x^2-2)^5}$ の導関数 S

$$\begin{aligned} y' &= 5(3x^2-2)^4 \cdot (3x^2-2)' \\ &= 5(3x^2-2)^4 \cdot 6x \\ &= 30x(3x^2-2)^4 \end{aligned}$$

$y = \square^5$ について
$y' = 5\square^4 \cdot \left(\square\right)'$

練習 3.11 次の関数を微分せよ． 解

(1) $y = (2x^2+5)^4$ (2) $y = (1-2x^2)^3$ (3) $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

D 》逆関数の微分法

逆関数を利用してもとの関数の導関数を求めることを考えよう．

関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の式を x について解くと

$$x=y^4 \qquad \cdots ①$$ ← 合成関数の微分法

である．合成関数の微分法の公式を用いると

$$\frac{d}{dx}y^4=\frac{d}{dy}y^4\cdot\frac{dy}{dx}=4y^3\frac{dy}{dx}$$

であるから，① の両辺を x で微分すると

$$1=4y^3\frac{dy}{dx}$$

よって，関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の導関数は，次のようになる．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

一般に，$f(x)$，$g(x)$ が互いに逆関数で，ともに微分可能であるとする．

$y=f(x)$ を x について解くと　　$x=g(y)$

この両辺を x で微分すると　　$1=\dfrac{d}{dx}g(y)$

すなわち　　$1=\dfrac{d}{dy}g(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$ ← 右辺は合成関数の微分法による．

ここで，$g(y)=x$ であるから　　$1=\dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

よって，次の公式が得られる．

逆関数の微分法

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}}$$

逆関数の微分法の公式を用いて，関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の導関数を求めてみよう．

例 3.8 $y=\sqrt[4]{x}$ を x について解くと，$x=y^4$ であるから　S

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

練習 3.12 逆関数の微分法の公式を用いて，次の関数 $y=\sqrt[6]{x}$ を微分せよ．　解

E》x^p の導関数

関数 $y = x^{\frac{1}{4}}$ のように，分数の指数で表された関数の導関数を調べてみよう．

n が正の整数であるとき，関数 $y = x^{\frac{1}{n}}$ の導関数は，逆関数の微分法を用いて，次のようにして求められる．

$y = x^{\frac{1}{n}}$ を x について解くと　　$x = y^n$

よって　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{ny^{n-1}}$　　← 逆関数の微分法

ここで　　$\dfrac{1}{y^{n-1}} = \dfrac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \dfrac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = x^{\frac{1}{n}-1}$

したがって　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$　　すなわち　　$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

この結果は，すでに学んだ導関数の公式

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

において，指数 n を $\dfrac{1}{n}$ に置き換えたものであることがわかる．

一般に，次の公式が成り立つ．

x^p の導関数

p が有理数のとき　　$\boldsymbol{(x^p)' = px^{p-1}}$

証明 p が有理数のとき，$p = \dfrac{m}{n}$ となる正の整数 n と整数 m がある．

よって　　$x^p = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$

$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ と合成関数の微分法の公式を用いると

$$\begin{aligned}
(x^p)' &= \left\{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right\}' \\
&= m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' \\
&= m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \\
&= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \\
&= px^{p-1}
\end{aligned}$$

証終

← 指数を計算すると

$$\begin{aligned}
&\frac{m-1}{n} + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \\
&= \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \\
&= \frac{m}{n} - 1
\end{aligned}$$

例 3.9　関数 $y = \sqrt[4]{x^3}$ の導関数　S

$$y' = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

練習 3.13　次の関数を微分せよ．　解

(1) $y = \sqrt{x}$

(2) $y = \sqrt[3]{x^2}$

(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

例 3.10　関数 $y = \sqrt[3]{x^2+4}$ の導関数　S

$$y' = \left\{(x^2+4)^{\frac{1}{3}}\right\}' = \frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x^2+4)' = \frac{1}{3}(x^2+4)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x$$
$$= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}$$

練習 3.14　次の関数を微分せよ．　解

(1) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$

(2) $y = \sqrt{4-x^2}$

3.1.3 問題

問題 3.1 導関数の定義に従って，次の導関数を求めよ． 解

$$y = \sqrt{x+1}$$

→ p.78 例 3.3

問題 3.2 次の関数を微分せよ． 解 → p.80 例題 3.1

(1) $y = (1-x^2)(2x^3+5)$

(2) $y = (2x+1)(3x^4-x^3+2)$

問題 3.3 関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ がいずれの微分可能であるとき，
関数 $y = f(x)g(x)h(x)$ の導関数は

$$y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

であることを示せ．また，これを用いて，次の関数を微分せよ． 解

$$y = (x^2+1)(x+2)(3x-4)$$

→ p.79, 80

問題 3.4 次の関数を微分せよ． 解 → p.82 例題 3.2

(1) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

(2) $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$

問題 3.5 次の関数を微分せよ．解　→ p.84, 85

(1) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$

(2) $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$

(3) $y = (x+2)^3(2x-1)^4$

(4) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

問題 3.6 次の関数を微分せよ．解　→ p.88

(1) $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

問題 3.7 多項式 $f(x)$ を x の 2 次式 $(x-a)^2$ で割った商を $Q(x)$，余りを $bx + c$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$f(x) = (x-a)^2 Q(x) + bx + c$$

この両辺を x の関数とみて微分することにより，b, c をそれぞれ a, $f(a)$, $f'(a)$ を用いて表せ．解

3.2 いろいろな関数の導関数

3.2.1 いろいろな関数の導関数

A 》三角関数の導関数

まず，関数 $\sin x$ の導関数を調べよう．

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \qquad \leftarrow \text{導関数の定義}$$

において，$\sin(x+h)-\sin x = \sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x$

$$=(\cos h-1)\sin x+\cos x\sin h$$

であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\sin x+\frac{\sin h}{h}\cos x\right)$$

ここで，$\lim_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=0$，$\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$ により [3]

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=0\cdot\sin x+1\cdot\cos x=\cos x$$

よって $\qquad (\sin x)'=\cos x$

練習 3.15 関数 $\cos x$ の導関数が，次のようになることを示せ． 解

$$(\cos x)'=-\sin x$$

関数 $\tan x$ については，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ と，商の導関数の公式により

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

[3] $\lim_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=0$ は 60 ページの応用例題 2.7 で求めている．

前ページの結果をまとめると，次のようになる．

三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

例題 3.3 次の関数を微分せよ．　S

(1)　$y = \sin 3x$　　(2)　$y = \cos^2 x$　　(3)　$y = \dfrac{1}{\tan x}$

解答　(1)　$y' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$

(2)　$y' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$　　$\leftarrow 2\sin x \cos x = \sin 2x$

$= -\sin 2x$

(3)　$y' = -\dfrac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\dfrac{1}{\tan^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$　　$\leftarrow \tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

補足　(1)　$f(x) = \sin x$ とすると，$y = f(3x)$，$f'(x) = \cos x$ である．

合成関数の微分法の公式により　　$y' = f'(3x) \cdot (3x)' = 3\cos 3x$

(2)，(3) も同様である．

練習 3.16 次の関数を微分せよ．　解

(1)　$y = \cos 2x$

(2)　$y = \sqrt{2}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(3)　$y = \sin^2 x$

(4)　$y = \tan^2 x$

(5)　$y = \dfrac{1}{\sin x}$

(6)　$y = \cos^2 3x$

練習 3.17 次の関数を微分せよ． 解

(1) $y = x\sin x + \cos x$

(2) $y = x\cos x - \sin x$

深化 3.2 例題 3.3(2) の関数 $y = \cos^2 x$ を，$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ を利用して解いてみよう． 解

B 》対数関数の導関数

a は 1 でない正の定数とする．対数関数 $\log_a x$ の導関数を調べよう．

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{h}{x}=k$ とおくと，$h\longrightarrow 0$ のとき　$k\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} \qquad \cdots ①$$

0 に近い k の値について，$(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の値を計算すると，次の表のようになる．

[0 に近い k の値に対する数表]

k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$	k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$
0.1	$2.593742\cdots$	-0.1	$2.867971\cdots$
0.01	$2.704813\cdots$	-0.01	$2.731999\cdots$
0.001	$2.716923\cdots$	-0.001	$2.719642\cdots$
0.0001	$2.718145\cdots$	-0.0001	$2.718417\cdots$
0.00001	$2.718268\cdots$	-0.00001	$2.718295\cdots$

この表から，$k\longrightarrow 0$ のとき $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の値に限りなく近づくと予想される．また，実際に極限値をもつことが知られている．この極限値を $\boldsymbol{e}$ で表す．

$$e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} \qquad \leftarrow e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ とも表される．}$$

e は次のような数で，無理数であることが知られている．

$$e=2.71828182845\cdots$$

正の定数 e を用いると，① から次が成り立つ．

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\log_e a}$$

とくに，対数の底が e のときは，次のようになる．

$$(\log_e x)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x} \qquad \leftarrow \log_e e=1$$

e を底とする対数を**自然対数**という．微分法や積分法では $\log_e x$ の底 e を省略して，単に $\boldsymbol{\log x}$ と書くことが多く，自然対数を単に対数ということもある．

以上をまとめると，次のようになる．

対数関数の導関数

$$\mathbf{1}\quad (\log \boldsymbol{x})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} \qquad\qquad \mathbf{2}\quad (\log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}\log \boldsymbol{a}}$$

例題 3.4 次の関数を微分せよ． S

(1) $y = \log(2x+3)$ (2) $y = x\log_2 x$

解答 (1) $y' = \dfrac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)' = \dfrac{2}{2x+3}$ ← 合成関数の微分法の公式を利用．

(2) $y' = (x)'\log_2 x + x(\log_2 x)' = 1\cdot\log_2 x + x\cdot\dfrac{1}{x\log 2}$

$= \log_2 x + \dfrac{1}{\log 2}$

一般に，次のことが成り立つ．

$$\{\log \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\}' = \frac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$$

練習 3.18 次の関数を微分せよ． 解

(1) $y = \log 3x$ (2) $y = \log_2(4x-1)$

(3) $y = \log(x^2+1)$ (4) $y = x\log x - x$

C 》対数関数の導関数の応用

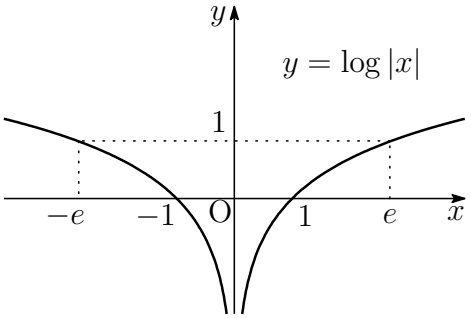
対数関数 $\log x$ の導関数を用いて，関数 $\log|x|$ の導関数を求めよう．

$x>0$ のとき　$(\log|x|)'=(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

$x<0$ のとき　$(\log|x|)'=\{\log(-x)\}'$

$=\dfrac{1}{-x}\cdot(-x)'=\dfrac{1}{x}$

よって　$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$



練習 3.19 $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$ であることを示せ．ただし，a は 0 でない正の定数とする． 解

以上をまとめると，次のようになる．

絶対値を含む導関数

3　$\boldsymbol{(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}}$　　**4**　$\boldsymbol{(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}}$

例題 3.5 次の関数を微分せよ． S

(1)　$y=\log|\cos x|$　　(2)　$y=\log_2|x^2-1|$

解答　(1)　$y'=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

(2)　$y'=\dfrac{1}{(x^2-1)\log 2}\cdot(x^2-1)'=\dfrac{2x}{(x^2-1)\log 2}$

一般に，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

練習 3.20 次の関数を微分せよ． 解

(1)　$y=\log|3x+2|$　　(2)　$y=\log|\sin x|$　　(3)　$y=\log_2|x^2-4|$

応用例題 3.1 $\log|y|$ の導関数を利用して，関数 $y=\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}$ を微分せよ． S

考え方》 $\log\left|\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right| = \log|x-1|+\log|x+3|^3-\log|x+2|^4$
$= \log|x-1|+3\log|x+3|-4\log|x+2|$
と変形できる．

解答 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = \log|x-1|+3\log|x+3|-4\log|x+2|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+2}\\ &= \frac{(x+3)(x+2)+3(x-1)(x+2)-4(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x+2)}\\ &= \frac{12}{(x-1)(x+3)(x+2)}\end{aligned}$$

よって $y' = \dfrac{12}{(x-1)(x+3)(x+2)}\cdot\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4} = \dfrac{12(x+3)^2}{(x+2)^5}$

注意 応用例題 3.1 のように，両辺の自然対数をとって微分する方法を，**対数微分法**という．

練習 3.21 $\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ． 解

(1) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}$

(2) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

α を実数とするとき，関数 $y=x^\alpha$ $(x>0)$ の導関数は，対数微分法を利用して求めることができる．

x^α の導関数

α が実数のとき $\qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

練習 3.22 上の公式を証明せよ． 解

D 》指数関数の導関数

a を 1 でない正の定数とする．指数関数 $y = a^x$ の導関数を調べよう．

$y = a^x$ を x について解くと　　$x = \log_a y$

逆関数の微分法と対数関数の導関数の公式により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{1}{y \log a}} = y \log a$$

よって　　$(a^x)' = a^x \log a$

とくに，$a = e$ のとき $\log e = 1$ であるから　　$(e^x)' = e^x$

指数関数の導関数をまとめると，次のようになる．

指数関数の導関数

1　$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$　　**2**　$\boldsymbol{(a^x)' = a^x \log a}$

例題 3.6 次の関数を微分せよ．　S

(1)　$y = e^{3x}$　　(2)　$y = x \cdot 2^x$

解答　(1)　$y' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3e^{3x}$

(2)　$y' = (x)'2^x + x(2^x)' = 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \log 2$

$= 2^x(1 + x \log 2)$

練習 3.23 次の関数を微分せよ．ただし，(6) の a は 1 でない正の定数とする．　解

(1)　$y = e^{2x}$　　(2)　$y = e^{-x^2}$　　(3)　$y = 3^x$

(4)　$y = 2^{-3x}$　　(5)　$y = xe^x$　　(6)　$y = (2x - 1)a^x$

深化 3.3 a は 0 でない正の定数とする．指数関数 $y = a^x$ の導関数を前ページの対数微分法を利用して求めてみよう．　解

3.2.2 第 n 次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は x の関数である．この関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，さらに微分して得られる導関数を，関数 $y=f(x)$ の**第 2 次導関数**といい，$\boldsymbol{y''}$，$\boldsymbol{f''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)}$ などの記号で表す．さらに，$f''(x)$ の導関数を $y=f(x)$ の**第 3 次導関数**といい，$\boldsymbol{y'''}$，$\boldsymbol{f'''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3y}{dx^3}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)}$ などの記号で表す．

注意 y'，$f'(x)$ を第 1 次導関数ということがある．

例 3.11 (1) $y=\sin x$ について S

$$y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x$$

(2) $y=e^{-x}$ について

$$y'=-e^{-x},\quad y''=e^{-x},\quad y'''=-e^{-x}$$

練習 3.24 次の関数について，第 3 次までの導関数を求めよ． 解

(1) $y=x^3-2x+5$　　(2) $y=\dfrac{1}{x}$　　(3) $y=\cos x$

(4) $y=\log x$　　(5) $y=e^x$　　(6) $y=e^{-2x}$

一般に，関数 $y=f(x)$ を n 回微分して得られる関数を，$y=f(x)$ の**第 $\boldsymbol{n}$ 次導関数**といい，$\boldsymbol{y^{(n)}}$，$\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^ny}{dx^n}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)}$ などの記号で表す．なお，$y^{(1)}$，$y^{(2)}$，$y^{(3)}$ は，それぞれ y'，y''，y''' を表す．

たとえば，関数 $y=e^{-x}$ の導関数について，例 3.11(2) でも調べたが，第 n 次導関数は $y^{(n)}=(-1)^ne^{-x}$ である．

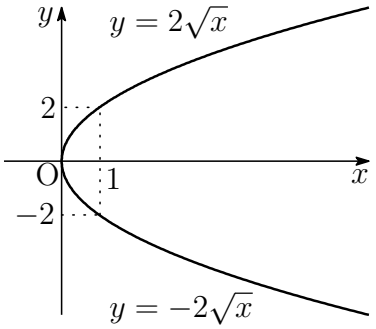
練習 3.25 次の関数の第 n 次導関数を求めよ． 解

(1) $y=x^n$　　(2) $y=e^{2x}$

3.2.3　曲線の方程式と導関数

A》 x，y の方程式と導関数

方程式 $y^2 = 4x$ の表す曲線は，右の図のような放物線である．ところで，この方程式を y について解くと，次のようになる．



$$y = \pm 2\sqrt{x}$$

よって，この放物線は，2 つの関数

$$y = 2\sqrt{x} \qquad \cdots ①$$
$$y = -2\sqrt{x} \qquad \cdots ②$$

のグラフを合わせたものである．

関数 ① を微分すると

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{y}$$

← $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

関数 ② を微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{y}$$

これらは，次のようにまとめて表すことができる．

$$y^2 = 4x \text{ ついて} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

練習 3.26 放物線 $y^2 = -8x$ について，次の問いに答えよ． 解

(1) 方程式を y について解け．

(2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{y}$ であることを示せ．

深化 3.4 放物線 $y^2 = 4x$ 上の原点以外の点における接線の傾きを求めてみよう． 解

前ページで求めた $\dfrac{dy}{dx}$ は，次のようにして求めることができる．

y を x の関数と考えて，方程式 $y^2 = 4x$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}y^2 = 4 \quad \cdots ①$$

合成関数の微分法により $\dfrac{d}{dx}y^2 = \dfrac{d}{dy}y^2 \cdot \dfrac{dy}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx}$

であるから，① は $2y\dfrac{dy}{dx} = 4$

よって，$y \neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{y}$

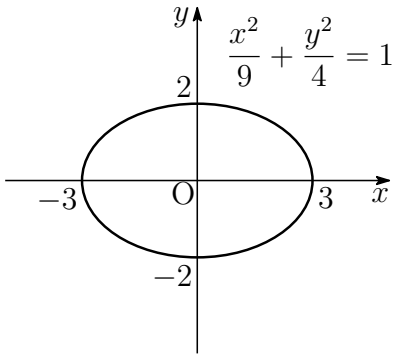
例題 3.7 方程式 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ． S

解答 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{9} + \frac{2y}{4} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

よって，$y \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y}$$



注意 例題 3.7 の方程式が表す曲線は，円 $x^2 + y^2 = 9$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍に縮小したもので，**楕円**（だ）と呼ばれる．

練習 3.27 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ． 解

(1) $x^2 + y^2 = 1$ (2) $x^2 - y^2 = 1$

注意 練習 3.27(2) の方程式が表す曲線は，**双曲線**と呼ばれる．

B 》曲線の媒介変数表示と導関数

曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x 座標，y 座標が，いずれもある 1 つの変数 t の関数として表されるとき，曲線 C について調べてみよう．

例 3.12 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 x 座標，y 座標が，t の関数によって，

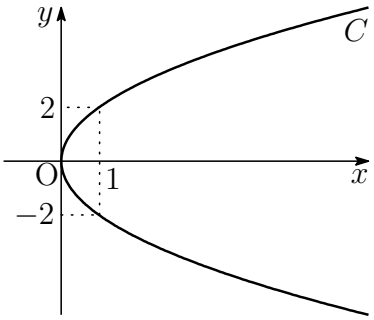
$$x = t^2 \quad \cdots ①$$
$$y = 2t \quad \cdots ②$$

で表されるとする．

①，② から t を消去すると

$$y^2 = 4x$$

よって，曲線 C は右の図のような放物線である．　終



一般に，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標が，変数 t によって

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

の形に表されるとき，これを曲線 C の**媒介変数表示**といい，変数 t を**媒介変数**または**パラメータ**という．

例 3.12 より，放物線 $y^2 = 4x$ は，次のように媒介変数表示される．

$$x = t^2, \quad y = 2t$$

合成関数および逆関数の微分法により　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

また，$\dfrac{dx}{dt} = 2t$，$\dfrac{dy}{dt} = 2$ であるから　$\dfrac{dy}{dx} = 2\cdot\dfrac{1}{2t} = \dfrac{1}{t}$

補足 $t = \dfrac{y}{2}$ より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{y}$ となり，前ページで求めた $\dfrac{dy}{dx}$ と同じ結果であることがわかる．

注意 媒介変数による曲線の表示方法は 1 通りではない．

座標平面上の曲線が，媒介変数 t を用いて $x = f(t)$，$y = g(t)$ と表されるとき，y を x の関数と考えて，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めることができる．

一般に，次のことが成り立つ．

曲線の媒介変数表示と導関数

$x = f(t)$，$y = g(t)$ のとき　　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}}$

例題 3.8 x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ． S

(1)　$x = 2t$，$y = t^2 - 1$　　(2)　$x = 3\cos t$，$y = 2\sin t$

解答　(1)　$\dfrac{dx}{dt} = 2$，$\dfrac{dy}{dt} = 2t$ から　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{2} = t$

(2)　$\dfrac{dx}{dt} = -3\sin t$，$\dfrac{dy}{dt} = 2\cos t$ から　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos t}{-3\sin t} = -\dfrac{2\cos t}{3\sin t}$

補足 (1) は放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$，(2) は楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の媒介変数表示である．

練習 3.28 x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ． 解

(1)　$x = 2t^2$，$y = 2t - 1$　　(2)　$x = \cos t$，$y = \sin t$

3.2.4　問題

問題 3.8 次の関数を微分せよ．ただし，(6) の a は 1 でない正の定数とする． 解

(1) $y = \dfrac{1}{1+\cos x}$ → p.91〜98

(2) $y = \sin^2 x \cos 2x$

(3) $y = (\log x)^2$

(4) $y = \log \left| \dfrac{x+1}{x+2} \right|$

(5) $y = \log \dfrac{e^x}{e^x+1}$

(6) $y = a^{2x+1}$

問題 3.9 a を定数とするとき，次のことを示せ． 解 → p.95

$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+a}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

問題 3.10 次の関数を微分せよ． 解 → p.97 応用例題 3.1

(1) $y = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$

(2) $y = (x-1)^2 \cdot \sqrt[3]{x+2}$

問題 3.11 関数 $y = e^x(\sin x + \cos x)$ について，次の等式が成り立つことを示せ． 解

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

→ p.99

問題 3.12 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ． 解

$$(x-1)^2+y^2=16$$

→ p.101 例題 3.7

問題 3.13 x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ． 解

(1) $x=\dfrac{1}{\cos t},\quad y=\tan t$

→ p.103 例題 3.8

(2) $x=t+\dfrac{1}{t},\quad y=t-\dfrac{1}{t}$

問題 3.14 関数 $y=\sin x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ とする．$f'(x)$ を求めたいが，$f(x)$ はこれまで学んだ関数で表すことができない． 解

(1) $f(x)$ の定義域，値域を求めよ．

(2) $y=f(x)$ について，$\dfrac{dx}{dy}$ を y の関数として表せ．

(3) $f'(x)$ を x の関数として表せ．

3.3 章末問題

3.3.1 章末問題 A

章末 3.1 導関数の定義に従って，関数 $y = x\sqrt{x}$ の導関数を求めよ． 解

章末 3.2 次の関数を微分せよ． 解

(1) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}}$

(2) $y = \sqrt{1 + \cos x}$

(3) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

(4) $y = 2^{\log x}$

章末 3.3 関数 $f(x)$，$g(x)$ の第 2 次導関数が存在するとき，次のことを示せ． 解

$$\frac{d^2}{dx^2}\{f(x)g(x)\} = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

章末 3.4 次の関数について，y' および y'' を求めよ． 解

(1) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

(2) $y = e^{-2x^2}$

章末 3.5 n を正の整数とすると，$x \neq 1$ のとき，次の等式が成り立つ．

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

この両辺を x の関数とみて微分し，$x \neq 1$ のとき，次の和を求めよ． 解

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

章末 3.6 関数 $f(x) = \sin x$ について，次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$ 解

章末 3.7 a，b を正の定数とする．次のことを示せ． 解

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

3.3.2 章末問題 B

章末 3.8 $x = a$ で微分可能な関数 $f(x)$ について，次のことを示せ． 解

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a)$$

章末 3.9 次の極限値を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

章末 3.10 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ であることを用いて，次の値を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ (2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}$ (3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n}$

章末 3.11 次の関数を微分せよ． 解

(1) $y = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

(2) $y = x^2(\log x)^3$

(3) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

章末 3.12 次の関数を微分せよ． 解

(1) $y = x^x \ (x > 0)$

(2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x+2)^2}}$

章末 3.13 $x = e^t$，$y = e^{-t}$ であるとき，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ． 解

章末 3.14 方程式 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ と表せることを示せ． 解

ヒント

8 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = f'(a)$

9 微分係数の定義を利用する．　(1) $\log 1 = 0$　(2) $e^0 = 1$ に注意する．

12 (1) $\log y$ の導関数を利用する．　(2) $\log |y|$ の導関数を利用する．

13 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

第 4 章　微分法の応用

4.1　導関数の応用

4.1.1　接線の方程式

A》 曲線 $y = f(x)$ の接線

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しい．

よって，次のことが成り立つ．

接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

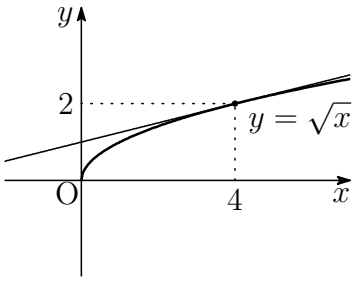
$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

例題 4.1 次の曲線上の点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ．　S

$$y = \sqrt{x}$$

解答 $f(x) = \sqrt{x}$ とすると

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



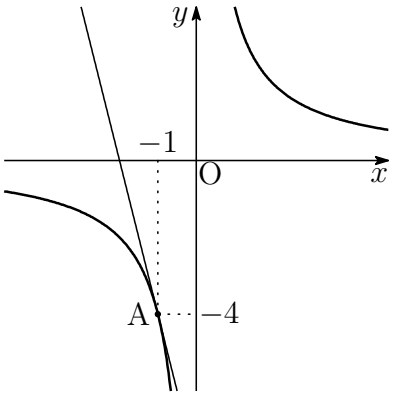
であるから　　$f'(4) = \dfrac{1}{4}$

よって，点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式は

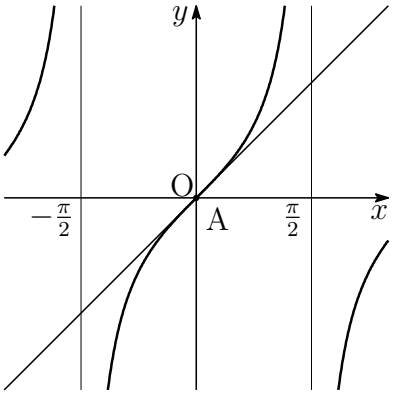
$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \qquad \text{すなわち} \qquad y = \frac{1}{4}x + 1$$

練習 4.1 次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ．解

(1) $y = \dfrac{4}{x}$，A$(-1, -4)$



(2) $y = \tan x$，A$(0, 0)$

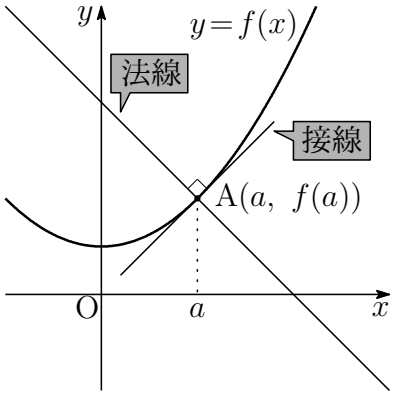


B》曲線 $y = f(x)$ の法線

曲線上の点 A を通り，A におけるこの曲線の接線と垂直な直線を，点 A におけるこの曲線の**法線**という．

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ に等しいから，$f'(a) \neq 0$ のとき，点 A における法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ である．

よって，次のことが成り立つ．



曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$f'(a) \neq 0$ のとき　　$\boldsymbol{y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)}$

注意 $f'(a) = 0$ のとき，法線の方程式は $x = a$ である．

例 4.1 曲線 $y = e^x$ 上の点 $(1,\ e)$ における法線の方程式 S

$f(x) = e^x$ とすると

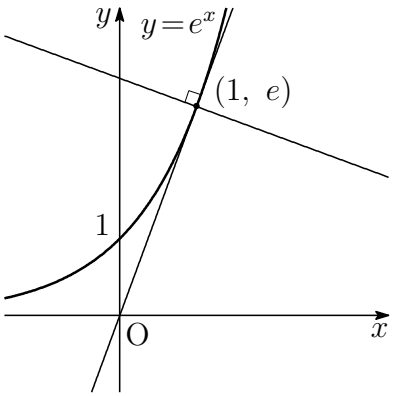
$$f'(x) = e^x$$

よって　　$f'(1) = e$

したがって，この法線の方程式は

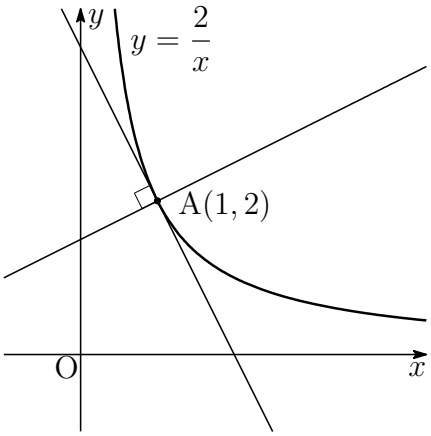
$$y - e = -\frac{1}{e}(x - 1)$$

すなわち　　$y = -\dfrac{1}{e}x + e + \dfrac{1}{e}$

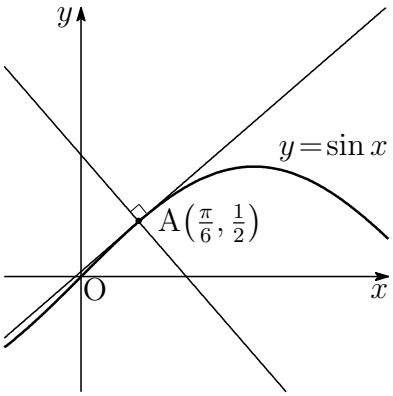


練習 4.2 次の曲線上の点 A における法線の方程式を求めよ．解

(1) $y = \dfrac{2}{x}$，A$(1,\ 2)$



(2) $y = \sin x$，A$\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$



C》傾きや通る 1 点から接線の方程式の決定

応用例題 4.1 曲線 $y=\log x$ について，次のような接線の方程式を求めよ． S

(1) 傾きが e である　　(2) 原点を通る

考え方》 接点の座標を $(a,\ \log a)$ として，この点における接線の方程式を作り，条件を満たすように a の値を定める．

解答 $y=\log x$ を微分すると　　$y'=\dfrac{1}{x}$

ここで，接点の座標を $(a,\ \log a)$ とすると，接線の方程式は

$$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a)$$

すなわち　　$y=\dfrac{1}{a}x+\log a-1 \quad \cdots ①$

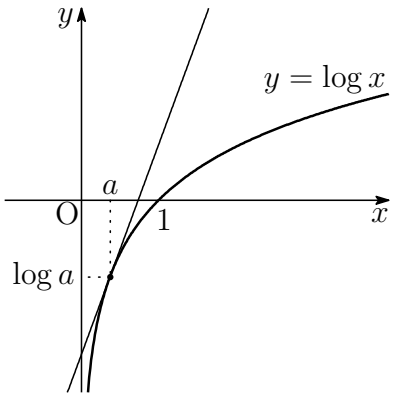
(1) 接線 ① の傾きが e であるから

$$\frac{1}{a}=e \quad \text{すなわち} \quad a=\frac{1}{e}$$

① に代入すると

$$y=ex-1-1$$

整理して　　$y=ex-2$



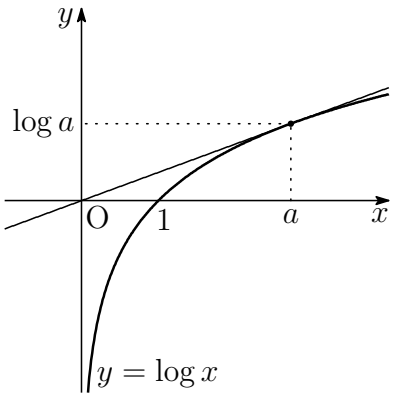
(2) 接線 ① が原点 $(0,\ 0)$ を通るから

$$0=\frac{1}{a}\cdot 0+\log a-1$$

よって　　$\log a=1$

ゆえに　　$a=e$

① に代入すると　　$y=\dfrac{1}{e}x$



練習 4.3 曲線 $y=e^x$ について，次のような接線の方程式を求めよ． 解

(1) 傾きが 1 である　　(2) 点 $(1,\ 0)$ を通る

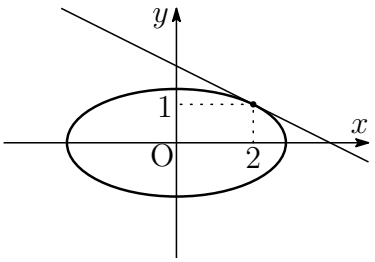
D 》曲線の方程式と接線

101 ページで学んだように，曲線が x，y の方程式で表される場合に，y を x の関数とみて，方程式を x で微分して導関数 y' を求めることができる．

この導関数 y' を利用して，楕円や双曲線の曲線上の点における接線の方程式を求めてみよう．

例題 4.2 楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(2,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ． S

解答 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ の両辺を x で微分すると



$$\frac{2x}{8}+\frac{2yy'}{2}=0$$

よって，$y\neq 0$ のとき

$$y'=-\frac{x}{4y}$$

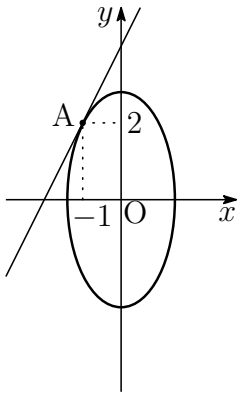
ゆえに，点 $(2,\ 1)$ における接線の傾きは　$-\dfrac{2}{4\cdot 1}=-\dfrac{1}{2}$

したがって，求める接線の方程式は

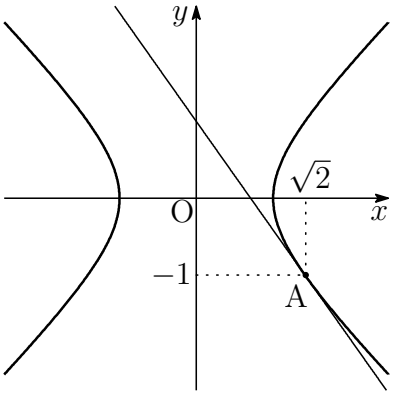
$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)\qquad \text{すなわち}\qquad y=-\frac{1}{2}x+2$$

練習 4.4 次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ． 解

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$，$\mathrm{A}(-1,\ 2)$



(2) 双曲線 $x^2-y^2=1$，$\mathrm{A}(\sqrt{2},-1)$

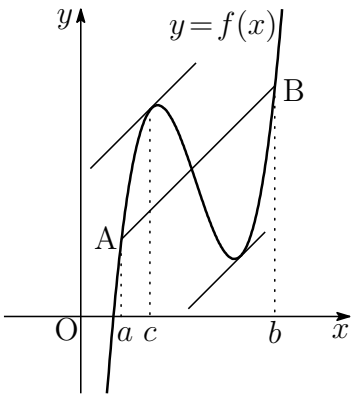


4.1.2　平均値の定理

A 》平均値の定理

$f(x)$ が連続関数のとき，$y = f(x)$ の グラフ上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ をとって，直線 AB と平行な接線を考えてみよう．

$f(x)$ が区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，このグラフ上の A，B 間の点における接線で，直線 AB と平行なものが少なくとも 1 本存在することが知られている．直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である．また，接点の x 座標を c とすると，接線の傾きは $f'(c)$ である．したがって，次のことが成り立つ．



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad a < c < b \quad \cdots ①$$

一般に，次の**平均値の定理**が成り立つ．　[平均値の定理]

平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad a < c < b}$$

を満たす c が存在する．

証明　2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を通る直線の傾きを m とすると

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{ゆえに} \quad m(b-a) - f(b) + f(a) = 0$$

ここで，$g(x) = m(x-a) - f(x) + f(a)$ とおくと　$g(a) = 0, \quad g(b) = 0$

$g(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能である．

$g(x)$ が x によらない定数であれば，任意の $x \in (a, b)$ に対して $g'(x) = 0$ となる．

$g(x)$ が定数でないとき，$g(x)$ は有界閉区間 $[a,\ b]$ で連続であるから，$g(c) = \max g(x)$ または $g(c) = \min g(x)$ を満たす $c \in (a,\ b)$ が存在する．

$g(c) = \max g(x)$ のとき

$$g'(c) = \lim_{h \to +0} \frac{g(c+h)-g(c)}{h} \geqq 0, \quad g'(c) = \lim_{h \to -0} \frac{g(c+h)-g(c)}{h} \leqq 0$$

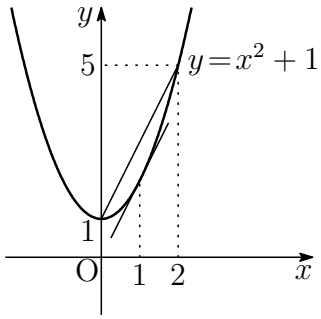
したがって　$g'(c) = 0$　$(g(c) = \min g(x)$ のときも同様)

$g'(x) = m - f'(x)$ より　$g'(c) = m - f'(c) = 0$　すなわち　$m = f'(c)$　　証終

例 4.2 $f(x)=x^2+1$ は，区間 $[0,\ 2]$ で連続で，区間 $(0,\ 2)$ で微分可能である． S

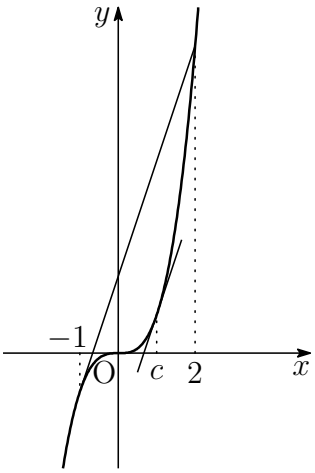
$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{5-1}{2}=2$$
$$f'(c)=2c$$

よって，$2c=2$ から　$c=1$



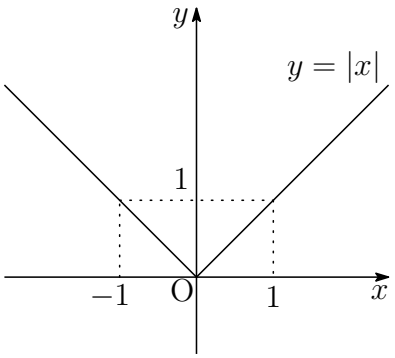
練習 4.5 次場合に，前ページの平均値の定理における c の値を求めよ． 解

$$f(x)=x^3,\quad a=-1,\quad b=2$$



$f(x)=|x|$，$a=-1$，$b=1$ のとき，前ページ ① を満たす c は存在しない．関数 $|x|$ は $x=0$ で微分可能でないからである．

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるときにのみ，平均値の定理を用いることができるのである．



B 》不等式への応用

応用例題 4.2 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ． S

$$0 < a < b \text{ のとき} \qquad \frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

考え方 》 関数 $f(x) = \log x$ と区間 $[a,\ b]$ について，平均値の定理を適用する．

証明 関数 $f(x) = \log x$ は，$x > 0$ で微分可能で　$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

区間 $[a,\ b]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{\log b - \log a}{b - a} = \frac{1}{c} \quad \cdots ①, \qquad a < c < b \quad \cdots ②$$

を満たす実数 c が存在する．

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で減少するから，② より

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{b} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

よって，① より　$\dfrac{1}{b} < \dfrac{\log b - \log a}{b - a} < \dfrac{1}{a}$　証終

練習 4.6 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ． 解

$$a < b \text{ のとき} \qquad e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$$

4.1.3 関数の値の変化

A 》関数の増減

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとき，平均値の定理から，関数の増減[1] について次のことが成り立つ．

導関数の符号と関数の増減

1 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ ならば，
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加する．

2 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) < 0$ ならば，
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少する．

3 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) = 0$ ならば，
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である．

[1 の証明] 区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 x_1，x_2 に対して，平均値の定理により

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\quad x_1 < c < x_2$$

を満たす c が存在する．

ここで，区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ ならば，x_1，x_2 のとり方によらず，常に $f'(c) > 0$ となる．$x_2 - x_1 > 0$ であるから，

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つ．よって，**1** が成り立つ． **証終**

練習 4.7 上の **2**，**3** を証明せよ． 解

[1] 区間 I に含まれる任意の 2 数 x_1，x_2 について，「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$」が成り立つとき，関数 $f(x)$ は区間 I で増加するという．「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$」が成り立つとき，関数 $f(x)$ は区間 I で減少するという．

関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとき，前ページの **3** を用いると，次のことが導かれる．

区間 $(a,\ b)$ で常に $g'(x) = f'(x)$ ならば，区間 $[a,\ b]$ で

$$g(x) = f(x) + C \qquad \text{ただし，} C \text{ は定数}$$

練習 4.8 上のことを証明せよ． 解

導関数 $f'(x)$ の符号を調べて，関数 $f(x)$ の増減を調べてみよう．

例題 4.3 次の関数の増減を調べよ． S

$$f(x) = x - 2\sqrt{x}$$

解答 $f(x)$ の定義域は $x \geqq 0$ である．

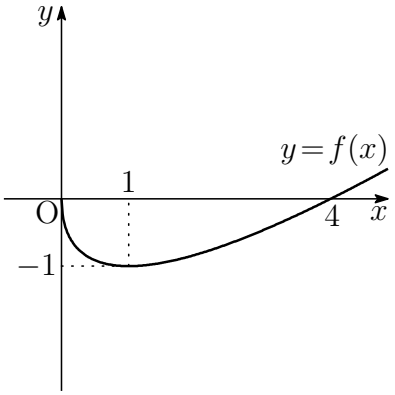
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

$f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = 1$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

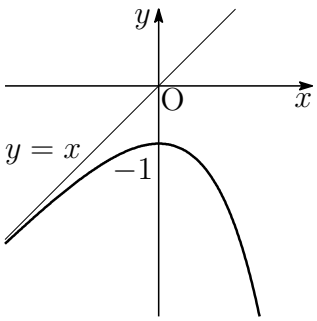
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	-1	↗



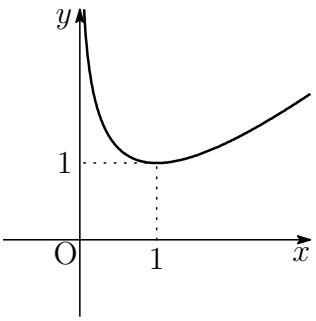
したがって，$f(x)$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ で減少し，$1 \leqq x$ で増加する．

練習 4.9 次の関数の増減を調べよ． 解

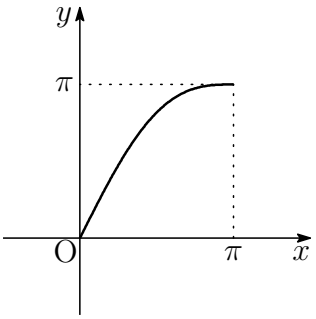
(1) $f(x) = x - e^x$



(2) $f(x) = x - \log x$



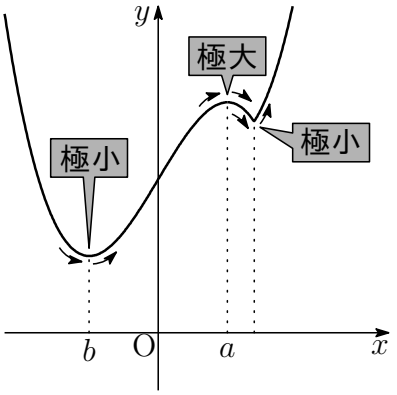
(3) $f(x) = x + \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$



B 》関数の極大と極小

連続な関数 $f(x)$ が，$x = a$ を境目として，増加から減少に移るとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極大**であるといい，$f(a)$ を**極大値**という．また，関数 $f(x)$ が，$x = b$ を境目として減少から増加に移るとき，$f(x)$ は $x = b$ で**極小**であるといい，$f(b)$ を**極小値**という．

極大値と極小値をまとめて**極値**という．



関数 $f(x)$ が $x = a$ を含むある区間で微分可能なとき，増減が次のようになる場合は，$f(a)$ が極値である．

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

一般に，次が成り立つことが知られている．

極値をとるための必要条件

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき

$$\boldsymbol{f(x)\text{ が }x = a\text{ で極値をとるならば}\qquad f'(a) = 0}$$

ただし，逆は成り立たない．すなわち，

$f'(a) = 0$ でも，$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるとは限らない．

$f(x) = x^3$ の増減表

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

たとえば，関数 $f(x) = x^3$ は，

$f'(x) = 3x^2$ より，$f'(0) = 0$ であるが，$x = 0$ で極値をとらない．

よって，微分可能な関数 $f(x)$ の極値を求めるには，まず $f'(x) = 0$ となる x の値を求め，その値の前後における $f'(x)$ の符号を調べる必要がある．

例題 4.4 次の関数の極値を求めよ. S

(1) $f(x) = xe^{-x}$ (2) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

解答 (1) $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると $x = 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる. ← $e^{-x} > 0$ に注意

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{1}{e}$	↘

← $f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$

よって, $f(x)$ は $x = 1$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる. 極小値はない.

(2) 定義域は $x \neq 0$ である.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると $x = -2,\ 2$

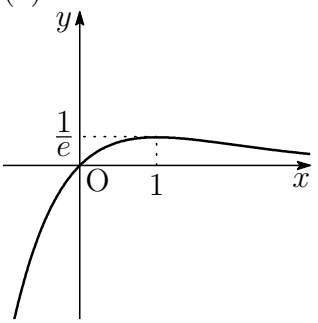
$f(x)$ の増減表は次のようになる. ← $x^2 > 0$ に注意

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -4	↘	/	↘	極小 4	↗

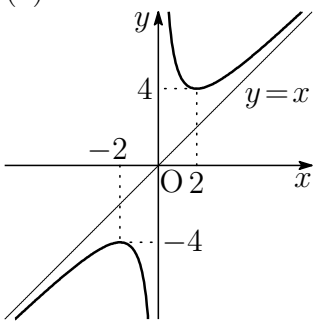
よって, $f(x)$ は $x = -2$ で極大値 -4, $x = 2$ で極小値 4 をとる.

補足 例題 4.4 の各関数のグラフは, 次のようになる.

(1)

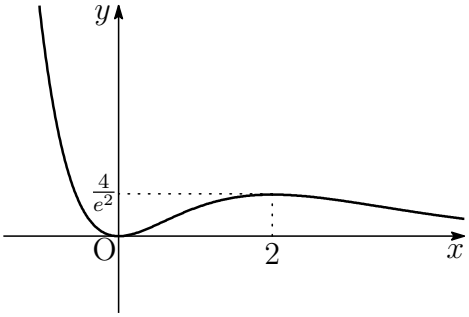


(2)

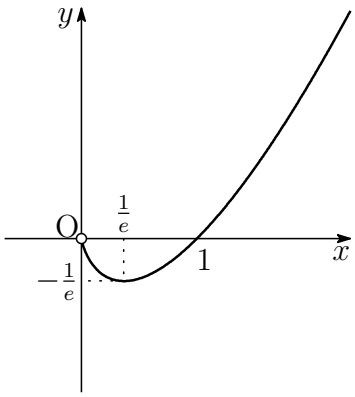


練習 4.10 次の関数の極値を求めよ．解

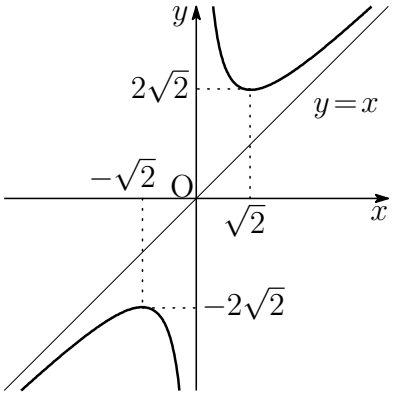
(1) $f(x) = x^2 e^{-x}$



(2) $f(x) = x \log x$



(3) $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$



$x = a$ で微分可能でなくても，$x = a$ で極値をとる関数がある．

例題 4.5 関数 $f(x) = |x|\sqrt{x+1}$ の極値を求めよ． S

解答 関数の定義域は，$x \geqq -1$ である．

$x \geqq 0$ のとき　　$f(x) = x\sqrt{x+1}$　　← $x \geqq 0$ のとき $|x| = x$

$x > 0$ において

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

よって，$x > 0$ では，常に　　$f'(x) > 0$

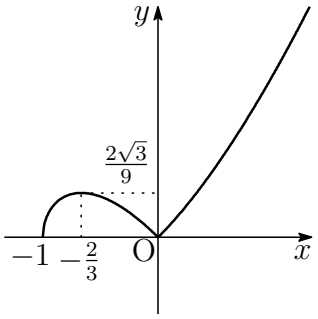
$-1 \leqq x < 0$ のとき　　$f(x) = -x\sqrt{x+1}$　　← $x < 0$ のとき $|x| = -x$

$-1 < x < 0$ において　　$f'(x) = -\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(x) = 0$ となる x の値は　　$x = -\dfrac{2}{3}$

以上から，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	↗	極大 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	極小 0	↗



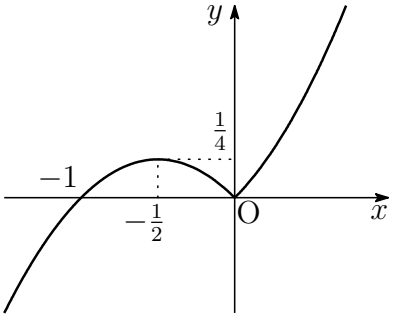
よって，$f(x)$ は

$x = -\dfrac{2}{3}$ で極大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，$x = 0$ で極小値 0 をとる．

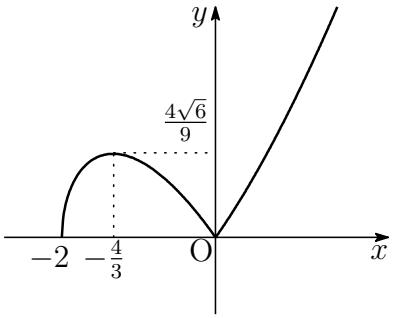
補足 この関数は $x = 0$ で微分可能でない．このことは，77 ページ例 3.2 と同様な方法で確かめられる．

練習 4.11 次の関数の極値を求めよ．解

(1) $f(x) = |x|(x+1)$



(2) $f(x) = |x|\sqrt{x+2}$



応用例題 4.3 関数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x-1}$ が $x=-1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ．また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ． S

考え方 $f(x)$ は $x=-1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるならば，$f'(-1)=0$ である．

解答

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+a)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1-a}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ は $x=-1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるならば

$$f'(-1)=0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{2-a}{4}=0$$

これを解くと　　$a=2$

逆に，$a=2$ のとき $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとることを示す．

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}, \qquad f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．　← $(x-1)^2>0$ に注意

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -1	↘	／	↘	極小 7	↗

よって，$f(x)$ は $x=-1$ で極値をとり，条件を満たす．

(答) $a=2$，$x=-1$ で極大値 -1，$x=3$ で極小値 7

練習 4.12 関数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ が $x=1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ．また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ． 解

深化 4.1 応用例題 4.3 の解答について，次の ①，② を説明してみよう． 解

① $f(x)$ が $x=-1$ で微分可能である理由

② $a=2$ のとき $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとることを確かめよ．

C》関数の最大と最小

増減を利用して，関数の最大値，最小値を求めてみよう．

例題 4.6 次の関数の最大値，最小値を求めよ． S

$$y=(1+\sin x)\cos x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

解答

$$\begin{aligned} y' &= \cos x\cdot\cos x+(1+\sin x)\cdot(-\sin x) \\ &= \cos^2 x-\sin x-\sin^2 x \qquad \leftarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x \\ &= -2\sin^2 x-\sin x+1 \\ &= -(2\sin x-1)(\sin x+1) \end{aligned}$$

$0<x<2\pi$ において $y'=0$ となる x の値を求めると

$$2\sin x-1=0 \quad \text{または} \quad \sin x+1=0$$

より　　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

よって，y の増減表は次のようになる．

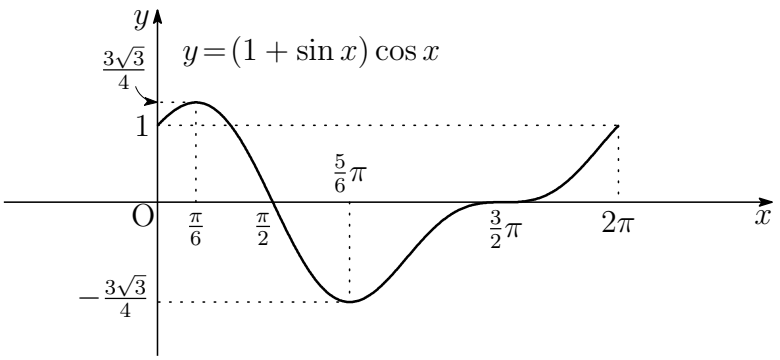
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	1	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0	↗	1

したがって，y は

$$x=\frac{\pi}{6} \text{ で最大値} \frac{3\sqrt{3}}{4},\quad x=\frac{5}{6}\pi \text{ で最小値} -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

をとる．

補足 例題 4.6 のグラフは次のようになる．



練習 4.13 次の関数の最大値，最小値を求めよ． 解

(1) $y = (1 + \cos x) \sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(2) $y = \dfrac{4 - 3x}{x^2 + 1} \quad (1 \leqq x \leqq 4)$

4.1.4　関数のグラフ

A 》曲線の凹凸

関数 $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ の符号が何を表すか調べてみよう．

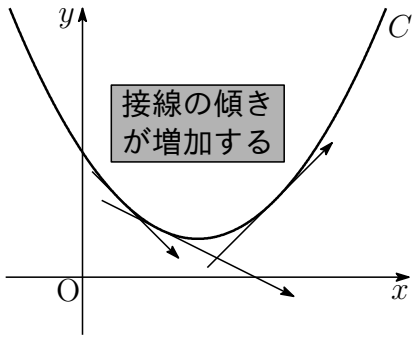
関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする．$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数であるから，$f'(x)$ の値の増減は $f''(x)$ の符号で調べることができる．また，$f'(x)$ の値の増減は，接線の傾きの増減を表す．

よって，次のことがいえる．

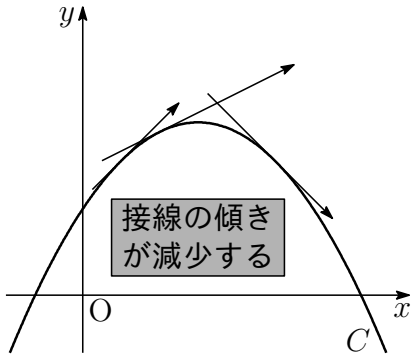
［1］$f''(x) > 0$ である区間では，$f'(x)$ の値は増加する．すなわち，曲線 C の接線の傾きが増加する．

［2］$f''(x) < 0$ である区間では，$f'(x)$ の値は減少する．すなわち，曲線 C の接線の傾きが減少する．

［1］

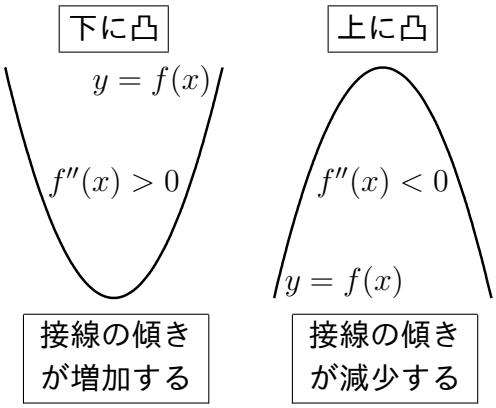


［2］



[曲線の接線の傾きの変化]

ある区間で，x の値が増加すると曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きが増加するとき，曲線はこの区間で**下に凸**であるという．また，接線の傾きが減少するとき，曲線はこの区間で**上に凸**であるという．



前ページで調べたことをまとめると，$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸について，次のことが成り立つ．

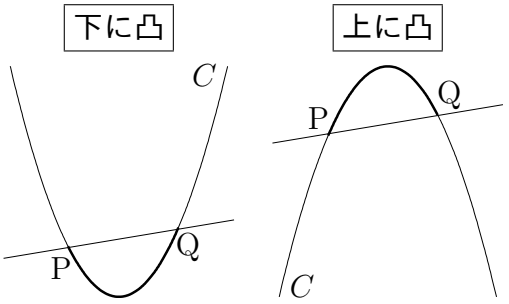
$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

1 $f''(x)>0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸である．

2 $f''(x)<0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は上に凸である．

補足 曲線 C がある区間で下に凸であるとき，その区間にある C 上のどの 2 点 P，Q に対しても，弧 PQ の下側にある．また，上に凸であるとき，弧 PQ は線分 PQ の上側にある．



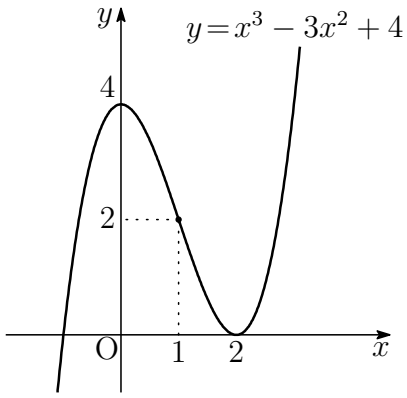
第 2 次導関数の符号から，曲線の凹凸を調べてみよう．

例 4.3 曲線 $y=x^3-3x^2+4$ の凹凸 S

$$y'=3x^2-6x$$
$$y''=6x-6=6(x-1)$$

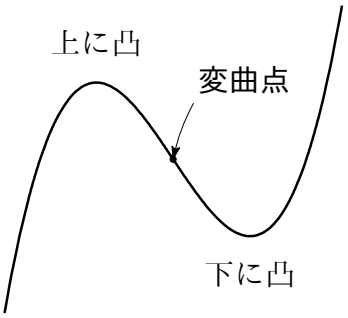
y'' の符号により，この曲線の凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	2	下に凸



終

例 4.3 の曲線では，点 $(1,\ 2)$ を境目として曲線の凹凸が入れ替わる．このように，曲線の凹凸が入れ替わる境目の点を**変曲点**という．



変曲点について，次のことが成り立つ．

曲線 $y = f(x)$ の変曲点

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとする．

1　$f''(a) = 0$ のとき $x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，
点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y = f(x)$ の変曲点である．

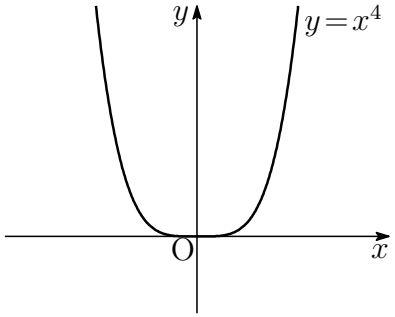
2　点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点ならば　$f''(a) = 0$

2 の逆は成り立たない．すなわち，$f''(a) = 0$ であっても点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点であるとは限らない．

たとえば，$f(x) = x^4$ を考える．

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2$$

よって，曲線 $y = f(x)$ の凹凸は，次の表のようになる．

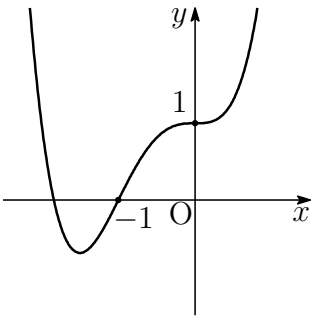


x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	下に凸	0	下に凸

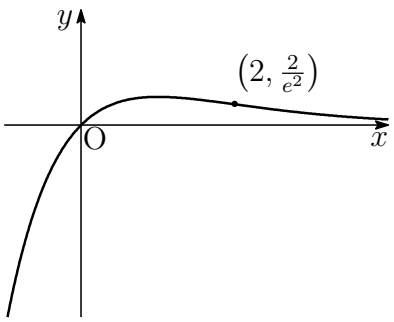
したがって，$f''(0) = 0$ でも，原点 $(0,\ 0)$ はこの曲線の変曲点ではない．

練習 4.14　次の曲線の凹凸を調べよ．また，変曲点があればその座標を求めよ．解

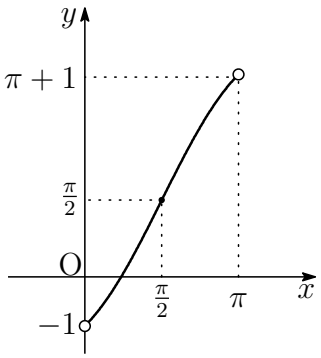
(1)　$y = x^4 + 2x^3 + 1$



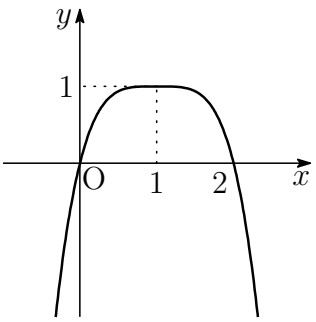
(2) $y = xe^{-x}$



(3) $y = x - \cos x \ (0 < x < \pi)$



(4) $y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x$



B 》グラフのかき方

例題 4.7 関数 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ． S

解答 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ とする．

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} - x\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

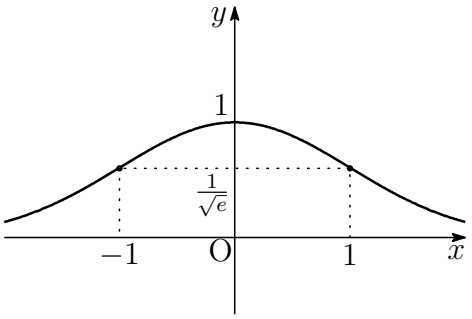
$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↱	極大 1	↘	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↳

また

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である．
以上から，この関数のグラフの概形は，右の図のようになる．



注意 上の表において，↗ は下に凸で増加，↱ は上に凸で増加，↘ は上に凸で減少，↳ は下に凸で減少であることを示している．

関数 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ は $f(-x) = f(x)$ を満たすから，例題 4.7 のグラフは y 軸に関して対称である．グラフの概形をかくときは，グラフの対称性にも注意するとよい．

練習 4.15 関数 $y = e^{-2x^2}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ． 解

例題 4.8 関数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ のグラフの概形をかけ. S

解答 関数の定義域は $x\neq 1$ である.

$f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ とする. $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ であるから

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2},\qquad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	極大 0	↘		↘	極小 4	↗

また, $\lim_{x\to 1+0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$

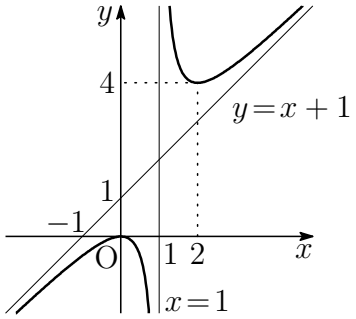
であるから，直線 $x=1$ はこの曲線の漸近線である.

さらに, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+1)\}=0$

$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(x+1)\}=0$

であるから，直線 $y=x+1$ もこの曲線の漸近線である.

以上から，このグラフの概形は，右の図のようになる.



補足 関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて, $\lim_{x\to c+0} f(x)$, $\lim_{x\to c-0} f(x)$ のうち，少なくとも 1 つが ∞ または $-\infty$ であるとき，直線 $x=c$ が漸近線である.

また, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ であるとき，直線 $y=ax+b$ が漸近線である.

練習 4.16 関数 $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ のグラフの概形をかけ. 解

■ 関数のグラフのかき方のまとめ

136 ページ例題 4.7，137 ページ例題 4.8 で学んだように，関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかくには，次のようなことを調べる．

① 定義域　② 対称性　③ 増減，極値
④ 凹凸，変曲点　⑤ 漸近線　⑥ 座標軸との共有点

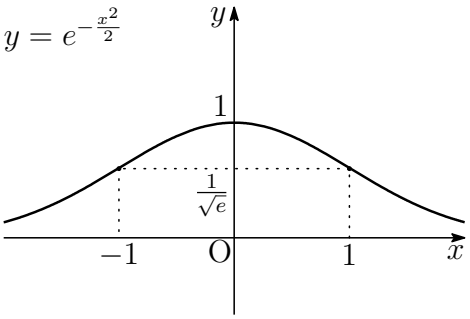
ここでは，対称性と漸近線について，まとめておこう．

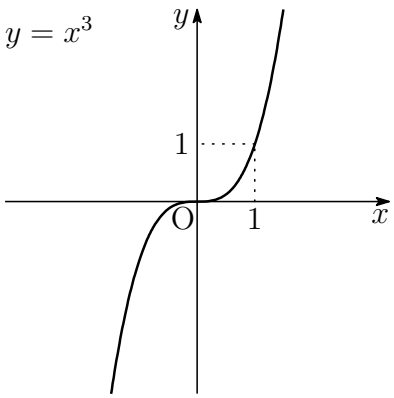
対称性　対称性は，関数 $f(x)$ について成り立つ等式で判断できる．

［1］$\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$　が常に成り立つとき，曲線 $y = f(x)$ は，**y 軸に関して対称**

［2］$\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ が常に成り立つとき，曲線 $y = f(x)$ は，**原点に関して対称**

例題 4.7 の関数 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ のグラフは y 軸に関して対称である．また，たとえば，関数 $y = x^3$ のグラフは原点に関して対称である．





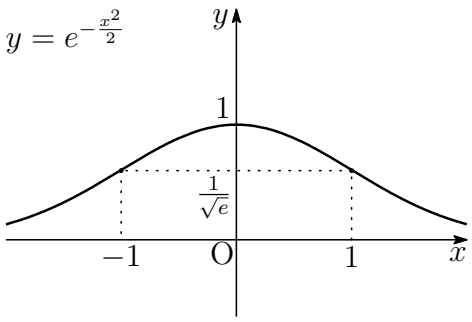
漸近線 関数 $y = f(x)$ のグラフに関して，次のことが成り立つ．

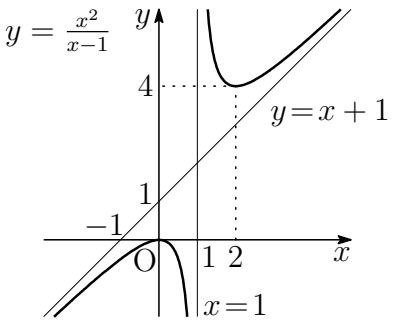
［1］ $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ または $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ のとき，直線 $y = a$ は漸近線である．

［2］ $\lim_{x\to c+0} f(x)$，$\lim_{x\to c-0} f(x)$ のうち，少なくとも 1 つが ∞ または $-\infty$ であるとき，直線 $x = c$ は漸近線である．

［3］ $\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (ax+b)\} = 0$ または $\lim_{x\to-\infty}\{f(x) - (ax+b)\} = 0$ のとき，直線 $y = ax + b$ は漸近線である．

例題 4.7 の関数 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ の関数では［1］，例題 4.8 の関数 $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ の関数では［2］，［3］の極限を調べている．





■ 漸近線の求め方

前ページで学んだように，関数 $y=f(x)$ のグラフに関して

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0 \quad \text{または} \quad \lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$$

であるとき，直線 $y=ax+b$ は漸近線です．137 ページの例題 4.8 では，関数を $y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ と変形して漸近線 $y=x+1$ を求めましたが，すべての関数でこのように変形できるわけでありません．一般には，どのようにして漸近線の方程式を求めればよいか考えてみましょう．

以下では，

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0 \quad \cdots ①$$

である場合について考えることにします．

確認 ① であるとき，$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=b$ であることを確かめよう．

(解) $f(x)-ax=\{f(x)-(ax+b)\}+b$ であるから，① より，成立する．

上のことから，① であるとき，b は極限値 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}$ として求められることがわかります．

発見 ① であるとき，a もある極限値として求められる．$\lim_{x\to\infty}g(x)=a$ が成り立つような $g(x)$ を予想し，その予想が正しいことを証明してみよう．

(解) $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ とすると　$g(x)=\dfrac{f(x)-(ax+b)}{x}+a+\dfrac{b}{x}$

① および $\lim_{x\to\infty}\dfrac{b}{x}=0$ より　$\lim_{x\to\infty}g(x)=a$

整理 関数 $y=\sqrt{x^2+8x}$ $(x\geqq 0)$ のグラフには $y=ax+b$ のようにかける漸近線が存在する．この漸近線の方程式を求めてみよう．

(解) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$，$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ とおくと

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+8x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{8}{x}}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+8x)-x^2}{\sqrt{x^2+8x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}+1}=4$$

したがって　$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+4)\}=0$

よって，関数 $y=\sqrt{x^2+8x}$ $(x\geqq 0)$ のグラフの漸近線の方程式は　$y=x+4$

C》第 2 次導関数と極値

関数 $f(x)$ の極値を判定するのに，第 2 次導関数 $f''(x)$ を利用する方法がある．$f''(x)$ が連続関数であるとき，次のことが成り立つ．

第 2 次導関数と極限

1 $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば，$f(a)$ は極小値である．

2 $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば，$f(a)$ は極大値である．

［**1 の証明**］$f''(a)>0$ のとき，a に十分近い x では $f''(x)>0$ となり，

$f'(x)$ は増加する．

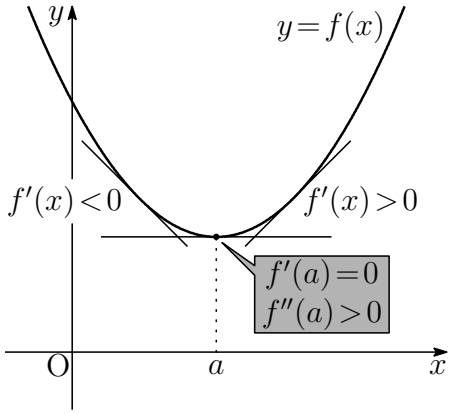
ここで，$f'(a)=0$ であるから

$x<a$ では　$f'(x)<0$

$x>a$ では　$f'(x)>0$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	↘	極小	↗

よって，このとき $f(a)$ は極小値である．



証終

2 についても，同様にして証明することができる．

例 4.4 関数 $f(x)=-x^3+3x$ の極限 S

$f'(x)=-3x^2+3$，$f''(x)=-6x$

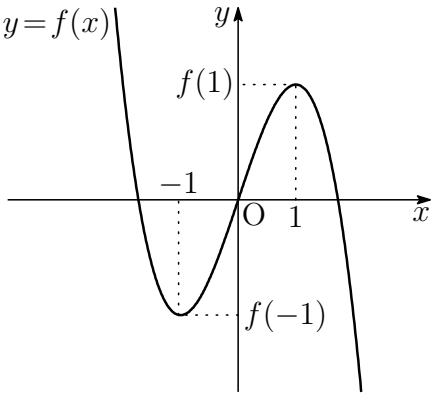
$f'(x)=0$ とすると

$$x=-1,\ 1$$

$f''(-1)=6>0$，$f''(1)=-6<0$

であるから

$f(-1)$ が極小値，$f(1)$ が極大値



例題 4.9 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ．　S

$$f(x) = x + 2\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

解答　$f'(x) = 1 - 2\sin x$，$f''(x) = -2\cos x$

$0 < x < \pi$ において，$f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

← $\sin x = \frac{1}{2}$ の解

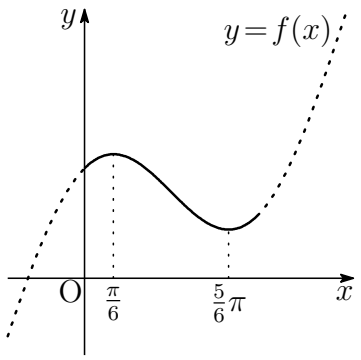
ここで　$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$,

$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{3} > 0$

よって，極値は次のようになる．

極大値は $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$,

極小値は $f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$



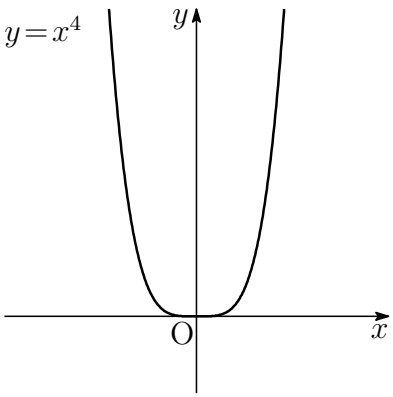
練習 4.17 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ． 解

(1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

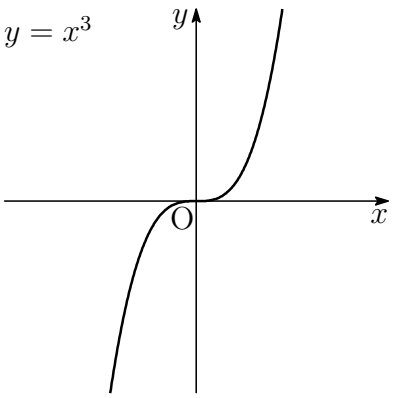
(2) $f(x) = x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

関数 $f(x)$ について，$f'(a) = 0$ かつ $f''(a) = 0$ であるときは，$f(a)$ は極値となることもあるし，極値とならないこともある．

例 4.5 (1) 関数 $f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$，$f''(x) = 12x^2$
$f'(0) = 0$，$f''(0) = 0$
$f(0)$ は極小値である．



(2) 関数 $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$，$f''(x) = 6x$
$f'(0) = 0$，$f''(0) = 0$
$f(0)$ は極値ではない． S



4.1.5　問題

問題 4.1 曲線 $y = e^{-x}$ 上の点 $(-1,\ e)$ における接線と法線の方程式を求めよ．解

→ p.111 例題 4.1, p.113 例 4.1

問題 4.2 次のことを示せ．ただし，p は 0 でない定数，a，b は正の定数とする．解

→ p.116 例題 4.2

(1) 放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，$y_1 y = 2p(x + x_1)$ であることを示せ．

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$ である．

問題 4.3 2 つの曲線 $y = ax^2 + b$，$y = \log x$ が，点 $\mathrm{A}(e,\ 1)$ を共有し，かつ点 A で共通な接線をもつように，定数 a，b の値を求めよ．解

問題 4.4 次の関数の極値を求めよ．解

→ p.125 例題 4.4, p.127 例題 4.5

(1) $y = x^2 \log x$

(2) $y = |x + 1|e^x$

問題 4.5 次の関数の最大値，最小値を求めよ． 解 → p.130 例題 4.6

(1) $y = x\sqrt{4-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = x + \sqrt{4-x^2}$

問題 4.6 曲線 $y = x^4 + ax^3 + 3ax^2 + 1$ が変曲点をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ． 解 → p.134

問題 4.7 関数 $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ のグラフの概形をかけ． 解 → p.137 例題 4.8

問題 4.8 関数 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ について，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．また，関数 $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ． 解

4.2　いろいろな応用

4.2.1　方程式，不等式への応用

A 》不等式の証明

応用例題 4.4 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．　S

$$e^x > 1 + x$$

考え方 》 $x > 0$ のとき，関数 $f(x) = e^x - (1 + x)$ の増減を利用する．

証明 $f(x) = e^x - (1 + x)$ とすると　　$f'(x) = e^x - 1$

$x > 0$ のとき，$e^x > 1$ であるから　　$f'(x) > 0$

よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x > 0$ のとき

$$f(x) > f(0) = 0 \qquad \leftarrow f(0) = e^0 - (1 + 0) = 0$$

したがって，$x > 0$ のとき　　$e^x > 1 + x$　　**証終**

練習 4.18 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．　解

(1)　$\log(x + 1) < x$　　(2)　$e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$

$x > 0$ のとき，練習 4.18(2) の不等式から，さらに次の不等式が成り立つ．

$$e^x > \frac{x^2}{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{e^x} < \frac{2}{x}$$

ここで，$x \longrightarrow \infty$ のとき，$\dfrac{x}{2} \longrightarrow \infty$，$\dfrac{2}{x} \longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

注意 一般に，自然数 n に対して，次が成り立つことが知られている．

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

B 》方程式の実数解の個数

応用例題 4.5 a を定数とする．次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ． S

$$\frac{e^x}{x} = a$$

考え方 》 $y = \dfrac{e^x}{x}$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数を調べる．
ページで示した $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$ を用いて，グラフの漸近線にも注意する．

[方程式の実数解の個数]

解答 $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ とすると

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる．

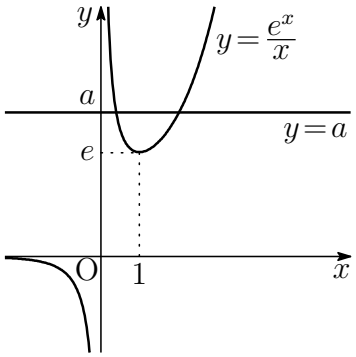
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	／	↘	極小 e	↗

また

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+0} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to-0} f(x) = -\infty$$

よって，$y = f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．
このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．したがって

$a > e$ のとき 2 個
$a = e$，$a < 0$ のとき 1 個
$0 \leqq a < e$ のとき 0 個



練習 4.19 a は定数とする．次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ． 解

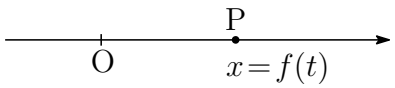
(1) $\dfrac{x^3}{x-1} = a$ (2) $xe^x - a = 0$

4.2.2　速度と加速度

A 》直線上の点の運動

直線上を運動する点の速度と加速度について考えてみよう．

数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として



$$x = f(t)$$

と表されるとする．このとき，時刻 t から $t+\Delta t$ までの**平均速度**は，

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

で表される．

この平均速度において，$\Delta t \longrightarrow 0$ のときの極限値を，時刻 t における点 P の**速度**という．速度を v で表すと

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

である．点 P は，$v>0$ のとき数直線上を正の向きに動き，$v<0$ のとき負の向きに動く．また，v の絶対値 $|v|$ を**速さ**という．

さらに，速度 v の時刻 t における変化率を**加速度**という．加速度を α で表すと，次のようになる．

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

以上のことをまとめると，次のようになる．

速度と加速度

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標 x が $x=f(t)$ で表されるとき，時刻 t における点 P の速度 v，加速度 α は

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = f'(t),} \qquad \boldsymbol{\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)}$$

例題 4.10　数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として，$x=2\sin(\pi t-b)$ で表されるとき，時刻 t における P の速度 v，加速度 α を求めよ．ただし，b は定数とする．　S

解答　速度 v は　$v = \dfrac{dx}{dt} = 2\pi\cos(\pi t-b)$

加速度 α は　$\alpha = \dfrac{dv}{dt} = -2\pi^2\sin(\pi t-b)$

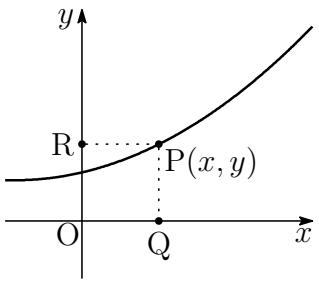
補足　この点 P の運動を単振動という．$\alpha=-\pi^2x$ とも表される．

練習 4.20 地上から，初速度 v_0 m/秒 でボールを真上に打ち上げるとき，t 秒後の高さ x m は，$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ で与えられる．ただし，g は定数とする．t 秒後におけるボールの速度 v m/秒 と加速度 α m/秒^2 を求めよ． 解

B 》平面上の点の運動

座標平面上を運動する点 P の速度と加速度について考えてみよう．

時刻 t における点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，x，y は t の関数となる．このとき，P から x 軸，y 軸に下ろした垂線を，それぞれ PQ，PR とすると，点 Q は x 軸上を，点 R は y 軸上を動く．したがって，時刻 t における



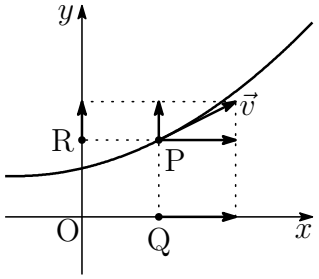
点 Q の速度は $\dfrac{dx}{dt}$，点 R の速度は $\dfrac{dy}{dt}$

である．これらを，それぞれ点 P の

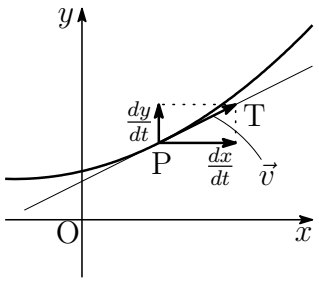
x 軸方向の速度，y 軸方向の速度といい，これらを成分とするベクトル

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) \qquad (4.1)$$

を，時刻 t における点 P の**速度**という．



座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数であるとき，P の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を，右の図のように $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{PT}}$



$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$ ←103 ページ参照

である．よって，直線 PT は，P の描く曲線の P における接線である．

速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$ を，点 P の**速さ**という．

さらに，x 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$，y 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を成分とするベクトル $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を，時刻 t における点 P の**加速度**という．また，加速度 $\vec{\alpha}$ の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を，点 P の**加速度の大きさ**という．

これまでのことをまとめると，次のようになる．

速度と加速度

座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数であるとき，時刻 t における点 P の速度 $\vec{v}$, 速さ $|\vec{v}|$, 加速度 $\vec{\alpha}$, 加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}},\ \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}\right), \qquad |\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\frac{\boldsymbol{d^2x}}{\boldsymbol{dt^2}},\ \frac{\boldsymbol{d^2y}}{\boldsymbol{dt^2}}\right), \qquad |\vec{\boldsymbol{\alpha}}| = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{d^2x}}{\boldsymbol{dt^2}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{d^2y}}{\boldsymbol{dt^2}}\right)^2}$$

例題 4.11　座標平面上を運動する点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として　S

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t \qquad (r,\ \omega\text{は正の定数})$$

で表されるとき，時刻 t における P の速さ，加速度の大きさを求めよ．

解答　時刻 t における P の速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする．

$\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt} = -r\omega\sin\omega t, \quad \dfrac{dy}{dt} = r\omega\cos\omega t$

よって，速さ $|\vec{v}|$ は

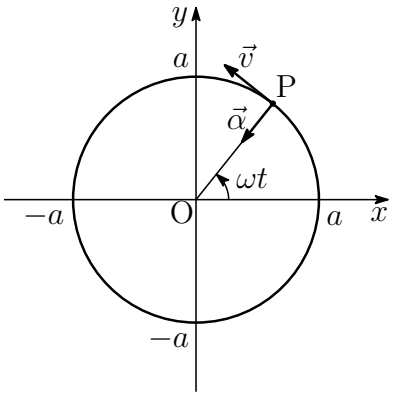
$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2 + (r\omega\cos\omega t)^2} \\ &= \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = rw\end{aligned}$$

$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -r\omega^2\cos\omega t, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = -r\omega^2\sin\omega t$

よって，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$\begin{aligned}|\vec{\alpha}| &= \sqrt{(-r\omega^2\cos\omega t)^2 + (-r\omega^2\sin\omega t)^2} \\ &= \sqrt{r^2\omega^4(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} = r\omega^2\end{aligned}$$

例題 4.11 の点 P は円 $x^2+y^2=r^2$ の周上を動く．この円運動の速さは $r\omega$ であるから一定である．このように，速さが一定の円運動を**等速円運動**という．



また，例題 4.11 では

$$\vec{\alpha}=-\omega^2(x,\ y)=-\omega^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

と表される．一般に，等速円運動する点 P の加速度 $\vec{\alpha}$ の向きは，P から円の中心に向かう向きである．

$\vec{v}$ と $\vec{\alpha}$ を $x,\ y$ で表すと

$$\vec{v}=\omega(-y,\ x),\quad \vec{\alpha}=-\omega^2(x,\ y)$$

したがって　$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=0$　すなわち　$\vec{\alpha}\perp\vec{v}$

練習 4.21 時刻 t における点 P の座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，$t=3$ における点 P の速さ，加速度の大きさを求めよ． 解

(1) $x=2t+1,\ y=t^2-4t$

(2) $x=2\cos\pi t,\ y=2\sin\pi t$

深化 4.2 一般に，等速運動する点 P の加速度 $\vec{\alpha}$ の向きは，速度 $\vec{v}$ に垂直であることを確かめよう． 解

4.2.3　近似式

A 》 $f(a+h)$ の近似式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

で定義される．よって，h が 0 に十分近い値のときは

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\fallingdotseq f'(a)$$

であると考えてよい．すなわち，次のことがいえる．

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

これは，h が 0 に十分近い値のとき，$f(a+h)$ の値を h の 1 次式で近似する式となっている．

1 次の近似式

$h\fallingdotseq 0$ のとき　　$\boldsymbol{f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h}$

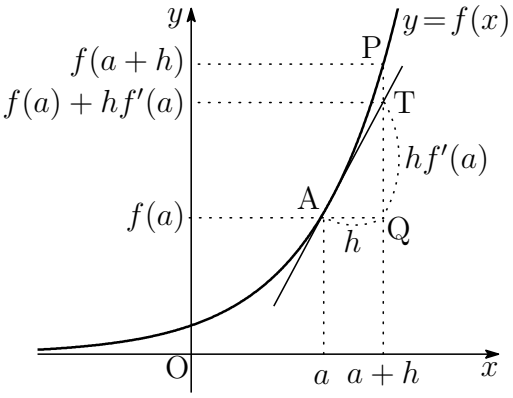
上の近似式の意味を，グラフで考えてみよう．

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

と表される．

よって，$h\fallingdotseq 0$ のときは，右の図において，点 P の y 座標を点 T の y 座標で近似するということである．



例 4.6　$h\fallingdotseq 0$ のとき，$\sin(a+h)$ の 1 次の近似式　S

$(\sin x)'=\cos x$ であるから，$h\fallingdotseq 0$ のとき

$$\sin(a+h)\fallingdotseq \sin a+h\cos a$$

練習 4.22 $h \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の値について，1 次の近似式を作れ． 解

(1) $\cos(a+h)$

(2) $\tan(a+h)$

B》 $x \fallingdotseq 0$ のときの近似式

前ページの「1 次の近似式」で，とくに $a=0$ のときを考え，h を x におき換えると，次の近似式が得られる．

$x \fallingdotseq 0$ のときの 1 次の近似式

$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\boldsymbol{f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x}$

