

令和 5 年度

# 高等学校 数学 A

電子教科書



2023 年 10 月 7 日

熊本県立第二高等学校数学科

# スライド

第0章 準備 [\[解説動画\]](#) 教科書 pp.7-12

第1章 場合の数と確率 [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

## 1.1 場合の数

- 1.1.1 集合の要素の個数 教科書 pp.14-17
- 1.1.2 場合の数 教科書 pp.18-22
- 1.1.3 順列 教科書 pp.23-31
- 1.1.4 組合せ 教科書 pp.32-41
- 1.1.5 問題 教科書 p.42

## 1.2 確率

- 1.2.1 事象と確率 教科書 pp.43-47
- 1.2.2 確率の基本性質 教科書 pp.48-53
- 1.2.3 独立な試行と確率 教科書 pp.54-59
- 1.2.4 条件付き確率 教科書 pp.60-65
- 1.2.5 期待値 教科書 pp.66-69
- 1.2.6 問題 教科書 p.70

## 1.3 章末問題 教科書 p.71-72

第2章 図形の性質 [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

## 2.1 平面図形

- 2.1.1 三角形の辺の比 教科書 pp.74-77
- 2.1.2 三角形の外心・内心・重心 教科書 pp.78-83
- 2.1.3 チェバの定理・メネラウスの定理 教科書 pp.84-91
- 2.1.4 円に内接する四角形 教科書 pp.92-95
- 2.1.5 円と直線 教科書 pp.96-101
- 2.1.6 2つの円 教科書 pp.102-104
- 2.1.7 作図 教科書 pp.105-110
- 2.1.8 問題 教科書 p.111

## 2.2 空間図形

- 2.2.1 直線と平面 教科書 pp.112-115
- 2.2.2 空間図形と多面体 教科書 pp.116-120
- 2.2.3 問題 教科書 p.122

## 2.3 章末問題 教科書 pp.123-124



# 目次

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| スライド                  | i   |
| 第0章 準備                | 1   |
| 0.1 集合とその要素の個数        | 1   |
| 0.1.1 集合              | 1   |
| 第1章 場合の数と確率           | 9   |
| 1.1 場合の数              | 9   |
| 1.1.1 集合の要素の個数        | 9   |
| 1.1.2 場合の数            | 13  |
| 1.1.3 順列              | 18  |
| 1.1.4 組合せ             | 28  |
| 1.1.5 問題              | 38  |
| 1.2 確率                | 39  |
| 1.2.1 事象と確率           | 39  |
| 1.2.2 確率の基本性質         | 44  |
| 1.2.3 独立な試行と確率        | 50  |
| 1.2.4 条件付き確率          | 56  |
| 1.2.5 期待値             | 63  |
| 1.2.6 問題              | 67  |
| 1.3 章末問題              | 68  |
| 1.3.1 章末問題 A          | 68  |
| 1.3.2 章末問題 B          | 69  |
| 第2章 図形の性質             | 71  |
| 2.1 平面図形              | 71  |
| 2.1.1 三角形の辺の比         | 71  |
| 2.1.2 三角形の外心・内心・重心    | 75  |
| 2.1.3 チェバの定理・メネラウスの定理 | 82  |
| 2.1.4 円に内接する四角形       | 90  |
| 2.1.5 円と直線            | 94  |
| 2.1.6 2つの円            | 100 |
| 2.1.7 作図              | 103 |
| 2.1.8 問題              | 110 |
| 2.2 空間図形              | 111 |

|       |            |            |
|-------|------------|------------|
| 2.2.1 | 直線と平面      | 111        |
| 2.2.2 | 空間図形と多面体   | 115        |
| 2.2.3 | 問題         | 120        |
| 2.3   | 章末問題       | 121        |
| 2.3.1 | 章末問題 A     | 121        |
| 2.3.2 | 章末問題 B     | 122        |
| 解答    |            | <b>123</b> |
|       | 円周角        | 159        |
|       | オイラーの多面体定理 | 182        |

# 第 0 章 準備

## 0.1 集合とその要素の個数

### 0.1.1 集合

1～7 ページでは，本書の第 1 章「場合の数と確率」を学習するのに必要な数学の「集合」の内容を準備として掲載した．

#### A 》集合と要素

数学では，「1 から 10 までの自然数の集まり」のように，範囲がはっきりしたものの集まりを集合といい，集合を構成している 1 つ 1 つのものを，その集合の要素という．

たとえば，「1 から 10 までの自然数の集まり」を  $A$  とすると， $A$  は

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

を要素とする集合である．

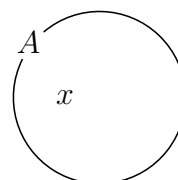
$x$  が集合  $A$  の要素であるとき， $x$  は集合  $A$  に属するという．

また，集合とその要素について，

$x$  が集合  $A$  の要素であることを  $x \in A$ ，

$y$  が集合  $A$  の要素でないことを  $y \notin A$

と表す．



例 0.1 1桁<sup>けた</sup>の素数全体の集合を  $A$  とすると， $A$  は

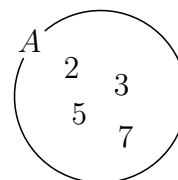
2, 3, 5, 7

を要素とする集合である．

このとき，集合  $A$  について，たとえば

$2 \in A$ ， $1 \notin A$  である．

**S**



練習 0.1 有理数全体の集合を  $Q$  とする．次の□に適する記号  $\in$  または  $\notin$  を入れよ．

(1)  $4 \square Q$

(2)  $-\frac{2}{3} \square Q$

(3)  $\sqrt{2} \square Q$

**解**

[解説動画]

**B》集合の表し方**

集合の表し方には、 $\{ \}$ の中に要素を書き並べて表す方法がある。

**例 0.2** 要素を書き並べて表す方法 S

(1) 18の正の約数全体の集合  $A$  は

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

(2) 20以下の正の偶数全体の集合  $B$  は

$$B = \{2, 4, 6, \dots, 20\}$$

(3) 自然数全体の集合  $N$  は

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

**補足** (2), (3)のように、規則性が明らかであれば、要素の個数が多い場合や、無限に多くの要素がある場合には、省略記号 $\dots$ を用いて表すことがある。

要素の満たす条件を書いて、集合を表す方法もある。例0.2の集合  $A, B$  は、たとえば、それぞれ次のようにも表される。

**例 0.3** 要素の満たす条件を書いて表す方法 S

(1)  $A = \{x \mid x \text{ は } 18 \text{ の正の約数} \}$

(2)  $B = \{2n \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の自然数} \}$

例0.3(2)では、 $2n$ の $n$ に1, 2, 3,  $\dots$ , 10を代入して得られる数が $B$ の要素であることを表している。

**練習 0.2** 次の集合を、要素を書き並べて表せ。 解

(1) 20の正の約数全体の集合  $A$

(2)  $B = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ 以下の正の奇数} \}$

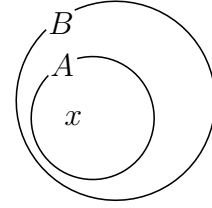
(3)  $C = \{3n + 1 \mid n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$

**深化 0.1** 集合  $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$  を例0.3のような要素の満たす条件を書いて表す方法で表してみよう。 解

## C》部分集合

2つの部分集合  $A, B$  について,  $A$ のすべての要素が $B$ の要素であるとき, すなわち

$$x \in A \quad \text{ならば} \quad x \in B$$



が成り立つとき,  $A$  を  $B$  の部分集合という.

このとき,  $A$  は  $B$  に含まれる, または  $B$  は  $A$  を含むといい,  $A \subset B$ , または  $B \supset A$  で表す. 集合  $A$  自身は  $A$  の部分集合である. すなわち,  $A \subset A$  である.

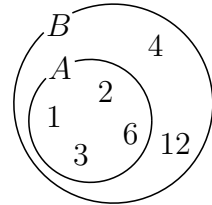
また,  $A$  と  $B$  の要素がすべて一致しているとき,  $A$  と  $B$  は等しいといい,  $A = B$  で表す.

注意  $A = B$  であることは, 「 $A \subset B$  かつ  $A \supset B$ 」であることと同じである.

例 0.4  $A = \{1, 2, 3, 6\}$  と

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  については,  
 $A \subset B$  である.

また, 6 の正の約数全体の集合を  $C$  と  
すると,  $A = C$  である. S



練習 0.3 次の2つの集合の関係を,  $\subset$ ,  $\supset$ ,  $=$  を使って表せ. 解

(1)  $A = \{1, 2, 5, 10\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

(2)  $C = \{1, 2, 4, 8\}$ , 8 の正の約数全体の集合  $D$

(3)  $P = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ 以下の自然数}\}$ ,  $Q = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$

要素が1つもない集合も考えることができる. これを空集合といい,  $\phi$  で表す. 空集合  $\phi$  は, どんな集合においても, その部分集合であると約束する.

例 0.5 文字  $a, b$  の集合  $\{a, b\}$  の部分集合は, 次の4個である. S

$$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

← 空集合  $\phi$  および  $\{a, b\}$  自身も部分集合である.

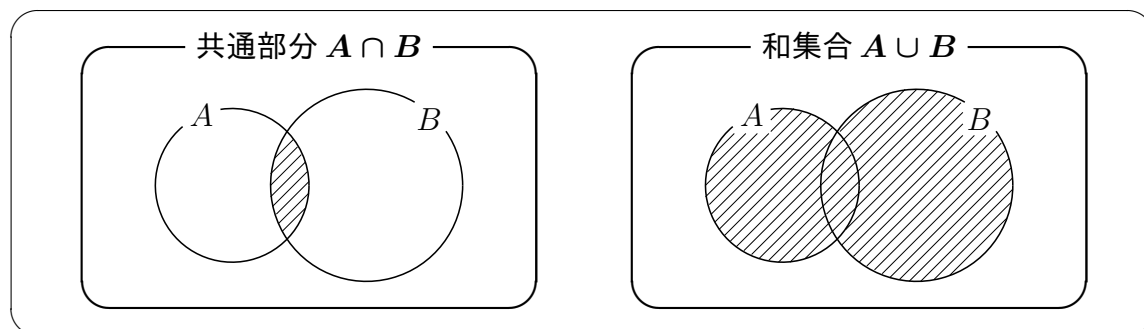
練習 0.4 次の集合の部分集合をすべてあげよ. 解

(1)  $\{1, 2\}$

(2)  $\{a, b, c\}$

## D 》 共通部分と和集合

集合  $A, B$  の両方に入っている要素全体の集合を  $A$  と  $B$  の共通部分といい、 $A \cap B$  で表す。また、 $A, B$  の少なくとも一方に入っている要素全体の集合を  $A$  と  $B$  の和集合といい、 $A \cup B$  で表す。

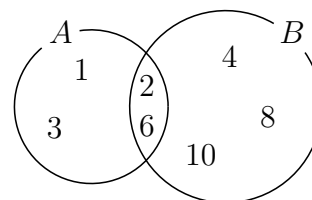


例 0.6  $A = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  
 $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  について

**S**

$$A \cap B = \{2, 6\},$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$$



練習 0.5  $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{1, 3\}$  について、次の集合を求めよ。 **解**

(1)  $A \cap B$

(2)  $A \cup B$

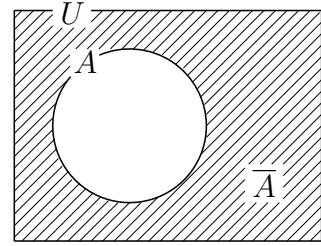
(3)  $B \cap C$

(4)  $B \cup C$

## E》補集合

集合を考えるときは、1つの集合  $U$  を決めて、その部分集合について考えることが多い。このとき、 $U$  を全体集合という。

$U$  の部分集合  $A$  に対して、 $U$  の要素で、 $A$  には入っていない要素全体の集合を、 $U$  に関する  $A$  の補集合といい、 $\overline{A}$  で表す。



例 0.7  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  を全体集合とする。

$U$  の部分集合

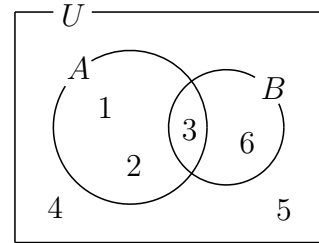
**S**

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 6\}$$

について  $\overline{A} = \{4, 5, 6\}$

また、 $A \cup B = \{1, 2, 3, 6\}$  であるから

$$\overline{A \cup B} = \{4, 5\}$$



練習 0.6 例 0.7 の集合  $A, B$  について、次の集合を求めよ。 **解**

(1)  $\overline{B}$

(2)  $\overline{A \cap B}$

(3)  $\overline{A} \cap \overline{B}$

(4)  $\overline{A} \cup \overline{B}$

(5)  $\overline{A} \cap B$

(6)  $A \cap \overline{B}$

補集合の定義から、次のことが成り立つ。

補集合の性質

$U$  を全体集合とし、 $A, B$  をその部分集合とするとき

$$A \cap \overline{A} = \phi, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad \overline{\overline{A}} = A$$

$$A \subset B \quad \text{ならば} \quad \overline{A} \supset \overline{B}$$

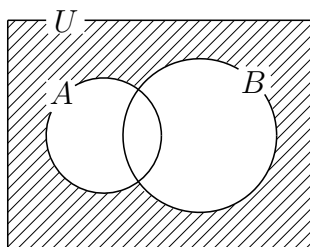
注意  $\overline{\overline{A}}$  は  $\overline{A}$  の補集合を表す。

また、次のド・モルガンの法則が成り立つ<sup>1</sup>。

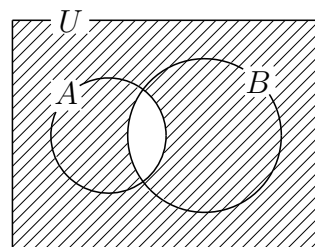
ド・モルガンの法則

$$1 \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$2 \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



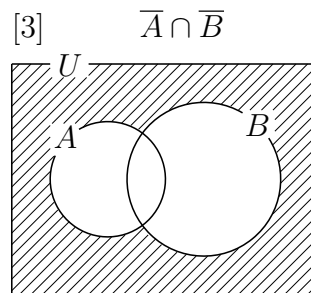
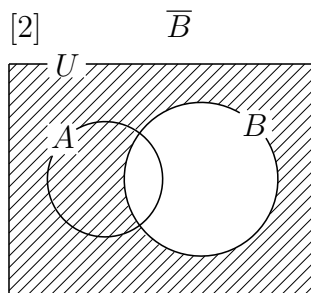
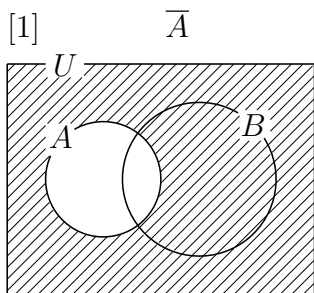
$\overline{A \cup B}$  と  $\overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B}$  と  $\overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A}$  と  $\overline{B}$  は、それぞれ図 [1] と図 [2] の斜線部分であり、その共通部分  $\overline{A} \cap \overline{B}$  は、図 [3] の斜線部分である。

図 [3] の斜線部分は  $\overline{A \cup B}$  であるから、 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  が成り立つ。



練習 0.7  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  が成り立つことを、図を用いて確かめよ。 [解](#)

<sup>1</sup>この法則が成り立っていることは、練習 0.6(2),(4) の結果からも確かめられる。

## 研究

## 3つの集合の共通部分と和集合

3つの集合  $A$ ,  $B$ ,  $C$  のすべてに属する要素全体の集合を,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の共通部分といい,  $A \cap B \cap C$  で表す.

また,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の少なくとも1つに属する要素全体の集合を,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の和集合といい,  $A \cup B \cup C$  で表す.

**Ex 0.1**  $A = \{3, 6, 9\}$ ,  
 $B = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  
 $C = \{2, 4, 6, 8\}$

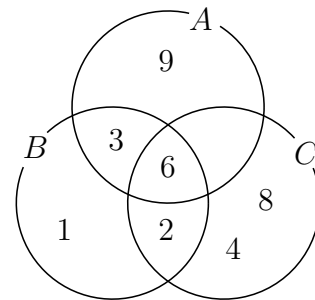
について

$$A \cap B \cap C = \{6\}$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

である.

[終]



**演習 0.1**  $A = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  について,  $A \cap B \cap C$  と  $A \cup B \cup C$  を求めよ. 解



# 第 1 章 場合の数と確率

## 1.1 場合の数

### 1.1.1 集合の要素の個数

数学では、「1 から 10 までの自然数の集まり」のように、範囲がはっきりしたものの集まりを集合といい、集合を構成している 1 つ 1 つのものを、その集合の要素という<sup>1</sup>。1 から 10 までの自然数全体の集合  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  について、要素の個数は 10 個である。このように、集合の要素の個数が有限であるとき、その要素の個数について考えよう。

#### A 》集合の要素の個数

集合  $A$  の要素の個数が有限のとき、その個数を  $n(A)$  で表す。

空集合  $\phi$  は要素が 1 つもない集合であるから、 $n(\phi) = 0$  である。

#### 例 1.1 集合の要素の個数 ■

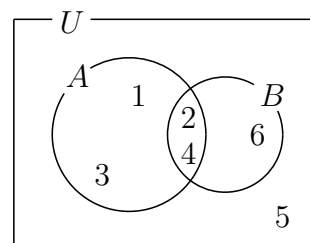
全体集合を  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  とする。

$U$  の部分集合

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6\}$$

について  $n(A) = 4, n(B) = 3$

また  $n(A \cup B) = 5, n(\overline{A}) = 2$



練習 1.1 例 1.1 の集合  $U, A, B$  について、次の個数を求めよ。 ■

- (1)  $n(U)$                       (2)  $n(\overline{B})$                       (3)  $n(A \cap B)$                       (4)  $n(\overline{A \cup B})$

[\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

<sup>1</sup> 「集合」は数学 I で学ぶ内容である。1～7 ページで、本章を学習するのに必要な数学 I の「集合」の内容を準備として掲載している

全体集合  $U$  の部分集合  $A, B$  に対して,  $n(A \cup B)$  を考えよう.

$$n(A) = a, \quad n(B) = b, \quad n(A \cap B) = c$$

とすると, 右の図から分かるように

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= (a - c) + (b - c) + c \\ &= a + b - c \end{aligned}$$

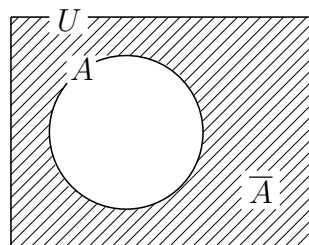
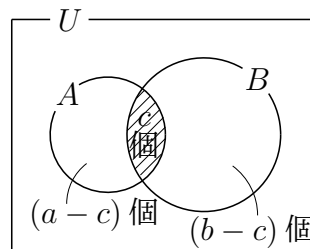
である. すなわち, 次の等式が成り立つ.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$A$  の補集合  $\bar{A}$  の要素は,  $U$  の要素から  $A$  の要素を除いたものである.

したがって, 次の等式が成り立つ.

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$



和集合, 補集合の要素の個数

$$1 \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$2 \quad n(\bar{A}) = n(U) - n(A) \quad \text{ただし, } U \text{ は全体集合}$$

1において, とくに  $A \cap B = \phi$  のときは, 次のことが成り立つ.

$$A \cap B = \phi \text{ のとき} \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad \leftarrow n(A \cap B) = 0$$

例 1.2 和集合, 補集合の要素の個数を求める.

全体集合  $U$  の部分集合  $A, B$  について

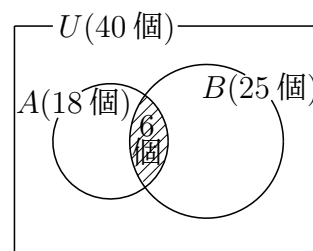
$$n(U) = 40, \quad n(A) = 18, \quad n(B) = 25,$$

$$n(A \cap B) = 6 \text{ であるとき}$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 18 + 25 - 6 = 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(\bar{A}) &= n(U) - n(A) \\ &= 40 - 18 = 22 \end{aligned}$$

**S**



練習 1.2 例 1.2 の集合  $U, A, B$  について, 次の個数を求めよ. **解**

$$(1) \quad n(\bar{B})$$

$$(2) \quad n(\overline{A \cup B})$$

$$(3) \quad n(\bar{A} \cap \bar{B})$$

## B 》倍数の個数

例題 1.1 100 以下の自然数のうち、次のような数の個数を求めよ. S

- (1) 3 の倍数                      (2) 3 の倍数でない数  
 (3) 3 の倍数かつ 5 の倍数      (4) 3 の倍数または 5 の倍数

解答 100 以下の自然数全体の集合を  $U$  とし,  $U$  の部分集合で, 3 の倍数全体の集合を  $A$ , 5 の倍数全体の集合を  $B$  とすると

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 33\}$$

$$B = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 20\}$$

(1)  $n(A) = 33$  (答) 33 個

(2) 3 の倍数でない数全体の集合は  $\bar{A}$  である. よって

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = 67$$
 (答) 67 個

(3) 3 の倍数かつ 5 の倍数全体の集合は  $A \cap B$  である.

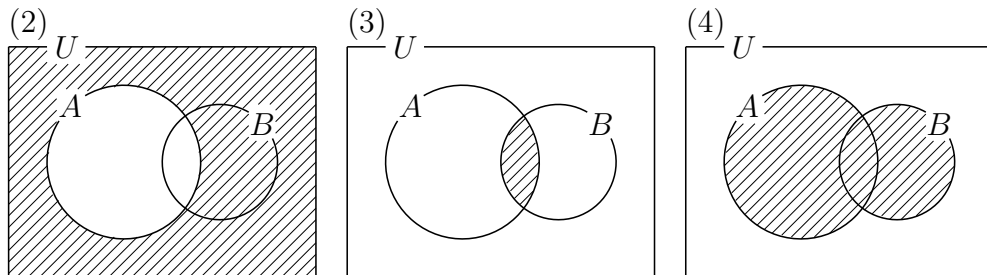
$A \cap B$  は,  $U$  の部分集合で 15 の倍数全体の集合であるから

$$A \cap B = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, 15 \cdot 3, \dots, 15 \cdot 6\}$$

よって  $n(A \cap B) = 6$  (答) 6 個

(4) 3 の倍数または 5 の倍数全体の集合は  $A \cup B$  である.

$$\begin{aligned} \text{よって } n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 33 + 20 - 6 = 47 \end{aligned}$$
 (答) 47 個



注意  $3 \cdot 1, 3 \cdot 2$  などにおける  $\cdot$  は, 積を表す記号であり,  $\times$  と同じ意味である.

練習 1.3 100 以下の自然数のうち、次のような数の個数を求めよ. 解

- (1) 6 の倍数                      (2) 6 の倍数でない数  
 (3) 4 の倍数かつ 6 の倍数      (4) 4 の倍数または 6 の倍数

## C 集合の応用

応用例題 1.1 100 人の人に 2 つの提案 a, b をしたところ, a に賛成の人は 77 人, b に賛成の人は 83 人, a にも b にも賛成の人は 66 人いた. a にも b にも賛成でない人は何人いるか. **[S]**

考え方 》 a に賛成した人の集合を  $A$ , b に賛成した人の集合を  $B$  とすると, a にも b にも賛成しなかった人の集合は  $\overline{A \cup B}$  である.

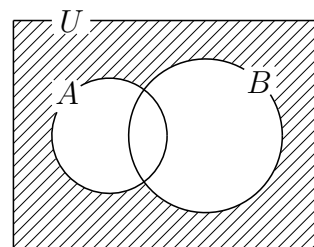
解答 この 100 人の集合を  $U$  とし, a に賛成の人の集合を  $A$ , b に賛成の人の集合を  $B$  とすると

$$n(A) = 77, \quad n(B) = 84, \quad n(A \cap B) = 66$$

a にも b にも賛成でない人の集合は  $\overline{A \cup B}$ , すなわち  $\overline{A \cup B}$  である.

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 77 + 84 - 66 = 95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 100 - 95 = 5 \quad (\text{答}) \text{ 5 人} \end{aligned}$$



練習 1.4 応用例題 1.1 について, 右のような賛否の人数の表を作った. 表の空らんをうめ, 次の人数を求めよ.

(1) a にだけ賛成の人

(2) b にだけ賛成の人

**[解]**

|                | $B$ | $\overline{B}$ | 合計  |
|----------------|-----|----------------|-----|
| $A$            | 66  |                | 77  |
| $\overline{A}$ |     | 6              |     |
| 合計             | 84  |                | 100 |

練習 1.5 あるクラス 40 人の生徒を対象に通学方法を調べたところ, 自転車を利用する人が 13 人, バスを利用する人が 16 人, 自転車もバスも利用する人が 5 人いた. 次の人は何人いるか. **[解]**

(1) 自転車もバスも利用しない人

(2) 自転車を利用するが, バスは利用しない人

### 1.1.2 場合の数

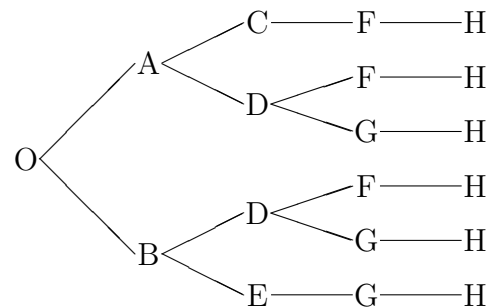
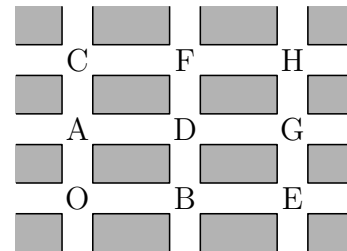
ある事柄が起こる場合の数を知るには、すべての場合をもれなくかつ重複なく数える必要がある。ここでは、そのような方法について考えてみる。

#### A》樹形図

右の図のように道路がある町で、地点Oから地点Hまで遠回りしないで行くのに、どのような道順があるかを調べてみよう。

条件を満たす道順を、交差点を示す文字の順にすべて書き出してみると

$O \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow H$   
 $O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H$   
 $O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$   
 $O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H$   
 $O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$   
 $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow H$



となる。

よって、交差点Oから交差点Hまで遠回りしないで行く最短の道順は全部で6通りある。

これらは、上の右の図のように、次々と枝分かれしていく図でも表すことができる。このような図を樹形図という。樹形図は、起こりうるすべての場合を、もれなくかつ重複なく数え上げるのに便利である。

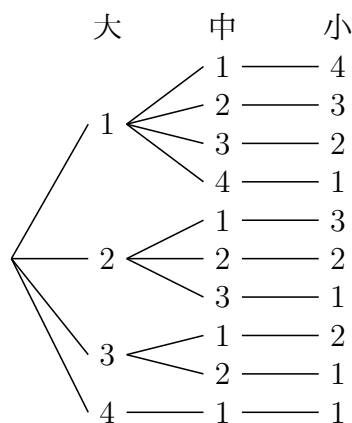
**練習 1.6** アルファベットの A, B, C の3文字を, ACB のように重複なしに1個ずつすべて並べるとき, その並べ方をすべて書き出せ。 解

例 1.3 大中小の3個のさいころを投げる  
とき、目の和が6になる場合は、  
右の樹形図により

**S**

10通り

である.



練習 1.7 大中小の3個のさいころを投げる時、次の場合は何通りあるか. **解**

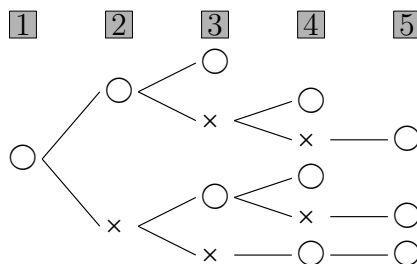
(1) 目の和が5になる場合

(2) 目の積が6になる場合

応用例題 1.2 ある競技の予選は5試合のうち3勝すれば通過できる. ただし、引き分けはなく、3勝したらそれ以降の試合はない. 最初に1勝したとき、この競技の予選を通過するための勝敗の順は何通りあるか. **S**

考え方》勝ちを○, 負けを×で表し、5試合までに○が3回出てくる場合の樹形図をかく.

解答 勝ちを○, 負けを×で表し、5試合までに3勝する場合の樹形図をかくと、右の図のようになる.  
よって 6通り



練習 1.8 1枚の硬貨を繰り返し投げ、表が2回出たら賞品がもらえるゲームをする. ただし、投げられる回数は6回までとし、2回目の表が出たらそれ以降は投げない. 1回目に裏が出たとき、商品がもらえるための表裏の出方の順は何通りあるか. **解**

深化 1.1 例 1.3において、大中小の3個のさいころのうち、どれか1つでも5の目が出ると3個の目の和は6にはならない. この理由を説明してみよう. **解**

## B 》和の法則

13 ページの道順の例では、A を通るものと B を通るものがある。これらに重複はなく、次の関係が成り立っている。

|       |   |         |   |         |
|-------|---|---------|---|---------|
| 道順の総数 |   | A を通るもの |   | B を通るもの |
| 6 通り  | = | 3 通り    | + | 3 通り    |

一般に、次の和の法則が成り立つ。

和の法則

2 つの事柄 A と B は同時には起らないとする。  
 A の起こり方が  $a$  通りあり、B の起こり方が  $b$  通りあれば、  
 A または B の起こる場合は、 $a + b$  通りある。

和の法則は、3 つ以上の事柄についても、同じように成り立つ。

**例題 1.2** 1 個のさいころを 2 回投げるとき、目の和が 5 の倍数になる場合は何通りあるか。 S

**解答** 目の和が 5 または 10 になる場合である。

目の和が 5 になるのは、

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

の 4 通り。

目の和が 10 になるのは、

(4, 6), (5, 5), (6, 4)

の 3 通り。

よって、和の法則により  $4 + 3 = 7$  (答) 7 通り

← (1 回目, 2 回目)  
のように、出る  
目を示している。

**練習 1.9** 1 個のさいころを 2 回投げるとき、目の和が次のようになる場合は、何通りあるか。 解

(1) 7 または 8

(2) 4 の倍数

## C》積の法則

2種類のケーキと3種類の飲み物からそれぞれ1種類ずつ選ぶとき、そのセットの種類数を求めよう.

ケーキの選び方は2通りあり、どの場合に対しても、飲み物の選び方は3通りある. よって、ケーキと飲み物のセットは、

$$2 \times 3 = 6 \quad \text{すなわち} \quad 6 \text{通り}$$

ある.

一般に、次の積の法則が成り立つ.

## 積の法則

事柄 A の起こり方が  $a$  通りあり、そのどの場合に対しても  
事柄 B の起こり方が  $b$  通りあれば、A が起こり、そして B  
が起こる場合は、 $a \times b$  通りある.

練習 1.10 大小2個のさいころを投げるとき、大きいさいころの目が3以上、小さいさいころの目が偶数である場合は何通りあるか. 解

積の法則は、3つ以上の事柄についても、同じように成り立つ.

例題 1.3 大中小3個のさいころを投げるとき、すべての目が5以上である場合は何通りあるか. S

解答 1個のさいころで、5以上の目の出方は2通りある.

よって、積の法則により  $2 \times 2 \times 2 = 8$  (答) 8通り

練習 1.11 次の問いに答えよ. 解

- (1) 大中小3個のさいころを投げるとき、目の出方は何通りあるか.
- (2) 積  $(a+b)(c+d)(x+y+z)$  を展開すると、項は何個できるか.

応用例題 1.3 次の数について、正の約数は何個あるか. S

(1) 8

(2) 72

考え方 》 約数を調べるときは、素数の積で表す.

$$(1) 8 = 2^3$$

$$(2) 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

解答 (1)  $8 = 2^3$  であるから、8 の正の約数は 1, 2,  $2^2$ ,  $2^3$  である.

よって、4 個ある.

(答) 4 個

(2)  $72 = 2^3 \cdot 3^2$  であるから、72 の正の約数は、 $2^3$  の正の約数と  $3^2$  の正の約数の積で表される.

$2^3$  の正の約数は (1) で求めたように 4 個あり、 $3^2$  の正の約数は 1, 3,  $3^2$  の 3 個ある.

よって、積の法則により  $4 \times 3 = 12$

(答) 12 個

応用例題 1.3 において、72 の正の約数は、次のような式の展開にすべて現れる.

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2) \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 \\ & \quad + 2^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3^2 + 2^3 \cdot 1 + 2^3 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3^2 \end{aligned}$$

展開した項の個数  $4 \times 3$  が、72 の正の約数の個数に等しい.

$$1 \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 3^2 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 3^2 \end{cases}$$

$$2^2 \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 3^2 \end{cases}$$

$$2^3 \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 3^2 \end{cases}$$

練習 1.12 次の数について、正の約数は何個あるか. 解

(1) 16

(2) 144

(3) 504

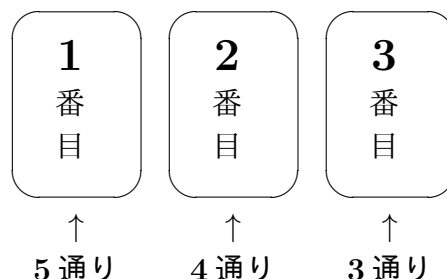
## 1.1.3 順列

いくつかのものの中からその一部を取り出して1列に並べることを考えよう。その並べ方の総数を求める方法は、実際にものを並べる場面だけでなく、さまざまな場面に応用できる。この並べ方の総数を求める方法について調べよう。

## A》順列の総数

A, B, C, D, E の5人から異なる3人を選んで1列に並べることを考える。  
1番目から順に決めていこう。

- ① 1番目は、誰でもよいから5通り。
- ② 2番目は、①で決めた以外の4通り。
- ③ 3番目は、①、②で決めた以外の3通り。



したがって、並べ方の総数は、積の法則により

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \quad \text{すなわち} \quad 60 \text{ 通り}$$

である。

このように、いくつかのものを順に1列に並べるとき、その並びの1つ1つを順列という。

一般に、異なる $n$ 個のものから異なる $r$ 個を取り出して並べる順列を

 **$n$  個から  $r$  個取る順列**

といい、その総数を、 ${}_nP_r$  で表す<sup>2</sup>。ただし、 $r \leq n$  である。

たとえば、5個から3個取る順列の総数は ${}_5P_3$  で表され、上で調べたことから次のようになる。

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

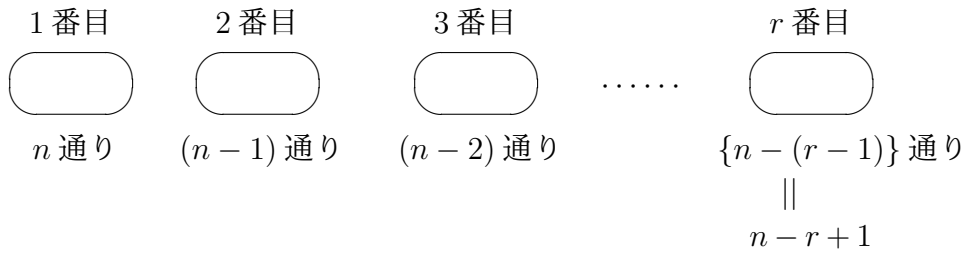
<sup>2</sup> ${}_nP_r$  の P は、「順列」を意味する英語 permutation の頭文字である。

$n$  個から  $r$  個取る順列の総数  ${}_nP_r$  についても、積の法則を使って求めると、次のような結果が得られる。

順列の総数  ${}_nP_r$  —————

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r \text{ 個の積}}$$

←  ${}_nP_r$  は、 $r$  個の数の積



例 1.4 7人から3人を選んで1列に並べるとき、並べ方の総数は S

$${}_7P_3 = \underbrace{7 \times 6 \times 5}_{3 \text{ 個の数の積}} = 210 \quad (\text{通り})$$

練習 1.13 次の値を求めよ。 解

(1)  ${}_5P_2$

(2)  ${}_8P_4$

(3)  ${}_3P_1$

(4)  ${}_6P_6$

練習 1.14 次のものの総数を求めよ。 解

(1) 10人の生徒から3人を選んで1列に並べるときの並べ方

(2) 7個の数字1, 2, 3, 4, 5, 6, 7のうちの異なる4個を並べて作る4桁の整数

順列の総数  ${}_nP_r$  の式で、とくに  $r = n$  のときは

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

という等式が得られる。

この等式の右辺は、1から $n$ までのすべての自然数の積である。

これを $n$ の階乗といい、 $n!$ で表す。

$n$  の階乗 —————

$${}_nP_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

一般に，次のことがいえる．

異なる  $n$  個すべてを並べる順列の総数は  $n!$

例 1.5 4 人の生徒全員を 1 列に並べるとき，並べ方の総数は S

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ (通り)}$$

練習 1.15 次のような並べ方の総数を求めよ． 解

- (1) 5 個の数字 1, 2, 3, 4, 5 のすべてを 1 列に並べる．
- (2) 7 個の文字 A, B, C, D, E, F, G のすべてを 1 列に並べる．

順列の総数  ${}_nP_r$  の式で， $r < n$  のときは

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(\textcolor{red}{n-r}) \cdots \textcolor{red}{3} \cdot \textcolor{red}{2} \cdot \textcolor{red}{1}}{(\textcolor{red}{n-r}) \cdots \textcolor{red}{3} \cdot \textcolor{red}{2} \cdot \textcolor{red}{1}} \end{aligned}$$

よって

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (1.1)$$

注意 等式 (1.1) が  $r = 0$ ， $r = n$  でも成り立つように， ${}_nP_0 = 1$ ， $0! = 1$  と定める．

## B 》 順列の考え方の利用

例題 1.4 6 人の候補選手の中から，リレーの第 1 走者から第 4 走者までを選ぶとき，4 人の走者の選び方は何通りあるか． S

解答 6 人から 4 人を選んで 1 列に並べる順列の総数と同じである．  
よって，走者の決め方の総数は

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \quad (\text{答}) \text{ 360 通り}$$

練習 1.16 12 色の色鉛筆がある．右の図のような 3 つの文字を，すべて異なる色で塗り分けるとき，塗り方は何通りあるか． 解

A B C

応用例題 1.4 大人 4 人と子ども 3 人が 1 列に並ぶとき、次のような並び方は何通りあるか. S

- (1) 両端が大人である. (2) 子ども 3 人が続いて並ぶ.

考え方》並び方に決まりのある部分は別に考え、積の法則を使う.

- (1) 両端の 2 人とその間の 5 人に分け、それぞれについて、並び方を考える.  
 (2) まず、子ども 3 人をひとまとめにして全体の並び方を考える.  
 次に、ひとまとめにした子ども 3 人の並び方を考える.

- (1) 大 残り 5 人 大 (2) 大 大 大 こども 3 人 大

解答 (1) 両端の大人 2 人の並び方は、 ${}_4P_2$  通りある.

そのどの場合に対しても、間に並ぶ残り 5 人の並び方は、 $5!$  通りある.  
 よって、並び方の総数は、積の法則により

$${}_4P_2 \times 5! = 4 \cdot 3 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440 \quad (\text{答}) 1440 \text{ 通り}$$

- (2) 子ども 3 人をひとまとめにする.

大人 4 人とひとまとめにした子どもの並び方は、 $5!$  通りある.

また、ひとまとめにした子ども 3 人の並び方は、 $3!$  通りある.

よって、並び方の総数は、積の法則により

$$5! \times 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \quad (\text{答}) 720 \text{ 通り}$$

練習 1.17 母音 a, i, u, e, o と子音 k, s, t の 8 個を 1 列に並べるとき、次のような並び方は何通りあるか. 解

- (1) 両端が母音である.  
 (2) 母音 5 個が続いて並ぶ.

応用例題 1.5 6個の数字0, 1, 2, 3, 4, 5のうちの異なる4個を並べて, 4桁の整数を作るとき, 次のような整数は何個つくれるか. S

(1) 4桁の整数

(2) 4桁の奇数

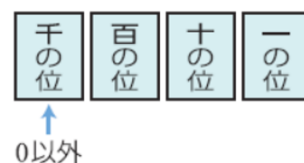
考え方》制限がある位から考える.

(1) 4桁の整数であるから, 千の位は0でない.

(2) 一の位は, 数字1, 3, 5のどれかである. 千の位にも注意.

解答 (1) 千の位は, 0以外の数字1, 2, 3, 4, 5のどれかであるから,

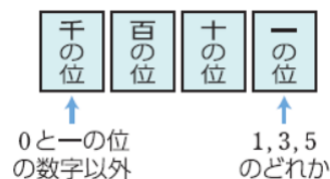
その選び方は5通りある. そのどの場合に対しても, 百, 十, 一の位には, 残り5個の数字から3個取って並べるから, その並べ方は ${}_5P_3$ 通りある. よって, 求める個数は, 積の法則により



$$5 \times {}_5P_3 = 5 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300 \quad (\text{答}) 300 \text{ (個)}$$

(2) 一の位は, 数字1, 3, 5のどれかであるから, その選び方は3通りある.

そのどの場合に対しても, 千の位は, 0と一の位の数字以外の4個の数字のどれかであるから, その選び方は4通りある. さらに, 百, 十の位には, 残り4個の数字から2個取って並べるから, その並べ方は ${}_4P_2$ 通りある.



