

令和 5 年度

高等学校 数学 B

電子教科書



2023 年 12 月 27 日

熊本県立第二高等学校数学科

スライド

第1章 数列 [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

1.1 等差数列と等比数列

- 1.1.1 数列と一般項 教科書 pp.8-9
- 1.1.2 等差数列 教科書 pp.10-12
- 1.1.3 等差数列の和 教科書 pp.13-15
- 1.1.4 等比数列 教科書 pp.16-18
- 1.1.5 等比数列の和 教科書 pp.19-22
- 1.1.6 問題 教科書 p.23

1.2 いろいろな数列

- 1.2.1 和の記号 $\sum$ 教科書 pp.24-28
- 1.2.2 階差数列 教科書 pp.29-31
- 1.2.3 いろいろな数列の和 教科書 pp.32-33
- 1.2.4 問題 教科書 p.34

1.3 漸化式と数学的帰納法

- 1.3.1 漸化式 教科書 pp.35-42
- 1.3.2 数学的帰納法 教科書 pp.43-47
- 1.3.3 数学的帰納法 教科書 p.48

1.4 章末問題 教科書 p.49-50

第2章 統計的な推測 [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

2.1 確率分布

- 2.1.1 確率変数と確率分布 教科書 pp.52-53
- 2.1.2 確率変数の期待値と分散 教科書 pp.54-61
- 2.1.3 確率変数の和と積 教科書 pp.62-69
- 2.1.4 二項分布 教科書 pp.70-73
- 2.1.5 正規分布 教科書 pp.74-84
- 2.1.6 問題 教科書 p.85

2.2 統計的な推測

- 2.2.1 母集団と標本 教科書 pp.86-89
- 2.2.2 標本平均の分布 教科書 pp.90-95
- 2.2.3 推定 教科書 pp.96-99
- 2.2.4 仮説検定 教科書 pp.100-105
- 2.2.5 問題 教科書 p.106

2.3 章末問題 教科書 pp.107-108

目次

スライド	i
第1章 数列	1
1.1 等差数列と等比数列	1
1.1.1 数列と一般項	1
1.1.2 等差数列	3
1.1.3 等差数列の和	7
1.1.4 等比数列	10
1.1.5 等比数列の和	13
1.1.6 問題	17
1.2 いろいろな数列	19
1.2.1 和の記号 $\sum$	19
1.2.2 階差数列	26
1.2.3 いろいろな数列の和	30
1.2.4 問題	33
1.3 漸化式と数学的帰納法	36
1.3.1 漸化式	36
1.3.2 数学的帰納法	47
1.3.3 問題	53
1.4 章末問題	55
1.4.1 章末問題 A	55
1.4.2 章末問題 B	56
第2章 統計的な推測	59
2.1 確率分布	59
2.1.1 確率変数と確率分布	59
2.1.2 確率変数の期待値と分散	61
2.1.3 確率変数の和と積	68
2.1.4 二項分布	75
2.1.5 正規分布	79
2.1.6 問題	89
2.2 統計的な推測	91
2.2.1 母集団と標本	91
2.2.2 標本平均の分布	94
2.2.3 推定	100

2.2.4	仮説検定	104
2.2.5	問題	109
2.3	章末問題	110
2.3.1	章末問題 A	110
2.3.2	章末問題 B	111
	正規分布表	112
解答		113
	ベータ関数・ガンマ関数	165
	ウォリス (Wallis) の積分	168
	ガウス積分・正規分布の確率密度関数	171
	正規分布の期待値 (平均)・分散	172
	二項分布の正規分布による近似	173
	大数の法則	186
	中心極限定理	189

第 1 章 数列

1.1 等差数列と等比数列

1.1.1 数列と一般項

正の奇数を小さい順に並べると， $1, 3, 5, 7, \dots$ のような数の列ができる．ここでは，数を一列に並べたものを一般的に考えてみよう．

A 》数列の表記

自然数 $1, 2, 3, 4, \dots$ を，右の図のように正形状に並べていく．このとき，上端に並ぶ数を左から順に取り出すと，

$$1, 4, 9, 16, \dots \quad \textcircled{1}$$

1	4	9	16		
2	3	8	15		
5	6	7	14	23	
10	11	12	13	22	
17	18	19	20	21	

のような数の列ができる．

一般に，数を一列に並べたものを数列¹といい，数列における各数を項という．

数列の項は，最初の項から順に第 1 項，第 2 項，第 3 項， $\dots$ といい， n 番目の項を第 n 項という．とくに，第 1 項を初項ともいう．

数列 $\textcircled{1}$ の初項は 1 で，第 3 項は 9 である．

練習 1.1 上の数列 $1, 4, 9, 16, \dots$ の第 2 項と第 4 項をいえ．また，第 5 項を求めよ． [解](#)

数列を一般的に表すには，次のように書く．

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

この数列を $\{a_n\}$ と略記することもある．

a_1 が初項，
 $a_{\bullet}$ が第 $\bullet$ 項

[\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

¹ 項の個数が有限である数列を有限数列，無限である数列を無限数列ということがある．

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n が n の式で表されるとき、 n に $1, 2, 3, \dots$ を順に代入すると、数列 $\{a_n\}$ の初項、第2項、第3項、 $\dots$ が得られる。このような a_n を数列 $\{a_n\}$ の一般項という。

前ページの数列 ① は、一般項が n^2 の数列である。

注意 たとえば、一般項が n^2 の数列を、数列 $\{n^2\}$ と略記することもある。

例 1.1 一般項が $a_n = 3n - 2$ である数列 $\{a_n\}$ の第3項までを求める。

S

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$$

$$a_n = 3 \times n - 2$$

この数を代入

練習 1.2 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について、初項から第4項までを求めよ。 解

(1) $a_n = 2n - 1$

(2) $a_n = n(n + 1)$

(3) $a_n = 2^n$

B 》数列の一般項を n の式で表す

例 1.2 (1) -1 と 1 が交互に並ぶ数列 $-1, 1, -1, 1, \dots$ の一般項を a_n として n の式で表すと $a_n = (-1)^n$

S

(2) 分子には自然数、分母には分子より 1 大きい数が順に現れる分数の数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ の一般項を a_n として n の式で表すと $a_n = \frac{n}{n+1}$

練習 1.3 次のような数列の一般項 a_n を、 n の式で表せ。 解

(1) 偶数 $2, 4, 6, 8, \dots$ の数列で符号を交互に変えた数列

$$-2, 4, -6, 8, \dots$$

(2) 分子には奇数、分母には 2 の累乗が順に現れる分数の数列

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \dots$$

深化 1.1 1 ページの自然数を正形状に並べた図において、自分で定めた規則にしたがって数を取り出し数列を作ってみよう。 解

1.1.2 等差数列

偶数の数列 $2, 4, 6, 8, \dots$ や奇数の数列 $1, 3, 5, 7, \dots$ では、各項が2ずつ増えていく。これらの数列では、隣り合う2項の差が常に2で、一定になっている。ここでは、このような性質をもつ数列について考えてみよう。

A 》 等差数列

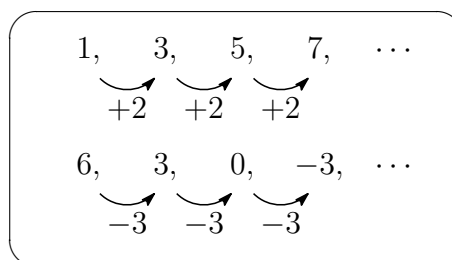
たとえば、1 から順に奇数が並ぶ

数列 $1, 3, 5, 7, \dots$

は、1 に次々と2を足すと得られる。

また、6 に次々と -3 をたすと、

$6, 3, 0, -3, \dots$



のような数列が得られる。

一般に、初項に一定の数 d を次々と足して得られる数列を等差数列といい、その一定の数 d を公差という。

例 1.3 (1) 初項2, 公差3の等差数列

S

$2, 5, 8, 11, \dots$

← 3を次々と足す

(2) 等差数列 $a, 13, 11, 9, \dots$ の初項 a と公差 d

$$13 + d = 11 \text{ より } d = 11 - 13 = -2$$

$$\text{また, } a + (-2) = 13 \text{ より}$$

$$a = 13 + 2 = 15$$

練習 1.4 次のような等差数列の初項から第4項までを書け。 解

(1) 初項1, 公差5

(2) 初項10, 公差 -4

練習 1.5 次の等差数列の公差を求めよ。また、に適する数を求めよ。 解

(1) $1, 5, 9, \square, \square, \dots$ (2) $\square, 5, 2, \square, \square, \dots$

B 》等差数列の一般項

初項 a ，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ では， a に d を次々と足すから

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a + d$$

$$a_3 = a + 2d$$

...

$$a_{\bullet} = a + (\bullet - 1) \times d$$

1 だけ小さい

となる．以上から，次のことがいえる．

等差数列の一般項

初項 a ，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n - 1)d$$

← 等差数列の一般項は
 n の 1 次式

例 1.4 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

S

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 \quad \text{すなわち} \quad a_n = 3n - 1$$

練習 1.6 次のような等差数列の一般項を求めよ．また，第 10 項を求めよ． **解**

(1) 初項 5，公差 4

(2) 初項 10，公差 -5

例題 1.1 第3項が10, 第6項が1である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. S

解答 求める初項を a , 公差を d とすると $a_n = a + (n-1)d$

第3項が10であるから $a + 2d = 10 \quad \dots \textcircled{1}$

第6項が1であるから $a + 5d = 1 \quad \dots \textcircled{2}$

①, ②を解くと $a = 16, d = -3$

よって, 一般項は $a_n = 16 + (n-1) \cdot (-3)$

すなわち $a_n = -3n + 19$

練習 1.7 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. 解

(1) 第4項が15, 第8項が27

(2) 第5項が20, 第10項が0

C》等差数列の性質

等差数列は、初項に一定の数 d を次々と足して得られる数列であり、隣り合う2項の差が常に一定である。等差数列 $\{a_n\}$ について、すべての自然数 n で、次の関係が成り立つ。

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} - a_n = d \quad \leftarrow a_{n+1} \text{ は第 } (n+1) \text{ 項}$$

例題 1.2 一般項が $a_n = 3n - 4$ で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。また、初項と公差を求めよ。 S

解答 $a_n = 3n - 4$ であるから

$$a_{n+1} - a_n = \{3(n+1) - 4\} - (3n - 4) = 3$$

隣り合う2項の差が3で一定であるから、数列 $\{a_n\}$ は公差3の等差数列である。

$$\text{また} \quad a_1 = 3 \cdot 1 - 4 = -1$$

よって、初項は -1 、公差は3である。

練習 1.8 一般項が $a_n = 2n + 5$ で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。また、初項と公差を求めよ。 解

例題 1.3 次の数列が等差数列であるとき、 x の値を求めよ。 S

$$1, x, 8, \dots$$

解答 隣り合う2項の差が等しいから $x - 1 = 8 - x$

$$\text{よって, } 2x = 1 + 8 \quad \text{より} \quad x = \frac{9}{2}$$

補足 一般に次のことが成り立つ。 b を等差中項という。

$$\text{数列 } a, b, c \text{ が等差数列} \iff 2b = a + c$$

練習 1.9 次の数列が等差数列であるとき、 x の値を求めよ。 解

$$(1) \quad 3, x, 11, \dots$$

$$(2) \quad \frac{1}{12}, \frac{1}{x}, \frac{1}{6}, \dots$$

1.1.3 等差数列の和

初項 1, 公差 4 の等差数列の初項から第 8 項までの和 S を求めるのに, 次のように工夫して, $2S = 30 \times 8$ から求める方法がある.

$$\begin{array}{r} S = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 \\ +) S = 29 + 25 + 21 + 17 + 13 + 9 + 5 + 1 \\ \hline 2S = 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 \end{array} \quad \leftarrow \text{足す項の順を逆にしている.}$$

ここでは, この方法により, 一般の等差数列の和の公式を求めよう.

A 》等差数列の和の公式

初項 a , 公差 d の等差数列において, 第 n 項が l のとき, 初項から第 n 項までの和を S_n で表すと,

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (l - d) + l \quad \cdots \textcircled{1}$$

である. 足す項の順を逆にすると, S_n は次のようにも表される.

$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \cdots + (a + d) + a \quad \cdots \textcircled{2}$$

① と ② の各辺を足すことにより $2S_n = n(a + l)$

また, l は第 n 項であるから, $l = a + (n - 1)d$ と表される.

以上から, 次の公式が得られる.

[等差数列の和の公式]

等差数列の和

等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする.

1 初項 a , 第 n 項 l のとき $S_n = \frac{1}{2}n(a + l)$

2 初項 a , 公差 d のとき $S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}$

項の個数が有限である数列では, その項の個数を項数といい, 最後の項を末項^{まつこう}という. 上の公式 1 は, 初項 a , 末項 l , 項数 n の等差数列の和を表している.

例 1.5 (1) 初項 3, 末項 19, 項数 15 の等差数列

の和 S は $S = \frac{1}{2} \cdot 15(3 + 19) = 165$

$$\frac{1}{2} \times \text{項数} \times (\text{初項} + \text{末項})$$

(2) 初項 1, 公差 3 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

[S]

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 3\} = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

練習 1.10 次の和 S を求めよ. 解

(1) 初項 2, 末項 10, 項数 9 の等差数列の和

(2) 初項 10, 公差 -4 の等差数列の初項から第 15 項までの和

練習 1.11 初項 1, 公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ. 解

例題 1.4 次の等差数列の和 S を求めよ.

S

$$12, 15, 18, \dots, 99$$

解答 この等差数列の初項は 12, 公差は 3 である.

$$\text{項数を } n \text{ とすると } 12 + 3(n - 1) = 99$$

← 99 が第 n 項

$$\text{これを解くと } n = 30$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \cdot 30(12 + 99) = 1665$$

練習 1.12 次の等差数列の和を求めよ. 解

(1) 2, 6, 10, $\dots$, 74

(2) 102, 96, 90, $\dots$, 6

B》自然数の和, 奇数の和

自然数の和, 奇数の和は, 等差数列の和であり, 次のようになる.

自然数の和, 奇数の和

$$1 \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

← 初項 1, 末項 n , 項数 n

$$2 \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

← 初項 1, 末項 $2n - 1$, 項数 n

例 1.6 自然数の和, 奇数の和

S

$$(1) \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \frac{1}{2} \cdot 10(10 + 1) = 55$$

$$(2) \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + 19 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot 10 - 1) \\ = 10^2 = 100$$

練習 1.13 次の和を求めよ。解

(1) 1 から 100 までのすべての自然数の和 $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ (2) 1 から 55 までのすべての奇数の和 $1 + 3 + 5 + \cdots + 55$

C 》等差数列の和の最大

応用例題 1.1 初項が 50, 公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

S

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また, その和を求めよ。

考え方 》 (1) $a_n < 0$ を満たす最小の自然数 n の値を求める。(2) 第 k 項が初めて負の数になるとき, 第 $(k - 1)$ 項までの和が最大。解答 (1) 一般項は $a_n = 50 + (n - 1) \cdot (-3)$ すなわち $a_n = -3n + 53$

$$-3n + 53 < 0 \text{ より } n > \frac{53}{3} \quad \leftarrow \frac{53}{3} = 17.6\cdots$$

これを満たす最小の自然数 n は $n = 18$ (答) 第 18 項

(2) (1) より, 初項から第 17 項までの和が最大となり, その和は

$$\frac{1}{2} \cdot 17 \{2 \cdot 50 + (17 - 1) \cdot (-3)\} = 442$$

(答) 第 17 項までの和が最大, その和は 442

練習 1.14 初項が 100, 公差が -7 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。解

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また, その和を求めよ。

1.1.4 等比数列

たとえば, 3 に次々と 2 を掛けると,
次のような数列が得られる.

$$3, 6, 12, 24, \dots$$

この数列では, 隣り合う 2 項の比が,
常に一定になっている.

ここでは, このような性質をもつ数列について考えてみよう.

$$\begin{array}{ccccccc} 3, & 6, & 12, & 24, & \dots \\ & \nearrow \times 2 & \nearrow \times 2 & \nearrow \times 2 & \\ & 6 & 12 & 24 & \\ & \frac{6}{3} = & \frac{12}{6} = & \frac{24}{12} = & \dots \end{array}$$

A 》 等比数列

初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列を等比数列といい, その一定の数 r を公比という².

例 1.7 (1) 初項 2, 公比 -3 の等比数列は, 次のようになる.

S

$$2, -6, 18, -54, \dots \quad \leftarrow -3 \text{ を次々と掛ける.}$$

(2) 等比数列 $a, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ の初項 a と公比 r を求める.

$$\frac{1}{4}r = \frac{1}{8} \text{ から } r = \frac{1}{2}$$

$$\text{また, } a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ より } a = \frac{1}{2}$$

練習 1.15 次のような等比数列の初項から第 4 項までを書け. 解

- (1) 初項 1, 公比 5 (2) 初項 -3 , 公比 $-\frac{1}{3}$

練習 1.16 次の等比数列の公比を求めよ. また, に適する数を求めよ. 解

- (1) $1, -2, 4, \text{ }, \dots$ (2) $\text{ }, 8, 4, \text{ }, \dots$

² 一般に, 等比数列の初項と公比は 0 であってもよいが, 本書で扱う等比数列は, 初項も公比も 0 でないものである.

B 》等比数列の一般項

初項 a ，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ では， a に r を次々と掛けるから

$$a_1 = a$$

$$a_2 = ar$$

$$a_3 = ar^2$$

...

$$a \bullet = ar^{\bullet-1}$$

1 だけ小さい

となる．また， $r^0 = 1$ より $a_1 = a = ar^0$ である．

以上から，次のことがいえる．

等比数列の一般項

初項 a ，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = ar^{n-1}$

例 1.8 (1) 初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

S

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

(2) 初項 -2 ，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = -2 \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

(3) 初項 3，公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 3^n$$

練習 1.17 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，第 5 項を求めよ． 解

(1) 初項 2，公比 3

(2) 初項 1，公比 -3

(3) 初項 2，公比 2

(4) 初項 -3 ，公比 $\frac{1}{2}$

練習 1.18 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ． 解

(1) $1, -2, 4, -8, \dots$

(2) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$

(3) $-5, 5, -5, 5, \dots$

(4) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$

例題 1.5 第4項が24, 第6項が96である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. [S]

解答 求める初項を a , 公比を r とする.

$$\text{第4項が24であるから} \quad ar^3 = 24 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{第6項が96であるから} \quad ar^5 = 96 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad r^2 = 4$$

$$\text{これを解くと} \quad r = \pm 2$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } r = 2 \text{ のとき } a = 3, r = -2 \text{ のとき } a = -3$$

$$\text{よって, 一般項は } a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \text{ または } a_n = -3(-2)^{n-1}$$

練習 1.19 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. [解]

(1) 第2項が6, 第4項が54

(2) 第5項が-9, 第7項が-27

C》等比数列の性質

等比数列は, 初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列であり, 隣り合う2項の比が常に一定である. 等比数列 $\{a_n\}$ について, すべての自然数 n で, 次の関係が成り立つ.

$$a_{n+1} = ra_n \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

例題 1.6 数列 $2, x, 5, \dots$ が等比数列であるとき, x の値を求めよ. [S]

解答 隣り合う2項の比が等しいから $\frac{x}{2} = \frac{5}{x}$

よって $x^2 = 2 \times 5 = 10$

したがって $x = \pm\sqrt{10}$

補足 一般に, a, b, c が0でないとき, 次のことが成り立つ. b を等比中項という.

$$\text{数列 } a, b, c \text{ が等比数列} \iff b^2 = ac$$

練習 1.20 数列 $3, x, 9, \dots$ が等比数列であるとき, x の値を求めよ. [解]

1.1.5 等比数列の和

初項 1, 公比 2 の等比数列の初項から第 8 項までの和 S を求めるのに, 次のように工夫して, $-S = 1 - 2^8$ から求める方法がある.

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 \\ -) 2S & = & 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 \quad \leftarrow \text{和を 2 倍して, 項を 1 つずつずらして引く.} \\ \hline -S & = & 1 \qquad \qquad \qquad -2^8 \end{array}$$

ここでは, この方法により, 一般の等比数列の和の公式を求めよう.

A》等比数列の和の公式

初項 a , 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき, S_n は次のようにして求められる.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{.....} \quad r \neq 1 \text{ のとき} \quad rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{とすると, } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から} \quad S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$\text{すなわち} \quad (1 - r)S_n = a(1 - r^n)$$

$$1 - r \neq 0 \text{ であるから} \quad S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$\text{.....} \quad r = 1 \text{ のとき} \quad \textcircled{1} \text{ より } S_n \text{ は } n \text{ 個の } a \text{ の和になるから} \quad S_n = na$$

以上から, 次の公式が得られる.

等比数列の和

初項 a , 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$r \neq 1 \text{ のとき} \quad S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{または} \quad S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$r = 1 \text{ のとき} \quad S_n = na$$

補足 $r \neq 1$ のとき $\frac{1 - r^n}{1 - r} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$

とくに, 等比数列の第 n 項が l のとき, $l = ar^{n-1}$ より

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a - r \cdot ar^{n-1}}{1 - r} = \frac{a - rl}{1 - r} = \frac{rl - a}{r - 1}$$

例題 1.7 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

S

- (1) 初項 3, 公比 2 (2) 初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$

解答 (1) $S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 3(2^n - 1)$ $\leftarrow S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

(2) $S_n = \frac{1 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{2 \left(1 - \frac{1}{2} \right)}$ $\leftarrow S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$
 $= 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$

練習 1.21 次の等比数列の初項から第 n までの和 S_n を求めよ.

解

- (1) $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ (2) $2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, -\frac{2}{3^3}, \dots$

応用例題 1.2 初項から第3項までの和が3, 第2項から第4項までの和が-6である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ. S

考え方 》 $ar + ar^2 + ar^3 = r(a + ar + ar^2)$ に着目する.

解答	条件から	$a + ar + ar^2 = 3$	... ①
		$ar + ar^2 + ar^3 = -6$	... ②
	②より	$r(a + ar + ar^2) = -6$	
	①を代入して	$3r = -6$	
	よって	$r = -2$	
	これを ① に代入すると	$a - 2a + 4a = 3$	
	これを解いて	$a = 1$	(答) $a = 1, r = -2$

練習 1.22 初項から第3項までの和が7, 第3項から第5項までの和が28である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ. 解

研究

複利計算

銀行などがお金を預かったり貸したりするときの、利息計算について考えてみよう.

たとえば、年利率 2% で a 円を 1 年間預金すると、1 年後には $(a \times 0.02)$ 円の利息がつく. したがって、元金 a 円と利息を合わせた元利合計 S_1 円は、次の式で表される.

$$S_1 = a + a \times 0.02 = a(1 + 0.02) = a \times 1.02$$

S_1 円を元金にしてもう 1 年間預けると、元利合計 S_2 円は

$$S_2 = (a \times 1.02) \times 1.02 = a \times 1.02^2$$

となる.

このように、一定期間の終りごとに、その元利合計を次の期間の元金とする利息の計算は、複利計算と呼ばれる.

年利率 2%, 1 年ごとの複利で、毎年初めに a 円ずつ積み立てるとき、10 年間の元利合計 S 円を求めてみよう.

a 円を n 年間預けると、元利合計は $a \times 1.02^n$ 円になる.

したがって、10 年間に積み立てたお金の元利合計 S 円は、次のようになる.

$$S = a(1.02 + 1.02^2 + 1.02^3 + \cdots + 1.02^{10})$$

() 内は、初項 1.02, 公比 1.02 の等比数列の和であるから

$$S = a \times \frac{1.02(1.02^{10} - 1)}{1.02 - 1}$$

$1.02^{10} \doteq 1.219$ であるから $S \doteq 11.169a$ となる. $a = 100000$ のとき、10 年間の元利合計は、およそ 111 万 6900 円である. [複利計算]

演習 1.1 年利率 1%, 1 年ごとの複利, 毎年初めにお金を積み立て、10 年後 120 万円にしたい. 毎年初めに積み立てるお金をいくらにすればよいか. $1.01^{10} = 1.10462$ とし、小数第 1 位を四捨五入して求めよ. [解]

1.1.6 問題

問題 1.1 $4, 2, x, y$ の逆数を項とする数列 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ が等差数列となるとき, x, y の値を求めよ. [解](#) → p.6 例題 1.3

問題 1.2 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする. $a_3 = 4, S_4 = 20$ のとき, 次の問いに答えよ. [解](#) → p.7 例 1.5

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ.
- (2) S_n を求めよ.

問題 1.3 1 から 100 までの自然数について, 次の和を求めよ. [解](#) → p.9 例 1.6

- (1) 奇数の和
- (2) 偶数の和
- (3) 5 の倍数の和
- (4) 5 の倍数でない数の和

問題 1.4 初項 200, 公差 -6 の等差数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ. [解](#)

- (1) 50 は第何項か. → p.9 応用例題 1.1
- (2) 初項から第何項までの和が最大であるか. また, その和を求めよ.

問題 1.5 第2項が3, 第5項が24である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. ただし, 公比は実数とする. 解 → p.12 例題 1.5

問題 1.6 第2項が3, 初項から第3項までの和が13である等比数列の初項と公比を求めよ. 解 → p.15 応用例題 1.2

問題 1.7 1から200までの自然数について, 3で割って1余る数の和を求めよ. 解

問題 1.8 次の2種類の貯金の方法を考える.

方法 A : 1日目に300円貯金する. 2日目以降は, 前の日より100円多い金額を貯金する.

方法 B : 1日目に4円貯金する. 2日目以降は, 前日の3倍の金額を貯金する.

7日間貯金を行った場合, AとBのどちらが多く貯金ができるか. 解

1.2 いろいろな数列

1.2.1 和の記号 $\sum$

数列には，これまでに学んだ等差数列，等比数列のほかにも，いろいろなものがある．ここでは，いろいろな数列の和を求める方法を調べよう．

A 》自然数の累乗の和

次のような1から n までの自然数の2乗の和を求めてみよう．

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

そのためには，次の恒等式を利用する．

	$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$
$k=1$	$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$
$k=2$	$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$
$k=3$	$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$
.....	
$k=n$	$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

左辺だけ加えると

$$\begin{array}{r}
 1^3 - 0^3 \\
 2^3 - 1^3 \\
 3^3 - 2^3 \\
 \vdots \\
 +) \quad n^3 - \cancel{(n-1)^3} \\
 \hline
 n^3 - 0^3
 \end{array}$$

これら n 個の等式を辺々加えると

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

すなわち
$$n^3 = 3S - 3 \times \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

よって
$$\begin{aligned}
 6S &= 2n^3 + 3n(n+1) - 2n \\
 &= n(n+1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

したがって
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

補足 自然数の和 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ や自然数の2乗の和は，例1.10の和の記号を用いて，次のように書くこともできる．

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad (1.1)$$

数列 $\{a_n\}$ の和を記号 $\sum$ を用いて次のように書く.

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

とくに, $a_n = c$ (c は定数) のときは, 次のようになる³.

$$\sum_{k=1}^n c = \overbrace{c + c + c + \cdots + c}^{n \text{ 個}} = nc$$

前ページの証明は, 次式および $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum_{k=1}^n 1 = n$ を利用している.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{k^3 - (k-1)^3\} &= (1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \cdots + \{n^3 - (n-1)^3\} \\ &= n^3 \end{aligned}$$

また, $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ であるから, 24 ページの $\sum$ の性質を利用して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{k^3 - (k-1)^3\} &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ n^3 &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ 6 \sum_{k=1}^n k^2 &= 2n^3 + 3n(n+1) - 2n \\ 6 \sum_{k=1}^n k^2 &= n(n+1)(2n+1) \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

21 ページの練習 1.23 の自然数の立方和 $\sum_{k=1}^n k^3$ は, 与えられた恒等式およびこれまでに求めた次の等式を利用する.

$$\sum_{k=1}^n 1 = n, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

³ $c = 1$ のとき $\sum_{k=1}^n 1$ は, 1 を省略して $\sum_{k=1}^n$ とかくことがある.

練習 1.23 恒等式 $k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$ を用いて、次の等式を証明せよ.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 \quad \text{解}$$

例 1.9 (1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \frac{1}{6} \cdot 10(10+1)(2 \cdot 10 + 1)$ S
 $= 385$

(2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 10(10+1) \right\}^2$
 $= 3025$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times (10+1) \times (2 \cdot 10 + 1)$$

$$= \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 = 385$$

練習 1.24 次の和を求めよ. 解

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$

(2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3$

B 》和の記号 $\sum$

数列 $\{a_n\}$ について、初項から第 n 項までの和を、第 k 項 a_k と和の記号 $\sum$ を用いて $\sum_{k=1}^n a_k$ と書く⁴. [和の記号 $\sum$]

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

注意 $\sum_{k=\bigcirc}^{\square} a_k$ と書けば、数列 $\{a_n\}$ の第 $\bigcirc$ 項から第 $\square$ 項までの和を表す. また、 $\sum_{i=1}^n a_i$ のように、 k の代わりに別の文字を使ってもよい.

例 1.10 (1) $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ $\leftarrow a_k = k$ の場合 S

(2) $\sum_{k=2}^{10} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 10^2$ $\leftarrow a_k = k^2$ で、第 2 項から第 10 項までの和

⁴ 和を意味する英語 Sum の S に対応するギリシャ文字が $\sum$ で、「シグマ」と読む.

例 1.11 次の式は、いずれも和 $2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$ を表す。

S

$$\sum_{k=2}^6 k^2, \quad \sum_{i=2}^6 i^2, \quad \sum_{k=1}^5 (k+1)^2$$

練習 1.25 次の (1)~(3) の式は例 1.10 のような和の形で書け。 (4), (5) の式は和の記号 $\sum$ を用いて書け。 解

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

$$(2) \sum_{k=1}^8 2^{k-1}$$

$$(3) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$(4) 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$(5) 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2$$

例 1.12 (1) $\sum_{k=1}^n 3^{k-1} = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

←

初項 1, 公比 3 の等比数列
初項から第 n 項

S

(2) $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 2$

←

初項 2, 公比 2 の等比数列
初項から第 $(n-1)$ 項

練習 1.26 次の和を求めよ。 解

$$(1) \sum_{k=1}^n 5^{k-1}$$

$$(2) \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

項がすべて c である数列 $\{a_n\}$ では, $a_k = c$ であるから

$$\sum_{k=1}^n a_k = c + c + c + \cdots + c = nc \quad \leftarrow c \text{ が } n \text{ 個}$$

となる. すなわち $\sum_{k=1}^n c = nc$ であり, とくに $\sum_{k=1}^n 1 = n$ である.

自然数の和と自然数の累乗の和は, Σ を用いて次のように表される.

自然数に関する和の公式

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c &= nc & \text{とくに} & \sum_{k=1}^n 1 = n \\ \sum_{k=1}^n k &= \frac{1}{2}n(n+1) \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 \end{aligned}$$

練習 1.27 次の和を求めよ. 解

$$(1) \sum_{k=1}^{15} 2$$

$$(2) \sum_{k=1}^{50} k$$

$$(3) \sum_{k=1}^{12} k^2$$

$$(4) \sum_{k=1}^7 k^3$$

C》和の記号 $\sum$ の性質

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ と定数 p に対して

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n) \\ = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)\end{aligned}$$

$$pa_1 + pa_2 + pa_3 + \cdots + pa_n = p(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

となるから、 $\sum$ について次の性質が成り立つ.

$\sum$ の性質

$$1 \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$2 \quad \sum_{k=1}^n pa_k = p \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{ただし, } p \text{ は } k \text{ に無関係な定数}$$

注意 $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$ も成り立つ.