例題 4.12 p を有理数とするとき，次の近似式を導け． S

$$x \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \qquad (1+x)^p \fallingdotseq 1+px$$

また，この近似式を用いて，$\sqrt[3]{1.006}$ の近似値を求めよ．

解答 $f(x)=(1+x)^p$ について　　$f'(x)=p(1+x)^{p-1}$

よって　　$f(0)=1$,　　$f'(0)=p$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ に代入して

$$x \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \qquad (1+x)^p \fallingdotseq 1+px$$

また，$\sqrt[3]{1.006}=(1+0.006)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$$\sqrt[3]{1.006} \fallingdotseq 1+\frac{1}{3}\times 0.006 = 1.002$$

練習 4.23 $x \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数について，1 次の近似式を作れ． 解

(1) e^x

(2) $\log(1+x)$

(3) $\dfrac{1}{1+x}$

練習 4.24 1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を求めよ． 解

(1) $\sqrt[4]{1.01}$

(2) $\log 1.01$

(3) $\dfrac{1}{0.998}$

4.2.4 問題

問題 4.9 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ． 解

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$$

→ p.146 応用例題 4.4

問題 4.10 方程式 $x^2 = ae^x$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ． 解

→ p.147 応用例題 4.5

問題 4.11 座標平面上を運動する点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として，次の式で表されるとき，時刻 t における P の加速度の大きさを求めよ． 解

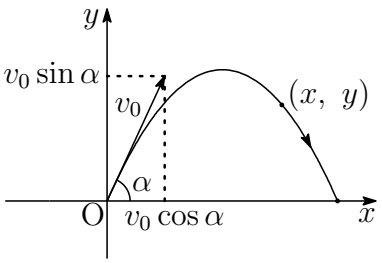
$$x = a(\omega t - \sin\omega t), \quad y = a(1 - \cos\omega t) \qquad (a,\ \omega\text{は正の定数})$$

→ p.150 応用例題 4.11

問題 4.12 $\sin 31^\circ$ の近似値を，1 次の近似式を用いて，小数第 3 位まで求めよ．ただし，$\pi = 3.142,\ \sqrt{3} = 1.732$ 解

→ p.152 例 4.6

問題 4.13 右の図のように，原点 O から物体 P を，水平面と角 α をなす方向に，速さ v_0 で投げたとき，時刻 t における P の位置 $(x,\ y)$ は，空気の抵抗を無視すると，g を定数として



$$x = (v_0\cos\alpha)t, \quad y = (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

と表される．

このとき，P の高さ y が最大になる時刻 T において，P の速さが最小になることを示せ．また，時刻 T における P の速さを求めよ．ただし，$g > 0,\ v_0 > 0,\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする． 解

4.3　章末問題

4.3.1　章末問題 A

章末 4.1 次の曲線の，与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ． 解

(1) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$，点 $(2,\ 0)$

(2) $y = \tan x$，点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$

章末 4.2 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ． 解

$$a > 0 \text{ のとき } \quad \frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}$$

章末 4.3 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ． 解

(1) $y = x^2 + \log(9 - x^2)$

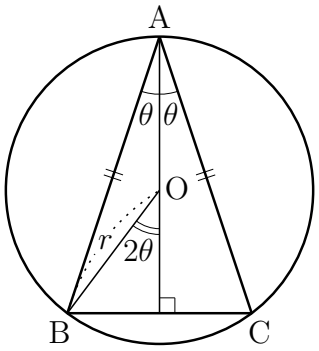
(2) $y = |x^3 - 3x|$

章末 4.4 次の関数のグラフの概形をかけ． 解

(1) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

(2) $y = x + \cos x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

章末 4.5 円に内接する二等辺三角形の中で，周の長さが最大になるものは正三角形である．このことを，円の半径を r，二等辺三角形の頂角の大きさを 2θ とし，周の長さ l を θ の関数で表すことによって証明せよ． 解



章末 4.6 a を定数とする．曲線 $y = \dfrac{x}{x^2 + a}$ の変曲点の個数を，次の各場合について求めよ． 解

(1) $a > 0$　　(2) $a = 0$　　(3) $a < 0$

章末 4.7 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ． 解

(1) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$

(2) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$

4.3.2　章末問題 B

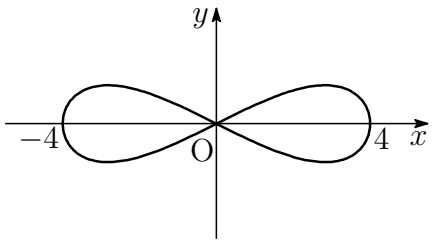
章末 4.8 曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の原点以外の任意の点 P における法線が x 軸と交わる点を Q とし，P から x 軸に下ろした垂線を PR とする．このとき，線分 QR の長さは一定であることを証明せよ． 解

章末 4.9 2 つの曲線 $y = ax^2 - \dfrac{1}{2}$，$y = \log x$ が共有点 P をもち，点 P において共通の接線をもつとき，定数 a の値を求めよ． 解

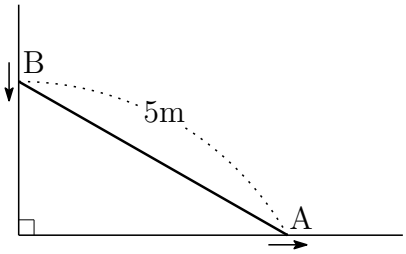
章末 4.10 体積が一定である直円柱の表面積を最小にするには，高さと底面の半径の比をどのようにすればよいか． 解

章末 4.11 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ のグラフを C とし，曲線 C の変曲点を A とする．曲線 C 上に A 以外の任意の点 P をとり，点 A に関して点 P と対称な点を Q とすると，Q も曲線 C 上にあることを示せ． 解

章末 4.12 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標が，$x = 4\cos t$，$y = \sin 2t$ で与えられるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ における点 P の速さの最大値と最小値を求めよ． 解



章末 4.13 地面に垂直な壁に長さ 5m の棒を立てかけ，この棒の下端 A を，地面上を毎秒 0.3m の速さで壁から垂直に遠ざける．棒の下端 A が壁から 4m 離れたときに，棒の上端 B が壁面上を動く速さを求めよ． 解



ヒント

9　体積を定数 k，底面の半径を変数 x として，表面積を x の関数で表す．

13　点 O を座標平面の原点とし，直線 OA を x 軸，直線 OB を y 軸とする．OA $= x$，OB $= y$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = 0.3$ である．

第 5 章　積分法とその応用

5.1　不定積分

5.1.1　不定積分とその基本性質

A 》不定積分

数学 II で学んだように，微分すると $f(x)$ になる関数があれば，その関数を $f(x)$ の**原始関数**という．$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，すなわち $F'(x) = f(x)$ のとき，任意の定数 C に対して

$$\{F(x) + C\}' = F'(x) = f(x)$$

が成り立つから，$F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である．

また，$F(x)$ と $G(x)$ がともに $f(x)$ の原始関数ならば，$G'(x) = F'(x)$ となるから，122 ページで学んだように

$$G(x) = F(x) + C$$

となる定数 C が存在する．

以上からわかるように，関数 $f(x)$ の原始関数が存在するならば，それは無数にある．その 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の原始関数全体は，次の形に書き表される．

$$F(x) + C \qquad C \text{ は任意の定数}$$

この表示を $f(x)$ の**不定積分**といい[1]，$\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ で表す．$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する**といい，上の定数 C を**積分定数**という．また，$f(x)$ を**被積分関数**といい，x を**積分変数**という．

[内容 ①] [内容 ②] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

[1] 不定積分を原始関数と同じ意味で用いることもある．

$f(x)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき，$f(x)$ の不定積分は

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + C} \qquad C \text{ は積分定数}$$

関数の不定積分を求めるには，導関数の公式が逆に利用される．
例えば，第 3 章で学んだことにより，次の等式が成り立つ．

$$\alpha\text{が実数のとき}\quad (x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}, \qquad (\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

これらのことから，次の公式が得られる．

x^α の不定積分

$$\int \boldsymbol{x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C} \qquad \text{ただし，} \alpha \neq -1$$

$$\int \boldsymbol{\frac{1}{x}dx = \log|x| + C}$$

注意　不定積分における C は積分定数を表すが，今後はその断りを省略する．

例 5.1　(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}\,dx = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + C$　S

$$= -\frac{1}{3}x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$$

(2)　$\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C \qquad \leftarrow x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$$

注意　今後は，$\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある．

練習 5.1　次の不定積分を求めよ．　解

(1)　$\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$　　(2)　$\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,dx$

(3)　$\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$　　(4)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

B》不定積分の基本性質

不定積分について，次の公式が成り立つ．

関数の定数倍および和，差の不定積分

1 $\displaystyle\int \boldsymbol{kf(x)}\,\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{k}\int \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx}$ $\quad k$ は定数

2 $\displaystyle\int \boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}dx} = \int \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx} + \int \boldsymbol{g(x)}\,\boldsymbol{dx}$

3 $\displaystyle\int \boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}dx} = \int \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx} - \int \boldsymbol{g(x)}\,\boldsymbol{dx}$

注意 上のように書いた不定積分についての等式では，両辺の積分定数の違いは無視することにする．

例 5.2 $\displaystyle\int \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}dx = \int \frac{x^2-3x+2}{x^2}dx = \int \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$ S

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x^2}$$

$$= x - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C$$

注意 不定積分を求める計算では，記号 $\displaystyle\int$ が取れた段階で積分定数 C をつければよい．また，$\displaystyle\int 1\,dx$ は 1 を省略して $\displaystyle\int dx$ と書くことがある．

積分変数が x 以外の場合も，同様にして不定積分が求められる．

練習 5.2 次の不定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y}dy$ (4) $\displaystyle\int \left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2 dt$

C》三角関数，指数関数の不定積分

第 3 章で次の公式を学んだ．ただし，a は 1 でない正の定数とする．

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \log a$$

また，$\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ が成り立つ．　→ 92 ページ例題 3.3(3)

これらから，次の公式が得られる．

三角関数，指数関数の不定積分

$$\int \boldsymbol{\sin x\, dx = -\cos x + C}, \qquad \int \boldsymbol{\cos x\, dx = \sin x + C}$$
$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{\cos^2 x}} = \boldsymbol{\tan x + C},$$
$$\int \boldsymbol{e^x\, dx = e^x + C}, \qquad \int \boldsymbol{a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C}$$

例 5.3　(1)　$\displaystyle\int (2\sin x + 3\cos x)dx = 2\int \sin x\, dx + 3\int \cos x\, dx$　S

$$= -2\cos x + 3\sin x + C$$

(2)　$\displaystyle\int \tan^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$　← $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$= \tan x - x + C$$

例 5.4　$\displaystyle\int (3e^x - 2^x)dx = 3\int e^x\, dx - \int 2^x\, dx = 3e^x - \frac{2^x}{\log 2} + C$　S

練習 5.3　次の不定積分を求めよ．　解

(1)　$\displaystyle\int (\cos x - 2\sin x)dx$　　(2)　$\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}dx$

(3)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\tan^2 x}$　　(4)　$\displaystyle\int 5^x\, dx$　　(5)　$\displaystyle\int (3^x - 2e^x)dx$

5.1.2 置換積分法と部分積分法

A》 $f(ax+b)$ の不定積分

a，b は定数とする．関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を利用して，合成関数 $f(ax+b)$ の不定積分を求めることを考えよう．

$u=ax+b$ とする．$\dfrac{d}{du}F(u)=f(u)$ であるから，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}F(ax+b)=\frac{d}{du}F(u)\cdot\frac{d}{dx}(ax+b)=af(ax+b)$$

が成り立つ．よって，次の公式が得られる．

$f(ax+b)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$a\neq 0$ とするとき

$$\int \boldsymbol{f(ax+b)dx}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{F(ax+b)}+\boldsymbol{C}$$

例 5.5 (1) $\displaystyle\int\sqrt{3x+2}\,dx=\int(3x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$ S

$$=\frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$$

(2) $\displaystyle\int\cos 4x\,dx=\frac{1}{4}\sin 4x+C$

(3) $\displaystyle\int e^{1-2x}\,dx=-\frac{1}{2}e^{1-2x}+C$

練習 5.4 次の不定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int(3x+1)^4\,dx$ (2) $\displaystyle\int(4x-3)^{-3}\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$ (4) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x+1}$

(5) $\displaystyle\int\sin 2x\,dx$ (6) $\displaystyle\int e^{3x-1}\,dx$

B 》置換積分法

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．x が t の関数として $x = g(t)$ と表されるとき，$y = F(x) = F(g(t))$ は t の関数でもある．$g(t)$ が微分可能なとき

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t) \qquad \leftarrow \text{合成関数の微分法}$$

y を 2 通りの不定積分で表すと，次の**置換積分法**の公式が成り立つ．

置換積分法 (1)

1　$\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int \boldsymbol{f(g(t))g'(t)\,dt}$　　ただし　$x = g(t)$

$x = g(t)$ のとき $\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ である．$\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ を形式的に $dx = g'(t)dt$ と表すと，上の公式 **1** における式の変形が覚えやすい．

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

例題 5.1　不定積分 $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$ を求めよ．　S

解答　$\sqrt{x+1} = t$ とおくと　　$x = t^2 - 1$，$\dfrac{dx}{dt} = 2t$

よって

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)t\cdot 2t\,dt = 2\int (t^4 - t^2)dt$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C = \frac{2}{15}t^3(3t^2 - 5) + C$$

$$= -\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1} + C$$

深化 5.1　例題 5.1 の不定積分を，$x + 1 = t$ とおいて求めよ．　解

練習 5.5　次の不定積分を求めよ．　解

(1)　$\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

C》 $f(g(x))g'(x)$ の不定積分

前ページの置換積分法 (1) の公式において，左辺と右辺を入れ替えて，積分変数 t, x をそれぞれ x，u に書き変えると，次の公式が得られる．

置換積分法 (2)

2 $\displaystyle\int \boldsymbol{f(g(x))g'(x)\,dx} = \int \boldsymbol{f(u)\,du}$ ただし $u = g(x)$

$g(x) = u$ のとき $g'(x) = \dfrac{du}{dx}$ である．$g'(x) = \dfrac{du}{dx}$ を形式的に $g'(x)dx = du$ と書き表すと，上の公式 **2** における式の変形が覚えやすい．

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

例題 5.2 次の不定積分を求めよ． S

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \cos^2 x \sin x\,dx$

解答 (1) $x^2+1=u$ とおくと $2x\,dx = du$ $\leftarrow 2x = \dfrac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\cdot 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

(2) $\cos x = u$ とおくと $(-\sin x)dx = du$ $\leftarrow -\sin x = \dfrac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin x\,dx &= -\int \cos^2 x(-\sin x)dx \\ &= -\int u^2\,du = -\frac{1}{3}u^3 + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$

練習 5.6 次の不定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

D》 $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分

前ページの公式 **2** において，とくに $f(u)=\dfrac{1}{u}$ とすると

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\int \frac{1}{u}du=\log|u|+C=\log|g(x)|+C$$

となる．すなわち，次の公式が成り立つ．

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分

3　　$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$

補足　$y=\log|u|,\ u=g(x)$ とすると　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\cdot g'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

$\dfrac{d}{dx}\log|g(x)|=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ であるから　$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\log|g(x)|+C$

例題 5.3　次の不定積分を求めよ．　S

(1)　$\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}dx$　　(2)　$\displaystyle\int \tan x\,dx$

解答　(1)　$\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}dx=\int \frac{(x^2-3)'}{x^2-3}dx=\log|x^2-3|+C$

(2)　$\displaystyle\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\log|\cos x|+C$

練習 5.7　次の不定積分を求めよ．　解

(1)　$\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$

(2)　$\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

(3)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$

E》部分積分法

2 つの関数の積で表される関数 $f(x)g(x)$ の導関数については

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

である．すなわち

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

両辺の不定積分を考えると，次の**部分積分法**の公式が成り立つ．

部分積分法

4 $$\int \boldsymbol{f(x)g'(x)\,dx} = \boldsymbol{f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

補足 次式も成立する．

$$\int \boldsymbol{f'(x)g(x)\,dx} = \boldsymbol{f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx}$$

例題 5.4 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ． S

解答

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x(\sin x)'\,dx \qquad \leftarrow \textstyle\int x\,g'(x)\,dx \text{ の形と考える．}\\ &= x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx\\ &= x\sin x - \int \sin x\,dx\\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

部分積分法の公式を利用すると，とくに次のことが成り立つ．

$$\int x\,g'(x)\,dx = x\,g(x) - \int g(x)\,dx$$

練習 5.8 次の不定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$

深化 5.2 例題 5.4 の解答では，公式 **4** において $f(x) = x$，$g'(x) = \cos x$ と考えている．$f(x) = \cos x$，$g'(x) = x$ と考えて公式 **4** を適用してみよう．このことから，$f(x) = x$，$g'(x) = \cos x$ と考えた理由を説明してみよう． 解

応用例題 5.1　不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ を求めよ．　S

考え方 》 $\log x = (\log x)\cdot 1 = (\log x)\cdot(x)'$ と考える．

解答

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int (\log x)\cdot(x)'\,dx \\ &= (\log x)\cdot x - \int (\log x)'\cdot x\,dx \\ &= x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

練習 5.9　次の不定積分を求めよ．　解

(1) $\displaystyle\int \log 2x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \log x^2\,dx$　　(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

応用例題 5.2　不定積分 $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ を求めよ．　S

考え方 》 部分積分法を 2 回利用する．

解答

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= \int x^2(e^x)'\,dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x\,dx \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx \qquad \leftarrow \text{さらに } \textstyle\int xe^x\,d \text{ の計算に部分積分法を利用する} \\ &= x^2e^x - 2\int x(e^x)'\,dx \\ &= x^2e^x - 2\left\{xe^x - \int (x)'e^x\,dx\right\} \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C\end{aligned}$$

補足　積分公式 (部分積分法) を参照．

練習 5.10　不定積分 $\displaystyle\int (x^2+1)\sin x\,dx$ を求めよ．　解

5.1.3 いろいろな関数の不定積分

A 》分数関数の不定積分

分数関数の不定積分を求めるとき，式をうまく変形すると，これまでに学んだ不定積分の公式が利用できるようになる場合がある．

例題 5.5 次の不定積分を求めよ． S

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x+1}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$

解答 (1) $\dfrac{2x^2+1}{x+1} = 2x-2+\dfrac{3}{x+1}$ であるから ← $2x^2+1$ を $x+1$ で割った商が $2x-2$，余りが 3 である．

$$\int \frac{2x^2+1}{x+1}dx = \int \left(2x-2+\frac{3}{x+1}\right)dx$$
$$= x^2-2x+3\log|x+1|+C$$

(2) $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$ であるから

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}(\log|x-1|-\log|x+1|)+C$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

注意 例題 5.5(2) のように，1 つの分数式を簡単な分数式の差や和の形で表わす変形を，**部分分数に分解**するという．

練習 5.11 $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ を満たす定数 a，b の値を求めよ．また，この結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ を求めよ． 解

練習 5.12 次の不定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x+2}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{2x-1}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}dx$

B 》三角関数に関する不定積分

三角関数に関する積分では，次の公式がよく使われる．

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

また，三角関数の積を和や差の形にするとき，次の公式が使われる．

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

← 加法定理を用いて右辺を計算すれば左辺を導くことができる．

例題 5.6 次の不定積分を求めよ．　S

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 3x\cos x\,dx$

解答　(1)
$$\int \sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

(2)
$$\int \sin 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$
$$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

練習 5.13 次の不定積分を求めよ．　解

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2 3x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \cos 3x\cos 2x\,dx$　　(5) $\displaystyle\int \sin x\sin 3x\,dx$

5.1.4 問題

問題 5.1 次の不定積分を求めよ． 解 → p.160〜162

(1) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int (2-\tan x)\cos x\,dx$ (5) $\displaystyle\int 2^{x+1}\,dx$

問題 5.2 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ． 解 → p.161 例 5.2

［1］ $F'(x)=\dfrac{1-x-x^2}{x^2}$ ［2］ $F(e)=-1$

問題 5.3 次の不定積分を求めよ． 解 → p.163〜168

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{5x+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sqrt[3]{3-2x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \sin(2x-1)\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (6) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$ (8) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx$ (9) $\displaystyle\int (2x+1)\log x\,dx$

問題 5.4 $\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ であることを用いて，不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ を求めよ． 解
→ p.165 例題 5.2

問題 5.5 次の不定積分を求めよ． 解 → p.169, 170

(1) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{\log(x+1)}{x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sin 3x\cos 2x\,dx$ (4) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

問題 5.6 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$ を，次の 3 通りの方法で求めよ． 解

① 分母と分子に e^x を掛ける．

② 分母と分子に e^{-x} を掛ける．

③ $\dfrac{e^x}{e^x+1}+\dfrac{1}{e^x+1}$ であることを用いる．

5.2　定積分

5.2.1　定積分とその基本性質

A 》定積分

数学 II で学んだように，関数 $f(x)$ の**定積分** $\boldsymbol{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}$ は，次のように定義される．a をこの定積分の下端(かたん)，b を上端(じょうたん)という．

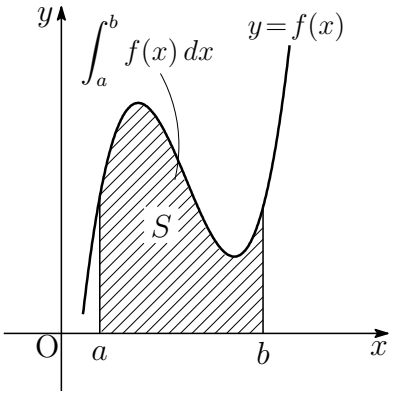
定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とし，
a, b をその区間に含まれる任意の値とするとき

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を求めることを，$f(x)$ を a から b まで**積分する**という．

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を表す．



例 5.6　(1)　$\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(4\sqrt{4} - 1) = \frac{14}{3}$　S

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta = \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$

練習 5.14　次の定積分を求めよ．　解

(1)　$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$　　(3)　$\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$　　(4)　$\displaystyle\int_{-1}^{1} 2^x\,dx$

B 》定積分の基本性質

数学 II で学んだように，定積分について，次のことが成り立つ．

定積分の性質

1 $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad k$ は定数

2 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

4 $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

5 $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

6 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

例 5.7 (1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x-4}{x^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx = 3\int_1^2 \frac{dx}{x} - 4\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ S

$$= 3\Big[\log x\Big]_1^2 - 4\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2$$

$$= 3(\log 2 - \log 1) - 4\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 3\log 2 - 2$$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{2}\Big[x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

練習 5.15 次の定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t})dt$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi \sin 2x\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\,d\theta$

C》絶対値のついた関数の定積分

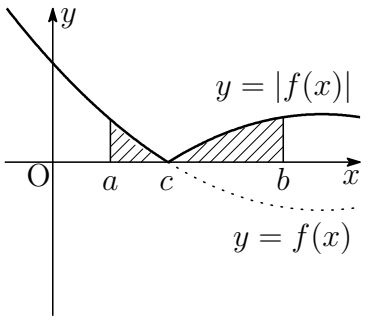
関数 $f(x)$ が

$$a \leqq x \leqq c \text{ で } \quad f(x) \geqq 0, \qquad c \leqq x \leqq b \text{ で } \quad f(x) \leqq 0$$

であるとき，絶対値のついた関数 $|f(x)|$ を a から b まで積分するには，次のように区間を分けて行う．

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b \{-f(x)\}\,dx$$

この定積分は，$y = |f(x)|$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を表している．



例題 5.7 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{4}{3}\pi} |\sin x|\,dx$ を求めよ．　S

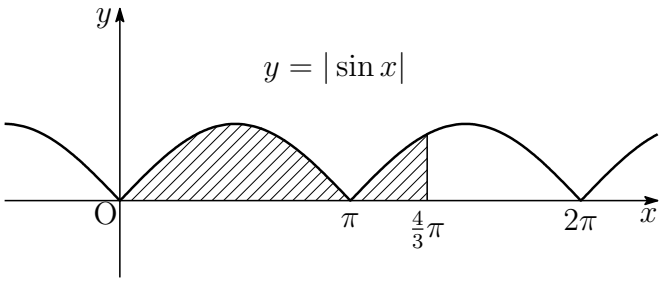
解答 $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$|\sin x| = \sin x$$

$\pi \leqq x \leqq \dfrac{4}{3}\pi$ のとき

$$|\sin x| = -\sin x$$

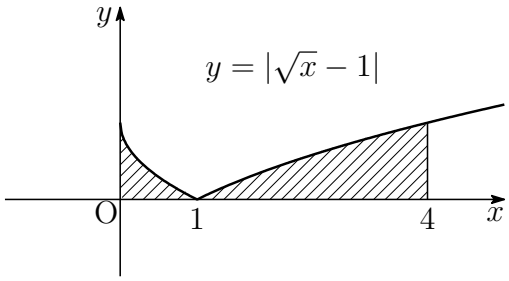
であるから



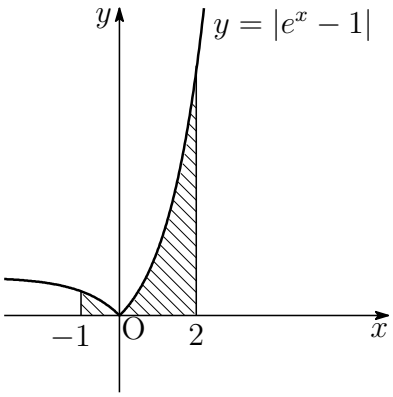
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{4}{3}\pi} |\sin x|\,dx &= \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} (-\sin x)dx \\ &= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \\ &= (1+1) + \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

練習 5.16 次の定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x}-1|dx$



(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 |e^x-1|dx$



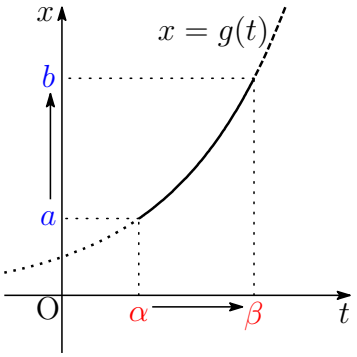
5.2.2　置換積分法と部分積分法

A 》定積分の置換積分法

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする．x が微分可能な関数$g(t)$ を用いて，$x=g(t)$ と表されるとき

$$\frac{d}{dt}F(g(t))=f(g(t))g'(t)$$

$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ とする．図のような x と t の関係を，右の図の表のように表す．このとき



x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt &= \Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta \\ &= F(g(\beta))-F(g(\alpha)) \\ &= F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

となる．よって，次の公式が成り立つ．

定積分の置換積分法

$x=g(t)$ とおくとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx}=\int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{f(g(t))g'(t)dt}$$

x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

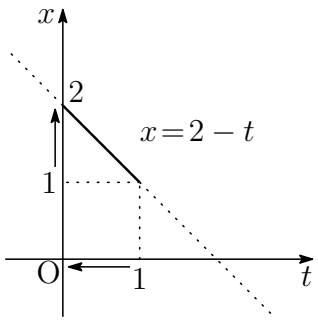
例 5.8　定積分 $\displaystyle\int_1^2 x(2-x)^4\,dx$ を求めてみよう．　S

$2-x=t$ とおくと

$x=2-t$，$dx=(-1)dt$　　$\leftarrow \frac{dx}{dt}=-1$

x と t の対応は右のようになる．よって

x	$1 \longrightarrow 2$
t	$1 \longrightarrow 0$



$$\begin{aligned}\int_1^2 x(2-x)^4\,dx &= \int_1^0 (2-t)t^4\cdot(-1)dt=\int_0^1 (2t^4-t^5)dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{6}t^6\right]_0^1=\frac{2}{5}-\frac{1}{6}=\frac{7}{30}\end{aligned}$$

練習 5.17 次の定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$ (2) $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

例題 5.8 a を正の定数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ． S

解答 $x = a\sin\theta$ とおくと $dx = a\cos\theta\,d\theta$ $\leftarrow \frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$

x と θ の対応は右のようになる．

x	$0 \longrightarrow a$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

この範囲では $\cos\theta \geqq 0$ である．

また，$a > 0$ であるから

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta$$

よって

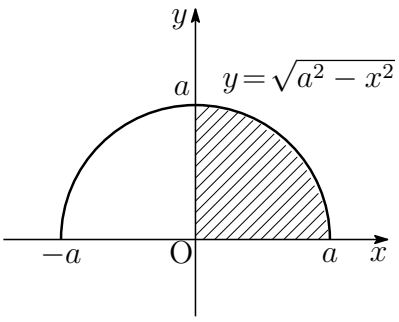
$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\theta)a\cos\theta\,d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

補足 例題 5.8 の定積分において，被積分関数

$$y = \sqrt{a^2-x^2}$$

のグラフは，右の図のような半円を表す．

定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の四分円の面積を表す．



練習 5.18 次の定積分を求めよ． 解

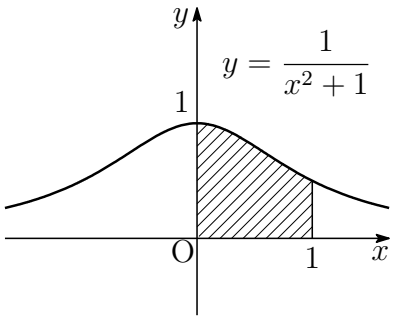
(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

例題 5.9 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ．　S

解答　$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$　　$\leftarrow$ $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は次のようになる．

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$



よって
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

注意　被積分関数が $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a>0)$ のときは，$x=a\tan\theta$ とおくとよい．

練習 5.19　次の定積分を求めよ．　解

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$

B 》偶関数と奇関数の定積分

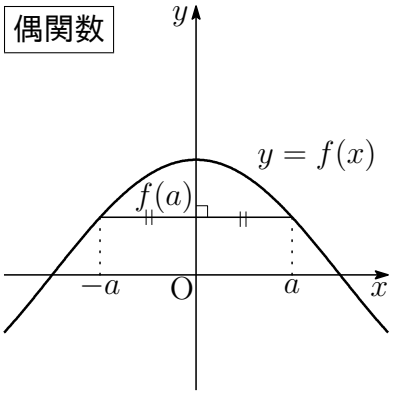
関数 $f(x)$ において

$f(-x)=f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を**偶関数**といい，

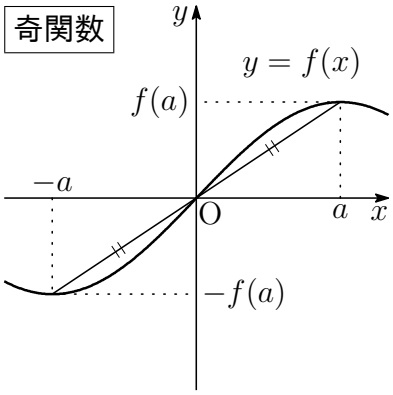
$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を**奇関数**という[2]．

たとえば，x^2，$\cos x$ は偶関数であり，x，$\sin x$ は奇関数である．

偶関数



奇関数



練習 5.20　次の関数の中から，偶関数，奇関数を選べ．　解

①　x^3　　②　x^4+3　　③　$\tan x$　　④　$x+\cos x$

[2]偶関数のグラフは y 軸について対称，奇関数のグラフは原点について対称である．

関数 $f(x)$ が偶関数または奇関数のとき，次のことが成り立つ．

偶関数，奇関数と定積分

1 偶関数 $f(x)$ について $\displaystyle\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \mathbf{2}\int_{0}^{a} \boldsymbol{f(x)\,dx}$

2 奇関数 $f(x)$ について $\displaystyle\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(x)\,dx} = \mathbf{0}$

証明 関数 $f(x)$ の定積分について，常に次の等式が成り立つ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \cdots ①$$

$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ において $x = -t$ とおくと $\qquad dx = (-1)dt$ $\qquad \leftarrow \frac{dx}{dt} = -1$

また，x と t の対応は右のようになる．

x	$-a \longrightarrow 0$
t	$a \longrightarrow 0$

よって

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= \int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt \\ &= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx\end{aligned}$$

したがって，① から $\qquad \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \{f(-x) + f(x)\}dx$

右辺において，$f(x)$ が偶関数ならば $f(-x) = f(x)$，奇関数ならば $f(-x) = -f(x)$ であるから，**1**，**2** が成り立つ． 証終

例 5.9 (1) $f(x) = \cos x$ は偶関数であるから S

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

(2) $f(x) = \sin x$ は奇関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 0$$

練習 5.21 次の定積分を求めよ．解

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

C》定積分の部分積分

167 ページで学んだ不定積分の部分積分法の公式により，定積分について，次の公式が成り立つ．

定積分の部分積分法

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)g'(x)\,dx} = \Big[\,\boldsymbol{f(x)g(x)}\,\Big]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{f'(x)g(x)\,dx}$$

例題 5.10 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ を求めよ．S

解答

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'dx\\ &= \Big[\,x\sin x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'\sin x\,dx\\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\\ &= \frac{\pi}{2} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1\end{aligned}$$

練習 5.22 次の定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{1} xe^{x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{2} x\log x\,dx$

練習 5.23 部分積分法によって，定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)\,dx$ を求めよ． 解

練習 5.24 部分積分法を 2 回利用して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$ を求めよ． 解

研究 **定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$**

定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$ は，次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \sin x\, dx = \left[\, e^x \sin x \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx && \leftarrow \boxed{\text{部分積分法}} \\
&= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \cos x\, dx && \leftarrow \boxed{\text{部分積分法}} \\
&= e^{\frac{\pi}{2}} - \left\{ \left[\, e^x \cos x \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (-\sin x)\, dx \right\} \\
&= e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I && \leftarrow \boxed{I \text{ が現れる}}
\end{aligned}
$$

これより，$I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I$ であるから　　$I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$

演習 5.1 定積分 $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx$ を求めよ．　解

定積分 I, J は，次のように求めることもできる．

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \sin x\, dx = \left[\, e^x \sin x \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx = e^{\frac{\pi}{2}} - J$$

よって　　$I + J = e^{\frac{\pi}{2}}$　$\cdots$①

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \cos x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (-\sin x)\, dx \\
&= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx = -1 + I
\end{aligned}
$$

よって　　$I - J = 1$　$\cdots$②

①，② から　　$I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$,　$J = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$

研究　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

n は 0 または正の整数とする．定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ は，次のように求められる．$n=0,\ n=1$ のときは，それぞれ次のように計算される．

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \Big[\ x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[\ -\cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$n \geqq 2$ のときは

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)'\,dx \\
&= \Big[\ -\sin^{n-1} x\cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx \\
&= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\right) \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n)
\end{aligned}$$

よって，$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ であるから，次の漸化式が成り立つ．

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

したがって

n が偶数のとき　$I_n = \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

n が奇数のとき　$I_n = \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1$

5.2.3　定積分のいろいろな問題

A 》定積分と導関数

a を定数とするとき，$F'(t)=f(t)$ とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a) \quad \cdots ①$$

であるから，定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は x の関数である．

① の両辺の関数を x で微分すると，次の公式が得られる．

定積分と導関数

a が定数のとき　$\boldsymbol{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

練習 5.25 次の関数を x で微分せよ．ただし，(2) では $x>0$ とする．解

(1) $\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_1^x t\log t\,dt$

応用例題 5.3 関数 $G(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$ の導関数を求めよ．S

考え方 》 右辺の積分の計算では，積分変数でない x は定数として扱う．

解答　$G(x)=x\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt$ であるから

$$G'(x)=(x)'\int_0^x \cos t\,dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt\right)-\frac{d}{dx}\int_0^x t\cos t\,dt$$
$$=\int_0^x \cos t\,dt+x\cdot\cos x-x\cos x=\Big[\sin t\Big]_0^x=\sin x$$

練習 5.26 関数 $G(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)e^t\,dt$ について，$G'(x)$，$G''(x)$ を求めよ．解

応用例題 5.4 関数 $\displaystyle\int_x^{2x} \sin t\,dt$ を x で微分せよ. S

考え方》 $F'(t)=\sin t$ とすると $\displaystyle\int_x^{2x} \sin t\,dt = F(2x)-F(x)$ である.

解答 $F'(t)=\sin t$ とすると $\displaystyle\int_x^{2x} \sin t\,dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_x^{2x} = F(2x)-F(x)$

よって
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{2x} \sin t\,dt &= \frac{d}{dx}\{F(2x)-F(x)\}\\ &= F'(2x)\cdot(2x)' - F'(x)\\ &= 2\sin 2x - \sin x\end{aligned}$$

練習 5.27 関数 $\displaystyle\int_x^{3x} t\cos t\,dt$ を x で微分せよ. 解

応用例題 5.5 等式 $\displaystyle f(x)=x+\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ. S

考え方》 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ は定数であるから a とおくことができる.

解答 $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt = a$ とおくと $\qquad f(x)=x+a \quad \cdots ①$

よって
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt &= \int_0^{\pi}(t+a)\sin t\,dt = \int_0^{\pi}(t+a)(-\cos t)'\,dt\\ &= \Big[\ (t+a)(-\cos t)\ \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(t+a)'(-\cos t)\,dt\\ &= \pi+2a+\int_0^{\pi}\cos t\,dt = \pi+2a+\Big[\ \sin t\ \Big]_0^{\pi}\\ &= \pi+2a\end{aligned}$$

これより, $\pi+2a=a$ であるから $\qquad a=-\pi$

これを ① に代入して $\qquad f(x)=x-\pi$

練習 5.28 等式 $\displaystyle f(x)=x+\int_0^{1} f(t)e^t\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ. 解

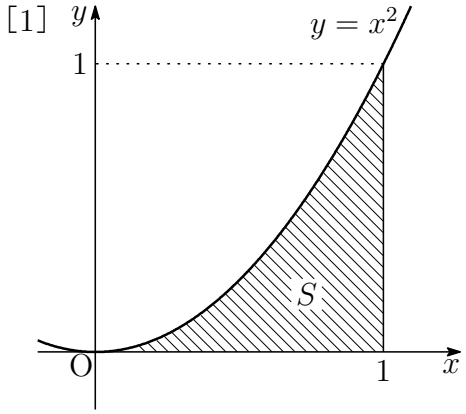
B 》 定積分と和の極限

関数 $f(x) = x^2$ について，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積 S を考えてみよう．

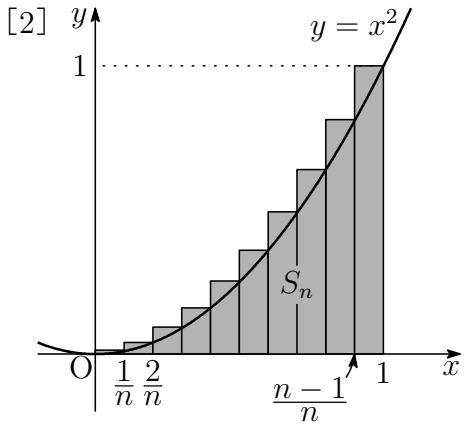
定積分を用いて S を求めると

$$S = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

［1］



［2］



一方，図［2］のように区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して n 個の長方形を作り，それらの面積の和を S_n とする．$n \longrightarrow \infty$ のとき，この長方形の集まりは図［1］の斜線で示した図形に限りになく近づくから，$S_n \longrightarrow S$ と予想される．実際に計算してみよう．

[定積分と和の極限]

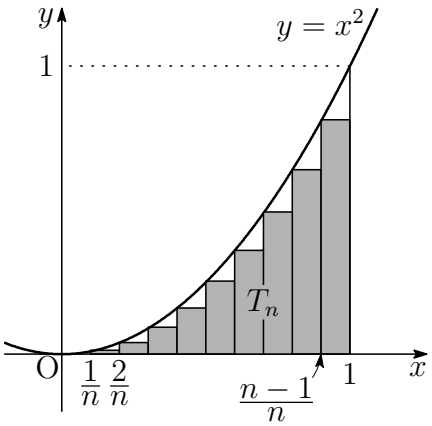
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

であるから　$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ が成り立つことが計算で確かめられた．

練習 5.29　上の S_n の代わりに，右の図［3］の長方形の面積の和 T_n を考えても，$\lim_{n\to\infty} T_n = S$ となることを示せ．　解

［3］



前ページで示したような方法で，与えられた図形の面積を求めることを**区分求積法**という．

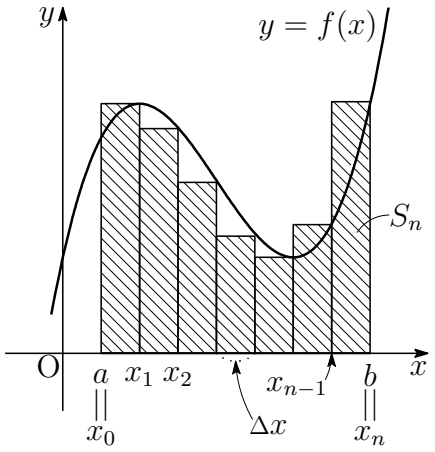
関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x) \geqq 0$ のとき，面積 $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を区分求積法で考えてみよう．

区間 $[a,\ b]$ を n 等分して，その分点の座標を，a に近い方から順に

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

とし，次のようにおく．

$$a = x_0,\ b = x_n,\ \frac{b-a}{n} = \Delta x$$



このとき，右の図の斜線部分の面積 S_n は

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \qquad (*)$$

であり，$n \longrightarrow \infty$ のとき $S_n \longrightarrow S$ と考えられる．

一般に，常に $f(x) \geqq 0$ と仮定しなくても，次のことが成り立つ．

区分求積法と定積分

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f(x_k)\Delta x} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} \quad \text{ただし} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x$$

上の公式で，とくに $a = 0$，$b = 1$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}\right) = \int_0^1 \boldsymbol{f(x)\,dx} \qquad \leftarrow \Delta x = \frac{1}{n},\ x_k = \frac{k}{n}$$

応用例題 5.6 極限値 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ を求めよ． S

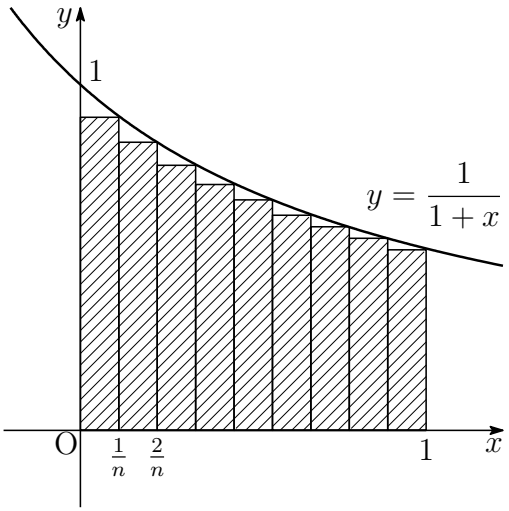
考え方》 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形を作るために，$\frac{1}{n}$ をくくり出す．

解答 この極限値を S とする．

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$$

ここで，$f(x)=\frac{1}{1+x}$ とすると

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$$
$$=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2$$



練習 5.30 極限値 $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)$ を求めよ． 解

C》定積分と不等式

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続であり，かつ常に $f(x)\geqq 0$ であるとき，$\int_a^b f(x)\,dx$ は，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた部分の面積 S と等しい．

ここで，$[a,\ b]$ で常に $f(x)=0$ ならば $S=0$，$[a,\ b]$ で $f(x)>0$ となる x があるならば $S>0$ である．よって，次のことが成り立つ．

区間 $[a,\ b]$ で　$\boldsymbol{f(x)\geqq 0}$　ならば　$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx\geqq 0}$

等号が成り立つのは，常に $f(x)=0$ のときである．

さらに，次のことが成り立つ．

定積分と不等式

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$$\boldsymbol{f(x) \geqq g(x)} \quad \text{ならば} \quad \boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx}$$

等号が成り立つのは，常に $f(x) = g(x)$ のときである．

例題 5.11 次のことを示せ． S

(1) $x \geqq 0$ のとき $\quad \dfrac{1}{x^2+x+1} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \frac{1}{2}$

解答 (1) $x \geqq 0$ のとき $\quad x^2+x+1 \leqq (x^2+x+1)+x$

すなわち $\quad x^2+x+1 \leqq (x+1)^2$

両辺は正であるから，逆数をとって $\quad \dfrac{1}{x^2+x+1} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2) (1) の不等式では，常には $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ でないから

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

右辺は $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

よって $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \frac{1}{2}$

練習 5.31 次のことを示せ． 解

(1) $x \geqq 0$ のとき $\quad \dfrac{1}{x+1} \geqq \dfrac{1}{x^2+x+1}$

(2) $\log 2 > \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

深化 5.3 例題 5.11(2) の解答において，常には $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ でないことを確かめている理由を説明してみよう． 解

応用例題 5.7 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ．　S

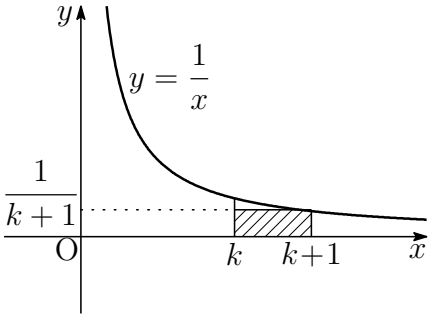
$$\log n > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$　　ただし，n は 2 以上の自然数

考え方》 自然数 k に対して，$k \leqq x \leqq k+1$ では $f(x) \geqq f(k+1)$ である．

常には $f(x)=f(k+1)$ でないから，$\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx > \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx$ が成り立つ．

証明 自然数 k に対して，$k \leqq x \leqq k+1$ では

$$\frac{1}{x} \geqq \frac{1}{k+1}$$

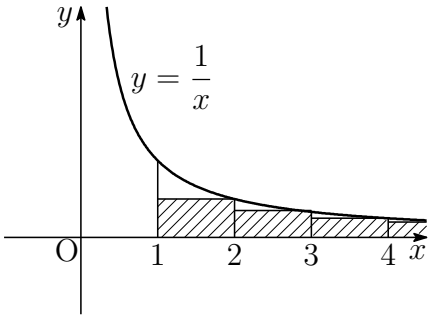


常には $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{k+1}$ でないから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx$$

すなわち

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} > \frac{1}{k+1}$$



$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ として，
辺々を加えると

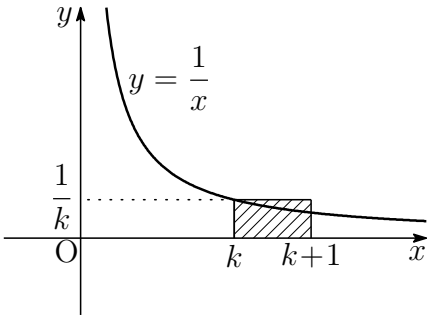
$$\int_1^2 \frac{dx}{x}+\int_2^3 \frac{dx}{x}+\int_3^4 \frac{dx}{x}+\cdots+\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

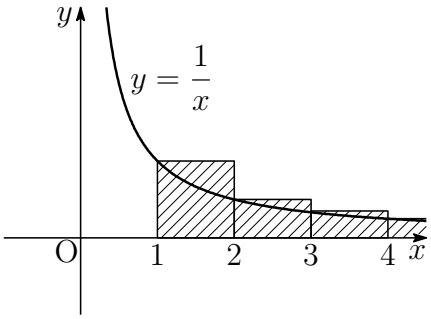
ここで　　左辺 $=\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^n=\log n$　　$\leftarrow \log 1=0$

したがって　　$\log n > \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}$　　証終

練習 5.32 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ． 解

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1) \qquad \text{ただし，} n \text{ は自然数}$$





5.2.4　問題

問題 5.7 次の定積分を求めよ．解 → p.172〜180

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta\,d\theta$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos^2 2\theta\,d\theta$　　(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(3-x)^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \sin x\cos^2 x\,dx$　　(6) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log x\,dx$

問題 5.8 a を正の定数とする．次の定積分を求めよ．解 → p.177〜179

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx$

問題 5.9 次の関数の極値を求めよ．解 → p.184

$$f(x)=\int_0^x (1+\cos t)\sin t\,dt \qquad (0<x<4\pi)$$

問題 5.10 次の関数を x で微分せよ．ただし，(2) では $x > 0$ とする． 解 → p.185

(1) $\displaystyle\int_x^{2x} \cos\theta \, d\theta$ (2) $\displaystyle\int_x^{x^2} \log t \, dt$

問題 5.11 等式 $f(x) = \sin x + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\cos t \, dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ． 解
→ p.185

問題 5.12 次の極限値を求めよ． 解 → p.188

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{2}{n^3}} + \sqrt{\frac{3}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)$$

問題 5.13 連続な関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$ を証明せよ．
解

5.3　積分法の応用

5.3.1　面積

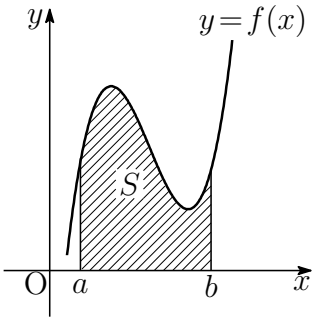
A》曲線 $y = f(x)$ と面積

曲線 $y = f(x)$ と面積について，次のことが成り立つ．

曲線 $y = f(x)$ と面積

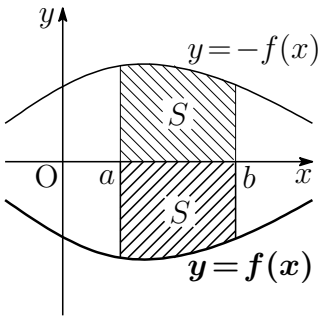
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



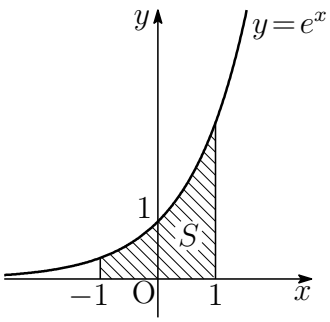
上の公式において，区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \leqq 0$ のときは，S は次の式で表される．

$$S = \int_a^b \{-f(x)\}\,dx$$



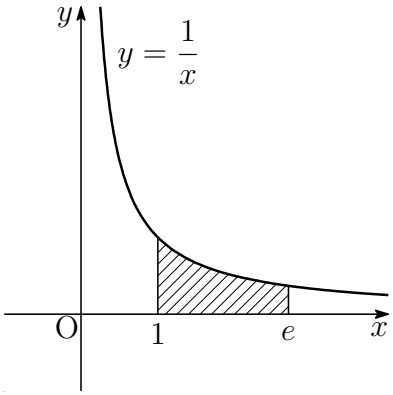
例 5.10　曲線 $y = e^x$ と x 軸および 2 直線 $x = -1$，$x = 1$ で囲まれた部分の面積 S は　S

$$S = \int_{-1}^{1} e^x\,dx = \left[e^x\right]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}$$

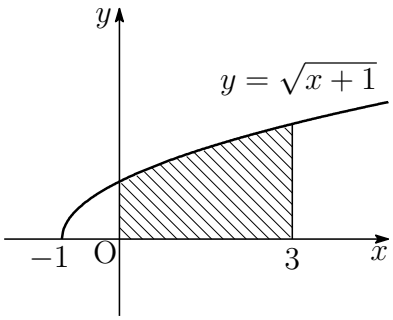


練習 5.33 次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ． 解

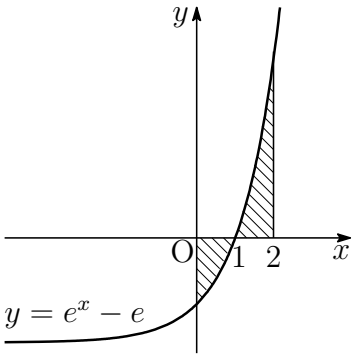
(1) $y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ x = e$



(2) $y = \sqrt{x+1}$，$x = 0$，$x = 3$



練習 5.34 曲線 $y = e^x - e$ と x 軸および 2 直線 $x = 0,\ x = 2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ． 解

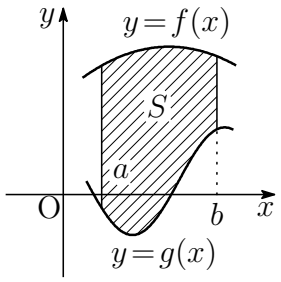


また，数学 II で学んだように，次のことが成り立つ．

2 曲線間の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

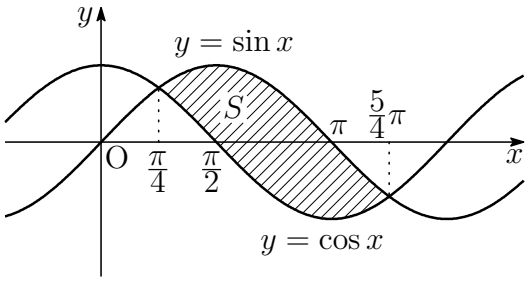
$$\boldsymbol{S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx}$$



例題 5.12　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲において，2 つの曲線

$$y = \sin x,\quad y = \cos x$$

で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を求めよ．　S



解答　2 つの曲線の共有点の x 座標は，方程式 $\sin x = \cos x$ の解である．

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で解くと　　$x = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

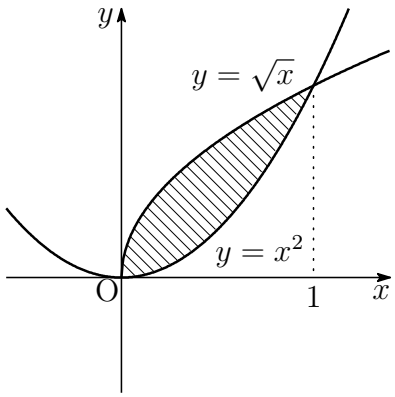
斜線部分の範囲では，$\sin x \geqq \cos x$ であるから

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - \cos x)\,dx = \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = 2\sqrt{2}$$

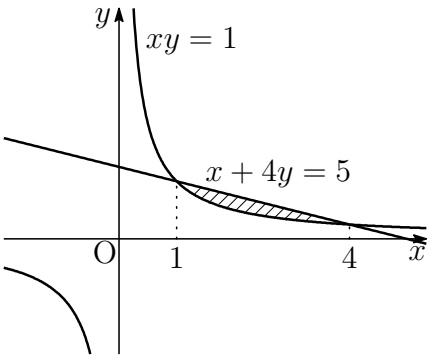
補足　方程式 $\sin x = \cos x$ は，$\dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$ すなわち $\tan x = 1$ と変形して解くことができる．

練習 5.35 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ． 解

(1) $y = x^2$，$y = \sqrt{x}$



(2) $x + 4y = 5$，$xy = 1$

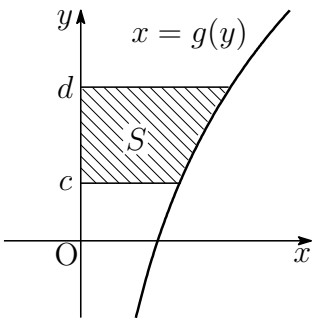


B》曲線 $x = g(y)$ と面積

y の関数 $x = g(y)$ で表される曲線については，次のことが成り立つ．

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき，曲線 $x = g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y = c$, $y = d$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \int_c^d g(y)\,dy}$$

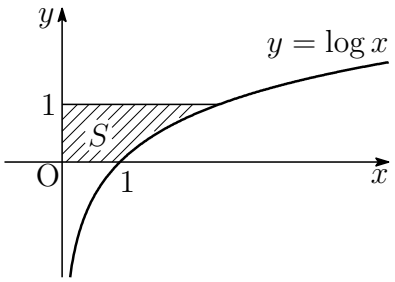


例 5.11 曲線 $y = \log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y = 1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ． S

$y = \log x$ より　　$x = e^y$

常に $e^y > 0$ であるから

$$S = \int_0^1 e^y\,dy = \left[\, e^y \,\right]_0^1 = e - 1$$



例題 5.13 曲線 $x = y^2$ と直線 $x = y + 2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ． S

解答　曲線と直線の共有点の y 座標は，方程式

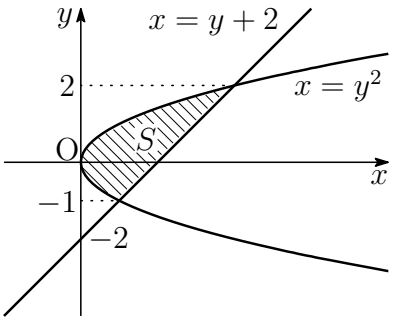
$$y^2 = y + 2$$

の解である．$y^2 - y - 2 = 0$ より

$$y = -1,\ 2$$

$-1 \leqq y \leqq 2$ では，$y + 2 \geqq y^2$ であるから

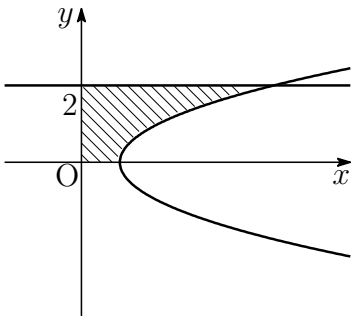
$$S = \int_{-1}^{2} \{(y+2) - y^2\}\,dy$$
$$= \int_{-1}^{2} (-y^2 + y + 2)\,dy = \left[\, -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y \,\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$



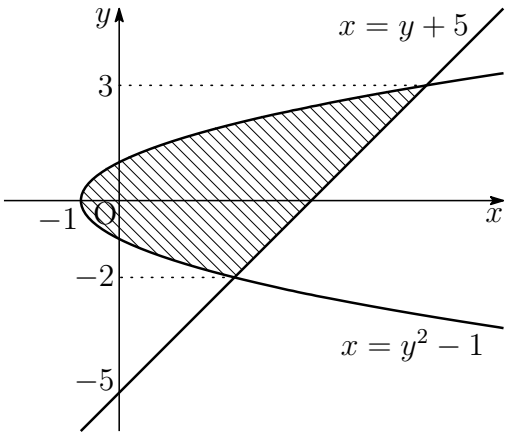
補足　$\displaystyle\int_{-1}^{2} (-y^2 + y - 2)\,dy = \int_{-1}^{2} (y+1)(2-y)\,dy = \frac{1}{6}\{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2}$

練習 5.36 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ． 解

(1) $x = y^2 + 1$，x 軸，y 軸，$y = 2$



(2) $x = y^2 - 1$，$x = y + 5$

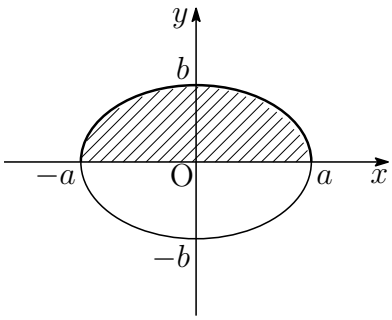


C》いろいろな式で表される曲線と面積

応用例題 5.8　$a>0$，$b>0$ とする．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ によって囲まれた図形の面積は πab であることを示せ．　S

考え方》 この楕円は x 軸に関して対称である．$y \geqq 0$ のとき，方程式を y について解き，$y \geqq 0$ の部分の面積を 2 倍すればよい．

解答　求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積を 2 倍したものに等しい．$y \geqq 0$ のとき，方程式を y について解くと



$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

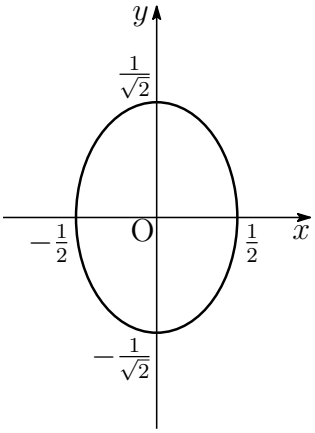
よって　$S=2\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

ここで，$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の円の面積の半分である．

したがって　$S=\dfrac{2b}{a}\cdot\dfrac{\pi a^2}{2}=\pi ab$

練習 5.37　次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．　解

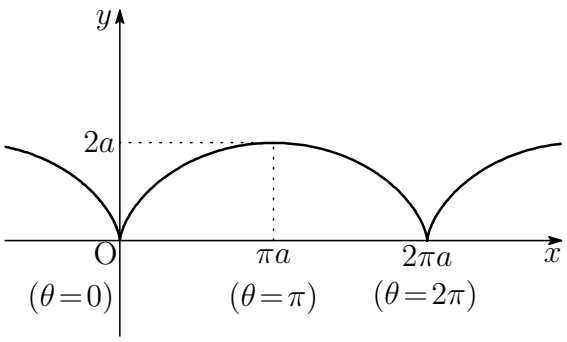
$$4x^2+2y^2=1$$



a を正の定数とする．θ を媒介変数として，媒介変数表示

$$x = a(\theta - \sin\theta),$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

の表す曲線は，右の図のようになる．
この曲線を**サイクロイド**という．



応用例題 5.9 $a > 0$ とする．サイクロイド [サイクロイド]

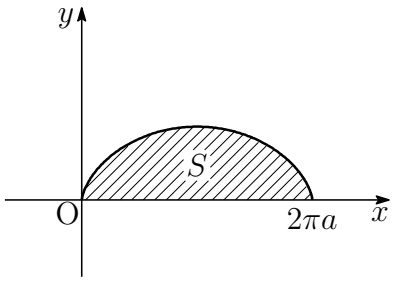
$$x = a(\theta - \sin\theta),\quad y = a(1 - \cos\theta)\quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ． S

考え方 》 曲線が x 軸と交わる点の x 座標は，$x = 0,\ 2\pi a$ であるから，

$S = \displaystyle\int_0^{2\pi a} y\,dx$ である．置換積分法によって求める．

解答 求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x = a(\theta - \sin\theta)$ より

$$dx = a(1 - \cos\theta)d\theta \qquad \leftarrow \frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$$

x と θ の対応は右のようになる．

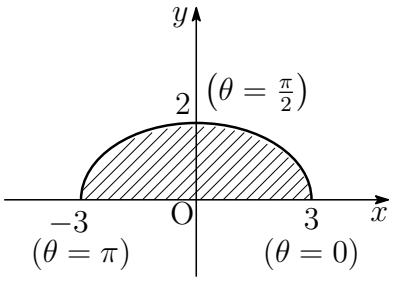
x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
θ	$0 \longrightarrow 2\pi$

よって，置換積分法により

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= a^2\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi a^2 \end{aligned}$$

練習 5.38 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．解

$$x = 3\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$



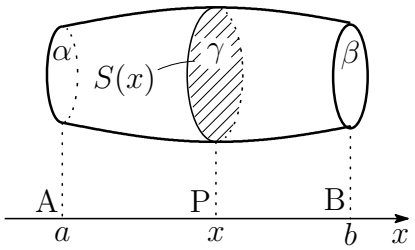
5.3.2 体積

A 》定積分と体積

立体図形の体積を計算する方法を考えよう．

187 ページでは，平面図形の面積を区分求積法によって計算し，定積分を和の極限で表した．立体図形の体積についても，区分求積法の考えを利用して定積分で表すことができる．

右の図のように，立体が x 軸に垂直な 2 平面 α，β に挟まれているとする．この挟まれた部分の体積を V とし，2 平面 α，β と x 軸との交点 A，B の座標を，それぞれ a，b とする．ただし，$a < b$ である．



このとき，座標が x である点 P を通り x 軸に垂直な平面 γ で立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，体積 V は次の式で与えられる． [定積分と体積]

断面積 $S(x)$ と立体の体積 V

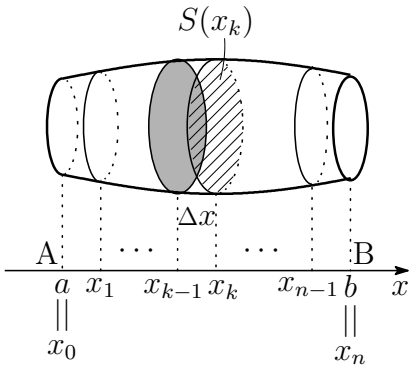
$$V = \int_a^b S(x)\,dx \qquad \text{ただし} \quad a < b$$

【解説】区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分し，その分点の座標を a に近いほうから順に

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

とし，次のようにおく．

$$a = x_0,\ b = x_n,\ \frac{b-a}{n} = \Delta x$$



そして，各分点を通り x 軸に垂直な平面でこの立体を分割する．

このとき

$$V_n = S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + \cdots + S(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

とすると，$n \longrightarrow \infty$ のとき $V_n \longrightarrow V$ と考えられる．

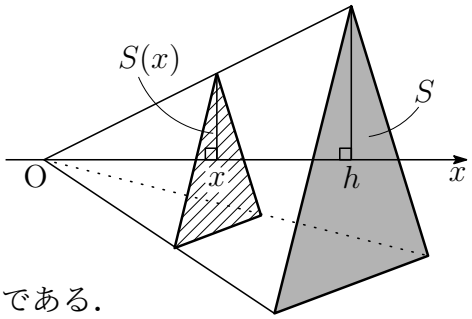
したがって，187 ページの「区分求積法と定積分」の関係から

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)\,dx$$

終

例題 5.14 底面積が S，高さが h の三角錐(すい)の体積 V は，$V = \dfrac{1}{3}Sh$ で与えられることを示せ．　[三角錐の体積] S

解答　この三角錐の頂点から底面に垂線を下ろし，これを x 軸とし，頂点を原点 O にとる．



座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で三角錐を切ったときの断面積を $S(x)$ とする．

この断面は，底面の三角形と相似な三角形である．

断面と底面の相似比は $x : h$ であるから，面積比は

$$S(x) : S = x^2 : h^2$$

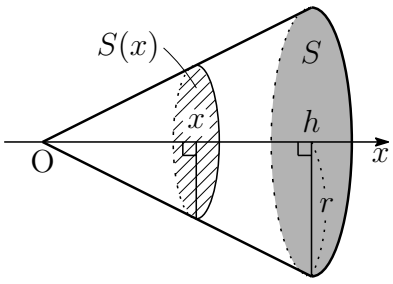
← 相似比が $a : b$ ならば面積の比は $a^2 : b^2$

よって　$$S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$$

したがって　$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh$$

練習 5.39 底面の半径が r，高さが h の円錐の体積 V は，$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ で与えられることを示せ．　解



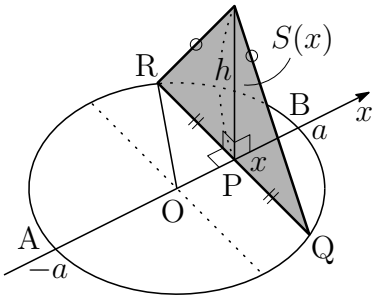
応用例題 5.10 半径 a の円 O がある．この直径 AB 上の点 P を通り直線 AB に垂直な弦 QR を底辺とし，高さが h である二等辺三角形を，円 O の面に対して垂直に作る．P が A から B まで動くとき，この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ．

考え方 》 円の中心 O を原点，直線 AB を x 軸にとる．点 P の座標を x とし，二等辺三角形の面積を x の式で表す． [三角形が通過してできる立体] S

解答 円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとる．点 P の座標を x とすると

$$\mathrm{QR} = 2\mathrm{PR} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

よって，線分 QR を底辺とする高さ h の二等辺三角形の面積 $S(x)$ は

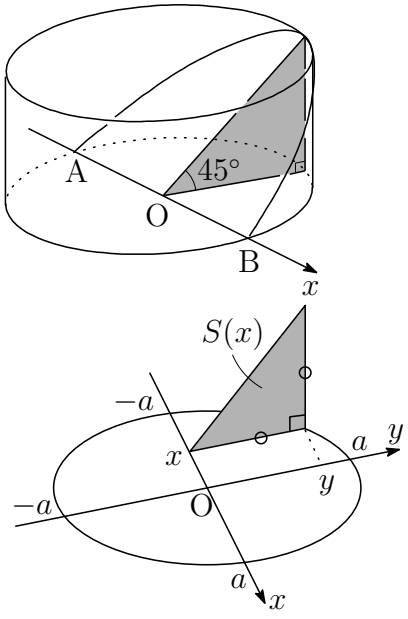


$$S(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{a^2 - x^2} \times h = h\sqrt{a^2 - x^2}$$

したがって

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)\,dx = \int_{-a}^{a} h\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = h \cdot \frac{\pi a^2}{2} = \frac{1}{2}\pi a^2 h$$

練習 5.40 底面の半径が a で高さも a である直円柱がある．この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積 V を求めよ． 解

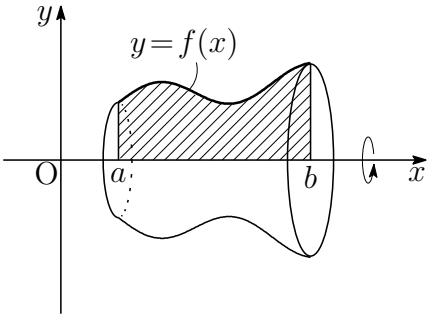


深化 5.4 練習 5.40 の立体 (体積を求める立体) を，いろいろな平面で切ってみよう．それぞれの平面で切ったときの断面はどのような図形になるだろうか．

[立体の断面] 解

B 》回転体の体積

$a < b$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう．

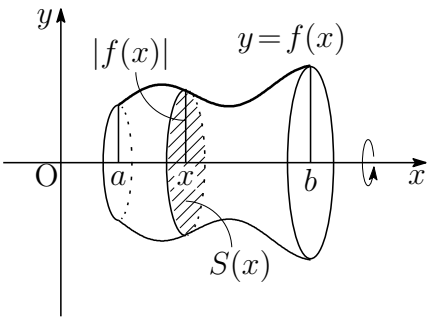


点 $(x,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を切ると，その断面は半径が $|f(x)|$ の円である．

よって，その断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x) = \pi|f(x)|^2 = \pi\{f(x)\}^2$$

であるから，次の公式が成り立つ．



回転体の体積

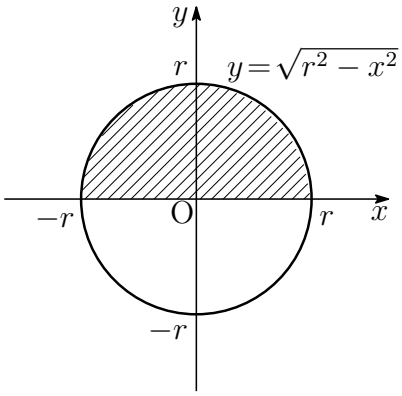
$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx = \pi \int_a^b y^2\,dx} \qquad \text{ただし}\quad a < b$$

例題 5.15　半径 r の球の体積 V は，$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ で与えられることを示せ．　S

解答　半径 r の球は，半円 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転するとできる．

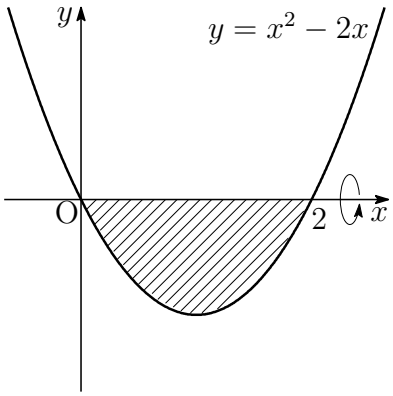
よって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} y^2\,dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

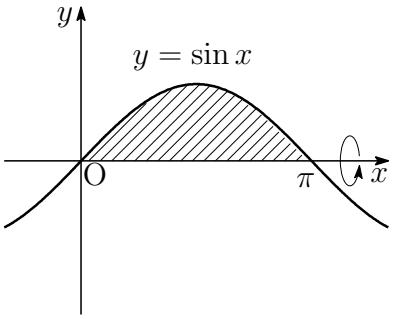


練習 5.41 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ． 解

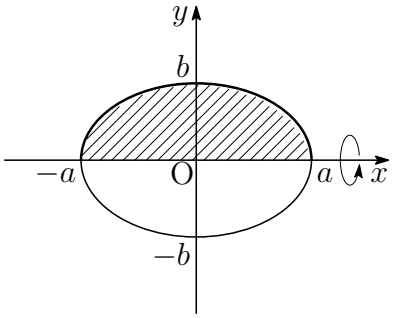
(1) $y = x^2 - 2x$



(2) $y = \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

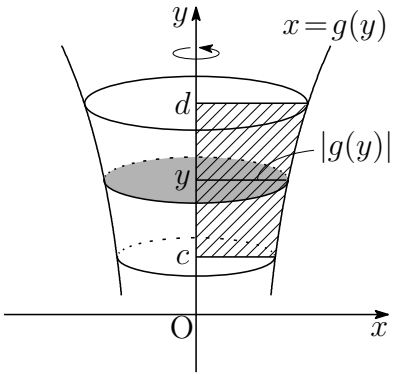


練習 5.42 $a > 0$，$b > 0$ とする．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ． 解



C》y 軸の周りの回転体の体積

右の図のように，曲線 $x = g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y = c$，$y = d$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう．この場合も，x 軸の周りの回転体の体積と同様に考えれば，次の公式が成り立つ．



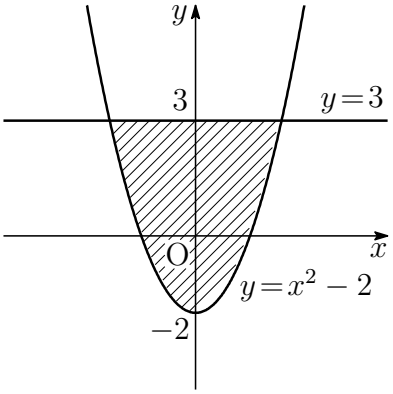
y 軸の周りの回転体の体積

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d \{g(y)\}^2\, dy = \pi \int_c^d x^2\, dy} \qquad \text{ただし，} c < d$$

例題 5.16 放物線 $y = x^2 - 2$ と直線 $y = 3$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ． S

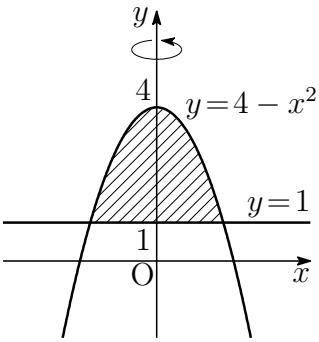
解答

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{3} x^2\, dy \\ &= \pi \int_{-2}^{3} (y+2)\, dy \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2} + 2y \right]_{-2}^{3} \\ &= \frac{25}{2}\pi \end{aligned}$$

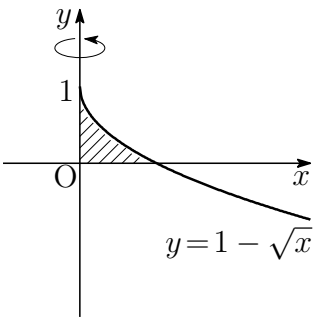


練習 5.43 次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ． 解

(1) $y = 4 - x^2$，$y = 1$



(2) $y = 1 - \sqrt{x}$，x 軸，y 軸



D 》いろいろな式で表される曲線と回転体の体積

応用例題 5.11　$0 < r < a$ とする．円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ． S

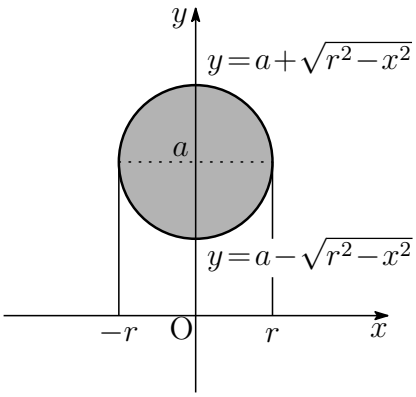
考え方 》 方程式を y について解く．

V は 2 つの回転体の体積の差として求められる．

解答　$x^2 + (y-a)^2 = r^2$ を y について解くと

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

半円 $y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x = -r$，$x = r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_1，半円 $y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x = -r$，$x = r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とすると



$$V_1 = \pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx, \quad V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx$$

よって

$$V = V_1 - V_2 = 4\pi a \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

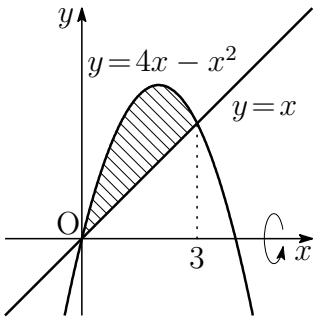
$$= 4\pi a \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 a$$

補足　応用例題 5.11 の回転体を円環体（えんかんたい）またはトーラスという． [円環体]

応用例題 5.11 の円環体の体積は，円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ の面積 πr^2 と，この円が x 軸の周りに回転するときに中心の点が描く周の長さ $2\pi a$ との積に等しい．

354 ページのパップス・ギュルダンの定理を参照．

練習 5.44　放物線 $y = 4x - x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ． 解



応用例題 5.12 $a>0$ とする．サイクロイド S

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)\quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

考え方 》 201 ページの面積の場合と同じように，置換積分を利用する．

解答 $V=\pi\displaystyle\int_0^{2\pi a} y^2\,dx,\quad dx=a(1-\cos\theta)\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる．

x	$0\longrightarrow 2\pi a$
θ	$0\longrightarrow 2\pi$

よって，置換積分法により

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\cdot a(1-\cos\theta)\,d\theta\\&=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta\\&=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi,\quad \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\Big[\,\sin\theta\,\Big]_0^{2\pi}=0$$

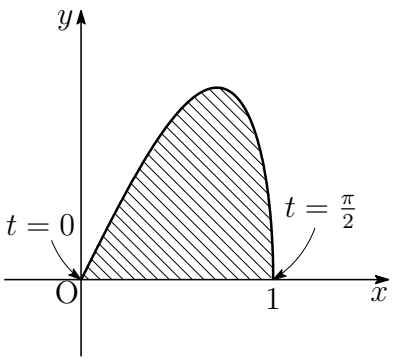
$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\Big[\,\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\Big]_0^{2\pi}=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta=\Big[\,\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\,\Big]_0^{2\pi}=0$$

したがって $V=\pi a^3(2\pi-3\cdot 0+3\cdot\pi-0)=5\pi^2a^3$

練習 5.45 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ． 解

$$x=\sin t,\quad y=\sin 2t\quad \Big(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\Big)$$

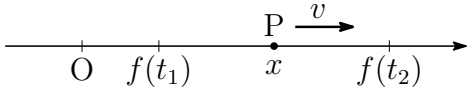


5.3.3　道のり

A 》速度と位置

数直線上を運動する点 P の座標や速度は，時刻 t の関数である．時刻 t における点 P の座標を $x = f(t)$，速度を v とすると，148 ページで学んだように，次が成り立つ．

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$



よって，点 P の $t = t_1$ から $t = t_2$ までの位置の変化量 $f(t_2) - f(t_1)$ は，次の式で表される．

$$f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

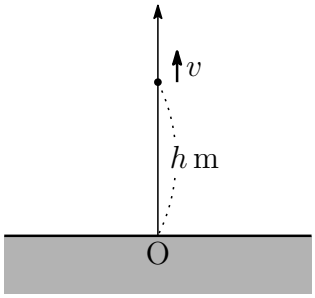
したがって，時刻 $t = t_2$ における点 P の座標 x は，次のようになる．

$$\boldsymbol{x = f(t_2) = f(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v\,dt}$$

例 5.12　30m/秒 の速さで地上から真上に打ち上げられた物体の t 秒後の速度 v m/秒 は，$v = 30 - 9.8t$ で与えられるという．ただし，$0 \leqq t \leqq 6$ である．打ち上げられてから 2 秒後における物体の高さ h m は

$$h = \int_0^2 (30 - 9.8t)\,dt = \Big[30t - 4.9t^2\Big]_0^2$$
$$= 60 - 19.6 = 40.4 \text{ (m)}$$

S



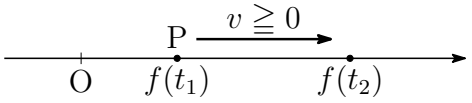
練習 5.46　数直線上を運動する点 P の速度が，時刻 t の関数として $v = 4 - 2t$ で与えられている．$t = 0$ における P の座標が 2 であるとき，$t = 3$ のときの P の座標を求めよ．解

B》数直線上を運動する点と道のり

数直線上を運動する点Pの時刻tにおける座標を$x=f(t)$，速度をvとし，時刻t_1からt_2までに点Pが通過する総距離，すなわち**道のり**をsとする．

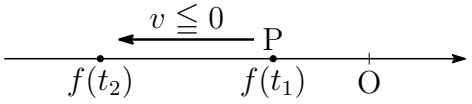
$t_1 \leqq t \leqq t_2$ で常に $v \geqq 0$ ならば

$$s = f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$



$t_1 \leqq t \leqq t_2$ で常に $v \leqq 0$ ならば

$$s = f(t_1) - f(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} (-v)\,dt$$



である．よって，次のことが成り立つ．

数直線上を運動する点と道のり

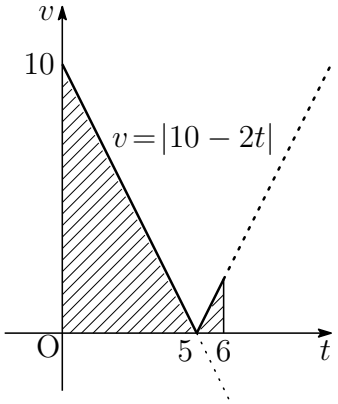
数直線上を運動する点Pの時刻tにおける速度をvとすると，

時刻t_1からt_2までにPが通過する道のりsは　$\boldsymbol{s = \int_{t_1}^{t_2} |v|\,dt}$

例 5.13 数直線上を運動する点Pの時刻tにおける速度vが，

$$v = 10 - 2t \quad (0 \leqq t \leqq 6)$$

で与えられるとき，$t=0$ から $t=6$ までに点Pが通過する道のりsは　S



$$\begin{aligned} s &= \int_0^6 |10-2t|\,dt \\ &= \int_0^5 (10-2t)\,dt + \int_5^6 (-10+2t)\,dt \\ &= \Big[10t - t^2\Big]_0^5 + \Big[-10t + t^2\Big]_5^6 \\ &= (25-0) + \{-24-(-25)\} = 26 \end{aligned}$$

補足 例 5.13 において，点Pの道のりsは，斜線部の面積に等しい．

練習 5.47 数直線上を運動する点Pがあり，時刻tにおけるPの速度は$v=\sin 2t$であるとする．$t=0$ から $t=\pi$ までにPが通過する道のりsを求めよ．　解

C》座標平面上を運動する点と道のり

座標平面上を運動する点 P の道のりについて考えてみよう．

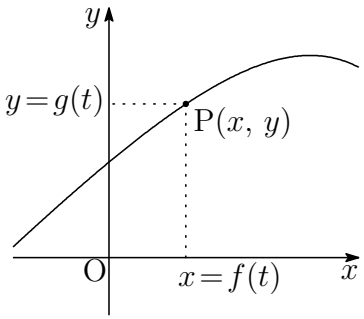
点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ を

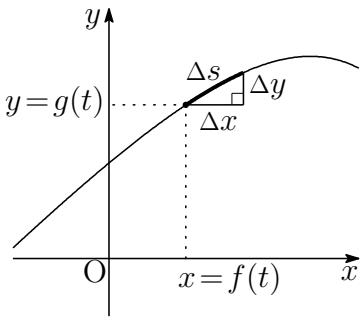
$$x = f(t),\ y = g(t)$$

とする．いま，時刻 t_1 から t までに点 P が通過する道のりを t の関数とみて，$s(t)$ で表す．また，t の増分 Δt に対する

$$s(t),\ x = f(t),\ y = g(t)$$

の増分を，それぞれ $\Delta s,\ \Delta x,\ \Delta y$ とする．





$\Delta t > 0$ で Δt が十分小さいときは

$$\Delta s \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

と考えられるから，

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

である．$\Delta t < 0$ のときも同様である．

ここで，$\Delta t \longrightarrow 0$ のときの極限を考えると，次が成り立つ．

$$s'(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

149 ページで学んだように，時刻 t における点 P の速度ベクトル $\vec{v}$ は $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$ であり，上の結果から，$s'(t) = |\vec{v}|$ が成り立つ．

以上から，次が成り立つ．

座標平面上を運動する点と道のり

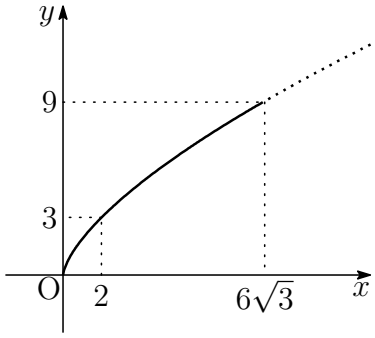
座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数で表されるとき，時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のり s は

$$\boldsymbol{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}|\, dt}$$

例題 5.17 座標平面上を運動する点Pの時刻tにおける座標$(x,\ y)$が$x=2t^3,\ y=3t^2$で表されるとき，Pが$t=0$から$t=\sqrt{3}$までに通過する道のりsを求めよ． S

解答 $\dfrac{dx}{dt}=6t^2$，$\dfrac{dy}{dt}=6t$ であるから

$$s=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(6t^2)^2+(6t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{3}}6t\sqrt{t^2+1}\,dt$$



$t^2+1=u$ とおくと　$2t\,dt=du$

t と u の対応は右のようになる．

t	$0\longrightarrow\sqrt{3}$
u	$1\longrightarrow\ 4$

よって　$s=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}6t\sqrt{t^2+1}\,dt$

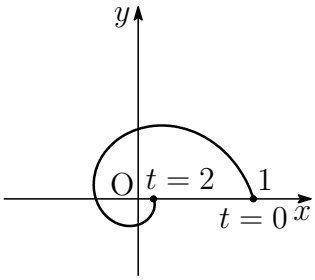
$$=\int_0^{\sqrt{3}}3\sqrt{t^2+1}\cdot 2t\,dt=\int_1^4 3\sqrt{u}\,du=\left[2u\sqrt{u}\right]_1^4=14$$

補足 $s=3\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}(t^2+1)^{\frac{1}{2}}(t^2+1)'\,dt=3\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(t^2+1)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{\sqrt{3}}=14$

練習 5.48 座標平面上を運動する点Pの時刻tにおける座標$(x,\ y)$が

$$x=e^{-t}\cos\pi t,\quad y=e^{-t}\sin\pi t$$

で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までにPが通過する道のりsを求めよ． 解



5.3.4　曲線の長さ

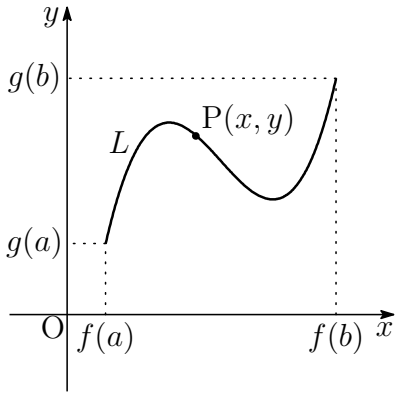
A 》媒介変数表示された曲線の長さ

座標平面上の曲線 C が，媒介変数 t を用いて

$$x = f(t),\quad y = g(t)\quad (a \leqq t \leqq b)$$

で表されているとき，この曲線上の点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数であると考えると，P が時刻 a から b までに通過する道のりが，この曲線の長さ L になる．

よって，この曲線の長さを L とするとき，L は次の定積分で表される．



媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x = f(t),\ y = g(t)\ \ (a \leqq t \leqq b)$ の長さ L は

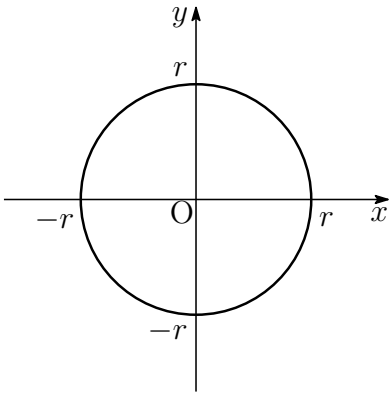
$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt}$$

例 5.14 次の曲線の長さ L を求める．ただし，$r > 0$ とする．　S

$$x = r\cos t,\quad y = r\sin t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

$\dfrac{dx}{dt} = -r\sin t,\quad \dfrac{dy}{dt} = r\cos t$ であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} r\, dt = r\Big[\ t\ \Big]_0^{2\pi} = 2\pi r \end{aligned}$$



終

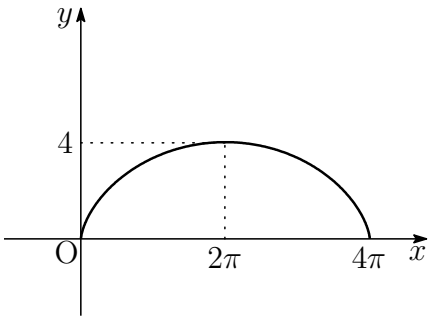
例 5.14 の曲線は，半径 r の円である．例 5.14 の計算で，半径 r の円の周の長さが，$2\pi r$ になることが示された．

例題 5.18 次のサイクロイドの長さ L を求めよ． S

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

解答 $\dfrac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t), \quad \dfrac{dy}{dt} = 2\sin t$ であるから

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\
&= \sqrt{\{2(1 - \cos t)\}^2 + (2\sin t)^2} \\
&= \sqrt{4(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)} \\
&= \sqrt{8(1 - \cos t)} \\
&= \sqrt{8 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2}} \\
&= \sqrt{\left(4\sin \frac{t}{2}\right)^2} = \left|4\sin \frac{t}{2}\right|
\end{aligned}$$



$0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき，$\sin \dfrac{t}{2} \geqq 0$ であるから

$$L = \int_0^{2\pi} 4\sin \frac{t}{2} = 4\left[-2\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 16$$

補足 a を正の定数とする．サイクロイド

$$x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

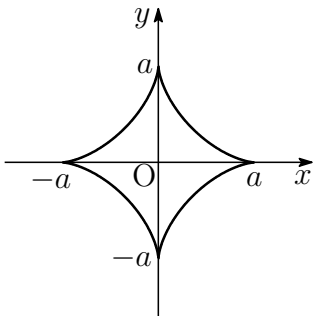
の長さ L も同様に，$\dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$，$\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ より

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\{a(1 - \cos t)\}^2 + (a\sin t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos t)}\, dt \\
&= 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = 2a\left[-2\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a
\end{aligned}$$

$a > 0$ とする．θ を媒介変数として，
媒介変数表示

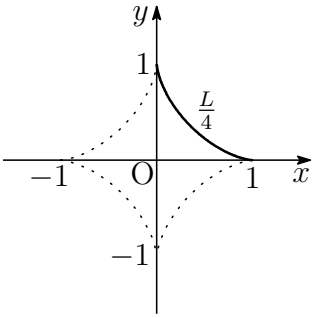
$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

の表す曲線は，右の図のようになる．この曲線を**アステロイド**という．この曲線は x 軸および y 軸に関して対称である．



練習 5.49 次のアステロイドの長さ L を求めよ．解

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$



B》曲線 $y = f(x)$ の長さ

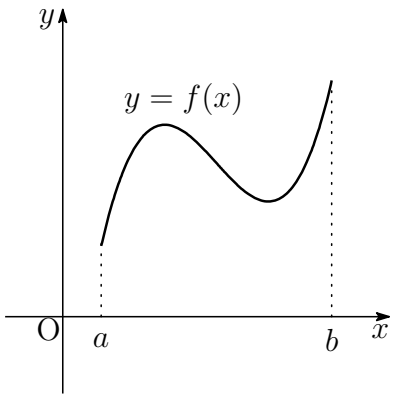
曲線 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ は，
媒介変数 t を用いて

$$x = t,\ y = f(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

と表される．

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = f'(x)$$

であるから，次のことが成り立つ．



曲線 $y = f(x)$ の長さ

曲線 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L は

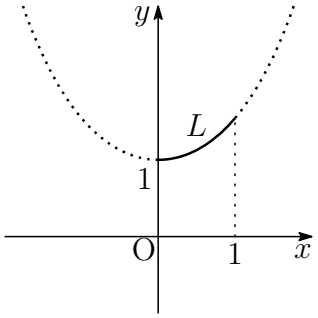
$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx}$$

例題 5.19 曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ L を求めよ. S

解答 $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ であるから

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \left|\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right|$$

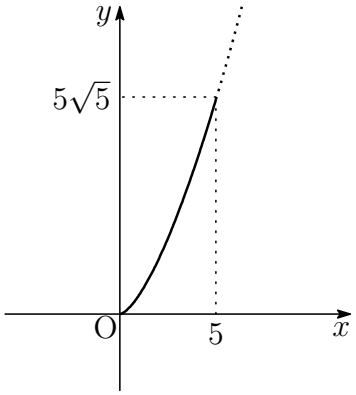


$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ であるから

$$L = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\, e^x - e^{-x} \,\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

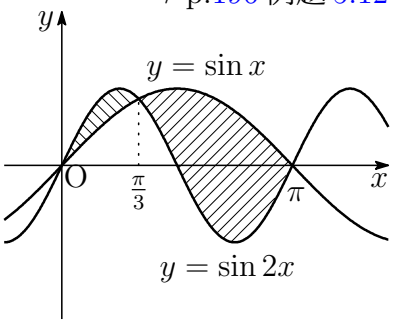
注意 $a > 0$ とする. $y = \dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ で表される曲線を懸垂線(けんすいせん)または**カテナリー**という.

