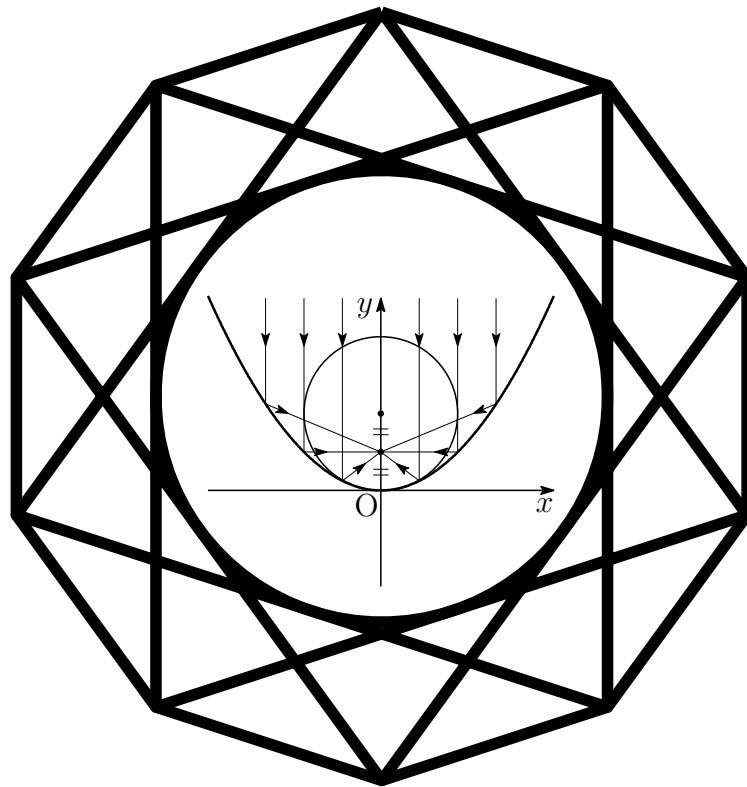


入試の軌跡

熊本大学 医医

2015 - 2024

数 学



2024 年 7 月 30 日

Typed by L^AT_EX 2_ε

序

本書は、熊本大学医学部医学科受験者のための入試問題集です。本書には、平成27年(2015年)度から令和6年(2024年)度までの2次試験前期日程の問題(現行課程)をすべて掲載しています。第1章には問題を掲載し、第2章には解答、第3章には研究を付けています。

また、平成9年(1997年)から令和5年(2023年)までの一般前期試験問題および解答については、年度ごとに次のサイトに掲載しています。

<https://math4u.site/>

本書の編集にあたり、以下の点に留意しました。

1. 解答は、図や解説を充実させ、自学自習ができるように配慮しました。
2. 本書は、電子文書(PDF)での利用を想定し、ハイパーリンクを施しています。Adobe Reader(高機能のPDFブラウザ[フリーソフト])などをご利用ください。利用する際には、全画面表示(`[Ctrl]+L`)および描画領域に合わせる(`[Ctrl]+3`)と見やすくなります。ページスクロールには、(`[Ctrl]+▲`、`[Ctrl]+▼`)が利用でき、リンク(ジャンプ)先から戻る(`[Alt]+◀`)、進む(`[Alt]+▶`)も利用できます。なお、全画面表示を解除するには`[ESC]`。
4. 電子黒板を利用される場合は、電子黒板のPDFブラウザをご使用ください。ファイルサイズに優れ、ハイパーリンク・拡大・スワイプ・書き込みもスムーズに機能します。
3. 平成13年(2001年)度から平成26年(2014年)度までの一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡 熊本大学 医医』を上記のサイトに掲載しています。

令和6年6月 西村 信一

目次

序	i
第1章 一般前期問題	1
1.1 2015 年度	5
1.2 2016 年度	7
1.3 2017 年度	9
1.4 2018 年度	11
1.5 2019 年度	13
1.6 2020 年度	15
1.7 2021 年度	17
1.8 2022 年度	19
1.9 2023 年度	21
1.10 2024 年度	23
第2章 一般前期解答	25
2.1 2015 年度	26
2.2 2016 年度	31
2.3 2017 年度	36
2.4 2018 年度	41
2.5 2019 年度	48
2.6 2020 年度	52
2.7 2021 年度	59
2.8 2022 年度	67
2.9 2023 年度	73
2.10 2024 年度	81
第3章 一般前期研究	87
3.1 2015 年	87
3.1.1 2 番 研究	87
3.2 2016 年	90
3.2.1 2 番 バウムクーヘン型求積法	90
3.3 2017 年	91
3.3.1 1 番 研究 1	91
3.3.2 1 番 研究 2	92
3.3.3 3 番 (2) 別解	94

3.4	2018 年	97
3.4.1	1 番 ベクトル積 (外積)	97
3.4.2	3 番 (2) 研究	98
3.5	2021 年	99
3.5.1	3 番 ガウス・グリーンの定理	99

第 1 章 一般前期問題

数学の試験時間は 120 分で、数学 I・II・III・A・B の範囲から 4 題出題され問題冊子 (A4 で 4 ページ) は、見開きで ①, ② が偶数ページ, ③, ④ が奇数ページに配置されている。解答用紙は、① ~ ④ の番号が書かれた A3 用紙 (4 枚) と白紙 (計算用紙) がはさみ込まれている。なお、解答用紙以外は持ち帰ることができる。

過去 10 年間の出題傾向をみると、数学 III の微積分の出題率が高く、2022 年以外は毎年出題されている。数学 B の「ベクトル」からの出題も多く、過去 10 年間のうち 4 回が「空間のベクトル」で、2 回が「平面のベクトル」となっている。また過去 10 年間で「複素数平面」の分野から 5 回出題されていることにも注意したい。

出題分野は限られており、奇抜な出題もない。どの問題もよく目にするオーソドックスな難問ばかりである。典型的な発展問題を中心に学習を重ねていくことが大切ようだ。

出題分野

2015 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	微分法	$\triangle ABC$ の成立条件, $\cos C$ の値の範囲
2	標準	数学 B	空間のベクトル	一直線上の 3 点, 垂直条件
3	標準	数学 B	数列	数列の図形への応用
4	標準	数学 B	数列	漸化式を導き一般項を求める
		数学 III	極限	数列の極限
		数学 III	積分法	定積分の計算

2016 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの正四面体への応用
2	標準	数学 III	微分法の応用	最大値
		数学 III	積分法の応用	面積, y 軸の周りの回転体の体積
3	標準	数学 III	複素数平面	極形式, ド・モアブルの定理
4	標準	数学 III	微分法の応用	面積の最小値
		数学 III	積分法の応用	3 次関数のグラフと x 軸で囲まれた面積

2017 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 II	三角関数	三角形の面積の最小値
2	標準	数学 III	複素数平面	正三角形の条件, 2 直線のなす角
3	標準	数学 III	微分法の応用	曲線と直線の共有点
		数学 III	積分法の応用	曲線と直線で囲まれた部分の面積
4	やや難	数学 III	極限	分数の和の最大, 極限值

2018 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	四面体の体積
2	やや難	数学 A	確率	サイコロを移動させる確率
3	標準	数学 III	複素数平面	双曲線の偏角
4	標準	数学 III	積分法	定積分で表された関数の最大・最小

2019 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	積分法の応用	回転体の体積
2	標準	数学 II	図形と方程式	軌跡の方程式
3	標準	数学 III	積分法の応用	面積
4	標準	数学 A	場合の数と確率	球を取り出す確率

2020 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	積分法の応用	媒介変数による曲線, 面積
2	標準	数学 III	複素平面	三角形の面積
3	標準	数学 A	整数の性質	合同式
4	やや難	数学 III	積分法の応用	区分求積法

2021 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	やや難	数学 B	空間のベクトル	位置ベクトル
2	標準	数学 III	複素平面	図形への応用
3	標準	数学 III	積分法の応用	回転体の体積
4	やや難	数学 III	積分法	はさみうちの原理

2022 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	やや易	数学 B	空間のベクトル	位置ベクトル
2	標準	数学 III	極限	定積分で定義された数列の極限
3	標準	数学 B	数列	定点から正弦曲線に引いた接点の点列
4	やや難	数学 II	式と証明	$mn + 2 = {}_{m+n}C_m$ を満たす整数 (m, n)

2023 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	やや易	数学 A	場合の数と確率	確率漸化式
2	標準	数学 B	平面上のベクトル	基本ベクトル
3	標準	数学 III	微分法の応用	最大値・最小値
		数学 III	積分法の応用	図形の面積
4	標準	数学 B	平面上のベクトル	図形への応用

2024 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 A	場合の数と確率	反復試行の確率
		数学 III	積分法	ベータ関数
2	標準	数学 II	三角関数	3 倍角の図形への応用
3	やや難	数学 III	積分法	最大値・最小値
4	難	数学 A	整数の性質	ユークリッドの互除法とその応用

1.1 2015 年度

1 $\triangle ABC$ の 3 辺の長さを $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ とし, 条件

$$a + b + c = 1, \quad 9ab = 1$$

が成り立つとする. 以下の問いに答えよ。

- (1) a の値の範囲を求めよ。
- (2) $\theta = \angle C$ とするとき, $\cos \theta$ の値の範囲を求めよ。

2 p, q, r を実数とする。空間内の 3 点 $A(1, p, 0)$, $B(q, 1, 1)$, $C(-1, -1, r)$ が一直線上にあるとき, 以下の問いに答えよ。ただし, O を原点とする。 研

- (1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。
- (2) q, r を p を用いて表せ。
- (3) p', q', r' を実数とし, 空間内の 3 点を $A'(1, p', 0)$, $B'(q', 1, 1)$, $C'(-1, -1, r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるとき, p', q', r' を p を用いて表せ。
- (4) (3) における 3 点 A', B', C' は一直線上にないことを示せ。

- 3 a と b を正の実数とする。△ABC において、 $\angle B$ と $\angle C$ は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_1 とし、線分 AX_1 の長さを 1 とする。また、 $BX_1 = a$, $CX_1 = b$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き、辺 AB との交点を Y_n とする。また、点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き、辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $Z_n X_{n+1}$ の長さを l_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) l_1 を a , b を用いて表せ。
 - (2) l_{n+1} を l_n , a , b を用いて表せ。
 - (3) $b = 8a$ のとき、 $l_n > \frac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば、 $3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい。
- 4 r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx} |\sin x| dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を r を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく。 $\lim_{r \rightarrow +0} rf(r)$ を求めよ。

1.2 2016 年度

- 1** $\triangle ABC$ と、 A を通り BC に平行な直線 l を考える。 k を正の数とし、直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{BC}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を、線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおき、また m を $\overrightarrow{AQ} = m\overrightarrow{AP}$ により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, k , m を用いて表せ。
- (2) $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$, $m = -1$ とする。 $\overrightarrow{BR}$ と $\overrightarrow{CR}$ が直交するとき、 k の値を求めよ。

- 2** $x \geq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

について、以下の問いに答えよ。

研

- (1) $x \geq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた x の値を a とする。曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$, $x = a$ で囲まれた図形を D とする。 D の面積を求めよ。
- (3) (2) の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

- 3 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して, $\alpha = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。ただし, i は虚数単位である。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\theta = \frac{\pi}{3}$ とするとき, z_n を極形式で表せ。
 - (2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ とするとき, $\sum_{k=1}^n |z_k| > 500$ となる最小の n を求めよ。
 - (3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。
- 4 a, b を実数とし, 曲線 $C: y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える。 C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき, 以下の問いに答えよ。
- (1) b を a を用いて表せ。
 - (2) C が x 軸の正の部分, 負の部分とそれぞれ1点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。
 - (3) a が (2) で求めた範囲にあるとき, C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め, そのときの a の値を求めよ。

1.3 2017 年度

- 1** 半径 1 の円に外接する $\triangle ABC$ について、 $\angle CAB = 2x$, $\angle ABC = 2y$, $\angle BCA = 2z$ とする。 $\triangle ABC$ の面積を S とするとき、以下の問いに答えよ。 [研]

(1) $S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2) $z = \frac{\pi}{6}$ のとき、 S の最小値とそのときの x, y を求めよ。

- 2** $s > 0, t > 0$ とする。複素数平面上の $\alpha = -i$, $\beta = 2 - 2i$, $\gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに、点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり、 $\triangle ACD$ が正三角形になるようにする。点 D を表す複素数を z とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) z を s, t を用いて表せ。

(2) α, β, γ が等式 $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ を満たすとき、 γ と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2) で求めた γ と z に対して、直線 AC と直線 BD の交点を F とし、 $\angle DFC = \theta$ とする。このとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

3 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ ($x > 0$) とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし、点 $P(t, f(t))$ ($t > 0$) における曲線 C の接線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 接線 ℓ と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。
- (2) (1) で求めた t の値を a とする。実数 k に対し、直線 $\ell_k: y = k(x-a) + f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。 研
- (3) (2) の直線 ℓ_k と曲線 C の共有点が2個のとき、それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\frac{1}{3}$ となるような k を求め、そのときの曲線 C と直線 ℓ_k で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 n は2以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ に対して、分数の和

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \dots + \frac{a_n}{a_{2n}} \quad \dots (*)$$

を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して $(*)$ がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) S_2 を求めよ。
- (2) S_n を与える順列 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ の例を1つ挙げ、その理由を述べよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log n}$ を求めよ。

1.4 2018 年度

1 t を実数とする。空間の 4 点 $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$, $D(1, 6, 1)$ について、以下の問いに答えよ。 研

- (1) $\triangle ABC$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。
- (2) A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。
- (3) $\angle BAC$ が直角のとき、四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

2 m, n を整数とする。 xy 平面上の 4 点 (m, n) , $(m-1, n)$, $(m-1, n-1)$, $(m, n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し、裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし、さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

- (1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ。
- (2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で、硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。
- (3) 硬貨を 5 回投げたとき、初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。

3 複素数平面上で $|z+i| - |z-i| = 1$ をみたす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし、複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) H の点 z に対して、 z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) H の点 z に対して $w = \frac{1}{z}$ とする。 w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。 研

4 関数 $f(x) = \sqrt{3x^2 + x^3}$ ($x \geq -3$) について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極大値を求めよ。

(2) $-3 \leq x \leq 0$ とするとき、 $F(x) = \int_x^{x+3} f(t) dt$ の最大値と最小値を求めよ。

1.5 2019 年度

1 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2 : y = x^3 + 1$ を考える。
以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし、 $a \neq 0$ とする。
- (2) (1) で求めた a に対し、曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

2 座標平面上の直線 ℓ を $y = ax - a - 2$ 、直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 ℓ と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし、 a, b は ℓ と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 ℓ と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。
- (2) 点 $A(1, -2)$ 、点 $B(-3, 0)$ に対して、線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。
- (3) $\triangle APB$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

- 3 座標平面上の曲線 $y = x \sin 3x + 3x^2$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とし、その接点の x 座標を a とする。ただし、 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

- 4 赤球と白球の2色の球を用いて行うゲームがあり、手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき、確率 p^2 でゲームに勝つものとする。 n を2以上の整数とし、赤球、白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

- (1) k を0以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\frac{({}_nC_k)^2}{{}_n C_n}$ となることを示せ。
- (2) k を1以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり、さらにゲームに勝つ確率は $\frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{({}_{n-1}C_{k-1})^2}{{}_{2n-2}C_{n-1}}$ であることを示せ。
- (3) ゲームに勝つ確率は $\frac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

1.6 2020 年度

1 xy 平面上において, 媒介変数 t $\left(0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi\right)$ によって

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = 1 - \cos 3t \end{cases}$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) C 上の点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。
- (3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 α, β を複素数とし, 複素数平面上の点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(|\alpha|^2)$, $D(\bar{\alpha}\beta)$ を考える。3 点 O, A, B は三角形をなすとする。また, 複素数 z に対し, $\text{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき, $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積 S_1 は $\frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。
- (3) 実数 a, b に対し, 複素数 z を $z = a + bi$ で定める。 $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ のとき, 3 点 $O(0)$, $P(z)$, $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

- (1) x が自然数のとき, x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。
- (2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

4 xy 平面において, x, y がともに整数であるとき, 点 (x, y) を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し,

$$0 < x < n, \quad 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 (x, y) の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

を示せ。

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2) で求めた極限値を L とする。不等式

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$

を示せ。

1.7 2021 年度

- 1 空間の点 O を通らない平面 α をとる。 α 上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。 k を 1 より大きい定数とする。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{k}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{tk}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

と表せるとする。 ℓ 上を点 X が動くとき、2 点 O, X を通る直線と平面 α の交点 Y の軌跡を m とする。

- (1) $\triangle ABC$ の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また、交点がある場合、各交点 Z について、 $\overrightarrow{OZ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。
- (2) A, B の中点を D とする。 ℓ を含み α に平行な平面を β とし、 O, D を通る直線と平面 β の交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし、その交点を F とする。このとき、 $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および k を用いて表せ。

- 2 複素数 w は実部、虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α, β, γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$$

を満たすとする。 α, β, γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。

- (1) $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) のとりうる範囲を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ が正三角形であるときの w の値を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ が正三角形であるとする。 $w = \alpha$ かつ $\triangle ABC$ の重心が点 $\frac{w^2}{2}$ であるとき、 β と γ の値を求めよ。

3 媒介変数 t を用いて表された曲線

研

$$C: x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

を考える。

- (1) 点 M の座標を $(0, 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して、 MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。
- (2) (1) の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。 Q における C の接線を ℓ とするとき、曲線 C と接線 ℓ および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。
- (3) (2) の D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

- (1) n を正の整数とするとき、定積分 $\int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。
- (2) c を正の数とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。

1.8 2022 年度

1 a を実数とし、座標空間の点 $P_1(a, 0, 0)$, $P_2(a+1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 3)$ を考える。 G_1 , G_2 をそれぞれ $\triangle P_1QR$, $\triangle P_2QR$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

- (1) P_1 , P_2 を通る直線と、 G_1 , G_2 を通る直線は平行であることを示せ。
- (2) 四角形 $P_1P_2G_2G_1$ の面積を求めよ。
- (3) 四角形 $P_1P_2G_2G_1$ を底面とする四角錐 $Q-P_1P_2G_2G_1$ の体積を求めよ。

2 関数 $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2}}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ において、 $f(x) \geq \sqrt{2}x$ となることを示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^1 \{f(x)\}^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0$ を用いてよい。

3 p を正の実数とする。曲線 $y = \sin x$ ($x > 0$) の接線で点 $(-p, 0)$ を通るものをすべて考え、それらの接点の x 座標を小さい方から順に $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\tan a_n = a_n + p$ が成り立つことを示せ。
- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $a_{n+1} - a_n > \pi$ が成り立つことを示せ。
- (3) $a_1 = \frac{\pi}{3}$ のとき、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\tan a_{n+1} > n\pi + \sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。

4 以下の問いに答えよ。

- (1) $m \leq n$ であって、 $mn + 2 = {}_{m+n}C_m$ を満たす正の整数の組 (m, n) を1つ求めよ。
- (2) $m \leq n$ であって、 $mn + 2 = {}_{m+n}C_m$ を満たす正の整数の組 (m, n) は、(1) で求めた組に限ることを示せ。

1.9 2023 年度

1 n を 3 以上の自然数とする. 1 個のさいころを n 回投げて, 出た目の数の積をとる. 積が 60 となる確率を p_n とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) p_3 を求めよ.
- (2) $n \geq 4$ のとき, p_n を求めよ.
- (3) $n \geq 4$ とする. 出た目の数の積が n 回目にはじめて 60 となる確率を求めよ.

2 原点を O とする座標平面上に 3 点 A, B, C がある. $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$ とおく. $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ とするとき, 3 つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ は

$$\begin{cases} \vec{u} = -\vec{e}_1, \\ \vec{v} \cdot \vec{e}_1 = 4, & |\vec{v}| = 2\sqrt{5}, & \vec{v} \cdot \vec{e}_2 < 0, \\ \vec{w} \cdot \vec{e}_1 = 8, & |\vec{w}| = 8\sqrt{2}, & \vec{w} \cdot \vec{e}_2 > 0 \end{cases}$$

を満たすとする. ただし, $|\vec{x}|$ はベクトル $\vec{x}$ の大きさを表し, $\vec{x} \cdot \vec{y}$ は 2 つのベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す. 以下の問いに答えよ.

