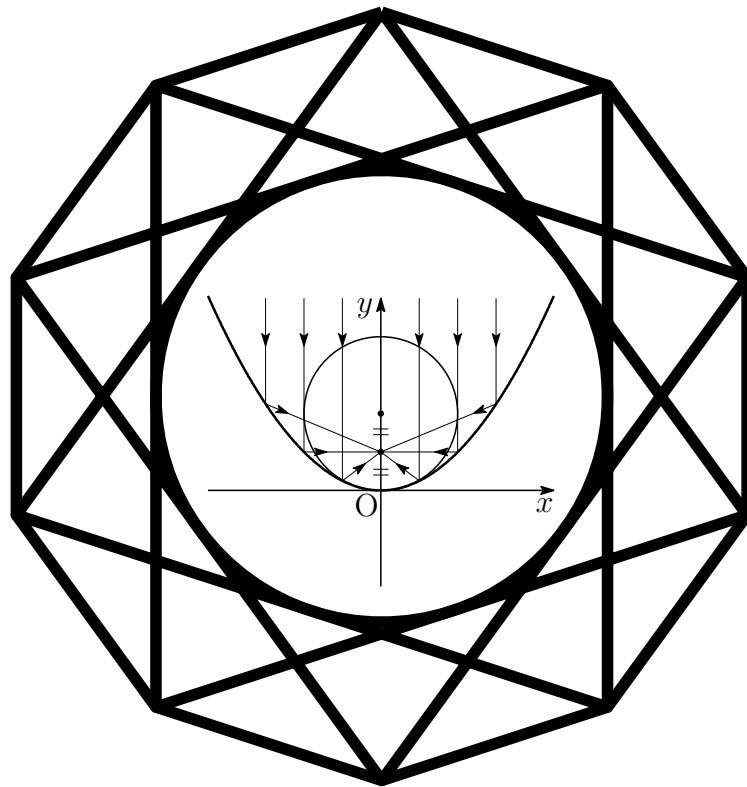


入試の軌跡

熊本大学 理系

2015 - 2024

数 学



2024 年 6 月 16 日

Typed by L^AT_EX 2_ε

序

本書は、熊本大学理系学部(理, 医保健(放射線, 検査), 薬, 工学部)受験者のための入試問題集です。本書には、平成27年(2015年)度から令和6年(2024年)度までの2次試験前期日程の問題をすべて掲載しています。第1章には問題を掲載し、第2章には解答、第3章には研究を付けています。

また、平成9年(1997年)から令和5年(2023年)までの一般前期試験問題および解答については、年度ごとに次のサイトに掲載しています。

<https://math4u.site/>

本書の編集にあたり、以下の点に留意しました。

1. 解答は、図や解説を充実させ、自学自習ができるように配慮しました。
2. 本書は、電子文書(PDF)での利用を想定し、ハイパーリンクを施しています。Adobe Reader(高機能のPDFブラウザ[フリーソフト])などをご利用ください。利用する際には、全画面表示(`[Ctrl]+L`)および描画領域に合わせる(`[Ctrl]+3`)と見やすくなります。ページスクロールには、(`[Ctrl]+▲`, `[Ctrl]+▼`)が利用でき、リンク(ジャンプ)先から戻る(`[Alt]+◀`), 進む(`[Alt]+▶`)も利用できます。なお、全画面表示を解除するには`[ESC]`。
4. 電子黒板を利用される場合は、電子黒板のPDFブラウザをご使用ください。ファイルサイズに優れ、ハイパーリンク・拡大・スワイプ・書き込みもスムーズに機能します。
3. 平成13年(2001年)度から平成26年(2014年)度までの一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡 熊本大学 理系』を上記のサイトに掲載しています。