よって, 求める個数は, 積の法則により

$$3 \times 4 \times {}_4P_2 = 3 \times 4 \times 4 \cdot 3 = 144 \quad (\text{答}) 144 \text{ (個)}$$

練習 1.18 5個の数字0, 1, 2, 3, 4のうち異なる4個を並べて, 4桁の整数を作るとき, 次のような整数は何個作れるか. 次のような数は何個作れるか. 解

(1) 4桁の整数

(2) 4桁の奇数

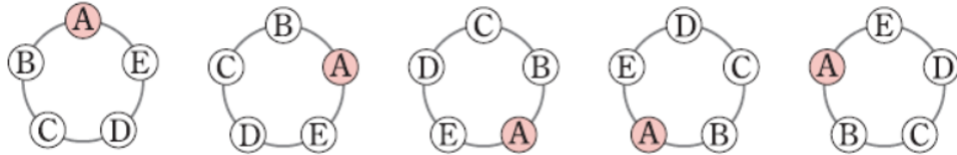
(3) 4桁の偶数

## C》円順列

いくつかのものを円形に並べる順列を 円順列 という。円順列では、回転して並びが同じになるものは同じ並び方とみなす。

A, B, C, D, E の5人が輪の形に並ぶことを考えよう。

次の図の5つは回転すると並びが同じになるので、円順列として同じ並び方である。



## ① 同じ並び方になる個数に着目する [円順列]

5人が輪の形に並ぶことを、次のように考える。

[1] まず、5人が1列に並ぶ。

[2] [1] の両端をつなげて輪の形に、回転して並びが同じになるものは同じ並び方とみなす。

5人が1列に並ぶ順列の総数は  ${}_5P_5$  通りであり、両端をつなげて輪の形にしたとき、回転すると同じ並び方は5通りずつある。

よって、5人が輪の形に並ぶときの並び方の総数は

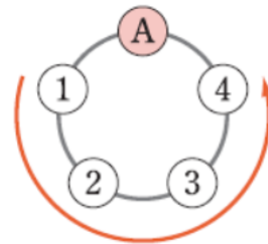
$$\frac{{}_5P_5}{5} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ (通り)}$$

## ② 1つを基準にして考える

たとえば、Aを基準にして、A以外の人を反時計回りの順に並べると考える。

このとき、5人が輪の形に並ぶときの並び方の総数は、基準にした1人を除いた残り4人の順列の総数に等しく、次のようになる。

$$(5 - 1)! = 4! = 24 \text{ (通り)}$$



異なる  $n$  個のものの円順列の総数について、次のことがいえる。

円順列の総数

$$\text{異なる } n \text{ 個の円順列の総数は } \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

例 1.6 7人が輪の形に並ぶとき、並び方の総数を求める. [S]

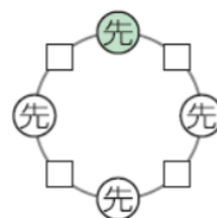
$$(7-1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ (通り)}$$

[終]

練習 1.19 異なる 6 個の玉を円形に並べる. [解]

応用例題 1.6 先生 4 人と生徒 4 人が輪の形に並ぶとき、先生と生徒が交互に並ぶような並び方は何通りあるか. [S]

考え方 先生が円形に並んで、間に生徒が並んでいくと考える。先生が円形に並んでから特定の先生を基準にすると、間に入る生徒の並び方は、1 列に並ぶ順列と考えられる。



解答 先生 4 人の円順列の総数は、 $(4-1)!$  通りある。

そのどの場合に対しても、生徒 4 人が先生の間に 1 人ずつ並ぶ方法は、 $4!$  通りある。よって、並び方の総数は、積の法則により

$$(4-1)! \times 4! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144$$

(答) 144 通り

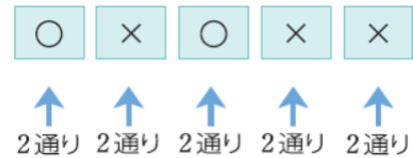
練習 1.20 大人 5 人と子供 5 人が輪の形に並ぶとき、大人と子供が交互に並ぶような並び方は何通りあるか. [解]

練習 1.21 A, B, C, D, E, F の 6 人が、円形の 6 人席のテーブルに着席するとき、A と B が隣り合うような並び方は何通りあるか. [解]

## D 》重複順列

これまでは、異なるものだけを並べる順列を考えてきた。ここでは、同じものを繰り返し使うことを許した場合の順列を考えてみよう。

例 1.7 記号○と×を、重複を許して 5 個並べるとする。このとき、右の図のように、5 個のどの場所にも、○と×のどちらを置いてもよい。



したがって、この順列の総数は、積の法則により S

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \text{ (通り)}$$

一般に、異なる  $n$  個のものから重複を許して  $r$  個取って並べる順列を、 $n$  個から  $r$  個取る重複順列という。重複順列の総数については、次のことがいえる。

重複順列の総数

$n$  個から  $r$  個取る重複順列の総数は  $n^r$  通り

$$\leftarrow \underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{n \text{ が } r \text{ 個}}$$

例題 1.5 3 個の数字 1, 2, 3 を重複を許して並べて、4 桁の数を作るとき、何個の数が作れるか。 S

解答 3 個から 4 個取る重複順列であるから

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \quad (\text{答}) 81 \text{ 個}$$

練習 1.22 4 個の文字 a, b, c, d を、重複を許して次の個数だけ 1 列に並べるとき、何通りの文字列が作れるか。 解

(1) 2 個

(2) 3 個

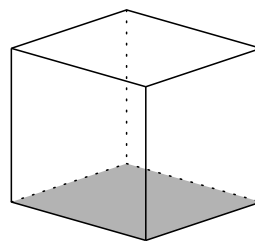
## 立方体の色塗り

立方体の6個の面を，赤青黄白緑黒の6色で塗り分けるとき，塗り方の総数を求めてみよう．なお，適当に回転してすべての面の色の並びが同じになれば同じ塗り方とみなす．

- [1] 赤色の面は，下に固定する．
- [2] 上の面は，残り5色のどれかになる．
- [3] 側面は，残り4色の円順列になる．

以上から，6色による立方体の色塗りの総数は

$$5 \times (4 - 1)! = 5 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \text{ (通り)}$$



**Think** 完全順列

AさんとBさんが次のような問題について話しています。

**問題** 1, 2, 3, 4の4個の数字をすべて並べる。このとき1が1番目に並ばないなど、それぞれの数字の並ぶ順番がその数字とすべて異なるような並べ方の総数を求めよ。

A: 先生が問題の条件を満たすような順列を完全順列と説明していたね。だから、問題は4個の完全順列の総数を求める問題ということだね。

B: 完全順列は、たとえば、私たちのクラスで席替えをするときに全員がもとの席から移動するような場合、とも考えることができるのかな。

A: なるほど! 席に、順番に番号をつけたと考えて、クラスの全員を並べ替えたときにもとの番号と違う番号の席に座る場合と考えればいいのか。

B: でも、何十個の完全順列の総数を求めるなんて大変そう。

A: じゃあ、とりあえず問題から1個増やして5個の完全順列を考えてみようよ。樹形図を使わずに総数を求める方法はないかな。

B: 具体的に考えてみるといいかも。1番目は1以外だから、とりあえず2にしてみよう。このとき、残りの4個はどう並べればいいのか。

A: あ! 1が2番目にあるときは、残りの数字は3, 4, 5で並べる順番も3番目4番目5番目だから、3個の完全順列の総数と同じだよ。

B: すごい! じゃあ、1が2番目でないときを考えればいいのか。

A: 1が2番目でない、そして、3は3番目でない、...ということは...

B: 4個の完全順列だ!

A: 5個の完全順列の総数は3個4個の完全順列の総数から求められるかも。

**演習 1.1** 3個, 4個の完全順列の総数を、樹形図を用いるなどして求めてみよう。また、上の会話を参考に5個の完全順列の総数を求めてみよう。 解

## 1.1.4 組合せ

いくつかのものの中からその一部を取り出して組を作るとき、その組の総数について調べてみよう。

## A》組合せの総数

A, B, C, D, E の5人から異なる3人を選んで組を作るとき、次のような10通りの組が作れる。

$$\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, B, E\}, \{A, C, D\}, \{A, C, E\}, \\ \{A, D, E\}, \{B, C, D\}, \{B, C, E\}, \{B, D, E\}, \{C, D, E\} \cdots \textcircled{1}$$

このように、ものを取り出す順序を無視した組を作るとき、これらの組の1つ1つを組合せという。

一般に、異なる $n$ 個のものから異なる $r$ 個を取り出して作る組合せを

 $n$  個から  $r$  個取る組合せ

といい、その総数を  ${}_nC_r$  で表す<sup>3</sup>。ただし、 $r \leq n$  である。

たとえば、5個から3個取る組合せの総数は  ${}_5C_3$  で表される。[組合せと順列の関係]

上の①から  ${}_5C_3 = 10$  であるが、これを順列の総数から求めてみよう。

5個から3個取る順列の総数  ${}_5P_3$  は、次のように考えることもできる。

5個から3個取る組合せを作り，  $\leftarrow {}_5C_3$  通り

取り出した3個すべてを1列に並べる。  $\leftarrow 3!$  通り

よって、積の法則により、次の等式が成り立つ。

$${}_5C_3 \times 3! = {}_5P_3$$

$$\text{したがって } {}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

| 組合せ              | 順 列                  |
|------------------|----------------------|
| {A, B, C} $\iff$ | ABC ACB              |
|                  | BAC BCA              |
|                  | CAB CBA              |
| 1 組              | 6 通り<br>( $3! = 6$ ) |

<sup>3</sup>  ${}_nC_r$  の C は、「組合せ」を意味する英語 combination の頭文字である。

$n$  個から  $r$  個取る組合せの総数  ${}_nC_r$  については,  ${}_nC_r \times r! = {}_nP_r$  となるから

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \quad \leftarrow {}_nC_r \text{ と } {}_nP_r \text{ の関係式}$$

したがって,  ${}_nC_r$  は次の式で表される.

組合せの総数  ${}_nC_r$

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}^{r \text{ 個の積}}}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$\leftarrow {}_nC_r$  は分母も分子も  
 $r$  個の数の積

注意 とくに,  ${}_nC_1 = n$ ,  ${}_nC_n = 1$  である. また, 20 ページの等式 (1.1) を用いると,

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ とも表される. ただし, } {}_nC_0 = 1 \text{ と定める.}$$

例 1.8 6 人から 4 人を選ぶとき, 選び方の総数を求める. S

$${}_6C_4 = \frac{\overbrace{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}^{4 \text{ 個の数の積}}}{\underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{4 \text{ 個の数の積}}} = 15 \text{ (通り)}$$

練習 1.23 次の値を求めよ. 解

(1)  ${}_7C_3$

(2)  ${}_4C_2$

(3)  ${}_8C_1$

(4)  ${}_5C_5$

練習 1.24 次のような選び方の総数を求めよ. 解

(1) 8 人から 2 人を選ぶ.

(2) 7 色から 4 色を選ぶ.

## B 《 ${}_nC_r$ の性質

例 1.8 において, 6 人から 4 人を選ぶことは, 選ばない 2 人を決めることと結果的には同じである.

よって, 次の等式が成り立つ.

$${}_6C_4 = {}_6C_2$$

| 選ぶ<br>4 人の組  | 選ばない<br>2 人の組 |
|--------------|---------------|
| {A, B, C, D} | {E, F}        |
| {A, B, C, E} | {D, F}        |
| {A, B, C, F} | {D, E}        |
| $\vdots$     | $\vdots$      |
| ${}_6C_4$ 個  | $= {}_6C_2$ 個 |

一般に,  $n$  個から  $r$  個取る組合せの総数は,  $n$  個から  $(n-r)$  個取る組合せの総数に等しい. すなわち, 次の等式が成り立つ.

${}_nC_r$  の性質

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

$$\circ C_{\triangle} = \circ C_{\square}$$

$$\triangle + \square = \circ$$

例 1.9  ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$  を使って,  ${}_{10}C_7$  を求める. [S]

$${}_{10}C_7 = {}_{10}C_{10-7} = {}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

練習 1.25 次の値を求めよ. [解] [S]

(1)  ${}_5C_4$

(2)  ${}_9C_6$

(3)  ${}_{20}C_{18}$

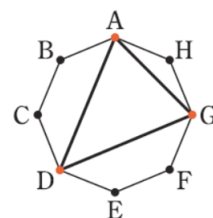
## C》組合せの考え方の利用

例題 1.6 正八角形の 8 個の頂点のうち, 3 点を結んで三角形を作るとき, 三角形は何個作れるか.

解答 8 個の頂点はどの 3 点も一直線上にはないから, 3 個の点を 1 組決めると三角形が 1 個作れる. よって, 作れる三角形の個数は

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

(答) 56 個



練習 1.26 正六角形について, 次の数を求めよ. [解]

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数

(2) 2 個の頂点を結ぶ線分の本数

(3) 対角線の本数

応用例題 1.7 大人 6 人，子ども 4 人の中から，5 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか. S

- (1) 大人 3 人と子ども 2 人を選ぶ.
- (2) 子どもが少なくとも 1 人は含まれるように選ぶ.

考え方 》 (1) 大人と子どもを別々に選び，積の法則を利用する.  
 (2) 「少なくとも 1 人」は「1 人以上」ということである.  
 (総数) - (子どもが選ばれない選び方の総数) を求めればよい.

解答 (1) 大人 3 人の選び方は  ${}_6C_3$  通りある.

そのどの場合に対しても，子ども 2 人の選び方は  ${}_4C_2$  通りある.

よって，求める選び方の総数は，積の法則により

$${}_6C_3 \times {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 120 \quad (\text{答}) 120 \text{ 通り}$$

(2) 10 人から 5 人の選び方は  ${}_{10}C_5$  通りある.

子どもが 1 人も選ばれず，5 人とも大人となる選び方は  ${}_6C_5$  通りある.

よって，求める選び方の総数は

$${}_{10}C_5 - {}_6C_5 = {}_{10}C_5 - {}_6C_1 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 6 = 246 \quad (\text{答}) 246 \text{ 個}$$

練習 1.27 大人 3 人，子ども 5 人の中から，4 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか. 解

- (1) 大人 2 人と子ども 2 人を選ぶ.
- (2) 大人が少なくとも 1 人は含まれるように選ぶ.

深化 1.2 応用例題 1.7(2) を，子どもが 1 人，2 人，3 人，4 人の各場合の数を計算してみよう. 解

## D》組分けの総数

応用例題 1.8 6人を次のように分けるとき、分け方は何通りあるか。 S

(1) A, B, Cの3つの部屋に、2人ずつ分ける。

(2) 2人ずつの3つの組に分ける。

考え方》(2)は、(1)でA, B, Cの区別がない場合である。たとえば、1つの組分け{a, b}, {c, d}, {e, f}において、この3つの組にA, B, Cの名前をつけるとすると、3!通りのつけ方がある。よって、(2)の総数を求めるには、(1)の総数を3!で割ればよい。 [組分けの総数]

|          | {a, b} | {c, d} | {e, f} |
|----------|--------|--------|--------|
|          | ↓      | ↓      | ↓      |
| 3!<br>通り | A      | B      | C      |
|          | A      | C      | B      |
|          | B      | A      | C      |
|          | B      | C      | A      |
|          | C      | A      | B      |
|          | C      | B      | A      |

解答 (1) 部屋Aの2人の選び方は ${}_6C_2$ 通りある。

部屋Bの2人の選び方は残りの4人から選ぶので ${}_4C_2$ 通り、

部屋A, Bの人が決まれば、残りの部屋Cの2人は決まる。

よって、分け方の総数は、積の法則により

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 90 \quad (\text{答}) 90 \text{ 通り}$$

(2) (1)で、A, B, Cの区別をなくすと、3!通りずつ同じ組ができる。

$$\text{よって、分け方の総数は} \quad \frac{90}{3!} = \frac{90}{6} = 15 \quad (\text{答}) 15 \text{ 通り}$$

練習 1.28 8人を次のように分けるとき、分け方は何通りあるか。 解

(1) A, B, C, Dの4つの組に、2人ずつ分ける。

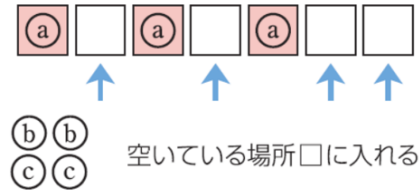
(2) 2人ずつの4つの組に分ける。

(3) 3人, 3人, 2人の3つの組に分ける。

## E》同じものを含む順列

順列の総数を求めるのに、組合せの考え方を利用できることがある。

例 1.10 a が 3 個, b が 2 個, c が 2 個の全部を 1 列に並べる順列の総数を求める. S



[1] 7 個の場所から a を置く 3 個の選び方は,  ${}_7C_3$  通り.

[2] 残り 4 個の場所から b を置く 2 個の選び方は,  ${}_4C_2$  通り.

[3] a, b の置き方が決まれば, 残り 2 個の c の置き方は決まる.

よって, このような順列の総数は, 積の法則により

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 210 \text{ (通り)}$$

一般に, a が  $p$  個, b が  $q$  個, c が  $r$  個の合計  $n$  個全部を 1 列に並べる順列の総数は, 次のようになる.

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!} = \frac{n!}{p!q!r!}$$

同じものを含む順列の総数

a が  $p$  個, b が  $q$  個, c が  $r$  個あるとき, それら全部を 1 列に並べる順列の総数は

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q = \frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{ただし } p + q + r = n$$

注意  $r = 0$  のときは,  ${}_{n-p}C_q = 1$  であり, 順列の総数は  ${}_nC_p = \frac{n!}{p!q!}$  である.

前ページの例 1.10 では、同じものを含む順列の総数を求めるのに、組合せの考え方を利用したが、順列の考え方を利用することもできる。

3個の a, 2個の b, 2個の c をそれぞれ

$$a_1, a_2, a_3, \quad b_1, b_2, \quad c_1, c_2$$

のように番号をつけ、すべて異なるものと考えことにする。

このとき、これら 7 個の順列の総数は  $7!$  通り

ここで、 $a_1, a_2, a_3$  の 3 個をすべて a として区別をなくすとすると、たとえば

$$\begin{array}{ll} a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 c_1 c_2, & a_1 a_3 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2, \\ a_2 a_1 a_3 b_1 b_2 c_1 c_2, & a_2 a_3 a_1 b_1 b_2 c_1 c_2, \\ a_3 a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2, & a_3 a_2 a_1 b_1 b_2 c_1 c_2 \end{array} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{赤字部分の} \\ \text{並びは同じ} \end{array}$$

の 3 通りの並び方は区別がなくなり、すべて  $aaab_1 b_2 c_1 c_2$  として、1 通りとして数えられる。

したがって、a の区別をなくしたときの順列の総数は  $\frac{7!}{3!}$  通り

同じように、b, c についても区別をなくすと、それぞれ  $2!$  通りの並び方が 1 通りとして数えられる。

したがって、求められる順列の総数は  $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$  (通り)

となり、組合せの考え方を利用した場合と同じ結果が得られる。

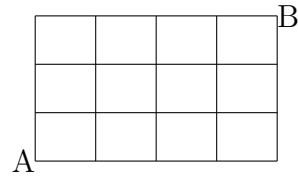
**例題 1.7** 9 個の数字 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 の全部を使って 9 桁の数を作るとき、何個の数ができるか。 S

**解答** 1 が 4 個, 2 が 3 個, 3 が 2 個あり、これらを 1 列に並べるから

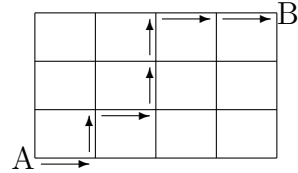
$$\frac{9!}{4!3!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} = 1260 \quad (\text{答}) 1260 \text{ 個}$$

**練習 1.29** BANANA の 6 文字をすべて使って文字列を作るとき、何通りの文字列ができるか。 解

応用例題 1.9 右の図は、ある地域の道を直線で示したものである。交差点 A から交差点 B まで遠回りをしないで行く最短の道順は、何通りあるか。 **S**



考え方》 交差点から次の交差点まで行くのに、 $\uparrow$ と $\rightarrow$ の向きがある。たとえば図の矢印で示された道順は $\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow$ で表される。すなわち、1つの道順は、 $\uparrow$  3 個と $\rightarrow$  4 個を使って作られる順列に対応している。



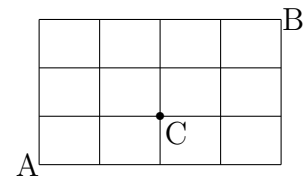
解答 右へ 1 区画進むことを $\rightarrow$ で、上へ 1 区画進むことを $\uparrow$ で表す。

A から B まで行く最短の道順は、 $\rightarrow$  4 個と $\uparrow$  3 個の順列で表される。

よって、求める最短の道順の総数は

$$\frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \quad (\text{答}) 35 \text{ 通り}$$

練習 1.30 右の図のような道のある地域で、次のような最短の道順は何通りあるか。 **解**



- (1) A から B まで行く。
- (2) A から C を通って B まで行く。
- (3) A から C を通らずに B まで行く。

**研究** 重複を許して作る組合せ

これまでは、異なる  $n$  個のものから異なる  $r$  個を取り出して作る組合せについて考えてきたが、ここでは、同じものを繰り返し取ることを許した場合の組合せについて考えよう.

**Ex 1.1** 3 個の文字  $a, b, c$  から、重複を許して 7 個取る組合せの総数を求める.

たとえば、 $a$  を 4 個、 $b$  を 2 個、 $c$  を 1 個取る組合せを  $aaaabbc$  と表すとする. ここで、文字を  $\bigcirc$ 、文字が変わるところを  $|$  で表すと、文字の組合せと、 $\bigcirc$  と  $|$  を並べる順列が、次のように対応する.

$$\begin{array}{ll} aaaabbc & \longleftrightarrow \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc | \bigcirc\bigcirc | \bigcirc \\ aaabbcc & \longleftrightarrow \bigcirc\bigcirc\bigcirc | \bigcirc\bigcirc | \bigcirc\bigcirc \\ aabbbbbb & \longleftrightarrow \bigcirc\bigcirc\bigcirc | \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc | \\ ccccccc & \longleftrightarrow | | \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \\ & \dots \end{array}$$

このように考えると、3 個の文字  $a, b, c$  から重複を許して 7 個取る組合せと、7 個の  $\bigcirc$  と 2 個の  $|$  の順列が、1 つずつ対応する. よって、求める組合せの総数は、9 個の場所から  $\bigcirc$  を置く 7 個の場所を選ぶ方法の総数に等しく、次のようになる.

$${}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \quad (\text{通り})$$

**補足** 上の組合せの総数は、同じものを含む順列の総数であり、次のように計算することもできる.

$$\frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$$

一般に、異なる  $n$  個のものから重複を許して  $r$  個を取って作る組合せの総数は、 $r$  個の  $\bigcirc$  と  $(n-1)$  個の  $|$  を並べる順列の総数に等しく.. すなわち、 $\{r + (n-1)\}$  個の場所から  $r$  個の場所を選ぶ方法の総数に等しい。

よって、その総数は  $\frac{\{r + (n-1)\}!}{r!(n-1)!}$  すなわち  ${}_{n+r-1}C_r$

**Ex 1.2** 3種類の果物から重複を許して5個取って作る組合せの総数は、5個の  $\bigcirc$  と2個の  $|$  の順列の総数に等しい。よって、求める総数は

$${}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \quad (\text{通り})$$

**演習 1.2** 次の問いに答えよ。 解

- (1) 4個の文字  $a, b, c, d$  から重複を許して7個取る組合せの総数を求めよ。
- (2)  $(a + b + c)^6$  の展開式の異なる項の数を求めよ。

**Ex 1.3** 等式  $x + y + z = 8$  を満たす負でない整数  $x, y, z$  の組の個数を求める。

3個の文字  $a, b, c$  から重複を許して、 $a$  を  $x$  個、 $b$  を  $y$  個、 $c$  を  $z$  個取って合計8個にする方法の総数と同じである。

よって、求める組の個数は、異なる3個のものから重複を許して8個取る組合せの総数、すなわち8個の  $\bigcirc$  と2個の  $|$  を並べる順列の総数と等しいから

$${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \quad (\text{個})$$

**演習 1.3** 等式  $x + y + z = 10$  を満たす負でない整数  $x, y, z$  の組は、全部で何個あるか。 解

### 研究

#### ( $a + b + c$ ) <sup>$n$</sup> の展開式

$(a + b + c)^n$  の展開式における  $a^p b^q c^r$  の項の係数を求めよう。

この項  $a^p b^q c^r$  の係数は、二項定理を導いたときと同様に考えると、 $a$  を  $p$  個、 $b$  を  $q$  個、 $c$  を  $r$  個並べる順列の総数に等しい。

したがって、次のことがいえる。

$(a + b + c)^n$  の展開式における  $a^p b^q c^r$  の項の係数は

$$\frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{ただし} \quad p + q + r = n$$

たとえば、 $(a + b + c)^7$  における  $a^3 b^2 c^2$  の項の係数は

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

## 1.1.5 問題

問題 1.1 1 から 100 までの自然数のうち、3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる数は何個あるか. [解](#)

問題 1.2 大小 2 個のさいころを投げるとき、次の場合は何通りあるか. [解](#)

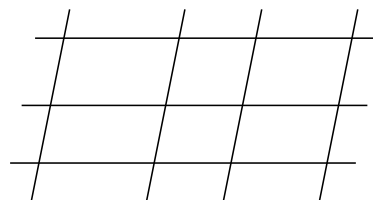
- (1) 目の積が偶数になる (2) 目の和が偶数になる.

問題 1.3 6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 のうち異なる 3 個を並べて、3 桁の数を作るとき、次のような整数は何個つくれか. [解](#)

- (1) 5 の倍数 (2) 320 より大きい数

問題 1.4 集合  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  の部分集合の個数を求めよ. [解](#)

問題 1.5 右の図のように、4 本の平行線とそれらに交わる 3 本の平行線がある. これらの平行線によって作られる平行四辺形は、全部で何個あるか. [解](#)



問題 1.6 次の等式が成り立つことを、組合せの考えを用いて説明せよ. [解](#)

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

- ▶  $n$  個から  $r$  個取る組合せをの総数  ${}_nC_r$  を、取り出した  $r$  個の中に特定の 1 個を含む場合と、含まない場合に分けて考える.

問題 1.7 立方体の 6 個の面を、赤青黄白緑黒の 6 色で塗り分けるとき、塗り方の総数を求めよ. なお、立方体を回転して 6 つの面の塗り方が一致すれば同じ塗り方とみなす. [解](#)

問題 1.8 「大人 4 人、子ども 3 人」を題材に場合の数の総数を求める問題を作りたい. 次の計算で総数が求められるような問題を 1 つ作れ. [解](#)

- (1)  ${}_4C_2 \times {}_3C_1$  (2)  $4! \times 3!$

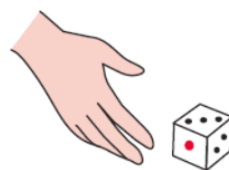
## 1.2 確率

### 1.2.1 事象と確率

私たちの身の回りには偶然に左右されて起こる事柄が多くある．このような事柄について，それがどの程度起こりやすいのか，または起こりにくいのかを考えることにしよう．

#### A》確率の考え方

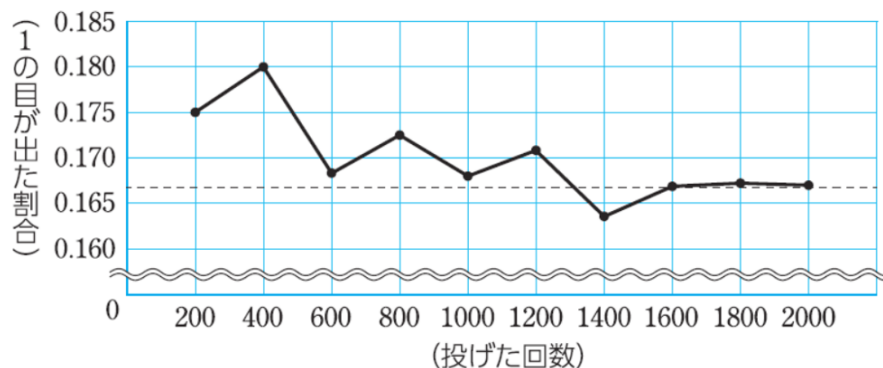
1個のさいころを投げると，1，2，3，4，5，6のいずれかの目が出るが，どの目が出るかを前もって知ることはできない．しかし，どの目が出ることも同じ程度に期待されるから，たとえば1の目が出る割合は $\frac{1}{6}$ であると考えられる．



次のグラフは，1個のさいころを繰り返し投げる実験をしたときの，1の目が出た割合

$$\frac{\text{1の目が出た回数}}{\text{さいころを投げた回数}}$$

を示したものである．**[確率]**



上のグラフからは，1の目が出た割合は，投げた回数が増えるほど $\frac{1}{6} = 0.166\cdots$ に近づいていく様子を読み取れる．この値は，1の目が出るという事柄の起こりやすさの程度を表していると考えられる．

このように，ある事柄が起こることが期待される程度を表す数値を**確率**という．結果が偶然に左右され，前もって結果を知ることができないときでも，ある事柄が起こる確率を計算できる場合がある．

## B》試行と事象

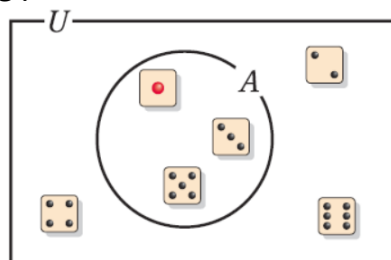
「さいころを投げる」とか「くじを引く」などのように、同じ条件のもとで繰り返すことができ、その結果が偶然によって決まる実験や観測を **試行** という。また、試行の結果として起こる事柄を **事象** という。

1個のさいころを投げる試行では、たとえば1の目が出ることを、単に1で表すと、試行の結果全体は、次の集合  $U$  で表すことができる。

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

このとき、「奇数の目が出る」という事象  $A$  は、 $U$  の部分集合

$$A = \{1, 3, 5\}$$



で表される。

**注意** 事象は  $A$ ,  $B$  などの文字を用いて表す。

このように、1つの試行において、起こりうる結果全体を集合  $U$  で表すとき、その試行におけるどの事象も、 $U$  の部分集合で表すことができる。 $U$  自身で表される事象を **全事象**、 $U$  のただ1つの要素からなる集合で表される事象を **根元事象** という。

たとえば、1個のさいころを投げる試行の根元事象は、次の6個である。

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

**注意** 今後、事象  $A$  を表す集合を  $A$  で表し、事象と集合を区別しない。

例 1.11 10円硬貨1枚と100円硬貨1枚を同時に投げる試行 S

10円硬貨1枚と100円硬貨1枚を同時に投げるとき、10円硬貨は表が出て、100円硬貨は裏が出ることを、(表, 裏) で表すことにする。

|     | 100円 | 表      | 裏      |
|-----|------|--------|--------|
| 10円 |      |        |        |
| 表   |      | (表, 表) | (表, 裏) |
| 裏   |      | (裏, 表) | (裏, 裏) |

全事象  $U$  は  $U = \{(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)\}$

根元事象は、次の4個である

$$\{(表, 表)\}, \{(表, 裏)\}, \{(裏, 表)\}, \{(裏, 裏)\}$$

**練習 1.31** 例 1.11 にならって、次の事象を  $U$  の部分集合で表せ。 解

事象  $A$  「裏が1枚も出ない」      事象  $B$  「表が1枚だけ出る」

## C》同様に確からしいときの確率

ここからは確率を計算で求める方法について考えてみよう.

1つの試行において, ある事象  $A$  の起こる確率を  $P(A)$  で表す<sup>4</sup>.

ある試行において, どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき, これらの根元事象は 同様に確からしい という. このような試行で, 起こりうるすべての場合の数を  $N$ , 事象  $A$  の起こる場合の数を  $a$  とするとき, 事象  $A$  の起こる確率  $P(A)$  は次のように求められる.

事象  $A$  の確率

$$P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{a}{N}$$

注意 全事象を  $U$  とすると, 事象  $A$  の起こる確率は  $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$  である.

以下, 本書で取り上げる試行では, 全事象  $U$  におけるすべての根元事象は同様に確からしいものとする.

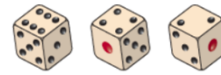
例 1.12 1個のさいころを投げるとき, 偶数の目が出る確率を求める. S

起こりうるすべての目の出方は, 6通りある.

このうち, 偶数の目が出るのは, 3通りある.

よって, 偶数の目が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



$$N=6, a=3$$

練習 1.32 1個のさいころを投げるとき, 次の場合の確率を求めよ. 解

(1) 奇数の目が出る.

(2) 3以上の目が出る.

<sup>4</sup>  $P(A)$  の  $P$  は, 「確率」を意味する英語 probability の頭文字である.

## D 》 いろいろな事象の確率

例 1.13 2個のさいころを同時になげるとき，目の和が5になる確率 S

2個のさいころを A, B とし，たとえば，A は1の目が出て，B は4の目が出ることを (1, 4) で表す．2個のさいころの目の出方は， $6 \times 6$  の36通り．目の和が5になるのは，以下の4通り．

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

よって，求める確率は  $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

2個のさいころの目の和

| B<br>A \ B                                                                        |  |  |  |  |  |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  | 2                                                                                  | 3                                                                                   | 4                                                                                   | 5                                                                                   | 6                                                                                   | 7                                                                                   |
|  | 3                                                                                  | 4                                                                                   | 5                                                                                   | 6                                                                                   | 7                                                                                   | 8                                                                                   |
|  | 4                                                                                  | 5                                                                                   | 6                                                                                   | 7                                                                                   | 8                                                                                   | 9                                                                                   |
|  | 5                                                                                  | 6                                                                                   | 7                                                                                   | 8                                                                                   | 9                                                                                   | 10                                                                                  |
|  | 6                                                                                  | 7                                                                                   | 8                                                                                   | 9                                                                                   | 10                                                                                  | 11                                                                                  |
|  | 7                                                                                  | 8                                                                                   | 9                                                                                   | 10                                                                                  | 11                                                                                  | 12                                                                                  |

練習 1.33 3枚の硬貨を同時に投げるとき，そのうち1枚だけ表が出る確率を求めよ．

解

練習 1.34 2個のさいころを同時になげるとき，次の場合の確率を求めよ． 解

- (1) 目の和が7になる．                      (2) 2個とも偶数の目が出る．

深化 1.3 例 1.13 について，次の考え方は誤りである．その理由を説明せよ． 解

さいころの目の和は2から12までの11通りであるから，目の和が5になる確率は  $\frac{1}{11}$  である．

**例題 1.8** A, B の 2 人を含む 6 人のリレー選手がいる. 走る順番をくじ引きで決めるとき, A が 1 番目, B が 6 番目になる確率を求めよ. [S]

**解答** 6 人全員の並び方は,  $6!$  通りある.

A が 1 番目, B が 6 番目のとき, A, B 以外の 4 人の並び順は,  $4!$  通りある.

よって, 求める確率は  $\frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$

**練習 1.35** A, B の 2 人を含む 4 人が, くじ引きで順番を決めて横 1 列に並ぶとき, 次の場合の確率を求めよ. [解]

- (1) A が左端に並ぶ. (2) B が左端, A が右端に並ぶ.

**例題 1.9** 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った袋から, 2 個の玉を取り出すとき, 赤玉 1 個, 白玉 1 個が出る確率を求めよ. [S]

**解答** 全部の 9 個から 2 個取る組合せは,  ${}_9C_2$  通りある.

赤玉 4 個から 1 個, 白玉 5 個から 1 個取る組合せは,  ${}_4C_1 \times {}_5C_1$  通りある.

よって, 求める確率は

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_5C_1}{{}_9C_2} = 4 \times 5 \times \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 8} = \frac{5}{9}$$

**練習 1.36** 大人 6 人, 子ども 4 人の合計 10 人の中から抽選で 4 人を選ぶとき, 次のように選ばれる確率を求めよ. [解]

- (1) 大人が 2 人, 子どもが 2 人 (2) 全員が子ども

## 1.2.2 確率の基本性質

集合の性質を使って確率の基本性質を明らかにし、複雑な事象の確率を求める際に、その性質を利用してみよう。

## A》積事象と和事象

確率の基本性質を調べる前に、事象  $A$ ,  $B$  に対して、次のような事象を定義しておく。

| 用語             | 意味                  | 記号         |
|----------------|---------------------|------------|
| $A$ , $B$ の積事象 | $A$ と $B$ がともに起こる事象 | $A \cap B$ |
| $A$ , $B$ の和事象 | $A$ または $B$ が起こる事象  | $A \cup B$ |

例 1.14 事象  $A$ ,  $B$  の積事象  $A \cap B$  と和事象  $A \cup B$  S

1 個のさいころを投げるとき、

「偶数の目が出る」という事象を  $A$ ,

「2 以下の目が出る」という事象を  $B$

とする。

積事象  $A \cap B$  は

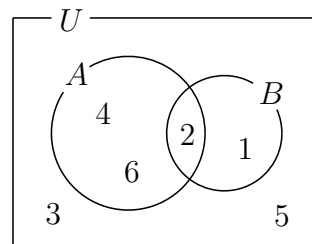
「偶数かつ 2 以下の目が出る」,

和事象  $A \cup B$  は

「偶数または 2 以下の目が出る」

という事象であり、それぞれ次のような集合で表される。

$$A \cap B = \{2\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$$



**練習 1.37** 1 から 10 までの番号札 10 枚から 1 枚引くとき、「奇数番号を引く」という事象を  $A$ , 「7 以上の番号を引く」という事象を  $B$  とするとき、積事象  $A \cap B$ , 和事象  $A \cup B$  を集合で表せ。 解

## B》排反事象

2つの事象  $A, B$  が決して同時に起こらないこともある。このとき、

$A, B$  は互いに排反である

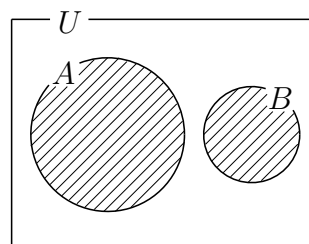
または、

$A, B$  は互いに排反事象である

という。

$A, B$  が互いに排反であるとは、 $A \cap B = \phi$  と同じことである。

空集合  $\phi$  で表される事象を空事象<sup>くうじしやう</sup>という。空事象とは決して起こらない事象である。



**練習 1.38** 1個のさいころを投げるとき、「偶数の目が出る」という事象を  $A$ , 「2以下の目が出る」という事象を  $B$ , 「3の倍数の目が出る」という事象を  $C$  とする。どの事象とどの事象が互いに排反であるか。 [解](#)

## C》確率の基本性質

1つの試行における全事象  $U$  と事象  $A$  の要素の個数について、

$$0 \leq n(A) \leq n(U) \quad \leftarrow A = \phi \text{ のとき } n(A) = 0$$

が成り立つ。各辺を  $n(U)$  で割ると

$$0 \leq \frac{n(A)}{n(U)} \leq 1 \quad \leftarrow n(U) \text{ は正の数}$$

よって

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

とくに、 $\phi$ , 全事象  $U$  について  $P(\phi) = 0$ ,  $P(U) = 1$  である。

また、事象  $A, B$  が互いに排反であるとき、 $A \cap B = \phi$  であるから、10 ページで学んだことにより、次の等式が成り立つ。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

よって、両辺を  $n(U)$  で割れば、次の等式が得られる。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

これまでに得られた確率の性質をまとめると、次のようになる。

確率の基本性質

- 1 どんな事象  $A$  についても  $0 \leq P(A) \leq 1$
- 2 空事象  $\phi$  について  $P(\phi) = 0$ , 全事象  $U$  について  $P(U) = 1$
- 3  $A, B$  が互いに排反であるとき  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

上の 3 を、確率の加法定理という。

3つ以上の事象について、どの2つの事象も互いに排反であるとき、これらは互いに排反であるという。3つ以上の排反な事象についても、2つの場合の加法定理と同様なことが成り立つ。

例 1.15 確率の加法定理の利用 S

1等から4等の当たる確率が、右のようなくじ引きがある。

このくじを1本引くとき、各等が当たる事象は互いに排反である。

|    | 1等              | 2等              | 3等               | 4等               |
|----|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| 確率 | $\frac{2}{100}$ | $\frac{5}{100}$ | $\frac{10}{100}$ | $\frac{20}{100}$ |

このくじを1本引くとき、1等または2等が当たる確率は

$$\frac{2}{100} + \frac{5}{100} = \frac{7}{100}$$

← 確率の加法定理

また、1等から3等までのいずれかが当たる確率は

$$\frac{2}{100} + \frac{5}{100} + \frac{10}{100} = \frac{17}{100}$$

練習 1.39 例 1.15 のくじを1本引くとき、次の場合の確率を求めよ。 解

- (1) 3等または4等が当たる。
- (2) 2等から4等までのいずれかが当たる。

例題 1.10 赤玉 4 個，白玉 5 個の入った袋から，2 個の玉を同時に取り出すとき，2 個が同じ色である確率を求めよ. S

解答 「2 個が同じ色である」という事象は，

「2 個とも赤玉である」という事象  $A$ ，

「2 個とも白玉である」という事象  $B$

の和事象  $A \cup B$  である.

$A$ ， $B$  は互いに排反であるから，加法定理により

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) = \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} + \frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} \\ &= \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

練習 1.40 赤玉 2 個，白玉 3 個，青玉 4 個の入った袋から，3 個の玉を同時に取り出すとき，3 個とも同じ色である確率を求めよ. 解

## D》余事象とその確率

全事象を  $U$  とする. 事象  $A$  に対して，「 $A$  が起こらない」という事象を， $A$  の余事象といい， $\bar{A}$  で表す.  $A$ ， $\bar{A}$  は互いに排反である.

加法定理により

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

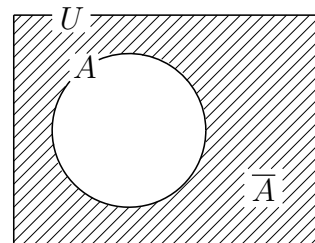
一方， $A \cup \bar{A} = U$  であるから

$$P(A \cup \bar{A}) = P(U) = 1$$

したがって，次のことがいえる.

余事象と確率

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \text{すなわち} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

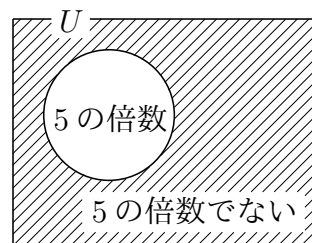


例 1.16 1 から 100 までの 100 枚の番号札から 1 枚引くとき, 5 の倍数でない番号を引く確率を求める. S

「5 の倍数でない」という事象は,  
「5 の倍数である」という事象の  
余事象である.