例 1.13 $\sum_{k=1}^n (k^2 - 3k + 2) = \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2$ S

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+2) - 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 2n \\&= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12\} \\&= \frac{1}{6}n(2n^2 - 6n + 4) = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)\end{aligned}$$

練習 1.28 次の和を求めよ. 解

$$(1) \sum_{k=1}^n (4k - 5)$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4)$$

$$(3) \sum_{k=1}^n (k^3 + k)$$

$$(4) \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

例題 1.8 次の和を求めよ.

S

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2)$$

解答 これは、第 k 項が $k(k+2)$ である数列の、初項から第 n 項までの和である。
よって、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+2) &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2 \times \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1) + 6\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \end{aligned}$$

練習 1.29 次の和を求めよ. **解**

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

1.2.2 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う2項の差をとって順に並べると、別の数列が得られる。この数列の一般項から、数列 $\{a_n\}$ の一般項が求められることがある。

A 》 階差数列

右の図のように、自然数を正形状に並べていく。このとき、対角線上に並ぶ数を順に並べると、次の数列が得られる。

$$1, 3, 7, 13, 21, \dots$$

さらに、この数列の隣り合う2項の差を順に並べると、次の数列が得られる。

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

一般に、数列 $\{a_n\}$ の隣り合う2項の差

$$a_{n+1} - a_n = b_n \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_{n-1} \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \swarrow \\ & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & & b_n \end{array}$$

を項とする数列 $\{b_n\}$ を、数列 $\{a_n\}$ の階差数列という。

例 1.14 数列 $1, 3, 7, 13, 21, \dots$ を $\{a_n\}$ とする。

S

階差数列 $\{b_n\}$ は

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

であり、 $b_n = 2n$ である。

数列 $\{a_n\}$ の第6項は、

$$a_6 - a_5 = b_5 \text{ から } a_6 = a_5 + b_5 = 21 + 2 \cdot 5 = 31$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 7 & 13 & 21 \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array}$$

練習 1.30 階差数列を考えて、次の数列の第6項、第7項を求めよ。解

$$1, 2, 5, 10, 17, \dots$$

B》階差数列から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} = a_n + b_n$$

$$\text{よって} \quad a_2 = a_1 + b_1$$

$$a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 + b_2$$

$$a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3$$

...

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}$$

したがって、次のことがいえる.

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & \cdots & & a_{n-1} & & a_n \\ & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \nearrow & \\ & +b_1 & & +b_2 & & & & & & +b_{n-1} & \end{array}$$

注意 上の a_n は $n \geq 2$ のときの式なので, $n = 1$ で成り立つとは限らない.

例題 1.9 次の数列の一般項 a_n を求めよ.

S

$$1, 3, 7, 13, 21, \dots$$

解答 この数列の階差数列は $2, 4, 6, 8, \dots$

その一般項を b_n とすると, $b_n = 2n$ である.

よって, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \times \frac{1}{2}(n-1)n \quad \leftarrow a_1=1, b_k=2k$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = n^2 - n + 1$$

初項は $a_1 = 1$ なので, 上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって, 一般項 a_n は $a_n = n^2 - n + 1$

補足 階差数列の一般項 b_n から求めた $a_n = n^2 - n + 1$ は $n \geq 2$ のときの一般項である. よって, $n = 1$ のときについて, 別に確かめる必要がある.

練習 1.31 階差数列を利用して、次の数列の一般項 a_n を求めよ. 解

(1) 1, 2, 4, 7, 11, ...

(2) 2, 3, 5, 9, 17, ...

C 》数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ において、初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が n の式で与えられているときに、一般項 a_n を求める方法を考えよう.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

において $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = S_{n-1}$

であるから、 $n \geq 2$ のとき $S_n = S_{n-1} + a_n, \quad S_1 = a_1$

また $S_1 = a_1$

以上から、次のことが成り立つ.

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると

初項 a_1 は $a_1 = S_1$

$n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$

例題 1.10 初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = n^2 + 2n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. S

解答 初項 a_1 は $a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 \quad \dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = 2n + 1$$

$\textcircled{1}$ より $a_1 = 3$ なので、この式は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって、一般項は $a_n = 2n + 1$

練習 1.32 初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = n^2 - n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. 解

1.2.3 いろいろな数列の和

応用例題 1.3 次の和 S を求めよ.

S

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

考え方 》 恒等式 $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ を利用する.

解答
$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

練習 1.33 恒等式 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$ を利用して,

和 $S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ を求めよ. 解

応用例題 1.4 次の和 S を求めよ.

S

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$$

考え方》第 k 項が $k \cdot 2^{k-1}$ で表される数列の和である. 等比数列の和の公式を導いたのと同様に, S と $2S$ の差を計算する.

解答

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} \\ 2S &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \\ \text{の辺々を引くと} & \qquad \qquad \qquad \leftarrow \begin{array}{l} (2-1)2=2 \\ (3-2)2^2=2^2 \\ \text{など} \end{array} \\ S - 2S &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n \\ \text{よって} & \qquad -S = \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n \cdot 2^n \\ \text{したがって} & \qquad S = n \cdot 2^n - (2^n - 1) = (n-1) \cdot 2^n + 1 \end{aligned}$$

練習 1.34 次の和を求めよ. **解**

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$$

応用例題 1.5 正の偶数の列を，次のような群に分ける．ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする. S

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & | & 4, 6 & | & 8, 10, 12 & | & 14, 16, 18, 20 & | & 22, \dots \\ \text{第1群} & & \text{第2群} & & \text{第3群} & & \text{第4群} & & \end{array}$$

- (1) 第 n 群の最初の数 a_n を n の式で表せ.
- (2) 第 10 群に入るすべての数の和 S を求めよ.

考え方 》 (1) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の個数を考える.
 (2) 等差数列の和として求める．第 10 群の最初の数 a_{10} は (1) を利用する.

解答 (1) $n \geq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る自然数の個数は

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

求める数は，偶数の列の第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1) + 1\right\}$ 項であるから

$$2 \left\{ \frac{1}{2}n(n-1) + 1 \right\} = n^2 - n + 2 \quad \leftarrow \text{偶数の列の第 } k \text{ 項は } 2k$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ.

よって，第 n 群の最初の数 a_n は $n^2 - n + 2$

- (2) 第 10 群の最初の数 a_{10} は，(1) の結果を用いて $10^2 - 10 + 2 = 92$
 よって，和 S は，初項 92，公差 2，項数 10 の等差数列であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \{2 \cdot 92 + (10-1) \cdot 2\} = 1010$$

練習 1.35 正の奇数の列を，次のような群に分ける．ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする. 解

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & | & 3, 5 & | & 7, 9, 11 & | & 13, 15, 17, 19 & | & 21, \dots \\ \text{第1群} & & \text{第2群} & & \text{第3群} & & \text{第4群} & & \end{array}$$

- (1) 第 n 群の最初の数 a_n を n の式で表せ.
- (2) 第 15 群に入るすべての数の和 S を求めよ.

1.2.4 問題

問題 1.9 次の和を求めよ. [解](#)

→ p.22 例 1.12, p.24 例 1.13

$$(1) \sum_{k=1}^n (3^k + 2k + 1)$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (k-1)(k+2)$$

$$(3) \sum_{k=1}^n (k^3 - k)$$

問題 1.10 次の数列の第 k 項を k の式で表せ. また, 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ. [解](#) p.25 例題 1.8

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad \cdots, \quad 1+2+3+\cdots+n, \quad \cdots$$

問題 1.11 初項から第 n 項までの和 S_n が, $S_n = n^2 + 1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. [解](#) p.29 例題 1.10

問題 1.12 次の和を求めよ. [解](#)

p.30 応用例題 1.3

$$(1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)}$$

問題 1.13 次の数列の和 S を求めよ. [解](#)

p.31 応用例題 1.4

$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1}$$

問題 1.14 自然数の列を次のような群に分ける．ただし，第 n 群には $(2n - 1)$ 個の数が入るものとする． 解 p.32 応用例題 1.5

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & | & 2, 3, 4 & | & 5, 6, 7, 8, 9 & | & 10, \dots \\ \text{第 1 群} & & \text{第 2 群} & & \text{第 3 群} & & \end{array}$$

- (1) 第 n 群の最初の自然数を n の式で表せ．
 (2) 第 n 群に入るすべての数の和 S を求めよ．

問題 1.15 19 ページの考え方と，恒等式 $3k(k+1) = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)$ を用いて，次の公式を証明せよ．

なお，19 ページ同様，自然数の和の公式 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ は使用してよいものとする． 解

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

1.3 漸化式と数学的帰納法

1.3.1 漸化式

数列において、初項と、隣り合う2項間の関係がわかれば、すべての項が定まる。
たとえば、初項3、公比2の等比数列 $\{a_n\}$ は、次の2つの条件で定められる。

$$\begin{aligned} [1] \quad & a_1 = 3 \\ [2] \quad & a_{n+1} = 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

ここでは、このような条件から数列の一般項を求める方法を調べよう。

A》数列の漸化式と項

数列 $\{a_n\}$ は、次の2つの条件 [1] , [2] を与えると、 $a_2, a_3, a_4, \dots$ が順に求められ、すべての項がただ1通りに定まる。

$$\begin{aligned} [1] \quad & \text{初項 } a_1 \\ [2] \quad & a_n \text{ から } a_{n+1} \text{ を決める関係式 } \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

例 1.15 次の2つの条件 [1] , [2] によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第2項と第3項を求める。

S

$$\begin{aligned} [1] \quad & a_1 = 1 \\ [2] \quad & a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第2項は, } a_2 = 2a_1 + 3 \text{ と } a_1 = 1 \text{ から} & \quad \leftarrow [2] \text{ で } n = 1 \text{ を代入すると} \\ a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5 & \quad a_2 = 2a_1 + 3 \end{aligned}$$

$$\text{第3項は} \quad a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$$

上の [2] のように、数列において前の項から次の項を決めるための関係式を^{ぜんかしき}漸化式という。今後とくに断らなくても、与えられた漸化式は $n = 1, 2, 3, \dots$ で成り立つものとする。

練習 1.36 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第2項から第5項を求めよ。 **解**

$$(1) \quad a_1 = 100, \quad a_{n+1} = a_n - 5 \qquad (2) \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$$

B 》 漸化式で定められる数列の一般項

数列の初項と漸化式が与えられた場合に，その一般項を求めてみよう．

1 $a_{n+1} = a_n + d, a_{n+1} = ra_n$ の形

等差数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $a_{n+1} = a_n + d$ ← d が公差

等比数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $a_{n+1} = ra_n$ ← r が公比

したがって，初項とこれらの形の漸化式が与えられた数列の一般項は，すでに学んだ方法で求められる． ← 6 ページ, 12 ページ

練習 1.37 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ． 解

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$

2 $a_{n+1} = a_n + (n \text{ の式})$ の形

漸化式が $a_{n+1} = a_n + (n \text{ の式})$ の形の場合は、27 ページで学んだ階差数列を利用する方法で、一般項が求められることがある。

例題 1.11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

S

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n$$

解答 条件より

$$a_{n+1} - a_n = 2^n$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が 2^n であるから、

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k && \leftarrow \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \text{ は初項 } 2, \text{ 公比 } 2, \text{ 項数 } n-1 \\ &= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} && \text{の等比数列の和である。} \end{aligned}$$

よって

$$a_n = 2^n - 1$$

初項は $a_1 = 1$ なので、上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ。

したがって、一般項は $a_n = 2^n - 1$

練習 1.38 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 **解**

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3^n$

(2) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 1$

3 $a_{n+1} = pa_n + q$ の形

次のような条件を満たす数列 $\{a_n\}$ について考えてみよう.

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$b_n = a_n + 2$ とすると

$$b_{n+1} = 3b_n$$

$$\leftarrow \frac{a_{n+1}+2}{b_{n+1}} = 3 \frac{a_n+2}{b_n}$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列であるから、初項 b_1 がわかれば一般項 b_n がわかり、 $b_n = a_n + 2$ から一般項 a_n が求められる.

一方、 $\textcircled{1}$ の右辺を展開して整理すると、次の漸化式が得られる.

$$a_{n+1} = 3a_n + 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

以上から、 $\textcircled{2}$ の形の漸化式と初項 a_1 が与えられたとき、 $\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ の形に変形すれば、その一般項が求められることになる.

そこで、 $\textcircled{2}$ の形の漸化式を $\textcircled{1}$ の形に変形する方法を調べよう.

$\textcircled{2}$ に対して、次の等式を満たす c を考える.

$\leftarrow a_{n+1}$ と a_n を c で
おき換えた等式.

$$c = 3c + 4 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ を解くと

$$c = -2$$

$\textcircled{2} - \textcircled{3}$ から $a_{n+1} - c = 3(a_n - c)$

$c = -2$ を代入して

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$$

$$\begin{array}{r} a_{n+1} = 3a_n + 4 \\ -) \quad c = 3c + 4 \\ \hline a_{n+1} - c = 3(a_n - c) \end{array}$$

一般に、 $a_{n+1} = pa_n + q$ の形の漸化式は、等式 $c = pc + q$ を満たす c を用いて、次の形に変形できる. ただし、 $p \neq 0$, $p \neq 1$ とする.

$$a_{n+1} - c = p(a_n - c)$$

練習 1.39 次の $\square$ に適する数を求めよ. 解

(1) $a_{n+1} = 4a_n - 6$ を変形すると $a_{n+1} - \square = 4(a_n - \square)$

(2) $a_{n+1} = 2a_n + 1$ を変形すると $a_{n+1} + \square = 2(a_n + \square)$

(3) $a_{n+1} = -2a_n + 3$ を変形すると $a_{n+1} - \square = -2(a_n - \square)$

例題 1.12 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

[S]

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4$$

解答 漸化式を変形すると $a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$

$$b_n = a_n + 2 \text{ とすると} \quad b_{n+1} = 3b_n$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = b_n - 2$ より

$$a_n = 3^n - 2$$

練習 1.40 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. [解]

(1) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 4a_n - 6$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

研究

 $a_{n+1} = pa_n + q$ を満たす数列の階差数列

次の漸化式 ① を満たす数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を考える.

$$a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad \cdots \text{①}$$

① より
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3 \quad \cdots \text{②}$$

も成り立つ. ② - ① から $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

ここで, $a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1}$, $a_{n+1} - a_n = b_n$ であるから

$$b_{n+1} = 2b_n$$

したがって, 階差数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列である.

一般に, $p \neq 0$ のとき, 漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の階差数列は, 公比 p の等比数列である.

このことを利用して, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることもできる.

研究

図形と漸化式

漸化式を利用して、図形の問題について考えてみよう.

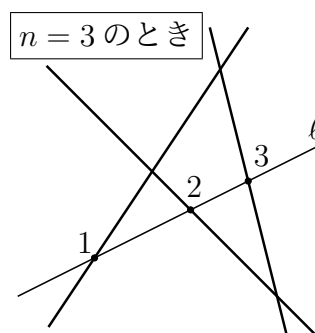
Ex 1.1 平面上に n 本の直線があり、どの2本も平行でなく、また、どの3本も1点で交わらないとする. これら n 本の直線が、平面を a_n 個の部分に分けるときの、 a_n を n の式で表せ. [図形と漸化式]

解答 1本の直線で、平面は2つの部分に分けられるから $a_1 = 2$

n 本の直線により、平面が a_n 個の部分に分けられているとき、 $(n+1)$ 本目の直線 ℓ を引く.

ℓ は n 本目の直線と n 個の点で交わり、 $(n-1)$ 個の線分と2個の半直線に分けられる.

これらの線分と半直線は、それが含まれる各平面の部分に2つに分けるから、直線 ℓ を引くことで、平面の部分が $(n+1)$ 個増加する. よって



$$a_{n+1} = a_n + (n+1) \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} - a_n = n+1$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $n+1$ であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = 2 + \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1)$$

よって
$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

初項は $a_1 = 2$ なので、この式は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって、求める式は
$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

演習 1.2 上の Ex1.1 において、 n 本の直線によって、交点はいくつできるか. 解

Think

漸化式 (ハノイの塔)

● ルール

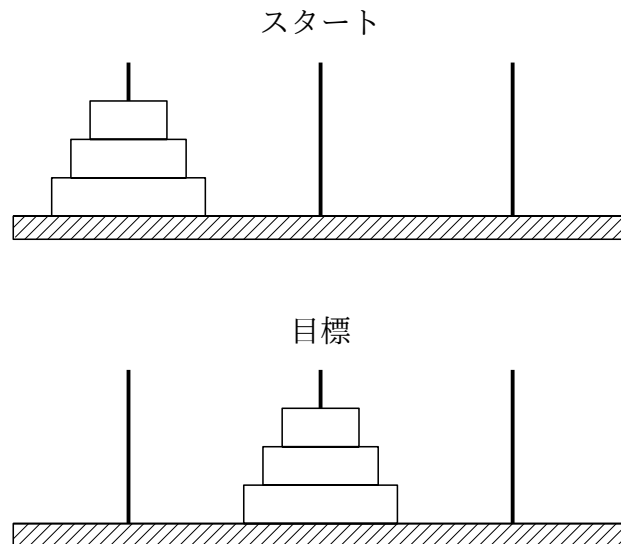
垂直に立った3本の棒と、中央に穴の開いた大きさの異なる何枚かの円盤がある。最初に、すべての円盤を下から大きい順番に1本の棒にさし、次のようなルールですべての円盤を別の1本の棒に移動させる。

[1] 1回に1枚の円盤を別の棒に移動させる。

[2] 円盤の上にそれより大きい円盤をのせてはいけない。

n 枚の円盤を移動させる最も少ない手数を a_n 回として、 a_n を n の式で表せないかを考える。

[ハノイの塔]



● 漸化式

「 n 段を移動する」という作業は以下の3の作業により達成できる。

1. $n - 1$ 段を別の柱に移動する。
2. 最下段を空いている柱に移動する。
3. $n - 1$ 段を最下段に移動する。

逆に「 n 段移動する」ためにはこの3つの作業が必要であるから

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 2a_{n-1} + 1$$

発展

隣接3項間の漸化式

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めてみよう.

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

この漸化式は, 次の2通りに変形することができる.

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①より, 数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は公比3, 初項 $a_2 - 2a_1 = 2$ の等比数列であるから

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots \textcircled{3}$$

②より, 数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は公比2, 初項 $a_2 - 3a_1 = 1$ の等比数列であるから

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2^{n-1} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ から } a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$$

よって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は, 漸化式 $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ を ①, ② の形に変形することによって求められる.

一般に, 漸化式 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ において, $p = -(\alpha + \beta)$, $q = \alpha\beta$ である α, β を用いると, この漸化式は次のように変形することができる.

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \quad \cdots \textcircled{2}'$$

$p = -(\alpha + \beta)$, $q = \alpha\beta$ である2数 α, β は, 解と係数の関係により, 2次方程式(特性方程式) $x^2 + px + q = 0$ の解として求めることができる.

よって, 漸化式 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ と a_1, a_2 が与えられたとき, 2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が異なる2つの解 α, β をもつならば, 漸化式 ①', ②' の形に変形して一般項 a_n を求めることができる.

補足 $\alpha \neq \beta$ のとき, ①', ②' から

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1}$$

$$a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1}$$

上の2式から a_{n+1} を消去すると

$$(\beta - \alpha) a_n = -(a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1} + (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1}$$

したがって

$$a_n = \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta} \cdot \alpha^{n-1} + \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha} \cdot \beta^{n-1} \quad (1.2)$$

$\alpha = \beta \neq 0$ のとき, ①' または ②' に $\beta = \alpha$ を代入すると

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

となり, 両辺を α^{n+2} で割ると

$$\frac{a_{n+2}}{\alpha^{n+2}} - \frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}$$

上式より, 数列 $\left\{ \frac{a_n}{\alpha^n} \right\}$ は初項 $\frac{a_1}{\alpha}$, 公差 $\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1}{\alpha} + (n-1) \left(\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha} \right)$$

したがって

$$a_n = \left\{ \frac{a_1}{\alpha} + (n-1) \left(\frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_1}{\alpha} \right) \right\} \alpha^n \quad (1.3)$$

前ページの考え方を利用して、数列の一般項を求めてみよう。

Ex 1.2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$$

解答 漸化式 $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$ を変形すると $\leftarrow x^2 - x - 6 = 0$ の解 $-2, 3$ を α, β とする。

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) \quad \dots \textcircled{2}$$

① より、数列 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ は公比 3、初項 $a_2 + 2a_1 = 1$ の等比数列であるから

$$a_{n+1} + 2a_n = 3^{n-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

② より、数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は公比 -2 、初項 $a_2 - 3a_1 = 1$ の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 3a_n = (-2)^{n-1} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ から} \quad 5a_n = 3^{n+1} - (-2)^{n-1}$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n-1}}{5}$$

演習 1.3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 解

$$(1) \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0$$

$$(2) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

演習 1.4 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。 解

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

$$(1) \quad a_{n+1} - 2a_n = 2^n \text{ であることを示せ.}$$

$$(2) \quad \frac{a_n}{2^n} = b_n \text{ とする. } a_{n+1} - 2a_n = 2^n \text{ の両辺を } 2^{n+1} \text{ で割ることによって, 数列 } \{b_n\} \text{ の漸化式を導き, } \{b_n\} \text{ の一般項を求めよ.}$$

$$(3) \quad \text{数列 } \{a_n\} \text{ の一般項を求めよ.}$$

1.3.2 数学的帰納法

正の奇数の和は、次のように自然数 n を含む等式で表された。

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \quad \cdots (A)$$

自然数は限りなくあるから、この事実をすべての n について確かめることはできない。ここでは、自然数 n を含む等式や不等式などがすべての自然数 n について成り立つ、と結論するための新しい証明法を学ぼう。

A 》 数学的帰納法の原理

自然数 n を含む等式 (A) について、次の [1], [2] が示せたとする。

- [1] $n = 1$ のとき (A) が成り立つ。
- [2] $n = k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると、
 $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ。

このとき、[1] から、まず $n = 1$ のとき (A) が成り立つ。

すると、[2] から、 $n = 1 + 1$ すなわち $n = 2$ のときも、(A) が成り立つ。

さらに、[2] から、 $n = 2 + 1$ すなわち $n = 3$ のときも、(A) が成り立つ。

同様に $n = 4, 5, 6, \dots$ のときも (A) が成り立つ。

したがって、[1], [2] を示せば、すべての自然数 n について (A) が成り立つと結論してよい。このような証明法を数学的帰納法という。

[数学的帰納法]

数学的帰納法

一般に、自然数 n を含む条件 (A) があるとき、

「すべての自然数 n について (A) が成り立つ」

を証明するには、次の [1], [2] を示せばよい。

- [1] $n = 1$ のとき (A) が成り立つ。
- [2] $n = k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると、
 $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ。

B 》等式の証明

例題 1.13 数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ⁵.

S

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

証明 この等式を (A) とする.

[1] $n = 1$ のとき

$$\text{左辺} = 1, \quad \text{右辺} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$$

よって、 $n = 1$ のとき、(A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき (A) が成り立つ、すなわち

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

であると仮定すると、 $n = k+1$ のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

$n = k+1$ のときの (A) の右辺は

$$\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

よって、 $n = k+1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から、すべての自然数 n について (A) が成り立つ.

証終

練習 1.41 数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ. 解

$$(1) \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$(2) \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

⁵例題 1.13 の等式は、等差数列の和の公式からも導かれる (7 ページを参照). ここでは、数学的帰納法を用いて、この等式が成り立つことを証明する.

C 》 不等式の証明

応用例題 1.6 n を 4 以上の自然数とすると、次の不等式を証明せよ.

S

$$2^n > 3n$$

考え方 》 $n \geq 4$ であるから、次のことを示す.

[1] $n = 4$ のとき、不等式が成り立つ.

[2] $k \geq 4$ として、 $n = k$ のときの不等式 $2^k > 3k$ が成り立つと仮定すると、不等式 $2^{k+1} > 3(k+1)$ が成り立つ. **[不等式の証明]**

証明 この不等式を (A) とする.

[1] $n = 4$ のとき

$$\text{左辺} = 2^4 = 16, \quad \text{右辺} = 3 \cdot 4 = 12$$

よって、 $n = 4$ のとき、(A) が成り立つ.

[2] $k \geq 4$ として、 $n = k$ のとき (A) が成り立つ、すなわち

$$2^k > 3k$$

が成り立つと仮定する.

$n = k + 1$ のときの (A) の両辺の差を考えると

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - 3(k+1) &= 2 \cdot 2^k - (3k+3) \\ &> 2 \cdot 3k - (3k+3) && \leftarrow 2^k > 3k \text{ より} \\ &= 3(k-1) > 0 && \leftarrow k \geq 4 \text{ より} \\ &&& k-1 > 0 \end{aligned}$$

すなわち $2^{k+1} > 3(k+1)$

したがって、 $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から、4 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ. **証終**

練習 1.42 n を 3 以上の自然数とすると、次の不等式を証明せよ. **解**

$$2^n > 2n + 1$$

D》自然数に関する命題の証明

応用例題 1.7 n は自然数とする. $n^3 + 2n$ は 3 の倍数であることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ. S

考え方》 3 の倍数は, ある整数 m を用いて $3m$ と表される.
逆に, 整数 m を用いて $3m$ と表される数は 3 の倍数である.

証明 「 $n^3 + 2n$ は 3 の倍数である」を (A) とする.

$$[1] \quad n = 1 \text{ のとき} \quad n^3 + 2n = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$$

よって, $n = 1$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち, $k^3 + 2k$ は 3 の倍数であると仮定すると, ある整数 m を用いて

$$k^3 + 2k = 3m$$

と表される.

$n = k + 1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2) \\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3m + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3(m + k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

$m + k^2 + k + 1$ は整数であるから, $(k+1)^3 + 2(k+1)$ は 3 の倍数である. よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数 n について (A) が成り立つ.

証終

練習 1.43 n は自然数とする. $5^n - 1 = 0$ は 4 の倍数であることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ. 解

研究

自然数に関する命題のいろいろな証明

前ページの応用例題 1.7 では、数学的帰納法を用いて次の命題を証明した。

n は自然数とすると、 $n^3 + 2n$ は 3 の倍数である。

この命題を、自然数を3で割ったときの余りで場合分けする方法を利用して証明してみよう。

証明 自然数を 3 で割ったときの余りは、0, 1, 2 のいずれかである。

よって、すべての自然数は、整数 k を用いて

$$3k, \quad 3k + 1, \quad 3k + 2$$

のいずれかの形に表される。

[1] $n = 3k$ のとき

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= (3k)^3 + 2 \cdot 3k \\ &= 3(9k^3 + 2k) \end{aligned}$$

[2] $n = 3k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= (3k + 1)^3 + 2(3k + 1) \\ &= 3(9k^3 + 9k^2 + 5k + 1) \end{aligned}$$

[3] $n = 3k + 2$ のとき

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= (3k + 2)^3 + 2(3k + 2) \\ &= 3(9k^3 + 18k^2 + 14k + 4) \end{aligned}$$

よって、いずれの場合も、 $n^3 + 2n$ は 3 の倍数である。

証終

補足 $n^3 + 2n = n(n^2 - 1) + 3n = (n - 1)n(n + 1) + 3n$ は、連続する 3 整数の積と 3 の倍数 $3n$ の和である。連続する 3 整数の中には、3 の倍数を含むので、連続する 3 整数の積は 3 の倍数である。よって、 $n^3 + 2n$ は 3 の倍数である。

演習 1.5 次の問いに答えよ. 解

- (1) n は自然数とする. $4n^3 - n$ は 3 の倍数であることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.
- (2) n は自然数とする. $4n^3 - n$ は 3 の倍数であることを, 自然数を 3 で割ったときの余りで場合分けする方法を利用して証明せよ.

1.3.3 問題

問題 1.16 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. [解](#)

$$(1) \ a_1 = 2, \ a_{n+1} = a_n + 2^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \rightarrow \text{p.38} \sim 40$$

$$(2) \ a_1 = 1, \ a_{n+1} + a_n = 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(3) \ a_1 = 2, \ 2a_{n+1} = a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

問題 1.17 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を, それぞれ求めよ. [解](#) → p.38 例題 1.11 p.40 例題 1.12

$$a_1 = 0, \ b_1 = 1, \ a_{n+1} = 2a_n + 1, \ b_{n+1} = a_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

問題 1.18 次の等式, 不等式を数学的帰納法を用いて証明せよ. [解](#)

→ p.48 例題 1.13, p.49 応用例題 1.6

$$(1) \ 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

$$(2) \ 2^n > n^2 - n + 2 \quad \text{ただし, } n \text{ は } 4 \text{ 以上の自然数}$$

問題 1.19 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある. 解 → p.48 例題 1.13

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.
- (2) 第 n 項 a_n を推測して, それを数学的帰納法を用いて証明せよ.

問題 1.20 24 時間に 1 回服用する薬がある. この薬を 1 回服用すると, 服用直後の体内の薬の有効成分は 100mg 増加する. また, 体内に入った薬の有効成分の量は 24 時間ごとに 20% になる. 1 回目に薬を服用した直後の体内の有効成分の量が 100mg であるとき, 次の問いに答えよ. 解

- (1) 3 回目に薬を服用した直後の体内の有効成分の量を求めよ.
- (2) n 回目に薬を服用した直後の体内の有効成分量を a_n mg とするとき, a_{n+1} を a_n で表せ.
- (3) n 回目に薬を服用した直後の体内の有効成分の量を n の式で表せ.

1.4 章末問題

1.4.1 章末問題 A

章末 1.1 第 4 項が 14, 第 8 項が 30 である等差数列がある. 次の数は, この数列の項であるかどうかを調べよ. また, 項であるときは第何項かを求めよ. 解

- (1) 70 (2) 123

章末 1.2 初項が 60, 末項が -30 である等差数列の和が 240 であるとき, この数列の公差と項数を求めよ. 解

章末 1.3 1 日目に 1 円, 2 日目に 2 円, 3 日目に 4 円, 4 日目に 8 円, $\dots$ というように, 前日の 2 倍の金額を毎日貯金するとき, 15 日間での貯金の総額を求めよ. 解

章末 1.4 初項が正の数である等比数列 $\{a_n\}$ の, 第 2 項と第 4 項の和が 20 で, 第 4 項と第 6 項の和が 80 であるとき, 次のものを求めよ. 解

- (1) 初項と公比 (2) 初項から第 10 項までの和

章末 1.5 次の数列の第 k 項を k の式で表せ. また, その和を求めよ. 解

$$1, 1+3, 1+3+5, \dots, 1+3+5+\dots+(2n-1)$$

章末 1.6 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある. 解

$$a_1 = 1, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $b_n = \frac{a_n}{n}$ とするとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

章末 1.7 すべての自然数 n について, $7^n - 1$ は 6 の倍数である. このことを, 数学的帰納法を用いて証明せよ. 解

1.4.2 章末問題 B

章末 1.8 次のような分数の列がある. 解

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & \left| \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \right| & \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} & \left| \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \right| & \frac{1}{5}, \dots \\ \text{第1群} & \text{第2群} & \text{第3群} & \text{第4群} & \end{array}$$

(1) $\frac{3}{10}$ は第何項か.

(2) 第100項を求めよ.

章末 1.9 項数 n の数列 $1 \cdot n, 2(n-1), 3(n-2), \dots, n \cdot 1$ がある. 解

(1) この数列の第 k 項を n と k を用いた式で表せ.

(2) この数列の和を求めよ.

章末 1.10 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が, $S_n = 2a_n - 1$ であるとする.

(1) $a_{n+1} = 2a_n$ であることを示せ. 解

(2) 第 n 項 a_n を求めよ.

章末 1.11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. 解

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2(n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

章末 1.12 $a > 0$ で n を自然数とする. 数学的帰納法を用いて, 次の不等式を証明せよ. 解

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

ヒント

11 (1) $b_n = \frac{1}{a_n}$ として, まず数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める.

(2) 漸化式の両辺を 2^{n+1} で割る. $\frac{a_n}{2^n} = b_n$ として, まず数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める.

