

令和 5 年度

高等学校 数学 C

電子教科書



2024 年 11 月 29 日

熊本県立第二高等学校数学科

スライド

第1章 平面上のベクトル [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

1.1 ベクトルとその演算

- 1.1.1 ベクトル 教科書 pp.8-9
- 1.1.2 ベクトルの演算 教科書 pp.10-16
- 1.1.3 ベクトルの成分 教科書 pp.17-20
- 1.1.4 ベクトルの内積 教科書 pp.21-29
- 1.1.5 問題 教科書 p.30

1.2 ベクトルと平面図形

- 1.2.1 ベクトル 教科書 pp.31-35
- 1.2.2 ベクトルの図形への応用 教科書 pp.36-38
- 1.2.3 図形のベクトルによる表示 教科書 pp.39-45
- 1.2.4 問題 教科書 p.46

1.3 章末問題 教科書 pp.47-48

第2章 空間のベクトル [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

2.1 空間のベクトル

- 2.1.1 空間の点 教科書 pp.50-51
- 2.1.2 空間のベクトル 教科書 pp.52-54
- 2.1.3 ベクトルの成分 教科書 pp.55-57
- 2.1.4 ベクトルの内積 教科書 pp.58-60
- 2.1.5 ベクトルの図形への応用 教科書 pp.61-66
- 2.1.6 座標空間における図形 教科書 p.67-71
- 2.1.7 問題 教科書 p.72

2.2 章末問題 教科書 p.73-74

第3章 複素数平面 [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

3.1 複素数平面

- 3.1.1 複素数平面 教科書 pp.76-79
- 3.1.2 複素数の極形式 教科書 pp.84-89
- 3.1.3 ド・モアブルの定理 教科書 pp.90-93
- 3.1.4 複素数と図形 教科書 p.94-102
- 3.1.5 問題 教科書 p.103

3.2 章末問題 教科書 p.104

第4章 式と曲線 [\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

4.1 2次曲線

- 4.1.1 放物線 [教科書 pp.106-107](#)
- 4.1.2 楕円 [教科書 pp.108-113](#)
- 4.1.3 双曲線 [教科書 pp.114-119](#)
- 4.1.4 2次曲線の平行移動 [教科書 pp.120-122](#)
- 4.1.5 2次曲線と直線 [教科書 pp.123-125](#)
- 4.1.6 2次曲線の性質 [教科書 pp.126-127](#)
- 4.1.7 問題 [教科書 p.128](#)

4.2 媒介変数表示と極座標

- 4.2.1 曲線の媒介変数表示 [教科書 pp.131-137](#)
- 4.2.2 極座標と極方程式 [教科書 pp.138-145](#)
- 4.2.3 コンピュータの利用 [教科書 pp.146-147](#)
- 4.2.4 問題 [教科書 p.148](#)

4.3 章末問題 [教科書 p.149-150](#)

目次

スライド	i
第1章 平面上のベクトル	1
1.1 ベクトルとその演算	1
1.1.1 ベクトル	1
1.1.2 ベクトルの演算	3
1.1.3 ベクトルの成分	10
1.1.4 ベクトルの内積	15
1.1.5 問題	27
1.2 ベクトルと平面図形	29
1.2.1 位置ベクトル	29
1.2.2 ベクトルの図形への応用	34
1.2.3 図形のベクトルによる表示	39
1.2.4 問題	46
1.3 章末問題	48
1.3.1 章末問題 A	48
1.3.2 章末問題 B	50
第2章 空間のベクトル	53
2.1.1 空間の点	53
2.1.2 空間のベクトル	55
2.1.3 ベクトルの成分	59
2.1.4 ベクトルの内積	62
2.1.5 ベクトルの図形への応用	65
2.1.6 座標空間における図形	72
2.1.7 問題	77
2.2 章末問題	78
2.2.1 章末問題 A	78
2.2.2 章末問題 B	80
第3章 複素数平面	83
3.1.1 複素数平面	83
3.1.2 複素数の極形式	91
3.1.3 ド・モアブルの定理	97
3.1.4 複素数と図形	101

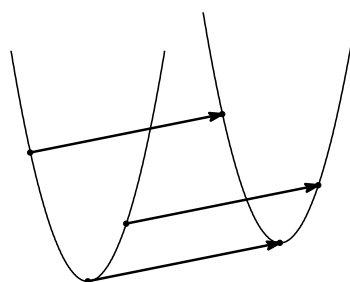
3.1.5	問題	110
3.2	章末問題	111
3.2.1	章末問題 A	111
3.2.2	章末問題 B	112
第 4 章	式と曲線	113
4.1	2 次曲線	113
4.1.1	放物線	113
4.1.2	楕円	116
4.1.3	双曲線	125
4.1.4	2 次曲線の平行移動	132
4.1.5	2 次曲線と直線	135
4.1.6	2 次曲線の性質	139
4.1.7	問題	141
4.2	媒介変数表示と極座標	143
4.2.1	曲線の媒介変数表示	143
4.2.2	極座標と極方程式	152
4.2.3	コンピュータの利用	162
4.2.4	問題	165
4.3	章末問題	166
4.3.1	章末問題 A	166
4.3.2	章末問題 B	170
解答		173
	外積	205
	2 次曲線の離心率と極方程式	268

第 1 章 平面上のベクトル

1.1 ベクトルとその演算

1.1.1 ベクトル

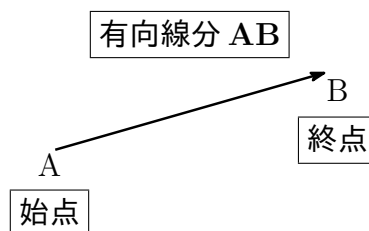
平面上で図形の平行移動は，右の図のように向きをつけた線分で表すことができる．線分につけた矢印の向きで移動する向きを表し，線分の長さで移動する距離を表すのである．
ここでは，向きのある線分に着目してみよう．



A 》 有向線分とベクトル

向きをつけた線分を有向線分という．
有向線分 AB では， A をその始点， B をその終点といい，その向きは A から B へ向かっているとする．[\[有向線分とベクトル\]](#)

また，線分 AB の長さを，有向線分 AB の大きさまたは長さという．



平面上で図形を平行移動する場合，その平行移動を示す有向線分は，いくつも図示できるが，それらは位置が違っただけであり，向きは同じで大きさも等しい．

有向線分の位置の違いを無視して，その向きと大きさだけに着目したものをベクトルという¹．ベクトルは，向きと大きさをもつ量である．

たとえば，力や速度などは，向きと大きさをもつ量であり，ベクトルで表すと考えやすくなる．

[\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

¹ 本章では平面上の有向線分で表されるベクトルを考える．このようなベクトルを平面上のベクトルということがある．なお，空間の有向線分で表されるベクトルについては，第 2 章で扱う．

B》ベクトルの表記

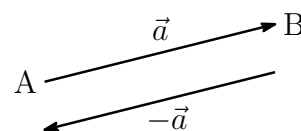
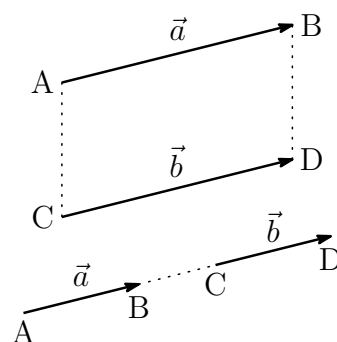
有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{AB}$ で表す。また、ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ などで表すこともある。ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ の大きさは、それぞれ $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ で表す。

向きが同じで大きさも等しい2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は等しいといい、 $\vec{a} = \vec{b}$ と書く。

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ のとき、有向線分 AB を平行移動して有向線分 CD に重ね合わせることができる。

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトルを、 $\vec{a}$ の逆ベクトルといい、 $-\vec{a}$ で表す。

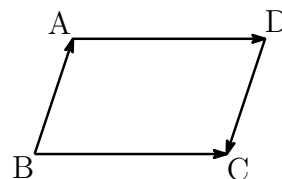
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ のとき、 $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ である。
すなわち $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



例 1.1 右の図の平行四辺形 $ABCD$ について、次のことがいえる。

S

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA} &= -\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$



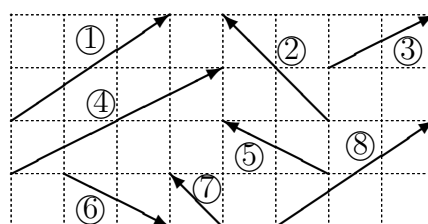
練習 1.1 右の図に示されたベクトルについて、次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ。 **解**

(1) 大きさが等しいベクトル

(2) 向きが同じベクトル

(3) 等しいベクトル

(4) 互いに逆ベクトル

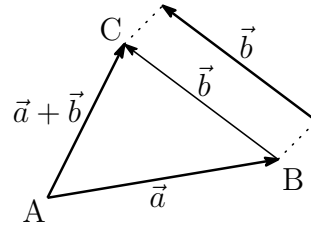


1.1.2 ベクトルの演算

ベクトルは、向きと大きさをもつ量である．ここでは、ベクトルについて、加法と減法を定義しよう．さらに、実数倍についても考えてみよう．

A》ベクトルの加法

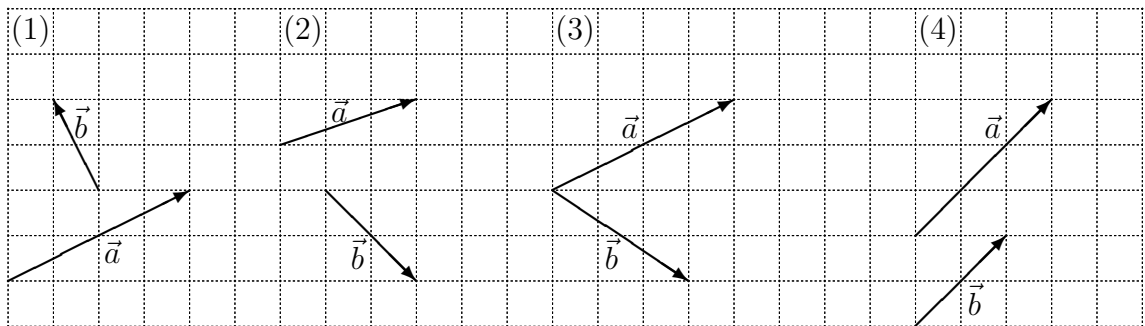
ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ とベクトル $\vec{b}$ に対して、 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ となるように点 C をとる．このようにして定まるベクトル $\overrightarrow{AC}$ を、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和といい、 $\vec{a} + \vec{b}$ と書く．**[ベクトルの加法]**
すなわち、次のことが成り立つ．



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

練習 1.2 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、 $\vec{a} + \vec{b}$ をそれぞれ図示せよ． **[解]**

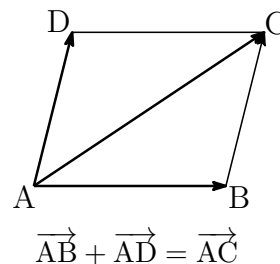


平行四辺形を使って、ベクトルの和を図示することもできる．

右の図の平行四辺形 ABCD において、 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ であるから、図からわかるように、次のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

平行四辺形を使った
ベクトルの和



ベクトルの加法について、次の性質が成り立つ。

ベクトルの加法の性質

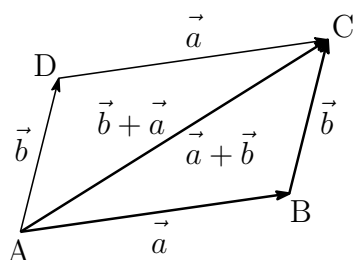
$$1 \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{交換法則}$$

$$2 \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{結合法則}$$

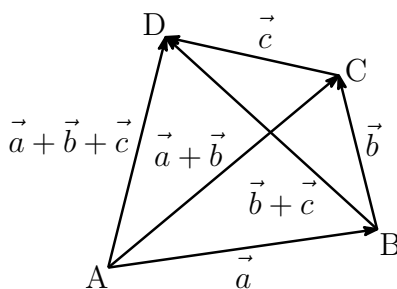
性質 1, 2 が成り立つことは、次の図を用いて確かめられる。

[ベクトルの加法の性質]

[1]



[2]



結合法則が成り立つので、 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の和を単に $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ と書く。

$$\begin{aligned} \text{例 1.2} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

[S]

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

終

練習 1.3 次の等式が成り立つことを示せ。 [解]

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}$$

B》零ベクトル

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ のとき、 $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ であるから

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{AA}$ は始点と終点が一致した有向線分が表すベクトルと考え、その大きさは 0 であるとする。大きさが 0 のベクトルを零ベクトルまたはゼロベクトルといい、 $\vec{0}$ で表す。零ベクトルの向きは考えない。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{BB} &= \vec{0} \end{aligned}$$

零ベクトルに関して、次の性質が成り立つ.

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

練習 1.4 次の等式が成り立つことを示せ. 解

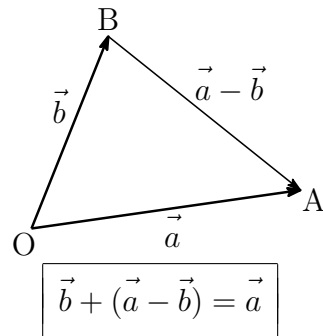
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

C》ベクトルの減法

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して, $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ を満たすベクトル $\vec{c}$ を, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の差といい, $\vec{a} - \vec{b}$ と書く. [ベクトルの減法]

一般に, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ であるから, 次のことが成り立つ.

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

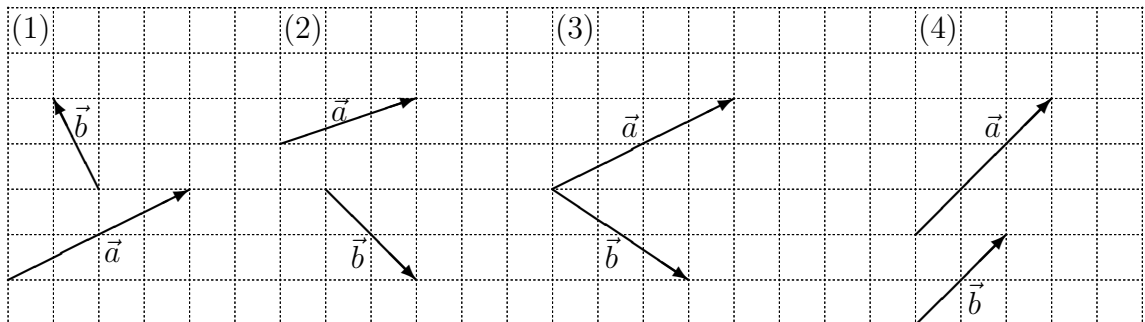


同様に, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ から, 次のことが成り立つ.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = \square \overrightarrow{B} - \square \overrightarrow{A}$$

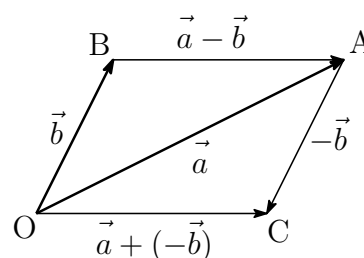
練習 1.5 練習 1.2 のベクトルについて, $\vec{a} - \vec{b}$ をそれぞれ図示せよ. 解



ベクトルの減法について、次の性質が成り立つ。1 が成り立つことは、右の図を用いて確かめられる。

$$1 \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$2 \quad \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$



D》ベクトルの実数倍

実数 k とベクトル $\vec{a}$ に対して、 $\vec{a}$ の k 倍のベクトル $k\vec{a}$ を次のように定める。

$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき

[1] $k > 0$ ならば、 $\vec{a}$ と向きが同じで、
大きさが k 倍のベクトル。

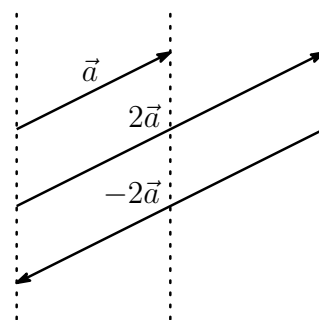
$$\text{とくに} \quad 1\vec{a} = \vec{a}$$

[2] $k < 0$ ならば、 $\vec{a}$ と向きが反対で、
大きさが $|k|$ 倍のベクトル。

$$\text{とくに} \quad (-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

[3] $k = 0$ ならば、 $\vec{0}$ とする。

$\vec{a} = \vec{0}$ のとき どんな k に対しても $k\vec{0} = \vec{0}$ とする。

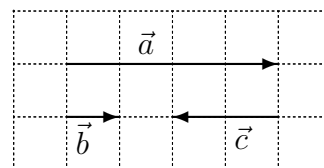


注意 $(-2)\vec{a} = -(2\vec{a})$ が成り立つので、これらを単に $-2\vec{a}$ と書く。

例 1.3 右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について, S

$$\vec{a} = 4\vec{b}, \quad \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a}$$

である。

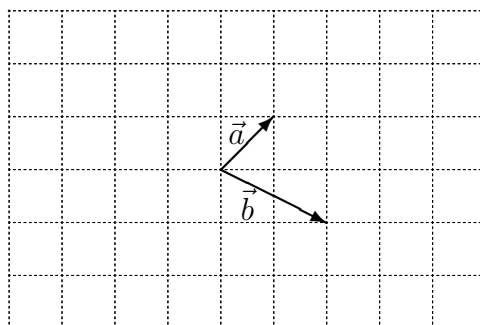


練習 1.6 例 1.3 のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について、次の () に適する実数を求めよ。 解

$$(1) \vec{b} = (\quad)\vec{a} \quad (2) \vec{a} = (\quad)\vec{c} \quad (3) \vec{b} = (\quad)\vec{c}$$

練習 1.7 右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、
次のベクトルを図示せよ。 解

- (1) $2\vec{a}$ (2) $-2\vec{b}$
(3) $2\vec{a} + \vec{b}$ (4) $\vec{a} - 2\vec{b}$



E》ベクトルの計算

ベクトルの実数倍について、次の性質が成り立つ。

ベクトルの実数倍の法則

k, l は実数とする。

- 1 $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
- 2 $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
- 3 $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

これらの等式が成り立つことは、次の図で確かめることができる。

[1] $3(2\vec{a}) = 6\vec{a} = (3 \cdot 2)\vec{a}$

[2] $(3 + 2)\vec{a} = 5\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{a}$

[3] $2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

これまで調べた性質により、ベクトルの加法、減法、実数倍の計算では、 $\vec{a}$, $\vec{b}$ などの式を文字式と同じように扱うことができる。

例 1.4 (1) $3\vec{a} + 4\vec{a} - 2\vec{a} = (3 + 4 - 2)\vec{a} = 5\vec{a}$

S

(2) $2(\vec{a} + 5\vec{b}) + 3(2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + 10\vec{b} + 6\vec{a} - 3\vec{b}$
 $= (2 + 6)\vec{a} + (10 - 3)\vec{b}$
 $= 8\vec{a} + 7\vec{b}$

練習 1.8 次の計算をせよ。 解

(1) $\vec{a} + 3\vec{a} - 2\vec{a}$

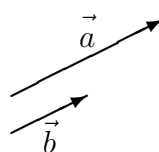
(2) $2(\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{b})$

F》ベクトルの平行

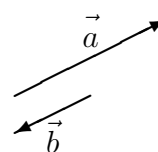
$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は、向きが同じか反対のとき、平行であるといい、 $\vec{a} // \vec{b}$ と書く。

ベクトルの実数倍の定義により、次のことが成り立つ。

同じ向きに平行



反対向きに平行



ベクトルの平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$$\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ がある}$$

注意 $\vec{b} = k\vec{a}$ において、 $k > 0$ のとき $\vec{a}$, $\vec{b}$ は同じ向きに平行、 $k < 0$ のとき $\vec{a}$, $\vec{b}$ は反対向きに平行である。

例 1.5 $|\vec{a}| = 2$ とする。 $\vec{a}$ と平行で大きさが1のベクトルは

S

$$\frac{1}{2}\vec{a} \text{ と } -\frac{1}{2}\vec{a}$$

注意 $\frac{1}{2}\vec{a}$ を $\frac{\vec{a}}{2}$ と書くこともある。

大きさが1のベクトルを単位ベクトルという。
 一般に、次のことがいえる。

$$\vec{a} \neq \vec{0} \text{ のとき, } \vec{a} \text{ と平行な単位ベクトルは } \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ と } -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

練習 1.9 次の問いに答えよ。 解

(1) 単位ベクトル $\vec{e}$ と平行で大きさが4のベクトルを $\vec{e}$ を用いて表せ。

(2) $|\vec{a}| = 3$ のとき、 $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

G》ベクトルの分解

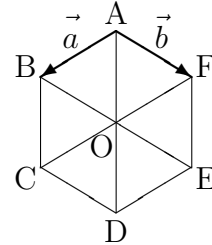
2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき, 他のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表してみよう.

例題 1.1 正六角形 ABCDEF において, S

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AF} = \vec{b}$$

とすると, 次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ.

$$(1) \overrightarrow{AE} \quad (2) \overrightarrow{DF}$$



解答 (1) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + 2\vec{b}$

$$\overrightarrow{\triangle} = \overrightarrow{\blacksquare} + \overrightarrow{\blacksquare\triangle}$$

(2) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = -\vec{b} + (-2\vec{a}) = -2\vec{a} - \vec{b}$

練習 1.10 例題 1.1 において, 次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ. 解

$$(1) \overrightarrow{AC} \quad (2) \overrightarrow{EF} \quad (3) \overrightarrow{DB}$$

一般に, 0でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行でない² とき, どんなベクトル $\vec{p}$ も, $\vec{a}$, $\vec{b}$ と適当な実数 s , t を用いて

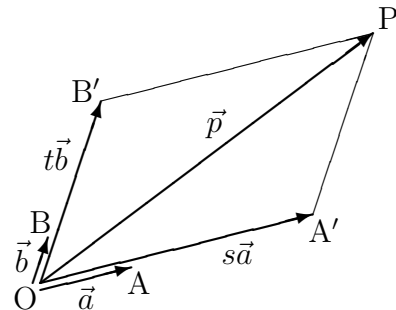
$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

の形に表すことができる. しかも, この表し方はただ1通りである.

このことは, 次のように確かめられる.

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ とする.
点 P をお降り, 直線 OB, OA に平行な直線を引き, 直線 OA, OB との交点を, それぞれ A', B' とする.

ここで, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ であり,
 $\overrightarrow{OA'} = s\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = t\overrightarrow{OB}$ となる実数 s , t はただ1通りに定まる.



[ベクトルの分解]

² 平面上におけるこのような2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は1次独立であるという.

1.1.3 ベクトルの成分

座標平面上でベクトルを考えると、ベクトルの表示に座標を利用する方法がある。ここでは、ベクトルのこの方法について学ぼう。

A》ベクトルの成分表示

Oを原点とする座標平面上で、 x 軸、 y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを、基本ベクトルといい、それぞれ $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ で表す。

座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ である点Aの座標が

$$(a_1, a_2)$$

のとき、 $\vec{a}$ は次のように表される。

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

この $\vec{a}$ を、次のようにも書く。

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

①における a_1 、 a_2 を、それぞれ $\vec{a}$ の x 成分、 y 成分といい、まとめて $\vec{a}$ の成分という。また、①を $\vec{a}$ の成分表示という。

基本ベクトル $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ と零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は、次のようになる。

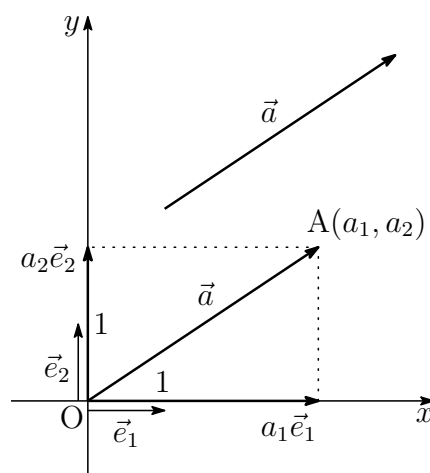
$$\vec{e}_1 = (1, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1), \quad \vec{0} = (0, 0)$$

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ について、次が成り立つ。

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

また、上の図で $|\vec{a}| = OA$ であるから、次のことがいえる。

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \text{ のとき } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

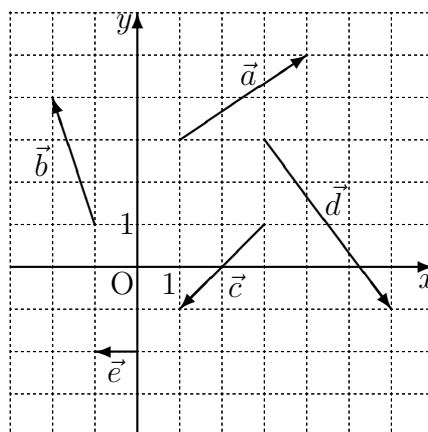


例 1.6 右の図のベクトル $\vec{a}$ の成分表示は S

$$\vec{a} = (3, 2)$$

大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



練習 1.11 右の図のベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ を, それぞれ成分表示せよ. また, 各ベクトルの大きさを求めよ. 解

B 》 和, 差, 実数倍の成分表示

ベクトルの成分表示を用いて, 和, 差, 実数倍を計算してみよう.

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ は, 基本ベクトル $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ を用いると

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$$

と表されるから

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2$$

である.

また, k を実数とすると

$$k\vec{a} = (ka_1)\vec{e}_1 + (ka_2)\vec{e}_2$$

である.

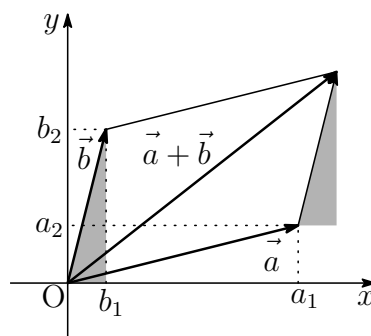
これらを成分表示すると, 次のことが成り立つ.

和, 差, 実数倍の成分表示

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2) \quad \text{ただし, } k \text{ は実数}$$



例 1.7 $\vec{a} = (1, 5)$, $\vec{b} = (3, -4)$ のとき

S

$$\begin{aligned} 2\vec{a} + 3\vec{b} &= 2(1, 5) + 3(3, -4) = (2, 10) + (9, -12) \\ &= (2 + 9, 10 - 12) = (11, -2) \end{aligned}$$

練習 1.12 $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (-4, 2)$ のとき, 次のベクトルを成分表示せよ. **解**

(1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $4\vec{a}$ (3) $4\vec{a} - 3\vec{b}$ (4) $-2(\vec{a} - \vec{b})$

例題 1.2 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, -1)$ とする. $\vec{c} = (5, 4)$ を, 適当な実数 s, t を用いて $s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表せ. **S**

解答 $s\vec{a} + t\vec{b} = s(1, 2) + t(1, -1) = (s + t, 2s - t)$ であるから,

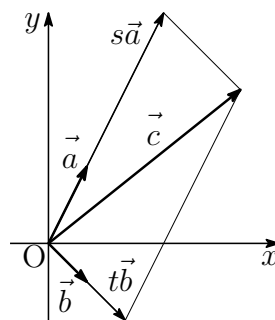
$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ とすると}$$

$$(5, 4) = (s + t, 2s - t)$$

$$\text{よって} \quad s + t = 5, \quad 2s - t = 4$$

$$\text{これを解くと} \quad s = 3, \quad t = 2$$

$$\text{したがって} \quad \vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$



練習 1.13 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ とする. $\vec{c} = (8, -3)$ を, 適当な実数 s, t を用いて $s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表せ. **解**

例題 1.3 2つのベクトル $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (-2, x)$ が平行になるように, x の値を定めよ. [S]

解答 $\vec{a} // \vec{b}$ が平行であるには, $\vec{b} = k\vec{a}$ を満たす実数 k があればよい.

$$(-2, x) = (k, 3k) \text{ から } -2 = k, x = 3k$$

$$\text{よって } x = 3 \times (-2) = -6$$

練習 1.14 次の2つのベクトルが平行になるように, x の値を定めよ. [解]

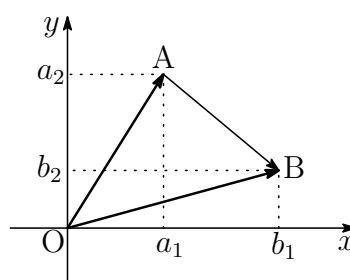
$$(1) \vec{a} = (-2, 1), \vec{b} = (x, -3)$$

$$(2) \vec{a} = (2, x), \vec{b} = (3, 6)$$

C》座標平面上の点とベクトル

座標平面上に2点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ をとると, $\vec{OA} = (a_1, a_2)$, $\vec{OB} = (b_1, b_2)$ である. よって, $\vec{AB}$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) \\ &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \end{aligned}$$



2点 A, B とベクトル $\vec{AB}$

2点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ について

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2), \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

例 1.8 2点 $A(2, 3)$, $B(5, 1)$ について [S]

$$\vec{AB} = (5 - 2, 1 - 3) = (3, -2), \quad |\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

練習 1.15 次の2点 A, B について, $\overrightarrow{AB}$ を成分表示し, $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ. 解

- (1) $A(5, 2), B(1, 6)$ (2) $A(-3, 4), B(2, 0)$

例題 1.4 4点 $A(-2, 2), B(1, 1), C(2, 3), D(x, y)$ を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形になるように, x, y の値を定めよ. S

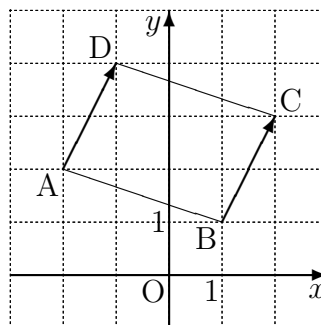
解答 四角形 ABCD が平行四辺形になるのは,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ のときであるから}$$

$$(x - (-2), y - 2) = (2 - 1, 3 - 1)$$

$$\text{よって} \quad x + 2 = 1, \quad y - 2 = 2$$

$$\text{したがって} \quad x = -1, \quad y = 4$$

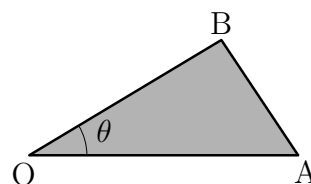


練習 1.16 4点 $A(-2, 1), B(x, y), C(2, 4), D(-1, 3)$ を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形になるように, x, y の値を定めよ. 解

1.1.4 ベクトルの内積

右の図の $\triangle OAB$ において、余弦定理により、次の等式が成り立つ。

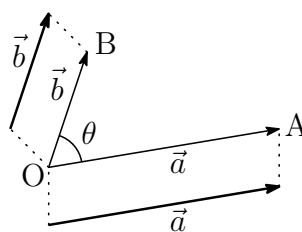
$$BA^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \times OA \times OB \cos \theta$$



この $OA \times OB \cos \theta$ をベクトル $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ で表し、ベクトルの新しい演算を考えよう。

A》ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、1 点 O を定め、 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ となる点 A , B をとる。このようにして定まる $\angle AOB$ の大きさ θ を、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角という。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である。



$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、 $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積といい、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で表す。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta \quad \text{ただし、}\theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}$$

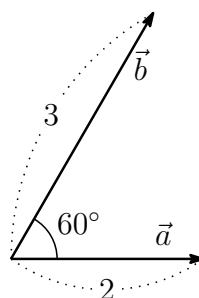
$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と定める。

注意 2 つのベクトルの内積はベクトルではなく実数である。

例 1.9 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ で、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ が $\theta = 60^\circ$ のとき

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta \\ &= 2 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ &= 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

S



練習 1.17 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。 解

(1) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\theta = 45^\circ$

(2) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 6$, $\theta = 150^\circ$

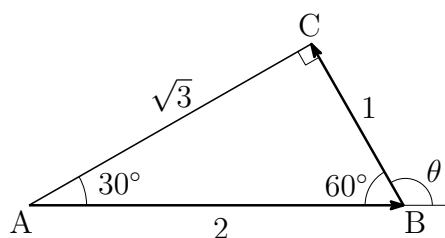
例 1.10 右の図の直角三角形 ABC において,
 $\vec{AB}$ と $\vec{BC}$ のなす角 θ は

[S]

$$\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

であるから

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = |\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos 120^\circ = 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$



練習 1.18 例 1.10 の直角三角形 ABC において, 次の内積を求めよ. [解]

(1) $\vec{BA} \cdot \vec{AC}$

(2) $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とする.

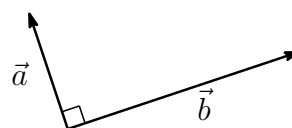
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

であるから, θ と $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値について, 次のようにまとめられる.

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°
$\cos \theta$	1	+	0	-	-1
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$ \vec{a} \vec{b} $	+	0	-	$- \vec{a} \vec{b} $

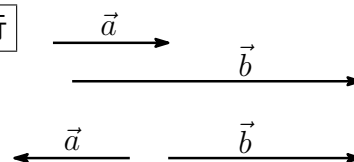
$\theta = 90^\circ$ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるといひ, $\vec{a} \perp \vec{b}$ と書く.

[垂直]



$\theta = 0^\circ$ のとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は同じ向きに平行,
 $\theta = 180^\circ$ のとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は反対向きに平行である.

[平行]



以上から, 次のことが成り立つ.

ベクトルの垂直・平行と内積

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ のとき

1 $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2 $\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ または $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$

B 》成分による内積の表示

右の図のように, $\triangle OAB$ において

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \angle AOB = \theta$$

とすると, 余弦定理により

$$BA^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \times OA \times OB \cos \theta$$

が成り立つ. この式は, $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ のときも成り立つ. これをベクトルで表すと

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

となる.

ここで, $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ とすると

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

これを整理すると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ベクトルの内積は, その成分を用いて次のように表される.

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

注意 上のことは, $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも成り立つ.

例 1.11 $\vec{a} = (1, 4), \vec{b} = (-2, 3)$ のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-2) + 4 \times 3 = 10$$

S

練習 1.19 次のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ. 解

$$(1) \vec{a} = (2, 5), \vec{b} = (3, -2) \quad (2) \vec{a} = (1, \sqrt{3}), \vec{b} = (\sqrt{3}, -1)$$

C》ベクトルのなす角

内積の定義から、次のことが成り立つ.

ベクトルのなす角の余弦

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のなす角を θ とする.
ただし, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である. このとき

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

例 1.12 次の 2 つのベクトル $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ のなす角を求める.

S

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-1) + 2 \times 3 = 5$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから} \quad \theta = 45^\circ$$

練習 1.20 次の 2 つのベクトルのなす角を求めよ. **解**

$$(1) \vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (-3, 1)$$

$$(2) \vec{a} = (1, \sqrt{3}), \vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$$

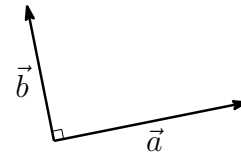
$$(3) \vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (2, 6)$$

$$(4) \vec{a} = (-4, 2), \vec{b} = (2, -1)$$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

である. このことを, 成分を用いて表すと,
次のようになる.



ベクトルの垂直条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ について

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

例 1.13 $\vec{a} = (2, 1)$ と $\vec{b} = (x, 4)$ が垂直になるような x の値を求める. S

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ より} \quad 2x + 1 \times 4 = 0 \quad \leftarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2x + 1 \times 4$$

$$\text{よって} \quad x = -2$$

練習 1.21 次の 2 つのベクトルが垂直になるように, x の値を求めよ. 解

(1) $\vec{a} = (3, 6)$, $\vec{b} = (x, 4)$

(2) $\vec{a} = (x, -1)$, $\vec{b} = (x, x + 2)$

例題 1.5 $\vec{a} = (\sqrt{3}, -1)$ に垂直で大きさが4のベクトル $\vec{b}$ を求めよ.

S

解答 $\vec{b} = (x, y)$ とする.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{3}x - y = 0$$

$$\text{よって} \quad y = \sqrt{3}x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|\vec{b}|^2 = 4^2 \text{ であるから } x^2 + y^2 = 4^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると } x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 16$$

$$\text{整理すると} \quad 4x^2 = 16 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm 2$$

$\textcircled{1}$ に代入して

$$x = 2 \text{ のとき } y = 2\sqrt{3}, \quad x = -2 \text{ のとき } y = -2\sqrt{3}$$

$$(\text{答}) \quad \vec{b} = (2, 2\sqrt{3}), (-2, -2\sqrt{3})$$

補足 上のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{b} = (\pm 2, \pm 2\sqrt{3})$ (複号同順) と書くことがある.

練習 1.22 次の問いに答えよ. **解**

(1) $\vec{a} = (2, 1)$ に垂直で大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{b}$ を求めよ.

(2) $\vec{a} = (4, 3)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ.

練習 1.23 次の問いに答えよ. **解**

(1) $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ と $\vec{b} = (a_2, -a_1)$ は垂直であることを示せ.

(2) (1) を用いて, $\vec{a} = (1, 2)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ.

D 》内積の性質

ベクトルの内積について、次の性質が成り立つ.

内積の性質

- | | | | |
|---|---|--------------|---|
| 1 | $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$ | 2 | $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ |
| 3 | $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ | 4 | $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ |
| 5 | $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ | ただし, k は実数 | |

補足 1 より, $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ が成り立つ.

証明 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$ とする.

$$1 \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 = |\vec{a}|^2 \quad \text{証終}$$

$$2 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{証終}$$

$$3 \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 \\ &= a_1 c_1 + b_1 c_1 + a_2 c_2 + b_2 c_2 \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2) + (b_1 c_1 + b_2 c_2) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned} \quad \text{証終}$$

$$4 \quad \vec{b} + \vec{c} = (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\ &= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned} \quad \text{証終}$$

$$5 \quad k\vec{a} = (ka_1, ka_2), \quad k\vec{b} = (kb_1, kb_2) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} (k\vec{a}) \cdot \vec{b} &= ka_1 \cdot b_1 + ka_2 \cdot b_2 \\ &= k(a_1 b_1 + a_2 b_2) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}), \\ \vec{a} \cdot (k\vec{b}) &= a_1 \cdot kb_1 + a_2 \cdot kb_2 \\ &= k(a_1 b_1 + a_2 b_2) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{証終}$$

補足 性質 5 が成り立つので, $(2\vec{a}) \cdot \vec{b}$, $2(\vec{a} \cdot \vec{b})$ など単に $2\vec{a} \cdot \vec{b}$ と書く.

性質 4, 5 を利用すると, $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$ が成り立つことを証明できる.

$$4' \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \{\vec{b} + (-\vec{c})\} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot (-\vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (1.1)$$

例 1.14 等式 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ を証明する.

S

証明

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = \text{右辺}\end{aligned}$$

よって $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

証終

練習 1.24 次の等式が成り立つことを示せ. 解

(1) $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

応用例題 1.1 $\vec{a}$, $\vec{b}$ が次の条件を満たすとき, $|2\vec{a} - \vec{b}|$ の値を求めよ. S

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

考え方 》 $|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ から, まず $|2\vec{a} - \vec{b}|^2$ の値を求める.

解答

$$\begin{aligned} |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 4\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4 \times 1^2 - 4 \times 2 + 4^2 = 12 \end{aligned}$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

練習 1.25 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ のとき, 次の値を求めよ. 解

(1) $|\vec{a} + \vec{b}|$

(2) $|\vec{a} - 2\vec{b}|$

応用例題 1.2 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ で, $\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} - 5\vec{b}$ が垂直であるとする.

S

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ. (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ.

考え方 》 (1) $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - 5\vec{b})$ より $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$ である.

- (2) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値から $\cos \theta$ の値が求められる.

解答 (1) $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - 5\vec{b})$ であるから $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$

$$\text{よって} \quad 2|\vec{a}|^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 5|\vec{b}|^2 = 0$$

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ を代入すると

$$2 \times 2^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 5 \times 1^2 = 0 \quad \leftarrow 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

$$\text{したがって} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから} \quad \theta = 60^\circ$$

練習 1.26 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$ で, $3\vec{a} - 2\vec{b}$ と $\vec{a} + 4\vec{b}$ が垂直であるとする. このとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ. **解**

研究

三角形の面積

$\triangle OAB$ において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする. このとき, $\triangle OAB$ の面積 S を, ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表してみよう.

$\angle AOB = \theta$, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とすると

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

よって
$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta}$$

したがって
$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2)$ であるとするとき,

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2, \quad |\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

であるから

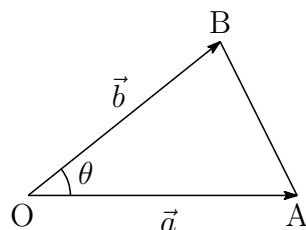
$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ &= a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned}$$

よって, 三角形の面積 S は, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の成分を用いて, 次のように表される.

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

演習 1.1 次の 3 点を頂点とする三角形の面積を求めよ. 解

$$O(0, 0), \quad A(4, 1), \quad B(2, -1)$$



Think

ベクトルの内積

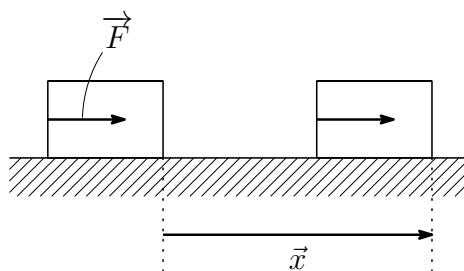
ベクトルの内積について学んだAさんが先生と話しています。

A: 内積の式 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ は急に出てきたような気がします。

先生: 物理では、内積で表せる量がある。たとえば、物体に力を加えてその物体を移動させたとき、その力は「仕事」をしたという。

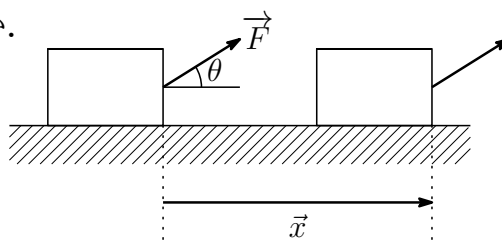
A: 物理の授業で習いました。

先生: この仕事をベクトルの内積で表すことができる。ここでは、力を $\vec{F}$ 、物体の変位 (移動) を $\vec{x}$ で表すことにしよう。たとえば、平らな地面の上で物体に一定の力をはたらかせてその力の向きに物体を動かしたとする。つまり、力の向きと物体の移動の向きが同じのとき、仕事は力の大きさと移動距離の積 $|\vec{F}||\vec{x}|$ で表される。



A: 向きが異なるときはどうするんですか。

先生: 右の図のように、一定の力 $\vec{F}$ でひもを斜め上に引き続けて物体を移動させたとして。このとき、 $\vec{F}$ と $\vec{x}$ のなす角を θ とすると、物体が移動した向き、つまり $\vec{x}$ の向きに $|\vec{F}|\cos\theta$ の力がはたらいたと考える、したがって、仕事は $|\vec{F}|\cos\theta \times |\vec{x}|$ つまり $\vec{F} \cdot \vec{x}$ で表される。一般に、仕事は内積 $\vec{F} \cdot \vec{x}$ で表されて、仕事は0や負になる場合もあるんだ。



演習 1.2 上のように平らな地面で物体を移動させたとき、重力が物体にした仕事を内積を利用して求めてみよう。 解

1.1.5 問題

問題 1.1 次の等式を満たす $\vec{x}$ を, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ. 解 → p.8

(1) $3\vec{x} - 4\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{b}$

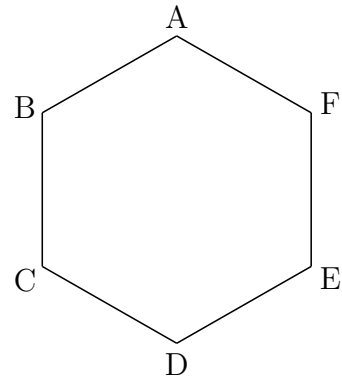
(2) $2(\vec{x} - 3\vec{a}) = 5(\vec{x} + 2\vec{b})$

問題 1.2 右の図の正六角形 ABCDEF において, $AB = 2$ とする. 次の内積を求めよ. 解

→ p.15, 16

(1) $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$ (2) $\vec{AD} \cdot \vec{CE}$

(3) $\vec{AC} \cdot \vec{AE}$ (4) $\vec{AC} \cdot \vec{CE}$



問題 1.3 次の問いに答えよ. 解

→ p.16, 17

(1) 次が成り立つことを示せ.

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で, $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\vec{a} // \vec{b} \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

(2) 2つのベクトル $\vec{a} = (9, -6)$, $\vec{b} = (x, 2)$ について, $\vec{a} // \vec{b}$ のとき, (1) の結果を用いて, x の値を求めよ.

問題 1.4 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$ のとき, 次の問いに答えよ. 解 → p.69

- (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ.
- (2) $\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ が垂直になるように, 実数 t の値を定めよ.

問題 1.5 次の三角形の面積 S を求めよ. 解 → p.25

- (1) $|\vec{OA}| = 4$, $|\vec{OB}| = 5$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -10$ を満たす $\triangle OAB$
- (2) 3点 $A(1, 0)$, $B(-2, -1)$, $C(-1, 3)$ を頂点とする $\triangle ABC$

問題 1.6 2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, 次の問いに答えよ. 解

- (1) 次が成り立つことを示せ.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

- (2) 平行四辺形 $OACB$ において, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とする. (1) で示した同値関係から, 平行四辺形 $OACB$ が長方形となるための必要十分条件を求めよ.

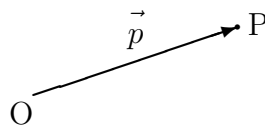
1.2 ベクトルと平面図形

1.2.1 位置ベクトル

図形の性質を調べるときには、共通の始点をもった有向線分が表すベクトルを考えると便利ことがある．このようなベクトルについて考えよう．

A》位置ベクトル

平面上で、点 O を定めておくと、どんな点 P の位置も、ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ によって決まる．このようなベクトル $\vec{p}$ を、点 O に関する点 P の位置ベクトルという．また、位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を、 $P(\vec{p})$ で表す．



2 点の位置ベクトルが同じならば、その 2 点は一致する．

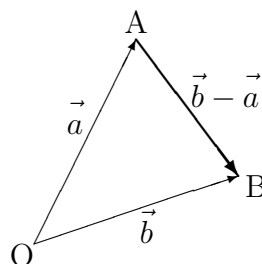
注意 位置ベクトルにおける点 O はどこに定めてもよい．以下、とくに断らない限り、1 つ定めた点 O に関する位置ベクトルを考える．

2 点 A, B に対して、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

が成り立つから、次のことがいえる．

2 点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ に対して $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$



練習 1.27 3 点 $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ に対して、次のベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のいずれかを用いて表せ． 解

(1) $\overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{CA}$

(3) $\overrightarrow{BA}$

B》内分点・外分点の位置ベクトル

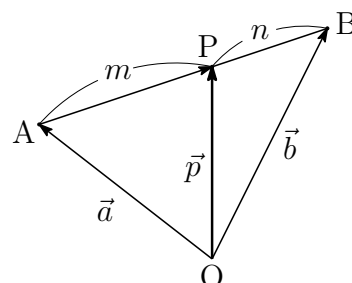
2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して, 線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ を求めてみよう.

$AP:PB = m:(m+n)$ であるから

$$\vec{AP} = \frac{m}{m+n} \vec{AB}$$

よって $\vec{p} - \vec{a} = \frac{m}{m+n} (\vec{b} - \vec{a})$

$$\vec{p} = \left(1 - \frac{m}{m+n}\right) \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{b} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$



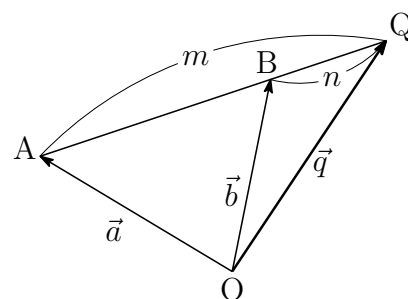
次に, $m > n$ のとき, 線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ を求めてみよう.

$AQ:QB = m:(m-n)$ であるから

$$\vec{AQ} = \frac{m}{m-n} \vec{AB}$$

よって $\vec{q} - \vec{a} = \frac{m}{m-n} (\vec{b} - \vec{a})$

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \left(1 - \frac{m}{m-n}\right) \vec{a} + \frac{m}{m-n} \vec{b} \\ &= \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$



点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は, $m < n$ のときも ① で表される.

一般に, 次のことが成り立つ. [内分点・外分点の位置ベクトル]

内分点・外分点の位置ベクトル

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して, 線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点, $m:n$ に外分する点の位置ベクトルは, 次のようになる.

$$\text{内分} \quad \dots \quad \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \qquad \text{外分} \quad \dots \quad \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

とくに, 線分 AB の中点の位置ベクトルは $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

補足 内分の場合の n を $-n$ におき換えたものが, 外分の場合である.

深化 1.1 上の式 ① について, $m < n$ のときも同じ式が得られることを確かめてみよう. 解

例 1.15 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して, 線分 AB を

S

$$3:4 \text{ に内分する点の位置ベクトルは } \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{3+4} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$$

$$2:1 \text{ に外分する点の位置ベクトルは } \frac{-\vec{a} + 2\vec{b}}{2-1} = -\vec{a} + 2\vec{b}$$

練習 1.28 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB に対して, 次のような点の位置ベクトルを求めよ. **解**

- (1) 2:3 に内分する点 (2) 3:1 に内分する点
(3) 4:1 に外分する点 (4) 1:2 に外分する点

線分 AB を $m:n$ に内分する点 P が与えられたとき, 比 $m:n$ を 1 つの文字 t で表してみよう.

$$m:n = \frac{m}{m+n} : \frac{n}{m+n} \text{ であり,}$$

$$\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1 \text{ である.}$$

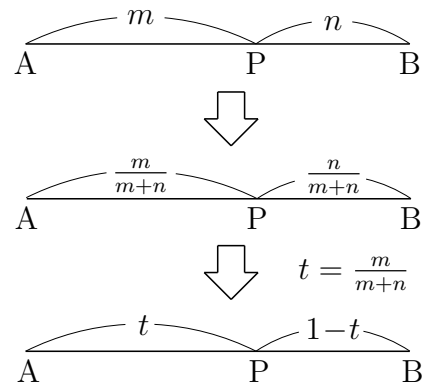
$$\text{したがって, } \frac{m}{m+n} = t \text{ とおくと,}$$

$0 < t < 1$ であり

$$\frac{n}{m+n} = 1 - \frac{m}{m+n} = 1 - t$$

$$\text{よって } m:n = \frac{m}{m+n} : \frac{n}{m+n}$$

$$= t : (1-t)$$



このことから, 内分の比は 1 つの文字 t を用いて, $t:(1-t)$ のように表すことができる. $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ とすると, このとき, 線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は次のように表される.

$$\vec{p} = \frac{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}}{t + (1-t)} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

一般に, 直線 AB 上の点 P について, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ であるから (t は実数)

$$\vec{p} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a}) \quad \text{すなわち} \quad \vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

また, 上の第 2 式で $1-t=s$ とおくと, 次の形に表される.

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s+t=1$$

C》三角形の重心の位置ベクトル

3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において, 重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ を求めてみよう.

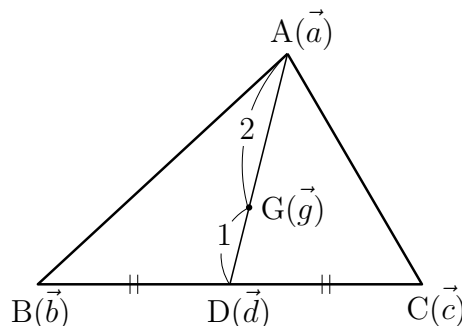
辺 BC の中点を $D(\vec{d})$ とすると

$$\vec{d} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ の重心 G は, 中線 AD を $2:1$ に内分する点であるから

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + 2\vec{d}}{2+1}$$

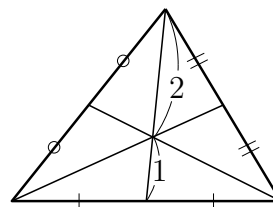
$$\textcircled{1} \text{ より } 2\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} \text{ であるから} \quad \vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$



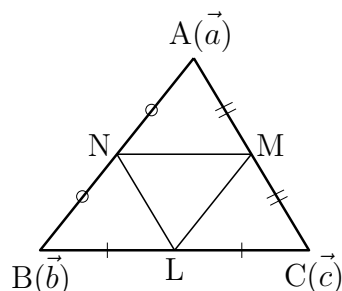
3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の

位置ベクトル $\vec{g}$ は
$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

三角形の重心は, 3つの中線が1つに交わる点で, 各中線を $2:1$ に内分する. **[三角形の重心]**



例題 1.6 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において、辺 BC , CA , AB の中点を、それぞれ L , M , N とする。また、 $\triangle LMN$ の重心を G' とする。 S



- (1) 点 G' の位置ベクトル $\vec{g'}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 等式 $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ。

解答 (1) L , M , N の位置ベクトルを、それぞれ $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ とすると、

$$\vec{g'} = \frac{\vec{l} + \vec{m} + \vec{n}}{3} \text{ である.}$$

$$\text{また} \quad \vec{l} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \quad \vec{m} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{であるから} \quad \vec{l} + \vec{m} + \vec{n} &= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \vec{g'} = \frac{\vec{l} + \vec{m} + \vec{n}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} &= (\vec{l} - \vec{a}) + (\vec{m} - \vec{b}) + (\vec{n} - \vec{c}) \\ &= (\vec{l} + \vec{m} + \vec{n}) - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

補足 $\triangle LMN$ の重心 G' の位置ベクトルは、 $\triangle ABC$ の重心 G の位置ベクトルと同じである。 $\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OG}$ より、2つの重心が一致することがわかる。

練習 1.29 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において、辺 BC , CA , AB を $2:1$ に内分する点を、それぞれ P , Q , R とする。また、 $\triangle ABC$ の重心を G , $\triangle PQR$ の重心を G' とする。 解

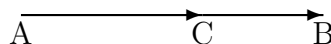
- (1) 点 G' の位置ベクトル $\vec{g'}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 等式 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ。

1.2.2 ベクトルの図形への応用

ベクトルを利用して平面図形の性質を調べてみよう.

A》直線上の点

平面上の3点A, B, Cについて, ベクトルの平行条件などにより, 次のことが成り立つ.



一直線上にある点

2点A, Bが異なるとき

点Cが直線AB上にある $\iff \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある

応用例題 1.3 平行四辺形ABCDにおいて, 辺CDを1:2に内分する点をE, 対角線BDを3:2に内分する点をFとする. このとき, 3点A, F, Eは一直線上にあることを証明せよ. S

考え方》 $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$ となる実数 k があることを示す.