5 の倍数の番号を引く確率は  $\frac{20}{100}$   
よって, 求める確率は

$$1 - \frac{20}{100} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$



練習 1.41 1 から 200 までの 200 枚の番号札から 1 枚引くとき, 3 の倍数でない番号を引く確率を求めよ. 解

応用例題 1.10 1 から 9 までの番号札 9 枚から 4 枚を同時に引くとき, 少なくとも 1 枚が偶数の番号である確率を求めよ. S

考え方》「少なくとも 1 枚が偶数」という事象は, 「偶数が 1 枚もない」すなわち  
「4 枚とも奇数」という事象の余事象である.

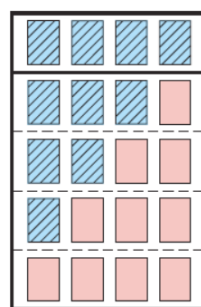
解答 奇数の札は 5 枚ある. よって, 4 枚とも  
奇数である確率は

$$\frac{{}_5C_4}{{}_9C_4} = \frac{5}{126}$$

もとめるのは, この余事象の確率であ  
るから

$$1 - \frac{5}{126} = \frac{121}{126}$$

■ は奇数, ■ は偶数



少なくとも  
1 枚が偶数

練習 1.42 2 個のさいころを同時に投げるとき, 次の場合の確率を求めよ. 解

- (1) 少なくとも 1 個は 2 の目が出る.
- (2) 異なる目が出る.

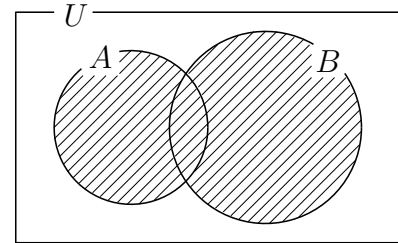
## E》一般の和事象の確率

全事象を  $U$  とする. 2つの事象  $A, B$  について, 確率  $P(A \cup B)$  を考えてみよう.  
10 ページで学んだように, 等式

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成り立つ.

よって, 両辺を  $n(U)$  で割れば, 次の等式が得られる.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

例 1.17 1 から 30 までの番号札から 1 枚引くとき, その番号が 2 の倍数または 3 の倍数である確率を求める. S

引いた札の番号が 2 の倍数であるという事象を  $A$ , 3 の倍数であるという事象を  $B$  とすると, 求める確率は  $P(A \cup B)$  である.

$$\begin{aligned} \text{ここで } A &= \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, 2 \cdot 15\}, \\ B &= \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 10\}, \\ A \cap B &= \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, 6 \cdot 3, 6 \cdot 4, 6 \cdot 5\} \end{aligned}$$

$$\text{であるから } n(A) = 15, \quad n(B) = 10, \quad n(A \cap B) = 5$$

よって, 番号が 2 の倍数または 3 の倍数である確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

練習 1.43 1 から 50 までの 50 枚の番号札から 1 枚引くとき, その番号が次のような数である確率を求めよ. 解

- (1) 3 の倍数または 4 の倍数
- (2) 3 の倍数でも 4 の倍数でもない数

## 1.2.3 独立な試行と確率

これまでは、1つの試行における事象の確率を考えてきた。ここでは、複数の試行を行うときの確率を考えよう。

## A》独立な試行の確率

A, Bの2人がさいころを投げるとする。このとき、Aがさいころを投げる試行と、Bがさいころを投げる試行では、それぞれの結果は互いに影響を与えない。

このように、いくつかの試行において、どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき、これらの試行は独立であるという。

たとえば、Aが1個のさいころを投げる試行と、Bが1個のさいころを投げる試行は独立である。2つの試行の結果は $6 \times 6$ 通りあり、それらは同様に確からしい。このうち、  
このうち、

「Aは1の目が出る」

「Bは1以外の目が出る」

という2つの事象が同時に起こる場合は、 $1 \times 5$ 通りある。

よって、それが起こる確率  $p$  は

$$p = \frac{1 \times 5}{6 \times 6} = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$$

| A \ B | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| 1     | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 2     | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 3     | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 4     | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 5     | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 6     | ● | ● | ● | ● | ● | ● |

のように表される。

この確率  $p$  は、次のような2つの確率の積になっているといえる。

Aが1個のさいころを投げるときに、1の目が出る確率  $\frac{1}{6}$

Bが1個のさいころを投げるときに、1以外の目が出る確率  $\frac{5}{6}$

一般に、独立な2つの試行における事象の確率について、次のことが成り立つ。

## 独立な試行の確率

2つの試行SとTが独立であるとき、Sで事象Aが起こり、かつTで事象Bが起こる確率  $p$  は、 $P(A)$  と  $P(B)$  の積に等しい。

すなわち  $p = P(A) \times P(B)$

独立な3つ以上の試行についても、上と同様なことが成り立つ。

例 1.18 1 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げるときの確率 S

これらの 2 つの試行は独立である.

たとえば, 「硬貨は表が出て, さいころは 5 以上の目が出る」

という事象の確率は  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

練習 1.44 2 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げるとき, 次の場合の確率を求めよ. 解

- (1) 硬貨は 2 枚とも表が出て, さいころは偶数の目が出る.
- (2) 硬貨は 1 枚だけ表が出て, さいころは 2 以下の目が出る.

例 1.19 1 個のさいころを 3 回続けて投げるときの確率 S

たとえば, 3 回続けて 1 以外の目が出る確率は

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率は

$$1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

← 余事象は,  
「3 回続けて  
1 以外の目が出  
る」

練習 1.45 1 枚の硬貨を 3 回続けて投げるとき, 次の確率を求めよ. 解

- (1) 3 回とも表が出る確率
- (2) 少なくとも 1 回は裏が出る確率

**例題 1.11** Aの袋には赤玉3個と白玉2個，Bの袋には赤玉2個と白玉4個が入っている．A，Bの袋から1個ずつ玉を取り出すとき，次の確率を求めよ． S

- (1) ともに赤玉を取り出す確率
- (2) 同じ色の玉を取り出す確率

**解答** Aの袋から玉を1個取り出す試行と，Bの袋から玉を1個取り出す試行は独立である．

- (1) Aの袋から赤玉を取り出す確率は  $\frac{3}{5}$   
 Bの袋から赤玉を取り出す確率は  $\frac{2}{6}$   
 よって，ともに赤玉を取り出す確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$$

- (2) 同じ色が赤の場合と白の場合がある．

ともに赤玉を取り出す確率は，(1)により  $\frac{1}{5}$   
 ともに白玉を取り出す確率は  $\frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{15}$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

**練習 1.46** 例題 1.11 において，次の確率を求めよ． 解

- (1) Aから赤玉，Bから白玉を取り出す確率
- (2) A，Bから取り出す玉の色が異なる確率

## B》反復試行の確率

1個のさいころを続けて3回投げるとき、6の目がちょうど1回出る確率を求めてみよう。さいころを投げる3回の試行は独立である。

たとえば、1回目に6の目が出て、2回目と3回目はどちらも6以外の目が出る事象の確率は、次のようになる。

$$\frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)$$

また、3回のうち1回6の目が出る事象は、 ${}_3C_1$ 通りある。

これらの事象は互いに排反であり、どの事象の確率も  $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$  である。

よって、求める確率は、次のように計算される。

$${}_3C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

$${}_3C_1 \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} \text{1回目} & \text{2回目} & \text{3回目} & \text{確率} \\ \hline \bigcirc & \times & \times & \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \\ \hline \times & \bigcirc & \times & \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \\ \hline \times & \times & \bigcirc & \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

■表の説明■

○は6の目が出ること、  
×は6以外の目が出ることを表す。

1個のさいころを何回か繰り返し投げる場合などのように、同じ条件のもとでの試行の繰り返しを反復試行という。1つの試行を何回か繰り返すとき、これらの試行は独立である。

反復試行の確率について、一般に次のことがいえる。

反復試行の確率

1回の試行で事象  $A$  の起こる確率を  $p$  とする。この試行を  $n$  回行う反復試行で、 $A$  がちょうど  $r$  回起こる確率は  ${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$

←  $A$  が  $r$  回起こり、  
 $\bar{A}$  が  $(n-r)$  回  
起こる確率

注意 一般に、正の数  $a$  に対して、 $a^0 = 1$  と定める。

例 1.20 1枚の硬貨を5回投げて表がちょうど2回出る確率 S

硬貨を1回投げるとき、表が出る確率は  $\frac{1}{2}$

よって、5回投げて表がちょうど2回出る確率は

$$\begin{aligned} {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-2} &= 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

← 表が2回出て、裏が3回出る。

練習 1.47 1個のさいころを4回投げるとき、1の目がちょうど3回出る確率を求めよ. 解

例題 1.12 赤玉2個，白玉4個の入った袋から玉を1個取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を6回行うとき，次の確率を求めよ. S

- (1) 赤玉が5回以上出る確率
- (2) 6回目に3度目の赤玉が出る確率

解答 (1) 1回の試行で，赤玉が出る確率は  $\frac{1}{3}$

6回のうち赤玉が5回以上出るのは，次の場合である．

赤玉がちょうど5回出る または 赤玉が6回出る

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$${}_6C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{6-5} + \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{13}{729}$$

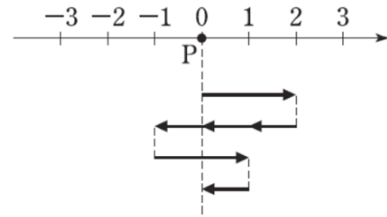
- (2) 5回目までに赤玉がちょうど2回出て，6回目に3度目の赤玉が出る確率であるから

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-2} \times \frac{1}{3} = 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{80}{729}$$

練習 1.48 赤玉6個と白玉4個の入った袋から玉を1個取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を5回行うとき，次の確率を求めよ. 解

赤玉が4回以上出る確率                      5回目に2度目の赤玉が出る．

**応用例題 1.11** 数直線上を動く点 P が原点の位置にある．1 枚の硬貨を投げて，表が出たときは P を正の向きに 2 だけ進め，裏が出たときは P を負の向きに 1 だけ進める．硬貨を 6 回投げ終わったとき，P が原点にもどっている確率を求めよ． S



**考え方** 》 6 回のうち，表の回数を  $r$  回とすると，裏の回数は  $(6 - r)$  回である．よって，6 回投げ終わったときの P の座標は  $2r + (-1)(6 - r)$  である．

**解答** 硬貨を 1 回投げるとき，表が出る確率は  $\frac{1}{2}$

6 回のうち，表が  $r$  回出るとすると，裏は  $(6 - r)$  回出るから，6 回で原点にもどるのは

$$2r + (-1)(6 - r) = 0$$

が成り立つときである．

これを解くと  $r = 2$

よって，P が原点にもどっているのは 6 回のうち表がちょうど 2 回出るときである．したがって，求める確率は

$${}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-2} = 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$$

**練習 1.49** 数直線上を動く点 P が原点の位置にある．1 枚の硬貨を投げて，表が出たときは P を正の向きに 2 だけ進め，裏が出たときは P を負の向きに 3 だけ進める．硬貨を 5 回投げ終わったとき，P が原点にもどっている確率を求めよ． 解

## 1.2.4 条件付き確率

2つの事象  $A$ ,  $B$  について,  $A$  が起こったとして, そのときに  $B$  の起こる確率を考えてみよう.

## A》条件付き確率

例 1.21 箱の中に, 1 から 7 までの青色の番号札 7 枚と, 8 から 12 までの白色の番号札 5 枚が入っている. この箱から番号札を 1 枚引くとき, S

それが

青色の札であるという事象を  $A$ ,  
偶数の札であるという事象を  $B$

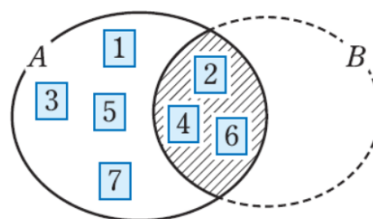
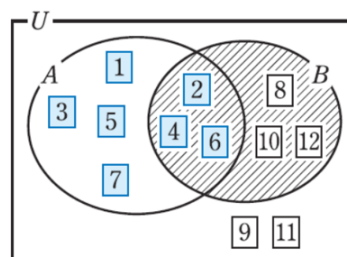
とする.

(1) 事象  $B$  の起こる確率は

$$P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

(2) 引いた番号札が青色であることが  
わかっているとき, その番号が偶  
数である確率  $p$  を考える. 青色の  
札は 7 枚あり, その中で番号が偶  
数である札は 3 枚あるから

$$p = \frac{3}{7}$$



一般に, 1つの試行における2つの事象  $A$ ,  $B$  について, 事象  $A$  が起こったとして, そのときに事象  $B$  の起こる確率を,  $A$  が起こったときの  $B$  が起こる条件付き確率 といひ,  $P_A(B)$  で表す.

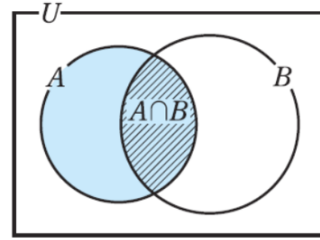
例 1.21 においては,  $P_A(B) = p = \frac{3}{7}$  である.

練習 1.50 例 1.21 において, 条件付き確率  $P_B(A)$  を求めよ. 解

全事象を  $U$  とする. 2つの事象  $A, B$  について, 条件付き確率  $P_A(B)$  は,

$A$  を全事象としたときに,  
事象  $B$  の起こる確率

であり, 次の式で定義される. ただし,  
 $n(A) \neq 0$  とする.



$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \quad (1.2)$$

(1.2) の分母と分子を, それぞれ  $n(U)$  で割ると, 次の等式が得られる.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (1.3)$$

**例題 1.13** ある博物館の入館者のうち, 全体の 20% が高校生で, 全体の 15% が前売り券で入館した高校生である. 入館した高校生の中から 1 人を選び出すとき, その人が前売り券で入館している確率を求めよ. S

**解答** 入館者全体から選び出された 1 人が, 高校生であるという事象を  $A$ , 前売り券で入館しているという事象を  $B$  とすると

$$P(A) = \frac{20}{100}, \quad P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

よって, 求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{15}{100} \div \frac{20}{100} = \frac{3}{4}$$

**練習 1.51** 大人と子どもの人数の比が 3 : 2 であるグループに, ある提案をしたところ, 子どもで賛成した人数は全体の 15% であった. このグループの子どもの中から 1 人を選び出すとき, その人が提案に賛成である確率を求めよ. 解

## B 》 確率の乗法定理

前ページの条件付き確率の式 (1.3) において、分母を払って得られる等式から、次の確率の乗法定理が成り立つ。

乗法定理

2つの事象  $A$ ,  $B$  がともに起こる確率  $P(A \cap B)$  は

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

例 1.22 当たりくじ 4 本を含む 10 本のくじを、 $A$ ,  $B$  の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く。ただし、引いたくじはもとにもどさない。この試行において、 $A$ ,  $B$  の 2 人とも当たる確率を求める。 S

$A$  が当たるという事象を  $A$ ,

$B$  が当たるという事象を  $B$

とすると、求める確率  $P(A \cap B)$  は、乗法定理により

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

$A$  が当たったときに、残りのくじは 9 本で当たりくじ 3 本を含むから、条件付き確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{3}{9}$$

$$\text{よって} \quad P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

補足 この試行の全事象を  $U$  とすると、

$$n(U) = 10 \times 9, \quad n(A \cap B) = 4 \times 3$$

である。このことから、次がいえ。

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{4 \times 3}{10 \times 9} = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}$$

練習 1.52 例 1.22 において、次の確率を求めよ。 解

- (1)  $A$  が当たり、 $B$  がはずれる確率
- (2)  $A$  がはずれ、 $B$  が当たる確率
- (3) 2 人ともはずれる確率

3つ以上の事象の場合についても、前ページで述べた乗法定理と同様なことが成り立つ。たとえば、例 1.22 のくじを、A, B, C の3人がこの順に1本ずつ引くとき、3人とも当たる確率は、次のように計算される。

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

**練習 1.53** 赤玉3個、白玉10個の入った袋から、玉を1個ずつ3個取り出す。ただし、取り出した玉はもとにもどさない。このとき、取り出した玉がすべて赤玉である確率を求めよ。 解

**例題 1.14** 当たりくじ3本を含む10本のくじを、A, Bの2人がこの順に1本ずつ引く。ただし、引いたくじはもとにもどさない。このとき、Bが当たる確率を求めよ。 S

**解答** Bが当たるという事象は、次の2つの事象の和事象である。

[1] Aが当たり、Bも当たる場合。

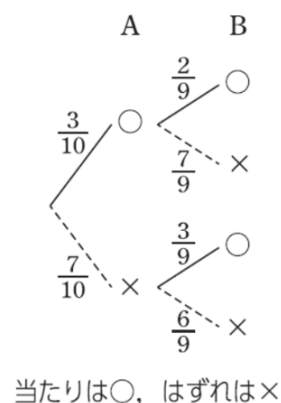
その確率は  $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$

[2] Aがはずれ、Bが当たる場合。

その確率は  $\frac{7}{10} \times \frac{3}{9}$

[1], [2] は互いに排反であるから、  
Bが当たる確率は

$$\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{3}{10}$$



**補足** 上の計算では、途中で約分せずに最後にまとめて約分するのがよい。和を求めるときに、分母が同じになり、計算しやすい。

**練習 1.54** 当たりくじ5本を含む12本のくじを、A, Bの2人がこの順に1本ずつ引く。ただし、引いたくじはもとにもどさない。このとき、Bが当たる確率を求めよ。 解

## 研究

## くじ引きの確率

10本のくじがあり、そのうちの3本が当たりであるとする。このくじを、AとBの2人が順に1本ずつ引くとき、Bが当たる確率を考えてみよう。

[1] Aが当たり、Bも当たる場合

Bは当たり2本を含む9本のくじから1本を引く。

そのとき、Bの当たる確率は  $\frac{2}{9}$

[2] Aがはずれ、Bが当たる場合

Bは当たり3本を含む9本のくじから1本を引く。

そのとき、Bの当たる確率は  $\frac{3}{9}$

[1] が起こる確率は、10本から2本取って並べるときに2本とも当たりが並ぶ確率  $\frac{3 \times 2}{10 \times 9}$  に等しい。すなわち、[1] が起こる確率は、次のような2つの確率の積になっている。

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Aが当たる} \\ \text{確率} \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{c} \text{そのときBが} \\ \text{当たる確率} \end{array} \right] = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$$

また、[2] が起こる確率は、次のような確率の積になっている。

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Aがはずれる} \\ \text{確率} \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{c} \text{そのときBが} \\ \text{当たる確率} \end{array} \right] = \frac{7}{10} \times \frac{2}{9}$$

[1] と [2] は同時には起こらないから、Bが当たる確率は

$$\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{3}{10} \quad \leftarrow \text{Aが当たる確率に等しい}$$

一般に、くじが当たる確率は引く順番に関係なく一定である。

**研究** 原因の確率

条件付き確率の考え方を利用して、次のような問題について考えよう。

**Ex 1.4** ある製品を製造する機械 A, B があり, 不良品の発生する割合は, A では 0.1%, B では 0.2% であるという. A からの製品と B からの製品が 3 : 1 の割合で大量に混ざっている中から 1 個を選び出すとき, それが不良品であるという事象を  $E$  とする.

(1) 確率  $P(E)$  を求めよ.

(2) 事象  $E$  が起こった原因が, 機械 A にある確率を求めよ.

**解答** (1) 選び出した 1 個が, A の製品であるという事象を  $A$ , B の製品であるという事象を  $B$  とすると

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{4}, \quad P_A(E) = \frac{1}{1000}, \quad P_B(E) = \frac{2}{1000}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad P(E) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{1000} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{1000} = \frac{5}{4000} = \frac{1}{800}$$

(2) 求めるのは条件つき確率  $P_E(A)$  であるから

$$P_E(A) = \frac{P(E \cap A)}{P(E)} = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{3}{4000} \div \frac{5}{4000} = \frac{3}{5}$$

**補足** Ex1.4(2) で求めた  $P_E(A)$  を原因の確率ということがある.

**演習 1.4** ある集団は 2 つのグループ A, B から成り, A の占める割合は 20% である. また, 事象  $E$  が発生する割合が, A では 2%, B では 3% である. この集団から選び出した 1 個について, 事象  $E$  が発生する確率を求めよ. また, 事象  $E$  が発生したときに, 選び出された 1 個が A のグループに属している確率を求めよ. 解

## 直感と確率 (モンティ・ホール問題)

次のようなゲームを考えてみましょう。

3つあるドアの1つだけに賞品が隠されています (残り2つのドアははずれ)。挑戦者であるあなたは、3つのドアのうち1つを開けて、賞品があればもらうことができます。

まず、あなたはドアを1つ選びます。そして、司会者は残った2つのドアのうち、はずれのドアを1つ開けます。ここで、はずれのドアを開けた司会者はあなたに尋ねます。

「賞品を得られる確率を上げるために、開けるドアを変更しますか。変更しませんか。」

これは、実際のアメリカのテレビ番組で行われていたゲームです。

さてあなたならどうしますか。

司会者がはずれのドアを1つ開けた時点で、残りの2つのドアのいずれかに賞品があるのですから、どちらを選んでも確率は $\frac{1}{2}$ と考えるかもしれません。

当時、あるコラムニストが「ドアを変更した方が賞品を得る確率が2倍になる」と連載していたコラムに書いたことから、「その解答は誤りである」という投書が殺到しました。

どちらが正しいでしょうか。[直観と確率]

**演習 1.5** 開けるドアを変更して商品を得る確率と、変更しないで商品を得る確率を求めてみよう。どちらの確率が大きいのだろうか。 解

### 1.2.5 期待値

宝くじの1等賞金は高額であるが、それが当たる確率はかなり小さい。そして、2等、3等では賞金額は下がるが、当たる確率は大きくなる。

このようなくじでは、賞金の総額をくじの総数で割った平均の値に意味がある。この値と確率の関係を調べてみよう。

#### A》期待値

1000本のくじがあり、その賞金および本数は右の表のようになっている。

このくじを1本引くとき、期待できる賞金の額を考えてみよう。

このくじ1000本の賞金の総額は

$$10000 \times 1 + 1000 \times 5 + 100 \times 50 + 0 \times 944$$

|     | 賞 金     | 本 数    |
|-----|---------|--------|
| 1 等 | 10000 円 | 1 本    |
| 2 等 | 1000 円  | 5 本    |
| 3 等 | 100 円   | 50 本   |
| はずれ | 0 円     | 944 本  |
| 計   |         | 1000 本 |

である。これを、くじの総数で割ると

$$\frac{1}{1000}(10000 \times 1 + 1000 \times 5 + 100 \times 50 + 0 \times 944) = 20 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。すなわち、くじ1本当たりの賞金額は20円と考えられる。

右上の表を、確率を示す表に書き換えると、次のようになる。

| 賞 金 | 10000 円          | 1000 円           | 100 円             | 0 円                | 計 |
|-----|------------------|------------------|-------------------|--------------------|---|
| 確 率 | $\frac{1}{1000}$ | $\frac{5}{1000}$ | $\frac{50}{1000}$ | $\frac{944}{1000}$ | 1 |

また、上の等式①は、次のように書き表すこともできる。

$$10000 \times \frac{1}{1000} + 1000 \times \frac{5}{1000} + 100 \times \frac{50}{1000} + 0 \times \frac{944}{1000} = 20$$

したがって、この等式の左辺は、賞金の額とそれが当たる確率の積をすべて加えたものになっていることがわかる。

一般に、ある試行の結果に応じて、 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  のどれか1つの値をとる数量  $X$  があり、各値をとる確率が

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \quad \text{ただし} \quad p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

である<sup>5</sup>とき、 $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_np_n$  を数量  $X$  の期待値という。

<sup>5</sup>  $X$  がとる値を並べたとき、 $k$  番目の値を  $x_k$  と表し、 $X$  の値が  $x_k$  となる確率を  $p_k$  と表している。

## 期待値

$X$  のとる値と確率が右の表のよう  
なとき,  $X$  の期待値は, 次の式で  
与えられる.

|     |       |       |       |          |       |   |
|-----|-------|-------|-------|----------|-------|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\cdots$ | $x_n$ | 計 |
| 確率  | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\cdots$ | $p_n$ | 1 |

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n$$

例 1.23 1個のさいころを投げるとき, 出る目の期待値を求める. S

どの目が出る確率も

$$\frac{1}{6}$$

|    |               |               |               |               |               |               |   |
|----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---|
| 目  | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             | 計 |
| 確率 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

である.

よって, 出る目の期待値は

$$\begin{aligned} 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

練習 1.55 2個のさいころを投げて出る目の和を考える. 下の表を完成させて, 出る目の和の期待値を求めよ. 解

|    |                |                |                |                |   |                |   |   |                |                |                |   |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|---|----------------|---|---|----------------|----------------|----------------|---|
| 和  | 2              | 3              | 4              | 5              | 6 | 7              | 8 | 9 | 10             | 11             | 12             | 計 |
| 確率 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ |   | $\frac{6}{36}$ |   |   | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

練習 1.56 5枚の硬貨を同時に投げて, 表の出た硬貨の枚数が5, 4, 3の場合に, それぞれ得点 40, 16, 4 を得るが, それ以外の場合には得点は得られないとする. 得点の期待値を求めよ. 解

**B》期待値の応用**

期待値の考えを、結果が不確実な状況下において、どの選択が有利かを判断する際の基準として利用することができる。

**例題 1.15** 次の [1] , [2] の 2 つの場合のいずれかが選べるとき、どちらを選んだ方が、得られる金額の期待値が大きいか. S

[1] 確実に 30000 円得られる場合

[2] 40000 円得られる確率が 0.8 で、何も得られない確率が 0.2 である場合

**解答** [1] を選んだときの期待値は 30000 円

[2] を選んだときの期待値は

$$40000 \times 0.8 + 0 \times 0.2 = 32000 \quad \text{すなわち} \quad 32000 \text{ 円}$$

よって, [2] を選ぶ方が期待値が大きい.

**練習 1.57** 次の [1] ~ [3] の 3 つの場合の中で、得られる金額の期待値が最も大きいのはどれか. 解

[1] 確実に 600 円得られる場合

[2] 硬貨を 1 枚投げて、表が出たら 1000 円、裏が出たら 500 円得られる場合

[3] さいころを 1 回投げて、200 円に出た目を掛けた金額が得られる場合

応用例題 1.12 赤玉2個と白玉3個が入った袋から、3個の玉を同時に取り出し、出た赤玉1個につき100円もらえるゲームがある。このゲームの参加料が150円であるとき、このゲームに参加することは得であるといえるか。 S

考え方》受け取る金額の期待値が参加料より大きいときに得であると判定する。

解答 出る赤玉の個数は、0, 1, 2のいずれかである。

$$\text{赤玉が0個の確率は} \quad \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{10}$$

$$\text{赤玉が1個の確率は} \quad \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_2}{{}_5C_3} = \frac{6}{10}$$

$$\text{赤玉が2個の確率は} \quad \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_3} = \frac{3}{10}$$

よって、受け取る金額を  $X$  円とすると、次のような表ができる。

| $X$ | 0              | 100            | 200            | 計 |
|-----|----------------|----------------|----------------|---|
| 確率  | $\frac{1}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | 1 |

したがって、ゲームに参加したときの受け取る金額の期待値は

$$0 \times \frac{1}{10} + 100 \times \frac{6}{10} + 200 \times \frac{3}{10} = 120$$

よって、受け取る金額の期待値がゲームの参加料150円より小さいから、このゲームに参加することは得であるとはいえない。

練習 1.58 50円硬貨3枚を同時に投げて、表が出た硬貨を全部もらえるゲームがある。1回のゲームで、受け取る金額の期待値を求めよ。また、このゲームの参加料が1回80円するとき、このゲームに参加することは得といえるか。 解

## 1.2.6 問題

問題 1.9 A, B, C の 3 人がじゃんけんを 1 回行うとき, 次の確率を求めよ. 解

- (1) A だけが勝つ確率                      (2) 全員が違う手を出す確率                      → p.41,43  
 (3) 誰も勝たない, すなわちあいこになる確率

問題 1.10 10 本のくじがある. そのうち当たりくじは 1 等が 1 本, 2 等が 3 本であり, 残りははずれくじである. このくじから同時に 3 本を引くとき, 次の確率を求めよ.

- (1) 当たりくじを少なくとも 1 本引く確率 解 → p.46~48  
 (2) 1 等, 2 等, はずれくじをそれぞれ 1 本ずつ引く確率  
 (3) 2 等を 2 本以上引く確率

問題 1.11 数直線上を動く点 P が原点の位置にある. 1 個のさいころを投げて, 3 の倍数の目が出たときは P を正の向きに 1 だけ進め, 3 の倍数でない目が出たときは P を負の向きに 1 だけ進める. サイコロを 5 回投げ終わったとき, P の座標が 3 である確率を求めよ. 解 → p.55 応用例題 1.11

問題 1.12 当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじを, A, B, C の 3 人がこの順に 1 本ずつ引く. ただし, 引いたくじはもとにもどさない. このとき, 次の確率を求めよ.

- (1) A, B がはずれ, C が当たる確率      (2) C が当たる確率 解 p.58,59

問題 1.13 三者択一式の問題が 6 問続けて出題される. どの問題でもでたらめに答えを選ぶとき, 次のものを求めよ. ただし, 各問題でどの答えを選ぶ確率も, それぞれ  $\frac{1}{3}$  と考えてよいとする. 解

- (1) 1 問だけ正解する確率                      (2) 正解する問題数の期待値

## 1.3 章末問題

### 1.3.1 章末問題 A

章末 1.1 6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 のうちの異なる 3 個を並べて, 3 桁の整数を作る. 3 桁の整数を小さい順に並べるとき, 46 番目の数を求めよ. 解

章末 1.2 大人 2 人と子ども 4 人が, 円形の 6 人席のテーブルに着席するとき, 次のような並び方は何通りあるか. 解

- (1) 大人 2 人が向かい合う.
- (2) 大人 2 人の間に子どもがちょうど 1 人入る.

章末 1.3 0000 から 9999 までの番号のうちで, 次のような番号は何個あるか. 解

- (1) 0101, 0033 のように, 同じ数字を 2 個ずつ含むもの
- (2) 1248 のように, 異なる数字が左から小さい順に並んでいるもの

章末 1.4 A の袋には白玉 3 個と黒玉 2 個, B の袋には白玉 2 個と黒玉 4 個が入っている. まず, A の袋から玉を 1 個取り出して B の袋に入れる. 次に, B の袋から玉を 1 個取り出して A の袋に入れる. このとき, 次の確率を求めよ. 解

- (1) A の袋の中の白玉の個数が増えている確率
- (2) A の袋の中の白玉の個数が変わっていない確率

章末 1.5 じゃんけんを 3 人でして, 負けた人から順に抜けていき, 最後に残った 1 人を優勝者とする. あいこも 1 回と数えるとき, 次の確率を求めよ. 解

- (1) 1 回目で優勝者が決まる確率
- (2) 1 回目終了後に 2 人残っている確率
- (3) ちょうど 3 回目で優勝者が決まる確率

章末 1.6 1 から 5 までの番号札が, それぞれ番号の数だけ用意されている. この中から 1 枚を取り出すとき, 次のどちらを選ぶ方が得といえるか. 解

- ① 出た番号と同じ枚数の 100 円硬貨をもらう.
- ② 5 の番号が出たときだけ 1000 円をもらう.

## 1.3.2 章末問題 B

章末 1.7 A, B, C, D の 4 人が品物を 1 個ずつ持ち寄り, それらを分けることにした. 各人が他の人の品物をもらうような分け方は何通りあるか. 解

章末 1.8 次の問いに答えよ. 解

- (1) 6 人が A, B の 2 部屋に入る方法は, 何通りあるか. ただし, 全員が 1 つの部屋に入ってもよい.
- (2) 6 人が 2 つの組に分かれる方法は何通りあるか.

章末 1.9 次のような整数  $x, y, z$  の組は, 全部で何個あるか. 解

- (1) 等式  $x + y + z = 5$  を満たす負でない整数  $x, y, z$  の組
- (2) 等式  $x + y + z = 10$  を満たす正の整数  $x, y, z$  の組

章末 1.10 3 個のさいころを同時に投げるとき, 次の確率を求めよ. 解

- (1) 出る目の最大値が 5 以下である確率
- (2) 出る目の最大値が 5 である確率

章末 1.11 白玉 2 個と黒玉 1 個が入っている袋 A と, 空の袋 B がある. まず, 袋 A から 1 個を取り出して袋 B に入れる. 次に, 袋 A の中の 1 個の玉と袋 B の玉の交換を 2 回行うとき, 袋 B の中に黒玉が入っている確率を求めよ. 解

章末 1.12 3 つの箱 A, B, C がある. A の中には赤玉 3 個と白玉 2 個が, B の中には赤玉 3 個と白玉 4 個が入っている. まず, A, B からそれぞれ 1 個ずつ玉を取り出して, 空箱 C の中に入れる. 次に, C から 1 個取り出した玉が赤玉であったとき, それが A から取り出した赤玉である確率を求めよ. 解

ヒント

7 4 人の品物を  $a, b, c, d$  として, 適する場合の樹形図をかく.



## 第 2 章 図形の性質

### 2.1 平面図形

#### 2.1.1 三角形の辺の比

三角形については、いろいろな興味深い性質がある．ここでは、角の二等分線と辺の交点とその辺をどのような比に分けるかについて調べよう．

A 》 線分の比と三角形の角の二等分線

$m, n$  を正の数とする．

線分 AB 上の点 P が

$$AP : PB = m : n$$

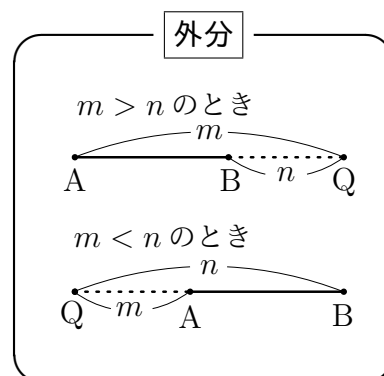
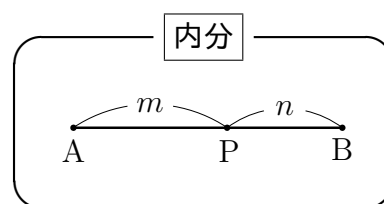
を満たすとき、点 P は線分 AB を  $m : n$  に内分するという．

次に、 $m, n$  を異なる正の数とする．

線分 AB の延長上の点 Q が

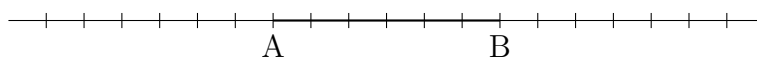
$$AQ : QB = m : n$$

を満たすとき、点 Q は線分 AB を  $m : n$  に外分するという．



練習 2.1 次の点を下の図にしるせ。 解

- (1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P
- (2) 線分 AB を 2 : 1 に外分する点 Q
- (3) 線分 BA を 2 : 1 に外分する点 R

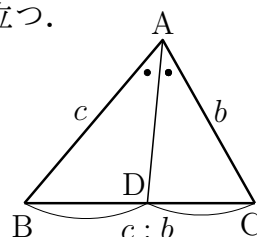


[\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

三角形の角の二等分線に関して、次の定理が成り立つ。

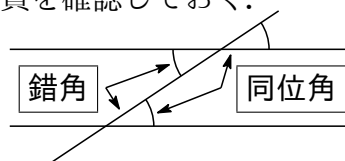
三角形の角の二等分線と比

**定理 1**  $\triangle ABC$  の  $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  との交点は、辺  $BC$  を  $AB : AC$  に内分する。  
すなわち  $BD : DC = AB : AC$



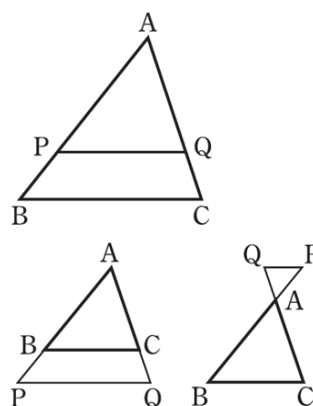
定理 1 を証明するために、平行線に関する次の性質を確認しておく。

- [1] 平行な 2 直線に 1 つの直線が交わる  
とき、同位角は等しい。  
また、錯角も等しい。



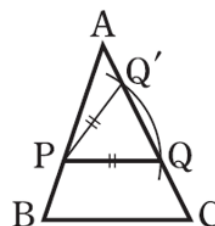
- [2]  $\triangle ABC$  において、辺  $AB$  上に点  $P$  があり、辺  $AC$  上に点  $Q$  があるとき、次が成り立つ。

1.  $PQ \parallel BC \iff AP : AB = AQ : AC$
2.  $PQ \parallel BC \iff AP : PB = AQ : QC$
3.  $PQ \parallel BC \implies AP : AB = PQ : BC$



**注意** 「 $p$  ならば  $q$ 」を「 $p \implies q$ 」と書き表す。  
また、「 $p \implies q$  かつ  $q \implies p$ 」を「 $p \iff q$ 」  
と書き表す。

**深化 2.1** 上の [2] の 3 について、逆が成り立つことを右の図を使って説明してみよう。ただし、 $PQ = PQ'$  である。 解



[定理 1 の証明]  $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とすると

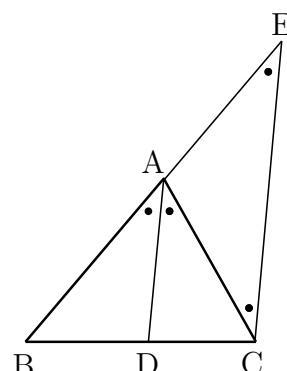
$$\angle BAD = \angle DAC \quad \dots \textcircled{1}$$

頂点  $C$  を通り直線  $AD$  に平行な直線を引き、  
辺  $AB$  の  $A$  を越える延長との交点を  $E$  とする  
と、 $AD \parallel EC$  から

$$\angle BAD = \angle AEC \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\angle DAC = \angle ACE \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ より,  $\triangle ACE$  において  
 $\angle AEC = \angle ACE$  となるから  $AE = AC$   
また,  $AD \parallel EC$  から  $BD : DC = BA : AE$   
したがって  $BD : DC = AB : AC$



証終

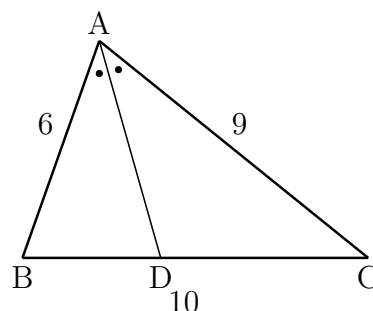
例題 2.1  $AB = 6$ ,  $BC = 10$ ,  $AC = 9$  である  $\triangle ABC$  において,  $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とする. 線分  $BD$  の長さを求めよ. S

解答  $AD$  は  $\angle A$  の二等分線であるから

$$\begin{aligned} BD : DC &= AB : AC \\ &= 6 : 9 = 2 : 3 \end{aligned}$$

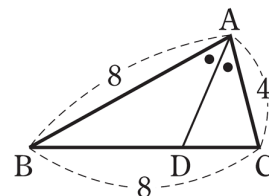
よって, 線分  $BD$  の長さは

$$BD = \frac{2}{2+3}BC = \frac{2}{5} \times 10 = 4$$



練習 2.2  $AB = 8$ ,  $BC = 8$ ,  $AC = 4$  である  $\triangle ABC$  において,  $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とする. 次のものを求めよ. 解

- (1)  $BD : DC$       (2) 線分  $BD$  の長さ



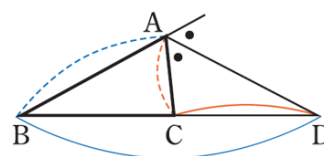
三角形の外角の二等分線に関して、次の定理が成り立つ。

三角形の外角の二等分線と比

**定理 2**  $AB \neq AC$  である  $\triangle ABC$  の  $\angle A$  の外角の二等分線と辺  $BC$  の延長との交点  $D$  は、辺  $BC$  を  $AB : AC$  に外分する。

すなわち  $BD : DC = AB : AC$

$AB > AC$  の場合



【定理 2 の証明 ( $AB > AC$  の場合)】

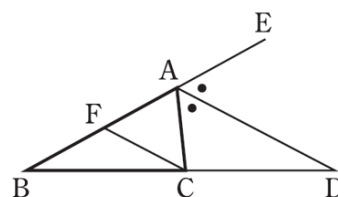
下の図のように、辺  $AB$  の  $A$  を越える延長上に点  $E$  をとると、 $AD$  は  $\angle A$  の外角の二等分線であるから

$$\angle CAD = \angle EAD \quad \dots \textcircled{1}$$

頂点  $C$  を通り直線  $AD$  に平行な直線を引き、辺  $AB$  との交点を  $F$  とすると、 $AD \parallel FC$  から

$$\angle CAD = \angle ACF \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\angle AFC = \angle EAD \quad \dots \textcircled{2}$$



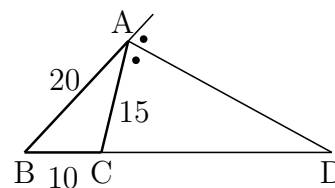
①, ②, ③ より、 $\triangle ACF$  において

$\angle ACF = \angle AFC$  となるから  $AF = AC$

また、 $AD \parallel FC$  から  $BD : DC = BA : AF$

したがって  $BD : DC = AB : AC$

**練習 2.3**  $AB = 20$ ,  $BC = 10$ ,  $AC = 15$  である  $\triangle ABC$  において、 $\angle A$  の外角の二等分線と辺  $BC$  の延長との交点を  $D$  とする。線分  $BD$  の長さを求めよ。 解



**深化 2.2** 定理 2 において、 $AB \neq AC$  としている理由を説明してみよう。 解

### 2.1.2 三角形の外心・内心・重心

三角形において、3 辺の垂直二等分線、3 つの内角の二等分線について調べてみよう。さらに、頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ 3 本の線分についても調べてみよう。それらには興味深い性質がある。ここでは、それらの性質について学ぶことにしよう。

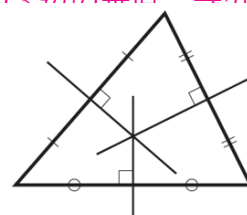
#### A 》 三角形の外心

[三角形の 3 辺の垂直二等分線]

三角形の辺の垂直二等分線について、次の定理が成り立つ。

三角形の辺の垂直二等分線

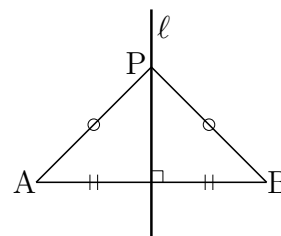
**定理 3** 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。



定理 3 を証明するために、  
次のことを確認しておく。

線分 AB の垂直二等分線  $\ell$  と点 P について、  
次が成り立つ。

点 P が  $\ell$  上にある  $\iff PA = PB$



[定理 3 の証明]

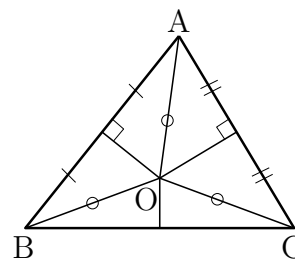
$\triangle ABC$  において、辺 AB の垂直二等分線と辺 AC の垂直二等分線の交点を O とすると

$$OA = OB, \quad OA = OC$$

よって、 $OB = OC$  となるから、O は辺 BC の垂直二等分線上にもある。

したがって、三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

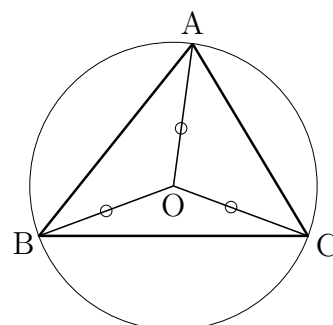
証終



$\triangle ABC$  において、3 辺の垂直二等分線が交わる点を  $O$  とすると、75 ページで示したように、点  $O$  は  $\triangle ABC$  の3つの頂点から等距離にある。よって、この点  $O$  を中心とする半径  $OA$  の円は、 $\triangle ABC$  の3つの頂点を通る。

この円を、 $\triangle ABC$  の外接円といい、外接円の中心  $O$  を  $\triangle ABC$  の外心という。

三角形の外心は、3 辺の垂直二等分線が交わる点である。



例 2.1 右の図において、点  $O$  が  $\triangle ABC$  の外心であるとき、 $\alpha$  を求める。

**S**

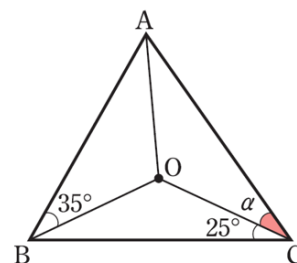
$OA = OB = OC$  であるから、 $\triangle OAB$ ,  $\triangle OBC$ ,  $\triangle OCA$  はいずれも二等辺三角形である。

よって  $\angle OAB = \angle OBA = 35^\circ$   
 $\angle OBC = \angle OCB = 25^\circ$   
 $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$

である。したがって、 $\triangle ABC$  において

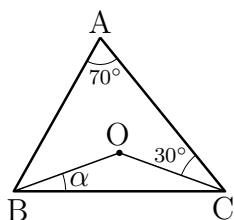
$$2(35^\circ + 25^\circ + \alpha) = 180^\circ$$

これを解いて  $\alpha = 30^\circ$

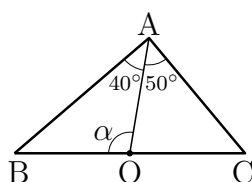


練習 2.4 下の図で、点  $O$  は  $\triangle ABC$  の外心である。  $\alpha$  を求めよ。 **解**

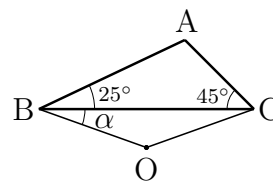
(1)



(2)



(3)



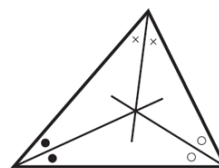
## B 》 三角形の内心

[三角形の3つの内角の二等分線]

三角形の角の二等分線について、次の定理が成り立つ.