令和6年6月 西村 信一

目次

序	i
第1章 一般前期問題	1
1.1 2015 年度	5
1.2 2016 年度	7
1.3 2017 年度	9
1.4 2018 年度	11
1.5 2019 年度	13
1.6 2020 年度	15
1.7 2021 年度	17
1.8 2022 年度	19
1.9 2023 年度	21
1.10 2024 年度	23
第2章 一般前期解答	25
2.1 2015 年度	26
2.2 2016 年度	31
2.3 2017 年度	36
2.4 2018 年度	41
2.5 2019 年度	46
2.6 2020 年度	50
2.7 2021 年度	56
2.8 2022 年度	63
2.9 2023 年度	67
2.10 2024 年度	71
第3章 一般前期研究	77
3.1 2015 年度	77
3.1.1 1 番 テイラー展開	77
3.1.2 2 番 研究	80
3.2 2016 年度	82
3.2.1 4 番 バウムクーヘン型求積法	82
3.3 2017 年度	83
3.3.1 1 番 相加平均・相乗平均・調和平均	83
3.4 2018 年	84

3.4.1	1 番 ベクトル積 (外積)	84
3.5	2019 年	85
3.5.1	1 番 分数漸化式	85

第 1 章 一般前期問題

数学の試験時間は 120 分で、数学 I・II・III・A・B(現行課程は数学 I・II・III・A・B・C) の範囲から 4 題出題され問題冊子 (A4 で 4 ページ) は、見開きで ①, ② が偶数ページ, ③, ④ が奇数ページに配置されている。解答用紙は、① ~ ④ の番号が書かれた A3 用紙 (4 枚) と白紙 (計算用紙) がはさみ込まれている。なお、解答用紙以外は持ち帰ることができる。

一般前期試験における理系数学の出題範囲は「数学 I・II・III・A・B」(現行課程は数学 I・II・III・A・B・C) であるが、過去 10 年の出題傾向をみると、数学 III の微積分に関する分野からは毎年出題されており、数学 B の「ベクトル」と「数列」も必修分野でもある。両分野とも過去 10 年で 8 回出題された頻出分野である。「複素数平面」の分野も過去 10 年で 5 回出題されていることにも注意したい。

出題分野は限られているが、発想力や計算力を要求される問題が中心で、問題演習を重ねていくことが大切なようだ。

出題分野

2015 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 II	微分法	3 次方程式の実数解の個数
2	標準	数学 B	空間のベクトル	一直線上の 3 点・垂直条件
3	標準	数学 B	数列	数列の図形への応用
4	標準	数学 B	数列	漸化式を導き一般項を求める
		数学 III	極限	数列の極限
		数学 III	積分法	定積分の計算

2016 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの正四面体への応用
2	標準	数学 A	整数の性質	4 で割った余り
		数学 B	数列	総和計算の応用
3	標準	数学 III	複素数平面	極形式, ド・モアブルの定理
4	標準	数学 III	微分法の応用	最大値
		数学 III	積分法の応用	面積, y 軸の周りの回転体の体積

2017 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	内積・球面の方程式
2	標準	数学 III	複素数平面	正三角形の条件, 2 直線のなす角
3	標準	数学 III	微分法の応用	極値
		数学 III	積分法の応用	曲線と x 軸で囲まれた部分の面積
4	標準	数学 B	数列	曲線・直線への数列の応用

2018 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	四面体の体積
2	標準	数学 B	数列	S_n を用いた漸化式
3	標準	数学 III	積分法の応用	区分求積法
4	標準	数学 III	積分法	定積分で表された関数の最小値

2019 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	数列	分数漸化式
2	標準	数学 A	場合の数と確率	サイコロの目と条件式
3	標準	数学 III	積分法の応用	回転体の体積
4	標準	数学 III	積分法の応用	面積

2020 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 A	整数の性質	合同式
2	標準	数学 III	複素数平面	三角形の面積
3	標準	数学 III	積分法の応用	バウムクーヘン型求積法
4	標準	数学 III	式と曲線	楕円