証明 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする.

BF:FD = 3:2 であるから

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}}{3+2} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{5}$$

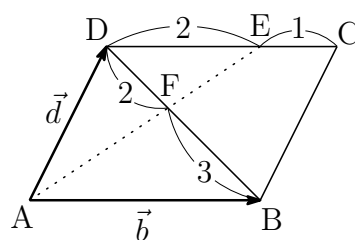
CE:ED = 1:2 であるから

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{1+2} = \frac{2(\vec{b} + \vec{d}) + \vec{d}}{3} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{3} \quad \leftarrow \overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}$$

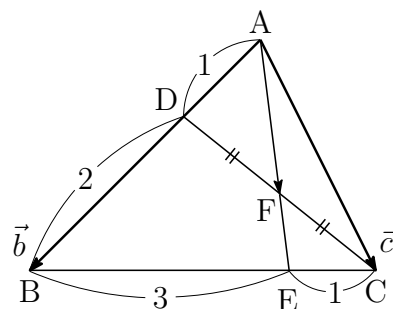
よって
$$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AE}$$

したがって, 3点A, F, Eは一直線上にある.

証終



練習 1.30 $\triangle ABC$ において, 辺ABを1:2に内分する点をD, 辺BCを3:1に内分する点をEとし, 線分CDの中点をFとする. このとき, 3点A, F, Eは一直線上にあることを証明せよ. 解



B 》2直線の交点

応用例題 1.4 $\triangle OAB$ において、辺 OA の中点を C 、辺 OB を $2:1$ に内分する点を D とし、線分 AD と線分 BC の交点を P とする． $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ． S

考え方 》 $AP:PD = s:(1-s)$ 、 $BP:PC = t:(1-t)$ とすると、 $\overrightarrow{OP}$ は $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて2通りに表せる．9 ページで学んだように、 $\overrightarrow{OP}$ の表し方はただ1通りしかないことから、 s 、 t の値が定まる．

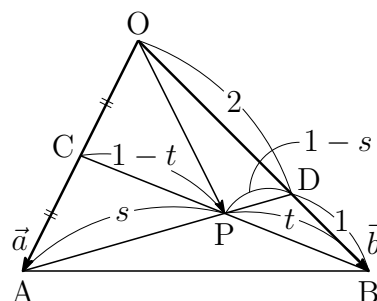
$$\overrightarrow{OP} = \bigcirc \vec{a} + \square \vec{b}, \overrightarrow{OP} = \bigcirc' \vec{a} + \square' \vec{b} \iff \bigcirc = \bigcirc', \square = \square'$$

解答 $AP:PD = s:(1-s)$ とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD} \\ &= (1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$BP:PC = t:(1-t)$ とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{2}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$



$\vec{a} \neq \vec{0}$ 、 $\vec{b} \neq \vec{0}$ で、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから、 $\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いた表し方は1通りである．

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad 1-s = \frac{1}{2}t, \quad \frac{2}{3}s = 1-t$$

$$\text{これを解くと} \quad s = \frac{3}{4}, \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \leftarrow \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ のどちらかに代入する.}$$

別解 $\triangle OAD$ と直線 BC についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{OC}{CA} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BO} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{1}{3} = 1 \quad \text{すなわち} \quad AP:PD = 3:1$$

点 P は線分 AD を $3:1$ に内分する点である． $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OD}}{3+1} = \frac{1}{4} \left(\vec{a} + 3 \cdot \frac{2}{3}\vec{b} \right) = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

研究

31 ページで示した結果により, 次のことが成り立つ.

$$\text{点 } P \text{ が直線 } AB \text{ 上にある} \iff \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \text{ について} \\ s + t = 1 \end{array} \right]$$

このことを利用して, 35 ページの応用例題 1.4 を考えてみよう.

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} \text{ とおく.}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OD} \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}y\overrightarrow{OD}$$

点 P は直線 AD 上にあるから

$$x + \frac{3}{2}y = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

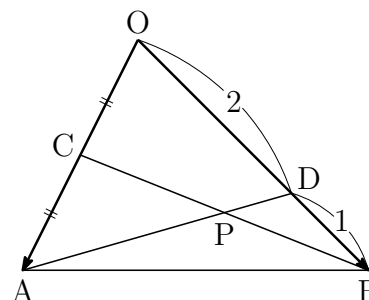
$$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OC} \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{OP} = 2x\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OB}$$

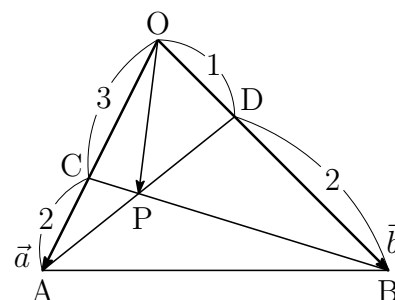
点 P は直線 BC 上にあるから

$$2x + y = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解くと } x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{2} \text{ よって } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$



練習 1.31 $\triangle OAB$ において, 辺 OA を $3:2$ に内分する点を C , 辺 OB を $1:2$ に内分する点 D とし, 線分 AD と線分 BC の交点を P とする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ. 解



B 》 内積の利用

ベクトルの内積を利用して、図形の性質を証明してみよう。

応用例題 1.5 鋭角三角形 ABC において、頂点 B, C からそれぞれの向かい合う辺 CA, AB に下ろした垂線の交点を H とすると、 $AH \perp BC$ である。このことを、ベクトルを用いて証明せよ。

S

考え方 》 $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ であることから、 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ を示す。

証明 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{h}$ とする。

$$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \text{ から } (\vec{h} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{よって } \vec{h} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{すなわち } \vec{h} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ から

$$(\vec{h} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{よって } \vec{h} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

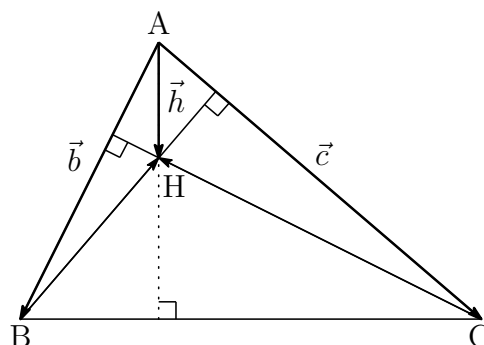
$$\text{すなわち } \vec{h} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から

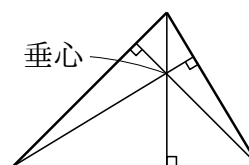
$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{h} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{h} \cdot \vec{c} - \vec{h} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

したがって、 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ となるから、 $AH \perp BC$ である

証終



一般に、三角形の3つの頂点から、それぞれの向かい合う辺またはその延長線上に下した垂線は1点で交わる。この交点を、その三角形の垂心という。



別証 $\overrightarrow{HA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{HB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{HC} = \vec{c}$ とする.

$HB \perp CA$ より, $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ であるから

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$$

すなわち $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \dots \textcircled{1}$

$HC \perp AB$ より, $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ であるから

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

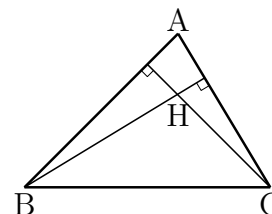
すなわち $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \dots \textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

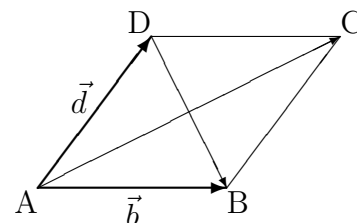
①, ② より $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

よって $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$ すなわち $AH \perp BC$

証終



練習 1.32 平行四辺形 ABCD において, $AB = AD$ のとき, $AC \perp DB$ である. このことを, ベクトルを用いて証明せよ. 解



1.2.3 図形のベクトルによる表示

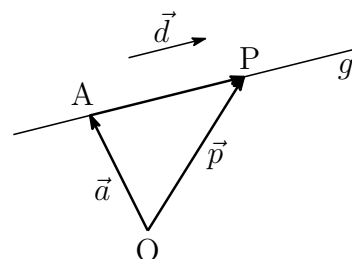
直線や円上の点の位置ベクトルを考えることにより、図形をベクトルで表示することを考えよう。

A》ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線

点 $A(\vec{a})$ を通り、ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を g とする。直線 g 上のどんな点 $P(\vec{p})$ に対しても、 $\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$ となる実数 t がただ1つ定まる。

$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ であるから

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \quad \cdots \textcircled{1}$$



①において、 t がすべての実数値をとって変化するとき、点 $P(\vec{p})$ の全体は直線 g になる。①を直線 g のベクトル方程式といい、 t を媒介変数またはパラメータという。

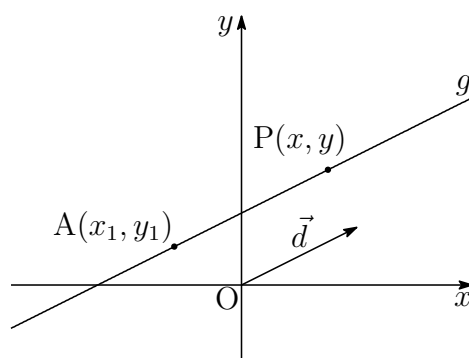
また、 $\vec{d}$ を直線 g の方向ベクトルという。[直線と方向ベクトル]

O を原点とする座標平面上で、点 $A(x_1, y_1)$ を通りベクトル $\vec{d} = (l, m)$ に平行な直線 g 上の点を $P(x, y)$ とする。

ベクトル方程式 ① において、 $\vec{p} = (x, y)$ 、 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ 、 $\vec{d} = (l, m)$ であるから

$$(x - x_1, y - y_1) = t(l, m)$$

よって
$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$



②を直線 g の媒介変数表示という。

②から t を消去すると、次のことがいえる。

点 $A(x_1, y_1)$ を通り、 $\vec{d} = (l, m)$ に平行な直線の方程式は

$$m(x - x_1) - l(y - y_1) = 0$$

証明 ②から
$$\begin{cases} x - x_1 = lt & \cdots (1) \\ y - y_1 = mt & \cdots (2) \end{cases}$$

(1) $\times m$ - (2) $\times l$ より $m(x - x_1) - l(y - y_1) = 0$

証終

別証 (27 ページの問題 1.3(1) の平行条件を用いる証明法)

点 $A(x_1, y_1)$ を通り、方向ベクトル $\vec{d} = (l, m)$ の直線 g 上の点 $P(x, y)$ について、 P が A と異なるとき、 $\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1)$ は $\overrightarrow{AP} // \vec{d}$ であるから

$$m(x - x_1) - l(y - y_1) = 0$$

P が A と一致するときも上式を満たすから、これが直線 g の方程式である。証終

例 1.16 点 $A(1, 4)$ を通り、 $\vec{d} = (2, 3)$ に平行な直線を媒介変数表示すると ■

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$$

また、媒介変数を消去して得られる直線の方程式は

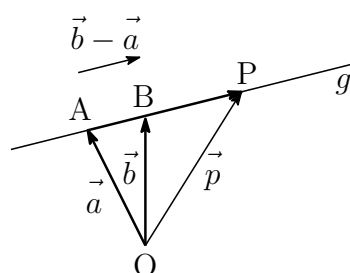
$$3(x - 1) - 2(y - 4) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3x - 2y + 5 = 0 \quad \text{■終}$$

練習 1.33 点 $A(2, -1)$ を通り、 $\vec{d} = (-4, 3)$ に平行な直線を媒介変数表示せよ。また、媒介変数を消去した式で表せ。 ■解

B》異なる 2 点 A, B を通る直線

異なる 2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を通る直線を g とする。直線 g は、点 $A(\vec{a})$ を通り、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ を方向ベクトルとする直線と考えられるから、直線 g 上の点 $P(\vec{p})$ について、次の式が得られる。

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \quad \cdots \text{③}$$



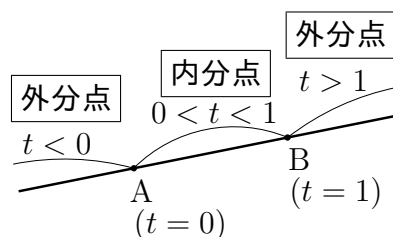
[異なる 2 点を通る直線のベクトル方程式]

実数 t のとる値によって、この式における点 $P(\vec{p})$ の存在範囲は、右の図のようになる。

③ を整理すると、次の式が得られる。

$$\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$$

さらに、 $1 - t = s$ とおくと、次のことがいえる。



異なる 2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を通る直線の方程式は

$$1 \quad \vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$$

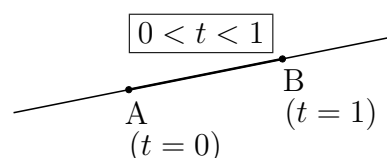
$$2 \quad \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s + t = 1$$

C》平面上の点の存在範囲

前ページで学んだように、異なる2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ について、次の式を満たす点 $P(\vec{p})$ の存在範囲は直線 ABである。

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s + t = 1$$

$t = 0$ のとき P は A に一致し、 $t = 1$ のとき P は B に一致する。また、 $0 < t < 1$ のとき、 P は線分 AB の内分点である。



$s + t = 1$ のとき、 $s \geq 0$, $t \geq 0$ とすると $0 \leq t \leq 1$ であるから、次の式を満たす点 $P(\vec{p})$ の存在範囲は線分 ABである。

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s + t = 1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

応用例題 1.6 $\triangle OAB$ において、次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ。 [S]

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}, \quad s + t = 2, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

[平面上の点の存在範囲]

考え方》次の形であれば、点 P の存在範囲は線分 $A'B'$ である。

$$\vec{OP} = s'\vec{OA'} + t'\vec{OB'} \quad (s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0)$$

解答 $s + t = 2$ から $\frac{s}{2} + \frac{t}{2} = 1$

← 右辺が1になるように変形する。

$$\text{また } \vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} = \frac{s}{2}(2\vec{OA}) + \frac{t}{2}(2\vec{OB})$$

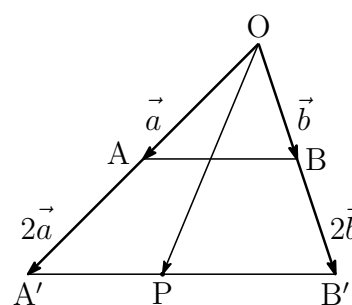
ここで、 $\frac{s}{2} = s'$, $\frac{t}{2} = t'$ とおくと

$$\vec{OP} = s'(2\vec{OA}) + t'(2\vec{OB}),$$

$$s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

$$\text{よって、} 2\vec{OA} = \vec{OA'}, \quad 2\vec{OB} = \vec{OB'}$$

となる点 A' , B' をとると、点 P の存在範囲は線分 $A'B'$ である。



練習 1.34 $\triangle OAB$ において、次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ。 [解]

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}, \quad s + t = \frac{1}{2}, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

$\triangle OAB$ において、次の式を満たす点 P の存在範囲を求めてみよう.

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq s+t \leq 1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

$s+t=k$ とおく

[1] $k=0$ のとき, $s=t, t=0$ であるから, 点 P は点 O に一致する.

[2] $0 < k \leq 1$ のとき, $s+t=k$ から $\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1$

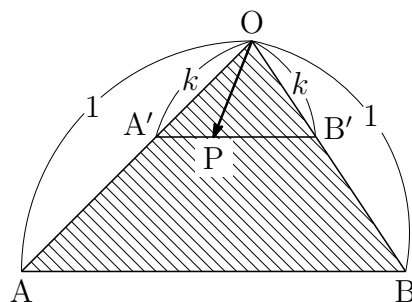
$$\text{また} \quad \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA}) + \frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$$

ここで, $\frac{s}{k} = s', \frac{t}{k} = t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s'(k\overrightarrow{OA}) + t'(k\overrightarrow{OB}), \quad s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

よって, $k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}, k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となる点 A', B' をとると, 定数 k に対して, 点 P の存在範囲は辺 AB に平行な線分 $A'B'$ である.

$0 < k \leq 1$ の範囲で k が変わるとき, 線分 $A'B'$ 上の点は, 点 O を除く $\triangle OAB$ の周および内部を動く.



[1], [2] より, 次のことがいえる.

$\triangle OAB$ において, 次の式を満たす点 P の存在範囲は $\triangle OAB$ の周および内部 である.

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq s+t \leq 1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0 \quad (1.2)$$

[平面上の点の存在範囲]

練習 1.35 $\triangle OAB$ において, 次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ. 解

$$(1) \quad \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq s+t \leq 2, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

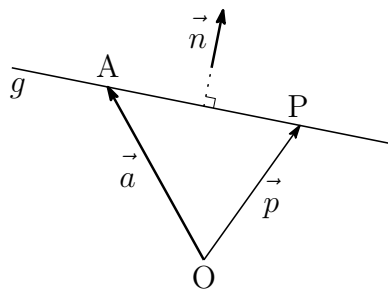
$$(2) \quad \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq s+t \leq \frac{1}{2}, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

D》ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線

点 $A(\vec{a})$ を通り、ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線を g とする. 直線 g 上の点 $P(\vec{p})$ が A に一致しないとき、 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ である. すなわち、 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ となり、次の式が得られる.

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

P が A に一致するときは、 $\vec{p} - \vec{a} = \vec{0}$ であるから、このときも $\textcircled{4}$ は成り立つ.



$\textcircled{4}$ は、点 $A(\vec{a})$ を通り、 $\vec{n}$ に垂直な直線 g のベクトル方程式である. 直線 g に垂直なベクトル $\vec{n}$ を、直線 g の法線ベクトルという.

O を原点とする座標平面上で、点 $A(x_1, y_1)$ を通り、 $\vec{n} = (a, b)$ に垂直な直線 g 上の点を $P(x, y)$ とする.

ベクトル方程式 $\textcircled{4}$ において

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (a, b), \quad \vec{a} = (x_1, y_1), \quad \vec{p} = (x, y) \\ \vec{p} - \vec{a} &= (x - x_1, y - y_1) \end{aligned}$$

であるから、次のことがいえる.

1 点 $A(x_1, y_1)$ を通り、 $\vec{n} = (a, b)$ に垂直な直線の方程式は

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

2 ベクトル $\vec{n} = (a, b)$ は、直線 $ax + by + c = 0$ に垂直である.

補足 直線 $ax + by + c = 0$ において、 $\vec{n} = (a, b)$ はこの直線の法線ベクトルの1つである.

練習 1.36 次の点 A を通り、ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線の方程式を求めよ. 解

(1) $A(3, 4), n = (\vec{1}, 2)$

(2) $A(-1, 2), n = (\vec{3}, -4)$

E》円のベクトル方程式

点 $A(\vec{a})$ を中心とする半径 r の円を考える.
この円上のどんな点 $P(\vec{p})$ に対しても, 次の式が成り立つ.

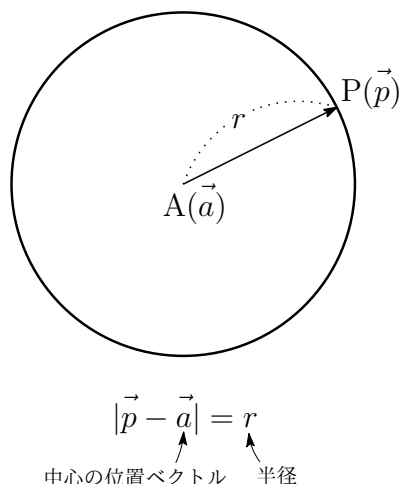
$$|\vec{AP}| = r$$

すなわち $|\vec{p} - \vec{a}| = r \quad \dots \textcircled{1}$

また, $|\vec{p} - \vec{a}|^2 = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a})$ であるから

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② は点 $A(\vec{a})$ を中心とする半径 r の円のベクトル方程式である.



練習 1.37 点 $A(\vec{a})$ が与えられているとき, 次のベクトル方程式において点 $P(\vec{p})$ の全体は円となる. 円の中心の位置ベクトル, 円の半径を求めよ. 解

(1) $|\vec{p} - \vec{a}| = 3$

(2) $|2\vec{p} - \vec{a}| = 4$

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を直径とする円を考える.
円上の点を $P(\vec{p})$ とする.

P が A にも B にも一致しないとき

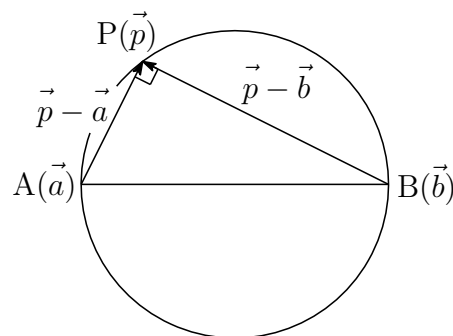
$$AP \perp BP \quad \text{すなわち} \quad \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

よって, 次の式が得られる.

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

P が A または B に一致するときは,
 $\vec{p} - \vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{p} - \vec{b} = \vec{0}$ で, このときも ③ は成り立つ.

③ は2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を直径とする円のベクトル方程式である.



練習 1.38 平面上の異なる2点 O , A に対して $\vec{OA} = \vec{a}$ とすると, 線分 OA を直径とする円のベクトル方程式は, その円上の点 P について $\vec{OP} = \vec{p}$ として, $\vec{p} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ で与えられることを示せ. 解

研究

点と直線の距離

座標平面上の点 $P(x_1, y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は、次の式で与えられることを、ベクトルを用いて証明してみよう。

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

証明 直線 $ax + by + c = 0$ を g とする。

点 P から直線 g に垂線 PH を下ろすと

$$d = |\overrightarrow{PH}|$$

$\vec{n} = (a, b)$ は直線 g の法線ベクトルで、
 $\overrightarrow{PH}$ は $\vec{n}$ に平行であるから

$$\overrightarrow{PH} = k\vec{n}$$

となる実数 k がある。

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH}$ から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= (x_1, y_1) + k(a, b) \\ &= (x_1 + ka, y_1 + kb)\end{aligned}$$

よって、 H の座標は $(x_1 + ka, y_1 + kb)$ と表される。

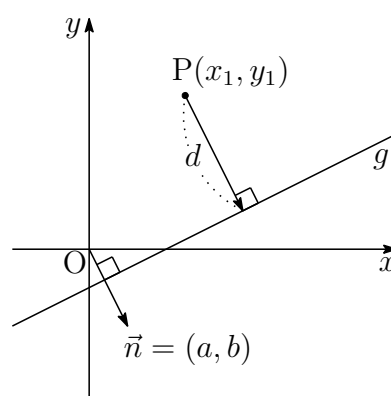
点 H は直線 g 上の点であるから

$$a(x_1 + ka) + b(y_1 + kb) + c = 0$$

$$\text{すなわち} \quad k(a^2 + b^2) + (ax_1 + by_1 + c) = 0$$

$$\text{よって} \quad k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

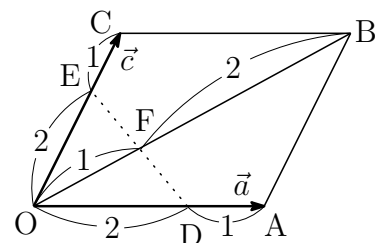
$$\begin{aligned}\text{したがって} \quad d &= |\overrightarrow{PH}| = |k||\vec{n}| \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$



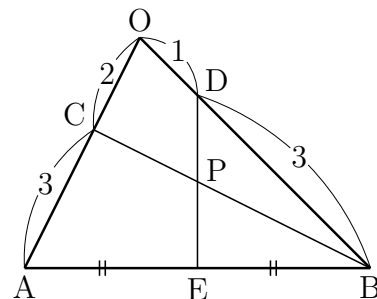
終

1.2.4 問題

問題 1.7 平行四辺形 $OABC$ の辺 OA と辺 OC を $2:1$ に内分する点を、それぞれ D , E とし、対角線 OB を $1:2$ に内分する点を F とする. このとき、3点 D , F , E は一直線上にあることを証明せよ. 解 → p.34 応用例題 1.3

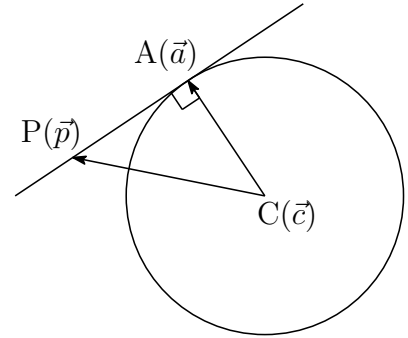


問題 1.8 $\triangle OAB$ において、辺 OA を $2:3$ に内分する点を C , 辺 OB を $1:3$ に内分する点を D , 辺 AB の中点を E とし、線分 BC と線分 ED の交点を P とする. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とするとき、 $\vec{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ. 解 → p.35 応用例題 1.4



問題 1.9 法線ベクトルを利用して、2直線 $2x + 4y + 1 = 0$, $x - 3y - 7 = 0$ のなす角 α を求めよ. 解 → p.43

問題 1.10 点 $C(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円上の点を $A(\vec{a})$ とする. このとき, 点 A における円の接線のベクトル方程式は, その接線上の点を $P(\vec{p})$ として $(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c}) = r^2$ で与えられることを示せ. 解 → p.44



問題 1.11 海上を航行する 2 せきの船 A, B があり, 船 B は船 A から見て西に 50km の位置にある. 船 A は北に, 船 B は北東に向かって一定の速さで航行しており, 船 A の速さは時速 20km であるとする. 解

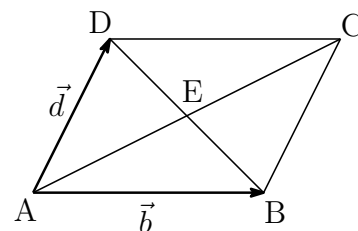
- (1) 船 B も時速 20km で航行しているとき, 船 B が船 A から見てちょうど南東方向に見えるのは何時間後か求めよ.
- (2) 衝突を回避するために, 2 せきの船 A, B が衝突する船 B の速さを事前に求めたい. 船 A と衝突してしまう船 B の速さを求めよ.

1.3 章末問題

1.3.1 章末問題 A

章末 1.1 平行四辺形 ABCD において，対角線の交点を E とする． $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$ ， $\vec{d}$ を用いて表せ． 解

- (1) $\overrightarrow{EC}$ (2) $\overrightarrow{BE}$ (3) $\overrightarrow{EA}$



章末 1.2 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ のとき，次の値の最大値，最小値を求めよ． 解

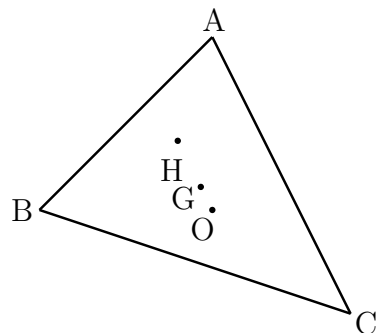
- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (2) $|\vec{a} - \vec{b}|$

章末 1.3 $\vec{a} = (2, x)$ ， $\vec{b} = (x + 1, 3)$ とする． 解

- (1) $2\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が垂直になるように， x の値を定めよ．
 (2) $2\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が平行になるように， x の値を定めよ．

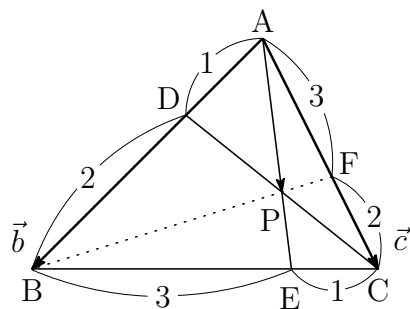
章末 1.4 $\triangle ABC$ の外心を O , 重心を G とし, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ とする. 解

- (1) 3 点 O, G, H は一直線上にあることを証明せよ.
- (2) H は $\triangle ABC$ の垂心であることを証明せよ.



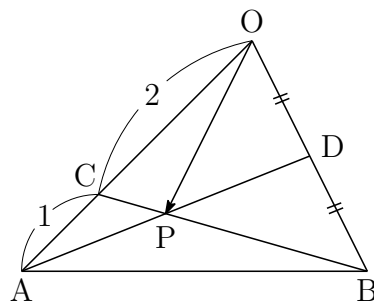
章末 1.5 $\triangle ABC$ において, 辺 AB を $1:2$ に内分する点を D , 辺 BC を $3:1$ に内分する点を E , 辺 CA を $2:3$ に内分する点を F とする. また, 線分 AE と線分 CD の交点を P とするとき, 次の問いに答えよ. 解

- (1) $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とするとき, $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ.
- (2) 3 点 B, P, F は一直線上にあることを示せ.



章末 1.6 $\triangle OAB$ において, 辺 OA を $2:1$ に内分する点を C , 辺 OB の中点を D とし, 線分 AD, BC の交点を P とする. 実数 m, n を用いて, $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ と表すとき, 次の□に適する数はいくつか. また, m, n の値を求めよ. 解

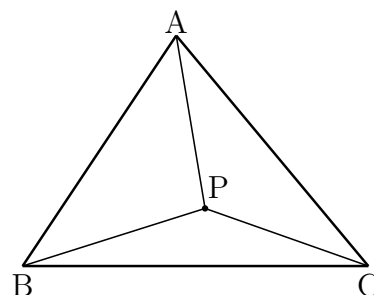
- (1) $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + \square n\overrightarrow{OD}$
- (2) $\overrightarrow{OP} = \square m\overrightarrow{OC} + n\overrightarrow{OB}$



1.3.2 章末問題 B

章末 1.7 $\triangle ABC$ と点 P に対して，等式 $3\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 5\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ が成り立つ. 解

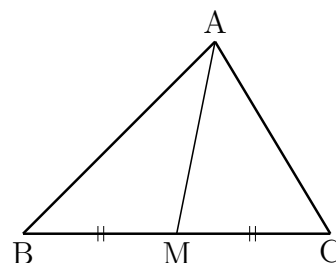
- (1) 点 P は $\triangle ABC$ に対してどのような位置にあるか.
 (2) 面積の比 $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$ を求めよ.



章末 1.8 $\triangle ABC$ において，辺 BC の中点を M とすると，次の等式が成り立つ.

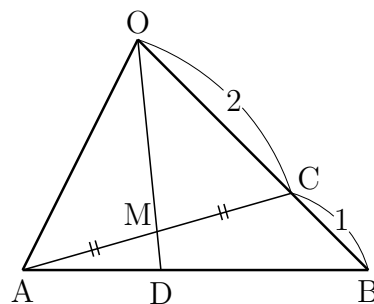
$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

このことを，ベクトルを用いて証明せよ. 解



章末 1.9 $\triangle OAB$ において，辺 OB を $2:1$ に内分する点を C ，線分 AC の中点を M とし，直線 OM と辺 AB の交点を D とする．次のものを求めよ. 解

- (1) $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OM}$ となる実数 k の値 (2) $AD : DB$



章末 1.10 $\triangle OAB$ において, 次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ. 解

$$(1) \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + 2t\overrightarrow{OB}, \quad s + t = 1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

$$(2) \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad 3s + 2t \leq 1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

章末 1.11 点 A(1, 2) から直線 $3x + 4y - 1 = 0$ に垂線を下ろし, 交点を H とする.

$$(1) \vec{n} = (3, 4) \text{ に対し, } \overrightarrow{AH} = k\vec{n} \text{ となる実数 } k \text{ の値を求めよ.} \quad \text{解}$$

(2) 点 H の座標と線分 AH の長さを求めよ.

章末 1.12 平面上の異なる 2 点 O, A に対して, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ とする. このとき, 次のベクトル方程式において $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ となる点 P の全体はどのような図形を表すか. 解

$$(1) (\vec{p} + \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

$$(2) |\vec{p} + \vec{a}| = |\vec{p} - \vec{a}|$$

ヒント

8 内積を利用する. $AB^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ など.

9 D が直線 AB 上にあるから, $\overrightarrow{OD} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, $s + t = 1$ が利用できる.

$$10 \quad (1) \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t(2\overrightarrow{OB}) \quad (2) \overrightarrow{OP} = 3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right) + 2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

第 2 章 空間のベクトル

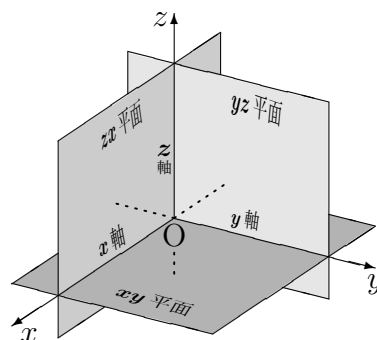
2.1.1 空間の点

直線上の点や平面上の点は、数直線や座標軸を考えることにより、座標を用いて表すことができた。空間においても、点の座標を考えてみよう。

A》空間の点の座標

空間に点 O をとり、 O で互いに直交する 3 本の数直線を、右の図のように定める。これらを、それぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸といい、まとめて座標軸という。また、点 O を原点という。さらに

x 軸と y 軸で定まる平面を xy 平面、
 y 軸と z 軸で定まる平面を yz 平面、
 z 軸と x 軸で定まる平面を zx 平面
といい、これらをまとめて座標平面という。

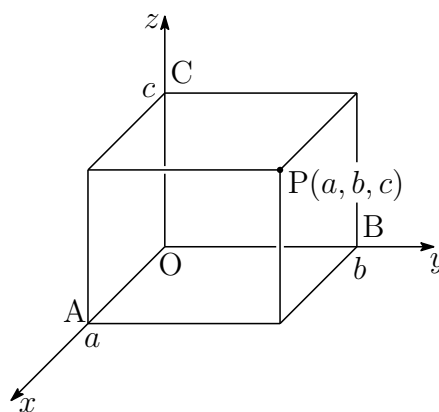


空間の点 P に対して、 P を通り各座標軸に垂直な平面が、 x 軸、 y 軸、 z 軸と交わる点を、それぞれ A , B , C とする。 A , B , C の各座標軸上での座標が、それぞれ a , b , c のとき、3 つの実数の組

$$(a, b, c)$$

を点 P の座標といい、 a , b , c をそれぞれ点 P の x 座標、 y 座標、 z 座標という。この点 P を $P(a, b, c)$ と書くことがある。原点 O と、右上の図の点 A , B , C については、 $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ である。

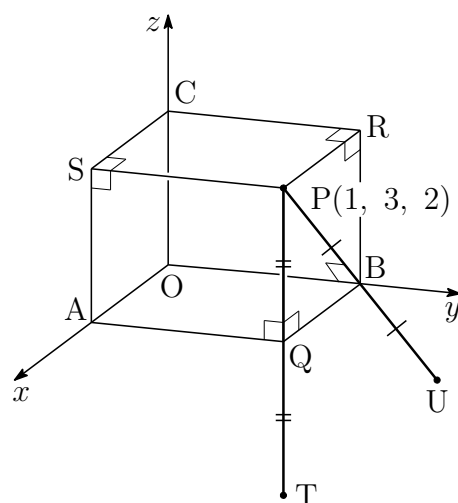
座標の定められた空間を座標空間という。



[空間の点の座標]

[内容] [公式・用語集] [解説動画] [資料]

例 2.1 点 $P(1, 3, 2)$ から xy 平面, yz 平面, zx 平面に垂線を下ろし, 各平面との交点を, それぞれ Q, R, S とすると, $Q(1, 3, 0), R(0, 3, 2), S(1, 0, 2)$ である. また, 点 P と xy 平面に関して対称な点 T の座標は $(1, 3, -2)$, 点 P と y 軸に関して対称な点 U の座標は $(-1, 3, -2)$ である. ■



練習 2.1 次の平面に関して点 $P(1, 3, 2)$ と対称な点の座標を, それぞれ求めよ. ■

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (1) yz 平面に関して対称な点 | (2) zx 平面に関して対称な点 |
| (3) z 軸に関して対称な点 | (4) 原点に関して対称な点 |

B》原点 O と点 P の距離

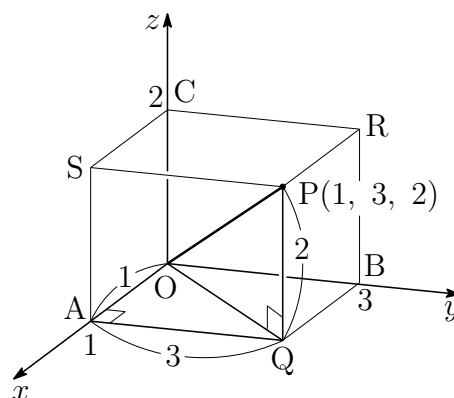
例 2.1 において, 原点 O と点 P の距離を求めてみよう. 三平方の定理を使うと

$$\begin{aligned} OP^2 &= OQ^2 + PQ^2 \\ &= (OA^2 + AQ^2) + PQ^2 \\ &= 1^2 + 3^2 + 2^2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

$$OP > 0 \text{ であるから } OP = \sqrt{14}$$

点 P の座標が (a, b, c) のときは, $OP^2 = a^2 + b^2 + c^2$ となるから, 次のことが成り立つ.

原点 O と点 $P(a, b, c)$ の距離は
 $OP = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



練習 2.2 原点 O と次の点の距離を求めよ. ■

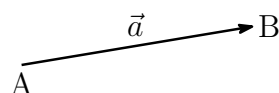
- | | |
|------------------|-------------------|
| (1) $P(2, 3, 6)$ | (2) $Q(3, -4, 5)$ |
|------------------|-------------------|

2.1.2 空間のベクトル

空間においても、平面の場合と同様に有向線分を考えることができる。
空間の有向線分で、その位置の違いを無視して、向きと大きさだけに着目したものが空間のベクトルである。
ここでは、空間のベクトルについて考えてみよう。

A》空間のベクトル

空間において、始点をA、終点をBとする有向線分ABで表されるベクトルを $\overrightarrow{AB}$ で表し、その大きさを $|\overrightarrow{AB}|$ で表す。



空間のベクトルも $\vec{a}$, $\vec{b}$ などで表すことがある。このとき、 $\vec{a} = \vec{b}$ や、 $\vec{a}$ の逆ベクトル $-\vec{a}$ の定義は、平面の場合と同様である。

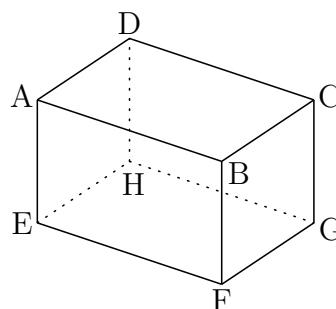
大きさが0のベクトルを零ベクトルまたはゼロベクトルといい、 $\vec{0}$ で表す。また、大きさが1のベクトルを単位ベクトルという。

例 2.2 右の図の直方体において、始点、終点がともに頂点となる有向線分でベクトルを考えると

S

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

また、 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{GH}$ は、すべて $\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルである。



練習 2.3 例 2.2 において、 $\overrightarrow{AE}$ に等しいベクトルで $\overrightarrow{AE}$ 以外のものをすべてあげよ。
また、 $\overrightarrow{AD}$ の逆ベクトルで $\overrightarrow{DA}$ 以外のものをすべてあげよ。 解

空間のベクトルの和，差，実数倍の定義も，平面上の場合と同様である．さらに，それらに成り立つ性質は，空間のベクトルに対してもそのまま成り立つ．

例 2.3 右の図の立体は直方体である．

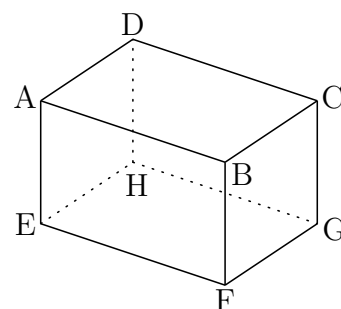
S

- (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{A\Box}$ の $\Box$ に適する頂点の文字は， $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$ から

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$$

- (2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{\Box B}$ の $\Box$ に適する頂点の文字は， $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ から

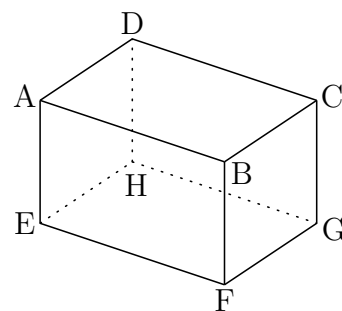
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$$



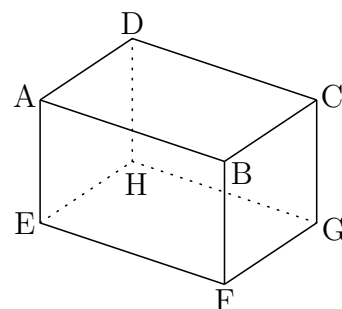
$$\begin{array}{l} \overrightarrow{\bigcirc\blacktriangle} + \overrightarrow{\blacktriangle\Box} = \overrightarrow{\bigcirc\Box} \\ \overrightarrow{\bullet\triangle} - \overrightarrow{\bullet\Box} = \overrightarrow{\Box\triangle} \end{array}$$

練習 2.4 例 2.3 の直方体において，次の $\Box$ に適する頂点の文字を求めよ． **解**

- (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A\Box}$



- (2) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{\Box D}$



B》ベクトルの分解

2つずつ平行な3組の平面で囲まれる立体を平行六面体という。直方体も平行六面体である。平行六面体には、次のような性質がある。

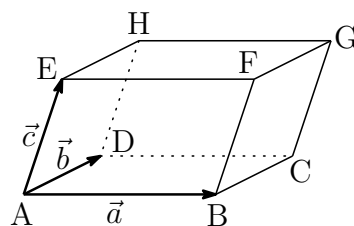
平行六面体の各面は、平行四辺形である。

例題 2.1 右の図の平行六面体において、 S

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$$

とすると、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

- (1) $\overrightarrow{AG}$ (2) $\overrightarrow{FD}$



解答 (1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 (2) $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HD} = -\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$
 $= -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

練習 2.5 例題 2.1 の平行六面体の図において、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

- (1) $\overrightarrow{EC}$ (2) $\overrightarrow{BH}$ (3) $\overrightarrow{DF}$ (4) $\overrightarrow{HF}$ 解

空間において、同じ平面上にない4点O, A, B, Cが与えられたとき、次のことが成り立つ。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とすると、この空間のどんなベクトル $\vec{p}$ も、適当な実数 s, t, u を用いて

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$

の形に表すことができる¹。しかも、この表し方はただ1通りである。

このことは、次のように確かめられる。

証明 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ とする。

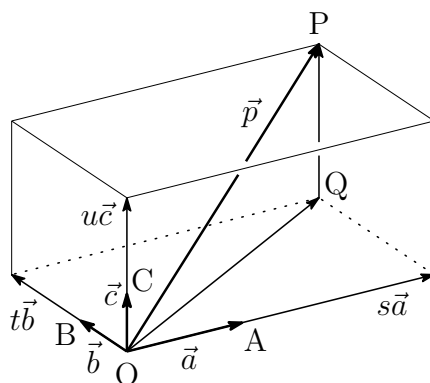
点Pを通り直線OCに平行な直線を引き、3点O, A, Bを通る平面OAB²との交点をQとすると、次が成り立つ。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \quad \dots \textcircled{1}$$

[1] 点Qが平面OAB上にあることから、 $\overrightarrow{OQ} = s\vec{a} + t\vec{b}$ となる実数 s, t がただ1組定まる。

[2] $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{QP}$ であるから、 $\overrightarrow{QP} = u\vec{c}$ となる実数 u がただ1つ定まる。

①と[1], [2]により、 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ となる実数 s, t, u がただ1通り定まる。 証終



¹ 空間におけるこのような3つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は、1次独立であるという。

² 一直線上にない3点O, A, Bを通る平面は、ただ1つ定まる。この平面を、平面OABということがある。

2.1.3 ベクトルの成分

座標空間でベクトルを考えて、ベクトルの表示に座標を利用してみよう。
ここでは、空間のベクトルの成分表示について学ぼう。

A》ベクトルの成分表示

座標空間において、 x 軸, y 軸, z 軸の
正の向きと同じ向きの単位ベクトルを
基本ベクトルといい、それぞれ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$,
 $\vec{e}_3$ で表す。

この空間のベクトル $\vec{a}$ に対し、
 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ である点 A の座標が

$$(a_1, a_2, a_3)$$

のとき、 $\vec{a}$ は次のように表される。

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

この $\vec{a}$ を、次のようにも書く。

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \cdots \textcircled{1}$$

①における a_1, a_2, a_3 を、それぞれ $\vec{a}$ の x 成分, y 成分, z 成分といい、まとめて $\vec{a}$ の成分という。また、①を $\vec{a}$ の成分表示という。

空間の基本ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ の成分表示は、次のようになる。

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

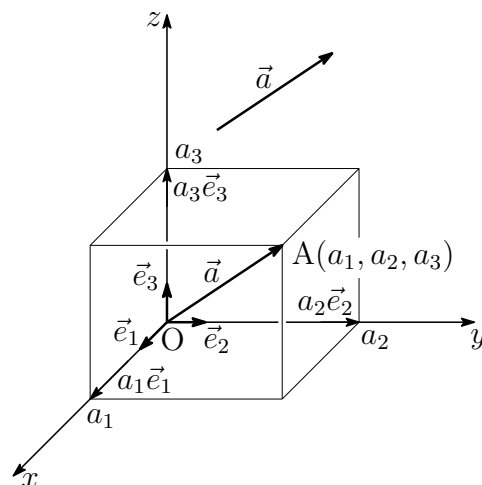
空間の零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は、 $\vec{0} = (0, 0, 0)$ である。

また、空間の2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ について、次が成り立つ。

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

練習 2.6 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が等しくなるように、 x, y, z の値を定めよ。 解

$$\vec{a} = (2, -1, -3), \quad \vec{b} = (x - 4, y + 2, -z + 1)$$



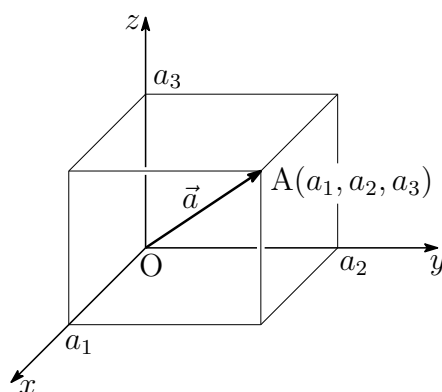
座標空間において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ となる点 A の座標が (a_1, a_2, a_3) であるとする。

このとき

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

であり、 $\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= OA \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{aligned}$$



である。

したがって、次のことが成り立つ。

ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ のとき

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

練習 2.7 次のベクトルの大きさを求めよ。 解

(1) $\vec{a} = (-1, 2, -2)$

(2) $\vec{b} = (-5, 3, -4)$

B 》 和，差，実数倍の成分表示

平面上の場合と同様に，空間のベクトルの和，差，実数倍の成分表示について，次のことが成り立つ。

和，差，実数倍の成分表示

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3) \quad k \text{ は実数}$$

例 2.4 $\vec{a} = (2, -3, 4)$, $\vec{b} = (-1, 0, 5)$ のとき

S

$$\begin{aligned} 3\vec{a} - 2\vec{b} &= 3(2, -3, 4) - 2(-1, 0, 5) \\ &= (6 + 2, -9 - 0, 12 - 10) \\ &= (8, -9, 2) \end{aligned}$$

練習 2.8 $\vec{a} = (1, 3, -2)$, $\vec{b} = (4, -3, 0)$ のとき, 次のベクトルを成分表示せよ. 解

(1) $\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\vec{a} - \vec{b}$

(3) $2\vec{a} + 3\vec{b}$

(4) $-3(\vec{a} - 2\vec{b})$

C 》座標空間の点とベクトル

原点 O と 2 点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ について, $\overrightarrow{AB}$ の成分は, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) \\ &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)\end{aligned}$$

したがって, 次のことがいえる.

2 点 A, B とベクトル $\overrightarrow{AB}$

2 点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ について

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

例 2.5 2 点 $A(-1, 0, 2)$, $B(2, 4, -3)$ について S

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 4 - 0, -3 - 2) = (3, 4, -5)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

練習 2.9 次の 2 点 A, B について, $\overrightarrow{AB}$ を成分表示し, $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ. 解

(1) $A(2, 1, 4)$, $B(3, -1, 5)$

(2) $A(3, 0, -2)$, $B(1, -4, 2)$

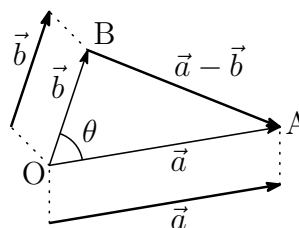
2.1.4 ベクトルの内積

平面上の2つのベクトルの内積は、三角形の余弦定理に関連して定義した。まったく同様にして、空間のベクトルにも内積を定義することができる。

A》空間のベクトルの内積

空間の $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、そのなす角 θ を平面上の場合と同様に定義し、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ も同じ式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$



で定義する。

空間のベクトルについても、17 ページで示した等式

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

が成り立つ。 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とすると

$$\begin{aligned} & (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

整理すると $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

したがって、次のことが成り立つ。

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のなす角を θ とする。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である。このとき

$$1 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$2 \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

注意 1 の式は、 $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも成り立つ。

例 2.6 2つのベクトル $\vec{a} = (2, -1, -2)$, $\vec{b} = (4, 3, -5)$ について、内積とそのなす角 θ を求める. S

$$\text{内積は} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 4 + (-1) \times 3 + (-2) \times (-5) = 15$$

$$\text{また} \quad |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{15}{3 \times 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

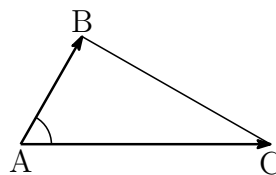
$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから} \quad \theta = 45^\circ$$

練習 2.10 次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積およびそのなす角 θ を求めよ. 解

$$(1) \quad \vec{a} = (2, -3, 1), \quad \vec{b} = (-3, 1, 2)$$

$$(2) \quad \vec{a} = (2, 4, 3), \quad \vec{b} = (-2, 1, 0)$$

例題 2.2 3点 $A(1, 3, 2)$, $B(2, 5, 3)$, $C(-1, 5, 6)$ を頂点とする $\triangle ABC$ において、 $\angle BAC$ の大きさを求めよ. S



解答 $\vec{AB} = (1, 2, 1)$ $\leftarrow \vec{AB} = (2-1, 5-3, 3-2)$

$\vec{AC} = (-2, 2, 4)$ $\leftarrow \vec{AC} = (-1-1, 5-3, 6-2)$

であるから $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \times (-2) + 2 \times 2 + 1 \times 4 = 6$

また $|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

よって $\cos \angle BAC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$

$0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$ であるから $\angle BAC = 60^\circ$

練習 2.11 3点 $A(6, 7, -8)$, $B(5, 5, -6)$, $C(6, 4, -2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ において、 $\angle ABC$ の大きさを求めよ. 解

B》ベクトルの垂直

空間のベクトルの垂直条件について、次のことが成り立つ.

ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

例題 2.3 ベクトル $\vec{a} = (2, -1, 0)$, $\vec{b} = (6, -2, 1)$ の両方に垂直で, 大きさが3のベクトル $\vec{p}$ を求めよ. S

解答 $\vec{p} = (x, y, z)$ とする.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ より } \vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \text{ であるから} \quad 2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \perp \vec{p} \text{ より } \vec{b} \cdot \vec{p} = 0 \text{ であるから} \quad 6x - 2y + z = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$|\vec{p}|^2 = 3^2 \text{ であるから} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から, } y, z \text{ を } x \text{ で表すと} \quad y = 2x, z = -2x$$

これらを $\textcircled{3}$ に代入すると

$$x^2 + (2x)^2 + (-2x)^2 = 9$$

$$\text{整理すると} \quad 9x^2 = 9 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm 1$$

$$x = 1 \text{ のとき} \quad y = 2, z = -2$$

$$x = -1 \text{ のとき} \quad y = -2, z = 2$$

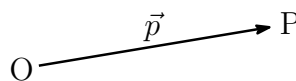
$$(\text{答}) \vec{p} = (1, 2, -2) \text{ または } \vec{p} = (-1, -2, 2)$$

補足 上のベクトル $\vec{p}$ を, $\vec{p} = (\pm 1, \pm 2, \mp 2)$ (複号同順) と書くことがある.

練習 2.12 ベクトル $\vec{a} = (2, 0, -1)$, $\vec{b} = (1, 3, -2)$ の両方に垂直で, 大きさが $\sqrt{6}$ のベクトル $\vec{p}$ を求めよ. 解

2.1.5 ベクトルの図形への応用

空間においても点Oを定めておくと、どんな点Pの位置も、ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ によって決まる。このようなベクトル $\vec{p}$ を、点Oに関する点Pの位置ベクトルという。



ここでは、位置ベクトルなどを用いて空間図形の性質を調べてみよう。

A》位置ベクトル

空間においても点Pの位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを、 $P(\vec{p})$ で表す。

以下、とくに断らない限り、点Oに関する位置ベクトルを考える。

平面上の場合と同様に、次のことが成り立つ。

- 1 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$
- 2 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して、線分ABを $m:n$ に内分する点、 $m:n$ に外分する点の位置ベクトルは、次のようになる。

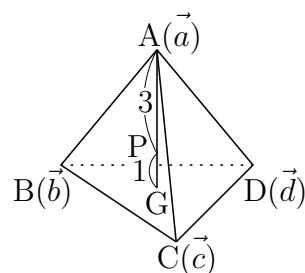
$$\text{内分} \quad \dots \quad \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n} \qquad \text{外分} \quad \dots \quad \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m - n}$$

とくに、線分ABの中点の位置ベクトルは $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

- 3 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心Gの位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

練習 2.13 4点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ を頂点とする四面体ABCDにおいて、 $\triangle BCD$ の重心を $G(\vec{g})$ 、線分AGを3:1に内分する点を $P(\vec{p})$ とする。 $\vec{p}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。 解



B》一直線上にある点

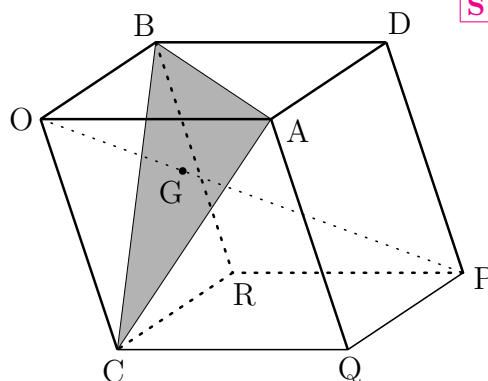
応用例題 2.1 右の図のような平行六面体において、 $\triangle ABC$ の重心を G とする. 3 点 O, G, P は一直線上にあることを証明せよ. S

考え方》 3 点が一直線上にあることの証明は、平面の場合と同様に考える.
空間においても、次のことが成り立つ.