発展

章末 1.13 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある. 解

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + b_n$$

(1) 数列 $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を, それぞれ求めよ.

発展 隣接 3 項間の漸化式

これまでは数列 $\{a_n\}$ の隣接する 2 項間の漸化式を取り上げたが、隣接する 3 項間の漸化式と a_1, a_2 によって定められる数列 $\{a_n\}$ もある。以下では、このような数列 $\{a_n\}$ について、階差数列を用いて一般項が求められる例を示そう。

例 1 次の条件によって定められる数列 a_n の一般項

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

漸化式を変形すると $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とすると } b_{n+1} = 2b_n$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } \quad a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

初項は $a_1 = 1$ なので、上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ。

したがって、一般項 a_n は $a_n = 2^n - 1$ [終]

一般に、 $a_{n+2} = (p+1)a_{n+1} - pa_n$ の形の漸化式は、次の形に変形することができる。

$$a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n)$$

練習 1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

【解】漸化式を変形すると $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とすると } b_{n+1} = 3b_n$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{3^n - 1}{2} \end{aligned}$$

初項は $a_1 = 1$ なので、上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって、一般項 a_n は $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$

第 2 章 統計的な推測

2.1 確率分布

2.1.1 確率変数と確率分布

第 1 節では、統計的な推測を行うための基礎となる、確率分布について学ぶ。ここでは、確率分布とは何かについて基本的なことを理解しよう。

A » 確率変数

2 枚の硬貨を同時に投げるとき、表と裏の出方には

(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)

の 4 通りの場合がある。

この試行において、表が出る硬貨の枚数を X とすると、 X のとりうる値は、0, 1, 2 であり、 X がこれらの各値をとる確率は、右の表のようになる。

X	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

この X のように、試行の結果によってその値が定まり、各値に対応して確率が定まるような変数を確率変数という。

一般に、確率変数 X のとりうる値が $x_1, x_2, \dots, x_n$ であり、それぞれの値をとる確率が $p_1, p_2, \dots, p_n$ であるとき、次が成り立つ。

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$$
$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	1

確率変数 X のとりうる値とその値をとる確率との対応関係は、上の表のように書き表される。この対応関係を、 X の確率分布または分布といい、確率変数 X はこの分布に従うという。

[\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

確率変数 X が値 a をとる確率を $P(X = a)$ で表す.

また, X が a 以上 b 以下の値をとる確率を $P(a \leq X \leq b)$ で表す.

前ページの硬貨を投げる例の確率変数 X については, 次のようになる.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{1}{4}, & P(X = 1) &= \frac{2}{4}, & P(X = 2) &= \frac{1}{4} \\ P(0 \leq X \leq 1) &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \\ P(1 \leq X \leq 2) &= \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

B》確率分布の求め方

例題 2.1 白玉2個と黒玉3個の入った袋から, 3個の玉を同時に取り出すとき, 出る白玉の個数を X とする. X の確率分布を求めよ. S

解答 X のとりうる値は, 0, 1, 2である.

各値について, X がその値をとる確率を求めると

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{10} \\ P(X = 1) &= \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_2}{{}_5C_3} = \frac{6}{10} \\ P(X = 2) &= \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_3} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

よって, X の確率分布は次の表のようになる.

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

練習 2.1 白玉2個と黒玉3個の入った袋から, 4個の玉を同時に取り出すとき, 出る黒玉の個数を X とする. X の確率分布を求めよ. 解

練習 2.2 2個のさいころを同時に投げて, 出る目の和を X とする. X の確率分布を求めよ. 解

2.1.2 確率変数の期待値と分散

数学 I では、与えられたデータの分散、標準偏差について学んだ。また、数学 A では期待値について学んだ。

ここでは、確率変数 X の期待値、分散、標準偏差について学ぼう。

A 》確率変数の期待値

1000 本のくじがあり、その賞金および本数は右の表のようになっている。

このくじを 1 本引くとき、期待できる賞金の額を考えてみよう。

このくじ 1000 本の賞金の総額は

$$10000 \cdot 1 + 1000 \cdot 5 + 100 \cdot 50 + 0 \cdot 944$$

	賞金	本数
1 等	10000 円	1 本
2 等	1000 円	5 本
3 等	100 円	50 本
はずれ	0 円	944 本
計		1000 本

である。

これを、くじの総数で割ると

$$\frac{1}{1000}(10000 \cdot 1 + 1000 \cdot 5 + 100 \cdot 50 + 0 \cdot 944) = 20 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。この値は、くじ 1 本あたりの賞金額の平均である。すなわち、くじを 1 本引くときに期待できる賞金額は 20 円と考えられる。

このことは、次のように考えることもできる。

このくじを 1 本引くときに得る賞金を X 円とすると、確率変数 X の確率分布は次のようになる。

X	10000	1000	100	0	計
P	$\frac{1}{1000}$	$\frac{5}{1000}$	$\frac{50}{1000}$	$\frac{944}{1000}$	1

ここで、等式 $\textcircled{1}$ は、次のように書き表すこともできる。

$$10000 \cdot \frac{1}{1000} + 1000 \cdot \frac{5}{1000} + 100 \cdot \frac{50}{1000} + 0 \cdot \frac{944}{1000} = 20$$

したがって、この等式の左辺は、賞金の額とそれが当たる確率の積をすべて加えたものになっていることがわかる。

確率変数 X の確率分布が下の表で与えられているとする.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

このとき

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{k=1}^n x_kp_k$$

を, X の期待値または平均といい, $E(X)$ または m で表す¹.

確率変数の期待値

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{k=1}^n x_kp_k$$

例 2.1 2枚の硬貨を同時に投げるとき, 表が出る硬貨の枚数 X の期待値を求める.
 X の確率分布は次の表のようになる. [S]

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって, X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

例 2.2 1個のさいころを投げるとき, 出る目 X の期待値を求める.
 X の確率分布は, 次の式で表される. [S]

$$P(X = k) = \frac{1}{6} \quad (k = 1, 2, \cdots, 6) \quad \leftarrow \text{確率分布を式で表すこともある.}$$

よって, X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 \left(k \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = \frac{7}{2} \quad \leftarrow \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

練習 2.3 白玉4個と黒玉2個の入った袋から, 2個の玉を同時に取り出すとき, 白玉が出る個数を X とする. X の期待値を求めよ. [解]

¹和の記号 $\sum$ については, 第1章「数列」の21~25ページを参照のこと.

$E(X)$ の E は, 期待値を意味する英語 expectation の頭文字である.

また, m は平均を意味する英語 mean の頭文字である.

B》 $aX + b$ の期待値

確率変数 X の確率分布が下の表で与えられているとする.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

a, b を定数とするとき, X に対して $aX + b$ も確率変数であり, その分布は, 次のようになる.

$aX + b$	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	$\cdots$	$ax_n + b$	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

よって, $aX + b$ の期待値は, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
 E(ax + b) &= \sum_{k=1}^n (ax_k + b)p_k \\
 &= a \sum_{k=1}^n x_k p_k + b \sum_{k=1}^n p_k \\
 &= aE(x) + b
 \end{aligned}$$

したがって, 次のことが成り立つ.

 $aX + b$ の期待値

X を確率変数, a, b を定数とするとき

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

とくに, $E(aX) = aE(X)$ である.

例 2.3 1 個のさいころを投げて出る目を X とすると, 前ページの例 2.2 により $E(X) = \frac{7}{2}$ である. このとき, 確率変数 $2X + 1$ の期待値は

S

$$E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 2 \cdot \frac{7}{2} + 1 = 8$$

練習 2.4 例 2.3 の確率変数 X に対して, 次の確率変数の期待値を求めよ. 解

- (1) $X + 2$
- (2) $4X - 1$
- (3) $-3X$

C》 X^2 の期待値

確率変数 X に対して、 X^2 もまた確率変数である。 X の確率分布が右の表で与えられるとき、 X^2 の期待値は、次の式によって求められる。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k$$

例 2.4 1 個のさいころを投げて出る目を X とするとき、 X^2 の期待値は

[S]

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^6 \left(k^2 \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k^2 && \leftarrow \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 = \frac{91}{6} \end{aligned}$$

練習 2.5 2 枚の硬貨を同時に投げて表が出る硬貨の枚数を X とするとき、 X^2 の期待値を求めよ。 [解]

D》確率変数の分散と標準偏差

同じ期待値をもつ確率変数であっても、その分布は同じとは限らない。値が期待値の近くに集中している分布もあれば、値が期待値から遠くに散らばっている分布もある。

ここでは、確率変数 X のとる値が、 X の期待値からどの程度散らばっているかを表す量について考えよう。

X の確率分布が右の表で与えられ、その期待値が m であるとする。

このとき、 X の各値と m とのへだたりの程度を表す量として

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$(x_1 - m)^2, (x_2 - m)^2, (x_3 - m)^2, \cdots, (x_n - m)^2$$

が考えられ、 $(X - m)^2$ はこれらの値をとる確率変数である。

確率変数 $(X - m)^2$ の期待値 $E((X - m)^2)$ を、確率変数 X の分散といい、 $V(X)$ で表す²。

すなわち、 $V(X)$ は次の式で表される。

$$V(X) = (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n$$

また、和の記号 $\sum$ を使って表すと、次のようになる。

$$V(X) = \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k \quad \cdots \textcircled{1}$$

² $V(X)$ の V は、分散を意味する英語 variance の頭文字である。

確率変数の分散

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E((X - m)^2) \\
 &= (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n \\
 &= \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k
 \end{aligned}$$

例 2.5 62 ページの例 2.1 の確率変数 X について、期待値 m は、 $m = 1$ である。よって、 X の分散は

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

S

$$V(X) = (0 - 1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1 - 1)^2 \cdot \frac{2}{4} + (2 - 1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

練習 2.6 確率変数 X の確率分布が右の表で与えられるとき、 X の分散を求めよ。解

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

X の分散を表す前ページの式 ① の右辺を変形してみよう。

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k = \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2mx_k + m^2) p_k \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2m \sum_{k=1}^n x_k p_k + m^2 \sum_{k=1}^n p_k \quad \leftarrow \sum_{k=1}^n x_k p_k = m, \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1 \\
 &= E(X^2) - 2m \cdot m + m^2 \cdot 1 = E(X^2) - m^2
 \end{aligned}$$

ここで、 $m = E(X)$ であるから、次の等式が成り立つ。

分散と期待値

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$(X \text{ の分散}) = (X^2 \text{ の期待値}) - (X \text{ の期待値})^2$$

例 2.6 1 個のさいころを投げて出る目 X の分散 $V(X)$ を求める。

S

62 ページの例 2.2 により $E(X) = \frac{7}{2}$ 、64 ページの例 2.4 により $E(X^2) = \frac{91}{6}$ であるから

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

練習 2.7 白玉 2 個と黒玉 3 個の入った袋から、2 個の玉を同時に取り出すとき、白玉が出る確率を X とする。 X の分散を求めよ。解

分散 $V(X)$ は確率変数 $(X - m)^2$ の期待値であるから, X の測定単位が, たとえば cm であるとき, $V(X)$ の単位は cm^2 となる. そこで, X の測定単位と同じ単位である $\sqrt{V(X)}$ を散らばりの度合いを表す数値として用いることも多い. $\sqrt{V(X)}$ を X の標準偏差といい, $\sigma(X)$ で表す³.

確率変数の標準偏差

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$\sqrt{V(X)}$ は $V(X)$ の正の平方根

例 2.7 1 個のさいころを投げて出る目 X の標準偏差 $\sigma(X)$ を求める.

S

前ページの例 2.6 により $V(X) = \frac{35}{12}$ であるから

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6}$$

練習 2.8 確率変数 X の確率分布が右の表で与えられるとき, 次の値を求めよ. **解**

(1) X の分散 (2) X の標準偏差

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

確率変数 X の期待値, 分散, 標準偏差を, それぞれ X の分布の平均, 分散, 標準偏差ともいう.

標準偏差 $\sigma(X)$ は, X の分布の平均 m を中心として, X のとる値の散らばる傾向の程度を表している. 標準偏差 $\sigma(X)$ の値が小さいほど, X のとる値は, 平均 m の近くに集中する傾向にある.

E》 $aX + b$ の分散と標準偏差

a, b は定数とする. 確率変数 X の確率分布が与えられたとき, 確率変数 $aX + b$ の分散と標準偏差を求めてみよう.

$$E(X) = m \text{ とすると } E(aX + b) = aE(X) + b = am + b$$

よって, 確率変数 $aX + b$ の分散は, 確率変数 $\{aX + b - (am + b)\}^2$ の期待値であるから, $\{aX + b - (am + b)\}^2 = a^2(X - m)^2$ より

$$V(aX + b) = E(a^2(X - m)^2) = a^2E((X - m)^2) = a^2V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = \sqrt{V(aX + b)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X)$$

³ $\sigma(X)$ の σ はギリシャ文字の小文字で「シグマ」と読む. 標準偏差を意味する英語は standard deviation であり, その頭文字 s に相当するギリシャ文字が σ である.

よって、次のことが成り立つ。

$aX + b$ の分散と標準偏差

X を確率変数, a, b を定数とするとき

$$V(aX + b) = a^2 V(X), \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

例 2.8 1 個のさいころを投げて出る目を X とすると

S

$$E(X) = \frac{7}{2}, \quad V(X) = \frac{35}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{105}}{6} \quad \leftarrow \text{例 2.2, 2.6, 2.7}$$

このとき, 確率変数 $2X + 1$ の期待値, 分散, 標準偏差は

$$E(2X + 1) = 2 \cdot \frac{7}{2} + 1 = 8 \quad \leftarrow \text{例 2.3}$$

$$V(2X + 1) = 2^2 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{3}$$

$$\sigma(2X + 1) = 2 \cdot \frac{\sqrt{105}}{6} = \frac{\sqrt{105}}{3}$$

補足 $\sigma(2X + 1)$ は $\sigma(2X + 1) = \sqrt{V(2X + 1)}$ から求めることもできる.

練習 2.9 例 2.8 において, 次の確率変数の期待値, 分散, 標準偏差を求めよ. 解

(1) $X + 4$

(2) $-2X$

(3) $3X - 2$

2.1.3 確率変数の和と積

2つ以上の確率変数の和や積を考え、その期待値、分散を求めてみよう。

A》同時分布

例 2.9 大小2個のさいころを投げるとき、それぞれのさいころの出る目を、 X, Y とする。大小2個のさいころを投げるという試行で、 X, Y の値が定まる。 [終] [S]

例 2.10 同じ大きさの玉10個が入った袋があり、そのうちの4個には1、6個には2と書いてある。最初に1個を取り出し、その玉に書いてある値を X とする。最初に取り出した玉をもどさないで、2個目を取り出し、その玉に書いてある値を Y とする。このように2個の玉を取り出すという試行で、 X, Y の値が定まる。 [終] [S]

ある試行によって X, Y の値が定まるとき、 $X = a$ かつ $Y = b$ である確率を

$$P(X = a, Y = b)$$

と表す。例 2.10 では

$$\begin{aligned} P(X = 1, Y = 1) &= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}, & P(X = 1, Y = 2) &= \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15} \\ P(X = 2, Y = 1) &= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}, & P(X = 2, Y = 2) &= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{15} \end{aligned}$$

である。このとき、 X のみに着目すると

$$P(X = 1) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15}, \quad P(X = 2) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15}$$

であり、 X は確率変数である。また、 Y のみに着目すると

$$P(Y = 1) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15}, \quad P(Y = 2) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15}$$

であり、 Y も確率変数である。

例 2.10 の確率変数 X, Y の確率分布は、右のように表される。この対応を X, Y の同時分布という。2つの確率変数を扱うときは、このような同時分布を考えている。

この表から、 X と Y のそれぞれの確率分布は、次の表で与えられる。

X	1	2	計
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1

Y	1	2	計
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1

$X \backslash Y$	1	2	計
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$
2	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{9}{15}$
計	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1

練習 2.10 箱の中に 10 枚のカードが入っていて、そのうち 2 枚には数字 3, 8 枚には数字 4 が書いてある. これらのカードをもとにもどさないで 1 枚ずつ 2 回取り出すとき, 1 回目のカードの数字を X , 2 回目のカードの数字を Y とする. このとき, X と Y の同時分布を求めよ. 解

B 》 確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X, Y の同時分布が, 右の表で与えられているとき, $Z = X + Y$ とすると, Z もまた確率変数である.

たとえば, $X = x_1, Y = y_1$ のとき $Z = x_1 + y_1$ で, その確率は p_{11} であるから, Z の期待値は, 次のように表される.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	$p_{11} + p_{12}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$p_{21} + p_{22}$
計	$p_{11} + p_{21}$	$p_{12} + p_{22}$	1

$$\begin{aligned} E(Z) &= (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} \\ &= x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22}) \end{aligned}$$

ここで

$$E(X) = x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}), \quad E(Y) = y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22})$$

であるから, $E(Z) = E(X) + E(Y)$ が成り立つ.

一般に, 次のことが成り立つ.

確率変数の和の期待値

$$2 \text{ つの確率変数 } X, Y \text{ について } \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

例 2.11 大小 2 個のさいころを投げるとき, それぞれのさいころの出る目を X, Y とする. このとき,

$$E(X) = E(Y) = \frac{7}{2} \quad \leftarrow 62 \text{ ページ例 } 2.2$$

であるから, 出る目の和 $X + Y$ の期待値は

S

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

練習 2.11 確率変数 X, Y の確率分布が次の表で与えられているとき, $X + Y$ の期待値を求めよ. 解

X	1	3	5	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Y	2	4	6	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

3つ以上の確率変数の和の期待値についても、2つの場合と同様なことが成り立つ。たとえば、3つの確率変数 X, Y, Z について、次のことが成り立つ。

$$E(X + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z)$$

例 2.12 大中小3個のさいころを投げるとき、それぞれのさいころの出る目を X, Y, Z とする。このとき、出る目の和 $X + Y + Z$ の期待値は、例 2.11 と同様に考えて S

$$\begin{aligned} E(X + Y + Z) &= E(X) + E(Y) + E(Z) \\ &= \frac{7}{2} + \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

練習 2.12 3つの確率変数 X, Y, Z の確率分布が、いずれも右の表で与えられるとき、 $X + Y + Z$ の期待値を求めよ。 解

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

C》 $aX + bY$ の期待値

2つの確率変数 X, Y と定数 a, b について、 $aX + bY$ も確率変数であり、次のことが成り立つ。

X, Y を確率変数、 a, b を定数とすると

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &= E(aX) + E(bY) \\ &= aE(X) + bE(Y) \end{aligned}$$

応用例題 2.1 500円硬貨1枚と100円硬貨1枚を同時投げて、表の出た硬貨の金額の和を Z 円とする。 Z の期待値を求めよ。 S

考え方》表の出た500円硬貨、100円硬貨の枚数を、それぞれ X, Y とすると、 $Z = 500X + 100Y$ と表される。

解答 この試行で、表の出た500円硬貨、100円硬貨の枚数を、それぞれ X, Y とする。 X, Y の確率分布は、どちらも右の表のようになる。

表の枚数	0	1	計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$\text{よって} \quad E(X) = E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$Z = 500X + 100Y$ であるから、 Z の期待値は

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(500X + 100Y) = 500E(X) + 100E(Y) \\ &= 500 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} = 300 \end{aligned}$$

練習 2.13 1個のさいころを2回投げて、1回目は出た目の10倍の点、2回目は出た目の5倍の点が得られるとき、得点の期待値を求めよ。 解

D》独立な2つの確率変数の積の期待値

2つの確率変数 X, Y を考える. X のとる値 a と Y のとる値 b に対して,

$$P(X = a, Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$$

が, a, b の取り方に関係なく常に成り立つとき, 確率変数 X, Y は互いに独立であるという. とくに, 2つの試行 S と T が独立のとき, S の結果によって定まる確率変数 X と T の結果によって定まる確率変数 Y は独立である.

2つの確率変数 X, Y が互いに独立で, その同時分布が右の表であたえられているとき, 積 XY もまた確率変数である. この X, Y に対して, 積 XY の期待値は, 次のように計算される.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	計
x_1	$p_1 q_1$	$p_1 q_2$	p_1
x_2	$p_2 q_1$	$p_2 q_2$	p_2
計	q_1	q_2	1

$$\begin{aligned} E(XY) &= x_1 y_1 \cdot p_1 q_1 + x_1 y_2 \cdot p_1 q_2 + x_2 y_1 \cdot p_2 q_1 + x_2 y_2 \cdot p_2 q_2 \\ &= (x_1 p_1 + x_2 p_2)(y_1 q_1 + y_2 q_2) = E(X)E(Y) \end{aligned}$$

一般に, 確率変数 X, Y について, 次のことが成り立つ.

独立な2つの確率変数の積の期待値

2つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

例 2.13 大小2個のさいころを投げて, それぞれの出る目を X, Y とする. このとき, X, Y は互いに独立であるから, 積 XY の期待値は S

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

深化 2.1 100 円硬貨 2 枚, 10 円硬貨 2 枚を同時投げ, 100 円硬貨の表の出る枚数を X , 10 円硬貨の表の出る枚数を Y とする. このとき, 2つの確率変数 X, Y は互いに独立であることを確かめてみよう. 解

練習 2.14 2つの確率変数 X, Y が互いに独立で, それぞれの確率分布が次の表で与えられるとき, XY の期待値を求めよ. 解

X	1	3	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Y	2	4	計
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

E》独立な2つの確率変数の和の分散

2つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき、和 $X + Y$ の分散を求めてみよう。
65 ページに示した「分散と期待値」の式によると

$$V(X + Y) = E((X + Y)^2) - \{E(X + Y)\}^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} E((X + Y)^2) &= E(X^2 + 2XY + Y^2) \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\ \{E(X + Y)\}^2 &= \{E(X) + E(Y)\}^2 \\ &= \{E(X)\}^2 + 2E(X)E(Y) + \{E(Y)\}^2 \end{aligned}$$

また、 X, Y が互いに独立であるから

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

以上から、 $\textcircled{1}$ の $V(X + Y)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= [E(X^2) - \{E(X)\}^2] + [E(Y^2) - \{E(Y)\}^2] \\ &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

したがって、確率変数 X, Y について、次のことが成り立つ。

独立な2つの確率変数の和の分散

2つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

例 2.14 大小2個のさいころを投げて、それぞれの出る目を X, Y とすると、 X, Y は互いに独立である。 S

65 ページの例 2.6 により $V(X) = V(Y) = \frac{35}{12}$

よって、和 $X + Y$ の分散は

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

また、和 $X + Y$ の標準偏差は

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)} = \sqrt{\frac{35}{6}} = \frac{\sqrt{210}}{6}$$

終

練習 2.15 71 ページの練習 2.14 の確率変数 X, Y について, 次の値を求めよ. 解

(1) $X + Y$ の分散

(2) $X + Y$ の標準偏差

F 》 3 つ以上の確率変数の独立

3 つ以上の確率変数の独立についても, 2 つの場合と同様に定義する. たとえば, 3 つの確率変数 X, Y, Z について, X のとる値 a , Y のとる値 b , Z のとる値 c に対して,

$$P(X = a, Y = b, Z = c) = P(X = a) \cdot P(Y = b) \cdot P(Z = c)$$

が, a, b, c のとり方に関係なく常に成り立つとき, 確率変数 X, Y, Z は互いに独立であるという.

3 つの確率変数 X, Y, Z について, 次のことが成り立つ.

確率変数 X, Y, Z が互いに独立であるとき

$$E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z)$$

$$V(X + Y + Z) = V(X) + V(Y) + V(Z)$$

練習 2.16 大中小 3 個のさいころを投げるとき, 次の値を求めよ. 解

(1) 出る目の積の期待値

(2) 出る目の和の分散

発見

確率変数の積の分散

ここでは、確率変数の積の分散について、考えてみよう。

2つの確率変数 X, Y について、積 XY の分散 $V(XY)$ と X, Y の分散の積 $V(X)V(Y)$ にはどのような関係があるだろうか。

演習 2.1 2つの確率変数 X, Y が互いに独立で、それぞれの確率分布が次の表で与えられているとき、 $V(XY)$ と $V(X)V(Y)$ をそれぞれ求めてみよう。 解

X	1	3	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Y	2	4	計
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

一般の場合について、考えてみよう。

2つの確率変数 X, Y について、これらの積 XY の分散は

$$V(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$E(X^2Y^2)$ や $E(XY)$ を扱いやすくするために、 X, Y が互いに独立であるとしよう。このとき、確率変数 X^2, Y^2 も互いに独立である。

したがって、 $\textcircled{1}$ より

$$V(XY) = E(X^2)E(Y^2) - E(X)^2E(Y)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

演習 2.2 2つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき、 $\textcircled{2}$ の式をさらに変形して、 $V(XY)$ を $V(X), V(Y), E(X), E(Y)$ を用いて表してみよう。 解

演習 2.3 互いに独立な2つの確率変数 X, Y について、 $V(XY) = V(X)V(Y)$ が成り立つのはどんなときだろうか。演習 2.2 の結果を利用して、 X, Y が満たす条件をまとめてみよう。 解

2.1.4 二項分布

同じ条件のもとでの試行の繰り返しを反復試行という．ここでは，反復試行において，ある事象の起こる回数 X の確率分布について考えよう．

A》二項分布

一般に，反復試行の確率について，次のことが成り立つ．

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする．この試行を n 回行う反復試行において， A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_nC_rp^rq^{n-r} \quad \text{ただし, } q = 1 - p$$

このような n 回の反復試行において，事象 A の起こる回数を X とすると， X は確率変数で，その確率分布は次の表のようになる⁴．

X	0	1	...	r	...	n	計
P	${}_nC_0q^n$	${}_nC_1pq^{n-1}$	...	${}_nC_rp^rq^{n-r}$	...	${}_nC_np^n$	1

この表で与えられている確率分布を二項分布といい， $B(n, p)$ で表す⁵．また，確率変数 X は二項分布 $B(n, p)$ に従うという．

例 2.15 1 枚の硬貨を 10 回投げて，表の出る回数を X とする．

1 回だけ投げるとき，表の出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから， X は二項分布 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数である．また，たとえば $P(X = 3)$ は，次のように計算される． S

$$P(X = 3) = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{2^{10}} = \frac{15}{128}$$

練習 2.17 1 個のさいころを 5 回投げて，2 以下の目が出る回数を X とする． X はどのような二項分布に従うか．また，次の確率を求めよ． 解

- (1) $P(X = 2)$
- (2) $P(X = 5)$
- (3) $P(2 \leq X \leq 4)$

⁴ それぞれの確率が，二項定理による $(q + p)^n$ の展開式の各項と同じなので，二項分布と呼ばれている． $(q + p)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_rp^rq^{n-r}$ である．

⁵ $B(n, p)$ の B は，二項分布を意味する英語 binomial distribution の頭文字である．

B》二項分布に従う確率変数の期待値と分散

二項分布に従う確率変数の期待値と分散を調べてみよう.

1回の試行において, 事象 A の起こる確率を p とし, この試行を 3 回行うとする.

$k = 1, 2, 3$ に対して, k 回目の試行で

A が起これば 1, A が起こらなければ 0

の値をとる確率変数 X_k を考える.

この反復試行において, A が起こる回数を X とすると,

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

X	X_1	X_2	X_3
0	0	0	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
2	1	1	0
2	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	1

と表され, X は二項分布 $B(3, p)$ に従う.

すべての k について, X_k の確率分布は, 右の表のようになる. ただし, $q = 1 - p$ である.

X_k	0	1	計
P	q	p	1

よって $E(X_k) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

$$E(X_k^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$$

$$V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

$X = X_1 + X_2 + X_3$ の期待値は, 次のようになる.

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3p$$

また, X_1, X_2, X_3 は互いに独立であるから, $X = X_1 + X_2 + X_3$ の分散は, 次のようになる.

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3pq$$

深化 2.2 上の確率変数 X の期待値と分散を, それぞれ定義にもとづいて計算して求めてみよう. 解

一般に, 次のことが成り立つ.