三角形の角の二等分線

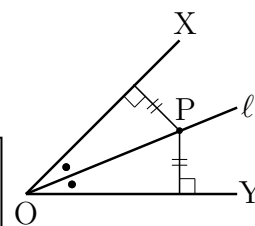
定理 4 三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる.



定理 4 を証明するために、次のことを確認しておく.

$\angle XOY$  の二等分線  $\ell$  と点  $P$  について、次が成り立つ.

点  $P$  が  $\ell$  上にある  $\iff$   $\left[ \begin{array}{l} \text{点 } P \text{ が 2 辺 } OX, OY \\ \text{から等距離にある} \end{array} \right]$



[定理 4 の証明]

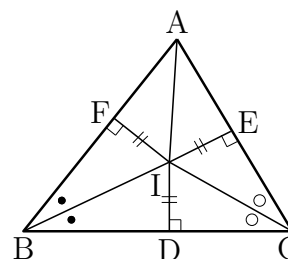
$\triangle ABC$  において、 $\angle B$  の二等分線と  $\angle C$  の二等分線の交点を  $I$  とし、 $I$  から辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  に下ろした垂線を、それぞれ  $ID$ ,  $IE$ ,  $IF$  とすると

$$IF = ID, \quad IE = ID$$

よって、 $IF = IE$  となるから、 $I$  は  $\angle A$  の二等分線上にもある.

したがって、三角形の3つの角の二等分線は1点で交わる.

証終



上の証明により、次のことがいえる.

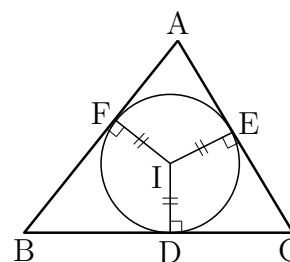
$$ID \perp BC, \quad IE \perp CA, \quad IF \perp AB$$

$$ID = IE = IF$$

よって、この点  $I$  を中心とする半径  $ID$  の円は、 $\triangle ABC$  の3辺に接する.

この円を  $\triangle ABC$  の内接円といい、点  $I$  を  $\triangle ABC$  の内心という.

三角形の内心は、3つの角の二等分線の交点である.



例 2.2 右の図において、点Iが△ABCの内心であるとき、 $\alpha$ を求める。

[S]

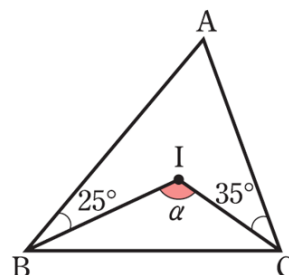
$$\angle IBC = \angle IBA = 25^\circ$$

$$\angle ICB = \angle ICA = 35^\circ$$

よって、△IBCにおいて

$$\alpha + 25^\circ + 35^\circ = 180^\circ$$

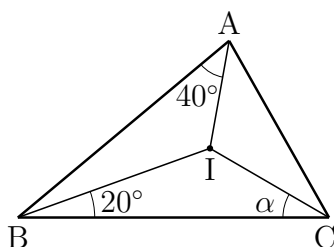
これを解いて  $\alpha = 120^\circ$



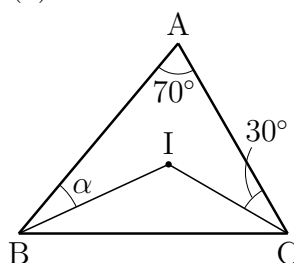
練習 2.5 下の図において、点Iは△ABCの内心である。 $\alpha$ を求めよ。

[解]

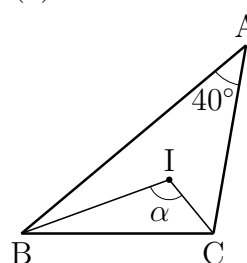
(1)



(2)



(3)



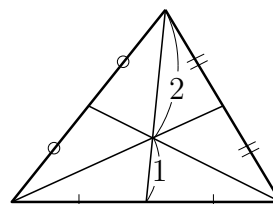
### C》三角形の重心

三角形の頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分を、三角形の中線という。三角形の中線には、次のような性質がある。

[三角形の3本の中線]

#### 三角形の中線

**定理 5** 三角形の3本の中線は1点で交わり、その点は各中線を2:1に内分する。



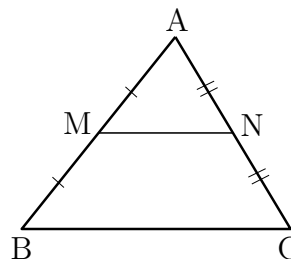
三角形の3本の中線が交わる点を、三角形の重心という。

定理5を証明するために、次の中点連結定理を確認しておく。

#### 中点連結定理

△ABCにおいて、辺AB、ACの中点を、それぞれM、Nとすると、次が成り立つ。

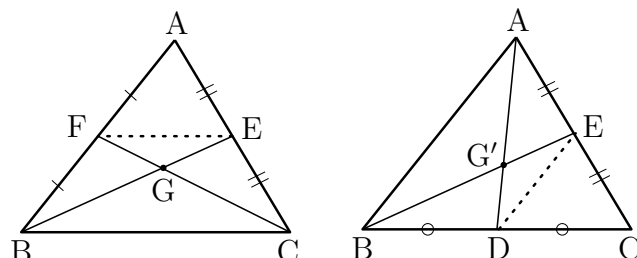
$$MN \parallel BC, \quad MN = \frac{1}{2}BC$$



[定理 5 の証明]  $\triangle ABC$  の中線  $BE$  と中線  $CF$  の交点を  $G$  とする.

また, 中線  $AD$  と中線  $BE$  の交点を  $G'$  とする.

このとき, まず 2 点  $G, G'$  が一致することを示す.



中点連結定理により

$$FE \parallel BC, \quad BC : FE = 2 : 1$$

となるから  $BG : GE = BC : FE = 2 : 1$

よって, 点  $G$  は線分  $BE$  を  $2 : 1$  に内分する.

同様にして  $BG' : G'E = AB : ED = 2 : 1$

よって, 点  $G'$  は線分  $BE$  を  $2 : 1$  に内分する.

線分  $BE$  を  $2 : 1$  に内分する点は 1 点だけであるから, 2 点  $G, G'$  は一致する.  
したがって, 3 つの中線は点  $G$  で交わる.

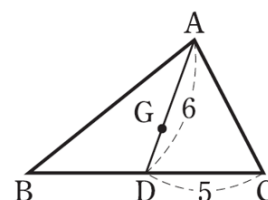
また,  $AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1$  であるから, 3 つの中線の交点は各中線を  $2 : 1$  に内分する.

証終

← 平行線と線分の比  
72 ページの注意を参照

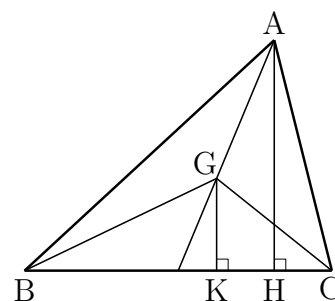
練習 2.6 右の図において, 点  $G$  は  $\triangle ABC$  の重心である. 次の線分の長さを求めよ. 解

- (1)  $BD$           (2)  $AG$



練習 2.7  $\triangle ABC$  の重心を  $G$  とし,  $G$  から辺  $BC$  に下ろした垂線を  $GK$ ,  $A$  から辺  $BC$  に下ろした垂線を  $AH$  とする. 解

- (1)  $GK : AH$  を求めよ.  
(2)  $\triangle GBC$  と  $\triangle ABC$  の面積比を求めよ.



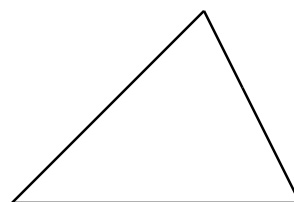
## 発見

## 頂点から向かい合う辺におろした垂線

75 ページから 79 ページで三角形の外心・内心、垂心について学びました。同じように、三角形の辺や頂点に対する線を引いて、それらが1点で交わるような性質が他にないか調べてみましょう。

[頂点から向かい合う辺に下した垂線]

**確認** 右の図の三角形について、各頂点から向かい合う辺に垂線を下ろしてみよう。また、いろいろな三角形をかいて、各頂点から向かい合う辺またはその延長に垂線を下ろしてみよう。それらの垂線はどのようなになっているだろうか。



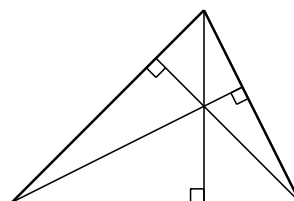
上の確認の結果から、各頂点から向かい合う辺またはその延長に下した垂線にも、「1点で交わる」という性質がありそうです。この「1点で交わる」という性質をこれまでに学んだことを利用して、説明できないでしょうか。

**発見** 三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下した垂線が、辺の垂直二等分線となるような三角形が見つけれないだろうか。上の確認でかいた三角形を使って考えてみよう。

上の発見の結果を利用すると、外心の性質を利用して、各頂点から向かい合う辺またはその延長に下した垂線が1点で交わることを証明することができます。

**整理** 上の確認、発見の結果を利用して、次のことを証明してみよう。

三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下した垂線は1点で交わる。



**注意** 三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下した垂線が交わる点を三角形の垂心といいます。

証明 もとの三角形を  $\triangle ABC$  とする.

点 A を通り直線 BC に平行な直線, 点 B を通り直線 CA に平行な直線, 点 C を通り直線 AB に平行な直線を引き, 3 本の直線の交点を下の図のように, それぞれ P, Q, R とする.

このとき, たとえば, 四角形 ABPC, ABCQ は平行四辺形であるから

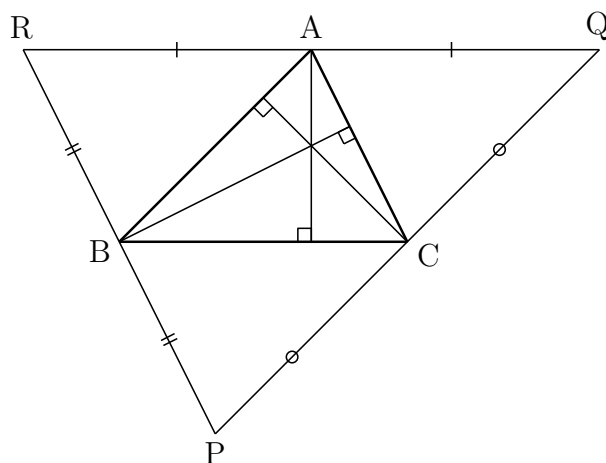
$$AB = PC, AB = CQ \quad \text{ゆえに} \quad PC = CQ$$

したがって, 点 C は線分 PQ の中点である. 同じようにして, 点 A は線分 QR の中点, 点 B は線分 RP の中点である.

このとき,  $\triangle ABC$  において, たとえば, 点 A から辺 BC またはその延長に下ろした垂線は, 線分 RQ の垂直二等分線である.

点 B から辺 CA またはその延長に下ろした垂線, 点 C から辺 AB またはその延長に下ろした垂線についても, 同じようにそれぞれ辺 RP, 辺 PQ の垂直二等分線である.

以上から,  $\triangle ABC$  において各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線は,  $\triangle PQR$  において, 3 つの辺の垂直二等分線になっている. 証終



## まとめ

発見の  $\triangle ABC$ ,  $\triangle PQR$  について,  $\triangle ABC$  において各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線は,  $\triangle PQR$  において, 3 つの辺の垂直二等分線になっている.

したがって,  $\triangle ABC$  において各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線は,  $\triangle PQR$  の外心で 1 点で交わる.

## 2.1.3 チェバの定理・メネラウスの定理

三角形と交わる直線や各頂点を通る直線について、線分の比に関する興味深い定理が成り立つ。ここでは、それらの定理について調べてみよう。

## A》チェバの定理

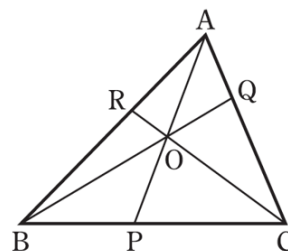
[チェバの定理]

三角形の各頂点を通る直線について、次のチェバの定理が成り立つ。

## チェバの定理

定理 6  $\triangle ABC$  の内部に点  $O$  がある。頂点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  と  $O$  を結ぶ直線が向かい合う辺と、それぞれ点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

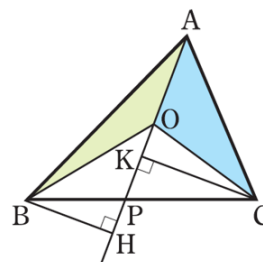


注意 定理 6 の式の  $\cdot$  は積を表す記号であり、 $\times$  と同じ意味である。

チェバの定理を証明するために、まず、次のことを証明する。  
右の図において、次の等式が成り立つ。

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OCA} = \frac{BP}{PC}$$

注意 等式において、 $\triangle OAB$ ,  $\triangle OCA$  は、それぞれの三角形の面積を表している。



証明  $\triangle OAB : \triangle OCA = BH : CK$

$BH \parallel CK$  であるから  $BH : CK = BP : PC$

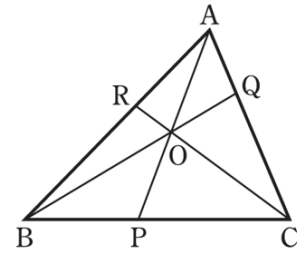
よって  $\triangle OAB : \triangle OCA = BP : PC$

すなわち  $\frac{\triangle OAB}{\triangle OCA} = \frac{BP}{PC}$

[定理 6 の証明] 右の図の  $\triangle ABC$  において

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OCA}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{\triangle OBC}{\triangle OAB},$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\triangle OCA}{\triangle OBC}$$



よって

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OCA} \cdot \frac{\triangle OBC}{\triangle OAB} \cdot \frac{\triangle OCA}{\triangle OBC} = 1$$

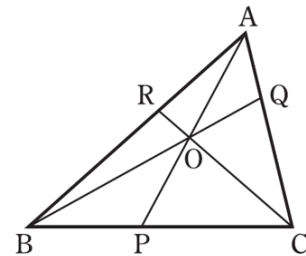
例 2.3 右の図の  $\triangle ABC$  において,  $CQ : QA = 2 : 1$ ,  $AR : RB = 2 : 3$  であるとき,  $BP : PC$  を求める. S

チェバの定理により

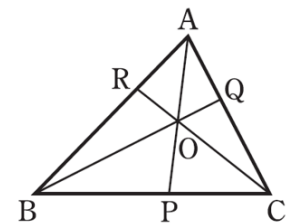
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

よって 
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

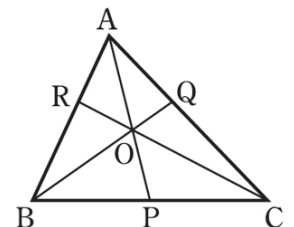
$$\frac{BP}{PC} = \frac{3}{4} \text{ より } BP : PC = 3 : 4$$



練習 2.8 右の図の  $\triangle ABC$  において,  $AR : RB = 1 : 2$ ,  $BP : PC = 4 : 3$  である.  $CQ : QA$  を求めよ. 解



練習 2.9 右の図の  $\triangle ABC$  において,  $AQ : QC = 2 : 3$ ,  $BP = PC$  である.  $AR : RB$  を求めよ. 解



## B》メネラウスの定理

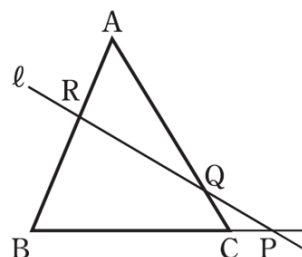
三角形と直線について、次のメネラウスの定理が成り立つ。 [メネラウスの定理]

## メネラウスの定理

定理 7  $\triangle ABC$  の辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  またはその延長が、三角形の頂点を通らない直線  $\ell$  と、それぞれ点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

P が辺  $BC$  の延長上にある場合



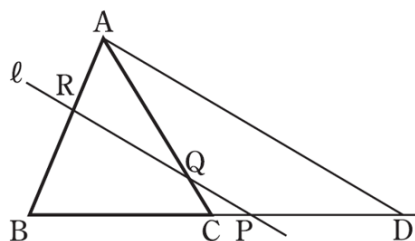
## [定理 7 の証明]

$\triangle ABC$  の頂点  $A$  を通り、直線  $\ell$  に平行な直線を引き、直線  $BC$  との交点を  $D$  とする。平行線と線分の比から

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CP}{PD}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{DP}{PB}$$

よって

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DP}{PB} = 1$$

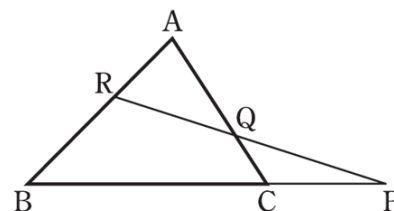


練習 2.10 右の図の  $\triangle ABC$  において、

$$AR : RB = 2 : 3, \quad BC : CP = 2 : 1$$

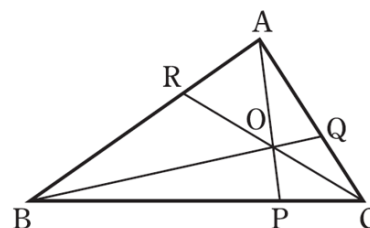
である。次の比を求めよ。 [解]

- (1)  $CQ : QA$       (2)  $PQ : QR$



深化 2.3 定理 7 における 3 点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  のうち、三角形の辺の延長上にある点の個数は 1 か 3 であり、定理 7 の横の図は 1 の場合である。3 の場合を図示してみよう。 [解]

**例題 2.2**  $\triangle ABC$  の辺  $AB$  を  $1:2$  に内分する点を  $R$ ，辺  $AC$  を  $3:2$  に内分する点を  $Q$  とする．線分  $BQ$  と  $CR$  の交点を  $O$ ，直線  $AO$  と辺  $BC$  の交点を  $P$  とする． S



(1)  $BP:PC$  を求めよ．

(2)  $PO:OA$  を求めよ．

**解答** (1)  $\triangle ABC$  にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{BP}{PC} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{BP}{PC} = 3 \quad \text{より} \quad BP:PC = 3:1$$

(2)  $\triangle ABP$  と直線  $RC$  にメネラウスの定理を用いると

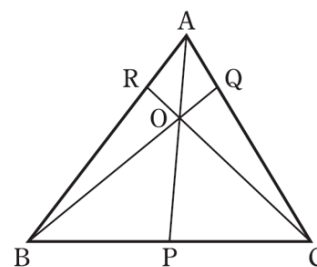
$$\frac{BC}{CP} \cdot \frac{PO}{OA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

(1) より， $BC:CP = 4:1$  であるから

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{PO}{OA} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{PO}{OA} = \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad PO:OA = 1:2$$

**練習 2.11**  $\triangle ABC$  の辺  $AB$ ， $AC$  を  $1:3$  に内分する点を，それぞれ  $R$ ， $Q$  とする点を，それぞれ  $R$ ， $Q$  とする．線分  $BQ$  と  $CR$  の交点を  $O$  とし，直線  $AO$  と辺  $BC$  の交点を  $P$  とする． 解



(1)  $BP:PC$  を求めよ．

(2)  $\triangle OBC:\triangle ABC$  を求めよ．

### 研究 チェバの定理の逆, メネラウスの定理の逆

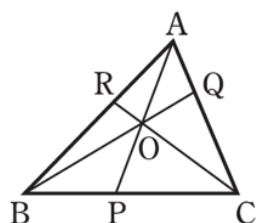
82 ページで学んだ定理は, 点  $O$  が  $\triangle ABC$  の外部にある場合にも成り立つ.

チェバの定理

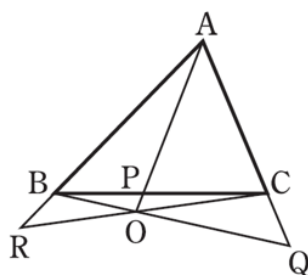
定理 6'  $\triangle ABC$  の辺上にもその延長上にもない点  $O$  がある. 頂点  $A, B, C$  と  $O$  を結ぶ直線  $AO, BO, CO$  が, 向かい合う辺  $BC, CA, AB$  またはその延長と, それぞれ点  $P, Q, R$  で交わるとき, 次の等式が成り立つ. [チェバの定理 (拡張)]

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

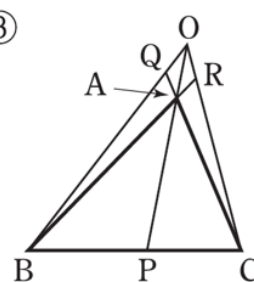
①



②



③



82, 83 ページでは, 上の図 ① の場合について証明した. その証明において利用した三角形の面積と線分の比の関係

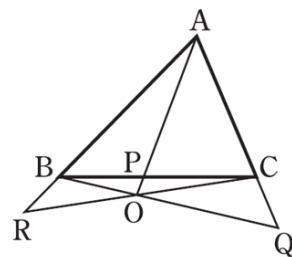
$$\frac{BP}{PC} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OCA}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{\triangle OBC}{\triangle OAB}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{\triangle OCA}{\triangle OBC}$$

が上の ②, ③ のような場合にも成り立つことから, 定理 6' は 82, 83 ページと同じように証明することができる.

演習 2.1 右の図の  $\triangle ABC$  において,

$$AR : RB = 4 : 1, \quad BP : PC = 3 : 4$$

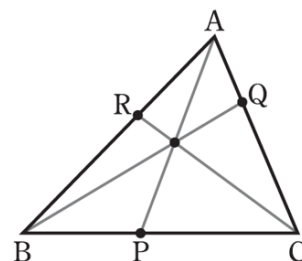
である.  $CQ : QA$  を求めよ. 解



チェバの定理，メネラウスの定理については，その逆も成り立つことが知られている．

### チェバの定理の逆

$\triangle ABC$  の辺  $BC$ ， $CA$ ， $AB$  またはその延長上に，それぞれ点  $P$ ， $Q$ ， $R$  があり，この 3 点のうち，1 個または 3 個が辺上にあるとする．このとき， $BQ$  と  $CR$  が交わり，かつ  $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$  が成り立てば，3 直線は 1 点で交わる．

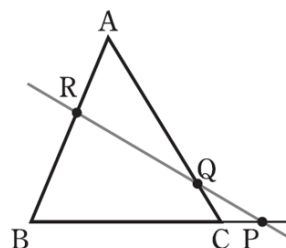


**注意** 上の「チェバの定理の逆」は，前ページの定理 6' の逆である．

### メネラウスの定理の逆

$\triangle ABC$  の辺  $BC$ ， $CA$ ， $AB$  またはその延長上に，それぞれ点  $P$ ， $Q$ ， $R$  があり，この 3 点のうち，1 個または 3 個が辺上にあるとする．このとき， $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$  が成り立てば，3 点  $P$ ， $Q$ ， $R$  は一直線上にある．

P が辺  $BC$  の延長上にある場合



チェバの定理の逆，メネラウスの定理の逆は，それぞれ 3 直線が 1 点で交わる，3 点が一直線上にあることの証明に利用できる．とくに，チェバの定理の逆を利用して，重心や内心の存在を証明することができる．

**演習 2.2** チェバの定理の逆を用いて，次のことを証明せよ． 解

- (1) 三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる．
- (2) 三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる．

**研究** 三角形の辺と角

三角形の3辺の大小関係や、辺と角の大小関係について、調べることにしよう.

以下では、 $\triangle ABC$ の $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ に向かい合う辺BC, CA, ABの長さを、それぞれ $a$ ,  $b$ ,  $c$ で表す.

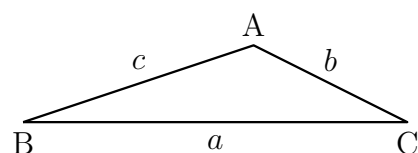
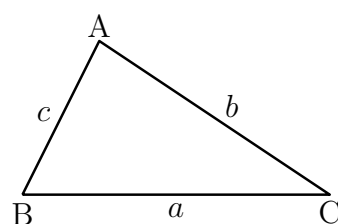
平面上で、2点P, Qを結ぶ最短経路は、線分PQで与えられる.

これにより、 $\triangle ABC$ において

$$a < b + c$$

であることがわかる.

一般に、次のことが成り立つ.



1つの三角形において

[1] 2辺の長さの和は、他の1辺の長さよりも大きい.

[2] 2辺の長さの差は、他の1辺の長さよりも小さい.

また、正の数 $a$ ,  $b$ ,  $c$ を3辺の長さとする三角形が存在するための条件は、次の大小関係がすべて成り立つことである.

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b$$

これを1つの式にまとめると、次のようになる.

$$|b - c| < a < b + c$$

←  $|x|$  は  $x$  の絶対値を表す

3辺の長さ $a$ ,  $b$ ,  $c$ の中で、 $a$ が最大であれば、三角形が存在するための必要十分条件は、 $a < b + c$ が成り立つことである.

**演習 2.3** 3辺の長さが次のような三角形は存在するかどうかを調べよ. 解

(1) 4, 6, 8

(2) 4, 6, 4

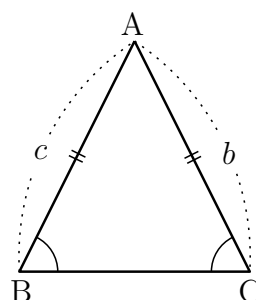
(3) 4, 6, 10

$\triangle ABC$  の辺と角については、次が成り立つ.

$$b = c \quad \text{ならば} \quad \angle B = \angle C$$

これは二等辺三角形の性質である.

この逆「 $\angle B = \angle C$  ならば  $b = c$ 」も成り立つ.



**Ex 2.1**  $\triangle ABC$  において、次が成り立つ.

$$b > c \quad \text{ならば} \quad \angle B > \angle C$$

**証明**  $b > c$  であるならば、辺  $AC$  上に  $AB = AD$  となる点  $D$  がとれる.

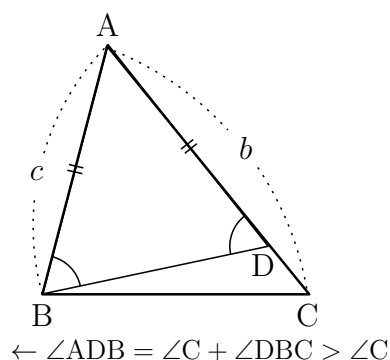
このとき、 $\triangle ABD$  において

$$\angle ABD = \angle ADB$$

ここで、 $\angle B > \angle ABD$ ,  
 $\angle ADB > \angle C$  であるから

$$\angle B > \angle C$$

証終



←  $\angle ADB = \angle C + \angle DBC > \angle C$

Ex 2.1 について、その逆「 $\angle B > \angle C$  ならば  $b > c$ 」も成り立つことが知られている.

一般に、次のことが成り立つ.

[三角形の辺と角の大小関係]

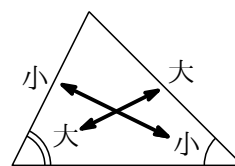
三角形の辺と角の大小関係

$\triangle ABC$  において

$$b > c \iff \angle B > \angle C$$

$$b = c \iff \angle B = \angle C$$

$$b < c \iff \angle B < \angle C$$



**演習 2.4** 次が成り立つことを示せ. 解

直角三角形では、3 辺のうち斜辺が最大である.

## 2.1.4 円に内接する四角形

中学校では、円周角の定理や円周角の定理の逆について学んだ。ここでは、円についての性質をさらに調べることにしよう。

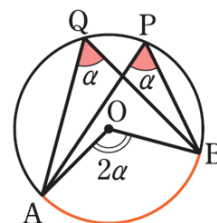
## A 》 円周角の定理

[円周角の定理とその逆]

円周角の定理について、確認しておこう。

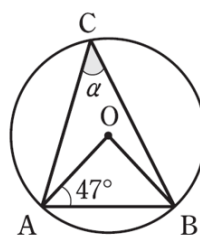
## 円周角の定理

1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の大きさの半分である。

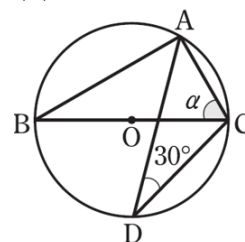


練習 2.12 右の図において、 $\alpha$ を求めよ。ただし、Oは円の中心、(2)の線分BCは円の直径である。 解

(1)



(2)



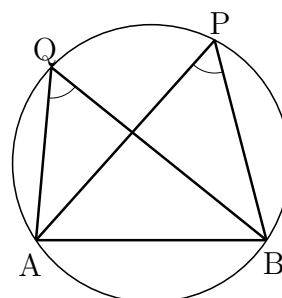
円周角の定理は、その逆も成り立つ。

## 円周角の定理の逆

2点P, Qが直線ABについて同じ側にあるとき、

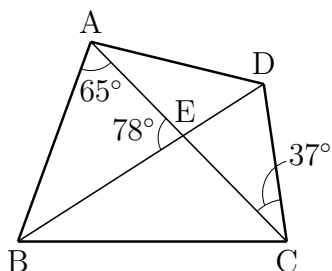
$$\angle APB = \angle AQB$$

ならば、4点A, B, P, Qは1つの円周上にある。

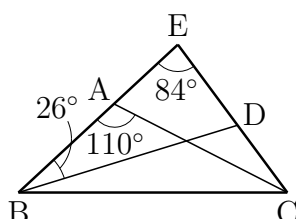


練習 2.13 下の図において、4点A, B, C, Dが1つの円周上にあることを示せ。 解

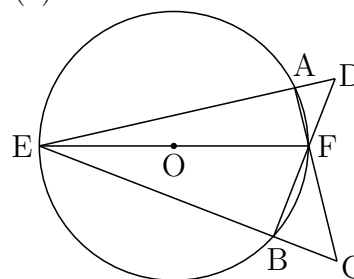
(1)



(2)



(3)



点Oは円の中心  
EFは円の直径

## B》円に内接する四角形

多角形のすべての頂点が1つの円周上にあるとき，この多角形は円に内接するという．また，この円をその多角形の外接円という．

三角形には必ず外接円が存在するが，四角形の場合は外接円が存在するとは限らない．

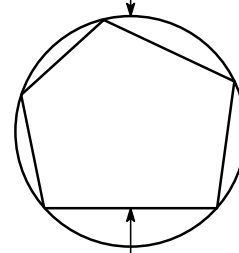
円に内接する四角形には，次の性質がある．

## 円に内接する四角形

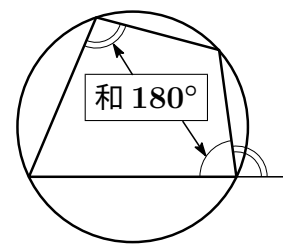
定理 8 四角形が円に内接するとき，次の [1]，[2] が成り立つ．

- [1] 対角の和は  $180^\circ$  である．
- [2] 外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい．

多角形の外接円



円に内接する多角形



[円に内接する四角形]

注意 四角形において，1つの内角に向かい合う内角をその対角という．

[定理 8 の証明] 四角形 ABCD が円 O に内接するとき<sup>1</sup>，

$$\angle BAD = \alpha, \quad \angle BCD = \beta$$

とする．中心角と円周角の関係により

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

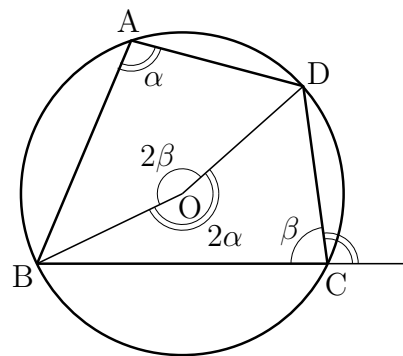
となるから， $\alpha + \beta = 180^\circ$  である．

よって，[1] が成り立つ．

また， $\angle BCD$  の外角の大きさは

$180^\circ - \beta = \alpha$  となるから，[2] が成り立つ．

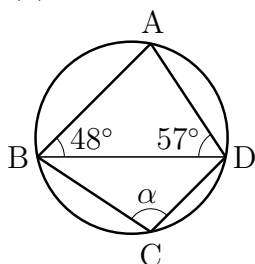
証終



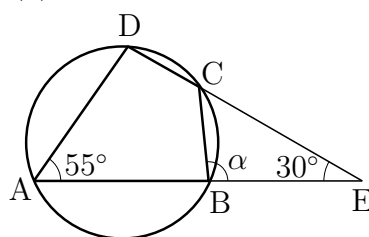
<sup>1</sup>中心が点 O である円を円 O という

練習 2.14 下の図において,  $\alpha$  を求めよ. 解

(1)



(2)



定理 8 の逆も成り立つ.

[四角形が円に内接するための条件]

四角形が円に内接するための条件

定理 9 次の [1] または [2] が成り立つ四角形は, 円に内接する.

[1] 1 組の対角の和が  $180^\circ$  である.

[2] 1 つの外角が, それと隣り合う内角の対角に等しい.

[1]  $\iff$  [2] は同値である. ここでは, [1] を証明する.

[定理 9 [1] の証明] 四角形 ABCD において,

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \quad \dots \textcircled{1}$$

とする. 右の図のように,  $\triangle ABC$  の外接円  $O$  の,  $B$  を含まない弧  $AC$  上に点  $E$  をとると, 四角形 ABCE は円  $O$  に内接する.

よって, 定理 8 [1] により

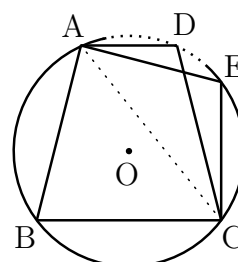
$$\angle ABC + \angle AEC = 180^\circ \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から  $\angle ADC = \angle AEC$

よって, 円周角の定理の逆から, 4 点  $A, C, E, D$  は 1 つの円周上にある.   
 そして, その円は  $\triangle AEC$  の外接円すなわち円  $O$  である.

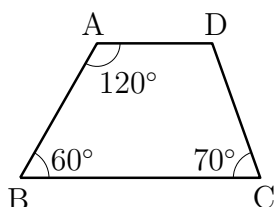
点  $B$  も円  $O$  上にあるから, 四角形 ABCD は円  $O$  に内接する.

証終

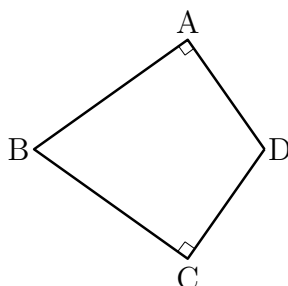


練習 2.15 次の四角形 ABCD のうち、円に内接するものはどれか。 解

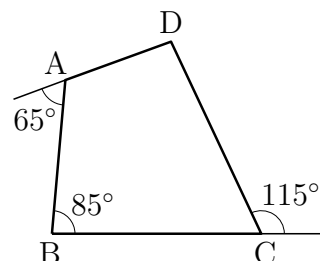
①



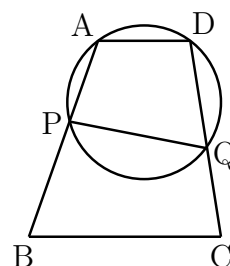
②



③



応用例題 2.1  $AD \parallel BC$  である台形 ABCD において、 $A, D$  を通る円が 2 辺  $AB, CD$  と、右の図のように点  $P, Q$  で交わるとき、四角形  $PBCQ$  は円に内接する。このことを証明せよ。 S



考え方 》 定理 9 を使って証明する。  $AD \parallel BC$  と四角形  $APQD$  が円に内接することから、 $\angle PBC = \angle PQD$  を導く。

証明  $AD \parallel BC$  であるから、右の図で

$\angle EAD = \angle PBC$  となる。

また、四角形  $APQD$  は円に内接するから、

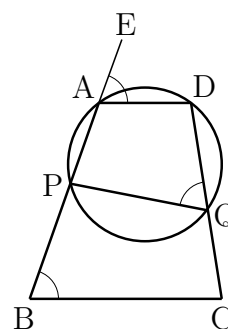
$\angle EAD = \angle PQD$  となる。

よって、四角形  $PBCQ$  において、

$\angle PBC = \angle PQD$  となるから、四角形  $PBCQ$

は円に内接する。

証終

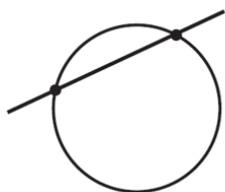


練習 2.16  $AD \parallel BC$  である台形 ABCD において、 $\angle ABC = \angle BCD$  であるとき、この台形は円に内接する。このことを証明せよ。 解

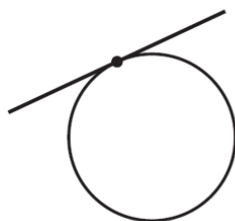
## 2.1.5 円と直線

円と直線の位置関係には、次のような3つの場合がある. [円と直線の位置関係]

[1] 2点で交わる



[2] 接する



[3] 離れている



円と直線が接するとき、それらはただ1点を共有する. この直線を円の接線といい、その共有点を接点という.

ここでは、円の接線や円と直線に関する性質を調べてみよう.

## A 》 円の接線

円  $O$  の周上の点  $A$  を通る直線  $\ell$  について、次が成り立つ.

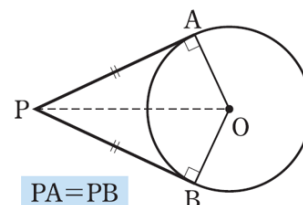
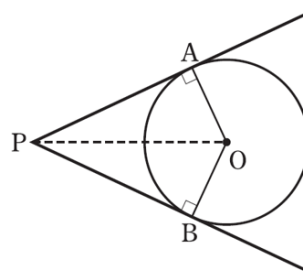
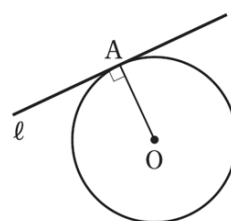
直線  $\ell$  が点  $A$  で円  $O$  に接する  $\iff OA \perp \ell$

この直線  $\ell$  が、点  $A$  における円  $O$  の接線である.