点 G が直線 OP の上にある

$$\iff \overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OP}$$

となる実数 k がある.



証明 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

また、 G は $\triangle ABC$ の重心であるから

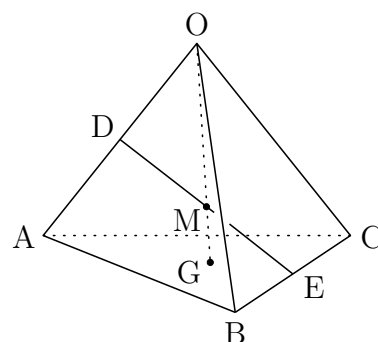
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

よって
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$$

したがって、3 点 O, G, P は一直線上にある.

証終

練習 2.14 四面体 $OABC$ において、辺 OA の中点を D 、辺 BC の中点を E とする. 線分 DE の中点を M 、 $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、3 点 O, M, G は一直線上にあることを証明せよ. 解

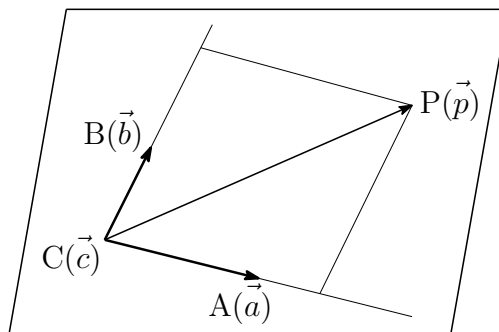


C》同じ平面上にある点

一直線上にない3点A, B, Cの定める平面ABCがある. この平面上に点Pがあるとき

$$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$$

となる実数 s, t が, ただ1組定まる. 逆に, この式を満たす実数 s, t があるとき, 点Pは平面ABC上にある. よって, 次のことが成り立つ.



点Pが平面ABC上にある

$$\iff \overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB} \text{ となる実数 } s, t \text{ がある.}$$

例題 2.4 3点A(3, 2, 1), B(2, 0, -2), C(1, 1, 0)の定める平面ABC上に点P(2, 3, z)があるとき, z の値を求めよ. [同じ平面上にある点] S

解答 $\overrightarrow{CP} = (1, 2, z)$, $\overrightarrow{CA} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{CB} = (1, -1, -2)$ に対して,
 $\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t があるから

$$(1, 2, z) = s(2, 1, 1) + t(1, -1, -2)$$

すなわち $(1, 2, z) = (2s + t, s - t, s - 2t)$

よって $1 = 2s + t \quad \dots \textcircled{1}$

$$2 = s - t \quad \dots \textcircled{2}$$

$$z = s - 2t \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②を解くと $s = 1, t = -1$

③に代入して $z = 1 - 2 \times (-1) = 3$ (答) $z = 3$

別解 (205 ページの外積 (4.1) を利用する解法)

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-1, 5, -3)$$

$(\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}) \perp \overrightarrow{CP}$ より, $(\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ であるから

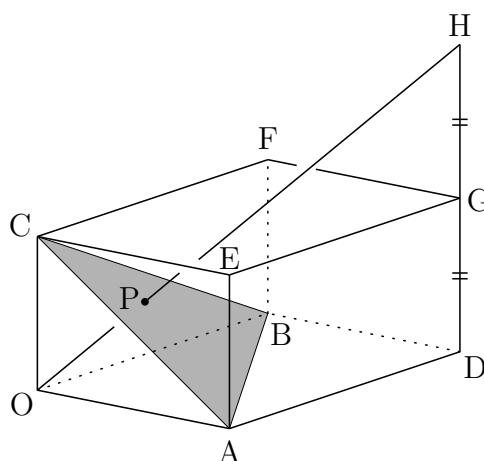
$$-1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot z = 0 \quad \text{これを解いて} \quad z = 3$$

練習 2.15 3点 $A(-1, 2, -1)$, $B(2, -2, 3)$, $C(2, 4, -1)$ の定める平面 ABC 上に点 $P(x, 3, 1)$ があるとき, x の値を求めよ. 解

応用例題 2.2 右の図のような直方体 OADB-CEGF において、辺 DG の G を超える延長上に $DG = GH$ となるように点 H をとり、直線 OH と平面 ABC の交点を P とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とするとき、 $\vec{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

[S]

考え方》 P が直線 OH 上にあること、平面 ABC 上にあることから、 $\vec{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて 2 通りに表す。



解答

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DH} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$$

P は直線 OH 上にあるから、 $\vec{OP} = k\vec{OH}$ となる実数 k がある。

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OP} &= k(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) \\ &= k\vec{a} + k\vec{b} + 2k\vec{c} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また、P は平面 ABC 上にあるから、 $\vec{CP} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$ となる実数 s , t がある。

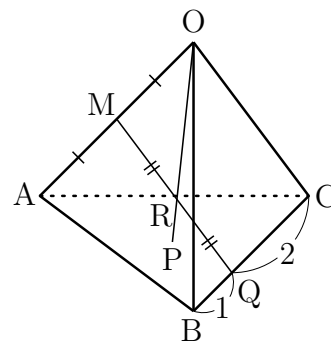
$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OP} &= \vec{OC} + \vec{CP} = \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c}) \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} + (1 - s - t)\vec{c} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

4 点 O, A, B, C は同じ平面上にないから、 $\vec{OP}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いた表し方はただ 1 通りである。

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } k = s, k = t, 2k = 1 - s - t$$

$$\text{これを解くと、 } k = \frac{1}{4} \text{ であるから } \vec{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

練習 2.16 四面体 OABC において、辺 OA の中点を M、辺 BC を 1:2 に内分する点を Q、線分 MQ の中点を R とし、直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とするとき、 $\vec{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。 **[解]**



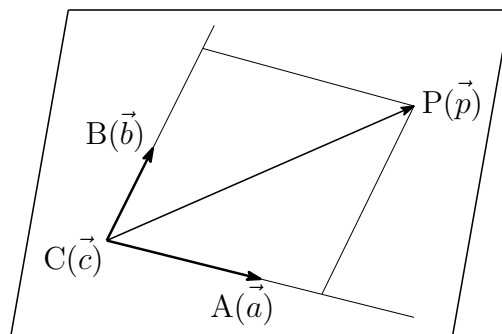
発展

一直線上にない3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ の定める平面 ABC 上に点 P が
あるとき

$$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$$

となる実数 s, t が、ただ1組定まる.

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \vec{p} - \vec{c} &= s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c}) \\ \text{すなわち} \quad \vec{p} &= s\vec{a} + t\vec{b} + (1 - s - t)\vec{c} \end{aligned}$$



逆に、この式を満たす実数 s, t があるとき、点 P は平面 ABC 上にある。
 $1 - s - t = u$ とおくと、次のことが成り立つ.

一直線上にない3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ について

点 P が平面 ABC 上にある

$$\iff \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}, \quad s + t + u = 1 \text{ となる実数 } s, t, u \text{ がある.}$$

このことを利用して、前ページの応用例題 2.2 を解いてみよう.

解答 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$

P は直線 OH 上にあるから、 $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OH}$ となる k がある.

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OP} = k(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) = k\vec{a} + k\vec{b} + 2k\vec{c}$$

$$\text{また、P は平面 ABC 上にあるから} \quad k + k + 2k = 1$$

これを解くと、 $k = \frac{1}{4}$ であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

C》内積の利用

空間のベクトルについても、21 ページで示した内積の性質は、すべて成り立つ。
内積を利用して、空間図形の性質を証明してみよう。

応用例題 2.3 正四面体 ABCD において、 $AB \perp CD$ が成り立つ。

S

このことを、ベクトルを用いて証明せよ。

考え方》 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ として、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ を示す。正四面体の各面が正三角形であることも利用する。

証明 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \vec{b} \cdot (\vec{d} - \vec{c}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

正四面体 ABCD においては、 $\vec{b}$ と $\vec{d}$, $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は、ともに 60° であるから

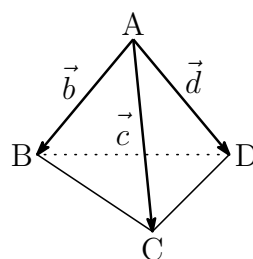
$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{d} &= |\vec{b}| |\vec{d}| \cos 60^\circ, \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| |\vec{c}| \cos 60^\circ\end{aligned}$$

$|\vec{d}| = |\vec{c}|$ であるから $\vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c}$

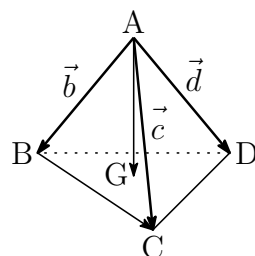
よって、①により $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ であり、 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ となる。

したがって $AB \perp CD$

証終



練習 2.17 正四面体 ABCD において、 $\triangle BCD$ の重心を G とすると、 $AG \perp BC$ である。このことを、ベクトルを用いて証明せよ。解



2.1.6 座標空間における図形

座標空間において、2点間の距離、線分の内分点・外分点の座標、座標平面に平行な平面や球について調べてみよう。

A》2点間の距離と内分点・外分点の座標

座標空間の2点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ について、A, B間の距離を表す式は、 $AB = |\overrightarrow{AB}|$ であることから得られる。

また、線分 AB を $m:n$ に内分する点を P, 外分する点を Q とすると、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{-n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m-n} \quad \leftarrow O \text{ は原点}$$

である。以上から、次のことがいえる。

2点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ について

1 A, B間の距離は

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

2 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n} \right)$$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \frac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \frac{-na_3 + mb_3}{m-n} \right)$$

練習 2.18 2点 $A(1, 3, -2)$, $B(4, -3, 1)$ について、次のものを求めよ。 解

- (1) 2点 A, B間の距離
- (2) 線分 AB の中点の座標
- (3) 線分 AB を 2:1 に内分する点の座標
- (4) 線分 AB を 2:1 に外分する点の座標

練習 2.19 3点 $A(2, -1, 4)$, $B(1, 3, 0)$, $C(3, 1, 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標を、原点 O に関する位置ベクトルを利用して求めよ。 解

B》座標平面に平行な平面の方程式

座標平面に平行な平面について考えてみよう.

点 $C(0, 0, c)$ を通り, xy 平面に平行な平面を α とする.

平面 α 上にある点 P の z 座標は常に c である.

すなわち, 平面 α は方程式

$$z = c \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす点 (x, y, z) 全体である.

$\textcircled{1}$ を平面 α の方程式という.

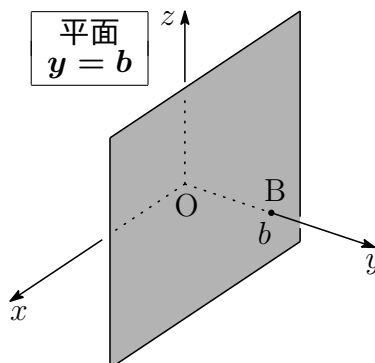
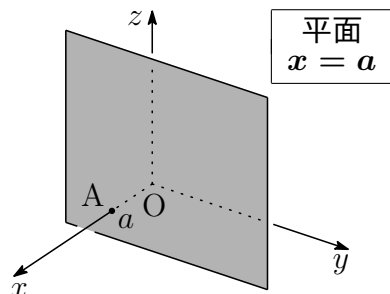
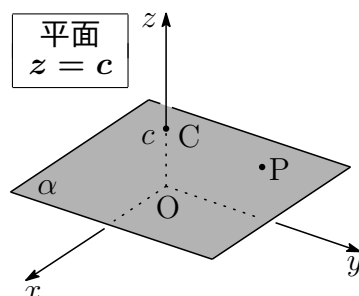
一般に, 次のことがいえる.

座標平面に平行な平面の方程式

点 $A(a, 0, 0)$ を通り, yz 平面に平行な平面の方程式は $x = a$

点 $B(0, b, 0)$ を通り, zx 平面に平行な平面の方程式は $y = b$

点 $C(0, 0, c)$ を通り, xy 平面に平行な平面の方程式は $z = c$



注意 平面 $x = a$ は x 軸に垂直, 平面 $y = b$ は y 軸に垂直, 平面 $z = c$ は z 軸に垂直である.

練習 2.20 点 $(1, 2, 3)$ を通り, 次のような平面の方程式を求めよ. 解

- (1) xy 平面に平行 (2) yz 平面に平行 (3) y 軸に垂直

C》球面の方程式

空間において、定点 C からの距離が一定値 r であるような点の全体を、 C を中心とする半径 r の球面、または単に球という。

点 $C(a, b, c)$ を中心とする半径 r の球面上に点 $P(x, y, z)$ をとると、

$$CP = r \quad \text{すなわち} \quad CP^2 = r^2$$

よって

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

が成り立つ。これを、この球面の方程式という。

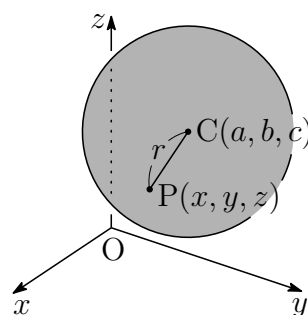
球面の方程式

点 (a, b, c) を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

とくに、原点を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



例 2.7 点 $(2, -3, 4)$ を中心とする半径 5 の球面の方程式は

S

$$(x - 2)^2 + \{y - (-3)\}^2 + (z - 4)^2 = 5^2$$

$$\text{すなわち} \quad (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 25$$

練習 2.21 次のような球面の方程式を求めよ。 **解**

- (1) 原点を中心とする半径 3 の球面
- (2) 点 $(1, 2, -3)$ を中心とする半径 4 の球面
- (3) 点 $A(0, 4, 1)$ を中心とし、点 $B(2, 4, 5)$ を通る球面
- (4) 2 点 $A(2, 0, -3)$, $B(-2, 6, 1)$ を直径の両端とする球面

応用例題 2.4 球面 $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$ と xy 平面が交わる部分は円である．その円の中心の座標と半径を求めよ． S

考え方 》 xy 平面は方程式 $z=0$ で表される．球面の方程式で， $z=0$ とすると， x, y の2次方程式が得られる．

解答 球面の方程式で， $z=0$ とすると

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 + (0-3)^2 = 5^2$$

$$\text{すなわち} \quad (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4^2 \quad \leftarrow 5^2 - 3^2 = 16 = 4^2$$

この方程式は， xy 平面上では円を表す． $\leftarrow xy$ 平面上では， z 座標 $= 0$

その中心の座標は $(4, -2, 0)$ ，半径は4である．

補足 応用例題 2.4 の円は，次のような2つの方程式で表わされる．

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 4^2, \quad z=0$$

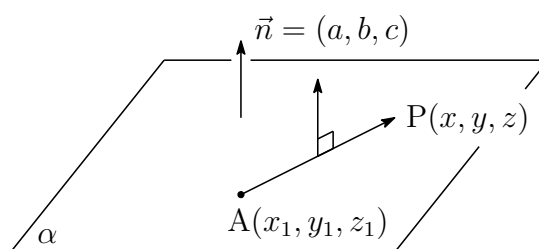
練習 2.22 応用例題 2.4 の球面と yz 平面が交わる部分は円である．その中心の座標と半径を求めよ． 解

発展

平面の方程式

点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り，ベクトル $\vec{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面 α 上の点を $P(x, y, z)$ とする． P が A に一致しないとき， $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ である．すなわち

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$



が成り立つ． P が A に一致するときも， $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ より $\textcircled{1}$ が成り立つ．

この等式を成分で表した次の式が，平面 α を表す方程式である．

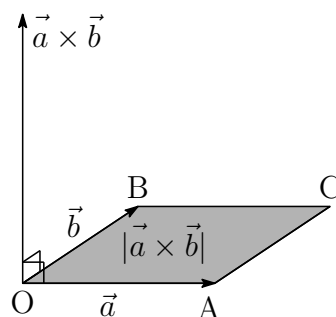
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

演習 2.1 点 $(3, 1, -1)$ を通り，ベクトル $\vec{n} = (2, -1, 4)$ に垂直な平面の方程式を求めよ． 解

発見

ベクトルの外積

空間のベクトルでは、空間特有の演算として、外積というものを考えることができます。ここでは、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積を $\vec{a} \times \vec{b}$ と表します。外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は、 $\vec{a}$ にも $\vec{b}$ にも垂直なベクトルで、その向きは、 $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の角度 θ でまわるとき、右ねじの進む向きと定めます。右ねじとは時計回りにまわすと奥に進むねじです。また、 $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は、図のように $\vec{a}$ と $\vec{b}$ でできる平行四辺形OACBの面積です。また、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の少なくとも一方が $\vec{0}$ のとき、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行の時はその外積は $\vec{0}$ と定めます。



確認 座標空間において、 x 軸、 y 軸、 z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを、それぞれ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ とする。このとき

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 &= \vec{0}, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 &= \vec{0}, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 &= \vec{0}, \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。これらの外積の順序を交換すると

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

発見 ベクトルの外積には、内積と同じように、次の性質があります。

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, & (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \\ (k\vec{a}) \times \vec{b} &= \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned}$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ は、次のようにかける。

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

上の性質を利用して外積の成分表示を求めると

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

結論 2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積の成分表示は

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

2.1.7 問題

問題 2.1 $\vec{p} = (-1, 5, 0)$ を, 3つのベクトル $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 0)$, $\vec{c} = (2, -3, 1)$ と適当な実数 s, t, u を用いて, $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ の形に表せ. 解

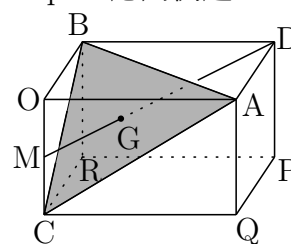
→ p.59~60

問題 2.2 2つのベクトル $\vec{a} = (5, -2+t, 1+2t)$, $\vec{b} = (1, 0, 0)$ のなす角が 45° になるように, t の値を求めよ. 解

→ p.63

問題 2.3 右の図のような直方体において, $\triangle ABC$ の重心を G , 辺 OC の中点を M とするとき, 点 G は線分 DM 上にあり, DM を $2:1$ に内分することを証明せよ. 解

p.66 応用例題 2.1



問題 2.4 3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 0, 1)$ から等距離にある yz 平面上の点 P の座標を求めよ. 解

→ p.72

問題 2.5 2点 $A(4, 0, 5)$, $B(0, 2, 1)$ を通る直線上の点のうち, 原点 O との距離が最小となる点を P とする. 解

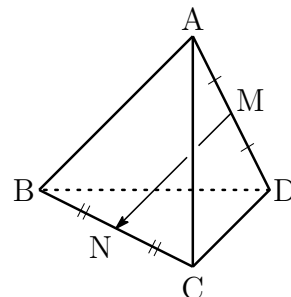
(1) 直線 AB と直線 OP の間に成り立つ関係を予想せよ.

(2) 点 P の座標を求めよ. また, (1) で予想した関係が成り立つことを示せ.

2.2 章末問題

2.2.1 章末問題 A

章末 2.1 四面体 ABCD の辺 AD の中点を M, 辺 BC の中点を N とするとき,
 $\overrightarrow{MN} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{DC}$ を満たす実数 s, t の値を求めよ. 解

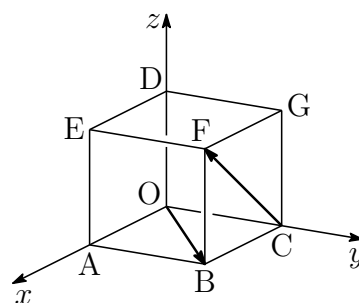


章末 2.2 座標空間に平行四辺形 ABCD があり, $A(1, 2, 1), B(5, 5, -1), C(x, y, z), D(-4, 2, 3)$ であるとする. x, y, z の値を求めよ. 解

章末 2.3 $\vec{a} = (1, 3, -2), \vec{b} = (1, -2, 0)$ と実数 t に対して, $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$ とする. $\vec{b} \perp \vec{p}$ となるような t の値を求めよ. また, このときの $|\vec{p}|$ を求めよ. 解

章末 2.4 右の図の立方体 OABC-DEFG は, 1 辺の長さが 2 である. 解

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{CF}$ を成分表示せよ.
- (2) 内積 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CF}$ を求めよ.
- (3) ベクトル $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{CF}$ のなす角を求めよ.



章末 2.5 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を、それぞれ x 軸, y 軸, z 軸に関する基本ベクトルとし、ベクトル $\vec{a} = (-1, \sqrt{2}, 1)$ と $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ のなす角をそれぞれ α, β, γ とする. 解

- (1) $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ の値を求めよ.
- (2) α, β, γ を求めよ.

章末 2.6 2点 $A(1, 2, 2), B(2, 3, 4)$ に対して、 A, B から等距離にある x 軸上の点を P とする. 解

- (1) 点 P の座標を求めよ.
- (2) $\triangle ABP$ の重心 G の座標を求めよ.

章末 2.7 球面 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 5^2$ と平面 $z=3$ が交わる部分は円である. その円の中心の座標と半径を求めよ. 解

2.2.2 章末問題 B

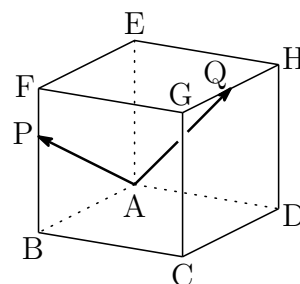
章末 2.8 3点 $A(a, -1, 5)$, $B(4, b, -7)$, $C(5, 5, -13)$ が一直線上あるとき, a , b の値を求めよ. 解

章末 2.9 3点 $O(0, 0, 0)$, $A(-1, -2, 1)$, $B(2, 2, 0)$ を頂点とする $\triangle OAB$ について, 次の問いに答えよ. 解

- (1) $\angle AOB$ の大きさを求めよ.
- (2) $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ.

章末 2.10 1 辺の長さが 2 の立方体 $ABCD-EFGH$ において, 辺 BF 上に点 P をとり, 辺 GH 上に点 Q をとる. 解

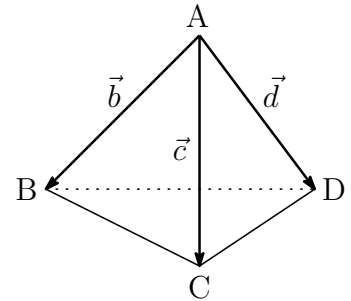
- (1) $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{HQ}$ を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ を $|\overrightarrow{BP}|$, $|\overrightarrow{HQ}|$ を用いて表せ.
- (3) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ の最大値を求めよ.



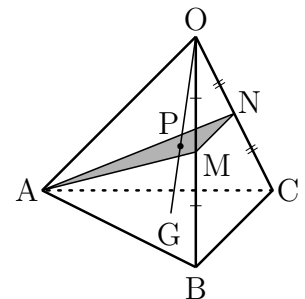
章末 2.11 四面体 ABCD において、次のことが成り立つ.

$$AC \perp BD \quad \text{ならば} \quad AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

このことを、ベクトルを用いて証明せよ. 解



章末 2.12 四面体 OABC において、 $\triangle ABC$ の重心を G, 辺 OB の中点を M, 辺 OC の中点を N とする. 直線 OG と平面 AMN の交点を P とするとき, $OG : OP$ を求めよ. 解



ヒント

- 8 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 k があることを利用する.
- 10 (2) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HQ}$
- 11 ベクトルの内積を利用する.
- 12 応用例題 2.2 参照.

第 3 章 複素数平面

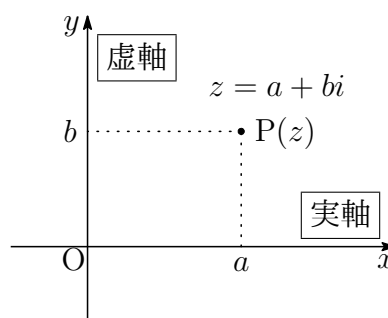
3.1.1 複素数平面

すべての実数は数直線上の点として表される．ここでは，複素数を座標平面上の点で表すことを考えよう．
[\[内容\]](#) [\[公式・用語集\]](#) [\[解説動画\]](#) [\[資料\]](#)

A 》複素数平面

数学 II で学んだように，複素数は 2 つの実数 a, b と虚数単位 i を用いて $a + bi$ の形で表される¹． a を実部， b を虚部という． $b = 0$ のときの複素数 $a + 0i$ は実数 a を表す． $b \neq 0$ のときの複素数 $a + bi$ を虚数といい，とくに $a = 0$ である虚数 bi を純虚数という．

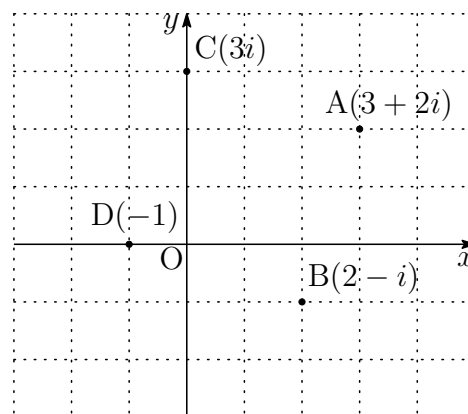
複素数 $a + bi$ に対して，座標平面上の点 (a, b) を対応させると，どんな複素数も座標平面上の点で表すことができる．このように，複素数を点で表す座標平面を複素数平面または複素平面という．複素数平面上の 1 つの点は，1 つの複素数を表す．



複素数平面を考える場合， x 軸を実軸， y 軸を虚軸という．実軸上の点は実数を表し，虚軸上の原点 O 以外の点は純虚数を表す．

複素数平面上で複素数 z を表す点 P を $P(z)$ と書く．また，この点を点 z ということがある．たとえば，点 0 とは原点 O のことである．

例 3.1 複素数平面上に，点 $A(3 + 2i)$ ， $B(2 - i)$ ， $C(3i)$ ， $D(-1)$ を図示すると，右のようになる． S



練習 3.1 次の点を右の図に示せ． 解

$P(3 - 2i)$ ， $Q(-1 + i)$ ， $R(4)$ ， $S(-i)$

¹以下，複素数 $a + bi$ や $c + di$ などでは，文字 a, b, c, d は実数を表すものとする．

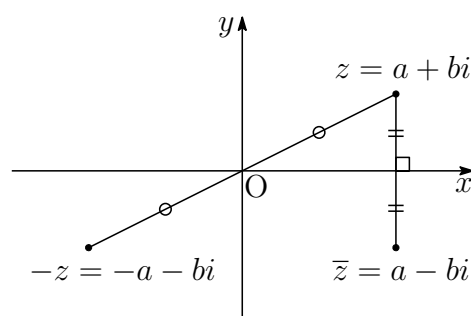
複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す. すなわち, $z = a + bi$ に対して, $\bar{z} = a - bi$ である. $\bar{z}$ を z の共役複素数ともいう.

複素数 $z = a + bi$ に対しては,

$$\bar{z} = a - bi, \quad -z = -a - bi$$

である.

複素数平面上で, z , $\bar{z}$, $-z$ を表す点を図示すると, 次のことがいえる.



点 z と点 $\bar{z}$ は実軸に関して対称である.

点 z と点 $-z$ は原点に関して対称である.

注意 $\bar{z}$ の共役複素数は z である. すなわち, $\overline{\bar{z}} = z$ である.

練習 3.2 複素数平面上で, 点 z と点 $-\bar{z}$ の位置関係を調べよ. 解

点 z が実軸上にあれば, 点 $\bar{z}$ は点 z と一致するから, $\bar{z} = z$ である. また, 原点 O と異なる点 z が虚軸上にあれば, 点 $\bar{z}$ は虚軸上にあり, かつ点 z と原点 O に関して対称になるから, $\bar{z} = -z$ である.

複素数 z について, 次のことが成り立つ.

- 1 z が実数 $\iff \bar{z} = z$
- 2 z が純虚数 $\iff \bar{z} = -z$ ただし, $z \neq 0$

練習 3.3 複素数 $z = a + bi$ について, 次の問いに答えよ. 解

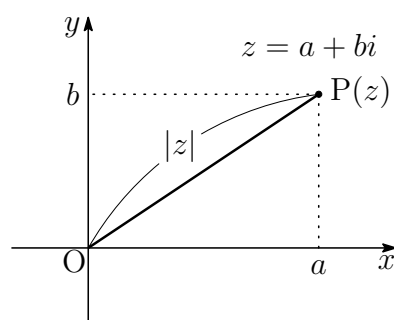
- (1) a, b をそれぞれ z と $\bar{z}$ を用いて表せ.
- (2) (1) の結果を利用して, 上の 1, 2 が成り立つことを確かめよ.

B 複素数の絶対値

複素数平面上の2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ 間の距離は、座標平面上の場合と同様に線分 AB の長さを考える.

原点 O と点 $P(z)$ との距離を、複素数 z の絶対値といい、 $|z|$ で表す.

$z = a + bi$ のとき、 $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$ であるから、次のことがいえる.



複素数の絶対値

複素数 $a + bi$ の絶対値は $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

補足 z が実数のとき、 $|z|$ は実数の絶対値と一致する.

例 3.2 複素数 $3 + 2i$ の絶対値は

S

$$|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

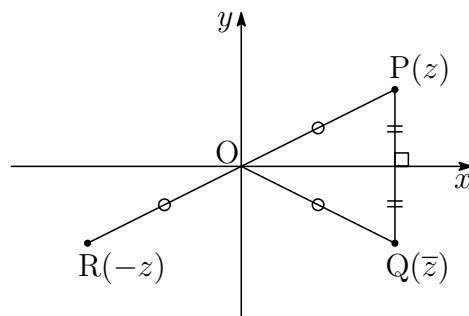
練習 3.4 次の複素数の絶対値を求めよ. 解

- (1) $3 - 2i$
- (2) $-2 + 4i$
- (3) -5
- (4) $3i$

原点 O と点 $P(z)$, $Q(\bar{z})$, $R(-z)$ の位置関係により,

$$OP = OQ = OR$$

となるから、複素数 z について、次のことがいえる.



$$|z| = |\bar{z}| = |-z|$$

練習 3.5 複素数 z について、 $|-z| = |z|$ であることを確かめよ. 解

C》複素数の和，差の図示

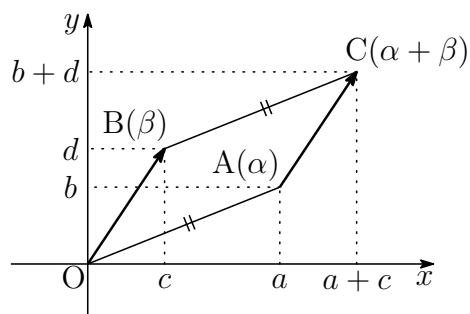
複素数の和，差を複素数平面上で図示してみよう．

2つの複素数

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = c + di$$

の和は $\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$

である．そこで，複素数平面上に3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\alpha + \beta)$ をとると，次のことがいえる．



点 $C(\alpha + \beta)$ は，原点 O を点 $B(\beta)$ に移す平行移動によって点 $A(\alpha)$ が移る点である．

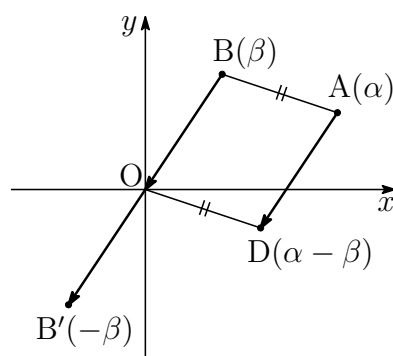
注意 右上の図において，四角形 $OACB$ は平行四辺形である．

2つの複素数 α , β の差 $\alpha - \beta$ は

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

と表すことができる．

そこで，複素数平面上に4点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $B'(-\beta)$, $D(\alpha - \beta)$ をとると，次のことがいえる．

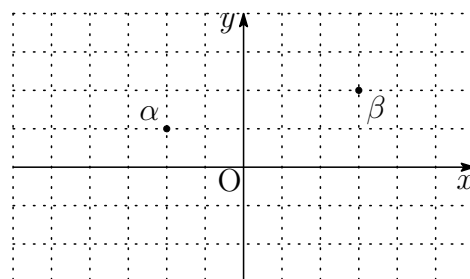


点 $D(\alpha - \beta)$ は，原点 O を点 $B'(-\beta)$ に移す平行移動，すなわち，点 $B(\beta)$ を原点 O に移す平行移動によって点 $A(\alpha)$ が移る点である．

練習 3.6 右の図の複素数平面上の点 α , β について，次の点を図に示せ． 解

(1) $\alpha + \beta$

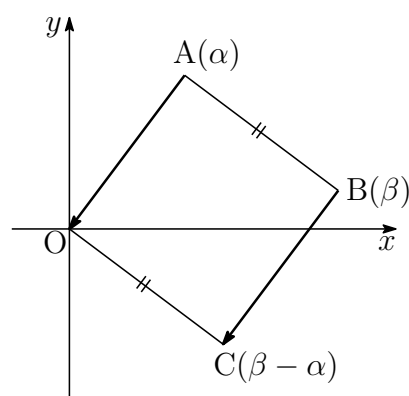
(2) $\alpha - \beta$



複素数の差について、右の図より、 $AB = OC$ であるから、次のことがいえる。

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ 間の距離 AB は

$$AB = |\beta - \alpha|$$



例 3.3 2点 $A(2 + 3i)$, $B(5 + i)$ 間の距離 AB は

S

$$AB = |(5 + i) - (2 + 3i)| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

練習 3.7 次の2点間の距離を求めよ。 **解**

(1) $A(2 + 3i)$, $B(1 + 6i)$

(2) $C(3 - 4i)$, $D(1 - 2i)$

発見

複素数平面とベクトル

前ページでは、2つの複素数の和、差を複素数平面上に図示しました。ここでは、複素数平面とベクトルの関係について考察してみましょう。

以下、 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ とします。

確認 複素数平面上に3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\alpha + \beta)$ をとる。

$\overrightarrow{OA} = (a, b)$ とするとき、 $\overrightarrow{OC}$ を成分表示してみよう。

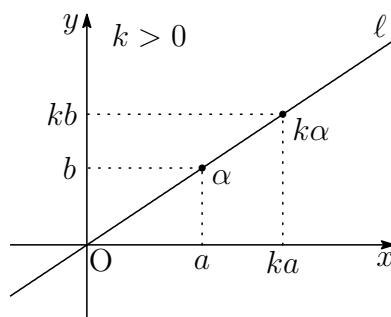
上のようにして、複素数平面上の1つの複素数に対して、1つのベクトルを対応させることができます。

発見 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ の間にはどのような関係式が成り立つだろうか。

整理 2つの複素数 α , β の和、差と、 α , β を表す複素数平面上の点の位置ベクトルの和、差の間にはどのような関係があるだろうか。

D》複素数の実数倍

実数 k と複素数 $\alpha = a + bi$ について、 $k\alpha = ka + kbi$ である。よって、 $a \neq 0$ のとき、点 $k\alpha$ は2点 0 , α を通る直線 ℓ 上にある。 $k = 0$ のとき点 $k\alpha$ は直線 ℓ 上にある。 $k = 0$ のとき点 $k\alpha$ は点 0 と一致する。



逆に、この直線 ℓ 上の点は、 α の実数倍の複素数を表す。

補足 点 $(-k)\alpha$ は、点 $k\alpha$ と原点 O に関して対称である。

よって、 $\alpha \neq 0$ のとき、次のことが成り立つ。

3点 0 , α , β が一直線上にある $\iff \beta = k\alpha$ となる実数 k がある

複素数 α を表す点を A , $k\alpha$ を表す点を B とすると、線分 OB の長さは線分 OA の長さの $|k|$ 倍である。すなわち、 $OB = |k|OA$ である。

補足 $|k\alpha| = |k||\alpha|$ が成り立つ。

例題 3.1 $\alpha = 4 + 2i$, $\beta = x - i$ とする。2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき、実数 x の値を求めよ。 S

解答 $\beta = k\alpha$ となる実数 k がある。

$$\begin{aligned} x - i &= k(4 + 2i) \text{ から} & x - i &= 4k + 2ki \\ x, 4k, 2k &\text{は実数であるから} & x &= 4k, -1 = 2k \\ k &= -\frac{1}{2} \text{ であるから} & x &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \end{aligned}$$

練習 3.8 $\alpha = 3 - 6i$, $\beta = 1 + yi$ とする。2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ と原点が一直線上にあるとき、実数 y の値を求めよ。 解

E》共役複素数の性質

複素数 α, β について、次のことが成り立つ.

共役複素数の性質

$$1 \quad \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$$2 \quad \overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$$

$$3 \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$$

$$4 \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

証明 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ とすると $\overline{\alpha} = a - bi, \overline{\beta} = c - di$

$$1 \quad \alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \text{ から}$$

$$\overline{\alpha + \beta} = (a + c) - (b + d)i$$

$$\text{また } \overline{\alpha} + \overline{\beta} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$$

$$\text{よって } \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$$2 \quad \alpha - \beta = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \text{ から}$$

$$\overline{\alpha - \beta} = (a - c) - (b - d)i$$

$$\text{また } \overline{\alpha} - \overline{\beta} = (a - bi) - (c - di) = (a - c) - (b - d)i$$

$$\text{よって } \overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$$

$$3 \quad \alpha\beta = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \text{ から}$$

$$\overline{\alpha\beta} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$\text{また } \overline{\alpha}\overline{\beta} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$\text{よって } \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$$

$$4 \quad \frac{\alpha}{\beta} = \gamma \text{ とおくと, } \alpha = \beta\gamma \text{ より (3) を利用する)}$$

$$\overline{\alpha} = \overline{\beta\gamma} = \overline{\beta}\overline{\gamma} \quad \text{ゆえに} \quad \overline{\gamma} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \quad \text{よって} \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

証終

注意 3 が成り立つから、 n を自然数とすると、 $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$ が成り立つ。

例 3.4 複素数 α, β について, $\alpha + \beta = 1$ のとき, 両辺の共役複素数を考えると S

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{1} \quad \text{すなわち} \quad \bar{\alpha} + \bar{\beta} = 1$$

練習 3.9 複素数 α, β について, $\alpha + \beta + i = 0$ のとき, $\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ を求めよ. 解

$z = a + bi$ とすると, $\bar{z} = a - bi$ であるから

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (a + bi) + (a - bi) = 2a, \\ z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

よって, 複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ について, 次のことが成り立つ.

$$\begin{array}{ll} 1 & z + \bar{z} \text{ は実数である} \\ 2 & z\bar{z} = |z|^2 \end{array}$$

例題 3.2 複素数 α について, 次のことを証明せよ. S

$$|\alpha| = 1 \text{ のとき, } \alpha + \frac{1}{\alpha} \text{ は実数である.}$$

考え方》上の 2 と 84 ページの「 z が実数 $\iff \bar{z} = z$ を利用する」

証明 $|\alpha| = 1$ のとき, $|\alpha|^2 = 1$ であるから

$$\alpha\bar{\alpha} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{ここで} \quad \overline{\alpha + \frac{1}{\alpha}} = \bar{\alpha} + \overline{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \bar{\alpha} + \frac{1}{\bar{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} + \alpha$$

$$\text{よって, } \overline{\alpha + \frac{1}{\alpha}} = \alpha + \frac{1}{\alpha} \text{ であるから, } \alpha + \frac{1}{\alpha} \text{ は実数である.}$$

証終

練習 3.10 複素数 α について, 次のことを証明せよ. 解

$$|\alpha| = 1 \text{ のとき, } \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \text{ は実数である.}$$

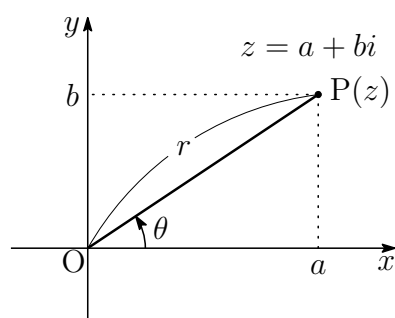
深化 3.1 上の 1 を利用して, 例題 3.2 を証明してみよう. 解

3.1.2 複素数の極形式

これまで、複素数は実数 a, b を用いて $a + bi$ のように表してきた。
ここでは、複素数平面を利用した複素数のもうひとつの表し方を学び、複素数の積や商の計算に利用してみよう。

A》極形式

複素数平面上で、0 でない複素数 $z = a + bi$ を表す点を P とし、線分 OP の長さを r とする。また、半直線 OP の長さを r とする。また、半直線 OP を、実軸の正の部分が始線とした動径と考えて、動径 OP の表す角を θ とすると



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

である。よって、0 でない複素数 z は次の形にも表される。

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ただし、 $r > 0$ で、 θ は弧度法で表された一般角である。

これを複素数 z の極形式という。 r は z の絶対値である。また、角 θ を z の偏角といい、 $\arg z$ で表す²。

すなわち $r = |z|$, $\theta = \arg z$

とくに、絶対値が1の複素数 z の極形式は、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ である。

複素数 z の偏角 θ は、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲や $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲でただ1通りに定まる。

z の偏角の1つを θ_0 とすると、 z の偏角は一般に次のように表される。

$$\arg z = \theta_0 + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

注意 以下、複素数を極形式で表すとき、その複素数は0でないものとする。

² $\arg$ は「偏角」を意味する英語 argument を略したものである。

例題 3.3 複素数 $1 + \sqrt{3}i$ を極形式で表せ. ただし, 偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする. S

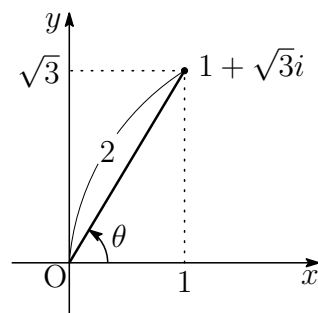
解答 $1 + \sqrt{3}i$ の絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{よって } 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

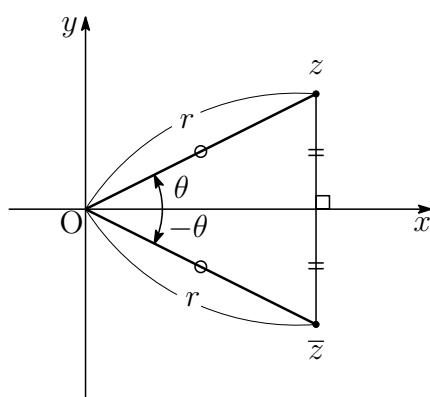


練習 3.11 次の複素数を極形式で表せ. ただし, 偏角 θ の範囲は,
(1), (2) では $0 \leq \theta < 2\pi$, (3), (4) では $-\pi < \theta \leq \pi$ とする. 解

複素数 z と $\bar{z}$ は実軸に関して対称である. よって, 複素数 z の偏角を θ とするとき, $\bar{z}$ の偏角の 1 つは, $\arg \bar{z} = -\theta$ である. また, $|z| = |\bar{z}|$ であるから, z と $\bar{z}$ の極形式について, 次のことがいえる.

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のとき

$$\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}$$



練習 3.12 複素数 z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする. このとき, $-z$ の極形式について, 次のことを示せ. 解

$$-z = r\{\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)\}$$

B》極形式で表された複素数の積と商

ここでは、極形式で表された複素数の積と商について考えてみよう。
まず、絶対値が1である2つの複素数

$$\cos \theta_1 + i \sin \theta_1, \quad \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$$

の積と商の計算をしてみよう。この計算には、数学IIで学習した三角関数の加法定理³を用いる。

$$\begin{aligned} \text{積} \quad & (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{商} \quad & \frac{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} \\ &= \frac{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \\ &= \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

一般に、次のことがいえる。

極形式で表された複素数の積と商

$\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad \beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき

$$\alpha\beta = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}$$

例 3.5 $\alpha = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right), \quad \beta = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ のとき

S

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= 2\sqrt{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi \right) \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

³ $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2, \quad \sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$
 $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$

練習 3.13 次の複素数 α, β について, $\alpha\beta, \frac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ. ただし, 偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする. 解

$$\alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad \beta = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

複素数の積と商について, 次のことが成り立つ.

複素数の積と商の絶対値と偏角

$$1 \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \qquad \arg \alpha\beta = \arg \alpha + \arg \beta$$

$$2 \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \qquad \arg \frac{\alpha}{\beta} = \arg \alpha - \arg \beta$$

注意 偏角についての等式では, 2π の整数倍の違いは無視して考える.

1 より, 複素数 z と自然数 n について, $|z^n| = |z|^n$ が成り立つ.

練習 3.14 複素数 α, β について, $|\alpha| = 2, |\beta| = 3$ のとき, 次の値を求めよ. 解

(1) $|\alpha\beta|$

(2) $|\alpha^3|$

(3) $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$

(4) $\left| \frac{\beta}{\alpha^2} \right|$

C》複素数の積と図形

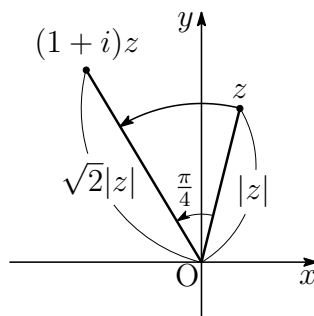
2つの複素数 α と z の積 αz について、その絶対値と偏角は、次のようになる。

$$|\alpha z| = |\alpha||z|, \quad \arg \alpha z = \arg \alpha + \arg z$$

このことから、複素数の積について、複素数平面上で考えてみよう。

例 3.6 $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ より、
点 $(1+i)z$ は、点 z を原点を中心
として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、原点からの
距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。 S

[複素数の積と図形]



練習 3.15 次の点は、点 z をどのように移動した点であるか。 解

(1) $(1 + \sqrt{3}i)z$

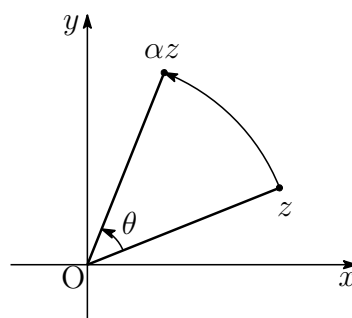
(2) $(-1 + i)z$

(3) $2iz$

絶対値が1である複素数 $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ と
複素数 z との積 αz について、次のことがいえる。

原点を中心とする回転

$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ と z に対して、点 αz は、
点 z を原点を中心として θ だけ回転した点
である。



とくに、 $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, $-i = \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ であるから、次のこと
がいえる。

点 iz は、点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

点 $-iz$ は、点 z を原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

例題 3.4 $z = 2 - 4i$ とする。点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素
数 w を求めよ。 S

解答
$$w = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (2 - 4i)$$

$$= (\sqrt{3} + 2) + (-2\sqrt{3} + 1)i$$

練習 3.16 $z = 4 - 2i$ とする. 点 z を原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ. 解

- (1) $\frac{\pi}{6}$
- (2) $\frac{2}{3}\pi$
- (3) $-\frac{\pi}{2}$
- (4) $-\frac{\pi}{3}$

応用例題 3.1 $\alpha = 5 + \sqrt{3}i$ とする. 複素数平面上の3点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形が, 正三角形であるとき, β の値を求めよ. S

考え方 点 β は, 点 α を原点を中心 to $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である.

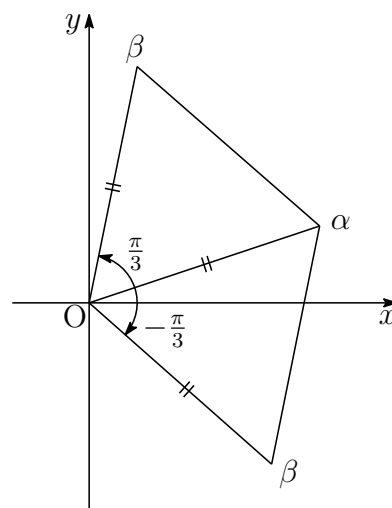
解答 点 β は, 点 α を原点を中心 to $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$$\begin{aligned}\beta &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \alpha \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (5 + \sqrt{3}i) = 1 + 3\sqrt{3}i\end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}\beta &= \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \alpha \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (5 + \sqrt{3}i) = 4 - 2\sqrt{3}i\end{aligned}$$

よって $\beta = 1 + 3\sqrt{3}i$ または $\beta = 4 - 2\sqrt{3}i$



練習 3.17 $\alpha = 2 + 2i$ とする. 複素数平面上の3点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形が, 正三角形であるとき, β の値を求めよ. 解

3.1.3 ド・モアブルの定理

ここでは、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ について考えよう.

A》ド・モアブルの定理

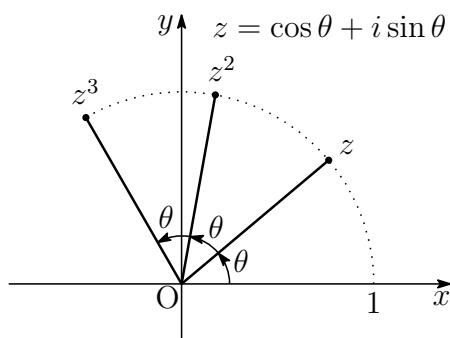
95 ページで学んだことから、絶対値が1の複素数に

$$\cos \theta + i \sin \theta$$

を掛けると、絶対値は1のままで、偏角は θ だけ増える. よって

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$



となり、一般に、自然数 n について、次の等式が成り立つ.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

0でない複素数 z に対して、 $z^0 = 1$ と定めると、等式 $\textcircled{1}$ は $n = 0$ のときも成り立つ. さらに、 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ と定めると

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} &= \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i \sin n\theta} \\ &= \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) = \cos(-n)\theta + i \sin(-n)\theta \end{aligned}$$

となる. したがって、次のド・モアブルの定理が成り立つ.

ド・モアブルの定理

n が整数のとき

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

例 3.7 (1) $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^4 = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

S

(2) $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^{-6} = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1$

例題 3.5 $(\sqrt{3} - i)^6$ を計算せよ.

S

解答 $\sqrt{3} - i = 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\}$ であるから

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^6 &= 2^6 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\}^6 \\ &= 64 \{ \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) \} \\ &= -64 \end{aligned}$$

練習 3.18 次の式を計算せよ. **解**

(1) $(1 + \sqrt{3}i)^5$

(2) $(1 + i)^8$

(3) $(1 - \sqrt{3}i)^{-6}$

B 》複素数の n 乗根

複素数 α と正の整数 n に対して, 方程式 $z^n = \alpha$ の解を α の n 乗根という. 0 でない複素数の n 乗根は n 個あることが知られている.

まず, 1 の 3 乗根を, 極形式を利用して求めてみよう.

$$z^3 = 1 \text{ のとき, } |z^3| = |z|^3 = 1 \text{ かつ } |z| > 0 \text{ より } |z| = 1$$

そこで, $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおいて, ド・モアブルの定理を用いると, 等式 $z^3 = 1$ は, 次のように表される.

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = \cos 0 + i \sin 0 \quad \leftarrow 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

両辺の偏角を比較すると, $3\theta = 0 + 2k\pi$ (k は整数) であるから, $\theta = \frac{2k\pi}{3}$ となる. $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では, $k = 0, 1, 2$ であるから, 1 の 3 乗根は 3 個あり, 次の式で得られる z_0, z_1, z_2 である.

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

深化 3.2 二項定理を用いて, 例題 3.5 を計算してみよう. **解**

前ページの①において, $k = 0, 1, 2$ を代入すると

$$k = 0 \text{ のとき } z_0 = 1$$

$$k = 1 \text{ のとき } z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \text{ のとき } z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

となる. これらが1の3乗根である.

右の図のように, 3点 z_0, z_1, z_2 は単位円の周上にあり, 円周を3等分する点である.

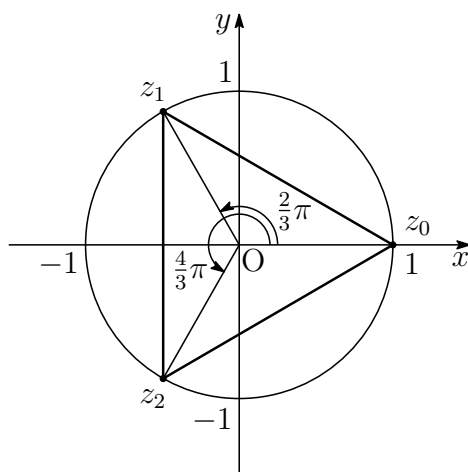
よって, これらの点は単位円に内接する正三角形の頂点になっている.

一般に, 次のことがいえる.

1の n 乗根

1の n 乗根は, 次の式から得られる n 個の複素数である.

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$



補足 $n \geq 3$ のとき, 1の n 乗根を表す点は, 単位円に内接する正 n 角形の各頂点である. とくに, 頂点の1つは点1である.

例 3.8 1の6乗根は

S

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

すなわち

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, & z_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, & z_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_3 &= -1, & z_4 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, & z_5 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

練習 3.19 1の8乗根を求めよ. **解**

α, z を複素数とすると、 1 の n 乗根の場合と同様にして、極形式を用いて方程式 $z^n = \alpha$ の解を求めてみよう。

応用例題 3.2 方程式 $z^3 = i$ を解け。

S

考え方 》 方程式を極形式で表して、両辺の絶対値と偏角を比較する。

解答 z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdots \textcircled{1}$

とすると $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$

また、 i を極形式で表すと $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

よって、方程式は

$$r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3 = 1, \quad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから $r = 1 \cdots \textcircled{2}$

また $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では、 $k = 0, 1, 2$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \cdots \textcircled{3}$$

②, ③ を ① に代入して、求める解は

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -i$$

練習 3.20 次の方程式を解け。また、解を表す点を、それぞれ複素数平面上に図示せよ。 **解**

(1) $z^2 = i$

(2) $z^4 = -4$

(3) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$

3.1.4 複素数と図形

ここでは、複素数平面上で図形について考えてみよう.

A》線分の内分点, 外分点

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を $C(\gamma)$ とするとき、複素数 γ を求めてみよう.

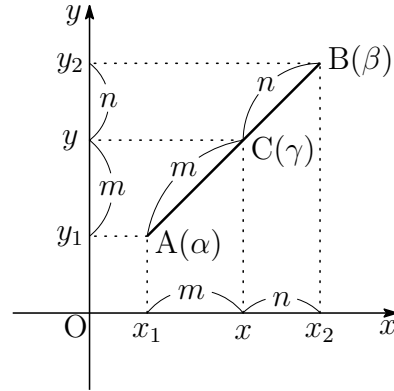
$$\alpha = x_1 + y_1i, \quad \beta = x_2 + y_2i$$

$$\gamma = x + yi$$

とすると

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

である. よって



$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} + \frac{ny_1 + my_2}{m+n}i \\ &= \frac{n(x_1 + y_1i) + m(x_2 + y_2i)}{m+n} = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n} \end{aligned}$$

である. 外分の場合も同様にして、次のことが成り立つ.