2021 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	やや難	数学 B	空間のベクトル	位置ベクトル
2	標準	数学 II	微分法と積分法	接線の方程式
		数学 B	数列	数列の一般項
3	標準	数学 III	複素数平面	図形への応用
4	やや難	数学 III	積分法	はさみうちの原理

2022 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	四角錐の体積
2	標準	数学 II	指数関数と対数関数	常用対数の計算
		数学 A	場合の数と確率	ゲームの繰り返しによる勝者の確率
3	標準	数学 II	図形と方程式	領域における関数の最小値
4	やや難	数学 III	極限	定積分で定義された数列の極限

2023 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 B	数列	一般項
2	標準	数学 A	場合の数と確率	確率漸化式
3	標準	数学 III	複素数平面	図形への応用
4	標準	数学 III	微分法の応用	不等式の証明
		数学 III	積分法	部分積分法

2024 年度

	難易度	科 目	分 野	出 題 内 容
1	標準	数学 III	積分法の応用	接線と面積
2	標準	数学 B	平面上のベクトル	三角形の面積
3	標準	数学 II	三角関数	3 倍角の図形への応用
4	標準	数学 B	数列	項の決定

出題分野 (2015-2024)

[illegible]

1.1 2015 年度

1 $f(x)$ は x の 3 次多項式とし, x^3 の係数は 1, 定数項は 0 とする。2 つの異なる実数 α, β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする。以下の問いに答えよ。 研

- (1) $f(\alpha), f(\beta)$ を α, β を用いて表せ。
- (2) 不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき, 3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ。

2 p, q, r を実数とする。空間内の 3 点 $A(1, p, 0), B(q, 1, 1), C(-1, -1, r)$ が一直線上にあるとき, 以下の問いに答えよ。ただし, O を原点とする。 研

- (1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。
- (2) q, r を p を用いて表せ。
- (3) p', q', r' を実数とし, 空間内の 3 点を $A'(1, p', 0), B'(q', 1, 1), C'(-1, -1, r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるとき, p', q', r' を p を用いて表せ。
- (4) (3) における 3 点 A', B', C' は一直線上にないことを示せ。

- 3 $\triangle ABC$ において、 $\angle B$ と $\angle C$ は鋭角とする。点Aを通り辺BCに直交する直線を引き、辺BCとの交点を X_1 とし、線分 AX_1 の長さを1とする。また、 $BX_1 = 1$, $CX_1 = 8$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して以下の操作を行う。

辺BC上の点 X_n を通り辺ACに平行な直線を引き、辺ABとの交点を Y_n とする。また、点 Y_n を通り辺BCに平行な直線を引き、辺ACとの交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺BCに直交する直線を引き、辺BCとの交点を X_{n+1} とする。

線分 $Z_n X_{n+1}$ の長さを l_n とすると、以下の問いに答えよ。

- (1) l_1 を求めよ。
- (2) l_{n+1} を l_n を用いて表せ。
- (3) $l_n > \frac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば、 $3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい。

- 4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

1.2 2016 年度

- 1** 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC を考える。 $0 < s < \frac{1}{2}$ に対し OA を $s : (1-s)$ に内分する点を P とし, $0 < t < 1$ に対し OC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, s , t を用いて表せ。
- (2) $\angle BPQ = 90^\circ$ であるとき, t を s を用いて表せ。
- (3) (2) の条件の下で, t の最大値とそのときの s の値を求めよ。
- (4) (3) で求めた s , t に対して, PQ^2 を求めよ。

- 2** 自然数 a に対して

$$S(a) = \sum_{k=1}^a \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 和 $S(a)$ を求めよ。
- (2) $S(a)$ が整数となる自然数 a を小さい順に並べた数列を

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

とする。一般項 a_n を求めよ。

- (3) (2) の数列 $\{a_n\}$ について, a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ。

- (4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と自然数 N に対して和 $\sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