二項分布に従う確率変数の期待値, 分散, 標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき

期待値は $E(X) = np$

分散は $V(X) = npq$ ただし, $q = 1 - p$

標準偏差は $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

練習 2.18 確率変数 X が二項分布 $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$ に従うとき, X の期待値, 分散および標準偏差を求めよ. 解

例題 2.2 1 個のさいころを 90 回投げて, 2 以下の目が出る回数を X とする. X の期待値と分散および標準偏差を求めよ. S

解答 さいころを 1 回投げて, 2 以下の目が出る確率 p は

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

よって, X は二項分布 $B\left(90, \frac{1}{3}\right)$ に従うから

$$\text{期待値は} \quad E(X) = 90 \cdot \frac{1}{3} = 30$$

$$\text{分散は} \quad V(X) = 90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 20$$

$$\text{標準偏差は} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

練習 2.19 1 枚の硬貨を 100 回投げて, 表の出る回数を X とする. X の期待値と分散および標準偏差を求めよ. 解

研究 二項分布のグラフ

1個のさいころを n 回投げるとき、1の目が出る回数を X とすると、 X は二項分布 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$ に従う。二項分布 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$ について

$$P_r = P(X = r) = {}_n C_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}$$

とおく。

$$n = 10, 20, 30, 50$$

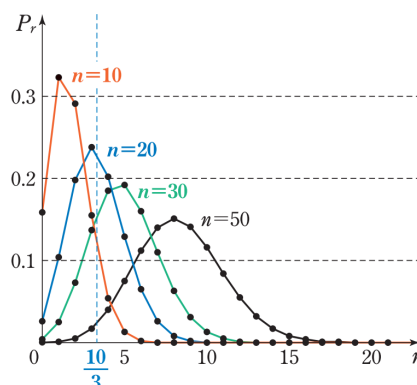
の各場合について、確率 P_r は右の表のようになり、折れ線グラフをかくと下の図のようになる。図から予想されるように、二項分布のグラフは、 n が大きくなるにつれて、左右対称なつりがね状の曲線に近づく。なお、 n が大きいときは、 P_r の値が小さくなるので、 P_r の目盛りの幅を大きくとると見えやすくなる。

この図から、たとえば $n = 20$ の場合の1の目が出る回数について確率を考えてみると、期待値

$$20 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$$

に近い回数ほど出る確率が大きいことがわかる。

$P_r \backslash n$	10	20	30	50
P_0	0.162	0.026	0.004	0.000
P_1	0.323	0.104	0.025	0.001
P_2	0.291	0.198	0.073	0.005
P_3	0.155	0.238	0.137	0.017
P_4	0.054	0.202	0.185	0.040
P_5	0.013	0.129	0.192	0.075
P_6	0.002	0.065	0.160	0.112
P_7	0.000	0.026	0.110	0.140
P_8	$\vdots$	0.008	0.063	0.151
P_9	$\vdots$	0.002	0.031	0.141
P_{10}	$\vdots$	0.000	0.013	0.116
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



2.1.5 正規分布

これまでは、さいころの目や硬貨の枚数などのように、そのとりうる値がとびとびで有限個であるような確率変数を考えてきた．ここでは、長さや時間のように、連続した値をとる確率変数について考えよう．

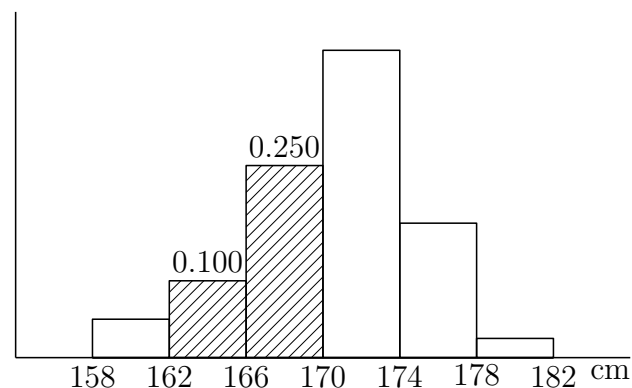
A》連続した値をとる確率変数

右の表は、あるクラス 40 人の身長を調べた結果で、度数分布表において、各階級の相対度数をまとめたものである．この 40 人の中から 1 人を選び、その生徒の身長を X とする．

たとえば、 X が 174cm 以上 178cm 未満の階級に属する確率は相対度数 0.175 であると考えてよい．このように考えると、 X が各階級に属する確率は、各階級の相対度数に一致する．したがって、 X は各階級に対して属する確率の定まる確率変数と考えられる．

身長の階級 (cm)	度数	相対度数
158 以上 162 未満	2	0.050
162 ～166	4	0.100
166 ～170	10	0.250
170 ～174	16	0.400
174 ～178	7	0.175
178 ～182	4	0.025
計	40	1.000

下の図は、上の表で示した各階級の相対度数を、長方形の面積で表したヒストグラムである．たとえば、図の斜線部分の面積が $162 \leq X < 170$ となる確率を表す．



データの大きさを増やし階級の幅を細かく分けて同様なヒストグラムを作っていくと、ヒストグラムの形はある曲線に近づいていくと考えられる．

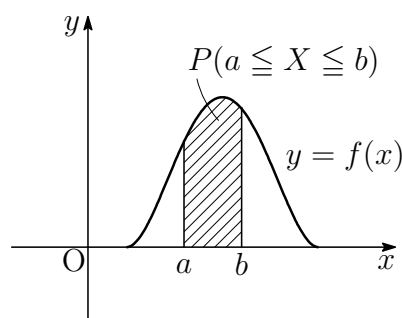
[ヒストグラムと曲線]

一般に、連続した値をとる確率変数 X を連続型確率変数という。

連続型確率変数 X の確率分布を考える場合は、 X に1つの曲線 $y = f(x)$ を対応させ、 $a \leq X \leq b$ となる確率

$$P(a \leq X \leq b)$$

が、右の図の斜線部分の面積で表されるようにする。この曲線 $y = f(x)$ を、 X の分布曲線といい、関数 $f(x)$ を確率密度関数という。



確率密度関数 $f(x)$ は、次のような性質をもつ。

確率密度関数の性質

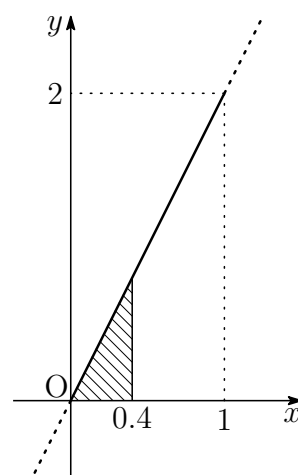
- 1 常に $f(x) \geq 0$
- 2 確率 $P(a \leq X \leq b)$ は、曲線 $y = f(x)$ と x 軸、2直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積に等しい。
すなわち $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$
- 3 X のとる値の範囲が $\alpha \leq X \leq \beta$ のとき $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$

例 2.16 確率変数 X のとる値の範囲が $0 \leq X \leq 1$ で、その確率密度関数が $f(x) = 2x$ ($0 \leq x \leq 1$) であるとき

$$P(0 \leq X \leq 0.4) = \frac{1}{2} \times 0.4 \times 0.8 = 0.16$$

$$P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

S



補足 定積分の計算を用いると、次のように求められる。

$$P(0 \leq X \leq 0.4) = \int_0^{0.4} 2x dx = \left[x^2 \right]_0^{0.4} = 0.16$$

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 2x dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1$$

練習 2.20 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられるとき、指定された確率をそれぞれ求めよ。 解

- (1) $f(x) = x$ ($0 \leq x \leq \sqrt{2}$) $0 \leq X \leq 0.5$ である確率
- (2) $f(x) = 0.5x$ ($0 \leq x \leq 2$) $1 \leq X \leq 2$ である確率

B》正規分布

連続型確率変数の分布の代表的なものに、正規分布とよばれる分布がある。自然現象や社会現象の中には、観測される値の分布が正規分布に近いものがあり、このとき正規分布が有効に利用される。

m を実数、 σ を正の実数とする。このとき、関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

は、連続型確率変数 X の確率密度関数となることが知られている。このとき、 X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うという⁶。ここで、 e

は無理数の定数で、 $e = 2.71828 \dots$ である。曲線 $y = f(x)$ を正規分布曲線という。

正規分布について、次のことが知られている⁷。

正規分布の期待値，標準偏差

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき

期待値は $E(X) = m$

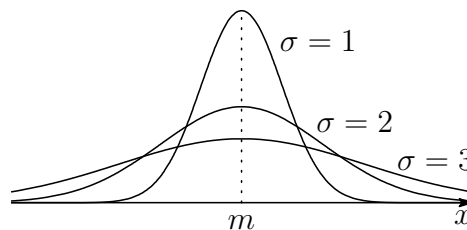
標準偏差は $\sigma(X) = \sigma$

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma)$ に従うとき、 X の分布曲線 $y = f(x)$ は、次のような性質をもつ。

[正規分布曲線]

正規分布曲線の性質

- 1 直線 $x = m$ に関して対称であり、 y は $x = m$ で最大値をとる。
- 2 x 軸を漸近線とし、 x 軸と分布曲線の間の面積は1である。
- 3 標準偏差 σ が大きくなると曲線の山は低くなって横に広がる。 σ が小さくなると曲線の山は高くなって、直線 $x = m$ の周りに集まる。



補足 曲線が限りなく近づく直線をその曲線の漸近線という。

⁶ $N(m, \sigma^2)$ の N は、正規分布を意味する英語 normal distribution の頭文字である。

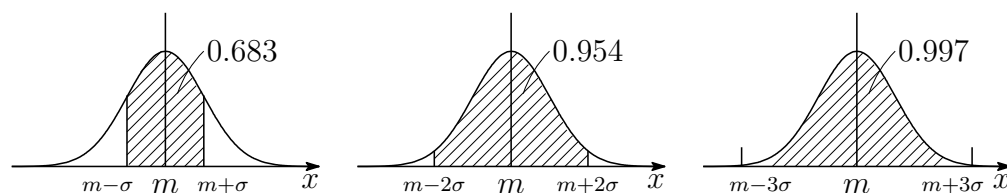
⁷ 連続型確率変数の期待値，分散，標準偏差については、87 ページで説明している。

また、確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、その確率について次が成り立つことが知られている。

$$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \doteq 0.683$$

$$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \doteq 0.954$$

$$P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) \doteq 0.997$$



このことは、たとえば X が $m - \sigma \leq X \leq m + \sigma$ を満たす確率は約 68.3%、 $m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma$ を満たす確率は約 95.4% であることを意味する。

C》標準正規分布

a, b を定数とする。確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、 $aX + b$ は正規分布 $N(am + b, a^2\sigma^2)$ に従う確率変数であることが知られている。とくに、 $Z = \frac{X - m}{\sigma}$ とおくと、確率変数 Z は正規分布 $N(0, 1)$ に従い、 Z の確率密度関数は $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ となる。正規分布 $N(0, 1)$ を標準正規分布という。

正規分布と標準正規分布

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

とおくと、確率変数 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

例 2.17 確率変数 X が正規分布 $N(1, 2^2)$ に従うとき、 $m = 1, \sigma = 2$ より、

S

$$\text{確率変数 } Z = \frac{X - 1}{2} \quad \leftarrow \quad Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

練習 2.21 正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数 X について、 $Z = \frac{X - 2}{3}$ が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、 m, σ の値を求めよ。 **解**

正規分布に従う確率変数 X に対して、確率 $P(a \leq X \leq b)$ などは標準正規分布を利用して求めることができる。

まずは、正規分布に従う確率変数について、具体的に確率を求める方法を調べてみよう。

標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に対し、確率 $P(0 \leq Z \leq u)$ を本書では $p(u)$ で表す。 $p(u)$ は右の図の斜線部分の面積に等しい。112 ページには、いろいろな u の値に対する $p(u)$ の値を表にした「[正規分布表](#)」を載せた。 [\[正規分布表\]](#)

この表によると、たとえば

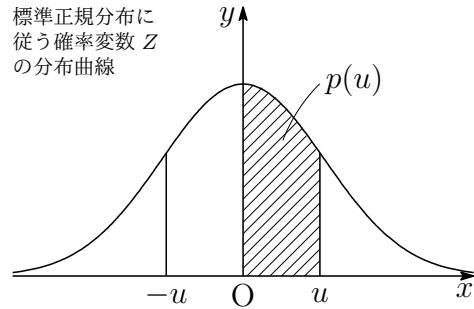
$$P(0 \leq Z \leq 1.23) = p(1.23) = 0.3907$$

である。

また、次の等式が成り立つ。

$$P(-u \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq u) = p(u)$$

$$P(Z \leq 0) = P(Z \geq 0) = 0.5$$



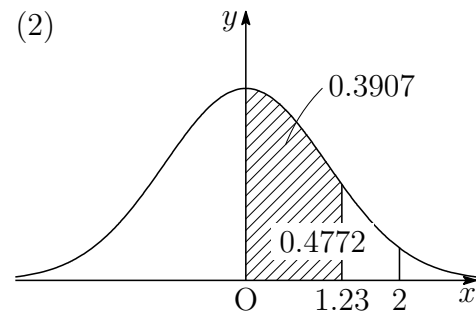
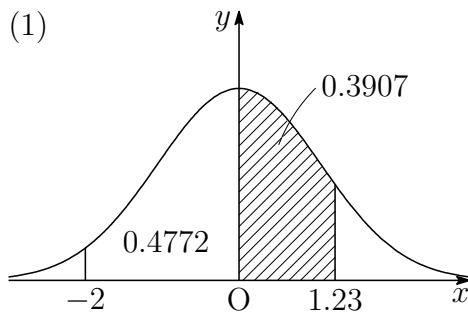
u		.03	
...		↓	
1.2	→	0.3907	
...			

$$p(1.23) = 0.3907$$

例 2.18 [正規分布表](#) より $p(1.23) = 0.3907$, $p(2) = 0.4771$ S

$$\begin{aligned} (1) \quad P(-2 \leq Z \leq 1.23) &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.23) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1.23) \\ &= p(2) + p(1.23) = 0.4771 + 0.3907 = 0.8679 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P(1.23 \leq Z \leq 2) &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1.23) \\ &= p(2) - p(1.23) = 0.4772 - 0.3907 = 0.0865 \end{aligned}$$



練習 2.22 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、次の確率を求めよ。 解

(1) $P(-2 \leq Z \leq 2)$

(2) $P(1 \leq Z \leq 2)$

例題 2.3 確率変数 X が正規分布 $N(4, 3^2)$ に従うとき、確率 $P(1 \leq X \leq 7)$ を求めよ.

解答 $Z = \frac{X-4}{3}$ とおくと、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. [S]

$$X = 1 \text{ のとき } Z = \frac{1-4}{3} = -1, \quad X = 7 \text{ のとき } Z = \frac{7-4}{3} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって } P(1 \leq X \leq 7) &= P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2p(1) = 2 \times 0.3413 = 0.6826 \end{aligned}$$

練習 2.23 確率変数 X が正規分布 $N(2, 5^2)$ に従うとき、次の確率を求めよ. [解]

(1) $P(2 \leq X \leq 12)$

(2) $P(0 \leq X \leq 5)$

D》正規分布の応用

応用例題 2.2 ある県における高校2年生の男子の身長は平均は170.5cm、標準偏差は5.4cmである. 身長の分布を正規分布とみなすとき、この県の高校2年生の中で、身長178cm以上の人は約何%いるか. 小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めよ. [S]

考え方 》身長を X cm, $m = 170.5$ cm, $\sigma = 5.4$ として、 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ を考える.
 $P(X \geq 178) = a$ のとき、 $100a\%$ の生徒がいることになる.

解答 身長を X cm とする. 確率変数 X が正規分布 $N(170.5, 5.4^2)$ に従うとき、

$$Z = \frac{X-170.5}{5.4} \text{ は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う.}$$

$$X = 178 \text{ のとき, } Z = \frac{X-170.5}{5.4} \doteq 1.39 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 178) &= P(Z \geq 1.39) = 0.5 - p(1.39) \\ &= 0.5 - 0.4117 = 0.0823 \end{aligned}$$

よって、約8.2%いる.

練習 2.24 応用例題 2.2 の県における高校2年生の男子を考えると、次の問いに答えよ. ただし、小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めよ. [解]

(1) 身長180cm以上の人は、何%いるか (正規分布表).

(2) 高い方から3%以内の位置にいる人の身長は何cm以上か.

(3) 身長が165cm以上170cm以下の人は、何%いるか.

E 》二項分布の正規分布による近似

二項分布と正規分布の関連について調べよう.

1回の試行で事象 A の起こる確率を p とするとき, この試行を n 回行う反復試行において, A の起こる回数を X とすれば, X は二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数である. $X = r$ である確率を P_r とすると

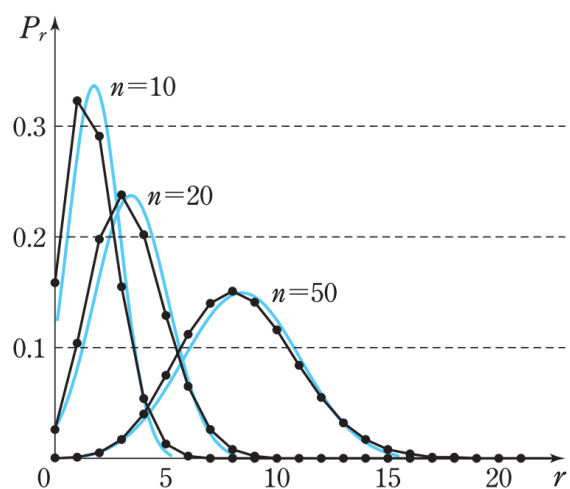
$$P_r = {}_nC_rp^rq^{n-r} \quad \text{ただし, } q = 1 - p, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

であり, X の期待値 $E(X)$, 標準偏差 $\sigma(X)$ は, 次のようになる.

$$E(X) = np, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq} \quad \leftarrow 76 \text{ ページ}$$

二項分布 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$ に従う確率変数 X について, $n = 10, 20, 50$ のとき, 確率 P_r を求めて折れ線グラフをかくと右の図のようになる.

この X と期待値, 標準偏差の等しい連続型確率変数が従う正規分布 $N\left(\frac{n}{6}, \frac{5n}{36}\right)$ の分布曲線を重ねてかくと右の図のようになる. この図から, 二項分布のグラフの形は, n が大きくなるにつれて正規分布曲線に近づくことが予想される. また, 実際にそうなることが知られている.



[二項分布と正規分布]

一般に, 次のことが成り立つ. いずれの場合も, $q = 1 - p$ とする.

二項分布の正規分布による近似

- 1 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X は, n が大きいとき, 近似的に正規分布 $N(np, npq)$ に従う.
- 2 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X に対し, $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ は, n が大きいとき, 近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

例題 2.4 1個のさいころを720回投げて、1の目が出る回数を X とするとき、 $110 \leq X \leq 130$ となる確率を、標準正規分布 $N(0, 1)$ で近似する方法で求めよ。 S

解答 1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ で、 X は二項分布 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120, \quad \sigma = \sqrt{720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 10$$

よって、 $Z = \frac{X - 120}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$X = 110 \text{ のとき} \quad Z = \frac{110 - 120}{10} = -1$$

$$X = 130 \text{ のとき} \quad Z = \frac{130 - 120}{10} = 1$$

であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} P(110 \leq X \leq 130) &= P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2p(1) = 2 \times 0.3413 = 0.6826 \end{aligned}$$

練習 2.25 1個のさいころを180回投げて、1の目が出る回数を X とするとき、 $20 \leq X \leq 45$ となる確率を、例題 2.4 にならって求めよ (正規分布表)。 解

研究 連続型確率変数の期待値, 分散, 標準偏差

連続型確率変数 X のとる値の範囲が $\alpha \leq X \leq \beta$ で, その確率密度関数が $f(x)$ であるとき, X の期待値 $m = E(X)$ と分散 $V(X)$ を, 次の式で定める. また, X の標準偏差 $\sigma(X)$ は, $\sqrt{V(X)}$ で定める.

連続型確率変数の期待値, 分散

$$\text{期待値} \quad m = E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx \quad (2.2)$$

$$\text{分散} \quad V(X) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - m)^2 f(x) dx \quad (2.3)$$

たとえば, 確率密度関数が

$$f(x) = 2x \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \leftarrow 80 \text{ ページ例 } 2.16$$

である確率変数 X について, 期待値 m を計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned} m = E(X) &= \int_0^1 x \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

また, 分散 $V(X)$ は次のように計算される.

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 \cdot 2x dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} \right) \cdot 2x dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x \right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{2} - \frac{8}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

よって, 標準偏差 $\sigma(X)$ は $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

身近な事象

偏差値

試験の成績を「偏差値」という数値で表すことがあります。

平均点が m 、標準偏差が σ である試験において、得点が X 点であるとき、標準偏差 T は以下の式で計算することができます。

$$T = 10 \times \frac{X - m}{\sigma} + 50 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここでは、試験の得点 X を確率変数としたとき、 X は正規分布に従うとみなして考えてみよう。

演習 2.4 得点 X が平均 m 、標準偏差 σ の正規分布に従うとみなすとき、 $\textcircled{1}$ の式で得られる偏差値 T の平均 (期待値) は 50、標準偏差は 10 であることを確かめてみよう。 解

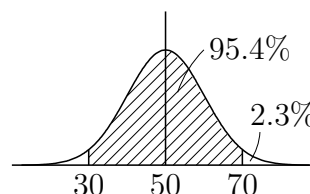
上の演習 2.4 の結果から、偏差値 T は平均値が 50、標準偏差が 10 である正規分布に従うとみなすことができます。

このとき、82 ページから、たとえば

$$P(50 - 2 \cdot 10 \leq T \leq 50 + 2 \cdot 10) \doteq 0.954$$

すなわち $P(30 \leq T \leq 70) \doteq 0.954$
となり、偏差値が 30 から 70 の間に受験者の 95.4% が含まれることがわかります。

したがって、偏差値 70 以上の受験者は全体の 2.3% であることから、受験者が 1 万人であれば、偏差値 70 である人は大体 230 位の位置にいると考えられます。



演習 2.5 次の文章のうち、正しいものをすべて選ぼう。 解

- ① 100 点満点の試験の偏差値は 100 を超えることもある。
- ② 100 点満点の試験の偏差値は負の数になることはない。
- ③ ある人の試験の得点が上がれば、その偏差値も上がる。

2.1.6 問題

問題 2.1 番号 1 の札が 3 枚，番号 2 の札が 4 枚，番号 3 の札が 5 枚入った箱から札を 1 枚取り出し，その札の番号を X とする． X の期待値，分散，および標準偏差を求めよ． 解 → p.62 例 2.1, p.65 例 2.6, p.66 例 2.7

問題 2.2 確率変数 X の期待値を m ，標準偏差を σ とする． $Y = \frac{X - m}{\sigma}$ とおくとき，確率変数 Y の期待値と標準偏差を求めよ． 解 → p.63 例 2.3, p.67 例 2.8

問題 2.3 互いに独立な確率変数 X と Y の確率分布が次の表で与えられているとき，和 $X + Y$ の期待値と分散および標準偏差を求めよ． 解

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

→ p.69 例 2.11, p.72 例 2.14,

問題 2.4 ある製品が不良品である確率は0.01であるという. この製品1000個の中の不良品の個数を X とするとき, X の期待値と分散および標準偏差を求めよ. [解](#)

→ p.77 例題 2.2

問題 2.5 1枚の硬貨を400回投げるとき, 表の出る回数 X が $\left| \frac{X}{400} - \frac{1}{2} \right| \leq 0.05$ の範囲にある確率を, 正規分布表を用いて求めよ. [解](#)

→ p.86 例題 2.4

問題 2.6 確率変数 X のとる値の範囲が $0 \leq X \leq 2$ で, その確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられている. ただし, a は正の定数とする. [解](#)

$$f(x) = \begin{cases} ax & (0 \leq x \leq 1) \\ a(2-x) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

(1) a の値を求めよ.

(2) $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$ を求めよ.

2.2 統計的な推測

2.2.1 母集団と標本

国勢調査とテレビ番組の視聴率調査とでは、その調査の方法に大きな違いがある。ここでは、統計的な調査の方法について学ぼう。

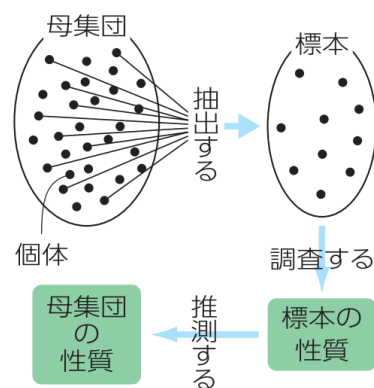
A 》全数調査と標本調査

統計的な調査には、対象全体からデータを集めて調べる**全数調査**という方法がある。たとえば、5年に1度行われる国勢調査は全数調査である。全数調査は、多くの費用と労力を必要とするので簡単には行えない。これに対して、調査の対象からその一部を抜き出して調べる**標本調査**という方法がある。[国勢調査]

調査の対象全体が多数のときは、標本調査を行って、少ない費用と労力で全体の傾向をつかむことが有効な方法として採用されている。たとえば、テレビ番組の視聴率を調べる方法は標本調査である。

標本調査の場合、調査の対象全体を**母集団**という。母集団に属する個々の対象を**個体**といい、個体の総数を**母集団の大きさ**という。

また、調査のため母集団から抜き出された個体の集合を**標本**といい、母集団から標本を抜き出すことを**抽出**という。標本に属する個体の総数を**標本の大きさ**という。



標本調査の目的は、抽出された標本から母集団のもつ性質を正しく推測することにある。そのためには、標本が偏りなく公平に抽出されることが必要である。

母集団の各個体を等しい確率で抽出する方法を**無作為抽出**といい、無作為抽出によって選ばれた標本を**無作為標本**という。

B》無作為抽出の方法

無作為抽出では、乱数さいや乱数表などが使われる。

乱数さいは、正二十面体のさいころで、0 から 9 までの数字が2回ずつ刻まれている。たとえば、赤青黄の3個の乱数さいを投げて、それぞれに出た目の数を、3桁の数の百、十、一の各位の数とすることで、0 から 999 までの数の1つを無作為抽出することができる。



また、非常に大きい母集団から標本を抽出するときは、コンピュータを利用すると便利である。下の写真は、コンピュータを利用して、1 から 100000 までの 10 万個の数から 40 個の数字を無作為に抽出したものである。

A1								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	24019	78372	7823	58865	69649	29531	39406	18655
2	52833	86162	73443	13934	43394	60577	23019	87879
3	47268	30751	92468	7839	9869	38464	90279	60635
4	15750	59975	80043	73708	32475	17523	45188	77940
5	3497	98224	93221	44716	19223	94152	96731	42064

C》復元抽出と非復元抽出

母集団から標本を抽出するのに、毎回もとにもどしながら個体を1個ずつ抽出することを復元抽出という。これに対して、個体をもとにもださないで標本を抽出することを非復元抽出という。

例 2.19 1 から 100 までの番号札 100 枚の中から、大きさ 5 の標本を抽出するときの標本の総数を求める。ただし、抜き出した順序を区別する。 S

復元抽出では、 100^5 通りの標本ができる。

非復元抽出では、 ${}_{100}P_5$ 通りの標本ができる。 終

練習 2.26 例 2.19 において、標本を1枚ずつ非復元抽出し、抜き出した順序を区別しないとき、大きさ 5 の標本の総数をいえ。 解

D》母集団分布

統計的な調査の対象には、身長、血液型、不良品の個数などのように、特定の性質がある。これを特性といい、ある特性を表すものを**変量**という。

以下では、変量 x のとる値が数値である場合を考える。

大きさ N の母集団において、変量 x のとりうる異なる値を

$$x_1, x_2, \dots, x_r$$

とし、それぞれの値をとる個体の個数を

$$f_1, f_2, \dots, f_r$$

とすると、この母集団における変量 x の度数分布表は、右の表のようになる。

x の値	度数
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$
x_r	f_r
計	N

上の母集団から 1 個の個体を無作為に抽出して、変量 x の値を X とするとき、 X は確率変数である。 X の確率分布は右の表のようになり、 P は母集団における変量 x の相対度数と一致する。

X	x_1	x_2	$\dots$	x_r	計
確率	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$	$\dots$	$\frac{f_r}{N}$	1

この X の確率分布を**母集団分布**という。また、確率変数 X の期待値、標準偏差を、それぞれ母平均、母標準偏差といい、 m 、 σ で表す。この母平均 m 、母標準偏差 σ は、母集団における変量 x の平均値、標準偏差に、それぞれ一致する⁸。

例 2.20 数字 1 の札が 10 枚、数字 2 の札が 20 枚、数字 3 の札が 30 枚ある。この 60 枚の札を母集団とし、札の数字を変量と考える。この母集団から 1 枚の札を無作為に抽出し、その札の数字を X とすると、 X の確率分布、すなわち母集団分布は下の表のようになる。

S

母平均 m は
$$m = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} = \frac{7}{3}$$

母標準偏差 σ について

X	1	2	3	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

$$\sigma^2 = \left(1 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} + \left(3 - \frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{9}$$

よって
$$\sigma = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

練習 2.27 右の表は、40 枚の札に書かれた数字とその枚数である。40 枚を母集団、札の数字を変量とすると、母集団分布を求めよ。また、母平均、母標準偏差を求めよ。 **解**

数字	1	2	3	4	5	計
枚数	2	6	24	6	2	40

⁸変量 x の平均値、標準偏差については、数学 I の「データの分析」で学んだ。

2.2.2 標本平均の分布

標本から得られる分布について調べてみよう.

A » 標本平均の期待値と標準偏差

母集団から大きさ n の無作為標本を抽出し, それらの変量 x の値を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とするとき,

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

を標本平均という. n を固定すると, 標本平均 $\bar{X}$ は1つの確率変数になる.

例 2.21 標本平均の確率分布と期待値

S

1, 2 の数字が書いてあるカードが50枚ずつある.

この合計100枚のカードからなる母集団から, 復元抽出によって大きさ3の無作為標本を抽出し, そのカードの数字を順に X_1, X_2, X_3 とする.

このとき, $X_1 + X_2 + X_3$ のとりうる値は3, 4, 5, 6であるから, 標本平均

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

のとりうる値は, $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$ である.

$\bar{X}$ がそれぞれの値をとる確率を求めて, $\bar{X}$ の確率分布は右の表ようになる.

また, $\bar{X}$ の期待値 $E(\bar{X})$ は

$\bar{X}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(\bar{X}) = 1 \cdot \frac{1}{8} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

補足 例 2.21 の100枚のカードからなる母集団の母平均 m は

$$m = E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

X	1	2	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

また, 母分散 $V(X)$ は

$$V(X) = \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

標本分散 $V(\bar{X})$ は

$$V(\bar{X}) = \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

標本平均 $\bar{X}$ の確率分布と母集団分布の関係を調べてみよう。

母平均 m , 母標準偏差 σ の母集団から, 大きさ n の無作為標本を復元抽出し, それらの変量 x の値を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする. 各 X_k は, どれも大きさ 1 の標本で, 母集団分布に従う確率変数である.

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad E(X_1) &= E(X_2) = \dots = E(X_n) = m \\ \sigma(X_1) &= \sigma(X_2) = \dots = \sigma(X_n) = \sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad E(\bar{X}) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n} \cdot nm = m \end{aligned}$$

また, 復元抽出の場合, $X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立な確率変数であるから

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \sigma(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

注意 $V(X_1) = V(X_2) = \dots = V(X_n) = \sigma^2$, $\sigma > 0$

これまでのことをまとめると, 次のことがいえる.

標本平均の期待値と標準偏差

母平均 m , 母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき, その標本平均の期待値 $E(\bar{X})$ と標準偏差 $\sigma(\bar{X})$ は

$$E(\bar{X}) = m, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

補足 母分散 $V(X)$ と標本分散 $V(\bar{X})$ について $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n}$

例 2.21 では $n = 3$, $V(X) = \frac{1}{4}$, $V(\bar{X}) = \frac{1}{12}$

非復元抽出の場合も、標本の大きさ n に比べて母集団の大きさが十分に大きいときは、復元抽出と同様に扱ってよいことが知られている。

例 2.22 母平均 60，母標準偏差 5 の十分大きい母集団から，大きさ 25 の標本を抽出するとき，その標本平均 $\bar{X}$ について S

$$\begin{aligned} \text{期待値は} & E(\bar{X}) = 60 \\ \text{標準偏差は} & \sigma(\bar{X}) = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1 \end{aligned}$$

練習 2.28 母平均 170，母標準偏差 8 の十分大きい母集団から，大きさ 16 の標本を抽出するとき，その標本平均 $\bar{X}$ の期待値と標準偏差を求めよ。 解

B》標本平均の分布と正規分布

標本平均 $\bar{X}$ の分布について，前ページで述べた性質以外に，次の性質があることが知られている。

標本平均の分布 (中心極限定理)

母平均 m ，母標準偏差 σ の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本について，標本平均 $\bar{X}$ は， n が大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなすことができる。

補足 中心極限定理により，母集団の分布がどのような分布であっても，母平均 m と母分散 σ^2 が存在すれば，十分な大きさの標本をとるとき，標本平均 $\bar{X}$ はほぼ正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うものと考えることができる。

母集団分布が正規分布のときは， n が大きくななくても，常に $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うことが知られている。

正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ の標準偏差は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であるから，上の「標本平均の分布」で述べた標本平均 $\bar{X}$ に対して， $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は， n が大きいとき，近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

応用例題 2.3 母平均 50, 母標準偏差 20 をもつ母集団から, 大きさ 100 の無作為標本を抽出するとき, その標本平均 $\bar{X}$ が 54 より大きい値をとる確率を求めよ. S

考え方 $\bar{X}$ は近似的正規分布 $N\left(50, \frac{20^2}{100}\right)$ に従う. 標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に直して考える.