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を $C(\gamma)$, $m:n$ に外分する点を $D(\delta)$ とすると

$$\text{内分点 } \gamma = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n} \quad \text{外分点 } \delta = \frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$$

とくに、線分 AB の中点を表す複素数は $\frac{\alpha + \beta}{2}$

練習 3.21 $A(1+5i)$, $B(7-i)$ とする. 次の点を表す複素数を求めよ. 解

(1) 線分 AB を $1:2$ に内分する点 C

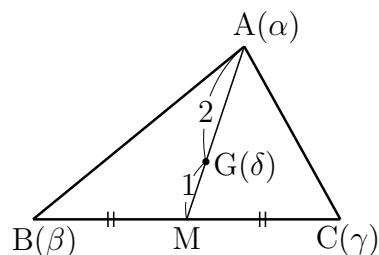
(2) 線分 AB の中点 M

(3) 線分 AB を $3:2$ に外分する点 D

練習 3.22 3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とする $\triangle ABC$ について, その重心 $G(\delta)$ とするとき,

$$\delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

であることを示せ. 解



B》方程式の表す図形

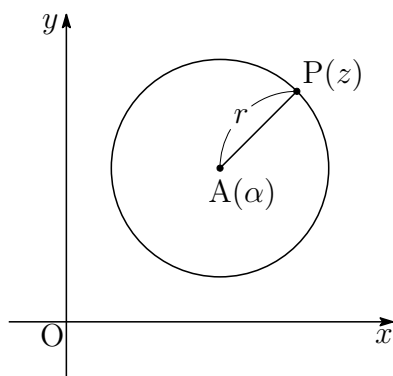
複素数平面上の円や直線を, 複素数 z の方程式で表してみよう.

点 $A(\alpha)$ を中心とする半径 r の円上の点を $P(z)$ とする. このとき

$$AP = r$$

である. よって, 次の方程式を満たす点 z 全体の集合は, 点 A を中心とする半径 r の円である.

$$|z - \alpha| = r$$



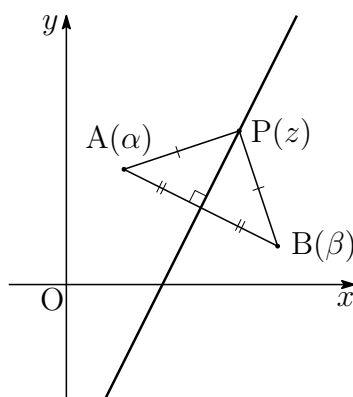
とくに, 原点を中心とする半径 r の円は, 方程式 $|z| = r$ で表される.

また, 2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点を $P(z)$ とする. このとき

$$AP = BP$$

である. よって, 次の方程式を満たす点 z 全体の集合は, 線分 AB の垂直二等分線である.

$$|z - \alpha| = |z - \beta|$$



練習 3.23 次の方程式を満たす点 z 全体の集合は, どのような図形か. 解

(1) $|z| = 2$

(2) $|z - (1 + i)| = 1$

(3) $|z - 2| = |z - 4i|$

例題 3.6 次の方程式を満たす点 z 全体の集合は、どのような図形か.

S

$$2|z| = |z + 3|$$

解答 方程式の両辺を 2 乗すると $4|z|^2 = |z + 3|^2$

$$\text{よって} \quad 4z\bar{z} = (z + 3)(\bar{z} + 3)$$

$$\text{すなわち} \quad 4z\bar{z} = (z + 3)(\bar{z} + 3) \quad \leftarrow \overline{z+3} = \bar{z} + 3$$

$$\text{右辺を展開して整理すると} \quad z\bar{z} - z - \bar{z} = 3$$

$$\text{式を変形すると} \quad (z - 1)(\bar{z} - 1) = 4$$

$$\text{すなわち} \quad (z - 1)(\overline{z - 1}) = 4 \quad \leftarrow \overline{\bar{z} - 1} = z - 1$$

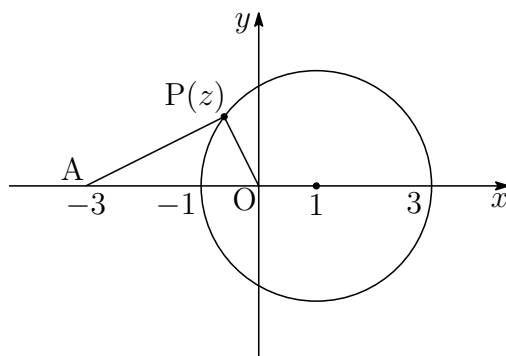
$$\text{よって} \quad |z - 1|^2 = 2^2 \quad \text{したがって} \quad |z - 1| = 2$$

これは、点 1 を中心とする半径 2 の円である.

補足 例題 3.6 の円は、右の図のようになる.

原点 O と点 $A(-3)$, $P(z)$ をとると、
 $2|z| = |z + 3|$ は $2OP = AQ$ すなわち
 $OP : AP = 1 : 2$ を表す.

異なる 2 点から距離の比が $m : n$ である点全体の集合は、 $m \neq n$ のとき円を描く. このような円をアポロニウスの円という.



練習 3.24 方程式 $2|z - 3| = |z|$ を満たす点 z 全体の集合は、どのような図形か. **解**

例題 3.6 において、 $z = x + yi$ とすると、 $2|z| = |z + 3|$ から

$$2|x + yi| = |(x + yi) + 3|$$

$$\text{両辺を 2 乗すると} \quad 4|x + yi|^2 = |(x + 3) + yi|^2$$

$$\text{よって} \quad 4(x^2 + y^2) = (x + 3)^2 + y^2$$

$$\text{整理すると} \quad (x - 1)^2 + y^2 = 2^2$$

この方程式は、座標平面上において、点 $(1, 0)$ を中心とする半径 2 の円を表す.

応用例題 3.3 $w = iz + 2$ とする. 点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか. [複素数の図形的な意味] S

考え方 $\gg z$ を w の式で表して, $|z| = 1$ であることを利用する.

解答 z は等式 $|z| = 1$ を満たす.

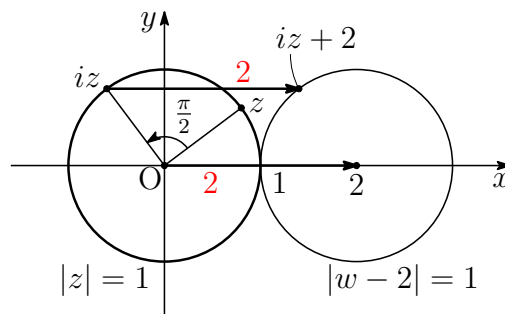
$$w = iz + 2 \text{ より } z = \frac{w - 2}{i} \text{ であるから}$$

$$|z| = \left| \frac{w - 2}{i} \right| = \frac{|w - 2|}{|i|} = |w - 2| \quad \rightarrow |i|=1$$

$$\text{よって } |w - 2| = 1$$

したがって, 点 w は点 2 を中心とする半径 1 の円を描く.

応用例題 3.3 の図形的な意味は, 点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転し, さらに原点を点 2 に移すような平行移動をすることである.



練習 3.25 $w = i(z - 2)$ とする. 点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか. 解

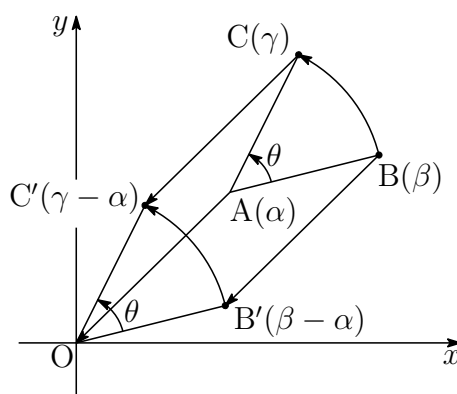
C $\gg$ 点 α を中心とする回転

2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ について, 点 B を点 A を中心として θ だけ回転した点を $C(\gamma)$ とする. このとき, γ を α, β で表すことを考えてみよう.

点 A を原点に移す平行移動によって, 点 B, C がそれぞれ点 $B'(\beta')$, $C'(\gamma')$ に移るとすると $\beta' = \beta - \alpha$, $\gamma' = \gamma - \alpha$ である.

点 C' は, 点 B' を原点を中心として θ だけ回転した点であるから, 次が成り立つ.

$$\gamma' = (\cos \theta + i \sin \theta) \beta'$$



点 α を中心とする回転

点 β を, 点 α を中心として θ だけ回転した点を表す複素数を γ とすると

$$\gamma - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta)(\beta - \alpha)$$

例題 3.7 $\alpha = 2 + 3i$, $\beta = 4 + i$ とする. 点 β を, 点 α を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ. S

解答 $\gamma - \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)(\beta - \alpha)$ であるから

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \{(4 + i) - (2 + 3i)\} + (2 + 3i) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2 - 2i) + (2 + 3i) = (3 + \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})i \end{aligned}$$

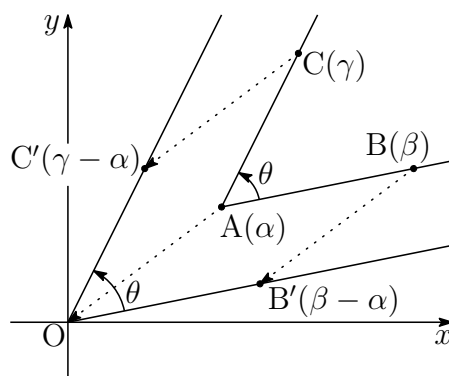
練習 3.26 $\alpha = 1 + i$, $\beta = 5 + 3i$ とする. 点 β を, 点 α を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ. 解

D 》 半直線のなす角

異なる3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対して, 点 A を中心として半直線 AB を半直線 AC の位置まで回転させたときの角 θ を, 半直線 AB から半直線 AC までの回転角という. ただし, θ は弧度法で表された一般角である.

点 A を原点に移す平行移動によって, 点 B , C はそれぞれ $B'(\beta - \alpha)$, $C'(\gamma - \alpha)$ に移る. θ は半直線 OB' から半直線 OC' までの回転角に等しいから, 次が成り立つ.

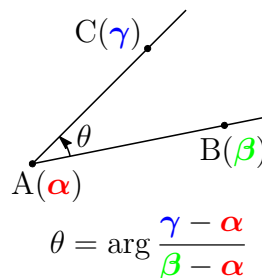
$$\theta = \arg(\gamma - \alpha) - \arg(\beta - \alpha) = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$



半直線のなす角

異なる3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対して, 半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は

$$\theta = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$



例 3.9 3点 $A(1)$, $B(-2+2i)$, $C(2-5i)$ に対して, 半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ. ただし, $-\pi < \theta \leq \pi$ とする. [S]

$\alpha = 1$, $\beta = -2 + 2i$, $\gamma = 2 - 5i$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= \frac{1 - 5i}{-3 + 2i} = \frac{(1 - 5i)(-3 - 2i)}{(-3 + 2i)(-3 - 2i)} = -1 + i \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) \end{aligned}$$

よって $\theta = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{3}{4}\pi$

練習 3.27 3点 $A(1-i)$, $B(2+i)$, $C(2i)$ に対して, 半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ. ただし, $-\pi < \theta \leq \pi$ とする. [解]

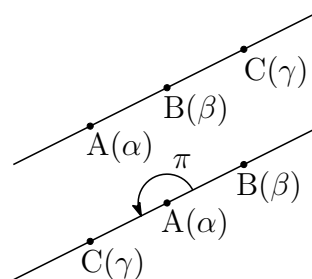
異なる3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対して, 半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は $\theta = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ である. ← 複素数 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の偏角

このとき, $r > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$ として

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

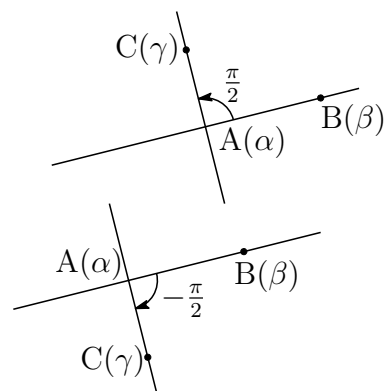
と表すことができる.

3点 A , B , C が一直線上にあるのは, θ が 0 または π のときであり, $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は実数である.



また、2直線 AB, AC が垂直に交わるのは、 θ が $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ のときであり、 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は純虚数である。

異なる3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ について、次のことが成り立つ。



3点 A, B, C が一直線上にある $\iff \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数

3点 AB, AC が垂直に交わる $\iff \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数

例題 3.8 3点 $A(i)$, $B(2+2i)$, $C(x-i)$ について、2直線 AB, AC が垂直に交わるように、実数 x の値を定めよ。 S

解答 $\frac{(x-i)-i}{(2+2i)-i} = \frac{x-2i}{2+i}$ $\leftarrow \alpha=i, \beta=2+2i, \gamma=x-i$
 $= \frac{(x-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{(2x-2)-(x+4)i}{5} \dots \textcircled{1}$

2直線 AB, AC が垂直に交わるには、 $\textcircled{1}$ が純虚数のときであるから

$$2x-2=0 \quad \text{かつ} \quad x+4 \neq 0 \quad \leftarrow a+bi \text{ が純虚数のとき } a=0 \text{ かつ } b \neq 0$$

よって $x=1$

練習 3.28 3点 $A(-1+i)$, $B(3-i)$, $C(x+3i)$ について、次の問いに答えよ。ただし、 x は実数とする。 解

(1) 2直線 AB, AC が垂直に交わるように、 x の値を求めよ。

(2) 3点 A, B, C が一直線上にあるように、 x の値を求めよ。

応用例題 3.4 3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, 等式

S

$$\gamma = (1 + \sqrt{3}i)\beta - \sqrt{3}i\alpha$$

が成り立つとき, 次のものを求めよ.

- (1) 複素数 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の値 (2) $\triangle ABC$ の3つの角の大きさ

考え方 》 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の値から, 2辺の比 $AB : AC$, $\angle A$ の大きさを求める.

解答 (1) 等式から $\gamma - \alpha = (1 + \sqrt{3}i)(\beta - \alpha)$

よって
$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 1 + \sqrt{3}i$$

(2) (1) より
$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = 2 \text{ から}$$

$$2|\beta - \alpha| = |\gamma - \alpha|$$

$2AB = AC$ であるから

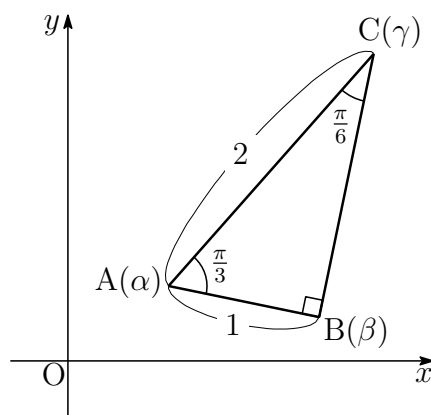
$$AB : AC = 1 : 2$$

また, $\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\pi}{3}$ から

$$\angle A = \frac{\pi}{3}$$

よって, $\triangle ABC$ は図のような直角三角形で

$$\angle B = \frac{\pi}{2}, \quad \angle C = \frac{\pi}{6}$$



練習 3.29 3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, 等式

$$\gamma = (1 - i)\alpha + i\beta$$

が成り立つとき, 次のものを求めよ. 解

- (1) 複素数 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の値 (2) $\triangle ABC$ の3つの角の大きさ

研究

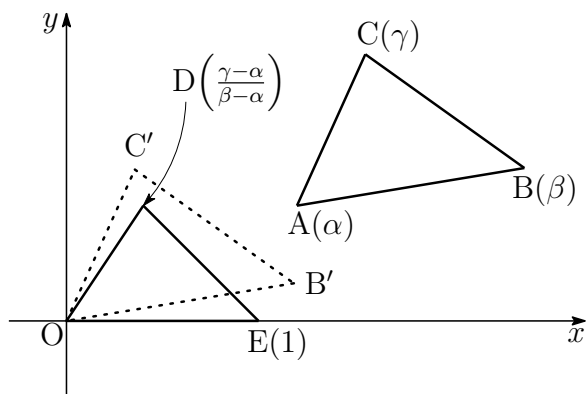
3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$

前ページでは, 3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, 複素数 $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を用いて $AB:AC$ および $\angle A$ の大きさを調べた. このことについて, もう少し詳しく調べてみよう.

一般に, 次のことが成り立つ. 3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ があるとき, 原点 O と点 $D\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$, $E(1)$ を頂点とする $\triangle OED$ を考えると

$$\triangle OED \sim \triangle ABC$$

である.



証明 $\triangle OED$ と $\triangle ABC$ において

$$OE:AB = 1:|\beta-\alpha|$$

$$OD:AC = \left| \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \right| : |\gamma-\alpha| = \frac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|} : |\gamma-\alpha| = 1:|\beta-\alpha|$$

よって $OE:AB = OD:AC$

また, $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角を考えると $\angle EOD = \angle BAC$

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle OED \sim \triangle ABC$$

証終

上のことを用いて, $\triangle ABC$ の形状を調べることができる.

演習 3.1 3点 $A(-1+i)$, $B(1-i)$, $C(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ はどのような三角形か. 解

3.1.5 問題

問題 3.1 複素数 z が, 等式 $2z + \bar{z} = 1 + i$ を満たすとき, 次の問いに答えよ. 解

(1) $2\bar{z} + z$ を求めよ. → p.90

(2) z を求めよ.

問題 3.2 複素数 α, β について, $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ が実数であることを証明せよ. 解

→ p.90 例題 3.2

問題 3.3 $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ とするとき, 複素数 $z + 1$ を極形式で表せ. ただし, 偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする. 解 → p.92 例題 3.3

問題 3.4 座標平面上の点 $P(2, 1)$ を, 原点 O を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を Q とするとき, Q の座標を求めよ. 解 → p.95 例題 3.4

問題 3.5 複素数 z の絶対値が 1, 偏角が $\frac{\pi}{6}$ のとき, $\frac{z^8 + 1}{z^4}$ の値を求めよ. 解 → p.97

問題 3.6 n を 2 以上の整数とする. $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ のとき, 1 の n 乗根は, $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}$ で与えられることを示せ. 解 → p.99

問題 3.7 方程式 $z^4 = 8(-1 + \sqrt{3}i)$ を解け. 解 → p.100 応用例題 3.2

問題 3.8 $w = \bar{z}$ とする. 複素数平面上で, 点 z が円 $|z - i| = 1$ 上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか. 解 → p.104 応用例題 3.3

問題 3.9 複素数平面上の 3 点 $A(2 + i), B(6 - i), C(4 + yi)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, $\angle A = \frac{\pi}{2}$ であるように, 実数 y の値を定めよ. 解 → p.107 例題 3.8

問題 3.10 $\triangle ABC$ において, 辺 BC の中点を M とする. 解

(1) M を複素数平面上の原点とし, $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ とする. γ を β を用いて表せ.

(2) 等式 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ が成り立つことを, (1) を利用して証明せよ.

3.2 章末問題

3.2.1 章末問題 A

章末 3.1 次の式を計算せよ. 解

$$(1) \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^6$$

$$(2) \left\{ \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^8 \right\}^2$$

章末 3.2 複素数平面上の 3 点 $A(1+i)$, $B(-2-3i)$, $C(5-2i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, 次のものを求めよ. 解

(1) $\angle A$ の大きさ

(2) 外接円の中心を表す複素数 δ

章末 3.3 $\alpha = 1+i$, $\beta = 5+3i$ とする. 複素数平面上で 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする正三角形 ABC を作るとき, 複素数 γ を求めよ. 解

章末 3.4 0 でない 2 つの複素数 α , β が等式 $4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$ を満たす. 解

(1) $\frac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表せ. ただし, 偏角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leq \pi$ とする.

(2) 複素数平面上の 3 点 0 , α , β を頂点とする三角形の 3 つの角の大きさを求めよ.

3.2.2 章末問題 B

章末 3.5 複素数平面上の3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, 等式 $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma = 0$ が成り立つとき, 次の問いに答えよ. 解

- (1) 複素数 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の値を求めよ.
- (2) $\triangle ABC$ はどのような三角形か.

章末 3.6 $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ とする. 複素数平面上の原点 O と点 $A(\alpha)$ を結ぶ線分 OA の垂直二等分線上の点を表す複素数 z について, 次の問いに答えよ. 解

- (1) $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ の値は一定であることを示せ.
- (2) $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ の値を求めよ.

章末 3.7 2つの複素数 w, z が, 等式 $w = \frac{z-4}{z+2}$ を満たす. 複素数平面上で, 点 w が原点を中心とする半径2の円上を動くとき, 点 z はどのような図形を描くか. 解

第 4 章 式と曲線

4.1 2次曲線

4.1.1 放物線

ここでは、数学 I で学んだ放物線を図形的な性質から定義して、その方程式を求めてみよう。

A 》放物線の方程式

平面上で、定点 F からの距離と、 F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点の軌跡を放物線といい、点 F を放物線の焦点、直線 ℓ を放物線の準線という。

点 $F(p, 0)$ を焦点とし、直線 $x = -p$ を準線 ℓ とする放物線の方程式を求めてみよう。ただし、 $p \neq 0$ とする。この放物線上の点を $P(x, y)$ とし、 P から ℓ に下ろした垂線を PH とすると、 P がこの放物線上にあるのは $PF = PH$ すなわち $PF^2 = PH^2$ のときである。

$$\text{よって} \quad (x - p)^2 + y^2 = \{x - (-p)\}^2$$

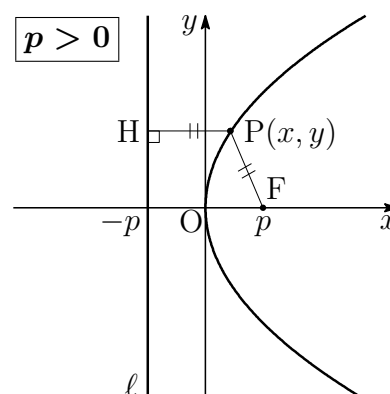
$$\text{整理して} \quad y^2 = 4px \quad \cdots \textcircled{1}$$

逆に、 $\textcircled{1}$ を満たす点 $P(x, y)$ は $PF = PH$ を満たす。

$\textcircled{1}$ を放物線の方程式の標準形という。また、放物線の焦点を通り、準線に垂直な直線を、放物線の軸といい、軸と放物線の交点を、放物線の頂点という。放物線は、その軸に関して対称である。[[x 軸を軸とする放物線](#)]

放物線の標準形 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$)

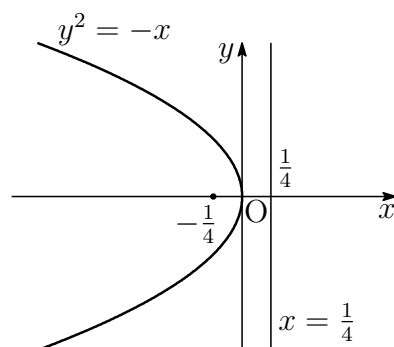
- 1 焦点は $F(p, 0)$ ，準線は直線 $x = -p$
- 2 軸は x 軸，頂点は原点 O
- 3 曲線は x 軸に関して対称



[[内容](#)] [[公式・用語集](#)] [[解説動画](#)] [[資料](#)]

例 4.1 放物線 $y^2 = -x$ について,
 $y^2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)x$ であるから,
 焦点は点 $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ で, 準線
 は直線 $x = \frac{1}{4}$ である.

[S]



練習 4.1 次の放物線の概形をかけ. また, その焦点と準線を求めよ. [解]

(1) $y^2 = 8x$

(2) $y^2 = -4x$

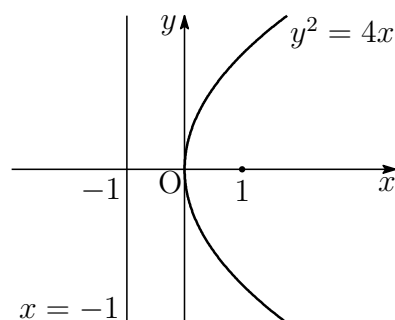
(3) $y^2 = x$

例 4.2 焦点が点 $(1, 0)$ で、準線が直線 $x = -1$ である放物線の方程式は

S

$$y^2 = 4 \cdot 1 \cdot x$$

すなわち $y^2 = 4x$



練習 4.2 焦点が点 $(-2, 0)$ で、準線が直線 $x = 2$ である放物線の方程式を求めよ.

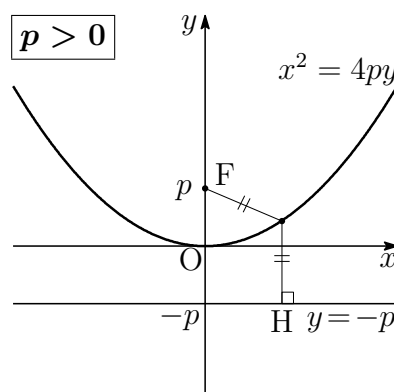
解

B 》 y 軸が軸となる放物線

$p \neq 0$ とする. 点 $F(0, p)$ を焦点とし、直線 $y = -p$ を準線とする放物線の方程式は、113 ページと同様にして、次のようになる.

$$x^2 = 4py$$

放物線 $y = ax^2$ は、 $x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4a} y$ と表されるから、その焦点は点 $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ 、準線は直線 $y = -\frac{1}{4a}$ である. **[y 軸を軸とする放物線]**



練習 4.3 次の放物線の概形をかけ. また、その焦点と準線を求めよ. **解**

(1) $x^2 = 4y$

(2) $y = -2x^2$

4.1.2 楕円

ここでは、2定点からの距離の和が一定である点の軌跡について考えよう。

A 》楕円の方程式

平面上で、2定点F, F'からの距離の和が一定である点の軌跡を^だ楕円といい、この2点F, F'を楕円の焦点という。

2点F(c, 0), F'(-c, 0)を焦点とし、この2点からの距離の和が2aである楕円の方程式を求めてみよう。ただし、FF' < 2aであることが必要なので、 $a > c > 0$ とする。[焦点がx軸上にある楕円]

この楕円上の点をP(x, y)とすると、Pが楕円上にあるのは $PF + PF' = 2a$ のときであるから

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\end{aligned}$$

両辺を2乗して整理すると

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

再び両辺を2乗して整理すると

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$a > c$ であるから、 $\sqrt{a^2 - c^2} = b$ とおくと、 $a > b > 0$ であり

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

よって
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

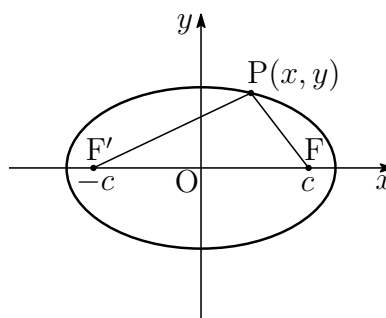
← 上の式の両辺を a^2b^2 で割る。

逆に、 $\textcircled{1}$ を満たす点P(x, y)は、 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ とおくと、 $PF + PF' = 2a$ を満たす。

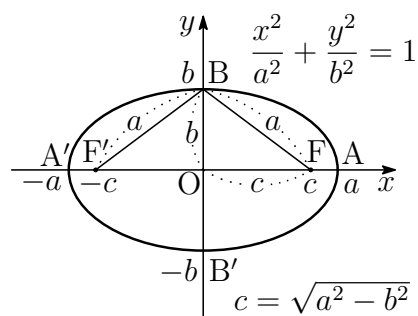
$\textcircled{1}$ を楕円の方程式の標準形という。

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ であるから、楕円 $\textcircled{1}$ の焦点F, F'の焦点の座標は、次のようになる。

$$F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), \quad F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$



2点 F, F' を焦点とする楕円において、直線 FF' と楕円の交点を A, A' 、線分 AA' の垂直二等分線と楕円の交点を B, B' とするとき、線分 AA' を長軸、線分 BB' を短軸という。焦点は長軸上にある。また、長軸と短軸の交点を中心、4点 A, A', B, B' を、楕円の頂点という。



楕円は、長軸、短軸、中心に関して対称である。

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ について、頂点は4点 $(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b)$ で、中心は原点 O である。

楕円の標準形 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$

- 1 焦点は $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
- 2 楕円上の点から2つの焦点までの距離の和は $2a$
- 3 長軸の長さは $2a$ 、短軸の長さは $2b$
- 4 曲線は x 軸、 y 軸、原点 O に関して対称

例 4.3 楕円 $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

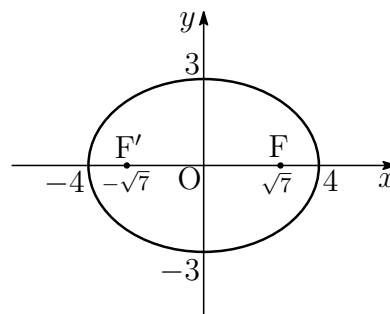
焦点は、 $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ より

2点 $(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$

長軸の長さは $2 \cdot 4 = 8$

短軸の長さは $2 \cdot 3 = 6$

[S]



[終]

練習 4.4 次の楕円の概形をかけ. また, その焦点の座標, 長軸の長さ, 短軸の長さを求めよ. 解

$$(1) \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$(2) \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

$$(3) x^2 + 16y^2 = 16$$

例題 4.1 2点 $(3, 0)$, $(-3, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の和が10であるような楕円の方程式を求めよ. S

解答 求める楕円の方程式は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) の形である.

焦点からの距離の和について、 $2a = 10$ であるから

$$a = 5, \quad a^2 = 25$$

焦点の座標について、 $\sqrt{a^2 - b^2} = 3$ であるから

$$b^2 = a^2 - 3^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

したがって、求める楕円の方程式は $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

練習 4.5 2点 $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の和が4である楕円の方程式を求めよ. 解

B》焦点が y 軸上にある楕円

次の方程式の表す曲線について調べてみよう.

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

①は,

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

において, x と y を入れかえたものである.

このとき, 曲線 ① と曲線 ② は, 直線 $y = x$ に関して対称である¹.

曲線 ② は楕円であるから, 曲線 ① も図のような楕円であるといえる.

また, 楕円 ② の焦点は,

$$2 \text{ 点 } (\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$$

であるから, 楕円 ① の焦点は,

$$2 \text{ 点 } (0, \sqrt{7}), (0, -\sqrt{7})$$

直線 $y = x$ に関して対称

である.

なお, 楕円 ①, ② のそれぞれについて, 曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の和を考えると, どちらも 8 である.

一般に, $b > a > 0$ のときも, 方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

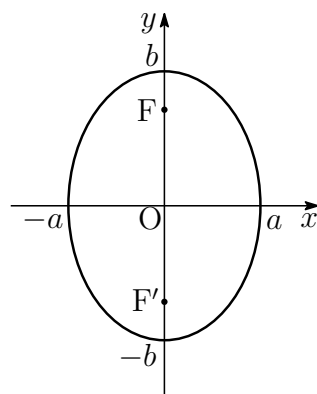
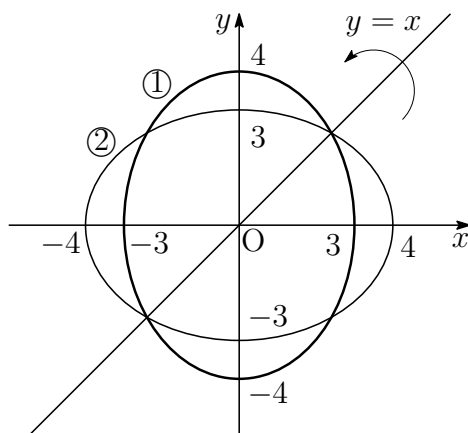
の表す曲線は楕円である.

この楕円の 2 つの焦点 F, F' は y 軸上にあり, 座標は次のようになる.

$$F(0, \sqrt{b^2 - a^2}), F'(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$$

この楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2b$ である.

また, 長軸は y 軸上, 短軸は x 軸上にある. 長軸の長さは $2b$, 短軸の長さは $2a$ である. [焦点が y 軸上にある楕円]



¹このことは, 次の 1, 2 から説明できる.

1. 曲線 ① 上に点 $P(s, t)$ があれば, 曲線 ② の上に点 $Q(t, s)$ がある. この逆も成り立つ.
2. 点 $P(s, t)$ と点 $Q(t, s)$ は $y = x$ に関して対称である.

練習 4.6 次の楕円の概形をかけ. また, その焦点の座標, 長軸の長さ, 短軸の長さを求めよ. 解

$$(1) \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$(2) x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$$

深化 4.1 $p \neq 0$ とするとき, 放物線 $y^2 = 4px$ の焦点は点 $(p, 0)$, 準線は直線 $x = -p$ である. $x^2 = 4py$ は $y^2 = 4px$ において, x と y を入れ替えたものであることを利用して, 放物線 $x^2 = 4py$ の焦点が点 $(0, p)$, 準線が直線 $y = -p$ となることを確かめてみよう. 解

C》円と楕円

円 $x^2 + y^2 = r^2$ を、 x 軸をもとにして y 軸方向に縮小または拡大すると、どのような曲線になるか調べてみよう。

例 4.4 円 $x^2 + y^2 = 4^2$ を、 x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{3}{4}$ 倍して得られる曲線の方程式を求める。 [S]

解答 円上に点 $Q(s, t)$ をとり、 Q が移る点を

$P(x, y)$ とすると

$$s^2 + t^2 = 4^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x = s, \quad y = \frac{3}{4}t \quad \cdots \textcircled{2}$$

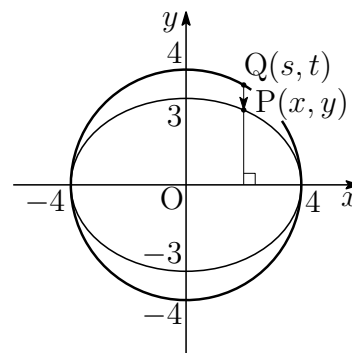
② より

$$s = x, \quad t = \frac{4}{3}y \quad \cdots \textcircled{3}$$

③ を ① に代入すると

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}y\right)^2 = 4^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

よって、円 $x^2 + y^2 = 4^2$ は、楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ になる。 [終]



一般に、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は、円 $x^2 + y^2 = a^2$ を、 x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍して得られる曲線である。

補足 円は楕円の特別な場合であると考えることができる。

練習 4.7 円 $x^2 + y^2 = 3^2$ を, x 軸をもとにして次のように縮小または拡大して得られる楕円の方程式を求めよ. 解

(1) y 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍

(2) y 軸方向に $\frac{4}{3}$ 倍

D》軌跡と楕円

応用例題 4.1 座標平面上において、長さが5の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を 2:3 に内分する点 P の軌跡を求めよ。 S

考え方》 $A(s, 0)$, $B(0, t)$, $P(x, y)$ として s, t を x, y で表し、 s, t の満たす式に代入する。 [軌跡と楕円]

解答 点 A の座標を $(s, 0)$ 、点 B の座標を $(0, t)$ とすると、 $AB = 5$ から

$$s^2 + t^2 = 5^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

点 P の座標を (x, y) とすると、P は線分 AB を 2:3 に内分するから

$$x = \frac{3}{5}s, \quad y = \frac{2}{5}t$$

すなわち $s = \frac{5}{3}x, \quad t = \frac{5}{2}y$

これらを $\textcircled{1}$ に代入すると

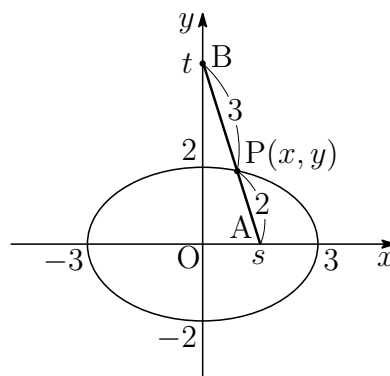
$$\left(\frac{5}{3}x\right)^2 + \left(\frac{5}{2}y\right)^2 = 5^2$$

すなわち $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

よって、点 P は、楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上にある。

逆に、この楕円上のすべての点 $P(x, y)$ は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ である。



練習 4.8 座標平面上において、長さが7の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を 3:4 に内分する点 P の軌跡を求めよ。 解

4.1.3 双曲線

ここでは、2定点からの距離の差が一定である点の軌跡について考えよう。

A 》双曲線の方程式

平面上で、2定点F, F'からの距離の差が0でなく一定である点の軌跡を双曲線といい、この2点F, F'を双曲線の焦点という。

2点F(c, 0), F'(-c, 0)を焦点とし、この2点からの距離の差が2aである双曲線の方程式を求めてみよう。ただし、FF' > 2aであることが必要なので、 $c > a > 0$ とする。[x軸上にある双曲線]

この双曲線上の点をP(x, y)とすると、Pが双曲線上にあるのは $PF - PF' = \pm 2a$ のときであるから

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\end{aligned}$$

両辺を2乗して整理すると

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

再び両辺を2乗して整理すると

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$c > a$ であるから、 $\sqrt{c^2 - a^2} = b$ とおくと、 $b > 0$ であり

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

よって
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

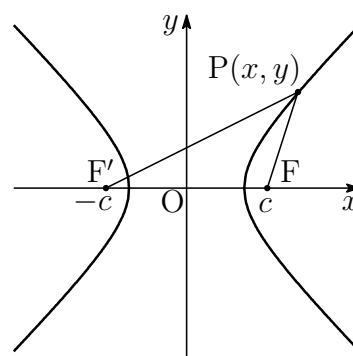
← 上の式の両辺を a^2b^2 で割る。

逆に、 $\textcircled{1}$ を満たす点P(x, y)は $PF - PF' = \pm 2a$ を満たす。

$\textcircled{1}$ を双曲線の方程式の標準形という。

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ であるから、双曲線 $\textcircled{1}$ の焦点F, F'の座標は次のようになる。

$$F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), \quad F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$



ここで、2直線 $y = x$, $y = -x$ が双曲線

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の漸近線であることを確かめよう。

双曲線 $\textcircled{1}$ の $x \geq 0$, $y \geq 0$ の部分は関数

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \quad (x \geq 1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

のグラフである。 $x \geq 1$ において、 x と $\sqrt{x^2 - 1}$ の差を考えると

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} > 0$$

であり、 x が大きくなるとき、この差は0に限りなく近づく。

よって、 $\textcircled{2}$ のグラフ上の点Pは、原点から限りなく遠ざかるとき、直線 $y = x$ に限りなく近づく。すなわち、直線 $y = x$ は、双曲線 $\textcircled{1}$ の漸近線である。

また、双曲線 $\textcircled{1}$ は x 軸に関して対称であるから、 $\textcircled{2}$ のグラフと直線 $y = x$ を x 軸に関して折り返すことにより、直線 $y = -x$ も双曲線 $\textcircled{1}$ の漸近線であることがわかる。

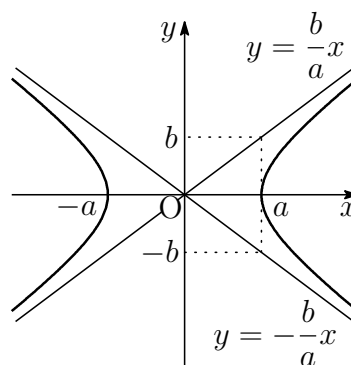
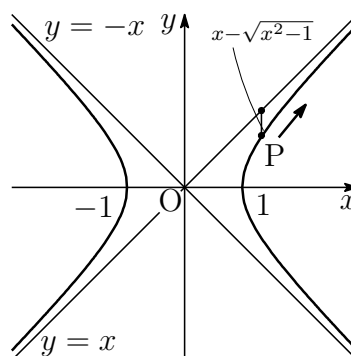
さらに、双曲線 $\textcircled{1}$ は y 軸に関して対称であるから、 $x \leq 0$ の部分についても、2直線 $y = x$, $y = -x$ は漸近線であることがわかる。

一般の双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の概形は、右の図のようになる。上と同様に、関数

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (x \geq a)$$

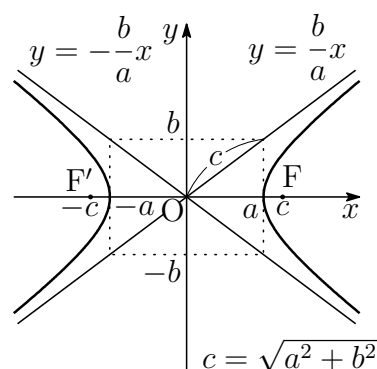
のグラフなどを考えると、次の2直線が漸近線であることがわかる。

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$$



双曲線の焦点 F, F' を通る直線 FF' と双曲線の交点を、双曲線の頂点という。また、線分 FF' の中点を、双曲線の中心という。

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ について、頂点は2点 $(a, 0), (-a, 0)$ で、中心は原点 O である。また、この双曲線は、 x 軸、 y 軸、原点 O に関して対称である。



双曲線の標準形 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$

- 1 焦点は $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$
- 2 双曲線上の点から2つの焦点までの距離の差は $2a$
- 3 漸近線は 2直線 $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$
- 4 曲線は x 軸、 y 軸、原点 O に関して対称

補足 2本の漸近線の方程式は $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ と表すことができる。

例 4.5 双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ の概形は、

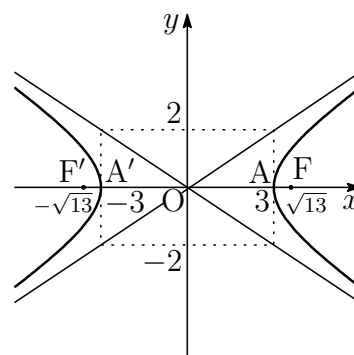
右の図のようになる。

焦点は、 $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ より

2点 $F(\sqrt{13}, 0), F'(-\sqrt{13}, 0)$

頂点は 2点 $A(3, 0), A'(-3, 0)$

漸近線は 2直線 $y = \frac{2}{3}x, y = -\frac{2}{3}x$



練習 4.9 次の双曲線の概形をかけ。また、その焦点、頂点、漸近線をいえ。 解

(1) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

(2) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

(3) $x^2 - 9y^2 = 9$

例題 4.2 2点 $(4, 0)$, $(-4, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の差が6である双曲線の方程式を求めよ. S

解答 求める方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) とおける.

焦点からの距離の差について、 $2a = 6$ であるから

$$a = 3, \quad a^2 = 9$$

焦点の座標について、 $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$ であるから

$$b^2 = 4^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$$

よって、求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

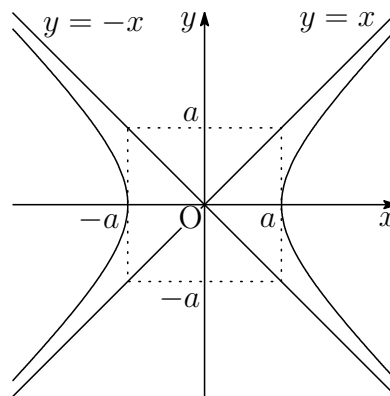
練習 4.10 2点 $(5, 0)$, $(-5, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の差が8である双曲線の方程式を求めよ. 解

双曲線 $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ の漸近線は2直線 $y = x$, $y = -x$ である.

一般に、双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ の漸近線は2直線

$$y = x, \quad y = -x$$

であり、これらは直角に交わる. このように、直角に交わる漸近線をもつ双曲線を直角双曲線という.



練習 4.11 2点 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ. 解

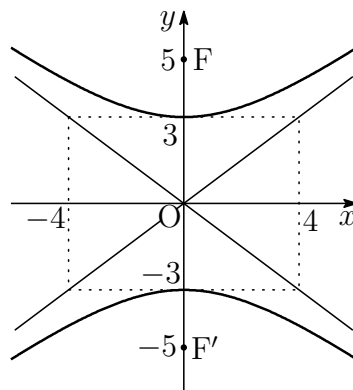
B》焦点が y 軸上にある双曲線

次の方程式の表す曲線について調べてみよう.

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = -1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

① より $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$

よって、① は、 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ において、 x と y を入れかえたものである. このことから、曲線① は右の図のような双曲線であるといえる.



2つの焦点 F , F' および頂点は y 軸上にあり、座標は次のようになる.

焦点は $F(0, 5)$, $F'(0, -5)$, 頂点は 2点 $(0, 3)$, $(0, -3)$

である. また、漸近線は 2直線 $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$ である.

[焦点が y 軸上にある双曲線]

一般に、 $a > 0$, $b > 0$ のとき、方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ の表す曲線も双曲線である. この双曲線について、次のことがいえる.

焦点は $F(0, \sqrt{a^2 + b^2})$, $F'(0, -\sqrt{a^2 + b^2})$

頂点は 2点 $(0, b)$, $(0, -b)$

漸近線は 2直線 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

双曲線上の点から 2つの焦点までの距離の差は $2b$

練習 4.12 次の双曲線の概形をかけ. また, 焦点, 頂点, 漸近線をいえ. 解

$$(1) \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$$

$$(2) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = -1$$

これまでに学んだ放物線, 楕円, 双曲線と円は, x, y の2次方程式で表される. これらの曲線をまとめて2次曲線という.

研究 直角双曲線 $xy = 1$

2 定点 F, F' からの距離の差が 0 でなく一定である点の軌跡は双曲線である。
直線 $y = x$ 上の 2 点

$$F(\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad F'(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

からの距離の差が $2\sqrt{2}$ となる点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよう。

$PF - PF' = \pm 2\sqrt{2}$ であるから、次の等式が成り立つ。[直角双曲線 $xy = 1$]

$$\sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2} - \sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2} = \pm 2\sqrt{2}$$

この等式を、125 ページと同様にして
整理すると、 $xy = 1$ が得られる。

このことから

$$xy = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{x} \quad \cdots \textcircled{1}$$

のグラフは、2 点 F, F' を焦点とする双
曲線であることがわかる。

一方、直角双曲線

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

は、2 つの焦点 $(2, 0), (-2, 0)$ からの
距離の差が $2\sqrt{2}$ となる点である。

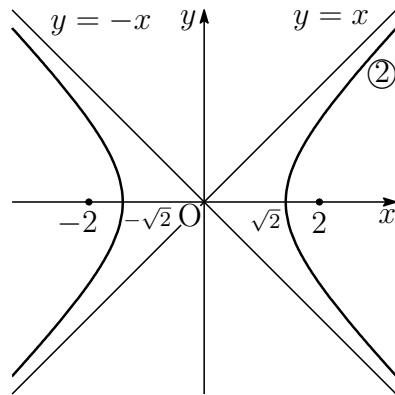
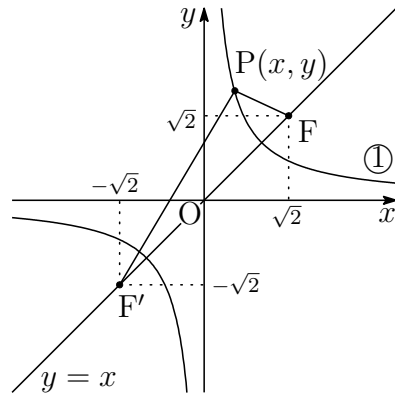
双曲線 ①, ② は、ともに焦点間の距
離が 4 で等しい。また、ともに曲線上
の点から 2 つの焦点までの距離の差が
 $2\sqrt{2}$ となる点の軌跡である。

よって、曲線 ①, ② の形は同じで、① は直角双曲線である。曲線 ② を原点 O を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転すると曲線 ① に重なる。

曲線 ② 上の点 $Q(s, t)$ を原点を中心 $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた点を $P(x, y)$ とする。
これらを複素数平面で考えると

$$x + yi = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (s + ti) = \frac{s - t}{\sqrt{2}} + \frac{s + t}{\sqrt{2}} i$$

$$Q \text{ は曲線 ② 上の点より} \quad \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2} = 1 \quad \text{よって} \quad xy = \frac{s - t}{\sqrt{2}} \times \frac{s + t}{\sqrt{2}} = \frac{s^2 - t^2}{2} = 1$$



4.1.4 2次曲線の平行移動

ここでは、2次曲線を平行移動した曲線の方程式について考えよう。

A 》 曲線の平行移動

変数 x, y を含む式を $F(x, y)$ のように書くことがある．放物線，楕円，双曲線，円などは， x, y の方程式 $F(x, y) = 0$ の形で表される．

x, y の方程式 $F(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) 全体の集合が曲線を表すとき，この曲線を

方程式 $F(x, y) = 0$ の表す曲線，または 曲線 $F(x, y) = 0$

という．また，方程式 $F(x, y) = 0$ をこの曲線の方程式という．

x, y の方程式 $F(x, y) = 0$ の表す曲線を， x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動した移動後の曲線 C の方程式を求めよう．

もとの曲線上の点 $Q(s, t)$ が移る点を $P(x, y)$ とすると

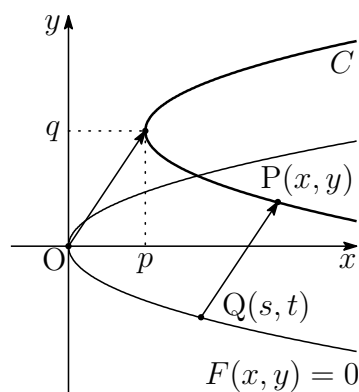
$$F(s, t) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x = s + p, \quad y = t + q \quad \cdots \textcircled{2}$$

② より $s = x - p, \quad t = y - q$

これらを ① に代入すると

$$F(x - p, y - q) = 0$$



が得られる．これが平行移動後の曲線 C の方程式である．

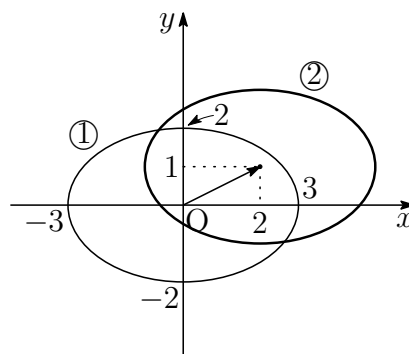
曲線 $F(x, y) = 0$ の平行移動

曲線 $F(x, y) = 0$ を x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後の曲線の方程式は $F(x - p, y - q) = 0$ となる．

例 4.6 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ …① S

を x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 だけ平行移動すると, 移動後の楕円の方程式は, 次のようになる.

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \quad \dots ②$$



また, 楕円 ① の焦点は, 2 点 $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$ であるから,
楕円 ② の焦点は, 2 点 $(\sqrt{5} + 2, 1)$, $(-\sqrt{5} + 2, 1)$ である.

練習 4.13 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を, x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき, 移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ. 解

練習 4.14 放物線 $y^2 = 4x$ を, x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき, 移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ. 解

B 》 $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ の表す図形

例 4.6 で得られた楕円の方程式

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \quad \dots ①$$

の分母を払って整理すると, 次のようになる.

$$4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0 \quad \dots ②$$

逆に, 方程式 ② が与えられた場合は, ② を ① の形に変形することによって, その方程式の表す図形が楕円であることがわかる.

