

令和5年度 福岡教育大学2次試験後期日程(数学問題)
 教育学部中等教育(数学専攻) 令和5年3月12日
 数I・II・III・A・B(120分)

問題 1 2 3 4

1 次の問いに答えよ.

- (1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 不等式 $1 + 4\cos\theta - 2\cos 2\theta < 0$ をみたす θ の範囲を求めよ.
- (2) a, b は互いに素な自然数で $b > 2$ とする. このとき,

$$a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$$

を b で割った余りが全て異なることを示せ.

- (3) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \log \left(\frac{n+k}{n} \right)$$

の値を求めよ. ただし, 対数は自然対数とする.

2 $\triangle OAB$ において, 辺 OA を $1:2$ に内分する点を C とし, 辺 OB を $3:1$ に外分する点を D とする. 線分 CD と辺 AB の交点を E とし, 線分 OE, BC, AD の中点をそれぞれ F, G, H とする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ.
- (2) $\overrightarrow{FH}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ.
- (3) 3点 F, G, H が一直線上にあることを示せ.

- 3** 関数 $f(x)$ は常に正の値をとり、どんな実数 x, y についても

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

が成り立っている．次の問いに答えよ．

- (1) x を実数とすると、 $f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{f(x)}$ が成り立つことを示せ．
 (2) k を自然数とする．初項 1、公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 $2^k + 1$ 項から第 2^{k+1} 項までの和

$$S = a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + a_{2^k+3} + \cdots + a_{2^{k+1}}$$

を求めよ．

- (3) n を自然数とする． 2^n 個の実数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2^n}$ に対して

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2^n}}{2^n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2^n})}{2^n}$$

が成り立つことを、 n に関する数学的帰納法によって示せ．

- 4** $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とする．次の問いに答えよ．ただし、 $\tan^0 x = 1$ とする．

- (1) I_0 および I_1 の値を求めよ．
 (2) n を 0 以上の整数とすると、

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

が成り立つことを示せ．

- (3) 無限級数

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

の和を求めよ．

解答例

- 1** (1) 与えられた不等式から $1 + 4 \cos \theta - 2(2 \cos^2 \theta - 1) < 0$

$$4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta - 3 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2 \cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 3) > 0$$

$$2 \cos \theta - 3 < 0 \text{ であるから} \quad 2 \cos \theta + 1 < 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ に注意して, これを解くと } \frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$$

- (2) 整数 m, n を $b-1 \geq m > n \geq 1$ とする. 法 b について

$$ma \equiv na \pmod{b}$$

と仮定すると

$$(m-n)a \equiv 0 \pmod{b}$$

このとき, $m-n \not\equiv 0 \pmod{b}$ であるから

$$a \equiv 0 \pmod{b}$$

となり, a が b と互いに素であることに反する.

よって, 題意は成立する.

- (3) 求める極限値を I とすると

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \log \left(\frac{k}{n} + 1 \right) \\ &= \int_0^1 x \log(x+1) dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(x+1)^2 - (x+1) \right\}' \log(x+1) dx \\ &= \left[\left\{ \frac{1}{2}(x+1)^2 - (x+1) \right\} \log(x+1) \right]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(x+1)^2 - (x+1) \right\} \cdot \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) dx = -\frac{1}{4} \left[(x-1)^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

■

- 2** (1) Cは辺OAを1:2に内分し、DはOBを3:1に外分する点であるから

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$$

線分CD上の点Eは、実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OE} = (1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(1-t)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}t\overrightarrow{OB} \quad \dots \textcircled{1}$$

点Eは、線分AB上の点であるから

$$\frac{1}{3}(1-t) + \frac{3}{2}t = 1 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{4}{7}$$

これを①に代入すると

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{6}{7}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{6}{7}\vec{b}$$

- (2) (1)の結果から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{6}{7}\vec{b}\right) = \frac{1}{14}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} \\ \overrightarrow{OH} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OF} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{14}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}\right) \\ &= \frac{3}{28}(4\vec{a} + 3\vec{b}) \end{aligned}$$

- (3) BCの midpoint がGであるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \\ \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{14}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}\right) = \frac{1}{42}(4\vec{a} + 3\vec{b}) \end{aligned}$$

上式および(2)の結果から $\overrightarrow{FH} = \frac{9}{2}\overrightarrow{FG}$

よって、3点F, G, Hは一直線上にある。 ■

3 (1) 与えられた関係式から

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$f(x) > 0, \quad f\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \text{ であるから}$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{f(x)}$$