解答 標本の大きさは $n = 100$, 母標準偏差は $\sigma = 20$ であるから, 標本平均 $\bar{X}$ の標準偏差は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{10} = 2$$

また, 母平均は $m = 50$ であるから, $Z = \frac{\bar{X} - 50}{2}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$\bar{X} = 54 \text{ のとき} \quad Z = \frac{54 - 50}{2} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad P(\bar{X} > 54) &= P(Z > 2) = 0.5 - p(2) \\ &= 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \end{aligned}$$

練習 2.29 応用例題 2.3 において, 標本の大きさを 400 とするとき, 標本平均 $\bar{X}$ が 48 より小さい値をとる確率を求めよ. 解

C》標本比率と正規分布

たとえば、ある工場で製造された製品に含まれる不良品の割合を調べる場合のように、母集団においてある1つの特性をもつものの割合を調べることがある。

一般に、母集団の中である特性 A をもつものの割合を、その特性 A の母比率という。また、抽出された標本の中で特性 A をもつものの割合を標本比率という。

特性 A の母比率が p である十分大きな母集団から、大きさ n の無作為標本を抽出し、それらに対して、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の値を次のように定める。

$$\begin{aligned} \text{特性 A をもつとき} & \quad X_k = 1, \\ \text{特性 A をもたないとき} & \quad X_k = 0 \\ & \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

このとき、 $T = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ を考えると、 T は大きさ n の標本の中で特性 A をもつものの個数を表す確率変数であり、二項分布 $B(n, p)$ に従う。

また、標本平均 $\bar{X} = \frac{T}{n}$ は、特性 A の標本比率 R を表す。

よって、 $q = 1 - p$ とすると、 n が大きいとき、 T は近似的に正規分布 $N(np, npq)$ に従う。このとき、 $R = \frac{T}{n}$ は近似的に正規分布 $N\left(\frac{np}{n}, \frac{npq}{n^2}\right)$ すなわち $N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$ に従う。このことから、次が成り立つことがわかる。

特性 A の母比率 p の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本について、標本比率 R は、 n が大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$ に従うとみなすことができる。

補足 T は二項分布 $B(n, p)$ に従うから、 $q = 1 - p$ とすると

$$E(T) = np, \quad V(T) = npq$$

$$\text{したがって} \quad E(R) = E\left(\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n}E(T) = \frac{1}{n} \cdot np = p$$

$$V(R) = V\left(\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(T) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n}$$

練習 2.30 不良品が全体の 10% 含まれる大量の製品の山から大きさ 100 の無作為標本を抽出するとき、不良品の標本比率 R について、次の問いに答えよ。 解

(1) R は近似的にどのような正規分布に従うとみなすことができるか。

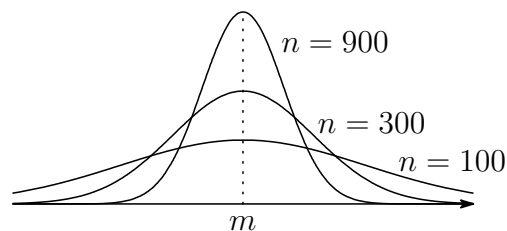
(2) $0.07 \leq R \leq 0.13$ となる確率を求めよ。

D》大数の法則

96 ページで述べた「標本平均の分布」について、 $\sigma = 10$ として、

$$n = 100, 300, 900$$

の各場合に対して、近似される正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ を図示すると、右の図のよ



うになる。この図からわかるように、 n が大きくなればなるほど、 $\bar{X}$ の分布は母平均 m の近くに集中する。

一般に、標本の大きさ n を限りなく大きくしていくと、標本平均 $\bar{X}$ の分布を近似する正規分布の標準偏差 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ は、限りなく 0 に近づき、 $\bar{X}$ の分布は母平均 m の近くに限りなく集中する。すなわち、 $\bar{X}$ が m に近い値をとる確率が 1 に近づく。

次の事実を^{たいてい}大数の法則という。

[大数の法則]

大数の法則

母平均 m の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき、 n が大きくなるに従って、その標本平均 $\bar{X}$ はほとんど確実に母平均 m に近づく。

練習 2.31 1 枚の硬貨を n 回投げるとき、表の出る相対度数を R とする。次の場合について、確率 $P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right)$ の値を求めよ。 解

(1) $n = 100$

(2) $n = 400$

(3) $n = 900$

2.2.3 推定

母集団が非常に大きいとき、母平均の真の値を求めるにはかなりの時間と労力を要する。ここでは、標本平均を用いて、母平均がどのような範囲にあるか推定する方法を考えよう。

A》母平均の推定

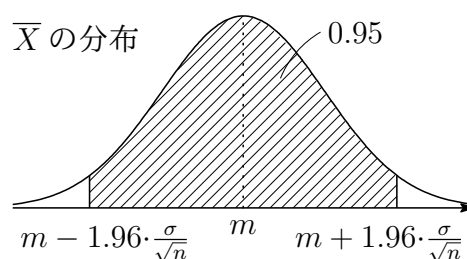
母平均 m 、母標準偏差 σ をもつ母集団から抽出された大きさ n の無作為標本の標本平均 $\bar{X}$ は、 n が大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。すなわち、確率変数 $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。 ← 96, 97 ページ

章末の正規分布表によると

$$P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$$

であるから

$$P\left(|\bar{X} - m| \leq 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$



よって、次の等式が成り立つ。

$$P\left(\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

すなわち、不等式

$$\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.4)$$

の成り立つ確率は 0.95 である。

(2.4) で示される範囲を、母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間といい、次のように表す。

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

前ページのことをまとめると、次のようになる。

母平均の推定

母標準偏差を σ とする。標本の大きさ n が大きいとき、母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

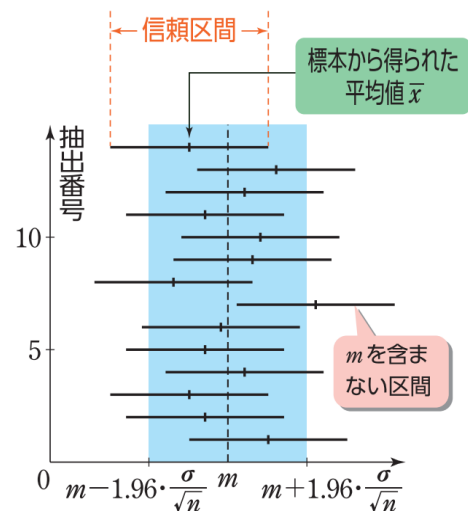
$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

注意 母平均 m に対して信頼度 95% の信頼区間を求めることを、「母平均 m を信頼度 95% で推定する」ということがある。また、必要に応じて、信頼度 99% や 90% の信頼区間を求めることがある。

母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間の意味を考えよう。

$\bar{X}$ は確率変数であるから、標本から実際に得られる平均値 $\bar{x}$ は、抽出される標本によって異なる。しかし、大きさ n の無作為標本を繰り返して抽出して、得られた平均値から上のような信頼区間を多数作ると、その中には m を含むものが 95% あることが期待される。これが信頼度 95% の信頼区間の意味である。

[信頼区間]



上で示した「母平均の推定」では、母標準偏差 σ を用いて、母平均を推定しているが、実際には σ の値も分からない場合が多い。標本の大きさ n が大きいときは、母標準偏差 σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いても差し支えないことが知られている。

例題 2.5 大量に生産されたある製品の中から，400 個を無作為抽出して重さを測ったところ，平均値 98.8g，標準偏差 2.0g であった．この製品の平均重量 m g に対して，信頼度 95% の信頼区間を求めよ． [S]

解答 標本の平均値は $\bar{x} = 98.8$ ，標本の標準偏差は $S = 2.0$ ，標本の大きさは $n = 400$ であるから

$$1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2.0}{\sqrt{400}} \doteq 0.2$$

よって，求める信頼区間は

$$[98.8 - 0.2, 98.8 + 0.2]$$

すなわち $[98.6, 99.0]$ ただし，単位は g

注意 例題 2.5 で求めた信頼区間は「98.6g 以上 99.0g 以下」であるともいう．

練習 2.32 大量に生産されたある製品の中から，100 個を無作為抽出して長さを測ったところ，平均値 103.4cm，標準偏差 1.5cm であった．この製品の平均の長さ m cm に対して，信頼度 95% の信頼区間を求めよ． [解]

B》母比率の推定

標本比率から母比率を推定する方法を調べよう．

ある特性 A の母比率が p である母集団から無作為抽出された大きさ n の無作為標本について，特性 A の標本比率 R は， n が大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ に従う．このことは 98 ページで述べたことである．

したがって，母平均の推定と同様にして，

← 100 ページ

$$P\left(R - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq R + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 0.95 \quad (2.5)$$

102 ページの (2.5) において n が大きいときは、大数の法則により R は p に近いとみなしてよい。よって、(2.5) の根号の中の p を R で置き換えることにより、次の結果が得られる。

母比率の推定

標本の大きさ n が大きいとき、標本比率を R とするとき、母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[R - 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}, R + 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \right]$$

例題 2.6 ある世論調査で、有権者から無作為抽出した 400 人について A 政党の支持者を調べたら 144 人いた。A 政党の支持者の母比率 p に対して、信頼度 95% の信頼区間を求めよ。 [S]

解答 標本比率 R は $R = \frac{144}{400} = 0.36$

$n = 400$ であるから

$$\begin{aligned} 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} &= 1.96\sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{400}} \\ &= 1.96 \times 0.024 \\ &\doteq 0.047 \end{aligned}$$

よって、求める信頼区間は

$$[0.36 - 0.047, 0.36 + 0.047] \quad \text{すなわち} \quad [0.313, 0.407]$$

練習 2.33 例題 2.6 において、標本の大きさが 900 人のときは、A 政党の支持者は 324 人いた。A 政党の支持者の母比率 p に対して、信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

[解]

2.2.4 仮説検定

数学Iで学習した仮説検定について、正規分布を利用する方法を学ぼう。

A 》 仮説検定

ある1枚のコインを100回投げたところ、表が61回出た。この結果から、「このコインは表と裏の出やすさに偏りがある」と判断してよいだろうか。

コインの表が出る確率を p とする。表と裏の出やすさに偏りがあるとする、表が出る確率と裏が出る確率は等しくないから、次の [1] がいえる。

$$[1] \quad p \neq 0.5 \quad (\text{対立仮説})$$

ここで、[1] の主張に反する次の仮定を立てよう。

$$[2] \quad p = 0.5 \quad (\text{帰無仮説})$$

[2] の仮定のもとでは、1枚のコインを100回投げて表が出る回数 X は、二項分布 $B(100, 0.5)$ に従う確率変数になる。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 100 \times 0.5 = 50, \quad \sigma = \sqrt{100 \times 0.5 \times 0.5} = 5$$

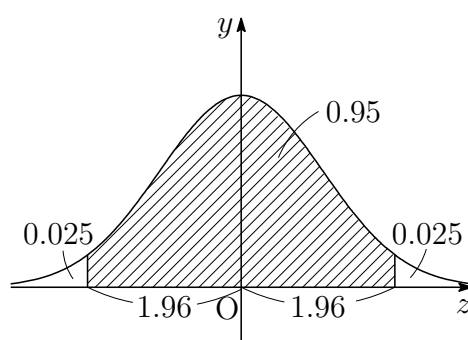
であるから、 $Z = \frac{X - 50}{5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

正規分布表から

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

である。このことは、[2] の仮定のもとで

$$Z \leq -1.96 \quad \text{または} \quad 1.96 \leq Z \quad \cdots \textcircled{1}$$



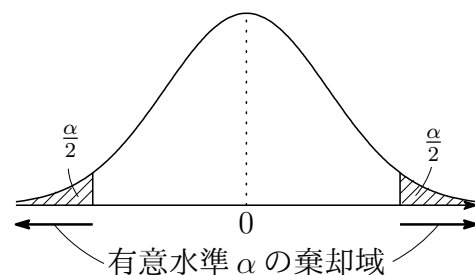
という事実は、確率 0.05 でしか起こらないことを示している。

$X = 61$ のとき $Z = \frac{61 - 50}{5} = 2.2$ であり、 $Z = 2.2$ は $\textcircled{1}$ の範囲に含まれている。すなわち、0.05 という確率の小さいことが起こったのだから、そもそも [2] の仮定が正しくなかったと考えられる。そう考えると、[1] の主張は正しい、つまり、コインは表と裏の出やすさに偏りがあると判断してよさそうである。

一般に、母集団に関して考えた仮定を仮説といい、標本から得られた結果によって、この仮説が正しいか正しくないかを判断する方法を仮説検定という。また、仮説が正しいか正しくないかを判断する方法を仮説検定という。また、仮説が正しくないと判断することを、仮説を棄却するという。前ページからのコインの例では、仮説検定によって、仮説 [2] が棄却されたことになる⁹。

仮説検定では、前ページの 0.05 のようにどの程度小さい確率の事象が起こると仮説を棄却するか、という基準をあらかじめ定めておく。この基準となる確率 α を有意水準という。有意水準 α は、0.05(5%) または 0.01(1%) と定めることが多い。

有意水準 α に対して、仮説が棄却されるような確率変数の値が定まる。この範囲を有意水準 α の棄却域という。前ページの例では、① が有意水準 5% の棄却域である。確率変数の値が棄却域に入らなければ、「仮説を棄却できない」という判断をする。なお、仮説が棄却できない場合、その仮説が正しいと判断できるわけではない。



仮説検定の手順は、次のようになる。

仮説検定の手順

- ① ある事実が起こった状況や原因を推測し、仮説を立てる。
- ② 有意水準 α を定め、仮説にもとづいて棄却域を求める。
- ③ 標本から得られた確率変数の値が棄却域に入れば仮説を棄却し、棄却域に入らなければ仮説を棄却しない。

- 補足
- ① ある事実が起こった状況や原因を推測し、対立仮説を立てる。
 - ② 有意水準を立て、帰無仮説にもとづいて棄却域を求める。
 - ③ 標本から得られた確率変数の値が棄却域に入れば帰無仮説を棄却し (対立仮説を採択する)、棄却域に入らなければ帰無仮説を棄却しない (帰無仮説を受容するが、対立仮説は棄却しない)。

注意 有意水準 α で仮説検定を行うことを、「有意水準 α で検定する」ということがある。

⁹仮説検定において、正しいかどうか判断したい主張 [1] に反する過程として立てた主張 [2] を帰無仮説といい、主張 [1] を対立仮説という。

例 2.23 ある1枚のコインを400回投げたところ、表が183回出た。このコインは表と裏の出やすさに偏りがあると判断してよいかを、有意水準5%で検定してみよう。

[S]

解答 表が出る確率を p とする。表と裏の出やすさに偏りがあるなら、 $p \neq 0.5$ である。ここで、「表と裏の出やすさに偏りがない」、すなわち $p = 0.5$ という仮説を立てる。

この仮説が正しいとすると、400回のうち表が出る回数 X は、二項分布 $B(400, 0.5)$ に従う。 X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 400 \times 0.5 = 200, \quad \sigma = \sqrt{400 \times 0.5 \times 0.5} = 10$$

よって、 $Z = \frac{X - 200}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。正規分布表より $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ であるから、有意水準5%の棄却域は

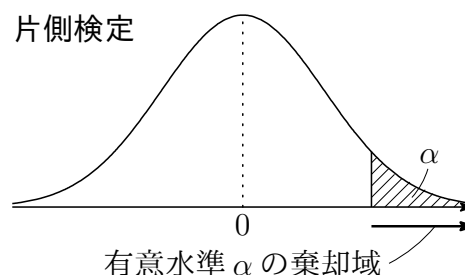
$$Z \leq -1.96 \quad \text{または} \quad 1.96 \leq Z$$

$X = 183$ のとき $Z = \frac{183 - 200}{10} = -1.7$ であり、この値は棄却域に入らないから、仮説を棄却できない。

すなわち、この結果からは、コインの表と裏の出やすさに偏りがあるとは判断できない。

練習 2.34 ある1個のさいころを180回投げたところ、1の目が24回出た。このさいころは、1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよいか。有意水準5%で検定せよ。 [解]

例 2.23 では、仮説に対して、表が出る回数が異常に大きくても、また、異常に小さくても、仮説が棄却されるように、棄却域を両側にとっている。このような検定を両側検定という。これに対し、次の例のように棄却域を片側にとる検定を片側検定という。



例 2.24 ある種子の発芽率は従来 60%であったが、それを発芽しやすいように品種改良した新しい種子から無作為に 150 個を抽出して種をまいたところ、101 個が発芽した。品種改良によって発芽率が上がったと判断してよいかを、有意水準 5% で検定してみよう。 [S]

解答 品種改良した新しい種子の発芽率を p とする。品種改良によって発芽率が上がったなら、 $p > 0.6$ である。ここで、「品種改良によって発芽率は上がらなかった」、すなわち、 $p = 0.6$ という仮説を立てる。この仮説が正しいとすると、150 個のうち発芽する種子の個数 X は、二項分布 $B(150, 0.6)$ に従う。 X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 150 \times 0.6 = 90, \quad \sigma = \sqrt{150 \times 0.6 \times 0.4} = 6$$

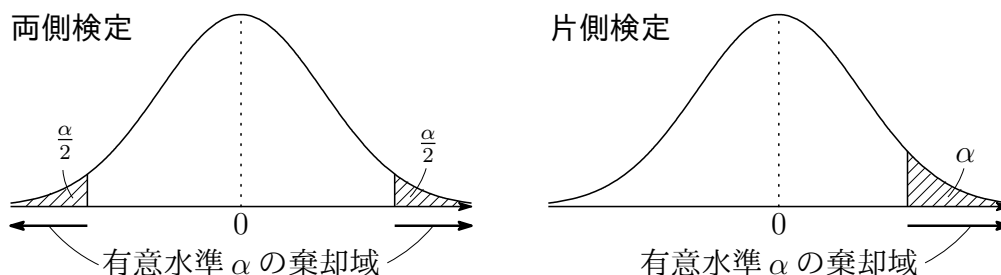
よって、 $Z = \frac{X - 150}{6}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。正規分布表より $P(0 \leq Z \leq 1.64) = 0.45$ であるから、有意水準 5% の棄却域は

$$Z \geq 1.64$$

$X = 101$ のとき $Z = \frac{101 - 90}{6} = 1.83 \dots$ であり、この値は棄却域に入るから、仮説は棄却できる。すなわち、品種改良によって発芽率が上がったと判断してよい。 [終]

106 ページの例 2.23 では、「コインの表と裏の出やすさに偏りがあるか」、すなわち、「表が出やすい」場合と「裏が出やすい」場合の両方の可能性を考えている。そのため、立てた仮説 $p = 0.5$ に対して、標本から得られた結果がどちらの方に異常な値になっても仮説が棄却されるように、棄却域を両側にとる両側検定を用いている。

これに対し、例 2.24 では、品種改良によって種子の発芽率が「上がった」場合の可能性のみを考えていて、「下がった」場合の可能性についてはそもそも考えない。そのため、立てた仮説 $p = 0.6$ に対して、標本から得られた結果が異常に大きい場合にのみ仮説が棄却されるように、棄却域を片側にとる片側検定を用いている。



練習 2.35 ある種子の発芽率は従来 75%であったが，品種改良した新しい種子から無作為に 300 個を抽出して種をまいたところ，237 個が発芽した．品種改良によって発芽率は上がったと判断してよいか．有意水準 5%で検定せよ． 解

深化 2.3 106 ページの 2.23 において，「コインは表が出にくい」と判断してよいかを，片側検定を用いて，有意水準 5%で検定してみよう． 解

2.2.5 問題

問題 2.7 ある県の高校2年生の男子を母集団とするとき、その身長分布は平均170cm、標準偏差4cmの正規分布で近似された。この母集団から無作為に64人を抽出するとき、その64人の身長の平均が169cm以上171cm以下の範囲にある確率を求めよ。 解 → p.97 応用例題 2.3

問題 2.8 Z を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数とする。正規分布表を用いて、 $P(|Z| \leq a) = 0.99$ を満たす a の値を小数第2位まで求めよ。 解 → p.100

問題 2.9 ある工場で生産されている製品Aから100個の無作為標本を抽出して耐久時間を調べたところ、平均値は1470時間、標準偏差は200時間であった。この工場で生産される製品Aの平均耐久時間 m 時間に対して、次の問いに答えよ。 解

- (1) 信頼度95%の信頼区間を求めよ。 → p.102 例題 2.5
- (2) 信頼度99%の信頼区間を求めよ。

問題 2.10 ある1個のさいころを720回投げたところ、1の目が98回出た。このさいころは、1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよいか。有意水準5%で検定せよ。 解 → p.106 例 2.23

問題 2.11 A社のある製品の不良品率は従来5%であったが、A社が新たに開発した製法で作られた製品から1900個を無作為に抽出して調べたところ、不良品の数は75個であった。新製法により、不良品率は従来より下がったと判断してよいか。有意水準1%で検定せよ。 解 → p.107 例 2.24

2.3 章末問題

2.3.1 章末問題 A

章末 2.1 1個のさいころを投げ、出た目が X のとき $100X$ 円もらえるゲームがある。ゲームの参加料は 300 円である。このゲームを 1 回行うときの利益を Y 円とすると、次の問いに答えよ。 解

- (1) Y を X で表せ。
- (2) Y の期待値を求めよ。

章末 2.2 ある種子の発芽率は 80% であるという。この種子を 400 個まいたときに発芽する個数を X とする。 X の期待値、標準偏差を求めよ。 解

章末 2.3 正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数 X に対して、確率 $P(|X - m| > k\sigma)$ が次の値になるように、定数 k の値を定めよ。 解

- (1) 0.006
- (2) 0.242

章末 2.4 ある製品を作っている工場で不良品ができる確率は 0.02 であるという。この製品 2500 個の中に含まれる不良品の個数が 36 個以下である確率を求めよ。 解

章末 2.5 1000 人の生徒に数学の試験を実施したところ、その成績の分布は平均点 62 点、標準偏差 8 点の正規分布で近似された。成績が上位 100 番までの生徒の得点はおおよそ何点以上か。 解

章末 2.6 視聴率調査用のモニターテレビ 625 台について調査したところ、ある番組の視聴台数は 125 台であった。この番組の、視聴者全体における視聴率 p に対して、信頼度 95% の信頼区間を求めよ。 解

章末 2.7 ある 2 つの野球チーム A, B の年間の対戦成績は、A の 25 勝 11 敗であった。両チームの力に差があると判断してよいか。有意水準 5% で検定せよ。また、有意水準 1% で検定せよ。 解

2.3.2 章末問題 B

章末 2.8 1 個のさいころを 4 回投げて、 k 回目に出た目が 3 の倍数のとき $X_k = 1$ とし、3 の倍数でないとき $X_k = 0$ とする． $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ とするとき、 X の期待値と分散および標準偏差を求めよ． 解

章末 2.9 ある大学の入学試験は、入学定員 400 名に対し受験者数が 2600 名で、500 点満点に対し平均点は 285 点、標準偏差は 72 点であった．得点の分布が正規分布で近似されるとみなすとき、合格最低点はおよそ何点か． 解

章末 2.10 大量の商品があり、そのうちの 5% は模造品であるという．無作為に抽出した 1900 個の商品の中に含まれる模造品の率を R とする． R が 3.5% 以上 6.5% 以下である確率を求めよ． 解

章末 2.11 ある政党の支持率は約 40% であると予想されている．この支持率を、信頼区間の幅が 4% 以下となるように推定したい．信頼度 95% で推定するには、何人以上を抽出して調べればよいか． 解

章末 2.12 内容量 300g と表示されている大量の缶詰から、無作為に 100 個を取り出し重さを測ったところ、平均値が 298.6g、標準偏差が 7.4g であった．全製品の 1 缶あたりの平均容量は、表示より少ないと判断してよいか．有意水準 5% で検定せよ． 解

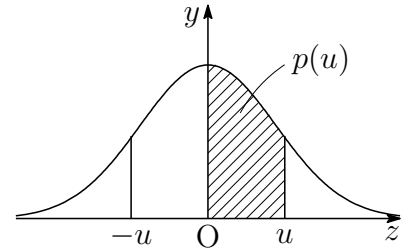
ヒント

9 まず、正規分布から、 $p(u) = 0.5 - \frac{400}{2600}$ を満たす u の値を求める．

11 標本の大きさを n 、 $R = 0.4$ とすると、区間の幅は $2 \times 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における
右図の斜線部分の面積をまとめたものである．
(例 2.18) (練習 2.22) (練習 2.23) (練習 2.24)
(練習 2.25) (問題 2.8) (問題 2.9) (問題 2.10)
(問題 2.11) (章末 2.3) (章末 2.7) (章末 2.9)
(章末 2.12)



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	.49534	.49547	.49560	.49573	.49585	.49598	.49609	.49621	.49632	.49643
2.7	.49653	.49664	.49674	.49683	.49693	.49702	.49711	.49720	.49728	.49736
2.8	.49744	.49752	.49760	.49767	.49774	.49781	.49788	.49795	.49801	.49807
2.9	.49813	.49819	.49825	.49831	.49836	.49841	.49846	.49851	.49856	.49861
3.0	.49865	.49869	.49874	.49878	.49882	.49886	.49889	.49893	.49897	.49900

解答

練習 1.1 第 2 項は 4, 第 4 項は 16, 第 5 項は 25

練習 1.2 (1) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7$

(2) $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 20$

(3) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$

練習 1.3 (1) $a_n = (-1)^n \cdot 2n$ (2) $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$

深化 1.1 1 列目に並んだ数列 1, 2, 5, 10, 17, $\dots$ の一般項は $a_n = (n-1)^2 + 1$

証明 1 列目にある上から n 番目の数を a_n とする.

たとえば, $a_3 = 5$ より小さい数は上から 2 行, 左から 2 列にあるから

$$a_3 = 2^2 + 1 = 5$$

a_n ($n \geq 2$) より小さい数は上から $n-1$ 行, 左から $n-1$ 列にあるから

$$(*) \quad a_n = (n-1)^2 + 1$$

$n = 1$ のときも $(*)$ は成立するから, $(*)$ は一般項である. 証終

対角線線に取り出した数列 1, 3, 7, 13, 21, $\dots$ の一般項は $a_n = n(n-1) + 1$

証明 上から n 行目, 左から n 列目にある数を a_n とする.

たとえば, $a_3 = 7$ より小さい数は上から 3 行, 左から 2 列にあるから

$$a_3 = 3 \times 2 + 1 = 7$$

a_n ($n \geq 2$) より小さい数は上から n 行, 左から $n-1$ 列にあるから

$$(**) \quad a_n = n(n-1) + 1$$

$n = 1$ のときも $(**)$ は成立するから, $(**)$ は一般項である. 証終

練習 1.4 (1) 1, 6, 11, 16

(2) 10, 6, 2, -2

練習 1.5 (1) 公差を d とすると $1 + d = 5$ よって $d = 4$

1, 5, 9, $\boxed{13}$, $\boxed{17}$, $\dots$

(2) 公差を d とすると $5 + d = 2$ よって $d = -3$

$\boxed{8}$, 5, 2, $\boxed{-1}$, $\boxed{-4}$ $\dots$

練習 1.6 一般項を a_n とする.

(1) $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4$ すなわち $a_n = 4n + 1$

また, 第 10 項は $a_{10} = 4 \cdot 10 + 1 = 41$

(2) $a_n = 10 + (n - 1) \cdot (-5)$ すなわち $a_n = -5n + 15$

また, 第 10 項は $a_{10} = -5 \cdot 10 + 15 = -35$

練習 1.7 (1) 求める初項を a , 項差を d とすると $a_n = a + (n - 1)d$

第 4 項が 15 であるから $a + 3d = 15 \dots \textcircled{1}$

第 8 項が 27 であるから $a + 7d = 27 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を解くと $a = 6, d = 3$

よって, 一般項は

$$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 3 \text{ すなわち } a_n = 3n + 3$$

(2) 求める初項を a , 項差を d とすると $a_n = a + (n - 1)d$

第 5 項が 20 であるから $a + 4d = 20 \dots \textcircled{1}$

第 10 項が 0 であるから $a + 9d = 0 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を解くと $a = 36, d = -4$

よって, 一般項は

$$a_n = 36 + (n - 1) \cdot (-4) \text{ すなわち } a_n = -4n + 40$$

練習 1.8 $a_n = 2n + 5$ であるから

$$a_{n+1} - a_n = \{2(n + 1) + 5\} - (2n + 5) = 2$$

隣り合う 2 項の差が 2 で一定であるから, 数列 $\{a_n\}$ は公差 2 の等差数列である.

また $a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

よって, 初項は 7, 公差は 2 である.

練習 1.9 (1) 隣り合う 2 項の差が等しいから $x - 3 = 11 - x$
 よって, $2x = 14$ より $x = 7$

(2) 隣り合う 2 項の差が等しいから $\frac{1}{x} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{x}$
 よって, $\frac{2}{x} = \frac{1}{4}$ より $x = 8$

別解 (数列 a, b, c が等差数列 $\iff 2b = a + c$)

(1) $2x = 3 + 11$ よって $x = 7$

(2) $\frac{2}{x} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$ よって $x = 8$

練習 1.10 (1) $S = \frac{1}{2} \cdot 9(2 + 10) = 54$

(2) $S = \frac{1}{2} \cdot 15\{2 \cdot 10 + (15 - 1) \cdot (-4)\} = -270$

練習 1.11 $S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2\} = n^2$

練習 1.12 (1) この等差数列の初項は 2, 公差は 4 である.

項数を n とすると $2 + 4(n - 1) = 74$

これを解くと $n = 19$

よって $S = \frac{1}{2} \cdot 19(2 + 74) = 722$

(2) この等差数列の初項は 102, 公差は -6 である.

項数を n とすると $102 - 6(n - 1) = 6$

これを解くと $n = 17$

よって $S = \frac{1}{2} \cdot 17(102 + 6) = 918$

練習 1.13 (1) $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{1}{2} \cdot 100(100 + 1) = 5050$

(2) $1 + 3 + 5 + \cdots + 55 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot 28 - 1)$
 $= 28^2 = 784$

練習 1.14 (1) 一般項は $a_n = 100 + (n - 1) \cdot (-7)$ すなわち $a_n = -7n + 107$

$-7n + 107 < 0$ より $n > \frac{107}{7}$ $\leftarrow \frac{107}{7} = 15.2\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は $n = 16$ (答) 第 16 項

(2) (1) より、初項から第 15 項までの和が最大となり、その和は

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \{2 \cdot 100 + (15 - 1) \cdot (-7)\} = 765$$

(答) 第 15 項までの和が最大、その和は 765

練習 1.15 (1) 1, 5, 25, 125

$$(2) -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$$

練習 1.16 (1) 公比を r とすると $1 \cdot r = -2$ よって $r = -2$

$$1, -2, 4, \boxed{-8}, \dots$$

$$(2) \text{ 公比を } r \text{ とすると } 8 \cdot r = 4 \text{ よって } r = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{16}, 8, 4, \boxed{2}, \dots$$

練習 1.17 一般項を a_n とする.

$$(1) a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ すなわち } a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\text{また、第 5 項は } a_5 = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 162$$

$$(2) a_n = 1 \cdot (-3)^{n-1} \text{ すなわち } a_n = (-3)^{n-1}$$

$$\text{また、第 5 項は } a_5 = (-3)^{5-1} = (-3)^4 = 81$$

$$(3) a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \text{ すなわち } a_n = 2^n$$

$$\text{また、第 5 項は } a_5 = 2^5 = 32$$

$$(4) a_n = -3 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{また、第 5 項は } a_5 = -3 \left(\frac{1}{2} \right)^{5-1} = -3 \left(\frac{1}{2} \right)^4 = -\frac{3}{16}$$

練習 1.18 (1) 公比を r とすると、 $r = -2$

$$\text{よって、一般項は } a_n = 1(-2)^{n-1} \text{ すなわち } a_n = (-2)^{n-1}$$

$$(2) \text{ 公比を } r \text{ とすると、} \frac{3}{2}r = \frac{3}{4} \text{ より } r = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって、一般項は } a_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ すなわち } a_n = \frac{3}{2^n}$$

$$(3) \text{ 公比を } r \text{ とすると、} -5r = 5 \text{ より } r = -1$$

$$\text{よって、一般項は } a_n = (-5)(-1)^{n-1} \text{ すなわち } a_n = 5 \cdot (-1)^n$$

$$(4) \text{ 公比を } r \text{ とすると、} \sqrt{2}r = 2 \text{ より } r = \sqrt{2}$$

$$\text{よって、一般項は } a_n = \sqrt{2}(\sqrt{2})^{n-1} \text{ すなわち } a_n = (\sqrt{2})^n$$

練習 1.19 (1) 求める初項を a , 公比を r とする.

$$\text{第2項が6であるから} \quad ar = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{第4項が54であるから} \quad ar^3 = 54 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad r^2 = 9$$

$$\text{これを解くと} \quad r = \pm 3$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } r = 3 \text{ のとき } a = 2, r = -3 \text{ のとき } a = -2$$

$$\text{よって, 一般項は} \quad a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ または } a_n = -2(-3)^{n-1}$$

(2) 求める初項を a , 公比を r とする.

$$\text{第5項が-9であるから} \quad ar^4 = -9 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{第7項が-27であるから} \quad ar^6 = -27 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad r^2 = 3$$

$$\text{これを解くと} \quad r = \pm\sqrt{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } r = \pm\sqrt{3} \text{ のとき } a = -1$$

$$\text{よって, 一般項は} \quad a_n = -(\sqrt{3})^{n-1} \text{ または } a_n = -(-\sqrt{3})^{n-1}$$

$$\text{練習 1.20} \quad \frac{x}{3} = \frac{9}{x} \text{ より} \quad x^2 = 3 \times 9 = 27$$

$$\text{よって} \quad x = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$$

別解 (数列 a, b, c が等比数列 $\iff b^2 = ac$)

$$x^2 = 3 \cdot 9 \quad \text{よって} \quad x = \pm 3\sqrt{3}$$

練習 1.21 (1) 初項 1, 公比 2 の等比数列であるから

$$S_n = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

(2) 初項 2, 公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{2 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

練習 1.22 条件から $a + ar + ar^2 = 7 \quad \dots \textcircled{1}$

$$ar^2 + ar^3 + ar^4 = 28 \quad \dots \textcircled{2}$$

② より $r^2(a + ar + ar^2) = 28$

① を代入して $7r^2 = 28$

よって, $r^2 = 4$ より $r = \pm 2$

$r = 2$ のとき, ① から $7a = 7$ よって $a = 1$

$r = -2$ のとき, ① から $3a = 7$ よって $a = \frac{7}{3}$

したがって $a = 1, r = 2$ または $a = \frac{7}{3}, r = -2$

演習 1.1 年利率 r で a 円ずつ n 年積み立てたお金の元利合計を S 円とすると

$$S = ar(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) = \frac{ar(r^n - 1)}{r - 1}$$

a について解いて, $r = 1.01$, $n = 10$, $S = 120$ 万 を代入すると

$$a = \frac{(r - 1)S}{r(r^n - 1)} = \frac{0.01 \times 1200000}{1.01(1.01^{10} - 1)} = \frac{12000}{1.01 \cdot (1.10462 - 1)} = 113,565 \text{ (円)}$$

問題 1.1 数列 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ は初項 $\frac{1}{4}$, 公差 $\frac{1}{4}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{y} = 1 \quad \text{よって} \quad x = \frac{4}{3}, y = 1$$

問題 1.2 (1) 初項を a , 公差を d とする.