例題 4.3 次の方程式はどのような図形を表すか。

S

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 19 = 0$$

解答 この方程式を変形すると

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) &= 1 - 16 + 19 \\ \text{すなわち} \quad (x + 1)^2 - 4(y - 2)^2 &= 4 \\ \frac{(x + 1)^2}{4} - (y - 2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

よって、この方程式は、双曲線 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表す。

例題 4.3 の双曲線の概形は右の図のようになる。

双曲線 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ の

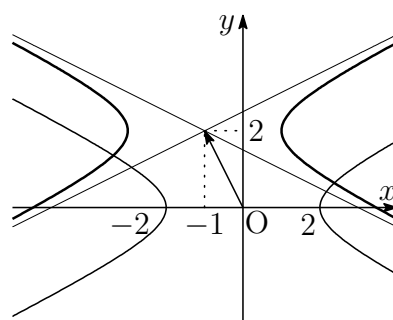
焦点は 2 点 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

漸近線は 2 直線 $y = \frac{1}{2}x, y = -\frac{1}{2}x$

である。よって、例題 4.3 の双曲線の

焦点は 2 点 $(\sqrt{5} - 1, 2), (-\sqrt{5} - 1, 2)$

漸近線は 2 直線 $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



$$\leftarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1), y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$$

練習 4.15 次の方程式はどのような図形を表すか。 **解**

(1) $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$

(2) $y^2 + 8y - 16x = 0$

(3) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 56 = 0$

4.1.5 2次曲線と直線

ここでは、2次曲線と直線の関係について調べてみよう。

A》2次曲線と直線の共有点

2次曲線と直線の共有点の個数は、2次曲線の方程式と直線の方程式から1文字を消去して得られる2次方程式の実数解の個数と一致する。

例題 4.4 k は定数とする。次の楕円と直線の共有点の個数を調べよ。

S

$$x^2 + 4y^2 = 20, \quad y = x + k$$

解答 $x^2 + 4y^2 = 20 \quad \dots \textcircled{1}$

$y = x + k \quad \dots \textcircled{2}$

とする。②を①に代入すると

$$x^2 + 4(x + k)^2 = 20$$

整理すると

$$5x^2 + 8kx + 4k^2 - 20 = 0$$

この x の2次方程式の判別式を D とすると

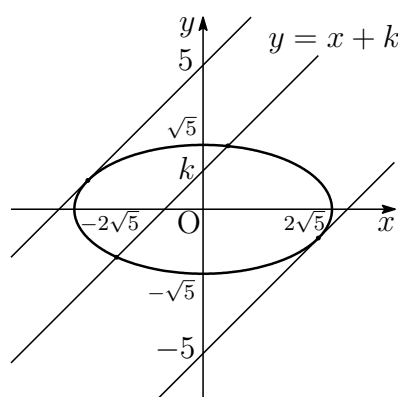
$$D/4 = (4k)^2 - 5(4k^2 - 20) = -4(k + 5)(k - 5)$$

よって、楕円①と直線②の共有点の個数は、次のようになる。

$$D > 0 \quad \text{すなわち} \quad -5 < k < 5 \quad \text{のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

$$D = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = \pm 5 \quad \text{のとき} \quad 1 \text{ 個}$$

$$D < 0 \quad \text{すなわち} \quad k < -5, 5 < k \quad \text{のとき} \quad 0 \text{ 個}$$



上の例題 4.4 において、 $k = \pm 5$ のとき、楕円と直線は共有点をただ1つもつ。このとき、楕円と直線は接するといい、その直線を楕円の接線、共有点を接点という。

一般に、2次曲線と直線の方程式から1文字を消去して得られる2次方程式の実数解の個数と、2次曲線と直線の共有点の個数は一致する。

練習 4.16 k は定数とする。双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を調べよ。 解

B》2次曲線に引いた接線の方程式

2次曲線上にない点から2次曲線上に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよう。

応用例題 4.2 点 $C(0, 3)$ から楕円 $x^2 + 2y^2 = 2$ に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよ。 S

考え方》点 $C(0, 3)$ を通る接線の方程式は、 $y = mx + 3$ とおける。この式と楕円の式から y を消去して x の2次方程式を作ると、直線が楕円に接するのは、判別式 D について、 $D = 0$ のときである。

解答 点 C を通る接線は、 x 軸に垂直ではないから、

その方程式は $y = mx + 3$ とおける。

これを楕円の式に代入すると

$$x^2 + 2(mx + 3)^2 = 2$$

整理すると

$$(2m^2 + 1)x^2 + 12mx + 16 = 0$$

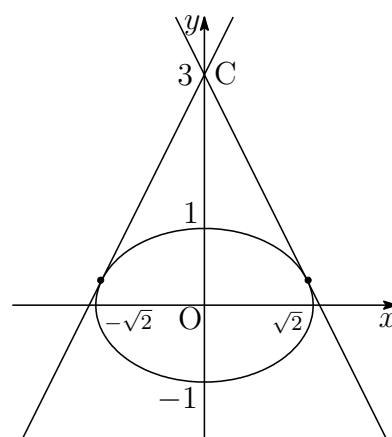
この x の2次方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = (6m)^2 - (2m^2 + 1) \cdot 16 = 4(m^2 - 4)$$

直線が楕円に接するのは $D = 0$ のときであるから

$$m = \pm 2$$

よって、接線の方程式は $y = 2x + 3, y = -2x + 3$



補足 接点の x 座標は、 $x = \pm \frac{4}{3}$ である。

$$\leftarrow x = -\frac{12m}{2(2m^2 + 1)}$$

練習 4.17 点 $C(4, 0)$ から放物線 $y^2 = -4x$ に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。 解

研究

2次曲線の接線の方程式

放物線 $y^2 = 4px$ … ①

について、①上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$y_1 y = 2p(x + x_1) \cdots ②$$

であることが知られている。このことを確かめてみよう。

②から $2px = y_1 y - 2px_1$

①を代入すると $y^2 = 2(y_1 y - 2px_1)$

整理すると $y^2 - 2y_1 y + 4px_1 = 0 \cdots ③$

点 $P(x_1, y_1)$ は放物線①上にあるから

$$y_1^2 = 4px_1$$

よって $y^2 - 2y_1 y + y_1^2 = 0$

すなわち $(y - y_1)^2 = 0$

したがって、2次方程式③は重解

$y = y_1$ をもつから、放物線①と直線②

は、点 $P(x_1, y_1)$ で接する。

すなわち、放物線①上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線は②である。

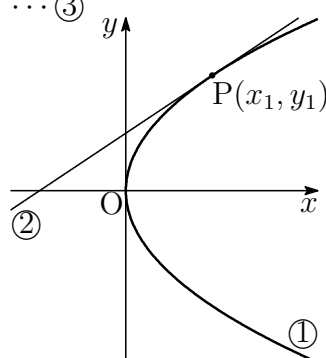
同様に、楕円、双曲線の接線については、次のことが確かめられる。

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$



演習 4.1 次の曲線上の点 P における接線の方程式を求めよ。 解

(1) 放物線 $y^2 = 4x$, $P(1, 2)$

(2) 楕円 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$, $P(3, 1)$

研究

放物線の焦点の座標

放物線 $y^2 = 4px$ の焦点を F ，準線を ℓ とする． F の座標は $(p, 0)$ ， ℓ の方程式は $x = -p$ である．この放物線上の任意の点 $P(s, t)$ から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とし，線分 FH の中点を M とする．

放物線の定義によると $PF = PH$ であるから，二等辺三角形 PHF において，直線 PM は頂角 $\angle FPH$ を2等分する．

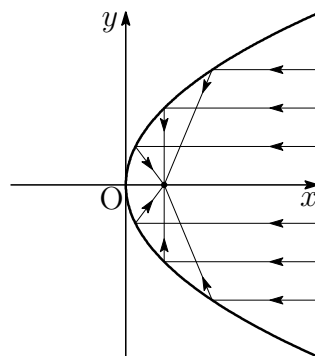
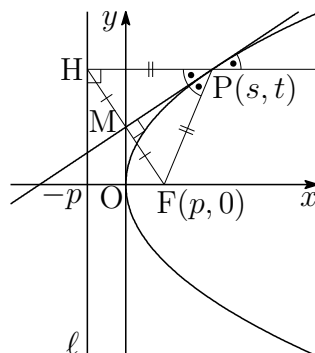
よって，図に示した3つの角は等しいことがわかる．

また，前ページの研究により，放物線上の点 P における接線の方程式は $ty = 2p(x + s)$ である．

点 M の座標は $\left(0, \frac{t}{2}\right)$ であり，この接線上にあるから，直線 PM は放物線上の点 P における接線であることがわかる．

以上のことから，放物線の軸に平行に進んできた光や電波が放物線に当たって反射すると，右の図のように，そのすべてが焦点を通過するのである．

楕円，双曲線の焦点についても同じようなことが知られている．



4.1.6 2次曲線の性質

放物線は、定点 F からの距離と、 F を通らない定直線 l からの距離が等しい点の軌跡として定義された。楕円や双曲線も放物線の場合と同様に、1つの定点と1つの定直線をもとに考えることができる。このことについて学ぼう。

応用例題 4.3 点 $F(4, 0)$ からの距離と、直線 $x = 1$ からの距離の比が $1:2$ である点 P の軌跡を求めよ。[2次曲線の性質] S

考え方 点 P の座標を (x, y) とする。点 P から直線 $x = 1$ におろした垂線を PH とすると $PF:PH = 1:2$ である。

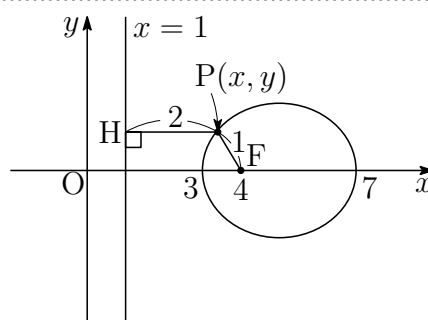
解答 点 P の座標を (x, y) とする。

点 P から直線 $x = 1$ に下した垂線を PH とすると

$$PF:PH = 1:2$$

これより $PH = 2PF$

すなわち $PH^2 = 4PF^2$



$$PH^2 = (x-1)^2, PF^2 = (x-4)^2 + y^2 \text{ を代入すると}$$

$$(x-1)^2 = 4\{(x-4)^2 + y^2\} \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 - 30x + 4y^2 + 63 = 0$$

この方程式を変形すると $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

よって、点 P は楕円 $\textcircled{1}$ 上にある。

逆に、楕円 $\textcircled{1}$ 上のすべての点 $P(x, y)$ は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ を x 軸方向に 5 だけ平行移動した楕円である。

楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ の焦点は、2点 $(1, 0)$, $(-1, 0)$ であるから、応用例題 4.3 の楕円の焦点は $(6, 0)$, $(4, 0)$ である。これより、点 $F(4, 0)$ は楕円 $\textcircled{1}$ の焦点の1つであることがわかる。よって

点 $F(4, 0)$ からの距離と、直線 $x = 1$ からの距離の比が $1:2$ である点 P の軌跡は、 F を焦点の1つとする楕円

である。また、放物線の定義により

点 $F(4, 0)$ からの距離と、直線 $x = 1$ からの距離の比が $1:1$ である点 P の軌跡は、 F を焦点、直線 $x = 1$ を準線とする放物線

である。

練習 4.18 点 $F(4, 0)$ からの距離と、直線 $x = 1$ からの距離の比が $2 : 1$ である点 P の軌跡は、 F を焦点の 1 つとする双曲線であることを示せ. 解

一般に、定点 F からの距離と、 F を通らない定直線 ℓ からの距離の比が $e : 1$ である点 P の軌跡について、次のことが知られている. [離心率]

[1] $0 < e < 1$ のとき

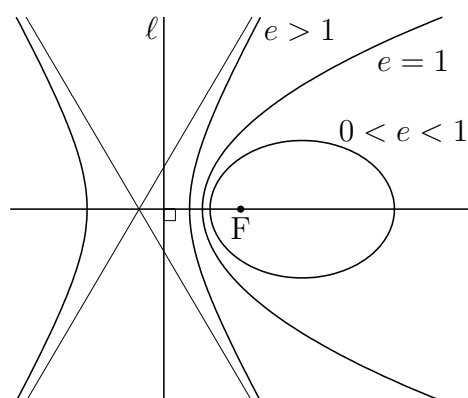
F を焦点の 1 つとする楕円

[2] $e = 1$ のとき

F を焦点、 ℓ を準線とする放物線

[3] $e > 1$ のとき

F を焦点の 1 つとする双曲線



この e の値を、2 次曲線の離心率といい、直線 ℓ を準線という. また、この方法で円を表すことはできない.

前ページの応用例題 4.3 は上の [1] の場合で、 $e = \frac{1}{2}$ である.

4.1.7 問題

問題 4.1 次のような2次曲線の方程式を求めよ. [解](#) → p.113~134

(1) 焦点が点 $(2, 0)$ で, 準線が y 軸である放物線

(2) 2点 $A(-3, 1)$, $B(3, 1)$ からの距離の和が10である楕円

(3) 2点 $(3, 0)$, $(-3, 0)$ を焦点とし, 2点 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ を頂点とする双曲線

問題 4.2 円 $x^2 + y^2 = 16$ を, y 軸をもとにして x 軸方向に2倍して得られる曲線の方程式を求めよ. [解](#) → p.122 例 4.4

問題 4.3 曲線 $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$ は楕円であることを示し, その概形をかけ. また, 焦点の座標を求めよ. [解](#) → p.133, 134

問題 4.4 k は定数とする. 双曲線 $4x^2 - 9y^2 = 36$ と直線 $x + y = k$ の共有点の個数を調べよ. また, 双曲線と直線が接するとき, その接点の座標を求めよ. 解

→ p.135 例題 4.4

問題 4.5 点 $C(3, 0)$ から楕円 $2x^2 + y^2 = 2$ に接線を引くとき, その接線の方程式を求めよ. また, そのときの接点の座標を求めよ. 解 → p.136 応用例題 4.2

問題 4.6 原点 O からの距離と, 直線 $x = 3$ からの距離の比が一定で $e : 1$ である点 P について, e が次の値のときの軌跡を求めよ. 解 → p.139 応用例題 4.3

(1) $e = \frac{1}{2}$

(2) $e = 1$

(3) $e = 2$

問題 4.7 周の長さが 3 である $\triangle ABC$ の面積を S とする. 解

(1) $AB = k$ であるときの $\triangle ABC$ の面積の最大値 $S(k)$ を求めよ. ただし, $\triangle ABC$ が存在するための条件から $0 < k < \frac{3}{2}$ とする.

(2) S の最大値を求めよ.

4.2 媒介変数表示と極座標

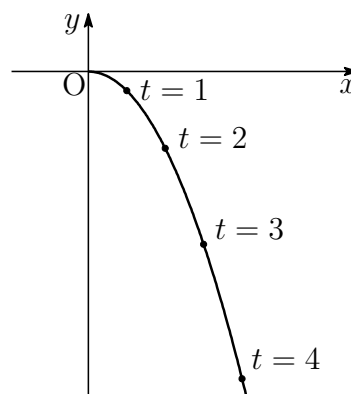
4.2.1 曲線の媒介変数表示

A 》媒介変数表示

ある速度でボールを水平に投げたとき、ボールが右の図のような放物線を描いた。ボールを離れた点を、座標平面上の原点 O とするとき、 t 秒後のボールの位置 P の座標 (x, y) は、 t を用いて [媒介変数表示]

$$x = 10t, \quad y = -4.9t^2 \quad (t \geq 0)$$

と表された。点 P の位置は t の値によって定まる。



一般に、曲線 C 上の点 $P(x, y)$ の座標が、変数 t によって

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \cdots \textcircled{1}$$

の形に表されるとき、これを曲線 C の媒介変数表示といい、変数 t を媒介変数またはパラメータという。① から t を消去して x, y の方程式 $F(x, y) = 0$ が得られるとき、これは曲線 C を表す方程式である。

例 4.7 曲線 C 上の点 $P(x, y)$ の座標が、媒介変数 t を用いて、 $x = t - 1$, $y = t^2 + t$ で表されるとき、曲線 C の x, y の方程式を求めよ。 [S]

$t = x + 1$ を $y = t^2 + t$ に代入して

← $x = t - 1$ より $t = x + 1$

$$y = (x + 1)^2 + (x + 1) \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 + 3x + 2$$

よって、曲線 C の方程式は $y = x^2 + 3x + 2$ である。

注意 媒介変数により曲線の表示方法は1通りではない。

深化 4.2 $x = t - 2$, $y = t^2 - t$ も例 4.7 の曲線 C の媒介変数であることを確かめよ。

[解]

練習 4.19 次のように媒介変数表示される曲線について, t を消去して x, y の方程式を求め, 曲線の概形をかけ. 解

(1) $x = t + 1, y = t^2 + 4t$

(2) $x = 2t, y = 2t - t^2$

例題 4.5 放物線 $y = x^2 + 2tx - 2t$ の頂点は, t の値が変化するとき, どのような曲線を描くか. [放物線の頂点の軌跡] S

解答 放物線の方程式を変形すると

$$y = (x + t)^2 - t^2 - 2t$$

その頂点を $P(x, y)$ とすると

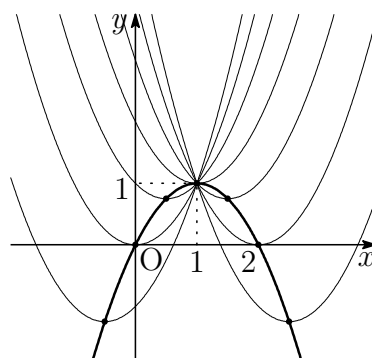
$$x = -t, y = -t^2 - 2t$$

t を消去すると

$$y = -x^2 + 2x$$

よって, 頂点 P が描く図形は,

放物線 $y = -x^2 + 2x$ である.



練習 4.20 放物線 $y = -x^2 + 4tx + 2t$ の頂点は, t の値が変化するとき, どのような曲線を描くか. 解

B》一般角 θ を用いた媒介変数表示

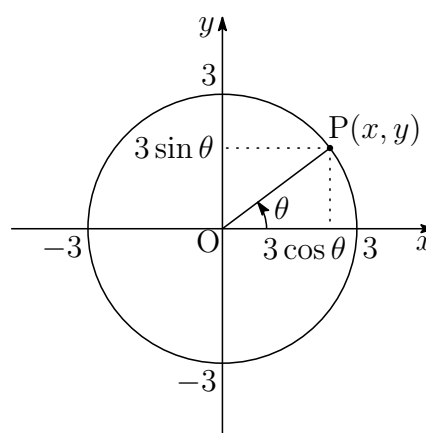
原点 O を中心とする半径 3 の円は、次の方程式で表される。

$$x^2 + y^2 = 3^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この円上に点 $P(x, y)$ をとり、動径 OP の表す一般角を θ とすると、

$$x = 3 \cos \theta, \quad y = 3 \sin \theta$$

が成り立つ。これは、円 $\textcircled{1}$ の媒介変数表示である。ただし、角は弧度法で表すことにする。



円 $x^2 + y^2 = a^2$ は、たとえば次のように媒介変数表示される。

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta$$

練習 4.21 角 θ を媒介変数として、次の円を表せ。 解

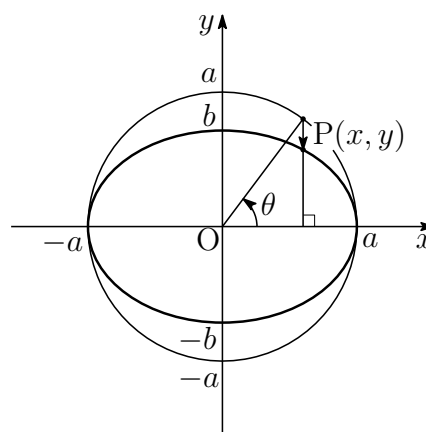
(1) $x^2 + y^2 = 2^2$

(2) $x^2 + y^2 = 2$

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は、円 $x^2 + y^2 = a^2$ を、 x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍した曲線である。

したがって、この楕円は、たとえば次のように媒介変数表示される。

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta$$



練習 4.22 角 θ を媒介変数として、次の楕円を表せ。 解

(1) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

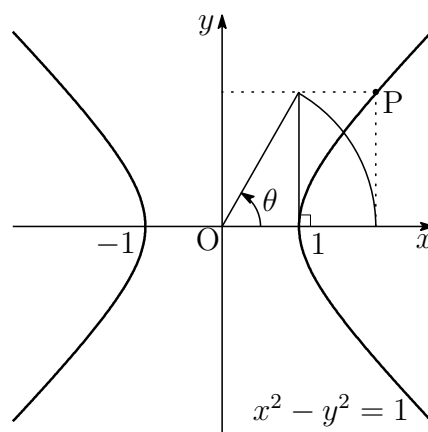
(2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

例題 4.6 θ が変化するとき, 点 $P\left(\frac{1}{\cos\theta}, \tan\theta\right)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上を動くことを示せ. [双曲線の媒介変数表示] S

解答 $x = \frac{1}{\cos\theta}$, $y = \tan\theta$ とすると

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta \\ &= \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって, 点 $P\left(\frac{1}{\cos\theta}, \tan\theta\right)$ は
双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上を動く.



練習 4.23 θ が変化するとき, 点 $P\left(\frac{3}{\cos\theta}, 2\tan\theta\right)$ は双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ 上を動くことを示せ. 解

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は, たとえば次のように媒介変数表示される.

$$x = \frac{a}{\cos\theta}, \quad y = b \tan\theta$$

練習 4.24 双曲線 $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ を媒介変数 θ を用いて表せ. 解

C》媒介変数表示される曲線の平行移動

応用例題 4.4 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

S

$$x = 2 \cos \theta + 1, \quad y = 2 \sin \theta + 3$$

考え方》 $\sin \theta, \cos \theta$ を， x, y で表し， $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入する。

解答 $\sin \theta = \frac{y-3}{2}, \quad \cos \theta = \frac{x-1}{2}$

これらを $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入すると

$$\frac{(y-3)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} = 1$$

よって $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

これは，点 $(1, 3)$ を中心とする半径 2 の円を表す。

応用例題 4.4 の曲線は，媒介変数表示 $x = 2 \cos \theta, y = 2 \sin \theta$ で表される曲線を， x 軸方向に 1， y 軸方向に 3 だけ平行移動した曲線である。[曲線の平行移動]

一般に，次のことが成り立つ。

媒介変数表示 $x = f(t) + p, y = g(t) + q$ で表される曲線は，

媒介変数表示 $x = f(t), y = g(t)$ で表される曲線を，

x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

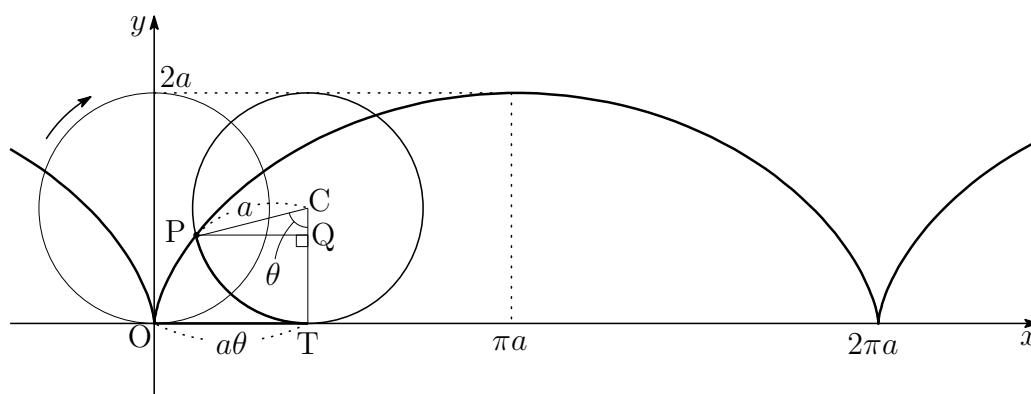
練習 4.25 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。 **解**

(1) $x = 3 \cos \theta + 2, y = 3 \sin \theta - 1$

(2) $x = 3 \cos \theta + 1, y = 2 \sin \theta + 3$

D》サイクロイド

円が定直線上をすべることなく回転していくとき、円周上の定点 P が描く曲線をサイクロイドという。[サイクロイド]



円の半径が a のとき、サイクロイドの媒介変数表示を求めてみよう。

上の図のように、定直線を x 軸とし、点 P の最初の位置を原点 O とする。また、円が角 θ だけ回転したときの点 P の座標を (x, y) とし、円の中心を C 、 x 軸との接点を T とする。

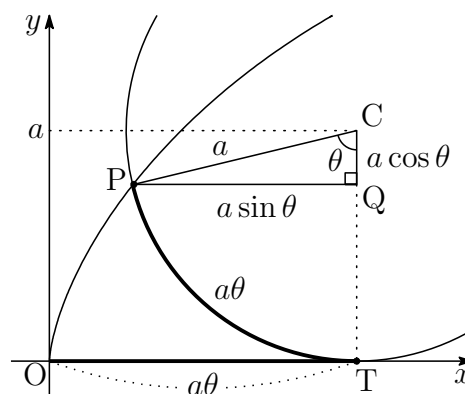
このとき、右の図において、

$$OT = \widehat{TP} = a\theta$$

であるから

$$x = OT - PQ = a\theta - a \sin \theta$$

$$y = CT - CQ = a - a \cos \theta$$



と表される。結果の式は、 $\sin \theta < 0$ や $\cos \theta < 0$ のときも成り立つ。

よって、サイクロイドの媒介変数表示は、次のようになる。

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

練習 4.26 サイクロイド $x = 2(\theta - \sin \theta)$, $y = 2(1 - \cos \theta)$ において、 θ が次の値をとったときの点の座標を求めよ。[解]

(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$

(2) $\theta = \pi$

(3) $\theta = \frac{3}{2}\pi$

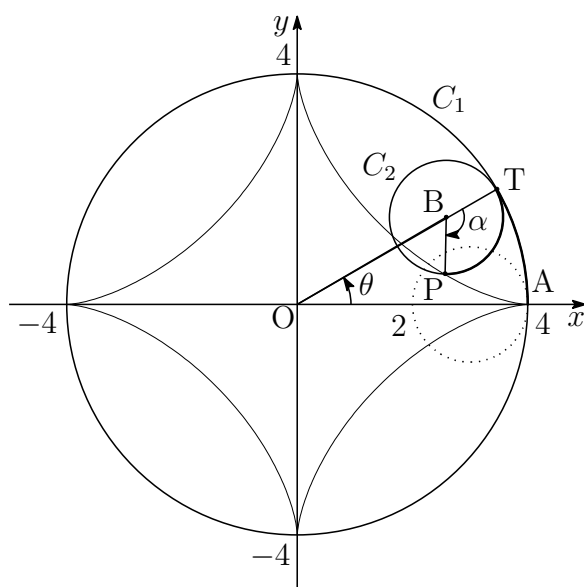
(4) $\theta = 2\pi$

研究 いろいろな曲線の媒介変数表示 (アステロイド)

例 1 原点 O を中心とする半径 4 の定円 C_1 上を, 半径 1 の C_2 が内接しながらすべることなく回転していく. 円 C_2 上の定点 P の最初の位置を点 $A(4, 0)$ とすると, P は右の図のような曲線を描く. この曲線の媒介変数表示は次のようになる.

$$x = 4 \cos^3 \theta$$

$$y = 4 \sin^3 \theta$$



円 C_1 , C_2 の半径の比が 4 : 1 のとき, 例 1 のようにして描かれる曲線をアステロイドまたは星芒形^{せいぼう}という. **[アステロイド]**

証明 C_1 と C_2 の接点を T , $\alpha = \angle PBT$ とする. C_1 および C_2 上の弧について, $\widehat{AT} = \widehat{PT}$ であるから

$$4\theta = 1 \cdot \alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 4\theta$$

BT の x 軸のなす角が θ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= (\cos(\theta - \alpha), \sin(\theta - \alpha)) \\ &= (\cos(-3\theta), \sin(-3\theta)) \\ &= (\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \end{aligned}$$

$OB = OT - BT = 4 - 1 = 3$, $\angle AOB = \theta$ であるから

$$\overrightarrow{OB} = 3(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \\ &= 3(\cos \theta, \sin \theta) + (\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \\ &= (3 \cos \theta + \cos 3\theta, 3 \sin \theta - \sin 3\theta) \\ &= (4 \cos^3 \theta, 4 \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

$$P(x, y) \text{ より} \quad x = 4 \cos^3 \theta, \quad y = 4 \sin^3 \theta$$

証終

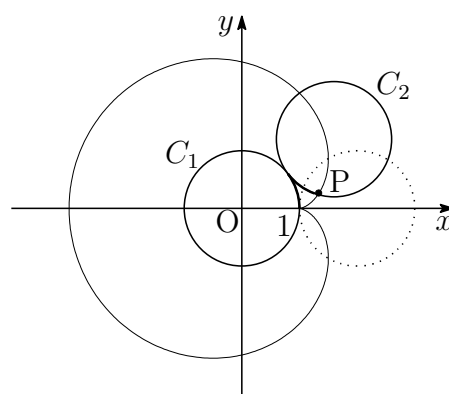
研究 いろいろな曲線の媒介変数表示 (カージオイド)

例2 原点 O を中心とする半径1の定円 C_1 上を, 半径1の円 C_2 が外接しながらすべることなく回転していく. 円 C_2 上の定点 P の最初の位置を点 $(1, 0)$ とすると, P は右の図のような曲線を描く. この曲線の媒介変数表示は次のようになる.

$$x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta$$

$$y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$$

円 C_1, C_2 の半径が等しいとき, 例2のようにして描かれる曲線をカージオイドまたは心臓形という. **[カージオイド]**



証明 右の図において

$$\overrightarrow{OA} = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$$

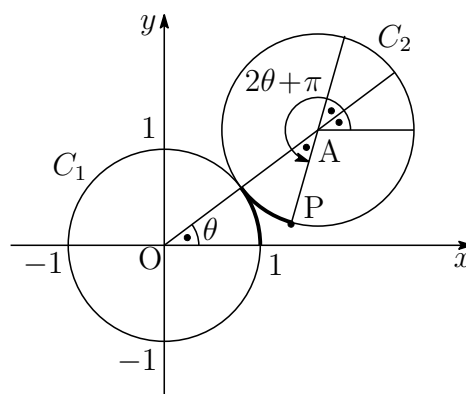
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (\cos(2\theta + \pi), \sin(2\theta + \pi)) \\ &= (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= (2 \cos \theta - \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta) \end{aligned}$$

よって $x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta, \quad y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$

証終



研究 分数式による円の媒介変数表示

次の円と円上の点 $A(-1, 0)$ を通る傾き t の直線を考える.

$$\text{円} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{直線} \quad y = t(x + 1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

円 $\textcircled{1}$ と直線 $\textcircled{2}$ の A 以外の交点を $P(x, y)$ とし、まず P の座標を求めよう.

$\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1$$

整理すると

$$(x + 1)\{(1 + t^2)x + t^2 - 1\} = 0$$

$$x \neq -1 \text{ であるから } x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\text{これを } \textcircled{2} \text{ に代入すると } y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

よって、 P の座標は $\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right)$ である.

ここで、 t の値が変化するとき、上の点 P は、円 $\textcircled{1}$ 上を動く.

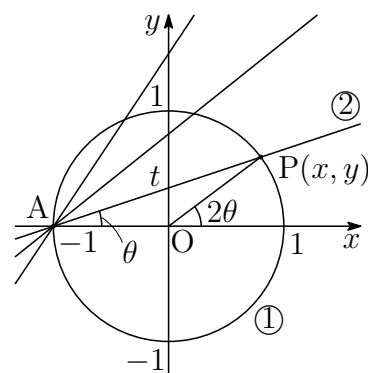
ただし、点 $A(-1, 0)$ は除かれる.

このことから、点 P が描く曲線は、 t を媒介変数として、

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

のように媒介変数表示されることがわかる. この図形は、

円 $x^2 + y^2 = 1$ から点 $(-1, 0)$ を除いたものである.



[分数式による円の媒介変数表示]

別解 $t = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とすると

$$x = \cos 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$y = \sin 2\theta = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

4.2.2 極座標と極方程式

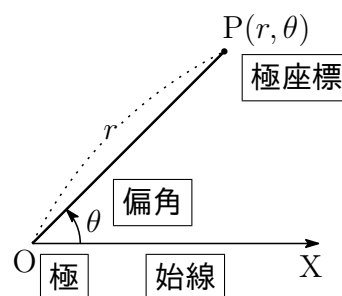
ここでは、座標平面上の点 (x, y) の別の表し方を学ぼう。

A 》 極座標と直交座標

平面上に点 O と半直線 OX を定めると、この平面上の点 P の位置は、 OP の長さ r と OX から OP へ測った角 θ の大きさで決まる。ただし、 θ は弧度法で表された一般角である。

このとき、2つの数の組 (r, θ) を、点 P の極座標という。極座標が (r, θ) である点 P

を $P(r, \theta)$ と書くことがある。また、点 O を極、半直線 OX を始線、 θ を偏角という。極 O と異なる点 P の偏角 θ は、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲ではただ1通りに定まる。なお、 θ の範囲を制限しないこともある。



注意 極 O の極座標は $(0, \theta)$ とし、 θ は任意の値と考える。

極座標に対して、これまで用いてきた x 座標と y 座標の組 (x, y) で表した座標を直交座標という。

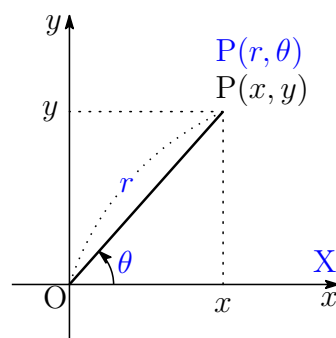
点 P の直交座標を (x, y) 、極座標を (r, θ) とすると、次の関係が成り立つ。

$$1 \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$2 \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$r \neq 0$ のとき

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$



注意 直交座標の原点および x 軸の正の部分が、それぞれ極座標の極、始線となるようにとっている。

例 4.8 極座標が $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ である点 P の直交座標 (x, y)

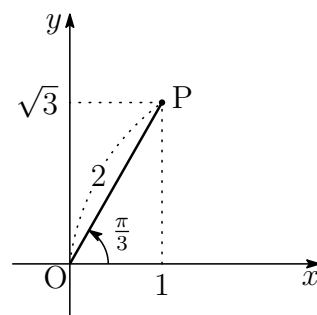
S

$r = 2, \theta = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

よって、点 P の直交座標は $(1, \sqrt{3})$



練習 4.27 極座標が次のような点の直交座標を求めよ. **解**

- (1) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ (2) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ (3) $(3, \pi)$

例 4.9 直交座標が $(-\sqrt{3}, 1)$ である点 P の極座標 (r, θ)

S

$x = -\sqrt{3}, y = 1$ であるから

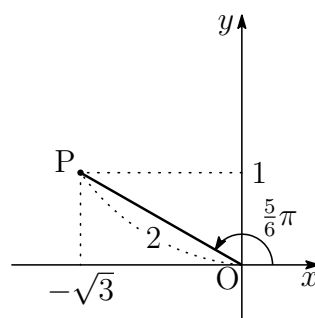
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{5}{6}\pi$$

よって、点 P の極座標の 1 つは $\left(2, \frac{5}{6}\pi\right)$



練習 4.28 直交座標が次のような点の極座標を求めよ. ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする. **解**

- (1) $(2, 2)$ (2) $(-1, \sqrt{3})$ (3) $(-\sqrt{3}, -1)$

B 》 極方程式

平面上の曲線が、極座標 (r, θ) の方程式 $F(r, \theta) = 0$ または $r = f(\theta)$ で表されるとき、その方程式をこの曲線の極方程式という。

例 4.10 極 O を中心とする半径 2 の円

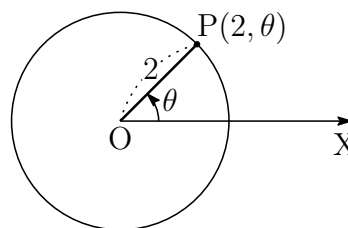
この円上の点 P の極座標を (r, θ) とすると、 $OP = r$ より

S

$$r = 2, \theta \text{ は任意の値}$$

よって、この円の極方程式は

$$r = 2$$

例 4.11 始線 OX 上の点 $(1, 0)$ を通り始線に垂直な直線

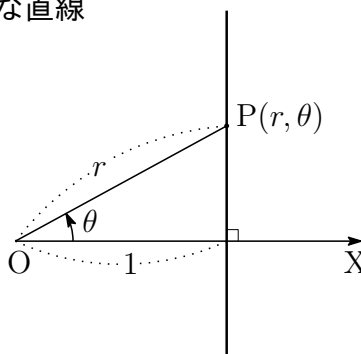
この直線上の点 P の極座標を (r, θ) とすると、 $OP \cos \theta = 1$ より

S

$$r \cos \theta = 1$$

よって、この直線の極方程式は

$$r = \frac{1}{\cos \theta}$$



例 4.11 の式 $r = \frac{1}{\cos \theta}$ において、 θ の変域を $\cos \theta \neq 0$ であるすべての θ にとると、右辺は負の値をとることもある。この場合、 $r < 0$ のときの (r, θ) は、極座標が $(|r|, \theta + \pi)$ である点を表すと考えことにする。

たとえば、例 4.11 の式を満たす $(-1, \pi)$ は点 $(1, 2\pi)$ を表す。

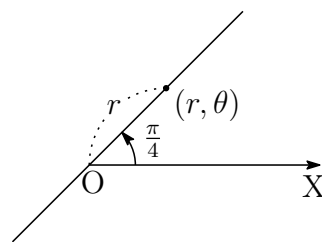
練習 4.29 点 $(1, \frac{\pi}{2})$ を通り、始線に平行な直線を、極座標 (r, θ) を用いて表せ。解

例 4.12 極 O を通り、始線 OX と $\frac{\pi}{4}$ の角をなす直線 ■ S

この直線上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad r \text{ は任意の値}$$

よって、この直線の極方程式は $\theta = \frac{\pi}{4}$



注意 「 r は任意の値」は省略している.

例 4.13 中心 A の極座標が $(a, 0)$ である半径 a の円 ■ S

この円上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

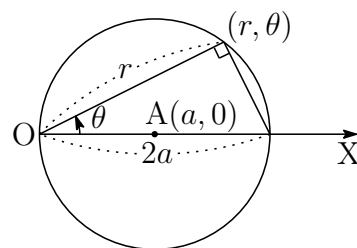
$$OP = 2OA \cos \angle AOP$$

ここで $OP = r$

$$OA = a$$

$$\cos \angle AOP = \cos \theta$$

であるから、この円の極方程式は $r = 2a \cos \theta$



練習 4.30 次の極方程式で表される曲線を図示せよ. ■ 解

(1) $\theta = \frac{\pi}{6}$

(2) $r = 2 \cos \theta$

例題 4.7 極座標が $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，直線 OA に垂直な直線 ℓ の極方程式は， $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 3$ であることを示せ. S

解答 直線 ℓ 上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

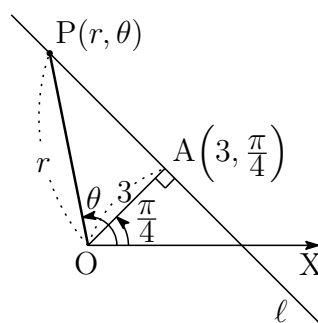
$$OP \cos \angle AOP = OA$$

ここで $OP = r, OA = 3,$

$$\cos \angle AOP = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，直線 ℓ の極方程式は

$$r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 3$$



練習 4.31 極座標が $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ である点 A を通り，OA に垂直な直線 ℓ の極方程式は $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2$ であることを示せ. 解

C》直交座標の x , y の方程式と極方程式

直交座標の x , y の方程式で表された曲線を極方程式で表してみよう.

例題 4.8 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を極方程式で表せ.

S

解答 この曲線上の点 $P(x, y)$ の極座標を (r, θ) とすると

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

これらを, $x^2 - y^2 = 1$ に代入すると

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 1$$

すなわち $r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1$

$$\leftarrow \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

よって $r^2 \cos 2\theta = 1$

練習 4.32 楕円 $x^2 + 2y^2 = 4$ を極方程式で表せ. 解

次に、極方程式で表された曲線を、直交座標の x, y の方程式で表してみよう.

例題 4.9 次の極方程式の表す曲線を、直交座標 x, y の方程式で表せ. S

$$r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$$

解答 この曲線上の点 $P(r, \theta)$ の直交座標を (x, y) とすると

$$r \cos \theta = x, \quad r \sin \theta = y, \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

極方程式 $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ の両辺に r を掛けると

$$r^2 = 2r(\cos \theta + \sin \theta)$$

$$\text{すなわち} \quad r^2 = 2r \cos \theta + 2r \sin \theta$$

これに $\textcircled{1}$ を代入して、 r, θ を消去すると

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

$$\text{よって} \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

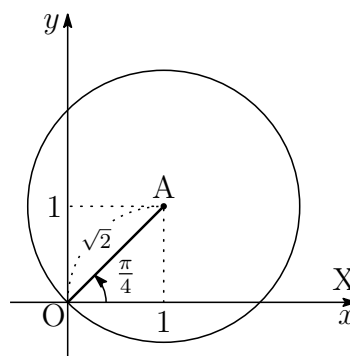
例題 4.9 で求めた x, y の方程式を変形すると、次のようになる.

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

よって、極方程式

$$r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$$

の表す曲線は、点 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ を中心とし、極 O を通る円であることがわかる.



補足 $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ を変形すると、 $r = 2\sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$ となる.

練習 4.33 次の極方程式の表す曲線を、直交座標 x, y の方程式で表せ. 解

$$(1) \quad r = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$(2) \quad r = 2 \sin \theta$$

D 》 2 次曲線の極方程式

例題 4.10 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 x, y の方程式で表せ.

S

$$r = \frac{1}{2 + \cos \theta}$$

解答 分母を払うと $2r + r \cos \theta = 1$

$r \cos \theta = x$ を代入すると $2r = 1 - x$

両辺を 2 乗すると $4r^2 = 1 - 2x + x^2$

$r^2 = x^2 + y^2$ を代入すると $4(x^2 + y^2) = 1 - 2x + x^2$

整理して $3x^2 + 4y^2 + 2x - 1 = 0$

補足 例題 4.10 で求めた x, y の方程式を変形すると $\frac{9}{4} \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + 3y^2 = 1$ となり，この曲線が楕円であることがわかる．

練習 4.34 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x, y の方程式で表せ. 解

$$r = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta}$$

例題 4.11 始線 OX 上の点 $A(2, 0)$ を通り、始線に垂直な直線を ℓ とする．極 O を焦点， ℓ を準線とする放物線の極方程式を求めよ． S

解答 放物線上の点 P の極座標を (r, θ) とし， P から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とすると

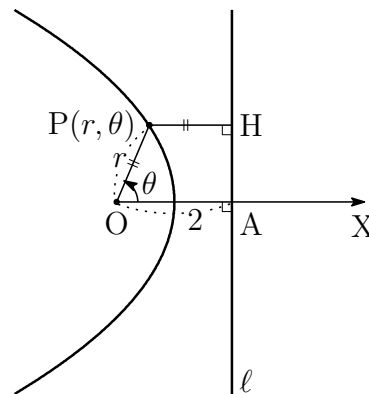
$$OP = PH$$

が成り立つ．ここで，

$$OP = r, \quad PH = 2 - r \cos \theta$$

であるから $r = 2 - r \cos \theta$

よって，求める放物線の極方程式は $r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$



練習 4.35 始線 OX 上の点 $A(2, 0)$ を通り、始線に垂直な直線を ℓ とする．点 $P(r, \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき， $\frac{OP}{PH} = \frac{1}{2}$ であるような点 P の軌跡を，極方程式で表せ． 解

研究

2次曲線を表す極方程式

始線 OX 上の点 $A(a, 0)$ を通り、始線に垂直な直線を ℓ とする. 点 $P(r, \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき,

$$e = \frac{OP}{PH}$$

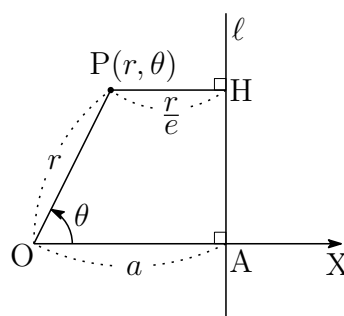
の値が一定であるような P の軌跡は、2次曲線になることが知られている. この e の値は 140 ページで学んだ離心率である.

右の図において、線分 PH の長さを 2 通りに表すと

$$PH = \frac{r}{e}, \quad PH = a - r \cos \theta$$

$$\text{よって} \quad \frac{r}{e} = a - r \cos \theta$$

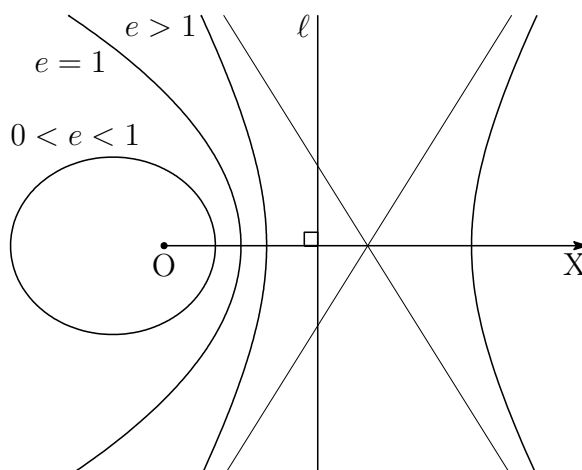
$$\text{ゆえに} \quad r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta} \quad \cdots \textcircled{1}$$



① が点 P の軌跡を表す極方程式である.

① の表す曲線は、 e のとる値によって、次のような 2 次曲線に分類される.

- [1] $0 < e < 1$ のとき O を焦点の 1 つとする楕円
- [2] $e = 1$ のとき O を焦点、 ℓ を準線とする放物線
- [3] $e > 1$ のとき O を焦点の 1 つとする双曲線



4.2.3 コンピュータの利用

コンピュータのソフトウェアには、グラフや図形を描く機能をもつものがある。ここでは、コンピュータでいろいろな曲線を描いてみよう。

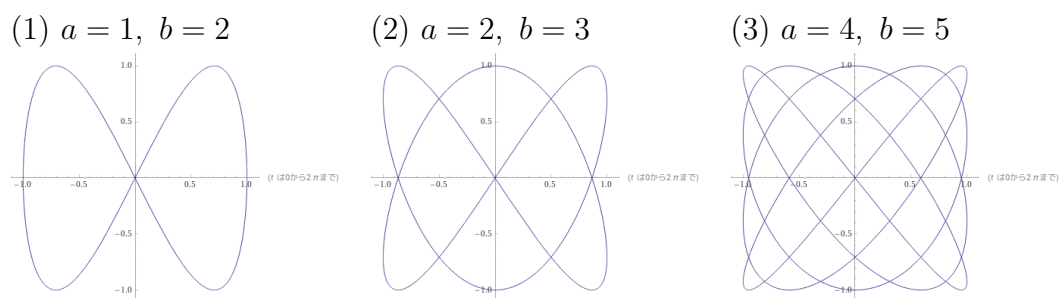
A》媒介変数表示される曲線の描画

有理数 a, b に対して、媒介変数表示

$$x = \sin at, \quad y = \sin bt$$

で表される曲線を、リサージュ曲線という。

例 4.14 ①において、 a, b が次の値をとるときの曲線を描くと、下の図のようになる。[リサージュ曲線] S



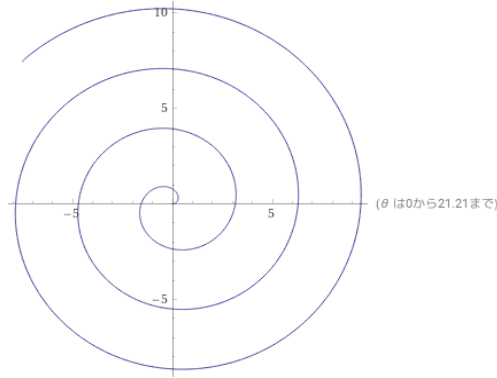
練習 4.36 次のように媒介変数表示される曲線をコンピュータで描いてみよう。 解

[曲線の図示]

- (1) $x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t$
- (2) $x = 3 \cos t, \quad y = 2 \sin t$
- (3) $x = \cos t, \quad y = \sin^2 t$
- (4) $x = \sin 2t, \quad y = \sin^2 t$
- (5) $x = \sin t - \cos t, \quad y = \sin t + \cos t$
- (6) $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$
- (7) $x = 2 \cos^3 t, \quad y = 2 \sin^3 t$

B》極方程式で表される曲線の描画

極方程式 $r = f(\theta)$ で表される曲線について、 θ の範囲に注意して描いてみよう².
 極方程式 $r = \frac{\theta}{2}$ ($\theta \geq 0$) で表される曲線をコンピュータで描くと、下の図のようになる³.



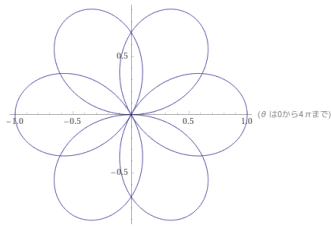
一般に、 $a > 0$ のとき、極方程式

$$r = a\theta \quad (\theta \geq 0)$$

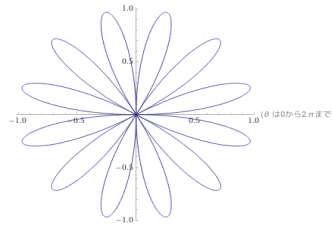
で表される曲線を、アルキメデスの渦巻線という。[アルキメデスの渦巻線]

a を有理数とすると、極方程式 $r = \sin a\theta$ で表される曲線を正葉曲線という。正葉曲線は、 a の値によって次のようになる。[正葉曲線]

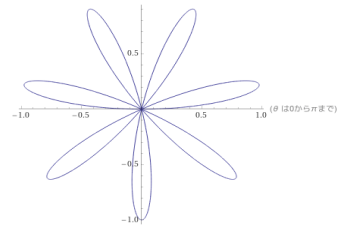
(1) $a = 1.5$



(2) $a = 6$



(3) $a = 7$



練習 4.37 次のような極方程式で表される曲線をコンピュータで描いてみよう。
 ただし、いずれも $\theta \geq 0$ とする。[解] [曲線の図示]

(1) $r = \theta$

(2) $r = \sin 4\theta$

(3) $r = 2(1 + \cos \theta)$

²極座標による入力が使えない場合には、媒介変数表示に直してから入力するとよい。

極方程式 $r = f(\theta)$ は、 $x = f(\theta) \cos \theta$ 、 $y = f(\theta) \sin \theta$ と媒介変数表示される。

³本書では、極方程式で表される曲線の表示画面を、座標平面の場合と同じにしている。

研究

いろいろな曲線

a, b を有理数とするととき, 極方程式

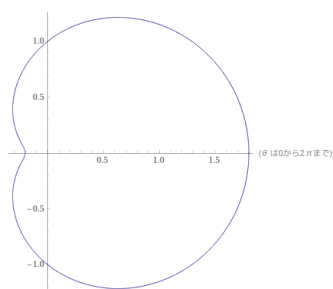
$$r = a + b \cos \theta$$

で表される曲線を, リマソンという. とくに, $a = b$ のときは

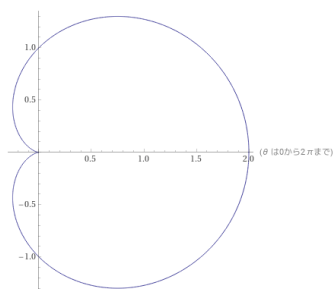
$$r = a(1 + \cos \theta)$$

となる. この極方程式で表される曲線を, カージオイドまたは心臓形という. 下の図では, (2) の場合である.

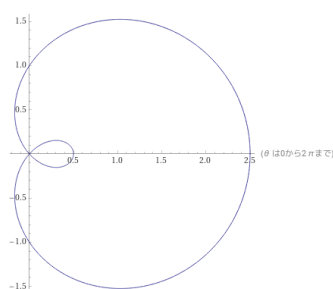
(1) $a = 1, b = 0.8$



(2) $a = 1, b = 1$



(3) $a = 1, b = 1.5$



4.2.4 問題

問題 4.8 次のように媒介変数表示される曲線がある。 解 → p.143

$$x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

(1) $x + y$, $x - y$ を, それぞれ t の式で表せ.

(2) t を消去して x , y の方程式を求めよ.

問題 4.9 次のように媒介変数表示される曲線について, θ を消去して x , y の方程式を求めよ。 解 → p.144~146

(1) $x = 2 \cos \theta - 1, \quad y = 3 \sin \theta - 2$

(2) $x = \frac{1}{\cos \theta} + 2, \quad y = 2 \tan \theta + 1$

問題 4.10 極座標が $(4, 0)$ である点 A を通り, 始線 OX と $\frac{\pi}{6}$ の角をなす直線の極方程式を求めよ。 解 → p.156 例題 4.7

問題 4.11 次の極方程式の表す曲線を, 直交座標の x , y の方程式で表せ。 解

(1) $r = 2(\cos \theta - 2 \sin \theta)$ → p.158 例題 4.9

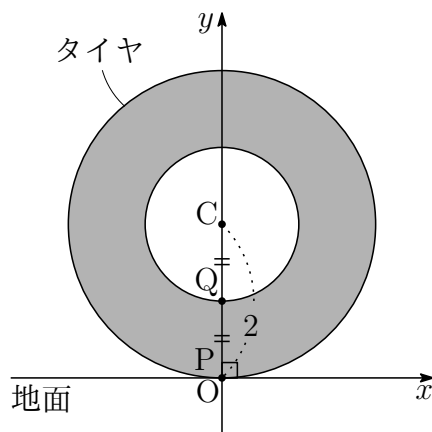
(2) $r^2 \sin \theta \cos \theta = 1$

問題 4.12 次の極方程式の表す曲線を, 直交座標の x , y の方程式で表せ.

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} - \cos \theta}$$

また, この曲線は, 放物線, 楕円, 双曲線のいずれであるか 解 → p.159 例題 4.10

問題 4.13 右の図において, 点 C を中心とする半径 2 の円はタイヤを, x 軸は地面を表している. このタイヤの周上にペンキで 1 箇所目印を付ける. 点 P はこの目印を表し, いま, タイヤと地面は点 P で接しているとする. このタイヤが地面をすべることなく角 θ だけ回転したとき, 線分 CP の中点 Q の描く曲線の媒介変数表示を求めよ. ただし, 点 P の最初の位置を原点 O, 点 C の最初の位置を点 $(0, 2)$ とし, 媒介変数は θ とせよ。 解



4.3 章末問題

4.3.1 章末問題 A

章末 4.1 次の方程式の表す2次曲線の概形をかけ. また, 焦点の座標を求めよ. 解

(1) $y^2 + 8x = 0$

(2) $4x^2 + 16y^2 = 1$

(3) $8x^2 - 4y^2 = 32$

章末 4.2 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ. 解

(1) 頂点が原点で, 焦点が x 軸上にあり, 点 $(-1, 2)$ を通る放物線

(2) 長軸が x 軸上, 短軸が y 軸上にあり, 長軸の長さが 4 で点 $(\sqrt{2}, 1)$ を通る楕円

(3) 頂点の座標が $(1, 0)$, $(-1, 0)$ で, 2 直線 $y = 2x$, $y = -2x$ を漸近線とする双曲線

章末 4.3 次の方程式は放物線，楕円，双曲線のいずれを表すか．また，その焦点の座標を求めよ． 解

(1) $x^2 - 2x + 4y^2 - 3 = 0$

(2) $y^2 - 4y - 4x = 0$

(3) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$

章末 4.4 次のように媒介変数表示される図形はどのような曲線か. x, y の方程式を求めて示せ. 解

$$(1) \ x = 2t^2 + 4, \ y = t + 3 \qquad (2) \ x = 2\sqrt{t}, \ y = \sqrt{t} - 2t$$

章末 4.5 点 A, B の極座標を, それぞれ $\left(3, \frac{\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ とする. 極 O と点 A, B を頂点とする $\triangle OAB$ の面積を求めよ. 解

章末 4.6 点 C の極座標を (r_1, θ_1) とする. 点 C を中心とする半径 a の円の極方程式は, 次の式で表されることを示せ. 解

$$r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) = a^2$$

4.3.2 章末問題 B

章末 4.7 直線 $x = -1$ に接し，点 $A(1, 0)$ を通る円の中心を $P(x, y)$ とする．点 P の軌跡はどのような曲線になるか. 解

章末 4.8 双曲線 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ の焦点の1つ $(3, 0)$ を F とする．この双曲線上の任意の点 $P(x, y)$ から直線 $x = 2$ に下ろした垂線を PH とするとき， $\frac{PF}{PH}$ の値は一定であることを示せ．また，その値を求めよ. 解

章末 4.9 2次曲線 $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 8 = 0$ を， x 軸方向に1， y 軸方向に -3 だけ平行移動した2次曲線の方程式を求め，どのような曲線かを調べよ．また，移動後の2次曲線の焦点の座標を求めよ. 解

章末 4.10 楕円 $4x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = -x + k$ が、異なる 2 点 Q, R で交わるように k の値が変化するとき、線分 QR の中点 P の軌跡を求めよ. 解

章末 4.11 次の方程式が円を表すように t の値が変化するとき、円の中心 P はどのような曲線を描くか. 解

$$x^2 + y^2 + 2tx - 4ty + 5t^2 - t = 0$$

章末 4.12 a は正の定数とする. 極方程式 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表せ. 解

ヒント

- 8 $\frac{PF^2}{PH^2}$ から求める. 10 k の値の範囲に注意する.
11 方程式が円を表すことから t の値の範囲が定まる.