- (1) 3 点 A, B, C の座標をそれぞれ求めよ.
- (2) 3 点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ.
- (3) 3 点 A, B, C を通る円の中心を P とするとき, $\triangle ABC$ の面積と $\triangle ABP$ の面積の比を求めよ.

3 xy 平面上に点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ をとり, θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする. 点 A は y 軸上の点で, y 座標が負であり, $AP = 2$ を満たす. 点 Q は $\overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{AP}$ を満たす点とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 Q の座標を θ を用いて表せ.
- (2) 点 Q の x 座標の最大値と最小値および y 座標の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.
- (3) 点 Q の軌跡と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

4 平面上の2つの円が直交するとは, 2つの円が2点で交わり, 各交点において2つの円の接線が互いに直交することである. 以下の問いに答えよ.

- (1) C_1, C_2 は半径がそれぞれ r_1, r_2 の円とする. C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とする. C_1 と C_2 が直交するための必要十分条件を d, r_1, r_2 の関係式で表せ.
- (2) p, r_1, r_2 は $p > r_1 + r_2, r_1 > 0, r_2 > 0$ を満たす実数とする. 座標平面上において, 原点 O を中心とする半径 r_1 の円を C_1 , 点 $(p, 0)$ を中心とする半径 r_2 の円を C_2 とする. C_1 と C_2 のいずれにも直交する円の中心の軌跡を求めよ.
- (3) 互いに外部にある3つの円の中心が一直線上にないとき, それら3つの円のいずれにも直交する円がただ1つ存在することを示せ.

1.10 2024 年度

- 1** n 個の袋 $A_1, A_2, \dots, A_n$ がある。 $A_k (1 \leq k \leq n)$ の中には白玉が k 個, 黒玉が $n - k$ 個入っている。次の (操作) を考える。

(操作)

- (操作 1) n 個の袋から無作為に 1 つの袋を選び, それを A とおく。
 (操作 2) 次の試行を s 回繰り返す。袋 A から無作為に玉を 1 個取り出し, 玉の色を調べてから取り出した玉を袋 A に戻す。

以下の問いに答えよ。

- (1) $s = 2$ とする。(操作) を行うとき, 白玉がちょうど 1 回取り出される確率を n を用いて表せ。
 - (2) $s = 100$ とする。(操作 1) を行った結果, $A = A_k$ であった。このとき, (操作 2) で白玉がちょうど t 回取り出される条件付き確率を $p(t)$ とする。 $n = 3k$ が成り立つとき, $p(t)$ を最大にする t の値を求めよ。
 - (3) $s = 10$ とする。(操作) を行うとき, 白玉がちょうど 3 回取り出される確率を q_n とする。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ。
- 2** $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ とする。 $AB = 1$, $\angle BAC = 3\theta$ である $\triangle ABC$ について, 辺 BC の中点を D としたとき, $\angle BAD = 2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。
- (1) $AC = 2 \cos \theta$ であることを示せ。
 - (2) BC を $\cos \theta$ を用いて表せ。
 - (3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

3 k を実数とし, $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1 + k$ とおく。曲線 $y = f(x)$ $\left(0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C と x 軸の共有点の個数が k の値によってどのように変わるか調べよ。
- (2) 曲線 C と x 軸の共有点が2個以上あるような k に対し, $g(k)$ を

$$g(k) = \int_{p_1}^{p_2} f(x) \sin x \, dx$$

と定める。ただし, p_1, p_2 はそれぞれ, 曲線 C と x 軸の共有点の x 座標のうち1番小さいもの, 2番目に小さいものとする。 $g(k)$ の最大値と最小値を求めよ。

4 m を自然数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $k^2 - \ell^2 = 3^m$ を満たす自然数の組 (k, ℓ) の個数を m を用いて表せ。
- (2) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x で3の倍数でないものを m を用いて表せ。
- (3) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x の個数を m を用いて表せ。

第 2 章 一般前期解答

熊大入試の特徴として，計算力を要求する問題が目立つ．特に「微分法と積分法」の分野の問題には煩雑な計算に陥る受験生も少なくないと思われる．

受験参考書等に次の公式が紹介されていることもあり，2016 年 4 番に出題された y 軸の周りの回転体の体積を，理系学部受験者の半数近く，医学部医学科受験者の 7 割が同公式を利用して，簡潔に解答している．熊大は公式の使用に関しては寛容で，減点されないと聞く．

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき， $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$ ， $x = b$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

2018 年 1 番の空間ベクトルの問題を受験生の中には大学で学ぶ外積 (ベクトル積) を使用して簡単に解答した受験もいたが，間違いではないということで減点はされなかったそうである．

2.1 2015年度

1 (1) 三角形の成立条件により

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b$$

$a + b + c = 1$ より, $c = 1 - a - b$ を上の3式に代入すると

$$a + b > 1 - a - b, \quad b + (1 - a - b) > a, \quad (1 - a - b) + a > b$$

$$\text{したがって} \quad a + b > \frac{1}{2}, \quad a < \frac{1}{2}, \quad b < \frac{1}{2}$$

$9ab = 1$ より, $b = \frac{1}{9a}$ であるから

$$a + \frac{1}{9a} > \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}, \quad a < \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}, \quad \frac{1}{9a} < \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

ここで, $a > 0$ であるから, 相加・相乗平均の関係により

$$a + \frac{1}{9a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{9a}} = \frac{2}{3}$$

ゆえに, $a > 0$ について, $\textcircled{1}$ は成立する.

$$\textcircled{3} \text{ を解くと } a > \frac{2}{9} \quad \text{よって, これと } \textcircled{2} \text{ から } \quad \frac{2}{9} < a < \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ 余弦定理により } \quad \cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$c = 1 - a - b$, $ab = \frac{1}{9}$, $b = \frac{1}{9a}$ であるから

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a^2 + b^2 - (1 - a - b)^2}{2ab} = \frac{2a + 2b - 2ab - 1}{2ab} \\ &= \frac{2a + 2b - 2 \cdot \frac{1}{9} - 1}{2 \cdot \frac{1}{9}} = 9(a + b) - \frac{11}{2} \\ &= 9 \left(a + \frac{1}{9a} \right) - \frac{11}{2} = 9a + \frac{1}{a} - \frac{11}{2} \end{aligned}$$

ここで, $f(a) = 9a + \frac{1}{a} - \frac{11}{2}$ $\left(\frac{2}{9} < a < \frac{1}{2} \right)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(a) &= 9 - \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{(3a + 1)(3a - 1)}{a^2} \end{aligned}$$

a	$\left(\frac{2}{9}\right)$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	(1)	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	(1)

$$\text{よって} \quad \frac{1}{2} \leq \cos \theta < 1$$



- 2** (1) $A(1, p, 0)$, $B(q, 1, 1)$, $C(-1, -1, r)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (q-1, 1-p, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1-p, r)$$

$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$ であるから, これらの z 成分に注目すると

$$\overrightarrow{AC} = r\overrightarrow{AB} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -2 = r(q-1) & \cdots \textcircled{1} \\ -1-p = r(1-p) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } r \neq 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$p = 1$ は, $\textcircled{2}$ を満たさない.

$p = -1$ を $\textcircled{2}$ に代入すると, $r = 0$ となり, $\textcircled{3}$ に反する.

よって $p \neq \pm 1$

- (2) $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$ であるから, これらの x 成分, y 成分により

$$(q-1)(-1-p) - (1-p) \cdot (-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q = \frac{3-p}{p+1}$$

$\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{BC}$ であるから, これらの y 成分, z 成分により

$$(p-1)(r-1) - (-1)(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{p+1}{p-1}$$

- (3) (2) の結果より, $A(1, p, 0)$, $B\left(\frac{3-p}{p+1}, 1, 1\right)$ であるから

$$(p+1)\overrightarrow{AB} = (2-2p, 1-p^2, 1+p)$$

$\overrightarrow{OA'} = (1, p', 0)$ は $\overrightarrow{AB}$ と垂直なので

$$2-2p+p'(1-p^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p' = -\frac{2}{p+1}$$

$\overrightarrow{OB'} = (q', 1, 1)$ は $\overrightarrow{AB}$ と垂直なので

$$q'(2-2p) + 1-p^2 + 1+p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}$$

$\overrightarrow{OC'} = (-1, -1', r')$ は $\overrightarrow{AB}$ と垂直なので

$$-(2-2p) - (1-p^2) + r'(1+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{ (3) の結果から } & A' \left(1, -\frac{2}{p+1}, 0 \right), \\
 & B' \left(-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}, 1, 1 \right), \\
 & C' \left(-1, -1, -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{A'B'} = \left(\frac{-p^2 - p + 4}{2(p-1)}, \frac{p+3}{p+1}, 1 \right)$$

$$\overrightarrow{A'C'} = \left(-2, \frac{-p+1}{p+1}, -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1} \right)$$

$\overrightarrow{A'B'} // \overrightarrow{A'C'}$ であるとき, これらの x 成分, y 成分から

$$\frac{-p^2 - p + 4}{2(p-1)} \cdot \frac{-p+1}{p+1} - \frac{p+3}{p+1} \cdot (-2) = 0$$

$$\text{整理すると } p^2 + 5p + 8 = 0 \quad \cdots (*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -7 < 0$$

したがって, 方程式 $(*)$ は実数解をもたない.

よって, 3点 A' , B' , C' は一直線上にない. ■

- 3 (1) 座標平面上に点 $A(0, 1)$, $B(-a, 0)$, $C(b, 0)$, $X_n(x_n, 0)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をとる. 直線 AB の方程式は

$$y = \frac{1}{a}x + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

直線 AC の方程式は

$$y = -\frac{1}{b}x + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

直線 X_nY_n は点 $(x_n, 0)$ を通り, 傾き $-\frac{1}{b}$ の直線であるから

$$y = -\frac{1}{b}(x - x_n) \quad \dots \textcircled{3}$$

点 Y_n の y 座標 l_n は, ①, ③ を解いて $l_n = \frac{a + x_n}{a + b} \quad \dots \textcircled{4}$

このとき, $x_1 = 0$ であるから $l_1 = \frac{a}{a + b}$

- (2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから, その x 座標は, ② より

$$l_n = -\frac{x}{b} + 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = b(1 - l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから $x_{n+1} = b(1 - l_n)$

したがって, 上式および ④ から

$$l_{n+1} = \frac{a + x_{n+1}}{a + b} = \frac{a + b(1 - l_n)}{a + b} = -\frac{b}{a + b}l_n + 1$$

- (3) $b = 8a$ のとき, (1), (2) の結果から $l_{n+1} = -\frac{8}{9}l_n + 1$, $l_1 = \frac{1}{9}$

この漸化式から $l_n = \frac{9}{17} + \frac{8}{17} \left(-\frac{8}{9}\right)^n$

$$l_n > \frac{1}{2} \text{ のとき } \frac{9}{17} + \frac{8}{17} \left(-\frac{8}{9}\right)^n > \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \left(-\frac{8}{9}\right)^n > -\frac{1}{16}$$

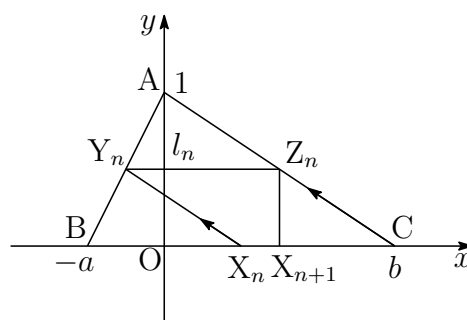
$$n \text{ は奇数であるから } (-1)^n \left(\frac{8}{9}\right)^n > -\frac{1}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{8}{9}\right)^n < \frac{1}{16}$$

したがって $n > \frac{4}{\log_2 9 - 3}$

このとき, $3.169 < \log_2 9 < 3.17$ より

$$23.5 \dots = \frac{4}{3.17 - 3} < \frac{4}{\log_2 9 - 3} < \frac{4}{3.169 - 3} = 23.6 \dots$$

よって, 求める最小の奇数 n は $n = 25$



$$\begin{aligned}
 \text{[4]} \quad (1) \quad a_{n+1} - a_n &= \int_0^{(n+1)\pi} e^{-rx} |\sin x| dx - \int_0^{n\pi} e^{-rx} |\sin x| dx \\
 &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-rx} |\sin x| dx
 \end{aligned}$$

$$t = x - n\pi \text{ とおくと } \frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{array}{c|c} x & n\pi \longrightarrow (n+1)\pi \\ \hline t & 0 \longrightarrow \pi \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \int_0^\pi e^{-r(n\pi+t)} |\sin(t+n\pi)| dt \\
 &= e^{-rn\pi} \int_0^\pi e^{-rt} \sin t dt = e^{-rn\pi} a_1 \\
 &= e^{-rn\pi} \left[-\frac{e^{-rt}}{r^2+1} (r \sin t + \cos t) \right]_0^\pi = \frac{e^{-r\pi} + 1}{r^2 + 1} e^{-nr\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad a_1 &= \int_0^\pi e^{-rx} |\sin x| dx = \int_0^\pi e^{-rx} \sin x dx \\
 &= -\frac{1}{r^2+1} \left[e^{-rx} (r \sin x + \cos x) \right]_0^\pi = \frac{e^{-r\pi} + 1}{r^2 + 1}
 \end{aligned}$$

上式および(1)の結果より, $a_{n+1} - a_n = e^{-n\pi} a_1$ であるから, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) &= a_1 \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rk\pi} \\
 a_n &= a_1 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-rk\pi} = a_1 \times \frac{1 - e^{-rn\pi}}{1 - e^{-r\pi}} \\
 &= \frac{e^{-r\pi} + 1}{r^2 + 1} \times \frac{1 - e^{-rn\pi}}{1 - e^{-r\pi}} = \frac{(1 + e^{-r\pi})(1 - e^{-rn\pi})}{(1 + r^2)(1 - e^{-r\pi})}
 \end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから

$$a_n = \frac{(1 + e^{-r\pi})(1 - e^{-rn\pi})}{(1 + r^2)(1 - e^{-r\pi})}$$

(3) $r > 0$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-rn\pi} = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + e^{-r\pi}}{(1 + r^2)(1 - e^{-r\pi})}$$

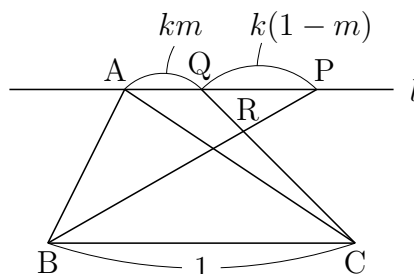
(4) $rf(r) = \frac{r(1 + e^{-r\pi})}{(1 + r^2)(1 - e^{-r\pi})} = \frac{1 + e^{-r\pi}}{(1 + r^2)\pi} \times \frac{-r\pi}{e^{-r\pi} - 1}$ であるから

$$\lim_{r \rightarrow +0} rf(r) = \frac{1+1}{\pi} \times 1 = \frac{2}{\pi}$$

■

2.2 2016 年度

- 1 (1) $BC : AP = 1 : k$, $AP : PQ = 1 : 1 - m$ より $BC : PQ = 1 : k(1 - m)$
 $\triangle RBC \sim \triangle RPQ$ より $BR : PR = 1 : k(1 - m)$



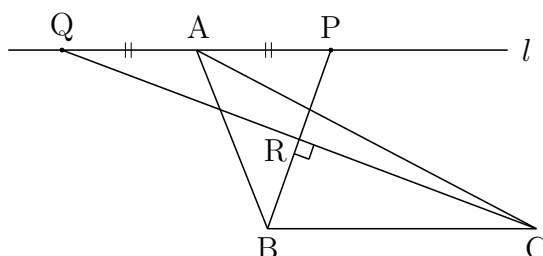
$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{BC} = k(\vec{c} - \vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{k(1-m)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}}{1 + k(1-m)} = \frac{k(1-m)\vec{b} + k(\vec{c} - \vec{b})}{1 + k(1-m)} = \frac{-km\vec{b} + k\vec{c}}{1 + k(1-m)}$$

- (2) $m = -1$ より, $\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AP} = -k(\vec{c} - \vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = k(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{b} = -(k+1)\vec{b} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC} = -k(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{c} = k\vec{b} - (k+1)\vec{c}$$



$\overrightarrow{BR} \perp \overrightarrow{CR}$ のとき, $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{CQ}$ より $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = 0$ であるから

$$\{-(k+1)\vec{b} + k\vec{c}\} \cdot \{k\vec{b} - (k+1)\vec{c}\} = 0$$

$$-k(k+1)|\vec{b}|^2 + \{k^2 + (k+1)^2\}\vec{b} \cdot \vec{c} - k(k+1)|\vec{c}|^2 = 0$$

$|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos \angle BAC = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ であるから

$$-k(k+1) \cdot 1^2 + \{k^2 + (k+1)^2\} \cdot \frac{3}{2} - k(k+1) \cdot 2^2 = 0$$

整理すると $4k^2 + 4k - 3 = 0$ ゆえに $(2k-1)(2k+3) = 0$

$k > 0$ であるから $k = \frac{1}{2}$

■

2 (1) $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ を微分すると

研

$$f'(x) = (\log x)' \frac{1}{x^2} + \log x \left(\frac{1}{x^2} \right)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + \log x \left(-\frac{2}{x^3} \right) = \frac{1 - 2 \log x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \sqrt{e}$$

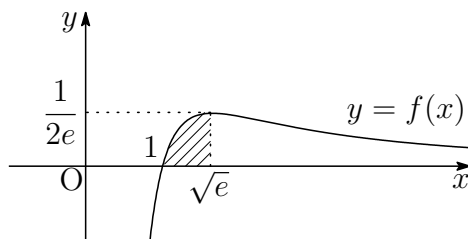
$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ ($x \geq 1$) の増減表は、次のようになる。

x	1	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	↗	極大	↘

よって、求める最大値は $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

(2) 求める面積を S とすると、(1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2} dx = - \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x} \right)' \log x dx \\ &= - \left[\frac{1}{x} \log x \right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= - \left[\frac{1}{x} (\log x + 1) \right]_1^{\sqrt{e}} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$



(3) 求める立体の体積を V とすると

$$V = 2\pi \int_1^{\sqrt{e}} x \cdot \frac{\log x}{x^2} dx = 2\pi \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)(\log x)' dx = \pi \left[(\log x)^2 \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{\pi}{4}$$

—— バウムクーヘン型求積法 ——

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

■

3 (1) $\alpha = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ より

$$\begin{aligned} z_n &= \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \{2(\cos \theta + i \sin \theta)\}^n - 2\{2(\cos \theta + i \sin \theta)\}^{n-1} \\ &= 2^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) - 2^n\{\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta\} \\ &= 2^n\{\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\} + 2^n i\{\sin n\theta - \sin(n-1)\theta\} \\ &= -2^{n+1} \sin \frac{2n-1}{2} \theta \sin \frac{\theta}{2} + 2^{n+1} i \cos \frac{2n-1}{2} \theta \sin \frac{\theta}{2} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} z_n &= -2^{n+1} \sin \frac{2n-1}{6} \pi \sin \frac{\pi}{6} + 2^{n+1} i \cos \frac{2n-1}{6} \pi \sin \frac{\pi}{6} \\ &= -2^n \sin \left(\frac{n+1}{3} \pi - \frac{\pi}{2} \right) + 2^n i \cos \left(\frac{n+1}{3} \pi - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2^n \left(\cos \frac{n+1}{3} \pi + i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right) \end{aligned}$$

補足 $z_n = -2^n \sin \frac{2n-1}{6} \pi + 2^n i \cos \frac{2n-1}{6} \pi = 2^n i \left(\cos \frac{2n-1}{6} \pi + i \sin \frac{2n-1}{6} \pi \right)$

$$\begin{aligned} &= 2^n \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \left(\cos \frac{2n-1}{6} \pi + i \sin \frac{2n-1}{6} \pi \right) \\ &= 2^n \left(\cos \frac{n+1}{3} \pi + i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right) \end{aligned}$$

別解 $z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha - 2) \quad \cdots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \alpha - 2 &= 2(\cos \theta + i \sin \theta) - 2 = 2(\cos \theta - 1 + i \sin \theta) \\ &= 4 \left(-\sin^2 \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) = 4i \sin \frac{\theta}{2} \left(i \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta + \pi}{2} + i \sin \frac{\theta + \pi}{2} \right) \end{aligned}$$