右の図のように、円  $O$  には外部の点  $P$  から2つの接線を引くことができる. その接点を  $A, B$  とするとき、線分  $PA, PB$  の長さを、 $P$  から円  $O$  に引いた接線の長さという.

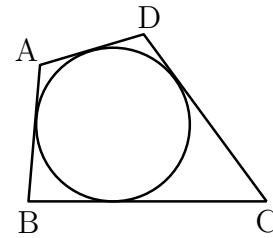
円に引いた2つの接線の長さについては、次のことがいえる.

円の外部の1点からその円に引いた2つの接線の長さは等しい.



**例題 2.3** 右の図のように、円が四角形 ABCD の各辺に接している。  
このとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。 S

$$AB + CD = BC + DA$$



**考え方** 》 辺の長さを接線の長さの和に分解する。

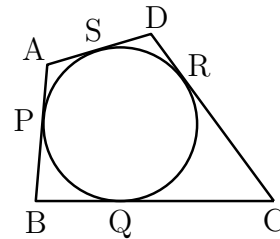
**証明** 接点を右の図のように、P, Q, R, S とすると

$$AP = AS, \quad BP = BQ$$

$$CQ = CR, \quad DR = DS$$

よって

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AP + BP) + (CR + DR) \\ &= (AS + BQ) + (CQ + DS) \\ &= (BQ + CQ) + (AS + DS) \\ &= BC + DA \end{aligned}$$



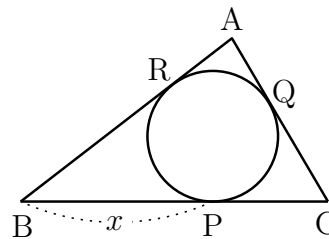
証終

**練習 2.17**  $\triangle ABC$  において、

$$AB = 7, \quad BC = 8$$

であるとする。

この三角形の内接円と辺 BC, CA, AB との接点を、それぞれ P, Q, R とするとき、次の問いに答えよ。 解



(1) BP の長さを  $x$  とするとき、AQ と QC の長さを、それぞれ  $x$  で表せ。

(2)  $CA = 5$  であるとき、BP の長さを求めよ。

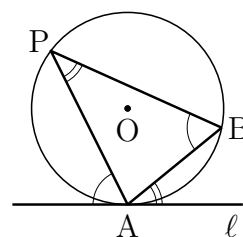
# B 》円の接線と弦の作る角

## [円の接線と弦の作る角]

円の接線と弦の作る角について、次の定理が成り立つ。

円の接線と弦の作る角

**定理 10** 円の弦と、その端点における接線が作る角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



**証明** (円の接線と弦の作る角が鋭角の場合)

右の図のように、円 O の弦 AB の端点 A における円の接線を AT とする。∠BAT が鋭角の場合、直径 AC を引くと

$$\angle BAT + \angle CAB = 90^\circ$$

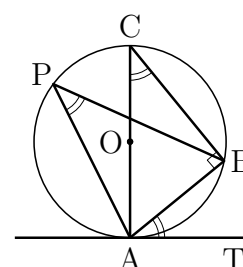
$$\angle ACB + \angle CAB = 90^\circ$$

であるから  $\angle BAT = \angle ACB$

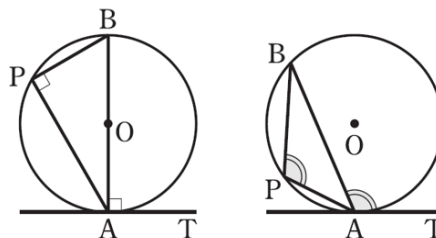
図のように、C を含む弧 AB 上に点 P をとると、

$\angle ACB = \angle APB$  であるから  $\angle BAT = \angle APB$

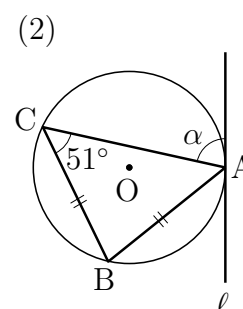
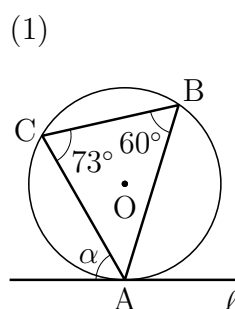
証終



**練習 2.18** 上の証明において、∠BAT が直角の場合、鈍角の場合についても定理 10 が成り立つことを確かめよ。 解



**練習 2.19** 右の図で、直線  $\ell$  は円 O の接線で、A は接点である。α を求めよ。 解



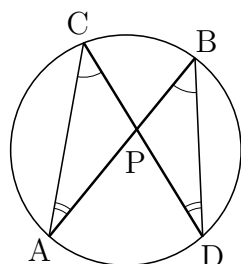
## C》方べきの定理

円の2つの弦について、次の方べきの定理が成り立つ.

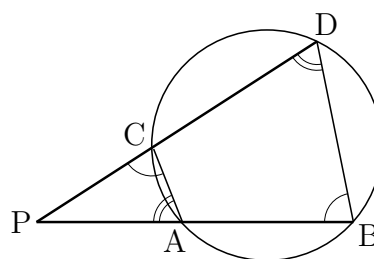
## 方べきの定理 I

**定理 11** 円の2つの弦 AB, CD の交点, またはそれらの延長の交点を P とすると,  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$  が成り立つ.

**証明** [1] P が円の内部にある



[2] P が円の外部にある



上の図のいずれの場合も,  $\triangle PAC$  と  $\triangle PDB$  において

$$\angle ACP = \angle DBP$$

$$\angle CAP = \angle BDP$$

← [1] では円周角の定理, [2] では  
円に内接する四角形の性質.

2組の角がそれぞれ等しいから  $\triangle PAC \sim \triangle PDB$

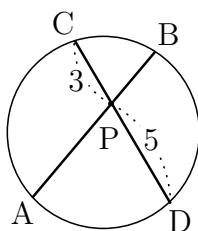
よって  $PA : PD = PC : PB$

したがって  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

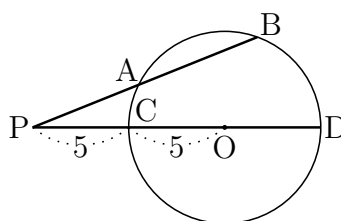
証終

**練習 2.20** 下の図において,  $PA \cdot PB$  を求めよ. 解

(1)



(2)

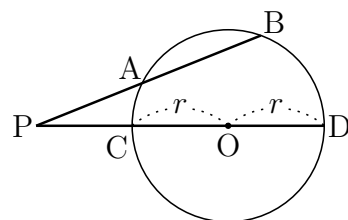


方べきの定理における  $PA \cdot PB$  の値の意味を調べてみよう。

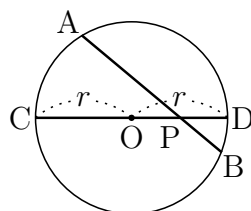
例 2.4 右の図において、円  $O$  の半径を  $r$  とするとき S

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PC \cdot PD \\ &= (PO - OC)(PO + OD) \\ &= (PO - r)(PO + r) \end{aligned}$$

よって  $PA \cdot PB = PO^2 - r^2$



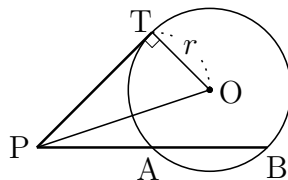
練習 2.21 右の図において、円  $O$  の半径を  $r$  とするとき、 $PA \cdot PB = r^2 - PO^2$  である。このことを示せ。 解



例 2.4, 練習 2.21 で調べたことからわかるように、方べきの定理における  $PA \cdot PB$  の値は、その円の中心を  $O$ 、半径を  $r$  とすると、 $|PO^2 - r^2|$  に等しいことがわかる。

右の図のように、円  $O$  の外部の点  $P$  を通る直線が円  $O$  と 2 点  $A, B$  で交わるとき

$$PA \cdot PB = PT^2 \quad \dots \textcircled{1}$$



また、図の直線  $PT$  は円  $O$  の接線、点  $T$  は接点であるとき、直角三角形  $POT$  において、三平方の定理により

$$PO^2 - r^2 = PT^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

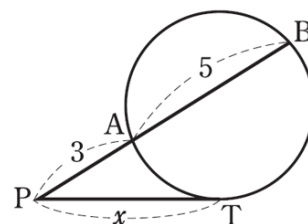
①, ② より、次の方べきの定理 II が得られる。

[方べきの定理]

方べきの定理 II

**定理 12** 円の外部の点  $P$  から円に引いた接線の接点を  $T$  とする。  $P$  を通ってこの円と 2 点  $A, B$  で交わる直線を引くと、 $PA \cdot PB = PT^2$  が成り立つ。

練習 2.22 右の図において,  $x$  の値を求めよ. ただし, 直線  $PT$  は円の接線で,  $T$  は接点である. 解



### 研究 方べきの定理の逆

方べきの定理 I は, その逆も成り立つ.

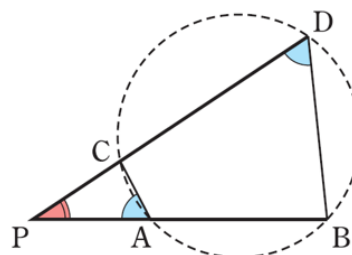
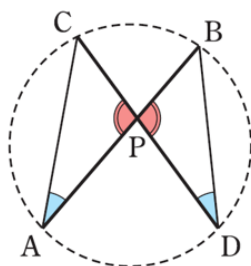
方べきの定理 I の逆

2つの線分  $AB$  と  $CD$ , または  $AB$  の延長と  $CD$  の延長が点  $P$  で交わるとき,  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$  が成り立つならば, 4点  $A, B, C, D$  は1つの円周上にある.

証明

[1] 線分  $AB, CD$  が  $P$  で交わる

[2]  $AB$  の延長と  $CD$  の延長が  $P$  で交わる



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$  から  $PA : PD = PC : PB$

また  $\angle APC = \angle DPB$

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle PAC \sim \triangle PDB$  よって  $\angle PAC = \angle PDB$

したがって, 4点  $A, B, C, D$  は1つの円周上にある.

補足 方べきの定理 II についても, その逆である次のことが成り立つ.

一直線上にない3点  $A, B, T$  および線分  $AB$  の延長上の点  $P$  について,

$$PA \cdot PB = PT^2$$

が成り立つならば, 直線  $PT$  は3点  $A, B, T$  を通る円に接する.

## 2.1.6 2つの円

ここでは、2つの円の位置関係や共通する接線について調べよう。

## A 》 2つの円の位置関係

半径が異なる2つの円の位置関係には、右の[1]～[5]の場合がある。

右の図では、円Oの半径を $r$ 、円O'の半径を $r'$ とし、2つの円の中心間の距離を $d$ とする。ただし、 $r > r'$ であるとする。

■ [1]～[5]の各場合の $r$ 、 $r'$ 、 $d$ の関係について、□に等号 $=$ 、不等号 $>$ 、 $<$ のうち、適する記号を入れよ。

[1]  $d \square r + r'$

[2]  $d \square r + r'$

[3]  $r - r' \square d \square r + r'$

[4]  $d \square r - r'$

[5]  $d \square r - r'$

[2]、[4]のように、2つの円がただ1つの共有点をもつとき、2つの円は接するといい、この共有点を接点という。[2]のように接する場合、2つの円は外接するという。[4]のように接する場合、2つの円は内接するという。

2つの円が接するとき、接点は2つの円の中心を通る直線上にある。

練習 2.23 半径5と半径3の円がある。中心間の距離 $d$ の値が次のとき、2つの円の位置関係を[1]～[5]の中から選べ。 解

(1)  $d = 8$

(2)  $d = 10$

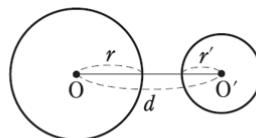
(3)  $d = 2$

(4)  $d = 4$

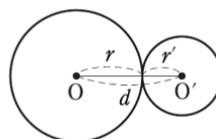
(5)  $d = 1$

## [2つの円の位置関係]

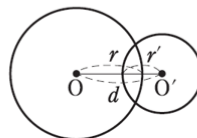
[1] 互いに外部にある



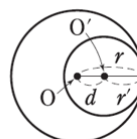
[2] 外接する(1点を共有する)



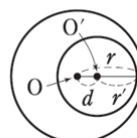
[3] 2点で交わる



[4] 内接する(1点を共有する)



[5] 一方が他方の内部にある



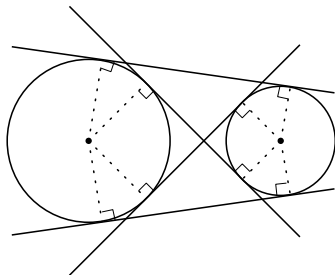
## B 》 2つの円の共通接線

## [2つの円の共通接線]

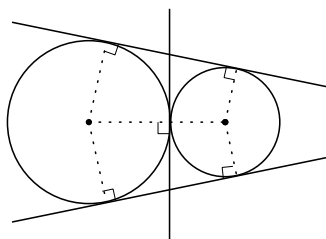
2つの円の両方に接している直線を、2つの円の共通接線という。

2つの円の共通接線には、次のような場合がある。

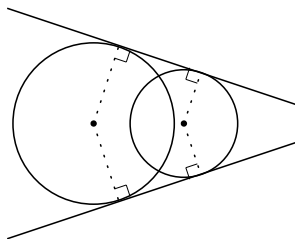
[1] 共通接線 4本



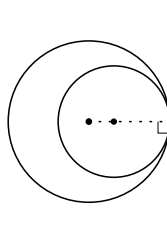
[2] 共通接線 3本



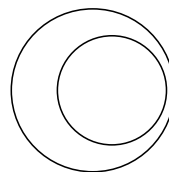
[3] 共通接線 2本



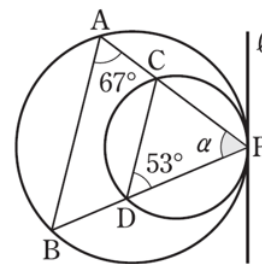
[4] 共通接線 1本



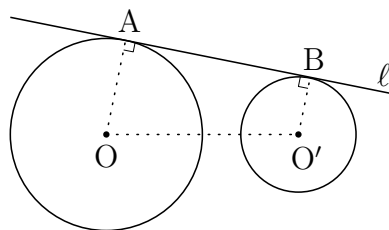
[5] 共通接線はない



練習 2.24 右の図で、 $\alpha$ を求めよ。ただし、直線 $\ell$ は2つの円の共通接線で、点Pは接点である。 解



例題 2.4 右の図において、直線  $\ell$  は2つの円  $O$ ,  $O'$  の共通接線で、 $A$ ,  $B$  は接点である。円  $O$ ,  $O'$  の半径を、それぞれ5, 3とし、 $O$ ,  $O'$  間の距離を10とすると、線分  $AB$  の長さを求めよ。 S



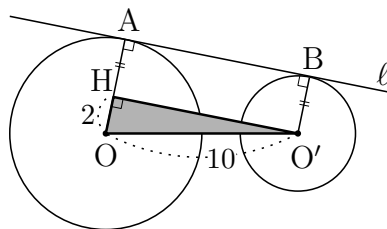
【解】 図のように、 $O'$  から線分  $OA$  に垂線  $O'H$  を下ろすと

$$\begin{aligned} OH &= OA - HA \\ &= OA - O'B = 5 - 3 = 2 \end{aligned}$$

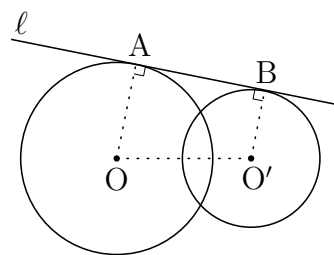
$\triangle OO'H$  は直角三角形であるから

$$O'H^2 = OO'^2 - OH^2$$

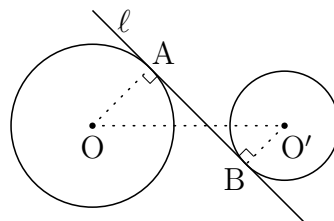
$$\text{よって } AB = O'H = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$



練習 2.25 右の図において、直線  $\ell$  は2つの円  $O$ ,  $O'$  の共通接線で、 $A$ ,  $B$  は接点である。円  $O$ ,  $O'$  の半径を、それぞれ4, 3とし、 $O$ ,  $O'$  間の距離を5とすると、線分  $AB$  の長さを求めよ。 解



練習 2.26 右の図において、直線  $\ell$  は2つの円  $O$ ,  $O'$  の共通接線で、 $A$ ,  $B$  は接点である。円  $O$  の半径を  $r$ , 円  $O'$  の半径を  $r'$  とし、 $O$ ,  $O'$  間の距離を  $d$  とすると、線分  $AB$  の長さを求めよ。 解



## 2.1.7 作図

作図では、定規とコンパスを用いて

- [1] 与えられた 2 点を通る直線を引くこと
- [2] 与えられた 1 点を中心として、与えられた半径の円をかくこと

だけができる．それらの直線や円などの交点を求めて、次々と点、直線、円をかき、条件を満たす図形をかくことが作図である．これまでに学んだ三角形や円の性質を用いた作図について考えてみよう．

## A 》 基本的な作図

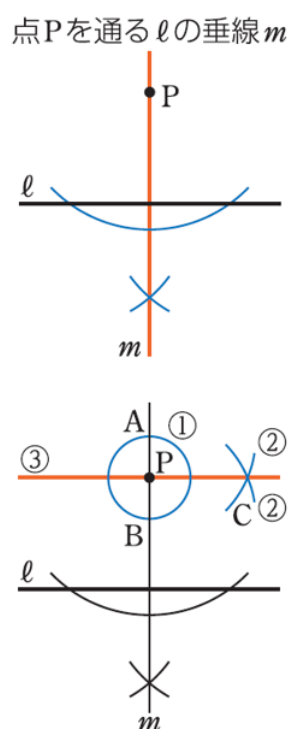
直線  $\ell$  上にない点  $P$  を通り、 $\ell$  に平行な直線を作図してみよう．

まず、点  $P$  を通る  $\ell$  の垂線  $m$  を作図し、これに続けて次のように作図する．

- ① 点  $P$  を中心とする円をかき、直線  $m$  との交点をそれぞれ  $A$ ,  $B$  とする．
- ② 2 点  $A$ ,  $B$  をそれぞれ中心として、等しい半径の円をかき、それらの交点の 1 つを  $C$  とする．
- ③ 直線  $PC$  を引く．直線  $PC$  が求める直線である．

このように作図した直線  $PC$  は、 $m$  に垂直な直線である．直線  $PC$  と  $\ell$  はともに  $m$  に垂直であるから、直線  $PC$  は  $\ell$  に平行である．

[平行線の作図]



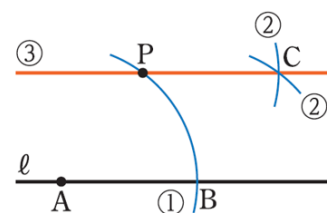
練習 2.27 与えられた線分  $AB$  を 1 辺とする正方形を作図せよ。 解

$\overline{AB}$

直線  $\ell$  上にない点  $P$  を通り、 $\ell$  に平行な直線は、次のように作図することもできる。

[平行線の作図]

- ①  $\ell$  上に点  $A$  をとり、 $A$  を中心とする半径  $AP$  の円をかき、 $\ell$  との交点の1つを  $B$  とする。
- ② 2点  $P, B$  をそれぞれ中心として、半径  $AP$  の円をかき、 $A$  と異なる交点を  $C$  とする。
- ③ 直線  $PC$  を引く。直線  $PC$  が求める直線である。



練習 2.28 上の方法で直線  $PC$  が  $\ell$  と平行になる理由を説明せよ。 [解]

## B》線分の内分点，外分点の作図

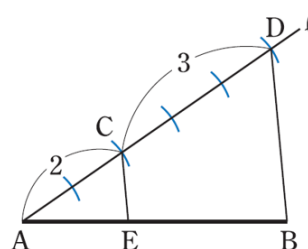
線分を指定された比に内分する点や，外分する点の作図について考えよう。

例 2.5 与えられた線分  $AB$  を  $2:3$  に内分する点を作図する。

[S]

[線分の内分点の作図]

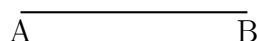
- ① 点  $A$  を通り、直線  $AB$  と異なる半直線  $\ell$  を引く。
- ②  $\ell$  上に、 $AC:CD = 2:3$  となるように点  $C, D$  をとる。
- ③  $C$  を通り、直線  $BD$  に平行な直線を引き、線分  $AB$  との交点を  $E$  とする。点  $E$  が求める点である。



$BD \parallel EC$  より  $AE:EB = AC:CD$  であるから，点  $E$  は線分  $AB$  を  $2:3$  に内分する点である。

練習 2.29 与えられた線分  $AB$  に対して，次の点を作図せよ。 [解]

- (1) 線分  $AB$  を  $2:1$  に内分する点  $C$
- (2) 線分  $AB$  を  $1:4$  に外分する点  $D$



## C》いろいろな長さの線分の作図

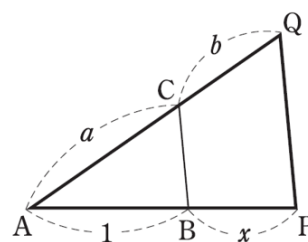
右の図の  $\triangle ABC$  について、 $BC \parallel PQ$  であるとする。線分の長さが次のように与えられたとき、 $x$  の値を求めよ。

平行線と線分の比の性質により

$$1 : x = a : b \quad \text{すなわち} \quad ax = b$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{b}{a}$$

このことを利用した作図について考えよう。

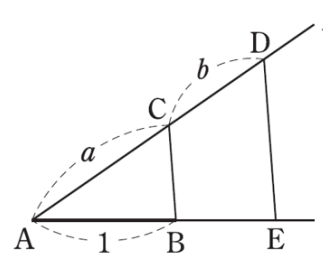


例 2.6 長さ 1 の線分 AB と、長さ  $a$ ,  $b$  の 2 つの線分が与えられたとき、長さ  $\frac{b}{a}$  の線分を作図する。

[S]

[長さが  $\frac{b}{a}$  の線分の作図]

- ① 点 A を通り、直線 AB と異なる半直線  $\ell$  を引く。
- ②  $\ell$  上に、 $AC = a$ ,  $CD = b$  となるように点 C, D をとる。ただし、C は線分 AD 上にとる。
- ③ D を通り、直線 BC に平行な直線を引き、直線 AB との交点を E とする。線分 BE が求める線分である。



$BE = x$  とすると、 $BC \parallel ED$  から

$$1 : x = a : b \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{b}{a}$$

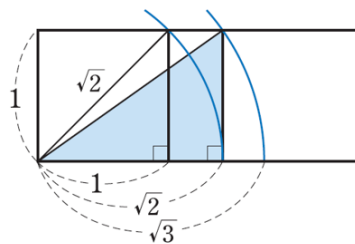
よって、線分 BE は長さ  $\frac{b}{a}$  の線分である。

練習 2.30 長さ 1 の線分 AB と、長さ  $a$ ,  $b$  の 2 つの線分が与えられたとき、長さ  $ab$  の線分を作図せよ。 [解]

次に，長さが無理数で表される線分について，作図を考えてみよう．

たとえば，1 辺の長さが 1 の正方形を作図すると，その対角線として長さ  $\sqrt{2}$  の線分が作図できる．さらに，右の図の色をつけた直角三角形に三平方の定理を用いると，斜辺に長さ  $\sqrt{3}$  の線分が作図できる．

[長さ  $\sqrt{2}$  の線分の作図]

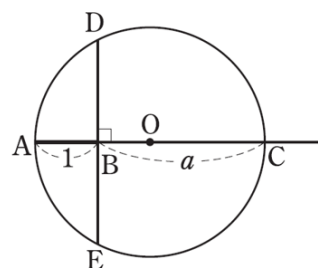


同様に，自然数  $\sqrt{n}$  に対して長さ  $\sqrt{n}$  の線分が作図できる．

**例題 2.5** 長さ 1 の線分 AB と，長さ  $a$  の線分が与えられたとき，長さ  $\sqrt{a}$  の線分を作図せよ．

[長さ  $\sqrt{a}$  の線分の作図] [S]

- 解答**
- ① 線分 AB の B を越える延長上に  $BC = a$  となる点 C をとる．
  - ② 線分 AC の垂直二等分線と AC の交点を O とし，O を中心として，半径 OA の円をかく．
  - ③ B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする．線分 BD が求める線分である．



このとき，方べきの定理により  $BA \cdot BC = BD \cdot BE$   
 $AB = 1$ ,  $BC = a$ ,  $BD = BE$  であるから  $BD^2 = a$   
 よって，線分 BD の長さは  $\sqrt{a}$  の線分である．

**練習 2.31** 長さ  $a$ ,  $b$  の 2 つの線分が与えられたとき，長さ  $\sqrt{ab}$  の線分を作図せよ．

[解]



## 研究

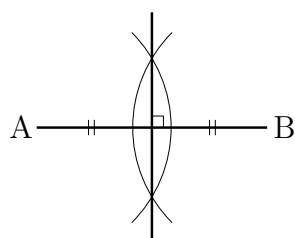
## 作図について

作図とは、定規とコンパスだけを道具として用いて、図形をかくことである。次の2つの作図は最も基本的なものである。

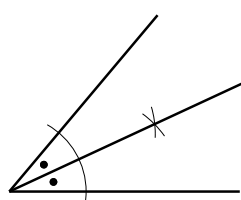
[1] 与えられた線分の垂直二等分線を引く。

[2] 与えられた角の二等分線を引く。

[1]



[2]



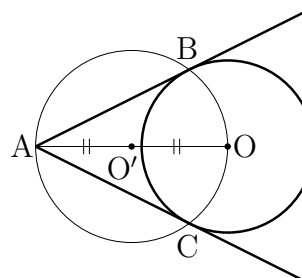
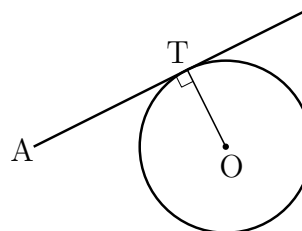
円  $O$  の外部の点  $A$  から円  $O$  に接線を引く作図を考えよう。

点  $A$  から円  $O$  に引いた接線の接点を  $T$  とすると、 $\angle ATO = 90^\circ$  である。

そこで、 $T$  は線分  $OA$  を直径とする円の周上にもあることを利用すると、次のような作図が考えられる。

- ① 線分  $OA$  の中点  $O'$  を求めて、 $O'$  を中心とする半径  $O'A$  の円をかく。
- ② 円  $O$  と円  $O'$  の交点を  $B, C$  とする。
- ③ 直線  $AB$ , 直線  $AC$  を引く。

これらの直線が求める接線である。



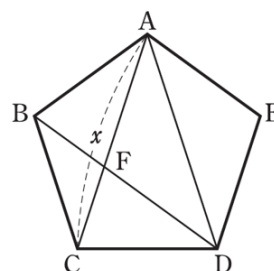
**研究** 正五角形の作図

正五角形の作図について考えよう.

正五角形では, 1 辺の長さとお角線の長さの比が  $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  である.

**演習 2.5** 正五角形 ABCDE の対角線 AC, BD の交点を F とする. 次のことを示せ. **解**

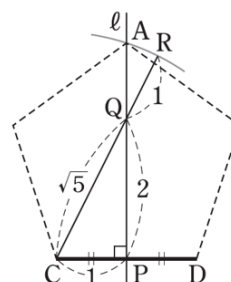
- (1)  $\triangle ACD \sim \triangle DFC$
- (2)  $CD = 1$ ,  $AC = x$  とすると,  $x$  は  $x : 1 = 1 : (x - 1)$  を満たす.
- (3)  $CD : AC = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



長さ 2 の線分 CD が与えられたとき, 正五角形 ABCDE を作図してみよう.

まず, 対角線 AC の長さが  $1 + \sqrt{5}$  であることを利用して, 頂点 A を次のように作図する.

- ① 線分 CD の垂直二等分線  $\ell$  を引き,  $\ell$  と CD の交点を P とする.
- ②  $\ell$  上に  $PQ = CD$  となるような点 Q をとる.
- ③ 線分 CQ の Q を越える延長上に,  $QR = CP$  となるような点 R をとる.
- ④ C を中心として半径 CR の円をかき,  $\ell$  との交点を A とする.



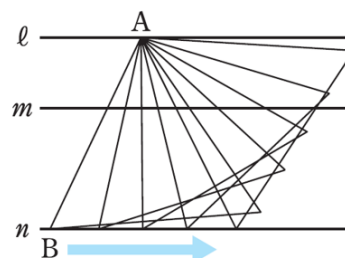
このとき,  $CQ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ,  $CA = CR = 1 + \sqrt{5}$  である.

**演習 2.6** 上に続けて, 正五角形 ABCD を作図せよ. **解**

### 研究 図形描画ソフトを活用して作図の方針を立てる

与えられた3本の平行な直線に対して、頂点がそれぞれの直線上にあるような正三角形を作図する方法を考えよう。

3本の平行な直線  $\ell, m, n$  に対して、それぞれの直線上に頂点がある正三角形  $ABC$  を作図したいとする。図形描画ソフトを活用して次の①, ②のように正三角形をいくつかかくと、右の図のようになった。

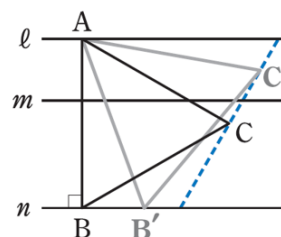


- ① 直線  $\ell$  上に点  $A$  を、直線  $n$  上に点  $B$  をとる。
- ②  $A$  は固定して、 $B$  は直線  $n$  上を動かして線分  $AB$  を1辺とする正三角形をかく。

このとき、正三角形の残りの頂点の動きには、規則性があるようにも見える。

[3本の平行線上に頂点をもつ正三角形]

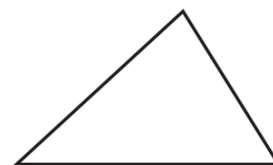
**演習 2.7** 上の考察より、正三角形の残りの頂点は、直線上にあることが予想される。このことを、右の2つの正三角形  $ABC$ ,  $AB'C'$  の図を利用して説明せよ。 解



上の演習 2.7 の結果を利用すると、3本の平行な直線  $\ell, m, n$  に対して、それぞれの直線上に頂点がある正三角形  $ABC$  を作図することができる。

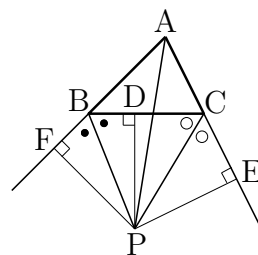
**演習 2.8** 3本の平行な直線に対して、それぞれの直線上に頂点がある正三角形を作図せよ。 解

**演習 2.9** 右の図の三角形に対して、それぞれの直線上に頂点がある正三角形を作図せよ。 解



## 2.1.8 問題

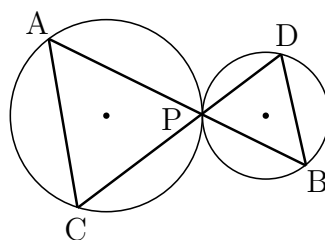
問題 2.1  $\triangle ABC$  において、右の図のように  $\angle B$  の外角の二等分線と  $\angle C$  の外角の二等分線との交点を  $P$  とするとき、 $P$  は  $\angle A$  の二等分線上にある。このことを証明せよ。 解  $\rightarrow$  p.77



注意 この  $P$  を  $\triangle ABC$  の  $\angle A$  内の傍心という。

問題 2.2  $\triangle ABC$  の 3 辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  上にそれぞれ点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  があり、 $AP$ ,  $BQ$ ,  $CR$  が 1 点で交わっているとする。  $QR$  と  $BC$  が平行でないとき、直線  $QR$  と直線  $BC$  の交点を  $S$  とすると、 $BP : BS = CP : CS$  が成り立つことを示せ。 解  $\rightarrow$  p.82, 84

問題 2.3 点  $P$  で外接する 2 つの円がある。  $P$  を通る 2 本の直線が、右の図のように、2 つの円とそれぞれ  $A$ ,  $B$  および  $C$ ,  $D$  で交わるとき、 $AC \parallel DB$  であることを証明せよ。 解  $\rightarrow$  p.96, 100, 102



問題 2.4 長さ 1 の線分  $AB$  と、長さ  $a$  の線分が与えられたとき、長さ  $a^2$  の線分を作図せよ。 解  $\rightarrow$  p.105

問題 2.5  $AB = 4$ ,  $BC = 5$ ,  $CA = 3$  である  $\triangle ABC$  の内心を  $I$ , 直線  $AI$  と辺  $BC$  の交点を  $D$  とする。次の問いに答えよ。 解

- (1)  $AI : ID$  を求めよ。
- (2) 直線  $AI$  と  $\triangle ABC$  の外接円の交点のうち、 $A$  と異なる方を  $E$  とするとき、 $AD \cdot DE$  を求めよ。

## 2.2 空間図形

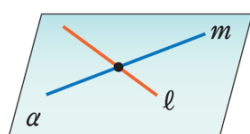
### 2.2.1 直線と平面

ここでは、空間における 2 直線の位置関係、直線と平面の位置関係、2 平面の位置関係について学ぼう。

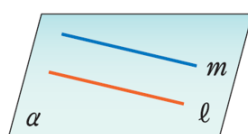
#### A 》 2 直線の位置関係

異なる 2 直線  $\ell$ ,  $m$  の位置関係には、次の 3 つの場合がある. [1], [2] の場合, 2 直線  $\ell$ ,  $m$  は 1 つの平面上にある.

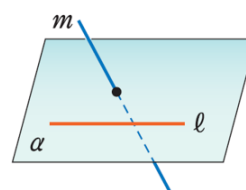
[1] 1点で交わる



[2] 平行である



[3] ねじれの位置にある



2 直線  $\ell$ ,  $m$  が平行であるとき,  $\ell // m$  と書く.

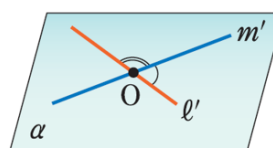
**注意** 2 直線  $\ell$ ,  $m$  が一致する場合も,  $\ell // m$  であると考えことにする.

3 直線  $\ell$ ,  $m$ ,  $n$  について, 次のことが成り立つ.

$$\ell // m, m // n \quad \text{ならば} \quad \ell // n$$

2 直線  $\ell$ ,  $m$  が平行でないとき, 1 点  $O$  を通り,  $\ell$ ,  $m$  に平行な直線を, それぞれ  $\ell'$ ,  $m'$  とすると,  $\ell'$  と  $m'$  は 1 つの平面上にある. このとき,  $\ell'$  と  $m'$  のなす 2 つの角は, 点  $O$  をどこにとっても, 一定である.

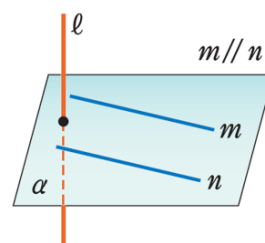
この角を 2 直線  $\ell$ ,  $m$  のなす角という.



2 直線  $l$ ,  $m$  のなす角が直角のとき,  $l$  と  $m$  は垂直であるといい,  $l \perp m$  と書く. 垂直な 2 直線  $l$  と  $m$  が交わるとき,  $l$  と  $m$  は直交するという.

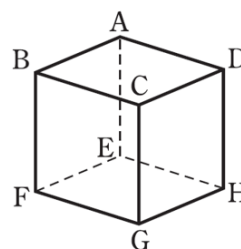
また, 次のことが成り立つ.

平行な 2 直線的一方に垂直な直線は, 他方にも垂直である.



練習 2.32 右の図の立方体 ABCD-EFGH について, 次の 2 直線のなす角  $\theta$  を求めよ. ただし,  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  とする. 解

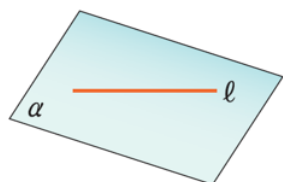
- (1) AB, DH                      (2) AB, EG  
(3) AC, FH



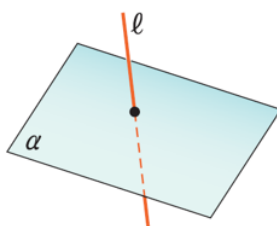
## B》直線と平面の位置関係

直線  $l$  と平面  $\alpha$  の位置関係には, 次の 3 つの場合がある.

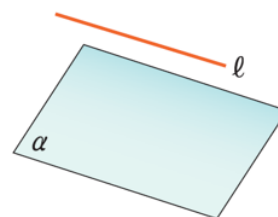
[1]  $l$  は  $\alpha$  に含まれる  
( $l$  は  $\alpha$  上にある)



[2] 1 点で交わる

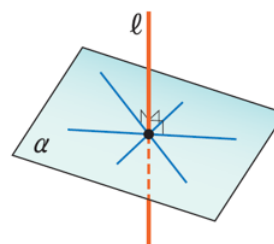


[3] 平行である



直線  $l$  と平面  $\alpha$  が平行であるとき,  $l // \alpha$  とかく.

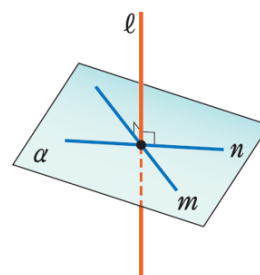
直線  $l$  が, 平面  $\alpha$  上のすべての直線に垂直であるとき,  $l$  は  $\alpha$  に垂直である, または  $l$  は  $\alpha$  に直交するといい,  $l \perp \alpha$  と書く. このとき,  $l$  を平面  $\alpha$  の垂線という.



深化 2.4 練習 2.32 の立方体において, 2 直線 AF, CF のなす角  $\theta$  を求めよう. ただし,  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  とする. 解

直線と平面の垂直について、次が成り立つことが知られている。

直線  $\ell$  が、平面  $\alpha$  上の交わる 2 直線  $m, n$  に垂直ならば、直線  $\ell$  は平面  $\alpha$  に垂直である。



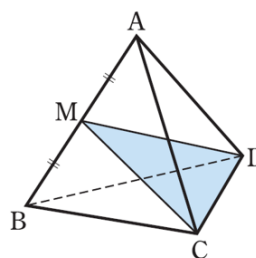
**例題 2.6** 正四面体  $ABCD$  において、辺  $AB$  の中点を  $M$  とする。辺  $AB$  は平面  $CDM$  に垂直であることを証明せよ。 S

考え方 》 辺  $AB$  が、平面  $CDM$  上の交わる 2 直線に垂直であることを示せばよい。

**証明**  $\triangle ABC, \triangle ADB$  は正三角形である。  
二等辺三角形の性質により

$$AB \perp CM, \quad AB \perp DM$$

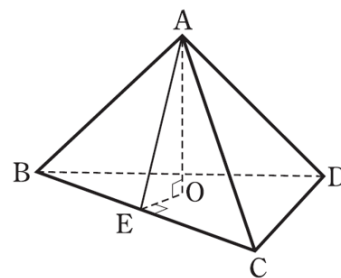
よって、辺  $AB$  は 2 直線  $CM, DM$  の定める平面  $CDM$  に垂直である。



**注意** 一直線上にない 3 点  $C, D, M$  を通る平面は、ただ 1 つ定まる。この平面を、平面  $CDM$  ということがある。

例題 2.6 において、辺  $CD$  は平面  $CDM$  上にある。よって、正四面体  $ABCD$  において  $AB \perp CD$  が成り立つことが分かる。

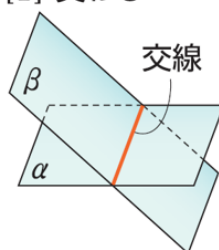
**練習 2.33** 四面体  $ABCD$  において、点  $A$  から平面  $BCD$  に下ろした垂線を  $AO$  とする。また、点  $O$  から直線  $BC$  に下ろした垂線を  $OE$  とする。このとき、 $AE \perp BC$  であることを証明せよ。 解



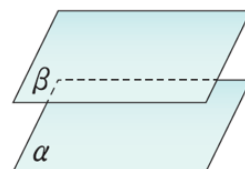
## C》2平面の位置関係

異なる2平面 $\alpha$ ,  $\beta$ の位置関係には, 次の2つの場合がある.

[1] 交わる



[2] 平行である



2平面が交わるとき, その交わりは直線になり, その直線を交線という. 2平面 $\alpha$ ,  $\beta$ が平行であるとき,  $\alpha//\beta$ と書く.

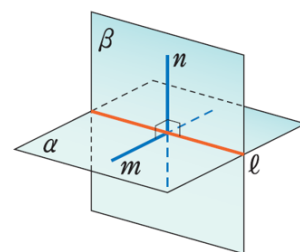
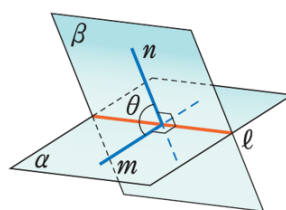
**注意** 2平面 $\alpha$ ,  $\beta$ が一致する場合も,  $\alpha//\beta$ であると考えてことにする.

交わる2平面の交線上の点から, 各平面上で, 交線に垂直に引いた2直線のなす角を2平面のなす角という.

2平面 $\alpha$ ,  $\beta$ のなす角が直角のとき,  $\alpha$ と $\beta$ は垂直である, または直交するといい,  $\alpha\perp\beta$ と書く.

2平面の垂直について, 次のことが成り立つ.

平面 $\alpha$ に垂直な直線を含む平面は,  $\alpha$ に垂直である.