解答

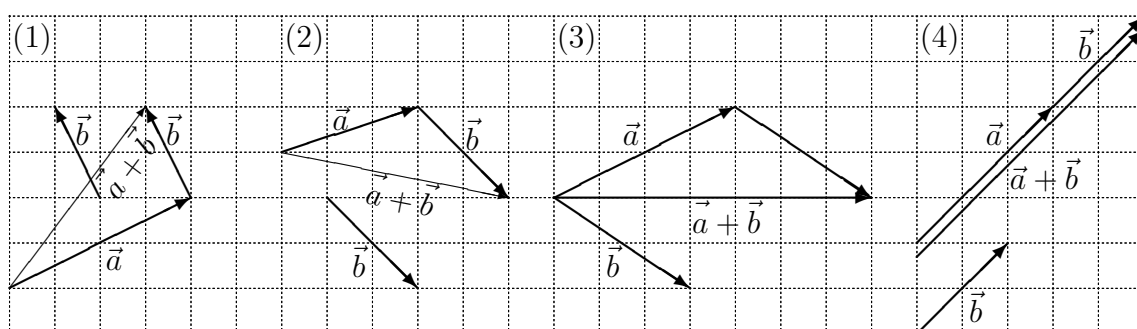
練習 1.1 (1) ① と ⑧, ③ と ⑤ と ⑥

(2) ① と ⑧, ② と ⑦, ③ と ④

(3) ① と ⑧

(4) ⑤ と ⑥

練習 1.2



練習 1.3
$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CA} &= (\vec{AB} + \vec{BD}) + \vec{CA} \\ &= \vec{AD} + \vec{CA} \\ &= \vec{CA} + \vec{AD} = \vec{CD}\end{aligned}$$

よって
$$\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CA} = \vec{CD}$$

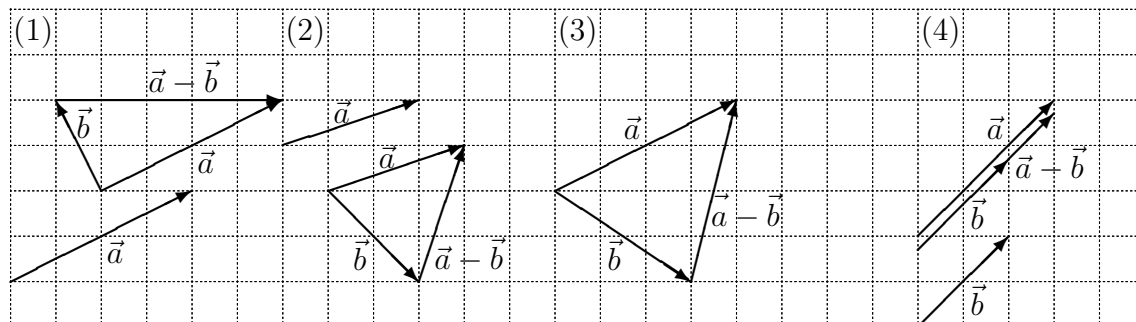
証終

練習 1.4
$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} &= (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CA} \\ &= \vec{AC} + \vec{CA} \\ &= \vec{AA} = \vec{0}\end{aligned}$$

よって
$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

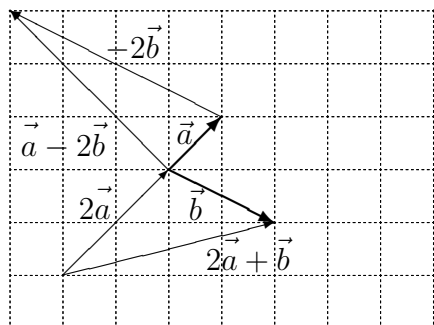
証終

練習 1.5



練習 1.6 (1) $\frac{1}{4}$ (2) -2 (3) $-\frac{1}{2}$

練習 1.7



練習 1.8 (1) $\vec{a} + 3\vec{a} - 2\vec{a} = (1 + 3 - 2)\vec{a} = 2\vec{a}$
 (2) $2(\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} - 9\vec{a} + 6\vec{b}$
 $= (2 - 9)\vec{a} + (-6 + 6)\vec{b}$
 $= -7\vec{a}$

練習 1.9 (1) 単位ベクトル $\vec{e}$ と平行で大きさが 4 のベクトルは $4\vec{e}$ と $-4\vec{e}$
 (2) $|\vec{a}| = 3$ より, $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\frac{1}{3}\vec{a}$ (または $\frac{\vec{a}}{3}$)

練習 1.10 (1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \vec{b} + 2\vec{a} = 2\vec{a} + \vec{b}$
 (2) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} = -\vec{b} + (-\vec{a}) = -\vec{a} - \vec{b}$
 (3) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} = (-\vec{a}) + (-2\vec{b}) = -\vec{a} - 2\vec{b}$

練習 1.11 各ベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ の成分表示は

$$\vec{b} = (-1, 3), \vec{c} = (-2, -2), \vec{d} = (3, -4), \vec{e} = (-1, 0)$$

各ベクトルの大きさは

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

練習 1.12 (1) $\vec{a} + \vec{b} = (3, -1) + (-4, 2) = (3 - 4, -1 + 2) = (-1, 1)$

$$(2) 4\vec{a} = 4(3, -1) = (12, -4)$$

$$(3) 4\vec{a} - 3\vec{b} = 4(3, -1) - 3(-4, 2) = (12, -4) - (-12, 6) \\ = (12 + 12, -4 - 6) = (24, -10)$$

$$(4) -2(\vec{a} - \vec{b}) = -2\{(3, -1) - (-4, 2)\} \\ = -2(3 + 4, -1 - 2) \\ = -2(7, -3) = (-14, 6)$$

練習 1.13 $s\vec{a} + t\vec{b} = s(2, 1) + t(-1, 3) = (2s - t, s + 3t)$ であるから,
 $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とすると

$$(8, -3) = (2s - t, s + 3t)$$

$$\text{よって} \quad 2s - t = 8, \quad s + 3t = -3$$

$$\text{これを解くと} \quad s = 3, \quad t = -2$$

$$\text{したがって} \quad \vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$$

練習 1.14 (1) $\vec{a} // \vec{b}$ になるのは, $\vec{b} = k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在するときである.

$$(x, -3) = (-2k, k) \text{ から} \quad x = -2k, \quad -3 = k$$

$$\text{よって} \quad x = -2 \times (-3) = 6$$

(2) $\vec{a} // \vec{b}$ になるのは, $\vec{b} = k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在するときである.

$$(3, 6) = (2k, kx) \text{ から} \quad 3 = 2k, \quad 6 = kx$$

$$\text{よって} \quad k = \frac{3}{2}, \quad x = 4$$

別解 $\vec{a} // \vec{b}$ になるのは, $\vec{a} = k\vec{b}$ を満たす実数 k が存在するときである.

$$(2, x) = (3k, 6k) \text{ から} \quad 2 = 3k, \quad x = 6k$$

$$\text{よって} \quad x = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

練習 1.15 (1) $\overrightarrow{AB} = (1 - 5, 6 - 2) = (-4, 4)$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

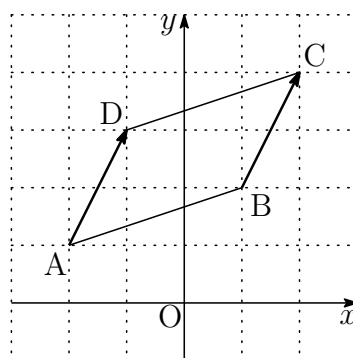
(2) $\overrightarrow{AB} = (2 - (-3), 0 - 4) = (5, -4)$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$

練習 1.16 四角形 ABCD が平行四边形になるのは、
 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ のときであるから

$$(-1 - (-2), 3 - 1) = (2 - x, 4 - y)$$

よって $1 = 2 - x, 2 = 4 - y$

したがって $x = 1, y = 2$



練習 1.17 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 4 \times 3 \times \cos 45^\circ = 4 \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $= 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

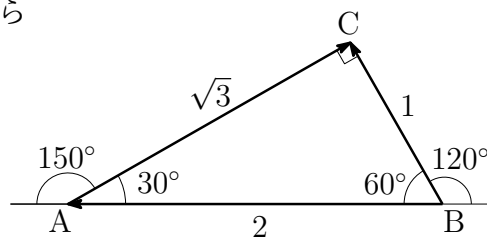
(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 6 \times 6 \times \cos 150^\circ = 6 \times 6 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 $= -18\sqrt{3}$

補足

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

練習 1.18 (1) $\overrightarrow{BA}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は 150° であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= 2 \times \sqrt{3} \times \cos 150^\circ \\ &= 2 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -3 \end{aligned}$$



(2) $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は 90° であるから

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{3} \times 1 \times \cos 90^\circ = \sqrt{3} \times 1 \times 0 = 0$$

練習 1.19 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 5 \times (-2) = -4$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times (-1) = 0$

練習 1.20 2つのベクトルのなす角を θ とする.

$$(1) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2 \times (-3) + 1 \times 1}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 135^\circ$$

$$(2) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 30^\circ$$

$$(3) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3 \times 2 + (-1) \times 6}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 6^2}} = 0$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 90^\circ$$

$$(4) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-4 \times 2 + 2 \times (-1)}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{-10}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = -\frac{10}{10} = -1$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 180^\circ$$

練習 1.21 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ より $3x + 6 \times 4 = 0$

$$\text{よって } x = -8$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ より } x \times x + (-1) \times (x + 2) = 0$$

$$\text{よって } x^2 - x - 2 = 0 \text{ これを解いて } x = -1, 2$$

練習 1.22 (1) $\vec{b} = (x, y)$ とする.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x + y = 0$$

$$\text{よって} \quad y = -2x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|\vec{b}|^2 = (\sqrt{10})^2 \text{ であるから } x^2 + y^2 = 10 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると } x^2 + (-2x)^2 = 10$$

$$\text{整理すると} \quad 5x^2 = 10 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$\textcircled{1}$ に代入して

$$x = \sqrt{2} \text{ のとき } y = -2\sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2} \text{ のとき } y = 2\sqrt{2}$$

$$(\text{答}) \quad \vec{b} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

(2) $\vec{e} = (x, y)$ とする.

$$\vec{a} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \quad \text{すなわち} \quad 4x + 3y = 0$$

$$\text{よって} \quad y = -\frac{4}{3}x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|\vec{e}|^2 = 1^2 \text{ であるから } x^2 + y^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると } x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 1$$

$$\text{整理すると} \quad 25x^2 = 9 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm\frac{3}{5}$$

$\textcircled{1}$ に代入して

$$x = \frac{3}{5} \text{ のとき } y = -\frac{4}{5}, \quad x = -\frac{3}{5} \text{ のとき } y = \frac{4}{5}$$

$$(\text{答}) \quad \vec{e} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

練習 1.23 (1) $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (a_2, -a_1)$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot (-a_1) = 0 \quad \text{よって} \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

(2) $\vec{b} = (2, -1)$ は $\vec{a}$ に垂直である.

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{したがって} \quad \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{b} \quad \text{または} \quad \vec{e} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{b}$$

$$\text{よって} \quad \vec{e} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{または} \quad \vec{e} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{練習 1.24 (1)} \quad |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 &= (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2
 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \quad \text{証終}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2
 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \quad \text{証終}$$

$$\begin{aligned}
 \text{練習 1.25 (1)} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\
 &= 3^2 + 2 \times (-3) + 2^2 = 7
 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0 \text{ であるから} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 &= (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\
 &= 3^2 - 4 \times (-3) + 4 \times 2^2 = 37
 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| \geq 0 \text{ であるから} \quad |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{37}$$

$$\text{練習 1.26} \quad (3\vec{a} - 2\vec{b}) \perp (\vec{a} + 4\vec{b}) \text{ であるから} \quad (3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 4\vec{b}) = 0$$

$$\text{よって} \quad 3|\vec{a}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 0$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2 \text{ を代入すると}$$

$$3 \times 2^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 \times 2^2 = 0 \quad \text{これを解くと} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

$$\text{したがって} \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから} \quad \theta = 60^\circ$$

$$\text{演習 1.1} \quad \overrightarrow{OA} = (4, 1), \overrightarrow{OB} = (2, -1) \text{ より}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |4 \cdot (-1) - 1 \cdot 2| = 3$$

演習 1.2 重力 $\vec{F}$ の向きと移動 $\vec{x}$ させた向きが垂直 ($\theta = 90^\circ$) であるから, 重力が物体に働いた仕事は

$$\vec{F} \cdot \vec{x} = |\vec{F}||\vec{x}| \cos 90^\circ = 0$$

問題 1.1 (1) $3\vec{x} - 4\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{b}$ を整理すると

$$2\vec{x} = 4\vec{a} - 2\vec{b} \quad \text{よって} \quad \vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

(2) $2(\vec{x} - 3\vec{a}) = 5(\vec{x} + 2\vec{b})$ を展開すると $2\vec{x} - 6\vec{a} = 5\vec{x} + 10\vec{b}$

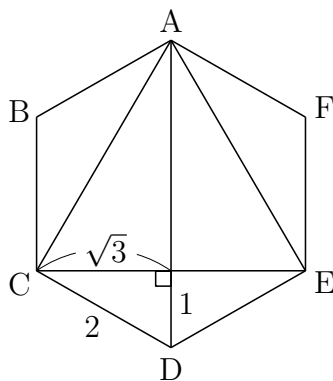
$$\text{したがって} \quad -3\vec{x} = 6\vec{a} + 10\vec{b} \quad \text{よって} \quad \vec{x} = -2\vec{a} - \frac{10}{3}\vec{b}$$

問題 1.2 (1) $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = |\vec{AB}| |\vec{AF}| \cos 120^\circ = 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

(2) $\vec{AD} \cdot \vec{CE} = |\vec{AD}| |\vec{CE}| \cos 90^\circ = 0$

(3) $\vec{AC} \cdot \vec{AE} = |\vec{AC}| |\vec{AE}| \cos 60^\circ = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 6$

(4) $\vec{AC} \cdot \vec{CE} = |\vec{AC}| |\vec{CE}| \cos 120^\circ = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$



問題 1.3 (1) $\vec{c} = (b_2, -b_1)$ とすると $\vec{c} \neq \vec{0}$, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ であれば

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = a_1b_2 + a_2(-b_1) = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{c} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = b_1b_2 + b_2(-b_1) = 0 \iff \vec{b} \perp \vec{c} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \iff \vec{a} // \vec{b}$$

証終

$$\begin{aligned}\text{別証 } (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)\end{aligned}$$

$$\text{したがって } (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \quad \dots (*)$$

$$\vec{a} // \vec{b} \iff (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \text{ であるから, } (*) \text{ より}$$

$$\vec{a} // \vec{b} \iff a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad \text{証終}$$

補足 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とし, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ を $(*)$ に代入すると

$$|a_1b_2 - a_2b_1| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$$

上式は, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積を表す. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とすると

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

別証 $(\vec{a} // \vec{b} \implies a_1b_2 - a_2b_1 = 0)$ の証明

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ が平行なとき, $\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k が存在するから

$$(b_1, b_2) = k(a_1, a_2) \quad \text{ゆえに} \quad b_1 = ka_1, \quad b_2 = ka_2$$

このとき, 上の 2 式から k を消去すると

$$a_1b_2 = a_1(ka_2) = a_2(ka_1) = a_2b_1 \quad \text{よって} \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

$(\vec{a} // \vec{b} \iff a_1b_2 - a_2b_1 = 0)$ の証明

$\vec{a} \neq \vec{0}$ より, $a_1 \neq 0$ または $a_2 \neq 0$. これらの場合に分けて証明する.

$a_1 \neq 0$ のとき, $b_2 = \frac{a_2b_1}{a_1}$ より

$$\vec{b} = (b_1, b_2) = \left(b_1, \frac{a_2b_1}{a_1}\right) = \frac{b_1}{a_1}(a_1, a_2) = \frac{b_1}{a_1}\vec{a} \quad \dots \textcircled{1}$$

$a_2 \neq 0$ のとき, $b_1 = \frac{a_1b_2}{a_2}$ より

$$\vec{b} = (b_1, b_2) = \left(\frac{a_1b_2}{a_2}, b_2\right) = \frac{b_2}{a_2}(a_1, a_2) = \frac{b_2}{a_2}\vec{a} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② はともに $\vec{0}$ ではないから $\vec{a} // \vec{b}$ 証終

(2) 2 つのベクトル $\vec{a} = (9, -6)$, $\vec{b} = (x, 2)$ について, $\vec{a} // \vec{b}$ のとき,
(1) の結果を用いて

$$9 \times 2 - (-6)x = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = -3$$

問題 1.4 (1) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 7$ より $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7$

$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ を代入すると

$$1^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\sqrt{3})^2 = 7 \quad \text{よって} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$$

したがって $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 150^\circ$

(2) $(\vec{a} + t\vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$ であるから $(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$

よって $|\vec{a}|^2 + (t-1)\vec{a} \cdot \vec{b} - t|\vec{b}|^2 = 0$

$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$ を代入すると

$$1 + (t-1) \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 3t = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{5}{9}$$

問題 1.5 (1) $|\vec{OA}| = 4, |\vec{OB}| = 5, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -10$ より

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2} = \sqrt{4^2 \cdot 5^2 - (-10)^2} = 5\sqrt{3}$$

(2) 3点 A(1, 0), B(-2, -1), C(-1, 3) より

$$\vec{AB} = (-3, -1), \quad \vec{AC} = (-2, 3)$$

よって $\triangle ABC = \frac{1}{2} |-3 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2)| = \frac{11}{2}$

問題 1.6 (1) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$ より

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 &\iff |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 0 \\ &\iff |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \end{aligned}$$

証終

(2) 平行四辺形 OACB が長方形, すなわち, $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ となるとき,

(1) の結果から

$$\begin{aligned} \vec{OA} \perp \vec{OB} &\iff \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \\ &\iff |\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} - \vec{OB}| \\ &\iff |\vec{OC}| = |\vec{BA}| \end{aligned}$$

よって, 平行四辺形 OACB が長方形となるための必要十分条件は, 対角線 OC と AB の長さが等しい.

練習 1.27 (1) $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$

(2) $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$

(3) $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

深化 1.1 $A(\vec{a}), B(\vec{b}), P(\vec{p})$ とすると, 線分 AB を $AP : PB = m : n$ に内分する点 P は,

$$nAP = mPB$$

を満たす. $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{PB}$ は同じ向きであるから

$$n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$$

$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}, \overrightarrow{PB} = \vec{b} - \vec{p}$ を代入すると

$$n(\vec{p} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{p})$$

したがって
$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$$

線分 AB を $AQ : QB = m : n$ に外分する点 $Q(\vec{q})$ は,

$$mQB = nAQ \quad (m \neq n)$$

を満たす. $\overrightarrow{AQ}$ と $\overrightarrow{BQ}$ は同じ向きであるから, 同様にして

$$m\overrightarrow{BQ} = n\overrightarrow{AQ} \quad \text{ゆえに} \quad m(\vec{q} - \vec{b}) = n(\vec{q} - \vec{a})$$

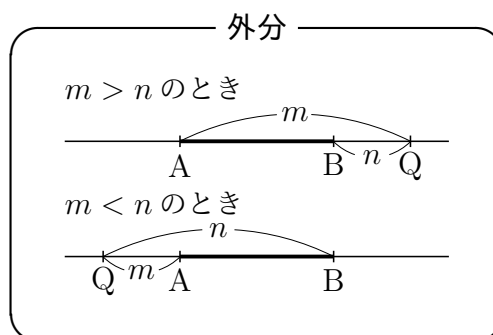
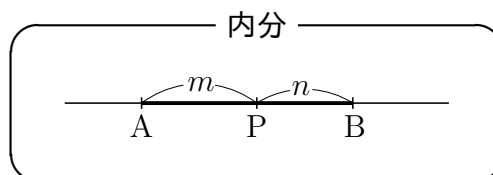
したがって
$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m - n}$$

練習 1.28 (1) $\frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2 + 3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

(2) $\frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{3 + 1} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

(3) $\frac{-\vec{a} + 4\vec{b}}{4 - 1} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

(4) $\frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{1 - 2} = 2\vec{a} - \vec{b}$



練習 1.29 (1) P, Q, R の位置ベクトルを, それぞれ $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ とすると

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}, \quad \vec{q} = \frac{\vec{c} + 2\vec{a}}{3}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

よって
$$\vec{g} = \frac{\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} + \frac{\vec{c} + 2\vec{a}}{3} + \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \right)$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

(2) 点 G の位置ベクトルを, $\vec{g}$ とすると, $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= (\vec{a} - \vec{g}) + (\vec{b} - \vec{g}) + (\vec{c} - \vec{g}) \\ &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - 3\vec{g} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3 \left(\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right) = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

練習 1.30 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とする.

$$AD : DB = 1 : 2 \text{ であるから } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$BE : EC = 3 : 1 \text{ であるから } \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{3 + 1} = \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{4}$$

F は線分 CD の中点であるから

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{1}{2} \left(\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b} \right) = \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{6}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$$

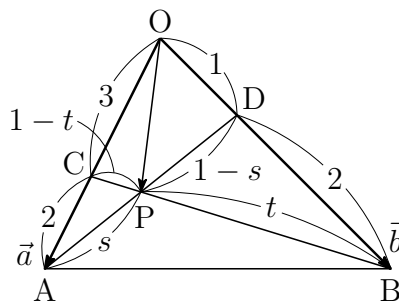
したがって, 3 点 A, F, E は一直線上にある.

練習 1.31 AP : PD = s : (1 - s) とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} \\ &= (1-s)\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b}\end{aligned}$$

BP : PC = t : (1 - t) とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\end{aligned}$$



$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いた表し方は 1 通りであるから

$$1-s = \frac{3}{5}t, \quad \frac{1}{3}s = 1-t$$

これを解くと $s = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{5}{6}$

← $\overrightarrow{OP}$ を表す式のどちらかに代入する.

したがって $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$

別解 $\triangle OAD$ と直線 BC についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{OC}{CA} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BO} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{2}{3} = 1 \quad \text{すなわち} \quad AP : PD = 1 : 1$$

点 P は線分 AD の中点である. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{2} = \frac{1}{2} \left(\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

別解 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ とおく.

$\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OD}$ であるから $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + 3y\overrightarrow{OD}$

点 P は直線 AD 上にあるから $x + 3y = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

$\overrightarrow{OA} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OC}$ であるから $\overrightarrow{OP} = \frac{5}{3}x\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OB}$

点 P は直線 BC 上にあるから $\frac{5}{3}x + y = 1 \quad \dots \textcircled{2}$

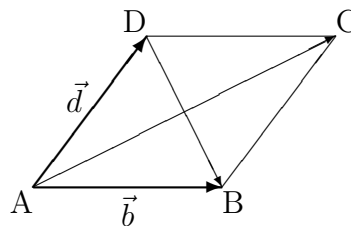
①, ② を解くと $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{6}$ よって $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$

練習 1.32 平行四辺形 ABCD において,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{d}$$

とすると

$$\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}, \quad \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{d}$$



AB = AD ならば, $|\vec{b}| = |\vec{d}|$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{d}) \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 = 0 \end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$

したがって, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$ となるから, $AC \perp DB$ である.

証終

練習 1.33 点 A(2, -1) を通り, $\vec{d} = (-4, 3)$ に平行な直線の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$$

また, 媒介変数を消去した式は

$$3(x - 2) - (-4)(y + 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3x + 4y - 2 = 0$$

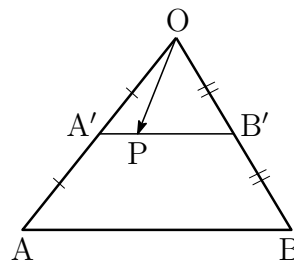
練習 1.34 $s + t = \frac{1}{2}$ から $2s + 2t = 1$

← 右辺が 1 になるように変形する.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= 2s \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \right) + 2t \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \right) \end{aligned}$$

ここで, $2s = s', 2t = t'$ とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= s' \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \right) + t' \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \right), \\ s' + t' &= 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0 \end{aligned}$$



よって, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}, \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となる点 A', B' をとると,

点 P の存在範囲は線分 A'B' である.

練習 1.35 (42 ページの関係式 (1.2) を利用する)

$$(1) \ 0 \leq s+t \leq 2, \ s \geq 0, \ t \geq 0 \text{ より, } s' = \frac{s}{2}, \ t' = \frac{t}{2} \text{ とおくと}$$

$$\overrightarrow{OP} = s'(2\overrightarrow{OA}) + t'(2\overrightarrow{OB}), \quad 0 \leq s' + t' \leq 1, \ s' \geq 0, \ t' \geq 0$$

よって, $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$, $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となる点 A' , B' をとると, 点 P の存在範囲は $\triangle OA'B'$ の周および内部である.

$$(2) \ 0 \leq s+t \leq \frac{1}{2}, \ s \geq 0, \ t \geq 0 \text{ より, } s' = 2s, \ t' = 2t \text{ とおくと}$$

$$\overrightarrow{OP} = s' \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \right) + t' \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} \right), \quad 0 \leq s' + t' \leq 1, \ s' \geq 0, \ t' \geq 0$$

よって, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となる点 A' , B' をとると, 点 P の存在範囲は $\triangle OA'B'$ の周および内部である.

別解 (1) $s+t=k$ とおくと $0 \leq k \leq 2$

[1] $k=0$ のとき, $s=0, t=0$ であるから, 点 P は点 O に一致する.

$$[2] \ 0 < k \leq 2 \text{ のとき, } s+t=k \text{ から } \frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1$$

$$\text{また } \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA}) + \frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$$

$$\text{ここで, } \frac{s}{k} = s', \ \frac{t}{k} = t' \text{ とおくと}$$

$$\overrightarrow{OP} = s'(k\overrightarrow{OA}) + t'(k\overrightarrow{OB}), \quad s' + t' = 1, \ s' \geq 0, \ t' \geq 0$$

$k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_k}$, $k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_k}$ となる点 A_k, B_k をとると, 点 P の存在範囲は線分 A_kB_k である.

← (ここまでが固定された k の値)

$0 < k \leq 2$ の範囲で k が変わるとき, 線分 A_kB_k の点は, 点 O を除く $\triangle OA_2B_2$ の周および内部を動く.

[1], [2] より, $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$, $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となる点 A' , B' をとると, 点 P の存在範囲は $\triangle OA'B'$ の周および内部である.

(2) (1) と同様.

練習 1.36 (1) $1(x-3) + 2(y-4) = 0$ すなわち $x + 2y - 11 = 0$

(2) $3(x+1) - 4(y-2) = 0$ すなわち $3x - 4y + 11 = 0$

練習 1.37 (1) 中心の位置ベクトル $\vec{a}$, 半径 3

(2) $\left| \vec{p} - \frac{\vec{a}}{2} \right| = 2$ より 中心の位置ベクトル $\frac{\vec{a}}{2}$, 半径 2

練習 1.38 $OP \perp AP$ より $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ すなわち $\vec{p} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$

問題 1.7 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする.

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}$$

$$= \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{a})$$

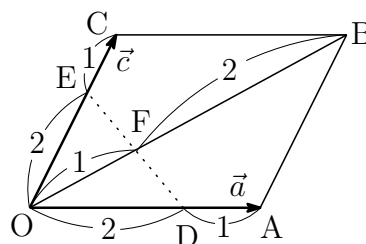
$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{c}) - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{a})$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DF}$$

したがって、3点 D, F, E は一直線上にある.

証終



問題 1.8 $BP : PC = s : (1 - s)$ とすると

$$\overrightarrow{OP} = (1 - s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC}$$

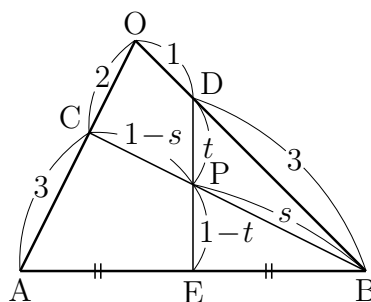
$$= (1 - s)\vec{b} + \frac{2}{5}s\vec{a} \quad \dots \textcircled{1}$$

$DP : PE = t : (1 - t)$ とすると

$$\overrightarrow{OP} = (1 - t)\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE}$$

$$= \frac{1}{4}(1 - t)\vec{b} + \frac{t}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{t}{2}\vec{a} + \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{4}\right)\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$



$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから, $\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いた表し方は1通りである.

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad \frac{2}{5}s = \frac{t}{2}, \quad 1 - s = \frac{t}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\text{これを解くと} \quad s = \frac{5}{8}, \quad t = \frac{1}{2}$$

← ①, ② のどちらかに代入する.

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$$

別解 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ とおく.

$\overrightarrow{OA} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OC}$ であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{5}{2}x\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OB}$$

点 P は直線 BC 上にあるから

$$\frac{5}{2}x + y = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OD}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= x(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (y - x)\overrightarrow{OB} \\ &= 2x\overrightarrow{OE} + 4(y - x)\overrightarrow{OD} \end{aligned}$$

点 P は直線 ED 上にあるから

$$2x + 4(y - x) = 1 \quad \text{すなわち} \quad -2x + 4y = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解くと } x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{8} \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$$

別解 辺 AB 上に OF//DE となる点 F をとると

$$AF : FE : EB = 2 : 1 : 3$$

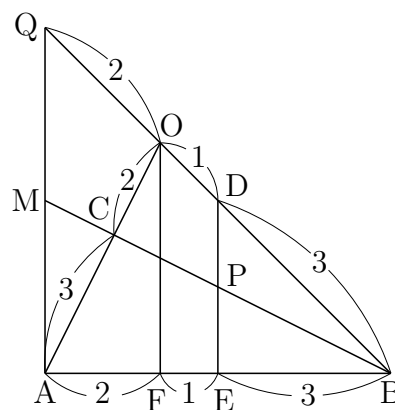
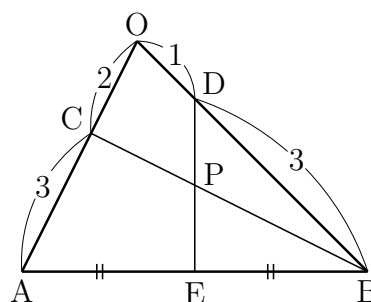
BO の延長線上に DO : OQ = 1 : 2 となる点 Q をとり, 直線 AQ と BC の交点を M とする. $\triangle AOQ$ と直線 BM についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{QM}{MA} \cdot \frac{AC}{CO} \cdot \frac{OB}{BQ} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad QM = MA$$

$$\text{したがって} \quad \frac{QA}{OF} = \frac{3}{2}, \quad \frac{QM}{QA} = \frac{1}{2}, \quad \frac{DP}{QM} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{DP}{OF} = \frac{3}{8}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OD} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$$



問題 1.9 2 直線 $2x + 4y + 1 = 0$, $x - 3y - 7 = 0$ の法線ベクトルの 1 つをそれぞれ

$$\vec{a} = (2, 4), \quad \vec{b} = (1, -3)$$

とおき, これらのベクトルのなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + 4^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{-10}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって $\theta = 135^\circ$

鋭角 α は, θ の外角であるから $\alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

別解 与えた 2 直線は, $x + 2y + \frac{1}{2} = 0$, $-x + 3y + 7 = 0$ とかくこともできる.

これらの法線ベクトル $\vec{n}_1 = (1, 2)$, $\vec{n}_2 = (-1, 3)$ のなす角を φ とおくと

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = 45^\circ$$

よって, 求める鋭角 α は $\alpha = \varphi = 45^\circ$

問題 1.10 $\vec{AP} \perp \vec{CA}$ より, $\vec{AP} \cdot \vec{CA} = 0$ であるから

$$(\vec{CP} - \vec{CA}) \cdot \vec{CA} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{CP} \cdot \vec{CA} = |\vec{CA}|^2$$

$$|\vec{CA}| = r \text{ であるから} \quad (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = r^2$$

問題 1.11 (1) $t = 0$ のとき, $\overrightarrow{AB} = (-50, 0)$ とし, 船 A の速度を $\vec{v}_1 = (0, 20)$, 船 B の速度を $\vec{v}_2 = (10\sqrt{2}, 10\sqrt{2})$ とすると, t 時間後の船 A から見た船 B の相対的位置 $\overrightarrow{AB}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-50, 0) + t(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \\ &= (-50 + 10\sqrt{2}t, (10\sqrt{2} - 20)t)\end{aligned}$$

船 A から見て船 B が南東方向に見えるとき, $\overrightarrow{AB}$ はベクトル $(1, -1)$ と平行であるから

$$-(-50 + 10\sqrt{2}t) - (10\sqrt{2} - 20)t = 0 \quad \text{整理すると} \quad 2(\sqrt{2} - 1)t = 5$$

$$\text{これを解いて} \quad t = \frac{5}{2}(\sqrt{2} + 1) \quad (\text{時間後})$$

(2) 船 B は北東に向かって等速度で運航しているから, その速度を $\vec{v}_2 = (k, k)$ とおくと, t 時間後の船 A から見た船 B の相対的位置 $\overrightarrow{AB}$ は

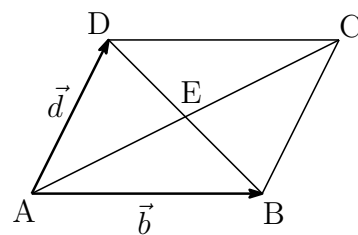
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-50, 0) + t(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \\ &= (-50, 0) + t(k, k - 20) = (-50 + kt, (k - 20)t)\end{aligned}$$

衝突する, すなわち, $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ となるとき

$$-50 + kt = 0, \quad (k - 20)t = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{5}{2}, \quad k = 20$$

$$\vec{v}_2 = (20, 20) \text{ より, 船 B の速さは } |\vec{v}_2| = 20\sqrt{2} \text{ (km/h)}$$

$$\begin{aligned}\text{章末 1.1 (1) } \overrightarrow{EC} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(2) \overrightarrow{BE} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

$$(3) \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{d}$$

章末 1.2 (1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ &= 1 \times 2 \times \cos \theta = 2 \cos \theta\end{aligned}$$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから

$$-2 \leq 2 \cos \theta \leq 2$$

すなわち $-2 \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 2$

したがって、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の最大値は 2, 最小値は -2

$$\begin{aligned}(2) \quad |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 1^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 5 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

(1) より $-2 \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 2$ であるから

$$1 \leq |\vec{a} - \vec{b}|^2 \leq 9$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| \geq 0 \text{ より } 1 \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq 3$$

よって、 $|\vec{a} - \vec{b}|$ の最大値は 3, 最小値は 1

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$$

章末 1.3 $\vec{a} = (2, x)$, $\vec{b} = (x+1, 3)$ より

$$\begin{aligned}2\vec{a} + \vec{b} &= 2(2, x) + (x+1, 3) = (x+5, 2x+3), \\ \vec{a} - 2\vec{b} &= (2, x) - 2(x+1, 3) = (-2x, x-6)\end{aligned}$$

(1) $2\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} - 2\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき, これらの 2 つのベクトルが垂直であるから

$$(x+5)(-2x) + (2x+3)(x-6) = 0$$

$2\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ または $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$ のときも上式は成立する.

$$\text{したがって } -19x - 18 = 0 \text{ を解いて } x = -\frac{18}{19}$$

(2) $2\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} - 2\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき, これらの 2 つのベクトルが平行であるから

$$(x+5)(x-6) - (2x+3)(-2x) = 0$$

$2\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ または $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$ のときも上式は成立する.

$$\text{整理すると } x^2 + x - 6 = 0 \text{ を解いて } x = -3, 2$$

章末 1.4 (1) G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$\text{よって } \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$$

したがって、3 点 O, G, H は一直線上にある.

(2) O は $\triangle ABC$ の外心であるから $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$

$$\begin{aligned}\vec{CH} \cdot \vec{AB} &= (\vec{OH} - \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= (\vec{OB} + \vec{OA}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = |\vec{OB}|^2 - |\vec{OA}|^2 = 0, \\ \vec{AH} \cdot \vec{BC} &= (\vec{OH} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) \\ &= (\vec{OC} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) = |\vec{OC}|^2 - |\vec{OB}|^2 = 0, \\ \vec{BH} \cdot \vec{CA} &= (\vec{OH} - \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OC}) \\ &= (\vec{OA} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OC}) = |\vec{OA}|^2 - |\vec{OC}|^2 = 0\end{aligned}$$

したがって $CH \perp AB$, $AH \perp BC$, $BH \perp CA$

よって H は $\triangle ABC$ の垂心である.

証終

長崎大学 2020 年 4 番

平面上に $\triangle ABC$ がある. 点 O を $\triangle ABC$ の外心とし, 外接円の半径を R とする. また, 点 H は $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$ を満たす点とする.

ただし, 点 H は 3 点 A, B, C と異なる点であるとする.

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

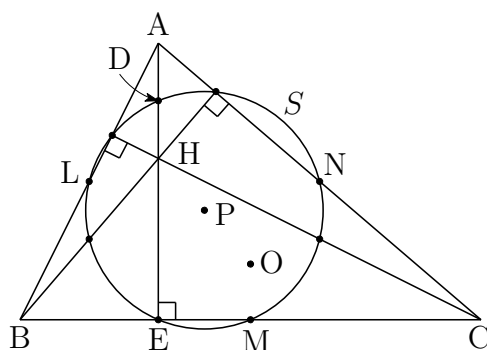
- (1) $\vec{AH}$ と $\vec{CH}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表し, $AH \perp BC$, $CH \perp AB$ であることを示せ.
- (2) 線分 OH の中点を P とし, $\triangle ABC$ の各辺 AB, BC, CA の中点を, それぞれ L, M, N とする. このとき, $\vec{PL}$, $\vec{PM}$, $\vec{PN}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表し, P は $\triangle LMN$ の外心になることを示せ.
- (3) 線分 AH の中点を D とするとき, P は線分 DM の中点になることを示せ.
- (4) 頂点 A から直線 BC に垂線を下ろし, 直線 BC との交点を E とするとき, E は $\triangle LMN$ の外接円の周上にあることを示せ.

解答 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$,

$$\overrightarrow{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} \\ &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} \\ &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$



上式および $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R$ より

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} - \vec{b}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 = R^2 - R^2 = 0$$

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = R^2 - R^2 = 0$$

よって $AH \perp BC$, $CH \perp AB$

補足 同様の計算により, $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ となる. これと (1) の結果より, H が $\triangle ABC$ の垂心であることがわかる. また, $\triangle ABC$ の重心を G とすると

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OH}$$

$\triangle ABC$ の重心 G は外心 O と垂心 H を 1 : 2 に内分する点である. 3 点 O, G, H は同一直線 (オイラー線) 上にある.

(2) L, M, N は AB, BC, CA の中点であるから

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a})$$

点 P は OH の中点であるから $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = -\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = -\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = -\frac{1}{2}\vec{b}$$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R$ より, $|\overrightarrow{PL}| = |\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{PN}| = \frac{1}{2}R$ である.

よって, 点 P は $\triangle LMN$ の外心である.

(3) 点 D は線分 AH の中点であるから

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

線分 DM の中点は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

よって、P は線分 DM の中点である。

(4) $\triangle LMN$ の外接円を S とすると、(3) の結果から、DM は S の直径である。
 $\angle DEM$ は直角であるから、E は外接円 S 上の点である。

補足 E と同様に、頂点 B から直線 CA に垂直に引いた直線と CA との交点、頂点 C から直線 AB に垂直に引いた直線と AB との交点も S 上にある。また、D と同様に、線分 BH の中点、線分 CH の中点も S 上にある。これら 9 点が S 上にあるから、九点円 (オイラー円) と呼ばれている。 S の中心 P もオイラー線上にある。 $\triangle ABC$ の外心 O、重心 G、垂心 H を含めて次の比に内分される。

$$OG : GP : PH = 2 : 1 : 3$$

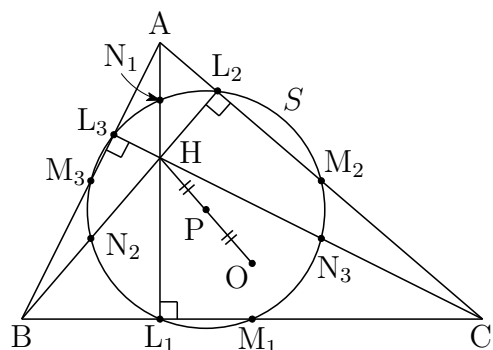
S の半径は、 $\triangle ABC$ の外接円の $\frac{1}{2}$ である。

9 点円についてまとめると、次のようになる。

9 点円 (オイラー円)

$\triangle ABC$ の外接円の半径 R に対して、OH の中点 P を中心とする半径 $\frac{R}{2}$ の円を S とする。 $\triangle ABC$ の垂心 H から辺 BC, CA, AB にそれぞれ垂線 HL_1 , HL_2 , HL_3 を引く。また、辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ M_1 , M_2 , M_3 とし、さらに、HA, HB, HC の中点をそれぞれ N_1 , N_2 , N_3 とする。

これら 9 点 L_i , M_i , N_i ($i = 1, 2, 3$) は、 S 上にあり、この円を **9 点円 (オイラー円)** という。



章末 1.5 (1) $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AE}$ とする.

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AE}$$

$$= \frac{1}{4}k\vec{b} + \frac{3}{4}k\vec{c}$$

CP : PD = t : (1 - t) とする.

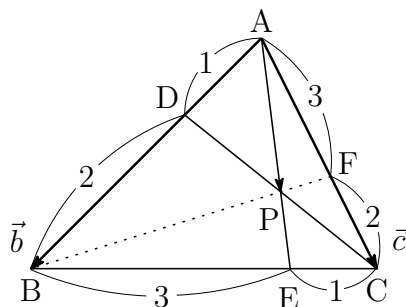
$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{3}t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$$

$\overrightarrow{AP}$ の $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いた表し方は 1 通りであるから

$$\frac{1}{4}k = \frac{1}{3}t, \quad \frac{3}{4}k = 1 - t \quad \text{これを解くと} \quad k = \frac{2}{3}, \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$



$$\text{別解 } \overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AE} = k\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = k\left(\frac{1}{4} \cdot 3\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{4}k\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}k\overrightarrow{AC}$$

$$\text{点 P は CD 上にあるから} \quad \frac{3}{4}k + \frac{3}{4}k = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{2}{3}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

別解 $\triangle AEC$ および直線 BF について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AP}{PE} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{AP}{PE} = 2$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{4} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) - \vec{b} = \frac{-5\vec{b} + 3\vec{c}}{6}$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\vec{c} - \vec{b} = \frac{-5\vec{b} + 3\vec{c}}{5}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{BP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BF} \quad \text{したがって, 3 点 B, P, F は一直線上にある.}$$

章末 1.6 $\vec{OP} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ について

$\vec{OB} = 2\vec{OD}$ であるから $\vec{OP} = m\vec{OA} + 2n\vec{OD}$

点 P は直線 AD 上にあるから

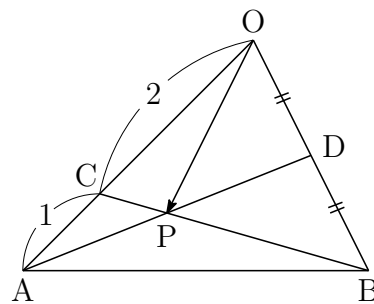
$$m + 2n = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\vec{OA} = \frac{3}{2}\vec{OC}$ であるから $\vec{OP} = \frac{3}{2}m\vec{OC} + n\vec{OB}$

点 P は直線 BC 上にあるから

$$\frac{3}{2}m + n = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解くと $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}$



章末 1.7 (1) $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}$ を与式に代入すると

$$3\overrightarrow{AP} + 4(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 5(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$12\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{12}(4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}{9}$$

よって, BC を 5 : 4 に内分する点を D とすると

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

ゆえに, 点 P は線分 AD を 3 : 1 に内分する点である.

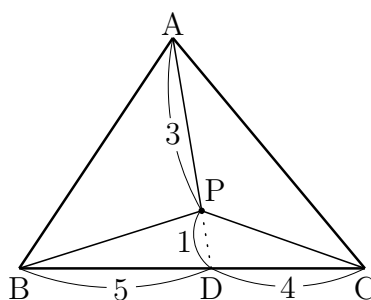
(2) $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$\triangle PBC = \frac{PD}{AD} \triangle ABC = \frac{1}{4}S$$

$$\triangle PCA = \frac{AP}{AD} \triangle ACD = \frac{AP}{AD} \cdot \frac{DC}{BC} \triangle ABC = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} S = \frac{1}{3}S$$

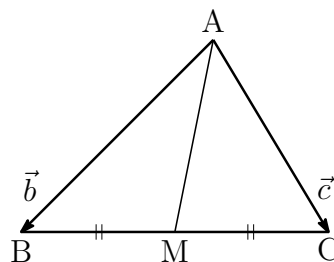
$$\triangle PAB = \frac{AP}{AD} \triangle ABD = \frac{AP}{AD} \cdot \frac{BD}{BC} \triangle ABC = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9} S = \frac{5}{12}S$$

$$\text{よって } \triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = \frac{1}{4}S : \frac{1}{3}S : \frac{5}{12}S = 3 : 4 : 5$$



章末 1.8 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \\ \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}\end{aligned}$$



よって

$$\begin{aligned}2(AM^2 + BM^2) &= 2(|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2) \\ &= 2\left(\frac{1}{4}|\vec{b} + \vec{c}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{c} - \vec{b}|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\{(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})\} \\ &= \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) \\ &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = AB^2 + AC^2\end{aligned}$$

したがって $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

証終

別証 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB}|^2 \\ &= (|\overrightarrow{AM}|^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + |\overrightarrow{MB}|^2) \\ &\quad + (|\overrightarrow{AM}|^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + |\overrightarrow{MB}|^2) \\ &= 2(|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2)\end{aligned}$$

よって $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

証終

章末 1.9 (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする.

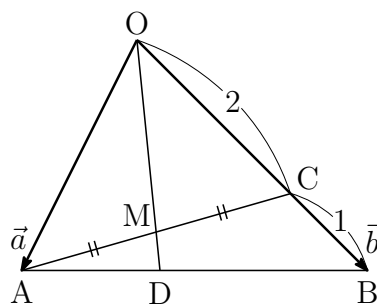
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{1}{2} \left(\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

であるから

$$\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b}$$

ここで、点 D は直線 AB 上にあるから

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{6}{5}$$



(2) (1) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{6}{5}\overrightarrow{OM} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} = \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{5} \\ &= \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{2+3}\end{aligned}$$

よって、点 D は線分 AB を 2 : 3 に内分する点である。

したがって **AD : DB = 2 : 3**

別解 $\triangle ABC$ と直線 OD についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BO}{OC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AD}{DB} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

よって **AD : DB = 2 : 3**

補足 $\triangle ODB$ と直線 AC についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{OM}{MD} \cdot \frac{DA}{AB} \cdot \frac{BC}{CO} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{OM}{MD} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

したがって $OM : MD = 5 : 1$ よって $k = \frac{OD}{OM} = \frac{6}{5}$

- 章末 1.10 (1) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t(2\overrightarrow{OB})$, $s + t = 1$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ より,
 $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ とおくと, 点 P の存在範囲は線分 AB' である.
- (2) $\overrightarrow{OP} = 3s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right) + 2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$, $0 \leq 3s + 2t \leq 1$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ より,
 $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ とおくと, 点 P の存在範囲は, $\triangle OA'B'$ の周
 および内部である.

補足 $3s = s'$, $2t = t'$ とおいて

$$\overrightarrow{OP} = s'\overrightarrow{OA'} + t'\overrightarrow{OB'}, \quad 0 \leq s' + t' \leq 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

とすると, 上の結果が (1.2) に適用されていることがわかる.

- 章末 1.11 (1) $\vec{n} = (3, 4)$ および直線 $3x + 4y - 1 = 0$ より, 直線上の点 $P(\vec{p})$ は

$$\vec{n} \cdot \vec{p} - 1 = 0$$

を満たす. $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (1, 2)$ とする. $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$ より

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \vec{a} + k\vec{n}$$

H は直線上の点であるから

$$\vec{n} \cdot (\vec{a} + k\vec{n}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{n} \cdot \vec{a} + k|\vec{n}|^2 - 1 = 0$$

$$\text{したがって} \quad 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + k(3^2 + 4^2) - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = -\frac{2}{5}$$

別解 H(x_1 , y_1) とすると, H は直線 $3x + 4y - 1 = 0$ 上にあるから

$$3x_1 + 4y_1 - 1 = 0 \tag{*}$$

$$\vec{n} = (3, 4), \quad \overrightarrow{AH} = k\vec{n} \text{ より}$$

$$(x_1 - 1, y_1 - 2) = k(3, 4) \quad \text{ゆえに} \quad x_1 = 3k + 1, \quad y_1 = 4k + 2 \tag{**}$$

(**) を (*) に代入すると

$$3(3k + 1) + 4(4k + 2) - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = -\frac{2}{5}$$

- (2) 線分 AH の長さは, $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$ より

$$AH = |\overrightarrow{AH}| = |k||\vec{n}| = \left| -\frac{2}{5} \right| \sqrt{3^2 + 4^2} = 2$$

章末 1.12 (1) $(\vec{p} + \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ より

$$|\vec{p}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{p}| = |\vec{a}|$$

よって、点 P の全体は原点 O を中心とする半径 OA の円.

(2) $|\vec{p} + \vec{a}| = |\vec{p} - \vec{a}|$ より

$$|\vec{p} + \vec{a}|^2 = |\vec{p} - \vec{a}|^2 \quad \text{整理すると} \quad \vec{a} \cdot \vec{p} = 0$$

よって、点 P の全体は原点 O を通り、線分 OA に垂直な直線.

練習 2.1 (1) $(-1, 3, 2)$ (2) $(1, -3, 2)$ (3) $(-1, -3, 2)$ (4) $(-1, -3, -2)$

練習 2.2 (1) $OP = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$

(2) $OQ = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

練習 2.3 $\vec{AE}$ に等しいベクトルは, $\vec{BF}$, $\vec{CG}$, $\vec{DH}$

$\vec{AD}$ の逆ベクトルは, $\vec{HE}$, $\vec{GF}$, $\vec{CB}$

練習 2.4 (1) $\vec{AB} + \vec{FG} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ よって, □ は C

(2) $\vec{AD} - \vec{EF} = \vec{AD} - \vec{AB} = \vec{BD}$ よって, □ は B

練習 2.5 (1) $\vec{EC} = \vec{EF} + \vec{FG} + \vec{GC} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

(2) $\vec{BH} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(3) $\vec{DF} = \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BF} = \vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

(4) $\vec{HF} = \vec{HG} + \vec{GF} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

練習 2.6 $\vec{a} = \vec{b}$ より $2 = x - 4, -1 = y + 2, -3 = -z + 1$

これを解いて $x = 6, y = -3, z = 4$

練習 2.7 (1) $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

(2) $|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

練習 2.8 (1) $\vec{a} + \vec{b} = (1, 3, -2) + (4, -3, 0) = (1+4, 3-3, -2+0)$
 $= (\mathbf{5}, \mathbf{0}, \mathbf{-2})$

(2) $\vec{a} - \vec{b} = (1, 3, -2) - (4, -3, 0) = (1-4, 3+3, -2-0)$
 $= (\mathbf{-3}, \mathbf{6}, \mathbf{-2})$

(3) $2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(1, 3, -2) + 3(4, -3, 0)$
 $= (2+12, 6-9, -4+0) = (\mathbf{14}, \mathbf{-3}, \mathbf{-4})$

(4) $-3(\vec{a} - 2\vec{b}) = -3(1, 3, -2) + 6(4, -3, 0)$
 $= (-3+24, -9-18, 6+0) = (\mathbf{21}, \mathbf{-27}, \mathbf{6})$

練習 2.9 (1) $\overrightarrow{AB} = (3-2, -1-1, 5-4) = (\mathbf{1}, \mathbf{-2}, \mathbf{1})$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{\mathbf{6}}$

(2) $\overrightarrow{AB} = (1-3, -4-0, 2-(-2)) = (\mathbf{-2}, \mathbf{-4}, \mathbf{4})$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$

練習 2.10 (1) 内積は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-3) + (-3) \times 1 + 1 \times 2 = \mathbf{-7}$

また $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

よって $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = \mathbf{120^\circ}$

(2) 内積は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-2) + 4 \times 1 + 3 \times 0 = \mathbf{0}$

よって $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{0}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = \mathbf{90^\circ}$

練習 2.11 $\overrightarrow{BA} = (6-5, 7-5, -8-(-6)) = (1, 2, -2)$

$\overrightarrow{BC} = (6-5, 4-5, -2-(-6)) = (1, -1, 4)$

よって $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + (-2) \times 4 = -9$

また $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

したがって $\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-9}{3 \times 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ$ であるから $\angle ABC = \mathbf{135^\circ}$

練習 2.12 $\vec{p} = (x, y, z)$ とする.

$$\vec{a} \perp \vec{p} \text{ より } \vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \text{ であるから} \quad 2x - z = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \perp \vec{p} \text{ より } \vec{b} \cdot \vec{p} = 0 \text{ であるから} \quad x + 3y - 2z = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$|\vec{p}|^2 = 6 \text{ であるから} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から, } y, z \text{ を } x \text{ で表すと} \quad y = x, z = 2x$$

これらを $\textcircled{3}$ に代入すると

$$x^2 + x^2 + 4x^2 = 6 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm 1$$

$$x = 1 \text{ のとき} \quad y = 1, z = 2$$

$$x = -1 \text{ のとき} \quad y = -1, z = -2$$

$$\text{よって} \quad \vec{p} = (1, 1, 2), (-1, -1, -2)$$

補足 2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に垂直なベクトルを $\vec{n} = (x, y, z)$ とおくと, $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ より

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{上の2式から } z \text{ を消去すると} \quad (a_3b_1 - a_1b_3)x - (a_2b_3 - a_3b_2)y = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{上の2式から } x \text{ を消去すると} \quad (a_1b_2 - a_2b_1)y - (a_3b_1 - a_1b_3)z = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$x = a_2b_3 - a_3b_2$, $y = a_3b_1 - a_1b_3$, $z = a_1b_2 - a_2b_1$ とすると, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を満たす. したがって

$$\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

とすると, $\vec{a} \perp \vec{n}$, $\vec{b} \perp \vec{n}$ である.

この $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の2つのベクトルに垂直なベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積といい

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

と定義する.

