

令和6年度 福岡教育大学2次試験後期日程 (数学問題)
 教育学部中等教育 (数学専攻) 令和6年3月12日
 数I・II・III・A・B (120分)

問題 1 2 3 4

1 次の問いに答えよ.

- (1) 9個の整数1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9から, 一度に異なる数を実作為に取り出すとき, 5つの数の中央値が5である確率を求めよ.
- (2) 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x^2 + xy + zx = -5 \\ xy + y^2 + yz = 10 \\ zx + yz + z^2 = 20 \end{cases}$$

- (3) a を正の定数とする. 関数 $f(x)$ が実数全体で連続であり, 常に

$$f(x+a) = f(x)$$

が成り立っている. このとき,

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

が成り立つことを置換積分を利用して示せ.

2 a を正の実数とし, $\{a_n\}$ を初項 a , 公差3の等差数列とする. また,

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2} a_n} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (2) $n \geq 3$ のとき, S_n を a と n を用いて表せ.
- (3) $a = 3$ のとき, $S_n > \frac{1}{15}$ を満たす自然数 n の最小値を求めよ.

- 3** a, b を定数とし, $a \neq 0, b \neq 0$ とする. 次の関数 $f(x)$ が $x = \frac{\pi}{2}$ で微分可能であるとする.

$$f(x) = \begin{cases} (x+a)(b - \cos x) & \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2} \log \left(x + 1 - \frac{\pi}{2}\right) & \left(x \geq \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

次の問いに答えよ. ただし, 対数は自然対数とする.

- (1) a, b の値を求めよ.
- (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}+e-1} f(x) dx$ の値を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.

4 次の問いに答えよ.

(1) a, b, c を正の整数とする. このとき, 次の (*) が成り立つ.

a, b が互いに素であり, bc が a で割り切れるならば,
 c は a で割り切れる. (*)

この事実について, 以下の (ア), (イ) に答えよ.

(ア) 次の記述はユークリッドの互除法を利用した (*) の証明である. (1) の空欄を適切に埋め, (2) および (3) の空欄にあてはまる数式をそれぞれ答えよ.

証明 a, b が互いに素だから, (1) は 1 である. このとき, ユークリッドの互除法から

(2)

を満たす整数 x, y が存在する. bc が a で割り切れるから,

$$bc = a \cdot k$$

を満たす整数 k が存在する. (2) の両辺に c を掛けて,

$$l = (3)$$

とおけば, l は整数であり,

$$c = a \cdot l$$

と表せる. よって, c は a で割り切れる.

(イ) a, b が互いに素であるとき, c が a, b の両方で割り切れるならば c は ab で割り切れることを, (*) を利用して示せ.

(2) x, y を自然数とする. 1つ 90 円の商品 A を x 個, 1つ 130 円の商品 B を y 個あわせて総額が 5000 円になるような x と y の組み合わせを全て求めよ.

解答例

- 1** (1) 中央値が5であるとき、5以外に1, 2, 3, 4から2個, 6, 7, 8, 9から2個取り出す確率であるから

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_9C_5} = \frac{6 \times 6}{9 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{2}{7}$$

- (2) 与えられた連立方程式から

$$\begin{cases} x(z + y + z) = -5 \\ y(x + y + z) = 10 \\ z(x + y + z) = 20 \end{cases}$$

$y = -2x$, $z = -4x$ であるから、これらを上の第1式に代入すると

$$x(x - 2x - 4x) = -5 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm 1$$

よって $(x, y, z) = (\pm 1, \mp 2, \mp 4)$ (複号同順)

- (3) $\int_{-\frac{a}{2}}^0 f(x) dx = \int_{-\frac{a}{2}}^0 f(x+a) dx$ であるから、 $u = x+a$ とおくと

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \begin{array}{c|c|c} x & -\frac{a}{2} & \longrightarrow 0 \\ \hline u & \frac{a}{2} & \longrightarrow a \end{array}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^0 f(x+a) dx = \int_{\frac{a}{2}}^a f(u) du = \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx$$

$$\text{したがって} \quad \int_{-\frac{a}{2}}^0 f(x) dx = \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) dx &= \int_{-\frac{a}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx \\ &= \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx + \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$



- 2** (1) 初項 a , 公差 3 の等差数列の数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1) \cdot 3 = \mathbf{3n + a - 3}$$