上式および $\textcircled{1}$ から

$$\begin{aligned} z_n &= 2^{n-1} \{\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta\} \cdot 4 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta + \pi}{2} + i \sin \frac{\theta + \pi}{2} \right) \\ &= 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{(2n-1)\theta + \pi}{2} + i \sin \frac{(2n-1)\theta + \pi}{2} \right) \end{aligned}$$

これに $\theta = \frac{\pi}{3}$ を代入すると $z_n = 2^n \left(\cos \frac{n+1}{3} \pi + i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right)$

(2) (1)の結果より, $|z_k| = 2^k$ であるから

$$\sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{k=1}^n 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$$

$$\sum_{k=1}^n |z_k| > 500 \text{ のとき } 2(2^n - 1) > 500 \text{ ゆえに } 2^n > 251$$

これを満たす最小の整数 n は **8**

(3) (*) より $z_{1000} = -2^{1001} \sin \frac{1999}{2} \theta \sin \frac{\theta}{2} + 2^{1001} i \cos \frac{1999}{2} \theta \sin \frac{\theta}{2}$
 z_{1000} が実数であるとき, 自然数 j を用いて

$$\frac{1999}{2} \theta = \frac{2j-1}{2} \pi \text{ ゆえに } \theta = \frac{2j-1}{1999} \pi$$

このとき, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから $1 \leq j \leq 500$

よって, 求める θ の個数は **500** (個) ■

4 (1) $y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を微分すると

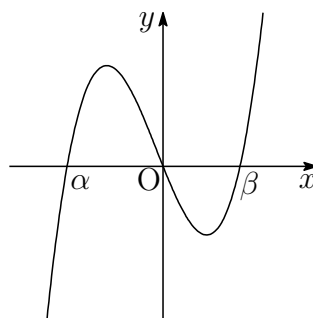
$$y' = 3x^2 - 6ax + b = 3(x-a)^2 - 3a^2 + b$$

y' の最小値が -3 であるから

$$-3a^2 + b = -3 \text{ よって } \mathbf{b = 3a^2 - 3}$$

(2) $y = x(x^2 - 3ax + b)$ より, このグラフの x 軸の負の部分, 正の部分で交わる点の x 座標をそれぞれ α, β とすると ($\alpha < 0 < \beta$), α, β は 2 次方程式 $x^2 - 3ax + b = 0$ の解であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 3a, \quad \alpha\beta = b \quad \cdots (*)$$



このとき, $b < 0$ であるから, (1)の結果から

$$3a^2 - 3 < 0 \text{ よって } \mathbf{-1 < a < 1}$$

(3) (*) から, $y = x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x$. 図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^0 \{x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x\} dx - \int_0^{\beta} \{x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha + \beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2 \right]_{\alpha}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha + \beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2 \right]_0^{\beta} \\ &= \frac{1}{12}(\alpha^4 + \beta^4) - \frac{1}{6}\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

ここで、(1)の結果および(*)に注意して

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= b = 3a^2 - 3 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (3a)^2 - 2(3a^2 - 3) = 3a^2 + 6 \\ \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 \\ &= (3a^2 + 6)^2 - 2(3a^2 - 3)^2 = -9a^4 + 72a^2 + 18\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{12}(-9a^4 + 72a^2 + 18) - \frac{1}{6}(3a^2 - 3)(3a^2 + 6) \\ &= -\frac{9}{4}a^4 + \frac{9}{2}a^2 + \frac{9}{2} \\ \frac{dS}{da} &= -9a^3 + 9a = -9a(a+1)(a-1)\end{aligned}$$

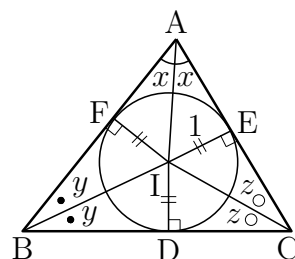
S の増減表は次のようになる.

a	-1	...	0	...	1
$\frac{dS}{da}$		-	0	+	
S		$\searrow$	極小 $\frac{9}{2}$	$\nearrow$	

$a = 0$ のとき, S は最小値 $\frac{9}{2}$ をとる. ■

2.3 2017年度

- 1 (1) 右の図のように $\triangle ABC$ の内心を I とし、この内接円と3辺 BC , CA , AB との接点をそれぞれ D , E , F とする. $\triangle AEI$ について 研



$$\tan x = \frac{EI}{AE} \quad \text{ゆえに} \quad AE = \frac{1}{\tan x}$$

$AE = AF$ であるから

$$\triangle AEI = \triangle AFI = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot 1 = \frac{1}{2 \tan x}$$

$$\text{同様に} \quad \triangle BDI = \triangle BFI = \frac{1}{2 \tan y}, \quad \triangle CDI = \triangle CEI = \frac{1}{2 \tan z}$$

S はこれらの三角形の面積の和であるから

$$S = 2 \left(\frac{1}{2 \tan x} + \frac{1}{2 \tan y} + \frac{1}{2 \tan z} \right) = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

- (2) $2x + 2y + 2z = \pi$ より, $z = \frac{\pi}{6}$ のとき, $x + y = \frac{\pi}{3} \cdots \textcircled{1}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} + \sqrt{3} \\ &= \frac{\cos x \sin y + \sin x \cos y}{\sin x \sin y} + \sqrt{3} = \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)} + \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\cos(x-y) - \frac{1}{2}} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

- $\textcircled{1}$ より, $0 < x, y < \frac{\pi}{3}$ であるから

$$S \text{ は } x = y = \frac{\pi}{6} \text{ のとき, 最小値 } 3\sqrt{3}$$



- 2 (1) 点 D は直線 AC に関して点 B と反対側にあり, $\triangle ACD$ が正三角形であるから

$$\begin{aligned} z &= \alpha + \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (\gamma - \alpha) = -i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \{s + (t+1)i\} \\ &= \frac{s - \sqrt{3}(t+1)}{2} + \frac{\sqrt{3}s + t - 1}{2}i \end{aligned}$$

- (2) $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ より

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^2 - 2 \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) + 4 = 0$$

2 点 A, B の位置関係に注意してこれを解くと

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \text{ とおくと, } \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 2w, \quad \frac{z - \alpha}{\gamma - \alpha} = w \text{ より}$$

$$\gamma - \alpha = 2w(\beta - \alpha) = (1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = 2 + \sqrt{3} + (-1 + 2\sqrt{3})i$$

$$z - \alpha = 2w^2(\beta - \alpha) = (-1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = -2 + \sqrt{3} + (1 + 2\sqrt{3})i$$

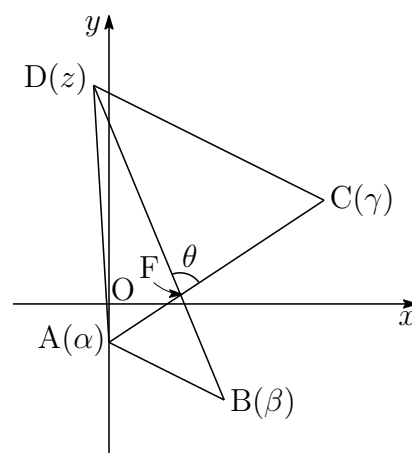
$$\begin{aligned} \alpha &= -i \text{ より} & \gamma &= 2 + \sqrt{3} + (-1 + 2\sqrt{3})i \\ & & z &= -2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{z - \beta}{\gamma - \alpha} &= \frac{z - \alpha - (\beta - \alpha)}{\gamma - \alpha} \\ &= \frac{2w^2(\beta - \alpha) - (\beta - \alpha)}{2w(\beta - \alpha)} \\ &= \frac{2w^2 - 1}{2w} = \frac{1}{2} \left(2w - \frac{1}{w} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

上の図から, $\theta = \arg \frac{z - \beta}{\gamma - \alpha}$ であるから

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$



3 (1) $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$ より

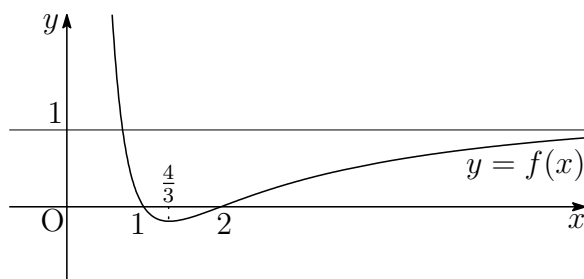
$$f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \frac{3x-4}{x^3},$$

$$f''(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{12}{x^4} = -\frac{6(x-2)}{x^4},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$f(x)$ の増減表 ($x > 0$) および $y = f(x)$ のグラフは、次のようになる.

x	(0)	...	$\frac{4}{3}$	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+	+	+
$f''(x)$		+	+	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	極小 $-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	変曲点 0	$\nearrow$



曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ ($t > 0$) における接線 ℓ が点 P 以外に共有点をもたない t の値は

$$0 < t \leq \frac{4}{3}, \quad t = 2$$

よって、求める t の最大値は $t = 2$

(2) (1) の結果から、変曲点 $(2, 0)$ における接線の傾きは $f'(2) = \frac{1}{4}$ 研

直線 $l_k: y = k(x-2)$ と曲線 C の共有点の個数は、(1) のグラフから

$k \leq 0$ のとき 2 個

$0 < k < \frac{1}{4}$ のとき 3 個

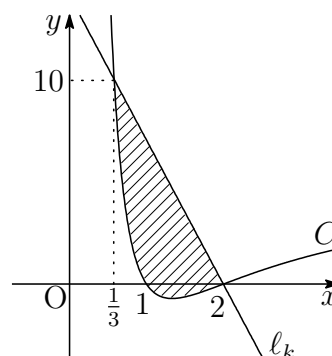
$\frac{1}{4} \leq k$ のとき 1 個

$$(3) f\left(\frac{1}{3}\right) = 10$$

k は 2 点 $\left(\frac{1}{3}, 10\right), (2, 0)$ を結ぶ直線の傾きであるから

$$k = \frac{0 - 10}{2 - \frac{1}{3}} = -6$$

求める面積は、右の図の斜線部分で、その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{3}}^2 \left\{ -6(x-2) - \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \right\} dx \\ &= \left[-3(x-2)^2 - x + 3 \log x + \frac{2}{x} \right]_{\frac{1}{3}}^2 = \frac{5}{3} + 3 \log 6 \end{aligned}$$

■

4 (1) S_2 は分母が 1 と 2 の組合せについて調べればよいので

$$\frac{4}{1} + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}, \quad \frac{3}{1} + \frac{4}{2} = 5 \quad \text{よって} \quad S_2 = \frac{11}{2}$$

(2) 1 から $2n$ までの自然数を分母と分子にもつ分数で最大のものは $\frac{2n}{1}$
 2 から $2n-1$ までの自然数を分母と分子にもつ分数で最大のものは $\frac{2n-1}{2}$
 順次この法則によりできる分数の和

$$\frac{2n}{1} + \frac{2n-1}{2} + \cdots + \frac{n+1}{n}$$

が S_n である．この法則に従わない部分

$$\frac{c}{a} + \frac{d}{b} \quad (a < b < c < d)$$

をもつ S_n が存在すると仮定すると

$$\left(\frac{d}{a} + \frac{c}{b}\right) - \left(\frac{c}{a} + \frac{d}{b}\right) = \frac{(b-a)(d-c)}{ab} > 0$$

すなわち $\frac{c}{a} + \frac{d}{b} < \frac{d}{a} + \frac{c}{b}$

これは、 S_n であることに反する．よって

$$S_n = \frac{2n}{1} + \frac{2n-1}{2} + \cdots + \frac{n+1}{n}$$

となり、求める順列の例の1つは

$$\begin{aligned} a_1 &= 2n, a_2 = 2n-1, \dots, a_n = n+1, \\ a_{n+1} &= 1, a_{n+2} = 2, \dots, a_{2n} = n \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から、 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2n+1-k}{k}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n \log n} &= \frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^n \frac{2n+1-k}{k} \\ &= \frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2n+1}{k} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\log n} \left(-1 + \frac{2n+1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、自然数 k について、 $\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$ であるから

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) > \log n$$

次に、2以上の自然数 k について、 $\frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$ であるから

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x} = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n + 1$$

上の2式から $\log n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \log n + 1 \quad \dots \textcircled{2}$

①, ② から

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log n} \left(-1 + \frac{2n+1}{n} \log n \right) &< \frac{S_n}{n \log n} < \frac{1}{\log n} \left\{ -1 + \frac{2n+1}{n} (\log n + 1) \right\} \\ -\frac{1}{\log n} + 2 + \frac{1}{n} &< \frac{S_n}{n \log n} < -\frac{1}{\log n} + \left(2 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{\log n} \right) \end{aligned}$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log n} = 2$$

補足 ② はオイラーの定数 γ に関係している.

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \doteq 0.5772156649 \dots$$

は無理数であるかどうかさえ分かっていない. ■

2.4 2018 年度

- 1** (1) $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$ より

研

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (3, -3, 0), & \overrightarrow{AC} &= (t-1, 2t-5, t-1), \\ \overrightarrow{BC} &= (t-4, 2t-2, t-1)\end{aligned}$$

- (i) $\angle BAC = 90^\circ$ のとき, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ であるから

$$3(t-1) - 3(2t-5) + 0(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 4$$

- (ii) $\angle ABC = 90^\circ$ のとき, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ であるから

$$3(t-4) - 3(2t-2) + 0(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -2$$

- (iii) $\angle ACB = 90^\circ$ のとき, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ であるから

$$(t-1)(t-4) + (2t-5)(2t-2) + (t-1)^2 = 0$$

$$\text{整理すると} \quad 2t^2 - 7t + 5 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 1, \frac{5}{2}$$

$$(i) \sim (iii) \text{ から} \quad t = 4, -2, 1, \frac{5}{2}$$

- (2) $\vec{b} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ とおくと $\vec{b} = (1, -1, 0)$, $\vec{d} = (0, 1, 1)$

A, B, C, D が同一平面上にあるとき, 定数 x, y を用いて

$$\overrightarrow{AC} = x\vec{b} + y\vec{d}$$

$$\begin{aligned}\text{ゆえに} \quad (t-1, 2t-5, t-1) &= x(1, -1, 0) + y(0, 1, 1) \\ &= (x, -x+y, y)\end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad (*) \quad \begin{cases} t-1 = x \\ 2t-5 = -x+y \\ t-1 = y \end{cases}$$

(*) の第 1, 第 3 式から $x = y$ これを第 2 式に代入すると

$$2t-5 = 0 \quad \text{よって} \quad t = \frac{5}{2}$$

別解 $\vec{b}, \vec{d}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ であるから, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ より

$$1(t-1) + 1(2t-5) - 1(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{5}{2}$$

- (3) (1)(i) より, $t = 4$ であるから $C(4, 8, 3)$ ゆえに $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$
 $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$ と $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$$

とおく. $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 1)$ であるから, D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h とすると

$$h = |\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって, 求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot h &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| h \\ &= \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

補足 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき, ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は, $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する. このベクトルを, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積と言い, $\vec{a} \times \vec{b}$ で表す. 本題において, $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$ より

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-9, -9, 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$$

であるから, $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 1)$ より

$$V = \frac{1}{6} |9| = \frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが, ベクトル積 (外積) を使って解答した受験生もいたが, 減点されることはなかった. 熊大は公式の利用に関しては寛容である.



- 2 (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}C_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}C_i}{2^{i+j}} \quad \cdots (*)$$

である (i, j は 0 以上の整数).

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから, $(*)$ に $i = 2, j = 3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5C_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

- (2) 事象 A, B を, 次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある.

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある.

$P(A)$ は, $R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから, $(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2C_2}{2^2} + \frac{{}_2C_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A \cap B)$ は, $R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通過して, $R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

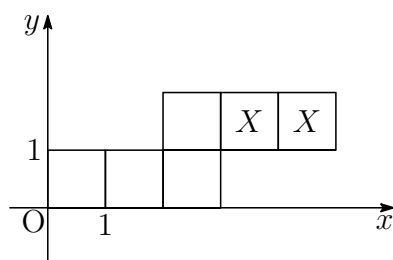
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2C_2}{2^2} \cdot \frac{{}_3C_0}{2^3} + \frac{{}_2C_0}{2^2} \cdot \frac{{}_3C_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって, 求める条件付き確率は

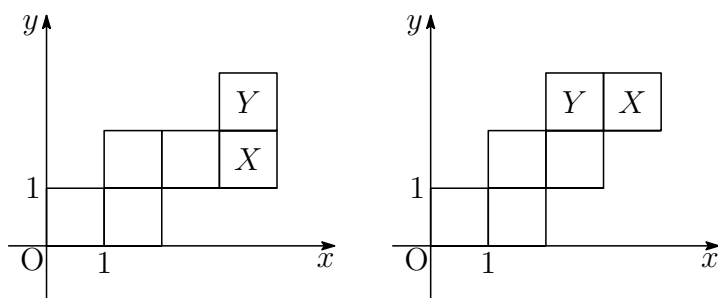
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

- (3) 1枚の硬貨を投げて表、裏が出る事象をそれぞれ X , Y とする. 5回目の移動までにさいころの6通りの目がすべて出るには, 最初の3回目までに X と Y が少なくとも1回ずつ起こる. 最初の3回で1回目が X であるのは, 次の (i)~(iii) である.

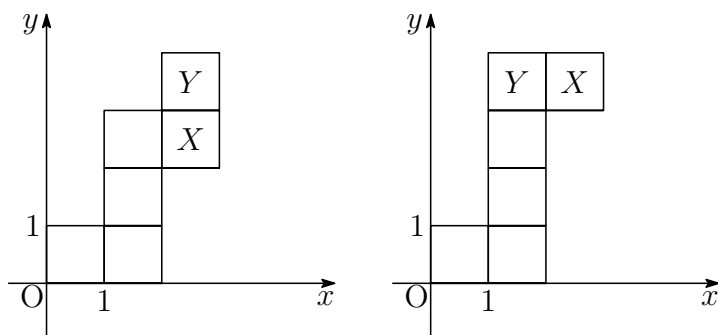
- (i) 最初の3回が X , X , Y の順に起こるとき, さいころの展開図により, 4, 5回目は X , X の順に起こる.



- (ii) 最初の3回が X , Y , X の順に起こるとき, さいころの展開図により, 4, 5回目は X , Y または Y , X の順に起こる.



- (iii) 最初の3回が X , Y , Y の順に起こるとき, さいころの展開図により, 4, 5回目は X , Y または Y , X の順に起こる.



(i)~(iii) より, 1回目が X であるのは, 5通りである. また, 1回目が Y であるのは, (i)~(iii) の展開図を直線 $y = x$ に関して対称移動したものであるから, 5通りである. このとき, X , Y が起こる確率はともに $\frac{1}{2}$ であるから, 求める確率は

$$(5 + 5) \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{5}{16}$$



- 3 (1) $z = x + yi$ とおき (x, y は実数), これを $|z + i| - |z - i| = 1$ に代入すると

$$\begin{aligned} |x + (y + 1)i| - |x + (y - 1)i| &= 1 \\ \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} &= \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + 1 \end{aligned}$$

両辺を 2 乗すると

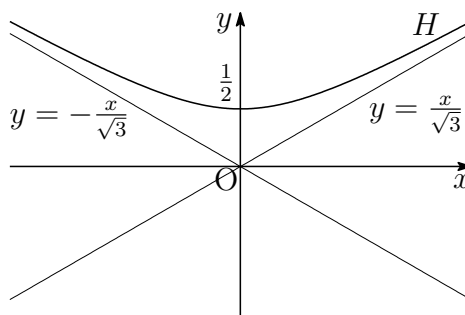
$$\begin{aligned} x^2 + (y + 1)^2 &= x^2 + (y - 1)^2 + 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + 1 \\ 4y - 1 &= 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \end{aligned}$$

上式から $4y - 1 \geq 0$ であり, 再び両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} (4y - 1)^2 &= 4\{x^2 + (y - 1)^2\} \\ -4x^2 + 12y^2 &= 3 \end{aligned}$$

ゆえに
$$-\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \left(y \geq \frac{1}{2}\right)$$

したがって, H の概形は次のようになる.