練習 5.50 曲線 $y = x\sqrt{x}$ $(0 \leqq x \leqq 5)$ の長さ L を求めよ. 解



5.3.5　問題

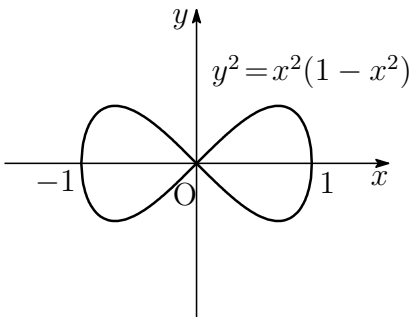
問題 5.14　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．　解　→ p.196 例題 5.12



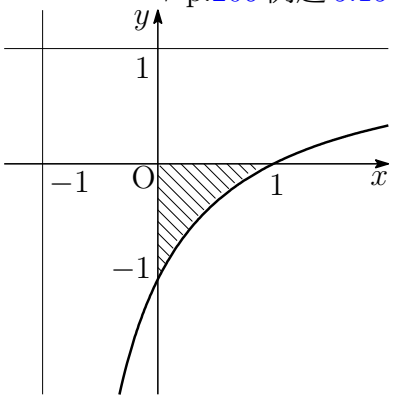
問題 5.15　曲線 $y^2 = x^2(1 - x^2)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．　解　→ p.200 応用例題 5.8

(1)　この曲線は，x 軸および y 軸に関して対称であることを示せ．

(2)　この曲線で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ．

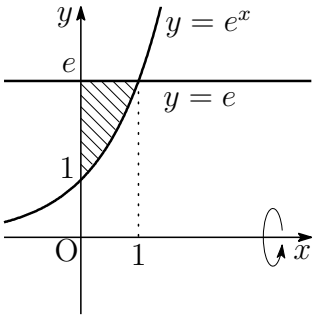


問題 5.16　曲線 $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ と x 軸および y 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．　解　→ p.206 例題 5.15



問題 5.17 曲線 $y = e^x$ と y 軸および直線 $y = e$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ． 解

→ p.210 応用例題 5.11



問題 5.18 数直線上を運動する点 P があり，時刻 t における P の速度は $v = \sin t + \sin 2t$ であるという．ただし，$t = 0$ のとき，P は原点にあるとする． 解

(1) 時刻 t における P の座標を求めよ．

→ p.212, 213

(2) $t = 0$ から $t = \pi$ までに P が通過する道のり s を求めよ．

問題 5.19 次のように媒介変数表示される曲線 C がある．

$$x = \cos\theta, \quad y = \cos 2\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積 S を，次の 2 通りの方法で求めよ． 解

① x で積分する． ② θ で積分する．

5.4　章末問題

5.4.1　章末問題 A

章末 5.1 次の関数の不定積分を求めよ．解

(1) $e^x\sqrt{e^x+1}$

(2) $\dfrac{x}{(x-1)^3}$

(3) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$

(4) $\cos^5 x$

(5) $\dfrac{1}{e^x-e^{-x}}$

(6) $2x\log(x^2+1)$

章末 5.2 次の定積分を求めよ． 解

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} \, dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x \, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^4 |(x-4)(x-1)^3| \, dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

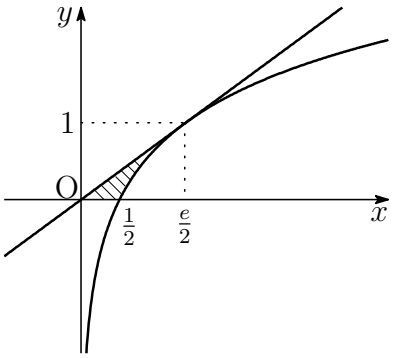
(6) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \, dt$

章末 5.3 m，n を自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt \, dt$ を，$m \neq n$，$m = n$ の場合に分けて求めよ． 解

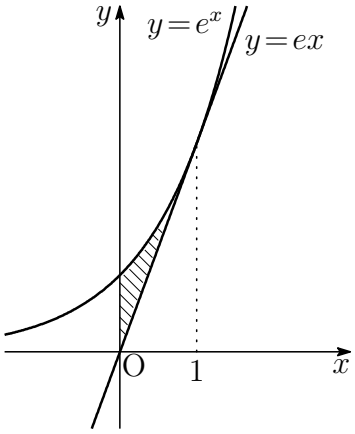
章末 5.4 次の極限値を求めよ． 解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

章末 5.5 原点から曲線 $y = \log 2x$ に引いた接線とこの曲線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ． 解



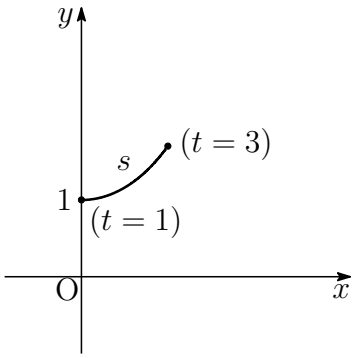
章末 5.6 曲線 $y = e^x$ とこの曲線上の点 $(1,\ e)$ における接線および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．また，この部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ． 解



章末 5.7 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = \log t, \quad y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

で表されるとき，$t = 1$ から $t = 3$ までに P が通過する道のり s を求めよ． 解



5.4.2　章末問題 B

章末 5.8 次の不定積分を求めよ．解

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$

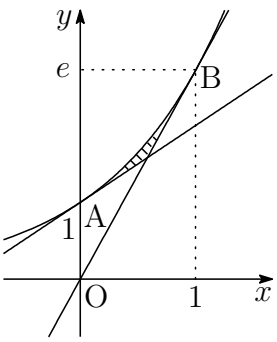
(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

章末 5.9 a は定数とする．定積分 $I = \displaystyle\int_0^1 (e^x - ax)^2\,dx$ を最小にする a の値と，I の最小値を求めよ．解

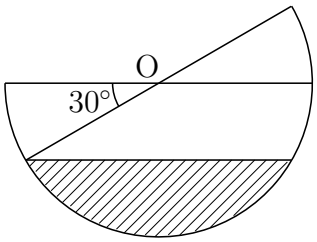
章末 5.10 連続な関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$ を証明せよ．解

章末 5.11 a を正の定数とする．$x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ が等式 $\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)\,dt = \log x$ を満たすように，$f(x)$ と a の値を定めよ．解

章末 5.12 曲線 $y = e^x$ 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ e)$ における接線と，この曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよ． 解



章末 5.13 水を満たした半径 $2a$cm の半球形の容器がある．これを静かに $30°$ 傾けるとき，こぼれる水の量はどれだけか． 解



ヒント

8 (1) $\dfrac{1}{x^2(x+3)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+3}$ と分解する．

(2) $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$

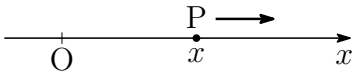
10 置換積分法を利用する．

5.4.3　微分方程式

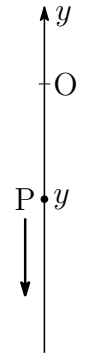
■微分方程式

点 P が x 軸上を等速度 a で運動する場合，時刻 t における P の座標を x とすると，x は t の関数であって，

$$\frac{dx}{dt} = a \qquad \cdots ①$$



を満たす．また，物体が地点 O から自由に落下する場合，鉛直上向きの直線を y 軸にとり，時刻 t における物体の位置を座標 y で表すと，y は t の関数であって，



$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad \cdots ②$$

を満たす．ただし，g は重力加速度の大きさである．

①，② のように，未知の関数の導関数を含む等式を**微分方程式**という．

■微分方程式の解き方

a，g を定数とするとき，上の微分方程式 ①，② を満たす関数を，それぞれ求めてみよう．

① において，両辺を t で積分すると

$$y = at + C, \quad C \text{ は任意の定数} \qquad \cdots ③$$

② において，両辺を t で積分すると

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \quad C_1 \text{ は任意の定数}$$

さらに，両辺を t について積分すると

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad C_1,\ C_2 \text{ は任意の定数} \qquad \cdots ④$$

以上のことから，微分方程式 ① を満たす関数は ③，微分方程式 ② を満たす関数は ④ であることがわかる．

一般に，微分方程式を満たす関数を，その微分方程式の**解**といい，すべての解を求めることを，その微分方程式を**解く**という．

微分方程式を解くと，いくつかの任意の定数を含んだ解が得られる．

さらに，特定の条件を与えると，それに応じて定数の値が定まり，解となる関数の 1 つが求められる．

例 5.15 y を x の関数，k を定数とするとき，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ky$ を解け．

解答 ［1］定数関数 $y = 0$ は明らかに解である．

［2］$y \neq 0$ のとき，方程式を変形すると

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = k$$

よって $$\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx = \int k\,dx$$

左辺に置換積分法の公式を適用すると

$$\int \frac{1}{y}dy = \int k\,dx$$

ゆえに $$\log|y| = kx + C,\ C \text{ は任意の定数}$$

$$|y| = e^C e^{kx}$$

すなわち $$y = \pm e^C e^{kx}$$

ここで，$\pm e^C = A$ とおくと A は 0 以外の任意の値をとる．

［1］で求めた解 $y = 0$ は，$y = Ae^{kx}$ において，$A = 0$ とおくと得られる．

したがって，求める解は　$y = Ae^{kx}$，A は任意の定数

別解 $y' = ky$ より　$y'e^{-kx} + y(e^{-kx})' = 0$　ゆえに　$(ye^{-kx})' = 0$

これを積分すると　$ye^{-kx} = A$　よって　$y = Ae^{kx}$　(A は任意の定数)　終

一般に，$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

の形に変形できる微分方程式の解は，次の等式から求めることができる．

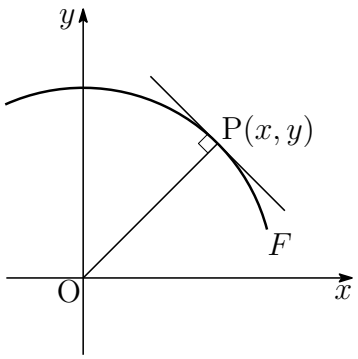
$$\boldsymbol{\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx}$$

練習 5.51 y を x の関数とする．微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ を解け．　解

例 5.16 曲線 F 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における接線が，原点 O と点 P を結ぶ直線に常に垂直であるという．この曲線が点 $(3,\ 4)$ を通るとき，曲線 F の方程式を求めよ．

解答 点 P における接線が直線 OP と垂直であるから，それらの傾きの積は，

$xy \neq 0$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{y}{x} = -1$



すなわち　　$y\dfrac{dy}{dx} = -x$

両辺を x で積分すると

$$\int y\,dy = \int (-x)\,dx$$

よって　　$\dfrac{1}{2}y^2 = -\dfrac{1}{2}x^2 + C$

ゆえに　　$x^2 + y^2 = 2C$，C は任意の定数

この曲線が点 $(3,\ 4)$ を通るから　　$3^2 + 4^2 = 2C$

よって，$x^2 + y^2 = 25$ で，$xy = 0$ のときも条件を満たす．

したがって，曲線 F の方程式は　　$x^2 + y^2 = 25$

例 5.16 において，$\sqrt{2C} = r$ とおくと，この方程式は $x^2 + y^2 = r^2$ となり，曲線が原点を中心とする任意の半径の円であることがわかる．

練習 5.52 A を 0 でない任意の定数として，方程式 $xy = A$ の表す直角双曲線全体を考える．これらの直角双曲線のどれとも直交するような曲線の方程式を求めよ．ただし，2 つの曲線が直交するとは，2 つの曲線の交点におけるそれぞれの接線が垂直に交わることである． 解

第 6 章　発展問題

6.1　相加平均・相乗平均

6.1.1　相加平均・相乗平均・調和平均

正の 2 数 $a,\ b$ について

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad (\text{等号が成立するのは, } a=b \text{ のとき})$$

であることを学んだ.

n 個の数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の相加平均 A_n は

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

であり，n 個の正数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の相乗平均 G_n は

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

である．3 正数 $a,\ b,\ c$ の相加平均と相乗平均の大小関係について考えてみる．

3 正数の相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

等号が成立するのは, $a=b=c$ のときに限る.

証明 $x>0,\ y>0,\ z>0$ とすると，次式が

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\ &= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0 \end{aligned}$$

成立する．等号が成立するのは，$x+y+z>0$ より

$$x-y=0 \quad \text{かつ} \quad y-z=0 \quad \text{かつ} \quad z-x=0$$

したがって　　$\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqq xyz$

等号が成立が成立するのは，$x=y=z$ のときに限る．

$x^3=a,\ y^3=b,\ z^3=c$ とおくと　　$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

等号が成立するのは，$x=y=z$ より，$a=b=c$ のときに限る．　　**証終**

$n=4$ のときの証明は，$n=2$ の結果を利用して証明できる．

4 つの正数 $a,\ b,\ c,\ d$ について

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}, \quad c+d \geqq 2\sqrt{cd}$$

であるから

$$(a+b)+(c+d) \geqq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}) \geqq 2\cdot 2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = 4\sqrt[4]{abcd}$$

したがって

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

上式において，等号が成立するのは

$$a=b, \quad c=d, \quad \sqrt{ab}=\sqrt{cd} \quad \text{すなわち} \quad a=b=c=d$$

したがって，次のことがいえる．

4 正数の相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ のとき

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

等号が成立するのは, $a=b=c=d$ のときに限る．

これを利用して，$n=8$ のときも証明できる．

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8) &\geqq 4(\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}+\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}) \\ &\geqq 4\cdot 2\sqrt{\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}} \\ &= 8\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}\end{aligned}$$

等号が成立するのは

$$a_1=a_2=a_3=a_4, \quad a_5=a_6=a_7=a_8, \quad \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}=\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}$$

すなわち，$a_1=a_2=\cdots=a_8$ のときに限る．

これを繰り返すことにより，$n=2^k$ (k は自然数) のとき

$$A_n \geqq G_n$$

が成立することがわかる．

次に，$n=p+q$ ($p,\ q$ は2以上自然数) が成立するとき，$A_p \geqq G_p$ が成立することを示す．ここで

$$A_p=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_p}{p},\quad G_p=\sqrt[p]{a_1a_2\cdots a_p}$$

とすると，$a_1+a_2+\cdots+a_p=pA_p,\ a_1a_2\cdots a_p={G_p}^p$ である．

n 個の正数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,a_p\ \overbrace{A_p,\ A_p,\ \cdots,A_p}^{q\text{ 個}}$$

の相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_p)+qA_p}{n}\geqq\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_p){A_p}^q}\quad\text{ゆえに}\quad A_p\geqq\sqrt[n]{{G_p}^p{A_p}^q}$$

両辺を n 乗すると $(n=p+q)$

$${A_p}^{p+q}\geqq{G_p}^p{A_p}^q\quad\text{ゆえに}\quad {A_p}^p\geqq{G_p}^p\quad\text{すなわち}\quad A_p\geqq G_p$$

等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots a_p$ のときに限る．

よって，2以上のすべての自然数 p について，上の結果は成立する．

相加平均・相乗平均・調和平均の大小関係

定理 1 n 個の正数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の相加平均 A_n，相乗平均 G_n，調和平均 H_n

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$
$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$
$$\frac{1}{H_n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

について，$A_n\geqq G_n\geqq H_n$ が成立する．
等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限る．

証明 $A_n\geqq G_n$ が成り立つから n 個の整数 $\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2},\ \cdots,\ \dfrac{1}{a_n}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{H_n}\geqq\frac{1}{G_n}$$

したがって　　$A_n\geqq G_n\geqq H_n$

なお，等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限る．　　**証終**

6.1.2　相加平均・相乗平均の応用

$a_k > 0,\ p_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ に対し，

$$M = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n$$
$$f(x) = \log M - \log x - 1 + \frac{x}{M}$$

とおくと，$f'(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{M}$ より

x	(0)	$\cdots$	M	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$x > 0$ において $f(x) \geqq 0$ が成り立ち，等号が成り立つのは，$x = M$ のときに限る．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p_k f(a_k) &= \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\log M - \log a_k - 1 + \frac{a_k}{M}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \log M - p_k \log a_k - p_k + \frac{p_k a_k}{M}\right) \\ &= \log M - \sum_{k=1}^{n} \log {a_k}^{p_k} - 1 + \frac{M}{M} \\ &= \log M - \log \left({a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}\right)\end{aligned}$$

$p_k f(a_k) \geqq 0\ (k = 1, 2, \cdots n)$ であるから (等号が成り立つのは，$a_k = M$ のとき)

$$\log M - \log \left({a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}\right) \geqq 0$$

したがって

$$\boldsymbol{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n \geqq {a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき)．

とくに，$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$$

名古屋大学文系 2002 年

n を自然数とするとき，3 つの数 $a=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}-1$，$b=1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$，$c=\dfrac{1}{5n}$ の大きさを比較せよ．

解答 5 つの正数 $1+\dfrac{1}{n},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}+1+1+1+1\right)>\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{n}\right)1^4}$$

$$\frac{1}{5n}>\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1 \qquad (*)$$

$n>1$ のとき，5 つの正数 $1-\dfrac{1}{n},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{n}+1+1+1+1\right)>\sqrt[5]{\left(1-\frac{1}{n}\right)1^4}$$

$$1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}>\frac{1}{5n} \qquad (**)$$

$(**)$ は $n=1$ のときも成立するから，$(*)$, $(**)$ より，自然数 n について

$$1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}>\frac{1}{5n}>\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b>c>a}$$

千葉大 2018 年

a を正の数とし，t は $0\leqq t<a$ を満たす数とする．点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする．

(1) 領域 $D(t)$ の表す図形を a および t を用いて表せ．

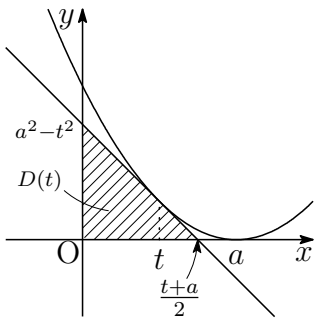
(2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ．

(3) s は $0\leqq s\leqq t$ を満たす数とする．領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t)\cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ．

解答　(1)　$f(x)=(x-a)^2$ とおくと　$f'(x)=2(x-a)$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$y=2(t-a)(x-t)+(t-a)^2$$



すなわち　$y=2(t-a)x+a^2-t^2$

この接線の x 軸および y 軸との交点は，それぞれ

$$\left(\frac{t+a}{2},\ 0\right),\quad (0,\ a^2-t^2)$$

よって，$D(t)$ の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+a}{2}\cdot(a^2-t^2)=\boldsymbol{\frac{1}{4}(a+t)^2(a-t)}$$

(2)　3 つの正の数 $a+t,\ a+t,\ 2(a-t)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(a+t)+(a+t)+2(a-t)}{3}\geqq\sqrt[3]{2(a+t)^2(a-t)}$$

したがって　　$(a+t)^2(a-t)\leqq\dfrac{32}{27}a^3\quad\cdots(*)$

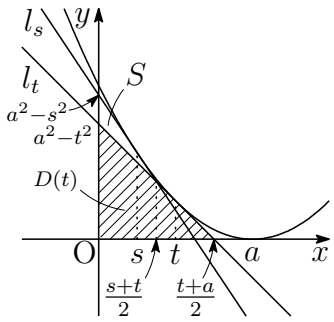
$(*)$ において，等号が成立するとき

$$a+t=2(a-t)\quad\text{すなわち}\quad t=\frac{a}{3}$$

(1) の結果および $(*)$ から　$S(t)=\dfrac{1}{4}(a+t)^2(a-t)\leqq\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{32}{27}a^3=\dfrac{8}{27}a^3$

よって，求める最大値は　　$\boldsymbol{\dfrac{8}{27}a^3}$

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(s,\ f(s))$，$(t,\ f(t))$ における接線をそれぞれ l_s，l_t とすると，(1) で求めた結果から



$$l_s : y=2(s-a)x+a^2-s^2$$
$$l_t : y=2(t-a)x+a^2-t^2$$

l_s と l_t の交点の x 座標は，上の 2 式から

$$2(s-t)x-s^2+t^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{s+t}{2}$$

2 直線 l_s，l_t および y 軸で囲まれた図形 (三角形) の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{s+t}{2}\{(a^2-s^2)-(a^2-t^2)\}=\frac{1}{4}(t+s)^2(t-s) \quad \cdots(*)$$

$D(t)\cup D(s)$ の表す図形の面積を F とすると　　$F=S+S(t)$

t を固定したとき，F が最大となるのは，S が最大となるときである．

3 つの正の数 $t+s,\ t+s,\ 2(t-s)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(t+s)+(t+s)+2(t-s)}{3}\geqq\sqrt[3]{2(t+s)^2(t-s)}$$

したがって　$(t+s)^2(t-s)\leqq\dfrac{32}{27}t^3$　ゆえに　$S\leqq\dfrac{8}{27}t^3$　$\cdots$①

上式で等号が成立するとき　$t+s=2(t-s)$　すなわち　$s=\dfrac{1}{3}t$　$\cdots$②

$s=\dfrac{1}{3}t$ のとき，① および (1) の結果から

$$F=\frac{8}{27}t^3+\frac{1}{4}(a+t)^2(a-t) \quad \cdots(**)$$

これを t について微分すると $(0<t<a)$

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}&=\frac{8}{9}t^2+\frac{1}{4}(-3t^2-2at+a^2)\\&=\frac{1}{36}(5t^2-18at+9a^2)\\&=\frac{1}{36}(t-3a)(5t-3a)\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{5}a$	$\cdots$	a
$\frac{dF}{dt}$		$+$	0	$-$	
F		↗	極大	↘	

$t=\dfrac{3}{5}a$ のとき，F は最大となる．②，$(**)$ より

$$\boldsymbol{s=\frac{1}{5}a,\ t=\frac{3}{5}a}\ \text{のとき，最大値}\ \boldsymbol{\frac{8}{25}a^3}$$

別解　t を固定することで，$s=\dfrac{1}{3}t\cdots$② を求めた．

逆に，s を固定すると，(1) の結果および $(*)$ より

$$\begin{aligned}F=S+S(t)&=\frac{1}{4}(t+s)^2(t-s)+\frac{1}{4}(a+t)^2(a-t)\\&=\frac{1}{4}(t^3+st^2-s^2t-s^3)+\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)\\&=-(a-s)t^2+(a^2-s^2)t+a^3-s^3\\&=(a-s)\{-t^2+(a+s)t+(a^2+as+s^2)\}\end{aligned}$$

a，s は定数であるから，$-t^2+(a+s)t$ を最大にするときである．

$$-t^2+(a+s)t=-\left(t-\frac{a+s}{2}\right)^2+\frac{(a+s)^2}{4}\quad\text{ゆえに}\quad t=\frac{a+s}{2}$$

これと ② を連立すると　$s=\dfrac{1}{5}a$,　$t=\dfrac{3}{5}a$,　最大値 $\dfrac{8}{25}a^3$

補足　(2) の曲線 $y=f(x)$ の 2 接線 l_s と l_t の交点の x 座標は，s と t の中央．

(1) の l_t と $l_a:y=0$ (x 軸) との交点の x 座標は，t と a の中央．

また，2 接線と放物線との面積の関係式も重要である [1]．

発展　t を固定して (t を定数とみて)，F を s で微分する (偏微分) ことを

$$\frac{\partial F}{\partial s}=-3s^2-2st+t^2=(t+s)(t-3s)$$

と表す (∂ は partial と読む)．F を t で偏微分すると

$$\frac{\partial F}{\partial t}=(a-s)(-2t+a+s)$$

$\dfrac{\partial F}{\partial s}=\dfrac{\partial F}{\partial t}=0$ を解くと，$s=\dfrac{1}{5}a$，$t=\dfrac{3}{5}a$ を得る．このとき

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}=-6s-2t<0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=-2(a-s)<0\quad(\text{ともに負})$$

であるから，極大である．また，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial s^2}>0$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}>0$ (ともに正) のとき極小である．$(s,\ t,\ F)$ のグラフを考えると，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial s^2}\cdot\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}>0$ である点は楕円点，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial s^2}\cdot\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}<0$ である点は双曲点 (鞍点) である．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf **4** を参照

鹿児島大学 2020 年

xy 平面上で双曲線 H と放物線 C が，次の方程式で与えられている．

$$H : x^2 - y^2 = 1, \quad C : y = \frac{a}{2}x^2 + b \quad (\text{ただし}, a, b \text{は実数}, a > 0)$$

H と C は，第 1 象限においてただ一つの共有点 P をもち，点 P で共通の接線 l_1 をもつとする．このとき，H と C が第 2 象限にただ一つもつ共有点を Q とし，H と C が点 Q でもつ共通の接線を l_2 とする．

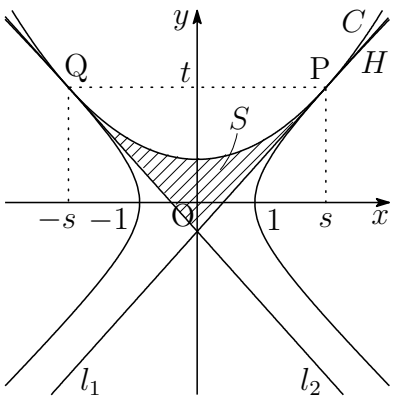
(1) 点 P の座標 $(s,\ t)$ と b を，a を用いて表せ．

(2) 接線 l_1 の方程式を，a を用いて表せ．

(3) 放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれた部分の面積 S を，a を用いて表せ．

(4) a が正の実数を動くとき，面積 S の最小値を求めよ．

解答 (1) $H : x^2 - y^2 = 1$，$C : y = \dfrac{a}{2}x^2 + b\ (a > 0)$



点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は H および C 上の点であるから

$$(*) \quad s^2 - t^2 = 1, \quad t = \frac{a}{2}s^2 + b$$

H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線 l_1 は

$$sx - ty = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{s}{t}x - \frac{1}{t}$$

C を x で微分すると $\quad y' = ax$

l_1 は第 1 象限の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における C および H の共通接線であるから

$$\frac{s}{t} = as \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{a}$$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると，$a > 0,\ s > 0$ に注意して

$$s^2 - \frac{1}{a^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$$

したがって $\quad \mathbf{P}\left(\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{a^2+1}}}{\boldsymbol{a}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\right)$ 上の 2 式を $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right)^2 + b \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = \frac{1 - a^2}{2a}}$$

(2) (1) で求めた s，t を l_1 の方程式に代入すると

$$\boldsymbol{y = \sqrt{a^2+1}x - a}$$

(3) (1) の結果から C の方程式は　　$y = \dfrac{a}{2}x^2 + \dfrac{1-a^2}{2a}$

H，C は，y 軸に関して対称であるから，第 2 象限の H と C の接点 Q および共通接線 l_2 は，それぞれ，y 軸に関して P および l_1 と対称であるから

$$\begin{aligned}
S &= 2\int_0^s \left\{ \frac{a}{2}x^2 + \frac{1-a^2}{2a} - (\sqrt{a^2+1}x - a) \right\} dx \\
&= a\int_0^s \left(x^2 - 2\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}x + \frac{a^2+1}{a^2} \right) dx \\
&= a\int_0^s \left(x - \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \right)^2 dx = a\int_0^s (x-s)^2\, dx \\
&= a\left[\frac{1}{3}(x-s)^3 \right]_0^s = \frac{as^3}{3} = \boldsymbol{\frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}}
\end{aligned}$$

補足　一般に，放物線 C 上の 2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とすると，C 上の 2 点 P，Q におけるそれぞれの接線 l_1，l_2 の交点の x 座標は，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である．また，C，l_1，l_2 で囲まれた部分の面積が S であるとき，C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は $2S$ である [2]．

本題において，C の x^2 の係数および 2 点 P，Q の座標から，1/6 公式を用いて，次のように求めることもできる．

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\cdot\frac{a}{2}\left\{ \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} - \left(-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \right) \right\}^3 = \frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 の補足)

(4) (3) の結果から，$u=a^2$ とおくと　$S=\dfrac{(u+1)^{\frac{3}{2}}}{3u}$

$f(u)=\dfrac{(u+1)^{\frac{3}{2}}}{3u}$ $(u>0)$ とすると

$$f'(u)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}\sqrt{u+1}\cdot u-(u+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 1}{u^2}=\frac{(u-2)\sqrt{u+1}}{6u^2}$$

u	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(u)$		$-$	0	$+$
$f(u)$		↘	極小	↗

よって，求める最小値は　$f(2)=\dfrac{(2+1)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

別解 $S=\dfrac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^2+1}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}\left(a^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$a>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}}=\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

したがって　$S\geqq\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　よって　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

上式において，等号が成立するとき　$\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{2}=\dfrac{1}{a^{\frac{4}{3}}}$　すなわち　$a=\sqrt{2}$

滋賀医大 2022 年

a, b を正の定数とし，xy 平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

を H とする．0 でない実数 t に対して，直線 $y=t$ と H の交点を P，Q とし，P における H の接線と Q における H の接線の交点を R とする．△PQR の面積を S とおく．

(1) R の座標を b，t を用いて表せ．

(2) S を a, b, t を用いて表せ．

(3) t が 0 でない実数全体を動くとき，S の最小値を a，b を用いて表せ．

解答　(1)　H と直線 $y=t$ との交点を $\mathrm{P}(s,\ t)$，$\mathrm{Q}(-s,\ t)$ とおくと $(s>0)$

$$\frac{s^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad s=\frac{a\sqrt{t^2+b^2}}{b}$$

H 上の点 P，Q における接線の方程式は，それぞれ

$$\frac{sx}{a^2}-\frac{ty}{b^2}=1, \quad -\frac{sx}{a^2}-\frac{ty}{b^2}=1 \quad (t\neq 0)$$

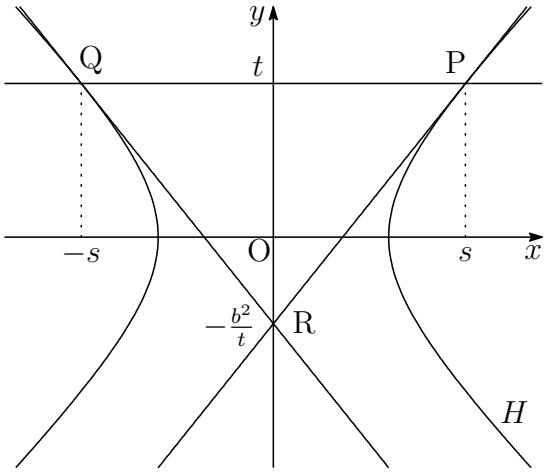
これらの 2 直線の交点は，これらの辺々の和および差をとることにより

$$-\frac{2ty}{b^2}=2, \quad \frac{2sx}{a^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=0,\ \ y=-\frac{b^2}{t}$$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{\mathrm{R}\left(0,\ -\dfrac{b^2}{t}\right)}$

(2)　(1) の結果から，△PQR の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2s\left|t-\left(-\frac{b^2}{t}\right)\right|=\frac{a\sqrt{t^2+b^2}}{b}\cdot\frac{t^2+b^2}{|t|}=\boldsymbol{\frac{a(t^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{b|t|}}$$



(3)　(2) の結果から　$S=\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{t^2+b^2}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{a}{b}\left(t^{\frac{4}{3}}+\dfrac{b^2}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

ここで，3 正数 $t^{\frac{4}{3}},\ \dfrac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}},\ \dfrac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t^{\frac{4}{3}}+\frac{b^2}{t^{\frac{2}{3}}}=t^{\frac{4}{3}}+\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}+\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}\geqq 3\sqrt[3]{t^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}}=3\left(\frac{b^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$\left(t^{\frac{4}{3}}+\dfrac{b^2}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\geqq\dfrac{3\sqrt{3}b^2}{2}$ であるから　　$S\geqq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}ab$

$t^{\frac{4}{3}}=\dfrac{b^2}{2t^{\frac{2}{3}}}$，すなわち，$|t|=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}ab}$ をとる．

6.2 極展開

6.2.1 2 次関数の極展開

定理 2 2 次関数 $f(x)$ の x^2 の係数が a であるとき，$x=k$ を極として展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^2 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明 $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$ より

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^2+bk+c+(2ak+b)(x-k)+a(x-k)^2 \\ &= ax^2+bx+c=f(x) \end{aligned}$$

証終

例えば，定理 2 において，$f'(k)=0$ のとき，$k=-\dfrac{b}{2a}$ であるから

$$f(k)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

このとき，$f(x)$ は平方完成の式となる．

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

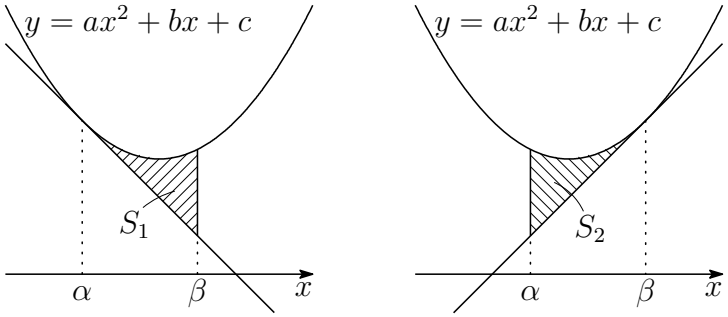
6.2.2　放物線の接線と面積

放物線 $C : y = f(x)$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線を ℓ とし，C と ℓ および直線 $x = \beta$ で囲まれた部分の面積は $(\alpha < \beta)$，$f(x)$ の x^2 の係数を a とすると

$$C : y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + a(x - \alpha)^2$$
$$\ell : y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$$

左下の図の斜線部分の面積 S_1 は，上の 2 式から

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\beta} |a|(x - \alpha)^2\, dx = \boldsymbol{\frac{|a|}{3}(\beta - \alpha)^3}$$



同様に，右上の図の斜線部分の面積 S_2 は

$$S_2 = \int_{\alpha}^{\beta} |a|(x - \beta)^2\, dx = \boldsymbol{\frac{|a|}{3}(\beta - \alpha)^3}$$

6.2.3 放物線の2接線と面積

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ とする．放物線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ における接線を，それぞれ $\ell_1,\ \ell_2$ とすると

$$\ell_1 : y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha), \quad \ell_2 : y = f'(\beta)(x-\beta) + f(\beta)$$

上の 2 式から，y を消去して整理すると

$$\{f'(\beta) - f'(\alpha)\}x = \{\beta f'(\beta) - f(\beta)\} - \{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)\} \qquad (*)$$

$f'(x) = 2ax + b$ であるから

$$\begin{aligned} f'(\beta) - f'(\alpha) &= (2a\beta + b) - (2b\alpha + b) = 2a(\beta - \alpha), \\ \beta f'(\beta) - f(\beta) &= \beta(2a\beta + b) - (a\beta^2 + b\beta + c) = a\beta^2 - c, \\ \alpha f'(\alpha) - f(\alpha) &= a\alpha^2 - c \end{aligned}$$

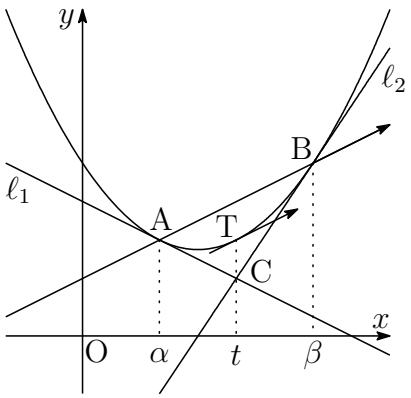
これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} 2a(\beta - \alpha)x &= (a\beta^2 - c) - (a\alpha^2 - c) \\ &= a(\beta^2 - \alpha^2) \end{aligned}$$

$a \neq 0,\ \beta - \alpha \neq 0$ より $\quad x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

ℓ_1 と ℓ_2 の交点 C の x 座標を t とすると

$$\boldsymbol{t = \dfrac{\alpha + \beta}{2}}$$



放物線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \frac{(a\beta^2 + b\beta + c) - (a\alpha^2 + b\alpha + c)}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = a(\alpha + \beta) + b \end{aligned}$$

放物線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ f(t))$ における接線の傾きは

$$f'(t) = 2at + b = 2a \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + b = a(\alpha + \beta) + b$$

よって，放物線 $y = f(x)$ 上の点 T おける接線と直線 AB は平行である． 終

放物線 $y = f(x)$ の x^2 の係数を $a > 0$ とする．放物線上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ における接線を $(\alpha < \beta)$，それぞれ $\ell_1,\ \ell_2$ とすると

$$\ell_1 : y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha), \quad \ell_2 : y = f(\beta) + f'(\beta)(x-\beta)$$

定理 2 により，2 次関数 $f(x)$ を $x = \alpha,\ \beta$ を極として，それぞれ展開すると

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + a(x-\alpha)^2 \quad \cdots ①$$
$$f(x) = f(\beta) + f'(\beta)(x-\beta) + a(x-\beta)^2 \quad \cdots ②$$

ℓ_1 と ℓ_2 の交点 C の x 座標を t とすると，放物線 $y = f(x)$ と 2 接線 $\ell_1,\ \ell_2$ で囲まれた部分の面積 S_1 は，ℓ_1 と ①，ℓ_2 と ② の方程式を対応させて

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_\alpha^t a(x-\alpha)^2\,dx + \int_t^\beta a(x-\beta)^2\,dx \\ &= \left[\ \frac{a}{3}(x-\alpha)^3\ \right]_\alpha^t + \left[\ \frac{a}{3}(x-\beta)^3\ \right]_t^\beta = \frac{a}{3}(t-\alpha)^3 + \frac{a}{3}(\beta-t)^3 \end{aligned}$$

$t = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ より，$t-\alpha = \beta-t = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$ であるから

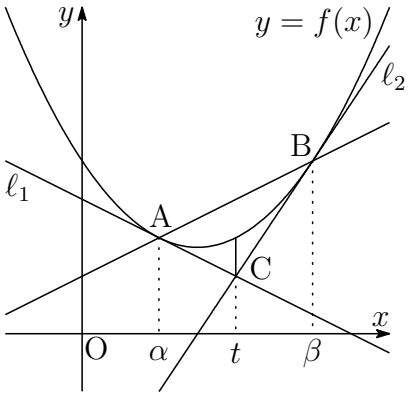
$$S_1 = \frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 + \frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3}$$

直線 AB の方程式を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) + f(\alpha)$$

$h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと

$$h(x) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) + f(\alpha) - f(x)$$



$h(\alpha) = h(\beta) = 0$ より，2 次式 $h(x)$ は $x-\alpha$ および $x-\beta$ を因数にもつ．$h(x)$ の 2 次の係数は $-f(x)$ の 2 次の係数 $-a$ であるから

$$h(x) = -a(x-\alpha)(x-\beta)$$

となる．直線 AB と放物線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 S_2 は

$$S_2 = \int_\alpha^\beta h(x)\,dx = -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \boldsymbol{\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

以上の結果から　$S_1 : S_2 = 1 : 2$　　終

九大文系 2009 年 4 番

曲線 $y=x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし，$a<0<b$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形 PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ をみたしながら P と Q が動くとき，(2) で求めた面積の最小値を求めよ。

解答 (1) $y=x^2$ を微分すると $y'=2x$.

点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a) \quad \text{ゆえに} \quad y=2ax-a^2 \quad \cdots①$$

同様に，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線の方程式は $y=2bx-b^2$ $\cdots②$

①，② を解いて $\quad \mathbf{R}\left(\dfrac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}},\ \boldsymbol{ab}\right)$

直線 PQ の方程式は

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y=(a+b)x-ab$$

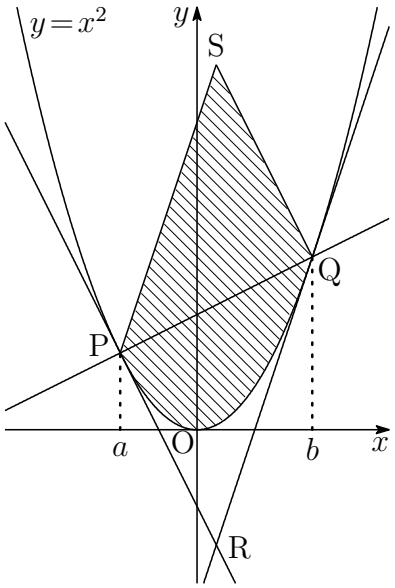
直線 PQ 上の x 座標が $\dfrac{a+b}{2}$ である点を M とすると $\quad \mathrm{M}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$

このとき $\quad \mathrm{MR}=\dfrac{a^2+b^2}{2}-ab=\dfrac{1}{2}(b-a)^2$

よって $\quad \triangle\mathrm{PRQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{MR}\times(b-a)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}(b-a)^2\times(b-a)=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(b-a)^3}$

(2) 直線 PQ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}&\int_a^b \{(a+b)x - ab - x^2\}\,dx\\ =&-\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx\\ =&\frac{1}{6}(b-a)^3\end{aligned}$$



△PSQ の面積は △PRQ の面積に等しいので，上式および (1) の結果から，求める図形の面積は

$$\frac{1}{6}(b-a)^3 + \frac{1}{4}(b-a)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{12}(b-a)^3}$$

(3) $\angle \mathrm{PRQ} = 90^\circ$ のとき，直線 ①，② は直交するので

$$2a \times 2b = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{4b}$$

これを ② の結果に代入すると　$\dfrac{5}{12}\left(b + \dfrac{1}{4b}\right)^3$

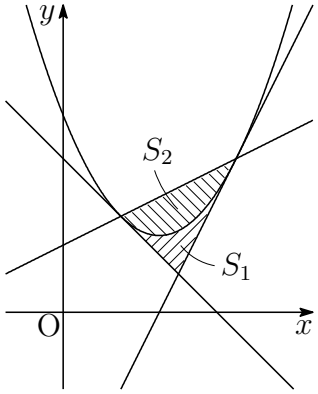
ここで，$b > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

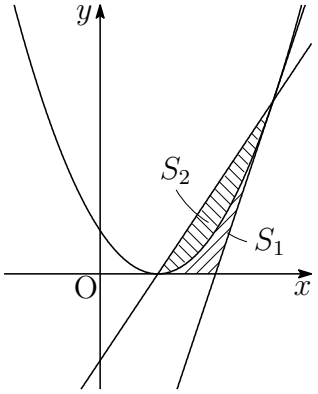
$$b + \frac{1}{4b} \geqq 2\sqrt{b \times \frac{1}{4b}} = 1$$

よって，求める最小値は　$\dfrac{5}{12}\cdot 1^3 = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

補足

放物線と放物線の 2 本の接線で囲まれた図形の面積 S_1 と，その 2 つの接点を結ぶ直線と放物線で囲まれた図形の面積 S_2 の比は，$S_1 : S_2 = 1 : 2$ である．また，2 本の接線の交点の x 座標は，2 つの接点の中点の x 座標と等しい．





6.3　放物線の面積

6.3.1　相似比を利用した解法

九大文系 2017 年 1 番

定数 $a<1$ に対し，放物線 $C_1 : y=2x^2+1$，$C_2 : y=-x^2+a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) C_1 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

解答　(1) 求める直線を $l : y=px+q$ とおく．C_1 と l の方程式から y を消去すると

$$2x^2+1=px+q \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2-px-q+1=0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と l は接するので，方程式 $(*)$ の係数について

$$(-p)^2-4\cdot 2(-q+1)=0 \quad \text{整理すると} \quad p^2+8q-8=0 \quad \cdots①$$

同様に，C_2 と l の方程式から y を消去すると

$$-x^2+a=px+q \quad \text{ゆえに} \quad x^2+px+q-a=0 \quad \cdots(**)$$

C_2 と l は接するので，上の方程式の係数について

$$p^2-4\cdot 1(q-a)=0 \quad \text{整理すると} \quad p^2-4q+4a=0 \quad \cdots②$$

①，② から　　$p^2=\dfrac{8}{3}(1-a)$，$q=\dfrac{1}{3}(a+2)$

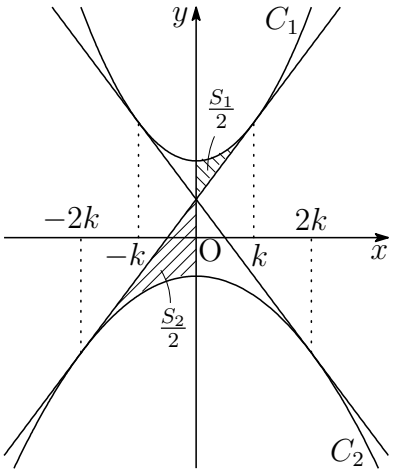
よって，求める 2 直線の方程式は

$$\boldsymbol{y=\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}\,x+\frac{1}{3}(a+2)}$$

(2) (1) の結果から，次の 2 式は平方式になることに注意して

$$2x^2+1-(px+q)=2\left(x-\frac{p}{4}\right)^2$$
$$px+q-(-x^2+a)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

$p=2\sqrt{\dfrac{2}{3}(1-a)}$ のとき，$k=\dfrac{p}{4}$ とおく．C_1，C_2 および 2 接線は y 軸に関して対称であることに注意して



$$\frac{S_1}{2}=\int_0^k 2(x-k)^2\,dx$$
$$=\left[\ \frac{2}{3}(x-k)^3\ \right]_0^k=\frac{2k^3}{3},$$
$$\frac{S_2}{2}=\int_{-2k}^0 (x+2k)^2\,dx$$
$$=\left[\ \frac{1}{3}(x+2k)^3\ \right]_{-2k}^0=\frac{8k^3}{3}$$

よって $\quad\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{16k^3}{3}\times\dfrac{3}{4k^3}=\mathbf{4}$

解説　$y=kx^2\cdots$① は $y=x^2\cdots$② を x 軸を元に y 軸方向に k 倍だけ拡大したものであるが，① 上の点 $\mathrm{P}(t,\ kt^2)$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ をとると

$$(x,\ y)=k(t,\ kt^2)\quad\text{ゆえに}\quad x=kt,\ \ y=(kt)^2$$

これから，点 Q の描く軌跡は，$y=x^2$ である．

したがって，① と ② は相似であり，その相似比は $1:|k|$ である．

一般に，放物線は相似であり，2 つの放物線

$$C_1:y=a_1x^2+b_1x+c_1,\quad C_2:y=a_2x^2+b_2x+c_2$$

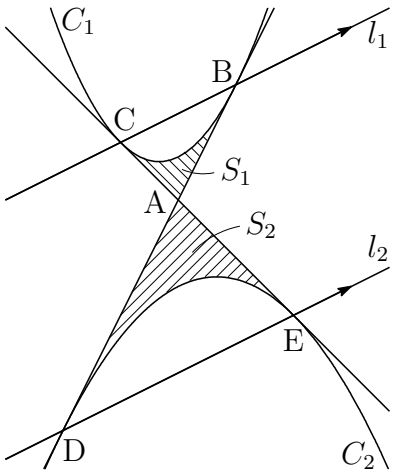
の相似比は $\dfrac{1}{|a_1|}:\dfrac{1}{|a_2|}$ である．

右の図のように，C_1，C_2 と 2 本の共通接線との接点を B，C，D，E とすると，点 A は線分 BD および線分 CE を

$$\frac{1}{|a_1|}:\frac{1}{|a_2|}$$

に内分するである．また，2 つの斜線部分の面積を S_1，S_2 とすると，面積比は相似比の 2 乗に比例するから

$$S_1:S_2=\frac{1}{{a_1}^2}:\frac{1}{{a_2}^2}$$



特に，$S_1=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$，$S_2=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ADE}$ である[3]．

本題の点 A は C_1 の頂点 $(0,\ 1)$ と C_2 の頂点 $(0,\ a)$ を $1:2$ に内分する点で

$$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{2+a}{3}\right)$$

また，C_1 上の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ をみたす点 Q の軌跡が C_2 である．

点 A を通り，傾き m の直線 $y=mx+\dfrac{2+a}{3}$ が $C_1:y=2x^2+1$ と接するとき，2 次方程式 $2x^2-mx+\dfrac{1-a}{3}=0$ の係数により

$$(-m)^2-4\cdot2\cdot\frac{1-a}{3}=0\quad\text{ゆえに}\quad m=\pm2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}$$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf **4** の補足を参照．

6.3.2 長方形との面積比を利用した解法

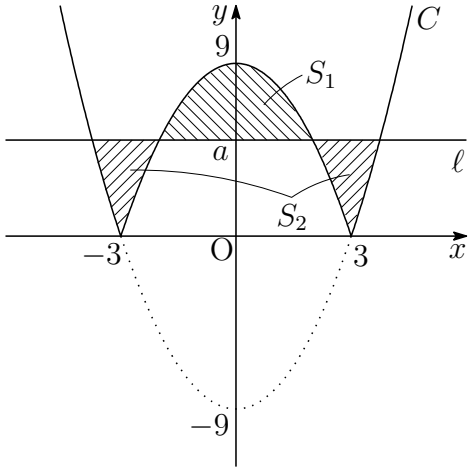
九大文系 2023 年 1 番

a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を，次のように定める。

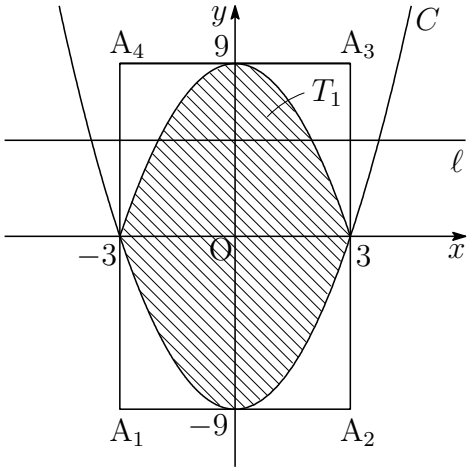
$$C : y = |(x-3)(x+3)|, \quad \ell : y = a$$

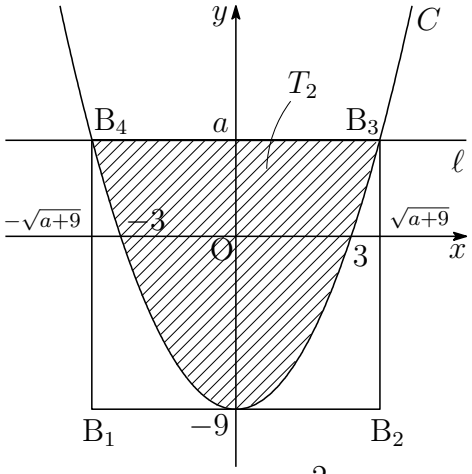
曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち，$y \geqq a$ の領域にある部分の面積を S_1，$y \leqq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。$S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

解答 S_1, S_2 は下の図の斜線部分の面積である.



$S_1 = S_2$ のとき，下の 2 つ図の斜線部分の面積 T_1, T_2 について，$T_1 = T_2$ である.





T_1, T_2 は，それぞれ図の長方形 $A_1A_2A_3A_4$，$B_1B_2B_3B_4$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ であるから，このとき，これら 2 つの長方形の面積は等しい.

$$6 \times 18 = 2\sqrt{a+9} \times (a+9) \quad \text{ゆえに} \quad (a+9)^{\frac{3}{2}} = 2{\cdot}3^3$$

したがって $a + 9 = 2^{\frac{2}{3}}{\cdot}3^2$ よって $\boldsymbol{a = 9(\sqrt[3]{4} - 1)}$

下の fig-1 について，2 つの面積 S_1 と S_2 の面積比を考える．

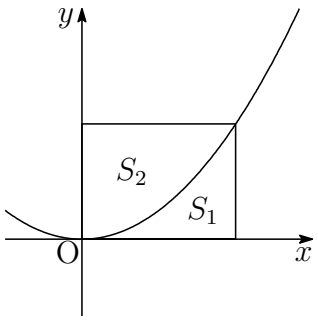


fig-1

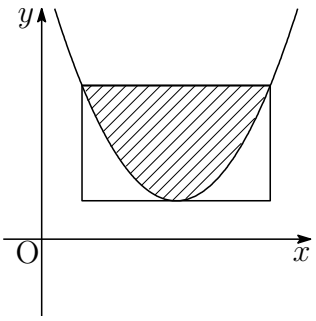


fig-2

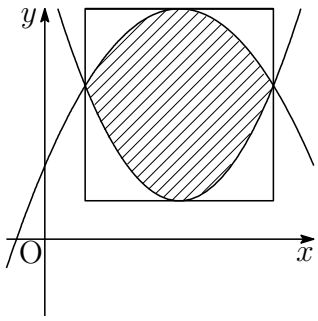


fig-3

S_1 を放物線 $y = kx^2$ と直線 $x = a$ と x 軸で囲まれた部分の面積とすると

$$S_1 = \int_0^a kx^2\,dx = k\left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_0^a = \frac{1}{3}ka^3 \qquad (k, a > 0)$$

$S_1 + S_2$ は x 軸，y 軸，直線 $x = a$，直線 $y = ka^2$ で囲まれた部分の面積であるから

$$S_1 + S_2 = a{\cdot}ka^2 = ka^3 \quad \text{上の結果から} \quad S_2 = \frac{2}{3}ka^3 \quad \text{よって} \quad S_1 : S_2 = 1 : 2$$

fig-2 の放物線は fig-1 の放物線を平行移動したものとする．fig-2 の放物線の軸に関する対称性により，斜線部の面積は長方形の面積の 2/3 であることがわかる．

さらに，fig-2 の面積比を利用すると，fig-3 における斜線部分の面積も長方形の面積の 2/3 であることもわかる．

6.4 3次関数のグラフ

6.4.1 3次関数の極展開

定理 3 3次関数 $f(x)$ の x^3 の係数が a であるとき，$x=k$ を極として展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2}f''(k)(x-k)^2+a(x-k)^3 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c, \quad f''(x)=6ax+2b$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^3+bk^2+ck+d+(3ak^2+2bk+c)(x-k) \\ &\qquad +\frac{1}{2}(6ak+2b)(x-k)^2+a(x-k)^3 \\ &= ax^3+bx^2+cx+d=f(x) \end{aligned}$$

証終

n 次多項式についても部分積分法を使って証明できる．

定理 4 3次関数 $C: y=f(x)$ のグラフは変曲点 $\mathrm{M}(k,\ f(k))$ に関して対称である．

証明 変曲点を $\mathrm{M}(k,\ f(k))$ とすると，$f''(k)=0$ であるから

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^3 \quad (a \text{ は } f(x) \text{ の } x^3 \text{の係数}) \tag{6.1}$$

C 上の2点 $\mathrm{A}(k+t,\ f(k+t))$，$\mathrm{B}(k-t,\ f(k-t))$ について (t は任意の定数)

$$\begin{aligned} &(k+t)+(k-t)=2k, \\ &f(k+t)+f(k-t)=\{f(k)+f'(k)t+at^3\}+\{f(k)-f'(k)t-at^3\} \\ &\qquad\qquad =2f(k) \end{aligned}$$

したがって，A，Bの中点は変曲点Mである．よって，C は変曲点Mに関して対称である．

証終

補足 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ のとき，$f''(x)=6ax+2b$ より $\quad k=-\dfrac{b}{3a}$ 終

次に，3 次関数 $f(x)$ の増減を (6.1) を利用して調べてみる．$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = f'(k) + 3a(x-k)^2 \tag{6.2}$$

(i) $f'(k) = 0$ または $f'(k)$ が a と同符号であるとき ($f(x)$ は極値をもたない)

$f(x)$ は単調増加または単調減少であるから，このとき，3 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解は 1 個である．

(ii) $f'(k)$ が a と異符号であるとき ($f(x)$ は極大値と極小値をもつ)

$$f'(k) = -3as^2 \tag{6.3}$$

とおくと ($s > 0$)，(6.1)，(6.2) は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(k) - 3as^2(x-k) + a(x-k)^3 \\ f'(x) &= -3as^2 + 3a(x-k)^2 = 3a(x-k+s)(x-k-s) \end{aligned} \tag{6.4}$$

$f'(x) = 0$ とすると，$x = k \pm s$ であるから，$f(x)$ の極値は

$$f(k+s) = f(k) - 2as^3, \quad f(k-s) = f(k) + 2as^3 \tag{6.5}$$

上の 2 式および (6.3) より

$$\begin{aligned} f(k+s)f(k-s) &= f(k)^2 - 4a^2s^6 = g(k)^2 - 4a^2\left\{-\frac{f'(k)}{3a}\right\}^3 \\ &= f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} \end{aligned}$$

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数について

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}>0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 1 個}$$

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}=0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 2 個}$$

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}<0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 3 個}$$

(i)，(ii) より，3 次方程式の実数解の個数について，次の定理が成立する．

3 次方程式の実数解の個数

定理 5 3 次方程式 $f(x)=0$ の x^3 の係数を a，$f''(x)=0$ の解を k とすると

$$f'(k)=0 \quad \text{または} \quad f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}>0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 1 個}$$

$$f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}=0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 2 個}$$

$$f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}<0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 3 個}$$

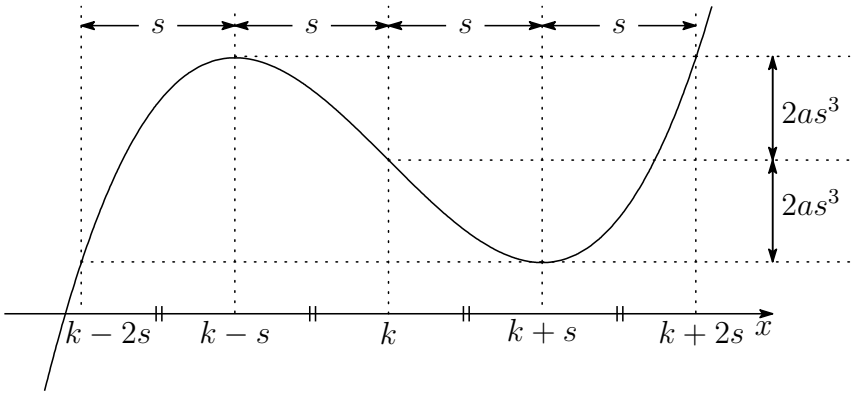
また，(6.4) に $x=k-2s,\ k+2s$ を代入すると

$$f(k-2s)=f(k)-2as^3,\quad f(k+2s)=f(k)+2as^3$$

したがって，上の 2 式と (6.5) より，次が成立する．

$$f(k-2s)=f(k+s),\quad f(k+2s)=f(k-s)$$

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ について，グラフの概形は次のようになる．
$(k,\ f(k))$ は変曲点，$f(k-s)$ は極大値，$f(k+s)$ は極小値である．



s は (6.3) より　　$s=\sqrt{-\dfrac{f'(k)}{3a}}$

終

6.4.2　3 次関数のグラフと接線

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ の表す曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 ℓ の方程式を $y=g(x)$ とすると

$$g(x)=f(p)+f'(p)(x-p)$$

定理 3 にしたがって，$x=p$ を極として，$f(x)$ を展開すると

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+a(x-p)^3$$

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，C と ℓ の共有点の x 座標は，3 次関数 $y=h(x)$ の x 軸との共有点の x 座標と等しい．

$$h(x)=\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+a(x-p)^3$$

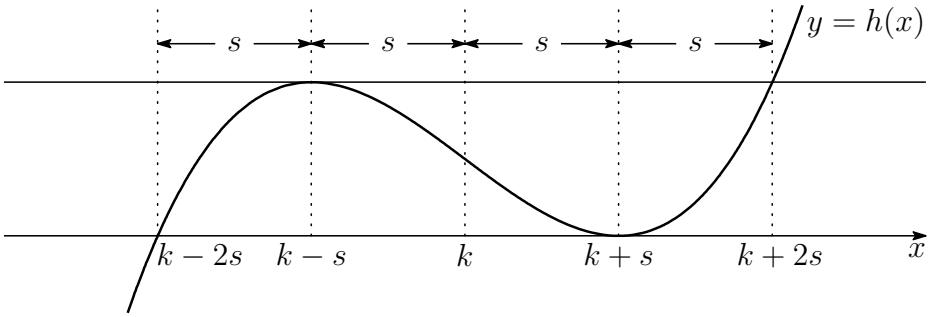
$f''(x)=6ax+2b$ より，変曲点の x 座標を k とすると，$f''(k)=0$ より

$$6ak+2b=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=-3ak, \quad f''(x)=6a(x-k)$$

$f''(p)=6a(p-k)$ であるから，$h(x)$ は

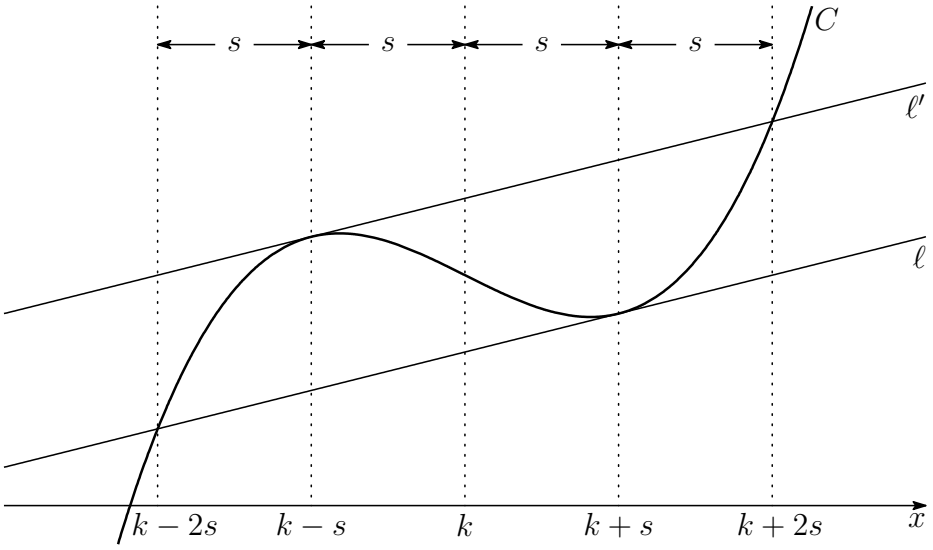
$$\begin{aligned} h(x)&=\frac{1}{2}\cdot 6a(p-k)(x-p)^2+a(x-p)^3 \\ &=a(x-p)^2\{3(p-k)+(x-p)\}=a(x-p)^2\{x-(3k-2p)\} \end{aligned}$$

$y=h(x)$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標は　$x=p,\ 3k-2p$
$p=k+s$ とおくと，これらの共有点の x 座標は，それぞれ　$x=k+s,\ k-2s$
$s>0$ のとき，$y=h(x)$ のグラフの概形は，次のようになる (p.257 を参照)．



変曲点の x 座標を基準に考えると分かりやすい．接点の x 座標が変曲点の x 座標より s だけ大きければ，もう一方の共有点の x 座標は変曲点の x 座標より $2s$ だけ小さい．逆に，接点の x 座標が変曲点の x 座標より s だけ小さければ，もう一方の共有点の x 座標は変曲点の x 座標より $2s$ だけ大きい．

ℓ と平行な C の接線を ℓ' とすると，これらのグラフの概形は，次のようになる．
なお，C と 2 接線 $\ell,\ \ell'$ との位置関係は C が極値をもたいない場合にも成立する．



定理 4 で述べたように，3 次関数 $y=f(x)$ のグラフは変曲点に関して対称である．このことからも変曲点に関して対称な 2 点における接線が平行であることを証明できる．変曲点の x 座標 k を極として $f(x)$ を展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^3$$

これを微分すると　　$f'(x)=f'(k)+3a(x-k)^2$
変曲点に関して対称な 2 点 $(k+s,\ f(k+s)),\ (k-s,\ f(k-s))$ における接線の傾きは

$$f'(k+s)=f'(k-s)=f'(k)+3as^2$$

よって，ℓ と ℓ' は平行である．
ℓ は，点 $(k+s,\ f(k)+f'(k)s+as^3)$ を通り，傾き $f'(k)+3as^2$ の直線

$$\begin{aligned} y&=(f'(k)+3as^2)(x-k-s)+f(k)+f'(k)s+as^3\\ &=f(k)-2as^3+(f'(k)+3as^2)(x-k)\end{aligned}$$

C と ℓ の方程式　　$C:y=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^3$
$\ell:y=f(k)-2as^3+(f'(k)+3as^2)(x-k)$

上の 2 式から y を消去して整理すると

$$2as^3-3as^2(x-k)+a(x-k)^3=0 \quad \text{ゆえに} \quad a(x-k-s)^2(x-k+2s)=0$$

したがって，C と ℓ は $x=k-2s$ で交わる．
s を $-s$ に置き換えたものが ℓ' であるから，C と ℓ' は $x=k+2s$ で交わる．　終

6.4.3　3 次関数の積分公式

一橋大学 2018 年

a を実数とし，$f(x)=x-x^3$，$g(x)=a(x-x^2)$ とする．2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は $0<x<1$ の範囲に共有点を持つ．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ．

解答　(1) $f(x)=x(1-x)(1+x)$,

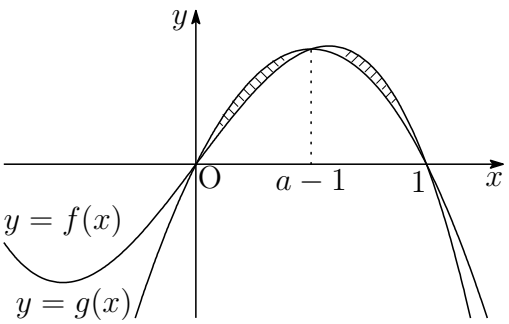
$g(x)=ax(1-x)$ より

$f(x)-g(x)=x(1-x)(x-a+1)$

$f(x)=g(x)$ の解は $x=0,\ 1,\ a-1$

$0<x<1$ に解があるから

$0<a-1<1$　よって　$\boldsymbol{1<a<2}$



(2) $f(x)-g(x)=x(1-x)(x-a+1)$ より

$0\leqq x\leqq a-1$ のとき $f(x)\leqq g(x)$,　$a-1\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)\geqq g(x)$

$$S_1=\int_0^{a-1}\{g(x)-f(x)\}\,dx,\quad S_2=\int_{a-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

とおくと

$$\begin{aligned}S_2-S_1&=\int_{a-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx-\int_0^{a-1}\{g(x)-f(x)\}\,dx\\&=\int_0^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^{1}x(1-x)(x-a+1)\,dx\\&=\int_0^{1}x^2(1-x)\,dx+(1-a)\int_0^{1}x(1-x)\,dx\\&=\frac{1}{12}+(1-a)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}(3-2a)\end{aligned}$$

$S_2-S_1=0$ であるから　　$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{2}}$　　終

補足　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$　→ p.330

255 ページの定理 3 の関数 $f(x)$ について，次の定積分を考える．$k,\ t$ は任意の定数とする．

$$\begin{aligned}\int_k^{k+t} f(x)\,dx &= \int_k^{k+t} \{f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2}f''(k)(x-k)^2+a(x-k)^3\}\,dx \\ &= \left[\, f(k)(x-k)+\frac{f'(k)}{2}(x-k)^2+\frac{f''(k)}{6}(x-k)^3+\frac{a}{4}(x-k)^4 \,\right]_k^{k+t} \\ &= f(k)t+\frac{f'(k)}{2}t^2+\frac{f''(k)}{6}t^3+\frac{a}{4}t^4 \qquad (6.6)\end{aligned}$$

(6.6) の t を $-t$ に置き換えると

$$\int_k^{k-t} f(x)\,dx = -f(k)t+\frac{f'(k)}{2}t^2-\frac{f''(k)}{6}t^3+\frac{a}{4}t^4 \qquad (6.7)$$

(6.6)−(6.7) より

$$\int_{k-t}^{k+t} f(x)\,dx = 2t\left\{f(k)+\frac{f''(k)t^2}{6}\right\} \qquad (6.8)$$

また，定理 3 の等式に $x=k+t,\ k-t$ をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}f(k+t) &= f(k)+f'(k)t+\frac{f''(k)}{2}t^2+at^3 \\ f(k-t) &= f(k)-f'(k)t+\frac{f''(k)}{2}t^2-at^3\end{aligned}$$

上の 2 式の辺々をそれぞれ加えると

$$f(k+t)+f(k-t) = 2f(k)+f''(k)t^2 \qquad (6.9)$$

(6.8) と (6.9) から $f''(k)t^2$ を消去すると

$$\int_{k-t}^{k+t} f(x)\,dx = \frac{1}{3}t\{f(k-t)+4f(k)+f(k+t)\}$$

$k=\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ t=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ とおくと，次の積分公式が成立する．

定理 6 $f(x)$ を 3 次以下の多項式とするとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\left\{f(\alpha)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\beta)\right\}$$

とくに，$f(\alpha)=f(\beta)=0$ のとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{2}{3}(\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

熊大文系・理系 2021 年

曲線 $C : y = x^3 - 2x^2 + x$ 上に点 $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ がある。自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して点 P_n から点 P_{n+1} を次のように定める。

点 P_n を接点とする C の接線を ℓ_n とし，C と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なるものを P_{n+1} とする。

点 P_n の x 座標を a_n とする。

(1) P_2 の座標を求めよ。

(2) 接線 ℓ_n の傾きおよび y 切片をそれぞれ a_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とすると

$$y - (t^3 - 2t^2 + t) = (3t^2 - 4t + 1)(x - t)$$

整理すると　$\ell : y = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x^3 - 2x^2 + x = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$$

整理すると　$(x - t)^2(x + 2t - 2) = 0$　ゆえに　$x = t, -2t + 2$

したがって，C と ℓ の共有点で点 $(t,\ f(f))$ と異なる点は

$$(-2t + 2,\ f(-2t + 2)) \qquad (*)$$

点 $\mathrm{P}_1(2,\ f(2))$ のとき

$\mathrm{P}_2(-2,\ f(-2))$　すなわち　$\mathbf{P_2(-2, -18)}$

(2) ℓ_n は ℓ の方程式において，$t = a_n$ とすればよいから

$$\ell_n : y = (3{a_n}^2 - 4a_n + 1)x - 2{a_n}^3 + 2{a_n}^2$$

よって，ℓ_n の傾き $\boldsymbol{3{a_n}^2 - 4a_n + 1}$，$y$ 切片 $\boldsymbol{-2{a_n}^3 + 2{a_n}^2}$

(3) $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ および $(*)$ から，$a_1 = 2$

$$a_{n+1} = -2a_n + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - \frac{2}{3} = -2\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$$

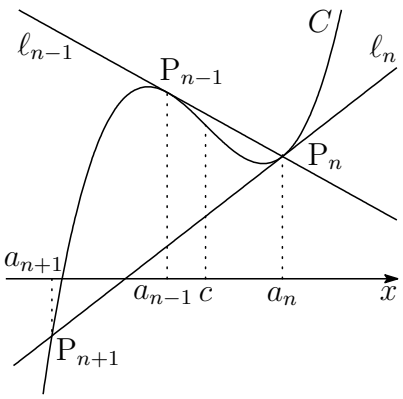
したがって $\quad a_n - \dfrac{2}{3} = \left(a_1 - \dfrac{2}{3}\right)(-2)^{n-1}$

よって $\qquad \boldsymbol{a_n = \dfrac{4}{3}(-2)^{n-1} + \dfrac{2}{3}}$

補足 3 次関数 $C : y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ f(a_n))$ における接線 ℓ_n とする．C と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なるものを $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ f(a_{n+1}))$ とし，C の変曲点の x 座標を c とすると

$$a_{n+1} - c = -2(a_n - c)$$

が成立する．



千葉大 2017 年

座標平面上の点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に引ける接線の本数を n とする．

(1) $n=3$ をみたすような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

(2) $-3a<b$ かつ $n\leqq 2$ をみたすように点 $(a,\ b)$ が動くとき，$b-3a$ の最小値を求めよ．

解答　(1) $f(x)=x^3-3x$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3,\quad f''(x)=6x$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

これが点 $(a,\ b)$ を通るから

$$b=f'(t)(a-t)+f(t)\quad \text{ゆえに}\quad f(t)+f'(t)(a-t)-b=0$$

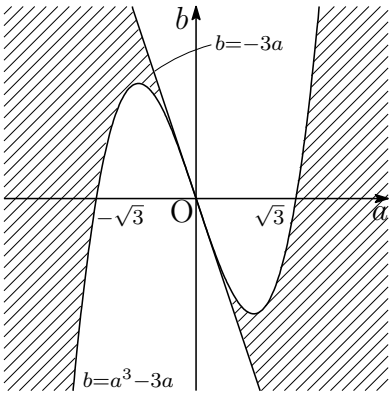
$\varphi(t)=f(t)+f'(t)(a-t)-b$ とおくと　$\varphi(t)=-2t^3+3a(t^2-1)-b$

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=f'(t)+f''(t)(a-t)+f'(t)\cdot(-1)\\&=f''(t)(a-t)=6t(a-t)\end{aligned}$$

$\varphi'(t)=0$ を解くと　$t=0,\ a$
このとき，3 次方程式 $\varphi(t)=0$ の解の個数が点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に引ける接線の本数であるから

$$\begin{aligned}\varphi(0)\varphi(a)&=(-3a-b)(a^3-3a-b)\\&=(3a+b)(-a^3+3a+b)<0\end{aligned}$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界線は含まない．



別解 $\varphi(t)=-2t^3+3a(t^2-1)-b$ について，3 次方程式 $\varphi(t)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ条件を 257 ページの定理 5 を用いて求める．

$\varphi''(t)=0$ の解を k とすると

$$k=\frac{a}{2},\quad \varphi(k)=\frac{a^3}{2}-3a-b,\quad \varphi'(k)=\frac{3}{2}a^2$$

これらを $\varphi(k)^2+\dfrac{4\varphi'(k)^3}{27(-2)}<0$ に代入すると

$$\left(\frac{a^3}{2}-3a-b\right)^2+\frac{4}{27(-2)}\left(\frac{3}{2}a^2\right)^3<0$$

$$\left(-\frac{a^3}{2}+3a+b\right)^2-\left(\frac{a^3}{2}\right)^2<0$$

したがって　　$(3a+b)(-a^3+3a+b)<0$

(2) (1) の結果から，$n\leqq 2$ および $-3a<b$ を同時に満たす不等式は

$$(3a+b)(-a^3+3a+b)\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad -3a<b$$

$k=b-3a$ とおくと　$b=3a+k$

k が最小となるときの a の値は

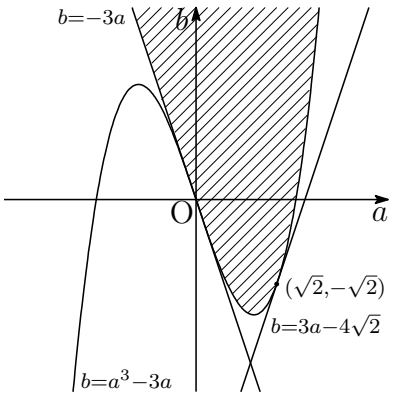
$f'(a)=3a^2-3=3$　ゆえに　$a=\pm\sqrt{2}$

$a>0$ に注意して　$a=\sqrt{2}$

$$b=f(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$$

よって，求める最小値は

$$k=b-3a=-\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{2}=\mathbf{-4\sqrt{2}}$$



解説　3 次曲線 $C : y = f(x)$ の変曲点の x 座標を a とすると　$f''(a) = 0$

点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ_t の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

とくに，C の変曲点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ℓ_t が点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ を通るとき

$$q = f'(t)(p - t) + f(t) \quad \text{ゆえに} \quad f(t) + f'(t)(p - t) - q = 0$$

$\varphi(t) = f(t) + f'(t)(p - t) - q$ とおくと，3 次方程式 $\varphi(t) = 0$ の解の個数が点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線の本数である．

$$\varphi'(t) = f'(t) + f''(t)(p - t) + f'(t)\cdot(-1) = f''(t)(p - t)$$

$\varphi'(t) = 0$ の解は　$t = p,\ a$

$$\varphi(p) = f(p) - q, \quad \varphi(a) = f(a) + f'(a)(p - a) - q = g(p) - q$$

(i)　点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線が 3 本のとき ($\varphi(t) = 0$ の解が 3 個)

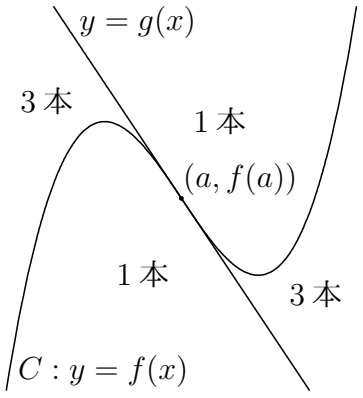
$$\varphi(p)\varphi(a) = (f(p) - q)(g(p) - q) < 0$$

(ii)　点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線が 2 本のとき ($\varphi(t) = 0$ の解が 2 個)

$$\varphi(p)\varphi(a) = (f(p) - q)(g(p) - q) = 0 \quad (p \neq a)$$

(iii)　点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線が 1 本のとき ($\varphi(t) = 0$ の解が 1 個)

$$\varphi(p)\varphi(a) = (f(p) - q)(g(p) - q) > 0 \quad \text{または} \quad (p,\ q) = (a,\ f(a))$$



6.5 極限

6.5.1 オイラーの定数

九大理系 2003 年

n を 2 以上の自然数とする。数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$ で与えられている。

(1) 不等式 $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$ が成り立つことを示せ。

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおく。数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ。

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log_n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。

解答 (1) $k \geqq 1$ のとき $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ すなわち $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < S_n$

よって $\log(n+1) < S_n \quad \cdots ①$

$k \geqq 2$ のとき $\displaystyle\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$

ゆえに $\displaystyle 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ すなわち $\displaystyle S_n < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$

よって $S_n < 1 + \log n \quad \cdots ②$

①，② より $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$

(2)　$a_k\Delta b_k + b_{k+1}\Delta a_k = a_k(b_{k+1} - b_k) + b_{k+1}(a_{k+1} - a_k)$
$= a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\Delta b_k + b_{k+1}\Delta a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k)$
$= a_n b_n - a_1 b_1$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k\Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}\Delta a_k \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $a_k = S_k$，$\Delta b_k = k$ を適用すると，
$\Delta a_k = \dfrac{1}{k+1}$，$b_k = \dfrac{1}{2}k(k-1)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = S_n\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - S_1\cdot 0 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k(k+1)\cdot\frac{1}{k+1}$$
$$= \frac{1}{2}n(n-1)S_n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k$$
$$= \frac{1}{2}n(n-1)S_n - \frac{1}{4}n(n-1)$$
$$= \left(S_n - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$$

よって　$\boldsymbol{P(n) = \dfrac{1}{2}n(n-1)}$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = S_n - \frac{1}{2}$

ゆえに　$\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n = S_n - \log n - \frac{1}{2} \quad \cdots③$

(1) の結果から　$\log(n+1) - \log n - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2} < \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} \quad \cdots④$

③，④ より　$-\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n < \frac{1}{2}$

よって　$\left|\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n\right| < \dfrac{1}{2}$

補足

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

が発散することは容易に示すことができる.

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\ &> 1+\frac{1}{2^1}+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overbrace{\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}}^{2^{n-1}\text{個}}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty\end{aligned}$$

次式で定義される

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$$

をオイラーの定数 (Euler's constant) といい，$\gamma\fallingdotseq 0.577215665\cdots$ であるが (オイラー自身は小数以下 6 桁まで計算)，γ が有理数か無理数かも今でも分かっていない.

これまでに阪大 (理系) 後期で e と π の無理性を証明させる問題が出題された.