- (2) $a_3 - a_1 = a_4 - a_2 = a_5 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-2} = 6$ より

$$\begin{aligned} 6S_n &= \frac{6}{a_1a_3} + \frac{6}{a_2a_4} + \frac{6}{a_3a_5} + \cdots + \frac{6}{a_{n-2}a_n} \\ &= \frac{a_3 - a_1}{a_1 - a_3} + \frac{a_4 - a_2}{a_2a_4} + \frac{a_5 - a_3}{a_5a_3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-2}}{a_{n-2}a_n} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{3n+a-6} - \frac{1}{3n+a-3} \end{aligned}$$

$$\text{よって } S_n = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{3n+a-6} - \frac{1}{3n+a-3} \right)$$

- (3) $a = 3$ を (2) の結果に代入すると

$$S_n = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n-3} - \frac{1}{3n} \right)$$

$$S_n > \frac{1}{15} \text{ より } \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n-3} - \frac{1}{3n} \right) > \frac{1}{15}$$

$$\text{整理すると } \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \frac{3}{10}$$

$$n(23-3n) < 10$$

これを満たす最小の自然数 n は $\mathbf{n = 8}$



- 3** (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = b \left(\frac{\pi}{2} + a \right), \quad f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$
 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \begin{cases} b - \cos x + (x + a) \sin x & \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right) \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x + 1 - \frac{\pi}{2}} & \left(x > \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

$f(x)$ が $x = \frac{\pi}{2}$ で微分可能であるとき,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = f \left(\frac{\pi}{2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f'(x)$$

であるから

$$b \left(\frac{\pi}{2} + a \right) = 0, \quad b + \frac{\pi}{2} + a = \frac{\pi}{2}$$

$a \neq 0, b \neq 0$ に注意して解くと $\mathbf{a} = -\frac{\pi}{2}, \mathbf{b} = \frac{\pi}{2}$

- (2) (1) の結果を代入して

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}+e-1} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+e-1} f(x) dx \\ &= \left[\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} x - \sin x \right) - \left(\frac{\pi}{4} x^2 + \cos x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \left[\left(x + 1 - \frac{\pi}{2} \right) \left\{ \log \left(x + 1 - \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right\} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+e-1} \\ &= \mathbf{1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{16}} \end{aligned}$$

■

4 (1)(ア) (1) 最大公約数 (2) $ax + by = 1$ (3) $cx + ky$

(2) の両辺に c を掛けると $acx + bcy = c$

$bc = ak$ とおくと $acx + ak y = c$ ゆえに $c = a(cx + ky)$

$l = cx + ky$ とおくと $c = a \cdot l$

(2) c は a で割り切れるから, $\frac{c}{a}$ は整数

$$c = a \cdot \frac{c}{a}$$

上式において, c は b で割り切れ, a と b は互いに素であるから, $\frac{c}{a}$ は b で割り切れる. したがって, 整数 m を用いて

$$\frac{c}{a} = mb \quad \text{ゆえに} \quad c = mab$$

上の第2式から, c は ab で割り切れる.

(3) 条件から $90x + 130y = 5000$ ゆえに $9x + 13y = 500 \quad \cdots \textcircled{1}$

$9 \cdot 3 + 13 \cdot (-2) = 1$ より $9 \cdot 1500 + 13 \cdot (-1000) = 500 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $9(x - 1500) + 13(y + 1000) = 0$

$$9(1500 - x) = 13(y + 1000)$$

上式から, 整数 k を用いて

$$1500 - x = 13k, \quad y + 1000 = 9k$$

ゆえに $x = 1500 - 13k, \quad y = 9k - 1000 \quad \cdots (*)$

x, y は自然数, k は整数であるから

$$1500 - 13k > 0, \quad 9k - 1000 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = 112, 113, 114, 115$$

これらを $(*)$ に代入して

$$(x, y) = (44, 8), (31, 17), (18, 26), (5, 35)$$

別解 $13 \equiv 0, 500 \equiv 6 \pmod{13}$ であるから, $\textcircled{1}$ より

$$9x + 13y \equiv 500 \iff 9x \equiv 6 \iff 3x \equiv 2 \pmod{13}$$

$$\iff 27x \equiv 18 \iff x \equiv 5 \pmod{13}$$

$x = 13k + 5$ を $\textcircled{1}$ に代入すると (k は整数)

$$9(13k + 5) + 13y = 500 \quad \text{ゆえに} \quad y = 35 - 9k$$

x, y は自然数, k は整数であるから

$$13k + 5 > 0, \quad 35 - 9k > 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

よって $(x, y) = (5, 35), (18, 26), (31, 17), (44, 8)$ ■