上の概形から, z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は $\frac{\pi}{6} < \theta_1 < \frac{5}{6}\pi$

- (2) (1) で求めた概形から $|z| \geq \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{|z|}$ であるから $0 < r_2 \leq 2$

また, $\theta_2 = -\arg z$ であるから, $0 \leq \theta < 2\pi$ に注意して

研

$$-\frac{5}{6}\pi + 2\pi < \theta_2 < -\frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \text{すなわち} \quad \frac{7}{6}\pi < \theta_2 < \frac{11}{6}\pi$$

■

4 (1) $f(x) = \sqrt{3x^2 + x^3}$ ($x \geq -3$) より $f'(x) = \frac{3x(x+2)}{2\sqrt{3x^2 + x^3}}$

したがって $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	-3	...	-2	...	0	...
$f'(x)$		+	0	-	/	+
$f(x)$	0	↗	極大 2	↘	極小 0	↗

増減表から, 求める極大値は $f(-2) = 2$

(2) $F(x) = \int_x^{x+3} f(t) dt$ より ($-3 \leq x \leq 0$)

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x+3) - f(x) = \frac{\{f(x+3)\}^2 - \{f(x)\}^2}{f(x+3) + f(x)} \\ &= \frac{3(x+3)^2 + (x+3)^3 - (3x^2 + x^3)}{f(x+3) + f(x)} = \frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3) + f(x)} \end{aligned}$$

$f(x) = |x|\sqrt{x+3}$ であるから, $F(x)$ の増減表は次のようになる.

x	-3	...	-2	...	0
$F'(x)$		-	0	+	
$F(x)$		↘	極小	↗	

$-3 \leq x \leq 0$ に注意して, $F(x)$ を求める.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{x+3} f(t) dt \\ &= \int_0^x t\sqrt{t+3} dt + \int_0^{x+3} t\sqrt{t+3} dt \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{まず} \quad \int_0^x t\sqrt{t+3} dt &= \int_0^x \{(t+3)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{t+3}\} dt \\ &= \left[\frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}} - 2(t+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x \\ &= \left[\frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x \\ &= \frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{5}\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② より

$$F(x) = \frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + (x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\} + \frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表の x の値から

$$F(-3) = \frac{2}{5}(-2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}\sqrt{3}$$

$$F(-2) = \frac{2}{5}(-4 - 4^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{24}{5}(\sqrt{3} - 1)$$

$$F(0) = \frac{2}{5}(-2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} + 6^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$$

よって 最大値 $F(0) = \frac{12}{5}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$,

最小値 $F(-2) = \frac{24}{5}(\sqrt{3} - 1)$



2.5 2019年度

- 1 (1) $C_1: y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ と $C_2: y = x^3 + 1$ から y を消去すると

$$x^3 + 1 = x^2 + 2ax - 2a + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2 - 2a) = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と C_2 の共有点がちょうど2個のとき、方程式 $(*)$ の実数解は2個ある。
 $a \neq 0$ より、 $x^2 - 2a = 0$ は重解をもたないから、方程式 $x^2 - 2a = 0$ は
 $x = 1$ を解にもつ。したがって

$$1^2 - 2a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2}$$

これを $(*)$ に代入すると $(x-1)^2(x+1) = 0$

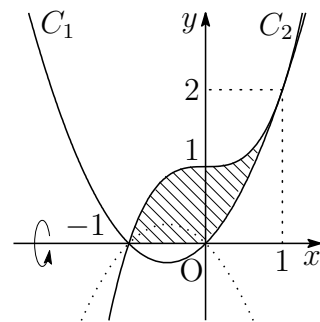
これは、条件を満たすから $a = \frac{1}{2}$

- (2) (1) の結果から $C_1: y = x^2 + x$

$$\begin{aligned} & |x^3 + 1|^2 - |x^2 + x|^2 \\ &= (x^3 + 1)^2 - (x^2 + x)^2 \\ &= (x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x + 1) \\ &= (x+1)^2(x-1)^2(x^2+1) \geq 0 \end{aligned}$$

したがって $|x^3 + 1| \geq |x^2 + x|$

求める回転体の体積は、右の図の斜線部分を x 軸のまわりに1回転させたものであるから、その体積を V とすると



$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^1 (x^3 + 1)^2 dx - \int_{-1}^1 (x^2 + x)^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^6 + 2x^3 + 1) dx - \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3 + x^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^6 + 1) dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2) dx \\ &= \int_0^1 (2x^6 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 2) dx \\ &= \left[\frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = \frac{263}{210} \end{aligned}$$

よって $V = \frac{263}{210}\pi$



- 2 (1) $\ell: y = ax - a - 2$ は $y + 2 = a(x - 1)$ より、
点 $A(1, -2)$ を通り、傾き a の直線。

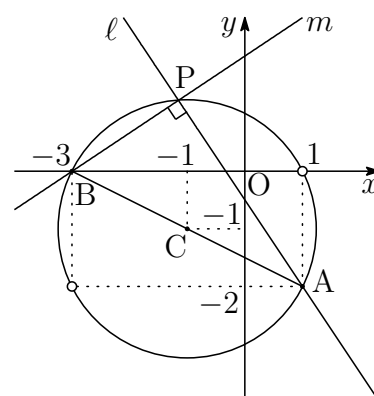
$m: y = bx + 3b$ は $y = b(x + 3)$ より、点
 $B(-3, 0)$ を通り、傾き b の直線。

ℓ と m は直交するから、 ℓ と m の交点 P は、
線分 AB を直径とする円周上を動く。

線分 AB の中点を C とすると $C(-1, -1)$

$$CA = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

求める点 P の軌跡は、2 直線 ℓ, m が x 軸と垂直ではないことに注意して



$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5, \quad (x, y) \neq (1, 0), (-3, -2)$$

- (2) $\ell \perp m$ より、 $ab = -1$ であるから

$$\ell: ax - y - a - 2 = 0, \quad m: x + ay + 3 = 0$$

線分 AP の長さは、点 $A(1, -2)$ と直線 m の距離であるから

$$AP = \frac{|1 + a \cdot (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = \frac{2|a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

線分 BP の長さは、点 $B(-3, 0)$ と直線 ℓ の距離であるから

$$BP = \frac{|a \cdot (-3) + 0 - a - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{2|2a + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

- (3) $\triangle APB$ の面積が最大となるとき、 P は線分 AB の垂直二等分線上にあるから、 $AP = BP$ より

$$\frac{2|a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{2|2a + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad \text{ゆえに} \quad |a - 2| = |2a + 1|$$

これを解いて $a = \frac{1}{3}, -3$

別解 直線 AB の傾きは、その偏角を θ とすると $\tan \theta = -\frac{1}{2}$

$\triangle APB$ の面積が最大となるとき、 ℓ の傾き a は

$$a = \tan(\theta \pm 45^\circ) = \frac{\tan \theta \pm \tan 45^\circ}{1 \mp \tan \theta \tan 45^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 1}{1 \pm \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 2}{2 \pm 1} = \frac{1}{3}, -3$$

■

- 3** (1) $y = x \sin 3x + 3x^2$ を微分すると $y' = \sin 3x + 3x \cos 3x + 6x$
 C 上の x 座標が a である点における接線の方程式は

$$y - (a \sin 3a + 3a^2) = (\sin 3a + 3a \cos 3a + 6a)(x - a)$$

すなわち $y = (\sin 3a + 3a \cos 3a + 6a)x - 3a^2(1 + \cos 3a) \quad \cdots \textcircled{1}$

これが原点を通るから $-3a^2(1 + \cos 3a) = 0$

$0 < a < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < 3a < \frac{3}{2}\pi$ であるから

$$3a = \pi \quad \text{よって} \quad a = \frac{\pi}{3}$$

- (2) (1) の結果を $\textcircled{1}$ に代入することにより $\ell: y = \pi x$
 C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x \sin 3x + 3x^2 = \pi x \quad \text{すなわち} \quad x(\pi - \sin 3x - 3x) = 0 \quad \cdots (*)$$

$$f(x) = \pi - \sin 3x - 3x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = -3 \cos 3x - 3 = -3(1 + \cos 3x) \leq 0$$

したがって, $f(x)$ は単調減少であり,

$$f(0) = \pi > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

であるから, 方程式 $(*)$ の解は $x = 0, \frac{\pi}{3}$

よって, 求める共有点の座標は $(0, 0), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{3}\right)$

- (3) (2) の結果から, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ において, $x(\pi - \sin 3x - 3x) \geq 0$ であるから,
 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\pi - \sin 3x - 3x) dx \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x dx \\ &= \frac{3}{6} \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \left[\frac{x}{3} \cos 3x - \frac{1}{9} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^3}{54} - \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$



- 4 (1) $2n$ 個の球から n 個取り出すとき, n 個の赤球から k 個取り出し, n 個の白球から $n - k$ 個取り出す確率であるから

$$\frac{{}_nC_k \cdot {}_nC_{n-k}}{{}_n2C_n} = \frac{({}_nC_k)^2}{{}_n2C_n}$$

- (2) 取り出した n 個の球のうち赤球が k 個取り出されるとき, 勝つ確率は $\left(\frac{k}{n}\right)^2$ であるから, (1) の結果により

$$\frac{({}_nC_k)^2}{{}_n2C_n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{{}_n2C_n} \left(\frac{k}{n} \cdot {}_nC_k\right)^2 \quad \dots (*)$$

がゲームに勝つ確率である. ここで

$$\begin{aligned} {}_nC_k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot {}_{n-1}C_{k-1} \\ {}_n2C_n &= \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n} \cdot {}_{2n-2}C_{n-1} \end{aligned}$$

上の 2 式をそれぞれ変形すると

$$\frac{k}{n} \cdot {}_nC_k = {}_{n-1}C_{k-1}, \quad \frac{1}{{}_n2C_n} = \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{1}{{}_{2n-2}C_{n-1}}$$

これらを (*) に代入することにより

$$(*) = \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{1}{{}_{2n-2}C_{n-1}} ({}_{n-1}C_{k-1})^2 = \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{({}_{n-1}C_{k-1})^2}{{}_{2n-2}C_{n-1}}$$

- (3) $n \geq 2$ および $k \geq 1$ の整数について,

$$(1+x)^{n-1}(1+x)^{n-1} = (1+x)^{2n-2}$$

上式の両辺の x^{n-1} の係数を比較することにより

$$\sum_{k=1}^n {}_{n-1}C_{k-1} \cdot {}_{n-1}C_{n-k} = {}_{2n-2}C_{n-1}$$

すなわち
$$\sum_{k=1}^n ({}_{n-1}C_{k-1})^2 = {}_{2n-2}C_{n-1}$$

これと (2) の結果により, ゲームに勝つ確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{({}_{n-1}C_{k-1})^2}{{}_{2n-2}C_{n-1}} &= \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{1}{{}_{2n-2}C_{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} ({}_{n-1}C_{k-1})^2 \\ &= \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{{}_{2n-2}C_{n-1}}{{}_{2n-2}C_{n-1}} = \frac{n}{2(2n-1)} \end{aligned}$$



2.6 2020年度

- 1 (1) $x = f(t) = \sin t$, $y = g(t) = 1 - \cos 3t$ とおくと $\left(0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi\right)$

$$f'(t) = \cos t, \quad g'(t) = 3 \sin 3t$$

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{2}{3}\pi$	t	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{2}{3}\pi$
$f'(t)$		+	0	-		$g'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$g(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

上の増減表から 点Pは $\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right), g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ すなわち $(1, 1)$

点Qは $\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right), g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ すなわち $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$

- (2) C の点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, すなわち, 点 $\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right), g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ における接線の傾きは

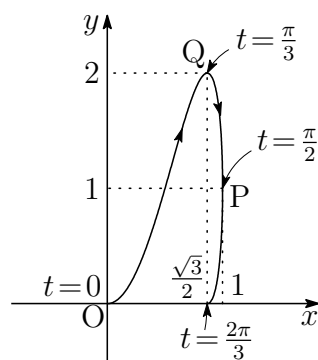
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

求める接線は, 点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ を通り, 傾き $2\sqrt{3}$ の直線の方程式であるから

$$y - 1 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} + 1$$

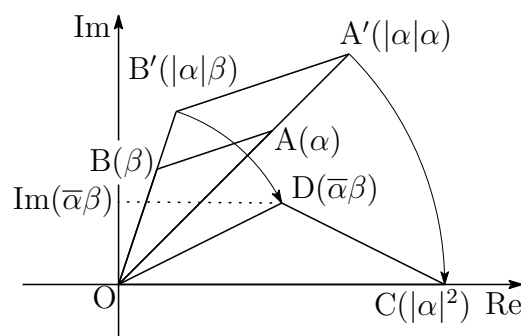
- (3) 求める面積を S とすると, (1) の結果に注意して

$$\begin{aligned} S &= \int_{f(0)}^{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} y \, dx - \int_{f\left(\frac{2}{3}\pi\right)}^{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} y \, dx \\ &= \int_{f(0)}^{f\left(\frac{2}{3}\pi\right)} y \, dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} g(t) f'(t) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos 3t) \cos t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\cos t - \frac{1}{2} \cos 4t - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= \left[\sin t - \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{9}{16} \sqrt{3} \end{aligned}$$



- 2 (1) 2点 $C(|\alpha|^2)$, $D(\bar{\alpha}\beta)$ は, それぞれ2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を原点を中心に $|\alpha|$ 倍の相似拡大, さらに原点を中心に $\arg \bar{\alpha}$ だけ回転 ($\times \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|}$) したものであるから

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\triangle OCD}{\triangle OAB} = |\alpha|^2$$



- (2) $\triangle OCD$ の底辺を $|\alpha|^2$, 高さを $|\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ とみると $S_2 = \frac{1}{2}|\alpha|^2|\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$

$$(1) \text{の結果から } S_1 = \frac{1}{|\alpha|^2} S_2 \quad \text{よって} \quad S_1 = \frac{1}{|\alpha|^2} \cdot \frac{1}{2} |\alpha|^2 |\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)| = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$$

別解 $\theta = \angle \alpha 0 \beta$ とすると $\cos \theta + i \sin \theta = \frac{\frac{\beta}{|\beta|}}{\frac{\alpha}{|\alpha|}} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \cdot \frac{\bar{\alpha}\beta}{\alpha\bar{\alpha}} = \frac{\bar{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|} \quad \text{であるから} \quad S_1 = \frac{1}{2} |\alpha||\beta| |\sin \theta| = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$$

- (3) (2) の結果から, 3点 $O(0)$, $P(z)$, $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\bar{z} \cdot \frac{1}{z} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \right|$$

$z = a + bi$ ($1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 3$) であるから

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}}{z} &= \frac{a - bi}{a + bi} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2}i, \\ \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \right| &= \frac{1}{2} \left| -\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right| = \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} = u, \quad \triangle OPQ = S(u) \quad \text{とおくと} \quad S(u) = \frac{u}{1 + u^2} \quad \left(\frac{1}{2} \leq u \leq 3 \right)$$

ゆえに $S'(u) = \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}$

u	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(u)$		+	0	-	
$S(u)$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{10}$

よって 最大値 $\frac{1}{2}$, 最小値 $\frac{3}{10}$

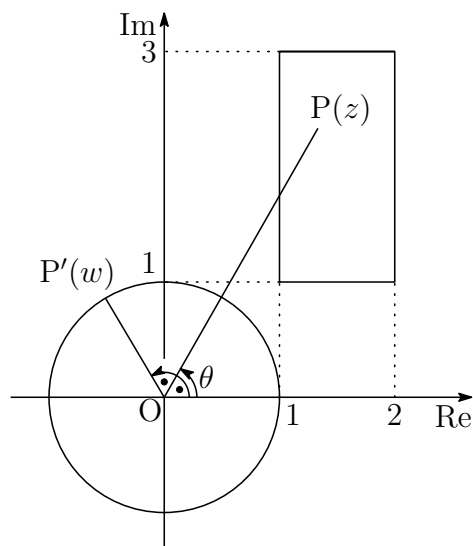
別解 $\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)$ であるから

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \right|$$

$\theta = \arg(z)$, $w = \frac{z}{\bar{z}}$ とすると

$$w = \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1,$$

$$\begin{aligned} \arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \\ &= \arg(z) - \arg(\bar{z}) \\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta \end{aligned}$$



点 $P'(w)$ は、点 $P(z)$ から単位円周上の点 P' への写像で、その偏角について

$$\arg(w) = 2\arg(z)$$

が成立する． $z = a + bi$ ($1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 3$) より、 $\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ とすると、上の図から

$$\tan \theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \tan \theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{したがって} \quad \triangle OPQ = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \cdots (*)$$

$$\text{このとき} \quad \sin 2\theta_1 = \frac{2 \tan \theta_1}{1 + \tan^2 \theta_1} = \frac{4}{5}, \quad \sin 2\theta_2 = \frac{2 \tan \theta_2}{1 + \tan^2 \theta_2} = \frac{3}{5}$$

(*) より、 $\triangle OPQ$ は、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、最大値 $\frac{1}{2}$,

$\theta = \theta_2$ のとき、最小値 $\frac{3}{10}$ ■

3 (1) 法 5 について

$$\begin{array}{lll}
x \equiv 0 \text{ のとき} & x^2 \equiv 0 & (\text{mod } 5) \\
x \equiv 1 \text{ のとき} & x^2 \equiv 1 & (\text{mod } 5) \\
x \equiv 2 \text{ のとき} & x^2 \equiv 4 & (\text{mod } 5) \\
x \equiv 3 \text{ のとき} & x^2 \equiv 9 \equiv 4 & (\text{mod } 5) \\
x \equiv 4 \text{ のとき} & x^2 \equiv 16 \equiv 1 & (\text{mod } 5)
\end{array}$$

よって、題意は成立する.

(2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ より, 法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}$$

(1) の結果から, $(*)$ の左辺は法 5 について, 0, 1, 4 のいずれかに等しい. 一方, 右辺は 0, 2, $8 \equiv 3 \pmod{5}$ のいずれかに等しい.

したがって, $x^2 \equiv 0, 2z^2 \equiv 0 \pmod{5}$, すなわち, $x \equiv z \equiv 0 \pmod{5}$
 $x = 5x', z = 5z'$ (x', z' は整数) を $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0$ より, $y \equiv 0 \pmod{5}$ であるから, $y = 5y'$ (y' は整数) とおける.

このとき, $x = 5x', y = 5y', z = 5z'$ より, $x' < x, y' < y, z' < z$
 $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす (x, y, z) の組が存在するとき,

$$(x', y', z') \quad (x' < x, y' < y, z' < z)$$

が存在し, 無限に小さい数の組が存在することになり (無限降下), このことは自然数が下に有限であることに反する. よって, $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しない.

別解 $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z が存在し, これら 3 数の最大公約数が 1 であるものを仮定する.

$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ より, 法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}$$

(1) の結果から, $(*)$ の左辺は法 5 について, 0, 1, 4 のいずれかに等しい. 一方, 右辺は 0, 2, $8 \equiv 3 \pmod{5}$ のいずれかに等しい.

したがって, $x^2 \equiv 0, 2z^2 \equiv 0 \pmod{5}$, すなわち, $x \equiv z \equiv 0 \pmod{5}$
 $x = 5x', z = 5z'$ (x', z' は整数) を $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ より, $y \equiv 0 \pmod{5}$ であるから, x, y, z が 5 を共通因数にもつことになり, 仮定に反する. よって, 題意は証明された. ■

4 (1) $1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ より $0 < y < n \log_2 \left(1 + \frac{x}{n}\right)$

$U = \{1, 2, \dots, n-1\}$ とし, U の部分集合 A, B を

$$A = \left\{ k \mid n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \text{ は整数である, } k \in U \right\}$$

$$B = \left\{ k \mid n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \text{ は整数でない, } k \in U \right\}$$

とすると ($[a]$ は a を超えない最大の整数)

$$P(n) = \sum_{k \in A} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} + \sum_{k \in B} \left[n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right]$$

したがって

$$\begin{aligned} P(n) &< \sum_{k \in A} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) + \sum_{k \in B} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(n) &\geq \sum_{k \in A} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} + \sum_{k \in B} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \cdots \textcircled{1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

が成立する ($\textcircled{1}$ は $B = \phi$ のとき等号). 上の2式から

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad \cdots (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 \log_2(1+x) dx \\ &= \frac{1}{\log 2} \left[(1+x) \log(1+x) - x \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

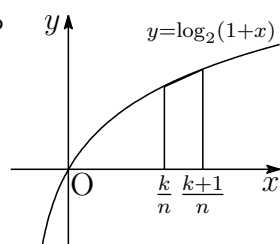
(*) にはさみうちの原理を適用すると $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2} = 2 - \frac{1}{\log 2}$

$$(3) (1) \text{ の結果から } P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

$$\frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) \quad \cdots \textcircled{2}$$

(2) の結果および $y = \log_2(1+x)$ が上に凸であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \log_2(1+x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log_2(1+x) dx \\ &> \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) + \log_2 \left(1 + \frac{k+1}{n} \right) \right\} \end{aligned}$$



上式および $\textcircled{2}$ から

$$\begin{aligned} L - \frac{P(n)}{n^2} &> \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) + \log_2 \left(1 + \frac{k+1}{n} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{k+1}{n} \right) - \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} (\log_2 2 - \log_2 1) = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

解説 $a \leq x \leq b$ において、関数 $f(x)$ が $f''(x) < 0$ であるとき

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

とおくと、 $g(a) = g(b) = 0$ であるから、平均値の定理 (ロルの定理) により

$$g'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する. このとき、 $g''(x) = f''(x) < 0$ であるから、 $g'(x)$ は単調減少により、 c は唯一存在する. したがって、 $g(x)$ の増減表は

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$a \leq x \leq b$ において、 $g(x) \geq 0$ が成立する. なお、等号は、 $x = a, b$ のときに限る.