$a_3 = 4$ より $a + (3 - 1)d = 4$ ゆえに $a + 2d = 4 \quad \dots \textcircled{1}$

$S_4 = 20$ より $\frac{1}{2} \cdot 4\{2a + (4 - 1)d\} = 20$ ゆえに $2a + 3d = 10 \quad \dots \textcircled{2}$

①, ② を解いて $a = 8, d = -2$ よって 初項 8, 公差 -2

(2) (1) の結果から

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 8 + (n - 1) \cdot (-2)\} = n(9 - n)$$

問題 1.3 (1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot 50 - 1) = 50^2 = 2500$

$$(2) 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 50) = 2 \times \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 2550$$

$$(3) 5(1 + 2 + 3 + \cdots + 20) = 5 \times \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 1050$$

$$(4) (1) + (2) - (3) \text{ より } 2500 + 2550 - 1050 = 4000$$

問題 1.4 (1) 一般項は $a_n = 200 + (n - 1) \cdot (-6) = -6n + 206$

$-6n + 206 = 50$ を解いて $n = 26$ よって 第 26 項

$$(2) a_n > 0 \text{ とすると } -6n + 206 > 0 \text{ ゆえに } n < \frac{103}{3}$$

$$\frac{103}{3} = 34 + \frac{1}{3} \text{ より, } a_n > 0 \text{ を満たす最大の } n \text{ は } 34$$

$$\text{このとき } a_{34} = -6 \cdot 34 + 206 = 2$$

初項から第 34 項までの和が最大でその和は,

$$\frac{1}{2} \cdot 34(200 + 2) = 3434$$

問題 1.5 初項を a , 公比を r とする.

$$\text{第 2 項が 3 であるから } ar = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

このとき, 第 5 項は $3r^3$ である.

$$\text{よって, } 3r^3 = 24 \text{ より } r^3 = 8$$

$$r \text{ は実数であるから } r = 2$$

$$\text{このとき, } \textcircled{1} \text{ より } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{したがって } a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2}$$

問題 1.6 求める等比数列の初項を a , 公比を r とする.

$$\text{第 2 項が 3 であるから } ar = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

このとき, 第 3 項は $3r$ であるから

$$a + 3 + 3r = 13 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } a = 10 - 3r$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入すると } (10 - 3r)r = 3$$

$$\text{式を整理すると } 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$\text{これを解くと } r = 3, \frac{1}{3}$$

① より $r = 3$ のとき $a = 1$, $r = \frac{1}{3}$ のとき $a = 9$

したがって 初項 1, 公比 3 または 初項 9, 公比 $\frac{1}{3}$

問題 1.7 初項 1, 公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 2$$

$$a_n < 200 \text{ とすると } 3n - 2 < 200 \text{ ゆえに } n < \frac{202}{3}$$

$$\frac{202}{3} = 67 + \frac{1}{3} \text{ より, } a_n < 200 \text{ を満たす最大の } n \text{ は } 67$$

$$a_{67} = 199 \text{ より, 求める和は } \frac{1}{2} \cdot 67(1 + 199) = \mathbf{6700}$$

問題 1.8 方法 A による貯金の総額は

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \{2 \cdot 300 + (7 - 1) \cdot 100\} = 4200 \text{ (円)}$$

方法 B による貯金の総額は

$$\frac{4(3^7 - 1)}{3 - 1} = 2(3^7 - 1) = 4372 \text{ (円)}$$

よって, 方法 B の方が多く貯金できる.

練習 1.23 恒等式 $k^4 - (k - 1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$ より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{k^4 - (k - 1)^4\} &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 - 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\ n^4 &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 - 6 \cdot \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) + 4 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1) - n \\ 4 \sum_{k=1}^n k^3 &= n^4 + n(n + 1)(2n + 1) - 2n(n + 1) + n \\ 4 \sum_{k=1}^n k^3 &= n^2(n + 1)^2 \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \left\{ \frac{1}{2} n(n + 1) \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n + 1) \right\}^2$$

証終

補足 自然数の立方の和の公式は、恒等式 $4k^3 = k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2$ を用いて証明した方が簡単である.

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^n \{k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2\} \\ &= n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

したがって
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

すでに求めた自然数の和や自然数の2乗の和についても、有効な恒等式

$$\begin{aligned} 2k &= k\{(k+1) - (k-1)\} \\ &= k(k+1) - (k-1)k, \\ 3k(k+1) &= k(k+1)\{(k+2) - (k-1)\} \\ &= k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) \end{aligned}$$

を用いて証明できる.

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n k &= \sum_{k=1}^n \{k(k+1) - (k-1)k\} \\ &= n(n+1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=1}^n (k+1)k &= \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\ 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k &= n(n+1)(n+2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.6) より
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(2.7) $\times 2 -$ (2.6) $\times 3$ より

$$\begin{aligned} 6 \sum_{k=1}^n k^2 &= 2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1) \\ &= n(n+2)(2n+1) \end{aligned}$$

したがって
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+2)(2n+1)$$

これまでに多くの大学で、自然数の累乗の和、自然数の立方の和などの証明を問う問題が出題されています。公式として利用するだけでなく、自力で導けるようにしておきましょう。

べき乗の和の証明問題は、これまで多くの大学で出題されている。4乗の和の証明は、2013年の宮崎大学教育学部の後期試験でも出題された。4乗の和の結果は n の5次式である。べき乗の和について、2乗の和が n の3次式、3乗の和が n の4次式である。一般に、自然数の p 乗の和は n の $p+1$ 次式となる。これらの n の多項式は $n(n+1)$ を因数にもつことが知られている。

九州大学文系 2010 年 4 番

以下の問いに答えよ。答えだけでなく、必ず証明も記せ。

- (1) 和 $1 + 2 + \cdots + n$ を n の多項式で表せ。
- (2) 和 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ を n の多項式で表せ。
- (3) 和 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ を n の多項式で表せ。

大分大学医医 2014 年 8 番

数列の和について次の一連の問いに答えなさい。

- (1) $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ を示しなさい。
- (2) 多項式 $(k+1)^3 - k^3$ の展開を利用して $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示しなさい。
- (3) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示しなさい。
- (4) $\sum_{k=1}^n k^4$ を求めなさい。結果は因数分解すること。

解答 (1) $k(k+1) - (k-1)k = 2k$ であるから

$$2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \{k(k+1) - (k-1)k\} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) &= \sum_{k=1}^n \{(k+1)^3 - k^3\} \\ 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 &= (n+1)^3 - 1^3\end{aligned}$$

これに (1) の結果および $\sum_{k=1}^n 1 = n$ を代入すると

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \times \frac{1}{2} n(n+1) + n = n^3 + 3n^2 + 3n$$

よって
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

補足 証明法に制約がなければ、次式を利用するとよい.

$$k(k+1)(2k+1) - k(k-1)(2k-1) = 6k^2$$

(3) $k^2(k+1)^2 - k^2(k-1)^2 = 4k^3$ であるから

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n \{k^2(k+1)^2 - k^2(k-1)^2\} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

補足 S_n は分かっているので、 $S_k - S_{k-1} = a_k$ を利用する.

(4) $k^5 - (k-1)^5 = 5k^4 - 10k^3 + 10k^2 - 5k + 1$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \{k^5 - (k-1)^5\} &= \sum_{k=1}^n (5k^4 - 10k^3 + 10k^2 - 5k + 1) \\ n^5 &= 5 \sum_{k=1}^n k^4 - 5 \sum_{k=1}^n \left(2k^3 - 2k^2 + k - \frac{1}{5}\right)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{n^5}{5} + \sum_{k=1}^n \left(2k^3 - 2k^2 + k - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{n^5}{5} + 2 \cdot \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 - 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{n}{5} \\ &= \frac{n^5 - n}{5} + \frac{1}{2} n^2 (n+1)^2 - \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{5} n(n+1)(n-1)(n^2+1) + \frac{1}{2} n^2 (n+1)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{30} n(n+1) \{6(n-1)(n^2+1) + 15n(n+1) - 10(2n+1) + 15\} \\ &= \frac{1}{30} n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) \\ &= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)\end{aligned}$$

別解 $k^2(2k+1)(k+1)^2 - (k-1)^2(2k-1)k^2 = 10k^4 + 2k^2$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \{k^2(2k+1)(k+1)^2 - (k-1)^2(2k-1)k^2\} &= \sum_{k=1}^n (10k^4 + 2k^2) \\ n^2(2n+1)(n+1)^2 &= 10 \sum_{k=1}^n k^4 + 2 \sum_{k=1}^n k^2\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{1}{10} n^2 (n+1)^2 (2n+1) - \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{10} n^2 (n+1)^2 (2n+1) - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1) \{3n(n+1) - 1\} \\ &= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)\end{aligned}$$

入試では5乗以上のべき乗の和の証明問題が出題されたのを見たことはないが、仮に5乗のべき乗の和の証明問題が出題されたら、次の恒等式を用いるとよい。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \{k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3\} &= \sum_{k=1}^n (6k^5 + 2k^3) \\ n^3(n+1)^3 &= 6 \sum_{k=1}^n k^5 + 2 \sum_{k=1}^n k^3\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^5 &= \frac{1}{6}n^3(n+1)^3 - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= \frac{1}{6}n^3(n+1)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2\{2n(n+1) - 1\} \\ &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)\end{aligned}$$

なお、10乗までの和の公式は、次のとおりである(3乗まで覚えておく)。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k &= \frac{1}{2}n(n+1) & \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) & \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \\ \sum_{k=1}^n k^5 &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\ \sum_{k=1}^n k^6 &= \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) \\ \sum_{k=1}^n k^7 &= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) \\ \sum_{k=1}^n k^8 &= \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3) \\ \sum_{k=1}^n k^9 &= \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3) \\ \sum_{k=1}^n k^{10} &= \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)\end{aligned}$$

練習 1.24 (1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2 = \frac{1}{6} \cdot 20(20+1)(2 \cdot 20 + 1) = \mathbf{2870}$

$$(2) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 15(15+1) \right\}^2 = \mathbf{14400}$$

練習 1.25 (1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ (2) $2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^7$

$$(3) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \quad (4) \sum_{k=1}^5 (k+1) \quad (5) \sum_{k=1}^6 (2k+1)^2$$

練習 1.26 (1) $\sum_{k=1}^n 5^{k-1} = \frac{5^n - 1}{5 - 1} = \frac{5^n - 1}{4}$

$$(2) \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 3}{2}$$

別解 初項 a , 公比 r , 末項 l の等比数列の和 S は $S = \frac{rl - a}{r - 1} = \frac{a - rl}{1 - r}$

(1) 初項 1, 公比 5, 末項 5^{n-1} より

$$\sum_{k=1}^n 5^{k-1} = \frac{5 \cdot 5^{n-1} - 1}{5 - 1} = \frac{5^n - 1}{4}$$

(2) 初項 3, 公比 3, 末項 3^{n-1} より

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3 \cdot 3^{n-1} - 3}{3 - 1} = \frac{3^n - 3}{2}$$

参考 練習 1.25 の (2) $\sum_{k=3}^8 2^{k-1}$ は, 初項 2^2 , 公比 2, 末項 2^7 より

$$\sum_{k=3}^8 2^{k-1} = \frac{2 \cdot 2^7 - 2^2}{2 - 1} = 2^8 - 2^2 = 252$$

練習 1.27 (1) $\sum_{k=1}^{15} 2 = 15 \cdot 2 = \mathbf{30}$

(2) $\sum_{k=1}^{50} k = \frac{1}{2} \cdot 50(50 + 1) = \mathbf{1275}$

(3) $\sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 12(12 + 1)(2 \cdot 12 + 1) = \mathbf{650}$

(4) $\sum_{k=1}^7 k^3 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 7(7 + 1) \right\}^2 = \mathbf{784}$

練習 1.28 (1) $\sum_{k=1}^n (4k - 5) = 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 5$
 $= 4 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1) - 5n = \mathbf{n(2n - 3)}$

(2) $\sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 7 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 4$
 $= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) - 7 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1) + 4n$
 $= \frac{1}{2} n \{ (n + 1)(2n + 1) - 7(n + 1) + 8 \}$
 $= \frac{1}{2} n (2n^2 - 4n + 2)$
 $= n(n^2 - 2n + 1) = \mathbf{n(n - 1)^2}$

(3) $\sum_{k=1}^n (k^3 + k) = \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k$
 $= \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2 + \frac{1}{2} n(n + 1)$
 $= \frac{1}{4} n(n + 1) \{ n(n + 1) + 2 \} = \frac{1}{4} \mathbf{n(n + 1)(n^2 + n + 2)}$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k$
 $= 2 \cdot \frac{1}{2} (n - 1) \{ (n - 1) + 1 \} = \mathbf{n(n - 1)}$

練習 1.29 第 k 項が $k(k+1)(k+2)$ である数列の、初項から第 n 項までの和である．よって、求める和は

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + 3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\
 &= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1) + 2(2n+1) + 4\} \\
 &= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2 + 5n + 6) = \frac{1}{4}\mathbf{n(n+1)(n+2)(n+3)}
 \end{aligned}$$

別解 $1 = \frac{1}{4}\{(k+3) - (k-1)\}$ を利用すると

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)\{(k+3) - (k-1)\} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \\
 &= \frac{1}{4}\mathbf{n(n+1)(n+2)(n+3)}
 \end{aligned}$$

練習 1.30 この数列を $\{a_n\}$ ，階差数列を $\{b_n\}$ とする．

数列 $\{b_n\}$ は $1, 3, 5, 7, \dots$

よって、 $b_n = 2n - 1$ より $b_5 = 9, b_6 = 11$

このとき、数列 $\{a_n\}$ の

$$\text{第 6 項は } a_6 - a_5 = b_5 \text{ より } a_6 = a_5 + b_5 = 17 + 9 = \mathbf{26}$$

$$\text{第 7 項は } a_7 - a_6 = b_6 \text{ より } a_7 = a_6 + b_6 = 26 + 11 = \mathbf{37}$$

練習 1.31 (1) この数列の階差数列は $1, 2, 3, 4, \dots$

その一般項を b_n とすると, $b_n = n$ である.

よって, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{2}(n-1)n \quad \text{すなわち} \quad a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$$

初項は $a_1 = 1$ なので, 上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって, 一般項 a_n は $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

(2) この数列の階差数列は $1, 2, 4, 8, \dots$

その一般項を b_n とすると, $b_n = 2^{n-1}$ である.

よって, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 2^{n-1} + 1$$

初項は $a_1 = 2$ なので, 上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって, 一般項 a_n は $a_n = 2^{n-1} + 1$

練習 1.32 初項 a_1 は $a_1 = S_1 = 1^2 - 1 \cdot 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - n - \{(n-1)^2 - (n-1)\} \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = 2n - 2$$

① より $a_1 = 0$ なので, この式は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって, 一般項は $a_n = 2n - 2$

$$\begin{aligned} \text{練習 1.33} \quad S &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{練習 1.34} \quad S &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^{n-1} \\ 3S &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + (n-1) \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^n \end{aligned}$$

の辺々を引くと

$$S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1} - n \cdot 3^n$$

$$\text{よって} \quad -2S = \frac{3^n - 1}{3 - 1} - n \cdot 3^n \quad \text{したがって} \quad S = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{4}$$

練習 1.35 (1) $n \geq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る奇数の総数は

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

ゆえに，第 $(n-1)$ 群の最後の奇数は

$$2 \times \frac{1}{2}n(n-1) - 1 = n^2 - n - 1$$

求める奇数は，この次の奇数で

$$(n^2 - n - 1) + 2 = n^2 - n + 1$$

これは $n = 1$ のときにも成り立つ．

よって，第 n 群の最初の数 **$n^2 - n + 1$**

(2) 第 15 群の最初の奇数は，(1) の結果を用いて

$$15^2 - 15 + 1 = 211$$

よって，和は，初項 211，公差 2，項数 15 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \{ 2 \cdot 211 + (15-1) \cdot 2 \} = \mathbf{3375}$$

問題 1.9 (1)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3^k + 2k + 1) &= \sum_{k=1}^n 3^k + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}(3^n - 1) + \mathbf{n(n+2)} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k-1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) - 2n \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{n(n-1)(n+4)} \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^3 - k) &= \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{n(n+1)(n-1)(n+2)} \end{aligned}$$

問題 1.10 第 k 項は $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)\{(2n+1) + 3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

問題 1.11 初項 a_1 は $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 1 - \{(n-1)^2 + 1\} \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = 2n - 1$$

したがって、一般項は $a_1 = 2, n \geq 2 \text{ のとき } a_n = 2n - 1$

問題 1.12 (1)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+2) - k}{k(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \\ &\quad \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

問題 1.13

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1} \\ 3S &= 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 3^{n-1} + (2n-1) \cdot 3^n \end{aligned}$$

の辺々を引くと

$$S - 3S = 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$\text{よって } -2S = 1 + \frac{3 \times 2 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot 3}{3-1} - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$\text{したがって } S = (n-1) \cdot 3^n + 1$$

補足 $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1}$ は初項 $2 \cdot 3$ 、公比 3 、末項 $2 \cdot 3^{n-1}$ の等比数列の和であるから

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = \frac{3 \times 2 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot 3}{3-1} = 3^n - 3 \quad \leftarrow \frac{rl-a}{r-1}$$

問題 1.14 (1) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る自然数の個数は

$$1 + 3 + 5 + \cdots + \{2(n-1) - 1\} = (n-1)^2$$

ゆえに、第 $(n-1)$ 群の最後の数 $(n-1)^2$

求める自然数は、この次の数で

$$(n-1)^2 + 1 = \mathbf{n^2 - 2n + 2}$$

(2) S は、初項 $n^2 - 2n + 2$ 、公差 1 、項数 $2n - 1$ の等差数列の和であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2n-1)\{2(n^2 - 2n + 2) + (2n-1-1) \cdot 1\} \\ &= \mathbf{(2n-1)(n^2 - n + 1)} \end{aligned}$$

問題 1.15 2つの恒等式

$$k(k+1) = \frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\},$$
$$k = \frac{1}{2}\{k(k+1) - (k-1)k\}$$

を利用すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k(k+1) &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2), \\ \sum_{k=1}^n k &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{k(k+1) - (k-1)k\} \\ &= \frac{1}{2} n(n+1)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n k(k+1) - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)\{2(n+2) - 3\} \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

練習 1.36 (1) $a_2 = a_1 - 5 = 100 - 5 = \mathbf{95}$

$$a_3 = a_2 - 5 = 95 - 5 = \mathbf{90}$$

$$a_4 = a_3 - 5 = 90 - 5 = \mathbf{85}$$

$$a_5 = a_4 - 5 = 85 - 5 = \mathbf{80}$$

(2) $a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times 2 + 2 = \mathbf{8}$

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \times 8 + 2 = \mathbf{26}$$

$$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \times 26 + 2 = \mathbf{80}$$

$$a_5 = 3a_4 + 2 = 3 \times 80 + 2 = \mathbf{242}$$

練習 1.37 (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 2, 公差 3 の等差数列であるから, 一般項は

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3$$

$$\text{すなわち } \mathbf{a_n = 3n - 1}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公比 2 の等比数列であるから, 一般項は

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{すなわち } \mathbf{a_n = 2^{n-1}}$$

練習 1.38 (1) 条件より $a_{n+1} - a_n = 3^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 3^n であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$$

初項は $a_1 = 1$ なので、上の a_n は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって、一般項は $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

(2) 条件より $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $2n + 1$ であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1) = 0 + (n^2 - 1) = n^2 - 1$$

初項は $a_1 = 0$ なので、上の a_n は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって、一般項は $a_n = n^2 - 1$

練習 1.39 (1) $c = 4c - 6$ を解くと $c = 2$

よって $a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$

□に適する数は **2**

(2) $c = 2c + 1$ を解くと $c = -1$

よって $a_{n+1} - (-1) = 2\{a_n - (-1)\}$

すなわち $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

□に適する数は **1**

(3) $c = -2c + 3$ を解くと $c = 1$

よって $a_{n+1} - 1 = -2(a_n - 1)$

□に適する数は **1**

練習 1.40 (1) 漸化式を変形すると $a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$

$$b_n = a_n - 2 \text{ とすると } b_{n+1} = 4b_n$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 4 の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_1 - 2 = 5 - 2 = 3$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = b_n + 2$ より

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2$$

(2) 漸化式を変形すると $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

$$b_n = a_n - 2 \text{ とすると } b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = b_n + 2$ より

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

演習 1.2 n 本の直線の交点の個数を a_n とする.

1 本の直線では交点はないから $a_1 = 0$

$n + 1$ 本目の直線 ℓ を引くと、 ℓ は n 本の直線と n 個の点で交わる.

直線 ℓ を引くことで、交点の個数が n 個増加する. よって

$$a_{n+1} = a_n + n \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} - a_n = n$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が n であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 0 + \frac{1}{2}(n-1)n \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

初項は $a_1 = 0$ なので、この式は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって、求める式は $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$

演習 1.3 (1) 漸化式 $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n$ を変形すると

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 2a_n)$$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 5a_n)$$

$\{a_{n+1} - 2a_n\}$, $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ はそれぞれ等比数列であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1) \cdot 5^{n-1} = 5^{n-1}$$

$$a_{n+1} - 5a_n = (a_2 - 5a_1) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

上の 2 式から a_{n+1} を消去すると

$$3a_n = 5^{n-1} - 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$$

(2) 漸化式 $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ を変形すると

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n$$

$\{a_{n+1} - a_n\}$, $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ はそれぞれ等比数列であるから

$$a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1) \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$a_{n+1} - 2a_n = a_2 - 2a_1 = 1$$

上の 2 式から a_{n+1} を消去すると

$$a_n = 2^n - 1$$

演習 1.4 (1) 漸化式 $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ を変形すると

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

$\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 2$, 公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

(2) (1) の結果の両辺を 2^{n+1} で割ると, $\frac{a_n}{2^n} = b_n$ より

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+2}} - \frac{a_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}$$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{a_1}{2} = 0$, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$b_n = 0 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n-1)$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}(n-1) \quad \text{よって} \quad a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1}$$

練習 1.41 (1) 証明 この等式を (A) とする.

[1] $n = 1$ のとき 左辺 $= 1$, 右辺 $= 1^2 = 1$

よって, $n = 1$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

であると仮定すると, $n = k + 1$ のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \{2(k + 1) - 1\} &= k^2 + \{2(k + 1) - 1\} \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

$n = k + 1$ のときの (A) の右辺は $(k + 1)^2$

よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数 n について (A) が成り立つ. 証終

(2) 証明 この等式を (A) とする.

[1] $n = 1$ のとき 左辺 $= 1 \cdot 2 = 2$, 右辺 $= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 2) = 2$

よって, $n = 1$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k + 1) = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2)$$

であると仮定すると, $n = k + 1$ のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)\{(k + 1) + 1\} \\ &= \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2) + (k + 1)\{(k + 1) + 1\} \\ &= \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 3) \end{aligned}$$

$n = k + 1$ のときの (A) の右辺は

$$\frac{1}{3}(k + 1)\{(k + 1) + 1\}\{(k + 1) + 2\} = \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 3)$$

よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数 n について (A) が成り立つ. 証終

練習 1.42 この不等式を (A) とする.

[1] $n = 3$ のとき

$$\text{左辺} = 2^3 = 8, \quad \text{右辺} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

よって, $n = 3$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $k \geq 3$ として, $n = k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$2^k > 2k + 1$$

であると仮定する.

$n = k + 1$ のときの (A) の両辺の差を考えると

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - \{2(k+1) + 1\} &= 2 \cdot 2^k - (2k + 3) \\ &> 2(2k + 1) - (2k + 3) \\ &= 2(k - 1) + 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad 2^{k+1} > 2(k+1) + 1$$

したがって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, 3 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ. 証終

練習 1.43 証明 「 $5^n - 1$ は 4 の倍数である」を (A) とする.

$$[1] \quad n = 1 \text{ のとき} \quad 5^n - 1 = 5^1 - 1 = 4$$

よって, $n = 1$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち, $5^k - 1$ は 4 の倍数であると仮定すると, ある整数 m を用いて

$$5^k - 1 = 4m$$

と表される.

$n = k + 1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5(5^k - 1 + 1) - 1 \\ &= 5(4m + 1) - 1 \\ &= 20m + 4 = 4(5m + 1) \end{aligned}$$

$5m + 1$ は整数であるから, $5^{k+1} - 1$ は 4 の倍数である.

よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数 n について (A) が成り立つ.

証終

補足 $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}$ であるから

$$5^n - 1 = (5 - 1) \sum_{k=1}^n 5^{n-k} \cdot 1^{k-1} = 4 \sum_{k=1}^n 5^{n-k}$$

よって, $5^n - 1$ は 4 の倍数である.

最も簡単な証明法は, $5 \equiv 1 \pmod{4}$ であるから, 次より明らか.

$$5^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod{4}$$

演習 1.5 $4n^3 - n = n^3 - n + 3n^3$ より, $4n^3 - n$ が 3 の倍数であることと $n^3 - n$ が 3 の倍数であることは同値である. したがって, $n^3 - n$ が 3 の倍数であることを示す.

(1) 証明 「 $n^3 - n$ は 3 の倍数である」を (A) とする.

$$[1] \quad n = 1 \text{ のとき} \quad n^3 - n = 1^3 - 1 \cdot 1 = 0$$

よって, $n = 1$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち, $k^3 - k$ は 3 の倍数であると仮定すると, ある整数 m を用いて

$$k^3 - k = 3m$$

と表される.

$n = k + 1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \\ &= 3m + 3(k^2 + k) \\ &= 3(m + k^2 + k) \end{aligned}$$

$m + k^2 + k$ は整数であるから, $(k+1)^3 - (k+1)$ は 3 の倍数である. よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数 n について (A) が成り立つ. 証終

- (2) 証明 自然数を3で割ったときの余りは, 0, 1, 2のいずれかである.
よって, すべての自然数は, 整数 k を用いて

$$3k, \quad 3k + 1, \quad 3k + 2$$

のいずれかの形に表される.

[1] $n = 3k$ のとき

$$\begin{aligned} n^3 - n &= (3k)^3 - 3k \\ &= 3(9k^3 - k) \end{aligned}$$

[2] $n = 3k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} n^3 - n &= (3k + 1)^3 - (3k + 1) \\ &= 3(9k^3 + 9k^2 + 2k) \end{aligned}$$

[3] $n = 3k + 2$ のとき

$$\begin{aligned} n^3 - n &= (3k + 2)^3 - (3k + 2) \\ &= 3(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2) \end{aligned}$$

よって, いずれの場合も, $n^3 - n$ は3の倍数である.

証終

問題 1.16 (1) 条件より $a_{n+1} - a_n = 2^{n-1}$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 2^{n-1} であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1$$

初項は $a_1 = 2$ なので、上の a_n は $n = 1$ のときも成り立つ.

したがって、一般項は $a_n = 2^{n-1} + 1$

(2) 漸化式を変形すると
$$a_{n+1} - \frac{3}{2} = -\left(a_n - \frac{3}{2}\right)$$

$$b_n = a_n - \frac{3}{2} \text{ とすると} \quad b_{n+1} = -b_n$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 -1 の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_1 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は
$$b_n = -\frac{1}{2}(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}(-1)^n$$

したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = b_n + \frac{3}{2}$ より

$$a_n = \frac{(-1)^n + 3}{2}$$

(3) 漸化式を変形すると
$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)$$

$$b_n = a_n - 1 \text{ とすると} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は
$$b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = b_n + 1$ より

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$$

問題 1.17 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ より $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 1$, 公比 2 の等比数列であるから

$$a_n + 1 = 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = 2^{n-1} - 1$$

$b_{n+1} = b_n + a_n$ より, 数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項が $2^{n-1} - 1$ であるから,
 $n \geq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k-1} - 1) = 1 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} - (n - 1) = 2^{n-1} - n + 1$$

$b_1 = 1$ なので, この式は $n = 1$ のときも成り立つ. よって $b_n = 2^{n-1} - n + 1$

問題 1.18 (1) この等式を (A) とする.

[1] $n = 1$ のとき

$$\text{左辺} = 1, \quad \text{右辺} = 2! - 1 = 1$$

よって, $n = 1$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k + 1)! - 1$$

が成り立つと仮定する. 上式の両辺に $(k + 1) \cdot (k + 1)!$ を加えると

$$\text{左辺} = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k + 1)!$$

$$\text{右辺} = (k + 1)! - 1 + (k + 1) \cdot (k + 1)!$$

$$= \{1 + (k + 1)\}(k + 1)! - 1 = (k + 2)! - 1$$

よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数 n について (A) が成り立つ.

(2) この不等式を (A) とする.

[1] $n = 4$ のとき

$$\text{左辺} = 2^4 = 16, \quad \text{右辺} = 4^2 - 4 + 2 = 14$$

よって, $n = 4$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $k \geq 4$ として, $n = k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$2^k > k^2 - k + 2$$

が成り立つと仮定する.

$n = k + 1$ のときの (A) の両辺の差を考えると

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - \{(k+1)^2 - (k+1) + 2\} &= 2 \cdot 2^k - (k^2 + k + 2) \\ &> 2(k^2 - k + 2) - (k^2 + k + 2) \\ &= k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2) > 0 \end{aligned}$$

すなわち $2^{k+1} > (k+1)^2 - (k+1) + 2$

よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, 4 以上のすべての自然数について (A) が成り立つ. 証終

問題 1.19 (1) $a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

(2) $a_n = \frac{n+1}{n}$

証明 この結論を (A) とする.

[1] $n = 1$ のとき, $a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$ であり, (A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき, (A) が成り立つ,

すなわち $a_k = \frac{k+1}{k}$ であると仮定すると,

$$a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1} = \frac{(k+1)+1}{k+1}$$

となり, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数 n について (A) が成り立つ.