6.5.2　ネイピア数 e

1 と n 個の $1+\dfrac{1}{n}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+1}\left\{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} > \sqrt[n+1]{1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

両辺を $n+1$ 乗すると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列である．

また，1 と $n+1$ 個の $\dfrac{n}{n+1}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+2}\left\{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\right\} > \sqrt[n+2]{1\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

両辺を $n+2$ 乗すると

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

上式の逆数をとると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ とすると，数列 $\{b_n\}$ は単調減少列である．したがって

$$2=a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}<\cdots<b_2<b_1=4$$

また，$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ であるから　$0<b_n-a_n=\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{4}{n}$

はさみうちの原理により　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

この極限値をネイピア数といい，e ($\fallingdotseq 2.71828\cdots$) で表す．

東大理系 2016 年 1 番

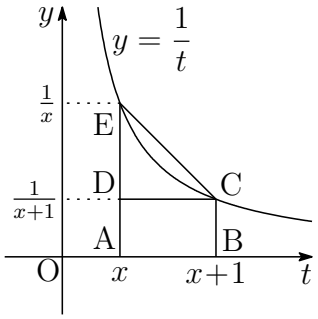
e を自然対数の底，すなわち $e=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ とする．すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

解答 $f(x)=x\{\log(x+1)-\log x\}$，$g(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(x)&=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\\&=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{x+1},\\g'(x)&=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\\&=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\end{aligned}$$

区間 $x\leqq t\leqq x+1$ における $y=\dfrac{1}{t}$ のグラフと t 軸で囲まれた部分の面積，右の図の長方形 ABCD および台形 ABCE の面積の大小関係から



$$\frac{1}{x+1}<\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$$

したがって　　$f'(x)>0$，$g'(x)<0$

$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x)<\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$$

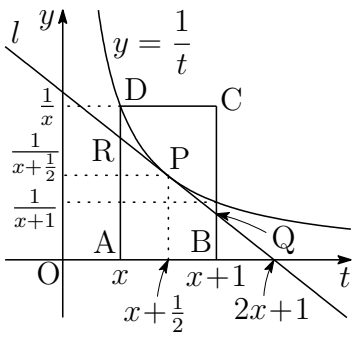
また　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{g(x)-f(x)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$

すなわち　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=1$

$g(x)$ は単調減少であるから　　$g(x)>\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=1$

したがって　$f(x)<1<g(x)$　　よって　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

別解　曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ の点 $\mathrm{P}\left(x+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$ における接線を l とし $(x>0)$，l と直線 $t=x$，$t=x+1$ との交点をそれぞれ R，Q とする．右の図のように $x \leqq t \leqq x+1$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ および t 軸で囲まれた図形の面積と 2 つの四角形 ABCD および ABQR の面積との大小関係により



$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}}<\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{x}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{x+\frac{1}{2}}<\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$$

したがって　　$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<1<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

よって　　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

補足　上の図から，$x>0$ のとき　$\dfrac{1}{x+1}<\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{x}$

別解と同様にして[4]　　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

$h(x)=(x+1)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと，上の図に注意して

$$h'(x)=\log(x+1)-\log x+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{x}<0$$

$f(x)$ は単調増加，$h(x)$ は単調減少であるから，前ページと同様の議論により

$$f(x)<1<h(x),\quad\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}h(x)=1$$

$F(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，$H(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}H(x)=e$$

$F(x)=H(-x-1)$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}H(-x-1)=\lim_{x\to\infty}H(x-1)=e$$

$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=e$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=e$ であるから　　$\lim\limits_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

[4]数列の証明は，http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf の p.9 を参照.

6.5.3 e の無理性

1997 大阪大学 (理系) 後期

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^ne^{1-x}$ と，その定積分 $a_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を考える．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上で $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ．

(2) a_1 を求めよ．$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ．

解答 (1) $f_n(x)$ を微分すると $\quad f_n'(x)=x^{n-1}(n-x)e^{1-x}$

$0<x<1$ において $f_n'(x)>0$ であるから，$f_n(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調増加である．よって，$f_n(0)=0$，$f_n(1)$ より $\quad 0\leqq f_n(x)\leqq 1$

$f_n(x)$ は，つねには 0 または 1 ではないので

$$\int_0^1 0\,dx<\int_0^1 f_n(x)\,dx<\int_0^1 1\,dx \quad \text{よって} \quad 0<a_n<1$$

(2) $a_1=\displaystyle\int_0^1 xe^{1-x}=\left[-(x+1)e^{1-x}\right]_0^1=\boldsymbol{e-2}$

また $\quad a_n=\displaystyle\int_0^1 x^ne^{1-x}\,dx=\int_0^1 x^n(-e^{1-x})'\,dx$

$$=\left[-x^ne^{1-x}\right]_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}\,dx=\boldsymbol{-1+na_{n-1}}$$

(3) (2) の結果から，$n\geqq 2$ のとき $\quad \dfrac{a_n}{n!}-\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=-\dfrac{1}{n!}$

ゆえに $\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{a_k}{k!}-\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right\}=-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$

したがって $\quad \dfrac{a_n}{n!}-a_1=-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$ $\quad$ よって $\quad \boldsymbol{\dfrac{a_n}{n!}=e-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}$

(4) (3) の結果から　　$a_n = n!e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$

$n!e$ が整数であれば，上式において，右辺は整数となり，$0 < a_n < 1$ に反し，矛盾を生じる．よって，$n!e$ は整数とならない．■

$e = \dfrac{q}{p}$ を有理数 (p，q は自然数) と仮定すると，$p!e$ は整数となり，前ページ (4) の結論に反する．よって，e は無理数である．

オイラーは，このことについて，次のエレガントな証明 (1744 年) を与えている．

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{は無理数である．}$$

証明 n を自然数とすると

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$

であるから

$$\begin{aligned} n!e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n} \leqq 1 \end{aligned}$$

したがって　　$0 < n!e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < 1$

ここで，$e = \dfrac{q}{p}$ を有理数 (p，q は自然数) と仮定すると，$n = p$ のとき $n!e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ は整数となり，上式に反する．　**証終**

6.5.4 π の無理性

2003 大阪大学 (理系) 後期

π を円周率とする．次の積分について考える．

$$I_0 = \pi \int_0^1 \sin \pi t \, dt, \quad I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^n \sin \pi t \, dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(1) n が自然数であるとき，不等式

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x \quad (x > 0)$$

が成立することを数学的帰納法により示せ．これを用いて，不等式

$$I_0 + uI_1 + u^2 I_2 + \cdots + u^n I_n < \pi e^{\pi u} \quad (u > 0)$$

が成立することを示せ．

(2) I_0，I_1 の値を求めよ．また，漸化式

$$I_{n+1} = \frac{4n+2}{\pi} I_n - I_{n-1} \quad (n = 1, 2 \cdots)$$

が成立することを示せ．

(3) π が無理数であることを背理法により証明しよう．π が無理数でないとし，正の整数 p，q によって $\pi = \dfrac{p}{q}$ として表されると仮定する．$A_0 = I_0$，$A_n = p^n I_n$ とおくとき，A_0，A_1，A_2，$\cdots$ は正の整数になることを示せ．さらに，これから矛盾を導け．

解答　(1) $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}<e^x \quad (x>0) \quad \cdots$(A) とおく.

$n=1$ のとき，$\displaystyle\int_0^x 1\,dt<\int_0^x e^t\,dt$ より $x<e^x-1$ となり (A) は成り立つ.

$n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると，$x>0$ に対して

$$\int_0^x\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)dt<\int_0^x e^t\,dt$$

$$x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}<e^x-1$$

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}<e^x$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) は成り立つ.

したがって，すべての自然数 n について (A) は成り立つ.

$0<t<1$ において $0<t^j(1-t)^j\sin\pi t<1$ であるから

$$\sum_{j=0}^{k}u^jI_j=\sum_{j=0}^{k}u^j\cdot\frac{\pi^{j+1}}{j!}\int_0^1 t^j(1-t)^j\sin\pi t\,dt$$

$$<\pi\sum_{j=0}^{k}\frac{(\pi u)^j}{j!}\int_0^1 dt<\pi e^{\pi u}$$

よって　$I_0+uI_1+u^2I_2+\cdots+u^nI_n<\pi e^{\pi u} \quad (u>0)$

(2) $$I_0 = \pi \int_0^1 \sin \pi t \, dt = \Big[\, -\cos \pi t \, \Big]_0^1 = \mathbf{2}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \pi^2 \int_0^1 t(1-t) \sin \pi t \, dt = -\pi \int_0^1 t(1-t)(\cos \pi t)' \, dt \\ &= -\pi \Big[\, t(1-t) \cos \pi t \, \Big]_0^1 + \pi \int_0^1 (1-2t) \cos \pi t \, dt \\ &= \int_0^1 (1-2t)(\sin \pi t)' \, dt \\ &= \Big[\, (1-2t) \sin \pi t \, \Big]_0^1 - \int_0^1 (-2) \sin \pi t \, dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \Big[\, \cos \pi t \, \Big]_0^1 = \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{\pi}} \end{aligned}$$

$g_n(t) = \{t(1-t)\}^n$ とおくと　$g_{n+1}(t) = \{t(1-t)\}^{n+1}$

$$\begin{aligned} g'_{n+1}(t) &= (n+1)(1-2t) g_n(t) \quad \cdots ① \\ g''_{n+1}(t) &= (n+1)\{-2g_n(t) + (1-2t) g'_n(t)\} \\ &= (n+1)\{-2g_n(t) + (1-2t) \cdot n(1-2t) g_{n-1}(t)\} \\ &= -2(n+1) g_n(t) + n(n+1)\{1 - 4t(1-t)\} g_{n-1}(t) \\ &= -2(n+1) g_n(t) + n(n+1)\{g_{n-1}(t) - 4g_n(t)\} \\ &= -2(n+1)(2n+1) g_n(t) + n(n+1) g_{n-1}(t) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt &= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 g_{n+1}(t)(\cos\pi t)'\,dt\\ &= -\frac{1}{\pi}\Big[\ g_{n+1}(t)\cos\pi t\ \Big]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 g'_{n+1}(t)\cos\pi t\,dt\\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g'_{n+1}(t)(\sin\pi t)'\,dt\\ &= \frac{1}{\pi^2}\Big[\ g'_{n+1}(t)\sin\pi t\ \Big]_0^1 - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g''_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

① より $g'_{n+1}(0) = g'_{n+1}(1) = 0$ であるから

$$\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g''_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt$$

これに ② を代入すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = \frac{2(n+1)(2n+1)}{\pi^2}&\int_0^1 g_n(t)\sin\pi t\,dt\\ -\frac{n(n+1)}{\pi^2}&\int_0^1 g_{n-1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

上式の両辺に $\dfrac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = \frac{4n+2}{\pi}\cdot\frac{\pi^{n+1}}{n!}&\int_0^1 g_n(t)\sin\pi t\,dt\\ -\frac{\pi^n}{(n-1)!}&\int_0^1 g_{n-1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

よって　　$I_{n+1} = \dfrac{4n+2}{\pi}I_n - I_{n-1}$

(3) 正の整数 p，q によって，$\pi = \dfrac{p}{q}$ と表されると仮定すると，

$$A_0 = I_0 = 2,\ \ A_1 = pI_1 = p\cdot\frac{4}{\pi} = 4q$$

(3) の結果の両辺に p^{n+1} を掛けると

$$p^{n+1}I_{n+1} = (4n+2)q\cdot p^n I_n - p^2\cdot p^{n-1}I_{n-1}$$

ゆえに　　$A_{n+1} = (4n+2)qA_n - p^2A_{n-1}$　$\cdots$③

A_0，A_1 は整数であるから，③ により，A_n $(n = 0, 1, \cdots)$ は整数である．
また，I_n の定義により，$I_n > 0$ であるから，A_n は自然数である．

(1) の結果において，$u = p$ とすると

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n < \pi e^{\pi p}$$

$\pi e^{\pi p}$ は定数であるから，$\pi e^{\pi p}$ を超える自然数 n が存在し，上式より

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n < n \quad \cdots④$$

また，A_n $(n = 0, 1, \cdots)$ は自然数であるから

$$n + 1 \leqq A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad \cdots⑤$$

このとき，④ は ⑤ に反する．よって，π は無理数である．

解説

阪大の π の無理性の証明は，漸化式による誘導問題になっている．漸化式を利用しない次の解法もある．

問題に与えられた

$$I_0 = \pi\int_0^1 \sin\pi t\,dt, \quad I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\sin\pi t\,dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

に対して，$J_n = u^n\pi^n I_n$ とおくと $(n = 0, 1, 2\cdots)$

$$J_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 u^n(\pi t)^n(\pi - \pi t)^n\sin\pi t\cdot\pi\,dt$$

$\theta=\pi t$ とすると

$$J_n=\frac{1}{n!}\int_0^{\pi}u^n\theta^n(\pi-\theta)^n\sin\theta\,d\theta\quad\cdots①$$

$0<\theta<\pi$ のとき $0<\theta(\pi-\theta)<\pi^2$，したがって

$$0<u^n\theta^n(\pi-\theta)^n\sin\theta<u^n\pi^{2n}\quad\cdots②$$

② を ① に代入すると

$$0<J_n<\frac{(u\pi^2)^n}{n!}\pi\quad\cdots③$$

ここで，$a=u\pi^2$，$m=[2a]+1$ とすると

$$\frac{(u\pi^2)^n}{n!}=\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{m+1}\cdot\frac{a}{m+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}<\frac{a^m}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$$

上式により，u に対して n を十分大きくとれば，③ より

$$0<J_n<1\quad\cdots④$$

次に

$$f(\theta)=\frac{1}{n!}u^n\theta^n(\pi-\theta)^n\quad\cdots⑤$$

とおくと，① から

$$J_n=\int_0^{\pi}f(\theta)\sin\theta\,d\theta\quad\cdots⑥$$

部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}f(\theta)\sin\theta\,d\theta&=\Big[-f(\theta)\cos\theta\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(\theta)\cos\theta\,d\theta\\&=f(\pi)+f(0)+\int_0^{\pi}f'(\theta)\cos\theta\,d\theta\\\int_0^{\pi}f'(\theta)\cos\theta\,d\theta&=\Big[\,f'(\theta)\sin\theta\,\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f''(\theta)\sin\theta\,d\theta\\&=-\int_0^{\pi}f''(\theta)\sin\theta\,d\theta\end{aligned}$$

ゆえに　　$\displaystyle\int_0^{\pi}f(\theta)\sin\theta\,d\theta=f(\pi)+f(0)-\int_0^{\pi}f''(\theta)\sin\theta\,d\theta$

したがって，この部分積分を順次行うと，$f^{(2n+2)}(\theta)=0$ であるから

$$\int_0^{\pi}f(\theta)\sin\theta\,d\theta=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(f^{(2k)}(\pi)+f^{(2k)}(0))\quad\cdots⑦$$

$f(\pi-\theta)=f(\theta)$ であるから，合成関数の微分律により

$$f^{(j)}(\theta)=(-1)^jf^{(j)}(\pi-\theta)$$

上式より，$f^{(2k)}(\pi)=f^{(2k)}(0)$ であるから，⑥，⑦ より

$$J_n=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(0) \quad \cdots ⑧$$

⑤ の $(\pi-\theta)^n$ を展開すると

$$f(\theta)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k u^n \pi^{n-k}\theta^{n+k}$$

ゆえに $\quad f^{(k)}(0)=0 \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$

$$f^{(n+k)}(0)=(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k\frac{(n+k)!}{n!}u^n\pi^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

自然数 p，q を用いて，$\pi=\dfrac{p}{q}$ と表されると仮定すると，$u=q$ のとき

$$u^n\pi^{n-k}=q^n\left(\frac{p}{q}\right)^{n-k}=p^{n-k}q^k$$

このとき，$f^{(i)}(0)$ は整数であるから $(i=0,1,2,\cdots,2n)$，⑧ より J_n は整数となり，④ に反する．したがって，π は無理数である．

2006 京都大学 (理系) 後期

$\tan 1^\circ$ は有理数か．

解答 $\tan 1^\circ$ を有理数と仮定する．88 以下の整数 n に対して，$\tan n^\circ$ が有理数ならば

$$\tan(n+1)^\circ=\frac{\tan n^\circ+\tan 1^\circ}{1-\tan n^\circ\tan 1^\circ}$$

より，$\tan(n+1)^\circ$ は有理数である．したがって，数学的帰納法により，$1\leqq n\leqq 89$ の自然数 n について，$\tan n^\circ$ は有理数となる．

このとき，$\tan 30^\circ$ は無理数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，上の結論に反する．

よって，$\tan 1^\circ$ は無理数である．■

6.5.5　$\zeta(2)$, $\zeta(4)$

リーマン (Riemann) の$^{ゼータ}\zeta$関数

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

について，$\zeta(2)$，$\zeta(4)$ についてのみ扱う．

次式を示す．

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

［証明］x に関する恒等式

$$1 + \sum_{k=1}^{2m-1} (-x^2)^k = \frac{1 - x^{4m}}{1 + x^2}$$

より

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^{4m}}{1+x^2}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{2m-1} (-x^2)^k \right\} dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}
\end{aligned}$$

また，

$$\int_0^1 \frac{x^{4m}}{2}\,dx < \int_0^1 \frac{x^{4m}}{1+x^2}\,dx < \int_0^1 x^{4m}\,dx$$

であるので，上の 2 式より

$$\frac{1}{2(4m+1)} < \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} < \frac{1}{4m+1} \tag{6.10}$$

$I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ とし，$f_1 : I \to R$ を

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (t = 0) \\ \frac{t}{2\sin t} & (0 < t \leqq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

とおくと，f_1 は単調増加である．また，

$$t\sum_{k=0}^{2m-1}\cos(2k+1)t = f_1(t)\sin 4mt \tag{6.11}$$

が成り立つ．

$\frac{2j-2}{4m}\pi < t < \frac{2j-1}{4m}\pi$ $(j=1,\dots,m)$ のとき，

$$f_1\left(\frac{2j-2}{4m}\pi\right)\sin 4mt < f_1(t)\sin 4mt < f_1\left(\frac{2j-1}{4m}\pi\right)\sin 4mt$$

であるので，

$$\frac{1}{2m}f_1\left(\frac{2j-2}{4m}\pi\right) < \int_{\frac{2j-2}{4m}\pi}^{\frac{2j-1}{4m}\pi} f_1(t)\sin 4mt\,dt < \frac{1}{2m}f_1\left(\frac{2j-1}{4m}\pi\right) \tag{6.12}$$

同様に，$\frac{2j-1}{4m}\pi < t < \frac{2j}{4m}\pi$ $(j=1,\dots,m)$ のとき，

$$f_1\left(\frac{2j}{4m}\pi\right)\sin 4mt < f_1(t)\sin 4mt < f_1\left(\frac{2j-1}{4m}\pi\right)\sin 4mt$$

であるので，

$$-\frac{1}{2m}f_1\left(\frac{2j}{4m}\pi\right) < \int_{\frac{2j-1}{4m}\pi}^{\frac{2j}{4m}\pi} f_1(t)\sin 4mt\,dt < -\frac{1}{2m}f_1\left(\frac{2j-1}{4m}\pi\right) \tag{6.13}$$

(6.12) と (6.13) を辺々加えて，

$$\frac{1}{2m}\left\{f_1\left(\frac{j-1}{2m}\pi\right) - f_1\left(\frac{j}{2m}\pi\right)\right\} < \int_{\frac{j-1}{2m}\pi}^{\frac{j}{2m}\pi} f_1(t)\sin 4mt\,dt < 0 \tag{6.14}$$

$(j=1,\dots,m)$ となり，さらに j について加えることにより

$$\frac{1}{2m}\left\{f_1(0) - f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(t)\sin 4mt\,dt < 0 \tag{6.15}$$

を得る．

(6.11) より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(t)\sin 4mt\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sum_{k=0}^{2m-1}\cos(2k+1)t\,dt \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2m-1}\frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned} \tag{6.16}$$

(6.10) より，次の級数 (**グレゴリー・ライプニッツ級数**) を得る．

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4} \tag{6.17}$$

(6.15)，(6.16)，(6.17) から

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{1}{(2k+1)^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{8} \tag{6.18}$$

を得る．

$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

とおくと

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$$

上式および (6.18) から

$$S=\frac{\pi^2}{8}+\frac{S}{4}\quad\text{ゆえに}\quad S=\frac{\pi^2}{6}$$

証終

参考

$t\neq -1$ のとき，$1-t+t^2+\cdots+(-t)^{n-1}=\dfrac{1-(-t)^n}{1+t}$ であるから，$t\geqq 0$ のとき

$$\left|1-t+t^2+\cdots+(-t)^{n-1}-\frac{1}{1+t}\right|=\frac{t^n}{1+t}\leqq t^n$$

$\displaystyle\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}\Big[\,t^{n+1}\,\Big]_0^1=\frac{1}{n+1}$ であるから，$n\longrightarrow\infty$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(1-t+t^2+(-t)^{n-1}-\frac{1}{1+t}\right)dt=0$$

よって，次の級数 (**メルカトル級数**) を得る．

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log 2$$

次式を示す.

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$
$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

[証明] $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とし，$f_2:I\to R$ を

$$f_2(t)=t\,f_1(t) \tag{6.19}$$

とおくと，$f_2'(t)=f_1(t)+t\,f_1'(t)$ なので f_2 は単調増加となり，同じ議論から

$$\frac{1}{2m}\left\{f_2(0)-f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_2(t)\sin 4mt\,dt<0 \tag{6.20}$$

を得る．また，(6.11)，(6.19) から

$$t^2\sum_{k=0}^{2m-1}\cos(2k+1)t=f_2(t)\sin 4mt \tag{6.21}$$

が成り立つ．これから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_2(t)\sin 4mt\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sum_{k=0}^{2m-1}\cos(2k+1)t\,dt\\&=\frac{\pi^2}{4}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}-2\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\end{aligned} \tag{6.22}$$

を得る．よって，(6.17)，(6.20)，(6.22) から

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\lim_{m\to\infty}\frac{\pi^2}{8}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi^2}{8}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^3}{32}. \tag{6.23}$$

全く同様に $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とし，$f_3:I\to R$ を

$$f_3(t)=t\,f_2(t) \tag{6.24}$$

とおくと，$f_3'(t)=f_2(t)+t\,f_2'(t)$ なので f_3 は単調増加となり，

$$\frac{1}{2m}\left\{f_3(0)-f_3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_3(t)\sin 4mt\,dt<0 \tag{6.25}$$

を得る．また，(6.21)，(6.24) から

$$t^3\sum_{k=0}^{2m-1}\cos(2k+1)t=f_3(t)\sin 4mt \tag{6.26}$$

が成り立つ．これから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_3(t)\sin 4mt\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \sum_{k=0}^{2m-1} \cos(2k+1)t\,dt$$
$$= \frac{\pi^3}{8}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} - 3\pi\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} + 6\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{1}{(2k+1)^4} \quad (6.27)$$

となる．よって，(6.17)，(6.23)，(6.25)，(6.27) から

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{1}{(2k+1)^4} = -\lim_{m\to\infty}\frac{\pi^3}{48}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} + \lim_{m\to\infty}\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$
$$= -\frac{\pi^3}{48}\times\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi^3}{32} = \frac{\pi^4}{96} \quad (6.28)$$

を得る．

$T = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$ とおくと，$\frac{T}{16} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \cdots$

なので，上式および (6.28) から

$$T = \frac{\pi^4}{96} + \frac{T}{16}$$

なので，

$$T = \frac{\pi^4}{90}$$

証終

慶応大医 2020 年

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい.

関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $g(x)=\dfrac{1}{\tan^2 x}$ と定める.

(1) 定数 a を $a=$ (あ) と定めると, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=ag(x)$$

が成り立つ.

(2) 自然数 n に対して

$$S_n=\sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right),\quad T_n=\sum_{k=1}^{2^b-1} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$$

とおく. このとき S_1, S_2, S_3 の値を求めると

$$S_1=\boxed{\text{(い)}},\quad S_2=\boxed{\text{(う)}},\quad S_3=\boxed{\text{(え)}}$$

である. また S_n と S_{n+1} の間には $S_{n+1}=$ (お) の関係がある. このことから, S_n を n の式で表すと $S_n=$ (か) となる. また T_n を n の式で表すと $T_n=$ (き) である. したがって, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して $\sin\theta<\theta<\tan\theta$ であることに注意すると,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2}=\boxed{\text{(く)}}$$

がわかる.

解答 (1) 定義式から

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2\cos^2 x}=\frac{\mathbf{4}}{\sin^2 2x}$$

(2)　(1) の結果を利用する.

$$S_1 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}} = \mathbf{2}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{3} f\left(\frac{k\pi}{8}\right) = f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{2\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left\{f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right\} \\ &= 2 + 4f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 4S_1 = 2 + 4\cdot 2 = \mathbf{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^{7} f\left(\frac{k\pi}{16}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sum_{k=1}^{3}\left\{f\left(\frac{k}{16}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{16}\right)\right\} \\ &= 2 + 4\sum_{k=1}^{3} f\left(\frac{k\pi}{8}\right) = 2 + 4S_2 = 2 + 4\cdot 10 = \mathbf{42} \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right) \\ &= f\left(\frac{2^n}{2^{n+2}}\right) + \sum_{k=1}^{2^n-1}\left\{f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)\right\} \\ &= 2 + 4\sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) = \mathbf{2 + 4S_n} \end{aligned}$$

これから　$S_{n+1} + \dfrac{2}{3} = 4\left(S_n + \dfrac{2}{3}\right)$

$$S_n + \frac{2}{3} = (S_1 + 2)\cdot 4^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{S_n = \frac{2}{3}(4^n - 1)}$$

$g(x) = \dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1 = f(x) - 1$ より

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{2^n-1} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{2^n-1}\left\{g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) - 1\right\} \\ &= S_n - (2^n - 1) = \frac{2}{3}(4^n - 1) - (2^n - 1) \\ &= \mathbf{\frac{2}{3}\cdot 4^n - 2^n + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$\theta = \dfrac{k\pi}{2^{n+1}}$ とすると，$\dfrac{1}{\tan^2\theta} < \dfrac{1}{\theta^2} < \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ より

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\tan^2\theta} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\theta^2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\theta}$$

したがって $\quad T_n < \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{4^{n+1}}{k^2\pi^2} < S_n$

$$\frac{\pi^2}{4^{n+1}} T_n < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4^{n+1}} S_n \quad \cdots (*)$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{4^{n+1}} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{4^{n+1}} \cdot \frac{2}{3}(4^n - 1) = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{4^{n+1}} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{4^{n+1}} \left(\frac{2}{3} \cdot 4^n - 2^n + \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

上の 2 式を $(*)$ に適用すると，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{6}}$$

6.6　微分法公式

6.6.1　ライプニッツの公式

大分大学医 2020 年

n を任意の正の整数とし，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ はともに n 回微分可能な関数とする．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) 積 $f(x)g(x)$ の第 4 次導関数 $\dfrac{d^4}{dx^4}\{f(x)g(x)\}$ を求めなさい．

(2) 積 $f(x)g(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ における $f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$ の係数を類推し，その類推が正しいことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．ただし，r は負でない n 以下の整数とし，$f^{(0)}(x)=f(x)$，$g^{(0)}(x)=g(x)$ とする．

(3) 関数 $h(x)=x^3e^x$ の第 n 次導関数 $h^{(n)}(x)$ を求めなさい．ただし，e は自然対数の底であり，$n \geqq 4$ とする．

解答 (1) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(1)}(x) \quad \cdots ①$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)\} \\
&= f^{(2)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(2)}(x) \\
&= f^{(2)}(x)g^{(0)}(x) + 2f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(2)}(x) \\
\frac{d^3}{dx^3}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(2)}(x)g^{(0)}(x)\} + 2\frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(1)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(2)}(x)\} \\
&= f^{(3)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + 2\left\{f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(2)}(x)\right\} \\
&\qquad + f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(3)}(x) \\
&= f^{(3)}(x)g^{(0)}(x) + 3f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + 3f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(3)}(x) \\
\frac{d^4}{dx^4}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(3)}(x)g^{(0)}(x)\} + 3\frac{d}{dx}\{f^{(2)}(x)g^{(1)}(x)\} \\
&\qquad + 3\frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(2)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(3)}(x)\} \\
&= f^{(4)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + 3\left\{f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(2)}(x)\right\} \\
&\qquad + 3\left\{f^{(2)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(3)}(x)\right\} \\
&\qquad + f^{(1)}(x)g^{(3)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(4)}(x) \\
&= \boldsymbol{f^{(4)}(x)g^{(0)}(x) + 4f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) + 6f^{(2)}(x)g^{(2)}(x)} \\
&\qquad \boldsymbol{+4f^{(1)}(x)g^{(3)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(4)}(x)}
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ における $f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$ の係数を ${}_n\mathrm{C}_r$ であると推定すると

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\} = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x) \quad \cdots (*)$$

［1］① から $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = {}_1\mathrm{C}_0 f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) + {}_1\mathrm{C}_1 f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)$

したがって，$n = 1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\frac{d^k}{dx^k}\{f(x)g(x)\}=\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r)}(x)$$

これを微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\{f(x)g(x)\}&=\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r\{f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)+f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x)\}\\
&=\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)\\
&\qquad+\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x)\\
&=f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{r=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)\\
&\qquad+\sum_{r=0}^{k-1}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x)\\
&=f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{r=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)\\
&\qquad+\sum_{r=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_{r-1} f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x)\\
&={}_{k+1}\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)\\
&\qquad+\sum_{r=1}^{k}({}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1})f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)\\
&\qquad\qquad+{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x)\\
&={}_{k+1}\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)\\
&\qquad+\sum_{r=1}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)\\
&\qquad\qquad+{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x)\\
&=\sum_{r=0}^{k+1}{}_{k+1}\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)
\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について $(*)$ が成立する．

(3) $h(x) = x^3e^x = e^x x^3$ について，(2) の結果を適用すると ($n \geqq 4$)

$$\begin{aligned}
h^{(n)}(x) &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} \\
&= \sum_{r=0}^{3} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} + \sum_{r=4}^{n} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} \\
&= \sum_{r=0}^{3} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} \\
&= {}_n\mathrm{C}_0 e^x \cdot x^3 + {}_n\mathrm{C}_1 e^x \cdot 3x^2 + {}_n\mathrm{C}_2 e^x \cdot 6x + {}_n\mathrm{C}_3 e^x \cdot 6 \\
&= \boldsymbol{e^x\{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\}}
\end{aligned}$$

補足 (2) の結果は，ライプニッツ (Leibniz) の公式と呼ばれている.

6.6.2　第 n 階微分方程式 (線形微分方程式)

大分大学医 2010 年

微分可能な関数 $y = f(x)$ が次の方程式を満たすとする．

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 f(x) = 0 \qquad \text{(A)}$$

ここに n は自然数，a_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ は実数の定数で，$a_n \neq 0$ である．また，$y^{(k)} = f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の k 次導関数で $y^{(0)} = f^{(0)}(x) = f(x)$ とする．(A) のような方程式を第 n 階微分方程式といい，(A) に対して t の n 次方程式

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0 \qquad \text{(B)}$$

を (A) の特性方程式という．このとき次の問いに答えよ．

(1) 特性方程式 (B) の解が実数 r であるとき，関数 $y = e^{rx}$ が方程式 (A) を満たすことを証明せよ．

(2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解(注) にもつとき，次の t に関する方程式は r を $k-1$ 重解にもつことを証明せよ．ただし，$k = 2, 3, \cdots$ とする．

$$n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(注) t の m 次方程式が適当な多項式 $Q(t)$ を用いて $(t-r)^k Q(t) = 0$ となるとき，$t = r$ をこの方程式の k 重解と定義する．ただし，$k = 1, 2, \cdots$ とする．

(3) 実数の定数 r に対して x の関数を $y_i = x^i e^{rx}$ $(i = 0, 1, 2 \cdots)$ とする．
このとき，${y_j}^{(n)}$ を x，${y_{j-1}}^{(n-1)}$ および ${y_{j-1}}^{(n)}$ を用いて表せ．ただし，$j = 1, 2, 3, \cdots$ とする．

(4) 実数 r が n 次方程式 (B) の k 重解であるとき $y_i = x^i e^{rx}$
$(i = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$ が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ．ただし，k は自然数とする．

解答 (1) 実数 r は特性方程式 (B) の解であるから

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

両辺に e^{rx} を掛けると

$$\begin{aligned} a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} &= 0 \\ a_n (e^{rx})^{(n)} + a_{n-1} (e^{rx})^{(n-1)} + \cdots + a_1 (e^{rx})^{(1)} + a_0 e^{rx} &= 0 \end{aligned}$$

よって，関数 $y = e^{rx}$ は方程式 (A) を満たす．

(2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解にもつから，$n-k$ 次多項式 $Q(t)$ を用いて

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = (t-r)^k Q(t) \quad \cdots (*)$$

とおける．この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 & \\ = k(t-r)^{k-1} Q(t) + (t-r)^k Q'(t) & \\ = (t-r)^{k-1} \{ k Q(t) + (t-r) Q'(t) \} & \end{aligned}$$

よって，次の方程式は，r を $k-1$ 重解にもつ．

$$n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(3) $y_j = x^j e^{rx}$ より，$y_j = x y_{j-1}$ であるから，ライプニッツの公式を用いて微分すると

$$\begin{aligned} y_j^{(n)} = (x y_j)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{(n-k)} {y_{j-1}}^{(k)} \\ &= \sum_{k=n-1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{(n-k)} {y_{j-1}}^{(k)} = \boldsymbol{n {y_{j-1}}^{(n-1)} + x {y_{j-1}}^{(n)}} \end{aligned}$$

(4) $(*)$ の $Q(t)$ を，定数 $b_i(i=0,1,2,\cdots,n-k)$ を用いて $(b_{n-k}=a_n)$

$$Q(t)=\sum_{i=0}^{n-k}b_it^i$$

とおくと，$(*)$ から

$$\begin{aligned}a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0=&(t-r)^kQ(t)\\=&\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_jt^{k-j}(-r)^j\sum_{i=0}^{n-k}b_it^i\\=&\sum_{i=0}^{n-k}b_i\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j(-r)^jt^{k+i-j}\end{aligned}$$

上式から

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=\sum_{i=0}^{n-k}b_i\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j(-r)^jy^{(k+i-j)}$$

ここで $z=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j(-r)^jy^{(k-j)}$ とおくと

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=\sum_{i=0}^{n-k}b_iz^{(i)}$$

このとき，微分方程式

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0\quad\cdots(**)$$

は，次のようになる．

$$b_0z+b_1z'+b_2z''+\cdots+b_{n-k}z^{(n-k)}=0$$

したがって，$z=0$ は微分方程式 $(**)$ の解の 1 つであるから

$$\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j(-r)^jy^{(k-j)}=0$$

$$e^{-rx}\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j(-r)^jy^{(k-j)}=0$$

$$\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_jy^{(k-j)}(e^{-rx})^{(j)}=0$$

ゆえに，ライプニッツの公式により

$$(ye^{-rx})^{(k)} = 0$$

上式の両辺を k 回積分すると，右辺は x の $k-1$ 次式になるので

$$ye^{-rx} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1}$$

となる (c_jは定数 $(j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$).
したがって，次式は微分方程式 $(**)$ の解の 1 つである.

$$y = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$$

よって，x^je^{rx} $(j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$ は，$(**)$ をみたす.

6.6.3　オイラーの公式 (九大理系 2023 年 4 番)

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A) すべての x，y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$

(B) すべての x，y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$

(C) $f(0) \neq 0$

(D) $f(x)$，$g(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$，$g'(0) = 1$

①条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ がわかる。以上のことから ②$f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で, $f'(x) = -g(x)$，$g'(x) = f(x)$ が成立する ことが示される。
③上のことから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 1$ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A)，(B)，(C)，(D) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x$，$g(x) = \sin x$ であることが示される。

さらに，a，b を実数で $b \neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)′ $f(x)$，$g(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = a$，$g'(0) = b$

におきかえて，条件 (A)，(B)，(C)，(D)′ を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも，条件 (A)，(B)，(C) から $f(0) = 1$，$g(0) = 0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，④条件 (A)，(B)，(C)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x) =$ ［ア］，$g(x) =$ ［イ］が得られる。

(1) 下線部 ① について，$f(0) = 1$，$g(0) = 0$ となることを示せ。

(2) 下線部 ② について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，$f'(x) = -g(x)$ となることを示せ。

(3) 下線部 ③ について，下線部 ①，下線部 ② の事実を用いることにより，$\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ となることを示せ。

(4) 下線部 ④ について，条件 (B)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ に置き換えた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

(B) すべての $x,\ y$ について $q(x + y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$

(D) $p(x)$，$q(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $p'(0) = 0$，$q'(0) = 1$

を満たすことを示せ。空欄 ア , イ に入る関数を求めよ。

解答　(1) 条件式 (A)，(B) に $x=y=0$ を代入すると

$$f(0)=f(0)^2-g(0)^2,\quad g(0)=2f(0)g(0) \qquad (*)$$

上の第 2 式から　　$\{2f(0)-1\}g(0)=0$

したがって　　$f(0)=\dfrac{1}{2}$ または $g(0)=0$

- $f(0)=\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ の第 1 式に代入して整理すると　$g(0)^2=-\dfrac{1}{4}$
  $g(0)$ は実数値であるから，$f(0)=\dfrac{1}{2}$ は不適.
- $g(0)=0$ のとき，これを $(*)$ の第 1 式に代入して整理すると

$$f(0)\{f(0)-1\}=0 \quad f(0)\neq 0 \text{ に注意して} \quad f(0)=1$$

よって，題意は成立する.

(2) (1) の結論および条件 (A)，(D) より

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}-g(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}\right\}\\ &=f(x)f'(0)-g(x)g'(0) \qquad (**)\\ &=f(x)\cdot 0-g(x)\cdot 1=-g(x) \end{aligned}$$

(3) (2) と同様に，(1) の結論および条件 (B)，(D) より

$$\begin{aligned} g'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+g(x)f(h)-g(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\}\\ &=f(x)g'(0)+g(x)f'(0) \qquad (***)\\ &=f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 0=f(x) \end{aligned}$$

$\pi(x)=\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)$ とおくと，(2) および上式から

$$\begin{aligned} \pi'(x)&=\{f(x)+ig(x)\}'(\cos x-i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)'\\ &=\{f'(x)+ig'(x)\}(\cos x-i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(-\sin x-i\cos x)\\ &=\{-g(x)+if(x)\}(\cos x-i\sin x)-i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)\\ &=i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)-i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=0 \end{aligned}$$

$\pi(x)$ は定数関数であるから　$\pi(x)=\pi(0)=\{f(0)+ig(0)\}\cdot 1=1$

よって　　$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$

(4) (3) の結論から　$f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$

$f(x),\ g(x)$ は実関数 (実数値関数) であるから

$$f(x)=\cos x,\quad g(x)=\sin x$$

ここで，$\varphi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\varphi'(x)=f'(x)+ig'(x)=-g(x)+if(x)=i\{f(x)+ig(x)\}=i\varphi(x)$$

$\varphi(0)=\cos 0+i\sin 0=1$ および上式を満たす $\varphi(x)$ を求める．

$$\varphi'(x)e^{-ix}-i\varphi(x)e^{-ix}=0\quad\text{ゆえに}\quad\{\varphi(x)e^{-ix}\}'=0$$

したがって　$\varphi(x)e^{-ix}=C$　(C は積分定数)　ゆえに　$\varphi(x)=Ce^{ix}$

$\varphi(0)=1$ より　$C=1$　すなわち　$\varphi(x)=e^{ix}$

$\varphi(x)=f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$ であるから

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\qquad(\#)$$

(#) により，条件 (A)，(B)，(C)，(D′) を満たす関数 $f(x),\ g(x)$ を求める．

(D′) を (∗∗)，(∗ ∗ ∗) に代入すると

$$f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)$$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=f'(x)+ig'(x)=\{af(x)-bg(x)\}+i\{bf(x)+ag(x)\}\\&=(a+bi)\{f(x)+ig(x)\}=(a+bi)\phi(x)\end{aligned}$$

$\phi(0)=f(0)+ig(0)=1+i\cdot 0=1$ および上式を満たす $\phi(x)$ を求める．

$$\phi'(x)e^{-(a+bi)x}-(a+bi)e^{-(a+bi)x}=0\quad\text{ゆえに}\quad\{\phi(x)e^{-(a+bi)x}\}'=0$$

したがって

$$\phi(x)e^{-(a+bi)x}=C_0\ \ (C_0\text{は積分定数})\quad\text{ゆえに}\quad\phi(x)=C_0e^{(a+bi)x}$$

$\phi(0)=1$ より　$C_0=1$　すなわち　$\phi(x)=e^{(a+bi)x}$

(#) より　　$\phi(x)=e^{ax}e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ であるから ($f(x),\ g(x)$ は実関数)

$$\boldsymbol{f(x)=e^{ax}\cos bx,\quad g(x)=e^{ax}\sin bx}$$

これから　　$f\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\cos x,\quad g\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\sin x$

これらを $p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\dfrac{x}{b}\right),\ \ q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\dfrac{x}{b}\right)$ に代入すると

$$p(x)=\cos x,\quad q(x)=\sin x$$

［**B の証明**］ このとき，加法定理を用いて

$$\begin{aligned}q(x+y)&=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\&=q(x)p(y)+p(x)q(y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)\end{aligned}$$

［**D の証明**］ $p'(x)=-\sin x,\ \ q'(x)=\cos x$ より

$$p'(0)=0,\ \ q'(0)=1$$

証終

補足 本題の線形の連立微分方程式

$$\begin{aligned}&f(0)=1,\ g(0)=0,\ f'(0)=a,\ g'(0)=b,\\&f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)\end{aligned}$$

から $g(x),\ g'(x)$ を消去して，2 階の微分方程式

$$f(0)=1,\ f'(0)=a,\ f''(x)-2af'(x)+(a^2+b^2)f(x)=0$$

を解いてもよい．特性方程式 $X^2-2aX+a^2+b^2=0$ の解を

$$\alpha=a+bi,\quad \beta=a-bi$$

とおくと　$f(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$　$(C_1,\ C_2$ は積分定数$)$

このとき，$f(0)=1,\ f'(0)=a$ より

$$C_1+C_2=1,\quad \alpha C_1+\beta C_2=a$$

上の第 2 式について　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}(C_1+C_2)+\dfrac{\alpha-\beta}{2}(C_1-C_2)=a$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=a,\ \dfrac{\alpha-\beta}{2}=bi$ を代入すると　$a(C_1+C_2)+bi(C_1-C_2)=a$

$C_1+C_2=1,\ b\neq0$ より　$C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$　よって　$f(x)=e^{ax}\cos bx$

同様に，2 階の微分方程式

$$g(0)=0,\ g'(0)=b,\ g''(x)-2ag'(x)+(a^2+b^2)g(x)=0$$

を解くと，$g(x)=e^{ax}\sin bx$ を得る．

6.6.4 線形微分方程式の具体例

例 1 微分方程式 $y' - \alpha y = 0$ を解け $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y'e^{-\alpha x} + y(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})' = 0$$

これを積分すると $\quad ye^{-\alpha x} = C \quad$ よって $\quad y = Ce^{\alpha x} \quad (C \text{ は定数})$

例 2 $\alpha \neq \beta$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とするとき，次の微分方程式を解け.

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

解答 与式から $\quad (y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) = 0$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(y' - \beta y)'e^{-\alpha x} + (y' - \beta)(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{(y' - \beta y)e^{-\alpha x}\}' = 0$$

これを積分すると

$$(y' - \beta y)e^{-\alpha x} = A_1 \quad \text{ゆえに} \quad y' - \beta y = A_1 e^{\alpha x} \quad (A_1 \text{は定数})$$

となる．同様にして $\qquad y' - \alpha y = A_2 e^{\beta x} \quad (A_2 \text{は定数})$

よって，上の 2 式から，y' を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \quad (C_1,\ C_2 \text{は定数})$$

例 3 例 2 において，$\beta = \alpha$ とした，次の微分方程式を解け.

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha})'' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})^{(2)} = 0$$

これを 2 回積分すると

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} \quad (C_1,\ C_2 \text{は定数})$$

例 4 $\alpha \neq \beta$，$\beta \neq \gamma$，$\gamma \neq \alpha$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}$ とするとき，
次の微分方程式を解け.

$$y''' - (\alpha+\beta+\gamma)y'' + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)y' - \alpha\beta\gamma y = 0$$

解答 与式から

$$\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}' - \alpha\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\} = 0$$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}'e^{-\alpha x} + \{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}(e^{-\alpha x})' = 0$$
$$[\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}e^{-\alpha x}]' = 0$$

これを積分すると

$$\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}e^{-\alpha x} = A_1$$
$$y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y = A_1 e^{\alpha x} \qquad \cdots ①$$

同様にして

$$y'' - (\gamma+\alpha)y' + \gamma\alpha y = A_2 e^{\beta x} \qquad \cdots ②$$
$$y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y = A_3 e^{\gamma x} \qquad \cdots ③$$

① − ② より　　$(\alpha-\beta)(y' - \gamma y) = A_1 e^{\alpha x} - A_2 e^{\beta x}$

② − ③ より　　$(\beta-\gamma)(y' - \alpha y) = A_2 e^{\beta x} - A_2 e^{\gamma x}$

上の 2 式から，y' を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} + C_3 e^{\gamma x} \quad (C_1,\ C_2,\ C_3 \text{は定数})$$

例 5 例 4 において，$\gamma = \alpha$ とした，次の微分方程式を解け.

$$y''' - (2\alpha + \beta)y'' + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)y' - \alpha^2\beta y = 0$$

解答 与式から

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)' - \beta(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y) = 0$$

両辺に $e^{-\beta x}$ を掛けると

$$\begin{aligned}(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)'e^{-\beta x} + (y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)(e^{-\beta x})' = 0\\ \{(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\beta x}\}' = 0\end{aligned}$$

これを積分すると

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\beta x} = A_1$$

両辺に $e^{(\beta-\alpha)x}$ を掛けると

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\alpha x} = A_1 e^{(\beta-\alpha)x}$$

ここで，上式の左辺は

$$\begin{aligned}(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\alpha x} &= y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha})''\\ &= (ye^{-\alpha x})^{(2)}\end{aligned}$$

となる．したがって

$$(ye^{-\alpha x})^{(2)} = A_1 e^{(\beta-\alpha)x}$$

これを，x について 2 回積分すると，改めて定数 C_1，C_2，C_3 を用いて

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 + C_3 e^{(\beta-\alpha)x} \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} + C_3 e^{\beta x}$$

例 6 例 4 において，$\alpha = \beta = \gamma$ とした，次の微分方程式を解け.

$$y''' - 3\alpha y'' + 3\alpha^2 y' - \alpha^3 y = 0$$

解答 与式の両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$\begin{aligned}y'''e^{-\alpha x} + 3y''(e^{-\alpha x})' + 3y'(e^{-\alpha x})'' + y(e^{-\alpha x})''' = 0\\ (ye^{-\alpha x})^{(3)} = 0\end{aligned}$$

これを x について 3 回積分すると $\quad ye^{-\alpha x} = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

よって $\qquad y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)e^{\alpha x} \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3$は定数$)$

例 7 放射性同位体の原子数は，時間の経過により (原子の崩壊)，その原子数は減少する．原子数 N は時刻 t の減少関数で，その変化率は $\dfrac{dN}{dt} < 0$ で，N に比例し

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad \cdots (*)$$

であることが分かっている (崩壊定数 λ は物質の種類による固有の定数).

$N' = \dfrac{dN}{dt}$ とおくと　　$N' + \lambda N = 0$

例 1 の結果を利用してこれを解くと　　$N = Ce^{-\lambda t}$

ここで，初期条件 $t = 0$ のとき $N = N_0$ とすると，$C = N_0$ より

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \cdots ①$$

さらに，$t = T$ (T は半減期) のとき $N = \dfrac{1}{2}N_0$ とすると

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T} \quad \text{ゆえに} \quad e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \quad \cdots ②$$

①，② から　　$N = N_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

崩壊定数 λ は，$(*)$ により個体数 N と単位時間当たり (1 秒間) の崩壊数を観測することで求めることができる．したがって，半減期 T は ② から

$$T = \frac{\log 2}{\lambda}$$

例 8 ばね定数 k[N/m] のばねの一端が固定され，他端に質量 m[kg] のおもりが付けられ，なめらかな水平面を運動している．自然長の位置を原点 O とし，ばねが伸びる向きを変位 x[m] の正の向きとし，おもりの加速度を a[m/s^2] とすると，次式が成り立つ．

$$ma = -kx$$

このとき，$a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ より，$a = x''$ とおくと

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

となる，このとき特性方程式の解が $\pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ であるから，例 2 の結果から

$$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

を得る．初期条件を $t = 0$ のとき，$x = A$，$v = \dfrac{dx}{dt} = 0$ とすると

$$C_1 + C_2 = A,\quad C_1 - C_2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

したがって $\qquad x = \dfrac{A}{2}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)$

上式にオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を代入すると [5]

$$x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

この単振動の周期を T[s] とすると

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

を得る．具体的な線形微分方程式については，以下に紹介している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/diff_eq.pdf

[5] 証明は http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf を参照．

6.7　テイラー展開

6.7.1　テイラー展開・マクローリン展開

a を定数，n を自然数とする．$f(x)$ を n 回微分可能な関数とし

$$J_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt$$

とおくと

$$\begin{aligned} J_k(x) &= -\int_a^x \left\{ \frac{(x-t)^k}{k!} \right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$J_k(x) - J_{k+1}(x) = \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ であるから，$n \geqq 2$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n-1} \{J_k(x) - J_{k+1}(x)\} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$$J_1(x) - J_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$J_1(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ であるから

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_n(x)$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると，$J_n(x)$ は

$$\frac{(x-a)^n}{n!} M \ \text{と} \ \frac{(x-a)^n}{n!} m$$

の間の値をとるから，この積分区間を I とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c), \qquad c \in I \tag{6.29}$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．$n = 1$ のとき，平均値の定理により，上式は成立する．したがって，すべての自然数について上式は成立する．

(6.29) を $f(x)$ の $x=a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という．
とくに $a=0$ とすると

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \tag{6.30}$$

となり，これをマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という．
(6.29) から得られる級数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

をテイラー級数 (Taylor series) という．同様に，(6.30) から得られる級数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{6.31}$$

をマクローリン級数 (Maclaurin's series) という．

- $f(x)=e^x$ のとき，$f^{(n)}(x)=e^x$ より $f^{(n)}(0)=1$
- $f(x)=\cos x$ のとき，$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0)=\cos\dfrac{n\pi}{2}$
- $f(x)=\sin x$ のとき，$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0)=\sin\dfrac{n\pi}{2}$

これらの結果を (6.31) に代入すると

$$\begin{aligned}
e^x&=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\\
\cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\\
\sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots
\end{aligned}$$

上の第 1 式から $\quad e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

したがって
$$\begin{aligned}
e^{ix}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&=\cos x+i\sin x
\end{aligned}$$

6.7.2　オイラーの公式

等式

$$\boldsymbol{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

を**オイラーの公式** (Euler's Formula) という.

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。(九大理系 2023 年 4 番)

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A) すべての x，y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$

(B) すべての x，y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$

(C) $f(0) \neq 0$

(D) $f(x)$，$g(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$，$g'(0) = 1$

①条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ がわかる。以上のことから
②$f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で, $f'(x) = -g(x)$，$g'(x) = f(x)$ が成立する ことが示される。
③上のことから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A)，(B)，(C)，(D) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x$，$g(x) = \sin x$ であることが示される。

さらに，a，b を実数で $b \neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)′ $f(x)$，$g(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = a$，$g'(0) = b$

におきかえて，条件 (A)，(B)，(C)，(D)′ を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも，条件 (A)，(B)，(C) から $f(0) = 1$，$g(0) = 0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，④条件 (A)，(B)，(C)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x) =$ ア，$g(x) =$ イ が得られる。

(1) 下線部 ① について，$f(0)=1$，$g(0)=0$ となることを示せ。

(2) 下線部 ② について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，$f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。

(3) 下線部 ③ について，下線部 ①，下線部 ② の事実を用いることにより，$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)=1$ となることを示せ。

(4) 下線部 ④ について，条件 (B)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ に置き換えた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

(B) すべての $x,\ y$ について $q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$

(D) $p(x)$，$q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0$，$q'(0)=1$

を満たすことを示せ。空欄 ア , イ に入る関数を求めよ。

解答 (1) 条件式 (A)，(B) に $x=y=0$ を代入すると

$$f(0)=f(0)^2-g(0)^2,\quad g(0)=2f(0)g(0) \tag{$*$}$$

上の第 2 式から　　$\{2f(0)-1\}g(0)=0$

したがって　　$f(0)=\dfrac{1}{2}$ または $g(0)=0$

- $f(0)=\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ の第 1 式に代入して整理すると　$g(0)^2=-\dfrac{1}{4}$
  $g(0)$ は実数値であるから，$f(0)=\dfrac{1}{2}$ は不適.
- $g(0)=0$ のとき，これを $(*)$ の第 1 式に代入して整理すると

$$f(0)\{f(0)-1\}=0 \quad f(0)\neq 0 \text{ に注意して} \quad f(0)=1$$

よって，題意は成立する.

(2) (1) の結論および条件 (A)，(D) より

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}-g(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}\right\}\\ &=f(x)f'(0)-g(x)g'(0) \qquad (**)\\ &=f(x)\cdot 0-g(x)\cdot 1=-g(x) \end{aligned}$$

(3) (2) と同様に，(1) の結論および条件 (B)，(D) より

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+g(x)f(h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\} \\ &= f(x)g'(0)+g(x)f'(0) \qquad (***) \\ &= f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 0 = f(x) \end{aligned}$$

$\pi(x) = \{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)$ とおくと，(2) および上式から

$$\begin{aligned} \pi'(x) &= \{f(x)+ig(x)\}'(\cos x - i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)' \\ &= \{f'(x)+ig'(x)\}(\cos x - i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(-\sin x - i\cos x) \\ &= \{-g(x)+if(x)\}(\cos x - i\sin x) - i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x) \\ &= i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x) - i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 0 \end{aligned}$$

$\pi(x)$ は定数関数であるから　$\pi(x) = \pi(0) = \{f(0)+ig(0)\}\cdot 1 = 1$

よって　　$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 1$

(4) (3) の結論から　$f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$
$f(x),\ g(x)$ は実関数 (実数値関数) であるから

$$f(x)=\cos x,\quad g(x)=\sin x$$

ここで，$\varphi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\varphi'(x)=f'(x)+ig'(x)=-g(x)+if(x)=i\{f(x)+ig(x)\}=i\varphi(x)$$

$\varphi(0)=\cos 0+i\sin 0=1$ および上式を満たす $\varphi(x)$ を求める．

$$\varphi'(x)e^{-ix}-i\varphi(x)e^{-ix}=0\quad\text{ゆえに}\quad\{\varphi(x)e^{-ix}\}'=0$$

したがって　$\varphi(x)e^{-ix}=C$　(C は積分定数)　ゆえに　$\varphi(x)=Ce^{ix}$
$\varphi(0)=1$ より　$C=1$　すなわち　$\varphi(x)=e^{ix}$
$\varphi(x)=f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$ であるから

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\qquad(\#)$$

(#) により，条件 (A)，(B)，(C)，(D′) を満たす関数 $f(x),\ g(x)$ を求める．
(D′) を (∗∗)，(∗ ∗ ∗) に代入すると

$$f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)$$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=f'(x)+ig'(x)=\{af(x)-bg(x)\}+i\{bf(x)+ag(x)\}\\&=(a+bi)\{f(x)+ig(x)\}=(a+bi)\phi(x)\end{aligned}$$

$\phi(0)=f(0)+ig(0)=1+i\cdot 0=1$ および上式を満たす $\phi(x)$ を求める．

$$\phi'(x)e^{-(a+bi)x}-(a+bi)e^{-(a+bi)x}=0\quad\text{ゆえに}\quad\{\phi(x)e^{-(a+bi)x}\}'=0$$

したがって

$$\phi(x)e^{-(a+bi)x}=C_0\ \ (C_0\text{は積分定数})\quad\text{ゆえに}\quad\phi(x)=C_0e^{(a+bi)x}$$

$\phi(0)=1$ より　$C_0=1$　すなわち　$\phi(x)=e^{(a+bi)x}$

(#) より　　$\phi(x)=e^{ax}e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ であるから ($f(x),\ g(x)$ は実関数)

$$\boldsymbol{f(x)=e^{ax}\cos bx,\quad g(x)=e^{ax}\sin bx}$$

これから　　$f\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\cos x,\quad g\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\sin x$

これらを $p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\dfrac{x}{b}\right),\ \ q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\dfrac{x}{b}\right)$ に代入すると

$$p(x)=\cos x,\quad q(x)=\sin x$$

［**B の証明**］ このとき，加法定理を用いて

$$\begin{aligned}q(x+y)&=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\&=q(x)p(y)+p(x)q(y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)\end{aligned}$$

［**D の証明**］ $p'(x)=-\sin x,\ \ q'(x)=\cos x$ より

$$p'(0)=0,\ \ q'(0)=1$$　　**証終**

補足　本題の線形の連立微分方程式

$$\begin{aligned}&f(0)=1,\ g(0)=0,\ f'(0)=a,\ g'(0)=b,\\&f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)\end{aligned}$$

から $g(x),\ g'(x)$ を消去して，2 階の微分方程式

$$f(0)=1,\ f'(0)=a,\ f''(x)-2af'(x)+(a^2+b^2)f(x)=0$$

を解いてもよい．特性方程式 $X^2-2aX+a^2+b^2=0$ の解を

$$\alpha=a+bi,\quad \beta=a-bi$$

とおくと　$f(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$　$(C_1,\ C_2$ は積分定数$)$[6]

このとき，$f(0)=1,\ f'(0)=a$ より

$$C_1+C_2=1,\quad \alpha C_1+\beta C_2=a$$

上の第 2 式について　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}(C_1+C_2)+\dfrac{\alpha-\beta}{2}(C_1-C_2)=a$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=a,\ \dfrac{\alpha-\beta}{2}=bi$ を代入すると　$a(C_1+C_2)+bi(C_1-C_2)=a$

$C_1+C_2=1,\ b\neq0$ より　$C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$　よって　$f(x)=e^{ax}\cos bx$

同様に，2 階の微分方程式

$$g(0)=0,\ g'(0)=b,\ g''(x)-2ag'(x)+(a^2+b^2)g(x)=0$$

を解くと，$g(x)=e^{ax}\sin bx$ を得る．

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2010.pdf (p.17 例 2)

例えば，n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき，次式が成立する．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + A(x-a)^n$$

また，2 次関数 $f(x)$ の x^2 の係数が A であるとき

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + A(x-p)^2$$

となる．放物線 $y = f(x)$ 上の $x = p$ における y 座標 $f(p)$ と接線の傾き $f'(p)$ により，$f(x)$ が表される．

東北大理系 2021 年

以下の問いに答えよ．

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ．

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ．必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい．

解答　(1)　$I_k(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!}e^x\,dx$ とすると (k は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned} I_k(a) &= -\int_0^a \left\{\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}\right\}' e^x\,dx \\ &= -\left[\ \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}e^x\ \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}(e^x)'\,dx \\ &= \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} + I_{k+1}(a) \end{aligned}$$

$I_k(a)-I_{k+1}(a)=\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}$ より，正の整数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1}\{I_k(a)-I_{k+1}(a)\}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$I_0(a)-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}$$

$I_0(a)=\displaystyle\int_0^a e^x\,dx=e^a-1$ であるから

$$e^a-1-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\quad\text{ゆえに}\quad e^a=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+I_n(a)\qquad(*)$$

よって　$e^a=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}+\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$

(2)　$0\leqq x\leqq a$ において，$1\leqq e^x\leqq e^a$ であるから

$$\frac{(a-x)^n}{n!}\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^a$$

したがって

$$\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq e^a\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx$$

$$-\left[\ \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\ \right]_0^a\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq-e^a\left[\ \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\ \right]_0^a$$

よって　$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

(3) (2) の結果から $\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq I_n(a) \leqq \dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

(∗) から $I_n(a) = e^a - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$

上の 2 式に $a = 1$ を代入すると

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqq I_n(1) \leqq \frac{e}{(n+1)!}, \quad I_n(1) = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (**)$$

(∗∗) の第 1 式から，$I_n(1) > 0$

(∗∗) の第 2 式から，$I_n(1)$ は単調減少列である．

(∗∗) の第 1 式に $n = 5,\ 6$ を代入すると

$$10^{-3} < \frac{1}{720} = \frac{1}{6!} < I_5(1) < \frac{e}{6!},$$
$$\frac{1}{7!} < I_6(1) < \frac{e}{7!} = \frac{3}{5040} < 10^{-3}$$

上の 2 式から $I_6(1) < 10^{-3} < I_5(1)$

したがって，不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n は $\boldsymbol{n = 6}$

東工大 2020 年

k を正の整数とし，$a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ とおく．

(1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ．

(2) k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ．

(3) (2) の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 $m,\ n$ $(m > n \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値 B を求めよ．

(4) (2) と (3) の極限値 A，B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 $p,\ q,\ r$ $(p > q > r \geqq 1)$ を求めよ．またそのとき極限値を求めよ．

解答　(1) $a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin\frac{\pi x}{2} dx$ より (k は正の整数)

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= \int_0^1 x^{k+1} \sin\frac{\pi x}{2} dx = \int_0^1 x^{k+1} \left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)' dx \\
&= \left[\ x^{k+1}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\ \right]_0^1 - \int_0^1 (k+1)x^k \left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right) dx \\
&= \int_0^1 (k+1)x^k \left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)' dx \\
&= \left[\ (k+1)x^k\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)\ \right]_0^1 - \int_0^1 k(k+1)x^{k-1}\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right) dx \\
&= \frac{4(k+1)}{\pi^2} - \frac{4k(k+1)}{\pi^2}\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx
\end{aligned}$$

よって　$a_{k+2} = \dfrac{4(k+1)}{\pi^2} - \dfrac{4k(k+1)}{\pi^2} a_k = \boldsymbol{\dfrac{4(k+1)}{\pi^2}(1 - ka_k)}$

(2) (1) の結果から $1-ka_k=\dfrac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}$

$a_{k+2}=\displaystyle\int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ より

$$0<a_{k+2}<\int_0^1 x^{k+1}\,dx=\left[\ \frac{x^{k+2}}{k+2}\ \right]_0^1=\frac{1}{k+2}$$

したがって $\quad 0<1-ka_k<\dfrac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}(1-ka_k)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{k\to\infty} ka_k=1}$$

別解 $a_k=\displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$ より (k は正の整数)

$$a_k<\int_0^1 x^{k-1}\,dx=\frac{1}{k},$$

$$\begin{aligned}
a_k&=\int_0^1\left(\frac{x^k}{k}\right)'\sin\frac{\pi x}{2}\,dx\\
&=\left[\ \frac{x^k}{k}\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\ \right]_0^1\\
&\qquad\qquad+\int_0^1\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)\cos\frac{\pi x}{2}\,dx\\
&=\frac{1}{k}-\frac{\pi^2}{4k(k+1)}\int_0^1 x^{k+1}\cos\frac{\pi x}{2}\,dx\\
&>\frac{1}{k}-\frac{\pi^2}{4k(k+1)}\int_0^1 x^{k+1}dx=\frac{1}{k}-\frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

したがって $\quad \dfrac{1}{k}-\dfrac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)}<a_k<\dfrac{1}{k}$

$$-\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}<ka_k-1<0$$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left\{-\frac{\pi^2}{4(k+1)(k+2)}\right\}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}(ka_k-1)=0 \quad \text{よって} \quad A=\lim_{k\to\infty}ka_k=1$$

(3) $a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin\frac{\pi x}{2}\,dx$ より (k は正の整数) [別解を参照]

$$
\begin{aligned}
a_k &> \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)},\\
a_k &= \int_0^1 \left(\frac{x^k}{k}\right)' \sin\frac{\pi x}{2}\,dx\\
&= \Bigg[\ \frac{x^k}{k}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\\
&\qquad + \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)}\left(-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}\right)\\
&\qquad\quad - \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\left(-\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\ \Bigg]_0^1\\
&\qquad\quad + \int_0^1 \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\left(\frac{\pi^4}{16}\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx\\
&< \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} + \int_0^1 \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\cdot\frac{\pi^4}{16}\,dx\\
&= \frac{1}{k} - \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4}{16k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
\end{aligned}
$$

したがって

$$(*)\quad 0 < a_k - \frac{1}{k} + \frac{\pi^2}{4k(k+1)(k+2)} < \frac{\pi^4}{16k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$A = 1$ および $(*)$ から，$\{k^m a_k - k^n A\}$ が 0 ではない値に収束することに注意して，辺々に $k^3 > 0$ を掛けると

$$0 < k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2 k^2}{4(k+1)(k+2)} < \frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

さらに，辺々に $\dfrac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}$ を加えると

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} &< k^3 a_k - k^2 A + \frac{\pi^2}{4}\\
&< \frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}=0,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\pi^4k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}\left(k^3a_k-k^2A+\frac{\pi^2}{4}\right)=0$$

よって $\boldsymbol{B=\lim_{k\to\infty}(k^3a_k-k^2A)=-\frac{\pi^2}{4},\ m=3,\ n=2}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}&<k^3a_k-k^2A-B\\&<\frac{\pi^2(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\end{aligned}$$

辺々に $k>0$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2k(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}&<k^4a_k-k^3A-kB\\&<\frac{\pi^2k(3k+2)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\end{aligned}$$

さらに，辺々に $-\frac{3\pi^2}{4}$ を加えると

$$\begin{aligned}-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}&<k^4a_k-k^3A-kB-\frac{3\pi^2}{4}\\&<-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\{-\frac{\pi^2(7k+6)}{4(k+1)(k+2)}\right\}=0,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\pi^4k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}\left(k^4a_k-k^3A-kB-\frac{3\pi^2}{4}\right)=0$$

よって $\boldsymbol{\lim_{k\to\infty}(k^4a_k-k^3A-kB)=\frac{3\pi^2}{4},\ p=4,\ q=3,\ r=1}$

解説 本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx = {} & f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\ & \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

が成立する．同様に，次式も成立する．

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x)\,dx = {} & f(x)g(x) - f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x) \\ & \cdots + (-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x)\,dx\end{aligned}$$

例えば，$\displaystyle\int x^{k-1}\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$ について，$\displaystyle f(x) = \frac{x^k}{k}$，$\displaystyle g(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ とすると

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{x^k}{k}\right)'\sin\frac{\pi x}{2}\,dx = {} & \frac{x^k}{k}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right) \\ & + \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)}\left(-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}\right) \\ & - \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\left(-\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi x}{2}\right) \\ & + \int \frac{x^{k+3}}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\left(\frac{\pi^4}{16}\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx\end{aligned}$$

本題 (3) はこれを利用して，定積分を行っている．

発展 前ページで示した結果から，定積分についても同様に，次式が成立する．

$$\int_x^a f(t)g'(t)\,dt = \Big[\ f(t)g(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=0}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)g^{(-k)}(t)\ \Big]_x^a + (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t)g^{(-n+1)}(t)\,dt$$

$g^{(-k)}(t) = \dfrac{1}{k!}(t-x)^k$ とおくと $(k=-1,0,1,\ldots)$，$g(t)=1$，$g'(t)=0$ より

$$0 = \Big[\ f(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=1}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)\frac{(t-x)^k}{k!}\ \Big]_x^a + (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

したがって

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

ここで

$$J = (-1)^n \int_x^a \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = (-1)^n\Big[\ \frac{(t-x)^n}{n!}\ \Big]_x^a = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

とおき，積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると

$$K = (-1)^n \int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

は MJ と mJ の間にあるから

$$K = f^{(n)}(c)J$$

を満たす c が積分区間に少なくとも 1 つ存在する (積分学の平均値の定理)．
よって，次の等式が成立する (テイラー展開)．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

例えば，n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき，次式が成立する．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + A(x-a)^n$$

九大理系 2022 年 2 番

n を 3 以上の自然数，α，β を相異なる実数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 次をみたす実数 A，B，C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) + C$$

(2) (1) の A，B，C を n，α，β を用いて表せ。

(3) (2) の A について，n と α を固定して，β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta\to\alpha} A$ を求めよ。

解答　(1) x^n を $x-\alpha$ で割った商を $Q_1(x)$，余りを C とすると

$$x^n = (x-\alpha)Q_1(x) + C$$

$Q_1(x)$ を $x-\beta$ で割った商を $Q_2(x)$，余りを B とすると

$$Q_1(x) = (x-\beta)Q_2(x) + B$$

$Q_2(x)$ を $x-\beta$ で割った商を $Q(x)$，余りを A とすると

$$Q_2(x) = (x-\beta)Q(x) + A$$

したがって

$$\begin{aligned}
x^n &= (x-\alpha)Q_1(x) + C \\
&= (x-\alpha)\{(x-\beta)Q_2(x) + B\} + C \\
&= (x-\alpha)(x-\beta)Q_2(x) + B(x-\alpha) + C \\
&= (x-\alpha)(x-\beta)\{(x-\beta)Q(x) + A\} + B(x-\alpha) + C \\
&= (x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) + C \qquad (*)
\end{aligned}$$

(2) $x=\alpha$ を $(*)$ に代入すると　$\boldsymbol{C=\alpha^n}$

$$x^n-\alpha^n=(x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\alpha)(x-\beta)+B(x-\alpha)$$
$$\frac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha}=(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\beta)+B$$

$f(x)=\dfrac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{nx^{n-1}(x-\alpha)-(x^n-\alpha^n)}{(x-\alpha)^2}$

$$f(x)=(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\beta)+B,$$
$$f'(x)=2(x-\beta)Q(x)+(x-\beta)^2Q'(x)+A$$

これから，$B=f(\beta)$，$A=f'(\beta)$ より

$$\boldsymbol{B=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha},\quad A=\frac{n\beta^{n-1}(\beta-\alpha)-(\beta^n-\alpha^n)}{(\beta-\alpha)^2}}$$

(3) $g(\beta)=n\beta^{n-1}(\beta-\alpha)-(\beta^n-\alpha^n)$ とおくと

$$g'(\beta)=n(n-1)\beta^{n-2}(\beta-\alpha)$$
$$g''(\beta)=n(n-1)\{(n-2)\beta^{n-3}(\beta-\alpha)+\beta^{n-2}\}$$

$g(\alpha)=0$，$g'(\alpha)=0$，$g''(\alpha)=n(n-1)\alpha^{n-2}$ より，$g(\beta)$ は $(\beta-\alpha)^2$ を因数にもつから，$g(\beta)=(\beta-\alpha)^2H(\beta)$ とおくと $(A=H(\beta))$

$$g'(\beta)=2(\beta-\alpha)H(\beta)+(\beta-\alpha)^2H'(\beta)$$
$$g''(\beta)=2H(\beta)+4(\beta-\alpha)H'(\beta)+(\beta-\alpha)^2H''(\beta)$$

$g''(\alpha)=2H(\alpha)=n(n-1)\alpha^{n-2}$，　$A=H(\beta)$ より

$$\lim_{\beta\to\alpha}A=\lim_{\beta\to\alpha}H(\beta)=H(\alpha)=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}}$$

補足 n 次式 $g(\beta)$ を α を極としてテイラー展開すると

$$g(\beta)=g(\alpha)+g'(\alpha)(\beta-\alpha)+\frac{g''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2+\sum_{k=3}^{n}\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^k$$

このとき　$A=\dfrac{g(\beta)}{(\beta-\alpha)^2}=\dfrac{g''(\alpha)}{2!}+\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^{k-2}$

よって　　$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}A=\frac{g''(\alpha)}{2!}=\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$

6.8　積分公式

6.8.1　部分積分法

$f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots \right\},$$
$$A_k(x) = \frac{1}{k}\left\{ f(x) - \frac{f^{(2)}(x)}{k^2} + \frac{f^{(4)}(x)}{k^4} - \frac{f^{(6)}(x)}{k^6} + \cdots \right\},$$
$$B_k(x) = \frac{1}{k}\left\{ \frac{f^{(1)}(x)}{k} - \frac{f^{(3)}(x)}{k^3} + \frac{f^{(5)}(x)}{k^5} - \frac{f^{(7)}(x)}{k^7} + \cdots \right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\varphi_k'(x) &= \frac{1}{k}\left\{ f'(x) - \frac{f''(x)}{k} + \frac{f'''(x)}{k^2} - \cdots \right\} \\
&= -\left\{ -\frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots \right\} \\
&= f(x) - \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots \right\} \\
&= f(x) - k\varphi_k(x), \\
A_k'(x) &= \frac{1}{k}\left\{ f^{(1)}(x) - \frac{f^{(3)}(x)}{k^2} + \frac{f^{(5)}(x)}{k^4} - \frac{f^{(7)}(x)}{k^6} + \cdots \right\} \\
&= \frac{f^{(1)}(x)}{k} - \frac{f^{(3)}(x)}{k^3} + \frac{f^{(5)}(x)}{k^5} - \frac{f^{(7)}(x)}{k^7} + \cdots \\
&= kB(x) \\
B_k'(x) &= \frac{1}{k}\left\{ \frac{f^{(2)}(x)}{k} - \frac{f^{(4)}(x)}{k^3} + \frac{f^{(6)}(x)}{k^5} - \cdots \right\} \\
&= f(x) - \left\{ f(x) - \frac{f^{(2)}(x)}{k^2} + \frac{f^{(4)}(x)}{k^4} - \frac{f^{(6)}(x)}{k^6} + \cdots \right\} \\
&= f(x) - kA_k(x)
\end{aligned}$$

が成立する.

前ページの結果を利用すると

$$\begin{aligned}\{\varphi_k(x)e^{kx}\}' &= \varphi_k'(x)e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx}\\ &= \{f(x) - k\varphi_k(x)\}e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx}\\ &= f(x)e^{kx}\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\int f(x)e^{kx}\,dx = \varphi_k(x)e^{kx} + C$

$$\begin{aligned}\{A_k(x)\sin kx\}' &= kB_k(x)\sin kx + kA_k(x)\cos kx\\ \{A_k(x)\cos kx\}' &= kB_k(x)\cos kx - kA_k(x)\sin kx\\ \{B_k(x)\sin kx\}' &= \{f(x) - kA(x)\}\sin kx + kB_k(x)\cos kx\\ \{B_k(x)\cos kx\}' &= \{f(x) - kA(x)\}\cos kx - kB_k(x)\sin kx\end{aligned}$$

上の 4 式から

$$\begin{aligned}\{-A_k(x)\cos kx + B_k(x)\sin kx\}' &= f(x)\sin kx\\ \{A_k(x)\sin kx + B_k(x)\cos kx\}' &= f(x)\cos kx\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\int f(x)\sin kx\,dx = -A_k(x)\cos kx + B_k(x)\sin kx + C$

$$\int f(x)\cos kx\,dx = A_k(x)\sin kx + B_k(x)\cos kx + C$$

以上から，次が成立する．

積分公式 (部分積分法)

C は積分定数とする．

$$\int \boldsymbol{f(x)e^{kx}\,dx = \varphi_k(x)e^{kx} + C}$$

$$\int \boldsymbol{f(x)\sin kx\,dx = -A_k(x)\cos kx + B_k(x)\sin kx + C}$$

$$\int \boldsymbol{f(x)\cos kx\,dx = A_k(x)\sin kx + B_k(x)\cos kx + C}$$

ただし
$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\},$$
$$A_k(x) = \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f^{(2)}(x)}{k^2} + \frac{f^{(4)}(x)}{k^4} - \frac{f^{(6)}(x)}{k^6} + \cdots\right\},$$
$$B_k(x) = \frac{1}{k}\left\{\frac{f^{(1)}(x)}{k} - \frac{f^{(3)}(x)}{k^3} + \frac{f^{(5)}(x)}{k^5} - \frac{f^{(7)}(x)}{k^7} + \cdots\right\}$$

6.8.2　ベータ関数・ガンマ関数

求積問題ではベータ関数・ガンマ関数の計算結果を知っていれば，簡単に求まるものも少なくありません．求積問題でよく利用する 1/6 公式もベータ関数に由来しています．ここでは，入試問題に関連するベータ関数とガンマ関数について解説します．これらの関数は複素数まで定義域を拡張した特殊関数ですが，入試問題では自然数や $\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \cdots$ に対する値が出題されています．

まず，ガンマ関数の定義式は

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt \quad (\Re z>0)$$

部分積分法 (部分積分は解析学最強の計算法) により

$$\Gamma(n+1)=-\Big[\ t^n e^{-t}\ \Big]_0^{\infty}+n\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}\,dt=n\Gamma(n) \tag{1}$$

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt=-\Big[\ e^{-t}\ \Big]_0^{\infty}=1$$

上の 2 式から　　$\Gamma(n+1)=n!\Gamma(1)=n!\quad \cdots(*)$

次に，ベータ関数の定義式は

$$B(x,\ y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad (\Re x>0,\ \Re y>0)$$

部分積分法により

$$\begin{aligned}
B(m,\ n)&=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt\\
&=\frac{1}{m}\Big[\ t^m(1-t)^{n-1}\ \Big]_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1 t^m(1-t)^{n-2}\,dt\\
&=\frac{n-1}{m}B(m+1,\ n-1)\\
&=\frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m+1}\cdots\frac{1}{m+n-2}B(m+n-1,\ 1)\\
&=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-2)!}\int_0^1 t^{m+n-2}\,dt\\
&=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}
\end{aligned} \tag{2}$$

前頁の m，n は，自然数に限らず成立する．たとえば，$m=n=\dfrac{3}{2}$ を (2) とすると

$$B\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)=\int_0^1\sqrt{t(1-t)}\,dt=\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}$$

上の定積分の値は，半径 $\dfrac{1}{2}$ の半円の面積と等しい．$t>0$ のとき，$t^{\frac{1}{2}}e^{-t}>0$ であるから，$\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}!>0$ に注意して

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}\quad\text{ゆえに}\quad\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\tag{3}$$

さらに，(1) により，次のような計算ができる．

$$\frac{5}{2}!=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)!$ であるから，(3) より

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi}\tag{4}$$

なお，(4) をベータ関数を用いて求めることもできる．

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

$t=\sin^2\theta$ とおくと　$\dfrac{dt}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta$

t	0	$\longrightarrow$	1
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

$\Gamma(1)=0!=1$ であるから

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}}\,d\theta=\pi$$

$t>0$ のとき，$t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}>0$ であるから，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)!>0$ に注意して

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi}$$

を得る．

入試に登場する定積分

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$$

について，$x=\alpha+(\beta-\alpha)t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\beta-\alpha$

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx&=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt\\&=(\beta-\alpha)^{m+n+1}B(m+1,\ n+1)\\&=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}\tag{6.32}$$

例題　$A(m,\ n)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$ について $(m\geqq 0,\ n\geqq 0)$

$t=\sin^2 x$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx}=2\sin x\cos x$

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\longrightarrow$	1

$$\begin{aligned}A(m,\ n)&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{m-1}{2}}x(1-\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin x\cos x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\,dt=\frac{\frac{m-1}{2}!\frac{n-1}{2}!}{2\cdot\frac{m+n}{2}!}\end{aligned}$$

例えば　$A(2,\ 5)=\dfrac{\frac{1}{2}!2!}{2\cdot\frac{7}{2}!}=\dfrac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}!}=\dfrac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!}=\dfrac{1}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\dfrac{8}{105}$

$$A(2,\ 6)=\frac{\frac{1}{2}!\frac{5}{2}!}{2\cdot 4!}=\frac{\frac{1}{2}!\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}!}{2\cdot 4!}=\frac{5}{64}\left(\frac{1}{2}!\right)^2$$

これに $\dfrac{1}{2}!=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を代入すると　　$A(2,\ 6)=\dfrac{5}{256}\pi$

2021 年神戸大理系

次の定積分を求めよ.

$$I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

解答 $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}!=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用. $t=x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2x$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow 1$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{x^2(1-x^2)}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)!}=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$$

6.8.3 ウォリス (Wallis) の積分

ウォリスの積分は次式で定義される (m は 0 以上の整数)[7].

$$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\theta\,d\theta$$

$t=\sin^2\theta$ とおくと $\dfrac{dt}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta$

θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\longrightarrow$	1

$$I_m=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{m-1}\theta}{\cos\theta}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!}$$

(i) $m=2n$ のとき (n は 0 以上の整数)

$$I_{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{n!}=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}n!}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)!\right\}^2$$
$$=\frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^{n+1}(2n)!n!}\pi=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!n!}\pi=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}}\pi$$

(ii) $m=2n+1$ のとき (n は 0 以上の整数)

$$I_{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\frac{(2n+1)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)!}=\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}$$
$$=\frac{2^n n!(2n)!}{(2n+1)!!(2n)!!}=\frac{2^{2n}n!n!}{(2n+1)\cdot(2n)!}=\frac{2^{2n}}{(2n+1)\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2014.pdf (p.10 を参照)

2014 年 大分大医医

次の一連の問いに答えなさい．

(1) 自然数 m に対して，$x>0$ のとき $e^x > \dfrac{x^m}{m!}$ であることを示しなさい．

(2) 自然数 n に対して，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$ を示しなさい．

(3) 自然数 n に対して $\Gamma_K(n)=\displaystyle\int_0^K x^{n-1}e^{-x}\,dx$ とするとき，$\lim\limits_{K\to\infty}\Gamma_K(n)$ を求めなさい．

解答　(1) (2) は省略 (http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2014.pdf **9**)

(3)
$$\Gamma_K(1)=\int_0^K e^{-x}\,dx=-\Big[\,e^{-x}\,\Big]_0^K=1-e^{-K}$$
$$\Gamma_K(n)=-\Big[\,x^{n-1}e^{-x}\,\Big]_0^K+(n-1)\int_0^K x^{n-2}e^{-x}\,dt$$

$\Gamma(n)=\lim\limits_{K\to\infty}\Gamma_K(n)$ とおくと，$\Gamma(1)=1$，$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$

よって　　$\Gamma(n)=(n-1)!\Gamma(1)=\boldsymbol{(n-1)!}$

2015 年 九工大情報工

n を自然数とし，関数 $f_m(x)$ $(m=0,1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$f_m(x)=\begin{cases}1 & (m=0)\\ x^m & (m\geqq 1)\end{cases}$$

さらに，a_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$a_k=\int_{-1}^{1} f_k(1-x)f_{n-k}(1+x)\,dx$$

以下の問いに答えよ．

(1) a_0 と a_1 をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $k\geqq 1$ のとき，a_k を n，k，a_{k-1} を用いて表せ．

(3) a_k を n，k を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}$ を n を用いて表せ．

解答 (1) $f_m(x)=\begin{cases}1 & (m=0)\\ x^m & (m\geqq 1)\end{cases}$ より $(m=0,1,2,\cdots,n)$

$$\begin{aligned}a_0&=\int_{-1}^{1}f_0(1-x)f_n(1+x)\,dx=\int_{-1}^{1}1\cdot(1+x)^n\,dx\\&=\left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_{-1}^{1}=\boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n+1}}\\a_1&=\int_{-1}^{1}f_1(1-x)f_{n-1}(1+x)\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x)(1+x)^{n-1}\,dx\\&=\int_{-1}^{1}\{2-(1+x)\}(1+x)^{n-1}\,dx=\int_{-1}^{1}\{2(1+x)^{n-1}-(1+x)^n\}\,dx\\&=\left[\frac{2}{n}(1+x)^n-\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_{-1}^{1}=\frac{2^{n+1}}{n}-\frac{2^{n+1}}{n+1}=\boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n(n+1)}}\end{aligned}$$

(2) 省略(http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2015.pdf **3**)

(3)

$$\begin{aligned}a_k&=\int_{-1}^{1}f_k(1-x)f_{n-k}(1+x)\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x)^k(1+x)^{n-k}\\&=\frac{k!(n-k)!}{\{k+(n-k)+1\}!}2^{k+(n-k)+1}=\frac{2^{n+1}k!(n-k)!}{(n+1)!}=\boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{(n+1)_n\mathrm{C}_k}}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果より，$\dfrac{1}{a_k}=\dfrac{(n+1)_n\mathrm{C}_k}{2^{n+1}}$ であるから

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=\frac{n+1}{2^{n+1}}\times 2^n=\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$

6.8.4　ガウス積分

定積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

について，$t=x^2$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx}=2x$

x	0	$\longrightarrow$	∞
t	0	$\longrightarrow$	∞

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

これから

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du=2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du=\sqrt{\pi}$$

$u=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{x^2}{2}}\,dx=\sqrt{\pi}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=1$$

次式が標準正規分布の密度関数であることが確認できる.

$$F(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

6.9 求積法

6.9.1 拡縮を用いた求積法

楕円は円を拡縮したものであることに着目する.

2021 年 大分大

曲線 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ が 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{6},\ 6k)$, $\mathrm{B}(3,\ 3\sqrt{2}k)$ を通る. ただし, $a>0$, $b>0$, $k>0$ とする.

(1) a の値を求め, b を k を用いて表しなさい.

(2) 原点 O と点 A を通る直線 ℓ_1, 曲線 C, および x 軸で囲まれた図形の面積を k を用いて表しなさい.

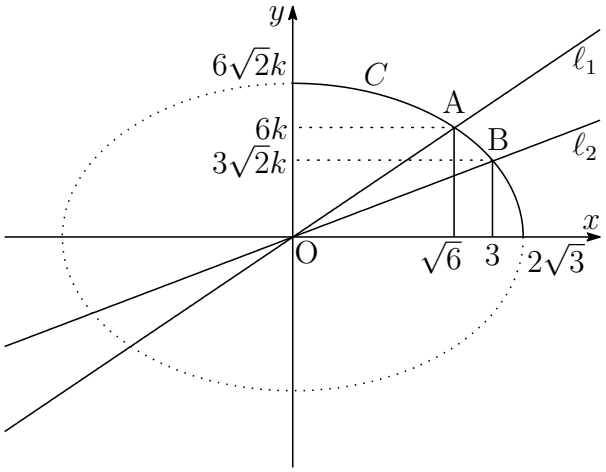
(3) 原点 O と点 B を通る直線 ℓ_2, 曲線 C, および x 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を k を用いて表しなさい.