よって、 $a < x < b$ において、関数 $f(x)$ が $f''(x) < 0$ のとき

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

が成立する．なお，等号は， $x = a, b$ のときに限る．

$f(x) = \log_2(1 + x)$ とおくと， $f''(x) < 0$ より， $\frac{k}{n} < x < \frac{k+1}{n}$ において

$$f(x) > f\left(\frac{k}{n}\right) + n \left\{ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \left(x - \frac{k}{n}\right)$$

これから

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \\ &> \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \\ &\quad + n \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(x - \frac{k}{n}\right) dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + n \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1) - f(0)}{2n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } L > \frac{P(n)}{n^2} + \frac{1}{2n} \quad \text{よって} \quad L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$



2.7 2021 年度

- 1 (1) ℓ 上の点 X について, $k \neq 0$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\overrightarrow{OX} &= \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \\ &= \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{c}\end{aligned}$$

このとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数の和は

$$\frac{2t}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right) = 1$$

これから, $\frac{1}{k}\overrightarrow{OX}$ は α 上の点であり,

$$\overrightarrow{OY} = \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

$\overrightarrow{OY}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数が 0 となる点をそれぞれ Z_1 , Z_2 , Z_3 とすると

$$\overrightarrow{OZ_1} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}, \quad \overrightarrow{OZ_2} = \frac{2\vec{a} + \vec{c}}{3}, \quad \overrightarrow{OZ_3} = \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3}$$

直線 m と $\triangle ABC$ の各辺との交点の個数について, 辺 BC 上は Z_1 の 1 個, 辺 CA 上は Z_2 の 1 個, 辺 AB 上は 0 個.

- (2) Y は CD 上の点であるから $\overrightarrow{CY} = s\overrightarrow{CD} = \frac{s}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ (s は実数)

$$\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CZ_2}, \quad \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CZ_1} \text{ を代入すると } \overrightarrow{CY} = \frac{3s}{4}\overrightarrow{CZ_2} + \frac{3s}{2}\overrightarrow{CZ_1}$$

$$Y \text{ は直線 } Z_1Z_2 \text{ 上の点であるから } \frac{3s}{4} + \frac{3s}{2} = 1$$

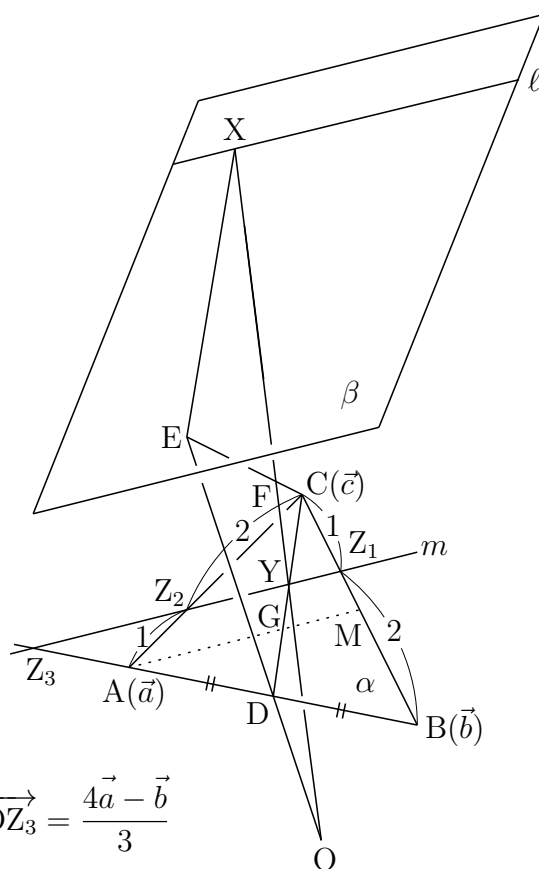
$$\text{これを解いて } s = \frac{4}{9} \quad \text{すなわち } CY : YD = 4 : 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{条件から } \triangle OYD \sim \triangle OXE \quad (1) \text{ の結果から } YD : XE = 1 : k \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ および } \triangle CYF \sim \triangle EXF \text{ より } CF : FE = CY : XE = 4 : 5k$$

このとき, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OD} = \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{OF} = \frac{5k\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OE}}{4 + 5k} = \frac{5k\vec{c} + 4 \cdot \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b})}{4 + 5k} = \frac{k}{5k + 4}(2\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c})$$



別解 Z_3 は線分 AB を $1:4$ に外分する点, D は AB の中点であるから

$$Z_3A : AB = 1 : 3 \quad \text{ゆえに} \quad Z_3A : AD = 2 : 3$$

$\triangle CAD$ と直線 m について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{CZ_2}{Z_2A} \cdot \frac{AZ_3}{Z_3D} \cdot \frac{DY}{YC} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{DY}{YC} = 1$$

したがって $CY : YD = 4 : 5$ (以下同様)

補足 直線 m について

$$\overrightarrow{OY} = \frac{1}{k} \overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

BC の中点を M とすると, この直線 m の方向ベクトル $2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ は

$$2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = -\{(\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a})\} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AM}$$

したがって, m は中線 AM と平行である.

2つの中線 AM と CD の交点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$CG : GD = 2 : 1$$

$m \parallel AM$ であるから $CY : YG = CZ_2 : Z_2A = 2 : 1$

$$CD : CY = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9 : 4 \quad \text{ゆえに} \quad CY : YD = 4 : 5$$

2 (1) $\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$

これを w について整理すると

$$\begin{aligned} w^2(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) &= 4(\gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2) \\ w^2(\beta - \alpha)^2 &= 4(\gamma - \alpha)^2 \end{aligned}$$

α, β, γ は相異なる複素数であるから

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 = \frac{w^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \frac{w}{2}$$

w の実部, 虚部はともに正であるから $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$

$$(i) \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{w}{2} \text{ のとき } \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \arg \left(\frac{w}{2} \right) = \arg w$$

$$0 < \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) < \frac{\pi}{2}$$

$$(ii) \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -\frac{w}{2} \text{ のとき } \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \arg \left(-\frac{w}{2} \right) = \arg w + \pi$$

$$\pi < \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) < \frac{3}{2}\pi$$

$\theta = \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)$ であるから $(0 \leq \theta < 2\pi)$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

(2) $\triangle ABC$ が正三角形であるとき

$$\left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

$\arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \frac{5}{3}\pi$ は, (i), (ii) とともに満たさない.

$\arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \frac{\pi}{3}$ は (i) を満たし, このとき

$$\left| \frac{w}{2} \right| = \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \arg \left(\frac{w}{2} \right) = \arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \frac{\pi}{3}$$

したがって $(*) \quad \frac{w}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{よって} \quad w = 1 + \sqrt{3}i$

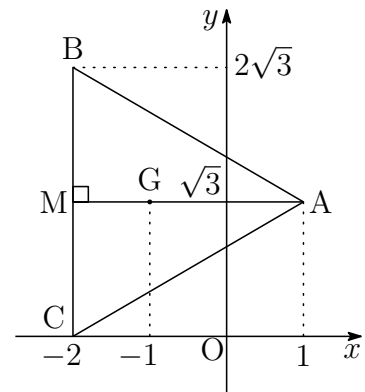
(3) $(*)$ より

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot \frac{w}{2} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{2} &= 2 \left(\frac{w}{2} \right)^2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

BC の中点を M とすると $M(-2 + \sqrt{3}i)$

AM = 3 より $BM = CM = \sqrt{3}$ よって $\beta = -2 + 2\sqrt{3}i, \gamma = -2$



3 (1) 媒介変数 t を用いて表された曲線

研

$$C: x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad (*)$$

は, (**) $x = \sqrt{y^2 + 1}$ である. C 上の点 $P(x, y)$ と $M(0, 1)$ の距離は

$$MP^2 = x^2 + (y - 1)^2 = y^2 + 1 + (y - 1)^2 = 2 \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}$$

MP が最小となるとき, $y = \frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad e^{2t} - e^t - 1 = 0$$

$$e^t > 0 \text{ に注意して } e^t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{よって} \quad t_0 = \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{2} \text{ を (**) を代入して } Q\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$x^2 - y^2 = 1$ であるから

$$2x - 2yy' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad yy' = x$$

C 上の点 Q における接線 ℓ の傾きは

$$\frac{1}{2}y' = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y' = \sqrt{5}$$

したがって, ℓ の方程式は

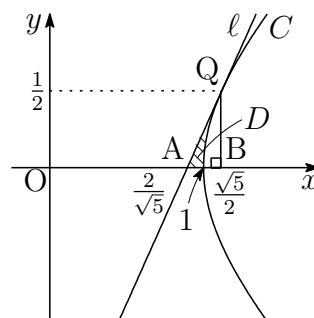
$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{5} \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad y = \sqrt{5}x - 2$$

ℓ と x 軸の交点を A とする. Q から x 軸に垂線 QB を引くと

$$\triangle QAB = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{40}$$

$$(*) \text{ の定積分 } \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y dx \text{ について } \frac{1}{2}(e^{t_0} + e^{-t_0}) = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \longrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} \\ t & 0 \longrightarrow t_0 \end{array}$$



$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y \, dx &= \frac{1}{4} \int_0^{t_0} (e^t - e^{-t})^2 \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{t_0} (e^{2t} - 2 + e^{-2t}) \, dt \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2t} - 2t - \frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{t_0} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (e^{t_0} + e^{-t_0}) \cdot \frac{1}{2} (e^{t_0} - e^{-t_0}) - \frac{1}{2} t_0 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

したがって、領域 D の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \triangle QAB - \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y \, dx \\
&= \frac{\sqrt{5}}{40} - \left(\frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}
\end{aligned}$$

別解 $\sqrt{x^2 - 1}$ の積分 (一般には, $\sqrt{x^2 + A}$ の積分)¹

$$\begin{aligned}
(x\sqrt{x^2 - 1})' &= \sqrt{x^2 - 1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\
\{\log(x + \sqrt{x^2 - 1})\}' &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}$$

上の第1式から第2式の辺々を引くと

$$\{x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1})\}' = 2\sqrt{x^2 - 1}$$

したがって $\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \frac{1}{2} \{x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1})\} + C$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y \, dx &= \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \sqrt{x^2 - 1} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right]_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad (\text{以下同様})
\end{aligned}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.162 (物理ページ p.167))

- (3) 曲線 $C: x = \sqrt{y^2 + 1}$ と x 軸, y 軸, 直線 $y = \frac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dy = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (y^2 + 1) dx = \pi \left[\frac{y^3}{3} + y \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{24}\pi$$

ℓ と x 軸, y 軸, 直線 $y = \frac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる円錐台の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right\} \frac{1}{2} = \frac{61}{120}\pi$$

求める回転体の体積を V とすると

$$V = \frac{13}{24}\pi - \frac{61}{120}\pi = \frac{\pi}{30}$$

補足 上面の半径 a , 底面の半径 b , 高さ h の円錐台の体積は²

$$\frac{\pi}{3}(a^2 + ab + b^2)h$$

別解 $\triangle QAB$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_3 とすると

$$V_3 = \pi \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \frac{1}{2} - V_2 = \frac{5}{8}\pi - \frac{61}{120}\pi = \frac{7}{60}\pi$$

曲線 $C: y = \sqrt{x^2 - 1}$ と x 軸, 直線 $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_4 とすると, バウムクーヘン型の求積法により³

$$V_4 = 2\pi \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} x \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{2\pi}{3} \left[(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{よって} \quad V = V_3 - V_4 = \frac{7}{60}\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{30}$$

補足 $\triangle QAB$ の重心の x 座標は $\frac{1}{3} \left(1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{7\sqrt{5}}{15}$

V_3 は, パップス=ギュルダンの定理により⁴

$$V_3 = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{5}}{15} \cdot \triangle QAB = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{5}}{15} \cdot \frac{\sqrt{5}}{40} = \frac{7}{60}\pi$$

²http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2019.pdf (p.4)

³http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2016.pdf [2]

⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf [1]

4 (1) $I_n = \int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx| dx$ とおく.

$$t = nx \text{ とすると } \frac{dt}{dx} = n \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow 2\pi \\ \hline t & 0 \longrightarrow 2n\pi \end{array}$$

$$I_n = \int_0^{2n\pi} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{2n\pi} |\sin x - \sin 2x| dx \quad (*)$$

ここで, $f(x) = \sin x - \sin 2x$ とし, $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ とおく.

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) - \sin 2(x + 2\pi) = f(x),$$

$$f(2\pi - x) = \sin(2\pi - x) - \sin 2(2\pi - x) = -\sin x + \sin 2x = -f(x)$$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数で, $|f(2\pi - x)| = |f(x)|$ であるから

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \int_0^{2n\pi} |f(x)| dx = \frac{1}{n} \cdot n \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx \\ &= \int_0^{\pi} |f(x)| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |f(x)| dx \end{aligned}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)| dx \text{ について, } x = 2\pi - u \text{ とおくと } \frac{dx}{du} = -1 \quad \begin{array}{c|c} x & \pi \longrightarrow 2\pi \\ \hline u & \pi \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)| dx = \int_{\pi}^0 |f(2\pi - u)| (-1) du = \int_0^{\pi} |f(u)| du = \int_0^{\pi} |f(x)| dx$$

$$\text{したがって} \quad I_n = 2 \int_0^{\pi} |f(x)| dx$$

$$f(x) = \sin x(1 - 2\cos x) \text{ より } |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}) \\ f(x) & (\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{I_n}{2} &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f(x) dx = -\left[F(x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[F(x) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) + F(\pi) = -\frac{1}{2} - 2\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad I_n = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

$$(2) J_n = \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx| \text{ とおく.}$$

$$t = nx \text{ とすると } \frac{dt}{dx} = n \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow c \\ \hline t & 0 \longrightarrow nc \end{array}$$

$$J_n = \int_0^{nc} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(t)| dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)| dx$$

$\frac{nc}{2\pi}$ 以下の最大の整数を N とすると

$$(**) \quad N \leq \frac{nc}{2\pi} < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2N\pi \leq nc < 2(N+1)\pi$$

$$(*) \text{ および (1) の結果により, } I_N = \frac{1}{N} \int_0^{2N\pi} |f(x)| dx = 5 \text{ であるから}$$

$$\int_0^{2N\pi} |f(x)| dx = 5N$$

したがって

$$\frac{1}{n} \int_0^{2N\pi} |f(x)| dx \leq \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)| dx < \frac{1}{n} \int_0^{2(N+1)\pi} |f(x)| dx$$

$$\frac{1}{n} \cdot 5N \leq J_n < \frac{1}{n} \cdot 5(N+1)$$

$$(**) \text{ より } \frac{nc}{2\pi} - 1 < N, \quad N+1 \leq \frac{nc}{2\pi} + 1 \text{ であるから}$$

$$\frac{5}{n} \left(\frac{nc}{2\pi} - 1 \right) < J_n < \frac{5}{n} \left(\frac{nc}{2\pi} + 1 \right)$$

$$\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} < J_n < \frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}$$

$$\text{このとき } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} \right) = \frac{5c}{2\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n} \right) = \frac{5c}{2\pi}$$

$$\text{よって, はさみうちの原理により } \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{5c}{2\pi}$$

2.8 2022 年度

- 1 (1) $P_1(a, 0, 0)$, $P_2(a+1, 0, 0)$ より $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 0)$

$\triangle P_1QR$, $\triangle P_2QR$ のそれぞれの重心 G_1 , G_2 は

$$G_1\left(\frac{a}{3}, \frac{1}{3}, 1\right), \quad G_2\left(\frac{a+1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{G_1G_2} = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$$

よって, P_1 , P_2 を通る直線と, G_1 , G_2 を通る直線は平行である.

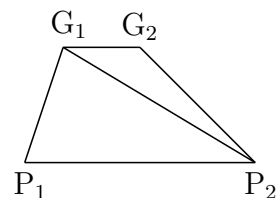
- (2) $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{P_1G_1} = \left(-\frac{2a}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ より

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 = 1, \quad |\overrightarrow{P_1G_1}|^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{10}{9}, \quad \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1G_1} = -\frac{2a}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \triangle P_1P_2G_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 |\overrightarrow{P_1G_1}|^2 - (\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1G_1})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 \left(\frac{4a^2}{9} + \frac{10}{9} \right) - \left(-\frac{2a}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

求める四角形 $P_1P_2G_2G_1$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle P_1P_2G_1 + \triangle G_1G_2P_2 \\ &= \triangle P_1P_2G_1 + \frac{1}{3} \triangle P_1P_2G_1 \\ &= \frac{4}{3} \triangle P_1P_2G_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6} = \frac{2\sqrt{10}}{9} \end{aligned}$$



- (3) $\overrightarrow{P_1Q} = (-a, 1, 0)$. $\overrightarrow{P_1P_2}$ および $\overrightarrow{P_1G_1}$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, -3, 1)$$

とする. 点 R から四角形 $P_1P_2G_1G_2$ に引いた垂線の長さ h は

$$h = |\overrightarrow{P_1Q} \cdot \vec{n}| = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

よって, 求める立体の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{2}{9}$$

2 (1) $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) は単調増加であるから、最大値は $f(1) = \sqrt{2}$

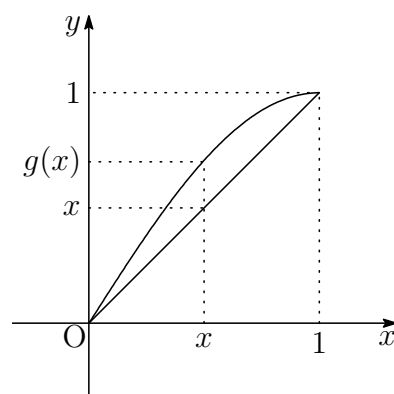
(2) $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ とおく ($0 \leq x \leq 1$).