証終

問題 1.20 (1) 1 回目に服用した有効成分の残量は $100 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 4$ [mg]

2 回目に服用した有効成分の残量は $100 \times \frac{1}{5} = 20$ [mg]

したがって、3 回目の服用直後の有効成分の残量は

$$4 + 20 + 100 = \mathbf{124} \text{ [mg]}$$

(2) n 回目に服用直後の有効成分の量 a_n mg は、24 時間にはその $\frac{1}{5}$ になるから

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + 100$$

(3) (2) の結果から

$$a_{n+1} - 125 = \frac{1}{5}(a_n - 125)$$

$\{a_n - 125\}$ は初項 $a_1 - 125 = -25$ 、公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$a_n - 125 = -25 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = 125 \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$$

章末 1.1 初項を a 、公差を d 、一般項を a_n とすると

$$a_n = a + (n-1)d$$

第 4 項が 14 であるから $a + 3d = 14 \quad \cdots \textcircled{1}$

第 8 項が 30 であるから $a + 7d = 30 \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ② を解くと $a = 2, d = 4$

よって、一般項は

$$a_n = 2 + (n-1) \times 4 \quad \text{すなわち} \quad a_n = 4n - 2$$

(1) $4n - 2 = 70$ を解くと $n = 18$

よって、70 はこの数列の第 18 項である.

(2) $4n - 2 = 123$ を満たす自然数は存在しないから、
123 はこの数列の項ではない.

章末 1.2 この等差数列の公差を d ，項数を n とする．

第 n 項が -30 であるから

$$60 + (n - 1)d = -30 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また，和が 240 であるから

$$\frac{1}{2}n\{60 + (-30)\} = 240 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①，② を解くと $n = 16$ ， $d = -6$

よって 公差 -6 ，項数 16

章末 1.3 15 日間の貯金の総額は，初項 1 ，公比 2 の等比数列の第 15 項までの和であるから

$$\frac{1 \cdot (2^{15} - 1)}{2 - 1} = 2^{15} - 1 = \mathbf{32,767} \text{ (円)}$$

章末 1.4 (1) この等比数列の初項を a ，公比を r とする．

$$\text{条件より} \quad ar + ar^3 = 20 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$ar^3 + ar^5 = 80 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より} \quad r^2(ar + ar^3) = 80$$

① を代入して

$$20r^2 = 80 \quad \text{すなわち} \quad r^2 = 4$$

よって $r = \pm 2$

$$r = 2 \text{ のとき，} \textcircled{1} \text{ より} \quad a = 2$$

$$r = -2 \text{ のとき，} \textcircled{1} \text{ より} \quad a = -2$$

$a > 0$ であるから 初項 2 ，公比 2

(2) 初項 2 ，公比 2 ，項数 10 の等比数列の和であるから

$$\frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2 \times 1023 = \mathbf{2046}$$

章末 1.5 第 k 項は $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$

$$\text{よって，和は} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

章末 1.6 (1) 漸化式から $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$ ゆえに $b_{n+1} = 2b_n$
 よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で、初項は

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

(2) $a_n = nb_n$ であるから、(1) の結果を代入して $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

章末 1.7 証明 「 $7^n - 1$ は 6 の倍数である」を (A) とする.

$$[1] \quad n = 1 \text{ のとき} \quad 7^1 - 1 = 6$$

よって、 $n = 1$ のとき、(A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき (A) が成り立つと仮定する.

すなわち、整数 m を用いて

$$7^k - 1 = 6m$$

と表されると仮定する.

$n = k + 1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 1 &= 7 \cdot 7^k - 1 \\ &= 7(6m + 1) - 1 \\ &= 42m + 6 = 6(7m + 1) \end{aligned}$$

よって、 $7^{k+1} - 1$ は 6 の倍数であるから、

$n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1] , [2] から、すべての自然数 n について (A) が成り立つ.

証終

章末 1.8 (1) $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = \frac{1}{2} \cdot 9(9 + 1) = 45$ であるから、 $\frac{9}{9}$ は第 45 項

したがって $\frac{3}{10}$ は、第 48 項

(2) $1 + 2 + 3 + \cdots + 13 = \frac{1}{2} \cdot 13(13 + 1) = 91$ であるから、 $\frac{13}{13}$ は第 91 項

したがって 第 100 項は $\frac{9}{14}$

章末 1.9 (1) 第 k 項は

$$k \cdot \{n - (k - 1)\} = k(n - k + 1)$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k(n - k + 1) &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n + 1)k\} \\ &= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n + 1) \sum_{k=1}^n k \\ &= -\frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) + (n + 1) \times \frac{1}{2}n(n + 1) \\ &= \frac{1}{6}n(n + 1)\{-(2n + 1) + 3(n + 1)\} \\ &= \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)\end{aligned}$$

章末 1.10 (1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= (2a_{n+1} - 1) - (2a_n - 1) \\ &= 2a_{n+1} - 2a_n\end{aligned}$$

よって $a_{n+1} = 2a_n$

(2) (1) より, 数列 $\{a_n\}$ は公比 2 の等比数列で, 初項は

$$a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$$

よって $a_1 = 1$

したがって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 2^{n-1}$$

章末 1.11 (1) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = 2, \quad b_{n+1} - b_n = 2(n+1)$$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列の第 n 項が $2(n+1)$ であるから, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) \\ &= 2 + 2 \times \frac{1}{2}(n-1)n + 2(n-1) \\ &= n^2 + n = n(n+1) \end{aligned}$$

初項は $b_1 = 2$ なので, 上の b_n は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n(n+1)}$$

(2) $a_{n+1} - 3a_n = 2^{n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割り, $\frac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \quad b_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{5}{3} - \frac{2^{n+1}}{3^n} \end{aligned}$$

上式は $n = 1$ のときも成立する. したがって

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{5}{3} - \frac{2^{n+1}}{3^n} \quad \text{よって} \quad a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}$$

別解 $a_{n+1} - 3a_n = 2^{n+1}$ より $a_{n+1} + 2^{n+2} = 3(a_n + 2^{n+1})$

$\{a_n + 2^{n+1}\}$ は, 初項 $a_1 + 2^2 = 5$, 公比 3 の等比数列であるから

$$a_n + 2^{n+1} = 5 \cdot 3^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}$$

章末 1.12 証明 この不等式を (A) とする.

[1] $n = 1$ のとき

$$\text{左辺} = 1 + a, \text{ 右辺} = 1 + 1 \cdot a = 1 + a$$

よって, $n = 1$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $n = k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$(1 + a)^k \geq 1 + ka$$

であると仮定する. 両辺に $1 + a$ をかけると

$$(1 + a)^{k+1} \geq (1 + ka)(1 + a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

次に

$$(1 + ka)(1 + a) \geq 1 + (k + 1)a \quad \cdots \textcircled{2}$$

を示す.

$$(1 + ka)(1 + a) - \{1 + (k + 1)a\} = ka^2 > 0$$

よって, $\textcircled{2}$ も成り立つから, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$$

したがって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数について (A) が成り立つ.

証終

章末 1.13 (1) $a_1 = 0, b_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2b_n, b_{n+1} = 2a_n + b_n$
 与えられた2つの漸化式の各辺の和および差をとると

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= (a_n + 2b_n) + (2a_n + b_n) = 3(a_n + b_n) \\ a_{n+1} - b_{n+1} &= (a_n + 2b_n) - (2a_n + b_n) = -(a_n - b_n) \end{aligned}$$

数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1$, 公比 3 の等比数列, 数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = -1$, 公比 -1 の等比数列であるから

$$a_n + b_n = 3^{n-1}, \quad a_n - b_n = (-1)^n$$

$$(2) \quad a_n = \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{a_n - b_n}{2}, \quad b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{a_n - b_n}{2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3^{n-1}}{2} + \frac{(-1)^n}{2} = \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{2} \\ b_n &= \frac{3^{n-1}}{2} - \frac{(-1)^n}{2} = \frac{3^{n-1} - (-1)^n}{2} \end{aligned}$$

別解 $a_1 = 0, b_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2b_n \cdots \textcircled{1}, b_{n+1} = 2a_n + b_n \cdots \textcircled{2}$

$$a_2 = a_1 + 2b_1 = 1 + 2 \cdot 0 = 2, \quad \textcircled{1} \text{ より } b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} \cdots \textcircled{1}'$$

$\textcircled{1}'$ を $\textcircled{2}$ に代入すると

$$\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2} = 2a_n + \frac{a_{n+1} - a_n}{2} \quad \text{整理すると} \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3 = 0$$

漸化式の特性方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ を解くと $x = 3, -1$

$\alpha = 3, \beta = -1$ において, 45 ページの (1.2) に代入すると

$$a_n = \frac{2 - (-1) \cdot 0}{3 - (-1)} \cdot 3^{n-1} + \frac{2 - 3 \cdot 0}{-1 - 3} \cdot (-1)^{n-1} = \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{2}$$

これを $\textcircled{1}'$ に代入すると

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{2} - \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{2} \right) = \frac{3^{n-1} - (-1)^n}{2}$$

練習 2.1 X のとりうる値は, 2, 3 である.

各値について, X がその値をとる確率を求めると

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_2}{{}_5C_4} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_3}{{}_5C_4} = \frac{2}{5}$$

よって, X の確率分布は次の表のようになる.

X	1	2	計
確率	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

練習 2.2 2 個のサイコロの目を a, b とすると $X = a + b$

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

したがって, X の確率分布は, 次のようになる.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

練習 2.3 X の確率分布は, 次の式で表される.

$$P(X=k) = \frac{{}_4C_k \cdot {}_2C_{2-k}}{{}_6C_2} \quad (k=0, 1, 2)$$

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	1

よって, X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{6}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

練習 2.4 (1) $E(X + 2) = E(X) + 2 = \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2}$

(2) $E(4X - 1) = 4E(X) - 1 = 4 \cdot \frac{7}{2} - 1 = 13$

(3) $E(-3X) = -3E(X) = -3 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{21}{2}$

練習 2.5 X の確率分布は次の表のようになる.

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって, X^2 の期待値は

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{2}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

練習 2.6 期待値 m は $m = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$

よって, X の分散は

$$V(X) = \left(0 - \frac{6}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(1 - \frac{6}{5}\right)^2 \cdot \frac{6}{10} + \left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{25}$$

練習 2.7 X の確率分布は, 次の式で表される.

$$P(X = k) = \frac{{}^2C_k \cdot {}^3C_{2-k}}{{}^5C_2} \quad (k = 0, 1, 2)$$

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

したがって $E(X) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{10} = 1$$

よって, 求める分散は

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

練習 2.8 (1) 確率分布の表から

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{6} + 1^2 \cdot \frac{2}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

よって, X の分散は $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

(2) (1) の結果から, X の標準偏差は

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

練習 2.9 $E(X) = \frac{7}{2}, \quad V(X) = \frac{35}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{105}}{6}$

$$(1) E(X+4) = E(X) + 4 = \frac{7}{2} + 4 = \frac{15}{2}$$

$$V(X+4) = V(X) = \frac{35}{12}$$

$$\sigma(X+4) = \sigma(X) = \frac{\sqrt{105}}{6}$$

別解 $\sigma(X+4) = \sqrt{V(X+4)} = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6}$

$$(2) E(-2X) = -2E(X) = -2 \cdot \frac{7}{2} = -7$$

$$V(-2X) = (-2)^2 V(X) = 4 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{3}$$

$$\sigma(-2X) = |-2| \sigma(X) = 2 \cdot \frac{\sqrt{105}}{6} = \frac{\sqrt{105}}{3}$$

別解 $\sigma(-2X) = \sqrt{V(-2X)} = \sqrt{\frac{35}{3}} = \frac{\sqrt{105}}{3}$

$$(3) E(3X-2) = 3E(X) - 2 = 3 \cdot \frac{7}{2} - 2 = \frac{17}{2}$$

$$V(3X-2) = 3^2 V(X) = 9 \cdot \frac{35}{12} = \frac{105}{4}$$

$$\sigma(3X-2) = |3| \sigma(X) = 3 \cdot \frac{\sqrt{105}}{6} = \frac{\sqrt{105}}{2}$$

別解 $\sigma(3X-2) = \sqrt{V(3X-2)} = \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{2}$

練習 2.10 $P(X=3, Y=3) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}, \quad P(X=3, Y=4) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{45}$

$$P(X=4, Y=3) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{45}, \quad P(X=4, Y=4) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

したがって、 X と Y の同時分布は、次のようになる。

$X \backslash Y$	3	4	計
3	$\frac{1}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{9}{45}$
4	$\frac{8}{45}$	$\frac{28}{45}$	$\frac{36}{45}$
計	$\frac{9}{45}$	$\frac{36}{45}$	1

練習 2.11 $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = 3, \quad E(Y) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 4$

よって $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3 + 4 = 7$

練習 2.12 $E(X) = E(Y) = E(Z) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

よって $E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

練習 2.13 1 回目に出た目を X , 2 回目に出た目を Y , 得点を Z とすると

$$E(X) = E(Y) = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = \frac{7}{2}, \quad Z = 10X + 5Y$$

よって $E(Z) = 10E(X) + 5E(Y) = 10 \cdot \frac{7}{2} + 5 \cdot \frac{7}{2} = \frac{105}{2}$

深化 2.1 同時分布表は次のようになる。

$X \backslash Y$	0	1	2	計
0	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{8}{16}$
2	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{4}{16}$
計	$\frac{4}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{4}{16}$	1

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left(1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4}\right) \left(1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = E(X)E(Y) \end{aligned}$$

したがって、2 つの確率変数 X, Y は互いに独立である。

練習 2.14 $E(X) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, \quad E(Y) = 2 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{5}$

X, Y は互いに独立であるから

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{5} = 4$$

練習 2.15 (1) $E(X) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, \quad E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{2}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$ より

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{11}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$E(Y) = 2 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{5}, \quad E(Y^2) = 2^2 \cdot \frac{4}{5} + 4^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{32}{5} \text{ より}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{32}{5} - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

X, Y は互いに独立であるから

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \frac{8}{9} + \frac{16}{25} = \frac{344}{225}$$

(2) (1) の結果から $\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)} = \sqrt{\frac{344}{225}} = \frac{2\sqrt{86}}{15}$

練習 2.16 例 2.8 の結果から $E(X) = \frac{7}{2}, \quad V(X) = \frac{35}{12}$

大中小の 3 個のさいころの出る目をそれぞれ X, Y, Z とすると

$$E(X) = E(Y) = E(Z) = \frac{7}{2}, \quad V(X) = V(Y) = V(Z) = \frac{35}{12}$$

(1) X, Y, Z は互いに独立であるから

$$E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z) = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{8}$$

(2) X, Y, Z は互いに独立であるから

$$V(X+Y+Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) = \frac{35}{12} \times 3 = \frac{35}{4}$$

演習 2.1 練習 2.15 より

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{5}{3}, & E(X^2) &= \frac{11}{3}, & V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{8}{9}, \\ E(Y) &= \frac{12}{5}, & E(Y^2) &= \frac{32}{5}, & V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

2つの確率変数 X, Y が互いに独立であるから, X^2, Y^2 も互いに独立より

$$\begin{aligned} V(XY) &= E((XY)^2) - E(XY)^2 \\ &= E(X^2)E(Y^2) - E(X)^2E(Y)^2 \\ &= \frac{11}{3} \cdot \frac{32}{5} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{112}{15}, \\ V(X)V(Y) &= \frac{8}{9} \cdot \frac{16}{25} = \frac{128}{225} \end{aligned}$$

演習 2.2 $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$, $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2$ を ② に代入すると

$$\begin{aligned} V(XY) &= \{V(X) + E(X)^2\}\{V(Y) + E(Y)^2\} - E(X)^2E(Y)^2 \\ &= V(X)V(Y) + V(X)E(Y)^2 + V(Y)E(X)^2 \end{aligned}$$

演習 2.3 $V(XY) = V(X)V(Y)$ が成り立つとき, 演習 2.2 の結果から

$$V(X)E(Y)^2 + V(Y)E(X)^2 = 0$$

これを満たすのは, 次のようなときである.

- (i) $E(X) = E(Y) = 0$
- (ii) $E(X) = 0, V(X) = 0$
- (iii) $E(Y) = 0, V(Y) = 0$
- (iv) $V(X) = V(Y) = 0$

練習 2.17 1 個のさいころを投げて, 2 以下の目が出る確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

よって, 二項分布 $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$ に従う.

$$(1) P(X=2) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

$$(2) P(X=5) = {}_5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

$$(3) P(2 \leq X \leq 4) = P(2) + P(3) + P(4) = \frac{80}{243} + \frac{40}{234} + \frac{10}{243} = \frac{130}{243}$$

深化 2.2 X が二項分布 $B(3, p)$ に従うとき

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=0}^3 k \cdot {}_3C_k p^k q^{3-k} = 1 \cdot 3pq^2 + 2 \cdot 3p^2q + 3 \cdot p^3 \\
 &= 3p(q^2 + 2pq + p^2) = 3p(q + p)^2 = \mathbf{3p} \\
 E(X^2) &= \sum_{k=0}^3 k^2 \cdot {}_3C_k p^k q^{3-k} = 1^2 \cdot 3pq^2 + 2^2 \cdot 3p^2q + 3^2 \cdot p^3 \\
 &= 3pq^2 + 12p^2q + 9p^3 \\
 V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 3pq^2 + 12p^2q + 9p^3 - (3p)^2 \\
 &= 3pq^2 + 12p^2q - 9p^2(1 - p) = 3pq^2 + 12p^2q - 9p^2q \\
 &= 3pq^2 + 3p^2q = 3pq(q + p) = \mathbf{3pq}
 \end{aligned}$$

練習 2.18 確率変数 X は二項分布 $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$\begin{aligned}
 X \text{ の期待値は} \quad E(X) &= 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} \\
 X \text{ の分散は} \quad V(X) &= 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}} \\
 X \text{ の標準偏差は} \quad \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}
 \end{aligned}$$

練習 2.19 確率変数 X は二項分布 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$\begin{aligned}
 X \text{ の期待値は} \quad E(X) &= 100 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{50} \\
 X \text{ の分散は} \quad V(X) &= 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{25} \\
 X \text{ の標準偏差は} \quad \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{25} = \mathbf{5}
 \end{aligned}$$

練習 2.20 (1) $P(0 \leq X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.5} = \mathbf{0.125}$

(2) $P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 0.5x \, dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \mathbf{0.75}$

練習 2.21 $m = 2, \sigma = 3$

練習 2.22 正規分布表より $p(1) = 0.3413$, $p(2) = 0.4772$

$$(1) P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2) = 2p(2) = 2 \times 0.4772 = \mathbf{0.9544}$$

$$(2) P(1 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ = p(2) - p(1) = 0.4772 - 0.3413 = \mathbf{0.1359}$$

練習 2.23 $Z = \frac{X-2}{5}$ とおくと, Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$(1) P(2 \leq X \leq 12) = P(0 \leq Z \leq 2) = p(2) = \mathbf{0.4772}$$

$$(2) P(0 \leq X \leq 5) = P(-0.4 \leq Z \leq 0.6) = P(-0.4 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.6) \\ = P(0 \leq Z \leq 0.4) + P(0 \leq Z \leq 0.6) \\ = p(0.4) + p(0.6) = 0.1554 + 0.2257 = \mathbf{0.3811}$$

練習 2.24 (1) $X = 180$ のとき $Z = \frac{180 - 170.5}{5.4} \doteq 1.76$

$$P(X \geq 180) = P(Z \geq 1.76) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.76) \\ = 0.5 - p(1.76) = 0.5 - 0.4608 = 0.0392$$

よって, 約 **3.9%** いる.

$$(2) P(Z \geq u) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq u) = 0.03 \text{ となる } u \text{ を求める.}$$

正規分布表から, $P(u) = 0.47$ となる u の値は 1.88

$$\frac{X - 170.4}{5.4} = 1.88 \text{ とすると } X = 180.652$$

よって, **180.7cm** 以上である.

$$(3) P(165 \leq X \leq 170) = P(-1.02 \leq -0.09) = P(0.09 \leq Z \leq 1.02) \\ = P(0 \leq Z \leq 1.02) - P(0 \leq Z \leq 0.09) \\ = p(1.02) - p(0.09) = 0.3461 - 0.0359 = 0.3102$$

よって, 約 **31.0%** いる.

練習 2.25 X は二項分布 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ に従う.

$$X \text{ の期待値 } m \text{ と標準偏差 } \sigma \text{ は } m = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30, \sigma = \sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 5$$

$Z = \frac{X - 30}{5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うから

$$P(20 \leq X \leq 45) = P(-2 \leq Z \leq 3) = P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ = p(2) + p(3) = 0.4772 + 0.4987 = \mathbf{0.9759}$$

演習 2.4 確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき $Z = \frac{X - m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. $T = 10Z + 50$ より

$$E(T) = E(10Z + 50) = 10E(Z) + 50 = 10 \times 0 + 50 = \mathbf{50}$$

また, 分散 $V(T)$ は

$$V(T) = V(10Z + 50) = 10^2 V(Z) = 10^2$$

標準偏差 $\sigma(T)$ は $\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \mathbf{10}$

演習 2.5 ① 受験者 100 人の試験で 1 人が 100 点, 残り 99 人が 0 点であるとき

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{100} \cdot 100 = 1, & E(X^2) &= \frac{1}{100} \cdot 100^2 = 100, \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 100 - 1^2 = 99, \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{99} \end{aligned}$$

このとき, 100 点の人の偏差値 T は

$$T = 10 \times \frac{100 - 1}{\sqrt{99}} + 50 = 10\sqrt{99} + 50 > 10 \times 9 + 50 = 140$$

② 受験者 100 人の試験で 1 人が 0 点, 残り 99 人が 100 点であるとき

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{100} \cdot 100 \cdot 99 = 99, & E(X^2) &= \frac{1}{100} \cdot 100^2 \cdot 99 = 9900, \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 9900 - 99^2 = 99(100 - 99) = 99, \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{99} \end{aligned}$$

このとき, 0 点の人の偏差値 T は

$$T = 10 \times \frac{0 - 99}{\sqrt{99}} + 50 = -10\sqrt{99} + 50 < -10 \times 9 + 50 = -40$$

③ ある人の 1 回目の試験の得点が 50 点で平均点も 50 点, 2 回目の試験の得点が 60 点で平均点も 60 点であれば, 1 回目も 2 回目も偏差値は 50 となる.

よって, 正しいのは ①

問題 2.1 X の確率分布は次の表のようになる.

X	1	2	3	計
P	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	1

よって, X の期待値は

$$E(X) = 1 \cdot \frac{3}{12} + 2 \cdot \frac{4}{12} + 3 \cdot \frac{5}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

$$\text{また} \quad E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{3}{12} + 2^2 \cdot \frac{4}{12} + 3^2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

$$X \text{ の分散は} \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{16}{3} - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{23}{36}$$

$$X \text{ の標準偏差は} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{23}{36}} = \frac{\sqrt{23}}{6}$$

$$\text{問題 2.2} \quad E(Y) = E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot m - \frac{m}{\sigma} = 0$$

$$V(Y) = V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{1}{\sigma^2} \times \sigma^2 = 1$$

$$\text{よって} \quad \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 1$$

問題 2.3 確率変数 X と Y の確率分布の表から

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{4}{10} + 2 \cdot \frac{5}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \\
 E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{1}{10} + 1^2 \cdot \frac{4}{10} + 2^2 \cdot \frac{5}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \\
 V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{12}{5} - \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{11}{25} \\
 E(Y) &= 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \\
 E(Y^2) &= 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{10} = 1 \\
 V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}
 \end{aligned}$$

X と Y は互いに独立であるから

$$\begin{aligned}
 E(X + Y) &= E(X) + E(Y) = \frac{7}{5} + \frac{4}{5} = \frac{11}{5} \\
 V(X + Y) &= V(X) + V(Y) = \frac{11}{25} + \frac{9}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \\
 \sigma(X + Y) &= \sqrt{V(X + Y)} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}
 \end{aligned}$$

問題 2.4 X は二項分布 $B\left(1000, \frac{1}{100}\right)$ に従う確率変数であるから, X の期待値は

$$E(X) = 1000 \cdot \frac{1}{100} = 10$$

$$\begin{aligned}
 X \text{ の分散は } \quad V(X) &= 1000 \cdot \frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{100}\right) \\
 &= 1000 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100} = \frac{99}{10}
 \end{aligned}$$

$$X \text{ の標準偏差は } \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{99}{10}} = \frac{3\sqrt{110}}{10}$$

問題 2.5 1枚の硬貨を投げて、表の出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから、 X は二項分布 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$ に従う。 X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200, \quad \sigma \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10$$

よって、 $Z = \frac{X - 200}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

ここで、 $\left| \frac{X}{400} - \frac{1}{2} \right| \leq 0.05$ から

$$-0.05 \leq \frac{X}{400} - \frac{1}{2} \leq 0.05 \quad \text{すなわち} \quad 180 \leq X \leq 220$$

$$X = 180 \text{ のとき} \quad Z = \frac{180 - 200}{10} = -2$$

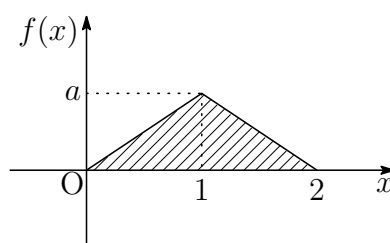
$$X = 220 \text{ のとき} \quad Z = \frac{220 - 200}{10} = 2$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(-2 \leq Z \leq 2) &= 2P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 2p(0) = 2 \times 0.4772 = \mathbf{0.9544} \end{aligned}$$

問題 2.6 (1) 分布曲線と x 軸で囲まれた部分全体の面積が1であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a = 1 \quad \text{よって} \quad a = 1$$



(2) 求める確率は、(1)の結果より

$$\begin{aligned} P(0.5 \leq X \leq 1.5) &= \int_{0.5}^{1.5} f(x) dx = \int_{0.5}^1 x dx + \int_1^{1.5} (2-x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.5}^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^{1.5} = \frac{3}{4} = \mathbf{0.75} \end{aligned}$$

別解 グラフの対称性により

$$\begin{aligned} P(0.5 \leq X \leq 1.5) &= 2P(0.5 \leq X \leq 1) = 2 \left\{ \frac{1}{2} - P(0 \leq X \leq 0.5) \right\} \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = \mathbf{0.75} \end{aligned}$$

ベータ関数・ガンマ関数

求積問題ではベータ関数・ガンマ関数の計算結果を知っていれば、簡単に求まるものも少なくない。求積問題でよく利用する $1/6$ 公式もベータ関数に由来している。ここでは、入試問題に関連するベータ関数とガンマ関数について解説する。これらの関数は複素数まで定義域を拡張した特殊関数であるが、入試問題では自然数や $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ に対する値が出題されている。

まず、ガンマ関数の定義式は

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\operatorname{Re}(z) > 0)$$

部分積分法 (部分積分は解析学最強の計算法) により

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= - \left[t^n e^{-t} \right]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = n\Gamma(n) \\ \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt = - \left[e^{-t} \right]_0^{\infty} = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

上の 2 式から $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n! \dots (*)$

次に、ベータ関数の定義式は

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (\operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0)$$

部分積分法により

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{m} \left[t^m (1-t)^{n-1} \right]_0^1 + \frac{n-1}{m} \int_0^1 t^m (1-t)^{n-2} dt \\ &= \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1) \\ &= \frac{n-1}{m} \cdot \frac{n-2}{m+1} \cdots \frac{1}{m+n-2} B(m+n-1, 1) \\ &= \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-2)!} \int_0^1 t^{m+n-2} dt \\ &= \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \end{aligned} \tag{2}$$

前頁の m, n は、自然数に限らず成立する．たとえば、 $m = n = \frac{3}{2}$ を (2) とすると

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt = \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}$$

上の定積分の値は、半径 $\frac{1}{2}$ の半円の面積と等しい． $t > 0$ のとき、 $t^{\frac{1}{2}}e^{-t} > 0$ であるから、 $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}! > 0$ に注意して

$$\frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!} \quad \text{ゆえに} \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (3)$$

さらに、(1) により、次のような計算ができる．

$$\frac{5}{2}! = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}! = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)!$ であるから、(3) より

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi} \quad (4)$$

なお、(4) をベータ関数を用いて求めることもできる．

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

$$t = \sin^2 \theta \text{ とおくと } \frac{dt}{d\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \longrightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$\Gamma(1) = 0! = 1$ であるから

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}} d\theta = \pi$$

$t > 0$ のとき、 $t^{-\frac{1}{2}}e^{-t} > 0$ であるから、 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)! > 0$ に注意して

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$$

を得る．

入試に登場する定積分

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx$$

について, $x = \alpha + (\beta - \alpha)t$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = \beta - \alpha$

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx &= (\beta - \alpha)^{m+n+1} \int_0^1 t^m (1 - t)^n dt \\ &= (\beta - \alpha)^{m+n+1} B(m+1, n+1) \\ &= (\beta - \alpha)^{m+n+1} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} \end{aligned}$$

よって $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$

例題 $A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ について ($m \geq 0, n \geq 0$)

$t = \sin^2 x$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 2 \sin x \cos x$

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\longrightarrow$	1

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{m-1}{2}} x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} (2 \sin x \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1 - t)^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{\frac{m-1}{2}! \frac{n-1}{2}!}{2 \cdot \frac{m+n}{2}!} \end{aligned}$$

例えば $A(2, 5) = \frac{\frac{1}{2}! 2!}{2 \cdot \frac{7}{2}!} = \frac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}!} = \frac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}!} = \frac{1}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8}{105}$

$$A(2, 6) = \frac{\frac{1}{2}! \frac{5}{2}!}{2 \cdot 4!} = \frac{\frac{1}{2}! \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}!}{2 \cdot 4!} = \frac{5}{64} \left(\frac{1}{2}! \right)^2$$

これに $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を代入すると $A(2, 6) = \frac{5}{256} \pi$

神戸大理系 2021 年 2 番

次の定積分を求めよ.

$$I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

解答 $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用. $t = x^2$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 2x$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$0 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x^2(1-x^2)} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right)!} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

ウォリス (Wallis) の積分

ウォリスの積分は次式で定義される (m は 0 以上の整数)¹⁰.

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta d\theta$$

$t = \sin^2 \theta$ とおくと $\frac{dt}{d\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta$

θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{m-1} \theta}{\cos \theta} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)! \left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!} \end{aligned}$$

(i) $m = 2n$ のとき (n は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)! \left(-\frac{1}{2}\right)!}{n!} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}n!} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)! \right\}^2 \\ &= \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^{n+1}(2n)!n!} \pi = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!n!} \pi = \frac{{}_2n C_n}{2^{2n+1}} \pi \end{aligned}$$

(ii) $m = 2n+1$ のとき (n は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n! \left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(n + \frac{1}{2}\right)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n! \left(-\frac{1}{2}\right)!}{\frac{(2n+1)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)!} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!!} \\ &= \frac{2^n n! (2n)!}{(2n+1)!! (2n)!} = \frac{2^{2n} n! n!}{(2n+1) \cdot (2n)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \cdot {}_2n C_n} \end{aligned}$$

¹⁰<http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai.ri.2014.pdf> (p.10 を参照)

大分大医医 2014 年 9 番

次の一連の問いに答えなさい.

- (1) 自然数 m に対して, $x > 0$ のとき $e^x > \frac{x^m}{m!}$ であることを示しなさい.
- (2) 自然数 n に対して, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ を示しなさい.
- (3) 自然数 n に対して $\Gamma_K(n) = \int_0^K x^{n-1} e^{-x} dx$ とするとき, $\lim_{K \rightarrow \infty} \Gamma_K(n)$ を求めなさい.