- 3 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して, $\alpha = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。ただし, i は虚数単位である。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\theta = \frac{\pi}{3}$ とするとき, z_n を極形式で表せ。
- (2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ とするとき, $\sum_{k=1}^n |z_k| > 500$ となる最小の n を求めよ。
- (3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。

- 4 $x \geq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

について, 以下の問いに答えよ。

研

- (1) $x \geq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた x の値を a とする。曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$, $x = a$ で囲まれた図形を D とする。 D の面積を求めよ。
- (3) (2) の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

1.3 2017 年度

- 1** 原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある。ただし, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ とする。 $\angle BAC = \theta$ とし, $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, 以下の問いに答えよ。 研

- (1) $\cos \theta$, $\sin \theta$ を a , b , c を用いて表せ。
- (2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{OH}$ に垂直であるとき,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$$

が成り立つことを示せ。

- (3) (2) の条件のもとで $a = 3$ としたとき, 面積 S の最小値とそのときの b , c の値を求めよ。

- 2** $s > 0$, $t > 0$ とする。原点を O とする複素数平面において, $\alpha = 2 - i$, $\beta = s + ti$ を表す点をそれぞれ A , B とする。さらに, 点 C を直線 OB に関して点 A と反対側にとり, $\triangle OBC$ が正三角形になるようにする。点 C を表す複素数を z とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) z を s , t を用いて表せ。
- (2) α , β が等式 $4\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$ を満たすとき, β と z をそれぞれ求めよ。
- (3) (2) で求めた β と z に対して, 直線 AC と直線 OB の交点を D とし, $\angle CDB = \theta$ とする。このとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。

3 関数 $f(x) = \log_2 x - x + 1$ ($x > 0$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。なお、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ を用いてもよい。
- (3) 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 $f(x) = x^2 + x$ とし、 j は自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$a_1 = 2$ とする。 a_n ($n \geq 1$) に対して、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a_n^j, f(a_n^j))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし、 a_n^j は a_n の j 乗を表す。

以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対し、 $a_n > 0$ が成り立つことを示せ。
- (2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1.4 2018 年度

1 t を実数とする。空間の 4 点 $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$, $D(1, 6, 1)$ について, $\angle BAC$ が直角であるとき, 以下の問いに答えよ。 研

- (1) t の値を求めよ。
- (2) D から A, B, C を通る平面に垂線を下ろし, A, B, C を通る平面との交点を H とする。 $\overrightarrow{HD}$ を求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

2 初項が 1 である数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく。 $\{S_n\}$ が

$$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad (n \geq 1)$$

をみたすとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき, a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。
- (3) $n \geq 2$ のとき, a_n を n の式で表せ。

3 n を 2 以上の自然数とする。区間 $[0, 1]$ を n 等分して、その両端と分点を順に $0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 1$ とする。関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0, b \geq 0, c > 0$) に対して、区間 $[x_{k-1}, x_k]$ を底辺とし、高さが $f(x_k)$ である長方形の面積を L_k とする。ただし、 $k = 1, 2, \dots, n$ である。すべての n に対して $L_1 + L_n = \frac{10}{n} + \frac{8}{n^3}$ であるとき、以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kL_k$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 L_k$ を求めよ。

4 $-3 \leq x \leq 0$ に対して、 $F(x) = \int_x^{x+3} \sqrt{3t^2 + t^3} dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $-3 < x < 0$ に対して、 $F'(x) = 0$ の解を求めよ。

(2) $F(x)$ の最小値を求めよ。

1.5 2019 年度

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

研

- (1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。
- (2) $b_n = \frac{3}{a_n - 2} + 1$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4) $a_n > \frac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