曲線 $y = g(x)$ は上に凸であり、2点 $(0, 0)$, $(1, 1)$ を結ぶ線分

$$y = x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

の下側になくから

$$g(x) \geq x \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$



が成り立つ。したがって、 $0 \leq x \leq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x)^2 - 2x^2 &= 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2} - 2x^2 \\ &= 1 - x^2 + g(x)^2 - x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$f(x) > 0$ であるから $f(x) \geq \sqrt{2}x$ ($0 \leq x \leq 1$)

(3) (1), (2) の結果から $\sqrt{2}x \leq f(x) \leq \sqrt{2}$ ($0 \leq x \leq 1$)

$$\int_0^1 (\sqrt{2}x)^n dx \leq \int_0^1 \{f(x)\}^n dx \leq \int_0^1 (\sqrt{2})^n dx$$

したがって $\frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} \leq a_n \leq (\sqrt{2})^n$ ゆえに $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt{2} \quad \cdots (*)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1 \quad \cdots (**)$

(*), (**) から、はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{2}$

- 3** (1) $y = \sin x$ を微分すると $y' = \cos x$

曲線 $y = \sin x$ 上の点 $(a_n, \sin a_n)$ における接線の方程式は

$$y - \sin a_n = (x - a_n) \cos a_n$$

これが点 $(-p, 0)$ を通るから, $\cos a_n \neq 0$ に注意して

$$-\sin a_n = (-p - a_n) \cos a_n \quad \text{よって} \quad \tan a_n = a_n + p$$

- (2) $f(x) = \tan x - x$ とおくと $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geq 0$
 a_n は方程式 $f(x) = p$ の解である ($p > 0$). $f(x)$ は単調増加であり,

$$f((n-1)\pi) = -(n-1) \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{2n-1}{2}\pi - 0} f(x) = \infty$$

であるから, 开区間 $I_n = \left((n-1)\pi, \frac{2n-1}{2}\pi \right)$ に方程式 $f(x) = p$ の解 a_n が唯一存在する. $a_n \in I_n, a_{n+1} \in I_{n+1}$ より

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f(a_n) = f(a_{n+1})$ であるから

$$\tan a_n - a_n = \tan a_{n+1} - a_{n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad \tan a_{n+1} - \tan a_n = a_{n+1} - a_n > 0$$

$\tan a_n = \tan(a_n + \pi)$ であるから

$$\tan(a_n + \pi) < \tan a_{n+1}$$

このとき, $a_n + \pi \in I_{n+1}, a_{n+1} \in I_{n+1}$ に注意して

$$a_n + \pi < a_{n+1} \quad \text{よって} \quad a_{n+1} - a_n > \pi$$

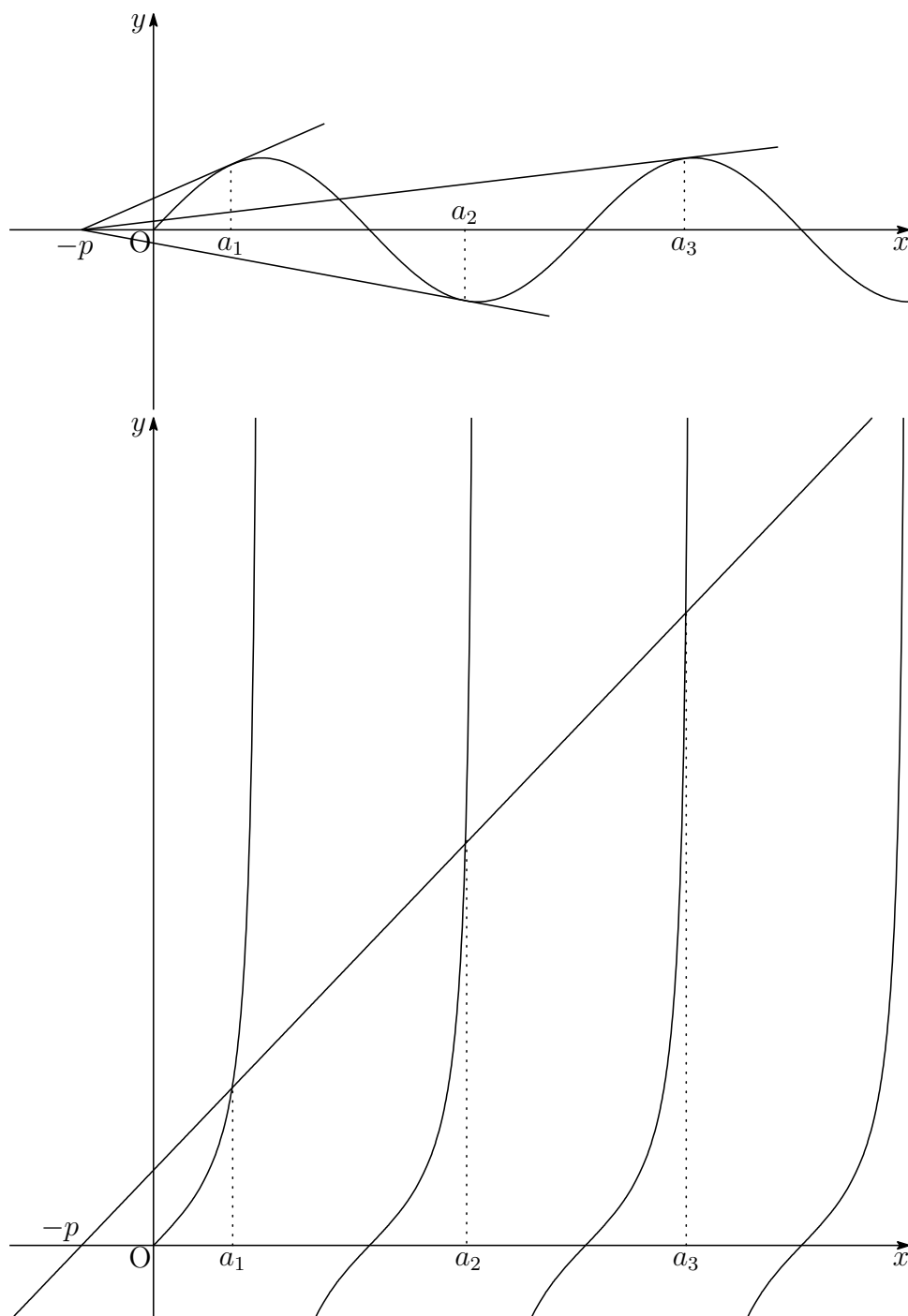
- (3) $\textcircled{2}$ から, $a_{n+1} - a_n = \tan a_{n+1} - \tan a_n$. これを (2) の結果に代入すると

$$\tan a_{n+1} - \tan a_n > \pi$$

$$\text{したがって} \quad \sum_{k=1}^n (\tan a_{k+1} - \tan a_k) > \sum_{k=1}^n \pi$$

$$a_1 = \frac{\pi}{3} \text{ より} \quad \tan a_{n+1} - \tan \frac{\pi}{3} > n\pi \quad \text{よって} \quad \tan a_{n+1} > n\pi + \sqrt{3}$$

補足 グラフは次のようになる.



$\{a_n\}$ は $\tan x - x = p$ ($x > 0$) の解. $(n-1)\pi < a_n < (n-\frac{1}{2})\pi$.

$a_{n+1} - a_n > \pi$ より

$$(\tan a_{n+1} - p) - (\tan a_n - p) > \pi \quad \text{ゆえに} \quad \tan a_{n+1} - \tan a_n > \pi$$

4 (1) $f(m, n) = {}_{m+n}C_m - mn - 2$ ($m \leq n$) とおくと

$$f(1, n) = (1 + n) - 1 \cdot n - 2 = -1$$

$$f(2, n) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) - 2n - 2 = \frac{1}{2}(n+1)(n-2)$$

$f(m, n) = 0$ を満たす正の整数の組 (m, n) を 1 つ求めればよいから

$$(m, n) = (2, 2)$$

(2) 正の整数 $l = 2, 3, \dots, m-1$ について

$$\begin{aligned} {}_{m+n}C_{l+1} - {}_{m+n}C_l &= \frac{(m+n)!}{(l+1)!(m+n-l-1)!} - {}_{m+n}C_m \\ &= \frac{m+n-l}{l+1} \cdot {}_{m+n}C_m - {}_{m+n}C_m \\ &= \frac{m+n-2l-1}{l+1} \cdot {}_{m+n}C_m \\ &= \frac{n-m+2(m-1-l)+1}{l+1} \cdot {}_{m+n}C_m > 0 \end{aligned}$$

ゆえに ${}_{m+n}C_2 < {}_{m+n}C_3 < \dots < {}_{m+n}C_{m-1} < {}_{m+n}C_m$

したがって, $2 \leq m \leq n$ を満たす整数 m, n について次式が成立する.

$${}_{m+n}C_m - {}_{m+n}C_2 \geq 0 \quad (*)$$

ただし, 上式について等号が成立するとき, $m = 2$ である.

$$f(m, n) = {}_{m+n}C_m - {}_{m+n}C_2 + {}_{m+n}C_2 - mn - 2$$

とすると, $2 \leq m \leq n$ であるから

$$\begin{aligned} {}_{m+n}C_2 - mn - 2 &= \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1) - mn - 2 \\ &= \frac{1}{2}(m+1)(m-2) + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

が成立する. ただし, 等号が成立するとき, $m = n = 2$ である.

(*), (**) から, $f(m, n) = 0$ となるのは, (1) の結果に限る.

別解1 (1) で $1 \leq m \leq 2$ のとき, $(m, n) = (2, 2)$ がただ1つの解である.

$m \geq 3$ のとき, (m, n) の解が存在しないことを示せばよい.

$$m \geq 3 \text{ のとき} \quad {}_{m+n}C_2 < {}_{m+n}C_3 < \cdots < {}_{m+n}C_m$$

$$\text{また} \quad {}_{m+n}C_2 - (mn + 2) = \frac{1}{2}\{n(n-1) + m(m-1) - 4\}$$

$$n \geq m \geq 3 \text{ より} \quad n(n-1) \geq m(m-1) \geq 3 \cdot 2 > 4$$

$$\text{よって} \quad {}_{m+n}C_2 > mn + 2$$

別解2 与えられた等式から

$$g(m, n) = \frac{{}_{m+n}C_m}{mn + 2} = \frac{(m+n)!}{m!n!(mn+2)}$$

とおく. (1) の結果から $g(m, n) = 1$ を満たす整数 m, n ($2 \leq m \leq n$) を求めればよい.

$$\begin{aligned} \frac{g(m, n+1)}{g(m, n)} - 1 &= \frac{(m+n+1)(mn+2)}{(n+1)(mn+m+2)} - 1 \\ &= \frac{\{(n+1)+m\}(mn+2)}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} - 1 \\ &= \frac{m(mn+2) - m(n+1)}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} \\ &= \frac{m\{(m-1)n+1\}}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} > 0 \end{aligned}$$

$g(m, n+1) > g(m, n)$ であるから, m を固定すると, $g(m, n)$ は n について単調増加. また, $g(m, n)$ は m, n の対称式であるから, 同様に n を固定すると, $g(m, n)$ は m について単調増加. したがって

$$g(m, n) \geq g(2, 2) = 1$$

が成立する. ただし, 等号が成立するとき, $m = n = 2$ である.

よって, 求める正の整数の組 (m, n) は (1) の結果に限る.

2.9 2023 年度

- 1** (1) 3 回の目の出方が $\{2, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5\}$ であるから

$$p_3 = \frac{3!}{1!1!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 2 = \frac{1}{18}$$

- (2) n 回の目の出方で, 1 以外の目の出方は $\{2, 2, 3, 5\}$, $\{2, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5\}$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n!}{2!1!1!(n-4)!} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{n!}{1!1!1!(n-3)!} \left(\frac{1}{6}\right)^n \times 2 \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 6^n} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6^n} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\{(n-3)+4\}}{2 \cdot 6^n} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 6^n} \end{aligned}$$

- (3) $n-1$ 回目までの目の積が 60 で, n 回目で 1 の目が出る確率は

$$p_{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} p_{n-1}$$

これと (2) の結果から, 求める確率は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{6} p_{n-1} &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 6^n} - \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 6^{n-1}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\{(n+1)-(n-3)\}}{2 \cdot 6^n} \\ &= \frac{2n(n-1)(n-2)}{6^n} \end{aligned}$$

2 (1) $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ は基本ベクトルであるから

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2, \quad \vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{w} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 \quad (*)$$

したがって

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1)^2 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2)^2, \quad |\vec{w}|^2 = (\vec{w} \cdot \vec{e}_1)^2 + (\vec{w} \cdot \vec{e}_2)^2$$

$\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = 4, |\vec{v}| = 2\sqrt{5}, \vec{w} \cdot \vec{e}_1 = 8, |\vec{w}| = 8\sqrt{2}$ を上の2式に代入すると

$$20 = 16 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2)^2, \quad 128 = 64 + (\vec{w} \cdot \vec{e}_2)^2$$

$\vec{v} \cdot \vec{e}_2 < 0, \vec{w} \cdot \vec{e}_2 > 0$ に注意して解くと $\vec{v} \cdot \vec{e}_2 = -2, \vec{w} \cdot \vec{e}_2 = 8$

条件およびこれらの結果を (*) に代入すると

$$\vec{v} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 = (4, -2), \quad \vec{w} = 8\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 = (8, 8)$$

$\vec{u} = -\vec{e}_1 = (-1, 0), \overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{AB} = \vec{v}, \overrightarrow{BC} = \vec{w}$ より

$$\overrightarrow{OA} = (-1, 0), \quad \overrightarrow{AB} = (4, -2), \quad \overrightarrow{BC} = (8, 8)$$

したがって

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (-1, 0) + (4, -2) = (3, -2),$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (3, -2) + (8, 8) = (11, 6)$$

以上の結果から **A(-1, 0), B(3, -2), C(11, 6)**

(2) 3点 A(-1, 0), B(3, -2), C(11, 6) を通る円の方程式を

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$$

とおくと

$$\begin{cases} (-1)^2 + 0^2 + p \cdot (-1) + q \cdot 0 + r = 0 \\ 3^2 + (-2)^2 + p \cdot 3 + q \cdot (-2) + r = 0 \\ 11^2 + 6^2 + p \cdot 11 + q \cdot 6 + r = 0 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} -p + r + 1 = 0 \\ 3p - 2q + r + 13 = 0 \\ 11p + 6q + r + 157 = 0 \end{cases}$$

これを解いて $p = -8, q = -10, r = -9$

したがって、求める円の方程式は

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y - 9 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 50$$

(3) (2) の結果から P(4, 5)

$$\overrightarrow{AB} = (4, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (12, 6), \quad \overrightarrow{AP} = (5, 5)$$

したがって

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} |4 \cdot 6 - (-2) \cdot 12| = 24, \quad \triangle ABP = \frac{1}{2} |4 \cdot 5 - (-2) \cdot 5| = 15$$

よって $\triangle ABC : \triangle ABP = 24 : 15 = \mathbf{8 : 5}$

3 (1) $\triangle OAP$ に余弦定理を適用すると

$$AP^2 = OP^2 + OA^2 - 2OP \cdot OA \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$OP = 1$, $AP = 2$ であるから

$$2^2 = 1^2 + OA^2 + 2 \cdot 1 \cdot OA \sin \theta$$

整理すると

$$OA^2 + 2OA \sin \theta - 3 = 0$$

$OA > 0$ に注意してこれを解くと $OA = -\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + 3}$

点 A の y 座標は負であるから $A(0, \sin \theta - \sqrt{\sin^2 \theta + 3})$

$\overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{AP}$ より $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = 4(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= -3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OP} \\ &= -3(0, \sin \theta - \sqrt{\sin^2 \theta + 3}) + 4(\cos \theta, \sin \theta) \\ &= (4 \cos \theta, \sin \theta + 3\sqrt{\sin^2 \theta + 3})\end{aligned}$$

よって $Q(4 \cos \theta, \sin \theta + 3\sqrt{\sin^2 \theta + 3})$

(2) 点 Q の座標を $(f(\theta), g(\theta))$ とすると $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, (1) の結果から

$$f(\theta) = 4 \cos \theta, \quad g(\theta) = \sin \theta + 3\sqrt{\sin^2 \theta + 3}$$

Q の x 座標は, $\theta = 0$ のとき最大値 4 , $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ のとき最小値 0

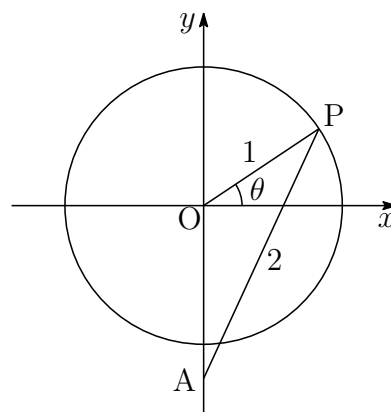
$g(\theta)$ を微分すると

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= \cos \theta + \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 3}} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 3}} (\sqrt{\sin^2 \theta + 3} + 3 \sin \theta)\end{aligned}$$

$g'(\theta) = 0$ とすると $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$3 \sin \theta = -\sqrt{\sin^2 \theta + 3}$$

$\sin \theta < 0$ に注意して $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$



$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ とおくと $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$, $g(\theta)$ の増減表は

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$	5	$\searrow$	$2\sqrt{6}$	$\nearrow$	7

Q の y 座標は, $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき **最大値 7**, $\theta = \alpha$ のとき **最小値 $2\sqrt{6}$**

(3) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ および $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における Q の軌跡をそれぞれ C_1 , C_2 とする. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$x_1 = f(\theta), y_1 = g(\theta), x_2 = f(-\theta), y_2 = g(-\theta)$$

とおくと

$$x_1 = x_2, \quad y_1 - y_2 = 2 \sin \theta \geq 0$$

C_1 は C_2 の上側にあるから, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{f(\frac{\pi}{2})}^{f(0)} (y_1 - y_2) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2 \sin \theta (4 \cos \theta)' d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \sin^2 \theta d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= 4 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{2\pi} \end{aligned}$$

別解 ガウス・グリーンの定理により ⁵

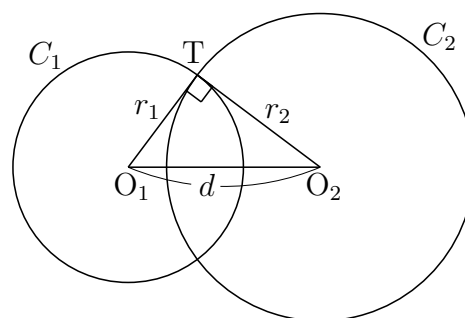
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(\theta)g'(\theta) - f'(\theta)g(\theta)\} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 4 \cos \theta \left(\cos \theta + \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 3}} \right) + 4 \sin \theta \left(\sin \theta + 3\sqrt{\sin^2 \theta + 3} \right) \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 + \frac{48 \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 3}} \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 d\theta = \mathbf{2\pi} \end{aligned}$$

⁵http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf 5

- 4 (1) C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とし, C_1 と C_2 が直交する点を T とすると, 右の図から

$$O_1T^2 + O_2T^2 = O_1O_2^2$$

$$\text{よって} \quad r_1^2 + r_2^2 = d^2$$



- (2) 点 $(p, 0)$ を P とし, C_1, C_2 の両方に直交する円の中心を X , 半径を R とすると, (1) の結論から

$$r_1^2 + R^2 = |\vec{OX}|^2, \quad r_2^2 + R^2 = |\vec{PX}|^2 \quad (*)$$

$$\text{上の2式から} \quad r_1^2 - r_2^2 = |\vec{OX}|^2 - |\vec{PX}|^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

①の右辺を計算すると

$$\begin{aligned} |\vec{OX}|^2 - |\vec{PX}|^2 &= |\vec{OX}|^2 - |\vec{OX} - \vec{OP}|^2 \\ &= 2\vec{OP} \cdot \vec{OX} - |\vec{OP}|^2 = 2\vec{OP} \cdot \vec{OX} - p^2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②より

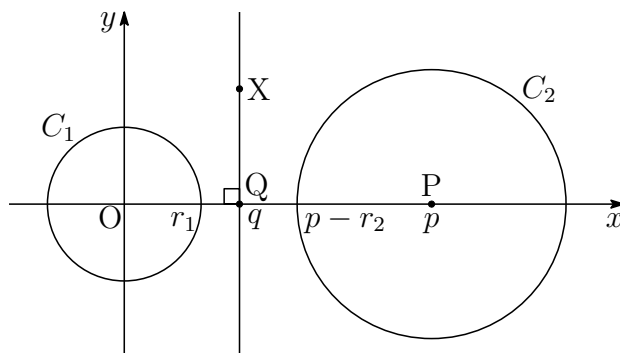
$$2\vec{OP} \cdot \vec{OX} - p^2 = r_1^2 - r_2^2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{OP} \cdot \vec{OX} = \frac{p^2 + r_1^2 - r_2^2}{2}$$

$q = \frac{p^2 + r_1^2 - r_2^2}{2p}$ とし, 点 Q の座標を $(q, 0)$ とおくと

$$\vec{OP} \cdot \vec{OX} = \vec{OP} \cdot \vec{OQ} \quad \text{すなわち} \quad \vec{OP} \cdot \vec{QX} = 0$$

よって, 中心 X の軌跡は, 点 Q を通り直線 OP に垂直な直線である.

また, (*) より, 半径 R は, X から C_1, C_2 に引いた接線の接点と X との距離である.