**練習 2.34** 空間内の直線 $l$ と平面 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ について, 次の記述は正しいか. 正しくない場合, その理由も述べよ. 解

- (1)  $\alpha\perp\beta$ ,  $\beta\perp\gamma$ ならば,  $\alpha//\gamma$ である.
- (2)  $\alpha\perp\beta$ ,  $\beta//\gamma$ ならば,  $\alpha\perp\gamma$ である.
- (3)  $l//\alpha$ ,  $l//\beta$ ならば,  $\alpha//\beta$ である.

### 2.2.2 空間図形と多面体

三角錐，四角柱などのように，多角形の面で囲まれた立体を多面体といい，へこみのない多面体を凸多面体という<sup>2</sup>。

ここでは，凸多面体の性質や計量について学ぼう。

#### A》多面体

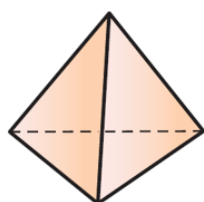
次の [1]，[2] を満たす凸多面体を正多面体という。

[1] 各面はすべて合同な正多角形である。

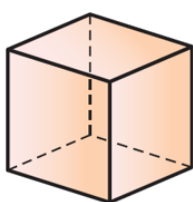
[2] 各頂点に集まる面の数はすべて等しい。

正多面体は，次の 5 種類しかないことが知られている。

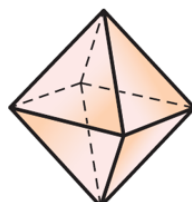
[正多面体]



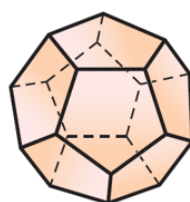
正四面体



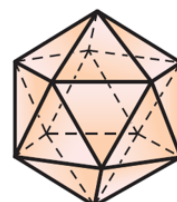
正六面体(立方体)



正八面体



正十二面体



正二十面体

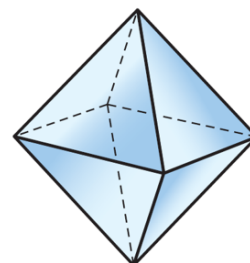
例 2.7 正八面体の面の数，頂点の数，辺の数を調べる。

[S]

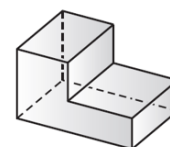
面の数は 8

$$\begin{array}{lcl} \text{面の数} & \searrow & \text{1つの面の頂点の数} \\ \text{頂点の数は} & 8 \times 3 \div 4 = 6 & \nearrow \text{1つの頂点に集まる面の数} \end{array}$$
  

$$\begin{array}{lcl} \text{面の数} & \searrow & \text{1つの面の辺の数} \\ \text{辺の数は} & 8 \times 3 \div 2 = 12 & \nearrow \text{1つの辺に集まる面の数} \end{array}$$

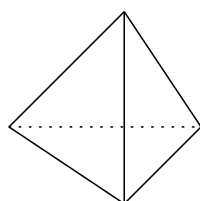


<sup>2</sup>凸多面体では，面上のどの 2 点を結ぶ線分も，立体に含まれる．  
右の図のような多面体は凸多面体ではない。

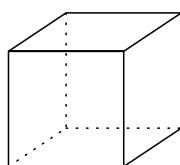
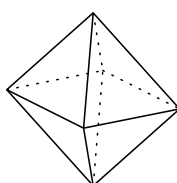


練習 2.35 5種類の正多面体について、次の表を完成せよ。 解

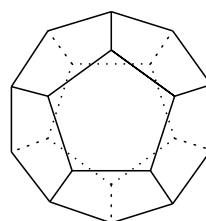
| 正多面体  | 面の数 | 面の形  | 頂点の数 | 辺の数 |
|-------|-----|------|------|-----|
| 正四面体  |     |      |      |     |
| 正六面体  |     |      |      |     |
| 正八面体  | 8   | 正三角形 | 6    | 12  |
| 正十二面体 |     |      |      |     |
| 正二十面体 |     |      |      |     |



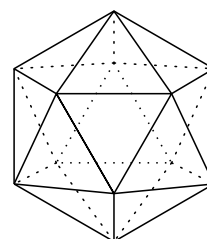
正四面体

正六面体  
(立方体)

正八面体



正十二面体



正二十面体

### B》オイラーの多面体定理

凸多面体の頂点の数、辺の数、面の数の間に成り立つ関係について考えてみよう。  
たとえば、正八面体について

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

を計算すると、 $6 - 12 + 8 = 2$ となる。

一般に、凸多面体の頂点の数を  $v$ 、辺の数を  $e$ 、面の数を  $f$  とする<sup>3</sup>と

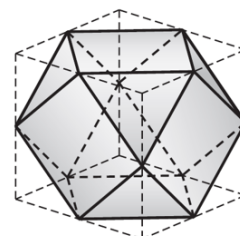
$$v - e + f = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことが知られている。これをオイラーの多面体定理という。

練習 2.36 練習 2.35 の表で、上の  $\textcircled{1}$  が成り立つことを確かめよ。 解

練習 2.37 右の図のように、正六面体の各辺の中点を通る平面で8つのかどを切り取った多面体について、次の問いに答えよ。 解

- (1) 面の数、頂点の数、辺の数を、それぞれ求めよ。
- (2) この多面体についても、上の等式  $\textcircled{1}$  が成り立つことを確かめよ。



<sup>3</sup>多面体の頂点、辺、面を意味する英語は、それぞれ vertex, edge, face である。

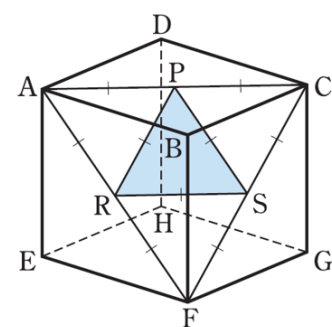
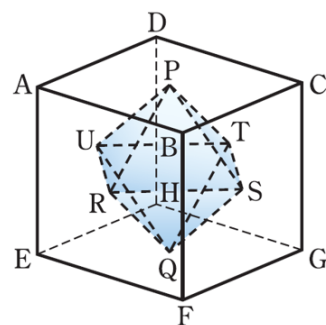
## C》正多面体から切り取った立体

[立方体の角を切り取ってできる立体]

正六面体 ABCD-EFGH の各面の正方形の対角線の交点を、右の図のように、P, Q, R, S, T, U とする．この正六面体を 8 つの平面

PRS, PST, PTU, PUR,  
QRS, QST, QTU, QUR

で切ると、新しくできた立体 PRSTUQ は正八面体である．このことを示そう．

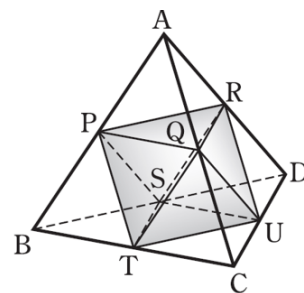


- [1] 立体 PRSTUQ の面 PRS は平面 AFC 上にあって、点 P, R, S はそれぞれ線分 CA, AF, FC の中点である． $CA = AF = FC$  より  $\triangle AFC$  は正三角形である．よって、 $RS = SP = PR$  であるから、 $\triangle PRS$  も正三角形である．同様に考えると、立体 PRSTUQ のすべての面が合同な正三角形である．

- [2] 6 つの頂点に集まる面の数はすべて 4 で等しい．

[1], [2] から、立体 PRSTUQ は正八面体である．

**練習 2.38** 正四面体 ABCD の各辺の中点を、右の図のように、P, Q, R, S, T, U とする．この正四面体を 4 つの平面 PQR, RSU, PST, QTU で切る．新しくできた立体 PQRSTU が正八面体であることを示せ． 解 [正四面体の角を切り取ってできる立体]



**研究** 正多面体の体積

前ページのように，正六面体 ABCD-EFGH から切り取った正八面体 PRSTUQ を利用して，正八面体の体積を求めよう．

正八面体 PRSTUQ の 1 辺の長さを  $a$  とする．

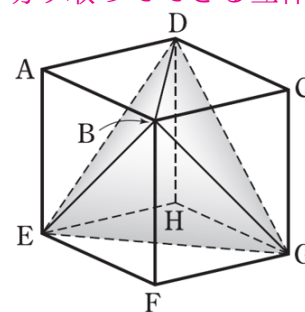
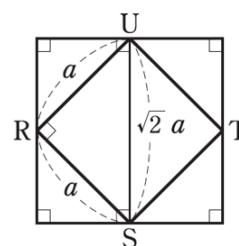
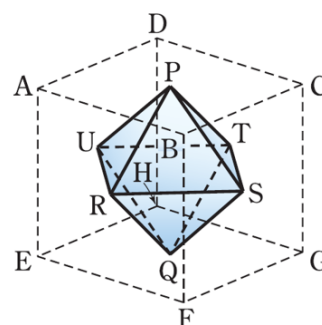
平面 RSTU で正六面体を切ったときの断面は，右の図のようになる．四角形 RSTU は，1 辺の長さが  $a$  の正方形であるから，正六面体の 1 辺の長さは  $\sqrt{2}a$  である．

また，正四角錐 PRSTU，QRSTU の高さはともに正六面体の 1 辺の長さの半分である．

したがって，1 辺の長さが  $a$  の正八面体の体積  $V$  は

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$$

**演習 2.10** 右の図のように，正六面体 ABCD-EFGH を 4 つの平面 BDE, BEG, BGD, DEG で切ると，正四面体 BDEG ができる．このことを利用して，1 辺の長さが  $a$  の正四面体の体積  $V$  を求めよ． 解 [正四面体の角を切り取ってできる立体]

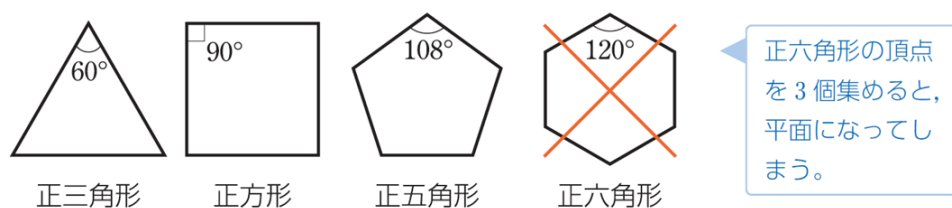


**研究** 正多面体の種類

正多面体が存在するためには，次のことが必要である．

- [1] 1つの頂点に集まる面の数が3以上である．
- [2] 1つの頂点に集まる角の大きさの和は  $360^\circ$  より小さい．

このことから，正多面体の面になることのできる正多角形は，正三角形，正方形，正五角形の3通りしかないことがわかる．



上の [1]，[2] から，たとえば，各面が正五角形である正多面体があれば，1つの頂点に集まる正五角形の数  $f$  は3である．

この正多面体の頂点の数を  $v$ ，辺の数を  $e$ ，面の数を  $f$  とすると

$$v = f \times 5 \div 3 = \frac{5}{3}f, \quad e = f \times 5 \div 2 = \frac{5}{2}f \quad \leftarrow 115 \text{ ページ例 } 2.7$$

である．これを， $v - e + f = 2$  に代入すると (オイラーの多面体定理)

$$\frac{5}{3}f - \frac{5}{2}f + f = 2 \quad \text{よって} \quad f = 12$$

したがって，各面が正五角形の正多面体があれば，その面の数は12であることがわかる．

同様に考えて，

各面が正方形の正多面体があれば，その面の数は 6

各面が正三角形の正多面体があれば，その面の数は 4, 8, 20

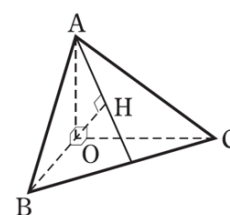
であることを確かめてみよう．

### 2.2.3 問題

**問題 2.6** 空間内の直線  $\ell$ ,  $m$ ,  $n$  や, 平面  $\alpha$ ,  $\beta$  について, 次の記述は正しいか. 正しくない場合, その理由も述べよ. 解 → p.111 ~ 114

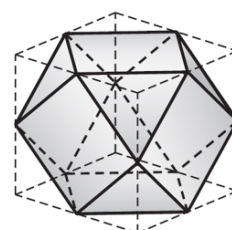
- (1)  $\ell // m$  で,  $m$  と  $n$  が交わるならば,  $\ell$  と  $n$  は交わる.
- (2)  $\ell \perp \alpha$ ,  $m \perp \alpha$  ならば,  $\ell // m$  である.
- (3)  $\ell$  が  $\alpha$  上にあるとき,  $\ell \perp \beta$  ならば,  $\alpha \perp \beta$  である.

**問題 2.7** 右の図において, 3つの線分  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  は, それぞれが直角に交わっている.  $O$  から平面  $ABC$  に下ろした垂線を  $OH$  とするとき, 次のことを示せ. 解 → p.113



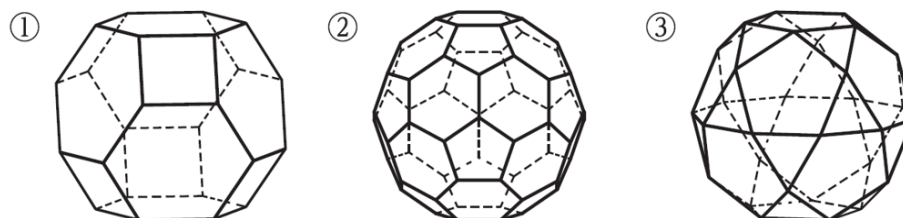
- (1)  $OA \perp BC$ ,  $OH \perp BC$
- (2)  $AH \perp BC$

**問題 2.8** 右の図の立体は, 1辺の長さが2の立方体から各辺の中点を通る平面で8つのかどを切り取った多面体である. この多面体の表面積, 体積を求めよ. 解 → p.117, 118



**問題 2.9** 正二十面体の1つの頂点に集まる5つの辺の中点は同じ平面上にある. 正二十面体から1つの頂点に集まる5つの辺の中点を通る平面ですべてのかどを切り取った多面体  $P$  について, 次の問いに答えよ. 解

- (1)  $P$  はどのような多面体か. 次の ① ~ ③ から選べ.

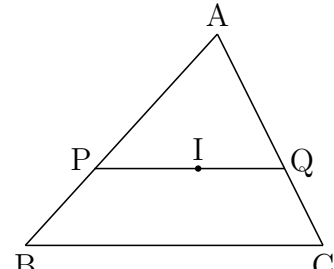


- (2)  $P$  の面の数  $f$ , 辺の数  $e$ , 頂点の数  $v$  を, それぞれ求めよ.

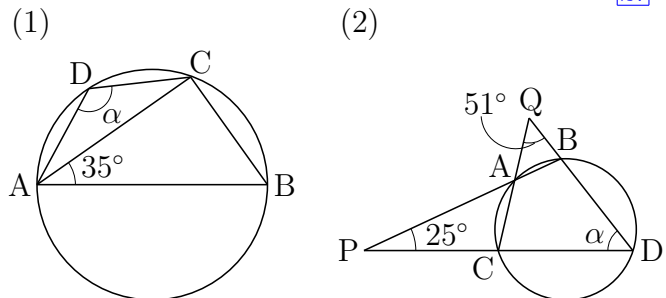
## 2.3 章末問題

### 2.3.1 章末問題 A

章末 2.1  $\triangle ABC$  の内心  $I$  を通り、辺  $BC$  に平行な直線と辺  $AB$ ,  $AC$  の交点を、それぞれ  $P$ ,  $Q$  とするとき、 $PQ = PB + QC$  であることを証明せよ。 解

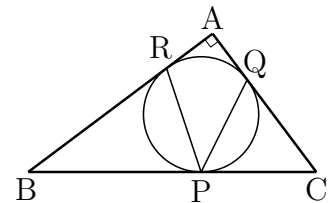


章末 2.2 右の図において、 $\alpha$  を求めよ。ただし、(1) で線分  $AB$  は円の直径とする。 解

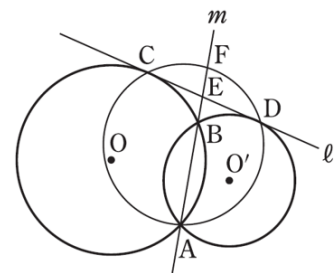


章末 2.3 右の図で、 $P$ ,  $Q$ ,  $R$  は  $\triangle ABC$  の内接円と辺との接点である。  $\angle A = 90^\circ$ ,  $BP = 6$ ,  $PC = 4$  であるとき、次の問いに答えよ。 解

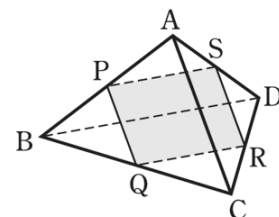
- (1)  $\angle RPQ$  の大きさを求めよ。
- (2) 内接円の半径を求めよ。



章末 2.4 2 点  $A$ ,  $B$  で交わる 2 つの円  $O$ ,  $O'$  がある。右の図のように、直線  $\ell$  が円  $O$ ,  $O'$  にそれぞれ点  $C$ ,  $D$  で接している。また、2 点  $A$ ,  $B$  を通る直線  $m$  が、 $\ell$  と点  $E$  で交わり、3 点  $A$ ,  $D$ ,  $C$  を通る円と点  $F$  で交わる。このとき、四角形  $BDFC$  が平行四辺形であることを証明せよ。 解



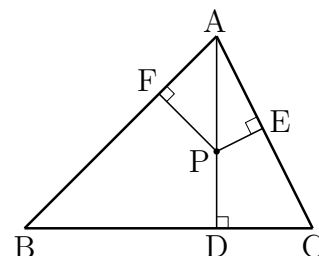
章末 2.5 四面体  $ABCD$  の辺の中点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  を右の図のようにとる。四角形  $PQRS$  は平行四辺形であることを示せ。 解



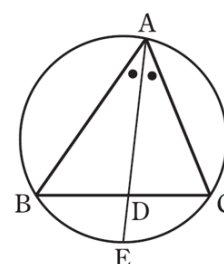
### 2.3.2 章末問題 B

章末 2.6  $\triangle ABC$  の内心を  $I$  とし、直線  $AI$  と  $\triangle ABC$  の外接円との交点を  $D$  とするとき、 $DB = DC = DI$  である。このことを証明せよ。 解

章末 2.7  $\triangle ABC$  の頂点  $A$  から底辺  $BC$  に垂線  $AD$  を下ろす。線分  $AD$  上に点  $P$  をとり、 $P$  から辺  $CA$ ,  $AB$  に、それぞれ垂線  $PE$ ,  $PF$  を下ろすとき、四角形  $BCEF$  は円に内接することを証明せよ。 解

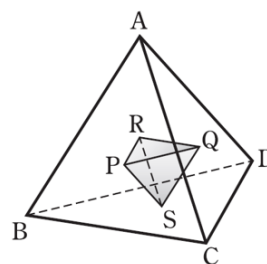


章末 2.8  $\triangle ABC$  において、 $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  との交点を  $D$ 、 $\triangle ABC$  の外接円との交点を  $E$  とする。このとき、次が成り立つことを証明せよ。 解



- (1)  $\triangle ABE \sim \triangle ADC$
- (2)  $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

章末 2.9 右の図のように、正四面体  $ABCD$  の各面の重心  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  を頂点とする多面体がある。この多面体  $PQRS$  について、次の問いに答えよ。 解



- (1) 多面体  $PQRS$  が正四面体であることを示せ。
- (2) 多面体  $PQRS$  と正四面体  $ABCD$  の体積比を求めよ。

ヒント

- 6  $I$  と  $B$ ,  $I$  と  $C$  を結んで等しい角を見つける。
- 7 四角形  $AFPE$  が円に内接することを利用する。
- 8 (1) の結果と、方べきの定理を利用する。

# 解答

練習 0.1 (1)  $\in$  (2)  $\in$  (3)  $\notin$

練習 0.2 (1)  $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

(2)  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(3)  $C = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$

深化 0.1  $C = \{x \mid x \text{ は } 15 \text{ 以下の正の奇数}\},$

$C = \{2n + 1 \mid n = 0, 1, \dots, 7\},$

$C = \{2n - 1 \mid n = 1, 2, \dots, 8\}$  など

練習 0.3 (1)  $A \subset B$  (2)  $C = D$  (3)  $Q \subset P$

練習 0.4 (1)  $\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

(2)  $\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

練習 0.5 (1)  $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

(2)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

(3)  $B \cap C = \phi$

(4)  $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

練習 0.6 (1)  $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$

(2)  $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

(3)  $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 5\}$

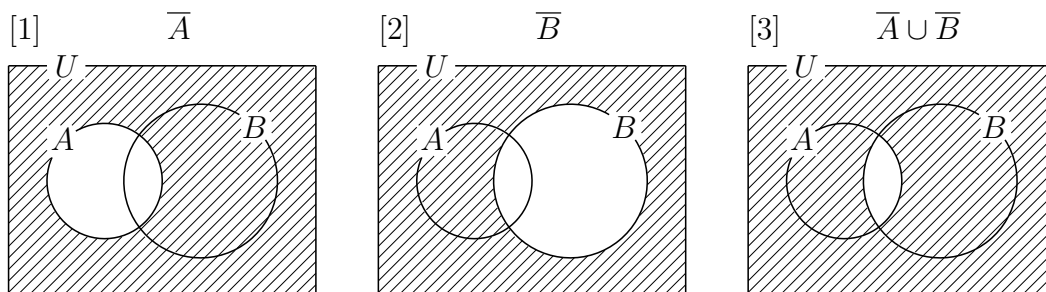
(4)  $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

(5)  $\overline{A} \cap B = \{6\}$

(6)  $A \cap \overline{B} = \{1, 2\}$

練習 0.7  $\overline{A}$  と  $\overline{B}$  は、それぞれ図 [1] と図 [2] の斜線部分であり、その和集合  $\overline{A \cap B}$  は、図 [3] の斜線部分である。

図 [3] の斜線部分は  $\overline{A \cap B}$  であるから、 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  が成り立つ。



演習 0.1  $A \cap B \cap C = \{2, 6\}$ ,  $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$

練習 1.1 (1) 6 (2) 3 (3) 2 (4) 1

練習 1.2 (1)  $n(\overline{B}) = 15$  (2)  $n(\overline{A \cup B}) = 3$  (3)  $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 3$

練習 1.3 100 以下の自然数全体の集合を  $U$  とし,  $U$  の部分集合で 6 の倍数全体の集合を  $A$ , 4 の倍数全体の集合を  $B$  とすると

$$A = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, 6 \cdot 3, \dots, 6 \cdot 16\}$$

$$B = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots, 4 \cdot 25\}$$

(1)  $n(A) = 16$  (答) 16 個

(2) 求めるのは  $n(\overline{A})$  である.

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A) = 100 - 16 = 84 \quad (\text{答}) 84 \text{ 個}$$

(3) 求めるのは  $n(A \cap B)$  である.

$$A \cap B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3, \dots, 12 \cdot 8\}$$

$$\text{よって } n(A \cap B) = 8 \quad (\text{答}) 8 \text{ 個}$$

(4) 求めるのは  $n(A \cup B)$  である.

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 16 + 25 - 8 = 33 \end{aligned} \quad (\text{答}) 33 \text{ 個}$$

練習 1.4 (1) 11 人

(2) 18 人

|                | $B$ | $\overline{B}$ | 合計  |
|----------------|-----|----------------|-----|
| $A$            | 66  | 11             | 77  |
| $\overline{A}$ | 18  | 5              | 23  |
| 合計             | 84  | 16             | 100 |

練習 1.5 この 40 人の集合を  $U$  とし, 通学に自転車を利用する人の集合を  $A$ , バスを利用する人の集合を  $B$  とすると

$$n(A) = 13, n(B) = 16, n(A \cap B) = 5$$

(1) 自転車もバスも利用しない人の集合は  $\overline{A \cup B}$  である.

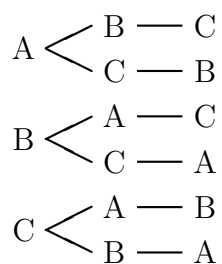
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 13 + 16 - 5 = 24$$

$$\text{よって } n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 24 = 16 \quad (\text{答}) 16 \text{ 人}$$

(2) 自転車を利用するが, バスは利用しない人の集合は  $A \cap \overline{B}$  である.

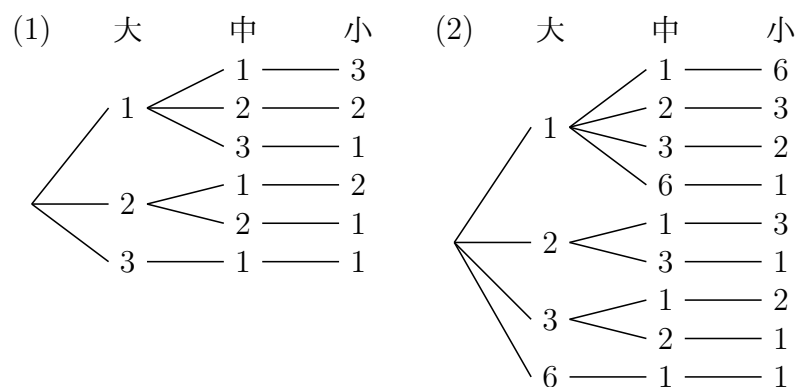
$$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 13 - 5 = 8 \quad (\text{答}) 8 \text{ 人}$$

練習 1.6 ABC, ACB,  
BAC, BCA,  
CAB, CBA



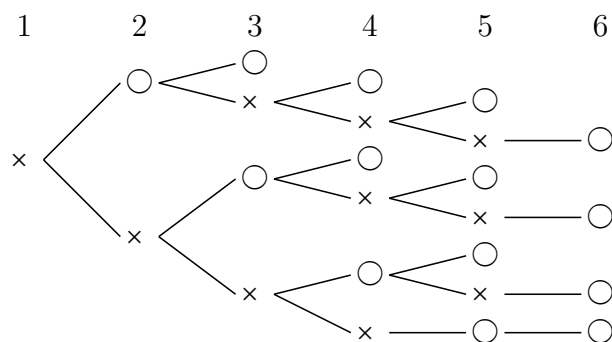
練習 1.7 (1) 下の樹形図により 6通り

(2) 下の樹形図により 9通り



練習 1.8 表を○, 裏を×で表すと, 樹形図は, 下の図のようになる.

よって 10通り



深化 1.1 大中小のさいころのうち, どれか1つでも5の目が出ると, 目の和は必ず7以上となり, 6にはならない.

練習 1.9 (1) 目の和が7になるのは

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$

の6通り.

目の和が8になるのは

$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$

の5通り.

よって、和の法則により  $6 + 5 = 11$  (答) **11 通り**

(2) 目の和が4または8または12になる場合である.

目の和が4になるのは  $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$  の3通り.

目の和が8になるのは 5通り.

目の和が12になるのは  $(6, 6)$  の1通り.

よって、和の法則により  $3 + 5 + 1 = 9$  (答) **9 通り**

練習 1.10 大きいさいころの目が3以上であるのは4通り.

小さいさいころの目が偶数であるのは3通り.

よって、積の法則により  $4 \times 3 = 12$  (通り)

練習 1.11 (1) 積の法則により  $6 \times 6 \times 6 = 216$  (通り)

(2) 積の法則により  $2 \times 2 \times 3 = 12$  (通り)

練習 1.12 (1)  $16 = 2^4$  であるから、16の正の約数は1, 2,  $2^2$ ,  $2^3$ ,  $2^4$  である.

よって、5個ある. (答) **5 個**

(2)  $144 = 2^4 \cdot 3^2$  であるから、144の正の約数は、 $2^4$ の正の約数と $3^2$ の正の約数の積で表される.

$2^4$ の正の約数は5個あり、 $3^2$ の正の約数は1, 3,  $3^2$ の3個ある.

よって、積の法則により  $5 \times 3 = 15$  (答) **15 個**

(3)  $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$  であるから、504の正の約数は、 $2^3$ の正の約数と $3^2$ の正の約数と7の正の約数の積で表される.

$2^3$ の正の約数は1, 2,  $2^2$ ,  $2^3$ の4個、 $3^2$ の正の約数は1, 3,  $3^2$ の3個、7の正の約数は1, 7の2個.

よって、積の法則により  $4 \times 3 \times 2 = 24$  (答) **24 個**

練習 1.13 (1)  ${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$

(2)  ${}_8P_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

(3)  ${}_3P_1 = 3$

(4)  ${}_6P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

練習 1.14 (1)  ${}_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$  (通り)

(2)  ${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$  (個)

練習 1.15 (1)  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  (通り)

(2)  $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$  (通り)

練習 1.16 12 色から 3 色を選んで 1 列に並べる順列の総数と同じである.

よって, 塗り方の総数は  ${}_{12}P_3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$  (答) **1320** (通り)

練習 1.17 (1) 両端の母音の並べ方は,  ${}_5P_2$  通りある.

間に並ぶ残り 6 文字の並べ方は,  $6!$  通りある.

よって, 並べ方の総数は, 積の法則により

$${}_5P_2 \times 6! = 5 \cdot 4 \times 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 14400 \text{ (通り)}$$

(2) 母音 5 個をひとまとめにする.

母音ひとまとめと子音 3 個の並べ方は,  $4!$  通りある.

また, ひとまとめにした母音 5 個の並べ方は,  $5!$  通りある.

よって, 並べ方の総数は, 積の法則により

$$4! \times 5! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2880 \text{ (通り)}$$

練習 1.18 (1) 千の位は、0 以外の数字 1, 2, 3, 4 のどれかであるから、その選び方は 4 通りある。そのどの場合に対しても、百、十、一の位には、残り 4 個の数字から 3 個取って並べるから、その並べ方は  ${}_4P_3$  通りある。  
よって、求める個数は、積の法則により

$$4 \times {}_4P_3 = 4 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{96} \text{ (個)}$$

(2) 一の位は、数字 1, 3 のいずれかであるから、その選び方は 2 通りある。そのどの場合に対しても、千の位は、0 と一の位の数字以外の 3 個の数字のどれかであるから、その選び方は 3 通りある。さらに、百、十の位には、残り 3 個の数字から 2 個取って並べるから、その並べ方は  ${}_3P_2$  通りある。  
よって、求める個数は、積の法則により

$$2 \times 3 \times {}_3P_2 = 2 \times 3 \times 3 \cdot 2 = \mathbf{36} \text{ (個)}$$

(3) 4 桁の偶数は、4 桁の整数から 4 桁の奇数を除いたものである。  
よって、(1), (2) から、求める個数は

$$96 - 36 = \mathbf{60} \text{ (個)}$$

別解 一の位は、数字 0, 2, 4 のどれかである。

[1] 一の位の数字が 0 の場合

千、百、十の位には、残り 4 個の数字から 3 個取って並べるから、その並べ方は  ${}_4P_3$  通りある。

[2] 一の位の数字が 2, 4 の場合

千の位は、0 と一の位の数字以外の 3 個の数字のどれかであるから、その選び方は 3 通りある。そのどの場合に対しても、百、十の位には、残り 3 個の数字から 2 個取って並べるから、その並べ方は  ${}_3P_2$  通りある。

[1], [2] から、求める個数は、積の法則と和の法則により

$${}_4P_3 + 2 \times 3 \times {}_3P_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \times 3 \times 3 \cdot 2 = \mathbf{60} \text{ (個)}$$

練習 1.19 異なる 6 個の円順列であるから、その総数は

$$(6 - 1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120} \text{ (通り)}$$

練習 1.20 大人 5 人の円順列の総数は、 $(5 - 1)!$  通りある。そのどの場合に対しても、子ども 5 人が大人の間に 1 人ずつ並ぶ方法は、 $5!$  通りある。

よって、並び方の総数は、積の法則により

$$(5 - 1)! \times 5! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{2880} \text{ (通り)}$$

**練習 1.21** A と B をひとまとめにする．A, B 以外の 4 人とひとまとめにした A, B の円順列の総数は,  $(5 - 1)!$  通りある．そのどの場合に対しても, ひとまとめにした A, B の並び方は,  $2!$  通りある．  
よって, 並び方の総数は, 積の法則により

$$(5 - 1)! \times 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1 = \mathbf{48} \text{ (通り)}$$

**別解 1** まず, B 以外が円形に並び, そのあとで B が並ぶと考える．A, C, D, E, F の円順列の総数は,  $(5 - 1)!$  通りある．そのどの場合に対しても, B の並ぶ位置は, A の両隣の 2 通りの場合がある．  
よって, 並び方の総数は, 積の法則により

$$(5 - 1)! \times 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 = \mathbf{48} \text{ (通り)}$$

**別解 2** まず, A, B が両端になるように, 6 人が 1 列に並び, その両端をつなげて輪の形にすると考える．よって, 求める並び方の総数は, A, B が両端になるように, 6 人が 1 列に並ぶ並び方の総数を求めて

$${}_2P_2 \times {}_4P_4 = 2! \times 4! = 2 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{48} \text{ (通り)}$$

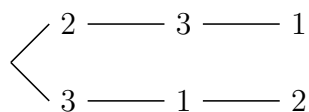
**練習 1.22** (1) 4 個から 2 個取る重複順列であるから

$$4^2 = 4 \times 4 = \mathbf{16} \text{ (通り)}$$

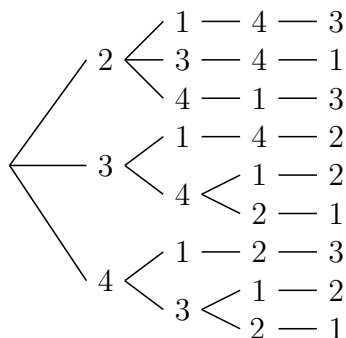
(2) 4 個から 3 個取る重複順列であるから

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = \mathbf{64} \text{ (通り)}$$

演習 1.1 3 個の完全順列の総数を  $M_3$  とすると、下の樹形図から  $M_3 = 2$



4 個の完全順列の総数を  $M_4$  とすると、下の樹形図から  $M_4 = 9$



$M_3$  と  $M_4$  を用いて、5 個の完全順列の総数を  $M_5$  を求める.

5 番目に置く数の選び方は 1 から 4 の 4 通りである. ここで選んだ数を  $k$  とする. 次に,  $k$  番目が 5 かどうかで場合分けをする.  $k$  番目が 5 であれば,  $k$  番目に置かれた 5 と 5 番目に置かれた  $k$  を除く 3 個の数の並べ方の総数は, 3 個の数による完全順列の数, すなわち  $M_3$  に等しい.  $k$  番目が 5 でない場合は, 5 番目に置かれた  $k$  を除く 4 個の数の並べ方の総数は 4 個の数による完全順列の数, すなわち  $M_4$  に等しい.  $k = 1, 2, 3, 4$  であるから

$$M_5 = 4(M_3 + M_4) = 4(2 + 9) = 44$$

補足  $M_2 = 2$ ,  $M_3 = 9$  および  $M_n = (n-1)(M_{n-2} + M_{n-1})$  より ( $n \geq 4$ ),  $M_n$  は順次求めることができる.

練習 1.23 (1)  ${}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

(2)  ${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$

(3)  ${}_8C_1 = \frac{8}{1} = 8$

(4)  ${}_5C_5 = 1$

練習 1.24 (1)  ${}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$  (通り)

(2)  ${}_7C_4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$  (通り)

練習 1.25 (1)  ${}_5C_4 = {}_5C_{5-4} = {}_5C_1 = 5$

$$(2) {}_9C_6 = {}_9C_{9-6} = {}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

$$(3) {}_{20}C_{18} = {}_{20}C_{20-18} = {}_{20}C_2 = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$$

練習 1.26 (1)  ${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$  (個)

$$(2) {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ (本)}$$

(3) (2) の結果から辺の数 6 を引いて  $15 - 6 = 9$  (本)

練習 1.27 (1) 大人 2 人の選び方は  ${}_3C_2$  通りある.

そのどの場合に対しても, 子ども 2 人の選び方は  ${}_5C_2$  通りある.

よって, 求める選び方の総数は, 積の法則により

$${}_3C_2 \times {}_5C_2 = {}_3C_1 \times {}_5C_2 = 3 \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 30 \text{ (通り)}$$

(2) 8 人から 4 人の選び方は  ${}_8C_4$  通りある.

大人が 1 人も選ばれず, 4 人とも子どもとなる選び方は  ${}_5C_4$  通りある.

よって, 求める選び方の総数は

$${}_8C_4 - {}_5C_4 = {}_8C_4 - {}_5C_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 5 = 65 \text{ (通り)}$$

深化 1.2 子どもが 1 人含まれる場合, 選び方の総数は

$${}_6C_4 \times {}_4C_1 = {}_6C_2 \times {}_4C_1 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times 4 = 15 \times 4 = 60 \text{ (通り)}$$

子どもが 2 人含まれる場合, 選び方の総数は

$${}_6C_3 \times {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 20 \times 6 = 120 \text{ (通り)}$$

子どもが 3 人含まれる場合, 選び方の総数は

$${}_6C_2 \times {}_4C_3 = {}_6C_2 \times {}_4C_1 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times 4 = 15 \times 4 = 60 \text{ (通り)}$$

子どもが 4 人含まれる場合, 選び方の総数は

$${}_6C_1 \times {}_4C_4 = 6 \times 1 = 6 \text{ (通り)}$$

したがって, 子どもが少なくとも 1 人含まれる選び方の総数は

$$60 + 120 + 60 + 6 = 246 \text{ (通り)}$$

練習 1.28 (1) A 組の 2 人の選び方は、 ${}_8C_2$  通りある。

残りの 6 人から B 組の 2 人の選び方は  ${}_6C_2$  通り、さらに残りの 4 人から C 組の 2 人の選び方は  ${}_4C_2$  通りある。

A 組, B 組, C 組の人が決まれば, 残りの D 組の 2 人は決まる。

よって, 分け方の総数は

$${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \mathbf{2520} \text{ (通り)}$$

(2) (1) の分け方で, A, B, C, D の区別をなくすと同じ組が  $4!$  通りできる。

よって, 分け方の総数は

$$\frac{2520}{4!} = \frac{2520}{24} = \mathbf{105} \text{ (通り)}$$

(3) A 組 3 人, B 組 3 人, C 組 2 人の 3 つの組に分けることを考え, A と B の区別をなくせばよい。よって, 分け方の総数は

$$\frac{{}_8C_3 \times {}_5C_3}{2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{1}{2 \cdot 1} = \mathbf{280} \text{ (通り)}$$

練習 1.29 A が 3 個, N が 2 個, B が 1 個あるから

$$\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1 \times 1} = \mathbf{60} \text{ (通り)}$$

練習 1.30 上へ 1 区画進むことを  $\uparrow$  で, 右へ 1 区画進むことを  $\rightarrow$  で表す。

(1) A から B へ行く最短の道順は,  $\uparrow$  3 個と  $\rightarrow$  5 個を 1 列に並べる順列の総数に等しい。よって, 求める最短の道順の総数は

$$\frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{56} \text{ (通り)}$$

(2) A から C へ行く最短の道順は,  $\uparrow$  1 個と  $\rightarrow$  2 個を 1 列に並べる順列の総数に等しい。C から B へ行く最短の道順は,  $\uparrow$  2 個と  $\rightarrow$  3 個を 1 列に並べる順列の総数に等しい。よって, 求める最短の道順の総数は

$$\frac{3!}{1!2!} \times \frac{5!}{2!3!} = 3 \times 10 = \mathbf{30} \text{ (通り)}$$

(3) A から B へ行く最短の道順は, (1) より 56 通り。このうち, C を通るものが, (2) より 30 通りあるから, 求める最短の道順の総数は

$$56 - 30 = \mathbf{26} \text{ (通り)}$$

演習 1.2 (1) 4 個の文字から重複を許して 7 個取る組合せの総数は、7 個の ○ と 3 個の | を並べる順列の総数に等しい。よって、求める総数は

$${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{120} \text{ (通り)}$$

(2) 6 個の  $(a+b+c)$  から、たとえば、それぞれ  $a$  を取って掛けると  $a^6$  となる。したがって、 $(a+b+c)^6$  の展開式の異なる項の数は、3 個の文字から重複を許して 6 個取って作る組合せの総数に等しい。

3 個の文字から重複を許して 6 個取る組合せの総数は、6 個の ○ と 2 個の | を並べる順列の総数に等しい。よって、求める項の数は

$${}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = \mathbf{28} \text{ (個)}$$

演習 1.3 等式  $x+y+z=10$  を満たす負でない整数  $x, y, z$  の組の個数は、異なる 3 個のものから重複を許して 10 個取る組合せの総数に等しい。異なる 3 個のものから重複を許して 10 個取る組合せの総数は、10 個の ○ と 2 個の | を並べる順列の総数に等しい。よって、求める組の個数は

$${}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = \mathbf{66} \text{ (個)}$$

問題 1.1 1 から 100 までの自然数全体の集合を  $U$  とし、 $U$  の部分集合で、3 で割り切れる数全体の集合を  $A$ 、4 で割り切れる数全体の集合を  $B$  とすると

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 33\},$$

$$B = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots, 4 \cdot 25\}$$

$$\text{よって } n(A) = 33, n(B) = 25$$

3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる数全体の集合は  $A \cup B$  である。また、 $A \cap B$  は、 $U$  の部分集合で、3 でも 4 でも割り切れる数全体の集合、すなわち、12 で割り切れる数全体の集合であるから

$$A \cap B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3, \dots, 12 \cdot 8\} \quad \text{よって } n(A \cap B) = 8$$

したがって、3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる数の個数は

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 33 + 25 - 8 = 50 \end{aligned} \quad \text{(答) } \mathbf{50 \text{ 個}}$$

問題 1.2 (1) すべての目の出方は  $6 \times 6 = 36$  (通り)

目の積が奇数になるのは、2 個の目がいずれも奇数のときであるから

$$3 \times 3 = 9 \text{ (通り)}$$

求める場合の数は、全体から目の積が奇数の場合の数を除けばよいから

$$36 - 9 = \mathbf{27} \text{ (通り)}$$

(2) 目の和が偶数になるのは、2 個の目がいずれも奇数、または 2 個の目がいずれも偶数の場合であるから

$$4 \times 3 + 3 \times 3 = \mathbf{18} \text{ (通り)}$$

問題 1.3 (1) [1] 一の位の数字が 0 の場合

百、十の位には、残り 5 個の数字から 2 個取って並べるから、その並び方は  ${}_5P_2$  通りある。

[2] 一の位の数字が 5 の場合

百の位は、0 と一の位の数字以外の 4 個の数字のどれかであるから、その選び方は 4 通りある。そのどの場合に対しても、十の位は、一の位と百の位の数字以外の 4 個の数字のどれかであるから、その選び方は 4 通りある。

[1] , [2] から、求める個数は、積の法則と和の法則より

$${}_5P_2 + 4 \times 4 = 5 \cdot 4 + 16 = \mathbf{36} \text{ (個)}$$

(2) 百の位は、数字 3, 4, 5 のどれかである。

[1] 百の位の数字が 4, 5 のいずれかの場合

十、一の位には、残り 5 個の数字から 2 個取って並べるから、その並び方は  ${}_5P_2$  通りある。

[2] 百の位の数字が 3 で、十の位の数字が 4, 5 のいずれかの場合

一の位は、残り 4 個の数字のどれかであるから、その選び方は 4 通りある。

[3] 百の位の数字が 3 で、十の位の数字が 2 の場合

一の位は、数字 1, 4, 5 のどれかであるから、その選び方は 3 通りある。

[1] ~ [3] から、求める個数は、積の法則と和の法則より

$$2 \times {}_5P_2 + 2 \times 4 + 3 = 2 \times 5 \cdot 4 + 8 + 3 = \mathbf{51} \text{ (個)}$$

問題 1.4 7 個の要素について，部分集合に含まれる，含まれないのどちらかであるから，その選び方は 2 通りある．よって，求める個数は，2 個から 7 個取る重複順列の総数に等しいから

$$2^7 = 128 \text{ (個)}$$

問題 1.5 4 本の平行線から 2 本を選び，それらに交わる 3 本の平行線から 2 本を選ぶと，平行四辺形が 1 個できる．よって，求める平行四辺形の個数は

$${}_4C_2 \times {}_3C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 18 \text{ (個)}$$

問題 1.6 異なる  $n$  個から  $r$  個を取り出すとき，特定のもの  $a$  を含む組と含まない組ができる．

$a$  を含む組の総数は， $(n - 1)$  個から  $(r - 1)$  個取る組合せの総数  ${}_{n-1}C_{r-1}$  に等しい．

$a$  を含まない組の総数は， $(n - 1)$  個から  $r$  個取る組合せの総数  ${}_{n-1}C_r$  に等しい．よって，和の法則により等式  ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$  が成り立つ．

問題 1.7 下の面は赤で塗るとすると，上の面は赤以外の 5 色のいずれかで塗ればよいから，上の面の塗り方は 5 通り．側面は，残り 4 色の円順列になるから，立方体の塗り方の総数は

$$5 \times (4 - 1)! = 5 \times 3! = 30 \text{ (通り)}$$

問題 1.8 (1) (例) 大人 4 人，子ども 3 人の中から大人 2 人と子ども 1 人を選ぶ選び方は何通りあるか．

(2) (例) 大人 4 人，子ども 3 人が 1 列に並ぶとき，大人と子どもが交互に並ぶ並び方は何通りあるか．

練習 1.31  $A = \{\text{表, 表}\}$ ,  $B = \{(\text{表, 裏}), (\text{裏, 表})\}$

練習 1.32 起こりうるすべての出方は 6 通り．

(1) 奇数の目が出るのは，3 通り．

よって，奇数の目が出る確率は  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(2) 3 以上の目の出るのは，4 通り．

よって，3 以上の目が出る確率は  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

練習 1.33 3 枚の硬貨に、それぞれ表、裏の 2 通りの出方がある。

よって、起こりうるすべての場合の数は

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (通り)}$$

1 枚だけ表が出るのは、以下の 3 通り。

(表, 裏, 裏), (裏, 表, 裏), (裏, 裏, 表)

よって、1 枚だけ表が出る確率は

$$\frac{3}{8}$$

起こりうるすべての場合

(表, 表, 表)

(表, 表, 裏)

(表, 裏, 表)

(裏, 表, 表)

(表, 裏, 裏)

(裏, 表, 裏)

(裏, 裏, 表)

(裏, 裏, 裏)

練習 1.34 2 個のさいころの目の出方は  $6 \times 6 = 36$  (通り)

(1) 目の和が 7 になるのは、以下の 6 通り。

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)

よって、求める確率は  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(2) 2 個とも偶数の目が出るのは  $3 \times 3 = 9$  (通り)

よって、求める確率は  $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

深化 1.3 目の和が 3 になる, 4 になる, ..., 11 になるという事象は根元事象ではないから。

練習 1.35 4 人全員の並び方は,  $4!$  通りある。

(1) A が左端のとき, A 以外の 3 人の並び順は,  $3!$  通りある。

よって、求める確率は  $\frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$

(2) B が左端, A が右端のとき, A, B 以外の 2 人の並び順は,  $2!$  通りある。

よって、求める確率は  $\frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}$

練習 1.36 10 人から 4 人選ぶ組合せは、 ${}_{10}C_4$  通りある.