2 1 個のさいころを投げて、出た目の数を a とする。 a が偶数のときは $b = \frac{1}{2}a$, a が奇数のときは $b = \frac{1}{2}(a + 3)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $a > b$ となる確率を求めよ。
- (2) $\sin \frac{\pi}{5} > 0.5$ および $\cos \frac{\pi}{5} < 0.9$ を示せ。
- (3) $S = \cos \frac{\pi}{a} + \sin \frac{\pi}{b}$ とおく。 $a > b$ であるとき、 $S < 1.7$ となる条件付き確率を求めよ。

3 座標平面上の曲線 $C_1: y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2: y = x^3 + 1$ を考える。
以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど2個になるような実数 a の値を求めよ。ただし、 $a \neq 0$ とする。
- (2) (1) で求めた a に対し、曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

4 座標平面上の曲線 $y = x \sin 3x + 3x^2$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とし、その接点の x 座標を a とする。ただし、 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

1.6 2020 年度

1 以下の問いに答えよ。

- (1) x が自然数のとき, x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。
- (2) 自然数 x, y, z が $x^2 + 5y = 2z^2$ を満たすとき, x, y, z はすべて 5 の倍数であることを示せ。
- (3) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

2 α, β を複素数とし, 複素数平面上の点 $O(0), A(\alpha), B(\beta), C(|\alpha|^2), D(\bar{\alpha}\beta)$ を考える. 3 点 O, A, B は三角形をなすとする. また, 複素数 z に対し, $\text{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする. 以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき, $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積 S_1 は $\frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。
- (3) 実数 a, b に対し, 複素数 z を $z = a + bi$ で定める. $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ のとき, 3 点 $O(0), P(z), Q\left(\frac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

- 3 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき、曲線 $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$)、 x 軸、 y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a} \leq V(b) - V(a) \leq \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}$$

を示せ。

- (2) (1) の不等式を用いて、 $\frac{d}{dt}V(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$ を示せ。

- (3) $V\left(\frac{\pi}{3}\right)$ を求めよ。

- 4 正の実数 t に対し、座標平面上の 2 点 $F(t, 0)$ 、 $F'(3t, 0)$ からの距離の和が $2\sqrt{2}t$ であるような点 P の軌跡を C とする。直線 $y = x - 1$ を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつような t の範囲を求めよ。
 (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき、 C と ℓ の 2 つの共有点および原点 O を頂点とする三角形の面積の最大値を求めよ。

1.7 2021 年度

- 1 空間の点 O を通らない平面 α をとる。 α 上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

と表されるとする。

- (1) ℓ は平面 α 上にあることを示せ。
 - (2) $\triangle ABC$ の各辺と直線 ℓ との交点の個数をそれぞれ求めよ。また, 交点がある場合, 各交点 X について, $\overrightarrow{OX}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。
 - (3) A, B の中点を D とし, $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OD}$ となる点 E を考える。点 O と ℓ 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし, その交点を F とする。このとき, $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- 2 曲線 $C: y = x^3 - 2x^2 + x$ 上に点 $P_1(2, 2)$ がある。自然数 n ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して点 P_n から点 P_{n+1} を次のように定める。

点 P_n を接点とする C の接線を ℓ_n とし, C と ℓ_n の共有点のうち, P_n と異なるものを P_{n+1} とする。

点 P_n の x 座標を a_n とする。

- (1) P_2 の座標を求めよ。
- (2) 接線 ℓ_n の傾きおよび y 切片をそれぞれ a_n を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3 複素数 w は実部, 虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α, β, γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$$

を満たすとする。 α, β, γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。

- (1) $\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2$ を w を用いて表せ。
- (2) $\triangle ABC$ が正三角形であるときの w の値を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ が正三角形であるとする。 $w = \alpha$ かつ $\triangle ABC$ の重心が点 $\frac{w^2}{2}$ であるとき, β と γ の値を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq x \leq \pi$ のとき, $\sin x = \sin 2x$ の解を求めよ。
- (2) $\int_0^{2\pi} |\sin x - \sin 2x| dx$ を求めよ。
- (3) n を正の整数とするととき, 定積分 $\int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。
- (4) c を正の数とするととき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。