解答 (1) 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{6},\ 6k)$, $\mathrm{B}(3,\ 3\sqrt{2}k)$ は曲線 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ 上の点であるから $(a>0,\ b>0,\ k>0)$

$$\frac{6}{a^2}+\frac{36k^2}{b^2}=1, \quad \frac{9}{a^2}+\frac{18k^2}{b^2}=1$$

上の 2 式から $a^2=12,\ b^2=72k^2$ よって $\boldsymbol{a=2\sqrt{3},\ b=6\sqrt{2}k}$

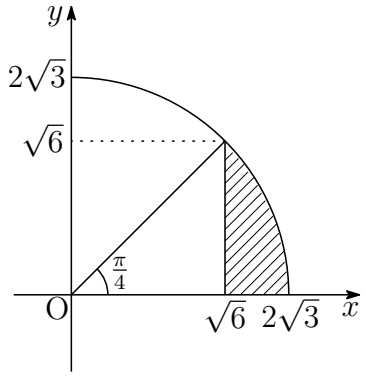
(2) (1) の結果から $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{72k^2}=1$ ゆえに $y=\sqrt{6}k\sqrt{12-x^2}$



求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 6k+\sqrt{6}k\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx$$

$\displaystyle\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積に等しいから



$$\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\sqrt{6})^2$$
$$= \frac{3}{2}\pi - 3$$

よって，求める面積は

$$S = 3\sqrt{6}k + \sqrt{6}k\left(\frac{3}{2}\pi - 3\right) = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{6}k\pi}$$

(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{2}k)^2\cdot 3 + \pi\int_3^{3\sqrt{2}} (\sqrt{6}k\sqrt{12-x^2})^2\,dx$$
$$= 18k^2\pi + 6k^2\pi\int_3^{3\sqrt{2}} (12-x^2)\,dx$$
$$= 18k^2\pi + 6k^2\pi\left[\,12x - \frac{x^3}{3}\,\right]_3^{3\sqrt{2}} = \boldsymbol{48(2\sqrt{3}-3)k^2\pi}$$

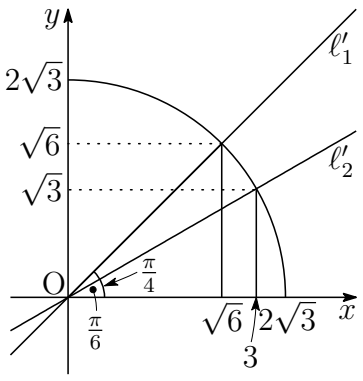
補足 $C,\ \ell_1,\ \ell_2$ を x 軸を元に，y 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{6}k}$ 倍に拡大したものを，それぞれ $C',\ \ell_1',\ \ell_2'$ とすると

$$C' : x^2+y^2 = 12\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0) \quad \ell_1' : y = x, \quad \ell_2' : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$\ell_1',\ \ell_2'$ の偏角はそれぞれ $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{6}$ である (これらの偏角がいわゆる有名角となるように作問されているため，本題の面積や回転体の体積を高校数学の範囲で求めることができる)．$\ell_1',\ C'$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S' とし，$\ell_2',\ C'$ および x で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V' とすると

$$S' = \frac{1}{2}\pi(2\sqrt{3})^2\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$$
$$V' = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2\cdot 3 + \pi\int_3^{2\sqrt{3}} (12-x^2)\,dx$$
$$= 8\pi(2\sqrt{3}-3)$$

よって　$S = \sqrt{6}kS', \quad V = (\sqrt{6}k)^2V'$



2015 年 大分大

曲線 $C : 4x^2+9y^2=36$ $(x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ が第 1 象限にある．点 P における曲線 C の接線を ℓ とする．

(1) y_1 の値を求めなさい．

(2) 接線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標を求めなさい．

(4) 曲線 C，接線 ℓ，x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

解答 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ は $C : 4x^2+9y^2=36$ 上の点であるから

$$4\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+{y_1}^2=36 \quad \text{ゆえに} \quad {y_1}^2=1$$

P は第 1 象限にあるから，$y_1>0$ に注意して $\quad \boldsymbol{y_1=1}$

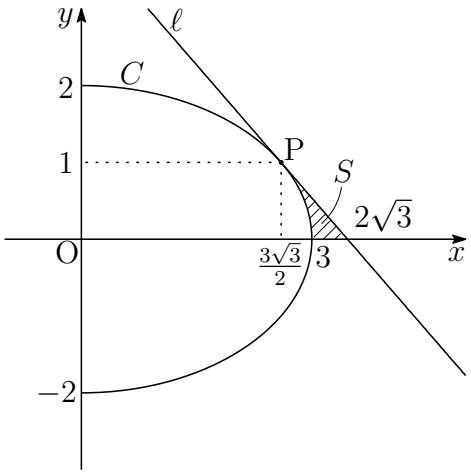
(2) (1) の結果から，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$ における C の接線 ℓ は

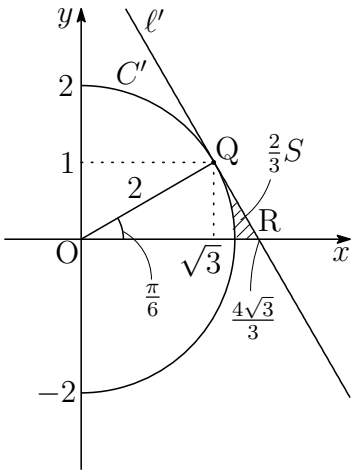
$$4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}x+9\cdot 1y=36 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{2\sqrt{3}x+3y=12}$$

(3) (2) で求めた ℓ の方程式に $y=0$ を代入すると

$$2\sqrt{3}x=12 \qquad \text{よって，求める } x \text{ 座標は} \qquad \boldsymbol{x=2\sqrt{3}}$$

(4) 曲線 C および接線 ℓ を y 軸をもとに x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ だけ縮小したものを，それぞれ C'，ℓ' とすると，C'，ℓ'，x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{2}{3}S$ である．





したがって，右上の図から

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S &= \triangle \mathrm{OQR} - \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot 1 - \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}}$

2006 年 九工大 [工]

$m > 0$ とする．曲線 $C : x^2 + 3y^2 = 3$ $(x \geqq 0)$ と直線 $L_m : y = mx - 1$ の 2 つの共有点を $\mathrm{A}(0, -1)$，$\mathrm{B}_m(p,\ q)$ とおく．次に答えよ．

(1) p，q を m を用いて表せ．

(2) 2 点 A，B_m の間の距離を $f(m)$ とする．$f(m)$ の最大値とそのときの m の値 m_0 を求めよ．

(3) (2) で求めた m_0 に対して，曲線 C と線分 AB_m の囲む図形の面積 S を求めよ．

解答 (1) $x^2+3y^2=3\cdots①$，$y=mx-1\cdots②$ から，y を消去すると

$$x^2+3(mx-1)^2=3 \quad \text{したがって} \quad x=0,\ \frac{6m}{m^2+1}$$

ゆえに $\quad \boldsymbol{p=\dfrac{6m}{3m^2+1}}$ $\quad$ これを ② に代入して $\quad \boldsymbol{q=\dfrac{3m^2-1}{3m^2+1}}$

(2) (1) の結果から

$$\{f(m)\}^2=\left(\frac{6m}{3m^2+1}\right)^2+\left(\frac{3m^2-1}{3m^2+1}-1\right)^2=\frac{(6m)^2+(6m^2)^2}{(3m^2+1)^2}$$
$$=\frac{-8+4(3m^2+1)+4(3m^2+1)^2}{(3m^2+1)^2}$$

$t=\dfrac{1}{3m^2+1}$，$g(t)=\{f(m)\}^2$ とおくと $\left(0<t<\dfrac{1}{3}\right)$

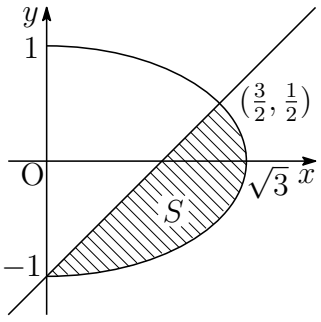
$$g(t)=-8t^2+4t+4=-8\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{2}$$

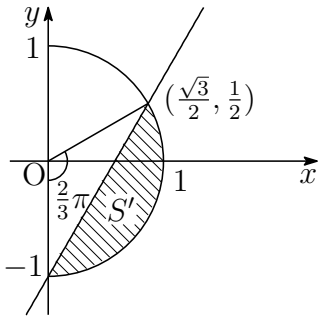
したがって，$g(t)$ は，$t=\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{2}$ をとるから，$f(m)$ は

$$\frac{1}{3m^2+1}=\frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad m=1 \text{ のとき最大}$$

よって $\quad f(m)$ の**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$，$\boldsymbol{m_0=1}$

(3) (1)，(2) の結果から，求める図形の面積を S とし (左下の図)，これを y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍縮小した図形の面積を S' とする (右下の図).





したがって $\quad S'=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\cdot1^2\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

よって $\quad S=\sqrt{3}\,S'=\sqrt{3}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi-\dfrac{3}{4}}$

2016 年 九工大 [工]

$a<0$，b を実数とする．楕円 $C:x^2+4y^2=4$ と直線 $l:y=ax+b$ が異なる 2 個の共有点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$ を持つとし，l に平行な直線 m が第 1 象限の点 A において C と接しているとする．次に答えよ．

(1) b の値の範囲を a を用いて表せ．

(2) 直線 m の方程式を a を用いて表せ．

(3) x_2-x_1 を a，b を用いて表せ．

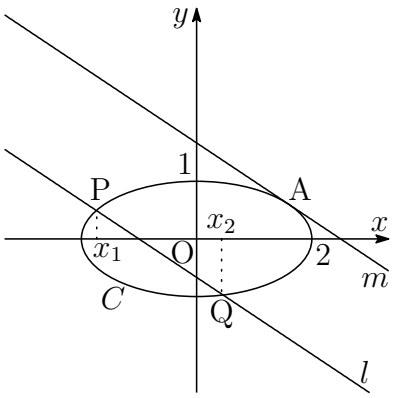
(4) 三角形 APQ の面積 S を a，b を用いて表せ．

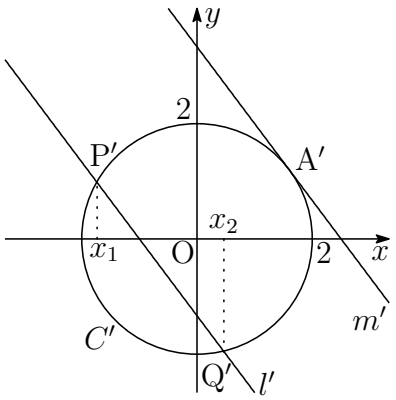
(5) b が (1) で求めた範囲を動くとき，(4) で求めた S の最大値を求めよ．

解答　(1) C，l を x 軸をもとに y 軸方向に 2 倍に拡大した図形をそれぞれ

$$C':x^2+y^2=4,\quad l':2ax-y+2b=0$$

とする．また，これらの曲線上に 2 点 $\mathrm{P}'(x_1,\ 2y_1)$，$\mathrm{Q}'(x_2,\ 2y_2)$ をとる．





l' と C' が異なる 2 個の共有点を持てばよいので

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}<2\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{-\sqrt{4a^2+1}<b<\sqrt{4a^2+1}}$$

(2) l' に平行な直線 m' が第 1 象限の点 A' において C' と接しているとする．このとき，(1) と同様にして

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}=2\qquad\text{ゆえに}\quad |b|=\sqrt{4a^2+1}$$

b の符号に注意して　$b=\sqrt{4a^2+1}$　$\cdots$①　よって　$\boldsymbol{y=ax+\sqrt{4a^2+1}}$

(3) C' と l' の方程式から y を消去すると　$x^2+(2ax+2b)^2=4$

すなわち　　$(4a^2+1)x^2+8abx+4b^2-4=0 \quad \cdots(*)$

方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$x_1+x_2=-\frac{8ab}{4a^2+1},\quad x_1x_2=\frac{4b^2-4}{4a^2+1} \quad \cdots(**)$$

したがって　　$(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$$=\left(-\frac{8ab}{4a^2+1}\right)^2-4\times\frac{4b^2-4}{4a^2+1}$$

$$=\frac{16(4a^2-b^2+1)}{(4a^2+1)^2}$$

$x_1<x_2$ および (1) の結果に注意して　$\boldsymbol{x_2-x_1=\dfrac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}}$

(4) (2) の結果から，m' の方程式は　$y=2ax+2\sqrt{4a^2+1} \quad \cdots$②

A$'$ の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，x_0 は $(*)$ の重解である．

このとき，① に注意して

$$x_0=-\frac{8ab}{2(4a^2+1)}=-\frac{8a\sqrt{4a^2+1}}{2(4a^2+1)}=-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}$$

これを ② に代入することにより

$$y_0=2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}\right)+2\sqrt{4a^2+1}=\frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}$$

よって，$\mathrm{A}'\left(-\dfrac{4a}{\sqrt{4a^2+1}},\ \dfrac{2}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$ から直線 $l':2ax-y+2b=0$ までの距離を d とすると，(1) の結果に注意して

$$d=\frac{\left|2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}\right)-\frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}+2b\right|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{2|\sqrt{4a^2+1}-b|}{\sqrt{4a^2+1}}=2\left(1-\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$$

(3) の結果から

$$\mathrm{P'Q'}=\sqrt{1+(2a)^2}\,|x_2-x_1|=\sqrt{4a^2+1}\times\frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}$$

$$=\frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}}=4\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2+1}}$$

したがって

$$\triangle \mathrm{A'P'Q'} = \frac{1}{2}\mathrm{P'Q'}\cdot d = 4\left(1-\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2+1}}$$

$S = \dfrac{1}{2}\triangle \mathrm{A'P'Q'}$ であるから

$$\boldsymbol{S = 2\left(1-\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1-\frac{b^2}{4a^2+1}}}$$

(5) (1) の結果から，$t = \dfrac{b}{\sqrt{4a^2+1}}$ とすると　$-1 < t < 1$

$f(t) = S^2$ とおくと　　$f(t) = 4(1-t)^2(1-t^2) = -4(t-1)^3(t+1)$

これを微分すると　　$f'(t) = -8(t-1)^2(2t+1)$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大 $\frac{27}{4}$	↘	

よって，求める S の最大値は　$\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

別解 (5) で求めた $f(t) = 4(1-t)^3(1+t)$ について，$-1 < t < 1$ であるから，$1-t > 0$，$1+t > 0$ より

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\left(\frac{1-t}{3}\right) + \frac{1}{4}(1+t) \geqq \left(\frac{1-t}{3}\right)^{\frac{3}{4}}(1+t)^{\frac{1}{4}}$$

この両辺を 4 乗すると

$$\frac{1}{16} \geqq \frac{(1-t)^3(1+t)}{27} \quad \text{ゆえに} \quad f(t) \leqq \frac{27}{4}$$

上式において，等号が成立するとき

$$\frac{1-t}{3} = 1+t \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{1}{2}$$

したがって，$f(t)$ は $t = -\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{27}{4}$ をとる．

よって，求める S の最大値は　$\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

補足 $1-t$，$1-t$，$1-t$，$3(1+t)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3}{2}=\frac{3(1-t)+3(1+t)}{4}\geqq\sqrt[4]{(1-t)^3\cdot 3(1+t)}$$

この両辺を 4 乗すると

$$\frac{81}{16}\geqq 3(1-t)^3(1+t)\quad\text{ゆえに}\quad f(t)\leqq\frac{27}{4}$$

上式において，等号が成立するとき $1-t=3(1+t)$ すなわち $t=-\dfrac{1}{2}$

参考 S が最大となるとき，△A′P′Q′ は正三角形である．

一般に，円に内接する三角形の面積が最大となる三角形は正三角形である．実際，辺 BC に対し，直線 BC から最も遠くなるように A を取ると面積は最大になる。このとき，△ABC は AB = AC の鋭角二等辺三角形である．円の半径を R とし，$B=C=\theta$ とすると，$A=\pi-2\theta$．このとき正弦定理により

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2R\sin\theta\quad\cdots③$$

したがって $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}(2R\sin\theta)^2\sin(\pi-2\theta)$

$$=2R^2\sin^2\theta\sin 2\theta=4R^2\sin^3\theta\cos\theta$$

$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ であるから

$$\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\left(\frac{\sin^2\theta}{3}\right)+\frac{1}{4}\cos^2\theta\geqq\left(\frac{\sin^2\theta}{3}\right)^{\frac{3}{4}}(\cos^2\theta)^{\frac{1}{4}}$$

両辺を平方して $\dfrac{1}{16}\geqq\dfrac{\sin^3\theta\cos\theta}{3\sqrt{3}}$ ゆえに $\sin^3\theta\cos\theta\leqq\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

上式において，等号が成立するのは

$$\frac{\sin^2\theta}{3}=\cos^2\theta\quad\text{ゆえに}\quad\tan^2\theta=3\quad\text{すなわち}\quad\theta=\frac{\pi}{3}$$

このとき $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ となる．したがって，円に内接する三角形は面積が最大となるとき正三角形である．このことに注意すると，二等辺三角形 A′P′Q′ は面積が最大のとき正三角形であるから，$R=2$ より

$$\mathrm{P'Q'}=2\sqrt{3}$$

(4) で求めた $\mathrm{P'Q'}=4\sqrt{1-\dfrac{b^2}{4a^2+1}}$ と上式により

$$\frac{b^2}{4a^2+1}=\frac{1}{4}$$

A′ は第 1 象限の点であるから，$b>0$ のとき，二等辺三角形 A′P′Q′ は鈍角三角形である．ゆえに $b<0$ より

$$\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}=-\frac{1}{2}$$

2017 年 鹿児島大

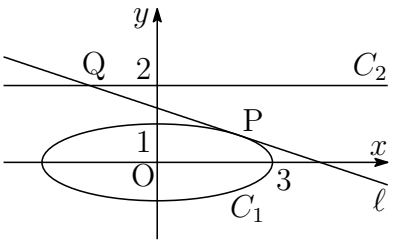
O を原点とする座標平面において，C_1 を曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}+y^2=1$，C_2 を直線 $y=2$ とする．点 P は第 1 象限にある C_1 上のある点とし，点 P における C_1 の接線を ℓ，この接線 ℓ と C_2 との交点を Q とおく．次の各問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表すとき，接線 ℓ の方程式，および点 Q の座標を θ を用いて求めよ．

(2) △POQ の面積を最小にする点 P の座標，および接線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) (2) のとき，曲線 C_1 で囲まれた図形と △POQ との共通部分の面積を求めよ．

解答　(1) $C_1:\dfrac{x^2}{3^2}+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線 ℓ の方程式は



$$\frac{(3\cos\theta)x}{3^2}+(\sin\theta)y=1$$

すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{x\cos\theta}{3}+y\sin\theta=1}$

上式に $y=2$ を代入すると

$$\frac{x\cos\theta}{3}+2\sin\theta=1\quad\text{ゆえに}\quad x=\frac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta}$$

よって，点 Q の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta},\ 2\right)}$

(2) 3点O，$\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta},\ 2\right)$ を頂点とする三角形の面積を $f(\theta)$ とすると $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\left|3\cos\theta\cdot 2-\sin\theta\cdot\frac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta}\right|$$
$$=\frac{3}{2\cos\theta}(2-\sin\theta)=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{\cos\theta}-\tan\theta\right)$$

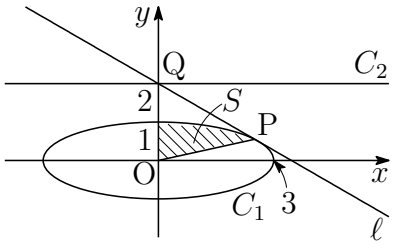
したがって　$f'(\theta)=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)=\dfrac{3(2\sin\theta-1)}{2\cos^2\theta}$

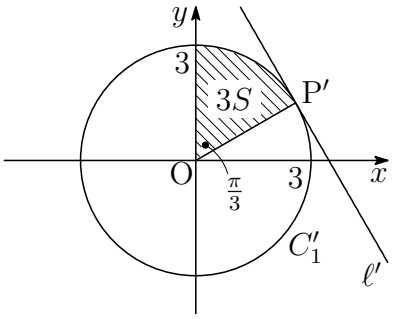
θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	極小	↗	

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$f(\theta)$ は最小となるから，このとき　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\boldsymbol{3\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}},\ \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right)$

また，ℓ は (1) の結果から　$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2\sqrt{3}}}+\dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{1}$

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\mathrm{P}\left(3\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2)$.
求める面積を S とし，C_1 および OP を x 軸を元に y 軸方向に3倍に拡大したものをそれぞれ C_1'，OP′ とすると，$\mathrm{P}'\left(3\cos\dfrac{\pi}{6},\ 3\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.





OP′ と y 軸の正の向きのなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$3S=\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\frac{\pi}{3}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{S=\frac{\pi}{2}}$$

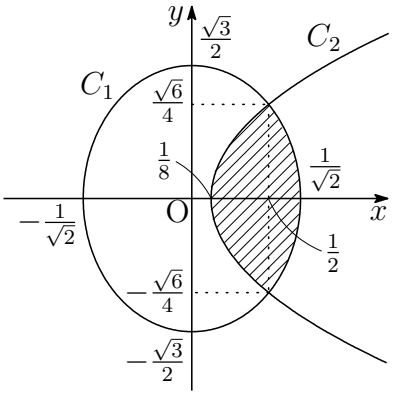
2009 年 長崎大

楕円 $C_1 : 6x^2+4y^2=3$ と曲線 $C_2 : 8x-8y^2=1$ について，次の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点において，C_1 と C_2 の接線は直交することを証明せよ．

(2) $x>0$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答　(1) $\begin{cases} 6x^2+4y^2=3 & \cdots ① \\ 8x-8y^2=1 & \cdots ② \end{cases}$



①，② から y^2 を消去すると

$$12x^2+8x-7=0$$
$$(2x-1)(6x+7)=0$$

② より，$x=y^2+\dfrac{1}{8}\geqq\dfrac{1}{8}$ であるから

$$x=\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad y=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$$

したがって，C_1 と C_2 の交点は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$

① を x で微分すると　$12x+8yy'=0$　すなわち　$y'=-\dfrac{3x}{2y}$

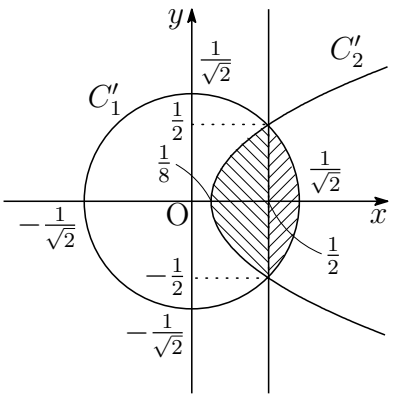
② を x で微分すると　$8-16yy'=0$　すなわち　$y'=\dfrac{1}{2y}$

C_1，C_2 の交点における接線の傾きを，それぞれ m_1，m_2 とすると

$$m_1m_2=-\frac{3\cdot\frac{1}{2}}{2\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}\times\frac{1}{2\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}=-1$$

よって，C_1 と C_2 の交点において，C_1 と C_2 の接線は直交する．

(2) C_1，C_2 を x 軸をもとに y 軸方向に $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 倍に縮小したものを，それぞれ C_1'，C_2' とすると



$$C_1' : x^2+y^2=\frac{1}{2},\quad C_2' : x=\frac{3}{2}y^2+1$$

C_1' と領域 $x\geqq\dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

C_2' と領域 $x \leqq \dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{4}$

よって，求める面積を S とすると

$$S = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\right\} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{16}\pi}$$

2020 年 宮大医

原点を O とする座標平面上に 2 つの曲線

$$C_1 : \frac{x^2}{9}+y^2 = 1 \ (y \geqq 0), \quad C_2 : \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2} = 1 \ (x > 0)$$

がある．C_1 と y 軸との交点を E，C_2 と x 軸との交点を F とする．また，C_1 と C_2 は 1 点で交わる．その交点を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 点 G の座標を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = x\sqrt{x^2-6}-6\log|x+\sqrt{x^2-6}|$ の導関数を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(3) 2 つの曲線 C_1，C_2 および 2 つの線分 OE，OF で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答 (1) $C_1 : \dfrac{x^2}{9}+y^2 = 1 \ (y \geqq 0)$，$C_2 : \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2} = 1 \ (x > 0)$

上の 2 式を連立して解くと $x^2 = \dfrac{27}{4}$，$y^2 = \dfrac{1}{4}$

$x > 0$，$y \geqq 0$ に注意して $\mathrm{G}\left(\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}, \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}\right)$

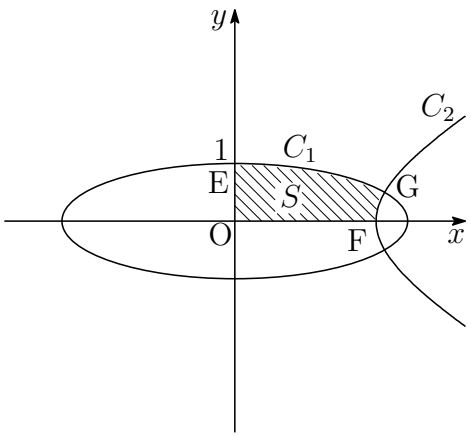
(2) $f(x) = x\sqrt{x^2-6}-6\log|x+\sqrt{x^2-6}|$ より

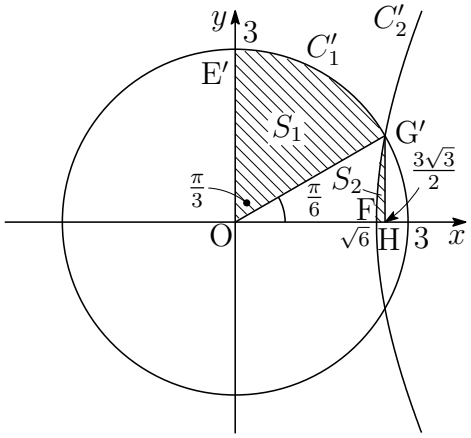
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x^2-6}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-6}}-6\cdot\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-6}}}{x+\sqrt{x^2-6}} \\ &= \sqrt{x^2-6}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-6}}-\frac{6}{\sqrt{x^2-6}} = \boldsymbol{2\sqrt{x^2-6}} \end{aligned}$$

(3) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において C_1，C_2 を x 軸を元に y 軸方向に 3 倍に拡大したものをそれぞれ C_1'，C_2' とすると

$$C_1' : \frac{x^2}{9} + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + y^2 = 9 \ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

$$C_2' : \frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = \sqrt{3}\sqrt{x^2 - 6} \ (x \geqq 0)$$





このとき，G の移る点を $\mathrm{G}'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ とすると，OG' の偏角は $\dfrac{\pi}{6}$

上の図の斜線部分の面積を S_1，S_2 とすると　$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 3^2 \cdot \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}\pi$

$$S_2 = \sqrt{3}\int_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \sqrt{x^2-6}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} f'(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\ f(x)\ \Big]_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\ x\sqrt{x^2-6} - 6\log|x+\sqrt{x^2-6}|\ \Big]_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} - 3\log 2\right)$$

G' から x 軸に垂線 $\mathrm{G}'\mathrm{H}$ を引くと　$\triangle \mathrm{OG}'\mathrm{H} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

したがって　　$3S = S_1 + \triangle \mathrm{OG}'\mathrm{H} - S_2$

$$= \frac{3}{2}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} - 3\log 2\right)$$

$$= 3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 2\right)$$

よって　　$\boldsymbol{S = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\log 2}$

2011 年 熊大医

楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 4$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 $y = x + b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2) (1) における 2 つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。

解答 (1) $C : x^2 + 4y^2 = 4$ および直線 $l : y = x + b$ を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大した図形を，それぞれ，$C' : x^2 + y^2 = 4$，$l' : y = 2x + 2b$ とする．C と l が異なる 2 つの交点をもつとき，C' と l' は異なる 2 つの交点をもつから

$$\frac{|2b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} < 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\sqrt{5} < b < \sqrt{5}}$$

別解 $x^2 + 4y^2 = 4 \cdots ①$，$y = x + b \cdots ②$ とおく．

①，② から y を消去して整理すると

$$5x^2 + 8bx + 4(b^2 - 1) = 0 \quad \cdots ③$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = (4b)^2 - 5 \cdot 4(b^2 - 1) = 4(5 - b^2)$$

①，② が異なる 2 つの交点をもつとき，$D > 0$ であるから

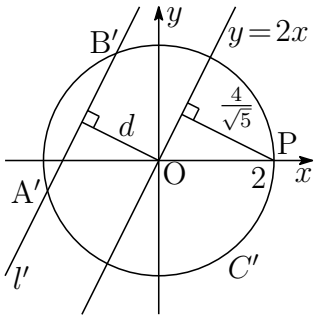
$$5 - b^2 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\sqrt{5} < b < \sqrt{5}}$$

(2) C' と l' の交点を A′，B′ とし，△PAB，△PA′B′ の面積を，それぞれ，S，S' とすると，$S'=2S$ が成り立つ．S' が最大となるとき，S は最大となるから，S' を最大にする b の値を求めればよい．

原点 O から l' までの距離を d とすると

$$d=\frac{|2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{A'B'}=2\sqrt{2^2-d^2}=\frac{4\sqrt{5-b^2}}{\sqrt{5}}$$



S' を最大にする b は，右の図から

$$0<b<\sqrt{5}$$

の範囲で調べればよい．P から l' に引いた垂線の長さを h とすると

$$h=\frac{2b}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{2b+4}{\sqrt{5}}$$

$$S'=\frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\cdot h=\frac{4}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}$$

$$S=\frac{1}{2}S'=\frac{2}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}=\frac{2}{5}\sqrt{(b+2)^2(5-b^2)}$$

したがって，関数

$$f(b)=(b+2)^2(5-b^2)\quad(0<b<\sqrt{5})$$

を最大にする b の値を求めればよい．

$$f'(b)=-2(b+2)(2b^2+2b-5)$$

$0<b<\sqrt{5}$ に注意して $f'(b)=0$ を解くと　$b=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$

$f(b)$ の増減は，右のようになる．よって，求める b の値は

$$\boldsymbol{b=\frac{-1+\sqrt{11}}{2}}$$

b	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{5}\,)$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		↗	極大	↘	

2007 年 広大理系

$0 < b < a$ を満たす定数 $a,\ b$ に対し，2 つの楕円

$$A : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad B : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

を考える．また $\alpha,\ \beta$ は

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(2) 2 つの楕円 $A,\ B$ の第 1 象限にある交点の座標を求めよ．

(3) 楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち，
$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S を $a,\ b,\ \beta$ を用いて表せ．

解答 (1) $0 < b < a$，$\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より $\left(0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

したがって $\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0$

$0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\quad \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$

(2) 2 つの楕円の方程式の辺々を引くと $(0 < b < a)$

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)(x^2 - y^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+y)(x-y) = 0$$

楕円 $A,\ B$ の第 1 象限の交点であるから，$y = x > 0$ を A に代入して

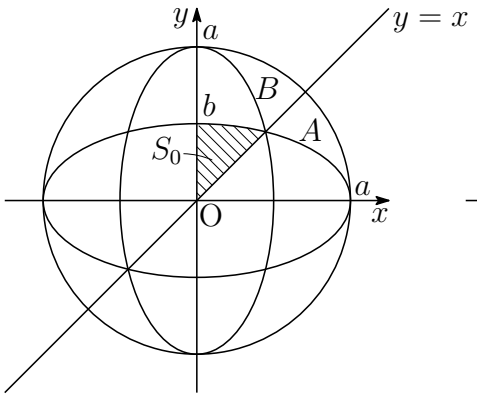
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

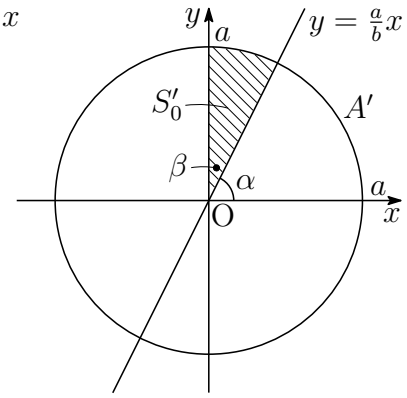
よって，交点の座標は $\quad \boldsymbol{\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}$

(3) 求める図形の面積で，$l : y = x$ の上側の部分の面積を S_0 とする．
A および l を x 軸を元に y 軸方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍だけ拡大したものは

$$A' : x^2 + y^2 = a^2, \quad l' : y = \frac{a}{b}x$$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{b}$ より，l と x 軸とのなす角 (偏角) は α である．
$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ より，右下の図の斜線部分の面積 S_0' は　$S_0' = \dfrac{1}{2}a^2\beta$





$S = 2S_0$，$S_0 = \dfrac{b}{a}S_0'$ であるから　$S = 2\cdot\dfrac{b}{a}S_0' = 2\cdot\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{1}{2}a^2\beta = \boldsymbol{ab\beta}$

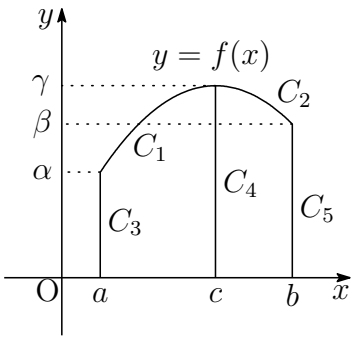
6.9.2 バウムクーヘン型求積法

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

証明 $y = f(x)$ のグラフを単調増加または単調減少の区間に分けて証明する．例えば，右の図のように $y = f(x)$ は $a \leqq x \leqq c$ で単調増加，$c \leqq x \leqq b$ では単調減少とする．このとき，それぞれの区間で逆関数が存在することから



$$C_1 : x = g_1(y)\ (\alpha \leqq y \leqq \gamma),$$
$$C_2 : x = g_2(y)\ (\beta \leqq y \leqq \gamma)$$

とおき，さらに次のようにおく．

$$C_3 : x = a\ (0 \leqq y \leqq \alpha),\quad C_4 : x = c\ (0 \leqq y \leqq \gamma),\quad C_5 : x = b\ (0 \leqq y \leqq \beta)$$

x 軸と $C_1,\ C_3,\ C_4$ で囲まれた部分および $C_2,\ C_4,\ C_5$ で囲まれた部分をそれぞれ y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^\gamma c^2\,dy - \int_0^\alpha a^2\,dy - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2\,dy = c^2\gamma - a^2\alpha - \int_a^c x^2 f'(x)\,dx \\ &= c^2\gamma - a^2\alpha - \Big[\, x^2 f(x) \,\Big]_a^c + 2\int_a^c xf(x)\,dx = 2\int_a^c xf(x)\,dx \\ \frac{V_2}{\pi} &= \int_0^\beta b^2\,dy + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2\,dy - \int_0^\gamma c^2\,dy = b^2\beta - c^2\gamma + \int_b^c x^2 f'(x)\,dx \\ &= b^2\beta - c^2\gamma + \Big[\, x^2 f(x) \,\Big]_b^c - 2\int_b^c xf(x)\,dx = 2\int_c^b xf(x)\,dx\end{aligned}$$

よって $\quad V = V_1 + V_2 = 2\pi \int_a^c xf(x)\,dx + 2\pi \int_c^b xf(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$

一般に，単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る． **証終**

6.9.3　パップス・ギュルダンの定理

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

一般に，$a \leqq x \leqq b$ において $f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq 0$ である 2 曲線 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積を S，その重心の y 座標を h とすると

$$hS = \int_a^b \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \times \{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

$\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$ は微小区間の面積，$\dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$ はその重心を表す．
この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

よって，上の 2 式から　　$\boldsymbol{V = 2\pi hS}$
回転体の体積は，(回転による重心の軌跡の長さ) × (面積) である．

例題

曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれ部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V

解 1 (基本的な積分法) 曲線 $y = \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ および $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ の部分をそれぞれ C_1，C_2 とする．C_1 および C_2 を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると，$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ より

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^1 x^2\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$$
$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^1 x^2\, dy = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$$

したがって

$$\frac{V}{\pi} = \frac{V_2}{\pi} - \frac{V_1}{\pi} = \int_\pi^0 x^2 \cos x\, dx$$
$$= \Big[\, x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \,\Big]_\pi^0 = 2\pi$$

よって　　$V = \boldsymbol{2\pi^2}$

解 2 (バウムクーヘン型求積法)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 2\pi \Big[-x\cos x + \sin x \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{2\pi^2}$$

解 3 (パップス・ギュルダンの定理)

$$S = \int_0^{\pi} \sin x = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = 2$$

図形の重心は直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 上にあるから

$$V = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \boldsymbol{2\pi^2}$$

九工大 2022 年後期

原点を O とする座標平面上の曲線 $y = x^3$ $(x \geqq 0)$ を C とし，直線 $y = ax$ $(a > 0)$ を l とする．さらに，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ を通り l と垂直に交わる直線を m とし，l と m の交点を Q とする．次に答えよ．

(1) 直線 m の式を a と t を用いて表せ．

(2) 線分 PQ の長さを a と t を用いて表せ．

(3) 線分 OQ の長さ s を a と t を用いて表せ．

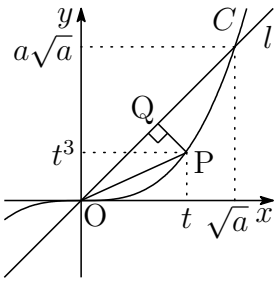
(4) 直線 l と曲線 C で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(5) a が変化するとき，$\dfrac{V}{a^3}$ の最大値を求めよ．

解答 (1) m は点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{a}$ の直線であるから

$$y - t^3 = -\frac{1}{a}(x - t)$$

よって $\quad \boldsymbol{y = -\dfrac{x}{a} + \dfrac{t}{a} + t^3}$



(2) PQ は点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ と直線 $l : ax - y = 0$ の距離であるから

$$\mathrm{PQ} = \frac{|\boldsymbol{at - t^3}|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2 + 1}}}$$

(3) $\mathrm{OQ}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{PQ}^2$ であるから

$$\mathrm{OQ}^2 = (t^2+t^6) - \frac{(at-t^3)^2}{a^2+1} = t^2\left\{1+t^4 - \frac{(a-t^2)^2}{a^2+1}\right\} = \frac{t^2(at^2+1)^2}{a^2+1}$$

$a>0$ より　　$s = \mathrm{OQ} = \boldsymbol{\dfrac{t(at^2+1)}{\sqrt{a^2+1}}}$

(4) (3) の結果を微分すると　$\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3at^2+1}{\sqrt{a^2+1}}$

C と l の交点を $\mathrm{R}(\sqrt{a},\ a\sqrt{a})$ とし，$s_0 = \mathrm{OR}$ とおくと

s	$0 \longrightarrow s_0$
t	$0 \longrightarrow \sqrt{a}$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{s_0} \mathrm{PQ}^2\,ds = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{(at-t^3)^2}{a^2+1}\cdot\frac{ds}{dt}\,dt = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{(at-t^3)^2}{a^2+1}\cdot\frac{3at^2+1}{\sqrt{a^2+1}}\,dt \\ &= \frac{1}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sqrt{a}} \{3at^8 + (1-6a^2)t^6 + (3a^3-2a)t^4 + a^2t^2\}\,dt \\ &= \frac{1}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{3}at^9 + \frac{1}{7}(1-6a^2)t^7 + \frac{1}{5}(3a^3-2a)t^5 + \frac{1}{3}a^2t^3\right]_0^{\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{8a^{\frac{7}{2}}(a^2+1)}{105} = \frac{8a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}}$

(5) (4) の結果から　$\dfrac{V}{a^3} = \dfrac{8\pi}{105}\sqrt{\dfrac{a}{a^2+1}} = \dfrac{8\pi}{105\sqrt{a+\frac{1}{a}}}$

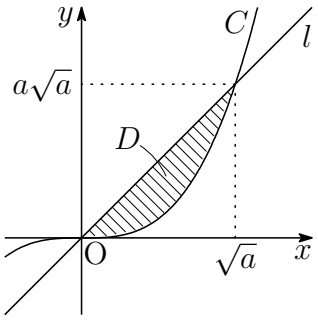
$a>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{a}}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\dfrac{V}{a^3} \leqq \dfrac{8\pi}{105\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi$　　よって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi}$

補足 $0 \leqq x \leqq \sqrt{a}$ において，$C : y = x^3$ と $l : y = ax$ で囲まれた図形 D の面積を S とすると

$$S = \int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3)\,dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{4}$$



D を y 軸，x 軸のまわりにそれぞれ 1 回転してできる立体の体積 $V_1,\ V_2$ は

$$V_1 = 2\pi \int_0^{\sqrt{a}} x(ax - x^3)\,dx = 2\pi \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{4\pi a^{\frac{5}{2}}}{15},$$

$$V_2 = \pi \int_0^{\sqrt{a}} \{(ax)^2 - (x^3)^2\}\,dx = \pi \left[\frac{a^2x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{4\pi a^{\frac{7}{2}}}{21}$$

D の重心を $\mathrm{G}(h_1,\ h_2)$ とすると，パップス・ギュルダンの定理により[8]

$$V_1 = 2\pi h_1 S, \quad V_2 = 2\pi h_2 S \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{G}\left(\frac{8\sqrt{a}}{15},\ \frac{8a\sqrt{a}}{21} \right)$$

G と直線 $l : ax - y = 0$ の距離 d は $\quad d = \dfrac{16a\sqrt{a}}{105\sqrt{a^2+1}}$

D を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi dS = 2\pi \cdot \frac{16a\sqrt{a}}{105\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}$$

別解 領域 D の微小区間 $[t,\ t+\Delta t]$ の面積 ΔS とその重心 G は

$$\Delta S = (at - t^3)\Delta t, \quad \mathrm{G}\left(t,\ \frac{at + t^3}{2} \right)$$

G と直線 $l : ax - y = 0$ の距離 d は $(0 \leqq t \leqq \sqrt{a})$ $\quad d = \dfrac{at - t^3}{2\sqrt{a^2+1}}$

$$S = 2\pi \int_0^{\sqrt{a}} \frac{at - t^3}{2\sqrt{a^2+1}} \cdot (at - t^3)\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \int_0^{\sqrt{a}} (t^6 - 2at^4 + a^2t^2)\,dt$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \left[\frac{t^7}{7} - \frac{2a}{5}t^5 + \frac{a^2}{3}t^3 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}$$

[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

東工大 2020 年 4 番

n を正の奇数とする．曲線 $y=\sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x+y=0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする．

(1) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x,\ \sin x)$ を P とおく．また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする．線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ．

(2) (1) の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

解答　(1) O を原点とする xy 系から，O を原点とし X 軸，Y 軸をそれぞれ ℓ に平行および垂直な XY 系への直交変換を行う．xy 系の正規直交基底

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

に対し，XY 系の正規直交基底を

$$\vec{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

とすると，$x\vec{e}_1+y\vec{e}_2=X\vec{f}_1+Y\vec{f}_2$ より

$$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{X}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}X+Y\\-X+Y\end{pmatrix}$$

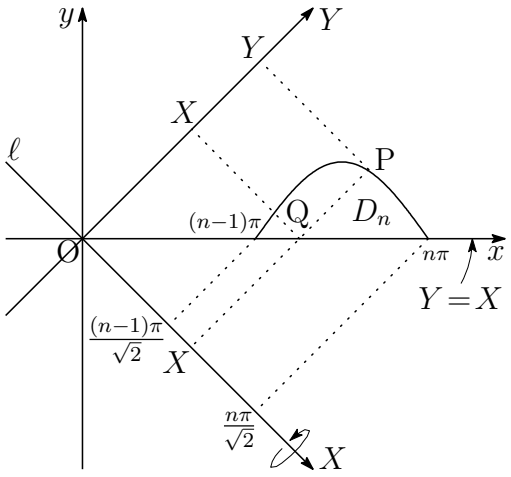
したがって $\begin{cases} x=\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$　逆に　$(*)$ $\begin{cases} X=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ Y=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$

XY 系において点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ と点 Q の X 座標は等しく，Q は直線 $Y=X$ 上の点であるから

$$\mathrm{Q}(X,\ X)$$

線分 PQ を ℓ (X 軸) の周りに 1 回転させてできる図形の面積は

$$\pi(Y^2-X^2)=\pi\left\{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=2\pi xy=\boldsymbol{2\pi x\sin x}$$



(2) (∗) より　$X=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}=\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}$$

ゆえに

x	$(n-1)\pi$	$\longrightarrow$	$n\pi$
X	$\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}}$	$\longrightarrow$	$\frac{n\pi}{\sqrt{2}}$

(1) の結果から，回転体の体積 V_n は，n が奇数であることに注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\pi}&=\int_{\frac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}}}^{\frac{n\pi}{\sqrt{2}}}(Y^2-X^2)\,dX\\&=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}2x\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(2x\sin x-x\sin 2x)\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-2x\cos x+2\sin x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(4n-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V_n=\sqrt{2}\pi^2\left(2n-\dfrac{3}{4}\right)}$

発展　D_n の面積を S_n とし，x 軸の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体の体積を W_n とすると

$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x \Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = 2,$$

$$W_n = \pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[x - \frac{1}{2}\sin 2x \Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

D_n の対称性により D_n の重心を $\mathrm{G}_n\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}, h_n\right)$ とすると，パップス・ギュルダンの定理[9] により

$$W_n = 2\pi h_n S_n \quad \text{ゆえに} \quad h_n = \frac{W_n}{2\pi S_n} = \frac{\pi}{8}$$

重心 $\mathrm{G}_n\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{8}\right)$ から直線 $\ell : x+y=0$ までの距離を d_n とすると

$$d_n = \frac{\left|\dfrac{(2n-1)\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(2n - \frac{3}{4}\right)$$

よって　$V_n = 2\pi d_n S_n = 2\pi \cdot \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(2n-\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2 = \boldsymbol{\sqrt{2}\pi^2\left(2n-\dfrac{3}{4}\right)}$

別解　$y = \sin x$ の微小区間 $[t,\ t+\Delta t]$ の面積 ΔS とその重心 G は

$$\Delta S = (\sin t)\Delta t, \quad \mathrm{G}\left(t,\ \frac{1}{2}\sin t\right)$$

G と直線 $x+y=0$ の距離 d は　$d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \dfrac{1}{2}\sin t\right)$

$$V_n = 2\pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{2}\sin t\right)\sin t\,dt$$

$$= \sqrt{2}\pi \Big[-t\cos t + \sin t + \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t \Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{2}\pi^2\left(2n-\frac{3}{4}\right)}$$

[9] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

2020 年 京大特色

ブラマンジェという型にはめて作るフランス由来のお菓子がある．ここではブラマンジェが，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上の関数

$$y = \sum_{n=0}^{N} \frac{s(2^n x)}{2^n}$$

のグラフと x 軸で囲まれた領域を直線 $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転してできる立体として与えられているとする．ただし，ここで N は自然数，$s(x)$ は x から最も近い整数までの距離とする．

(1) ブランマンジェの体積を計算し，N を用いて表せ．

(2) (1) で求めた体積の $N \to \infty$ の極限を求めよ．

ただし，計算の際にパップス・ギュルダンの定理を証明無しに使ってもよい．ここでパップス・ギュルダンの定理とは次のものである．

> 面積 S の平面図形 A が，それと同一平面上の直線 l の一方の側 (直線 l を含む) のみにあるとき，その図形 A を直線 l の周りに 1 回転させてできる立体の体積は，(回転による A の重心の移動距離) $\times S$ となる．

また面積 S の平面図形 A が，区間 $a \leqq x \leqq b$ 上で，$\varphi(x) \leqq \psi(x)$ となる連続関数 $\varphi(x),\ \psi(x)$ を用いて

$$A = \{(x,\ y) \,|\, a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$$

と表せたとき，A の重心の座標は

$$\left(\frac{1}{S} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx,\ \frac{1}{S} \int_a^b \frac{\psi(x)^2 - \varphi(x)^2}{2}\, dx \right)$$

であることを証明無しに使ってもよい．

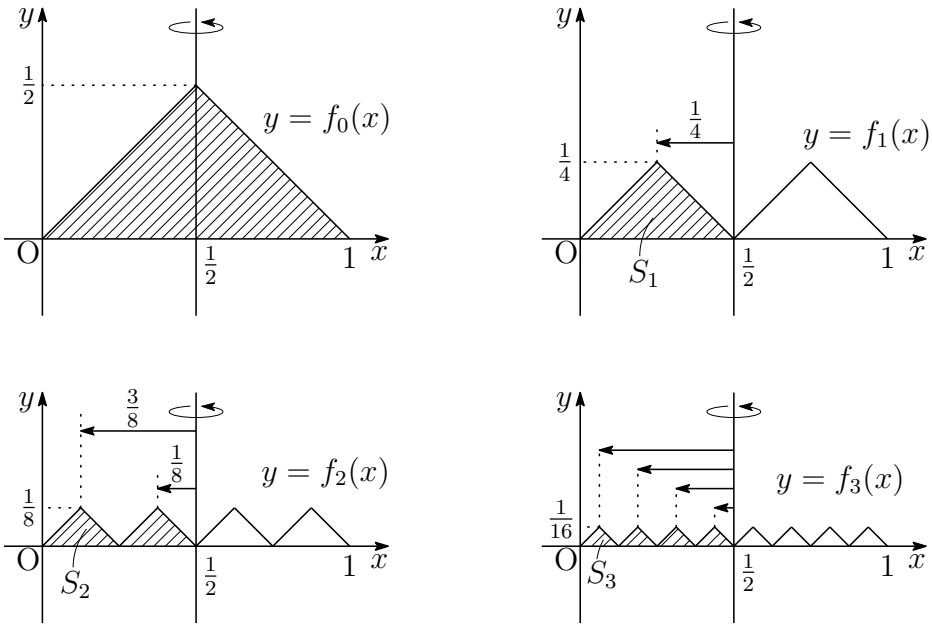
解答　(1)　$s(x)$ は x から最も近い整数までの距離であるから　$0 \leqq s(x) \leqq \dfrac{1}{2}$

$f_n(x) = \dfrac{s(2^n x)}{2^n}$ とおくと，$0 \leqq s(2^n x) \leqq \dfrac{1}{2}$ より　$0 \leqq f_n(x) \leqq \dfrac{1}{2^{n+1}}$

$s(2^n(1-x)) = s(2^n - 2^n x) = s(-2^n x) = s(2^n x)$ より　$f_n(1-x) = f_n(x)$

したがって，$f_n(x)$ のグラフは直線 $x = \dfrac{1}{2}$ に関して対称である．

$n = 0, 1, 2, 3$ について，$y = f_n(x)$ のグラフは次のようになる．



$y = f_n(x)$ を直線 $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_n とする．

$$V_0 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{24}$$

例えば，V_3 は $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の区間にある 4 つの三角形 $\left(\text{面積 } S_3 = \dfrac{1}{256}\right)$ を $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転させると

$$V_3 = 2\pi S_3 \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{7}{16}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{256} \cdot 1 = \frac{\pi}{128}$$

V_n $(n \geqq 1)$ は $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の区間にある 2^{n-1} 個の三角形 $\left(\text{面積 } S_n = \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)$ を $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転させると

$$V_n = 2\pi S_n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{(2^{n-1})^2}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+4}}$$

したがって

$$V = V_0 + \sum_{n=1}^{N} V_n$$
$$= \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{32}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{5\pi}{48} - \frac{\pi}{2^{N+4}}}$$

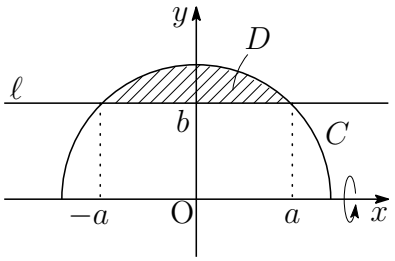
(2) (1) の結果から

$$\lim_{N\to\infty} V = \boldsymbol{\frac{5\pi}{48}}$$

補足 $y = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}\dfrac{s(2^n x)}{2^n}$ は連続関数であるが，至るところで微分不可能な曲線 (**高木曲線**) として有名である．

パップス・ギュルダンの定理[10] の応用例をもう 1 つ解説します．

半円 $C : x^2+y^2 = a^2+b^2$ $(y \geqq 0)$ と直線 $\ell : y = b$ $(b \geqq 0)$ で囲まれた領域を D とし，D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V とすると



$$V = \pi\int_{-a}^{a}(y^2-b^2)\,dx$$
$$= \pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a^3} \qquad \text{(A)}$$

V は，b に関係なく (C の半径に関係なく)，a の値により決定する．球の体積の公式と関連して覚えるとよい．実際，a が C の半径と一致するとき，球の体積である．

D の面積を S とすると，パップス・ギュルダンの定理により，D の重心は

$$\left(0,\ \frac{V}{2\pi S}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(0,\ \frac{2a^3}{3S}\right) \qquad (*)$$

この結果を使うと，次の問題を積分せずに求めることができます．

2012 年 九大理系

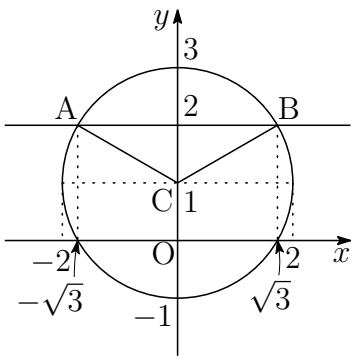
円 $x^2+(y-1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

[10] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6)

解答　D_1，D_2 の領域を次のようにとる．

$$D_1 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ y \geqq 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．
右図において，$\angle \mathrm{ACB} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_2 = \pi\cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

D_1 の重心 G_1 は，$(*)$ の重心を y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである．また D_2 の重心 G_2 は，図形の対称性に注意すると

$$\mathrm{G}_1\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{S_1}+1\right), \quad \mathrm{G}_2(0,\ 1)$$

よって，求める回転体の体積を V とすると

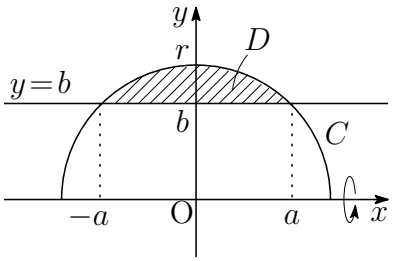
$$\begin{aligned} V &= 2\pi S_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{S_1}+1\right) + 2\pi S_2\cdot 1 \\ &= 2\pi\left(2\sqrt{3}+S_1+S_2\right) \\ &= 2\pi\left(2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right) \\ &= \boldsymbol{2\pi\left(3\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

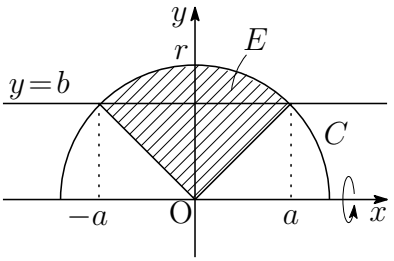
次の結果は，求積問題おいて利用する場面が多く，非常に便利です.

三日月形・扇形の回転体の体積

下の図の斜線部分 D, E を x 軸の周りに 1 回転された回転体の体積をそれぞれ V_D，V_E とすると

$$\boldsymbol{V_D = \frac{4}{3}\pi a^3}, \qquad \boldsymbol{V_E = \frac{4}{3}\pi r^2 a}$$





証明 V_D は (A) で証明済 (a だけで求まることが面白い).

E の下側の三角形の面積は ab，重心は $\left(0,\ \dfrac{2b}{3}\right)$ であるから，パップス・ギュルダンの定理により

$$\begin{aligned} V_E &= V_D + 2\pi\cdot ab\cdot\frac{2b}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3 + \frac{4}{3}\pi ab^2 \\ &= \frac{4}{3}\pi(a^2+b^2)a = \frac{4}{3}\pi r^2 a \end{aligned}$$

別証 (定積分を用いる解法)

$$\begin{aligned} \frac{V_E}{2\pi} &= \int_0^a \left\{(r^2-x^2) - \left(\frac{b}{a}x\right)^2\right\} dx = \left[\ r^2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{b^2}{3a^2}x^3\ \right]_0^a \\ &= r^2a - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}ab^2 = r^2a - \frac{1}{3}(a^2+b^2)a \\ &= r^2a - \frac{1}{3}r^2a = \frac{2}{3}r^2a \end{aligned}$$

よって $\qquad \boldsymbol{V_E = \frac{4}{3}\pi r^2 a}$ **証終**

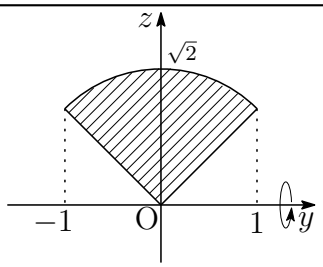
喜劇アニメ「トムとジェリー」で猫のトムが投げ飛ばされて，壁にトムの輪郭が残る場面を小さい頃よく目にしました．数学の回転の体積も壁にできた輪郭を利用して計算することも可能です．次の阪大の問題では，円すいを回転させて yz 平面 (壁) にできた輪郭 (扇形) を回転させた立体の体積として求めることができます.

2013 年 阪大理系

xyz 空間内の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0) を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする．円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答　右の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積であるから

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{8}{3}\pi$$



2017 年 東大理系

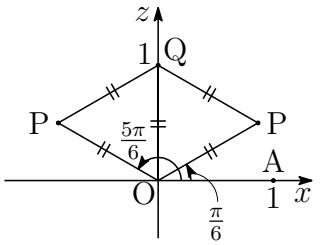
点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす．また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく．ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

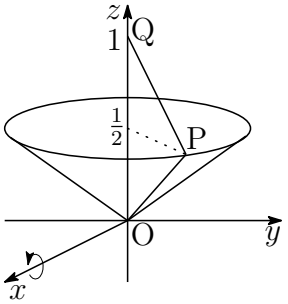
解答　(1) θ が最大または最小となるのは，zx 平面上において，P が右の図で示した位置にあるときである．$x = \cos\theta$ であるから

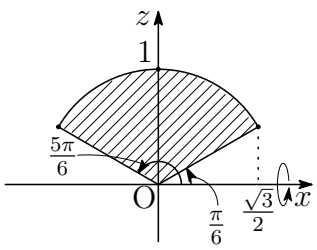
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{6}}, \quad \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上の点 (0, 0, 1) にあるとき，辺 OP は左図の円錐面を描く．点 Q を平面 $x = 0$ を動かす，すなわち，OQ を平面 $x = 0$ 上で O を中心に回転させると，この円錐面が zx 平面を通過してできる zx 平面に描く輪郭は右図の斜線部分になる．よって，求める K の体積 V は

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$





三日月形の回転体の体積の公式とパップス・ギュルダンの定理を知っていれば，次は瞬殺問題です．

2007 年 東北大理

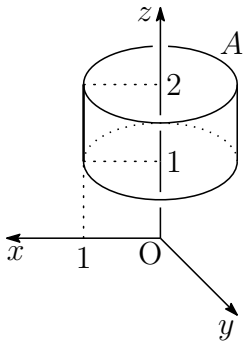
xyz 空間において，点 $(1,\ 0,\ 1)$ と点 $(1,\ 0,\ 2)$ を結ぶ線分を l とし，l を z 軸のまわりに一回転してできる図形を A とする．A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求めよ．

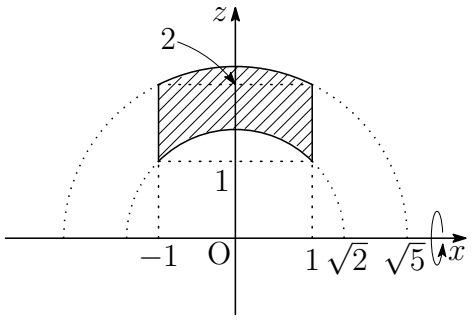
解答 A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を V とすると，V は右下の図の斜線部分を x 軸のまわり一回転してできる回転体の体積である．
zx 平面上の原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$ の同心円

$$x^2+z^2=1^2+1^2,\quad x^2+z^2=1^2+2^2$$

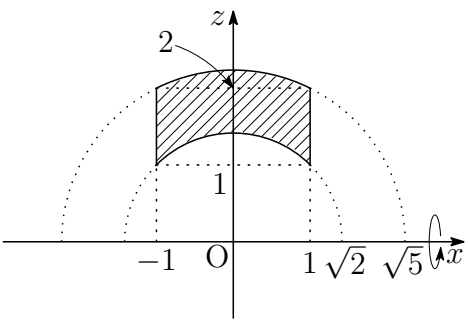
により，2 曲線 $z=\sqrt{2-x^2}$, $z=\sqrt{5-x^2}$ および 2 直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに一回転しできる回転体の体積に等しいから

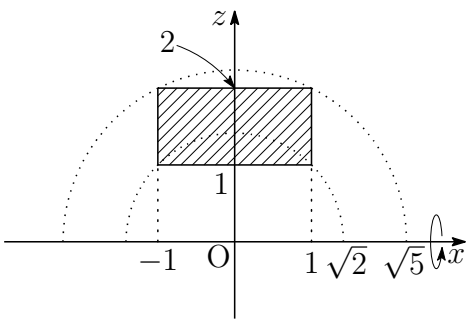
$$V=\pi\int_{-1}^{1}\{(\sqrt{5-x^2}\,)^2-(\sqrt{2-x^2}\,)^2\}dx=\pi\int_{-1}^{1}3\,dx=\mathbf{6\pi}$$





補足 曲線 $y=\sqrt{5-x^2}$ と直線 $y=2$ で囲まれた領域，曲線 $y=\sqrt{2-x^2}$ と直線 $y=1$ で囲まれた領域を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積は等しい．よって，V は右下の図の長方形を x 軸のまわり一回転させた回転体の体積に等しい．





6.9.4　ガウス・グリーンの定理

阪大理系 2022 年 5 番

座標平面において，t を媒介変数として

$$x = e^t \cos t + e^{\pi}, \quad y = e^t \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

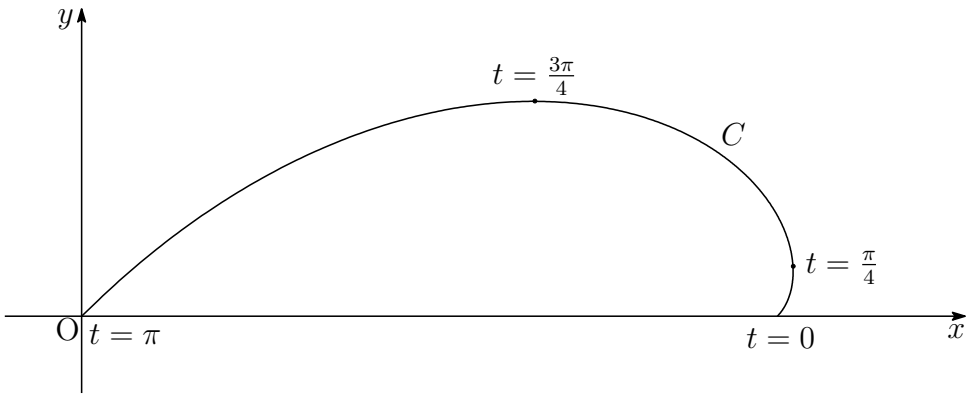
解答　$C : x = e^t \cos t + e^{\pi},\ y = e^t \sin t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t) = \sqrt{2}e^t \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) = \sqrt{2}e^t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		↗	↑	↖	←	↙	
(x, y)	(x_0, y_0)	$\cdots$	$(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}})$	$\cdots$	$(x_{\frac{3\pi}{4}}, y_{\frac{3\pi}{4}})$	$\cdots$	$(0, 0)$

ただし　$(x_0, y_0) = (1 + e^{\pi},\ 0)$，$(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}}) = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^{\pi},\ \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$，

$(x_{\frac{3\pi}{4}},\ y_{\frac{3\pi}{4}}) = \left(-\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^{\pi},\ \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$



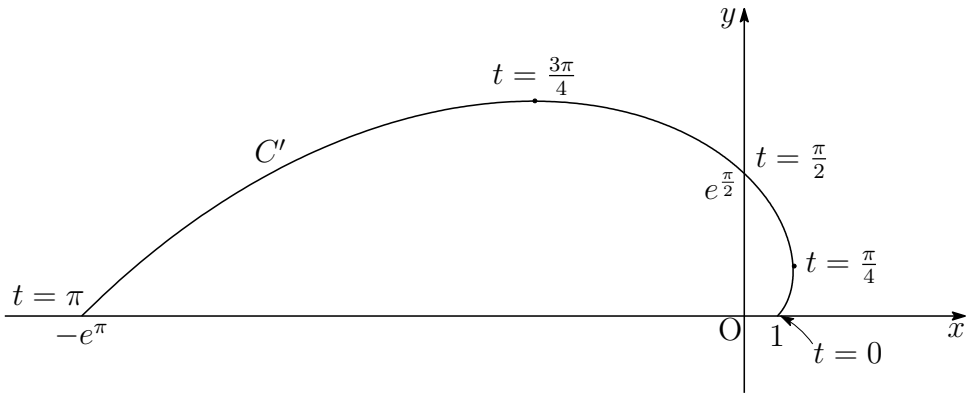
$x = f(t),\ y = g(t)$ とし，求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{f(\pi)}^{f(\frac{\pi}{4})} y\,dx - \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{4})} y\,dx = -\int_{f(0)}^{f(\pi)} y\,dx \\
&= -\int_0^{\pi} g(t)f'(t)\,dt = -\int_0^{\pi} e^t \sin t \cdot e^t(\cos t - \sin t)\,dt \\
&= -\int_0^{\pi} e^{2t}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}(\sin 2t + \cos 2t - 1)\,dt \\
&= -\frac{1}{4}\Big[\, e^{2t}(\sin 2t - 1) \,\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)}
\end{aligned}
$$

別解 C を x 軸方向に $-e^{\pi}$ だけ平行移動させた曲線

$$C' : x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積を求めてもよい.



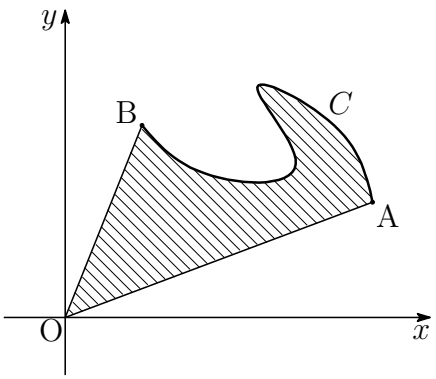
C' は O を極とする極方程式 $r = e^t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表されるから，その面積は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}\,dt = \frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)}$$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



本題は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる.

$$f(t)g'(t) - f'(t)g(t) = e^t\cos t \cdot e^t(\sin t + \cos t) - e^t(\cos t - \sin t)\cdot e^t \sin t = e^{2t}$$

したがって，求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}\,dt = \frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)}$$

補足 極座標 $x=r\cos t,\ y=r\sin t$ について $xy'-x'y=r^2$ であるから，ガウス・グリーンの定理により，極方程式における面積公式が導かれる．

千葉大 2015 年

平面上に 2 つの円

$$C_1:x^2+y^2=1,\quad C_2:\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している．点 P_1 は C_1 上を反時計周りに一定の速さで動き，点 P_2 は C_2 上を反時計周りに一定の速さで動く．二点 P_1，P_2 はそれぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する．P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,\ 0)$ に戻り，P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする．P_1 と P_2 の中点を M とおく．P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ．

解答 時刻 $t\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ における P_1，P_2 の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}_1(\cos t,\ \sin t),\quad \mathrm{P}_2\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t,\ \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

であり，2 点 P_1，P_2 の中点 M の座標 $(x,\ y)$ は

$$x=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t,\quad y=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと $(0\leqq t\leqq 2\pi)$

$$f(2\pi-t)=f(t),\quad g(2\pi-t)=-g(t)$$

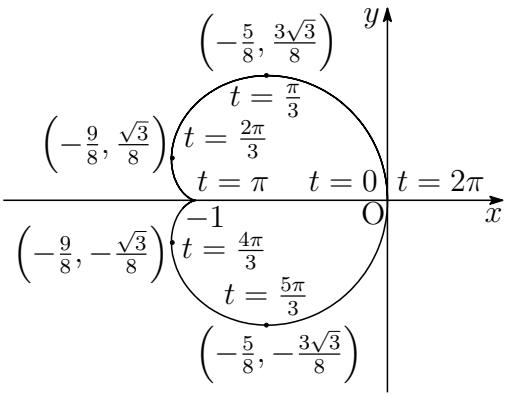
であるから，点 M が描く軌跡は x 軸に関して対称である．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\frac{1}{2}(\sin t+\sin 2t)=-\frac{1}{2}(\sin t+2\sin t\cos t)\\&=-\frac{1}{2}\sin t(1+2\cos t)\\\frac{dy}{dt}&=\frac{1}{2}(\cos t+\cos 2t)=\frac{1}{2}(\cos t+2\cos^2 t-1)\\&=\frac{1}{2}(\cos t+1)(2\cos t-1)\end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq \pi$ における x，y の増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$		↖	←	↙	↓	↘	
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\cdots$	$\left(-\frac{5}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$	$\cdots$	$\left(-\frac{9}{8},\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$	$\cdots$	$(-1,0)$

点 M の軌跡は x 軸に関して対称であるから，その概形は次のようになる．



求める面積を S とすると，その図形の x 軸に関する対称性に注意して

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_{f(\frac{2\pi}{3})}^{f(0)} y\,dx - \int_{f(\frac{2\pi}{3})}^{f(\pi)} y\,dx = -\int_{f(0)}^{f(\pi)} y\,dx \\
&= -\int_0^{\pi} g(t)f'(t)\,dt \\
&= -\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\left(-\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (2\sin^2 t + \sin^2 2t + 3\sin t \sin 2t)\,dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2}\cos 4t + 6\sin^2 t \cos t\right) dt \\
&= \frac{1}{8}\left[\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{8}\sin 4t + 2\sin^3 t\ \right]_0^{\pi} = \frac{3}{16}\pi
\end{aligned}$$

よって，求める面積は　$S = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}\pi}$

別解 M を x 軸方向に $\dfrac{3}{4}$ だけ平行移動した点 N の座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t,\quad y=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

求める面積は，点 N の描く描く軌跡によって囲まれた図形の面積と等しい．

$$x'=\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t,\quad y'=\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t$$

上の諸式から

$$\begin{aligned}xy'-x'y&=\left(\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t\right)\left(\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)\\&\qquad-\left(-\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\left(\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\\&=\frac{1}{4}(\cos^2 t+\sin^2 t)+\frac{1}{8}(\cos^2 2t+\sin^2 2t)\\&\qquad+\frac{3}{8}(\cos 2t\cos t+\sin 2t\sin t)=\frac{3}{8}(1+\cos t)\end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理により [11]

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'-x'y)\,dt=\frac{3}{16}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\,dt\\&=\frac{3}{16}\Big[\ t+\sin t\ \Big]_0^{2\pi}=\boldsymbol{\frac{3}{8}\pi}\end{aligned}$$

九大理系 2023 年 5 番

xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x=t+2\sin^2 t,\quad y=t+\sin t\quad (0<t<\pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。

(2) 曲線 C のうち $y\leqq x$ の領域にある部分と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

[11] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2016.pdf **5** 別解を参照.

解答　(1) $C : (x,\ y) = (f(t),\ g(t)) = (t + 2\sin^2 t,\ t + \sin t)$ とおくと $(0 < t < \pi)$

$f'(t) = 0$ とすると　$1 + 4\sin t \cos t = 0$

$$1 + 2\sin 2t = 0\ (0 < t < \pi) \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

このとき　$f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{7\pi}{12} + 1 - \cos\dfrac{7\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{12} + 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

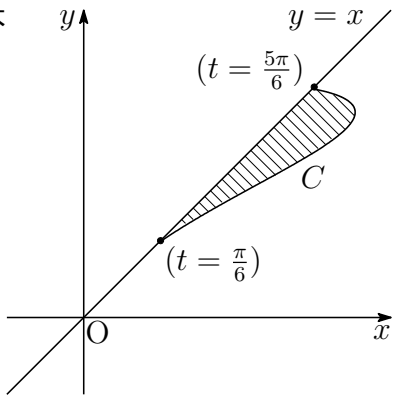
$$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{11\pi}{12} + 1 - \cos\frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{12} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，C の $t = \dfrac{7\pi}{12},\ \dfrac{11\pi}{12}$ における 2 接線

$$x = f\left(\frac{7\pi}{12}\right), \quad x = f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

が異なるから，求める接線の本数は　**2 本**

(2) 求める面積を右の図の斜線部分である．
この面積を S とすると，ガウス・グリーンの定理により



$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt$$

このとき

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (t + 2\sin^2 t)(1 + \cos t) - (1 + 4\sin t\cos t)(t + \sin t) \\ &= t(\cos t - 4\sin t\cos t) + 2\sin^2 t - \sin t - 2\sin^2 t\cos t \\ &= t(\sin t - 2\sin^2 t)' + 2\sin^2 t - \sin t - 2\sin^2 t\cos t \\ &= \{t(\sin t - 2\sin^2 t)\}' + 2(2\sin^2 t - \sin t) - \frac{2}{3}(\sin^3 t)' \end{aligned}$$

よって [12]

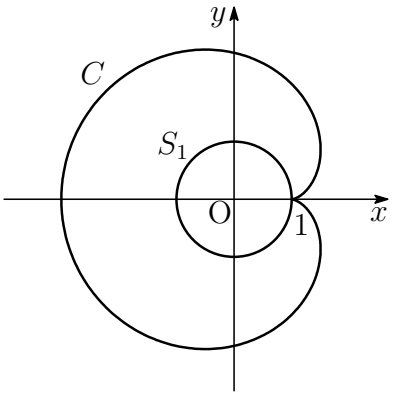
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left[\ t(\sin t - 2\sin^2 t)\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin^2 t - \sin t)\,dt - \frac{1}{3}\left[\ \sin^3 t\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - \cos 2t - \sin t)\,dt = \left[\ t - \frac{1}{2}\sin 2t + \cos t\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

[12] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf **5**

ガウス・グリーンの定理による解法がこれまでの一般的な解法よりも計算量が少なくて済みます．実際に入試問題を通してこのことを検証します．

2009 年 長崎大

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 S_1 と，点 A を中心とする半径 1 の円 S_2 がある．円 S_2 は円 S_1 に外接しながら，すべることなく円 S_1 のまわりを反時計回りに一周する．点 A の出発点は $(2,\ 0)$ であり，円 S_2 上の点で，このとき $(1,\ 0)$ に位置している点を P とする．点 A が $(2,\ 0)$ から出発し，$(2,\ 0)$ に戻ってくるとき，点 P の描く曲線を C とすると，図のようになる．また，動径 OA と x 軸の正の部分とのなす角が θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ であるときの点 P の座標を $(x(\theta),\ y(\theta))$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

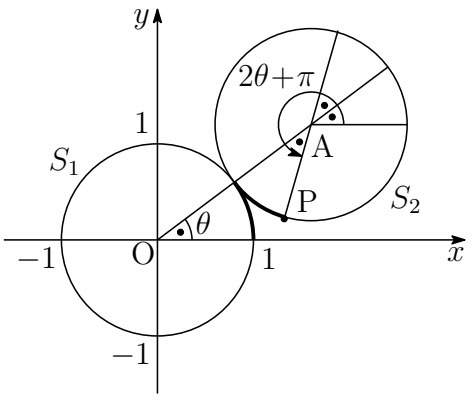


(1) $x(\theta)$，$y(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを証明せよ．

(3) 曲線 C と円 S_1 によって囲まれた部分の面積を求めよ．

解答 (1) 右の図において



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (\cos(2\theta+\pi),\ \sin(2\theta+\pi))$$
$$= (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$= (2\cos\theta - \cos 2\theta,\ 2\sin\theta - \sin 2\theta)$$

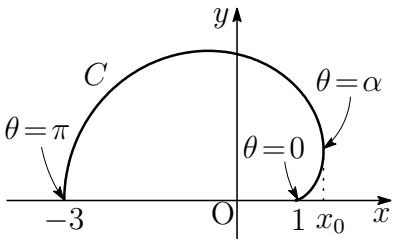
よって　$\boldsymbol{x(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta,\ y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta}$

(2)　$x(2\pi-\theta)=2\cos(2\pi-\theta)-\cos 2(2\pi-\theta)=2\cos\theta-\cos 2\theta=x(\theta)$

$y(2\pi-\theta)=2\sin(2\pi-\theta)-\sin 2(2\pi-\theta)=-2\sin\theta+\sin 2\theta=-y(\theta)$

よって，C は x 軸関して対称である．

(3) C の x 軸の上側の部分の面積を T とすると



$$\begin{aligned}
T&=\int_{-3}^{1} y\,dx=\int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\
&=\int_{\pi}^{0}(2\sin\theta-\sin 2\theta)(2\cos\theta-\cos 2\theta)'\,d\theta\\
&=\int_{0}^{\pi}(2\sin\theta-\sin 2\theta)(2\sin\theta-2\sin 2\theta)\,d\theta\\
&=\int_{0}^{\pi}(4\sin^2\theta-6\sin 2\theta\sin\theta+2\sin^2 2\theta)\,d\theta\\
&=\int_{0}^{\pi}\{2(1-\cos 2\theta)+3(\cos 3\theta-\cos\theta)+(1-\cos 4\theta)\}\,d\theta\\
&=3\pi
\end{aligned}$$

よって，求める面積を S とすると　$S=2T-\pi=2\cdot 3\pi-\pi=\mathbf{5\pi}$

補足 C の x が，$\theta=\alpha$ で最大値 x_0 とすると

$$\begin{aligned}
T&=\int_{-3}^{x_0} y\,dx-\int_{1}^{x_0} y\,dx\\
&=\int_{\pi}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta-\int_{0}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\
&=\int_{\pi}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta+\int_{\alpha}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta=\int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta
\end{aligned}$$

また，(1) の結果から

$$x'(\theta)=-2\sin\theta+2\sin 2\theta,\quad y'(\theta)=2\cos\theta-2\cos 2\theta$$

ガウス・グリーンの定理により，曲線 C で囲まれた図形の面積は

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\{x(\theta)y'(\theta)-x'(\theta)y(\theta)\}\,d\theta=\int_{0}^{2\pi}(3-3\cos\theta)\,d\theta=6\pi$$

2016 年 九工大 [情]

原点 O を中心とする半径 1 の円を C_1 とする．円 C_1 に外接しながら，半径 1 の円 C_2 がすべることなく回転する．円 C_2 の中心を P とし，円 C_2 上の点 Q は最初，x 軸上の点 A$(3,\ 0)$ にあるものとする．半直線 PQ 上で点 P からの距離が 2 の点を R とし，OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とする．C_2 が回転して θ が 0 から 2π まで変化するとき，点 R が描く曲線を C とする．曲線 C の概形を図 1 に示す．以下の問いに答えよ．

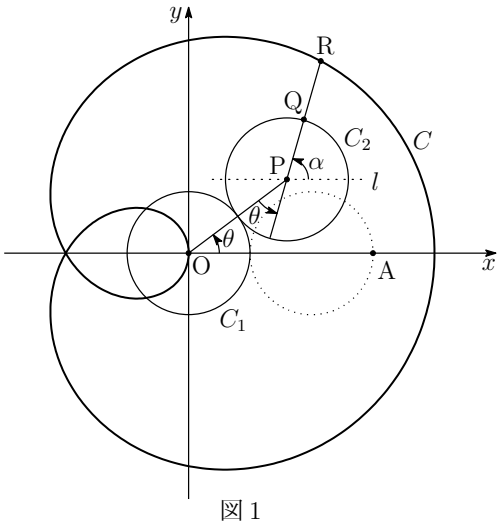


図 1

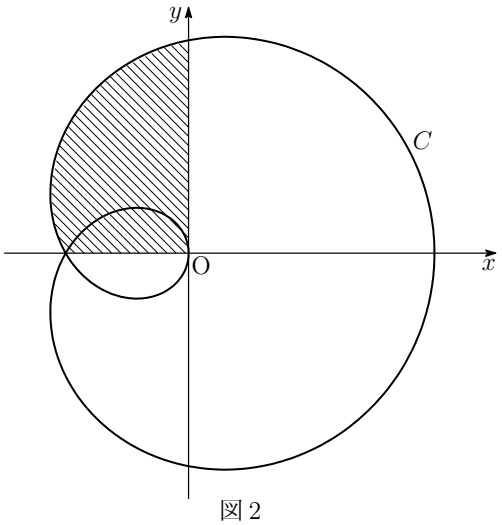


図 2

(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 P を通り x 軸と平行な直線を l とする．直線 l と線分 PR のなす角 α を，θ を用いて表せ．また，R の座標を θ を用いて表せ．

(3) 曲線 C と x 軸の共有点の座標をすべて求めよ．

(4) 曲線 C と y 軸の共有点の座標をすべて求めよ．

(5) 点 R の x 座標が最小となるときの点 R の座標をすべて求めよ．

(6) 曲線 C と x 軸，y 軸に囲まれた図 2 の斜線部分の面積を求めよ．

解答 (1) OP $= 2$，OP と x 軸の正の向きとなす角が θ であるから

$$\mathbf{P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)}$$

(2) 線分 OP の P の延長と C_2 の交点を Q′ とすると，直線 l と PQ′ のなす角は θ であり，$\angle \mathrm{Q'OQ} = \theta$ であるから

$$\alpha = \theta + \angle \mathrm{Q'OQ} = \theta + \theta = \boldsymbol{2\theta}$$

$\mathrm{PR} = 2$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}}$

$$= (2\cos\theta,\ 2\sin\theta) + (2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$$
$$= (2\cos\theta + 2\cos 2\theta,\ 2\sin\theta + 2\sin 2\theta)$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{R}(2\cos\theta + 2\cos 2\theta,\ 2\sin\theta + 2\sin 2\theta)}$

(3) $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると，(2) の結果から

$$y = 2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 4\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，$y = 0$ を解くと　$\theta = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$

これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

$$(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (4,\ 0)$$

よって，求める x 軸との共有点の座標は

$$\boldsymbol{(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0)}$$

(4) (3) と同様に，(2) の結果から

$$x = 2\cos\theta + 2\cos 2\theta = 4\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

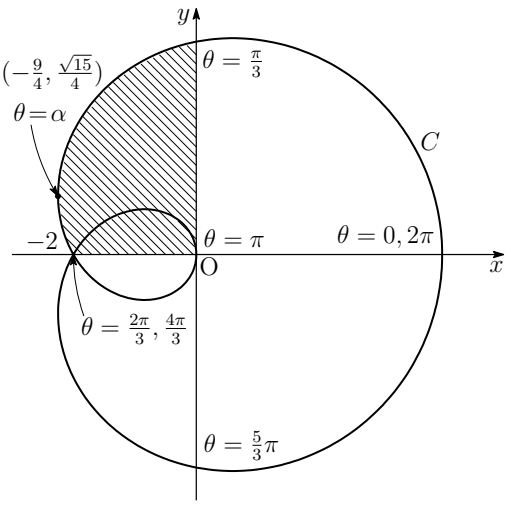
$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，$y = 0$ を解くと　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

$$\boldsymbol{(0,\ 2\sqrt{3}),\ (0,\ 0),\ (0,\ -2\sqrt{3})}$$

(5) (2) の結果から

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\theta + 2\cos 2\theta \\ &= 2\cos\theta + 2(2\cos^2\theta - 1) \\ &= 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 \\ &= 4\left(\cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$



点 R の x 座標が最小となるとき

$$\cos\theta = -\frac{1}{4}$$

このとき $\sin\theta = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos 2\theta = -\dfrac{7}{8}$，$\sin 2\theta = \mp\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ (複号同順)

よって，求める座標は $\left(-\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}},\ \pm\dfrac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{4}}\right)$

(6) よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} y\,dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta + 2\sin 2\theta)(2\cos\theta + 2\cos 2\theta)'\,d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin\theta + \sin 2\theta)(\sin\theta + 2\sin 2\theta)\,d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2\theta + 3\sin\theta\sin 2\theta + 2\sin^2 2\theta)\,d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 3\times\frac{\cos\theta - \cos 3\theta}{2} + 2\times\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (6 + 6\cos\theta - 2\cos 2\theta - 6\cos 3\theta - 4\cos 4\theta)\,d\theta \\ &= \left[\ 6\theta + 6\sin\theta - \sin 2\theta - 2\sin 3\theta - \sin 4\theta\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \mathbf{2\pi} \end{aligned}$$

補足 $S = \displaystyle\int_{-\frac{9}{4}}^{0} y\,dx - \int_{-\frac{9}{4}}^{-2} y\,dx = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta - \int_{\alpha}^{\frac{2\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$

別解　(2) の結果から　$x = 2\cos\theta + 2\cos 2\theta,\quad y = 2\sin\theta + 2\sin 2\theta$

$$x' = -2\sin\theta - 4\sin 2\theta,\quad y' = 2\cos\theta + 4\cos 2\theta$$

ガウス・グリーンの定理により

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (xy' - x'y)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (6 + 6\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \Big[\ 6\theta + 6\sin\theta\ \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \boldsymbol{2\pi}$$

2021 年 熊大医

媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C : x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),\quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

を考える。

(1) 点 M の座標を $(0,\ 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して，MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。

(2) (1) の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。Q における C の接線を ℓ とするとき，曲線 C と接線 ℓ および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3) (2) の D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答　(1) 媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C : x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),\quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \qquad (*)$$

は，$(**)$ $x = \sqrt{y^2 + 1}$ である．C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と $\mathrm{M}(0,\ 1)$ の距離は

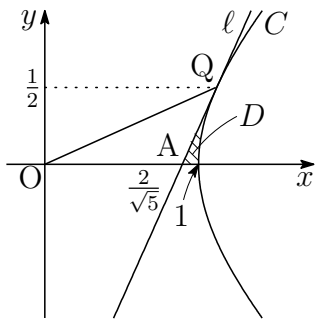
$$\mathrm{MP}^2 = x^2 + (y-1)^2 = y^2 + 1 + (y-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

MP が最小となるとき，$y = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad e^{2t} - e^t - 1 = 0$$

$e^t > 0$ に注意して　$e^t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　よって　$\boldsymbol{t_0 = \log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(2) $y=\dfrac{1}{2}$ を (**) を代入して　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$



$x^2-y^2=1$ であるから

$$2x-2yy'=0 \quad \text{ゆえに} \quad yy'=x$$

C 上の点 Q における接線 ℓ の傾きは

$$\frac{1}{2}y'=\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y'=\sqrt{5}$$

したがって，ℓ の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=\sqrt{5}\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=\sqrt{5}x-2$$

ℓ と x 軸の交点を A とすると　$\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right)$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ であるから

$$x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}y=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cdot\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})-\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\cdot\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})=1$$

求める領域 D は，上の図の斜線部分であるから，その面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{t_0}dt-\triangle\mathrm{OAQ}\\&=\frac{1}{2}t_0-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}\end{aligned}$$

別解　$\sqrt{x^2-1}$ の積分 (一般には，$\sqrt{x^2+A}$ の積分)[13]

$$(x\sqrt{x^2-1})' = \sqrt{x^2-1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\{\log(x+\sqrt{x^2-1}\}' = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$\{x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})\}' = 2\sqrt{x^2-1}$$

したがって　$\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})\} + C$

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\,dx &= \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \sqrt{x^2-1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\, x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1}) \,\Big]_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}\end{aligned}$$

したがって，領域 D の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{QAB} - \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\,dx \\ &= \frac{\sqrt{5}}{40} - \left(\frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}\end{aligned}$$

[13] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.162 (物理ページ p.167))

(3) 曲線 $C : x = \sqrt{y^2+1}$ と x 軸，y 軸，直線 $y = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dy = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (y^2+1)\,dx = \pi \left[\frac{y^3}{3} + y \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{24}\pi$$

ℓ と x 軸，y 軸，直線 $y = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる円錐台の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right\} \frac{1}{2} = \frac{61}{120}\pi$$

求める回転体の体積を V とすると

$$V = \frac{13}{24}\pi - \frac{61}{120}\pi = \boldsymbol{\frac{\pi}{30}}$$

補足 上面の半径 a，底面の半径 b，高さ h の円錐台の体積は [14]

$$\frac{\pi}{3}(a^2+ab+b^2)h$$

別解 △QAB を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_3 とすると

$$V_3 = \pi \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \frac{1}{2} - V_2 = \frac{5}{8}\pi - \frac{61}{120}\pi = \frac{7}{60}\pi$$

曲線 $C : y = \sqrt{x^2-1}$ と x 軸，直線 $x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_4 とすると，バウムクーヘン型の求積法により [15]

$$V_4 = 2\pi \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{2\pi}{3} \left[(x^2-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\pi}{12}$$

よって $\quad V = V_3 - V_4 = \dfrac{7}{60}\pi - \dfrac{\pi}{12} = \boldsymbol{\frac{\pi}{30}}$

補足 △QAB の重心の x 座標は $\quad \dfrac{1}{3} \left(1 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2} \right) = \dfrac{7\sqrt{5}}{15}$

V_3 は，パップス=ギュルダンの定理により [16]

$$V_3 = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{5}}{15} \cdot \triangle\mathrm{QAB} = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{5}}{15} \cdot \frac{\sqrt{5}}{40} = \frac{7}{60}\pi$$

[14] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2019.pdf (p.4)
[15] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2016.pdf **2**
[16] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf **1**

ガウス・グリーンの定理は，y が x の関数 (x が y の関数でもよい) のとき

$$\boldsymbol{S=\int_{\alpha}^{\beta}(xy'-y)\,dx}$$

となる．

熊大医医 2011 年

xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,-1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

解答　(1) R は，xy 平面上の放物線 $y=x^2-x+1$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上を動く．

放物線と原点を通る直線 $y=kx$ が接するときの k の値は，2 式から y を消去して

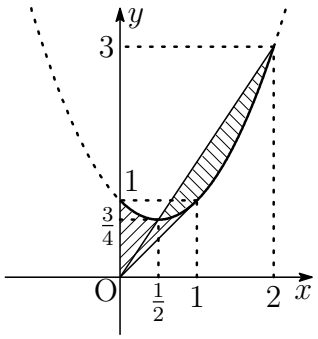
$$x^2-x+1=kx \quad \text{すなわち} \quad x^2-(k+1)x+1=0$$

この方程式の判別式および重解について，$D=0$，$x=\dfrac{k+1}{2}$ であるから

$$(k+1)^2-4\cdot1\cdot1=0,\ \ 0 \leqq \frac{k+1}{2} \leqq 2$$

したがって　　$k=1$

よって，原点を通る直線 $y=x$ は，点 $(1,\ 1)$ で接する．原点と点 $(2,\ 3)$ を通る直線 $y=\frac{3}{2}x$ は，放物線との交点 $(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4})$ をもつから，求める面積を S とすると，右の図から



$$S=\int_0^1\{(x^2-x+1)-x\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^2\left\{\frac{3}{2}x-(x^2-x+1)\right\}dx$$
$$=\int_0^1(x-1)^2\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx=\boldsymbol{\frac{43}{48}}$$

別解 (ガウス・グリーンの定理による求積法)

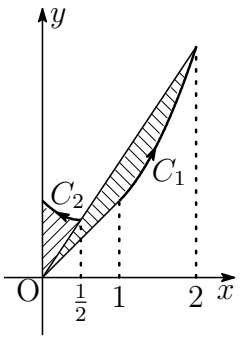
$y = x^2 - x + 1$ より，$y' = 2x - 1$ であるから

$$xy' - y = x(2x-1) - (x^2 - x + 1) = x^2 - 1$$

右の図から，求める面積 S は

(注意：積分区間は，回転角の向きにとる)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_1^2 (x^2-1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^0 (x^2-1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \frac{x^3}{3} - x\ \right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[\ \frac{x^3}{3} - x\ \right]_{\frac{1}{2}}^0 = \boldsymbol{\frac{43}{48}} \end{aligned}$$



(2) K は xy 平面に関して対称であるから，求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}S\cdot\mathrm{OP}\times 2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{43}{48}\cdot 1\times 2 = \boldsymbol{\frac{43}{72}}$$

6.9.5　極方程式による求積問題

神戸大理系 2016 年 5 番

極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標を求めよ．

(2) $\lim\limits_{\theta \to \pi} \dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ．

(4) 曲線 C の長さを求めよ．

解答　(1) $r = 1 + \cos\theta$ より

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

これらを θ について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -\sin\theta(1+2\cos\theta), \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\sin\theta\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= -(1-\cos^2\theta) + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= (1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta) \end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の解は　$\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　　$\mathbf{(2,\ 0)},\ \mathbf{(0,\ 0)},\ \left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\ \pm\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}\right)$

また，$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の解は　$\theta = \pi,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　　$\mathbf{(0,\ 0)},\ \left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}},\ \pm\dfrac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}\right)$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{(1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)}$

$$=\frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta}$$

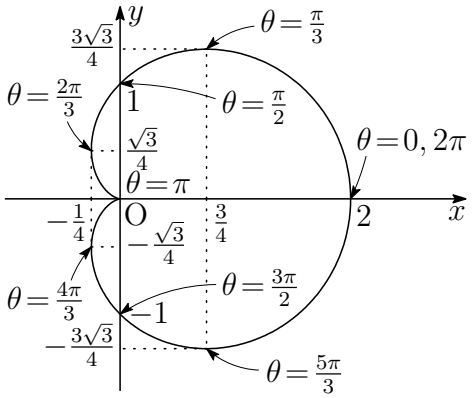
$$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta}$$

よって $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=\lim_{\theta\to\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta}=\frac{0}{1+1}\cdot\frac{1+2}{1-2}=\mathbf{0}$

(3) $f(\theta)=1+\cos\theta$ とすると，$f(2\pi-\theta)=r(\theta)$．C は x 軸に関して対称であるから，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における C の増減を調べる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta})$		$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	
(x,y)	$(2,0)$	$\cdots$	$(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4})$	$\cdots$	$(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$	$\cdots$	$(0,0)$

上の増減表および (2) の結果から，C の概形は次のようになる．



(4) $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

ゆえに　$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

$r = 1 + \cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2 \\ &= 2(1+\cos\theta) = 4\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

よって，曲線 C の長さを l とすると

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \left[\, 4\sin\frac{\theta}{2} \,\right]_0^{\pi} = 4 \end{aligned}$$

よって　　$l = \mathbf{8}$

補足 曲線 $r = a(1+\cos\theta)$ は，カージオイド (cardioid) または心臓形という．

解説

C の x 軸の上側の部分と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\, r^2\sin\theta\cos\theta \,\Big]_{0}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\, \frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \,\Big]_{0}^{\pi} = \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

C の x 軸の上側の部分を x 軸のまわりに 1 回転した回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y^2\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y^2\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} (r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\Big[\, r^3\sin^2\theta\cos\theta \,\Big]_{0}^{\pi} + \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\Big[\, -\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4 \,\Big]_{0}^{\pi} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

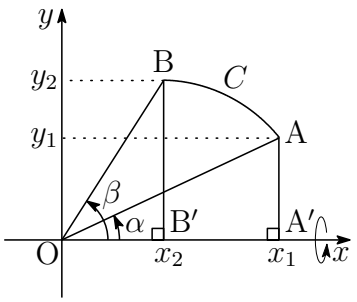
よって　　$V = \dfrac{8}{3}\pi$

曲線 $r = f(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の弧長 l，x 軸と囲まれた部分の面積 S，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$l = \int_{0}^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta, \quad S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\,d\theta, \quad V = \frac{2\pi}{3}\int_{0}^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta$$

極方程式と面積

$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から x 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．$S_A = \triangle \mathrm{OAA'}$，$S_B = \triangle \mathrm{OBB'}$ とし，曲線 C，x 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域 D_C の面積を S_C，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域 D の面積を S とすると



$$
\begin{aligned}
S_C &= \int_{x_2}^{x_1} y\,dx = \int_{\beta}^{\alpha} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\, r^2\sin\theta\cos\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -S_B + S_A + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$S = S_C + S_B - S_A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta$

極方程式と x 軸の周りの回転体の体積

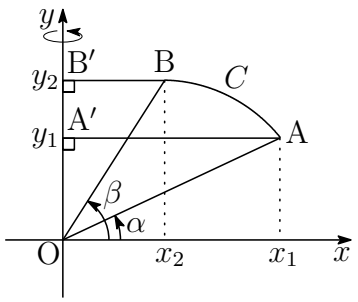
次に $\triangle \mathrm{OAA'}$，$\triangle \mathrm{OBB'}$ を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると

$$
\begin{aligned}
V_C &= \pi\int_{x_2}^{x_1} y^2\,dx = \pi\int_{\beta}^{\alpha} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} (r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\Big[\, r^3\sin^2\theta\cos\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -V_B + V_A + \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$V = V_C + V_B - V_A = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta$

極方程式と y 軸の周りの回転体の体積

$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から y 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．曲線 C，y 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域を D_C とし，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域を D とする．△OAA′，△OBB′ を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると



$$
\begin{aligned}
V_C &= \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^2\cos^2\theta(r'\sin\theta + r\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} (r^3)'\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\Big[\, r^3\cos^2\theta\sin\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} - \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(-2\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta)d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= V_B - V_A + \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$V = V_C + V_A - V_B = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta$

極方程式の計量

- 弧長 l　　$\boldsymbol{l = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$
- 面積 S　　$\boldsymbol{S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta}$
- x 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi)}$$

- y 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right)}$$

2009 年 京大理系

xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r = 2 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ により表される曲線を C とする．C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

解答 $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2\pi}{3}\left[\ -\frac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\ \right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\dfrac{40}{3}\pi}$

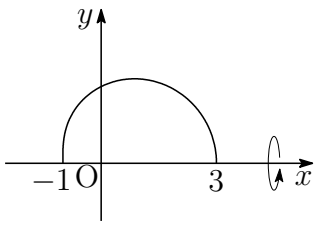
瞬殺過ぎて心配であれば，次のように r を残して公式を導いて最後にこれを利用する方が計算は簡単です (最初から $r = 2 + \cos\theta$ で計算すると計算は重い)．

計算結果 (goal) がどこにあるか分かって計算を走らせるのは楽です．難関大を受験する生徒は一度は走っておく計算 (route) だと思います．

別解 $r = 2 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ より

$$x = r\cos\theta = (2+\cos\theta)\cos\theta$$

$\theta = 0$ のとき $x = 3$，$\theta = \pi$ のとき $x = -1$



求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^{3} y^2\,dx = \pi\int_{\pi}^{0} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\int_0^{\pi}(r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \pi\int_0^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\left[\ r^3\sin^2\theta\cos\theta\ \right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)d\theta + \pi\int_0^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2\pi}{3}\left[\ -\frac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\ \right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\dfrac{40\pi}{3}}
\end{aligned}$$

一般的な解答と極方程式を利用した別解を紹介します.