外積

定義式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ を用いて，次式を計算すると

$$\begin{aligned} & a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1a_1b_3 - a_3a_1b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_3a_1b_2 - a_2a_3b_1 = 0 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} & b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_2b_3b_1 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1a_2b_3 - a_2b_3b_1 = 0 \end{aligned}$$

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

は， $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを， $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積 (ベクトル積) と言い， $\vec{a} \times \vec{b}$ で表し，その成分は

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

であるから， $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ が成り立つ．実際

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1), \\ \vec{b} \times \vec{a} &= \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (b_2a_3 - b_3a_2, b_3a_1 - b_1a_3, b_1a_2 - b_2a_1) = -\vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

特に、 $\vec{a} // \vec{b}$ のとき、実数 k を用いて $\vec{b} = k\vec{a}$ とかけるから

$$(b_1, b_2, b_3) = k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ ka_2 & ka_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ ka_3 & ka_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ ka_1 & ka_2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0)$$

また、外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさについて

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

であるから、 $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは、 $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい。

平行四辺形・三角形の面積

$\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積は $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

O, A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を頂点とする三角形の面積は

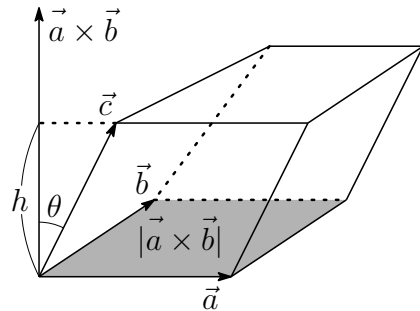
$$\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| |\cos \theta|$$



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の張る平行六面体について、 $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平面を底面とすると、 $|\vec{c}| \cos \theta$ は、その高さ h であるから、この平行六面体の体積 V_1 は

$$V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

また、対称性により、 $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$ が成り立つ。

熊大理系 2018 年 1 番

t を実数とする。空間の 4 点 $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$, $D(1, 6, 1)$ について、 $\angle BAC$ が直角であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) t の値を求めよ。
- (2) D から A, B, C を通る平面に垂線を下ろし、 A, B, C を通る平面との交点を H とする。 $\overrightarrow{HD}$ を求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

解答 (1) $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (t-1, 2t-5, t-1)$$

$\angle BAC = 90^\circ$ のとき、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ であるから

$$3(t-1) - 3(2t-5) + 0(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 4$$

(2) (1) の結果から $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$

$$\overrightarrow{AD} = (1, 6, 1) - (1, 5, 0) = (0, 1, 1)$$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (1, 1, -2)$$

とおくと、 $\overrightarrow{HD} = k\vec{n}$ であるから (k は実数), $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}$ より

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + k\vec{n}$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AH} \text{ であるから} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = k|\vec{n}|^2$$

$$\text{したがって} \quad -1 = 6k \quad \text{ゆえに} \quad k = -\frac{1}{6}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{HD} = -\frac{1}{6}\vec{n} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$

$\vec{e}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, $\vec{e}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ とおくと, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HD} &= \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 - (\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 \\ &= \overrightarrow{AD} - \frac{(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB})}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} - \frac{(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AC}|^2} \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AD} = (1, 6, 1) - (1, 5, 0) = (0, 1, 1) \text{ より } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$$

また, $|\overrightarrow{AB}|^2 = 18$, $|\overrightarrow{AC}|^2 = 27$ であるから

$$\overrightarrow{HD} = (0, 1, 1) + \frac{1}{6}(3, -3, 0) - \frac{2}{9}(3, 3, 3) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

(3) よって, 求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \triangle ABC \cdot |\overrightarrow{HD}| &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{HD}| \\ &= \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

別解 D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h , $\vec{e} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ とおくと

$$h = |\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって, 求める四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3} \triangle ABC \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| h = \frac{3}{2}$$

補足 2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき、
ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は、 $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する。このベクトルを、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積と言い、 $\vec{a} \times \vec{b}$ で表す⁴。本題において、 $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$ より

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-9, -9, 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$$

であるから、 $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 1)$ より

$$V = \frac{1}{6} |9| = \frac{3}{2}$$

熊大文系 2020 年 4 番

k, s, t を実数とする。座標空間に原点 O , $A(1, -1, 1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-1, 0, k)$ の 4 点をとる。 $\overrightarrow{OD} = (1-s)\overrightarrow{OA}$ で定まる点を D , $\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC}$ で定まる点を E とし、 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{DE}$ により定まる点を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を k, s, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ を満たしながら動くとき、点 P が動いてできる平行四辺形を $P(k)$ とし、その面積を $S(k)$ とする。 k が実数全体を動くとき、 $S(k)$ の最小値と、そのときの k の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた k に対し、平行四辺形 $P(k)$ を底面とし、点 O を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

解答 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと

$$\overrightarrow{OD} = (1-s)\vec{a}, \quad \overrightarrow{OE} = t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\ &= \{t\vec{b} + (1-t)\vec{c}\} - (1-s)\vec{a} \\ &= -\vec{a} + \vec{c} + s\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{c}) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$-\vec{a} + \vec{c} = (-2, 1, k-1)$, $\vec{b} - \vec{c} = (1, 1, 1-k)$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (-2, 1, k-1) + s(1, -1, 1) + t(1, 1, 1-k) \\ &= (-2+s+t, 1-s+t, k-1+s+t(1-k)) \end{aligned}$$

よって $\mathbf{P}(-2+s+t, 1-s+t, k-1+s+t(1-k))$

(2) $\vec{d} = \vec{b} - \vec{c}$ とおくと, (*) において $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ より, $\overrightarrow{OP}$ の描く図形は, 2つのベクトル

$$\vec{a} = (1, -1, 1), \quad \vec{d} = (1, 1, 1-k)$$

によって張られる平行四辺形であるから, その面積 $S(k)$ は

$$S(k) = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{d}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{d})^2}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad |\vec{a}|^2 &= 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \\ |\vec{d}|^2 &= 1^2 + 1^2 + (1-k)^2 = k^2 - 2k + 3 \\ \vec{a} \cdot \vec{d} &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1(1-k) = 1-k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad S(k) &= \sqrt{3(k^2 - 2k + 3) - (1-k)^2} \\ &= \sqrt{2(k-1)^2 + 6} \end{aligned}$$

よって, $S(k)$ は, $k=1$ のとき, 最小値 $\sqrt{6}$ をとる.

別解 $\vec{a}$ と $\vec{d}$ のベクトル積 (外積) は $\vec{a} \times \vec{d} = (k-2, k, 2)$

$$\text{ゆえに} \quad S(k) = |\vec{a} \times \vec{d}| = \sqrt{(k-2)^2 + k^2 + 4} = \sqrt{2(k-1)^2 + 6}$$

注意 ベクトル積 (外積) は, 高校数学の範囲外であるが, 熊大入試では利用できる. 2018 年度の熊大入試において, 四面体の体積についてベクトル積を用いた受験生の解答があったが, 間違いではなかったため, 減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会).

(3) $k = 1$ より, 平行四辺形 $P(1)$ は, 次の 2 つのベクトルに平行である.

$$\vec{a} = (1, -1, 1), \quad \vec{d} = (1, 1, 0)$$

これらに垂直な単位ベクトルの 1 つは (外積と平行なベクトル)

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$$

(*) より, $P(1)$ 上の 1 点 $C(\vec{c})$ をもとに ($s = 1, t = 0$), 点 O から $P(1)$ を含む平面に垂線 OH を引くと, $\vec{c} = (-1, 0, 1)$ より

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{e} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \{-1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2\} = \frac{3}{\sqrt{6}}, \\ OH &= |\vec{c} \cdot \vec{e}| = \frac{3}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\text{求める四角錐の体積は } \frac{1}{3} S(1) \cdot OH = \frac{1}{3} \sqrt{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = 1$$

補足 右の図において

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{e} &= |\vec{c}| |\vec{e}| \cos \theta = |\vec{c}| \cos \theta, \\ OH &= |\vec{c}| |\cos \theta| \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } OH = |\vec{c} \cdot \vec{e}|$$

例えば, $P(1)$ 上の位置ベクトル $-\vec{a} + \vec{c} = (-2, 1, 0)$ でもよい.

$$(-\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{-2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2\} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

別解 $\vec{f} = -\vec{a} + \vec{c}$ とおくと ($\vec{d} = \vec{b} - \vec{c}$), (*) は

$$\overrightarrow{OP} = \vec{f} + s\vec{a} + t\vec{d} \quad (0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1)$$

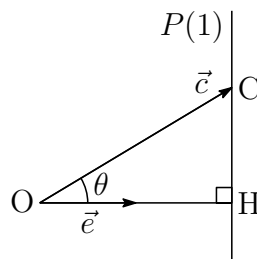
$P(1)$ の頂点を $P_0(\vec{f})$, $P_1(\vec{f} + \vec{a})$, $P_2(\vec{f} + \vec{d})$, $P_3(\vec{f} + \vec{a} + \vec{d})$ とおくと

$$\overrightarrow{P_0O} = -\vec{f}, \quad \overrightarrow{P_0P_1} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{P_0P_2} = \vec{d}$$

四面体 $OP_0P_1P_2$ の体積 V は, $\vec{a} \times \vec{d} = (-1, 1, 2)$, $-\vec{f} = (2, -1, 0)$ より

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{d}) \cdot (-\vec{f})| = \frac{1}{6} |(-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0| = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, 求める体積は } 2V = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$



練習 2.13 $\triangle BCD$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表すと

$$\vec{g} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

P は線分 AG を $3:1$ に内分する点であるから

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} + 3\vec{g}}{3+1} = \frac{\vec{a} + 3\vec{g}}{4}$$

$$3\vec{g} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \text{ より } \vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$$

練習 2.14 証明 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$$

また, G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$$

したがって, 3 点 O , G , P は一直線上にある.

証終

練習 2.15 $\overrightarrow{CP} = (x-2, -1, 2)$, $\overrightarrow{CA} = (-3, -2, 0)$, $\overrightarrow{CB} = (0, -6, 4)$ に対して,
 $\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s , t があるから

$$(x-2, -1, 2) = s(-3, -2, 0) + t(0, -6, 4)$$

$$\text{すなわち } (x-2, -1, 2) = (-3s, -2s-6t, 4t)$$

$$\text{よって } x-2 = -3s \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-1 = -2s - 6t \quad \dots \textcircled{2}$$

$$2 = 4t \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ を解くと } s = -1, t = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } x-2 = -3 \cdot (-1) \text{ よって } x = 5$$

$$\text{別解 } \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \right) = (-8, 12, 18)$$

$(\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}) \perp \overrightarrow{CP}$ より, $(\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ であるから

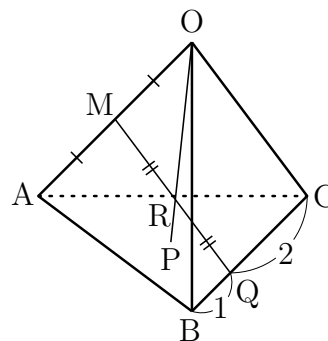
$$-8(x-2) + 12 \cdot (-1) + 18 \cdot 2 = 0 \quad \text{これを解いて } x = 5$$

練習 2.16 O に関する位置ベクトルを考え、 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ とする. P は平面 ABC 上にあるから

$$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB} \\ &= \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c}) \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} + (1 - s - t)\vec{c}\end{aligned}$$



また, P は直線 OR 上にあるから, $OR : OP = 1 : k$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR} = k \left(\frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ}}{2} \right) = \frac{1}{2}k\overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{OQ} \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{1+2} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

であるから, ① に代入して

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}k \left(\frac{1}{2}\vec{a} \right) + \frac{1}{2}k \left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right) = \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c}$$

$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いた表し方はただ 1 通りであるから

$$s = \frac{1}{4}k, \quad t = \frac{1}{3}k, \quad 1 - s - t = \frac{1}{6}k$$

これを解くと, $k = \frac{4}{3}$ であるから $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$

別解 $\triangle AQM$ と直線 OP について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AP}{PQ} \cdot \frac{QR}{RM} \cdot \frac{MO}{OA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AP}{PQ} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

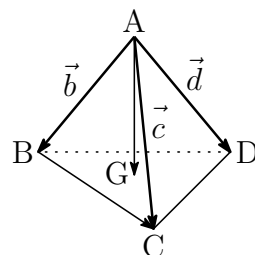
$AP : PQ = 2 : 1$ であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OQ}}{2+1} = \frac{1}{3} \left(\vec{a} + 2 \cdot \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} \right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

練習 2.17 証明 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とすると

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$



であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{3}(|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2) + \frac{1}{3}(\vec{d} \cdot \vec{c} - \vec{d} \cdot \vec{b}) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

正四面体 ABCD においては, $\vec{d}$ と $\vec{c}$, $\vec{d}$ と $\vec{b}$ のなす角は, ともに 60° であるから

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| |\vec{c}| \cos 60^\circ,$$

$$\vec{d} \cdot \vec{b} = |\vec{d}| |\vec{b}| \cos 60^\circ$$

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| \text{ であるから } |\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2, \vec{d} \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{b}$$

よって, ① により $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ であり, $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BC}$ となる.

したがって $AG \perp BC$

証終

練習 2.18 (1) $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-3)^2 + \{1-(-2)\}^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$$(2) \left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+(-3)}{2}, \frac{-2+1}{2} \right) \text{ より } \left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

$$(3) \left(\frac{1 \times 1 + 2 \times 4}{2+1}, \frac{1 \times 3 + 2 \times (-3)}{2+1}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{2+1} \right) \text{ より } (3, -1, 0)$$

$$(4) \left(\frac{-1 \times 1 + 2 \times 4}{2-1}, \frac{-1 \times 3 + 2 \times (-3)}{2-1}, \frac{-1 \times (-2) + 2 \times 1}{2-1} \right) \text{ より } (7, -9, 4)$$

練習 2.19 $\triangle ABC$ の重心を G とすると $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

よって, 点 G の座標は

$$\left(\frac{2+1+3}{3}, \frac{-1+3+1}{3}, \frac{4+0+2}{3} \right) \text{ すなわち } (2, 1, 2)$$

練習 2.20 (1) $z = 3$

(2) $x = 1$

(3) $y = 2$

練習 2.21 (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ すなわち $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(2) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + \{z-(-3)\}^2 = 4^2$

すなわち $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$

(3) 線分 AB の長さは

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (4-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20}$$

よって、求める球面の方程式は

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{20})^2$$

すなわち $x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 20$

別解 求める球面の方程式は、半径を r とすると

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

この球面が点 B(2, 4, 5) を通るから

$$2^2 + (4-4)^2 + (5-1)^2 = r^2$$

よって $r^2 = 20$

したがって、求める球面の方程式は、 $\textcircled{1}$ より

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 20$$

(4) 球面の中心を C とすると、C は線分 AB の中点であるから、その座標は

$$\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{-3+1}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad (0, 3, -1)$$

また、球面の半径を r とすると

$$r = CA = \sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{17}$$

よって、球面の方程式は $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$

別解 球面上に P(x, y, z) をとると

$$\overrightarrow{AP} = (x-2, y, z+3), \quad \overrightarrow{BP} = (x+2, y-6, z-1)$$

P が 2 点 A, B を除く球面上の点であるとき、 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ であるから

$$(x-2)(x+2) + y(y-6) + (z+3)(z-1) = 0$$

上式は、P が 2 点 A, B のときも成立する。

したがって $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 2z - 7 = 0$

よって $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$

練習 2.22 球面の方程式で、 $x = 0$ とすると

$$(0 - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 5^2 \quad \text{すなわち} \quad (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 3^2$$

この方程式は、 yz 平面上では円を表す.

その中心の座標は $(0, -2, 3)$, 半径は 3 である.

演習 2.1 求める平面の方程式は

$$2(x - 3) - (y - 1) + 4(z + 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x - y + 4z - 1 = 0$$

熊大文系 2022 年 1 番

座標空間の 6 点

$$A(2, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 1)$$

$$D\left(3, -1, \frac{5}{6}\right), E\left(8, 4, -\frac{1}{3}\right), F\left(5, 3, \frac{1}{2}\right)$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 A, B, C は一直線でないこと、および 3 点 D, E, F は一直線上にないことを示せ。
- (2) 3 点 A, B, C を通る平面と、3 点 D, E, F を通る平面の交わりとして得られる直線を ℓ とする。 ℓ 上の点を 1 つと、 ℓ と平行なベクトルを 1 つ求めよ。

解答 (1) $A(2, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 1)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 1)$$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の x 成分が等しく、 y 成分および z 成分が異なる.

したがって、3 点 A, B, C は一直線上にない.

$$D\left(3, -1, \frac{5}{6}\right), E\left(8, 4, -\frac{1}{3}\right), F\left(5, 3, \frac{1}{2}\right) \text{ より}$$

$$\overrightarrow{DE} = \left(5, 5, -\frac{7}{6}\right), \quad \overrightarrow{DF} = \left(2, 4, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{これから} \quad \frac{1}{5}\overrightarrow{DE} = \left(1, 1, -\frac{7}{30}\right), \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} = \left(1, 2, -\frac{1}{6}\right)$$

$\frac{1}{5}\overrightarrow{DE}$ と $\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$ の x 成分が等しく、 y 成分および z 成分が異なる.

したがって、3 点 D, E, F は一直線上にない.

(2) $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 1)$ より

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (3, 2, 6)$$

$\overrightarrow{DE} = (5, 5, -\frac{7}{6})$, $\overrightarrow{DF} = (2, 4, -\frac{1}{3})$ より

$$\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF} = \left(\begin{vmatrix} 5 & -\frac{7}{6} \\ 4 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{7}{6} & 5 \\ -\frac{1}{3} & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{3}(9, -2, 30)$$

$\overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{AC}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{u} = (3, 2, 6)$ とし,
 $\overrightarrow{DE}$ および $\overrightarrow{DF}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{v} = (9, -2, 30)$ とする.

平面 ABC 上の点 $P(x, y, z)$ について, $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ であるから

$$3(x-2) + 2y + 6z = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3x + 2y + 6z = 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

平面 DEF 上の点 $Q(x, y, z)$ について, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0$ であるから

$$9(x-3) - 2(y+1) + 30\left(z - \frac{5}{6}\right) = 0$$

整理すると $9x - 2y + 30z = 54 \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ② から y を消去すると $x = -3z + 5 \quad \cdots \textcircled{3}$

③ を ① に代入すると $z = \frac{2}{3}y + 3 \quad \cdots \textcircled{4}$

$y = 3t$ とおくと, ③, ④ より $x = -6t - 4$, $z = 2t + 3$

したがって $\ell: (x, y, z) = (-4, 0, 3) + t(-6, 3, 2)$

よって, ℓ は点 $(-4, 0, 3)$ を通り, ベクトル $(-6, 3, 2)$ に平行.

問題 2.1 $s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = s(1, -2, 3) + t(-2, 1, 0) + u(2, -3, 1)$
 $= (s - 2t + 2u, -2s + t - 3u, 3s + u)$

$\vec{p} = (-1, 5, 0)$ であるから

$$s - 2t + 2u = -1, \quad -2s + t - 3u = 5, \quad 3s + u = 0$$

これを解くと $s = 1, t = -2, u = -3$

したがって $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$

問題 2.2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 + (-2 + t) \cdot 0 + (1 + 2t) \cdot 0 = 5$

また $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-2 + t)^2 + (1 + 2t)^2} = \sqrt{30 + 5t^2}$, $|\vec{b}| = 1$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ$ より $5 = \sqrt{30 + 5t^2} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

両辺を平方すると $25 = \frac{30 + 5t^2}{2}$ ゆえに $t^2 = 4$ よって $t = \pm 2$

問題 2.3 証明 点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

線分 DM を 2 : 1 に内分する点を G' とすると

$$\vec{OG'} = \frac{\vec{OD} + 2\vec{OM}}{2 + 1}$$

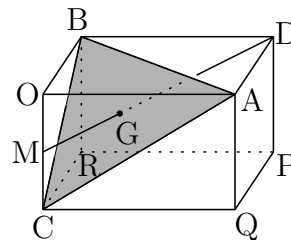
$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB}$, $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OC}$ であるから

$$\vec{OG'} = \frac{(\vec{OA} + \vec{OB}) + 2 \times \frac{1}{2}\vec{OC}}{3} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

よって $\vec{OG'} = \vec{OG}$

点 G' と点 G は一致するから、点 G は線分 DM を 2 : 1 に内分する。

証終



問題 2.4 P は yz 平面上の点であるから、 $P(0, y, z)$ とおく。

条件より $OP = AP = BP$

$OP = AP$ すなわち $OP^2 = AP^2$ より

$$0^2 + y^2 + z^2 = (0 - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2$$

整理して $2y + z - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$OP = BP$ すなわち $OP^2 = BP^2$ より

$$0^2 + y^2 + z^2 = \{0 - (-1)\}^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2$$

整理して $z = 1 \quad \dots \textcircled{2}$

①, ② より $y = 1, z = 1$

よって、点 P の座標は $(0, 1, 1)$

問題 2.5 (1) $\mathbf{AB} \perp \mathbf{OP}$

(2) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ とおくと (t は実数), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ より

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} + t|\overrightarrow{AB}|^2 = 0$$

$$\overrightarrow{OA} = (4, 0, 5), \quad \overrightarrow{AB} = (-4, 2, -4) \text{ より}$$

$$-36 + 36t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 1$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = (0, 2, 1) \quad \text{よって} \quad (0, 2, 1)$$

章末 2.1

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$

辺々を加えると

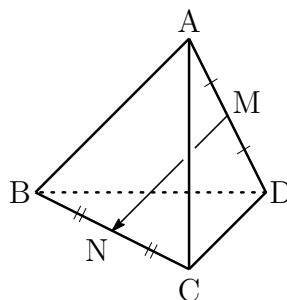
$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \\ &\quad + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ であるから

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

$$\text{すなわち} \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$$\text{したがって} \quad s = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{1}{2}$$



章末 2.2 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ が成り立てばよいから

$$(-4 - 1, 2 - 2, 3 - 1) = (x - 5, y - 5, z - (-1))$$

$$\text{よって} \quad -5 = x - 5, \quad 0 = y - 5, \quad 2 = z + 1$$

$$\text{これを解いて} \quad x = 0, \quad y = 5, \quad z = 1$$

章末 2.3

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{a} + t\vec{b} = (1, 3, -2) + t(1, -2, 0) \\ &= (1 + t, 3 - 2t, -2) \end{aligned}$$

$$\vec{b} \perp \vec{p} \text{ より } \vec{b} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\text{よって} \quad 1 \times (1 + t) + (-2) \times (3 - 2t) + 0 \times (-2) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad t = 1$$

このとき, $\vec{p} = (2, 1, -2)$ であるから

$$|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

章末 2.4 (1) $\vec{OB} = (2, 2, 0)$

$$\begin{aligned}\vec{CF} &= \vec{OF} - \vec{OC} = (2, 2, 2) - (0, 2, 0) \\ &= (2, 0, 2)\end{aligned}$$

(2) (1) より $\vec{OB} \cdot \vec{CF} = 2 \times 2 + 2 \times 0 + 0 \times 2 = 4$

(3) $|\vec{OB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$|\vec{CF}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(2) より $\vec{OB} \cdot \vec{CF} = 4$ である. $\vec{OB}$ と $\vec{CF}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{CF}}{|\vec{OB}| |\vec{CF}|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 60^\circ$

章末 2.5 (1) $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

よって $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_2}{|\vec{a}| |\vec{e}_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{a}| |\vec{e}_3|} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

(2) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \gamma = \frac{1}{2}$ より

$$\alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ$$

章末 2.6 (1) $P(x, 0, 0)$ とおくと, $AP^2 = BP^2$ より

$$(x-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = (x-2)^2 + (-3)^2 + (-4)^2$$

$x = 10$ より, 点 P の座標は $(10, 0, 0)$

(2) $\left(\frac{1+2+10}{3}, \frac{2+3+0}{3}, \frac{2+4+0}{3} \right)$ より $\left(\frac{13}{3}, \frac{5}{3}, 2 \right)$

章末 2.7 球面の方程式で, $z = 3$ とすると

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (3-4)^2 = 5^2$$

すなわち $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 24$, $z = 3$

よって, この円の中心の座標は $(2, -3, 3)$, 半径は $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ である.

章末 2.8 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$ であるから $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ となる実数 k があるから

$$(4 - a, b + 1, -12) = k(5 - a, 6, -18)$$

$$\text{よって} \quad 4 - a = k(5 - a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b + 1 = 6k \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$-12 = -18k \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ より } k = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ に } k = \frac{2}{3} \text{ を代入して}$$

$$4 - a = \frac{2}{3}(5 - a), \quad b + 1 = 6 \times \frac{2}{3}$$

$$\text{これを解いて } \mathbf{a = 2, b = 3}$$

章末 2.9 (1) $\overrightarrow{OA} = (-1, -2, 1), \overrightarrow{OB} = (2, 2, 0)$ より

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1 \times 2 + (-2) \times 2 + 1 \times 0 = -6$$

$$\text{よって } \cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-6}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq \angle AOB \leq 180^\circ \text{ であるから } \mathbf{\angle AOB = 150^\circ}$$

(2) $\triangle OAB$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \angle AOB \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times \sin 150^\circ \\ &= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

章末 2.10 (1) $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{HQ}$ より $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{HQ} = 0$

$$(2) \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HQ}$$

よって

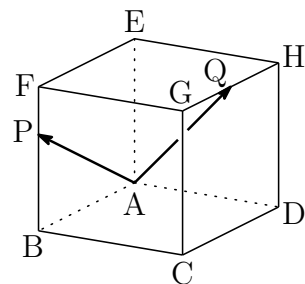
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HQ}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HQ} \\ &\quad + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{HQ} \\ &= 0 + 0 + 2|\overrightarrow{HQ}| \cos 0^\circ + 2|\overrightarrow{BP}| \cos 0^\circ + 0 + 0 \\ &= 2|\overrightarrow{BP}| + 2|\overrightarrow{HQ}| \end{aligned}$$

$$(3) |\overrightarrow{BP}| \text{ の最大値は } P \text{ が } F \text{ に一致するときで } |\overrightarrow{BP}| = 2$$

$$|\overrightarrow{HQ}| \text{ の最大値は } Q \text{ が } G \text{ に一致するときで } |\overrightarrow{HQ}| = 2$$

このとき $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ は最大となり, 最大値は

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 2 \times 2 + 2 \times 2 = 8$$



章末 2.11 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする.

$$AC \perp BD \text{ より } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$\text{すなわち } \vec{c} \cdot (\vec{d} - \vec{b}) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} AD^2 + BC^2 &= |\vec{d}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{d}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

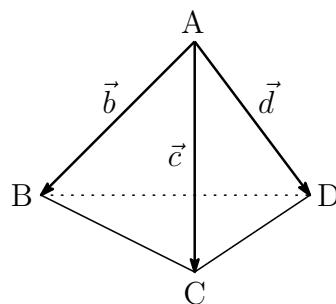
$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= |\vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \textcircled{1} \text{ より } \vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{d}$$

$$\text{よって } AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

したがって

$$AC \perp BD \quad \text{ならば} \quad AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$



章末 2.12 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

P は平面 AMN 上にあるから

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{AN}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{AN} \\ &= \vec{a} + s\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) + t\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right) \\ &= (1-s-t)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c} \end{aligned}$$

また, P は線分 OG 上にあるから, $OG : OP = 1 : k$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c}$$

$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いた表し方は 1 通りであるから

$$1-s-t = \frac{1}{3}k, \quad \frac{1}{2}s = \frac{1}{3}k, \quad \frac{1}{2}t = \frac{1}{3}k$$

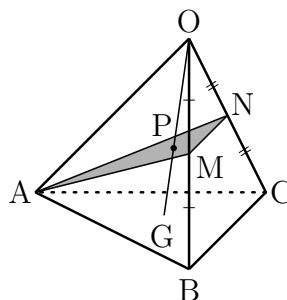
これを解くと, $k = \frac{3}{5}$ であるから

$$OG : OP = 1 : \frac{3}{5} = 5 : 3$$

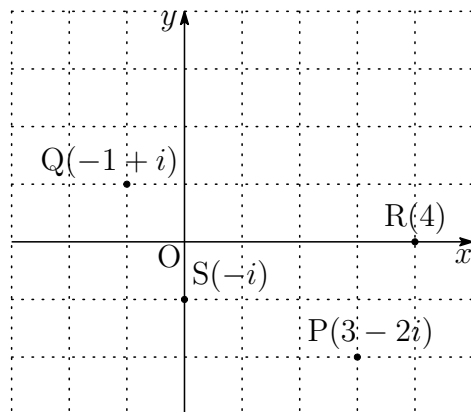
別解 $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{ON}$ であるから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}}{5} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OP}$$

よって $OG : OP = 5 : 3$



練習 3.1



練習 3.2 $z = a + bi$, $-\bar{z} = -(a - bi) = -a + bi$ より, 虚軸に関して対称.

練習 3.3 (1) $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ より $2a = z + \bar{z}$, $2bi = z - \bar{z}$

$$\text{よって } a = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$(2) \quad 1 \quad z \text{ が実数} \iff b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = 0 \iff z = \bar{z}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad z \text{ が純虚数} &\iff a = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 0, \quad b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \neq 0 \\ &\iff \bar{z} = -z, \quad \bar{z} \neq z \\ &\iff \bar{z} = -z, \quad -z \neq z \\ &\iff \bar{z} = -z, \quad z \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{練習 3.4 (1) } |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

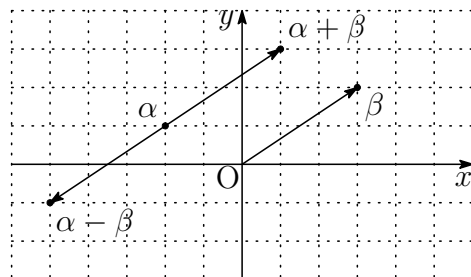
$$(2) \quad |-2 + 4i| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$(3) \quad |-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$$

$$(4) \quad |3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$

$$\text{練習 3.5 } |-z| = |z|, \quad |\bar{z}| = |z| \text{ より } |-\bar{z}| = |\bar{z}| = |z|$$

練習 3.6



練習 3.7 (1) $AB = |(1+6i) - (2+3i)| = |-1+3i| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

(2) $CD = |(1-2i) - (3-4i)| = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

練習 3.8 $\beta = k\alpha$ となる実数 k がある.

$$1+yi = k(3-6i) \text{ から } 1+yi = 3k-6ki$$

$$y, 3k, -6k \text{ は実数であるから } 1 = 3k, y = -6k$$

$$k = \frac{1}{3} \text{ であるから } y = -6 \cdot \frac{1}{3} = -2$$

練習 3.9 $\alpha + \beta = -i$ の両辺の共役複素数を考えると

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{-i} \text{ すなわち } \bar{\alpha} + \bar{\beta} = i$$

練習 3.10 $|\alpha| = 1$ のとき, $|\alpha|^2 = 1$ であるから

$$\alpha\bar{\alpha} = 1 \text{ すなわち } \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} = \alpha$$

$$\text{ここで } \overline{\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}} = \bar{\alpha}^2 + \overline{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)} = (\bar{\alpha})^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \alpha^2$$

$$\text{よって, } \overline{\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}} = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \text{ であるから, } \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \text{ は実数である.}$$

証終

別解 例題 3.2 の結論を利用すると, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ が実数であるから

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2$$

は実数である.

補足 $|\alpha| = 1$ のとき, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$, $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ が実数であるから, 漸化式

$$\alpha^{n+2} + \frac{1}{\alpha^{n+2}} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \left(\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}}\right) - \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right)$$

により, n が自然数のとき, $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ は実数である.

一般に, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ が実数のとき, $\alpha^2 + \beta^2$ は実数であるから, 漸化式

$$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n)$$

により, n が自然数のとき, $\alpha^n + \beta^n$ は実数である.

深化 3.1 $|\alpha| = 1$ のとき, $|\alpha|^2 = 1$ であるから

$$\alpha \bar{\alpha} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$$

よって, $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \bar{\alpha}$ であるから, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ は実数である.

証終

練習 3.11 (1) $\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

(2) $2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

(3) $1 - \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}$

(4) $-i = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right)$

練習 3.12 $-z$ の偏角の 1 つは $\theta + \pi$ であり, $|-z| = |z| = r$ であるから

$$-z = r \{ \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi) \}$$

別解 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ を次頁の公式に適用すると

$$\begin{aligned} -z &= z(-1) = r(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \pi + i \sin \pi) \\ &= r \{ \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi) \} \end{aligned}$$

練習 3.13 $\alpha\beta = 2\sqrt{2} \cdot 2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right\}$
 $= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right)$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{2\sqrt{2}}{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

練習 3.14 (1) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| = 2 \times 3 = 6$

(2) $|\alpha^3| = |\alpha|^3 = 2^3 = 8$

(3) $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{2}{3}$

(4) $\left| \frac{\beta}{\alpha^2} \right| = \frac{|\beta|}{|\alpha|^2} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$

練習 3.15 (1) $1 + \sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

よって、点 $(1 + \sqrt{3}i)z$ は、点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、原点からの距離を 2 倍した点である。

(2) $-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$

よって、点 $(-1 + i)z$ は、点 z を原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転し、原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍にした点である。

(3) $2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

よって、点 $2iz$ は、点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転し、原点からの距離を 2 倍した点である。

練習 3.16 (1) $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (4 - 2i)$
 $= (2\sqrt{3} + 1) + (-\sqrt{3} + 2)i$

(2) $\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (4 - 2i)$
 $= (-2 + \sqrt{3}) + (1 + 2\sqrt{3})i$

(3) $\left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} z = -i(4 - 2i)$
 $= -2 - 4i$

(4) $\left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (4 - 2i)$
 $= (2 - \sqrt{3}) - (1 + 2\sqrt{3})i$

練習 3.17 点 β は、点 α を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$$\begin{aligned} \beta &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \alpha \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (2 + 2i) = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} \beta &= \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \alpha \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (2 + 2i) = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i \end{aligned}$$

よって $\beta = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$ または $\beta = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$

練習 3.18 (1) $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ であるから

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3}i)^5 &= 2^5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^5 \\ &= 32 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right) \\ &= 32 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \mathbf{16 - 16\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

(2) $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ であるから

$$\begin{aligned} (1 + i)^8 &= (\sqrt{2})^8 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^8 \\ &= 16(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \mathbf{16} \end{aligned}$$

(3) $1 - \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}$ であるから

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3}i)^6 &= 2^{-6} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}^{-6} \\ &= \frac{1}{64}(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{64}} \end{aligned}$$

深化 3.2 二項定理を用いて、例題 3.5 を計算すると

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^6 &= (\sqrt{3})^6 + {}_6C_1(\sqrt{3})^5(-i) + {}_6C_2(\sqrt{3})^4(-i)^2 \\ &\quad + {}_6C_3(\sqrt{3})^3(-i)^3 + {}_6C_4(\sqrt{3})^2(-i)^4 + {}_6C_5(\sqrt{3})(-i)^5 + (-i)^6 \\ &= 27 - 54\sqrt{3}i - 135 + 60\sqrt{3}i + 45 - 6\sqrt{3}i - 1 \\ &= \mathbf{-64} \end{aligned}$$

練習 3.19 1 の 8 乗根は

$$z_k = \cos \frac{2k}{8}\pi + i \sin \frac{2k}{8}\pi = \cos \frac{k}{4}\pi + i \sin \frac{k}{4}\pi \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

すなわち

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, & z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, & z_2 &= i, & z_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \\ z_4 &= -1, & z_5 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i, & z_6 &= -i, & z_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

よって、1 の 8 乗根は $\pm 1, \pm i, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$ (複号任意)

練習 3.20 (1) 極形式を

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (*)$$

とすると

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

また, i を極形式で表すと

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

よって, 方程式は

$$r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2 = 1, \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ および $0 \leq \theta < 2\pi$ により

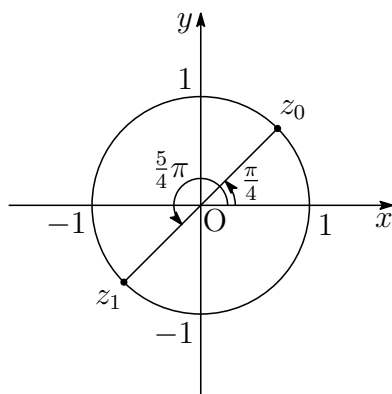
$$r = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, 1) \quad (**)$$

(**) を (*) に代入して, $z_k = z$ とおくと

$$z_k = \cos \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) \quad (k = 0, 1)$$

したがって

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$



よって, 求める方程式の解は

$$z = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

(2) 極形式を

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (*)$$

とすると

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

また, -4 を極形式で表すと

$$-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

よって, 方程式は

$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4 = 4, \quad 4\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ および $0 \leq \theta < 2\pi$ により

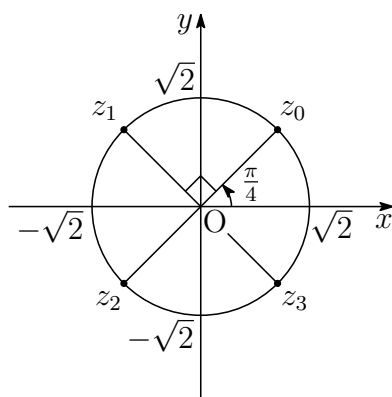
$$r = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (**)$$

(**) を (*) に代入して, $z_k = z$ とおくと

$$z_k = \sqrt{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) \right\} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

したがって

$$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i$$



よって, 求める方程式の解は

$$z = \pm 1 \pm i \quad (\text{複号任意})$$

(3) 極形式を

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (*)$$

とすると

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

また, $1 + \sqrt{3}i$ を極形式で表すと

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

よって, 方程式は

$$r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2 = 2, \quad 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ および $0 \leq \theta < 2\pi$ より

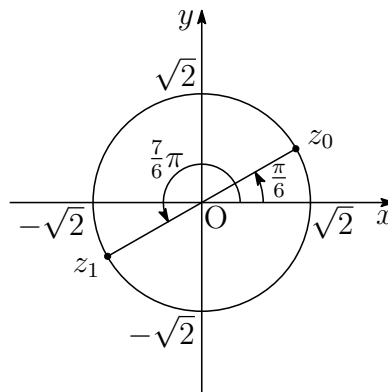
$$r = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k = 0, 1) \quad (**)$$

(**) を (*) に代入して, $z_k = z$ とおくと

$$z_k = \sqrt{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{6} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + k\pi \right) \right\} \quad (k = 0, 1)$$

したがって

$$z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$



よって, 求める方程式の解は

$$z = \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

練習 3.21 (1) $\frac{2(1+5i)+1(7-i)}{1+2} = \frac{9+9i}{3} = 3+3i$

(2) $\frac{(1+5i)+(7-i)}{2} = \frac{8+4i}{2} = 4+2i$

(3) $\frac{-2(1+5i)+3(7-i)}{3-2} = 19-13i$

練習 3.22 辺 BC の中点を M とすると, M を表す複素数は

$$\frac{\beta + \gamma}{2}$$

G は中線 AM を 2 : 1 に内分するから

$$\delta = \frac{\alpha + 2\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)}{2 + 1} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

練習 3.23 (1) 原点を中心とする半径 2 の円

(2) 点 $1+i$ を中心とする半径 1 の円

(3) 2 点 A(2), B(4i) を結ぶ線分 AB の垂直二等分線

練習 3.24 方程式の両辺を 2 乗すると $4|z-3|^2 = |z|^2$

よって $4(z-3)(\overline{z-3}) = z\overline{z}$

すなわち $4(z-3)(\overline{z}-3) = z\overline{z}$

左辺を展開して整理すると $z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 12 = 0$

式を変形すると $(z-4)(\overline{z}-4) = 4$

すなわち $(z-4)(\overline{z-4}) = 4$

よって $|z-4|^2 = 2^2$ したがって $|z-4| = 2$

これは, 点 4 を中心とする半径 2 の円である.

練習 3.25 z は等式 $|z| = 1$ を満たす.

$w = i(z-2)$ より $z = \frac{w+2i}{i}$ であるから

$$|z| = \left| \frac{w+2i}{i} \right| = \frac{|w+2i|}{|i|} = |w+2i| \quad \text{よって} \quad |w+2i| = 1$$

したがって, 点 w は点 $-2i$ を中心とする半径 1 の円を描く.

練習 3.26 $\gamma - \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) (\beta - \alpha)$ であるから

$$\begin{aligned}\gamma &= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \{(5 + 3i) - (1 + i)\} + (1 + i) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) (4 + 2i) + (1 + i) \\ &= 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} + 3)i\end{aligned}$$

練習 3.27 $\alpha = 1 - i$, $\beta = 2 + i$, $\gamma = 2i$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= \frac{-1 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(-1 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = 1 + i \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

よって $\theta = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\pi}{4}$

練習 3.28
$$\begin{aligned}\frac{(x + 3i) - (-1 + i)}{(3 - i) - (-1 + i)} &= \frac{(x + 1) + 2i}{4 - 2i} = \frac{\{(x + 1) + 2i\}(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} \\ &= \frac{2x + (x + 5)i}{10} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(1) 2 直線 AB, AC が垂直に交わるのは, ① が純虚数のときであるから

$$2x = 0 \quad \text{かつ} \quad x + 5 \neq 0 \quad \text{よって} \quad x = 0$$

(2) 3 点 A, B, C が一直線上にあるのは, ① が実数のときであるから

$$x + 5 = 0 \quad \text{よって} \quad x = -5$$

練習 3.29 (1) 等式から $\gamma - \alpha = i(\beta - \alpha)$ よって $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = i$

(2) (1) より, $\left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = 1$ であるから

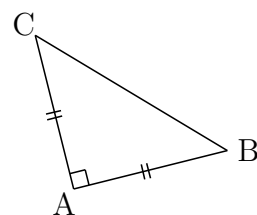
$$|\gamma - \alpha| = |\beta - \alpha| \quad \text{よって} \quad AC = AB$$

また, $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は純虚数であるから, 2 直線 AB, AC は垂直に交わり

$$\angle A = \frac{\pi}{2}$$

よって, $\triangle ABC$ は図のような直角二等辺三角形で

$$\angle B = \frac{\pi}{4}, \quad \angle C = \frac{\pi}{4}$$



演習 3.1 $\alpha = -1 + i$, $\beta = 1 - i$, $\gamma = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= \frac{(-\sqrt{3} - \sqrt{3}i) - (-1 + i)}{(1 - i) - (-1 + i)} = \frac{1 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})i}{2(1 - i)} \\ &= \frac{\{1 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})i\}(1 + i)}{2(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = \frac{|\gamma - \alpha|}{|\beta - \alpha|} = 1, \quad \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -\frac{\pi}{3} \text{ より}$$

$$AC = AB, \quad \angle CAB = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{また } AB = |\beta - \alpha| = 2|1 - i| = 2\sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

よって, $\triangle ABC$ は一辺の長さが $2\sqrt{2}$ の正三角形である.

問題 3.1 (1) $2z + \bar{z} = 1 + i$ より

$$\overline{2z + \bar{z}} = \overline{1 + i} \quad \text{よって} \quad 2\bar{z} + z = 1 - i$$

(2) $2z + \bar{z} = 1 + i$ および $2\bar{z} + z = 1 - i$ から $\bar{z}$ を消去すると

$$2(2z + \bar{z}) - (2\bar{z} + z) = 2(1 + i) - (1 - i)$$

$$\text{ゆえに } 3z = 1 + 3i \quad \text{よって} \quad z = \frac{1}{3} + i$$

問題 3.2 $z = \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ とおくと $\bar{z} = \overline{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta} = \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} = z$

よって, $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ は実数である.

別解 $\bar{\alpha}\beta = \overline{\alpha\bar{\beta}}$ であるから, $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ は実数である.

問題 3.3 $z = \cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ より $z + 1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$|z + 1| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \text{ であるから}$$

$$z + 1 = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6} \right)$$

問題 3.4 $z = 2 + i$ とする. 点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\begin{aligned}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) z &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 + i) \\ &= \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)i\end{aligned}$$

よって, 点 Q の座標は $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$

問題 3.5 z は絶対値が 1, 偏角が $\frac{\pi}{6}$ であるから $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\frac{z^8 + 1}{z^4} &= z^4 + \frac{1}{z^4} \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4 + \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^{-4} \\ &= \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) + \left\{\cos \left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin \left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\ &= \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) + \left(\cos \frac{2}{3}\pi - i \sin \frac{2}{3}\pi\right) \\ &= 2 \cos \frac{2}{3}\pi = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1\end{aligned}$$

問題 3.6 1 の n 乗根 z_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) について

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^k = \alpha^k$$

よって, 1 の n 乗根は, $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ で与えられる.

問題 3.7 極形式を

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (*)$$

とすると

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

また, $8(-1 + \sqrt{3}i)$ を極形式で表すと

$$\begin{aligned} 8(-1 + \sqrt{3}i) &= 16 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= 16 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) \end{aligned}$$

よって, 方程式は

$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 16 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4 = 16, \quad 4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ および $0 \leq \theta < 2\pi$ により

$$r = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (**)$$

(**) を (*) に代入して, $z_k = z$ とおくと

$$z_k = 2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right) \right\} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

したがって

$$z_0 = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i$$

よって, 求める方程式の解は

$$z = \pm(\sqrt{3} + i), \quad \pm(1 - \sqrt{3}i)$$

問題 3.8 $w = \bar{z}$ より $z = \bar{w}$

これを $|z - i| = 1$ に代入すると $|\bar{w} - i| = 1$

$$|\overline{w+i}| = 1 \quad \text{すなわち} \quad |w+i| = 1$$

よって、点 w は点 $-i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

問題 3.9 $\alpha = 2 + i$, $\beta = 6 - i$, $\gamma = 4 + yi$ とする。

$\angle A = \frac{\pi}{2}$ となるのは、 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数のときである。

$$\begin{aligned} \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= \frac{(4 + yi) - (2 + i)}{(6 - i) - (2 + i)} = \frac{2 + (y - 1)i}{4 - 2i} \\ &= \frac{\{2 + (y - 1)i\}(2 + i)}{2(2 - i)(2 + i)} = \frac{(5 - y) + 2yi}{10} \end{aligned}$$

したがって $5 - y = 0$ かつ $2y \neq 0$

よって、求める実数 y の値は $y = 5$

問題 3.10 (1) 2 点 $B(\beta)$, $C(\gamma)$ の中点が $M(0)$ であるから

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 0 \quad \text{よって} \quad \gamma = -\beta$$

(2) $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(-\beta)$ より

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= |\beta - \alpha|^2 + |-\beta - \alpha|^2 = |\beta - \alpha|^2 + |\beta + \alpha|^2 \\ &= (\beta - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) + (\beta + \alpha)(\bar{\beta} + \bar{\alpha}) \\ &= (|\alpha|^2 + |\beta|^2 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) + (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) \\ &= 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) = 2(AM^2 + BM^2) \end{aligned}$$

章末 3.1 (1) $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
 $1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\}$
したがって

$$(1 + \sqrt{3}i)^6 = 2^6 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 64$$

$$(1 - i)^6 = (\sqrt{2})^6 \left\{ \cos \left(-\frac{3}{2}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{3}{2}\pi \right) \right\} = 8i$$

よって $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^6 = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^6}{(1 - i)^6} = \frac{64}{8i} = \frac{8}{i} = -8i$

(2) $\frac{\sqrt{3} + i}{2} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\sqrt{3} - i}{2} = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$
したがって

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^8 &= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^8 + \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\}^8 \\ &= \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi + \cos \left(-\frac{4}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{4}{3}\pi \right) \\ &= 2 \cos \frac{4}{3}\pi = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -1 \end{aligned}$$

よって $\left\{ \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^8 \right\}^2 = (-1)^2 = 1$

章末 3.2 $\alpha = 1 + i, \beta = -2 - 3i, \gamma = 5 - 2i$ とする.

(1) $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{4 - 3i}{-3 - 4i} = -\frac{(4 - 3i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

$\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\pi}{2}$ より $\angle \mathbf{A} = \frac{\pi}{2}$

(2) (1) の結果から, $\triangle ABC$ の外接円の中心 δ は, 辺 BC の中点であるから

$$\delta = \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{(-2 - 3i) + (5 - 2i)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

章末 3.3 点 β を点 α を中心として $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点が点 γ である.

$$\gamma - \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (\beta - \alpha) \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \{ (5 + 3i) - (1 + i) \} + (1 + i) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (4 + 2i) + (1 + i) \\ &= (3 - \sqrt{3}) + (2 + 2\sqrt{3})i \end{aligned}$$

$$\gamma - \alpha = \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} (\beta - \alpha) \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \{ (5 + 3i) - (1 + i) \} + (1 + i) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (4 + 2i) + (1 + i) \\ &= (3 + \sqrt{3}) + (2 - 2\sqrt{3})i \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \gamma = (3 \mp \sqrt{3}) + (2 \pm 2\sqrt{3})i \quad (\text{複号同順})$$

章末 3.4 (1) $\alpha \neq 0$ であるから, 等式の両辺を α^2 で割ると

$$4 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) + 4 = 0$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 \pm \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$-\pi < \arg \frac{\beta}{\alpha} \leq \pi \text{ であるから} \quad \arg \frac{\beta}{\alpha} = \pm \frac{\pi}{3}$$

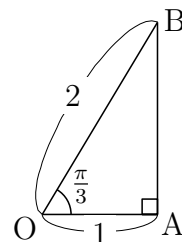
$$\text{よって} \quad \frac{\beta}{\alpha} = 2(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta = \pm \frac{\pi}{3}$$

(2) $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ とすると, (1) の結果から

$$OB = 2OA, \quad \angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

$\triangle OAB$ は, $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形である.

よって, 3つの角の大きさは $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$



章末 3.5 (1) 等式から $(\gamma - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2 = 0$

$\alpha \neq \beta$ より, $\beta - \alpha \neq 0$ であるから $\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 = -1$

よって $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm i$

(2) (1) の結果から $\left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = |\pm i| = 1$

$$|\gamma - \alpha| = |\beta - \alpha| \quad \text{すなわち} \quad AC = AB$$

また, $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は純虚数であるから $\angle A = \frac{\pi}{2}$

よって, $\triangle ABC$ は $\angle A = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形.

章末 3.6 (1) z は $|z| = |z - \alpha|$ を満たすから

$$|z|^2 = |z - \alpha|^2 \quad \text{ゆえに} \quad z\bar{z} = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})$$

これを整理すると $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = |\alpha|^2$

よって, $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ の値は一定である.

(2) $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ について $|\alpha|^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$

よって $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 4$

章末 3.7 $|w| = 2$ であるから

$$\left|\frac{z - 4}{z + 2}\right| = 2 \quad \text{すなわち} \quad |z - 4| = 2|z + 2|$$

両辺を 2 乗すると $|z - 4|^2 = 4|z + 2|^2$

$$(z - 4)(\bar{z} - 4) = 4(z + 2)(\bar{z} + 2)$$

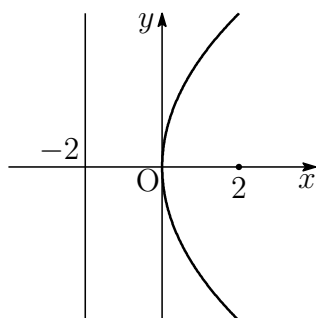
展開して整理すると $z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} = 0$

$$(z + 4)(\bar{z} + 4) = 4^2 \quad \text{ゆえに} \quad |z + 4|^2 = 4^2$$

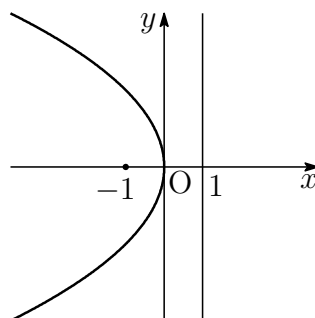
したがって $|z + 4| = 4$

よって, 点 z は点 -4 を中心とする半径 4 の円を描く.