1.8 2022 年度

1 a を実数とし、座標空間の点 $P_1(a, 0, 0)$, $P_2(a+1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 3)$ を考える。 G_1 , G_2 をそれぞれ $\triangle P_1QR$, $\triangle P_2QR$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

- (1) P_1 , P_2 を通る直線と, G_1 , G_2 を通る直線は平行であることを示せ。
- (2) 四角形 $P_1P_2G_2G_1$ の面積を求めよ。
- (3) 四角形 $P_1P_2G_2G_1$ を底面とする四角錐 $Q-P_1P_2G_2G_1$ の体積を求めよ。

2 袋の中に赤玉 2 個と白玉 2 個の合計 4 個の玉が入っている。A と B の 2 人で次のルールに従ってゲームをする。

- A, B の順で繰り返しプレイヤーになる。
- プレイヤーは袋から玉を同時に 2 個取り出す。取り出した玉の色が同じならば、プレイヤーの勝利とする。取り出した玉の色が異なるならば、それらを袋に戻してよくかき混ぜ、プレイヤーを交替する。
- A が勝利するか、A が勝利せずに A の後に B がプレイヤーになり、B が勝利するか、B が勝利せずにプレイヤーを交替することによって 1 巡が終了する。
- 勝者が決まるとゲームは終了する。

以下の問いに答えよ。

- (1) B が 1 巡目で勝者になる確率を求めよ。
- (2) N を自然数とし、 N 巡目以内に B が勝者になる確率を p_N とする。 $p_N > 0.396$ となる N の最小値を求めよ。ただし、 $\log_2 3 = 1.585$, $\log_2 5 = 2.322$ とする。
- (3) N を自然数とする。 N 巡目以内に勝者になる確率は、A と B のどちらが大きい。

3 x, y を実数とし, $f(p) = p^2 + xp + y$ とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) p の2次方程式 $f(p) = 0$ が実数解を持つような点 (x, y) 全体の集合を D とおく。 D を xy 平面上に図示せよ。
- (2) p の2次方程式 $f(p) = 0$ は実数解を持つとする。 $f(p) = 0$ の実数解がすべて1以下で, 少なくとも1つの実数解は0以上となるような点 (x, y) 全体の集合を E とおく。 E を xy 平面上に図示せよ。
- (3) 点 (x, y) が (2) の集合 E 全体を動くとき, $x^2 + y^2 - 4y + 4$ の最小値を求めよ。

4 関数 $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2}}$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の最小値と最大値を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ において, $\sqrt{2}x \leq f(x) \leq \sqrt{2}$ となることを示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^1 \{f(x)\}^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0$ を用いてよい。

1.9 2023 年度

1 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{8}, \quad (4n^2 - 1)(a_n - a_{n+1}) = 8(n^2 - 1)a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3 を求めよ。
- (2) $a_n \neq 0$ を示せ。
- (3) $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$ を n の式で表せ。
- (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて、出た目の数の積をとる。積が 12 となる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) p_2, p_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 4$ のとき、 p_n を求めよ。
- (3) $n \geq 4$ とする。出た目の数の積が n 回目にはじめて 12 となる確率を求めよ。

3 α, β を複素数とし、複素数平面上の3点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ が三角形をなすとする。点 A を点 O を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を P , 点 O を点 B を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を Q , 点 B を点 A を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を R とする。 $\triangle POA$, $\triangle QBO$, $\triangle RAB$ の重心をそれぞれ G , H , I とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 3点 P , Q , R を表す複素数のそれぞれを α, β を用いて表せ。
- (2) 3点 G , H , I を表す複素数のそれぞれを α, β を用いて表せ。
- (3) 3点 G , H , I が三角形をなすとき, $\triangle GHI$ が正三角形かどうか判定せよ。