2016 年 東大理系

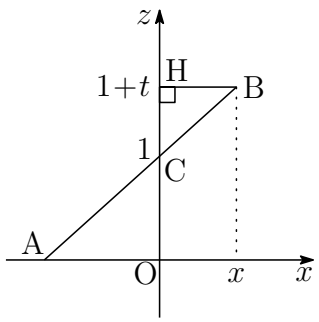
座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a)，(b) をみたしながら動く.

(a) 点 A は平面 $z=0$ 上にある.

(b) 点 C$(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある.

このとき，線分 AB が通過することのできる範囲を K とする．K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ.

解答 B の z 座標を $1+t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$，B から z 軸に降ろした垂線 BH の長さを x とすると



$$\mathrm{BC}=\sqrt{t^2+x^2},\quad \mathrm{CA}=\frac{\mathrm{BC}}{t}=\frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t}$$

$\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=2$ であるから

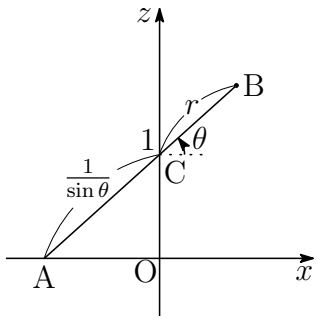
$$\sqrt{t^2+x^2}+\frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t}=2$$

ゆえに $\quad \sqrt{t^2+x^2}=\dfrac{2t}{t+1}\quad$ したがって $\quad x^2=\left(\dfrac{2t}{t+1}\right)^2-t^2$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^1 x^2\,dt=\pi\int_0^1\left\{\left(\frac{2t}{t+1}\right)^2-t^2\right\}dt\\
&=\pi\int_0^1\left\{\left(2-\frac{2}{t+1}\right)^2-t^2\right\}dt\\
&=\pi\int_0^1\left\{4-\frac{8}{t+1}+\frac{4}{(t+1)^2}-t^2\right\}dt\\
&=\pi\left[4t-8\log(t+1)-\frac{4}{t+1}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\boldsymbol{\pi\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)}
\end{aligned}$$

別解　zx 平面上で C を極として，$r = \mathrm{CB}$，CB と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると，求める体積 V は



$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^3\cos\theta\,d\theta$$

このとき，$r = 2 - \dfrac{1}{\sin\theta}$ であるから

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{\sin\theta}\right)^3 \cos\theta\,d\theta$$

ここで，$u = \sin\theta$ とおくと　$\dfrac{du}{d\theta} = \cos\theta$

θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
u	$\frac{1}{2} \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2 - \frac{1}{u}\right)^3 du \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(8 - \frac{12}{u} + \frac{6}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right) du \\ &= \frac{2\pi}{3}\left[\, 8u - 12\log u - \frac{6}{u} + \frac{1}{2u^2} \,\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \boldsymbol{\pi\left(\frac{17}{3} - 8\log 2\right)} \end{aligned}$$

6.10 いろいろな曲線

6.10.1 アストロイド

大分大医 2016 年

中心が原点 O で半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する．円 C_2 上の点 P は最初に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ にあるとする．円 C_2 の中心を B とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle \mathrm{AOB} = \theta$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表しなさい．

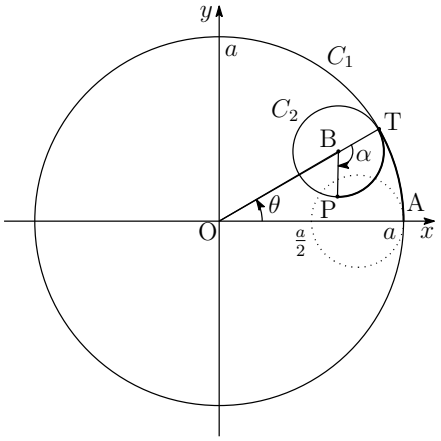
(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めなさい．

解答 (1) C_1 と C_2 の接点を T，$\alpha = \angle \mathrm{PBT}$ とする．C_1 および C_2 上の弧について，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}} = \overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから

$$a\theta = \frac{a}{4} \times \alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 4\theta$$

BT の x 軸のなす角が θ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \frac{a}{4}(\cos(\theta - \alpha), \sin(\theta - \alpha)) \\ &= \frac{a}{4}(\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta)) \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)}\end{aligned}$$



(2) $\mathrm{OB} = \mathrm{OT} - \mathrm{BT} = a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{3}{4}a$，$\angle \mathrm{AOB} = \theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \\ &= \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta - \sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{3}{4}a(\sin\theta + \sin 3\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{4}a(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

したがって　$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{9}{8}a^2(1 - \cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta)$

$$= \frac{9}{8}a^2(1 - \cos 4\theta) = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta$$

求める距離を s とすると，$\dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$ の周期が $\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して

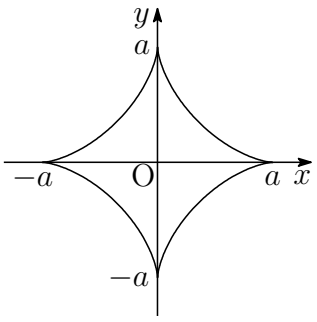
$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}a|\sin 2\theta|\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2\theta\,d\theta = \left[-3a\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{6a}$$

解説　(2) の結果は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$$

となり，その軌跡はアストロイドである．



$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと

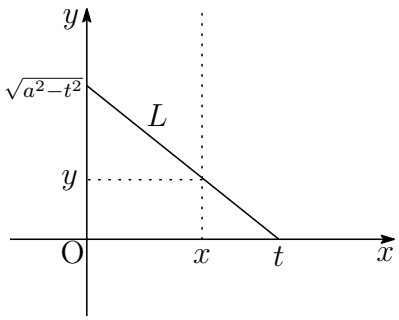
$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) &= a\left(-3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cos\theta\right) \\ &= 3a\sin\theta\cos\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta) \\ &= \frac{3}{2}a\sin 2\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)\end{aligned}$$

ゆえに　$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2} = \dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$

アストロイド (astroid) の x 軸および y 軸に関する対称性により

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}a\sin 2\theta\, d\theta = 3a\Big[-\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \end{aligned}$$

補足 長さ a の線分 L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，L の包絡線 (L の通る領域と通らない領域の境界線) を求める．
右の図のように L が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にあるとき，L 上の点 $(x,\ y)$ について



$$y = -\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}x + \sqrt{a^2-t^2} \quad \cdots(*)$$

が成立する．ここで，x を固定し，y を t の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}x - \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{a^2x - t^3}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$
これを $(*)$ に代入すると

$$y = -x^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$$

したがって　$\begin{aligned} y^2 &= x^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2 \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \end{aligned}$

よって　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

一般に，L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，上式は成立する．

6.10.2　焦線 (caustic)

東工大 2016 年

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ.

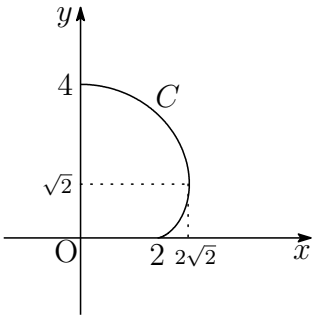
(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

解答　(1) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$　$(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$

上式を t について微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 6\cos 2t \sin t$$
$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = 6\sin 2t \sin t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		↗	↑	↖	
(x, y)	(2,0)	$\cdots$	$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\cdots$	$(0, 4)$



C の概形は右の図のようになる.

(2) 求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^4 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)(3\cos t - 3\cos 3t)\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t - 4\cos 3t\cos t + \cos^2 3t)\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3}{2}(1+\cos 2t) - 2(\cos 4t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\right\} dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{2}\cos 2t - 2\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t\right) dt \\
&= 3\left[\ 2t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{1}{12}\sin 6t\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boldsymbol{3\pi}
\end{aligned}
$$

別解 本題は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる．

$$f(t)=3\cos t-\cos 3t,\quad g(t)=3\sin t-\sin 3t\quad \left(0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$$f'(t)=-3(\sin t-\sin 3t),\quad g'(t)=3(\cos t-\cos 3t)$$

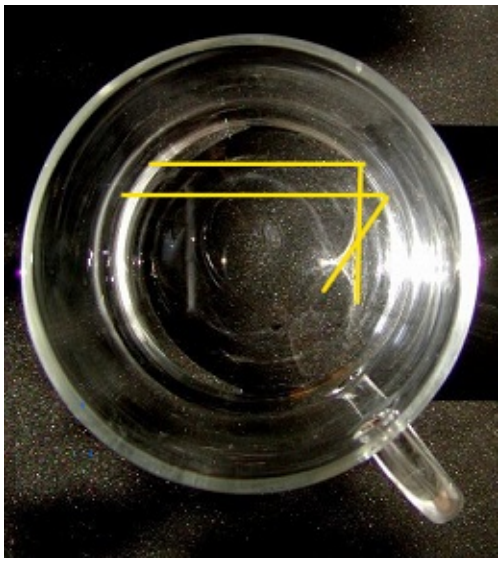
したがって

$$\begin{aligned} f(t)g'(t)-f'(t)g(t) &= (3\cos t-\cos 3t)\cdot 3(\cos t-\cos 3t)\\ &\qquad -(-3)(\sin t-\sin 3t)(3\sin t-\sin 3t)\\ &= 12(1-\cos 3t\cos t-\sin 3t\sin t)\\ &= 12(1-\cos 2t) \end{aligned}$$

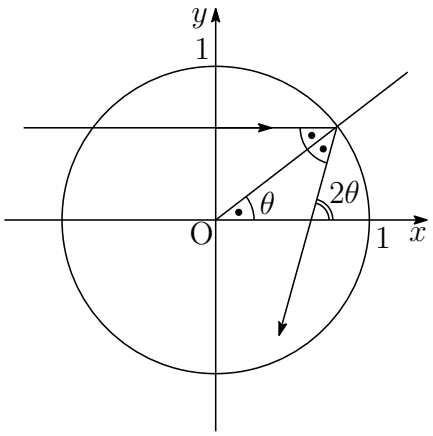
よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\,dt\\ &= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt\\ &= 6\left[\,t-\frac{1}{2}\sin 2t\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{3\pi} \end{aligned}$$

数学と物理に関連する問題として，焦線 (caustic) について取り上げます．円柱型のガラスコップを太陽光の当てると，写真のようにコップの内側に明るく光るところが現れる．



コップを原点を中心とする半径 1 の円とし，下の図のように，x 軸に平行な光線が，点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ で反射した光線 (直線の方程式) は，点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通り，傾き $\tan 2\theta$ の直線であるから



$$y - \sin\theta = (\tan 2\theta)(x - \cos\theta)$$

これを整理すると

$$(*)\quad x\sin 2\theta - y\cos 2\theta = \sin\theta$$

光線の包絡線上の点を $\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ とすると，P は $(*)$ 上の点であるから

$$x(\theta)\sin 2\theta - y(\theta)\cos 2\theta = \sin\theta \tag{1}$$

また，包絡線の接ベクトル $(x'(\theta),\ y'(\theta))$ は，$(*)$ の法ベクトルと垂直であるから

$$x'(\theta)\sin 2\theta - y'(\theta)\cos 2\theta = 0 \tag{2}$$

(1) を θ で微分すると

$$x'(\theta)\sin 2\theta - y'(\theta)\cos 2\theta + 2x(\theta)\cos 2\theta + 2y(\theta)\sin 2\theta = \cos\theta \tag{3}$$

(2) を (3) に代入すると

$$2x(\theta)\cos 2\theta + 2y(\theta)\sin 2\theta = \cos\theta \tag{4}$$

(1)，(4) から

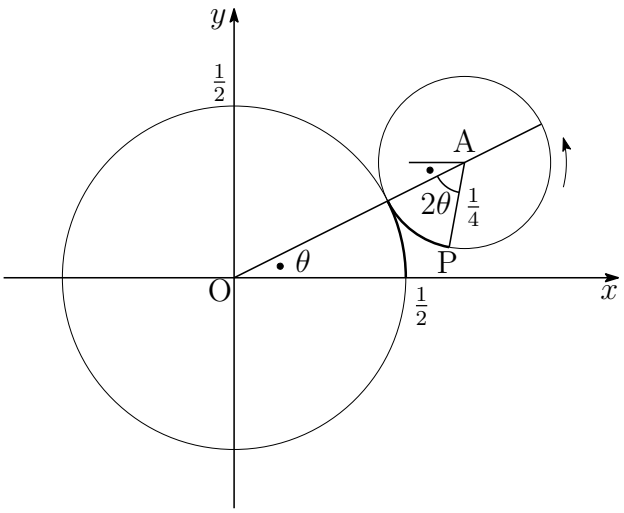
$$\begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ 2\cos\theta & 2\sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -2\cos\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta + \sin 2\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ \sin 3\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

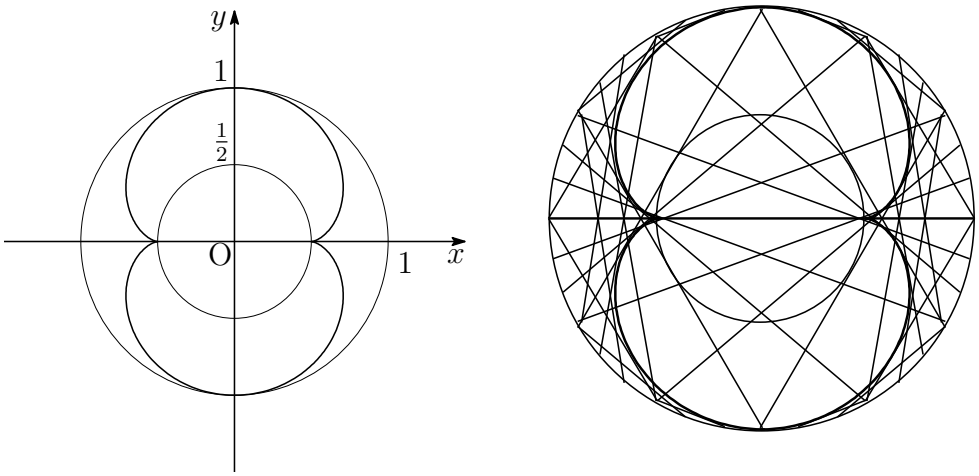
$\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ の描く図形は，半径 $\dfrac{1}{2}$ の基準円と半径 $\dfrac{1}{4}$ の動円の外サイクロイド曲線 (epicycloid) である．特に，動円の半径が基準円の半径の $\dfrac{1}{2}$ である曲線のことを焦線 (caustic) という．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos(\pi + 3\theta) \\ \sin(\pi + 3\theta) \end{pmatrix}$$



$\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ の表す軌跡を $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ で描くと次の様になります (円は補助線). 焦線 (caustic) は $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ で，y 軸の右側になります.

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ \sin 3\theta \end{pmatrix}$$

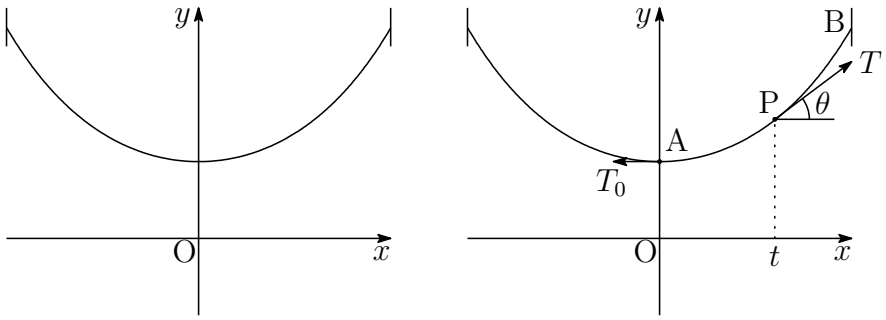


基準円の半径が 2 で動円 (外接円) の半径が 1 の焦線 (caustic) の問題 (東工大 2016 年) が出題されている．基準円と動円の半径が等しい外サイクロイド (epicycloid) の問題 (長崎大 2009 年) も出題されている．また，基準円の内接円 (動円) の 1 点が描く曲線を内サイクロイド (hypocycloid) という．特に動円 (内接円) の半径が基準円の $\frac{1}{4}$ であるとき，星芒形 (astroid) となる問題 (大分大医医 2016 年) が出題されている．内サイクロイドに関する問題は東大理系 2004 年もある．これらの定型問題は経験による差が大きい．入試対策の基本として，難問・奇問に時間をかけるよりもこうしたオーソドックスな問題をしっかりやり上げておくことが大切だと思います．これらの問題に関しては面積を求めさせることが非常に多く，ガウス・グリーンの定理をさりげなく使ってもよいのではないでしょうか (計算量がかなり圧縮されます).

6.10.3　懸垂曲線

数学と物理に関連する問題として，懸垂曲線 (catenary curve) を取り上げます．左下の図のように，両端を固定した 2 点に吊るした (均等な) ロープの曲線に関する問題です．最下点を A，端点の一方を B とする．物理的な知識として，ロープにかかる水平方向の張力は一定である．なぜなら，ロープ上の適当な 2 点 C，D を端点とする物体について，水平方向の釣り合いにより，C，D それぞれに働く張力は等しい．そこで A に働く張力を T_0 とする．ロープ上の点 P における x 座標を t とし，P における曲線の接線の水平方向となす角を θ とする．ロープの単位長あたりの質量を ρ，重力加速度を g，曲線の方程式を $y = f(x)$ とすると，次の 3 式が成立する．

$$T\cos\theta = T_0, \quad T\sin\theta = \rho g \int_0^t \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \quad \tan\theta = f'(t) \qquad (*)$$



$(*)$ の第 2 式の辺々を第 1 式の辺々で割ると

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\rho g}{T_0} \int_0^t \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$k = \dfrac{\rho g}{T_0}$ とおくと (k は定数)，上式および $(*)$ の第 3 式から

$$f'(t) = k \int_0^t \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

この両辺を t について微分すると

$$f''(t) = k\sqrt{1 + f'(t)^2}$$

t を x に置き換えると，条件に注意して

$$f'(0) = 0, \quad f''(x) = k\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

初期条件に注意して

$$\int \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}\, dx = k \int dx$$

$$\log\{f'(x) + \sqrt{1 + f'(x)^2}\} = kx$$

$$f'(x) + \sqrt{1 + f'(x)^2} = e^{kx}$$

上式から $$-f'(x) + \sqrt{1 + f'(x)^2} = e^{-kx}$$

上の 2 式から

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}) \quad \text{ゆえに} \quad f(x) = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) + C$$

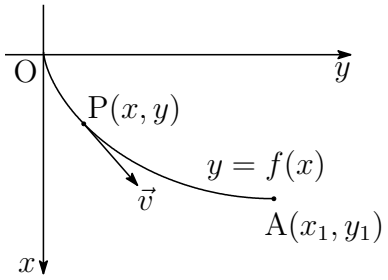
一般に，懸垂線の方程式は，$C = 0$ として

$$y = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) \quad \text{または} \quad y = \frac{k}{2}(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}})$$

と表記される．

6.10.4　最速降下曲線

数学と物理に関連する問題として，最速降下曲線について取り上げます．下の図では O と A を結ぶ経路に沿って質点が動くとき (初速度 0)，O から A まで最短の時間で到着する経路に関する問題です．重力は x 軸方向にとります．



P の速さは $\sqrt{2gx}$，P における単位接ベクトルは $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\ \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)$

したがって，P における速度ベクトルは

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\sqrt{2gx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\ \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)$$

x 成分に注目すると

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2gx}{1+y'^2}}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{dt}{dx}=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}$$

O から A の移動に要する時間を T とすると

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_0}L_0(x,y')\,dx,\quad L_0(x,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}$$

最短経路の曲線を $y = f(x)$ とし，必要な回数だけ微分可能な (試験) 関数 $\phi(x)$ を

$$\phi(0) = \phi(x_1) = 0$$

を満たすようにとる．また，十分 0 に近い ε をとり，

$$L_\varepsilon(x, f'(x) + \varepsilon\phi'(x)) = \sqrt{\frac{1 + \{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)\}^2}{x}},$$
$$T_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} L_\varepsilon(x, f'(x) + \varepsilon\phi'(x))\, dx$$

とすると

$$\begin{aligned}
\frac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon} &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)\}\phi'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \{f'(x) + \varepsilon\phi(x)\}^2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[\frac{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \{f'(x) + \varepsilon\phi(x)\}^2}} \phi(x) \right]_0^{x_1} \\
&\qquad - \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \left(\frac{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \{f'(x) + \varepsilon\phi(x)\}^2}} \right)' \phi(x)\, dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \left(\frac{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \{f'(x) + \varepsilon\phi(x)\}^2}} \right)' \phi(x)\, dx
\end{aligned}$$

条件から，$\varepsilon = 0$ のとき，$\dfrac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon} = 0$ であるから

$$\int_0^{x_1} \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right)' \phi(x)\, dx = 0 \qquad (*)$$

が成立する．

$$F(x) = \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right)'$$

とおくと，$(*)$ より

$$\int_0^{x_1} F(x)\phi(x)\, dx = 0 \qquad (**)$$

$\phi(x)$ は $\phi(0)=\phi(x_1)=0$ を満たす任意関数であるから，次式が成立する．

$$F(x)=0 \qquad (0 \leqq x \leqq x_1)$$

実際，小区間 $\xi_1 < x < \xi_2$ において，$F(x)>0$ であると仮定すると，$\phi(x)$ を

$$\phi(x)=\begin{cases} 0 & (0 \leqq x \leqq \xi_1) \\ (x-\xi_1)^2(\xi_2-x)^2 & (\xi_1 \leqq x \leqq \xi_2) \\ 0 & (\xi_2 \leqq x \leqq x_1) \end{cases}$$

と選べば

$$\int_0^{x_1} F(x)\phi(x)\,dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(x)\phi(x) > 0$$

となり，$(**)$ に反する．

注意 $\xi_1 \leqq x \leqq \xi_2$ で $\phi(x)=(x-\xi_1)(\xi_2-x)$ とすると，$\phi(x)$ は $x=\xi_1,\ \xi_2$ で連続ではあるが，微分可能ではない．

$F(x)=0$ より，$f'(x)>0$ に注意して正の定数 a を用いて

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+f'(x)^2}}=\frac{1}{2a} \quad \text{すなわち} \quad f'(x)=\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}\,dx \\ &= -\int \frac{a-x}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}\,dx + a\int \frac{1}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}\,dx \\ &= -\sqrt{a^2-(a-x)^2} + a\cos^{-1}\frac{a-x}{a} + C \end{aligned}$$

原点 O を通るから，$C=0$ である．ここで，$\dfrac{a-x}{a}=\cos\theta$ とおくと，求める曲線は

$$x=a(1-\cos\theta), \quad y=a(\theta-\sin\theta)$$

a は，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通ることから定まる．これはサイクロイドであり，とくに力学ではこの曲線を**最速降下曲線**と呼んでいる．

補足 工業高校の計算技術検定 1 級では，逆三角関数の微積は出題されている．熊工で指導した生徒で計算技術検定 1 級で満点を取って協会から特別表彰を受け，広島大学の推薦試験に合格した生徒がいた．

例 1 2 点を O$(0,\ 0)$，A$(2a,\ a\pi)$ とすると，最速降下曲線 C は

$$x = a(1-\cos\theta), \quad y = a(\theta - \sin\theta) \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

このとき，降下時間 T は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{2a} \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{a(1-\cos\theta)}}\, \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}{a(1-\cos\theta)}}\, d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a^2\sin^2\theta + a^2(1-\cos\theta)^2}{a(1-\cos\theta)}}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \sqrt{2a} d\theta = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \end{aligned}$$

例 2 C 上の点 B$(a(1-\cos\beta),\ a(\beta-\sin\beta)$ から初速度 0 で $(0 < \beta < \pi)$，C に沿った A$(2a, \theta)$ までの降下時間 T' は，$x_B = a(1-\cos\beta)$ とすると

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_B}^{2a} \sqrt{\frac{1+y'^2}{(x-x_B)}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{\beta}^{\pi} \sqrt{\frac{a(1-\cos\theta)}{\cos\beta - \cos\theta}}\, d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{\beta}^{\pi} \sqrt{\frac{2a\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\theta}{2}}}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{\beta}^{\pi} \frac{\sqrt{a}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}}}\, d\theta \end{aligned}$$

$0 < \dfrac{\beta}{2} \leqq \dfrac{\theta}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$0 \leqq \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} \leqq 1$ より　$\cos\varphi = \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$

ゆえに　$-\sin\varphi \dfrac{d\varphi}{d\theta} = -\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}}$

θ	$\beta \longrightarrow \pi$
φ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{\beta}^{\pi} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}}} \cdot \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{a}\sin\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\, d\varphi \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{a}\, d\varphi = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \end{aligned}$$

例 1 と例 2 から，$T = T'$，すなわち，等時性が成立する．これから，サイクロイド曲線上の運動は，周期振動である (振動の幅に依らない)．上昇するときの時間は，上の定積分の上端と下端を入れ替えることで T を得る．

サイクロイドは，直線上を円が転がるときに、円のある一点が描く曲線であるが，直線の上側を転がるときは教科書でも扱う上に凸の曲線 (九大理系 2010 年) であり，直線の下側は転がるときは下に凸の曲線 (九工大 2017 年) となる．

2010 年 九大理系

中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ。

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

解答　(1) 円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，円が角 t だけ回転したとき，円の中心を C，x 軸との接点を T とする．このとき，$\mathrm{OT} = \overset{\frown}{\mathrm{TP}} = at$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix}$$

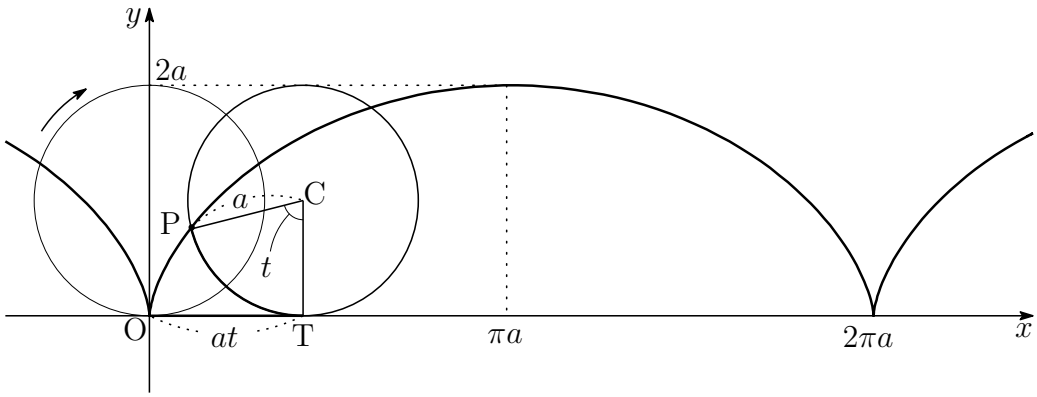
また $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{CT}}$ を $-t$ だけ回転したものであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{CT}} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

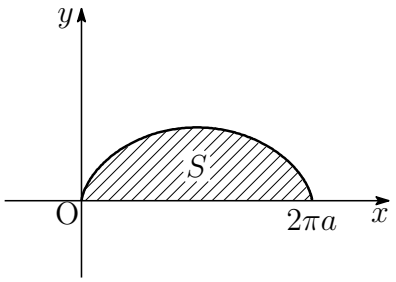
したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} \\ &= \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，P の座標は　　$\boldsymbol{(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))}$



(2) 求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x = a(t - \sin t)$ より

$$dx = a(1 - \cos t)dt$$

$\leftarrow \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$

で，x と t の対応は右のようになる．

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
t	$0 \longrightarrow 2\pi$

よって，置換積分法により

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\cdot a(1 - \cos t)\,dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt \\
&= a^2 \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\
&= \boldsymbol{3\pi a^2}
\end{aligned}$$

(3) 求める曲線 C の長さを L とすると，$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$ より

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\{a(1-\cos t)\}^2+(a\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt\\&=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{8a}\end{aligned}$$

2017 年 九工大

座標平面上で，曲線

$$x=\theta-\sin\theta,\quad y=1+\cos\theta\quad(0<\theta<2\pi)$$

を C とする．次に答えよ．

(1) 曲線 C 上の点 $(\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C は下に凸であることを示せ．

(3) $0<\theta<\pi$ のとき，点 $\mathrm{P}(\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$ における曲線 C の接線と，点 $\mathrm{Q}(\theta+\pi-\sin(\theta+\pi),\ 1+\cos(\theta+\pi))$ における曲線 C の接線が，垂直に交わることを示せ．

(4) (3) の 2 点を結んだ線分 PQ の長さの最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(5) (4) で求めた θ に対応する点 P，Q の x 座標を，それぞれ α，β とする．曲線 C と x 軸，および 2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答　(1) $x=\theta-\sin\theta$，$y=1+\cos\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$$

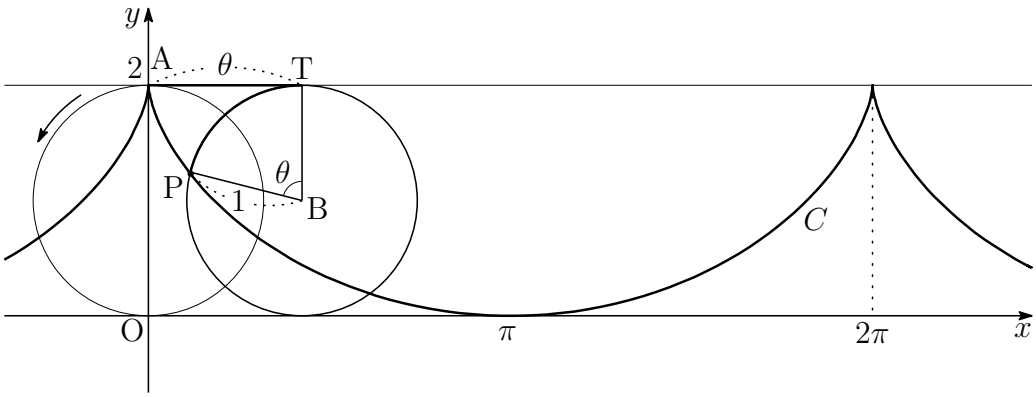
C 上の点 $(\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}-\frac{dy}{d\theta}\{x-(\theta-\sin\theta)\}+\frac{dx}{d\theta}\{y-(1+\cos\theta)\}&=0\\\sin\theta\cdot(x-\theta+\sin\theta)+(1-\cos\theta)(y-1-\cos\theta)&=0\\\boldsymbol{(\sin\theta)x+(1-\cos\theta)y-\theta\sin\theta}&\boldsymbol{=0}\end{aligned}$$

補足 下の図の半径 1 の円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，円が角 θ だけ回転したとき，円の中心を B，直線 $y=2$ との接点を T とする．このとき，$\mathrm{AT}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}=\theta$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ を θ だけ回転させたものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}\theta\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}\theta\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta-\sin\theta\\ 1+\cos\theta\end{pmatrix}$



(2) $x=f(\theta)=\theta-\sin\theta$，$y=g(\theta)=1+\cos\theta$ とおくと $(0<\theta<2\pi)$

さらに，$\theta=f^{-1}(x)=h(x)$ とおくと　$y=g(h(x))$

したがって　$(*)\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=g'(h(x))h'(x),\\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=g''(h(x))\{h'(x)\}^2+g'(h(x))h''(x)\end{cases}$

ここで，$x=f(h(x))$ であるから

$$\begin{cases}1=f'(h(x))h'(x)\\ 0=f''(h(x))\{h'(x)\}^2+f'(h(x))h''(x)\end{cases}$$

ゆえに　$(**)\begin{cases}1=f'(\theta)h'(x)\\ 0=f''(\theta)\{h'(x)\}^2+f'(\theta)h''(x)\end{cases}$

$(**)$ の第 1 式から　$h'(x)=\dfrac{1}{f'(\theta)}\quad\cdots①$

① を $(**)$ の第 2 式に代入することにより　$h''(x)=-\dfrac{f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}\quad\cdots②$

$h(x)=\theta$ および ①，② を $(*)$ の第 2 式に代入して整理すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$$

このとき　$f'(\theta)=1-\cos\theta \quad g'(\theta)=-\sin\theta$

$f''(\theta)=\sin\theta \qquad g''(\theta)=-\cos\theta$

$g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)=1-\cos\theta$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1-\cos\theta}{(1-\cos\theta)^3}=\dfrac{1}{(1-\cos\theta)^2}>0$

よって，曲線 C は下に凸である．

別解　C 上の点 $(x,\ y)=(f(\theta),\ g(\theta))$ における接ベクトルは $(f'(\theta),\ g'(\theta))$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}\right\}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

逆関数定理により，$\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1}{f'(\theta)}$ であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(\theta)}=\frac{g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$$

(3)　C 上の 2 点 $\mathrm{P}(f(\theta),\ g(\theta))$，$\mathrm{Q}(f(\theta+\pi),\ g(\theta+\pi))$ における接ベクトルをそれぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とすると

$$\vec{u}=(f'(\theta),\ g'(\theta))=(1-\cos\theta,-\sin\theta)$$

$$\vec{v}=(f'(\theta+\pi),\ g'(\theta+\pi))=(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$$

このとき　$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)+(-\sin\theta)\sin\theta=0$

よって，C 上の 2 点 P，Q におけるそれぞれの接線は垂直に交わる．

(4)　$\mathrm{P}(\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$，$\mathrm{Q}(\theta+\pi+\sin\theta,1-\cos\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(\pi+2\sin\theta)^2+(-2\cos\theta)^2\\&=4\pi\sin\theta+\pi^2+4\end{aligned}$$

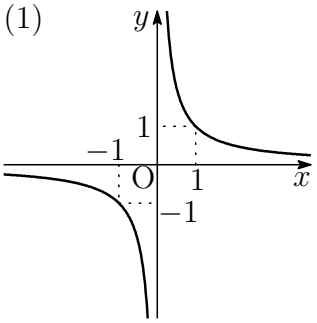
$0<\theta<\pi$ において，PQ は $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2}}$ のとき，最大値 $\sqrt{\pi^2+4\pi+4}=\boldsymbol{\pi+2}$

(5)　(4) の結果から，$\alpha=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta=f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$．求める面積を S とすると

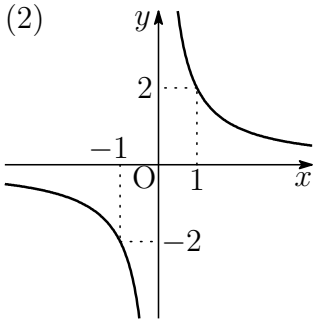
$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}y\,\frac{dx}{d\theta}d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sin^2\theta\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta=\left[\,\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta\,\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

解答

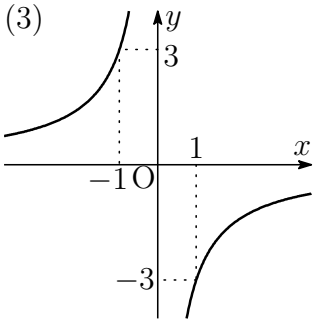
練習 **1.1** (1)



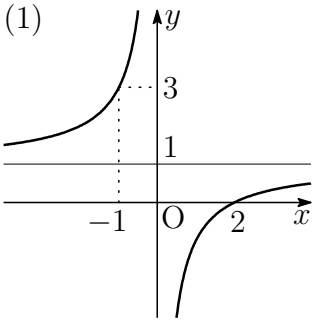
(2)



(3)

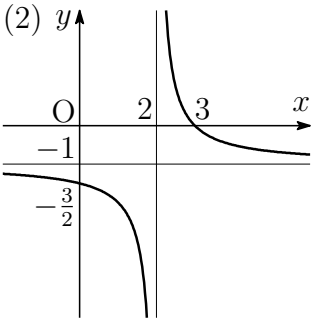


練習 **1.2** (1)



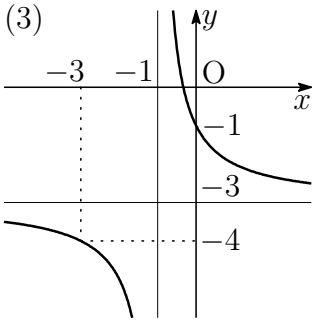
定義域 $x \neq 0$
値域 $y \neq 1$

(2)



定義域 $x \neq 2$
値域 $y \neq -1$

(3)



定義域 $x \neq -1$
値域 $y \neq -3$

練習 1.3 (1) $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}$ であるから　　$y=\dfrac{1}{x-2}+1$

よって，**定義域は $x\neq 2$，値域は $y\neq 1$ である．**

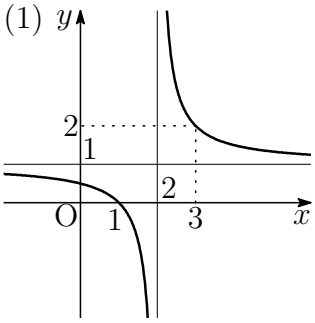
(2) $\dfrac{-2x+5}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+3}{x-1}$ であるから　　$y=\dfrac{3}{x-1}-2$

よって，**定義域は $x\neq 1$，値域は $y\neq -2$ である．**

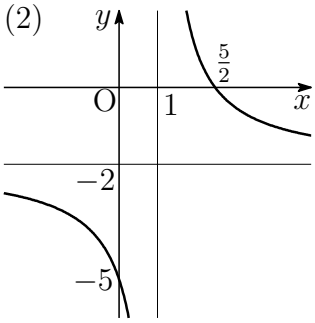
(3) $\dfrac{4x+3}{2x+1}=\dfrac{2(2x+1)+1}{2x+1}$ であるから　　$y=\dfrac{1}{2x+1}+2$

よって，**定義域は $x\neq -\dfrac{1}{2}$，値域は $y\neq 2$ である．**

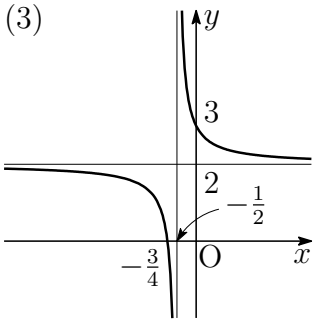
(1)



(2)



(3)



練習 1.4 (1) $\dfrac{3}{x+1}=x-1$ より　$3=(x-1)(x+1)$

すなわち　　$x^2-4=0$　これを解くと　　$x=2,-2$

$y=x-1$ であるから，求める共有点の座標は　$(2,\ 1),\ (-2,-3)$

(2) $\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{1}{2}x$ より　$6=x(x+1)$

すなわち　　$x^2+x-6=0$　これを解くと　　$x=-3,\ 2$

$y=\dfrac{1}{2}x$ であるから，求める共有点の座標は　$\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right),\ (2,\ 1)$

(3) $\dfrac{3}{x+1}=-3$ より　$3=-3(x+1)$　すなわち　$x=-2$

よって，求める共有点の座標は　$(-2,-3)$

練習 1.5 (1) $\dfrac{2}{x+2} = x+3$ より　　$2 = (x+3)(x+2)$

整理すると　$x^2+5x+4=0$　ゆえに　$(x+4)(x+1)=0$

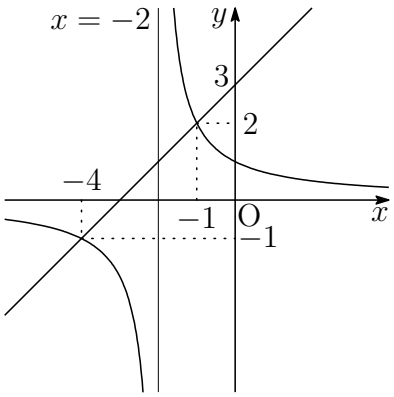
これを解いて　$\boldsymbol{x=-4,-1}$

(2) $\dfrac{2}{x+2} \leqq x+3$ より　　$\dfrac{(x+2)(x+3)-2}{x+2} \geqq 0$

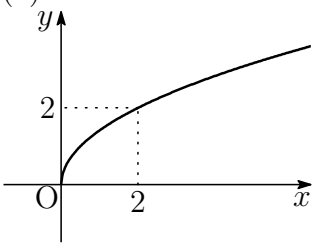
したがって　　$\dfrac{(x+4)(x+1)}{x+2} \geqq 0$

すなわち　　$(x+4)(x+2)(x+1) \geqq 0 \quad (x \neq -2)$

これを解いて　　$\boldsymbol{-4 \leqq x < -2, \quad -1 \leqq x}$

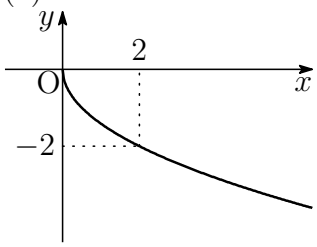


練習 1.6 (1)



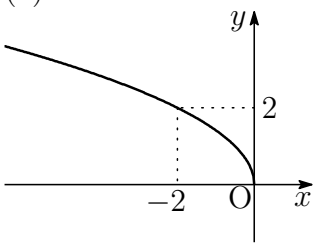
定義域 $\boldsymbol{x \geqq 0}$
値域 $\boldsymbol{y \geqq 0}$

(2)



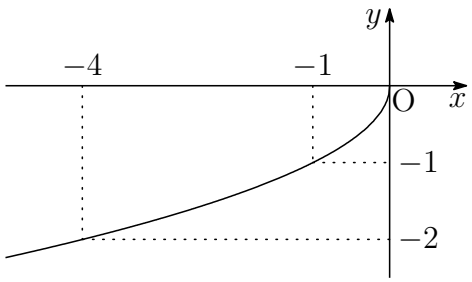
定義域 $\boldsymbol{x \geqq 0}$
値域 $\boldsymbol{y \leqq 0}$

(3)

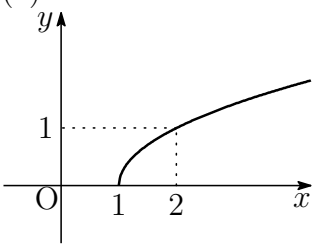


定義域 $\boldsymbol{x \leqq 0}$
値域 $\boldsymbol{y \geqq 0}$

深化 1.1 $y=-\sqrt{-x}$，すなわち，$-y=\sqrt{-x}$ のグラフは，$y=\sqrt{x}$ のグラフと原点に関して対称である．

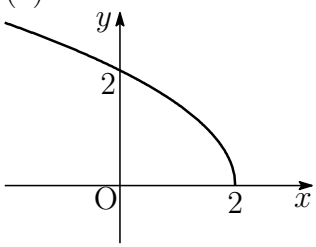


練習 1.7 (1)



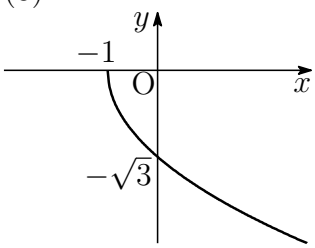
定義域 $x \geqq 1$
値域 $y \geqq 0$

(2)



定義域 $x \leqq 2$
値域 $y \geqq 0$

(3)



定義域 $x \geqq -1$
値域 $y \leqq 0$

練習 1.8 (1) $\sqrt{2x+2}=x-3$ $\cdots$① の両辺を 2 乗して整理すると $x^2-8x+7=0$
これを解いて $x=1,\ 7$
このうち，① を満たすのは $x=7$ で，このとき ① の両辺の値は 4 である．
よって，共有点の座標は **$(7,\ 4)$**

(2) $-\sqrt{x+1}=x-1$ $\cdots$① の両辺を 2 乗して整理すると $x^2-3x=0$
これを解いて $x=0,\ 3$
このうち，① を満たすのは $x=0$ で，このとき ① の両辺の値は -1 である．よって，共有点の座標は **$(0,\ -1)$**

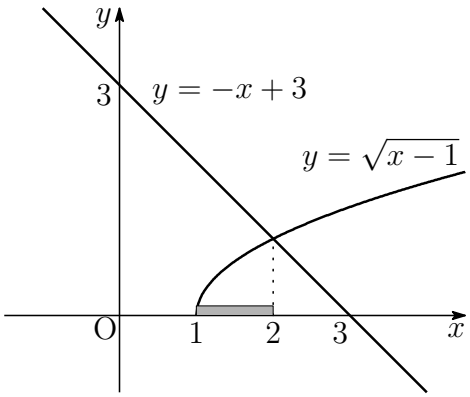
練習 1.9 (1) $\sqrt{x-1} = -x+3$ $\cdots$① の両辺を 2 乗して整理すると

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)(x-5) = 0$$

これを解くと $x = 2,\ 5$ このうち，① を満たすのは $\boldsymbol{x = 2}$

(2) 不等式 $\sqrt{x-1} \leqq -x+3$ の解は，(1) の結果および下のグラフから

$$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 2}$$



練習 1.10 (1) もとの関数の値域は $-1 \leqq y \leqq 5$

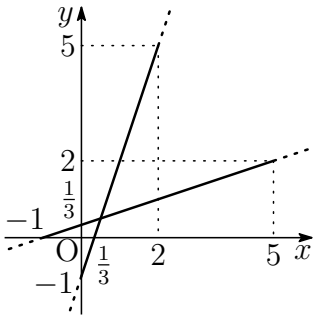
$y = 3x - 1$ を x について解くと

$$x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \quad (-1 \leqq y \leqq 5)$$

x と y を入れかえて

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \quad (-1 \leqq x \leqq 5)}$$

これが $y = 3x - 1 \ \ (0 \leqq x \leqq 2)$ の逆関数である．



(2) 与えられた関数の値域は $y \leqq 0$

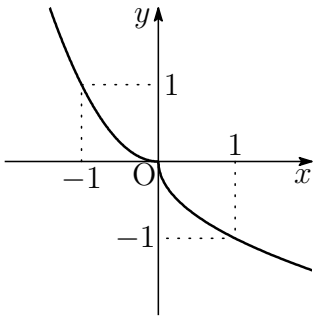
$y = -\sqrt{x}$ を x について解くと

$$x = y^2 \quad (y \leqq 0)$$

x と y を入れかえて

$$\boldsymbol{y = x^2 \quad (x \leqq 0)}$$

これが $y = -\sqrt{x}$ の逆関数である．



(3) $y = 3^x$ を x について解くと　　$x = \log_3 y$

x と y を入れかえて，求める逆関数は　　$\boldsymbol{y = \log_3 x}$

(4) $y = \log_4 x$ を x について解くと　　$x = 4^y$

x と y を入れかえて，求める逆関数は　　$\boldsymbol{y = 4^x}$

練習 1.11 (1) $\dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{5}{x-1} + 2$ であるから，

関数 $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ の値域は $y \neq 2$ である．

$y(x-1) = 2x+3$ より　　$(y-2)x = y+3$

ここで，$y \neq 2$ であるから　　$x = \dfrac{y+3}{y-2}$

よって，求める逆関数は　　$\boldsymbol{y = \dfrac{x+3}{x-2}}$

(2) $\dfrac{-x+2}{x+3} = \dfrac{5}{x+3} - 1$ であるから，

関数 $y = \dfrac{-x+2}{x+3}$ の値域は $y \neq -1$ である．

$y(x+3) = -x+2$ より　　$(y+1)x = -3y+2$

ここで，$y \neq -1$ であるから　　$x = \dfrac{-3y+2}{y+1}$

よって，求める逆関数は　　$\boldsymbol{y = \dfrac{-3x+2}{x+1}}$

練習 1.12 (1) $y = x^2 + 2$ を x について解くと　　$x = \pm\sqrt{y-2}$

$x \geqq 0$ であるから　　$x = \sqrt{y-2}$

よって，求める逆関数は　　$\boldsymbol{y = \sqrt{x-2}}$

(2) $y = -x^2$ を x について解くと　　$x = \pm\sqrt{-y}$

$x \leqq 0$ であるから　　$x = -\sqrt{-y}$

よって，求める逆関数は　　$\boldsymbol{y = -\sqrt{-x}}$

練習 1.13 $f(2) = 4$ であるから　　$2a + b = 4$　$\cdots$①

$f^{-1}(1) = -4$ のとき $f(-4) = 1$ であるから　　$-4a + b = 1$　$\cdots$②

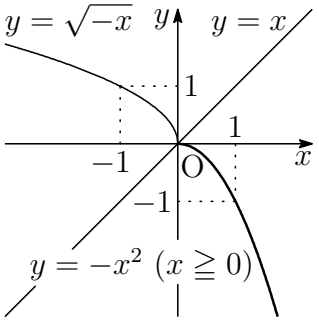
①，② を解いて　　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2},\ b = 3}$

練習 1.14 (1) $y=\sqrt{-x}$ を x について解くと

$$x=-y^2 \quad (y \geqq 0)$$

よって，与えられた関数の逆関数は

$$y=-x^2 \quad (x \geqq 0)$$

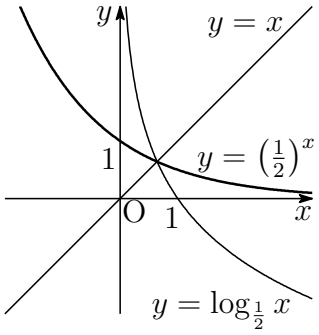


(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ を x について解くと

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$$

よって，与えられた関数の逆関数は

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

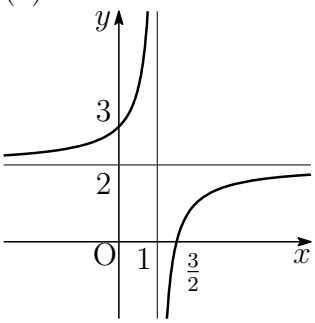


練習 1.15 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=\mathbf{\log_2(x^2+1)}$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\log_2(x+1))=\mathbf{\{\log_2(x+1)\}^2}$

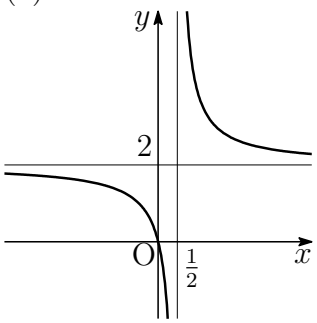
(3) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(2^x-1)=\log_2\{(2^x-1)+1\}=\boldsymbol{x}$

問題 1.1 (1)



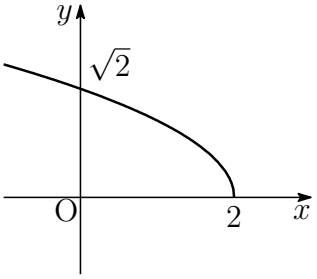
定義域 $\boldsymbol{x\neq 1}$，値域 $\boldsymbol{y\neq 2}$

(2)



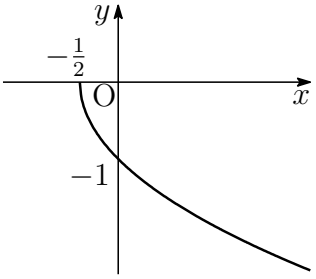
定義域 $\boldsymbol{x\neq \frac{1}{2}}$，値域 $\boldsymbol{y\neq 2}$

問題 1.2 (1)



定義域 $x \leqq 2$，値域 $y \geqq 0$

(2)



定義域 $x \geqq -\dfrac{1}{2}$，値域 $y \leqq 0$

問題 1.3 (1) $\dfrac{2x-4}{x-1} = x-2$ より　$2x-4 = (x-2)(x-1)$

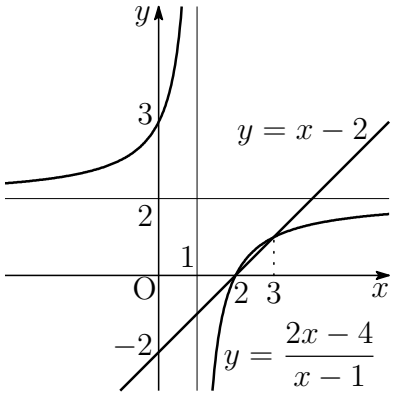
すなわち　　$x^2 - 5x + 6 = 0$

これを解いて　　$\boldsymbol{x = 2,\ 3}$

(2) $\dfrac{2x-4}{x-1} = -\dfrac{2}{x-1} + 2$ であるから

$$y = \frac{2x-4}{x-1}$$

このグラフと直線 $y = x-2$ は右の図である．(1) の結果とグラフから，不等式



$$\frac{2x-4}{x-1} \leqq x-2$$

の解は　$\boldsymbol{1 < x \leqq 2,\ 3 \leqq x}$

(3) $\sqrt{x-1} = 7-x$　$\cdots$①

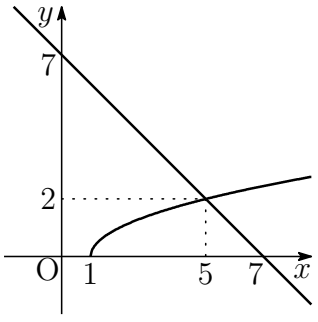
の両辺を 2 乗して整理すると

$$x^2 - 15x + 50 = 0$$

これを解いて　　$x = 5,\ 10$

このうち，① を満たすのは　$\boldsymbol{x = 5}$

(4) $y = \sqrt{x-1}$ のグラフと直線 $y = 7-x$ は右の図である．(3) の結果とグラフから，不等式



$$\sqrt{x-1} \leqq 7-x$$

の解は　$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 5}$

問題 1.4 (1) 条件より　$-a = \dfrac{3\cdot 2 - a}{2 - a}$　$\cdots$①

よって　　$a^2 - a - 6 = 0$

これを解くと　　$a = -2,\ 3$

これらは① を満たす．　(答) $\boldsymbol{a = -2,\ 3}$

(2) 条件より　$-a = \sqrt{3\cdot 2 - a}$　$\cdots$②

両辺を 2 乗して整理すると　　$a^2 + a - 6 = 0$

これを解くと　　$a = -3,\ 2$

$a = 2$ は② を満たさない．　(答) $\boldsymbol{a = -3}$

問題 1.5 (1) もとの関数の値域は　$y > 1$

$y = \dfrac{x}{x-1}$ を x について解くと　$x = \dfrac{y}{y-1}$　$(y > 1)$

x と y を入れかえて，求める逆関数は

$$\boldsymbol{y = \frac{x}{x-1}} \quad \boldsymbol{(x > 1)}$$

(2) もとの関数の値域は　$y \geqq 0$

$y = \sqrt{1-x}$ を x について解くと　$x = 1 - y^2$　$(y \geqq 0)$

x と y を入れかえて，求める逆関数は

$$\boldsymbol{y = 1 - x^2} \quad \boldsymbol{(x \geqq 0)}$$

問題 1.6 (1) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(4^x) = \log_2 4^x = \log_2 2^{2x} = \boldsymbol{2x}$

(2) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2 x) = 4^{\log_2 x}$

$= 2^{2\log_2 x} = 2^{\log_2 x^2} = \boldsymbol{x^2}$　$\boldsymbol{(x > 0)}$

問題 1.7 **逆関数をもたない．**

(理由) 関数 $y = 3$ について，y の値を定めても，それに対応する x の値はただ 1 つには定まらないから．

章末 1.1

$$\frac{3x+4}{x+2} = \frac{3(x+2)-2}{x+2} = -\frac{2}{x+2} + 3$$

$$\frac{x+3}{x+5} = \frac{(x+5)-2}{x+5} = -\frac{2}{x+5} + 1$$

よって，$y = \dfrac{3x+4}{x+2}$ のグラフは，$y = \dfrac{x}{x+2}$ のグラフを $\boldsymbol{x}$ **軸方向に 3，**$\boldsymbol{y}$ **軸方向に 2 だけ平行移動したもの**である．

章末 1.2 (1) $\dfrac{3+x}{3-x}=\dfrac{-x-3}{x-3}=\dfrac{-(x-3)-6}{x-3}$ であるから

$$y=-\frac{6}{x-3}-1 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$$

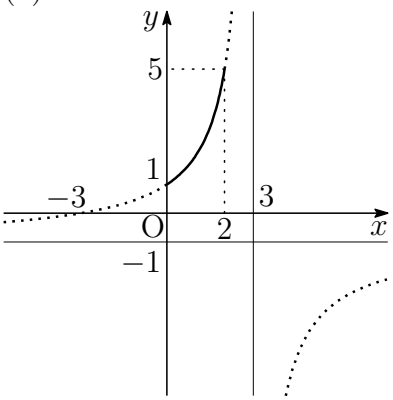
漸近線は 2 直線 $x=3$，$y=-1$

値域は $1 \leqq y \leqq 5$

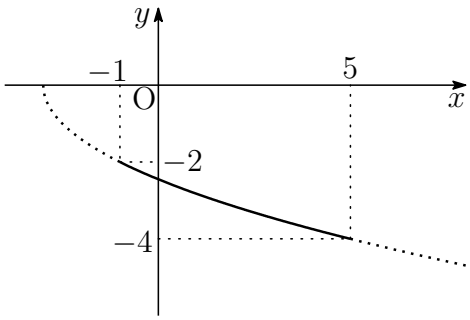
(2) $y=-\sqrt{2(x+3)}$ であるから，$y=-\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したものである．

値域は　$-4 \leqq y \leqq -2$

(1)



(2)



章末 1.3 $f(1)=6$ より　　$k+k^2=6$　$\cdots$①

$f^{-1}(2)=-1$ より　$f(-1)=2$

よって　　$-k+k^2=2$　$\cdots$②

① より　$(k+3)(k-2)=0$

ゆえに　$k=-3,\ 2$

② より　$(k+1)(k-2)=0$

ゆえに　$k=-1,\ 2$

①，② を同時に満たす k の値は　$k=2$

$k \neq 0$ に注意して　$\boldsymbol{k=2}$

章末 1.4 (1) $\sqrt{3x-5}=x-1 \quad \cdots$①

の両辺を 2 乗して整理すると　$x^2-5x+6=0$

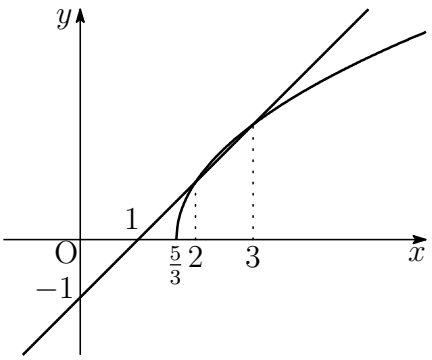
これを解いて　$x=2,\ 3$

これらは ① を満たす．よって　$\boldsymbol{x=2,\ 3}$

(2) $y=\sqrt{3x-5}$ と $y=x-1$ のグラフは，右の図のようになる．(1) の結果とグラフから，不等式

$$\sqrt{3x-5}<x-1$$

の解は　$\boldsymbol{\dfrac{5}{3}\leqq x<2,\ 3<x}$



(3) $\sqrt{1-2x}=-x+1 \quad \cdots$②

の両辺を 2 乗して整理すると　$x^2=0$

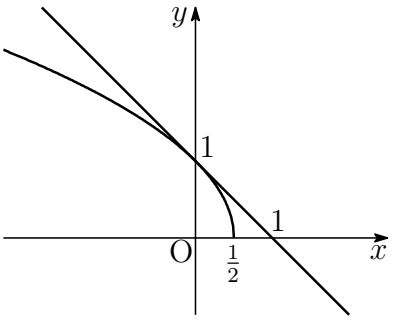
これを解いて　$x=0$

これは ② を満たす．よって　$\boldsymbol{x=0}$

(4) $y=\sqrt{1-2x}$ と $y=-x+1$ のグラフは，右の図のようになる．(3) の結果とグラフから，不等式

$$\sqrt{1-2x}\geqq -x+1$$

の解は　$\boldsymbol{x=0}$



章末 1.5 $y=\dfrac{x+1}{x-a}$ を x について解くと

$$(x-a)y=x+1$$
$$(y-1)x=ay+1$$
$$x=\frac{ay+1}{y-1} \quad (y\neq 1)$$

よって，逆関数は　$y=\dfrac{ax+1}{x-1}$

$\dfrac{ax+1}{x-1}=\dfrac{x+1}{x-a}$ が常に成り立つことから　$\boldsymbol{a=1}$

章末 1.6 (1) $f(g(x)) = \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}} = \dfrac{x-1}{(x-1)-x} = -(x-1)$

ただし，$g(x)$ の定義域は　$x \neq 1$

よって　$\boldsymbol{f(g(x)) = 1 - x \quad (x \neq 1)}$

(2) $g(g(x)) = \dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1} = \dfrac{x}{x-(x-1)} = x$

ただし，$g(x)$ の定義域は　$x \neq 1$

よって　$\boldsymbol{g(g(x)) = x \quad (x \neq 1)}$

練習 2.1 (1) $\mathbf{1}$　(2) $\mathbf{0}$　(3) $\mathbf{-1}$

練習 2.2 (1) 極限は $\boldsymbol{\infty}$　(2) 極限は $\mathbf{0}$　(3) 極限は $\boldsymbol{-\infty}$　(4) **極限はない**

練習 2.3 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=1-(-2)=\mathbf{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n=3\cdot1+2\cdot(-2)=\mathbf{-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=\lim_{n\to\infty}a_n-1=1-1=\mathbf{0}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=1\cdot(-2)=\mathbf{-2}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+5}{2a_n-1}=\frac{\lim_{n\to\infty}(b_n+5)}{\lim_{n\to\infty}(2a_n-1)}=\frac{-2+5}{2\cdot1-1}=\mathbf{3}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)}=\frac{1-(-2)}{1+(-2)}=\mathbf{-3}$

練習 2.4 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(2-\frac{1}{n}\right)=\boldsymbol{\infty}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n}-3\right)=\boldsymbol{-\infty}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{2}{n^2}-1\right)=\boldsymbol{-\infty}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{3-\dfrac{2}{n}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n^2}}=\mathbf{0}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{2+\dfrac{1}{n}}=\boldsymbol{\infty}$

深化 2.1 $\dfrac{n^3+2n}{n^p}=\dfrac{n^3}{n^p}\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$

(i) $p<3$ のとき $(3-p>0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^p}=\lim_{n\to\infty}n^{3-p}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)=\boldsymbol{\infty}$$

(ii) $p=3$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)=\mathbf{1}$$

(iii) $p>3$ のとき $(p-3>0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p-3}}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)=\mathbf{0}$$

練習 2.5 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\mathbf{0}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-n)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

練習 2.6 $-1\leqq\cos\dfrac{n\theta}{6}\leqq 1$ より $\qquad -\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\theta}{6}\leqq\dfrac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}=\mathbf{0}$$

深化 2.2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ より $\quad\lim_{n\to\infty}(-|a_n|)=0,\quad\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$

$-|a_n|\leqq a_n\leqq|a_n|$ であるから $\qquad\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

練習 2.7 (1) 数列 $\{(\sqrt{3})^n\}$ では $\sqrt{3} > 1$ であるから $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3})^n = \boldsymbol{\infty}$

(2) 数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ では $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ であるから $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \mathbf{0}$

(3) 数列 $\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right\}$ では $-\frac{4}{3} < -1$ であるから，極限はない (振動).

(4) 数列 $\left\{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}$ では $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ であるから $\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \mathbf{0}$

練習 2.8 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < x-1 \leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0 < x \leqq 2}$$

$-1 < x-1 < 1$ すなわち $0 < x < 2$ のとき $\lim_{n\to\infty}(x-1)^n = \mathbf{0}$

$x-1 = 1$ すなわち $x = 2$ のとき $\lim_{n\to\infty}(x-1)^n = \mathbf{1}$

練習 2.9 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \mathbf{1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n - 2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} = \boldsymbol{\infty}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \mathbf{0}$

練習 2.10 (1) $r>1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}=\boldsymbol{-1}$$

(2) $r=1$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$ であるから　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\dfrac{1-1}{1+1}=\boldsymbol{0}$

(3) $|r|<1$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$ であるから　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\dfrac{1-0}{1+0}=\boldsymbol{1}$

(4) $r<-1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}=\boldsymbol{-1}$$

練習 2.11 与えられた漸化式を変形すると　　$a_{n+1}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{3}\left(a_n-\dfrac{3}{4}\right)$

よって，数列 $\left\{a_n-\dfrac{3}{4}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列である．

その初項は，$a_1-\dfrac{3}{4}=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$a_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\quad\text{すなわち}\quad a_n=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{4}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

練習 2.12 (1) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$

したがって，この無限級数は**収束**して，その和は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ である．

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \dfrac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})}$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1) \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1) = \boldsymbol{\infty}$

したがって，この無限級数は**発散**する．

練習 2.13 (1) 公比について $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ であるから**収束**して，その和は

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2}} = \mathbf{2}$$

(2) 公比について $|-\sqrt{2}| > 1$ であるから，**発散**する．

(3) 公比 $r = -\dfrac{1}{3}$

公比について $\left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1$ であるから**収束**して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\dfrac{4}{3}} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

(4) 公比 $r = \sqrt{2}-1$

公比について $|\sqrt{2}-1| < 1$ であるから**収束**して，その和は

$$\frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{4-2} = \mathbf{\frac{4+3\sqrt{2}}{2}}$$

練習 2.14 (1) 初項が 1，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は $|2-x| < 1$ より　　$-1 < 2-x < 1$

よって　　$\boldsymbol{1 < x < 3}$

(2) 初項が x，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　　$x = 0$ または $|2-x| < 1$

$|2-x| < 1$ より　　$1 < x < 3$

よって　　$\boldsymbol{x = 0,\ 1 < x < 3}$

練習 2.15 点 P の座標は，順に次のようになる．

$$1,\ 1-\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}$$

よって，点 P が近づいていく点の座標は，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ の無限等比級数で表される．公比について $\left|-\dfrac{1}{2^2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して，その和は

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2^2}\right)}=\frac{4}{5}$$

したがって，点 P が近づいていく点の座標は $\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

練習 2.16 (1) $0.\dot{6}=0.6+0.06+0.006+\cdots$

したがって，$0.\dot{6}$ は初項 0.6，公比 0.1 の無限等比級数である．
$|0.1|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.\dot{6}=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{0.6}{0.9}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(2) $0.2\dot{3}\dot{4}=0.2+0.034+0.00034+\cdots$

この右辺の第 2 項以降は，初項 0.034，公比 0.01 の無限等比級数である．
$|0.01|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.2\dot{3}\dot{4}=0.2+\frac{0.034}{1-0.01}=\frac{2}{10}+\frac{34}{990}=\frac{232}{990}=\boldsymbol{\frac{116}{495}}$$

(3) $0.4\dot{7}0\dot{2}=0.4+0.0702+0.0000702+\cdots$

この右辺の第 2 項以降は，初項 0.0702，公比 0.001 の無限等比級数である．
$|0.001|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.4\dot{7}0\dot{2}=0.4+\frac{0.0702}{1-0.001}=\frac{4}{10}+\frac{702}{9990}=\frac{4698}{9990}=\boldsymbol{\frac{87}{185}}$$

練習 2.17 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ は，初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ は，初項 $\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数である．

公比について，$\left|\dfrac{1}{4}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{\dfrac{1}{4}}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{1}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=1$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)=\frac{1}{3}+1=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

(2) $\dfrac{2^n-3^n}{4^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ は，初項 $\dfrac{3}{4}$，公比 $\dfrac{3}{4}$ の無限等比級数である．

公比について，$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$，$\left|\dfrac{3}{4}\right|<1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{3}{4}}=3$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=1-3=\boldsymbol{-2}$

練習 2.18 第 n 項を a_n とすると $\qquad a_n=(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$

$n\longrightarrow\infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ は発散するから，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する．

問題 2.1 (1) $(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}} = \mathbf{1}$$

(2) $(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-n}+n}{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-n}+n}{(n^2-n)-n^2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+n}{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1}{-1} = \mathbf{-2}$$

(3) $(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 4}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n} = \mathbf{4}$

(4) $(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

問題 2.2 $a_n = \dfrac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1}$ とおく.