(1) 大人が 2 人、子どもが 2 人の組合せは、 ${}_6C_2 \times {}_4C_2$  通りある.

よって、求める確率は  $\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times 1}{{}_{10}C_4} = \frac{3}{7}$

(2) 全員が子どもの組合せは、 ${}_4C_4$  通りある.

よって、求める確率は  $\frac{{}_4C_4}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{210}$

練習 1.37  $A \cap B = \{7, 9\}$ ,  $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

練習 1.38  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ ,  $C = \{3, 6\}$  であり

$$A \cap B = \{2\}, \quad B \cap C = \phi, \quad C \cap A = \{6\}$$

よって、 $B$  と  $C$  が互いに排反である.

練習 1.39 (1)  $\frac{10}{100} + \frac{20}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

(2)  $\frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{20}{100} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

練習 1.40 「3 個とも同じ色である」という事象は、「3 個とも白玉である」という事象  $A$ , 「3 個とも青玉である」という事象  $B$  の和事象  $A \cup B$  である.

$A$ ,  $B$  は互いに排反であるから、加法定理により

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) = \frac{{}_3C_3}{{}_9C_3} + \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} \\ &= \frac{1}{84} + \frac{4}{84} = \frac{5}{84} \end{aligned}$$

練習 1.41 「3 の倍数でない」という事象は、「3 の倍数である」という事象の余事象である.

また、1 から 200 までの番号のうち、3 の倍数は 66 個ある.

よって、3 の倍数の番号を引く確率は  $\frac{66}{200}$

したがって、求める確率は  $1 - \frac{66}{200} = 1 - \frac{33}{100} = \frac{67}{100}$

練習 1.42 (1) 2 個の目がともに 2 でない確率は

$$\frac{5 \times 5}{6 \times 6} = \frac{25}{36}$$

求めるのはこの余事象の確率であるから

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

(2) 2 個とも同じ目である確率は

$$\frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

求めるのはこの余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

練習 1.43 3 の倍数であるという事象を  $A$ , 4 の倍数であるという事象を  $B$  とする.

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 16\},$$

$$B = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots, 4 \cdot 12\},$$

$$A \cap B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3, 12 \cdot 4\}$$

$$\text{よって} \quad P(A) = \frac{16}{50}, \quad P(B) = \frac{12}{50}, \quad P(A \cap B) = \frac{4}{50}$$

$$\begin{aligned} \text{(1) 求める確率は} \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{16}{50} + \frac{12}{50} - \frac{4}{50} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25} \end{aligned}$$

$$\text{(2) 求める確率は} \quad P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

練習 1.44 2 枚の硬貨を投げる試行と 1 個のさいころを投げる試行は独立である.

$$\text{(1)} \quad \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{8}$$

$$\text{(2)} \quad \frac{2}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

練習 1.45 (1) 硬貨を投げる 3 回の試行は独立である.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(2) 求めるのは (1) の事象の余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

練習 1.46 (1) A の袋から玉を 1 個取り出す試行と, B の袋から玉を 1 個取り出す試行は独立である.

A の袋から赤玉を取り出す確率は  $\frac{3}{5}$

B の袋から白玉を取り出す確率は  $\frac{4}{6}$

よって, 求める確率は  $\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

(2) (1) の場合と, A から白玉, B から赤玉を取り出す場合がある.

A から白玉, B から赤玉を取り出す確率は

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{30}$$

これらの事象は互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{12}{30} + \frac{4}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

練習 1.47 さいころを 1 回投げるとき, 1 の目が出る確率は  $\frac{1}{6}$

よって, 4 回投げて 1 の目がちょうど 3 回出る確率は

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-3} = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{324}$$

練習 1.48 (1) 1回の試行で赤玉が出る確率は  $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$  である.

5回のうち赤玉が4回以上出るのは、次の場合である.

赤玉がちょうど4回出る または 赤玉が5回出る

これらの事象は互いに排反である. よって、求める確率は

$${}_5C_4 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{5-4} + \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{1053}{3125}$$

(2) 5回目に2度目の赤玉が出るのは、4回目までに赤玉がちょうど1回出て、5回目に2度目の赤玉が出る場合である.

よって、求める確率は

$${}_4C_1 \left(\frac{3}{5}\right) \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{4-1} \times \frac{3}{5} = 4 \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{288}{3125}$$

練習 1.49 硬貨を1回投げるとき、表が出る確率は  $\frac{1}{2}$

5回のうち、表が  $r$  回出るとすると、裏は  $(5-r)$  回出るから、5回で原点にもどるのは

$$2r + (-3)(5-r) = 0$$

が成り立つときである.

これを解くと  $r = 3$

よって、P が原点にもどっているのは5回のうち表がちょうど3回出るときである. したがって、求める確率は

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-3} = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

練習 1.50 偶数の札は6枚あり、その中で青色の札は3枚あるから

$$P_B(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

練習 1.51 グループ全体から選び出された1人が、子どもであるという事象を  $A$ 、提案に賛成であるという事象を  $B$  とすると

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

よって、求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{15}{100} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$$

**練習 1.52** A が当たるという事象を  $A$ , B が当たるという事象を  $B$  とする. また, A がはずれるという事象を  $C$ , B がはずれるという事象を  $D$  とする.

(1) 求める確率  $P(A \cap D)$  は, 乗法定理により

$$P(A \cap D) = P(A)P_A(D)$$

A が当たったときに, 残りのくじは 9 本で当たりくじを 3 本含むから

$$P_A(D) = \frac{6}{9}$$

$$\text{よって} \quad P(A \cap D) = P(A)P_A(D) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

(2) 求める確率  $P(C \cap B)$  は, 乗法定理により

$$P(C \cap B) = P(C)P_C(B)$$

A がはずれたときに, 残りのくじは 9 本で当たりくじを 4 本含むから

$$P_C(B) = \frac{4}{9}$$

$$\text{よって} \quad P(C \cap B) = P(C)P_C(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

(3) 求める確率  $P(C \cap D)$  は, 乗法定理により

$$P(C \cap D) = P(C)P_C(D)$$

A がはずれたときに, 残りのくじは 9 本で当たりくじを 4 本含むから

$$P_C(D) = \frac{5}{9}$$

$$\text{よって} \quad P(C \cap D) = P(C)P_C(D) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

**練習 1.53** 取り出した玉がすべて赤玉である確率は, 確率の乗法定理により

$$\frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{286}$$

練習 1.54 B が当たるという事象は、次の 2 つの事象の和事象である。

[1] A が当たり、B も当たる場合。

$$\text{その確率は } \frac{5}{12} \times \frac{4}{11}$$

[2] A がはずれ、B が当たる場合。

$$\text{その確率は } \frac{7}{12} \times \frac{5}{11}$$

[1] , [2] は互いに排反であるから、B が当たる確率は

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{55}{132} = \frac{5}{12}$$

演習 1.4 選び出した 1 個が、グループ A のものであるという事象を  $A$ 、グループ B のものであるという事象を  $B$  とすると

$$P(A) = \frac{1}{5}, \quad P(B) = \frac{4}{5}, \quad P_A(E) = \frac{2}{100}, \quad P_B(E) = \frac{3}{100}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) \end{aligned}$$

$$\text{よって } P(E) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{100} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{100} = \frac{14}{500} = \frac{7}{250}$$

また、求めるのは条件付き確率  $P_E(A)$  であるから

$$P_E(A) = \frac{P(E \cap A)}{P(E)} = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{2}{500} \div \frac{14}{500} = \frac{1}{7}$$

演習 1.5 [1] 開けるドアを変更するとき、賞品を得る確率は  $\frac{2}{3}$

[2] 開けるドアを変更しないとき、賞品を得る確率は  $\frac{1}{3}$

したがって、開けるドアを変更して商品を得る確率の方が大きい。

練習 1.55

| 和  | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             | 計 |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|
| 確率 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

出る目の期待値は

$$\begin{aligned} &2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} \\ &+ 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7 \end{aligned}$$

練習 1.56 表の出た硬貨の枚数が 5, 4, 3 となる確率は、それぞれ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}, \quad {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}, \quad {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$

よって、確率の表は次のようになる。

|    |                |                |                 |                 |   |
|----|----------------|----------------|-----------------|-----------------|---|
| 得点 | 40             | 16             | 4               | 0               | 計 |
| 確率 | $\frac{1}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{16}{32}$ | 1 |

よって、求める期待値は

$$40 \times \frac{1}{32} + 16 \times \frac{5}{32} + 4 \times \frac{10}{32} + 0 \times \frac{16}{32} = \frac{160}{32} = 5$$

練習 1.57 [1] を選んだときの期待値は 600 円

[2] を選んだときの期待値は

$$1000 \times \frac{1}{2} + 500 \times \frac{1}{2} = 750 \quad \text{すなわち} \quad 750 \text{ 円}$$

[3] を選んだときの期待値は

$$200 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times \frac{1}{6} = 700 \quad \text{すなわち} \quad 700 \text{ 円}$$

よって、[2] を選ぶのが期待値が最も大きい。

練習 1.58 表が出る硬貨の枚数は、0, 1, 2, 3 のいずれかである。

$$\text{表が 0 枚出る確率は } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad \text{表が 1 枚出る確率は } {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\text{表が 2 枚出る確率は } {}_3C_2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}, \quad \text{表が 3 枚出る確率は } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

よって、受け取る金額を  $X$  円とすると、次のような表ができる。

|     |               |               |               |               |   |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---|
| $X$ | 0             | 50            | 100           | 150           | 計 |
| 確率  | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

したがって、ゲームに参加したときの受け取る金額の期待値は

$$0 \times \frac{1}{8} + 50 \times \frac{3}{8} + 100 \times \frac{3}{8} + 150 \times \frac{1}{8} = 75 \quad \text{すなわち} \quad 75 \text{ 円}$$

よって、受け取る金額の期待値がゲームの参加料 80 円より小さいから、このゲームに参加することは得であるとはえない。

問題 1.9 3 人の手の出し方は  $3 \times 3 \times 3 = 27$

(1) A だけが勝つ手の出し方は 3 通り.

よって, 求める確率は  $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

(2) 全員が違う手の出し方は  $3! = 6$  (通り)

よって, 求める確率は  $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

(3) あいこになるのは, 全員が違う手か全員が同じ手を出す出す場合で  
 $6 + 3 = 9$  (通り)

よって, 求める確率は  $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

問題 1.10 (1) 3 本ともはずれくじである確率は

$$\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}$$

求めるのは, この余事象の確率であるから  $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(2) 求める確率は  $\frac{1 \times {}_3C_1 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_3} = 3 \times 6 \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3}{20}$

(3) 2 等を 2 本引く確率は  $\frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = 3 \times 7 \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{21}{120}$

2 等を 3 本引く確率は  $\frac{{}_3C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{120}$

よって, 求める確率は  $\frac{21}{120} + \frac{1}{120} = \frac{22}{120} = \frac{11}{60}$

問題 1.11 さいころを 1 回投げるとき, 3 の倍数の目が出る確率は  $\frac{1}{3}$

5 回のうち, 3 の倍数の目が  $r$  回出るとすると, P の座標が 3 であるのは

$$r + (-1)(5 - r) = 3 \quad \text{すなわち} \quad r = 4$$

よって, P の座標が 3 であるのは 5 回のうち 3 の倍数の目がちょうど 4 回出るときである. したがって, 求める確率は

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-4} = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{243}$$

問題 1.12 (1)  $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{7}{40}$

(2) 次の4つの場合がある.

[1] A, B, Cともに当たる場合. その確率は

$$\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{720}$$

[2] Aがはずれ, B, Cが当たる場合. その確率は

$$\frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{42}{720}$$

[3] Bがはずれ, A, Cが当たる場合. その確率は

$$\frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{42}{720}$$

[4] A, Bがはずれ, Cが当たる場合. その確率は

$$\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{126}{720}$$

[1] ~ [4] は互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{6}{720} + \frac{42}{720} + \frac{42}{720} + \frac{126}{720} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$$

補足 A, B, Cが当たる確率は, すべて  $\frac{3}{10}$  である.

問題 1.13 (1) 1 問だけ正解する確率は

$${}_6C_1 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{192}{729} = \frac{64}{243}$$

(2) 0 問正解する確率は  $\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$

1 問だけ正解する確率は, (1) より  $\frac{192}{729}$

2 問だけ正解する確率は  ${}_6C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{240}{729}$

3 問だけ正解する確率は  ${}_6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{160}{729}$

4 問だけ正解する確率は  ${}_6C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{60}{729}$

5 問だけ正解する確率は  ${}_6C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{729}$

6 問正解する確率は  $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$

よって, 正解する問題数を  $X$  問とすると, 次のような表ができる.

| $X$ | 0                | 1                 | 2                 | 3                 | 4                | 5                | 6               | 計 |
|-----|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|-----------------|---|
| 確率  | $\frac{64}{729}$ | $\frac{192}{729}$ | $\frac{240}{729}$ | $\frac{160}{729}$ | $\frac{60}{729}$ | $\frac{12}{729}$ | $\frac{1}{729}$ | 1 |

したがって, 正解する問題数の期待値は

$$0 \times \frac{64}{729} + 1 \times \frac{192}{729} + 2 \times \frac{240}{729} + 3 \times \frac{160}{729} + 4 \times \frac{60}{729} + 5 \times \frac{12}{729} + 6 \times \frac{1}{729} = \frac{1458}{729} = 2$$

よって **2 問**

補足 1 回の試行において, 事象  $A$  の起こる確率を  $p$  とし, この試行を  $n$  回行くと,  $A$  の起こる期待回数は  $np$  となることが知られている (数学 B [確率分布] を参照).  $n = 6$ ,  $p = \frac{1}{3}$  であるから

$$6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \text{ (問)}$$

章末 1.1 百の位の数字が1であるとき、十、一の位には、残り5個の数字から2個取って並べるから、その並べ方は  ${}_5P_2$  通りある。

よって、百の位の数字が1である3桁の整数は  ${}_5P_2$  個ある。

${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$  であるから、20番目の数までは百の位の数字が1である。

同様に、百の位の数字が2である3桁の整数は20個あるから、40番目の数までは百の位の数字が2である。

百の位の数字が3で、十の位の数字が0である整数は4個ある。

百の位の数字が3で、十の位の数字が1のとき、順に310, 312と続くから、46番目の数は **312**

章末 1.2 (1) 大人1人の位置を基準にして考えると、もう1人の大人の位置はその向かい合う席に決まる。

残りの席に子ども4人が座ればよいから、求める並び方は

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24} \text{ (通り)}$$

(2) 大人1人の位置を基準にして考えると、もう1人の大人の位置は2通りある。

残りの席に子ども4人が座ればよいから、求める並び方は

$$2 \times 4! = 2 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{48} \text{ (通り)}$$

章末 1.3 (1) 0から9までの10個の数字から2個を選ぶ組合せは  ${}_{10}C_2$  通りある。

同じ数字を2個ずつ含む4個の数字を1列に並べる順列は  $\frac{4!}{2!2!}$  通りある。

よって、条件を満たす番号の総数は

$${}_{10}C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \mathbf{270} \text{ (個)}$$

(2) 異なる4個の数字を1組決めると適する数字の並び方が1個作れる。

よって、条件を満たす番号の総数は

$${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{210} \text{ (個)}$$

章末 1.4 (1) A の袋の中の白玉の個数が増えるのは、A から黒玉を取り出し、B からは白玉を取り出す場合である。

A の袋から黒玉を取り出し B の袋に入れたとき、B の袋には白玉 2 個と黒玉 5 個が入っている。よって、求める確率は

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{35}$$

(2) A の袋の中の白玉の個数が変わっていない場合は、次の 2 つの場合である。

[1] A の袋から白玉を取り出し、B の袋からも白玉を取り出す場合。

A の袋から白玉を取り出し、B の袋に入れたとき、B の袋には白玉 3 個と黒玉 4 個が入っている。

よって、この場合の確率は  $\frac{3}{5} \times \frac{3}{7}$

[2] A の袋から黒玉を取り出し、B の袋からも黒玉を取り出す場合。

[1] と同様に考えて、この場合の確率は  $\frac{2}{5} \times \frac{5}{7}$

[1] , [2] は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{19}{35}$$

別解 A の袋の中の白玉の個数が減るのは、A から白玉を取り出し、B からは黒玉を取り出す場合であるから、その確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

よって、白玉の個数が変わらない確率は、(1) より

$$1 - \left( \frac{4}{35} + \frac{12}{35} \right) = \frac{19}{35}$$

章末 1.5 (1) 3 人の手の出し方は  $3 \times 3 \times 3 = 27$  (通り)

勝つ 1 人の選び方は 3 通りで、そのときの手の出し方が 3 通りあるから、求める確率は

$$\frac{3 \times 3}{27} = \frac{1}{3}$$

(2) (1) と同様に、負ける 1 人の選び方は 3 通りで、そのときの手の出し方は 3 通りあるから、求める確率は

$$\frac{3 \times 3}{27} = \frac{1}{3}$$

- (3) [1] 1回目, 2回目とも, 3人が残る場合あいこになる確率は, 全員が違う手の出し方が  $3! = 6$ (通り) あり, 全員が同じ手の出し方が 3通りあるから

$$\frac{6+3}{27} = \frac{1}{3}$$

よって  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

- [2] 1回目は3人が残り, 2回目に2人が残る場合

2人のうち1人が勝つ確率は  $\frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$

よって  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

- [3] 1回目に2人が残り, 2回目はあいこの場合

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

以上から, 求める確率は  $\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{5}{27}$

章末 1.6 番号札の枚数は  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$  (枚)

それぞれの番号札を引く確率は, 次の表のようになる.

| 番号 | 1              | 2              | 3              | 4              | 5              | 計 |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|
| 確率 | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{3}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{5}{15}$ | 1 |

よって, ①でもらえる金額の期待値は

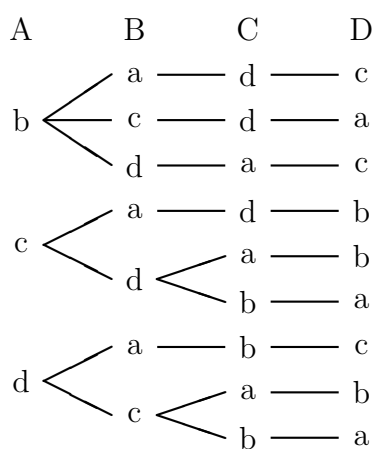
$$100 \times \frac{1}{15} + 200 \times \frac{2}{15} + 300 \times \frac{3}{15} + 400 \times \frac{4}{15} + 500 \times \frac{5}{15} = \frac{5500}{15} = \frac{1100}{3}$$

②でもらえる金額の期待値は

$$1000 \times \frac{5}{15} = \frac{1000}{3}$$

したがって, もらえる金額の期待値が大きい ①を選ぶ方が得である.

章末 1.7 A, B, C, D の品物をそれぞれ a, b, c, d として, 適する場合の樹形図をかくと, 下の図のようになる. よって 9 通り



補足 27 ページの完全順列を参照.

章末 1.8 (1) 6 人それぞれについて, A に入れるか B に入れるかの 2 通りであるから  
 $2^6 = 64$  (通り)

(2) (1) の分け方のうち, A に全員入る方法と B に全員入る方法を除くと  
 $64 - 2 = 62$  (通り)

この分け方で, A, B の区別をなくせばよいから

$$\frac{62}{2!} = 31 \text{ (通り)}$$

章末 1.9 (1) 異なる 3 個のものから重複を許して 5 個取って作る組合せの総数，すなわち 5 個の○と 2 個の | を並べる順列の総数に等しいから

$${}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \mathbf{21} \text{ (個)}$$

(2)  $x - 1 = X$ ,  $y - 1 = Y$ ,  $z - 1 = Z$  とおくと

$$X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$$

$x = X + 1$ ,  $y = Y + 1$ ,  $z = Z + 1$  を  $x + y + z = 10$  に代入すると

$$X + Y + Z = 7$$

等式を満たす負でない整数  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  の組の総数は，異なる 3 個のものから重複を許して 7 個取って作る組合せの総数，すなわち 7 個の○と 2 個の | を並べる順列の総数に等しいから

$${}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = \mathbf{36} \text{ (個)}$$

別解 10 個の○を 1 列に並べる．このとき，○と○の間 9 か所から 2 つを選んで仕切りを入れて A|B|C としたときの，A, B, C の部分にある○の数をそれぞれ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  とすると組が 1 つ決まるから

$${}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = \mathbf{36} \text{ (個)}$$

章末 1.10 (1) 3個のさいころを同時に投げるときの目の出方の総数は  $6^3$  である. 3個の目の最大値が 5 以下である場合の数は, 1, 2, 3, 4, 5 から重複を許して 3 個取り出す順列の総数に等しいから,  $5^3$  である. よって, 求める確率は

$$\frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

(2) 事象  $A, B, C$  を

$A$ : 最大値が 5 以下である

$B$ : 最大値が 4 以下である

$C$ : 最大値が 5 である

とすると,  $A = B \cup C$  である.  $B$  と  $C$  は互いに排反であるから

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

したがって, 求める確率  $P(C)$  は

$$P(C) = P(A) - P(B)$$

$$(1) \text{ から } P(A) = \frac{5^3}{6^3}$$

最大値が 4 以下である場合の数は, 1, 2, 3, 4 から重複を許して 3 個取り出す順列の総数に等しいから,  $4^3$  である. よって

$$P(B) = \frac{4^3}{6^3}$$

ゆえに, 求める確率は

$$P(C) = P(A) - P(B) = \frac{5^3}{6^3} - \frac{4^3}{6^3} = \frac{125 - 64}{216} = \frac{61}{216}$$

章末 1.11 次の 2 つの場合がある.

[1] 最初, B に白玉が入った場合.

後の 2 回で A から取り出される玉は, 白玉, 黒玉の順である.

$$\text{よって, その確率は } \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

[2] 最初, B に黒玉が入った場合.

後の 2 回で A から取り出される玉は, 白玉, 黒玉の順である.

$$\text{よって, その確率は } \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

[1], [2] は互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

章末 1.12 C から取り出した玉が赤玉であるのは、次の 2 つの場合がある.

[1] A の赤玉である. この確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{70}$$

[2] B の赤玉である. この確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{70}$$

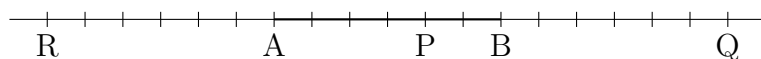
よって, C から取り出した玉が赤玉である確率は

$$\frac{21}{70} + \frac{15}{70} = \frac{36}{70} = \frac{18}{35}$$

したがって, 求める確率は

$$\frac{21}{70} \div \frac{18}{35} = \frac{7}{12}$$

練習 2.1



深化 2.1 (例)  $AP : AB = PQ : BC$ ,  $PQ = PQ'$  とすると

$$AP : AB = PQ' : BC$$

しかし, このとき  $PQ'$  と  $BC$  は平行でないから, [2] の 3 の逆は成り立たない.

練習 2.2 (1)  $AD$  は  $\angle A$  の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 8 : 4 = 2 : 1$$

$$(2) BD = \frac{2}{2+1}BC = \frac{2}{3} \times 8 = \frac{16}{3}$$

練習 2.3  $AD$  は  $\angle A$  の外角の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 20 : 15 = 4 : 3$$

$$\text{よって } BD = \frac{4}{4-3}BC = 4 \times 10 = 40$$

深化 2.2  $\triangle ABC$  について,  $AB = AC$  のとき,  $\angle A$  の外角の二等分線は, 直線  $BC$  と平行であるから, 交点  $D$  が存在しないため.

練習 2.4 (1)  $20^\circ$  (2)  $100^\circ$  (3)  $20^\circ$

練習 2.5 (1)  $30^\circ$  (2)  $25^\circ$  (3)  $110^\circ$

練習 2.6 (1)  $BD = DC = 5$

$$(2) AG = \frac{2}{2+1}AD = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

練習 2.7 (1) 辺  $BC$  の中点を  $M$  とする.

$G$  は  $\triangle ABC$  の重心であるから  $MG : GA = 1 : 2$

$GK \parallel AH$ ,  $MG : MA = 1 : 3$  より  $GK : AH = 1 : 3$

(2)  $\triangle GBC$  と  $\triangle ABC$  は底辺  $BC$  が共通であるから, 面積の比は高さの比に等しい. 高さの比は  $GK : AH$  であるから, 面積の比は  $1 : 3$

練習 2.8  $\triangle ABC$  にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{3}{2} \quad \text{より} \quad CQ : QA = 3 : 2$$

練習 2.9  $\triangle ABC$  にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{2}{3} \quad \text{より} \quad AR : RB = 2 : 3$$

練習 2.10 (1)  $\triangle ABC$  と直線  $RP$  にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{3}{1} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

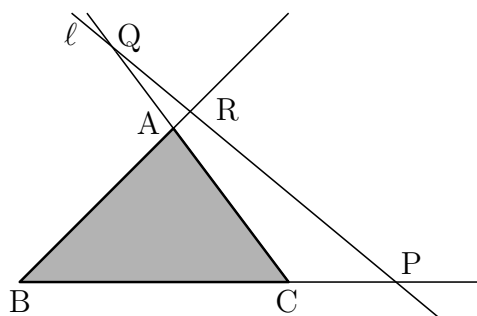
$$\frac{CQ}{QA} = \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad CQ : QA = 1 : 2$$

(2)  $\triangle PRB$  と直線  $AC$  にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{PQ}{QR} \cdot \frac{RA}{AB} \cdot \frac{BC}{CP} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{PQ}{QR} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{5}{4} \quad \text{より} \quad PQ : QR = 5 : 4$$

深化 2.3



練習 2.11 (1)  $\triangle ABC$  にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{BP}{PC} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{BP}{PC} = 1 \text{ より } BP : PC = 1 : 1$$

(2)  $\triangle ABP$  と直線  $RC$  にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CP} \cdot \frac{PO}{OA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

$$(1) \text{ より, } BC : CP = 2 : 1 \text{ であるから } \frac{2}{1} \cdot \frac{PO}{OA} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{PO}{OA} = \frac{3}{2} \text{ より } PO : OA = 3 : 2 \quad \text{よって} \quad PO : PA = 3 : 5$$

$\triangle OBC$  と  $\triangle ABC$  は底辺  $BC$  が共通で、高さの比は  $PO : PA$  に等しく

$$\triangle OBC : \triangle ABC = 3 : 5$$

演習 2.1  $\triangle ABC$  にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{4}{1} = 1$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{1}{3} \text{ より } CQ : QA = 1 : 3$$

演習 2.2 (1)  $\triangle ABC$  において、辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  の中点を、それぞれ  $L$ ,  $M$ ,  $N$  とすると

$$BL = LC, \quad CM = MA, \quad AN = NB$$

$$\text{したがって} \quad \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

よって、チェバの定理の逆により、3つの中線  $AL$ ,  $BM$ ,  $CN$  は1点で交わる。

(2)  $\triangle ABC$  において、 $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  の二等分線が辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  と交わる点を、それぞれ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  とすると

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{CA}{CB}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$$

よって、チェバの定理の逆により、3つの内角の二等分線  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CR$  は1点で交わる。

演習 2.3 (1)  $|6 - 8| < 4 < 6 + 8$ , 存在する

(2)  $|6 - 4| < 4 < 6 + 4$ , 存在する

(3)  $|6 - 10| = 4$ , 存在しない

別解 (最大辺に注目する)

(1)  $8 < 4 + 6$ , 存在する

(2)  $6 < 4 + 4$ , 存在する

(3)  $10 = 4 + 6$ , 存在しない

演習 2.4 直角三角形において, 三角形の内角の和が  $180^\circ$  であることから, 直角以外の角は,  $90^\circ$  より小さい. すなわち, 直角が最大の角である.

よって, 直角に向かい合う辺すなわち斜辺が3辺のうち最大である.

## 円周角

円については、次のような性質をすでに中学校で学んでいる。

円の弧の長さは、中心角の大きさに比例する。

円はその中心を通る直線について対称である。

ここでは、円についての性質をさらに調べることにしよう。

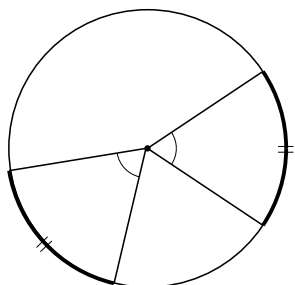
### A 》 円の弧と弦の性質

円の弧と弦については、次のような性質がある。

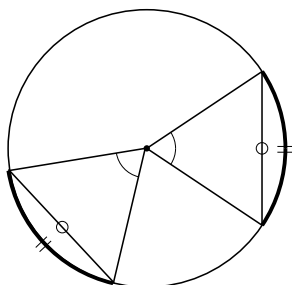
円の弧と弦の性質

- [1] 1つの円で、等しい中心角に対する弧の長さは等しい。  
逆に、長さの等しい弧に対する中心角は等しい。
- [2] 1つの円で、長さの等しい弧に対する弦の長さは等しい。
- [3] 弦の垂直二等分線は、円の中心を通る。
- [4] 円の中心から弦に引いた垂線は、その弦を2等分する。

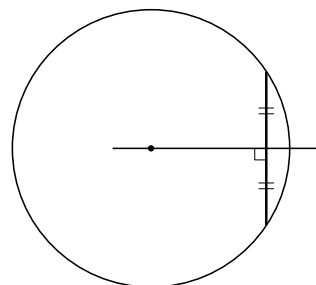
[1]



[2]



[3], [4]



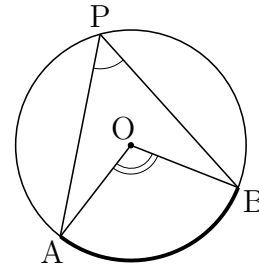
## B 》円周角

次の円周角の定理については、すでに中学校で学んでいる。

### 円周角の定理

1つの弧に対する円周角は一定であり、  
その弧に対する中心角の半分である。  
たとえば、右の図の円Oにおいて

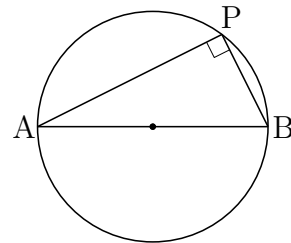
$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$



注意 中心が点Oである円を円Oという。

また、次のことがいえる。

線分ABを直径とする円の周上にA, Bと異なる点Pをとるとき、 $\angle APB = 90^\circ$  である。逆に、 $\angle APB = 90^\circ$  のとき、点Pは線分ABを直径とする円の周上にある。

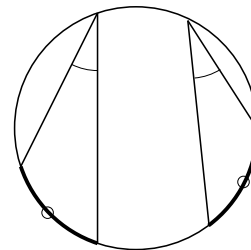


円周角と弧の長さについては、次のことが成り立つ。

#### 円周角と弧の長さ

1つの円において

- [1] 等しい円周角に対する弧の長さは等しい。
- [2] 長さの等しい弧に対する円周角は等しい。



#### [証明]

- [1] 2つの弧に対する円周角が等しいとき、それらの弧に対する中心角も等しいから、2つの弧の長さも等しい。
- [2] 長さの等しい弧に対する中心角は等しいから、2つの弧に対する円周角も等しい。

証終

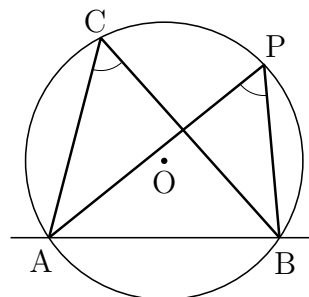
## C》円周角の定理の逆

円 O の周上に 3 点 A, B, C がある.

- [1] 直線 AB について点 C と同じ側に  
点 P をとるとき, P が円 O の周上  
にあれば, 円周角の定理により,

$$\angle APB = \angle ACB$$

が成り立つ.



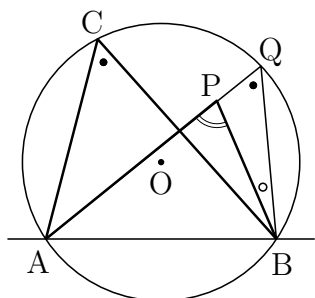
点 P が円 O の周上にないときは, 次のことがいえる.

- [2] 点 P が円 O の内部  
にあるとき

$$\angle APB > \angle ACB$$

- [3] 点 P が円 O の外部  
にあるとき

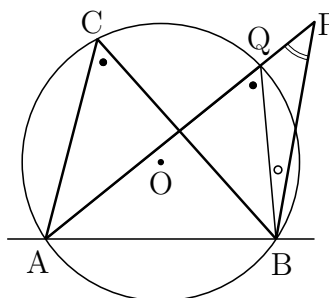
$$\angle APB < \angle ACB$$



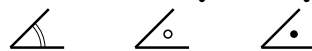
$$\angle APB = \angle AQB + \angle PBQ$$



$$\angle APB > \angle ACB$$



$$\angle APB + \angle PBQ = \angle AQB$$



$$\angle APB < \angle ACB$$

[1] ~ [3] から,  $\angle APB = \angle ACB$  が成り立つのは, 点 P が円 O の周上にある  
ときに限られることがわかる.

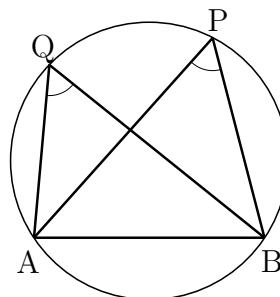
以上のことから, 次の定理が得られる.

### 円周角の定理の逆

2 点 P, Q が直線 AB について同じ側にあるとき,

$$\angle APB = \angle AQB$$

が成り立つならば, 4 点 A, B, P, Q は 1 つの円  
周上にある.



練習 2.12 (1)  $45^\circ$  (2)  $60^\circ$

練習 2.13 (1)  $\triangle ABE$  において  $\angle ABE = 180^\circ - (65^\circ + 78^\circ) = 37^\circ$

よって  $\angle ABD = \angle ACD$

したがって、4点 A, B, C, D は1つの円周上にある.

(2)  $\triangle ACE$  において  $\angle ACE = 110^\circ - 84^\circ = 26^\circ$

よって  $\angle ABD = \angle ACD$

したがって、4点 A, B, C, D は1つの円周上にある.

(3)  $\angle EAF = \angle EBF = 90^\circ$  であるから  $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$

したがって、4点 A, B, C, D は1つの円周上にある.

練習 2.14 (1)  $105^\circ$  (2)  $95^\circ$

練習 2.15 ②, ③

練習 2.16 辺 AB の A を越える延長上に点 E をとる

と、 $AD \parallel BC$  であるから、

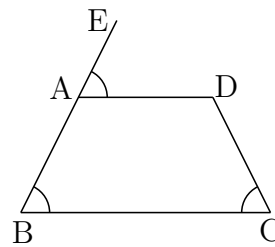
$$\angle ABC = \angle EAD$$

よって、 $\angle ABC = \angle BCD$  であるとき、

$\angle BCD = \angle EAD$  となるから台形 ABCD

は円に内接する.