解答 (1) (2) は省略 (<http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita.2014.pdf> [9])

$$\begin{aligned} (3) \quad \Gamma_K(1) &= \int_0^K e^{-x} dx = - \left[e^{-x} \right]_0^K = 1 - e^{-K} \\ \Gamma_K(n) &= - \left[x^{n-1} e^{-x} \right]_0^K + (n-1) \int_0^K x^{n-2} e^{-x} dx \\ \Gamma(n) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \Gamma_K(n) \text{ とおくと, } \Gamma(1) = 1, \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \\ \text{よって} \quad \Gamma(n) &= (n-1)! \Gamma(1) = (n-1)! \end{aligned}$$

九工大情報工 2015 年 3 番

n を自然数とし, 関数 $f_m(x)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) を次のように定める.

$$f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ x^m & (m \geq 1) \end{cases}$$

さらに, a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) を次のように定める.

$$a_k = \int_{-1}^1 f_k(1-x) f_{n-k}(1+x) dx$$

以下の問いに答えよ.

- (1) a_0 と a_1 をそれぞれ n を用いて表せ.
- (2) $k \geq 1$ のとき, a_k を n, k, a_{k-1} を用いて表せ.
- (3) a_k を n, k を用いて表せ.
- (4) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k}$ を n を用いて表せ.

解答 (1) $f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ x^m & (m \geq 1) \end{cases}$ より $(m=0, 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^1 f_0(1-x)f_n(1+x) dx = \int_{-1}^1 1 \cdot (1+x)^n dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2^{n+1}}{n+1} \\ a_1 &= \int_{-1}^1 f_1(1-x)f_{n-1}(1+x) dx = \int_{-1}^1 (1-x)(1+x)^{n-1} dx \\ &= \int_{-1}^1 \{2 - (1+x)\}(1+x)^{n-1} dx = \int_{-1}^1 \{2(1+x)^{n-1} - (1+x)^n\} dx \\ &= \left[\frac{2}{n} (1+x)^n - \frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2^{n+1}}{n} - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n(n+1)} \end{aligned}$$

(2) 省略 (http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou.2015.pdf [3])

(3)

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-1}^1 f_k(1-x)f_{n-k}(1+x) dx = \int_{-1}^1 (1-x)^k(1+x)^{n-k} \\ &= \frac{k!(n-k)!}{\{k+(n-k)+1\}!} 2^{k+(n-k)+1} = \frac{2^{n+1}k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)_n C_k} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果より, $\frac{1}{a_k} = \frac{(n+1)_n C_k}{2^{n+1}}$ であるから

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n {}_n C_k = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times 2^n = \frac{n+1}{2}$$

ガウス積分・正規分布の確率密度関数

定積分

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

について, $t = x^2$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 2x$

x	0	$\longrightarrow$	∞
t	0	$\longrightarrow$	∞

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

これから

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

$u = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (2.8)$$

次式が正規分布の確率密度関数であることが確認できる.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

ガウス積分は, フビニ (Fubini) の定理と直交座標から極座標への変換を用いて求めることもできる.

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$$

とおくと ($dx dy = r dr d\theta$)

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$x > 0$ のとき, $e^{-x^2} > 0$ より, $I > 0$ であるから $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

正規分布の期待値 (平均) ・ 分散

期待値と確率密度関数の定義により

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + m \end{aligned}$$

$u = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$ とおくと, ue^{-u^2} が奇関数であるから

$$E(X) = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-u^2} du + m = m$$

次に分散の定義および同様の置き換えにより

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2u^2 e^{-u^2} du = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(e^{-u^2})' du \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left[ue^{-u^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \sigma^2 \end{aligned}$$

二項分布の正規分布による近似

85 ページの二項分布の確率

$$P_r = {}_nC_r p^r q^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

について ($q = 1 - p$, $r = 0, 1, 2, \dots, n$)

$$P_{r+1} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} p^{r+1} q^{n-r-1}$$

であるから

$$\frac{P_{r+1}}{P_r} = \frac{(n-r)p}{(r+1)q}$$

これから

$$\begin{aligned} \frac{P_{r+1}}{P_r} - 1 &= \frac{(n-r)p}{(r+1)q} - 1 = \frac{(n-r)p - (r+1)q}{(r+1)q} \\ &= \frac{(n-r)p - (r+1)(1-p)}{(r+1)q} = \frac{(n+1)p - (r+1)}{(r+1)q} \\ &= -\frac{r+1 - (n+1)p}{(r+1)q} \end{aligned}$$

n と r が 1 より十分に大きい値であるとする

$$\frac{r+1}{n+1} \cdot \frac{n}{r} = \frac{1 + \frac{1}{r}}{1 + \frac{1}{n}} \approx 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{r+1}{n+1} \approx \frac{r}{n}$$

このとき

$$\frac{P_{r+1}}{P_r} - 1 = -\frac{\frac{r+1}{n+1} - p}{\frac{r+1}{n+1}q} \approx -\frac{\frac{r}{n} - p}{\frac{r}{n}q} = -\frac{r - np}{rq}$$

$\delta = r - np$ とおき, $|\delta|$ が np に対して十分に小さいとき

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{np + \delta} = \frac{1}{np} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{np}} \approx \frac{1}{np}$$

これらの条件を満たすとき

$$\frac{P_{r+1}}{P_r} - 1 \approx -\frac{r - np}{npq}$$

二項分布の平均 $m = np$, 分散 $\sigma^2 = npq$ を用いると

$$\frac{P_{r+1} - P_r}{P_r} \approx -\frac{r - m}{\sigma^2}$$

離散分布の確率 P_r を連続分布の確率 $f(x)$ に変換するとき

$$P_{r+1} - P_r = f(x+1) - f(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x)$$

で近似すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x - m}{\sigma^2}$$

両辺を積分すると (C は積分定数)

$$\log f(x) = \log C - \frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \quad \text{ゆえに} \quad f(x) = Ce^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

(2.8) に注意すると $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

したがって, 次の正規分布で近似される.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

練習 2.26 ${}_{100}C_5$ (75287520)

練習 2.27 母集団分布は、次の表のようになる.

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

母平均 m は $m = 1 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot \frac{3}{20} + 3 \cdot \frac{12}{20} + 4 \cdot \frac{3}{20} + 5 \cdot \frac{1}{20} = 3$

母標準偏差 σ について

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (1-3)^2 \cdot \frac{1}{20} + (2-3)^2 \cdot \frac{3}{20} + (3-3)^2 \cdot \frac{12}{20} \\ &\quad + (4-3)^2 \cdot \frac{3}{20} + (5-3)^2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

よって $\sigma = \sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$

別解 母標準偏差 σ について

$$\sigma^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{20} + 2^2 \cdot \frac{3}{20} + 3^2 \cdot \frac{12}{20} + 4^2 \cdot \frac{3}{20} + 5^2 \cdot \frac{1}{20} - 3^2 = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

練習 2.28 期待値は $E(\bar{X}) = 170$

標準偏差は $\sigma(\bar{X}) = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2$

練習 2.29 $n = 400$, $\sigma = 20$ であるから

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{400}} = 1$$

また, $m = 50$ であるから, $Z = \bar{X} - 50$ は近似的に標準積分布 $N(0, 1)$ に従う.

$\bar{X} = 48$ のとき $Z = 48 - 50 = -2$

$$\begin{aligned} \text{よって } P(\bar{X} < 48) &= P(Z < -2) = P(Z > 2) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - p(2) \\ &= 0.5 - 0.4772 = \mathbf{0.0228} \end{aligned}$$

練習 2.30 (1) $p = \frac{1}{10}$, $q = 1 - p = \frac{9}{10}$, $n = 100$ より

$$\frac{pq}{n} = pq \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{9}{10000}$$

よって、標本比率 R は正規分布 $N\left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10000}\right)$ に従う.

(2) $Z = \frac{R - \frac{1}{10}}{\sqrt{\frac{9}{10000}}}$ は、標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$R = 0.07 \text{ のとき } Z = \frac{100}{3} \left(\frac{7}{100} - \frac{1}{10} \right) = -1$$

$$R = 0.13 \text{ のとき } Z = \frac{100}{3} \left(\frac{13}{100} - \frac{1}{10} \right) = 1$$

したがって

$$\begin{aligned} P(0.07 \leq R \leq 0.13) &= P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2p(1) = 2 \times 0.3413 = \mathbf{0.6826} \end{aligned}$$

練習 2.31 相対度数 R は、標本比率と同じ分布に従うから、 R は近似的に正規分布 $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4n}\right)$

に従う. $Z = \frac{R - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}$ は近似的に標準正規分布に従うから

$$P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right) = P\left(\left|\frac{Z}{2\sqrt{n}}\right| \leq 0.05\right) = P\left(-\frac{\sqrt{n}}{10} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{10}\right)$$

$$(1) P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(0 \leq Z \leq 1) = 2p(1) = 2 \times 0.3413 = \mathbf{0.6826}$$

$$(2) P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2) = 2p(2) = 2 \times 0.4772 = \mathbf{0.9544}$$

$$(3) P(-3 \leq Z \leq 3) = 2P(0 \leq Z \leq 3) = 2p(3) = 2 \times 0.49865 = \mathbf{0.9973}$$

練習 2.32 標本の平均値は $\bar{x} = 103.4$, 標本の標準偏差は $S = 1.5$, 標本の大きさは $n = 100$ であるから

$$1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{100}} \doteq 0.3$$

よって、求める信頼区間は

$$[103.4 - 0.3, 103.4 + 0.3] \quad \text{すなわち} \quad [\mathbf{103.1}, \mathbf{103.7}]$$

(103.1cm 以上 103.7cm 以下)

練習 2.33 標本比率 R は $R = \frac{324}{900} = 0.36$

$n = 900$ であるから

$$\begin{aligned} 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} &= 1.96\sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{900}} \\ &= 1.96 \times 0.016 \doteq 0.031 \end{aligned}$$

よって、求める信頼区間は

$$[0.36 - 0.031, 0.36 + 0.031] \quad \text{すなわち} \quad [0.329, 0.391]$$

(32.9%以上 39.1%以下)

練習 2.34 1 の目が出る確率を p とする. 1 の目の出やすさに偏りがあるなら, $p \neq \frac{1}{6}$ である. ここで, 「1 の目の出やすさに偏りが無い」, すなわち $p = \frac{1}{6}$ という仮説を立てる. この仮説が正しいとすると, 180 回のうち 1 の目が出る回数 X は, 二項分布 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ に従う. X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 180 \times \frac{1}{6} = 30, \quad \sigma = \sqrt{180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 5$$

よって, $Z = \frac{X - 30}{5}$ は近似的標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 正規分布表より $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ であるから, 有意水準 5% の棄却域は

$$Z \leq -1.96 \quad \text{または} \quad 1.96 \leq Z$$

$X = 24$ のとき $Z = \frac{24 - 30}{5} = -1.2$ であり, この値は棄却域に入らないから, 仮説を棄却できない. すなわち, この結果から, 1 の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないと判断することはできない.

練習 2.35 品種改良した新しい種子の発芽率を p とする．品種改良によって発芽率が上がったなら， $p > 0.75$ である．ここで，「品種改良によって発芽率は上がらなかった」，すなわち， $p = 0.75$ という仮説を立てる．この仮説が正しいとすると，300 個のうち発芽する種子の個数 X は，二項分布 $B(300, 0.75)$ に従う． X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 300 \times 0.75 = 225, \quad \sigma = \sqrt{300 \times 0.75 \times 0.25} = 7.5$$

よって， $Z = \frac{X - 225}{7.5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．正規分布表より $P(0 \leq Z \leq 1.64) = 0.45$ であるから，有意水準 5% の棄却域は

$$Z \geq 1.64$$

$X = 237$ のとき $Z = \frac{237 - 225}{7.5} = 1.6$ であり，この値は棄却域に入らないから，仮説は棄却できない．すなわち，品種改良によって発芽率が上がったと判断することはできない．

深化 2.3 コインの表の出る確率を p とする．コインは表が出にくいなら， $p < 0.5$ である．ここで，「コインは表が出にくいことはない」，すなわち， $p = 0.5$ という仮説を立てる．この仮説が正しいとすると，400 回のうち表が出る回数 X は，二項分布 $B(400, 0.5)$ に従う． X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 400 \times 0.5 = 200, \quad \sigma = \sqrt{400 \times 0.5 \times 0.5} = 10$$

よって， $Z = \frac{X - 200}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．正規分布表より $P(0 \leq Z \leq 1.64) = 0.45$ であるから，有意水準 5% の棄却域は

$$Z \leq -1.64$$

$X = 183$ のとき $Z = \frac{183 - 200}{10} = -1.7$ であり，この値は棄却域に入るから，仮説は棄却できる．すなわち，「コインは表が出にくい」と判断してよい．

問題 2.7 $n = 64$, $\sigma = 4$ であるから $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{64}} = \frac{1}{2}$

また, $m = 170$ であるから

$$Z = \frac{\bar{X} - 170}{\frac{1}{2}} = 2(\bar{X} - 170)$$

は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$\bar{X} = 169 \text{ のとき} \quad Z = 2(169 - 170) = -2$$

$$\bar{X} = 171 \text{ のとき} \quad Z = 2(171 - 170) = 2$$

したがって

$$\begin{aligned} P(169 \leq \bar{X} \leq 171) &= P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 2p(2) = 2 \times 0.4772 = \mathbf{0.9544} \end{aligned}$$

問題 2.8 $P(|Z| \leq a) = P(-a \leq Z \leq a) = 2P(0 \leq Z \leq a) = 2p(a)$ より

$$2p(a) = 0.99 \quad \text{ゆえに} \quad p(a) = 0.495$$

よって, 求める a の値は, [正規分布表](#) から **2.58**

問題 2.9 標本の平均値は $\bar{x} = 1470$, 標本の標準偏差は $S = 200$, 標本の大きさは $n = 100$

(1) 信頼度 95% のとき, [正規分布表](#) より

$$1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}} \doteq 39$$

よって, 求める信頼区間は

$$[1470 - 39, 1470 + 39] \quad \text{すなわち} \quad [\mathbf{1431}, \mathbf{1509}]$$

である (単位は時間). (**1431** 時間以上 **1509** 時間以下)

(2) 信頼度 99% のとき, [正規分布表](#) より

$$2.58 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.58 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}} \doteq 52$$

よって, 求める信頼区間は

$$[1470 - 52, 1470 + 52] \quad \text{すなわち} \quad [\mathbf{1418}, \mathbf{1522}]$$

である (単位は時間). (**1418** 時間以上 **1522** 時間以下)

問題 2.10 1の目が出る確率を p とする. 1の目の出やすさに偏りがあるなら, $p \neq \frac{1}{6}$ である. ここで, 「1の目の出やすさに偏りが無い」, すなわち $p = \frac{1}{6}$ という仮説を立てる. この仮説が正しいとすると, 720回のうち表が出る回数 X は, 二項分布 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$ に従う. X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 720 \times \frac{1}{6} = 120, \quad \sigma = \sqrt{720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 10$$

よって, $Z = \frac{X - 120}{10}$ は近似的標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 正規分布表より $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ であるから, 有意水準 5% の棄却域は

$$Z \leq -1.96 \quad \text{または} \quad 1.96 \leq Z$$

$X = 98$ のとき $Z = \frac{98 - 120}{10} = -2.2$ であり, この値は棄却域に入るから, 仮説を棄却できる.

すなわち, この結果から, 1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよい.

問題 2.11 不良品率を p とする. 不良品率が従来より下がったなら, $p < 0.05$ である. ここで, 「従来の不良品率と変わらない」, すなわち $p = 0.05$ という仮説を立てる. この仮説が正しいとすると, 1900個のうちの不良品の個数 X は, 二項分布 $B(1900, 0.05)$ に従う. X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 1900 \times 0.05 = 95, \quad \sigma = \sqrt{1900 \times 0.05 \times 0.95} = 9.5$$

よって, $Z = \frac{X - 95}{9.5}$ は近似的標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 正規分布表より $P(0 \leq Z \leq 2.33) = 0.49$ であるから, 有意水準 1% の棄却域は

$$Z \leq -2.33$$

$X = 75$ のとき $Z = \frac{75 - 95}{9.5} \approx -2.1$ であり, この値は棄却域に入らないから, 仮説を棄却できない.

すなわち, この結果からは, 不良品率が下がったとは判断できない.

章末 2.1 (1) $Y = 100X - 300$

$$(2) E(X) = \sum_{k=1}^6 \left(k \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } E(Y) &= E(100X - 300) = 100E(X) - 300 \\ &= 100 \cdot \frac{7}{2} - 300 = \mathbf{50} \end{aligned}$$

章末 2.2 X は二項分布 $B(400, 0.8)$ に従う二項分布であるから

$$E(X) = 400 \times 0.8 = \mathbf{320}$$

$$V(X) = 400 \times 0.8 \times (1 - 0.8) = 64$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{64} = \mathbf{8}$$

章末 2.3 $Z = \frac{X - m}{\sigma}$ とおくと, Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$\begin{aligned} P(|X - m| > k\sigma) &= P(|Z| > k) = 1 - P(|Z| \leq k) \\ &= 1 - 2P(0 \leq Z \leq k) = 1 - 2p(k) \end{aligned}$$

$$(1) 1 - 2p(k) = 0.006 \text{ より } p(k) = 0.497$$

よって, 求める k の値は, [正規分布表](#) から **2.75**

$$(2) 1 - 2p(k) = 0.242 \text{ より } p(k) = 0.379$$

よって, 求める k の値は, [正規分布表](#) から **1.17**

章末 2.4 2500 個の製品の中に含まれる不良品の個数を X とすると, X は二項分布 $B(2500, 0.02)$ に従う. X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 2500 \times 0.02 = 50, \quad \sigma = \sqrt{2500 \times 0.02 \times 0.98} = \sqrt{49} = 7$$

$Z = \frac{X - 50}{7}$ とおくと, Z は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. $X = 36$ のとき, $Z = \frac{36 - 50}{7} = -2$ であるから

$$\begin{aligned} P(X \leq 36) &= P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - p(2) \\ &= 0.5 - 0.4772 = \mathbf{0.0228} \end{aligned}$$

章末 2.5 得点を X とし, $Z = \frac{X - 62}{\frac{8}{\sqrt{1000}}}$ とおくと, Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとみなせる. $P(Z \geq u) = \frac{100}{1000} = 0.1$ となる u の値を求める.

$$\begin{aligned} P(Z \geq u) &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq u) \\ &= 0.5 - p(u) \end{aligned}$$

$$0.5 - p(u) = 0.1 \text{ より } p(u) = 0.4 \quad \text{正規分布表から } u \doteq 1.28$$

$$\frac{X - 62}{8} \geq 1.28 \text{ より } X \geq 72.24 \quad \text{よって, } \mathbf{73 \text{ 点以上}}$$

章末 2.6 標本比率 R は $R = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}$

$n = 625$ であるから

$$\begin{aligned} 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} &= 1.96 \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{625}} \\ &= 1.96 \cdot \frac{2}{125} = 1.96 \times 0.016 \doteq 0.031 \end{aligned}$$

よって, 求める信頼区間は

$$[0.2 - 0.031, 0.2 + 0.031] \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{[0.169, 0.231]}$$

(16.9%以上 23.1%以下)

章末 2.7 A チームが B チームに勝つ確率を p とする．両チームの力に差があるなら， $p \neq 0.5$ である．ここで，「両チームの力に差がない」，すなわち $p = 0.5$ という仮説を立てる．

この仮説が正しいとすると，36 戦のうち A が勝つ回数 X は，二項分布 $B(36, 0.5)$ に従う． X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 36 \times 0.5 = 18, \quad \sigma = \sqrt{36 \times 0.5 \times 0.5} = 3$$

よって， $Z = \frac{X - 18}{3}$ は近似的標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．

- (i) 正規分布表より $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ であるから，有意水準 5% の棄却域は

$$Z \leq -1.96 \quad \text{または} \quad 1.96 \leq Z$$

$X = 25$ のとき $Z = \frac{25 - 18}{3} \doteq 2.3$ であり，この値は棄却域に入るから，仮説を棄却できる．

すなわち，この結果からは，両チームの力に差があると判断してよい．

- (ii) 正規分布表より $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$ であるから，有意水準 1% の棄却域は

$$Z \leq -2.58 \quad \text{または} \quad 2.58 \leq Z$$

$X = 25$ のとき $Z = \frac{25 - 18}{3} \doteq 2.3$ であり，この値は棄却域に入らないから，仮説を棄却できない．

すなわち，この結果からは，両チームの力に差があるとは判断できない．

章末 2.8 確率変数 x_k の確率分布は，右の表のようになる．よって，確率変数 X は二項分布 $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ に従う．したがって

X	0	1	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$X \text{ の期待値は } E(X) = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$X \text{ の分散は } V(X) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

$$X \text{ の標準偏差は } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

章末 2.9 X が正規分布 $N(285, 72^2)$ に従うとき、 $Z = \frac{X - 285}{72}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。 $P(Z \geq u) = \frac{400}{2600}$ となる u の値を求める。

$$P(Z \geq u) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq u) = 0.5 - p(u)$$

$$0.5 - p(u) = \frac{400}{2600} \text{ より } p(u) = 0.5 - \frac{400}{2600} \doteq 0.3462$$

正規分布表から、 u の値は 1.02

$$\frac{X - 285}{72} = 1.02 \text{ とすると } X = 358.44$$

よって、合格最低点はおおよそ **359** 点である。

章末 2.10 母比率を p とする。 $p = 0.05$, $n = 1900$ であるから

$$\frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.05 \times 0.95}{1900} = 0.005^2$$

よって、 R は正規分布 $N(0.05, 0.005^2)$ に従うとみなせる。

$Z = \frac{R - 0.05}{0.005}$ とおくと、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$R = 0.035 \text{ のとき } Z = \frac{0.035 - 0.05}{0.005} = -3$$

$$R = 0.065 \text{ のとき } Z = \frac{0.065 - 0.05}{0.005} = 3$$

であるから

$$\begin{aligned} P(0.035 \leq R \leq 0.065) &= P(-3 \leq Z \leq 3) = 2P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 2p(3) = 2 \times 0.49865 = 0.9973 \end{aligned}$$

よって、求める確率は **0.9973**

章末 2.11 標本の大きさを n とするとき、信頼度 95% の信頼区間の幅は

$$2 \times 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \quad (R \text{ は標本比率})$$

$R = 0.4$ を代入して

$$2 \times 1.96 \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{n}} \leq 0.04$$

となる自然数 n の値の範囲を求めればよい.

$$\left(\frac{2 \times 1.96}{0.04} \right)^2 \cdot 0.4 \times 0.6 \leq n \quad \text{ゆえに} \quad n \geq 2304.96$$

よって、**2305 人以上**を抽出すればよい.

章末 2.12 無作為に抽出した 100 個について、重さの標本平均を $\bar{X}$ とする. ここで、「母平均 m について $m = 300$ である」という仮説を立てる. 標本の大きさは十分大きいと考えると、仮説が正しいとするとき、 $\bar{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(300, \frac{7.4^2}{100}\right)$

に従う. $\frac{7.4^2}{100} = 0.74^2$ であるから、 $Z = \frac{\bar{X} - 300}{0.74}$ は、近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. [正規分布表](#)より $P(0 \leq Z \leq 1.64) = 0.45$ であるから、有意水準 5% の棄却域は

$$Z \leq -1.64$$

$$\bar{X} = 298.6 \text{ のとき} \quad Z = \frac{298.6 - 300}{0.74} = -1.89$$

この値は棄却域に入るから、仮説は棄却できる.

すなわち、表示より少ないと判断してよい.

大数の法則

99 ページの大数の法則 (LLN=Law of Large Numbers) を証明する準備として、次の不等式を考える.

マルコフの不等式 (Markov's inequality)

任意の確率変数 X と $a > 0$ に対して (期待値 $E(|X|)$ が存在するとき)

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

証明 X が離散型の確率変数の場合

$$\begin{aligned} E(|X|) &= \sum_{x \in \Omega} |x| P(X = x) \\ &\geq \sum_{|x| \geq a} |x| P(X = x) \\ &\geq \sum_{|x| \geq a} a P(X = x) = a P(|X| \geq a) \end{aligned}$$

X が連続型確率変数の場合

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{-a} |x| f(x) dx + \int_a^{\infty} |x| f(x) dx \\ &\geq a \int_{-\infty}^{-a} f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx \\ &= a P(X \leq -a) + a P(X \geq a) \\ &= a P(|X| \geq a) \end{aligned}$$

証終

コイン投げで、投げる回数を増やしていくと表の出る割合が $1/2$ に近づくという現象があるが、これは大数の法則の典型である. このとき、1 回毎の試行は独立である. k 回目に投げたコインが表なら $X_k = 1$, 裏なら $X_k = 0$ とするすると、大数の法則とは、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ は確率平均 $1/2$ に近づくということである.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{2}$$

このことを統計学では、 $\forall \varepsilon > 0$ に対しても (どんなに小さい正の数 ε に対しても), n を十分に大きくとることで, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ と $1/2$ の差を ε より小さくすることができる と表現する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \right) = 1$$

大数の (弱) 法則

$X_1, X_2, \dots$ を独立な確率変数で, 平均一定 $E(X_n) = m$, 分散 $V(X_n)$ が有界 (発散しない) であり, $V(X_n) \leq v < \infty$ とする. このとき, 次が成り立つ.

$\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m \right| < \varepsilon \right) = 1$$

証明 $\{X_n\}$ が独立であるから, $\tilde{X}_n = X_n - m$ とおくと

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_j \tilde{X}_k) &= E((X_j - m)(X_k - m)) \\ &= E(X_j X_k - mX_j - mX_k + m^2) \\ &= E(X_j)E(X_k) - mE(X_j) - mE(X_k) + m^2 \\ &= (E(X_j) - m)(E(X_k) - m) \\ &= E(X_j - m)E(X_k - m) = E(\tilde{X}_j)E(\tilde{X}_k) \end{aligned}$$

したがって, $\{\tilde{X}_n\}$ も独立である (63, 70, 71 ページを参照).

$E(\tilde{X}_n) = E(X_n) - m = 0$, $V(\tilde{X}_n) = V(X_n) \leq v$ であるから

$$\begin{aligned} E((\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_n)^2) &= \sum_{k=1}^n E(\tilde{X}_k^2) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} E(\tilde{X}_j)E(\tilde{X}_k) \\ &= \sum_{k=1}^n E(\tilde{X}_k^2) < \sum_{k=1}^n v = nv \end{aligned}$$

$\tilde{X}_n = X_n - m$ より

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - m) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k$$

マルコフの不等式を利用すると, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m \right| \geq \varepsilon \right) &= P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k \right| \geq \varepsilon \right) \\ &= P((\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n)^2 \geq \varepsilon^2 n^2) \\ &\leq \frac{E(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n)^2}{\varepsilon^2 n^2} \\ &= \frac{E(\tilde{X}_1^2) + E(\tilde{X}_2^2) + \cdots + E(\tilde{X}_n^2)}{\varepsilon^2 n^2} \\ &\leq \frac{nv}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{v}{\varepsilon^2 n} \end{aligned}$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m \right| \geq \varepsilon \right) = 0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m \right| < \varepsilon \right) = 1$

証終

中心極限定理

96 ページの中心極限定理 (CLT=Central Limit Theorem) を証明には, 一般に積率母関数 (MGF=moment generation function) が用いられる¹¹.

確率変数 X に対して, 積率母関数 $M_X(t)$ は

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n e^{tx_k} P(X = x_k) & (\text{離散型}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & (\text{連続型}) \end{cases}$$

で定義される. CLT の証明に必要な MGF の性質は次である.

性質 1 $e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \dots$ より

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!}E(X^2) + \dots$$

$$\text{したがって } M_X(0) = 1, M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$$

性質 2 a を定数とするとき

$$M_{aX}(t) = E(e^{t \cdot aX}) = E(e^{at \cdot X}) = M_X(at)$$

性質 3 X, Y が互いに独立であるとき

$$M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t)$$

性質 4 X, Y はそれぞれ積率母関数 $M_X(t), M_Y(t)$ をもつ確率変数とする. このとき, $M_X(t) = M_Y(t)$ ならば, X, Y は同じ確率分布を持つ (同じ確率分布を持つならば, $M_X(t) = M_Y(t)$ は明らか).

なお, 性質 1 はマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) から導かれる¹².

補題 関数 $g(x), h(x)$ が $x = 0$ の近傍で連続であり, $g(0) = h(0) = g'(0) = h'(0) = 0$, $h''(0) \neq 0$ のとき, マクローリン展開により

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \dots}{\frac{h''(0)}{2!}x^2 + \frac{h'''(0)}{3!}x^3 + \dots} = \frac{g''(0)}{h''(0)} \quad \boxed{\text{終}}$$

¹¹ デルタ関数を用いて直接証明することもできる.

¹² <http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf>

中心極限定理 (CLT)

(母集団の分布がどのような分布であっても) 母平均 m と母分散 σ^2 の大きさ n の標本平均 $\bar{X}$ について, $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は, n が大きいとき, 近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に近づく.

$$(\text{証明}) \quad \bar{X} - m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - m) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k \text{ より}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k$$

Z の積率母関数は

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E \left[\exp \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k \right) \right] \\ &= \prod_{k=1}^n E \left[\exp \frac{t \tilde{X}_k}{\sigma \sqrt{n}} \right] = \prod_{k=1}^n M_{\tilde{X}_k} \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき

$$M_{\tilde{X}_1} \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) = M_{\tilde{X}_2} \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) = \cdots = M_{\tilde{X}_n} \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right)$$

であるから, これを $M_{\tilde{X}} \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right)$ とおくと

$$M_Z(t) = \left\{ M_{\tilde{X}} \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) \right\}^n$$

上式の両辺の自然対数を取り, $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log M_Z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log M_{\tilde{X}} \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right)$$

$u = \frac{1}{\sqrt{n}}$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log M_Z(t) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log M_{\tilde{X}} \left(\frac{t}{\sigma} u \right)}{u^2}$$

確率変数 $\tilde{X}$ について, $E(\tilde{X}) = E(X) - m = 0$, $E(\tilde{X}^2) = V(X) = \sigma^2$ より

$$M_{\tilde{X}}(0) = 1, \quad M'_{\tilde{X}}(0) = E(\tilde{X}) = 0, \quad M''_{\tilde{X}}(0) = E(\tilde{X}^2) = \sigma^2$$

$g(u) = \log M_{\tilde{X}}\left(\frac{t}{\sigma}u\right)$, $h(u) = u^2$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(u) &= \frac{t}{\sigma} \cdot \frac{M'_{\tilde{X}}\left(\frac{t}{\sigma}u\right)}{M_{\tilde{X}}\left(\frac{t}{\sigma}u\right)}, & g''(u) &= \frac{t^2}{\sigma^2} \cdot \frac{M''_{\tilde{X}}\left(\frac{t}{\sigma}u\right)}{M_{\tilde{X}}\left(\frac{t}{\sigma}u\right)} - \frac{t^2}{\sigma^2} \cdot \left(\frac{M'_{\tilde{X}}\left(\frac{t}{\sigma}u\right)}{M_{\tilde{X}}\left(\frac{t}{\sigma}u\right)} \right)^2 \\ h'(u) &= 2u, & h''(u) &= 2 \end{aligned}$$

上の諸式から

$$g(0) = h(0) = 0, \quad g'(0) = h'(0) = 0, \quad g''(0) = t^2, \quad h''(0) = 2$$

補題の結論から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log M_Z(t) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log M_{\tilde{X}}\left(\frac{t}{\sigma}u\right)}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(u)}{h(u)} = \frac{g''(0)}{h''(0)} = \frac{t^2}{2}$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \quad (2.9)$$

標準正規分布 $N(0, 1)$ の積率母関数 $M_X(t)$ は, (2.8) に $\sigma = 1$ を代入した式を利用して求めると

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

2つの積率母関数 (2.9) と (2.10) が一致するので, 積率母関数の性質 4 により, 本命題は成立する. 証終

したがって, 期待値 m , 分散 σ^2 をもつ独立変数 $X_1, X_2, \dots$ の標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ に対して, $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とすると, 次が成立する.

$$P(Z \leq \alpha) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (n \rightarrow \infty)$$