(3) 前ページの図において, ③ および $p > r_1 + r_2$ から

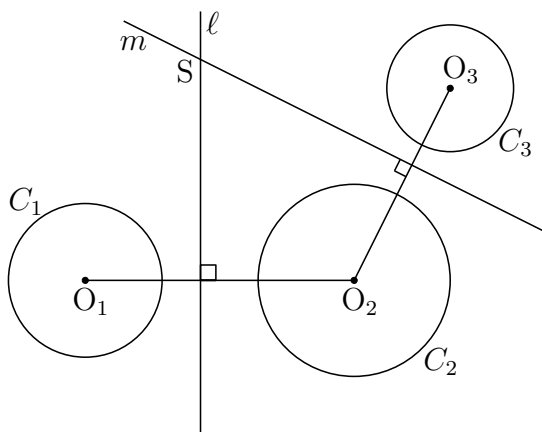
$$\begin{aligned}
 q - r_1 &= \frac{p^2 + r_1^2 - r_2^2}{2p} - r_1 = \frac{(p - r_1)^2 - r_2^2}{2p} \\
 &= \frac{(p - r_1 + r_2)(p - r_1 - r_2)}{2p} > 0, \\
 (p - r_2) - q &= p - r_2 - \frac{p^2 + r_1^2 - r_2^2}{2p} = \frac{(p - r_2)^2 - r_1^2}{2p} \\
 &= \frac{(p + r_1 - r_2)(p - r_1 - r_2)}{2p} > 0
 \end{aligned}$$

したがって, (2) で求めた点 Q は, C_1, C_2 の外部の点である.

互いに外部にある 3 つの円を C_1, C_2, C_3 とし, それらの円の中心を O_1, O_2, O_3 とすると, 次が

- C_1, C_2 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を ℓ とすると, ℓ は線分 O_1O_2 と垂直で, C_1 と C_2 の外部にある.
- C_2, C_3 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を m とすると, m は線分 O_2O_3 と垂直で, C_2 と C_3 の外部にある.

3 点 O_1, O_2, O_3 は同一直線上にないから, ℓ と m は 1 点で交わり, この交点を S とすると, S から C_1, C_2, C_3 に引いた接線の接点で直交する.



別解 (2) 点 $(p, 0)$ を P とし, C_1, C_2 の両方に直交する円の中心を X , 半径を R とすると, (1) の結論から

$$r_1^2 + R^2 = |\overrightarrow{OX}|^2, \quad r_2^2 + R^2 = |\overrightarrow{PX}|^2 \quad (*)$$

上の2式から $r_1^2 - r_2^2 = |\overrightarrow{OX}|^2 - |\overrightarrow{PX}|^2$

ここで, 直線 OP 上に点 $T(t, 0)$ をとると, 上式から

$$\begin{aligned} r_1^2 - r_2^2 &= |\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TX}|^2 - |\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TX}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OT}|^2 - |\overrightarrow{PT}|^2 + 2\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{TX} - 2\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{TX} \\ &= |\overrightarrow{OT}|^2 - |\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OP}|^2 + 2(\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{PT}) \cdot \overrightarrow{TX} \\ &= 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OT} - |\overrightarrow{OP}|^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{TX} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad -2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{TX} &= 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OT} - |\overrightarrow{OP}|^2 - r_1^2 + r_2^2 \\ &= 2pt - p^2 - r_1^2 + r_2^2 \end{aligned}$$

$$f(t) = 2pt - p^2 - r_1^2 + r_2^2 \text{ とすると } (p > r_1 + r_2, r_1 > 0, r_2 > 0)$$

$$\begin{aligned} f(r_1) &= 2pr_1 - p^2 - r_1^2 + r_2^2 \\ &= r_2^2 - (p - r_1)^2 = (r_2 + p - r_1)(r_2 - p + r_1) < 0 \\ f(p - r_2) &= 2p(p - r_2) - p^2 - r_1^2 + r_2^2 \\ &= p^2 - 2pr_2 + r_2^2 - r_1^2 = (p - r_2 + r_1)(p - r_2 - r_1) > 0 \end{aligned}$$

$f(t)$ は単調増加であるから, $f(t) = 0$ の解を q とすると $r_1 < q < p - r_2$ したがって, $Q(q, 0)$ とすると $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{QX} = 0$

よって, 中心 X の軌跡は, 点 Q を通り直線 OP に垂直な直線である. このとき, Q は C_1 と C_2 の外部の点である. また, (*) より, 半径 R は, X から C_1, C_2 に引いた接線の接点と X との距離である.

(3) 互いに外部にある3つの円を C_1, C_2, C_3 とし, それらの円の中心を O_1, O_2, O_3 とすると, (2) の結論から次が成立する.

- C_1, C_2 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を ℓ とすると, ℓ は線分 O_1O_2 と垂直で, C_1 と C_2 の外部にある.
- C_2, C_3 の両方に直交する円の中心の描く軌跡を m とすると, m は線分 O_2O_3 と垂直で, C_2 と C_3 の外部にある.

3点 O_1, O_2, O_3 は同一直線上にないから, ℓ と m は1点で交わり, この交点を S とすると, S から C_1, C_2, C_3 に引いた接線の接点で直交する.

2.10 2024 年度

- 1** (1) 袋 A_k から白玉，黒玉が取り出される確率は，それぞれ $\frac{k}{n}$ ， $1 - \frac{k}{n}$ である ($k = 1, 2, \dots, n$). 求める確率は，2回の試行で白玉が1回，黒玉が1回取り出される確率であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n {}_2C_1 \cdot \frac{k}{n} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) &= \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{n} \cdot k^2\right) \\ &= \frac{2}{n^2} \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{3n^2} \end{aligned}$$

- (2) $A = A_k$ のとき， s 回の試行で白玉がちょうど t 回取り出される確率 $p(t)$ は

$$p(t) = {}_sC_t \left(\frac{k}{n}\right)^t \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{s-t} \quad (*)$$

上式に $s = 100$ ， $n = 3k$ を代入すると

$$p(t) = {}_{100}C_t \left(\frac{1}{3}\right)^t \left(\frac{2}{3}\right)^{100-t} = \frac{100!}{t!(100-t)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$\begin{aligned} \text{これから} \quad \frac{p(t+1)}{p(t)} - 1 &= \frac{t!(100-t)!}{(t+1)!(99-t)!} \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{100-t}{2(t+1)} - 1 = \frac{98-3t}{2(t+1)} \end{aligned}$$

ゆえに $p(0) < p(1) < \dots < p(32) < p(33) > p(34) > \dots > p(100)$

よって，求める t の値は $t = 33$

- (3) (*) に $s = 10$ ， $t = 3$ を代入した $p(3)$ を利用して

$$q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(3) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n {}_{10}C_3 \left(\frac{k}{n}\right)^3 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^7$$

したがって ⁶

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = {}_{10}C_3 \int_0^1 x^3 (1-x)^7 dx = {}_{10}C_3 \frac{3!7!}{11!} (1-0)^{11} = \frac{1}{11}$$

⁶<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> 1

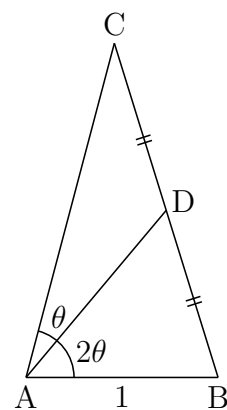
- 2 (1) $BD = CD$ より, $\triangle ABD = \triangle ACD$ であるから

$$\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin 2\theta = \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin \theta$$

$$\text{したがって} \quad AB \sin 2\theta = AC \sin \theta$$

$$AB = 1 \text{ より}$$

$$AC = \frac{AB \sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta$$



- (2) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 3\theta \\ &= 1^2 + (2 \cos \theta)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos \theta \cdot (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ &= -16 \cos^4 \theta + 16 \cos^2 \theta + 1 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad BC = \sqrt{-16 \cos^4 \theta + 16 \cos^2 \theta + 1}$$

- (3) (2) の結果から

$$BC^2 = -16 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)^2 + 5$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{3} \text{ に注意して}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, 最大値 } \sqrt{5}$$

3 (1) $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1 + k$ $\left(0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right)$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos^2 x - \cos x + k \\ &= -\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(*) $t = \cos x$ とし $(-1 \leq t \leq 1)$, 関数

$$\varphi(t) = -t^2 - t + k = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{1}{4}$$

とすると

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\varphi(t)$	k	$\nearrow$	$k + \frac{1}{4}$	$\searrow$	k	$\searrow$	$k - 2$

$f(x) = 0$ が解をもつのは, $k - 2 \leq 0 \leq k + \frac{1}{4}$ のときである.

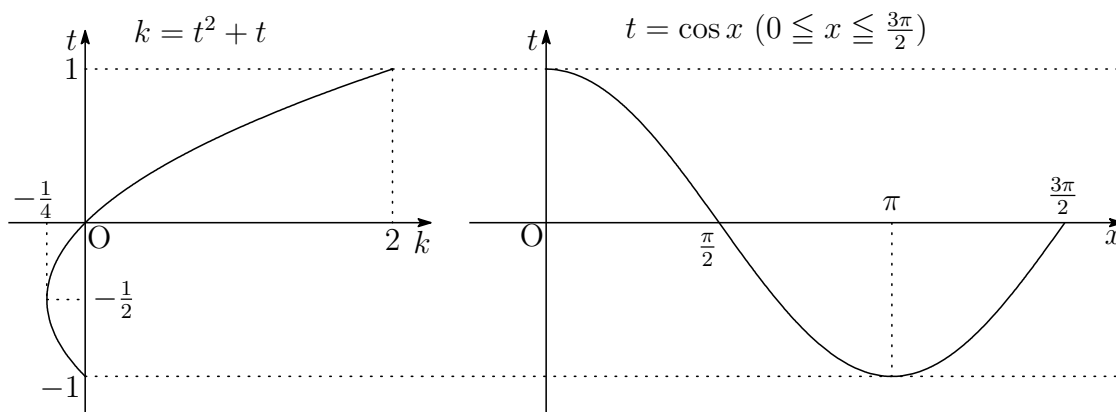
$0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ より, t $(-1 \leq t \leq 1)$ の値に対する (*) を満たす x の個数は

$t = -1$ のとき 1 個, $-1 < t \leq 0$ のとき 2 個, $0 < t \leq 1$ のとき 1 個

したがって

$0 < k - 2$ のとき	0 個
$k - 2 \leq 0 < k$ のとき	1 個
$k = 0$ のとき	3 個
$k < 0 < k + \frac{1}{4}$ のとき	4 個
$k + \frac{1}{4} = 0$ のとき	2 個
$k + \frac{1}{4} < 0$ のとき	0 個

よって	$2 < k$ のとき	0 個
	$0 < k \leq 2$ のとき	1 個
	$k = 0$ のとき	3 個
	$-\frac{1}{4} < k < 0$ のとき	4 個
	$k = -\frac{1}{4}$ のとき	2 個
	$k < -\frac{1}{4}$ のとき	0 個



(2) (1) の結果から, $f(x) = 0$ の解の個数が 2 個以上であるとき

$$-\frac{1}{4} \leq k \leq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f(x) = \varphi(t)$, $t = \cos x$ より, $\alpha = \cos p_1$, $\beta = \cos p_2$ とおくと

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \varphi(t) = -(t - \alpha)(t - \beta)$$

(*) より, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ であるから

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_{p_1}^{p_2} f(x) \sin x \, dx = - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \, dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)(t - \beta) \, dt = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\alpha - \beta)^3 \end{aligned}$$

$\varphi(t) = 0$ の解と係数の関係により $\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = -k \quad \cdots \textcircled{2}$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 4k$$

①, ② より, $\alpha = \cos p_1 \leq 0$, $\beta = \cos p_2 \leq 0$ であるから, t に対する x の値に注意すると

$$\frac{\pi}{2} \leq p_1 < p_2 \leq \pi \quad \text{ゆえに} \quad \cos p_2 \leq \cos p_1 \quad \left(\text{等号は } k = -\frac{1}{4} \text{ のとき} \right)$$

$$\alpha - \beta \geq 0 \text{ であるから } \alpha - \beta = \sqrt{1 + 4k} \quad \text{ゆえに} \quad g(k) = \frac{1}{6}(1 + 4k)^{\frac{3}{2}}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \quad \text{最大値 } g(0) = \frac{1}{6}, \text{ 最小値 } g\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

4 (1) $k^2 - \ell^2 = 3^m$ より $(k + \ell)(k - \ell) = 3^m$

$k + \ell > k - \ell$ より, 自然数 m_1, m_2 を用いて

$$k + \ell = 3^{m_1}, \quad k - \ell = 3^{m_2} \quad (m_1 + m_2 = m, m_1 > m_2 \geq 0)$$

とすると, $3^{m_1} \equiv 1, 3^{m_2} \equiv 1 \pmod{2}$ に注意して

$$k = \frac{3^{m_1} + 3^{m_2}}{2}, \quad \ell = \frac{3^{m_1} - 3^{m_2}}{2} \quad (*)$$

$0 \leq m_2 \leq \left[\frac{m-1}{2}\right]$ であるから, 求める自然数 (k, ℓ) の組の個数は

$$\left[\frac{m-1}{2}\right] + 1 = \left[\frac{m+1}{2}\right]$$

(2) 2つの整数 a, b の最大公約数を $\gcd(a, b)$ とする. x は 3 の倍数でないから, ユークリッドの互除法により

$$\gcd(x, x + 3^m) = \gcd(x, 3^m) = 1$$

x が 3 の倍数でないとき, x と $x + 3^m$ は互いに素である.

$\sqrt{x(x + 3^m)}$ が整数であるとき, 整数 k, ℓ を用いて

$$x + 3^m = k^2, \quad x = \ell^2 \quad \text{ゆえに} \quad (k + \ell)(k - \ell) = 3^m$$

したがって, $(*)$ を得る. このとき, $x = \ell^2$ より, ℓ は 3 の倍数でないから

$$(m_1, m_2) = (m, 0), (0, m) \quad \text{よって} \quad x = \left(\frac{3^m - 1}{2}\right)^2$$

(3) x が 3^m を約数にもつとき, $x = 3^m A$ とおくと ($A > 0$ は整数)

$$\sqrt{x(x + 3^m)} = \sqrt{3^m A(3^m A + 3^m)} = 3^m \sqrt{A} \sqrt{A + 1}$$

$\gcd(A, A + 1) = \gcd(A, 1) = 1$ より, 上式が整数のとき, $\sqrt{A}, \sqrt{A + 1}$ は整数であるから, 次式より, これを満たす整数 x は存在しない.

$$1 = (\sqrt{A + 1})^2 - (\sqrt{A})^2 = (\sqrt{A + 1} + \sqrt{A})(\sqrt{A + 1} - \sqrt{A})$$

$x = 3^j B_j$ ($B_j > 0$ は 3 で割り切れない) とすると ($j = 0, 1, \dots, m-1$)

$$\sqrt{x(x+3^m)} = \sqrt{3^j B_j (3^j B_j + 3^m)} = 3^j \sqrt{B_j (B_j + 3^{m-j})}$$

このとき, $\sqrt{B_j (B_j + 3^{m-j})}$ は整数であるから, (2) の結論より

$$B_j = \left(\frac{3^{m-j} - 1}{2} \right)^2 \quad \text{すなわち} \quad x = 3^j B_j \quad (j = 0, 1, \dots, m-1)$$

よって, 求める x の個数は $\mathbf{m}$ (個)

第 3 章 一般前期研究

3.1 2015 年

3.1.1 2 番 研究

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, 次が成立する.

問 解

空間ベクトルの平行条件

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ について

$$\vec{a} // \vec{b} \iff (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = (0, 0, 0)$$

証明 97 ページに示したベクトル積 (外積)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

により, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積と等しいから

$$\vec{a} // \vec{b} \iff |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \quad \text{すなわち} \quad \vec{a} // \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 0)$$

証終

(1) $A(1, p, 0)$, $B(q, 1, 1)$, $C(-1, -1, r)$ が一直線上にあるとき

$$\overrightarrow{AB} = (q-1, 1-p, 1) \quad // \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1-p, r)$$

平行条件により, 次式が成立する.

$$(r(1-p) + 1 + p, -2 - r(q-1), (q-1)(-1-p) + 2(1-p)) = (0, 0, 0) \\ \dots (*)$$

$p = 1$ のとき, 左辺の x 成分が 2 となり不適. また, $p = -1$ のとき, 左辺の z 成分が 4 となり不適. ■

(2) (*) の x 成分および z 成分により

$$r(1-p) + 1 + p = 0, \quad (q-1)(-1-p) + 2(1-p) = 0$$

$$q, r \text{ について解くと } q = \frac{3-p}{p+1}, \quad r = \frac{p+1}{p-1}$$

■

平面の方程式

点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通り, 法ベクトル $\vec{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面 S の方程式は

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

証明 S 上に任意の点 $P(x, y, z)$ をとる. $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ より明らか¹.

証終

(3) (1),(2) の結果から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (q-1, 1-p, 1) = \left(\frac{2(1-p)}{1+p}, 1-p, 1 \right) \\ &= \frac{1}{1+p} (2(1-p), (1+p)(1-p), 1+p) \end{aligned}$$

条件より, 4点 O, A', B', C' は点 O を通り, $\overrightarrow{AB}$ に垂直な平面上にある.
この平面 S の方程式は

$$S: 2(1-p)x + (1+p)(1-p)y + (1+p)z = 0$$

S 上に $A'(1, p', 0), B'(q, 1, 1), C'(-1, -1, r')$ があるから

$$\begin{aligned} 2(1-p) + (1+p)(1-p)p' &= 0, \\ 2(1-p)q' + (1+p)(1-p) + (1+p) &= 0, \\ -2(1-p) - (1+p)(1-p) + (1+p)r' &= 0 \end{aligned}$$

$p \neq \pm 1$ に注意して, それぞれ解くと

$$p' = -\frac{2}{p+1}, \quad q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}, \quad r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}$$

■

¹昭和59年3月以前の高卒者は授業で学んでいた.

- (4) 3 点 $A'(1, p', 0)$, $B'(q', 1, 1)$, $C'(-1, -1, r')$ が一直線上にあると仮定すると,
(1) と同様にして

$$(r'(1 - p') + 1 + p', -2 - r'(q' - 1), (q' - 1)(-1 - p') + 2(1 - p')) = (0, 0, 0)$$

上式の x 成分から

$$r'(1 - p') + 1 + p' = 0$$

これに (3) の結果を代入すると

$$-\frac{(p+3)(p-1)}{p+1} \left(1 + \frac{2}{p+1}\right) + 1 - \frac{2}{p+1} = 0$$

整理すると

$$p^2 + 5p + 8 = 0 \quad \cdots (**)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -7 < 0$$

したがって, (**) を満たす実数 p は存在しない.

よって, 3 点 A' , B' , C' は一直線上にない.

3.2 2016年

3.2.1 2番 バウムクーヘン型求積法

次の回転体の体積について、円筒形に区分して考えると積分の意味が理解できる.

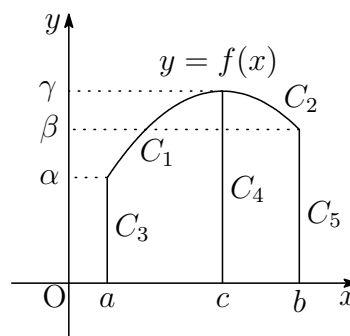
$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸および2直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに1回転してできる立体の体積 V は 問 解

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

証明 $y = f(x)$ のグラフを単調増加または単調減少の区間に分けて証明する. 例えば, 右の図のように $y = f(x)$ は $a \leq x \leq c$ で単調増加, $c \leq x \leq b$ では単調減少とする. このとき, それぞれの区間で逆関数が存在することから

$$C_1 : x = g_1(y) \quad (\alpha \leq y \leq \gamma),$$

$$C_2 : x = g_2(y) \quad (\beta \leq y \leq \gamma)$$



とおき, さらに次のようにおく.

$$C_3 : x = a \quad (0 \leq y \leq \alpha), \quad C_4 : x = c \quad (0 \leq y \leq \gamma), \quad C_5 : x = b \quad (0 \leq y \leq \beta)$$

x 軸と C_1 , C_3 , C_4 で囲まれた部分および C_2 , C_4 , C_5 で囲まれた部分をそれぞれ y 軸の回りに1回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1 , V_2 とすると

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_0^\gamma c^2 dy - \int_0^\alpha a^2 dy - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2 dy \\ &= c^2 \gamma - a^2 \alpha - \int_a^c x^2 f'(x) dx \\ &= c^2 \gamma - a^2 \alpha - \left[x^2 f(x) \right]_a^c + 2 \int_a^c x f(x) dx = 2 \int_a^c x f(x) dx \\ \frac{V_2}{\pi} &= \int_0^\beta b^2 dy + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2 dy - \int_0^\gamma c^2 dy \\ &= b^2 \beta - c^2 \gamma + \int_b^c x^2 f'(x) dx \\ &= b^2 \beta - c^2 \gamma + \left[x^2 f(x) \right]_b^c - 2 \int_b^c x f(x) dx = 2 \int_c^b x f(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{よって } V = V_1 + V_2 = 2\pi \int_a^c x f(x) dx + 2\pi \int_c^b x f(x) dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

一般に, 単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る. 証終

3.3 2017 年

3.3.1 1 番 研究 1

$x, y, z > 0, x + y + z = \frac{\pi}{2}$ のとき,

問 解

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

の最小値を求める.