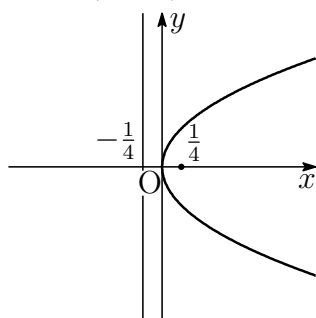
練習 4.1 (1) $y^2 = 4 \cdot 2 \cdot x$ であるから
焦点 $(2, 0)$, 準線 $x = -2$



(2) $y^2 = 4 \cdot (-1) \cdot x$ であるから
焦点 $(-1, 0)$, 準線 $x = 1$



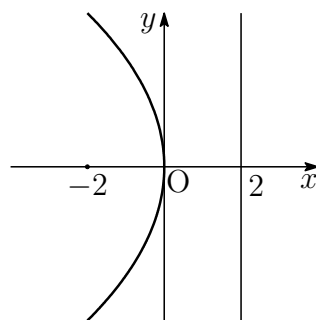
(3) $y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x$ であるから
焦点 $(\frac{1}{4}, 0)$, 準線 $x = -\frac{1}{4}$



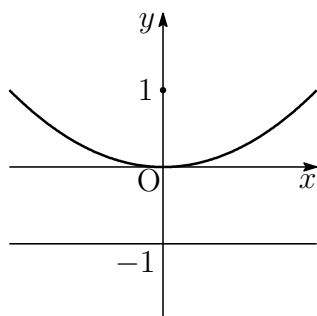
練習 4.2 焦点が点 $F(-2, 0)$ で, 準線が
直線 $x = 2$ である放物線
の方程式は

$$y^2 = 4 \cdot (-2) \cdot x$$

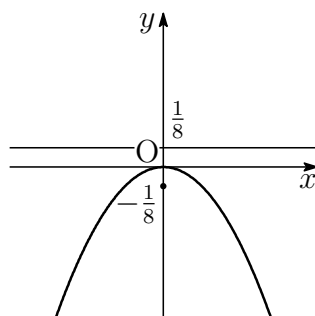
すなわち $y^2 = -8x$



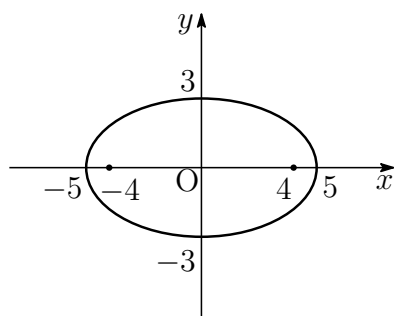
練習 4.3 (1) $x^2 = 4 \cdot 1 \cdot y$ であるから
焦点 $(0, 1)$, 準線 $y = -1$



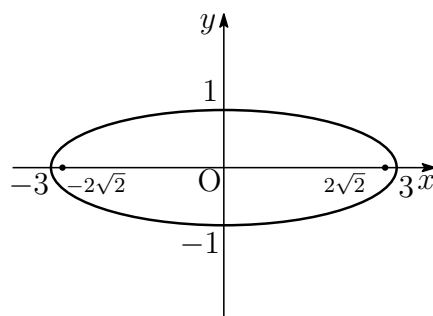
(2) $x^2 = 4 \cdot (-\frac{1}{8}) y$ であるから
焦点 $(0, -\frac{1}{8})$, 準線 $y = \frac{1}{8}$



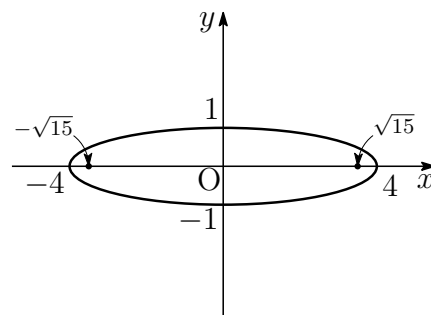
練習 4.4 (1) 焦点は $(4, 0), (-4, 0)$
長軸の長さは $2 \cdot 5 = 10$
短軸の長さは $2 \cdot 3 = 6$



(2) 焦点は $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$
長軸の長さは $2 \cdot 3 = 6$
短軸の長さは $2 \cdot 1 = 2$



(3) $\frac{x^2}{4^2} + y^2 = 1$ より
焦点は $(\sqrt{15}, 0), (-\sqrt{15}, 0)$
長軸の長さは $2 \cdot 4 = 8$
短軸の長さは $2 \cdot 1 = 2$



練習 4.5 焦点からの距離の和について, $2a = 4$ であるから

$$a = 2, \quad a^2 = 4$$

また, 焦点の座標について, $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ であるから

$$b^2 = a^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

よって, 求める楕円の方程式は $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

練習 4.6 (1) 焦点 $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$,

長軸の長さ $2 \cdot 3 = 6$,

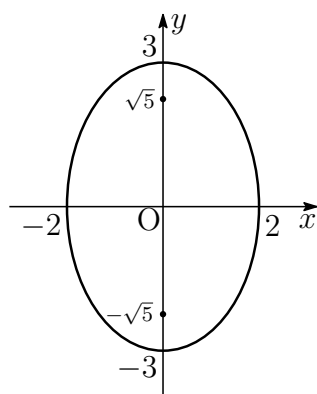
短軸の長さ $2 \cdot 2 = 4$

(2) 焦点 $(0, 2\sqrt{6})$, $(0, -2\sqrt{6})$,

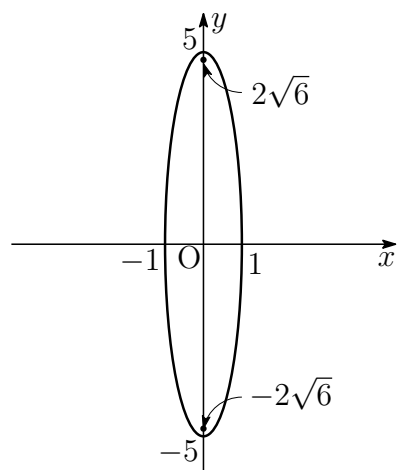
長軸の長さ $2 \cdot 5 = 10$,

短軸の長さ $2 \cdot 1 = 2$

(1)



(2)



深化 4.1 $C_1 : x^2 = 4py$ は $C_2 : y^2 = 4px$ において, x と y を入れ替えたものであるから, C_2 の焦点 $(p, 0)$ と準線 $x = -p$ をそれぞれ直線 $y = x$ に関して対称移動したものの, すなわち, C_1 の焦点 $(0, p)$, 準線 $y = -p$ である.

練習 4.7 (1) 円上の点 $Q(s, t)$ が移る点を $P(x, y)$ とすると

$$x = s, \quad y = \frac{2}{3}t$$

$$\text{すなわち} \quad s = x, \quad t = \frac{3}{2}y$$

$s^2 + t^2 = 3^2$ であるから

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 3^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

よって、円 $x^2 + y^2 = 3^2$ は、楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ になる.

(2) 円上の点 $Q(s, t)$ が移る点を $P(x, y)$ とすると

$$x = s, \quad y = \frac{4}{3}t$$

$$\text{すなわち} \quad s = x, \quad t = \frac{3}{4}y$$

$s^2 + t^2 = 3^2$ であるから

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}y\right)^2 = 3^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

よって、円 $x^2 + y^2 = 3^2$ は、楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ になる.

練習 4.8 A の座標を $(s, 0)$, B の座標を $(0, t)$ とすると, $AB = 7$ から

$$s^2 + t^2 = 7^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

P の座標を (x, y) とすると, P は線分 AB を 3 : 4 に内分するから

$$x = \frac{4}{7}s, \quad y = \frac{3}{7}t$$

$$\text{よって} \quad s = \frac{7}{4}x, \quad t = \frac{7}{3}y$$

これらを ① に代入すると

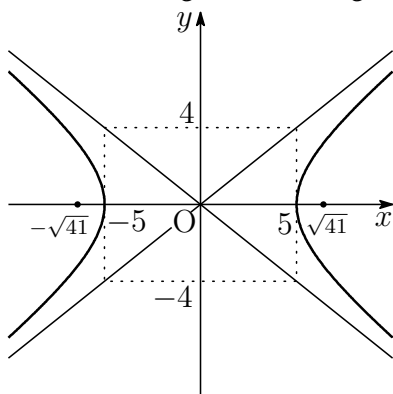
$$\left(\frac{7}{4}x\right)^2 + \left(\frac{7}{3}y\right)^2 = 7^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

したがって、点 P の軌跡は、楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ である.

練習 4.9 (1) 焦点 $(\sqrt{41}, 0), (-\sqrt{41}, 0)$

頂点 $(5, 0), (-5, 0)$

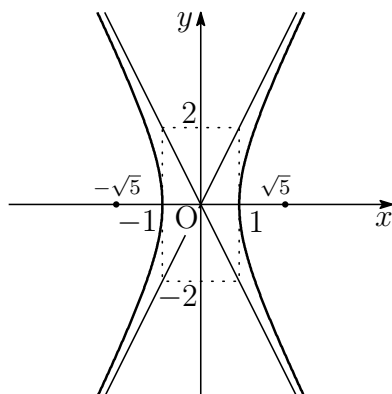
漸近線 $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$



(2) 焦点 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

頂点 $(1, 0), (-1, 0)$

漸近線 $y = 2x, y = -2x$

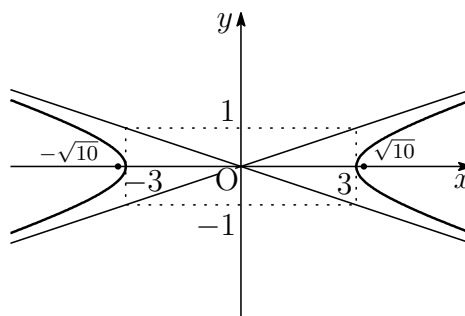


(3) $\frac{x^2}{3^2} - y^2 = 1$ より

焦点 $(\sqrt{10}, 0), (-\sqrt{10}, 0)$

頂点 $(3, 0), (-3, 0)$

漸近線 $y = \frac{1}{3}x, y = -\frac{1}{3}x$



練習 4.10 求める方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) とおける.

焦点からの距離の差について, $2a = 8$ であるから

$$a = 4, \quad a^2 = 16$$

焦点の座標について, $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ であるから

$$b^2 = 5^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$$

よって, 求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

練習 4.11 求める方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > 0$) とおける.

焦点の座標について, $\sqrt{a^2 + a^2} = 2$ であるから

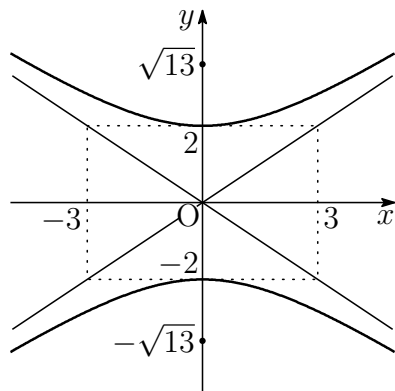
$$2a^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = 2$$

よって, 求める双曲線の方程式は

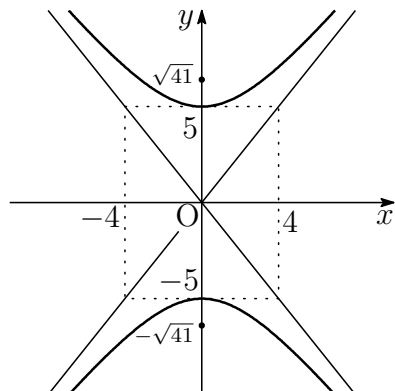
$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$$

練習 4.12 (1) 焦点 $(0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$ (2) 焦点 $(0, \sqrt{41}), (0, -\sqrt{41})$
 頂点 $(0, 2), (0, -2)$ 頂点 $(0, 5), (0, -5)$

漸近線 $y = \frac{2}{3}x, y = -\frac{2}{3}x$



漸近線 $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$



練習 4.13 移動後の楕円の方程式は $\frac{(x-3)^2}{4} + (y+2)^2 = 1$

また, 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の焦点は, 2点 $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$ であるから,

移動後の楕円の焦点の座標は $(\sqrt{3} + 3, -2), (-\sqrt{3} + 3, -2)$

練習 4.14 移動後の放物線の方程式は $(y-2)^2 = 4(x+1)$

放物線 $y^2 = 4x$ の焦点は $(1, 0)$ であるから,

移動後の放物線の焦点の座標は $(0, 2)$

練習 4.15 (1) この方程式を変形すると $(x+3)^2 + 4(y-1)^2 = 4$

すなわち
$$\frac{(x+3)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$$

よって、楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円を表す.

(2) この方程式を変形すると $(y+4)^2 = 16(x+1)$

よって、放物線 $y^2 = 16x$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に -4 だけ平行移動した放物線を表す.

(3) この方程式を変形すると $4(x-2)^2 - 9(y+2)^2 = 36$

すなわち
$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

よって、双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ を x 軸方向に 2 , y 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線を表す.

練習 4.16 $y = x + k$ を $x^2 - 2y^2 = 4$ に代入して整理すると

$$x^2 + 4kx + 2k^2 + 4 = 0$$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = (2k)^2 - 1 \cdot (2k^2 + 4) = 2(k^2 - 2)$$

よって	$k < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < k$ のとき	共有点は 2 個
	$k = \pm\sqrt{2}$ のとき	共有点は 1 個
	$-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ のとき	共有点は 0 個

練習 4.17 点 C を通る接線は、 y 軸に平行ではないから、その方程式は $y = m(x - 4)$ とおくことができる。これを放物線の式に代入すると

$$m^2(x - 4)^2 = -4x$$

整理すると

$$m^2x^2 - 4(2m^2 - 1)x + 16m^2 = 0$$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= \{-2(2m^2 - 1)\}^2 - m^2 \cdot 16m^2 \\ &= 4(1 - 4m^2) \end{aligned}$$

直線が放物線に接するのは、 $D = 0$ のときであるから

$$m = \pm \frac{1}{2}$$

このとき、接点の x 座標は $x = -\frac{-4(2m^2 - 1)}{2m^2} = \frac{2(2m^2 - 1)}{m^2} = -4$

よって、接線の方程式、接点の座標は

$$m = \frac{1}{2} \text{ のとき } \quad y = \frac{1}{2}(x - 4), \quad (-4, -4)$$

$$m = -\frac{1}{2} \text{ のとき } \quad y = -\frac{1}{2}(x - 4), \quad (-4, 4)$$

演習 4.1 (1) $2y = 2 \cdot 1 \cdot (x + 1)$ より $y = x + 1$

(2) $\frac{3x}{12} + \frac{1 \cdot y}{4} = 1$ より $y = -x + 4$

練習 4.18 点 P の座標を (x, y) とする。

P から直線 $x = 1$ に下した垂線を PH とすると $PF : PH = 2 : 1$

これより $2PH = PF$ すなわち $4PH^2 = PF^2$

$PH^2 = (x - 1)^2$, $PF^2 = (x - 4)^2 + y^2$ を代入すると

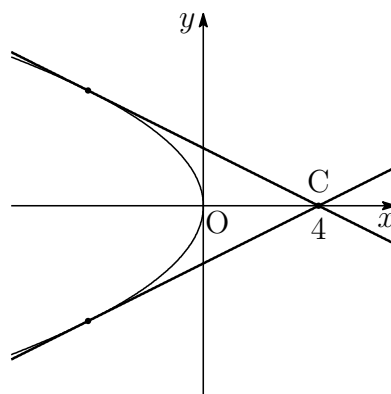
$$4(x - 1)^2 = (x - 4)^2 + y^2 \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 - y^2 = 12$$

この方程式を変形すると $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

よって、点 P は双曲線 $\textcircled{1}$ 上にある。

逆に、双曲線 $\textcircled{1}$ 上のすべての点 $P(x, y)$ は、条件を満たす。

したがって、点 P の軌跡は、双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ である。



問題 4.1 (1) 焦点 (2, 0), 頂点 (1, 0) の放物線である.

この放物線は, 焦点 (1, 0), 頂点 (0, 0) の放物線 $y^2 = 4x$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動したものであるから, その方程式は

$$y^2 = 4(x - 1)$$

(2) 2 点 (3, 0), (-3, 0) を焦点とし, 焦点からの距離の和が 10 である楕円 C の方程式を, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ とおく. $2a = 10$, $\sqrt{a^2 - b^2} = 3$ より

$$a = 5, \quad b^2 = 16$$

よって, 楕円 C の方程式は $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

これを, y 軸方向に 1 だけ平行移動して, 求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{16} = 1$$

(3) 焦点が x 軸上にあるから, 求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

とおける. 2 点 (2, 0), (-2, 0) が頂点であるから

$$a = 2, \quad a^2 = 4$$

焦点の座標について, $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$ であるから

$$b^2 = 3^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$$

よって, 求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

問題 4.2 円上の点 $Q(s, t)$ が点 $P(x, y)$ に移るとすると

$$x = 2s, \quad y = t \quad \text{すなわち} \quad s = \frac{1}{2}x, \quad t = y$$

これらを $s^2 + t^2 = 16$ に代入すると

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + y^2 = 16 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$$

よって, 円 $x^2 + y^2 = 16$ は, 楕円 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$ になる.

問題 4.3 方程式を変形すると

$$9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 2y) - 23 = 0$$

$$9\{(x+1)^2 - 1^2\} + 4\{(y-1)^2 - 1^2\} - 23 = 0$$

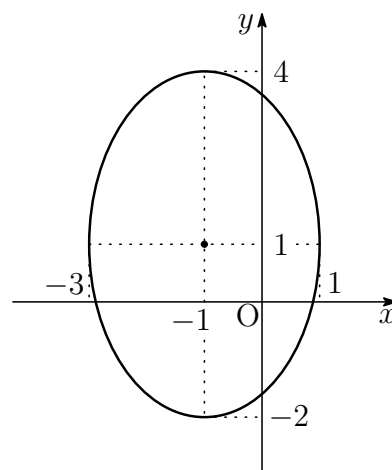
したがって $9(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 36$

すなわち $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

よって、この方程式は、楕円

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

を x 軸方向に -1 , y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円を表す。概形は右の図のようになる。また、楕円 $\textcircled{2}$ の焦点は、2 点 $(0, \pm\sqrt{5})$ であるから、楕円 $\textcircled{1}$ の焦点は、2 点 $(-1, 1 \pm \sqrt{5})$



問題 4.4 $4x^2 - 9y^2 = 36 \quad \dots \textcircled{1}$

$$x + y = k \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ から y を消去すると $4x^2 - 9(k-x)^2 = 36$

整理すると $5x^2 - 18kx + 9k^2 + 36 = 0 \quad \dots (*)$

x の 2 次方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = (-9k)^2 - 5(9k^2 + 36) = 36(k^2 - 5)$$

よって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の共有点の個数は次のようになる。

$$D > 0 \quad \text{すなわち} \quad k < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < k \quad \text{のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

$$D = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = \pm\sqrt{5} \quad \text{のとき} \quad 1 \text{ 個}$$

$$D < 0 \quad \text{すなわち} \quad -\sqrt{5} < k < \sqrt{5} \quad \text{のとき} \quad 0 \text{ 個}$$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が接するのは $D = 0$ のときで、このとき 2 次方程式 $\textcircled{3}$ の解は

$$x = -\frac{-18k}{2 \cdot 5} = \frac{9k}{5}$$

このとき、 $\textcircled{2}$ から $y = -\frac{4k}{5}$

したがって、求める接点の座標は

$$k = \pm\sqrt{5} \quad \text{のとき} \quad \left(\pm\frac{9\sqrt{5}}{5}, \mp\frac{4\sqrt{5}}{5} \right) \quad (\text{複号同順})$$

問題 4.5 点 C を通る接線は、 x 軸に垂直ではないから、その方程式は

$$y = m(x - 3)$$

とおける。これを楕円の方程式に代入すると

$$2x^2 + m^2(x - 3)^2 = 2$$

整理すると $(m^2 + 2)x^2 - 6m^2x + 9m^2 - 2 = 0$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = (-3m^2)^2 - (m^2 + 2)(9m^2 - 2) = -4(4m^2 - 1)$$

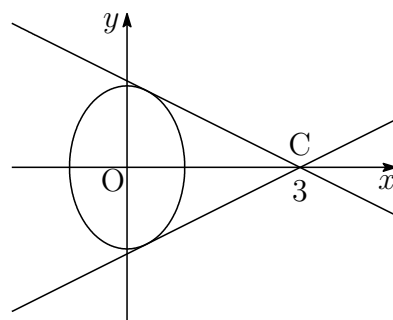
直線が楕円に接するのは $D = 0$ のときであるから $m = \pm \frac{1}{2}$

このとき、接点の x 座標は $x = -\frac{-6m^2}{2(m^2 + 2)} = \frac{3m^2}{m^2 + 2} = \frac{1}{3}$

よって、接線の方程式、接点の座標は

$$m = \frac{1}{2} \text{ のとき } \quad \text{接線 } y = \frac{1}{2}(x - 3), \quad \text{接点 } \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$m = -\frac{1}{2} \text{ のとき } \quad \text{接線 } y = -\frac{1}{2}(x - 3), \quad \text{接点 } \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$



問題 4.6 点 P の座標を (x, y) , P から直線 $x = 3$ におろした垂線を PH とすると,
 $OP : PH = e : 1$ より

$$OP = ePH \quad \text{すなわち} \quad OP^2 = e^2 PH^2$$

$OP^2 = x^2 + y^2$, $PH^2 = (x - 3)^2$ を代入すると

$$x^2 + y^2 = e^2(x - 3)^2 \quad \text{ゆえに} \quad (1 - e^2)x^2 + 6e^2x + y^2 - 9e^2 = 0 \quad (*)$$

(1) $e = \frac{1}{2}$ を (*) に代入して整理すると

$$3x^2 + 6x + 4y^2 - 9 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3(x + 1)^2 + 4y^2 = 12$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

よって, 点 P は楕円 ① 上にある.

逆に, 楕円 ① 上のすべての点 $P(x, y)$ は, 条件を満たす.

したがって, 求める軌跡は, 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ を x 軸方向に -1 だけ平行移動した楕円である.

(2) $e = 1$ を (*) に代入すると

$$y^2 + 6x - 9 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = -6\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

よって, 点 P は放物線 ② 上にある.

逆に, 放物線 ② 上のすべての点 $P(x, y)$ は, 条件を満たす.

したがって, 求める軌跡は, 放物線 $y^2 = -6x$ を x 軸方向に $\frac{3}{2}$ だけ平行移動した放物線である.

(3) $e = 2$ を (*) に代入すると

$$-3x^2 + 24x + y^2 - 36 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -3(x - 4)^2 + y^2 = -12$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{(x - 4)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

よって, 点 P は双曲線 ③ 上にある.

逆に, 双曲線 ③ 上のすべての点 $P(x, y)$ は, 条件を満たす.

したがって, 求める軌跡は, 双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ を x 軸方向に 4 だけ平行移動した双曲線である.

問題 4.7 (1) $AB = k$ より, $AC + BC = 3 - k$ であるから, 点 C は, 2 点 A, B を焦点とする楕円上の点である. この楕円の長軸の長さを $2a$, 短軸の長さを $2b$ とすると

$$2a = 3 - k, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}k$$

$$\text{したがって} \quad a = \frac{3-k}{2}, \quad b = \sqrt{a^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{9-6k}}{2}$$

$\triangle ABC$ の面積が最大となるのは, 点 C が短軸上の頂点にあるときであるから

$$S(k) = \frac{1}{2}AB \cdot b = \frac{1}{2}k \cdot \frac{\sqrt{9-6k}}{2} = \frac{1}{4}k\sqrt{9-6k}$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } S(k)^2 = \frac{3}{16}(-2k^3 + 3k^2)$$

$$f(k) = -2k^3 + 3k^2 \text{ とおくと } \left(0 < k < \frac{3}{2}\right)$$

$$f'(k) = -6k^2 + 6k = -6k(k-1)$$

k	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$(\frac{3}{2})$
$f'(k)$		+	0	-	
$f(k)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$S(k) = \frac{1}{4}\sqrt{3f(k)}$ であるから, $k = 1$ のとき, S は最大値 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ をとる.

別解 $S(k) = \frac{1}{4}\sqrt{3k^2(3-2k)}$

3 正数 $k, k, 3-2k$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{k+k+(3-2k)}{3} \geq \sqrt[3]{k \cdot k \cdot (3-2k)} \quad \text{ゆえに} \quad k^2(3-2k) \leq 1$$

上式において, 等号が成立するのは

$$k = 3 - 2k \quad \text{すなわち} \quad k = 1$$

$$\text{したがって} \quad S \leq S(1) = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{よって, 最大値} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}$$

深化 4.2 $t = x + 2$ を $y = t^2 - t$ に代入して

$$y = (x+2)^2 - (x+2) \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 + 3x + 2$$

練習 4.19 (1) $x = t + 1$ から $t = x - 1$ これを $y = t^2 + 4t$ に代入して

$$y = (x - 1)^2 + 4(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 + 2x - 3$$

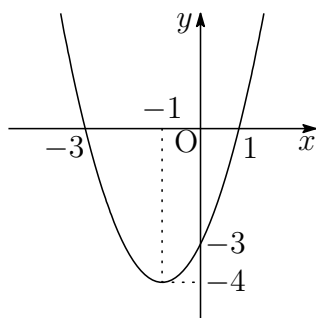
$$\text{よって} \quad y = (x + 1)^2 - 4$$

(2) $x = 2t$ から $t = \frac{1}{2}x$ これを $y = 2t - t^2$ に代入して

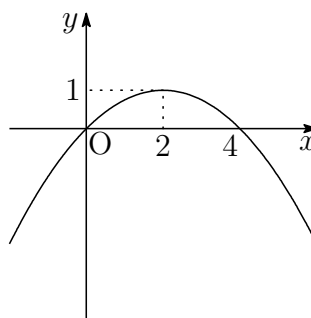
$$y = 2 \cdot \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{4}x^2 + x$$

$$\text{よって} \quad y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1$$

(1)



(2)



練習 4.20 放物線の方程式を変形すると $y = -(x - 2t)^2 + 4t^2 + 2t$

その頂点を $P(x, y)$ とすると $x = 2t, y = 4t^2 + 2t$

t を消去すると $y = x^2 + x$

よって、頂点 P が描く図形は、放物線 $y = x^2 + x$ である。

練習 4.21 (1) $x = 2 \cos \theta, y = 2 \sin \theta$ (2) $x = \sqrt{2} \cos \theta, y = \sqrt{2} \sin \theta$

練習 4.22 (1) $x = 3 \cos \theta, y = 2 \sin \theta$ (2) $x = 4 \cos \theta, y = 5 \sin \theta$

練習 4.23 $x = \frac{3}{\cos \theta}, y = 2 \tan \theta$ とすると

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = \frac{1}{9} \left(\frac{3}{\cos \theta} \right)^2 - \frac{1}{4} (2 \tan \theta)^2 = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1$$

よって、点 $P\left(\frac{3}{\cos \theta}, 2 \tan \theta\right)$ は双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 上を動く。

練習 4.24 $x = \frac{5}{\cos \theta}, y = 4 \tan \theta$

練習 4.25 (1) $\sin \theta = \frac{y+1}{3}, \cos \theta = \frac{x-2}{3}$
 これらを $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入すると

$$\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

よって $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

これは、点 $(2, -1)$ を中心とする半径 3 の円を表す。

(2) $\sin \theta = \frac{y-3}{2}, \cos \theta = \frac{x-1}{3}$

これらを $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入すると

$$\frac{(y-3)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

よって 楕円 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

練習 4.26 (1) $x = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}, \quad y = 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} \right) = 1$

よって $\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}, 1 \right)$

(2) $x = 2(\pi - \sin \pi) = 2\pi, \quad y = 2(1 - \cos \pi) = 4$

よって $(2\pi, 4)$

(3) $x = 2 \left(\frac{3}{2}\pi - \sin \frac{3}{2}\pi \right) = 3\pi + 2, \quad y = 2 \left(1 - \cos \frac{3}{2}\pi \right) = 2$

よって $(3\pi + 2, 2)$

(4) $x = 2(2\pi - \sin 2\pi) = 4\pi, \quad y = 2(1 - \cos 2\pi) = 0$

よって $(4\pi, 0)$

練習 4.27 (1) $x = 2 \cos \frac{\pi}{6}, y = 2 \sin \frac{\pi}{6}$ より $(\sqrt{3}, 1)$

(2) $x = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}, y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$ より $(1, 1)$

(3) $x = 3 \cos \pi, y = 3 \sin \pi$ より $(-3, 0)$

練習 4.28 (1) $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{より} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{よって} \quad \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(2) \quad r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{より} \quad \theta = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{よって} \quad \left(2, \frac{2}{3}\pi\right)$$

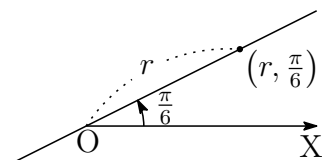
$$(3) \quad r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{2} \quad \text{より} \quad \theta = \frac{7}{6}\pi$$

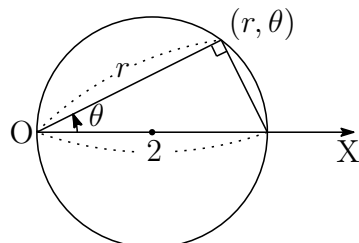
$$\text{よって} \quad \left(2, \frac{7}{6}\pi\right)$$

練習 4.29 $r \sin \theta = 1$ より $r = \frac{1}{\sin \theta}$

練習 4.30 (1)



(2)



練習 4.31 直線 ℓ 上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

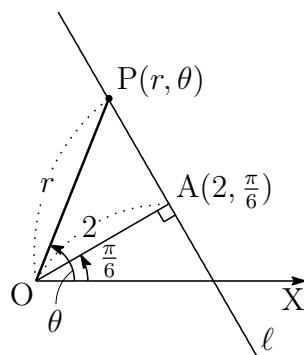
$$OP \cos \angle AOP = OA$$

ここで $OP = r$, $OA = 2$,

$$\cos \angle AOP = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

であるから、直線 ℓ の極方程式は

$$r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2$$



練習 4.32 この曲線上の点 $P(x, y)$ の極座標を (r, θ) とすると

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

これらを, $x^2 + 2y^2 = 4$ に代入すると $r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta = 4$

すなわち $r^2(\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta) = 4$

よって $r^2(1 + \sin^2 \theta) = 4$

練習 4.33 (1) 曲線上の点 $P(r, \theta)$ の直交座標を (x, y) とすると

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \quad \text{より} \quad r(\sin \theta + \cos \theta) = 1$$

すなわち $r \cos \theta + r \sin \theta = 1$

よって $x + y = 1$

(2) 曲線上の点 $P(r, \theta)$ の直交座標を (x, y) とする.

$$r \neq 0 \text{ のとき} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$r = 2 \sin \theta \text{ に代入して} \quad r = 2 \cdot \frac{y}{r}$$

すなわち $r^2 = 2y$

この式は, $r = 0$ のときも成り立つ.

さらに, $r^2 = x^2 + y^2$ であるから $x^2 + y^2 = 2y$

したがって $x^2 + y^2 - 2y = 0$

練習 4.34 分母を払うと $r + 2r \cos \theta = 1$

$$r \cos \theta = x \text{ を代入すると} \quad r = 1 - 2x$$

$$\text{両辺を 2 乗すると} \quad r^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ を代入すると} \quad x^2 + y^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$\text{整理して} \quad 3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0$$

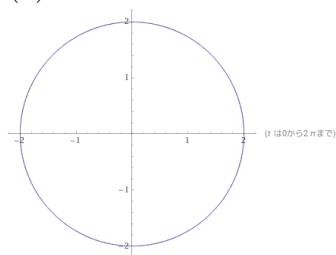
練習 4.35 $\frac{OP}{PH} = \frac{1}{2}$ より $2OP = PH$

$OP = r$, $PH = 2 - r \cos \theta$ であるから

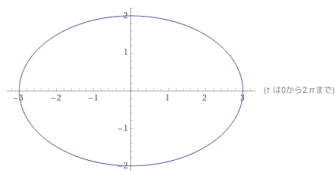
$$2r = 2 - r \cos \theta$$

$$\text{よって} \quad r = \frac{2}{2 + \cos \theta}$$

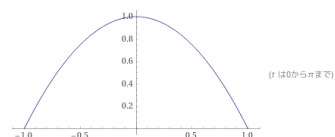
練習 4.36 (1)



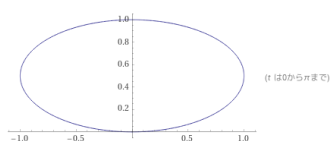
(2)



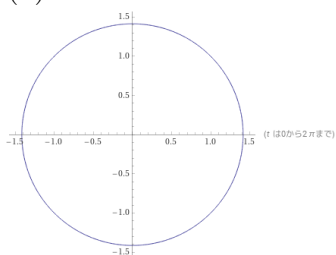
(3)



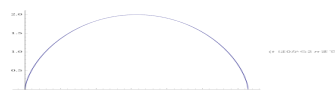
(4)



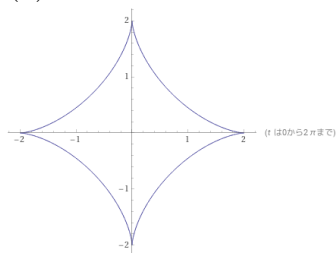
(5)



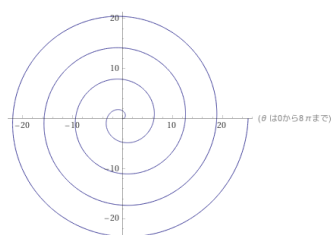
(6)



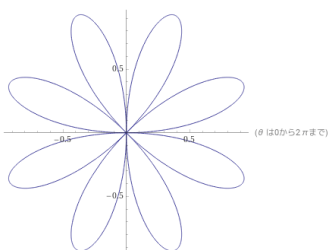
(7)



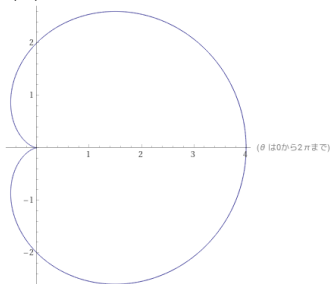
練習 4.37 (1)



(2)



(3)



問題 4.8 (1) $x + y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = t$

$$x - y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{t}$$

(2) $x + y = t, \quad x - y = \frac{1}{t}$ から t を消去すると

$$(x + y)(x - y) = t \cdot \frac{1}{t} \quad \text{すなわち} \quad x^2 - y^2 = 1$$

問題 4.9 (1) $\cos \theta = \frac{x+1}{2}$, $\sin \theta = \frac{y+2}{3}$ から

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

(2) $\frac{1}{\cos \theta} = x-2$, $\tan \theta = \frac{y-1}{2}$ から

$$(x-2)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

問題 4.10 極 O から直線に垂線 OH を下ろす. 求める直線上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

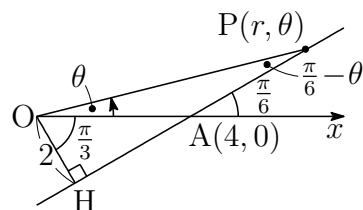
$$OP \sin \angle OPH = OH$$

ここで $OP = r$, $OH = 2$

$$\angle OPH = \frac{\pi}{6} - \theta$$

よって, 求める直線の極方程式は

$$r \sin \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) = 2$$



別解 極 O から直線に垂線 OH を下ろす.

求める直線上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

$$OP \cos \angle HOP = OH$$

ここで $OP = r$, $OH = 2$, $\angle HOP = \theta + \frac{\pi}{3}$

よって, 求める直線の極方程式は

$$r \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = 2$$

問題 4.11 (1) $r = 2(\cos \theta - 2 \sin \theta)$ の両辺に r を掛けて

$$r^2 = 2r \cos \theta - 4r \sin \theta$$

よって $x^2 + y^2 = 2x - 4y$

したがって $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

(2) $r^2 \sin \theta \cos \theta = 1$ より

$$r \sin \theta \cdot r \cos \theta = 1$$

よって $xy = 1$

問題 4.12 分母を払うと $\sqrt{2}r - r \cos \theta = 1$

$$r \cos \theta = x \text{ を代入すると } \sqrt{2}r = x + 1$$

$$\text{両辺を 2 乗すると } 2r^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ を代入すると } 2(x^2 + y^2) = x^2 + 2x + 1$$

$$\text{整理して } x^2 + 2y^2 - 2x - 1 = 0$$

この方程式を変形すると

$$(x-1)^2 + 2y^2 = 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{(x-1)^2}{2} + y^2 = 1$$

よって、この曲線は楕円である。

補足 2 次曲線の極方程式 $r = \frac{A}{1 + e \cos \theta}$ (A, e は定数) の離心率が e である。

$$\text{本題の極方程式から } r = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta}$$

上式より、離心率が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、楕円。

問題 4.13 点 P の軌跡が描く曲線がサイクロイドであるから、タイヤが角 θ だけ回転したとき

$$\overrightarrow{OC} = (2\theta, 2), \quad \overrightarrow{OP} = (2(\theta - \sin \theta), 2(1 - \cos \theta))$$

Q は 2 点 C, P の中点であるから

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}) = (2\theta - \sin \theta, 2 - \cos \theta)$$

よって、点 $Q(x, y)$ の媒介変数表示は次のようになる。

$$x = 2\theta - \sin \theta, \quad y = 2 - \cos \theta$$

章末 4.1 (1) 方程式から $y^2 = -8x$ すなわち $y^2 = 4 \cdot (-2)x$

焦点の座標は $(-2, 0)$

(2) 方程式から $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{16}} = 1$ すなわち $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$

焦点の座標は $\left(\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}, 0\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}, 0\right)$

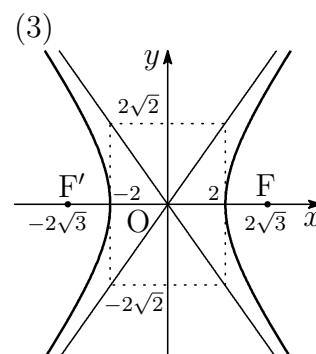
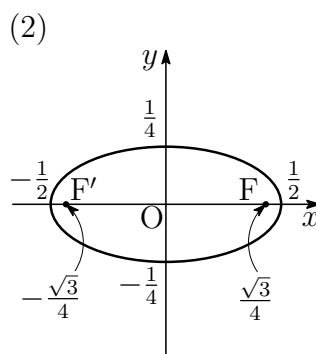
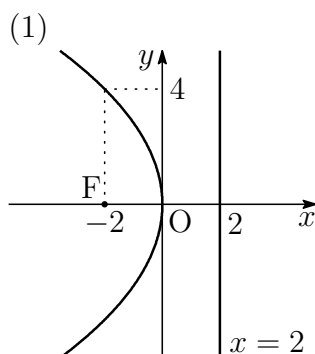
すなわち $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$

(3) 方程式の両辺を 32 で割って $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$

すなわち $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$

焦点の座標は $(\sqrt{4+8}, 0), (-\sqrt{4+8}, 0)$

すなわち $(2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)$



章末 4.2 (1) 頂点が原点，焦点が x 軸上にあるから，方程式は $y^2 = 4px$ とおける．

点 $(-1, 2)$ を通るから $4 = -4p$

よって $p = -1$

したがって，放物線の方程式は $y^2 = -4x$

(2) 長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にあるから，求める楕円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

とおくことができる．

長軸の長さが 4 であるから

$$2a = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 $(\sqrt{2}, 1)$ を通るから

$$\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①，② を解いて $a = 2, b = \sqrt{2}$

これは， $a > b$ を満たす．

よって，楕円の方程式は $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

(3) 頂点の位置から中心は原点 O であり，求める双曲線の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

とおくことができる．

頂点の座標が $(1, 0), (-1, 0)$ であるから

$$a = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

2 直線 $y = 2x, y = -2x$ を漸近線とするから

$$\frac{b}{a} = 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①，② を解いて $a = 1, b = 2$

よって，双曲線の方程式は $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

章末 4.3 (1) 与えられた方程式を変形すると $(x^2 - 2x + 1) + 4y^2 = 4$

すなわち 楕円 $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$

よって、与えられた方程式は、楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円を表す。

楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の焦点は 2 点 $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ であるから、求める焦点の座標は $(\sqrt{3} + 1, 0)$, $(-\sqrt{3} + 1, 0)$

(2) 与えられた方程式を変形すると $y^2 - 4y + 4 = 4(x + 1)$

すなわち 放物線 $(y - 2)^2 = 4(x + 1)$

よって、与えられた方程式は、放物線 $y^2 = 4x$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線を表す。

放物線 $y^2 = 4x$ の焦点は点 $(1, 0)$ であるから、求める焦点の座標は

$$(1 - 1, 0 + 2) \text{ すなわち } (0, 2)$$

(3) 与えられた方程式を変形すると $9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 2y + 1) = 36$

すなわち 双曲線 $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

よって、与えられた方程式は、双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ を x 軸方向に 1, y 軸方向に -1 だけ平行移動した双曲線を表す。

双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ の焦点は 2 点 $(\sqrt{13}, 0)$, $(-\sqrt{13}, 0)$ であるから、求める焦点の座標は $(\sqrt{13} + 1, -1)$, $(-\sqrt{13} + 1, -1)$

章末 4.4 (1) $x = 2t^2 + 4$, $y = t + 3$ から t を消去すると $x = 2(y - 3)^2 + 4$

よって 放物線 $(y - 3)^2 = \frac{1}{2}(x - 4)$

(2) $x = 2\sqrt{t}$, $y = \sqrt{t} - 2t$ から t を消去すると

$$y = \frac{x}{2} - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

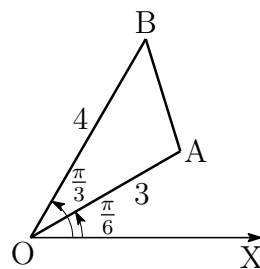
ここで、 $\sqrt{t} \geq 0$ から $x \geq 0$

よって 放物線の一部 $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \quad (x \geq 0)$

章末 4.5 $\angle AOB = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$
 $= \frac{\pi}{6}$

よって

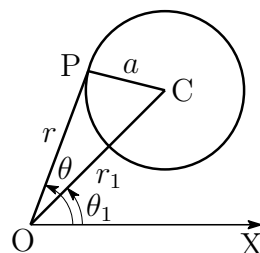
$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin \frac{\pi}{6} = 3$$



章末 4.6 円上の点 P の極座標を (r, θ) とし, $\triangle OCP$ に余弦定理を適用すると

$$r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) = a^2$$

この等式は, $\theta = \theta_1$ のときも成り立つ.



章末 4.7 P から直線 $x = -1$ へ下ろした垂線を PH とすると, $PH = PA$ であるから

$$|x + 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

両辺を 2 乗すると

$$(x + 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2$$

整理すると $y^2 = 4x$

よって, 点 P の軌跡は 放物線 $y^2 = 4x$

章末 4.8 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ から $y^2 = \frac{1}{2}x^2 - 3$

$$\begin{aligned} PF^2 &= (x - 3)^2 + y^2 = (x - 3)^2 + \frac{1}{2}x^2 - 3 \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 = \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 4) \\ &= \frac{3}{2}(x - 2)^2 \end{aligned}$$

また $PH^2 = |x - 2|^2 = (x - 2)^2$

よって $PF^2 : PH^2 = \frac{3}{2} : 1 = 3 : 2$

したがって $\frac{PF}{PH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (一定)

補足 $e = \frac{PF}{PH}$ は, 2 次曲線の離心率を表し, $e > 1$ であるから, 双曲線である.

章末 4.9 与えられた方程式を変形すると $4(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 16$

すなわち
$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

この楕円を、 x 軸方向に 1, y 軸方向に -3 だけ平行移動すると、移動後の楕円の方程式は

$$\frac{\{(x-1)+1\}^2}{4} + \frac{\{(y+3)-2\}^2}{16} = 1$$

すなわち
$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この楕円は、楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$

を y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである.

② の楕円の焦点の座標は $(0, \sqrt{16-4})$, $(0, -\sqrt{16-4})$

すなわち $(0, 2\sqrt{3})$, $(0, -2\sqrt{3})$

よって、① の楕円の焦点の座標は

$$(0, 2\sqrt{3}-1), (0, -2\sqrt{3}-1)$$

章末 4.10 $4x^2 + y^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad y = -x + k \quad \cdots \textcircled{2}$

とする. ②を①に代入すると

$$4x^2 + (-x + k)^2 = 4$$

展開して整理すると

$$5x^2 - 2kx + k^2 - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

直線②が楕円①と異なる2点で交わるから, 2次方程式③の判別式を D とすると

$$D > 0$$

$$\text{したがって} \quad (-2k)^2 - 4 \cdot 5(k^2 - 4) > 0$$

$$\text{すなわち} \quad k^2 - 5 < 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -\sqrt{5} < k < \sqrt{5} \quad \cdots \textcircled{4}$$

ここで, 点 Q, R の座標をそれぞれ $Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2)$ とおくと,

$$\text{点 } P \text{ の座標は} \quad \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

また, x_1, x_2 は, 2次方程式③の解であるから, 解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{2k}{5}$$

$$\text{よって} \quad y_1 + y_2 = (-x_1 + k) + (-x_2 + k)$$

$$= -(x_1 + x_2) + 2k = \frac{8k}{5}$$

したがって, 点 P の座標は k を用いて, $\left(\frac{k}{5}, \frac{4k}{5}\right)$ と表すことができる.

$x = \frac{k}{5}, y = \frac{4k}{5}$ において, k を消去すると

$$y = 4x$$

$$\text{また, ④から} \quad -\frac{\sqrt{5}}{5} < x < \frac{\sqrt{5}}{5}$$

したがって, 求める軌跡は

$$\text{直線の一部} \quad y = 4x \quad \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} < x < \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

章末 4.11 与えられた方程式を変形すると $(x^2 + 2tx + t^2) + (y^2 - 4ty + 4t^2) = t$

すなわち $(x + t)^2 + (y - 2t)^2 = t$

この方程式が円を表すための条件は $t > 0 \quad \dots \textcircled{1}$

このとき、中心の座標を (x, y) とすると

$$x = -t, \quad y = 2t$$

これから t を消去すると $y = -2x$

ここで、 $\textcircled{1}$ から $-x > 0$ すなわち $x < 0$

よって、求める軌跡は

$$\text{直線の一部} \quad y = -2x \quad (x < 0)$$

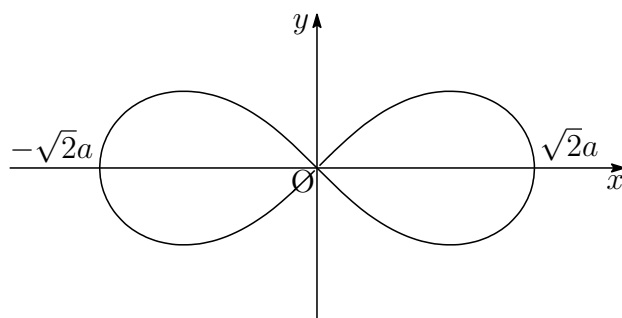
章末 4.12 曲線上の点 P の直交座標を (x, y) とすると

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{2x^2}{r^2} - 1$$

これらを極方程式に代入すると

$$x^2 + y^2 = 2a^2 \left(\frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 \right)$$

整理すると $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$



2次曲線の離心率と極方程式

Oを通らない直線 ℓ (準線)に、点 $P(r, \theta)$ から下ろした垂線をPHとするとき

$$e = \frac{OP}{PH}$$

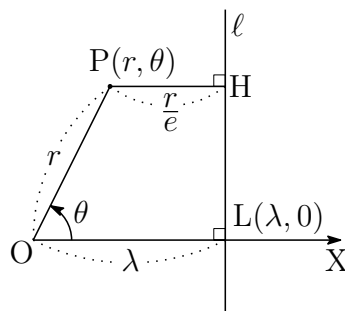
の値が一定であるような点Pの軌跡は、2次曲線になる.

点 $L(\lambda, 0)$ を通り、始線OXに垂直な直線を ℓ とする.

右の図において、LとHは ℓ 上にあるから

$$r \cos \theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

ゆえに
$$r = \frac{e\lambda}{1 + e \cos \theta} \quad \cdots \textcircled{1}$$

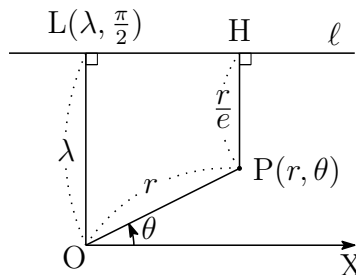


同様に、点 $L(\lambda, \frac{\pi}{2})$ を通り、始線OXに平行な直線を ℓ とする.

右の図において、LとHは ℓ 上にあるから

$$r \sin \theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

ゆえに
$$r = \frac{e\lambda}{1 + e \sin \theta} \quad \cdots \textcircled{2}$$



①, ②が点Pの軌跡を表す極方程式である.

一般に、極方程式 $r = -f(\theta + \pi)$ と $r = f(\theta)$ は一致する.

したがって、 $\lambda < 0$ のとき、 $d = -\lambda$ とおくと($d > 0$)、①, ②は、それぞれ次のように表すこともできる.

$$r = \frac{e\lambda}{1 + \cos \theta} = -\frac{e(-\lambda)}{1 - e \cos(\theta + \pi)} = \frac{ed}{1 - e \cos \theta} \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$$r = \frac{e\lambda}{1 + \sin \theta} = -\frac{e(-\lambda)}{1 - e \sin(\theta + \pi)} = \frac{ed}{1 - e \sin \theta} \quad \cdots \textcircled{2}'$$

極方程式①を直交座標 (x, y) に関する方程式で表すと

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2e^2\lambda x - e^2\lambda^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

$$(*) \text{ は, } e \neq 1 \text{ のとき } \frac{(1 - e^2)^2}{e^2\lambda^2} \left(x + \frac{e^2\lambda}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{1 - e^2}{e^2\lambda^2} y^2 = 1$$

$$\text{i) } 0 < e < 1 \text{ のとき, } \frac{1}{a} = \frac{1 - e^2}{e|\lambda|}, \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e|\lambda|} \text{ とおくと } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

したがって, $(*)$ は λ の符号によって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \text{ のとき } & \frac{(x + ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ & \text{中心 } (-ea, 0), \quad \text{準線 } x = -ea + \frac{a}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda < 0 \text{ のとき } & \frac{(x - ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ & \text{中心 } (ea, 0), \quad \text{準線 } x = ea - \frac{a}{e} \end{aligned}$$

$$\text{ii) } e = 1 \text{ のとき, } (*) \text{ は } y^2 = -2\lambda \left(x - \frac{\lambda}{2} \right)$$

$$\text{iii) } e > 1 \text{ のとき, } \frac{1}{a} = \frac{e^2 - 1}{e|\lambda|}, \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e|\lambda|} \text{ とおくと } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

したがって, $(*)$ は λ の符号によって, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \text{ のとき } & \frac{(x - ea)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ & \text{中心 } (ea, 0), \quad \text{準線 } x = ea - \frac{a}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda < 0 \text{ のとき } & \frac{(x + ea)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ & \text{中心 } (-ea, 0), \quad \text{準線 } x = -ea + \frac{a}{e} \end{aligned}$$

これらの表す曲線は, e のとる値によって, 次のような2次曲線に分類される. この e の値を離心率という.

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| [1] $0 < e < 1$ のとき | O を焦点の1つとする楕円 |
| [2] $e = 1$ のとき | O を焦点, ℓ を準線とする放物線 |
| [3] $e > 1$ のとき | O を焦点の1つとする双曲線 |

同様に、極方程式②を直交座標 (x, y) に関する方程式で表すと

$$x^2 + (1 - e^2)y^2 + 2e^2\lambda x - e^2\lambda^2 = 0 \quad \cdots (**)$$

$$(**) \text{ は, } e \neq 1 \text{ のとき } \frac{1 - e^2}{e^2\lambda^2}x^2 + \frac{(1 - e^2)^2}{e^2\lambda^2}\left(y + \frac{e^2\lambda}{1 - e^2}\right)^2 = 1$$

$$\text{i) } 0 < e < 1 \text{ のとき, } \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e|\lambda|}, \frac{1}{b} = \frac{1 - e^2}{e|\lambda|} \text{ とおくと } e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

したがって、(**) は λ の符号によって、次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \text{ のとき } \quad & \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y + ea)^2}{b^2} = 1, \\ & \text{中心 } (0, -ea), \quad \text{準線 } y = -ea + \frac{a}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda < 0 \text{ のとき } \quad & \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - ea)^2}{b^2} = 1, \\ & \text{中心 } (0, ea), \quad \text{準線 } y = ea - \frac{a}{e} \end{aligned}$$

$$\text{ii) } e = 1 \text{ のとき, } (**) \text{ は } x^2 = -2\lambda\left(y - \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\text{iii) } e > 1 \text{ のとき, } \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e|\lambda|}, \frac{1}{b} = \frac{e^2 - 1}{e|\lambda|} \text{ とおくと } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$$

したがって、(**) は λ の符号によって、次のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \text{ のとき } \quad & -\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - ea)^2}{b^2} = 1, \\ & \text{中心 } (0, ea), \quad \text{準線 } y = ea - \frac{a}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda < 0 \text{ のとき } \quad & -\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y + ea)^2}{b^2} = 1, \\ & \text{中心 } (0, -ea), \quad \text{準線 } y = -ea + \frac{a}{e} \end{aligned}$$

補足 (1) の楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{25} = 1$ の焦点は y 軸上にあるから (準線は y 軸に垂直), 極方程式を次のようにおける.

$$r = \frac{\delta}{1 + \varepsilon \sin \theta}$$

(1) に示した図の 2 点 $P_1(8, \frac{\pi}{2})$, $P_2(2, \frac{3\pi}{2})$ を通ることから

$$\delta = \frac{16}{5}, \quad \varepsilon = -\frac{3}{5} \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{16}{5 - 3 \sin \theta}$$

(*), (**) で示した楕円と双曲線の中心，放物線の頂点を，原点に平行移動した 2 次曲線は，次のようになる．

[1] 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a > b$ のとき $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ，焦点 $(\pm ea, 0)$ ，準線 $x = \pm \frac{a}{e}$ (複号同順)

$a < b$ のとき $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ ，焦点 $(0, \pm eb)$ ，準線 $y = \pm \frac{b}{e}$ (複号同順)

[2] 放物線 $y^2 = -2\lambda x$

$e = 1$ ，焦点 $\left(-\frac{\lambda}{2}, 0\right)$ ，準線 $x = \frac{\lambda}{2}$

放物線 $x^2 = -2\lambda y$

$e = 1$ ，焦点 $\left(0, -\frac{\lambda}{2}\right)$ ，準線 $y = \frac{\lambda}{2}$

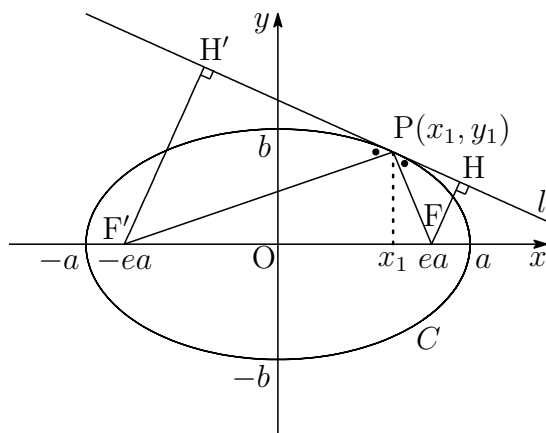
[3] 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ ，焦点 $(\pm ea, 0)$ ，準線 $x = \pm \frac{a}{e}$ (複号同順)

双曲線 $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$ ，焦点 $(0, \pm eb)$ ，準線 $y = \pm \frac{b}{e}$ (複号同順)

楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ について ($a > b$),
 C 上の点を $P(x_1, y_1)$, 焦点を $F(ea, 0)$,
 $F'(-ea, 0)$, C の P における接線を l と
 する. F, F' から l にそれぞれ垂線 FH ,
 $F'H'$ を引くと, 次が成り立つ.



$$\begin{aligned} FP &= a - ex_1 \\ F'P &= a + ex_1 \\ \angle FPH &= \angle F'PH' \end{aligned}$$

証明

$$\begin{aligned} FP^2 &= (x_1 - ea)^2 + y_1^2 = x_1^2 - 2eax_1 + e^2a^2 + y_1^2 \\ &= x_1^2 - 2eax_1 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)a^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) \\ &= a^2 - 2eax_1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x_1^2 \\ &= a^2 - 2eax_1 + e^2x_1^2 = (a - ex_1)^2 \end{aligned}$$

$a > ex_1$ であるから $FP = a - ex_1$ 同様にして $F'P = a + ex_1$

$F(ea, 0), F'(-ea, 0)$ から $l: \frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y - 1 = 0$ までの距離は, それぞれ

$$\begin{aligned} FH &= \frac{\left|\frac{x_1}{a^2}ea - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a - ex_1}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{FP}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} \\ F'H' &= \frac{\left|\frac{x_1}{a^2}(-ea) - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a + ex_1}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{F'P}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} \end{aligned}$$

上の 2 式から $\frac{FH}{FP} = \frac{F'H'}{F'P}$ ゆえに $\angle FPH = \angle F'PH'$

証終