証終



練習 2.17 (1)  $BR = BP$ ,  $AB = 7$  であるから  $AR = 7 - x$

$$AR = AQ \text{ より } AQ = 7 - x$$

$$\text{また, } QC = PC, PC = 8 - x \text{ であるから } QC = 8 - x$$

$$(2) CA = 5 \text{ より } (7 - x) + (8 - x) = 5$$

$$\text{これを解いて } x = 5$$

$$\text{よって } BP = 5$$

**練習 2.18** ∠BAT が直角の場合

AB は直径であるから  $\angle APB = 90^\circ$

よって  $\angle BAT = \angle APB$

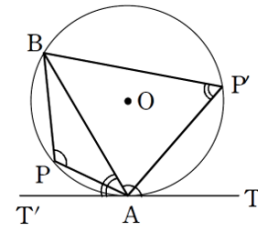
∠BAT が鈍角の場合

右の図のように、TA の A を越える延長上に T' をとり、P を含まない弧 BA 上に点 P' をとると、 $\angle AP'B$  は鋭角で  $\angle BAT' = \angle AP'B$

$$\angle APB + \angle AP'B = 180^\circ,$$

$$\angle BAT' + \angle BAT = 180^\circ$$

よって  $\angle BAT = \angle APB$



**別証** ∠BAT が鈍角の場合

右の図のように A を通る直径を AC とし、C と P を結ぶと

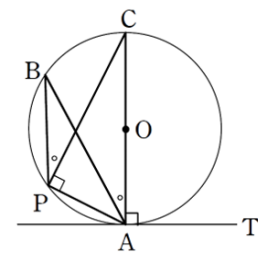
$$\angle BAT = \angle BAC + 90^\circ$$

また、AC が直径であるから

$$\angle APB = \angle BPC + 90^\circ$$

円周角の定理により

$$\angle BAC = \angle BPC \quad \text{よって} \quad \angle BAT = \angle APB$$



**練習 2.19** (1)  $60^\circ$  (2)  $78^\circ$

**練習 2.20** (1)  $PA \cdot PB = PC \cdot PD = 3 \cdot 5 = 15$

(2)  $PA \cdot PB = PC \cdot PD = 5 \cdot 15 = 75$

**練習 2.21** 方べきの定理により

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PC \cdot PD \\ &= (CO + OP)(OD - OP) \\ &= (r + PO)(r - PO) \end{aligned}$$

よって  $PA \cdot PB = r^2 - PO^2$

証終

練習 2.22 方べきの定理により

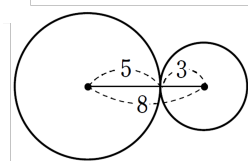
$$PA \cdot PB = PT^2 \quad \text{すなわち} \quad x^2 = 3 \cdot 8 = 24$$

$$x > 0 \text{ から} \quad x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

練習 2.23  $r = 5$ ,  $r' = 3$  とすると  $r + r' = 8$ ,  $r - r' = 2$

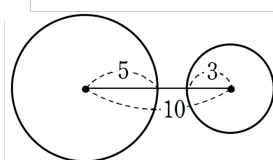
(1)  $d = 8$  のとき  $d = r + r'$

よって [2] 外接する (1 点を共有する)



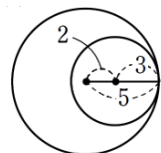
(2)  $d = 10$  のとき  $d > r + r'$

よって [1] 互いに外部にある



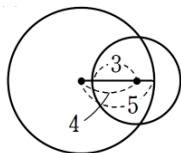
(3)  $d = 2$  のとき  $d = r - r'$

よって [4] 内接する (1 点を共有する)



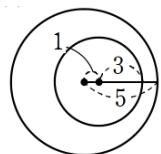
(4)  $d = 4$  のとき  $r - r' < d < r + r'$

よって [3] 2 点で交わる



(5)  $d = 1$  のとき  $d < r - r'$

よって [5] 一方が他方の内部にある

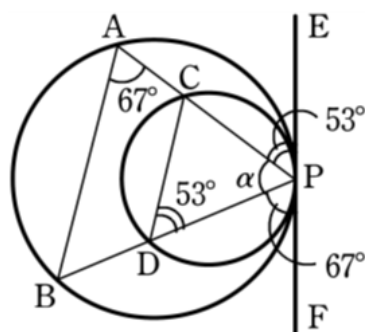


練習 2.24 右の図のように、点 P における 2 つの円の共通接線を EF とすると、接線と弦の作る角の関係から

$$\angle CPE = \angle CDP = 53^\circ$$

$$\angle BPF = \angle BAP = 67^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \alpha &= 180^\circ - (\angle CPE + \angle BPF) \\ &= 180^\circ - (53^\circ + 67^\circ) = 60^\circ \end{aligned}$$



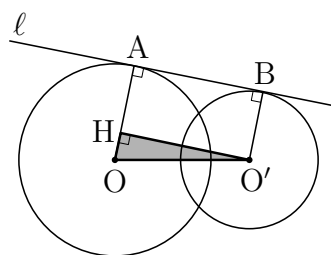
練習 2.25 図のように、O' から線分 OA に垂線 O'H を下ろすと

$$\begin{aligned} OH &= OA - HA \\ &= OA - O'B = 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

$\triangle OO'H$  は直角三角形であるから

$$O'H^2 = OO'^2 - OH^2$$

$$\text{よって } AB = O'H = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$



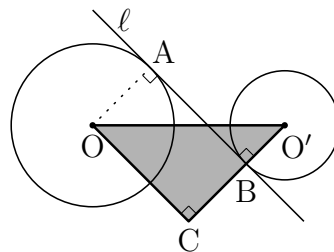
練習 2.26 点 O を通って直線  $\ell$  に平行な直線と直線 O'B の交点を C とすると

$$AB = OC$$

$\triangle OCO'$  は直角三角形であるから

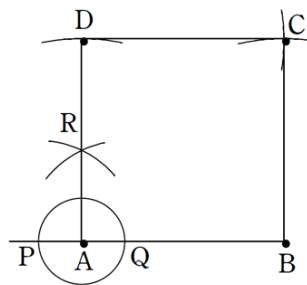
$$\begin{aligned} OC^2 &= OO'^2 - O'C^2 \\ &= d^2 - (r + r')^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって } AB = OC = \sqrt{d^2 - (r + r')^2}$$



- 練習 2.27** ① 点 A を中心とする円をかき、直線 AB との交点をそれぞれ P, Q とする.
- ② 2 点 P, Q をそれぞれ中心として、等しい半径の円をかき、それらの交点の 1 つを R とし、直線 AR を引く.
- ③ 点 A を中心とする半径 AB の円をかき、直線 AR との交点の 1 つを D とする.
- ④ 2 点 B, D をそれぞれ中心として、半径の長さが AB の円をかき、それらの交点のうち A でない方を C とする. 直線 BC, DC を引く. 四角形 ABCD が求める正方形である.

このとき、四角形 ABCD において、 $\angle A$  は直角で、4 辺が等しい. よって、四角形 ABCD は正方形である.



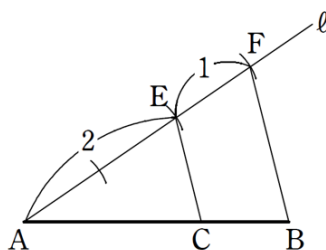
- 練習 2.28** 四角形 ABCP は 4 辺の長さが等しいから、ひし形である.
- よって、直線 PC は直線 AB すなわち  $\ell$  と平行になる.

練習 2.29 (1) ① 点 A を通り，直線 AB と異なる半直線  $\ell$  を引く．

②  $\ell$  上に， $AE : EF = 2 : 1$  となるように点 E, F をとる．ただし，E は線分 AF 上にとる．

③ E を通り，直線 BF に平行な直線を引き，線分 AB との交点を C とする．点 C が求める点である．

BF//CE より  $AC : CB = AE : EF$  であるから，点 C は線分 AB を  $2 : 1$  に内分する点である．

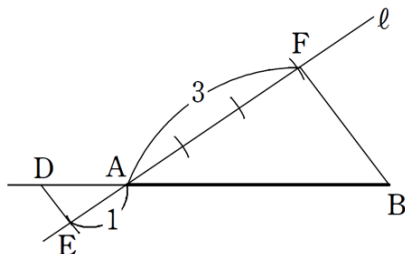


(2) ① 点 A を通り，直線 AB と異なる直線  $\ell$  を引く．

②  $\ell$  上に， $EA : AF = 1 : 3$  となるように点 E, F をとる．ただし，A が線分 EF 上にあるようにとる．

③ E を通り，直線 BF に平行な直線を引き，直線 AB との交点を D とする．点 D が求める点である．

BF//ED より  $AD : DB = AE : EF$  であるから，点 D は線分 AB を  $1 : 4$  に外分する点である．

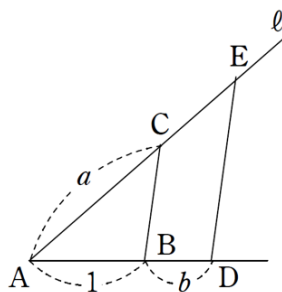


- 練習 2.30** ① 点 A を通り，直線 AB と異なる半直線  $\ell$  を引く．  
 ②  $\ell$  上に， $AC = a$  となるように点 C をとる．  
 ③ 線分 AB の B を越える延長上に  $BD = b$  となるように点 D をとる．  
 ④ D を通り，直線 BC に平行な直線を引き， $\ell$  との交点を E とする．線分 CE が求める線分である．

$CE = x$  とすると， $BC \parallel DE$  から

$$1 : b = a : x \quad \text{すなわち} \quad x = ab$$

よって，線分 CE は長さ  $ab$  の線分である．

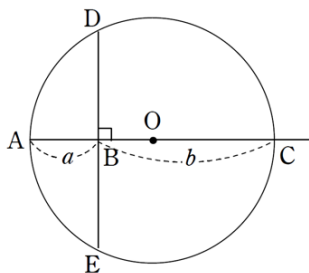


- 練習 2.31** ① 長さ  $a$  の線分を AB とし，線分 AB の B を越える延長上に  $BC = b$  となるように点 C をとる．  
 ② 線分 AC の垂直二等分線と AC の交点を O とし，O を中心として半径 OA の円をかく．  
 ③ B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする．線分 BD が求める線分である．

このとき，方べきの定理により  $BA \cdot BC = BD \cdot BE$

$AB = a$ ， $BC = b$ ， $BD = BE$  であるから  $BD^2 = ab$

よって，線分 BD は長さ  $\sqrt{ab}$  の線分である．



演習 2.5 (1) 正五角形は円に内接し、 $CD = BC$  から、円周角の定理により

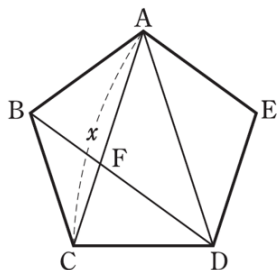
$$\angle CAD = \angle BDC \quad \text{ゆえに} \quad \angle CAD = \angle FDC$$

同様に、円周角の定理により、 $\angle CAD$ ,  $\angle ADB$ ,  $\angle ACE$ ,  $\angle ECD$  はすべて等しいから

$$\angle DFC = \angle CAD + \angle ADB = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$$

$\triangle ACD$  と  $\triangle DFC$  において、2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACD \sim \triangle DFC$$



(2)  $\triangle AFD$ ,  $\triangle DFC$  はともに二等辺三角形であり

$$FA = FD = CD = 1$$

$$\text{よって} \quad FC = AC - FA = x - 1$$

$\triangle ACD \sim \triangle DFC$  より、 $AC : DF = CD : FC$  であるから

$$x : 1 = 1 : (x - 1)$$

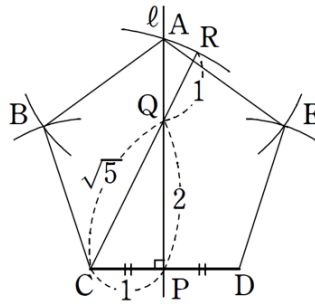
(3) (2) の結果から  $x : 1 = 1 : (x - 1)$

$$x(x - 1) = 1^2 \quad \text{整理すると} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$x > 0 \text{ に注意してこれを解くと} \quad x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって} \quad CD : AC = 1 : x = 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

⑥ Aを中心として半径2の円，Dを中心として半径2の円をかき，それらの交点のうちADに関してCの反対側にあるものをEとする．五角形ABCDEが求める正五角形である．


$$\angle BAB' = 60^\circ - \angle B'AC = \angle CAC'$$
$$\triangle ABB' \equiv \triangle ACC'$$

したがって、正三角形の残りの頂点は、点 C を通り辺 AC に垂直な直線上にある。

**演習 2.8** ① 3本の平行な直線を  $\ell$ ,  $m$ ,  $n$  とする. 直線  $\ell$  上に点  $A$  をとり,  $A$  を通り  $\ell$  に垂直な直線と直線  $n$  の交点を  $B$  とする.

② 線分 AB を 1 辺とする正三角形 ABC をかく.

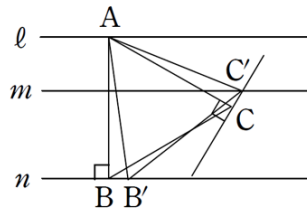
③ 点Cを通り辺ACに垂直な直線と直線 $m$ の交点をC'とする.

④ 線分  $AC'$  を 1 辺とする正三角形  $AB'C'$  を，点  $B'$  が直線  $n$  側にあるようにかく．正三角形  $AB'C'$  が求める正三角形である．

演習 2.7 と同様に考えると,  $\triangle ABB' \equiv \triangle ACC'$  である. このことと  $\angle ACC' = 90^\circ$  から,  $\angle ABB' = 90^\circ$  である.

よって、点  $B'$  は直線  $n$  上にある.

したがって、正三角形  $AB'C'$  は、3本の平行な直線  $\ell$ ,  $m$ ,  $n$  上に頂点がある正三角形である。

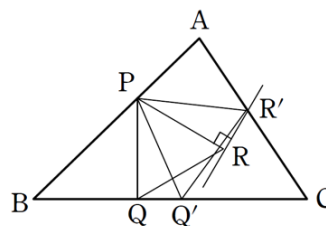


**演習 2.9** ① 与えられた三角形の3つの頂点を  $A, B, C$  とする. 辺  $AB$  上に点  $P$  をとり,  $P$  を通り辺  $BC$  に垂直な直線と  $BC$  の交点を  $Q$  とする.

② 線分 PQ を 1 辺とする正三角形 PQR をかく.

③ 点 R を通り辺 PR に垂直な直線と辺 AC の交点を R' とする.

④ 線分  $PR'$  を 1 辺とする正三角形  $PQ'R'$  を、点  $Q'$  が辺  $BC$  側にあるようにかく。正三角形  $PQ'R'$  が求める正三角形である。



問題 2.1 P は  $\angle B$  の外角の二等分線上にあるから  $PF = PD$

また、P は  $\angle C$  の外角の二等分線上にあるから  $PE = PD$

よって  $PF = PE$

したがって、P は  $\angle A$  の二等分線上にある。

証終

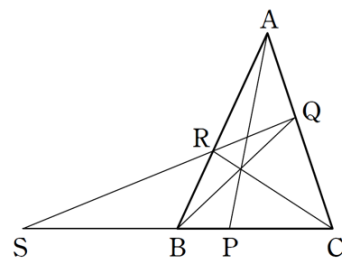
問題 2.2  $\triangle ABC$  において，チェバの定理により

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また， $\triangle ABC$  と直線  $QS$  において，メネラウスの定理により

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①，② から  $\frac{BP}{PC} = \frac{BS}{SC}$  ゆえに  $BP : BS = CP : CS$



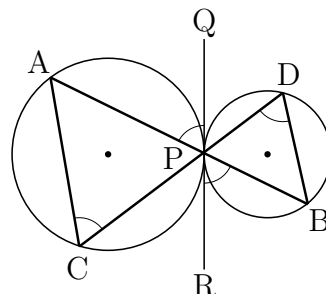
問題 2.3 点  $P$  における共通接線  $QR$  を引く。  
接線と弦の作る角により

$$\angle QPA = \angle ACP, \quad \angle RPB = \angle BDP$$

また，2 直線  $AB$ ， $QR$  の対頂角により

$$\angle QPA = \angle RPB$$

であるから， $\angle ACP = \angle BDP$  である。  
錯角が等しいので， $AC \parallel DB$  証終



問題 2.4 ① 点  $A$  を通り，直線  $AB$  と異なる半直線  $\ell$  を引く。

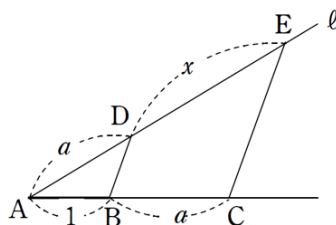
② 線分  $AB$  の  $B$  を越える延長上に  $BC = a$  となるように点  $C$  をとり， $\ell$  上に  $AD = a$  となるように点  $D$  をとる。

③  $C$  を通り，直線  $BD$  に平行な直線を引き， $\ell$  との交点を  $E$  とする。線分  $DE$  が求める線分である。

$DE = x$  とすると， $BD \parallel CE$  から

$$1 : a = a : x \quad \text{すなわち} \quad x = a^2$$

よって，線分  $DE$  は長さ  $a^2$  の線分である。



問題 2.5 (1) AD は  $\angle A$  の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 4 : 3$$

$$\text{よって } BD = \frac{4}{4+3}BC = \frac{4}{7} \times 5 = \frac{20}{7}$$

BI は  $\angle B$  の二等分線であるから

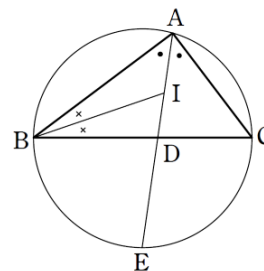
$$AI : ID = BA : BD = 4 : \frac{20}{7} = 7 : 5$$

(2) (1) より,  $BD = \frac{20}{7}$  であるから

$$DC = 5 - \frac{20}{7} = \frac{15}{7}$$

方べきの定理により

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC = \frac{20}{7} \cdot \frac{15}{7} = \frac{300}{49}$$



練習 2.32 (1)  $90^\circ$  (2)  $45^\circ$  (3)  $90^\circ$

深化 2.4  $AF = CF = AC$  であるから,  $\triangle ACF$  は正三角形である.

したがって, 2 直線 AF, CF のなす角  $\theta$  は

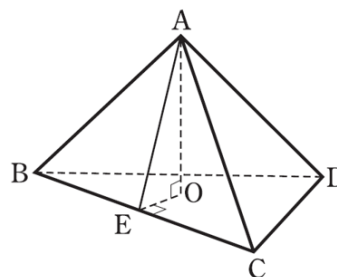
$$\theta = 60^\circ$$

練習 2.33 直線 AO は平面 BCD に垂直であり, 辺 BC は平面 BCD 上にあるから

$$AO \perp BC$$

また,  $OE \perp BC$  であるから, BC は平面 AEO に垂直である. AE は平面 AEO 上にあるから

$$AE \perp BC$$

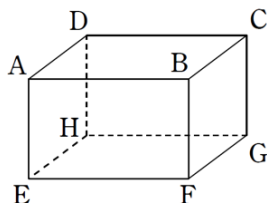


練習 2.34 (1) 正しくない.

下の図の直方体 ABCD-EFGH において,

$$(\text{面 } ABCD) \perp (\text{面 } AEFB), \quad (\text{面 } AEFB) \perp (\text{面 } BFGC)$$

であるが, 面 ABCD と面 BFGC は平行でない.



(2) 正しい.

(3) 正しくない.

(1) の直方体において,

$$AB \parallel (\text{面 } EFGH), \quad AB \parallel (\text{面 } DHGC)$$

であるが, 面 EFGH と面 DHGC は平行でない.

練習 2.35

| 正多面体  | 面の数 | 面の形  | 頂点の数 | 辺の数 |
|-------|-----|------|------|-----|
| 正四面体  | 4   | 再三角形 | 4    | 6   |
| 正六面体  | 6   | 正方形  | 8    | 12  |
| 正八面体  | 8   | 正三角形 | 6    | 12  |
| 正十二面体 | 12  | 正五角形 | 20   | 30  |
| 正二十面体 | 20  | 正三角形 | 12   | 30  |

練習 2.36 正四面体  $4 - 6 + 4 = 2$

正六面体  $8 - 12 + 6 = 2$

正八面体  $6 - 12 + 8 = 2$

正十二面体  $20 - 30 + 12 = 2$

正二十面体  $12 - 30 + 20 = 2$

練習 2.37 (1) かどを切り取ってできた多面体は，四角形が6つ，三角形が8つでできている．面の数は  $6 + 8 = 14$

1つの頂点に4つの面が集まっているから，求める頂点の数は

$$(6 \times 4 + 8 \times 3) \div 4 = 12$$

1つの辺に2つの面が集まっているから，求める辺の数は

$$(6 \times 4 + 8 \times 3) \div 2 = 24$$

(2) 頂点の数を  $v$ ，辺の数を  $e$ ，面の数を  $f$  とすると

$$v - e + f = 12 - 24 + 14 = 2$$

よって，等式  $v - e + f = 2$  が成り立つ．

練習 2.38 [1] 立体 PQRSTU の面 PQR について，P，Q，R はそれぞれ辺 AB，AC，AD の中点であるから，中点連結定理により

$$PQ = \frac{1}{2}BC, \quad QR = \frac{1}{2}CD, \quad RP = \frac{1}{2}DB$$

$$BC = CD = DB \text{ であるから } PQ = QR = RP$$

よって， $\triangle PQR$  は正三角形である．

同様に考えると，立体 PQRSTU のすべての面が合同な正三角形である．

[2] 6つの頂点に集まる正三角形の数はすべて4で等しい．

[1]，[2] から，立体 PQRSTU は正八面体である．

演習 2.10 正四面体 BDEG の1辺の長さを  $a$  とすると，立方体 ABCD-EFGH の1辺の長さは  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  である．

正四面体 BDEG の体積は，立方体 ABCD-EFGH の体積から4つの三角錐 ABDE，FBEG，CBGD，HDEG の体積を引いた値である．

よって，求める正四面体の体積  $V$  は

$$V = \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{a}}{2} \right)^3 \times 4 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

正四面体 BDEG の1辺の長さを  $a$  とすると，立方体 ABCD-EFGH の1辺の長さは  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  である．

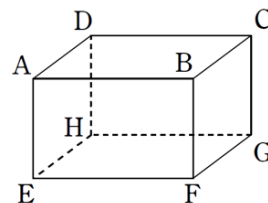
正四面体 BDEG の体積は，立方体 ABCD-EFGH の体積から4つの三角錐 ABDE，FBEG，CBGD，HDEG の体積を引いた値である．

よって，求める正四面体の体積  $V$  は

$$V = \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{a}}{2} \right)^3 \times 4 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

問題 2.6 (1) 正しくない.

右の図の直方体 ABCD-EFGH において、  
 $AB \parallel DC$  で、直線 DC と直線 GC は交わるが、  
 直線 AB と直線 GC はねじれの位置にあり、交  
 わらない.



(2) 正しい.

(3) 正しい.

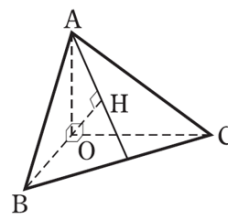
問題 2.7 (1)  $OA \perp OB$ ,  $OA \perp OC$  であるから、OA は平面  
 OBC に垂直である. よって

$$OA \perp BC$$

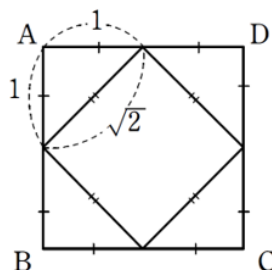
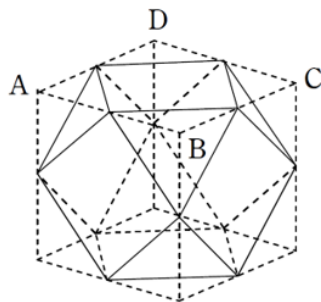
また、OH は平面 ABC に垂直であるから

$$OH \perp BC$$

(2) (1) より、 $OA \perp BC$ ,  $OH \perp BC$  であるから BC は平面 AOH に垂直である.  
 よって  $AH \perp BC$



問題 2.8 もとの立方体の 1 辺の長さが 2 であるから、かどを切り取ってできた多面体  
 の 1 辺の長さは  $\sqrt{2}$  である. かどを切り取ってできた多面体は、正方形が 6 つ、  
 正三角形が 8 つでできている.



よって、この多面体の表面積は

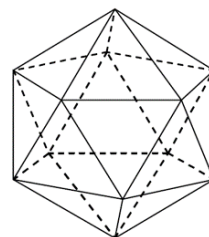
$$(\sqrt{2})^2 \times 6 + \left( \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \times 8 = 12 + 4\sqrt{3}$$

切り取った三角錐の 1 つの体積は  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{6}$

求める多面体の体積は、もとの立方体から 8 つの三角錐の体積を引いた値であ  
 るから

$$2^3 - \frac{1}{6} \times 8 = \frac{20}{3}$$

問題 2.9 (1) 正二十面体の 1 つの頂点に集まる辺は 5 つあるから、その切り口は正五角形になる。また、もとの正三角形の面は、かどが切り取られることにより、また正三角形となる。したがって、多面体  $P$  は正五角形と正三角形の面で作られる多面体であるから ③



(2) 正二十面体の 12 個の頂点の分だけ面が増えるから、多面体  $P$  の面の数は

$$f = 20 + 12 = 32$$

多面体  $P$  の辺の数は、12 個の正五角形の辺の数に等しいから

$$e = 5 \times 20 = 60$$

頂点の数は、オイラーの多面体定理から

$$v = 2 + e - f = 2 + 60 - 32 = 30$$

章末 2.1 点  $I$  は  $\triangle ABC$  の内心であるから

$$\angle PBI = \angle CBI \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $PQ \parallel BC$  より

$$\angle PIB = \angle CBI \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から  $\angle PBI = \angle PIB$

よって、 $\triangle PBI$  は二等辺三角形であり

$$PB = PI$$

同様にして、 $QC = QI$  であるから

$$PQ = PI + IQ = PB + QC$$

証終

章末 2.2 (1)  $\alpha = 125^\circ$  (2)  $\alpha = 52^\circ$

章末 2.3 (1)  $\angle RPQ = 45^\circ$

(2) 内接円の半径を  $r$  とすると

$$AR = AQ = r$$

$$AB = AR + RB = r + BP = r + 6$$

$$AC = AQ + QC = r + PC = r + 4$$

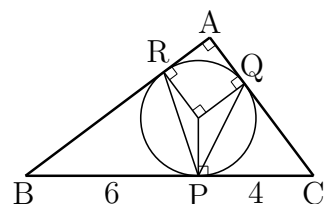
直角三角形 ABC において，三平方の定理により

$$(6 + 4)^2 = (r + 4)^2 + (r + 6)^2$$

$$\text{整理すると} \quad r^2 + 10r - 24 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad (r + 12)(r - 2) = 0$$

$$r > 0 \text{ であるから} \quad r = 2$$



章末 2.4 円 O において，方べきの定理により

$$EB \cdot EA = EC^2$$

円 O' において，方べきの定理により

$$EB \cdot EA = ED^2$$

$$\text{よって} \quad EC^2 = ED^2$$

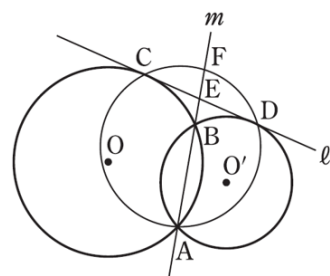
$$EC > 0, ED > 0 \text{ より} \quad EC = ED \quad \cdots \textcircled{1}$$

また，3点 A, D, C を通る円において，方べきの定理により

$$EF \cdot EA = EC \cdot ED$$

$$EC = ED \text{ より} \quad EF \cdot EA = EC^2 = EB \cdot EA \quad \text{よって} \quad EF = EB \quad \cdots \textcircled{2}$$

①，② より，対角線がそれぞれの中点で交わるから，四角形 BDFC は平行四辺形である。



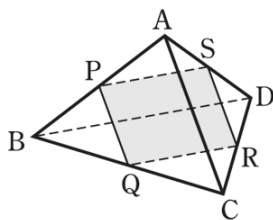
章末 2.5  $\triangle BCA$ ,  $\triangle DAC$  のそれぞれにおいて, 中点連結定理により

$$PQ \parallel AC, \quad SR \parallel AC \quad \text{ゆえに} \quad PQ \parallel SR \quad \cdots \textcircled{1}$$

また,  $\triangle ADB$ ,  $\triangle CBD$  のそれぞれにおいて, 中点連結定理により

$$PS \parallel BD, \quad QR \parallel BD \quad \text{ゆえに} \quad PS \parallel QR \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より, 2組の対辺がそれぞれ平行であるから, 四角形 PQRS は平行四辺形である.



別証  $\triangle BCA$  において, 中点連結定理により

$$PQ \parallel AC, \quad PQ = \frac{1}{2}AC$$

$\triangle DAC$  において, 中点連結定理により

$$SR \parallel AC, \quad SR = \frac{1}{2}AC$$

$$PQ \parallel AC, \quad SR \parallel AC \quad \text{であるから} \quad PQ \parallel SR \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$PQ = \frac{1}{2}AC, \quad SR = \frac{1}{2}AC \quad \text{であるから} \quad PQ = SR \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より, 1組の対辺が平行でその長さが等しいから, 四角形 PQRS は平行四辺形である.

章末 2.6 AI, BI, CI は  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  の二等分線である.

$$\angle BAD = \angle CAD \quad \text{であるから} \quad \widehat{DB} = \widehat{DC}$$

$$\text{よって} \quad DB = DC \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また} \quad \angle IBD = \angle DBC + \angle CBI$$

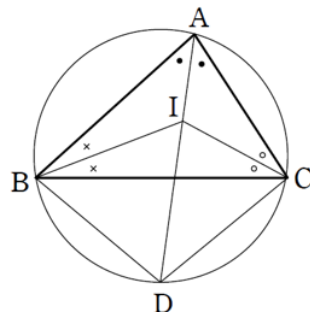
$$\text{ここで, } \angle DBC = \angle DAC = \angle BAD,$$

$$\angle CBI = \angle IBA \quad \text{であるから}$$

$$\angle IBD = \angle BAD + \angle IBA = \angle BID$$

$$\text{よって, } \triangle DBI \text{ は二等辺三角形であるから} \quad DB = DI \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad DB = DC = DI$$



章末 2.7 四角形 AFPE において,

$$\angle AFP + \angle AEP = 180^\circ$$

であるから, この四角形は円に内接する.

$$\text{よって } \angle APF = \angle AEF \quad \dots \textcircled{1}$$

また, 四角形 FBDP において,

$$\angle PFB + \angle BDP = 180^\circ$$

であるから, この四角形は円に内接する.

$$\text{よって } \angle APF = \angle FBD \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, 四角形 BCEF において

$$\angle FBC = \angle AEF$$

したがって, 四角形 BCEF は円に内接する.

章末 2.8 (1)  $\triangle ABE$  と  $\triangle ADC$  において,

$$\angle BAE = \angle DAC, \quad \angle AEB = \angle ACD$$

よって, 2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABE \sim \triangle ADC$$

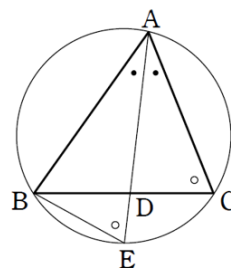
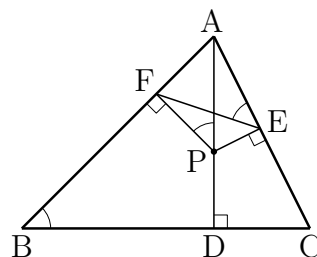
(2) (1) より  $AB : AD = AE : AC$  ゆえに  $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

$AE = AD + DE$  であるから  $AB \cdot AC = AD(AD + DE)$

$$\text{よって } AD^2 = AB \cdot AC - AD \cdot DE \quad \dots \textcircled{1}$$

方べきの定理により  $AD \cdot DE = BD \cdot CD$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入して } AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$



章末 2.9 (1) [1] 直線 AP と辺 BC の交点を T, 直線 AQ と辺 CD の交点を U とする. P は  $\triangle ABC$  の重心, Q は  $\triangle ACD$  の重心であるから

$$AP : PT = 2 : 1, \quad AQ : QU = 2 : 1$$

よって,  $PQ \parallel TU$ ,  $PQ : TU = 2 : 3$  であるから

$$PQ = \frac{2}{3}TU$$

四面体 ABCD の 1 辺の長さを  $a$  とする.

$$\triangle BCD \text{ に中点連結定理を用いると } TU = \frac{1}{2}a$$

$$\text{したがって } PQ = \frac{2}{3}TU = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}a$$

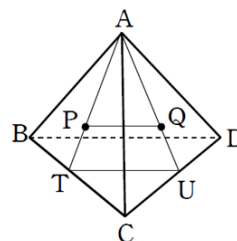
同様に, 多面体 PQRS のすべての辺の長さは  $\frac{1}{3}a$  であるから, 多面体 PQRS のすべての面は合同な正三角形である.

[2] 4 つの頂点に集まる正三角形の数はすべて 3 で等しい.

[1], [2] から, 多面体 PQRS は正四面体である.

(2) (1) より, 正四面体 ABCD の 1 辺の長さを  $a$  とすると, 四面体 PQRS の 1 辺の長さは  $\frac{1}{3}a$  である.

よって, 正四面体 PQRS と正四面体 ABCD は相似で, 相似比は  $1 : 3$  である. したがって, 体積比は  $1^3 : 3^3 = 1 : 27$

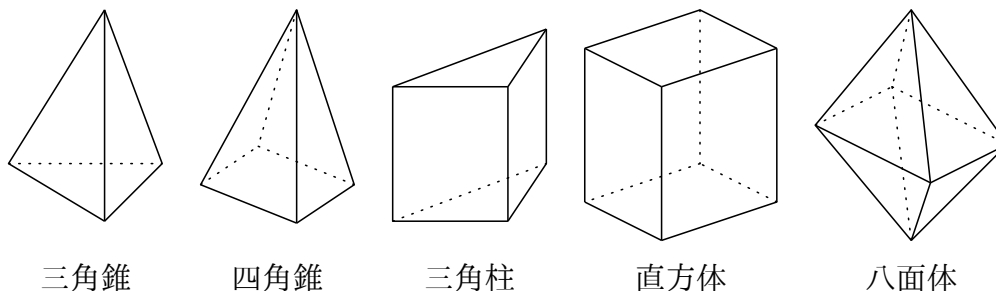


## オイラーの多面体定理

多面体の面の数を  $f$ ，頂点の数を  $v$ ，辺の数を  $e$  として，いろいろな多面体について

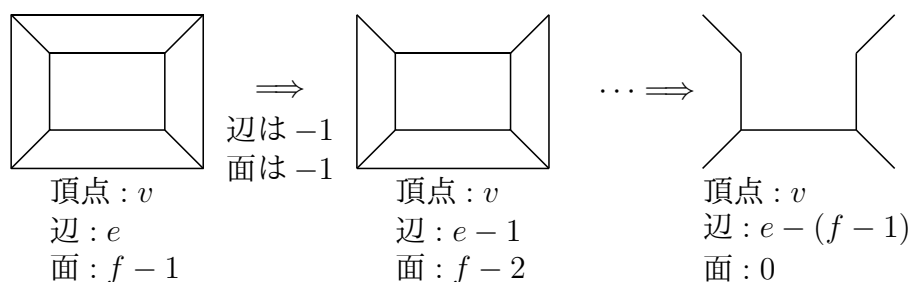
$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

すなわち， $v - e + f$  の値を調べてみると，次の表のようになる．



| 多面体          | 三角錐 | 四角錐 | 三角柱 | 直方体 | 八面体 |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 頂点の数 ( $v$ ) | 4   | 5   | 6   | 8   | 6   |
| 辺の数 ( $e$ )  | 6   | 8   | 9   | 12  | 12  |
| 面の数 ( $f$ )  | 4   | 5   | 5   | 6   | 8   |
| $v - e + f$  | 2   | 2   | 2   | 2   | 2   |

頂点，辺，面の数がそれぞれ  $v$ ， $e$ ， $f$  の多面体の 1 つの面を取り除き，平面グラフ (自己交叉点をもたない平面図形) をつくと (下の図は直方体を例とした)



左側の平面グラフは，多面体の 1 つの面を取り除いたので，面の数は  $f - 1$ ．頂点の数を変えずに辺を取り除いていくと，辺の数が 1 つ減る毎に面の面の数も 1 つ減る．この操作を繰り返す，面の数が 0 になったとき，右上のような樹形ができる．このとき，辺も面も  $f - 1$  だけ減るので，樹形の辺の数は  $e - (f - 1)$  となる．

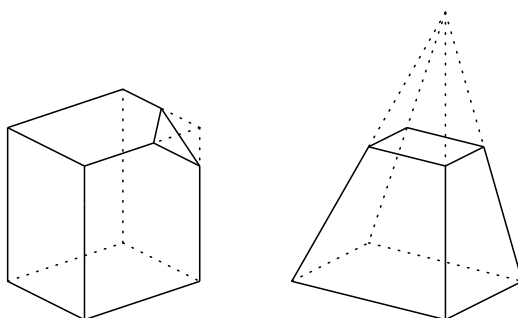
また，樹形の頂点と辺について，(頂点の数)  $-$  (辺の数)  $= 1$  であるから

$$v - \{e - (f - 1)\} = 1 \quad \text{すなわち} \quad v - e + f = 2$$

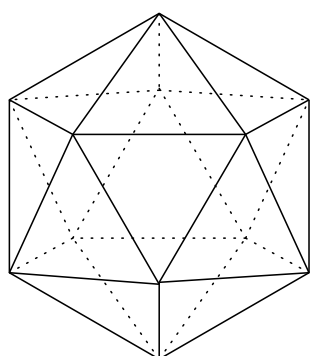
この関係式をオイラーの多面体定理という．

次に下の図の直方体や四角錐の一部を切り取ったとき、 $v$ 、 $e$ 、 $f$  の値は、どのように変化するか調べてみよう。

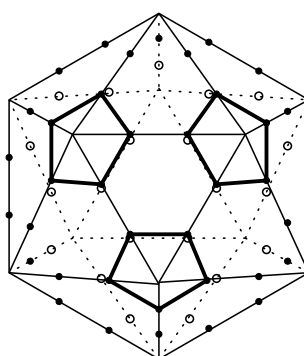
下の図のように切り取ったとき、元の頂点が1減って、面が1増える。新たにできた三角形や四角形の頂点と辺の数は等しく、 $v - e + f$  の値は変化しない。



正二十面体の各辺を三等分する点を取り、下の中央の図のように頂点を切断していくと、正五角形が現れ、同時に元の正三角形の面は正六角形になる。この正五角形が12面と正六角形が20面の2種類からなる多面体を切頂二十面体(三十二面体)という。切面二十面体で最も身近なものがサッカーボールである。



正二十面体



切頂二十面体

|             | 正二十面体 | 切頂二十面体 |
|-------------|-------|--------|
| 頂点 ( $v$ )  | 12    | 60     |
| 辺 ( $e$ )   | 30    | 90     |
| 面 ( $f$ )   | 20    | 32     |
| $v - e + f$ | 2     | 2      |

#### トピック

切頂二十面体は、C60 フラーレンと呼ばれる物質の分子構造に現れることから注目されている。特に、炭素原子が結合する上で極めて安定な構造をしている一方で、化学反応性に富むことから、幅広く研究・開発がなされている。

定理

正多面体は、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5種類だけである。

証明 1つの頂点に  $m$  個の正  $n$  角形が集まっている (1つの頂点から  $m$  本の辺が出ている) とすると

$$m \geq 3, \quad n \geq 3$$

1つの頂点から  $m$  本の辺が出ていて、1つの辺を2つの頂点で共有しているから、辺の本数  $e$  は

$$e = \frac{mv}{2} \quad (2.1)$$

また、1つの面には辺が  $n$  本あり、1つの辺を2つの面で共有しているから、辺の本数  $e$  は

$$e = \frac{nf}{2} \quad (2.2)$$

(2.1), (2.2) より、 $e = \frac{mv}{2} = \frac{nf}{2}$  であるから

$$v = \frac{2e}{m}, \quad f = \frac{2e}{n} \quad (2.3)$$

(2.3) を  $v - e + f = 2$  に代入すると

$$\frac{2e}{m} - e + \frac{2e}{n} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (2m + 2n - mn)e = 2mn$$

上式より、次式を満たさなければならない

$$2m + 2n - mn = 4 - (m - 2)(n - 2) > 0 \quad (2.4)$$

このとき

$$e = \frac{2mn}{4 - (m - 2)(n - 2)} \quad (2.5)$$

(2.5) を (2.3) に代入すると

$$v = \frac{4n}{4 - (m - 2)(n - 2)}, \quad f = \frac{4m}{4 - (m - 2)(n - 2)} \quad (2.6)$$

(2.4) より,  $(m-2)(n-2) = 1, 2, 3$  であるから, これらについて場合分けを行う.

[1]  $(m-2)(n-2) = 1$  のとき, (2.5), (2.6) より

$$e = \frac{2mn}{3}, \quad v = \frac{4n}{3}, \quad f = \frac{4m}{3} \quad (2.7)$$

$(m, n) = (3, 3)$  から  $(e, v, f) = (6, 4, 4)$

[2]  $(m-2)(n-2) = 2$  のとき, (2.5), (2.6) より

$$e = mn, \quad v = 2n, \quad f = 2m \quad (2.8)$$

$(m, n) = (3, 4), (4, 3)$  から  $(e, v, f) = (12, 8, 6), (12, 6, 8)$

[3]  $(m-2)(n-2) = 3$  のとき, (2.5), (2.6) より

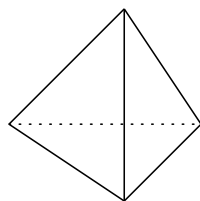
$$e = 2mn, \quad v = 4n, \quad f = 4m \quad (2.9)$$

$(m, n) = (3, 5), (5, 3)$  から  $(e, v, f) = (30, 20, 12), (30, 12, 20)$

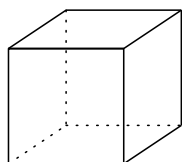
[1] ~ [3] のそれぞれの場合において,  $v$  と  $f$  に対称性がある ( $e$  は不変量). なお, 多面体定理  $v - e + f = 2$  から  $v$  と  $f$  の対称性が確認できる. これらの結果を表にまとめると

|       | $e$ | $v$ | $f$ | $v - e + f$ |
|-------|-----|-----|-----|-------------|
| 正四面体  | 6   | 4   | 4   | 2           |
| 正六面体  | 12  | 8   | 6   | 2           |
| 正八面体  | 12  | 6   | 8   | 2           |
| 正十二面体 | 30  | 20  | 12  | 2           |
| 正二十面体 | 30  | 12  | 20  | 2           |

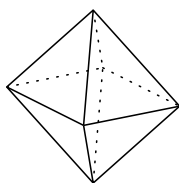
正六面体と正八面体, 正十二面体と正二十面体に双対性があることが表からも分かる. なお, 正四面体は自己双対であるという.



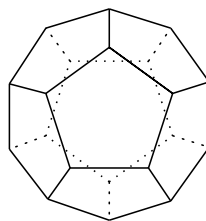
正四面体



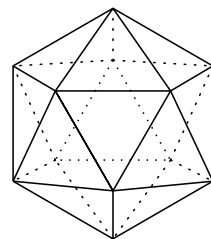
正六面体



正八面体



正十二面体



正二十面体