$z = \theta$ (θ は定数) に対し, S が最小となるときの x, y の値は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} + \frac{1}{\tan \theta} \\ &= \frac{\cos x \sin y + \sin x \cos y}{\sin x \sin y} + \frac{1}{\tan \theta} \\ &= \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)} + \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

$0 \leq |x-y| < x+y = \frac{\pi}{2} - \theta$ に注意すると, S が最小となるのは, $y = x, z = \frac{\pi}{2} - 2x > 0$ のときであるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - 2x)} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{2}{\tan x} + \tan 2x = \frac{2}{\tan x} + \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

ここで, $t = \tan x, f(t) = \frac{2}{t} + \frac{2t}{1-t^2}$ ($0 < t < 1$) とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \\ f'(t) &= -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{2(3t^2-1)}{t^2(t+1)^2(t-1)^2} \end{aligned}$$

したがって, $f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	極小 $3\sqrt{3}$	$\nearrow$	

S が最小となるのは, $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, すなわち, $x = y = z = \frac{\pi}{6}$ のとき, 最小値 $3\sqrt{3}$ をとる.

3.3.2 1 番 研究 2

$x, y, z > 0, x + y + z = \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

の最小値を求める.

束縛条件を平面

$$P: x + y + z = \frac{\pi}{2} \quad (x, y, z > 0)$$

とし, P 上の正則な平面曲線

$$\begin{aligned} C(t) &= (x, y, z) \\ &= (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

が $t = t_0$ で極値をとり, その点 A を

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$$

とする. $C(t)$ は P 上にあるから, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad \cdots (*)$$

上の第 1 式から

$$(1, 1, 1) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = 0 \quad \cdots (**)$$

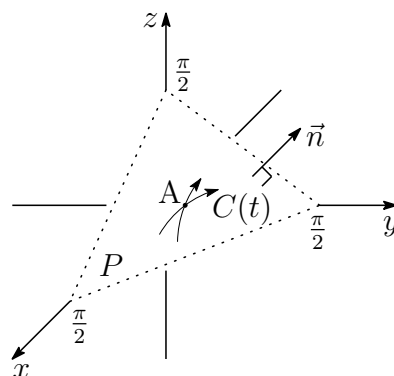
$C(t)$ の接方向は, 常に P の法ベクトル $\vec{n} = (1, 1, 1)$ に垂直である.

$C(t)$ 上の点 (x, y, z) について, S は t の関数であるから

$$f(t) = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{1}{\sin^2 y} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin^2 z} \cdot \frac{dz}{dt}, \\ f''(t) &= \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{2 \cos y}{\sin^3 y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{2 \cos z}{\sin^3 z} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{\sin^2 y} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{\sin^2 z} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$



$t = t_0$ で S が極値をとるための必要条件は, $f'(t_0) = 0$ であるから

$$-\frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin^2 \gamma} \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{\sin^2 \alpha}, -\frac{1}{\sin^2 \beta}, -\frac{1}{\sin^2 \gamma} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = 0$$

A を通る $C(t)$ の任意の接方向に対して上式が成り立つので, (**) より

$$\left(-\frac{1}{\sin^2 \alpha}, -\frac{1}{\sin^2 \beta}, -\frac{1}{\sin^2 \gamma} \right) // (1, 1, 1)$$

$0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$$

このとき, $C(t)$ は正則であるから $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \neq \vec{0}$

また, (*) の第 2 式に注意して

$$f''(t_0) = 8\sqrt{3} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} - 4 \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

$$= 8\sqrt{3} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} > 0$$

$f'(t_0) = 0$, $f''(t_0) > 0$ より, $f(t)$ は極小値 $f(t_0)$ をとる.

よって, 点 A $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right)$ で S は極小値, すなわち, 最小値 $3\sqrt{3}$ をとる.

3.3.3 3番(2) 別解

$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$ より, $f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}$ であるから 問 解

$$\begin{aligned}
 & f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\} \\
 &= 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \left(\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t^3}\right)(x-t) - \left(1 - \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2}\right) \\
 &= -3 \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}(x-t) \right\} + 2 \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3}(x-t) \right\} \\
 &= -3 \left\{ -\frac{x-t}{xt} + \frac{1}{t^2}(x-t) \right\} + 2 \left\{ \frac{-(x^2-t^2)}{x^2t^2} + \frac{2}{t^3}(x-t) \right\} \\
 &= -3(x-t) \left(-\frac{1}{xt} + \frac{1}{t^2} \right) + 2(x-t) \left(-\frac{x+t}{x^2t^2} + \frac{2}{t^3} \right) \\
 &= -3(x-t) \cdot \frac{-t+x}{xt^2} + 2(x-t) \cdot \frac{-t(x+t) + 2x^2}{x^2t^3} \\
 &= -3(x-t)^2 \cdot \frac{1}{xt^2} + 2(x-t) \cdot \frac{(x-t)(2x+t)}{x^2t^3} \\
 &= (x-t)^2 \left\{ -\frac{3}{xt^2} + \frac{2(2x+t)}{x^2t^3} \right\} = \frac{(x-t)^2 \{(-3t+4)x + 2t\}}{x^2t^3}
 \end{aligned}$$

方程式 $f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\} = 0$ の解 $x > 0$ が 1 個であるのは

$$\begin{aligned}
 -3t+4 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < t \leq \frac{4}{3} \quad \text{のとき} \quad x=t \text{ の 1 個} \\
 \frac{2t}{3t-4} = t \quad \text{すなわち} \quad t=2 \quad \text{のとき} \quad x=2 \text{ の 1 個}
 \end{aligned}$$

よって, 求める t の最大値は $t=2$

補足 $y = f(x)$ と $y = f'(t)(x-t) + f(t)$ は, $x=t$ で 1 次の接触をなす. $f(x)$ は有理関数であるから, $f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\}$ は $(x-t)^2$ を因数にもつ. 別解では関数 $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = \frac{1}{x}$, $h_2(x) = \frac{1}{x^2}$ を考え,

$$h_i(x) - \{h'_i(t)(x-t) + h_i(t)\}$$

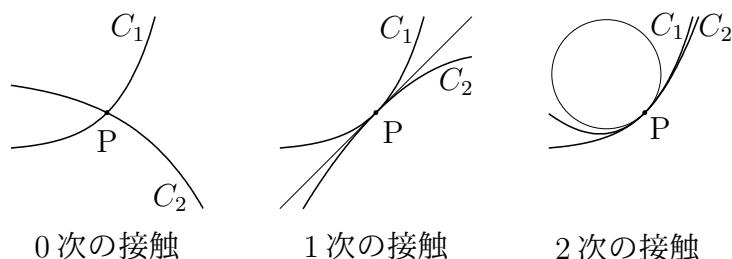
は $(x-t)^2$ を因数にもつことに注意し ($i=1, 2$),

$$f(x) = h_0(x) - 3h_1(x) + 2h_2(x)$$

として計算した.

2 曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ の共有点 P の x 座標を α とする.

1. $f(\alpha) = g(\alpha)$ であるとき, C_1 と C_2 は P で 0 次の接触をなすという.
2. $f(\alpha) = g(\alpha)$, $f'(\alpha) = g'(\alpha)$ であるとき, C_1 と C_2 は P で 1 次の接触をなすとい
い, P における C_1 および C_2 の接線が一致する.
3. $f(\alpha) = g(\alpha)$, $f'(\alpha) = g'(\alpha)$, $f''(\alpha) = g''(\alpha)$ であるとき, C_1 と C_2 は P で 2 次の
接触をなすとい, P における C_1 および C_2 の接触円 (曲率円)² が一致する.



一般に, $f^{(k)}(\alpha) = g^{(k)}(\alpha)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) が成り立つとき, C_1 と C_2 は P で n 次の接触をなすという.

準備 ライプニッツの公式 (Leibniz formula)

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_nC_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

証明は, 数学的帰納法により示すことができる.

補題 2 つの有理関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x = \alpha$ で 1 次の接触をなすとき, 有理関数 $\varphi_1(x)$ を用いて

$$f(x) - g(x) = (x - \alpha)\varphi_1(x)$$

これを微分して $f'(x) - g'(x) = \varphi_1(x) + (x - \alpha)\varphi_1'(x)$

$f'(\alpha) = g'(\alpha)$ であるから, 有理関数 $\varphi_2(x)$ を用いて

$$\varphi_1(x) + (x - \alpha)\varphi_1'(x) = (x - \alpha)\varphi_2(x)$$

ゆえに $\varphi_1(x) = (x - \alpha)\{\varphi_2(x) - \varphi_1'(x)\}$

したがって $f(x) - g(x) = (x - \alpha)^2\{\varphi_2(x) - \varphi_1'(x)\}$

よって, $f(x) - g(x)$ は $(x - \alpha)^2$ を因数にもつ.

²<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri.2009.pdf> [3] 解説を参照.

定理

2つの有理関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x = \alpha$ で n 次の接触をなすとき, $f(x) - g(x)$ は $(x - \alpha)^{n+1}$ を因数にもつ.

証明 $n = 0$ のとき, 明らか. $n = 1$ のとき, 補題により示された.

n 次の接触をなすとき, $0 \leq k \leq n$ について, k 次の接触をなす.

$n = k$ のとき成り立つと仮定すると, 有理関数 $\varphi(x)$ を用いて

$$f(x) - g(x) = (x - \alpha)^{k+1} \varphi(x)$$

と表せる. ライプニッツの公式を用いてこれを $k + 1$ 回微分すると

$$f^{(k+1)}(x) - g^{(k+1)}(x) = (k+1)! \varphi(x) + \sum_{j=1}^{k+1} {}_{k+1}C_j \{(x - \alpha)^{k+1}\}^{(k+1-j)} \varphi^{(j)}(x)$$

$f^{(k+1)}(\alpha) = g^{(k+1)}(\alpha)$ であるから, 上式は $x - \alpha$ を因数にもつ.

また, $1 \leq j \leq k + 1$ のとき $\{(x - \alpha)^{k+1}\}^{(k+1-j)}$ は $x - \alpha$ を因数にもつので, $\varphi(x)$ は有理関数 $\phi(x)$ を用いて

$$\varphi(x) = (x - \alpha) \phi(x)$$

したがって, $n = k + 1$ のとき, 次式が成り立つ.

$$f(x) - g(x) = (x - \alpha)^{k+2} \phi(x)$$

このとき, $f(x) - g(x)$ は $(x - \alpha)^{k+2}$ を因数にもつ.

よって, 数学的帰納法により, 定理は示された.

3.4 2018 年

3.4.1 1 番 ベクトル積 (外積)

2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき, ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は, $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する. このベクトルを, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積と言い, $\vec{a} \times \vec{b}$ で表し, その成分は

問 解

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

であるから, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ が成り立つ. また, その大きさについて

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

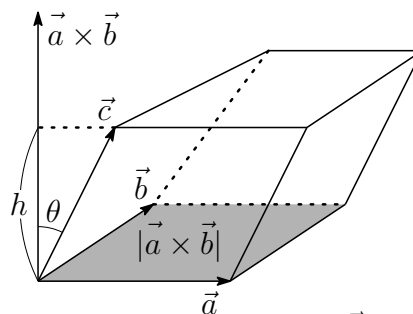
であるから, $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい.

$\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos \theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| |\cos \theta|$$



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の張る平行六面体について, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平面を底面とすると, $|\vec{c}| \cos \theta$ は, その高さ h であるから, この平行六面体の体積 V_1 は

$$V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

また, 対称性により, $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$ が成り立つ.

補足 本題で, $\vec{AB} = (3, -3, 0)$, $\vec{AC} = (3, 3, 3)$ より $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-9, -9, 18)$

$$\text{したがって} \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{9}{2} \sqrt{6}$$

$$\vec{AD} = (0, 1, 1) \text{ より } V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} |9| = \frac{3}{2}$$

3.4.2 3番(2) 研究

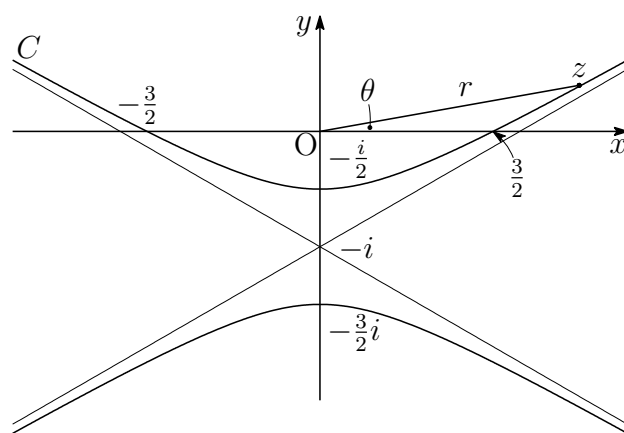
(1) で求めた結果から, H は双曲線で, 焦点は y 軸上の 2 点 $(0, \pm 1)$ で, 2 頂点が $(0, \pm \frac{1}{2})$ であるから, 離心率 $e = 2$ より, $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ とおくと ³ 問 解

$$b = \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 次曲線の極方程式の極は 2 次曲線の焦点であるから, その焦点を複素数平面の原点とする出題もある ⁴. 例えば, H の焦点の 1 つを O に平行移動した $|z + 2i| - |z| = \pm 1$ に対し, $r = |z|$, $\theta = \arg z$ とおくと, 離心率 $e = 2$ および点 $(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2})$ を通ることから

$$C: r = \frac{\frac{3}{2}}{1 - 2 \sin \theta} \quad \cdots (*)$$

となる. C を $0 \leq \theta < 2\pi$ で考えると, $1 - 2 \sin \theta = 0$, すなわち, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ のとき, 漸近線と平行となり, これに対応する C 上の点は存在しない. なお, $\theta = \frac{\pi}{6} - 0$ のとき, C は第 1 象限の無限遠点あり, $\theta = \frac{\pi}{6} + 0$ のとき, C は第 3 象限の無限遠点にある. また, $\theta = \frac{5\pi}{6} - 0$ のとき, C は第 4 象限の無限遠点にあり, $\theta = \frac{5\pi}{6} + 0$ のとき, C は第 2 象限の無限遠点にある.



(*) から, C を複素数平面上の点 z として

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{3(\cos \theta + i \sin \theta)}{2(1 - 2 \sin \theta)}$$

と表すことができる.

³http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf (p.11 を参照)

⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_kou_2002.pdf 3

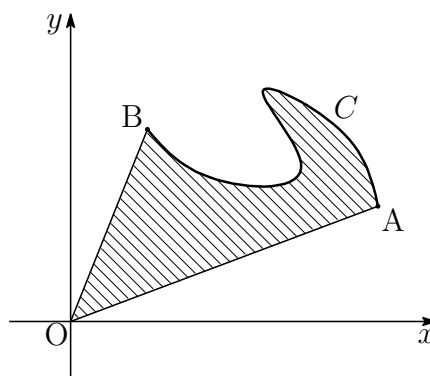
3.5 2021 年

3.5.1 3 番 ガウス・グリーン の 定理

ガウス・グリーン の 定理

曲線 $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$)
 について, $t = \alpha, \beta$ に対応する点をそれぞれ A, B とする. C と直線 OA, OB で
 囲まれた部分の面積を S とすると
 (OB の偏角 $> OA$ の偏角)

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt$$



本題 (2) は, ガウス・グリーン の 定理を用いて求めることもできる.

問 解

解答 (1) 媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C: x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad (*)$$

は, $(**) x = \sqrt{y^2 + 1}$ である. C 上の点 $P(x, y)$ と $M(0, 1)$ の距離は

$$MP^2 = x^2 + (y - 1)^2 = y^2 + 1 + (y - 1)^2 = 2 \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}$$

MP が最小となるとき, $y = \frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad e^{2t} - e^t - 1 = 0$$

$$e^t > 0 \text{ に注意して } e^t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{よって} \quad t_0 = \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(2) $y = \frac{1}{2}$ を (**) を代入して $Q\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$x^2 - y^2 = 1$ であるから

$$2x - 2yy' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad yy' = x$$

C 上の点 Q における接線 ℓ の傾きは

$$\frac{1}{2}y' = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y' = \sqrt{5}$$

したがって, ℓ の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{5} \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad y = \sqrt{5}x - 2$$

ℓ と x 軸の交点を A とすると $A\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$

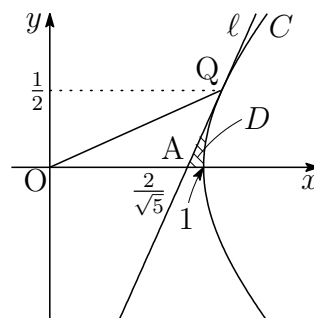
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \quad \text{であるから}$$

$$x \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \cdot \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \cdot \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = 1$$

求める領域 D は, 上の図の斜線部分であるから, その面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{t_0} dt - \triangle OAQ \\ &= \frac{1}{2} t_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

(3) (省略)



ガウス・グリーン定理は、 y が x の関数 (x が y の関数でもよい) のとき

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (xy' - y) dx$$

となる.

熊大医医 2011 年

xyz 空間内の 3 点 $P(0, 0, 1)$, $Q(0, 0, -1)$, $R(t, t^2 - t + 1, 0)$ を考える. t が $0 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき, 三角形 PQR が通過してできる立体を K とする. 以下の問いに答えよ.

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ.

(2) K の体積を求めよ.

解答 (1) R は, xy 平面上の放物線 $y = x^2 - x + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) 上を動く.

放物線と原点を通る直線 $y = kx$ が接するときの k の値は, 2 式から y を消去して

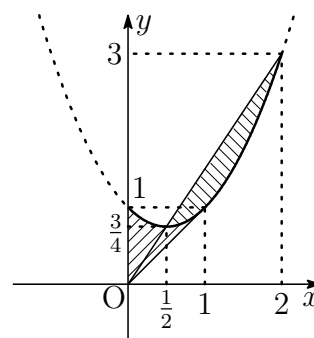
$$x^2 - x + 1 = kx \quad \text{すなわち} \quad x^2 - (k+1)x + 1 = 0$$

この方程式の判別式および重解について, $D = 0$, $x = \frac{k+1}{2}$ であるから

$$(k+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0, \quad 0 \leq \frac{k+1}{2} \leq 2$$

したがって $k = 1$

よって, 原点を通る直線 $y = x$ は, 点 $(1, 1)$ で接する. 原点と点 $(2, 3)$ を通る直線 $y = \frac{3}{2}x$ は, 放物線との交点 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ をもつから, 求める面積を S とすると, 右の図から



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(x^2 - x + 1) - x\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{ \frac{3}{2}x - (x^2 - x + 1) \right\} dx \\ &= \int_0^1 (x-1)^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x-2) dx = \frac{43}{48} \end{aligned}$$

別解 (ガウス・グリーンの定理による求積法)

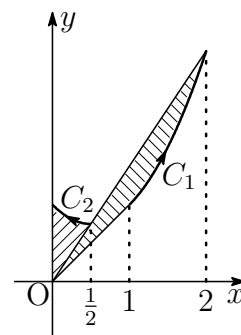
$y = x^2 - x + 1$ より, $y' = 2x - 1$ であるから

$$xy' - y = x(2x - 1) - (x^2 - x + 1) = x^2 - 1$$

右の図から, 求める面積 S は

(注意: 積分区間は, 回転角の向きにとる)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2 - 1) dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^0 (x^2 - 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{\frac{1}{2}}^0 = \frac{43}{48} \end{aligned}$$



(2) K は xy 平面に関して対称であるから, 求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} S \cdot OP \times 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{43}{48} \cdot 1 \times 2 = \frac{43}{72}$$