(1) $|r|<1$ のとき，$0 \leqq r^2 < 1$ より $\lim_{n\to\infty}(r^2)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(r^2)^n-1}{(r^2)^n+1} = \frac{0-1}{0+1} = \mathbf{-1}$$

(2) $|r|=1$ のとき，$r^2=1$ より $\lim_{n\to\infty}(r^2)^n = 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(r^2)^n-1}{(r^2)^n+1} = \frac{1-1}{1+1} = \mathbf{0}$$

(3) $|r|>1$ のとき，$0 < \dfrac{1}{r^2} < 1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r^2}\right)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{r^2}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = \mathbf{1}$$

問題 2.3 与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}+1=2\,(a_n+1)$

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は公比 2 の等比数列である．

その初項は，$a_1+1=1+1=2$ であるから

$$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}\quad \text{すなわち}\quad a_n=2^n-1$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(2^n-1)=\boldsymbol{\infty}$

問題 2.4 初項が x，公比が $(1-x)^2$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$$x=0\quad \text{または}\ |(1-x)^2|<1$$

$(1-x)^2<1$ を解くと　$0<x<2$

よって，求める x の値の範囲は　$\boldsymbol{0\leqq x<2}$

また，和は

$x=0$ のとき　$\boldsymbol{0}$

$0<x<2$ のとき　$\dfrac{x}{1-(1-x)^2}=\dfrac{x}{2x-x^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2-x}}$

問題 2.5 $\triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ と $\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ は相似で，相似比は $1:2$ であるから，面積比は $1^2:2^2$ である．$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の面積を S_n とすると

$$S_1=\frac{1}{4}a,\quad S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$$

したがって，

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n+\cdots$$

は，初項 $\dfrac{1}{4}a$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数である．

公比について $\left|\dfrac{1}{4}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する．

よって，求める和 S は　$\displaystyle S=\frac{\frac{1}{4}a}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}a}$

問題 2.6 (1) **偽**： (反例 1) $\boldsymbol{a_n = n,\ b_n = \dfrac{1}{n}}$,

(反例 2) $\boldsymbol{a_n = n^2,\ b_n = \dfrac{1}{n}}$

(2) **真**： $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_n - (a_n - b_n)\}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - 0 = \alpha$

練習 2.19 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(2x^2 - 3x - 1) = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 1 = \boldsymbol{-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -2}(x-3)(x+2) = (-2-3)\cdot(-2+2) = \boldsymbol{0}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{2x-3} = \frac{0+1}{2\cdot 0 - 3} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\sqrt{1-x} = \sqrt{1-(-1)} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

練習 2.20 (1) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-3) = \boldsymbol{-6}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-2} = \boldsymbol{-3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{(a+x)-a}{a(a+x)}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{a(a+x)} = \boldsymbol{\frac{1}{a^2}}$

練習 2.21 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+3)-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-2^2} = \lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2) = \boldsymbol{4}$

練習 2.22 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1 \quad \cdots ①$

において，$\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x}+b)=0$

ゆえに，$\sqrt{2}a+b=0$ となり $b=-\sqrt{2}a \quad \cdots ②$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

① から $\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=-1$ であるから $\boldsymbol{a=-2\sqrt{2}}$

このとき，② から $\boldsymbol{b=4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1 \quad \cdots ①$

において，$\displaystyle\lim_{x\to 0}x=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to 0}(a\sqrt{x+4}+b)=0$

ゆえに，$2a+b=0$ となり $b=-2a \quad \cdots ②$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{a}{4}\end{aligned}$$

① から $\dfrac{a}{4}=1$ であるから $\boldsymbol{a=4}$

このとき，② から $\boldsymbol{b=-8}$

練習 2.23 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}=-\infty$

練習 2.24 (1) $x>0$ のとき $\dfrac{|x|}{x}=1$ よって $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{|x|}{x}=\mathbf{1}$

(2) $x<0$ のとき $\dfrac{|x|}{x}=-1$ よって $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{|x|}{x}=\mathbf{-1}$

(3) $x>1$ のとき $\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$

よって $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\mathbf{2}$

(4) $x<1$ のとき $\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}=-(x+1)$

よって $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\mathbf{-2}$

練習 2.25 (1) $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{1}{x-1}=\boldsymbol{\infty}$ (2) $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1}{x-1}=\boldsymbol{-\infty}$

練習 2.26 (1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=\mathbf{0}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-x^2}=\mathbf{0}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=\boldsymbol{\infty}$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=\boldsymbol{\infty}$

練習 2.27 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{4x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{4+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+4}{2x^2-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5+\dfrac{4}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x}}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x^2}{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}-x}{3+\dfrac{2}{x}}=\boldsymbol{-\infty}$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2x}{x^2-4x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\mathbf{0}$

練習 2.28 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=\mathbf{1}$$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2-2t}-2t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2-2t}-2t)(\sqrt{4t^2-2t}+2t)}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2-2t)-(2t)^2}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{t\sqrt{4-\dfrac{2}{t}}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4-\dfrac{2}{t}}+2}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

深化 2.3 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-1}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

補足 $x<0$ のとき　$\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$

練習 2.29 (1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x=\mathbf{0}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=\mathbf{0}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2 x=\boldsymbol{\infty}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_{0.5}x=\boldsymbol{\infty}$

練習 2.30 (1) $x \longrightarrow \infty$ のとき $-3x \longrightarrow -\infty$ であるから $\lim_{x\to\infty} 2^{-3x} = \mathbf{0}$

(2) $x \longrightarrow -\infty$ のとき $-2x \longrightarrow \infty$ であるから $\lim_{x\to-\infty} 2^{-2x} = \boldsymbol{\infty}$

(3) $\dfrac{4x-1}{x+2} = \dfrac{4-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}$ であるから，$x \longrightarrow \infty$ のとき $\dfrac{4x-1}{x+2} \longrightarrow 4$

よって $\lim_{x\to\infty} \log_2 \dfrac{4x-1}{x+2} = \log_2 4 = \mathbf{2}$

練習 2.31 (1) $\lim_{x\to-\infty} \sin\dfrac{1}{x} = \mathbf{0}$ (2) $\lim_{x\to-\infty} \cos\dfrac{1}{x} = \mathbf{1}$ (3) $\lim_{x\to\pi} \tan x = \mathbf{0}$

練習 2.32 (1) 常に $0 \leqq \left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq \left|x\cos\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqq |x|$$

ここで，$\lim_{x\to0}|x| = 0$ であるから $\lim_{x\to0}\left|x\cos\dfrac{1}{x}\right| = 0$

よって $\lim_{x\to0} x\cos\dfrac{1}{x} = \mathbf{0}$

(2) 常に $0 \leqq |\sin x| \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leqq \frac{1}{|x|}$$

ここで，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0$ であるから $\lim_{x\to\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = 0$

よって $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \mathbf{0}$

(3) 常に $0 \leqq |\cos x| \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq \left|\frac{\cos x}{x}\right| = \frac{|\cos x|}{|x|} \leqq \frac{1}{|x|}$$

ここで，$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0$ であるから $\lim_{x\to-\infty}\left|\dfrac{\cos x}{x}\right| = 0$

よって $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x}{x} = \mathbf{0}$

練習 2.33 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=\frac{2}{3}\cdot1=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot1=\boldsymbol{1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\right)=\frac{3}{5}\cdot1\cdot1=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$

練習 2.34 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left\{-\frac{x}{\sin x}\cdot(\cos x+1)\right\}=-1\cdot2=\boldsymbol{-2}$

練習 2.35 AB⊥OD で，OD は ∠AOB の二等分線であるから

$$\angle\mathrm{AOD}=\theta$$

よって　　$\mathrm{CD}=\mathrm{OC}-\mathrm{OD}=1-\cos\theta$

また　　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=1\cdot2\theta=2\theta$

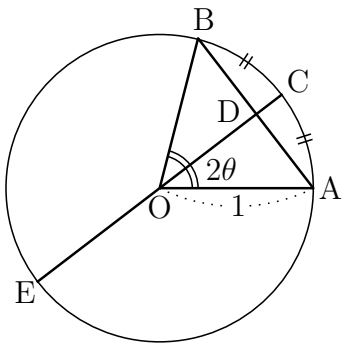
したがって，求める極限は

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\theta}{(2\theta)^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{4\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos^2\theta}{4\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\theta}{4\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}=\frac{1}{4}\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

深化 2.4 方べきの定理により



$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DB} = \mathrm{CD}\cdot\mathrm{DE}$$

$\mathrm{AD} = \mathrm{DB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$ であるから

$$\frac{1}{4}\mathrm{AB}^2 = \mathrm{CD}\cdot\mathrm{DE}$$

したがって $\quad \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2} = \dfrac{1}{4\mathrm{DE}}$

$\theta \longrightarrow +0$ のとき，$\mathrm{DE} \longrightarrow 2$ であるから

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2} = \frac{1}{4\cdot 2} = \frac{1}{8}$$

練習 2.36 (1) $\quad \lim_{x\to-0} x[x] = 0\cdot(-1) = 0,\quad \lim_{x\to+0} x[x] = 0\cdot 0 = 0$

よって $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

また $\quad f(0) = 0\cdot 0 = 0$

したがって，$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ が成り立つから，関数 $f(x) = x[x]$ は $x = 0$ で連続である．

(2) $\quad \lim_{x\to-0}(x+1)[x] = 1\cdot(-1) = -1,\quad \lim_{x\to+0}(x+1)[x] = 1\cdot 0 = 0$

よって，$x \longrightarrow 0$ のときの $f(x)$ の極限はない．

したがって，関数 $f(x) = (x+1)[x]$ は $x = 0$ で不連続である．

(3) 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ の定義域は $x \geqq 0$ で $\quad \lim_{x\to+0} f(x) = 0,\ f(0) = 0$

したがって，$\lim_{x\to+0} f(x) = f(0)$ が成り立つから，関数 $f(x) = \sqrt{x}$ は $x = 0$ で連続である．

練習 2.37 (1) $f(x) = \sqrt{-(x-1)}$

関数 $f(x) = \sqrt{1-x}$ が連続である区間は $\quad \mathbf{(-\infty,\ 1]}$

(2) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

関数 $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ が連続である区間は $\quad \mathbf{(-\infty,\ 1)},\ \mathbf{(1,\ 2)},\ \mathbf{(2,\ \infty)}$

練習 2.38 (1) 区間 $[0,\ \pi]$ において，$f(x)$ は

$$\boldsymbol{x=0}\text{ で最大値 }\boldsymbol{1}\text{，}\boldsymbol{x=\pi}\text{ で最小値 }\boldsymbol{-1}$$

をとる．

(2) 区間 $[-\pi,\ \pi]$ において，$f(x)$ は

$$\boldsymbol{x=0}\text{ で最大値 }\boldsymbol{1}\text{，}\boldsymbol{x=-\pi}\text{，}\boldsymbol{\pi}\text{ で最小値 }\boldsymbol{-1}$$

をとる．

練習 2.39 $f(x)=2^x-3x$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $[3,\ 4]$ で連続である．

また　　$f(3)=2^3-3\cdot3=-1<0$

$f(4)=2^4-3\cdot4=4>0$

よって，方程式 $f(x)=0$ すなわち $2^x-3x=0$ は，

$3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

問題 2.7 (1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{2x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{2x-(x+2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})=\boldsymbol{4}\end{aligned}$$

問題 2.8 関数 $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x-2}$ について，$x\longrightarrow2$ のときの極限値が存在するとき，

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$ であるから　　$\lim_{x\to2}(x^2+a)=0$

したがって　$4+a=0$　これを解いて　$\boldsymbol{a=-4}$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim x\to2(x+2)=\boldsymbol{4}$

問題 2.9 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \mathbf{0}$$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = \lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+1}-t)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)(\sqrt{t^2+1}+t)}{\sqrt{t^2+1}+t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+1)-t^2}{\sqrt{t^2+1}+t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t} = \mathbf{0}$$

問題 2.10 (1) (分母，分子に 2^x を掛ける)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1} = \frac{0-1}{0+1} = \mathbf{-1}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+4)-\log_2 2x^2\} = \lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x^2+4}{2x^2} = \lim_{x\to\infty}\log_2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}\right)$

$$= \log_2\frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = \mathbf{-1}$$

問題 2.11 (1) 与式 $\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

(2) 与式 $\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{x^2}{(1-2\sin^2 x)-1} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{-2\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \mathbf{-\frac{1}{2}}$$

問題 2.12 $x-\pi=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\pi$ のとき　$\theta\longrightarrow0$ より

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} = \lim_{\theta\to0}\frac{1+\cos(\pi+\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

問題 2.13 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$，$f(0) = a$

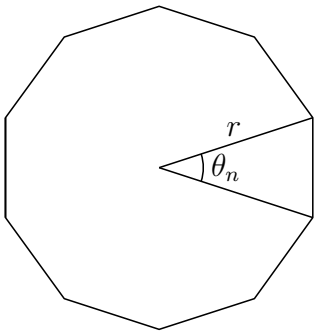
よって　　$\boldsymbol{a = 1}$

問題 2.14 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $[-2,\ 0]$ で連続であり，かつ

$$f(-2) = -1 < 0, \quad f(0) = 1 > 0$$

よって，方程式 $f(x) = 0$ は $-2 < x < 0$ の範囲に少なくとも 1 つの負の解をもつ．

問題 2.15 (1) $\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}$ とすると　$n = \dfrac{2\pi}{\theta_n}$



$$S_n = n \times \frac{1}{2} r^2 \sin\theta_n$$
$$= \frac{2\pi}{\theta_n} \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin\theta_n = \pi r^2 \cdot \frac{\sin\theta_n}{\theta_n}$$

よって　$S_n = \pi r^2 \cdot \dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \boldsymbol{\dfrac{r^2}{2} n \sin\dfrac{2\pi}{n}}$

(2) $n \to \infty$ のとき，$\theta_n \to +0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\theta_n \to +0} \pi r^2 \cdot \frac{\sin\theta_n}{\theta_n} = \pi r^2 = S$$

章末 2.1 (1)　分子 $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，分母 $= \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

よって　　与式 $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \boldsymbol{0}$$

(2)　分子 $= \dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1} = \dfrac{3^n-1}{2}$，分母 $= \dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1} = 2^n - 1$

よって　　与式 $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3^n-1}{2}}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \boldsymbol{\infty}$

章末 2.2 (1) 二項定理により

$$2^n = (1+1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$

${}_n\mathrm{C}_r > 0$ であるから　　${}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \geqq 0$

よって　　$2^n \geqq {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 = 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2}$

(2) (1) の不等式から

$$0 < \frac{n}{2^n} \leqq \frac{n}{1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2}} = \frac{2n}{2 + 2n + n^2 - n} = \frac{2n}{n^2 + n + 2}$$

ここで　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{n}}{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = 0$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \mathbf{0}$

章末 2.3 求める点の座標を $(x,\ y)$ とする．点 P の x 座標は原点 O から順に

$$1,\ 1,\ 1 + \frac{1}{2^2},\ 1 + \frac{1}{2^2},\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4},\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4},\ \cdots$$

となる．

$$x = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2^2}} = \frac{4}{3}$$

点 P の y 座標は原点 O から順に

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5},\ \cdots$$

となる．

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{\dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}$$

よって，点 P の極限の位置の座標は　$\left(\mathbf{\frac{4}{3}},\ \mathbf{\frac{2}{3}}\right)$

章末 2.4 (1) 与式 $= \lim_{x\to 1} \dfrac{(x+1)-(3x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1})}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1})}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}} = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(2) 与式 $= \lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{x^2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-1\right)$

$= \lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x}\left(-x\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-1\right)$

$= \lim_{x\to -\infty} \left(-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-\dfrac{1}{x}\right) = \boldsymbol{-1}$

(3) $x \longrightarrow -0$ のとき $\dfrac{1}{x} \longrightarrow -\infty$

$t \longrightarrow -\infty$ のとき $2^t \longrightarrow 0$ より

$$\lim_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}} = \boldsymbol{0}$$

(4) 与式 $= \lim_{x\to\infty} \log_a \dfrac{ax^2+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \log_a \left(a+\dfrac{1}{x^2}\right) = \log_a a = \boldsymbol{1}$

章末 2.5 (1) 与式 $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot(1+\cos 2x)} = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\dfrac{4x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}}\cdot\dfrac{1}{1+\cos 2x}$

$= \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{4\cos x}{1+\cos 2x} = 1^2\cdot 1\cdot\dfrac{4}{1+1} = \mathbf{2}$

【別解】$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ より

与式 $= \lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} 2\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\cos x = 2\cdot 1\cdot 1 = \mathbf{2}$

(2) 与式 $= \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x\right)$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}\cdot\dfrac{\sin^2 x}{\cos x(1+\cos x)}$

$= \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)} = 1^3\cdot\dfrac{1}{1\cdot 2} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

章末 2.6 $f(x) = \log_2 x + \dfrac{1}{2}x - 1$ とすると，$f(x)$ は閉区間 $[1,\ 2]$ で連続であり

$$f(1) = -\frac{1}{2} < 0,\quad f(2) = 1 > 0$$

したがって，$f(c) = 0$，$1 < c < 2$ を満たす c がある．

すなわち方程式 $\log_2 x + \dfrac{1}{2}x = 1$ は，$1 < x < 2$ の範囲に実数解をもつ．

章末 2.7 (1) ［証明］数学的帰納法で証明する．

$$a_n = \frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1} \quad \cdots ① \quad \text{とする．}$$

［1］$n=1$ のとき，① は $a_1 = \dfrac{1+2}{1+1} = \dfrac{3}{2}$ となるから，① は $n=1$ のとき成り立つ．

［2］$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち $a_k = \dfrac{2^{k-1}+2}{2^{k-1}+1}$ であると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2}{3-a_k} = \frac{2}{3-\dfrac{2^{k-1}+2}{2^{k-1}+1}} \\ &= \frac{2(2^{k-1}+1)}{3(2^{k-1}+1)-(2^{k-1}+2)} \\ &= \frac{2\cdot 2^{k-1}+2}{2\cdot 2^{k-1}+1} = \frac{2^{(k+1)-1}+2}{2^{(k+1)-1}+1} \end{aligned}$$

よって，① は $n=k+1$ のときも成り立つ．

［1］，［2］から，① はすべての自然数 n について成り立つ．［証終］

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{2}{2^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{2^{n-1}}} = \mathbf{1}$

章末 2.8 初項を a，公比を r とすると，$|r|<1$ のとき収束して

$$\frac{a}{1-r}=1 \quad \cdots ①$$

$|r|<1$ のとき，$|r^2|=|r|^2<1$ だから，各項を 2 乗して得られる無限等比級数も収束して

$$\frac{a^2}{1-r^2}=2 \quad \cdots ②$$

② より　$\dfrac{a}{1+r}\cdot\dfrac{a}{1-r}=2$

① を代入して　$\dfrac{a}{1+r}=2 \quad \cdots ③$

① より　$a=1-r$，③ より　$a=2+2r$

よって　$1-r=2+2r$　これを解いて　$r=-\dfrac{1}{3}$

これは，$|r|<1$ を満たす．

また　$a=1-r=1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$

したがって，初項は $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$，公比は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

章末 2.9 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=a$$

条件 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=2$ より　$a=2$

一方，条件 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=-1$ と $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$ から　$\lim_{x\to 1}f(x)=0$

また　$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(2x^2+bx+c)=2+b+c$ であるから

$$2+b+c=0$$

ゆえに　　$c=-b-2$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+bx-b-2}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+b+2)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{2x+b+2}{x+1}=\frac{b+4}{2}=-1\end{aligned}$$

ゆえに　$b=-6$　　よって　$c=4$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=2x^2-6x+4}$

章末 2.10 点 P の座標を $(t,\ t^2)$ とすると $(t>0)$　$\mathrm{OP}=t\sqrt{1+t^2}$

Q は x 軸上の正の部分にあり，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ より，点 Q の座標は　$(t\sqrt{1+t^2},\ 0)$

2 点 P，Q を通る直線の方程式は

$$y=\frac{0-t^2}{t\sqrt{1+t^2}-t}(x-t)+t^2$$

すなわち　$y=-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}-1}x+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}+t^2$

しがって，点 R の y 座標を h とすると

$$\begin{aligned}h&=\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}+t^2\\&=\frac{t^2(\sqrt{1+t^2}+1)}{(1+t^2)-1}+t^2\\&=\sqrt{1+t^2}+1+t^2\end{aligned}$$

このとき　$\lim\limits_{t\to0}h=\lim\limits_{t\to0}(\sqrt{1+t^2}+1+t^2)=2$

よって，求める点 R の極限の座標は　$\mathbf{(0,\ 2)}$

章末 2.11 (1) この無限等比級数は，初項 x^2，公比 $\dfrac{1}{x^2+1}$ の無限等比級数である．

［1］ $x=0$ のとき

初項が 0 だからこの級数は収束し，和は 0 である．

［2］ $x \neq 0$ のとき

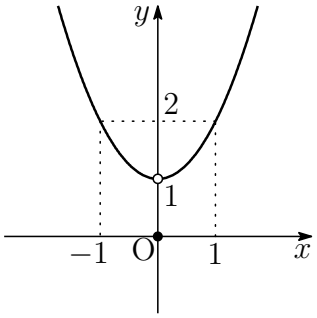
$0 < x^2$ より　$0 < \dfrac{1}{x^2+1} < 1$

よって $|$公比$| < 1$ であるから，この級数は収束し，和は

$$\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{x^2+1}} = \frac{x^2(x^2+1)}{(x^2+1)-1} = \frac{x^2(x^2+1)}{x^2} = x^2+1$$

(2)　［1］，［2］より　$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

$y=f(x)$ のグラフは下の図のようになる．



(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+1) = 1$，$f(0)=1$

したがって　$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

よって，$f(x)$ が不連続となる x の値は　$\boldsymbol{x=0}$

練習 3.1 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の $x=1$ における微分係数は

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{1-(1+h)}{1+h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{1+h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{1+h}=\boldsymbol{-1}$$

練習 3.2
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{|h(h+2)|}{h}$$

ここで $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{|h(h+2)|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h(h+2)}{h}=\lim_{h\to+0}(h+2)=2$

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{|h(h+2)|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h(h+2)}{h}=\lim_{h\to-0}(-h-2)=-2$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ すなわち $f'(1)$ は存在しない．

したがって，関数 $f(x)$ は $x=1$ で微分可能でない．

深化 3.1
$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{|h(h-2)|}{h}$$

ここで $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{|h(h-2)|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{-h(h-2)}{h}=\lim_{h\to+0}(-h+2)=2$

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{|h(h-2)|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{h(h-2)}{h}=\lim_{h\to-0}(h-2)=-2$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ すなわち $f'(-1)$ は存在しない．

したがって，関数 $f(x)$ は $x=-1$ で微分可能でない．

練習 3.3 (1) $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2(x+h)}-\frac{1}{2x}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x-(x+h)}{2(x+h)x}\right\}$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(x+h)x}=-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2x^2}}$$

(2) $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\sqrt{x}}}$$

練習 3.4 公式 2 の証明

$$\begin{aligned}\{f(x)+g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\end{aligned}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

よって　　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

補足 公式 1 の証明

$$\begin{aligned}\{kf(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}k\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\end{aligned}$$

ここで，$f(x)$ は微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

よって　　$\{kf(x)\}'=kf'(x)$

公式 3 の証明

$$\begin{aligned}\{f(x)-g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-g(x+h)\}-\{f(x)-g(x)\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\end{aligned}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

よって　　$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

練習 3.5 (1) $y' = 5x^4 + 2\cdot 4x^3 = \boldsymbol{5x^4 + 8x^3}$

(2) $y' = 3\cdot 6x^5 - 4\cdot 3x^2 = \boldsymbol{18x^5 - 12x^2}$

(3) $y' = (x+1)'(x^3-4x) + (x+1)(x^3-4x)'$
$= 1\cdot(x^3-4x) + (x+1)(3x^2-4)$
$= x^3 - 4x + 3x^3 + 3x^2 - 4x - 4$
$= \boldsymbol{4x^3 + 3x^2 - 8x - 4}$

(4) $y' = (3x^2-2)'(x^2+x+1) + (3x^2-2)(x^2+x+1)'$
$= 6x(x^2+x+1) + (3x^2-2)(2x+1)$
$= 6x^3 + 6x^2 + 6x + 6x^3 + 3x^2 - 4x - 2$
$= \boldsymbol{12x^3 + 9x^2 + 2x - 2}$

練習 3.6 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ の両辺を微分すると

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$
$$= \frac{f'(x)g(x)}{\{g(x)\}^2} + f(x)\left\{-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right\}$$

したがって $\quad \left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

補足 $g(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)} = 1$ の両辺を，79 ページの公式 **4** を用いて微分すると

$$g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + g(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = 0$$

ゆえに $\quad g(x)\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ $\quad$ よって $\quad \left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

練習 3.7 (1) $y' = -\dfrac{(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \boldsymbol{-\dfrac{2}{(2x-3)^2}}$

(2) $y' = \dfrac{(x)'(x^2-2) - x(x^2-2)'}{(x^2-2)^2} = \dfrac{1\cdot(x^2-2) - x\cdot 2x}{(x^2-2)^2} = \boldsymbol{-\dfrac{x^2+2}{(x^2-2)^2}}$

(3) $y' = \dfrac{(2x-1)'(x^2+1) - (2x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(x^2+1) - (2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$
$= \boldsymbol{\dfrac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}}$

練習 3.8 (1) $y' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{x^2}}$

(2) $y' = (-4x^{-2})' = -4\cdot(-2)x^{-3} = 8x^{-3} = \boldsymbol{\dfrac{8}{x^3}}$

(3) $y' = \left(\dfrac{1}{3}x^{-3}\right)' = \dfrac{1}{3}\cdot(-3)x^{-4} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{x^4}}$

練習 3.9 (1) $u = 3x+1$ とすると $y = u^4$ であり

$$\frac{dy}{du} = 4u^3, \qquad \frac{du}{dx} = 3$$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} = 4u^3\cdot 3 = \boldsymbol{12(3x+1)^3}$

(2) $u = 4x+3$ とすると $y = u^{-2}$ であり

$$\frac{dy}{du} = -2u^{-3}, \qquad \frac{du}{dx} = 4$$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} = -2u^{-3}\cdot 4 = -8u^{-3} = \boldsymbol{-\dfrac{8}{(4x+3)^3}}$

別解 (1) $y' = 4(3x+1)^3\cdot(3x+1)' = 4(3x+1)^3\cdot 3 = \boldsymbol{12(3x+1)^3}$

(2) $y = (4x+3)^{-2}$ であるから

$$y' = -2(4x+3)^{-3}\cdot(4x+3)' = -2(4x+3)^{-3}\cdot 4 = \boldsymbol{-\frac{8}{(4x+3)^3}}$$

練習 3.10 (1) $y = f(ax+b)$, $u = ax+b$ とすると $y = f(u)$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(ax+b) = \frac{df}{dx} &= \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= f'(u)\cdot a = af'(ax+b)\end{aligned}$$

(2) $y = \{g(x)\}^n$, $u = g(x)$ とすると $y = u^n$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{g(x)\}^n = \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= nu^{n-1}g'(x)\\ &= n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)\end{aligned}$$

練習 3.11 (1) $y' = 4(2x^2+5)^3 \cdot (2x^2+5)'$

$= 4(2x^2+5)^3 \cdot 4x$

$= \boldsymbol{16x(2x^2+5)^3}$

(2) $y' = 3(1-2x^2)^2 \cdot (1-2x^2)'$

$= 3(1-2x^2)^2 \cdot (-4x)$

$= \boldsymbol{-12x(1-2x^2)^2}$

(3) $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3}$ より

$y' = -3(x^2+1)^{-4} \cdot (x^2+1)'$

$= -\dfrac{3}{(x^2+1)^4} \cdot 2x$

$= -\dfrac{\boldsymbol{6x}}{\boldsymbol{(x^2+1)^4}}$

練習 3.12 $y = \sqrt[6]{x}$ を x について解くと，$x = y^6$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{6y^5} = \frac{1}{6(\sqrt[6]{x})^5} = \boldsymbol{\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}}$$

練習 3.13 (1) $y = x^{\frac{1}{2}}$ より $\quad y' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

(2) $y = x^{\frac{2}{3}}$ より $\quad y' = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}}$

(3) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ より $\quad y' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}}$

練習 3.14 (1) $y' = \left\{(x+1)^{\frac{2}{3}}\right\}' = \dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (x+1)'$

$= \dfrac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}}$

(2) $y' = \left\{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}' = \dfrac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (4-x^2)'$

$= \dfrac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \boldsymbol{-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}}$

問題 3.1

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)+1}-\sqrt{x+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1)-(x+1)}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} \end{aligned}$$

問題 3.2 (1) $y=(1-x^2)(2x^3+5)$ より

$$\begin{aligned} y' &= -2x(2x^3+5)+(1-x^2)\cdot 6x^2 \\ &= -4x^4-10x+6x^2-6x^4 \\ &= \boldsymbol{-10x^4+6x^2-10x} \end{aligned}$$

(2) $y=(2x+1)(3x^4-x^3+2)$ より

$$\begin{aligned} y' &= 2(3x^4-x^3+2)+(2x+1)(12x^3-3x^2) \\ &= 6x^4-2x^3+4+24x^4-6x^3+12x^3-3x^2 \\ &= \boldsymbol{30x^4+4x^3-3x^2+4} \end{aligned}$$

問題 3.3 (前半)

$$\begin{aligned} y' &= \{f(x)g(x)\}'h(x)+\{f(x)g(x)\}h'(x) \\ &= \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}h(x)+f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

(後半)

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x+2)(3x-4)+(x^2+1)\cdot 1\cdot(3x-4)+(x^2+1)(x+2)\cdot 3 \\ &= \boldsymbol{12x^3+6x^2-10x+2} \end{aligned}$$

問題 3.4 (1) $y' = -\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \boldsymbol{-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}}$

(2) $y' = \dfrac{(2x-5)(x+1)-(x^2-5x+6)\cdot 1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{2x^2-3x-5-x^2+5x-6}{(x+1)^2} = \boldsymbol{\frac{x^2+2x-11}{(x+1)^2}}$$

問題 3.5 (1) $y' = 2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)' = 2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{2}{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$

(2) $y' = 3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)' = \boldsymbol{3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

(3) $y' = \{(x+2)^3\}'(2x-1)^4 + (x+2)^3\{(2x-1)^4\}'$
$= 3(x+2)^2(x+2)'(2x-1)^4 + (x+2)^3\cdot 4(2x-1)^3(2x-1)'$
$= 3(x+2)^2(2x-1)^4 + 8(x+2)^3(2x-1)^3$
$= \boldsymbol{(x+2)^2(2x-1)^3(14x+13)}$

(4) $y' = \dfrac{(x^2-2x)'(x-1)^2 - (x^2-2x)\{(x-1)^2\}'}{(x-1)^4}$
$= \dfrac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$
$= \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \boldsymbol{\dfrac{2}{(x-1)^3}}$

別解 $y = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = 1-(x-1)^{-2}$ より

$$y' = 2(x-1)^{-3}(x-1)' = \boldsymbol{\frac{2}{(x-1)^3}}$$

問題 3.6 (1) $y' = \{(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}\}' = \dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}}(x^2+x+1)'$
$= \boldsymbol{\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}}$

(2) $y' = \left\{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}' = -\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1-x^2)'$
$= -\dfrac{-2x}{2\sqrt{(1-x^2)^3}} = \boldsymbol{\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}$

問題 3.7 $f(x) = (x-a)^2Q(x) + bx + c$ を微分すると

$$f'(x) = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2Q'(x) + b$$

上の 2 式に $x = a$ を代入すると　　$f(a) = ba + c,\quad f'(a) = b$

よって　　$\boldsymbol{b = f'(a),\quad c = f(a) - af'(a)}$

練習 3.15 証明　$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

において，$\cos(x+h)-\cos x = \cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x$

$= (\cos h - 1)\cos x - \sin x \sin h$

であるから　$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\left(\dfrac{\cos h - 1}{h}\cos x - \dfrac{\sin h}{h}\sin x\right)$

ここで　$\lim_{h\to 0}\dfrac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0}\dfrac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}$

$= \lim_{h\to 0}\left(-\dfrac{\sin h}{h}\cdot\dfrac{\sin h}{\cos h + 1}\right) = -1\cdot\dfrac{0}{1+1} = 0$

よって　$(\cos x)' = 0\cdot\cos x - 1\cdot\sin x = -\sin x$　証終

別証　$\cos x = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，合成関数の微分法により

$$(\cos x)' = \left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = -\sin x$$

よって　$(\cos x)' = -\sin x$　証終

練習 3.16 (1)　$y' = -\sin 2x\cdot(2x)' = \boldsymbol{-2\sin 2x}$

(2)　$y' = \sqrt{2}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)' = \boldsymbol{3\sqrt{2}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

(3)　$y' = 2\sin x\cdot(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \boldsymbol{\sin 2x}$

(4)　$y' = 2\tan x\cdot(\tan x)' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} = \boldsymbol{\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}}$

(5)　$y' = -\dfrac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = \boldsymbol{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}$

(6)　$y' = 2\cos 3x\cdot(\cos 3x)' = 2\cos 3x\cdot(-3\sin 3x) = -6\sin 3x\cos 3x = \boldsymbol{-3\sin 6x}$

練習 3.17 (1)　$y' = (x)'\sin x + x(\sin x)' + (\cos x)'$

$= 1\cdot\sin x + x\cos x - \sin x = \boldsymbol{x\cos x}$

(2)　$y' = (x)'\cos x + x(\cos x)' - (\sin x)'$

$= 1\cdot\cos x - x\sin x - \cos x = \boldsymbol{-x\sin x}$

深化 3.2　$y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ より　$y' = \dfrac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot(2x)' = \boldsymbol{-\sin 2x}$

練習 3.18 (1) $y' = \dfrac{1}{3x}\cdot(3x)' = \dfrac{3}{3x} = \boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$

(2) $y' = \dfrac{1}{(4x-1)\log 2}\cdot(4x-1)' = \boldsymbol{\dfrac{4}{(4x-1)\log 2}}$

(3) $y' = \dfrac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' = \boldsymbol{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

(4) $y' = 1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x} - 1 = \log x + 1 - 1 = \boldsymbol{\log x}$

練習 3.19 $x > 0$ のとき　　$(\log_a |x|)' = (\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$

$x < 0$ のとき　　$(\log_a |x|)' = \{\log_a(-x)\}' = \dfrac{1}{-x\log a}\cdot(-x)' = \dfrac{1}{x\log a}$

よって　　$(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x\log a}$

練習 3.20 (1) $y' = \dfrac{1}{3x+2}\cdot(3x+2)' = \boldsymbol{\dfrac{3}{3x+2}}$

(2) $y' = \dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\tan x}}$

(3) $y' = \dfrac{1}{(x^2-4)\log 2}\cdot(x^2-4)' = \boldsymbol{\dfrac{2x}{(x^2-4)\log 2}}$

練習 3.21 (1) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = 3\log|x+1| - \log|x-1| - 2\log|x+2|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} \\ &= -\frac{6}{(x+1)(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}y' &= -\frac{6}{(x+1)(x-1)(x+2)} \cdot \frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2} \\ &= -\frac{\boldsymbol{6(x+1)^2}}{\boldsymbol{(x-1)^2(x+2)^3}}\end{aligned}$$

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = \frac{1}{2}\log|x+2| - \log|x+1|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-2(x+2)}{2(x+2)(x+1)} \\ &= \frac{-(x+3)}{2(x+2)(x+1)}\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}y' &= -\frac{x+3}{2(x+2)(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{x+1} \\ &= -\frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{2(x+1)^2\sqrt{x+2}}}\end{aligned}$$

別解 $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{-1}$ であるから

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{-1} + (x+2)^{\frac{1}{2}}\{-(x+1)^{-2}\} \\ &= \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)-2(x+2)}{2(x+1)^2\sqrt{x+2}} = -\frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{2(x+1)^2\sqrt{x+2}}}\end{aligned}$$

練習 3.22 $x^\alpha > 0$ であるから，$y = x^\alpha$ について，両辺の対数をとると

$$\log y = \alpha \log x$$

この両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x} \qquad \leftarrow (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

すなわち $\quad y' = \alpha \cdot \dfrac{y}{x}$

よって $\quad (x^\alpha)' = \alpha \cdot \dfrac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

練習 3.23 (1) $y' = e^{2x} \cdot (2x)' = \boldsymbol{2e^{2x}}$

(2) $y' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = \boldsymbol{-2xe^{-x^2}}$

(3) $y' = \boldsymbol{3^x \log 3}$

(4) $y' = 2^{-3x} \log 2 \cdot (-3x)' = \boldsymbol{-3 \cdot 2^{-3x} \log 2}$

(5) $y' = 1 \cdot e^x + xe^x = \boldsymbol{(x+1)e^x}$

(6) $y' = (2x-1)'a^x + (2x-1)(a^x)'$

$= 2a^x + (2x-1)a^x \log a$

$= \boldsymbol{a^x\{2 + (2x-1)\log a\}}$

深化 3.3 $y = a^x$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y = x \log a$$

この関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log a \quad \text{よって} \quad y' = a^x \log a$$

練習 3.24 (1) $\boldsymbol{y' = 3x^2 - 2,\ y'' = 6x,\ y''' = 6}$

(2) $y = x^{-1}$ であるから $\quad y' = -x^{-2},\ y'' = 2x^{-3},\ y''' = -6x^{-4}$

よって $\quad \boldsymbol{y' = -\dfrac{1}{x^2},\ y'' = \dfrac{2}{x^3},\ y''' = -\dfrac{6}{x^4}}$

(3) $\boldsymbol{y' = -\sin x,\ y'' = -\cos x,\ y''' = \sin x}$

(4) $\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{x},\ y'' = -\dfrac{1}{x^2},\ y''' = \dfrac{2}{x^3}}$

(5) $\boldsymbol{y' = e^x,\ y'' = e^x,\ y''' = e^x}$

(6) $\boldsymbol{y' = -2e^{-2x},\ y'' = 4e^{-2x},\ y''' = -8e^{-2x}}$

練習 3.25 (1) $y' = nx^{n-1}$，$y'' = n(n-1)x^{n-2}$，$\cdots$，$y^{(n)} = n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 = \boldsymbol{n!}$

(2) $y' = 2e^{2x}$，$y'' = 2^2 e^{2x}$，$\cdots$，$y^{(n)} = \boldsymbol{2^n e^{2x}}$

練習 3.26 (1) $\boldsymbol{y = \pm 2\sqrt{-2x}}$

(2) $y = 2\sqrt{-2x}$ のとき，これを x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{(-2x)'}{2\sqrt{-2x}} = -\frac{4}{2\sqrt{-2x}} = -\frac{4}{y}$$

$y = -2\sqrt{-2x}$ のとき，これを x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -2\cdot\frac{(-2x)'}{2\sqrt{-2x}} = -\frac{4}{-2\sqrt{-2x}} = -\frac{4}{y}$$

よって　　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{y}$

深化 3.4 $y^2 = 4x$ について，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{y}$ であるから，放物線 $y^2 = 4x$ 上の原点以外の点 $(a,\ b)$ における接線の傾きは

$$\boldsymbol{\frac{2}{b}}$$

練習 3.27 (1) $x^2 + y^2 = 1$ の両辺を x で微分すると　$2x + 2y\cdot\dfrac{dy}{dx} = 0$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}}$

(2) $x^2 - y^2 = 1$ の両辺を x で微分すると　$2x - 2y\cdot\dfrac{dy}{dx} = 0$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}}$

練習 3.28 (1) $\dfrac{dx}{dt} = 4t$，$\dfrac{dy}{dt} = 2$ から　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{4t} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2t}}$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t$，$\dfrac{dy}{dt} = \cos t$ から　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = \boldsymbol{-\dfrac{\cos t}{\sin t}}$

問題 3.8 (1) $y' = -\dfrac{-\sin x}{(1+\cos x)^2} = \boldsymbol{\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}}$

(2) $y = \sin^2 x(1-2\sin^2 x) = \sin^2 x - 2\sin^4 x$ より

$$\begin{aligned} y' &= 2\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x \\ &= \sin 2x - 4\sin 2x\sin^2 x \\ &= \boldsymbol{\sin 2x(1-4\sin^2 x)} \end{aligned}$$

(3) $y' = 2(\log x)\cdot(\log x)' = \boldsymbol{\dfrac{2\log x}{x}}$

(4) $y = \log|x+1| - \log|x+2|$

$$y' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \boldsymbol{\frac{1}{(x+1)(x+2)}}$$

(5) $y' = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \boldsymbol{\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}}$

(6) $y' = \boldsymbol{2a^{2x+1}\log a}$

問題 3.9 $u = x + \sqrt{x^2+a}$, $y = \log u$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+a}) = \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \end{aligned}$$

問題 3.10 (1) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = 2\log|x^2-1| - 2\log|x^2+1|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{4x}{x^2-1} - \frac{4x}{x^2+1} = \frac{8x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

よって

$$y' = \frac{8x}{(x^2-1)(x^2+1)}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3}}$$

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = 2\log|x-1| + \frac{1}{3}\log|x+2|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{3(x+2)} = \frac{7x+11}{3(x-1)(x+2)}$$

よって

$$y' = \frac{7x+11}{3(x-1)(x+2)}\cdot(x-1)^2\cdot\sqrt[3]{x+2} = \boldsymbol{\frac{(7x+11)(x-1)}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}}$$

別解 (1) $y' = 2\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)'$

$$= 2\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \boldsymbol{\frac{8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3}}$$

(2) $y' = \{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}\}'(x+2)^{\frac{1}{3}} + (x-1)^2\left\{(x+2)^{\frac{1}{3}}\right\}'$

$$= 2(x-1)(x+2)^{\frac{1}{3}} + (x-1)^2\cdot\frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{6(x-1)(x+2)+(x-1)^2}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{(7x+11)(x-1)}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

問題 3.11 $y = e^x(\sin x + \cos x)$ より

$$y' = e^x(\sin x+\cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x\cos x,$$
$$y'' = 2e^x\cos x - 2e^x\sin x = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

したがって

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x(\cos x - \sin x) - 2\cdot 2e^x\cos x + 2\cdot e^x(\sin x+\cos x)$$
$$= 0$$

問題 3.12 $(x-1)^2+y^2=16$ の両辺を x で微分すると

$$2(x-1)+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$y\neq 0$ のとき　　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-1}{y}}$

問題 3.13 (1) $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{(\cos t)'}{\cos^2 t}=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ から　　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sin t}}$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=1+\dfrac{1}{t^2}$ から　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\dfrac{1}{t^2}}{1-\dfrac{1}{t^2}}=\boldsymbol{\dfrac{t^2+1}{t^2-1}}$

問題 3.14 (1) 関数 $y=\sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値域は $-1<y<1$ であるから，
この関数の逆関数 $y=f(x)$ について

定義域は　$\boldsymbol{-1<x<1}$,　値域は　$\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}}$

(2) $y=f(x)$ について，$x=\sin y$ であるから　$\boldsymbol{\dfrac{dx}{dy}=\cos y}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

章末 3.1
$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sqrt{x+h}-x\sqrt{x}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h\{(x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x}\}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h\{(x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x}\}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+3xh+h^2}{(x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x}}\\
&= \frac{3x^2}{x\sqrt{x}+x\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

章末 3.2 (1) $y' = \dfrac{(2x+1)\sqrt{x} - (x^2+x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{\boldsymbol{3x^2+x-1}}{\boldsymbol{2x\sqrt{x}}}$

【別解】$y = x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ より

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \boldsymbol{\frac{3x^2+x-1}{2x\sqrt{x}}}$$

(2) $y' = \dfrac{(1+\cos x)'}{2\sqrt{1+\cos x}} = \boldsymbol{-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}}$

(3) $y' = \dfrac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \boldsymbol{\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}}$

(4) $y' = 2^{\log x} \cdot \log 2 \cdot (\log x)' = \boldsymbol{\dfrac{2^{\log x}\log 2}{x}}$

章末 3.3 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} \\ &= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \\ &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)\end{aligned}$$

章末 3.4 (1) $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ より

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \boldsymbol{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}$$

$$y'' = \boldsymbol{\frac{2}{(x-1)^3}}$$

(2) $y' = e^{-2x^2} \cdot (-2x^2)' = \boldsymbol{-4xe^{-2x^2}}$

$$\begin{aligned}y'' &= (-4x)'e^{-2x^2} + (-4x)\cdot(e^{-2x^2})' \\ &= -4e^{-2x^2} + (-4x)\cdot(-4xe^{-2x^2}) = \boldsymbol{4(4x^2-1)e^{-2x^2}}\end{aligned}$$

章末 3.5 $(1+x+x^2+\cdots+x^n)'=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$ の左辺は

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' &= \frac{-(n+1)x^n\cdot(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{(n+1)(x^{n+1}-x^n)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

よって，$x\neq 1$ のとき

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\boldsymbol{\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}}$$

章末 3.6 **証明** $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ $\cdots$(A) とする．

［1］$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

ゆえに，(A) は $n=1$ のとき成り立つ．

［2］$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

と仮定する．このとき

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\frac{d}{dx}\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\\ &=\sin\left\{\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}=\sin\left\{x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right\}\end{aligned}$$

よって，(A) は $n=k+1$ のときも成り立つ．

［1］，［2］から (A) はすべての自然数 n について成り立つ． **証終**

章末 3.7 (1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

よって $$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

よって $$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}$$

章末 3.8 左辺 $=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-\{f(a-h)-f(a)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

$=f'(a)+f'(a)=\boldsymbol{2f'(a)}$

章末 3.9 (1) $f(x)=\log(1+x)$ とすると $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-\log 1}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=f'(0)=\frac{1}{1+0}=\mathbf{1}$$

(2) $g(x)=e^x$ とすると $g'(x)=e^x$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$
$$=g'(0)=e^0=\mathbf{1}$$

章末 3.10 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{2}=\boldsymbol{e^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{e}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^{2}=\boldsymbol{e^2}$

章末 3.11 (1) $\displaystyle y'=\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}(1+\tan x)-(1-\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^2}$

$\displaystyle=\frac{-(1+\tan x)-(1-\tan x)}{(1+\tan x)^2\cos^2 x}=\frac{-2}{\{(1+\tan x)\cos x\}^2}$

$\displaystyle=-\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{(\cos x+\sin x)^2}}$

【別解】$\displaystyle y=\frac{2-(1+\tan x)}{1+\tan x}=\frac{2}{1+\tan x}-1$ より

$\displaystyle y'=-2\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^2}=-2\cdot\frac{1}{\{\cos x(1+\tan x)\}^2}$

$\displaystyle=-\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{(\cos x+\sin x)^2}}$

(2) $\displaystyle y'=2x(\log x)^3+x^2\cdot 3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}=\boldsymbol{2x(\log x)^3+3x(\log x)^2}$

(3) $\displaystyle y'=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{(e^x+e^{-x})^2}}$

章末 3.12 (1) $x^x > 0$ であるから，$y = x^x$ について，両辺の対数をとると

$$\log y = x \log x$$

この両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

よって　　$y' = y(\log x + 1) = \boldsymbol{x^x(\log x + 1)}$

(2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x+2)}}$ について，両辺の絶対値の対数をとると

$$\log |y| = \frac{1}{3} \log |x+1| - \frac{2}{3} \log |x+2|$$

この両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{3(x+2)} = -\frac{x}{3(x+1)(x+2)}$$

よって　　$y' = -\dfrac{x}{3(x+1)(x+2)} \cdot y$

$$= -\frac{x}{3(x+1)(x+2)} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x+2)}}$$

$$= -\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3(x+2)\sqrt[3]{(x+1)^2(x+2)^2}}}$$

章末 3.13 $\dfrac{dx}{dt}=e^{t}$，$\dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}$ であるから　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-e^{-t}}{e^{t}}=-e^{-2t}$

よって　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}(-e^{-2t})\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

$=2e^{-2t}\cdot\dfrac{1}{e^{t}}=\boldsymbol{2e^{-3t}}$

補足 $x=f(t)$，$y=g(t)$ について

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

これをさらに x について微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)=\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)\right\}\frac{dt}{dx}\\&=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}\\&=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}\end{aligned}$$

章末 3.14 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ において，y を x の関数とみなして，両辺を x で微分すると

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

よって　　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}=-\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

ネイピア数

1 と n 個の $1+\dfrac{1}{n}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+1}\left\{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} > \sqrt[n+1]{1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

両辺を $n+1$ 乗すると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列である．

また，1 と $n+1$ 個の $\dfrac{n}{n+1}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+2}\left\{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\right\} > \sqrt[n+2]{1\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

両辺を $n+2$ 乗すると

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

上式の逆数をとると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ とすると，数列 $\{b_n\}$ は単調減少列である．したがって

$$2=a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}<\cdots<b_2<b_1=4$$

また，$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ であるから　$0<b_n-a_n=\frac{a_n}{n}<\frac{4}{n}$

はさみうちの原理により　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

この極限値をネイピア数といい，e ($\fallingdotseq 2.71828\cdots$) で表す．

ライプニッツの公式

$\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ における $f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$ の係数を ${}_n\mathrm{C}_r$ であると推定すると

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x) \quad \cdots(*)$$

［1］① から　$\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = {}_1\mathrm{C}_0 f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) + {}_1\mathrm{C}_1 f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)$

したがって，$n = 1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\frac{d^k}{dx^k}\{f(x)g(x)\} = \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r)}(x)$$

これを微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\{f(x)g(x)\} &= \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r\{f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x)\} \\
&= \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x) \\
&= f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\
&\qquad + \sum_{r=0}^{k-1} {}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\
&= f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\
&\qquad + \sum_{r=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_{r-1} f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\
&= {}_{k+1}\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) \\
&\qquad + \sum_{r=1}^{k} ({}_k\mathrm{C}_r + {}_k\mathrm{C}_{r-1}) f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\
&\qquad + {}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1} f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\
&= {}_{k+1}\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) \\
&\qquad + \sum_{r=1}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\
&\qquad + {}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1} f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\
&= \sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)
\end{aligned}$$

したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について $(*)$ が成立する．

練習 4.1 (1) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ とすると $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}$ であるから

$$f'(-1)=-4$$

よって，点 $(-1,-4)$ における接線の方程式は

$$y-(-4)=-4\{x-(-1)\} \qquad \text{すなわち} \qquad y=-4x-8$$

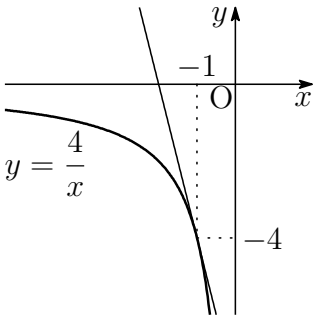
(2) $f(x)=\tan x$ とすると $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから

$$f'(0)=1$$

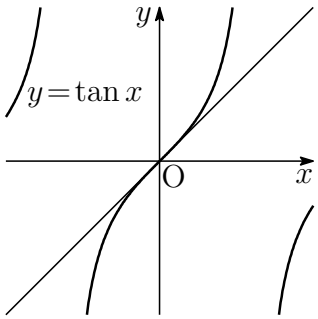
よって，点 $(0,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y-0=1(x-0) \qquad \text{すなわち} \qquad y=x$$

(1)



(2)



練習 4.2 (1) $f(x)=\dfrac{2}{x}$ とすると　　$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$

よって　　$f'(-1)=-2$

したがって，この法線の方程式は

$$y-2=-\frac{1}{-2}(x-1)\qquad \text{すなわち}\qquad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$$

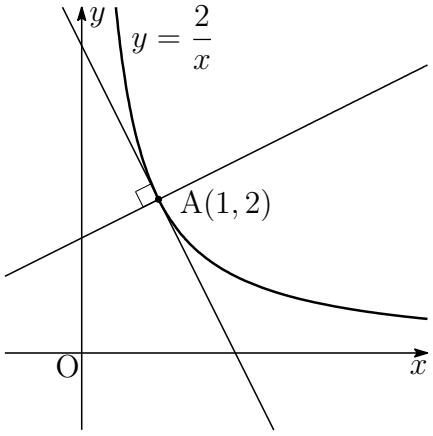
(2) $f(x)=\sin x$ とすると　　$f'(x)=\cos x$

よって　　$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

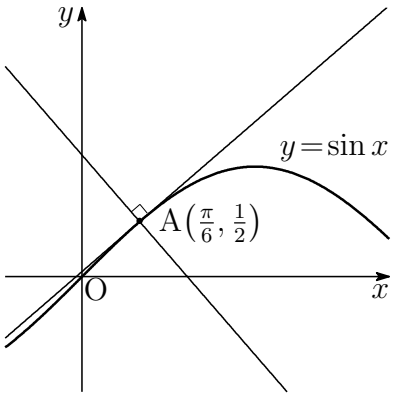
したがって，この法線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\qquad \text{すなわち}\qquad \boldsymbol{y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2}}$$

(1)



(2)



練習 4.3 $y=e^x$ を微分すると　$y'=e^x$

ここで，接点の座標を $(a,\ e^a)$ とすると，接線の方程式は

$$y-e^a=e^a(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=e^ax+e^a(1-a)\quad \cdots ①$$

(1) 接線 ① の傾きが 1 であるから

$$e^a=1\quad \text{すなわち}\quad a=0$$

① に代入して　$\boldsymbol{y=x+1}$

(2) 接線 ① が点 $(1,\ 0)$ を通るから

$$0=e^a+e^a(1-a)\quad \text{ゆえに}\quad e^a(2-a)=0$$

$e^a\neq 0$ であるから　$a=2$

① に代入すると　$y=e^2x+e^2(1-2)$　すなわち　$\boldsymbol{y=e^2x-e^2}$

練習 4.4 (1) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の両辺を x で微分すると　　$\dfrac{2x}{2}+\dfrac{2yy'}{8}=0$

ゆえに，$y\neq 0$ のとき　　$y'=-\dfrac{4x}{y}$

よって，点 $(-1,\ 2)$ における接線の傾きは　　$-\dfrac{4\cdot(-1)}{2}=2$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-2=2(x+1)\qquad \text{すなわち}\qquad \boldsymbol{y=2x+4}$$

(2) $x^2-y^2=1$ の両辺を x で微分すると　　$2x-2yy'=0$

ゆえに，$y\neq 0$ のとき　　$y'=\dfrac{x}{y}$

よって，点 $(\sqrt{2},-1)$ における接線の傾きは　　$\dfrac{\sqrt{2}}{-1}=-\sqrt{2}$

したがって，求める接線の方程式は

$$y+1=-\sqrt{2}(x-\sqrt{2})\qquad \text{すなわち}\qquad \boldsymbol{y=-\sqrt{2}x+1}$$

練習 4.5 $f(x)=x^3$ は，区間 $[-1,\ 2]$ で連続で，区間 $(-1,\ 2)$ で微分可能である．

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{8-(-1)}{3}=3,\quad f'(c)=3c^2$$

よって　　$3c^2=3$　すなわち　$c^2=1$

$-1<c<2$ であるから　　$\boldsymbol{c=1}$

練習 4.6 関数 $f(x)=e^x$ は，$(a,\ b)$ で微分可能で，$f'(x)=e^x$

区間 $[a,\ b]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^c\quad \cdots①,\qquad a<c<b\quad \cdots②$$

を同時に満たす c が存在する．

e^x は増加関数であるから，② より　　$e^a<e^c<e^b$

よって，① により　　$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$　　証終

練習 4.7 ［**2 の証明**］区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 x_1，x_2 に対して，平均値の定理により

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2$$

を満たす c がとれる．

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) < 0$ ならば，x_1，x_2 のとり方によらず，常に $f'(c) < 0$ となる．ここで，$x_2 - x_1 > 0$ であるから，

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

が成り立つ．よって，**2** が成り立つ． **証終**

［**3 の証明**］区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 x_1，x_2 に対して，平均値の定理により

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2$$

を満たす c がとれる．

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) = 0$ ならば，x_1，x_2 のとり方によらず，常に $f'(c) = 0$ であるから，

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

が成り立つ．よって，**3** が成り立つ． **証終**

練習 4.8 $h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと，区間 $(a,\ b)$ で，常に $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$ であるから，$h(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である．

したがって，定数 C を用いて，$h(x) = C$ とおける．

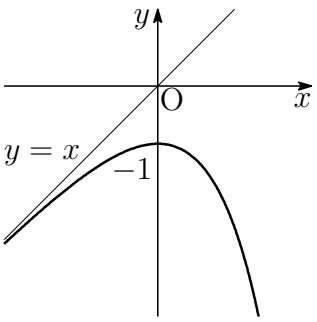
ゆえに，区間 $[a,\ b]$ で　　$g(x) = f(x) + C$　　ただし，C は定数． **証終**

練習 4.9 (1) $f'(x) = 1 - e^x$

$f'(x)$ の符号を調べると，
$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↘

よって，$f(x)$ は $x \leqq 0$ で増加し，
$0 \leqq x$ で減少する．

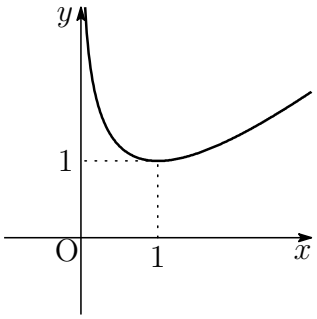


(2) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

$f'(x)$ の符号を調べると，
$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	1	↗

よって，$f(x)$ は $0 < x \leqq 1$ で減少し，
$1 \leqq x$ で増加する．

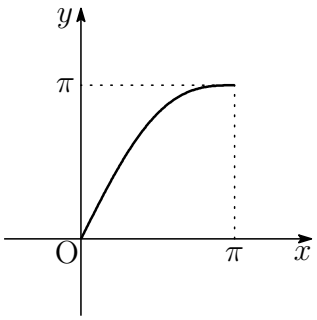


(3) $f'(x) = 1 + \cos x$

$f'(x)$ の符号を調べると，
$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	π

よって，$f(x)$ は定義域で常に増加する．



練習 4.10 (1)　$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2-x)xe^{-x}$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると　$x = 0,\ 2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{4}{e^2}$	↘

よって，極小値は $\boldsymbol{f(0) = 0}$，極大値は $\boldsymbol{f(2) = \dfrac{4}{e^2}}$ である．

(2) 定義域は $x > 0$ である．　$f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \log x + 1$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると　$x = \dfrac{1}{e}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	極小 $-\frac{1}{e}$	↗

よって，極小値は $\boldsymbol{f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}}$，極大値はない．

(3) 定義域は $x \neq 0$ である．　$f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{x^2}$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると　$x = -\sqrt{2},\ \sqrt{2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $-2\sqrt{2}$	↘	／	↘	極小 $2\sqrt{2}$	↗

よって，極大値は $\boldsymbol{f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}}$，極小値は $\boldsymbol{f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}}$ である．

練習 4.11 (1) $x \geqq 0$ のとき　　$f(x) = x^2 + x$

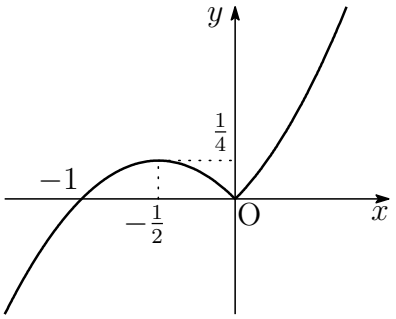
$x > 0$ において　　$f'(x) = 2x + 1$

$x > 0$ では，常に　$f'(x) > 0$

$x < 0$ のとき　　$f(x) = -x^2 - x$

$f'(x) = -2x - 1$

$f'(x) = 0$ とすると　　$x = -\dfrac{1}{2}$



よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{1}{4}$	↘	極小 0	↗

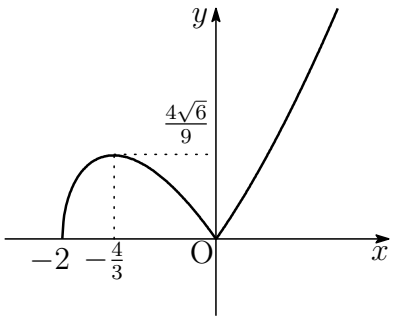
よって，**極大値は $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$，極小値は $f(0) = 0$** である．

(2) この関数の定義域は，$x \geqq -2$ である．

$x \geqq 0$ のとき　　$f(x) = x\sqrt{x+2}$

$x > 0$ において

$$f'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}} = \frac{2(x+2)+x}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$$



よって，$x > 0$ では，常に　$f'(x) > 0$

$-2 \leqq x < 0$ のとき　　$f(x) = -x\sqrt{x+2}$

$-2 < x < 0$ において

$$f'(x) = -\frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると　　$x = -\dfrac{4}{3}$

以上から，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-2	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	↗	極大 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↘	極小 0	↗

よって，**極大値は $f\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{6}}{9}$，極小値は $f(0) = 0$** である．

練習 4.12　　$f'(x) = 1 - \dfrac{a}{x^2} = \dfrac{x^2 - a}{x^2}$

$f(x)$ は $x = 1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x = 1$ で極値をとるならば

$$f'(1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 1 - a = 0$$

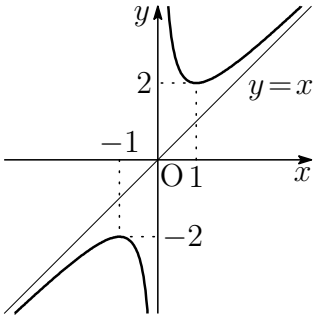
これを解くと　　$a = 1$

逆に，$a = 1$ のとき $f(x)$ が $x = 1$ で極値をとることを示す．

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -2	↘	／	↘	極小 2	↗



よって，$f(x)$ は $x = 1$ で極値をとり，条件を満たす．

(答) $\boldsymbol{a = 1}$，極大値 $\boldsymbol{f(-1) = -2}$，極小値 $\boldsymbol{f(1) = 2}$

深化 4.1　① $f'(-1)$ が存在するかを確認するため．

② $f'(-1) = 0$ は $f(-1)$ が極値であるための必要条件である．
したがって，十分性を示すため．

練習 4.13 (1)　$y' = -\sin x \cdot \sin x + (1+\cos x)\cos x$

$= \cos^2 x - 1 + \cos x + \cos^2 x$

$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$

$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$0 < x < 2\pi$ で $y' = 0$ となる x の値は

$$\cos x = \frac{1}{2},\ \cos x = -1$$

より　$x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \pi$

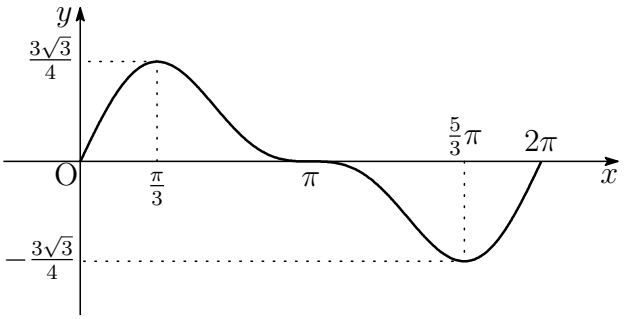
ゆえに，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における y の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

したがって，y は

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ で最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{4},\ x = \frac{5}{3}\pi \text{ で最小値 } -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

をとる．



(2) $$y' = \frac{-3(x^2+1)-(4-3x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{3x^2-8x-3}{(x^2+1)^2} = \frac{(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$1 < x < 4$ で $y' = 0$ となる x の値は　　$x = 3$

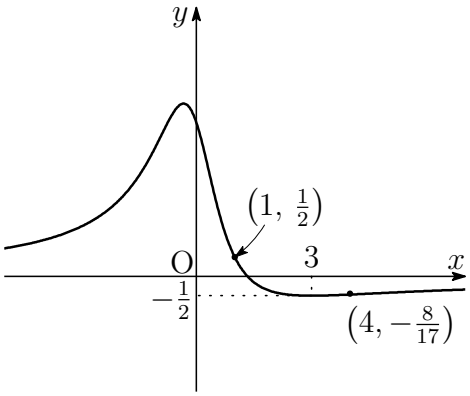
ゆえに，$1 \leqq x \leqq 4$ における y の増減表は

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	↘	極小 $-\frac{1}{2}$	↗	$-\frac{8}{17}$

したがって，y は

$x = 1$ で最大値 $\dfrac{1}{2}$，$x = 3$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$

をとる．



練習 4.14 (1)　$y' = 4x^3 + 6x^2$，$y'' = 12x^2 + 12x = 12x(x+1)$

よって，この曲線の凹凸は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	変曲点 0	上に凸	変曲点 1	下に凸

変曲点の座標は　$\boldsymbol{(-1,\ 0)}$，$\boldsymbol{(0,\ 1)}$

(2)　$y' = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

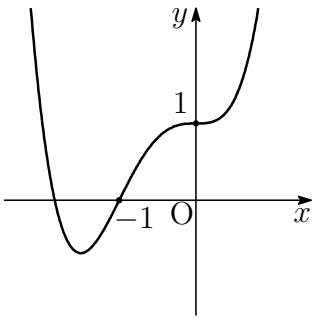
$y'' = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$

よって，この曲線の凹凸は，次のようになる．

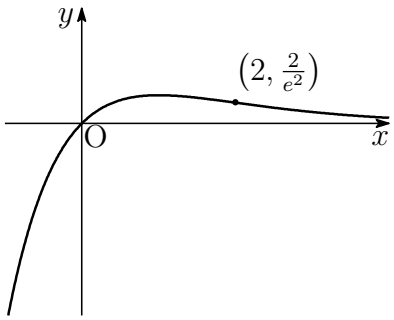
x	$\cdots$	2	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	変曲点 $\frac{2}{e^2}$	下に凸

変曲点の座標は　$\boldsymbol{\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)}$

(1)



(2)



(3)　　$y' = 1 + \sin x$，$y'' = \cos x$

よって，この曲線の凹凸は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
y''	／	$+$	0	$-$	／
y	／	下に凸	変曲点 $\frac{\pi}{2}$	上に凸	／

変曲点の座標は　$\left(\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}, \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right)$

(4)　　$y' = -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4$，

$y'' = -12x^2 + 24x - 12 = -12(x-1)^2$

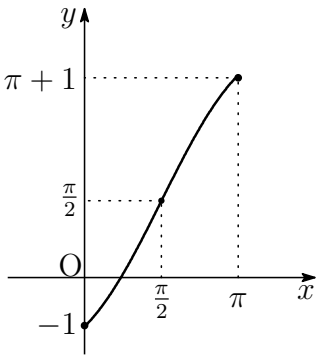
よって，この曲線の凹凸は，次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$-$	0	$-$
y	上に凸	1	上に凸

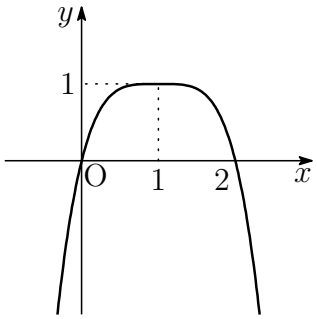
変曲点はない

補足 $y = 1 - (x-1)^4$ より　$y'' = -12(x-1)^2$

(3)



(4)



練習 4.15 $f(x) = e^{-2x^2}$ とする．

$$f'(x) = -4xe^{-2x^2}, \quad f''(x) = -4\{e^{-2x^2} + x(-4xe^{-2x^2})\} = 4(4x^2 - 1)e^{-2x^2}$$

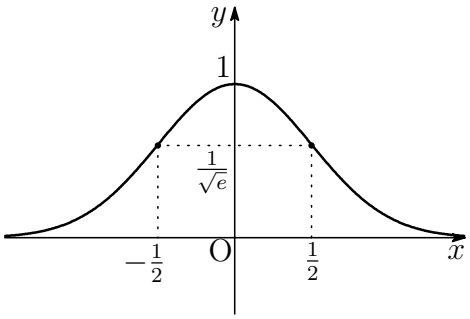
$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	極大 1	↘	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

また

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である．
以上から，この関数のグラフの概形は，右の図のようになる．



練習 4.16 関数の定義域は $x \neq -1$ である．

$f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ とする．$f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x + 1}$ であるから

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{8}{(x+1)^2}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	／	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	極大 -7	↘	／	↘	極小 1	↗

また

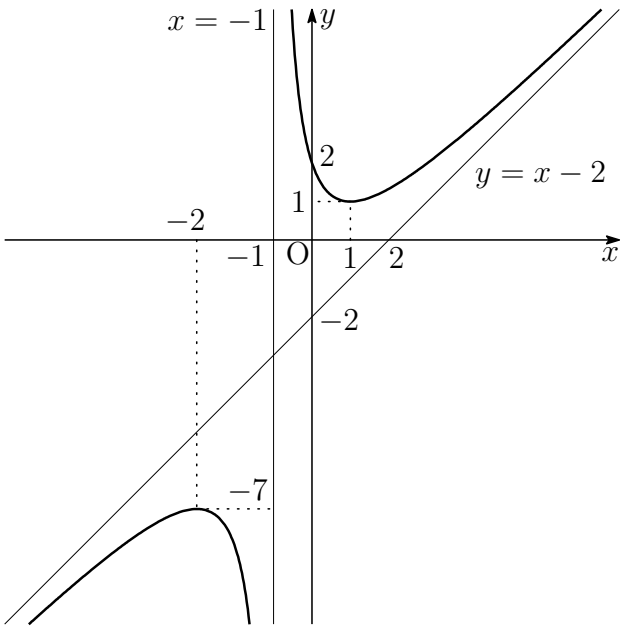
$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -1-0} f(x) = -\infty$$

であるから，直線 $x = -1$ はこの曲線の漸化式である．さらに

$$\lim_{x \to \infty} \{f(x) - (x-2)\} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \{f(x) - (x-2)\} = 0$$

であるから，直線 $y = x - 2$ もこの曲線の漸近線である．

以上から，グラフの概形は，下の図のようになる．



練習 4.17 (1) $f'(x)=4x^3-12x$，$f''(x)=12x^2-12$

$f'(x)=0$ を解くと　$x=0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}$

$f''(0)=-12<0$，$f''(\sqrt{3})=24>0$，$f''(-\sqrt{3})=24>0$

よって　　$f(0)$ は極大値，$f(\pm\sqrt{3})$ は極小値

ゆえに，$f(x)$ は

$$\boldsymbol{x=0}\text{ で極大値 }\boldsymbol{5}\text{，}\boldsymbol{x=\pm\sqrt{3}}\text{ で極小値 }\boldsymbol{-4}$$

をとる．

(2) $f'(x)=1+2\cos x$，$f''(x)=-2\sin x$

$f'(x)=0$ を解くと　$\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$0<x<2\pi$ では　$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

$f''\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}<0$，$f''\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=\sqrt{3}>0$

よって　　$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)$ は極大値，$f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)$ は極小値

ゆえに，$f(x)$ は

$$\boldsymbol{x=\frac{2}{3}\pi}\text{ で極大値 }\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}}\text{，}\boldsymbol{x=\frac{4}{3}\pi}\text{ で極小値 }\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}}$$

をとる．

問題 4.1 $f(x)=e^{-x}$ とすると，$f'(x)=-e^{-x}$ より

$$f'(-1)=-e$$

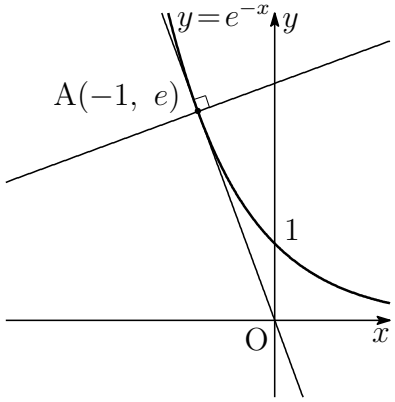
よって，点 $(-1,\ e)$ における接線の方程式は

$$y-e=-e\{x-(-1)\}$$

すなわち　　$\boldsymbol{y=-ex}$

また，点 $(-1,\ e)$ における法線の方程式は

$$y-e=\frac{1}{e}\{x-(-1)\}\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{y=\frac{1}{e}x+e+\frac{1}{e}}$$



問題 4.2 (1) $y^2 = 4px$ より　$2yy' = 4p$

$y_1 \neq 0$ のとき　　$y - y_1 = \dfrac{2p}{y_1}(x - x_1)$

$y_1 y = 2px + {y_1}^2 - 2px_1$

${y_1}^2 = 4px_1$ であるから　$y_1 y = 2px + 2px_1$

ゆえに　　$y_1 y = 2p(x + x_1)$　$\cdots$①

$y_1 = 0$ のとき　点 $(0,\ 0)$ における接線の方程式は $x = 0$ で，

$p \neq 0$ より ① が得られる．

したがって，放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $(x,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

よって，$y \neq 0$ のとき　$y' = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

$y_1 \neq 0$ のとき　点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

これを変形して　　$\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = \dfrac{{x_1}^2}{a^2} + \dfrac{{y_1}^2}{b^2} = 1$

点 $(x_1,\ y_1)$ は楕円上にあるから　$\dfrac{{x_1}^2}{a^2} + \dfrac{{y_1}^2}{b^2} = 1$

ゆえに　　$\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$　$\cdots$①

$y_1 = 0$ のとき　$x_1 = \pm a$

点 $(a,\ 0)$ における接線の方程式は　$x = a$

これは，① において $x_1 = a,\ y_1 = 0$ とした場合である．

点 $(-a,\ 0)$ における接線の方程式は　$x = -a$

これは，① において $x_1 = -a$，$y_1 = 0$ とした場合である．

したがって，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

問題 4.3 曲線 $y = ax^2 + b$ 上に点 $\mathrm{A}(e,\ 1)$ があるから，

$$ae^2 + b = 1 \quad \cdots ①$$

$y' = 2ax$ より点 A における接線の傾きは　$2ae$

また，曲線 $y = \log x$ 上の点 A における接線の傾きは　$y' = \dfrac{1}{x}$ より　$\dfrac{1}{e}$

接線が一致するから　　$2ae = \dfrac{1}{e} \quad \cdots ②$

② より　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2e^2}}$　これを ① へ代入して　$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{2}}$

問題 4.4 (1) 関数の定義域は　$x > 0$

$$y' = 2x\log x + x^2\frac{1}{x} = x(2\log x + 1)$$

$y' = 0$ とすると　　$x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	極小 $-\frac{1}{2e}$	↗

よって，y は $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$ で極小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2e}}$ をとる．極大値はない．

(2) $x \geqq -1$ のとき　　$y = (x+1)e^x$

$x > -1$ において　　$y' = (x+2)e^x$

よって，$x > -1$ では，常に　　$y' > 0$

$x < -1$ のとき　　$y = -(x+1)e^x,\ y' = -(x+2)e^x$

$y' = 0$ とすると　　$x = -2$

以上から，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$+$
y	↗	極大 $\frac{1}{e^2}$	↘	極小 0	↗

よって，y は $\boldsymbol{x = -2}$ で極大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{e^2}}$，$\boldsymbol{x = -1}$ で極小値 $\boldsymbol{0}$ をとる．

問題 4.5 (1) $y' = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

$-1 < x < 2$ において $y' = 0$ となる x の値は，$x = \sqrt{2}$ である．

よって，y の増減表は

x	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\sqrt{3}$	↗	極大 2	↘	0

$x = \sqrt{2}$ で最大値 2，$x = -1$ で最小値 $-\sqrt{3}$

(2) 定義域は，$4 - x^2 \geqq 0$ より　　$-2 \leqq x \leqq 2$

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}} \quad (-2 < x < 2)$$

$y' = 0$ とすると，$\sqrt{4-x^2} = x$ より　$x = \sqrt{2}$

したがって，y の増減表は

x	-2	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	極大 $2\sqrt{2}$	↘	2

$x = \sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$，$x = -2$ で最小値 -2

問題 4.6　$y = x^4 + ax^3 + 3ax^2 + 1 \quad \cdots ①$

$y' = 4x^3 + 3ax^2 + 6ax$，$y'' = 12x^2 + 6ax + 6a$

$y'' = 0$ とすると　$2x^2 + ax + a = 0 \quad \cdots ②$

曲線 ① が変曲点をもつためには，② が実数解 α をもち，$x = \alpha$ の前後で y'' の符号が変わらなければならない．したがって，② が異なる 2 つの実数解をもたなければならない．

逆に ② が異なる 2 つの実数解をもつとき，これを α, β $(\alpha < \beta)$ とすると，下の表のように確かに曲線 ① は変曲点をもつ．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	変曲点	上に凸	変曲点	下に凸

よって，$D = a^2 - 8a > 0$ が必要かつ十分な条件である．

これを解いて　　$\boldsymbol{a < 0,\ 8 < a}$

問題 4.7

$$y = \frac{x(x-1)-2}{x-1} = x - \frac{2}{x-1}$$

$$y' = 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$y'' = -\frac{4}{(x-1)^3}$$

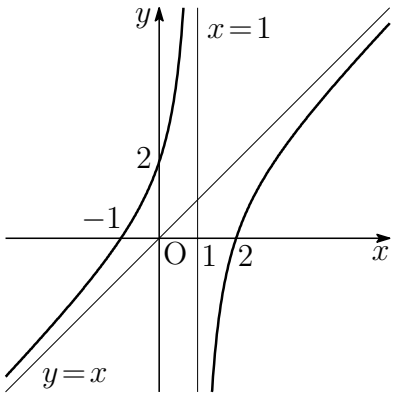
よって，増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$		$+$
y''	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\nearrow$

$\lim_{x \to 1-0} y = \infty$，$\lim_{x \to 1+0} y = -\infty$，$\lim_{x \to \pm\infty} (y - x) = 0$

よって，漸近線は直線 $x = 1$，直線 $y = x$ である．

以上から，この関数のグラフの概形は，下の図のようになる．



問題 4.8 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2-(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1}, \\ f''(x) &= -\frac{8x}{(x^2+1)^3} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	変曲点	↳	極小	↗	変曲点	↱	極大	↘	変曲点	↳

また

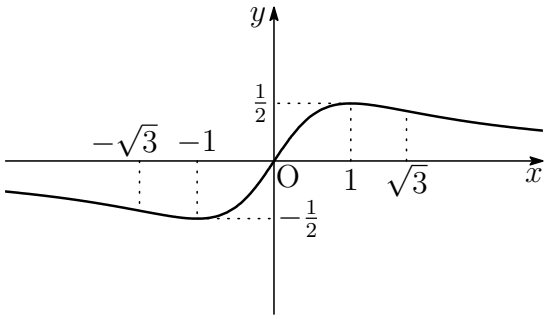
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である．

最大値 $f(1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$，最小値 $f(-1)=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

変曲点 $\boldsymbol{(0,\ 0)}$，$\boldsymbol{\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$ **(複号同順)**

以上から，この関数のグラフの概形は，次の図のようになる．



練習 4.18 (1) $f(x)=x-\log(x+1)$ とすると　　$f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$

$x>0$ のとき，$\dfrac{x}{x+1}>0$ であるから　　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は区間 $x\geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)=0$

したがって　　$x-\log(x+1)>0$

すなわち　　$\log(x+1)<x$

(2) $f(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$ とすると　　$f'(x)=e^x-(1+x)$

応用例題 4.4 の結果より，$x>0$ のとき　　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は区間 $x\geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)=0$

したがって　　$e^x-\left(1+x+\dfrac{1}{2}x^2\right)>0$

よって，$x>0$ のとき　　$e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

補足 $g(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}\right)$ とすると　$g'(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}\right)$

練習 4.18 の結果より，$x>0$ のとき　　$g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は区間 $x\geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x>0$ のとき　　$g(x)>g(0)=0$

したがって　　$e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}\right)>0$

よって，$x>0$ のとき　　$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}$

同様に，n を自然数，$x>0$ とする．

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

が成立するとき，次式が成立する．

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

したがって，$x>0$ のとき　$e^x>\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$　ゆえに　$\dfrac{e^x}{x^n}>\dfrac{x}{(n+1)!}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{(n+1)!}=\infty$ より　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=\infty$,　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$

練習 4.19 (1) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ とすると

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

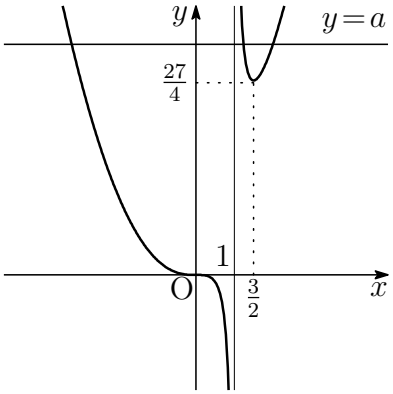
よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	／	↘	極小 $\frac{27}{4}$	↗

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{x}}=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{x}}=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x)=\infty$



ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．

したがって

$$\boldsymbol{a>\frac{27}{4}}\ \textbf{のとき 3 個，}\ \boldsymbol{a=\frac{27}{4}}\ \textbf{のとき 2 個，}\ \boldsymbol{a<\frac{27}{4}}\ \textbf{のとき 1 個}$$

(2) $xe^x - a = 0$ から　　$xe^x = a$

$f(x) = xe^x$ とすると　　$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

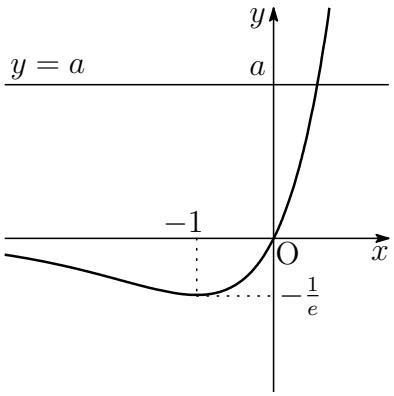
$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小 $-\frac{1}{e}$	↗

また　　$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{t\to\infty} \frac{-t}{e^t} = 0$$

よって，$y = f(x)$ のグラフは，下の図のようになる．このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．



したがって　　$\boldsymbol{-\frac{1}{e} < a < 0}$ のとき　　**2 個,**

$\boldsymbol{a = -\frac{1}{e}, \ a \geqq 0}$ のとき　**1 個,**

$\boldsymbol{a < -\frac{1}{e}}$ のとき　　**0 個**

練習 **4.20** 速度 $\boldsymbol{v}$ は　$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = v_0 - gt}$ **(m/秒),**

加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ は　$\boldsymbol{\alpha = \frac{dv}{dt} = -g}$ **(m/秒²)**

練習 4.21 点 P の時刻 t における速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする．

(1) $\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt}=2,\ \dfrac{dy}{dt}=2t-4$

$t=3$ のとき　$\dfrac{dy}{dt}=2\cdot 3-4=2$

よって，速度 $\vec{v}$ は　$\vec{v}=(2,\ 2)$

速さ $|\vec{v}|$ は　$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

また，$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=2$

よって，加速度 $\vec{\alpha}$ は　$\vec{\alpha}=(0,\ 2)$

加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=\mathbf{2}$

(2) $\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt}=-2\pi\sin\pi t,\ \dfrac{dy}{dt}=2\pi\cos\pi t$

$t=3$ のとき　$\dfrac{dx}{dt}=0,\ \dfrac{dy}{dt}=-2\pi$

よって,速度 $\vec{v}$ は　$\vec{v}=(0,\ -2\pi)$

速さ $|\vec{v}|$ は　$|\vec{v}|=\sqrt{0^2+(-2\pi)^2}=\sqrt{4\pi^2}=\mathbf{2\pi}$

また，$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-2\pi^2\cos\pi t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-2\pi^2\sin\pi t$

$t=3$ のとき　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=2\pi^2,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=0$

よって，加速度 $\vec{\alpha}$ は　$\vec{\alpha}=(2\pi^2,\ 0)$

加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(2\pi^2)^2+0^2}=\sqrt{(2\pi^2)^2}=\mathbf{2\pi^2}$

深化 4.2 $|\vec{v}|^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}|\vec{v}|^2=2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)=2\vec{v}\cdot\vec{\alpha}$$

$|\vec{v}|$ は定数であるから，$\dfrac{d}{dt}|\vec{v}|^2$ より

$\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=0$　すなわち　$\vec{v}\perp\vec{\alpha}$

練習 4.22 (1) $(\cos x)' = -\sin x$ であるから，$h \fallingdotseq 0$ のとき

$$\boldsymbol{\cos(a+h) \fallingdotseq \cos a - h\sin a}$$

(2) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから，$h \fallingdotseq 0$ のとき

$$\boldsymbol{\tan(a+h) \fallingdotseq \tan a + \dfrac{h}{\cos^2 a}}$$

練習 4.23 (1) $f(x) = e^x$ について　　$f'(x) = e^x$

よって　　$f(0) = 1$,　　$f'(0) = 1$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x$ に代入して

$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\boldsymbol{e^x \fallingdotseq 1 + x}$

(2) $f(x) = \log(1+x)$ について　　$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

よって　　$f(0) = 0$,　　$f'(0) = 1$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x$ に代入して

$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\boldsymbol{\log(1+x) \fallingdotseq x}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ について　　$f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

よって　　$f(0) = 1$,　　$f'(0) = -1$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x$ に代入して

$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{1+x} \fallingdotseq 1 - x}$

練習 4.24 (1)　　$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$(1+x)^p \fallingdotseq 1 + px$

$\sqrt[4]{1.03} = (1+0.03)^{\frac{1}{4}}$ であるから

$$\sqrt[4]{1.03} = \sqrt[4]{1+0.03} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{4} \times 0.03 = \boldsymbol{1.0075}$$

(2)　　$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\log(1+x) \fallingdotseq x$

$\log 1.01 = \log(1+0.01)$ であるから　　$\log 1.01 = \boldsymbol{0.01}$

(3)　　$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\dfrac{1}{1+x} \fallingdotseq 1 - x$

$\dfrac{1}{0.098} = \dfrac{1}{1+(-0.002)}$ であるから

$$\frac{1}{0.998} \fallingdotseq 1 - (-0.002) = \boldsymbol{1.002}$$

問題 4.9 $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とすると

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$$

$x>0$ のとき　$f'(x)>0$　よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき

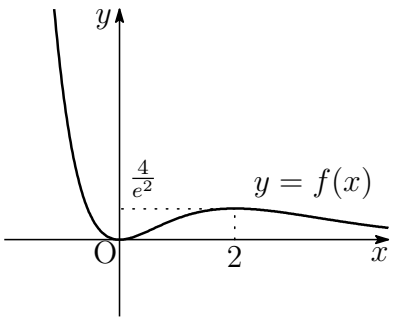
$$\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)>0 \quad \text{すなわち} \quad x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)$$

問題 4.10 $f(x)=x^2e^{-x}$ とすると

$$f'(x)=2xe^{-x}+x^2\cdot(-e^{-x})=-x(x-2)e^{-x}$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{e^2}$	$\searrow$



また　$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は，方程式の実数解の個数と一致する．

したがって，方程式 $x^2=ae^x$ が 3 個の実数解をもつのは　　$\boldsymbol{0<a<\dfrac{4}{e^2}}$

問題 4.11

$$\frac{dx}{dt}=a\omega(1-\cos\omega t),\quad \frac{dy}{dt}=a\omega\sin\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a\omega^2\sin\omega t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=a\omega^2\cos\omega t$$

よって，加速度の大きさは

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{(a\omega^2)^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)}=\boldsymbol{a\omega^2}$$

問題 4.12 $(\sin x)' = \cos x$ であるから

$$h \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \qquad \sin(a+h) = \sin a + h\cos a$$

したがって $\quad \sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\right)$

$$\fallingdotseq \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって $\quad \sin 31^\circ \fallingdotseq \dfrac{1}{2} + \dfrac{3.142}{180}\cdot\dfrac{1.732}{2} \fallingdotseq \mathbf{0.515}$

問題 4.13 $x = (v_0\cos\alpha)t, \quad y = (v_0\sin\alpha)t - \dfrac{1}{2}gt^2$ より

$$\frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0\sin\alpha - gt$$

$\dfrac{dy}{dt} = 0$，すなわち，$T = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$ とすると，y の増減表は

t	0	$\cdots$	T	$\cdots$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$
y	0	↗	極大	↘

$v^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ より

$$v^2 = (v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2 \geqq (v_0\cos\alpha)^2$$

v が最小となるのは，$t = T$，すなわち，P が最高点に達したときである．

章末 4.1 (1) $y = 1 - \dfrac{4}{x+2}$ から　　$y' = \dfrac{4}{(x+2)^2}$

ゆえに，$x = 2$ のとき　$y' = \dfrac{4}{(2+2)^2} = \dfrac{1}{4}$

よって，接線の方程式は　$y = \dfrac{1}{4}(x-2)$

すなわち　　$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}}$

法線の方程式は　$y = -4(x-2)$

すなわち　　$\boldsymbol{y = -4x + 8}$

(2) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき　$y' = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$

よって，接線の方程式は　$y - 1 = 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

すなわち　　$\boldsymbol{y = 2x - \dfrac{\pi}{2} + 1}$

法線の方程式は　$y - 1 = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

すなわち　　$\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{8} + 1}$

章末 4.2 関数 $f(x) = \log x$ は，$x > 0$ で微分可能で　$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

区間 $[a,\ a+1]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\log(a+1) - \log a}{(a+1) - a} = \frac{1}{c}, \quad a < c < a+1$$

を満たす実数 c が存在する．$\dfrac{1}{a+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$ より，次式が成立する．

$$\frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}$$

章末 4.3 (1) 定義域は，$9-x^2>0$ より　$-3<x<3$

$$y'=2x+\frac{-2x}{9-x^2}=\frac{2x(8-x^2)}{9-x^2}$$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ \pm 2\sqrt{2}$

y の増減表は，次のようになる．

x	-3	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗	極大 8	↘	極小 $2\log 3$	↗	極大 8	↘	

よって　$\boldsymbol{x=\pm 2\sqrt{2}}$ **で極大値 8，** $\boldsymbol{x=0}$ **で極小値** $\boldsymbol{2\log 3}$

(2) $f(x)=x^3-3x$ とすると　　$f'(x)=3(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

$f(x)=0$ を解くと　$x(x^2-3)=0$ より　　$x=0,\ \pm\sqrt{3}$

ゆえに，$y=|f(x)|$ の増減表は

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$
y	↘	極小 0	↗	極大 2	↘	極小 0	↗	極大 2	↘	極小 0	↗

よって，　$\boldsymbol{x=-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}}$ **で極小値 0**

$\boldsymbol{x=-1,\ 1}$ **で極大値 2**

章末 4.4 (1) $y = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\cdots$①

$$y' = -2\cdot\frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$y' = 0$ とすると $x = -1,\ 1$

$$y'' = \frac{2x(x^2+1)^2 - (x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= 2\cdot\frac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3} = -\frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$y'' = 0$ とすると $x = 0,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}$

y の増減，極値，グラフの凹凸と変曲点は，次の表のようになる．

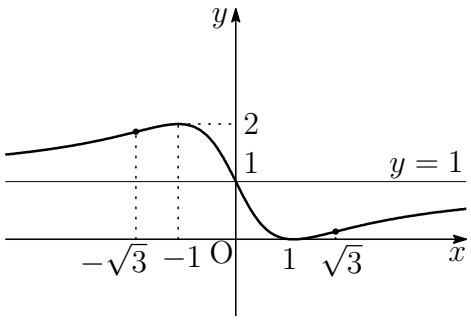
x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↗	変曲点 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	極大 2	↘	変曲点 1	↘	極小 0	↗	変曲点 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗

また，① より

$\lim_{x\to\infty} y = 1$，$\lim_{x\to-\infty} y = 1$

よって，漸近線は直線 $y = 1$

ゆえに，グラフは下の図のようになる．



(2)　　$y' = 1 - \sin x$

$0 < x < 2\pi$ において，$y' = 0$ となる x の値は　$x = \dfrac{\pi}{2}$

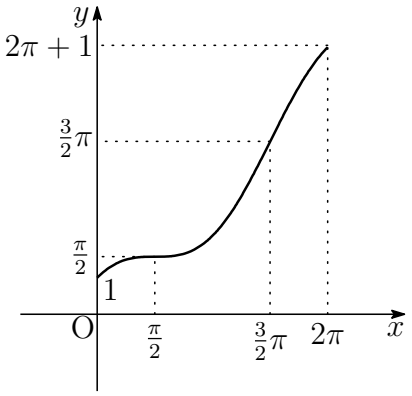
$y'' = -\cos x$

$0 < x < 2\pi$ において，$y'' = 0$ となる x の値は　$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

y の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$+$	$+$	$+$	
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	↱	変曲点 $\frac{\pi}{2}$	↗	変曲点 $\frac{3}{2}\pi$	↱	$2\pi+1$