(2) 初項 1, 公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = 2n - 1$

$$a_{2^k+1} = 2(2^k + 1) - 1 = 2^{k+1} + 1,$$

$$a_{2^{k+1}} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{k+1} - 1$$

S は初項 a_{2^k+1} , 末項 $a_{2^{k+1}}$, 項数 2^k の等差数列の和であるから

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2^k \{(2^{k+1} + 1) + (2 \cdot 2^{k+1} - 1)\} = \frac{1}{2} \cdot 2^k \times 3 \cdot 2^{k+1} = \mathbf{3 \cdot 2^{2k}}$$

(3) n を自然数とする. 2^n 個の実数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2^n}$ に対して

$$(*) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2^n}}{2^n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{2^n})}{2^n}$$

とする. $f(x_1), f(x_2)$ について, 相加平均・相乗平均の大小関係および (1) の結果から

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq \sqrt{f(x_1)f(x_2)} = \sqrt{f(x_1 + x_2)} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \quad (\#)$$

したがって, $n = 1$ のとき, $(*)$ が成立する.

$n = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると, 次の 2 式が成立する.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2^k}}{2^k}\right) &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{2^k})}{2^k} \\ f\left(\frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2^k}}{2^k}\right) &\leq \frac{f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) + \dots + f(y_{2^k})}{2^k} \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を加えて, 2 で割ると

$$\frac{1}{2} \left\{ f\left(\sum_{j=1}^{2^k} \frac{x_j}{2^k}\right) + f\left(\sum_{j=1}^{2^k} \frac{y_j}{2^k}\right) \right\} \leq \sum_{j=1}^{2^k} \frac{f(x_j) + f(y_j)}{2^{k+1}} \quad (**)$$

このとき, $(**)$ の左辺は $(\#)$ より

$$f\left(\sum_{j=1}^{2^k} \frac{x_j + y_j}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2} \left\{ f\left(\sum_{j=1}^{2^k} \frac{x_j}{2^k}\right) + f\left(\sum_{j=1}^{2^k} \frac{y_j}{2^k}\right) \right\}$$

したがって

$$f\left(\sum_{j=1}^{2^k} \frac{x_j + y_j}{2^{k+1}}\right) \leq \sum_{j=1}^{2^k} \frac{f(x_j) + f(y_j)}{2^{k+1}}$$

$y_j = x_{2^k+j}$ とおくと $(j = 1, 2, \dots, 2^k)$

$$f\left(\sum_{j=1}^{2^{k+1}} \frac{x_j}{2^{k+1}}\right) \leq \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \frac{f(x_j)}{2^{k+1}}$$

$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成立する.

よって, すべての自然数 n について, $(*)$ は成立する.

補足 $f(x+y) = f(x)f(y)$ より $f(x) = \prod_{k=1}^n f\left(\frac{x}{n}\right) = f\left(\frac{x}{n}\right)^n$

相加平均・相乗平均の大小関係および $f(x)^{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{x}{n}\right)$ により

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{n} \geq \prod_{k=1}^n f(x_k)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^n f\left(\frac{x_k}{n}\right) = f\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}\right)$$

解説 $f(x+y) = f(x)f(y)$ に $x = y = 0$ を代入すると, $f(0) \neq 0$ より $f(0) = 1$
 $f'(0) = c$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \cdot f(x) = cf(x) \end{aligned}$$

$f'(x)e^{-cx} + f(x)(e^{-cx})' = 0$ より $\{f(x)e^{-cx}\}' = 0$

$f(0) = 1$ より $f(x)e^{-cx} = 1$ ゆえに $f(x) = e^{cx}$

$a = e^c$ とすると $f(x) = a^x$

これを用いて, 補足で示した変形を示すこともできる. ■

4 (1) (*) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) より

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}, \\ I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(2) (*) より

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x (1 + \tan^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x (\tan x)' \, dx \\ &= \frac{1}{2n+1} \left[\tan^{2n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から, 0 以上の整数 k について

$$I_k + I_{k+1} = \frac{1}{2k+1} \quad \text{ゆえに} \quad (-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^n \{ (-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1} \} \\ &= I_0 - (-1)^n I_{n+1} = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1} I_{n+1} \end{aligned} \quad (*)$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{において} \quad 0 \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi} x$$

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi} \right)^{2n+2} x^{2n+2} \, dx = \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\text{上式から} \quad 0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{\pi}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} = 0$$

$$\text{これと (*) から} \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

■