よって，グラフの概形は，次の図のようになる．



章末 4.5　$\mathrm{AB} = 2r\cos\theta$，$\mathrm{BC} = 2r\sin 2\theta$

ゆえに　　$l = 2\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = 2r(2\cos\theta + \sin 2\theta)$

よって　　$\dfrac{dl}{d\theta} = 2r(-2\sin\theta + 2\cos 2\theta)$

$= -4r(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1)$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{dl}{d\theta} = 0$ となる θ は　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

l の増減表は，下の表のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dl}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
l		↗	極大	↘	

したがって，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ で l は最大となる．

このとき，$2\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるからこの二等辺三角形は正三角形である．

章末 4.6 $y' = \dfrac{x^2+a-x\cdot 2x}{(x^2+a)^2} = \dfrac{a-x^2}{(x^2+a)^2}$

$$y'' = \frac{-2x(x^2+a)^2-(a-x^2)\cdot 4x(x^2+a)}{(x^2+a)^4} = \frac{2x(x^2-3a)}{(x^2+a)^3}$$

(1) $a>0$ より，$y''=0$ とすると

$$x = 0,\ \pm\sqrt{3a}$$

$$y'' = \frac{2(x+\sqrt{3a})x(x-\sqrt{3a})}{(x^2+a)^3}$$

であるから，$x=-\sqrt{3a},\ 0,\ \sqrt{3a}$ の前後で y'' の符号は変わる．

ゆえに，変曲点は　**3 個**

(2) $a=0$ のとき　$y'' = \dfrac{2}{x^3} \neq 0$

ゆえに，変曲点は　**0 個**

(3) $a<0$ のとき　$x^2-3a>0$

よって，$y''=0$ とすると　$x=0$

$x=0$ の前後で，y'' の符号は変わる．

ゆえに，変曲点は　**1 個**

章末 4.7 (1) $f(x) = \cos x - \left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とすると

$$f'(x) = -\sin x + x$$

$x>0$ のとき $x>\sin x$ であるから　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x>0$ のとき　$f(x) > f(0) = 0$

したがって　$\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$

(2) $g(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$ とすると

$$g'(x) = \cos x - \left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

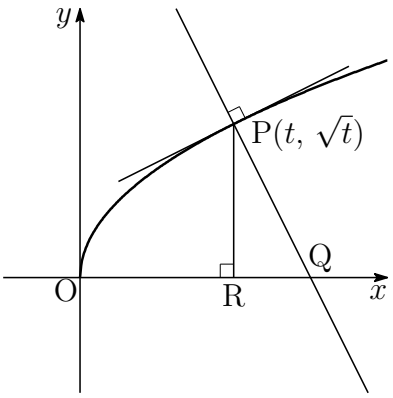
(1) から $x>0$ のとき　$g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は区間 $x \geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x>0$ のとき　$g(x) > g(0) = 0$

したがって　$\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$

章末 4.8 点 P の x 座標を t とする．



$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

よって，$x = t$ のとき

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

ゆえに，点 P における法線の傾きは $-2\sqrt{t}$ で，その方程式は

$$y - \sqrt{t} = -2\sqrt{t}(x - t)$$

$y = 0$ とすると　　$x = t + \dfrac{1}{2}$

これが，点 Q の x 座標である．

点 R の x 座標は t であるから　　$\mathrm{QR} = \dfrac{1}{2}$

したがって，線分 QR の長さは一定である．

章末 4.9 共有点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とする．$q = ap^2 - \dfrac{1}{2}$，$q = \log p$ から

$$ap^2 - \frac{1}{2} = \log p \quad \cdots ①$$

曲線 $y = ax^2 - \dfrac{1}{2}$ 上の点 P における接線の傾きは，$y' = 2ax$ より　$2ap$

曲線 $y = \log x$ 上の点 P における接線の傾きは，$y' = \dfrac{1}{x}$ より　$\dfrac{1}{p}$

接線が一致するから

$$2ap = \frac{1}{p} \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2p^2} \quad \cdots ②$$

これを ① に代入して

$$0 = \log p \quad \text{すなわち} \quad p = 1$$

よって，② より　　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

章末 4.10 直円柱の底面の半径を x，高さを h，体積を k (定数)，表面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=2\pi x^2+2\pi xh \qquad \cdots ①$$

$$k=\pi x^2 h \qquad \cdots ②$$

② より　$h=\dfrac{k}{\pi x^2}$　　これを ① へ代入して

$$S(x)=2\pi x^2+\frac{2k}{x}$$

$$S'(x)=4\pi x-\frac{2k}{x^2}=\frac{2(2\pi x^3-k)}{x^2}$$

$S'(x)=0$ とすると $x^3=\dfrac{k}{2\pi}$ より　$x=\sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$

$x>0$ の範囲で $S(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$	$\cdots$
$S'(x)$	／	$-$	0	$+$
$S(x)$	／	↘	極小	↗

よって，$S(x)$ は $x=\sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$ のとき最小となる．

このとき　$h:x=\dfrac{k}{\pi x^2}:x=\dfrac{k}{\pi x^3}:1=\dfrac{k}{\pi\cdot\dfrac{k}{2\pi}}:1=\mathbf{2:1}$

章末 4.11 $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b$，$f''(x) = 6x + 6a$

$f''(x) = 0$ とすると　$x = -a$

よって，曲線 $y = f(x)$ の凹凸は下の表のようになる．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	$2a^3 - 3ab + c$	下に凸

よって，変曲点 A の座標は　$(-a,\ 2a^3 - 3ab + c)$

曲線 $y = f(x)$ を，点 A が原点に重なるように

x 軸方向に a，y 軸方向に $-2a^3 + 3ab - c$

だけ平行移動すると，その曲線の方程式は

$$y - (-2a^3 + 3ab - c) = (x - a)^3 + 3a(x - a)^2 + 3b(x - a) + c$$

これを整理すると　　$y = x^3 + 3(b - a^2)x$

ここで，$g(x) = x^3 + 3(b - a^2)x$ とすると

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^3 + 3(b - a^2)(-x) \\ &= -\{x^3 + 3(b - a^2)x\} \end{aligned}$$

$g(-x) = -g(x)$ が成り立つから，曲線 $y = g(x)$ は原点について対称である．

したがって，もとの曲線 $y = f(x)$ は変曲点 A について対称であるから，点 P と対称な点 Q もこの曲線上にある．

章末 4.12 $\dfrac{dx}{dt} = -4\sin t$，$\dfrac{dy}{dt} = 2\cos 2t$ であるから，点 P の速さは

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(-4\sin t)^2 + (2\cos 2t)^2} \\ &= \sqrt{16\sin^2 t + 4(1-2\sin^2 t)^2} \\ &= \sqrt{4(4\sin^4 t + 1)} \\ &= 2\sqrt{4\sin^4 t + 1}\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき $-1 \leqq \sin t \leqq 1$ であるから

$0 \leqq \sin^2 t \leqq 1$　　よって　　$0 \leqq \sin^4 t \leqq 1$

ゆえに，$\sin^4 t$ は $\sin t = \pm 1$ のとき最大値 1，$\sin t = 0$ のとき最小値 0 をとる．

よって，速さは　$\boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi}$ **のとき**　　**最大値** $\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

$\boldsymbol{t = 0, \pi, 2\pi}$ **のとき**　**最小値** $\boldsymbol{2}$

章末 4.13 点 A を x 軸上に，点 B を y 軸上にとり，OA $= x$，OB $= y$ とおくと，三平方の定理により

$$x^2 + y^2 = 5^2 \qquad \cdots ①$$

よって，$x = 4$ のとき　$y = 3$

x，y は時刻 t の関数であるから，① の両辺を t で微分して 2 で割ると

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

ここで，$\dfrac{dx}{dt} = 0.3$，$x = 4$，$y = 3$ を代入すると

$$4 \times 0.3 + 3 \times \frac{dy}{dt} = 0$$

よって　　$\dfrac{dy}{dt} = -0.4$

したがって，棒の上端 B の速さは，**0.4m/秒** である．

練習 5.1 C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = \boldsymbol{-\frac{1}{2x^2} + C}$

(2) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C = \boldsymbol{\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C}$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \boldsymbol{\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C}$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = \boldsymbol{2\sqrt{x} + C}$

練習 5.2 C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \boldsymbol{\log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C}$

(2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = \boldsymbol{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C}$

(3) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y}dy = \int \frac{y-2\sqrt{y}+1}{y}\,dy = \int \left(1 - \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{1}{y}\right) dy$

$$= \boldsymbol{y - 4\sqrt{y} + \log y + C}$$

(4) $\displaystyle\int \left(3t^2 - \frac{1}{t}\right)^2 dt = \int \left(9t^4 - 6t + \frac{1}{t^2}\right) dt = \boldsymbol{\frac{9}{5}t^5 - 3t^2 - \frac{1}{t} + C}$

練習 5.3 C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int (\cos x - 2\sin x)\,dx = \boldsymbol{\sin x + 2\cos x + C}$

(2) $\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = \boldsymbol{2\sin x - \tan x + C}$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \boldsymbol{-\frac{1}{\tan x} - x + C}$$

(4) $\displaystyle\int 5^x\,dx = \boldsymbol{\frac{5^x}{\log 5} + C}$

(5) $\displaystyle\int (3^x - 2e^x)\,dx = \boldsymbol{\frac{3^x}{\log 3} - 2e^x + C}$

練習 5.4 C は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int (3x+1)^4\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x+1)^5 + C = \boldsymbol{\frac{1}{15}(3x+1)^5 + C}$

(2) $\displaystyle\int (4x-3)^{-3}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-2}(4x-3)^{-2} + C = \boldsymbol{-\frac{1}{8}(4x-3)^{-2} + C}$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,dx = \int (1-2x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-2}\cdot 2(1-2x)^{\frac{1}{2}} + C = \boldsymbol{-\sqrt{1-2x} + C}$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log|2x+1| + C}$

(5) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}(-\cos 2x) + C = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\cos 2x + C}$

(6) $\displaystyle\int e^{3x-1}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}e^{3x-1} + C}$

深化 5.1 $x+1=t$ とおくと　　$x = t-1,\ \dfrac{dx}{dt} = 1$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\,dx &= \int (t-1)\sqrt{t}\,dt = \int (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\,dt \\ &= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{15}(3t-5)t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1} + C}\end{aligned}$$

練習 5.5 C は積分定数とする．

(1) $\sqrt{2x-1}=t$ とおくと　　$x=\dfrac{t^2+1}{2},\ \dfrac{dx}{dt}=t$

よって　　$\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx=\int\frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\int(t^4+t^2)\,dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}(3t^2+5)t^3+C$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+C}$

別解 $2x-1=t$ とおくと　$x=\dfrac{t+1}{2},\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int(t+1)\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{4}\int(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})\,dt$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C=\frac{1}{30}(3t+5)t^{\frac{3}{2}}+C$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+C}$

(2) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと　　$x=t^2-1,\ \dfrac{dx}{dt}=2t$

よって　　$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int\frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt=2\int(t^2-1)\,dt$

$\displaystyle=2\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)+C=\frac{2}{3}(t^2-3)t+C$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+C}$

別解 $x+1=t$ とおくと　$x=t-1,\ \dfrac{dx}{dt}=1$

$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int\frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt=\int\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$

$\displaystyle=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}(t-3)t^{\frac{1}{2}}+C$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+C}$

練習 5.6 C は積分定数とする．

(1) $(x^3+2)'=3x^2$ であるから，$x^3+2=u$ とおくと

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx &= \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+2}(x^3+2)'\,dx\\ &= \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3+2}+C}\end{aligned}$$

補足 $u=x^3+2$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=3x^2$ ゆえに $3x^2dx=du$

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+2}\cdot 3x^2dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du$$

(2) $(\sin x)'=\cos x$ であるから，$\sin x=u$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos x\,dx &= \int \sin^3 x(\sin x)'\,dx = \int u^3\,du\\ &= \frac{1}{4}u^4+C = \boldsymbol{\frac{1}{4}\sin^4 x+C}\end{aligned}$$

補足 $u=\sin x$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=\cos x$ ゆえに $\cos x\,dx=du$

$$\int \sin^3 x\cdot\cos x\,dx = \int u^3\,du$$

(3) $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ であるから，$\log x=u$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x}\,dx &= \int \log x\cdot(\log x)'\,dx = \int u\,du\\ &= \frac{1}{2}u^2+C = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\log x)^2+C}\end{aligned}$$

補足 $u=\log x$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$ ゆえに $\dfrac{1}{x}dx=du$

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \int \log x\cdot\frac{1}{x}dx = \int u\,du$$

練習 5.7 C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1}\,dx = \boldsymbol{\log|x^2+x-1|+C}$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx = \boldsymbol{\log(e^x+1)+C}$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \boldsymbol{\log|\sin x|+C}$

練習 5.8 (1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx = \int x(-\cos x)'\,dx = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= \boldsymbol{-x\cos x + \sin x + C}$$

(2) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx = \int x(-e^{-x})'\,dx = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$

$$= \boldsymbol{-(x+1)e^{-x}+C}$$

深化 5.2 $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)' = x$ と考えると

$$\int x\cos x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\cos x\,dx$$

$$= x^2\cos x - \int \frac{x^2}{2}(\cos x)'\,dx$$

$$= x^2\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x\,dx$$

$$= x^2\cos x + \int \left(\frac{x^3}{6}\right)'\sin x\,dx$$

このように x の次数が大きくなっていき，不定積分を求めることができない．

練習 **5.9** C は積分定数とする.

$$(1)\ \int \log 2x\,dx = \int (\log 2x)\cdot(x)'\,dx = (\log 2x)\cdot x - \int \frac{2}{2x}\cdot x\,dx$$
$$= \boldsymbol{x\log 2x - x + C}$$

$$(2)\ \int \log x^2\,dx = \int (\log x^2)\cdot(x)'\,dx = (\log x^2)\cdot x - \int \frac{2x}{x^2}\cdot x\,dx$$
$$= \boldsymbol{x\log x^2 - 2x + C}$$

$$(3)\ \int x\log x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C}$$

練習 **5.10** C は積分定数とする.

$$\begin{aligned}
\int (x^2+1)\sin x\,dx &= \int (x^2+1)(-\cos x)'\,dx \\
&= (x^2+1)(-\cos x) + \int 2x\cos x\,dx \\
&= -(x^2+1)\cos x + 2\int x(\sin x)'\,dx \\
&= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right) \\
&= -(x^2+1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C \\
&= \boldsymbol{(1-x^2)\cos x + 2x\sin x + C}
\end{aligned}$$

積分公式 (部分積分法)

$f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots \right\},$$
$$A_k(x) = \frac{1}{k}\left\{ f(x) - \frac{f^{(2)}(x)}{k^2} + \frac{f^{(4)}(x)}{k^4} - \frac{f^{(6)}(x)}{k^6} + \cdots \right\},$$
$$B_k(x) = \frac{1}{k}\left\{ \frac{f^{(1)}(x)}{k} - \frac{f^{(3)}(x)}{k^3} + \frac{f^{(5)}(x)}{k^5} - \frac{f^{(7)}(x)}{k^7} + \cdots \right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\varphi_k'(x) &= \frac{1}{k}\left\{ f'(x) - \frac{f''(x)}{k} + \frac{f'''(x)}{k^2} - \cdots \right\} \\
&= -\left\{ -\frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots \right\} \\
&= f(x) - \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots \right\} \\
&= f(x) - k\varphi(x), \\
A_k'(x) &= \frac{1}{k}\left\{ f^{(1)}(x) - \frac{f^{(3)}(x)}{k^2} + \frac{f^{(5)}(x)}{k^4} - \frac{f^{(7)}(x)}{k^6} + \cdots \right\} \\
&= \frac{f^{(1)}(x)}{k} - \frac{f^{(3)}(x)}{k^3} + \frac{f^{(5)}(x)}{k^5} - \frac{f^{(7)}(x)}{k^7} + \cdots \\
&= kB(x) \\
B_k'(x) &= \frac{1}{k}\left\{ \frac{f^{(2)}(x)}{k} - \frac{f^{(4)}(x)}{k^3} + \frac{f^{(6)}(x)}{k^5} - \cdots \right\} \\
&= f(x) - \left\{ f(x) - \frac{f^{(2)}(x)}{k^2} + \frac{f^{(4)}(x)}{k^4} - \frac{f^{(6)}(x)}{k^6} + \cdots \right\} \\
&= f(x) - kA_k(x)
\end{aligned}$$

が成立する.

前ページの結果を利用すると

$$\begin{aligned}\{\varphi_k(x)e^{kx}\}' &= \varphi_k'(x)e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx}\\ &= \{f(x) - k\varphi_k(x)\}e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx}\\ &= f(x)e^{kx}\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\int f(x)e^{kx}\,dx = \varphi_k(x)e^{kx} + C$

$$\begin{aligned}\{A_k(x)\sin kx\}' &= kB_k(x)\sin kx + kA_k(x)\cos kx\\ \{A_k(x)\cos kx\}' &= kB_k(x)\cos kx - kA_k(x)\sin kx\\ \{B_k(x)\sin kx\}' &= \{f(x) - kA(x)\}\sin kx + kB_k(x)\cos kx\\ \{B_k(x)\cos kx\}' &= \{f(x) - kA(x)\}\cos kx - kB_k(x)\sin kx\end{aligned}$$

上の 4 式から

$$\begin{aligned}\{-A_k(x)\cos kx + B_k(x)\sin kx\}' &= f(x)\sin kx\\ \{A_k(x)\sin kx + B_k(x)\cos kx\}' &= f(x)\cos kx\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\int f(x)\sin kx\,dx = -A_k(x)\cos kx + B_k(x)\sin kx + C$

$$\int f(x)\cos kx\,dx = A_k(x)\sin kx + B_k(x)\cos kx + C$$

以上から，次が成立する．

積分公式 (部分積分法)

C は積分定数とする．

$$\int \boldsymbol{f(x)e^{kx}\,dx = \varphi_k(x)e^{kx} + C}$$

$$\int \boldsymbol{f(x)\sin kx\,dx = -A_k(x)\cos kx + B_k(x)\sin kx + C}$$

$$\int \boldsymbol{f(x)\cos kx\,dx = A_k(x)\sin kx + B_k(x)\cos kx + C}$$

ただし

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\},$$

$$A_k(x) = \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f^{(2)}(x)}{k^2} + \frac{f^{(4)}(x)}{k^4} - \frac{f^{(6)}(x)}{k^6} + \cdots\right\},$$

$$B_k(x) = \frac{1}{k}\left\{\frac{f^{(1)}(x)}{k} - \frac{f^{(3)}(x)}{k^3} + \frac{f^{(5)}(x)}{k^5} - \frac{f^{(7)}(x)}{k^7} + \cdots\right\}$$

168 ページの応用例題 5.2 の積分 $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ について，$f(x)=x^2$ とすると

$$\varphi_1(x)=f(x)-f'(x)+f''(x)=x^2-2x+2$$

したがって　$\displaystyle\int x^2e^x\,dx=(x^2-2x+2)e^x+C$

168 ページの練習 5.10 の積分 $\displaystyle\int(x^2+1)\sin x\,dx$ について，$f(x)=x^2+1$ とすると

$$A_1(x)=f(x)-f''(x)=(x^2+1)-2=x^2-1,\quad B_1(x)=f'(x)=2x$$

したがって　$\displaystyle\int(x^2+1)\sin x\,dx=-(x^2-1)\cos x+2x\sin x+C$

練習 5.11　等式の両辺に $(x+1)(x+2)$ をかけて　$x=a(x+2)+b(x+1)$

よって　$x=(a+b)x+(2a+b)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$a+b=1$，$2a+b=0$

これを解いて　$a=-1$，$b=2$

よって
$$\begin{aligned}\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx&=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx\\&=-\log|x+1|+2\log|x+2|+C\\&=\boldsymbol{\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C}\end{aligned}$$
(C は積分定数)

練習 5.12 C は積分定数とする．

(1) $\dfrac{x^2-1}{x+2} = x-2+\dfrac{3}{x+2}$ であるから

$$\int \frac{x^2-1}{x+2}\,dx = \int \left(x-2+\frac{3}{x+2}\right) dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\log|x+2| + C}$$

(2) $\dfrac{4x^2}{2x-1} = 2x+1+\dfrac{1}{2x-1}$ であるから

$$\int \frac{4x^2}{2x-1}\,dx = \int \left(2x+1+\frac{1}{2x-1}\right) dx$$
$$= \boldsymbol{x^2 + x + \frac{1}{2}\log|2x-1| + C}$$

(3) $\dfrac{3}{x^2+x-2} = \dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}$ とする．

等式の両辺に $(x-1)(x+2)$ を掛けて　$3 = a(x+2)+b(x-1)$

よって　　$3 = (a+b)x + (2a-b)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$a+b=0$，$2a-b=3$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$

したがって　　$\dfrac{3}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2}$

$$\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$
$$= \log|x-1| - \log|x+2| + C$$
$$= \boldsymbol{\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C}$$

練習 5.13 C は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$

(2) $\displaystyle\int \sin^2 3x\,dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C}$

(3) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx = \int \frac{\sin 2x}{2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = \boldsymbol{-\frac{1}{4}\cos 2x + C}$$

(4) $\displaystyle\int \cos 3x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos x)\,dx$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C}$$

(5) $\displaystyle\int \sin 3x\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 2x)\,dx$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

問題 5.1 C は積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1} + C = \boldsymbol{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C}$

(2) $\displaystyle\int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}\,dx = \int \frac{x^4-5x^2+6}{x^4}\,dx$

$$= \int \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^4}\right)dx = \boldsymbol{x + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^3} + C}$$

(3) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}\,dx = \int \frac{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}{x}dx$

$$= \int \left(\sqrt{x} + 3 + \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + \log x + C}$$

(4) $\displaystyle\int (2-\tan x)\cos x\,dx = \int \left(2 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x\,dx = \int (2\cos x - \sin x)\,dx$

$$= \boldsymbol{2\sin x + \cos x + C}$$

(5) $\displaystyle\int 2^{x+1}\,dx = \boldsymbol{\frac{2^{x+1}}{\log 2} + C}$

問題 5.2　［1］より　　$F(x)=\displaystyle\int\frac{1-x-x^2}{x^2}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right)dx$$

$$=-\frac{1}{x}-\log|x|-x+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

［2］より　　$-\dfrac{1}{e}-\log|e|-e+C=-1$　　よって　$C=e+\dfrac{1}{e}$

したがって　　$\boldsymbol{F(x)=-\dfrac{1}{x}-\log|x|-x+e+\dfrac{1}{e}}$

問題 5.3　(1)　$\displaystyle\int\frac{dx}{5x+1}=\boldsymbol{\frac{1}{5}\log|5x+1|+C}$

(2)　$\displaystyle\int\sqrt[4]{3-2x}\,dx=\int(3-2x)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{1}{-2}\cdot\frac{(3-2x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C$

$$=\boldsymbol{-\frac{3}{8}(3-2x)\sqrt[3]{3-2x}+C}$$

(3)　$\displaystyle\int\sin(2x-1)\,dx=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C}$

(4)　$\displaystyle\int\sin^3x\,dx=\int(1-\cos^2x)\sin x\,dx$

ここで，$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

$$\int(1-\cos^2x)\sin x\,dx=\int(1-t^2)\cdot(-1)dt=-t+\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=\boldsymbol{-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3x+C}$$

別解　$\displaystyle\int\sin^3x\,dx=\int(1-\cos^2x)\sin x\,dx=\int\left\{\sin x+\cos^2x(-\sin x)\right\}dx$

$$=\boldsymbol{-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3x+C}$$

(5)　$4-x^2=t$ とおくと　$-2x\,dx=dt$

$$\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}+C$$

$$=\boldsymbol{-\sqrt{4-x^2}+C}$$

別解　$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2}\int(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(4-x^2)'\,dx$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}+C=\boldsymbol{-\sqrt{4-x^2}+C}$$

(6) $x^2 = t$ とおくと　$2x\,dx = dt$

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{x^2} + C}$$

別解 $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{x^2} + C}$

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\int \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}\,dx = \boldsymbol{-\log(1+\cos x) + C}$

(8) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx = \int (x+1)(e^x)'\,dx$

$$= (x+1)e^x - \int (x+1)'e^x\,dx$$

$$= (x+1)e^x - e^x + C = \boldsymbol{xe^x + C}$$

別解 積分公式 (部分積分法) により

$$\varphi_1(x) = (x+1) - (x+1)' = x$$

よって　$\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx = \boldsymbol{xe^x + C}$

(9) $\displaystyle\int (2x+1)\log x\,dx = \int (x^2+x)'\log x\,dx$

$$= (x^2+x)\log x - \int (x^2+x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= (x^2+x)\log x - \int (x+1)\,dx$$

$$= \boldsymbol{(x^2+x)\log x - \frac{x^2}{2} - x + C}$$

問題 5.4　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$

$\cos x = t$ とおくと　$(-\sin x)dx = dt$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x}\,dx &= \int \frac{-1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}(\log|t-1| - \log|t+1|) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C} \quad (\boldsymbol{C} \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

別解　$\displaystyle\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sin x}{\cos x - 1} + \frac{\sin x}{\cos x + 1}\right)$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{-\sin x}{\cos x - 1} - \frac{-\sin x}{\cos x + 1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int\left\{\frac{(\cos x - 1)'}{\cos x - 1} - \frac{(\cos x + 1)'}{\cos x + 1}\right\}dx \\ &= \frac{1}{2}(\log|\cos x - 1| - \log|\cos x + 1|) + C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C} \quad (\boldsymbol{C} \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

問題 5.5 C は積分定数とする．

(1) $\dfrac{x-3}{x^2-1} = \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{x-3}{x^2-1}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) dx \\ &= 2\log|x+1| - \log|x-1| + C \\ &= \boldsymbol{\log \frac{(x+1)^2}{|x-1|} + C}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\int \frac{\log(x+1)}{x^2}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \log(x+1)\,dx \\ &= -\frac{1}{x}\log(x+1) + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{x}\log(x+1) + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= -\frac{1}{x}\log(x+1) + \log|x| - \log(x+1) + C \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{x}\log(x+1) + \log\frac{|x|}{x+1} + C}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int \sin 3x \cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x\right) + C \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C}\end{aligned}$$

(4) $$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

よって $$\begin{aligned}\int \cos^4 dx &= \int \left(\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C}\end{aligned}$$

問題 5.6 ① $e^x = t$ とおくと　$e^x\,dx = dt$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^x\,dx}{e^x(e^x+1)} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)$$
$$= \log t - \log(t+1) + C = \boldsymbol{x - \log(e^x+1) + C}$$

② $e^{-x} = u$ とおくと　$-e^{-x}dx = du$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{-x}(e^x+1)} = -\int \frac{-e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{du}{1+u}$$
$$= -\log(1+u) + C = \boldsymbol{-\log(1+e^{-x}) + C}$$

③ $\dfrac{1}{e^x+1} = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1}$ より

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left\{1 - \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\right\} dx = \boldsymbol{x - \log(e^x+1) + C}$$

練習 5.14 (1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{1}$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_{-2}^{-1} = \boldsymbol{-\log 2}$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\log 2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{2\log 2}}$

練習 5.15 (1) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_1^2 = \boldsymbol{\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}(3^4-1) = \boldsymbol{10}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t})\,dt = \left[e^t + e^{-t}\right]_{-1}^1 = \boldsymbol{0}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{0}$

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{\pi}$

(6) $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 6\theta + \sin 2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{6}\cos 6\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)\right\} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

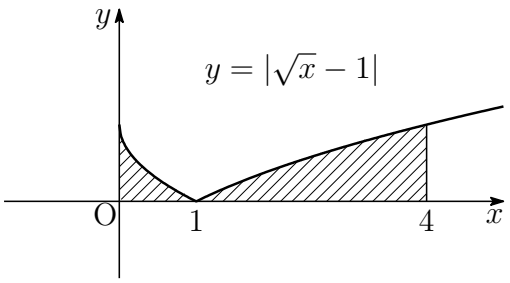
練習 5.16 (1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　$|\sqrt{x}-1| = 1-\sqrt{x}$

$1 \leqq x \leqq 4$ のとき　$|\sqrt{x}-1| = \sqrt{x}-1$

よって　$\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x}-1|\,dx = \int_0^1 (1-\sqrt{x}\,)\,dx + \int_1^4 (\sqrt{x}-1)\,dx$

$$= \left[\, x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} \,\right]_0^1 + \left[\, \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x \,\right]_1^4$$

$$= \left(1-\frac{2}{3}\right) + \left\{\left(\frac{16}{3}-4\right) - \left(\frac{2}{3}-1\right)\right\} = \mathbf{2}$$



(2)　$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき　$|e^x-1| = 1-e^x$

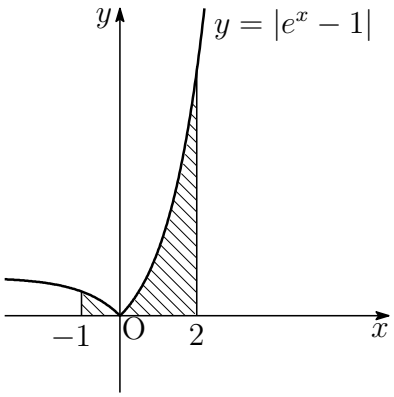
$0 \leqq x \leqq 2$ のとき　$|e^x-1| = e^x-1$

よって　$\displaystyle\int_{-1}^2 |e^x-1|\,dx = \int_{-1}^0 (1-e^x)\,dx + \int_0^2 (e^x-1)\,dx$

$$= \left[\, x - e^x \,\right]_{-1}^0 + \left[\, e^x - x \,\right]_0^2$$

$$= \left\{-1-\left(-1-\frac{1}{e}\right)\right\} + (e^2-2-1)$$

$$= \boldsymbol{e^2 + \frac{1}{e} - 3}$$



練習 5.17 (1) $1-x=t$ とおくと　$x=1-t$，$dx=(-1)dt$

x	0	$\longrightarrow$	1
t	1	$\longrightarrow$	0

x と t の対応は右のようになる．
したがって

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x)^5\,dx &= \int_1^0 (1-t)t^5\,(-1)dt \\ &= \int_1^0 (t^6-t^5)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{6}t^6\right]_1^0 \\ &= 0-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{6}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{42}}\end{aligned}$$

(2) $x-1=t$ とおくと　$x=t+1$，$dx=dt$

x	2	$\longrightarrow$	5
t	1	$\longrightarrow$	4

x と t の対応は右のようになる．
したがって

$$\begin{aligned}\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx &= \int_1^4 (t+1)\sqrt{t}\,dt \\ &= \int_1^4 (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})\,dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \\ &= \left(\frac{64}{5}+\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{256}{15}}\end{aligned}$$

練習 5.18 (1) $x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	-1	$\longrightarrow$	1
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

x と θ の対応は右のようになる.
この範囲では $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

したがって
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	-1	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

x と θ の対応は右のようになる.
この範囲では $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

したがって
$$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\pi+\sqrt{3}}$$

(3) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	1	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

x と θ の対応は右のようになる.
この範囲では $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

したがって
$$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\ \theta\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

練習 5.19 (1) $x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる．

x	0	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\longrightarrow$	$\dfrac{\pi}{3}$

したがって　　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

(2) $x=2\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる．

x	-2	$\longrightarrow$	2
θ	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\longrightarrow$	$\dfrac{\pi}{4}$

したがって　　$\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\tan^2\theta+4}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1}{2}\Big[\ \theta\ \Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

練習 5.20 偶関数は ②，　奇関数は ①，③

練習 5.21 (1) x^3，$4x$ はともに奇関数，$3x^2$，5 はともに偶関数であるから

$$\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)\,dx=2\int_0^2(3x^2+5)\,dx$$
$$=2\Big[x^3+5x\Big]_0^2=\boldsymbol{36}$$

(2) e^x-e^{-x} は奇関数であるから　　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx=\boldsymbol{0}$

(3) $x\sqrt{4-x^2}$ は奇関数であるから　　$\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx=\boldsymbol{0}$

(4) $\sin^2 x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

練習 5.22 (1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \int_0^{\pi} x(-\cos x)'\,dx$

$$= \Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot(-\cos x)\,dx$$

$$= \pi + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

別解 積分公式 (部分積分法) により　$A_1(x) = x, \quad B_1(x) = (x)' = 1$

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x = \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\pi}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'\,dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx = e - \Big[e^x\Big]_0^1 = \mathbf{1}$

別解 積分公式 (部分積分法) により　$\varphi_1(x) = x - (x)' = x - 1$

よって　$\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \Big[(x-1)e^x\Big]_0^1 = \mathbf{1}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= 2\log 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \mathbf{2\log 2 - \frac{3}{4}}$$

別解 $\log x = t$ とおくと，$x = e^t$ より　$dx = e^t\,dt$

$$\int x\log x\,dx = \int e^t t\cdot e^t\,dt = \int te^{2t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left\{t - \frac{(t)'}{2}\right\}e^{2t} + C = \frac{1}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right)x^2 + C$$

よって　$\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right)x^2\right]_1^2 = \mathbf{2\log 2 - \frac{3}{4}}$

練習 5.23　$\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1)\,dx = \int_{-1}^1 \left\{\frac{1}{4}(x+1)^4\right\}'(x-1)\,dx$

$$= \left[\frac{1}{4}(x+1)^4(x-1)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(x+1)^4(x-1)'dx$$

$$= 0 - \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(x+1)^4 dx = -\left[\frac{1}{20}(x+1)^5\right]_{-1}^1 = -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}$$

別解 m，n を 0 以上の整数とする．

$$I(m,n)=\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

とおくと，部分積分法により

$$\begin{aligned}
I(m,n)&=\frac{1}{m+1}\int_0^1 (t^{m+1})'(1-t)^n\,dt\\
&=\left[\ \frac{1}{m+1}t^{m+1}(1-t)^n\ \right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{n-1}\,dt\\
&=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)\\
&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}I(m+n,0)\\
&=\frac{m!n!}{(m+n)!}\int_0^1 t^{m+n}\,dt=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}
\end{aligned}$$

この結果を利用すると

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$$

について，$x=\alpha+(\beta-\alpha)t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\beta-\alpha$

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

このとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$

よって，次の公式が成立する．

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

上の公式を利用すると

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1)\,dx&=-\int_{-1}^1 (x+1)^3(1-x)\,dx\\
&=-\frac{3!1!}{(3+1+1)!}\{1-(-1)\}^{3+1+1}=\boldsymbol{-\frac{8}{5}}
\end{aligned}$$

練習 5.24

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(-\cos x)'\, dx \\ &= \Big[\, x^2(-\cos x) \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2)'(-\cos x)\, dx \\ &= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)' dx \\ &= 2\Big[\, x\sin x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\sin x\, dx \\ &= \pi + 2\Big[\, \cos x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\pi - 2}\end{aligned}$$

別解 積分公式 (部分積分法) により

$$A_1(x) = x^2 - (x^2)'' = x^2 - 2, \quad B_1(x) = (x^2)' = 2x$$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx = \Big[-(x^2-2)\cos x + 2x\sin x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\pi - 2}$

演習 5.1

$$\begin{aligned}J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)'\cos x\, dx = \Big[\, e^x\cos x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x)\, dx \\ &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)'\sin x\, dx \\ &= -1 + \Big[\, e^x\sin x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\, dx \\ &= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - J\end{aligned}$$

これより，$J = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - J$ であるから $\quad \boldsymbol{J = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}}$

補足 $e^{ax}\sin bx$，$e^{ax}\cos bx$ をそれぞれ微分すると

$$\begin{aligned}(e^{ax}\sin bx)' &= ae^{ax}\cdot\sin bx + e^{ax}\cdot b\cos bx \\ &= e^{ax}(b\cos bx + a\sin bx) \qquad \cdots ① \\ (e^{ax}\cos bx)' &= ae^{ax}\cdot\cos bx + e^{ax}\cdot(-b\sin bx) \\ &= e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx) \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

① $\times b$ + ② $\times a$ および ① $\times a$ − ② $\times b$ を行うと，次の 2 式を得る．

$$\begin{aligned}\{b(e^{ax}\sin bx) + a(e^{ax}\cos bx)\}' &= (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx \\ \{a(e^{ax}\sin bx) - b(e^{ax}\cos bx)\}' &= (a^2+b^2)e^{ax}\sin bx\end{aligned}$$

上の 2 式の左辺をそれぞれ整理すると

$$\begin{aligned}\{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)\}' &= (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx \\ \{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)\}' &= (a^2+b^2)e^{ax}\sin bx\end{aligned}$$

したがって，次の積分公式が得られる．

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{e^{ax}\cos bx\,dx} &= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^2+b^2}}\boldsymbol{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)} + \boldsymbol{C} \\ \int \boldsymbol{e^{ax}\sin bx\,dx} &= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^2+b^2}}\boldsymbol{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)} + \boldsymbol{C}\end{aligned}$$

182 ページの I, J は次のように求めることができる $(a=b=1)$.

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ e^x(\sin x - \cos x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1) \\ J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ e^x(\sin x + \cos x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\end{aligned}$$

練習 5.25 (1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt = \boldsymbol{\sin x}$　(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x t\log t\,dt = \boldsymbol{x\log x}$

練習 5.26 $G(x) = x\displaystyle\int_0^x e^t\,dt - \int_0^x te^t\,dt$ であるから

$$G'(x) = \int_0^x e^t\,dt + xe^x - xe^x = \Big[\ e^t\ \Big]_0^x = \boldsymbol{e^x - 1}$$

$$G''(x) = \boldsymbol{e^x}$$

練習 5.27 $F'(t)=t\cos t$ とすると

$$\int_x^{3x} t\cos t\,dt=\Big[\,F(t)\,\Big]_x^{3x}=F(3x)-F(x)$$

よって
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{3x} t\cos t\,dt&=\frac{d}{dx}\{F(3x)-F(x)\}\\&=F'(3x)\cdot(3x)'-F'(x)\\&=3\cdot 3x\cos 3x-x\cos x\\&=\boldsymbol{9x\cos 3x-x\cos x}\end{aligned}$$

練習 5.28 $\displaystyle\int_0^1 f(t)e^t\,dt=a$ とおくと　　$f(x)=x+a\quad\cdots①$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)e^t\,dt&=\int_0^1(t+a)e^t\,dt=\int_0^1(t+a)(e^t)'\,dt\\&=\Big[\,(t+a)e^t\,\Big]_0^1-\int_0^1(t+a)'e^t\,dt\\&=(1+a)e-a-\int_0^1 e^t\,dt\\&=(1+a)e-a-\Big[\,e^t\,\Big]_0^1\\&=(1+a)e-a-(e-1)\\&=ae-a+1\end{aligned}$$

これより，$ae-a+1=a$ であるから

$$(e-2)a=-1\quad\text{すなわち}\quad a=\frac{1}{2-e}$$

これを ① に代入して　　$\boldsymbol{f(x)=x+\dfrac{1}{2-e}}$

練習 5.29 S_n と同様に計算すると

$$\begin{aligned}T_n&=\frac{1}{n}\left\{0+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}\\&=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}\\&=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}=S$

練習 5.30 $S = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^5}(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \left(\frac{3}{n}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4 = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\ \frac{1}{5}x^5\ \right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

練習 5.31 (1) $x \geqq 0$ のとき　　$x + 1 \leqq x^2 + x + 1$

両辺は正であるから逆数をとって　$\dfrac{1}{x+1} \geqq \dfrac{1}{x^2+x+1}$

(2) (1) の不等式では，常には $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ でないから

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

左辺は　　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \Big[\log(x+1)\Big]_0^1 = \log 2$

よって　　$\displaystyle\log 2 > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

深化 5.3 $x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{1}{x^2+x+1} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^2} \cdots$ ① だけでは

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \geqq \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

となる．① の不等式で，常には $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ でないことも確認することで，次式が成立する．

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

練習 5.32 自然数 k に対して，$k \leqq x \leqq k+1$ では

$$\frac{1}{k} \geqq \frac{1}{x}$$

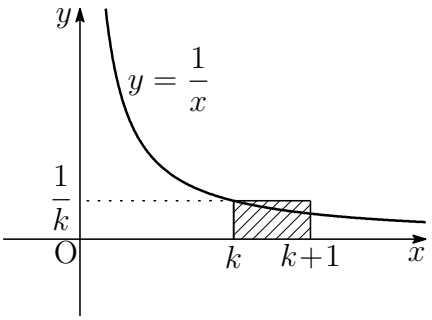
常には $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{x}$ ではないから

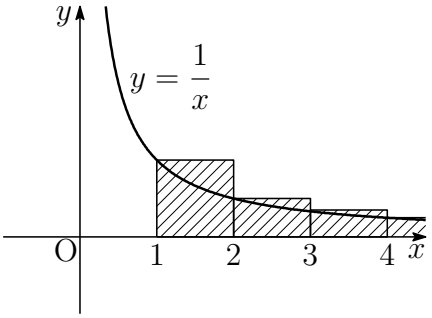
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$$

すなわち

$$\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$$

$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として，
辺々を加えると





$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \int_3^4 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

ここで　　右辺 $= \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$　　$\leftarrow \log 1 = 0$

したがって　　$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} > \log(n+1)$　　**証終**

問題 5.7 (1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)\,dx = \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4 = \mathbf{\frac{20}{3}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta\,d\theta = \left[-\log(\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \mathbf{\log 2}$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos^2 2\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} = \mathbf{\frac{7}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{16}}$

(4) $3-x=t$ とおくと

$dx = (-1)dt$

x	0	$\longrightarrow$	2
t	3	$\longrightarrow$	1

$$\int_0^2 \frac{x}{(3-x)^2}\,dx = \int_3^1 \frac{3-t}{t^2}\cdot(-1)dt = \int_1^3 \left(\frac{3}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\,dt$$
$$= \left[-\frac{3}{t} - \log t\right]_1^3 = \mathbf{2 - \log 3}$$

(5) $\cos x = t$ とおくと

$-\sin x\,dx = dt$

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	1	$\longrightarrow$	0

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^3 x\,dx = \int_1^0 t^3(-1)dt = \int_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{4}\left[\,t^4\,\right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(6) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log x\,dx = \left[\,\frac{2}{3}x\sqrt{x}\log x\,\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$
$$= \frac{16}{3}\log 4 - \frac{4}{9}\left[\,x\sqrt{x}\,\right]_1^4 = \mathbf{\frac{32}{3}\log 2 - \frac{28}{9}}$$

問題 5.8 (1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$x = a\sin\theta$ とおくと　$dx = a\cos\theta\,d\theta$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\cdot a\cos\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}a^4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}a^4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}a^4\left[\,\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi a^4}{8}}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx = 2\int_{0}^{a}\frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx$

$x = a\tan\theta$ とおくと　$dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2\tan^2\theta\cdot\frac{1}{a^2(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= 2a\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\,d\theta = 2a\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta \\ &= 2a\left[\,\tan\theta-\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{2a\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}\end{aligned}$$

問題 5.9　$f'(x) = (1+\cos x)\sin x$

$0 < x < 4\pi$ において，$f'(x) = 0$ となる x の値は　$x = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x (1+\cos t)\sin t\,dt \\ &= \int_0^x\left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)dt \\ &= \left[\,-\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t\,\right]_0^x \\ &= -\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{5}{4}\end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$	4π
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	／	↗	極大 2	↘	極小 0	↗	極大 2	↘	／

よって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x = \pi,\ 3\pi}$ で極大値 **2**，$\boldsymbol{x = 2\pi}$ で極小値 **0** をとる．

問題 5.10 (1) $F'(\theta)=\cos\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{2x}\cos\theta\,d\theta &= \frac{d}{dx}\{F(2x)-F(x)\}\\ &= F'(2x)(2x)'-F'(x)\\ &= \boldsymbol{2\cos 2x-\cos x}\end{aligned}$$

(2) $F'(t)=\log t$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}\log t\,dt &= \frac{d}{dx}\{F(x^2)-F(x)\}\\ &= F'(x^2)(x^2)'-F'(x)\\ &= 2x\log x^2-\log x\\ &= \boldsymbol{(4x-1)\log x}\end{aligned}$$

問題 5.11 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt=a$ とおくと　　$f(x)=\sin x+a$　$\cdots$①

よって　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t+a)\cos t\,dt$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+a\cos t\right)dt\\ &= \left[-\frac{1}{4}\cos 2t+a\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{4}=a$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a=\frac{1}{4}$$

すなわち　　$\displaystyle a=\frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}-1)}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

これを① に代入して　　$\boldsymbol{f(x)=\sin x+\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}}$

問題 5.12
$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}}+\sqrt{\frac{3}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

問題 5.13 $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ において $a+b-x=t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

x と t の対応は右のようになる.

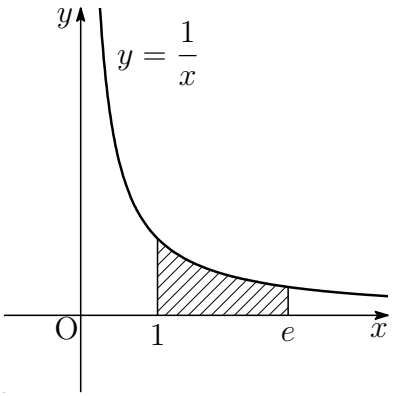
x	$a\longrightarrow b$
t	$b\longrightarrow a$

よって
$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$
$$=\int_b^a f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$$

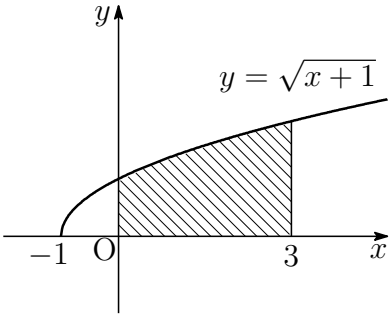
練習 5.33 (1) 求める面積 S は
$$S=\int_1^e\frac{1}{x}\,dx=\left[\ \log x\ \right]_1^e=\mathbf{1}$$

(2) 求める面積 S は
$$S=\int_0^3\sqrt{x+1}\,dx=\left[\ \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^3=\frac{2}{3}(8-1)=\mathbf{\frac{14}{3}}$$

(1)



(2)

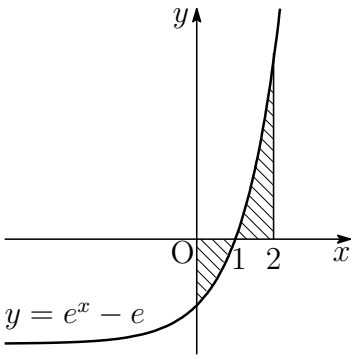


練習 5.34　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　$e^x - e \leqq 0$

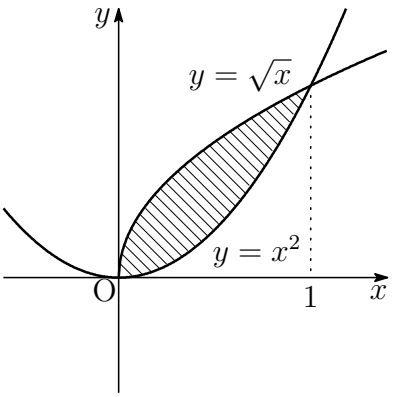
$1 \leqq x \leqq 2$ のとき　$e^x - e \geqq 0$

したがって

$$S = \int_0^1 \{-(e^x - e)\}\,dx + \int_1^2 (e^x - e)\,dx$$
$$= -\Big[\, e^x - ex \,\Big]_0^1 + \Big[\, e^x - ex \,\Big]_1^2$$
$$= \boldsymbol{e^2 - 2e + 1}$$



練習 5.35 (1) 2 つの曲線の共有点の x 座標は，



$$x = 0,\ 1$$

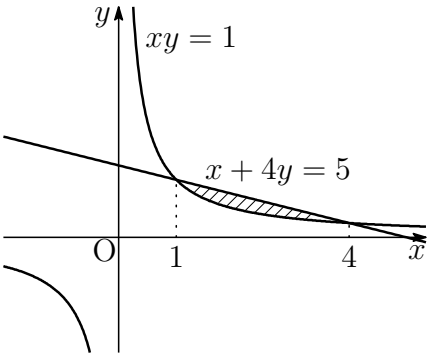
である．区間 $0 \leqq x \leqq 1$ では

$$\sqrt{x} \geqq x^2$$

であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(2) $x + 4y = 5$，$xy = 1$ から y を消去して



$$x \cdot \frac{1}{4}(5 - x) = 1$$

式を整理すると　　$x^2 - 5x + 4 = 0$

2 つの曲線の共有点の x 座標は，この方程式を解いて　$x = 1,\ 4$

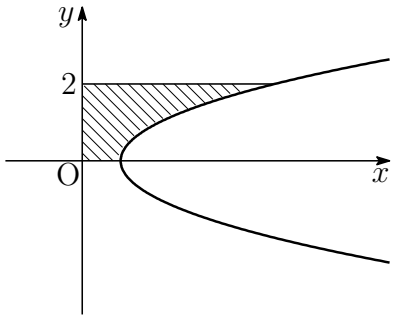
区間 $1 \leqq x \leqq 4$ では　$\dfrac{1}{4}(5 - x) \geqq \dfrac{1}{x}$

であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \left\{ \frac{1}{4}(5 - x) - \frac{1}{x} \right\} dx \\ &= \left[\frac{5}{4}x - \frac{x^2}{8} - \log x \right]_1^4 \\ &= \boldsymbol{\frac{15}{8} - 2\log 2} \end{aligned}$$

練習 5.36 (1) $x = y^2 + 1$ について，常に $y^2 + 1 > 0$ であるから

$$S = \int_0^2 (y^2+1)dy = \left[\frac{y^3}{3} + y \right]_0^2 = \frac{14}{3}$$

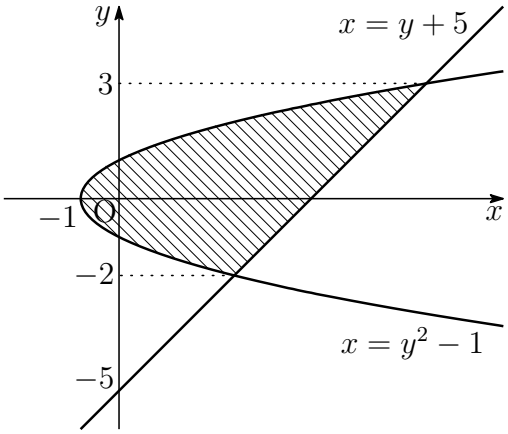


(2) 曲線と直線の共有点の y 座標は，方程式 $y^2 - 1 = y + 5$ の解である．

$$y^2 - 1 = y + 5$$

式を整理すると　$y^2 - y - 6 = 0$
これを解いて　　$y = -2,\ 3$
区間 $-2 \leqq y \leqq 3$ では

$$y + 5 \geqq y^2 - 1$$



であるから，求める面積 S は

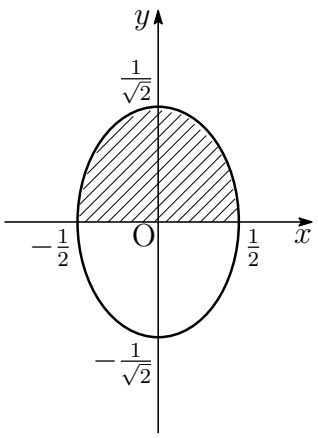
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{3} \{(y+5) - (y^2-1)\}\, dy \\ &= \int_{-2}^{3} (-y^2 + y - 6)\, dy \\ &= \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 6y \right]_{-2}^{3} = \mathbf{\frac{125}{6}} \end{aligned}$$

補足 $S = \displaystyle\int_{-2}^{3} (-y^2 + y + 6)\, dy = \int_{-2}^{3} (y+2)(3-y)\, dy = \frac{1}{6}\{3-(-2)\}^3 = \mathbf{\frac{125}{6}}$

一般に，次式が成立する．

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta - x)^n\, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}}$$

練習 5.37 $4x^2+2y^2=1$ より $\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$



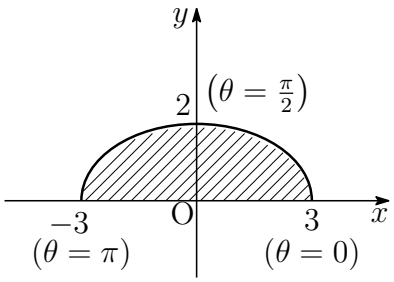
求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積を 2 倍したものに等しい．
$y \geqq 0$ のとき，方程式を y について解くと

$$y=\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}$$

よって

$$\begin{aligned} S&=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}\,dx \\ &=2\sqrt{2}\times\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi} \end{aligned}$$

練習 5.38 求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S=\int_{-3}^{3} y\,dx$$

また，$x=3\cos\theta$ のとき

$$dx=-3\sin\theta\,d\theta$$

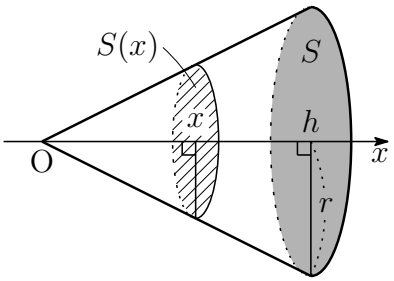
で，x と θ の対応は次のようになる．

x	-3	$\longrightarrow$	3
θ	π	$\longrightarrow$	0

したがって，置換積分法によって

$$\begin{aligned}S&=\int_{-3}^{3} y\,dx=\int_{\pi}^{0} 2\sin\theta\cdot(-3\sin\theta)\,d\theta\\&=6\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta=3\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta\\&=3\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{0}^{\pi}=\boldsymbol{3\pi}\end{aligned}$$

練習 5.39 この直円錐の頂点から底面に垂線を下ろし，これを x 軸とし，頂点を原点にとる．
座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面による直円錐の切り口の断面積を $S(x)$ とする．



この断面は円であり，底面の円と相似である．また，底面の面積を S とすると

$$S = \pi r^2$$

断面と底面の相似比は $x : h$ であるから，面積の比は

$$S(x) : S = x^2 : h^2$$

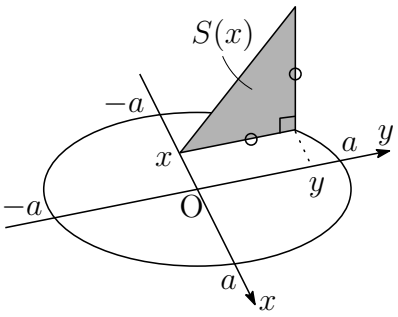
← 相似比が $a : b$ ならば面積の比は $a^2 : b^2$

よって $$S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$$

したがって
$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$
$$= \frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

練習 5.40 底面の中心を O とし，切り取る底面の直径を x 軸にとる．点 $(x, 0)$ に対する直角二等辺三角形の面積を $S(x)$ とすると，底面の円の方程式が $x^2 + y^2 = a^2$ であるから

$$S(x) = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)$$



したがって，求める体積 V は

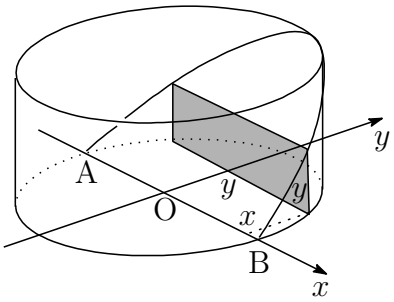
$$V = \int_{-a}^{a} S(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,dx$$
$$= \int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}$$

深化 5.4 y 軸に垂直な平面で切った断面積を $S(y)$ とすると

$$S(y) = 2xy = 2y\sqrt{a^2 - y^2}$$

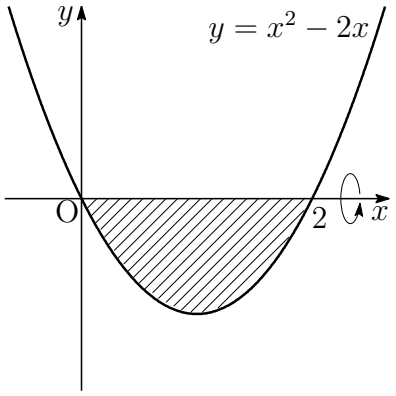
よって，求める立体の体積 V は

$$V = \int_0^a S(y)\,dy = \int_0^a 2y\sqrt{a^2 - y^2}\,dy = \left[-\frac{2}{3}(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}$$



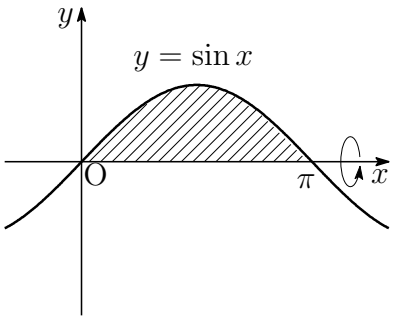
練習 5.41 (1) 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2\,dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{16}{15}\pi} \end{aligned}$$



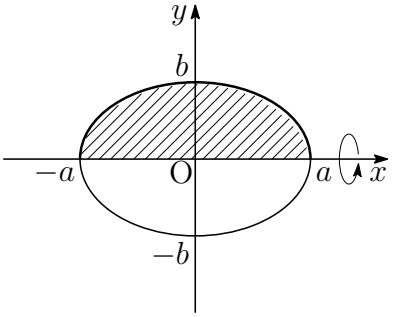
(2) 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x \right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}} \end{aligned}$$



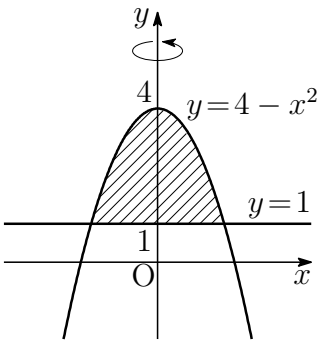
練習 5.42 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{a} y^2\,dx = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\ &= 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\ &= 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a b^2} \end{aligned}$$



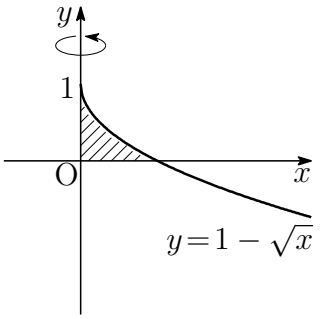
練習 5.43 (1) 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 x^2\,dy = \pi \int_1^4 (4-y)\,dy \\ &= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_1^4 = \boldsymbol{\frac{9}{2}\pi} \end{aligned}$$



(2) 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2\,dy = \pi \int_0^1 (1-y)^4\,dy \\ &= \pi \left[-\frac{1}{5}(1-y)^5 \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{5}} \end{aligned}$$

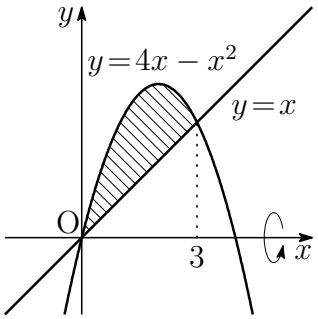


練習 5.44 放物線 $y = 4x - x^2$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標は，方程式 $4x - x^2 = x$ を解いて

$$x = 0,\ 3$$

よって，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 \{(4x-x^2)^2 - x^2\}\,dx \\ &= \pi \int_0^3 (x^4 - 8x^3 + 15x^2)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + 5x^3 \right]_0^3 = \boldsymbol{\frac{108}{5}\pi} \end{aligned}$$



練習 5.45　　$V = \pi \displaystyle\int_0^1 y^2\,dx, \quad dx = \cos t\,dt$

x と θ の対応は右のようになる．

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

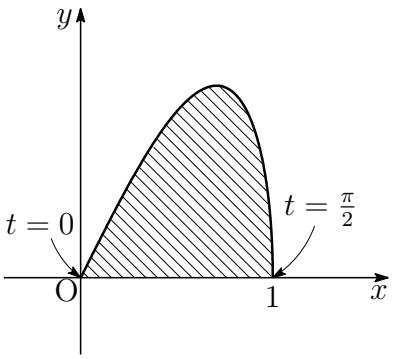
よって，置換積分法により

$$V = \pi \int_0^1 y^2\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 \cos t\,dt$$

ここで　　$(\sin 2t)^2 = 4\sin^2 t\cos^2 t = 4\sin^2 t(1-\sin^2 t)$
$= 4(\sin^2 t - \sin^4 t)$

したがって

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t)\cos t\,dt \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{1}{5}\sin^5 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \boldsymbol{\frac{8}{15}\pi} \end{aligned}$$



練習 5.46　$t = 3$ のときの P の x 座標は

$$x = 2 + \int_0^3 (4 - 2t)\,dt = 2 + \left[4t - t^2 \right]_0^3 = 2 + (12 - 9) = \mathbf{5}$$

練習 5.47　求める道のり s は

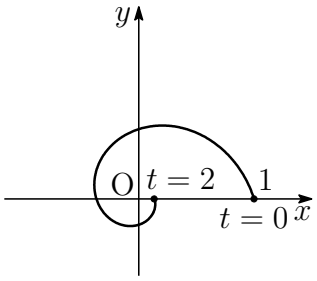
$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} |\sin 2t|\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin 2t)\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2}\cos 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \mathbf{2} \end{aligned}$$

練習 5.48 $\dfrac{dx}{dt} = -e^{-t}(\cos \pi t + \pi \sin \pi t)$, $\dfrac{dy}{dt} = -e^{-t}(\sin \pi t - \pi \cos \pi t)$

よって，求める道のり s は

$$s = \int_0^2 \sqrt{e^{-2t}\{\cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t + \pi^2(\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t)\}}\, dt$$

$$= \sqrt{1+\pi^2} \int_0^2 e^{-t}\, dt = \sqrt{1+\pi^2} \Big[-e^{-t} \Big]_0^2 = \boldsymbol{\sqrt{1+\pi^2}(1-e^{-2})}$$

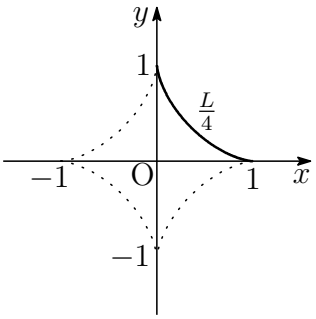


練習 5.49 $\dfrac{dx}{dt} = -3\cos^2 t \sin t$, $\dfrac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$ であるから

$$\frac{L}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt$$

$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$



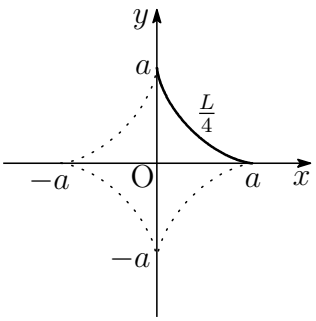
よって　　$L = 4 \cdot \dfrac{3}{2} = \boldsymbol{6}$

補足 a を正の定数とする．アステロイド $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ の長さ L も同様に，$\dfrac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t$, $\dfrac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cos t$ であるから

$$\frac{L}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\sin^2 t \cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt$$

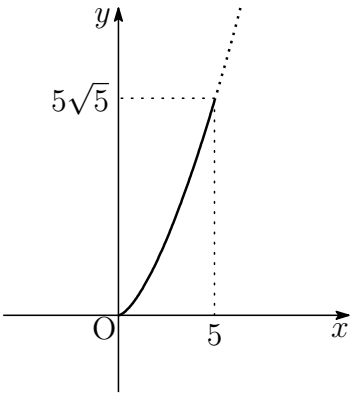
$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\, dt = \frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt$$

$$= \frac{3}{2}a\left[-\frac{1}{2}\cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a$$



よって　　$L = 4 \cdot \dfrac{3}{2}a = \boldsymbol{6a}$

練習 5.50 $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ であるから　　$1 + y'^2 = 1 + \dfrac{9}{4}x$

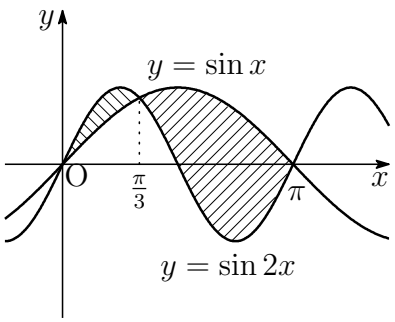


よって　　$L = \displaystyle\int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5$$

$$= \frac{8}{27}\left\{ \left(\frac{7}{2}\right)^3 - 1 \right\} = \boldsymbol{\frac{335}{27}}$$

問題 5.14 2 つの曲線の共有点の x 座標は，方程式 $\sin x = \sin 2x$ の解であるから



$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ では

$$x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi$$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\, dx$$

$$= \left[-\frac{\cos 2x}{2} + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

問題 5.15 (1) 曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ 上に任意の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとると，$b^2 = a^2(1-a^2)$ である．したがって，

$$(-b)^2 = a^2(1-a^2), \quad b^2 = (-a)^2\{1-(-a)^2\}$$

も成り立ち，P と x 軸について対称な点 $\mathrm{Q}(a, -b)$ も，点 P と y 軸について対称な点 $\mathrm{R}(-a,\ b)$ も，この曲線上の点となる．よって，この曲線は，x 軸および y 軸について対称である．

(2) 曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ は，x 軸，y 軸のそれぞれについて対称であるから，求める面積 S は，この曲線の第 1 象限にある部分と，x 軸，y 軸とで囲まれた部分の面積の 4 倍である．この曲線の方程式を y について解くと

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0 \text{ のとき} \quad y = x\sqrt{1-x^2}$$

また，$1-x^2 \geqq 0$ より　$0 \leqq x \leqq 1$

よって　$S = 4\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

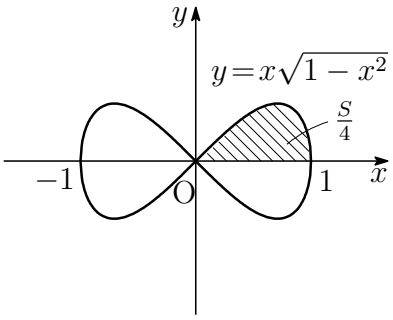
ここで，$1-x^2 = t$ とおくと

$$-2x\frac{dx}{dt} = 1$$

x	0	$\longrightarrow$	1
t	1	$\longrightarrow$	0

したがって　$S = 4\displaystyle\int_1^0 \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$

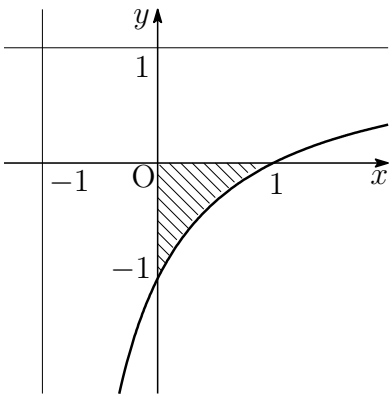
$$= 2\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = 2\left[\ \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1 = \mathbf{\frac{4}{3}}$$



補足 $S = 4\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -2\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)'\,dx$

$$= -2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left[\ (1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}\ \right]_0^1 = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

問題 5.16 $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{(x+1)-2}{x+1} = -\dfrac{2}{x+1} + 1$



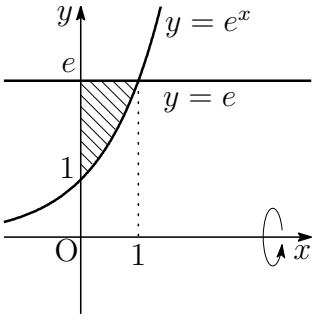
よって　　$y = -\dfrac{2}{x+1} + 1$

したがって

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 y^2\,dx \\
&= \pi \int_0^1 \left(-\frac{2}{x+1} + 1\right)^2 dx \\
&= \pi \int_0^1 \left\{\frac{4}{(x+1)^2} - \frac{4}{x+1} + 1\right\} dx \\
&= \pi \left[-\frac{4}{x+1} - 4\log|x+1| + x\right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{(3 - 4\log 2)\pi}
\end{aligned}
$$

問題 5.17 曲線と直線の共有点の x 座標は，
方程式 $e^x = e$ を解いて

$$x = 1$$



よって，求める回転体の体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 \{e^2 - (e^x)^2\}\,dx \\
&= \pi \int_0^1 (e^2 - e^{2x})\,dx \\
&= \pi \left[e^2 x - \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{e^2+1}{2}\pi}
\end{aligned}
$$

問題 5.18 (1) 時刻 t における点 P の座標を x とすると

$$x = 0 + \int_0^t v\,dt = \int_0^t (\sin t + \sin 2t)\,dt = \left[-\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t \right]_0^t$$
$$= \boldsymbol{-\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{2}}$$

(2) $v = \sin t + \sin 2t = \sin t(1 + 2\cos t)$ であるから

$0 < t < \pi$ のとき $v = 0$ とおくと　$\cos t = -\dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$t = \dfrac{2}{3}\pi$

よって，$0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$v \geqq 0$

$\dfrac{2}{3}\pi \leqq t \leqq \pi$ のとき　$v \leqq 0$

したがって，求める道のり s は

$$s = \int_0^{\pi} |v|\,dt = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} v\,dt + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (-v)\,dt$$
$$= \left[-\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \left[\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \left(-1 - \frac{1}{2}\right) + \left(-1 + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

問題 5.19　① $x=\cos\theta,\ y=\cos 2\theta=2\cos^2-1$ より $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$$C:y=2x^2-1\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

曲線 C と x 軸との共有点の x 座標は

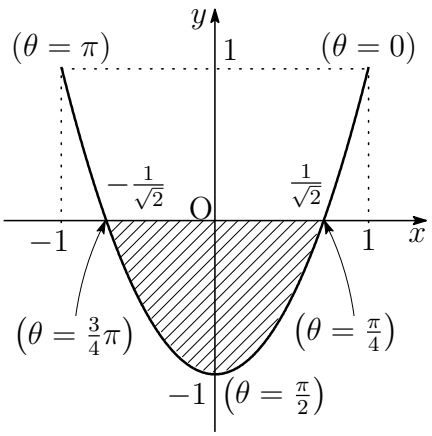
$$2x^2-1=0\quad\text{すなわち}\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，$y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x^2-1)\,dx=2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-x\right)dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}=\frac{1}{3}(\sqrt{2})^3=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

② 求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S=-\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}y\,dy$$

また，$x=\cos\theta$ のとき

$$dx=-\sin\theta\,d\theta$$

で，x と θ の対応は次のようになる．

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$\frac{3}{4}\pi$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

したがって，置換積分法によって

$$S=-\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}y\,dx=-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\cdot(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(2\cos^2\theta-1)\cdot(\cos\theta)'d\theta=\left[\frac{2}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$=\left\{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}-\left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

章末 5.1 C は積分定数とする．

(1) 与式 $= \displaystyle\int \sqrt{e^x+1}(e^x+1)'\,dx$

$= \dfrac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}} + C = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1} + C}$

(2) $x-1=t$ とおくと　$x=t+1$，$\dfrac{dx}{dt}=1$

よって　与式 $= \displaystyle\int \frac{t+1}{t^3}\cdot 1\cdot dt = \int (t^{-2}+t^{-3})\,dt = -t^{-1} - \frac{1}{2}t^{-2} + C$

$= -\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2(x-1)^2} + C = \boldsymbol{-\dfrac{2x-1}{2(x-1)^2} + C}$

(3) $\dfrac{x}{x^2-3x+2} = \dfrac{x}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$ であるから

与式 $= \displaystyle\int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) dx$

$= \boldsymbol{2\log|x-2| - \log|x-1| + C = \log\dfrac{(x-2)^2}{|x-1|} + C}$

(4) $\cos^5 x = (1-\sin^2 x)^2\cos x$ であるから

$\sin x = t$ とおくと　$\cos x\cdot\dfrac{dx}{dt} = 1$

よって　与式 $= \displaystyle\int (1-t^2)^2\,dt = \int (1-2t^2+t^4)\,dt$

$= t - \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{1}{5}t^5 + C = \boldsymbol{\sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + \dfrac{1}{5}\sin^5 x + C}$

(5) $e^x = t$ とおくと　$e^x\cdot\dfrac{dx}{dt} = 1$

ゆえに　与式 $= \displaystyle\int \frac{1}{t-\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$

$= \dfrac{1}{2}(\log|t-1| - \log|t+1|) + C$

$= \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right| + C = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log\dfrac{|e^x-1|}{e^x+1} + C}$

(6) 与式 $= \displaystyle\int \log(x^2+1)\cdot(x^2)'dx$

$= x^2\log(x^2+1) - \displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\cdot x^2\,dx$

ここで，$\dfrac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$ であるから

与式 $= x^2\log(x^2+1) - \displaystyle\int \left(2x - \frac{2x}{x^2+1}\right) dx$

$= x^2\log(x^2+1) - \displaystyle\int 2x\,dx + \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx$

$= x^2\log(x^2+1) - x^2 + \log(x^2+1) + C$

$= \boldsymbol{(x^2+1)\log(x^2+1) - x^2 + C}$

章末 5.2 (1) $\sin x = t$ とおくと

$\cos x\dfrac{dx}{dt} = 1$

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\longrightarrow$	1

よって　与式 $= \displaystyle\int_0^1 t^5\,dt = \left[\ \frac{t^6}{6}\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(2) 与式 $= \displaystyle\int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx = \left[\ \log(e^x+1)\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\log\frac{e+1}{2}}$

(3) 与式 $= \displaystyle\int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}\log x\ \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \dfrac{e^3}{3}\log e - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^e x^2\,dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_1^e = \boldsymbol{\frac{2e^3+1}{9}}$

(4) 与式 $= \displaystyle\int_0^1 (x-4)(x-1)^3\,dx + \int_1^4 \{-(x-4)(x-1)^3\}\,dx$

$x-1 = t$ とおくと

$\dfrac{dx}{dt} = 1$

x	0	$\longrightarrow$	1
t	-1	$\longrightarrow$	0

x	1	$\longrightarrow$	4
t	0	$\longrightarrow$	3

よって　与式 $= \displaystyle\int_{-1}^0 (t-3)t^3\,dt - \int_0^3 (t-3)t^3\,dt$

$= \left[\ \dfrac{t^5}{5} - \dfrac{3}{4}t^4\ \right]_{-1}^0 - \left[\ \dfrac{t^5}{5} - \dfrac{3}{4}t^4\ \right]_0^3 = \boldsymbol{\frac{131}{10}}$

(5) 与式 $= 2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

$x = \sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$$

よって　与式 $= 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot\cos\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\,d\theta$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \left[\,\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

(6) $t = \tan\theta$ とおくと

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

t	0	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

よって　与式 $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\,\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\,\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}}$$

章末 5.3 $\sin mt\sin nt = -\dfrac{1}{2}\{\cos(m+n)t - \cos(m-n)t\}$

ゆえに，$m \neq n$ のとき

$$\int_0^{2\pi} \sin mt\sin nt\,dt = -\frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{m+n}\sin(m+n)t - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)t\,\right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{0}$$

また，$m = n$ のとき

$$\sin mt\sin nt = -\frac{1}{2}\{\cos(m+n)t - \cos(m-m)t\} = -\frac{1}{2}\{\cos(m+n)t - 1\}$$

であるから

$$\int_0^{2\pi} \sin mt\sin nt\,dt = -\frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{m+n}\sin(m+n)t - t\,\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\{(0-2\pi) - 0\} = \boldsymbol{\pi}$$

章末 5.4 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}}$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}}$$

ここで，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ とすると，求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=\Big[\,2\sqrt{1+x}\,\Big]_0^1=\mathbf{2(\sqrt{2}-1)}$$

章末 5.5 接点の座標を $(a,\ \log 2a)$ とすると接線の方程式は

$$y-\log 2a=\frac{1}{a}(x-a)$$

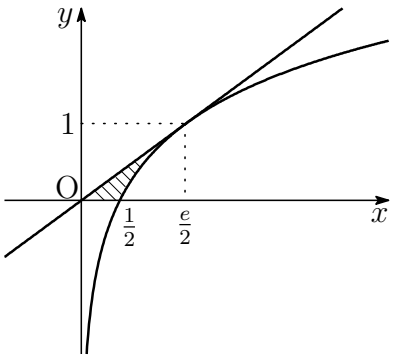
この接線が原点を通るから

$$0-\log 2a=-1$$

すなわち　$a=\dfrac{e}{2}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{e}{2},\ 1\right)$

右の図より，求める面積 S は



$$S=\frac{1}{2}\times\frac{e}{2}\times 1-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\log 2x\,dx$$

$$\begin{aligned}\int\log 2x\,dx&=\int(\log 2x)\cdot(x)'dx\\&=(\log 2x)\cdot x-\int(\log 2x)'\cdot x\,dx\\&=x\log 2x-x+C\qquad(C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

よって　$S=\dfrac{e}{4}-\Big[\,x\log 2x-x\,\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}$

$$=\frac{e}{4}-\left\{\left(\frac{e}{2}-\frac{e}{2}\right)-\left(0-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\mathbf{\frac{e}{4}-\frac{1}{2}}$$

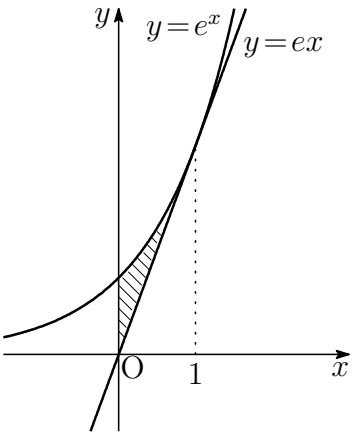
章末 5.6 $y' = e^x$ であるから，点 $(1,\ e)$ における接線の方程式は

$$y - e = e(x-1)$$

すなわち $\qquad y = ex$

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 e^x\,dx - \int_0^1 ex\,dx \\ &= \left[\ e^x\ \right]_0^1 - \left[\ \frac{e}{2}x^2\ \right]_0^1 \\ &= (e-1) - \left(\frac{e}{2} - 0\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{e}{2} - 1} \end{aligned}$$

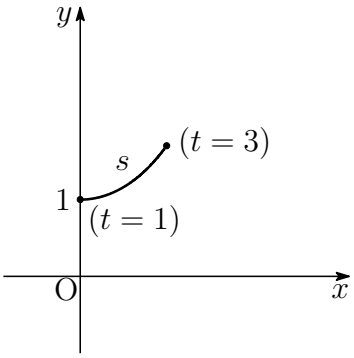


求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2\,dx - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot e^2\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{e^2-3}{6}\pi}$$

章末 5.7 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t},\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right)$ であるから

$$\begin{aligned} s &= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\ &= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt \\ &= \int_1^3 \sqrt{\frac{t^4 + 2t^2 + 1}{4t^4}}\,dt \\ &= \int_1^3 \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\ t - \frac{1}{t}\ \right]_1^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$



章末 5.8 C は積分定数とする．

(1) $\dfrac{1}{x^2(x+3)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+3}$ とおいて，分母を払うと

$$1 = ax(x+3) + b(x+3) + cx^2$$

よって　$1 = (a+c)x^2 + (3a+b)x + 3b$

両辺の各項の係数を比較して

$$a + c = 0, \quad 3a + b = 0, \quad 3b = 1$$

これを解いて　$a = -\dfrac{1}{9}$，$b = \dfrac{1}{3}$，$c = \dfrac{1}{9}$

よって　与式 $= -\dfrac{1}{9}\displaystyle\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+3}$

$$= -\frac{1}{9}\log|x| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{9}\log|x+3| + C$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{9}\log\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{1}{3x} + C}$$

(2) $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$

$t = \sin x$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx} = \cos x$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{dt}{1 - t^2} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C}$$

章末 5.9

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (e^x - ax)^2\,dx \\ &= \int_0^1 (e^{2x} - 2axe^x + a^2x^2)\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{2}e^{2x}\ \right]_0^1 - 2a\left(\left[\ xe^x\ \right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right) + a^2\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(e^2-1) - 2a\{e-(e-1)\} + \frac{a^2}{3} \\ &= \frac{1}{3}a^2 - 2a + \frac{1}{2}(e^2-1) \end{aligned}$$

ゆえに　$I = \dfrac{1}{3}(a-3)^2 + \dfrac{1}{2}(e^2-7)$

よって，$\boldsymbol{a=3}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(e^2-7)}$ をとる

章末 5.10　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx$

$\dfrac{\pi}{2} - x = t$ とおくと

$$-\frac{dx}{dt} = 1$$

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	0

よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)(-1)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx \end{aligned}$$

章末 5.11　$f(t)$ の原始関数の 1 つを $F(t)$ とすると，与えられた等式から

$$F(x^2) - F(a) = \log x$$

この両辺を x で微分して　$2xf(x^2) = \dfrac{1}{x}$

よって　$f(x^2) = \dfrac{1}{2x^2}$

ゆえに　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{2x}}$　$\boldsymbol{(x>0)}$

また，与えられた等式で $x^2 = a$ とおくと，$x = \sqrt{a}$ で　$0 = \log\sqrt{a}$

よって　$\sqrt{a} = 1$　すなわち　$\boldsymbol{a=1}$

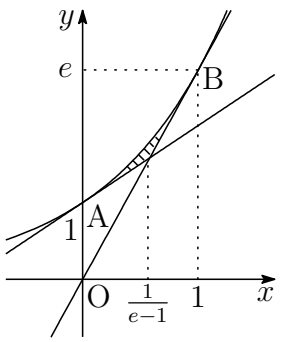
章末 5.12 $y=e^x$ より　$y'=e^x$

曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

$$y-e^t=e^t(x-t)\quad \text{ゆえに}\quad y=e^t(x-t+1)\quad \cdots(*)$$

曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ e)$ における接線の方程式は，$t=0,\ 1$ をそれぞれ $(*)$ に代入して

$$y=x+1,\quad y=ex$$



これらの直線の交点の x 座標は

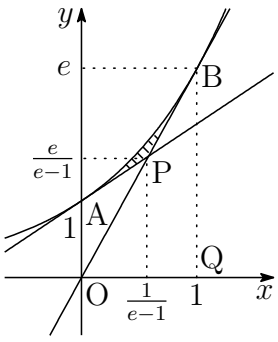
$$x+1=ex\quad \text{これを解いて}\quad x=\frac{1}{e-1}$$

よって，求める面積 S は

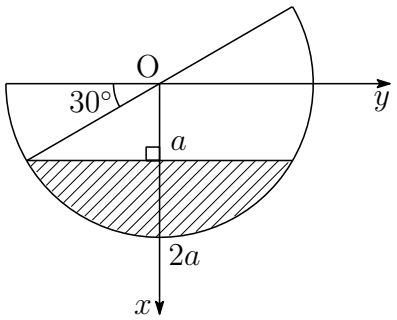
$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{1}{e-1}}\{e^x-(x+1)\}\,dx+\int_{\frac{1}{e-1}}^{1}(e^x-ex)\,dx\\&=\left[\,e^x-\frac{x^2}{2}-x\,\right]_0^{\frac{1}{e-1}}+\left[\,e^x-\frac{e}{2}x^2\,\right]_{\frac{1}{e-1}}^{1}\\&=e^{\frac{1}{e-1}}-\frac{1}{2(e-1)^2}-\frac{1}{e-1}-1\\&\qquad\qquad+e-\frac{e}{2}-\left(e^{\frac{1}{e-1}}-\frac{e}{2(e-1)^2}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{e^2-3e+1}{2(e-1)}}\end{aligned}$$

別解 求める面積 S は，右の図から

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1 e^x\,dx-\triangle\mathrm{OBQ}-\triangle\mathrm{OAP}\\&=\left[\,e^x\,\right]_0^1-\frac{1}{2}\cdot1\cdot e-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{e-1}\\&=\frac{e}{2}-\frac{1}{2(e-1)}-1\\&=\boldsymbol{\frac{e^2-3e+1}{2(e-1)}}\end{aligned}$$



章末 5.13 右の図のように x 軸，y 軸をとると，$a \leqq x \leqq 2a$ の部分が残る水の部分，$0 \leqq x \leqq a$ の部分がこぼれる水の部分になる．こぼれる水の量 V は，$0 \leqq x \leqq a$ の範囲において，半円



$$y = \sqrt{(2a)^2 - x^2}$$

と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = a$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積である．よって

$$V = \pi \int_0^a \{(2a)^2 - x^2\}\, dx = \pi \left[4a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{11}{3}\pi a^3$$

したがって，こぼれる水の量は　$\boldsymbol{\dfrac{11}{3}\pi a^3}$ cm^3

練習 5.51 ［1］定数関数 $y = 0$ は解である．

［2］$y \neq 0$ のとき　$\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 2x$

よって　$\displaystyle\int \frac{1}{y}\, dy = \int 2x\, dx$

$\log |y| = x^2 + C$，C は任意の定数

$y = \pm e^C e^{x^2}$

ここで，$\pm e^C = A$ とおくと，A は 0 以外の任意の値をとる．

［1］における $y = 0$ は，$y = Ae^{x^2}$ において，$A = 0$ とおくと得られる．

したがって，求める解は　$y = Ae^{x^2}$，A は任意の定数

別解 $y' = 2xy$ より　$y'e^{-x^2} - 2xye^{-x^2} = 0$　ゆえに　$(ye^{-x^2})' = 0$

これを積分すると

$ye^{-x^2} = A$　よって　$\boldsymbol{y = Ae^{x^2}}$　($\boldsymbol{A}$ は任意の定数)

練習 5.52 $xy = A$ から　　$y + xy' = 0$

$A \neq 0$ より $x \neq 0$ であるから，直角双曲線 $xy = A$ 上の点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは，$-\dfrac{y}{x}$ である．

したがって，$\dfrac{dy}{dx}\left(-\dfrac{y}{x}\right) = -1$　すなわち　$\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 1$ を解けばよい．

$\displaystyle\int y\,dy = \int x\,dx$ より　　$\dfrac{1}{2}y^2 = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1,$　C_1は任意の定数

よって　　$\boldsymbol{x^2 - y^2 = C,}$　　$\boldsymbol{C}$ は任意の定数