4 t は正の実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = 2tx^2e^{-tx^2}$ の極値を求めよ。
- (2) 定積分 $\int_1^{\sqrt{t}} 4tx(1 - tx^2)e^{-tx^2} \log x \, dx$ の値を t を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた値を $g(t)$ とおく。 $1 < t < 4$ のとき, 不等式

$$g(t) > (t^{\frac{5}{2}} - t^2 + 1)e^{-t^2} - e^{-t}$$

が成り立つことを示せ。

1.10 2024 年度

1 e を自然対数の底とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = e^x$ 上の点 (a, e^a) における接線の方程式を求めよ。
- (2) (1) で求めた接線の傾きを p , y 切片を q とする。 q を p の式で表せ。
- (3) (2) で求めた p の式を $f(p)$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線 l_1 および点 $(e, f(e))$ における接線 l_2 の方程式を求めよ。
- (4) (3) で求めた 2 本の接線 l_1, l_2 および曲線 $y = f(x)$ によって囲まれた部分の面積を求めよ。

2 平面上に点 O を中心とする半径 2 の円 D がある。円 D の周上に異なる 3 点 A, B, C をとる。ただし、直線 AB, BC, CA は点 O を通らないとする。2 点 A, B における円 D のそれぞれの接線の交点を P とする。同様に、2 点 B, C における円 D のそれぞれの接線の交点を Q , 2 点 C, A における円 D のそれぞれの接線の交点を R とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP} = \frac{4}{4 + \vec{a} \cdot \vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\sqrt{3}$ のとき、線分 OP の長さを求めよ。
- (3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = -2\sqrt{3}$ かつ $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$ のとき、 $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

- 3 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ とする。 $AB = 1$, $\angle BAC = 3\theta$ である $\triangle ABC$ について、辺 BC の中点を D としたとき、 $\angle BAD = 2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

- (1) $AC = 2 \cos \theta$ であることを示せ。
- (2) BC を $\cos \theta$ を用いて表せ。
- (3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

- 4 実数からなる数列 $\{a_n\}$ は $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3^{n-1} & (a_n < 1 \text{ のとき}) \\ \log_3 a_n & (a_n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 以上の自然数 n に対して $a_n \geq 0$ であることを示せ。
- (2) $a_4 + a_5 = 1$ のとき、 a_3, a_4, a_5 を求めよ。
- (3) $a_4 + a_5 = 1$ のとき、 a_1 のとりうる値の範囲の最大値と最小値をそれぞれ M_1, m_1 とし、 a_2 のとりうる値の範囲の最大値と最小値をそれぞれ M_2, m_2 とする。このとき、 $m_1 + m_2 + \log_3 M_1 M_2$ の値を求めよ。

第 2 章 一般前期解答

熊大入試の特徴として，計算力を要求する問題が目立つ．特に「微分法と積分法」の分野の問題には煩雑な計算に陥る受験生も少なくないと思われる．

受験参考書等に次の公式が紹介されていることもあり，2016 年 4 番に出題された y 軸の周りの回転体の体積を，理系学部受験者の半数近く，医学部医学科受験者の 7 割が同公式を利用して，簡潔に解答している．熊大は公式の使用に関しては寛容で，減点されないと聞く．

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき， $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$ ， $x = b$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

2018 年 1 番の空間ベクトルの問題を受験生の中には大学で学ぶ外積 (ベクトル積) を使用して簡単に解答した受験もいたが，間違いではないということで減点はされなかったそうである．

2.1 2015年度

- 1 (1) x の3次式 $f(x)$ の x^3 の係数が1, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ であるから 研

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta) = 3x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 3\alpha\beta$$

また, $f(x)$ の定数項は0であるから

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)x^2 + 3\alpha\beta x$$

したがって

$$f(\alpha) = \alpha^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)\alpha^2 + 3\alpha^2\beta = \frac{\alpha^2(3\beta - \alpha)}{2}$$

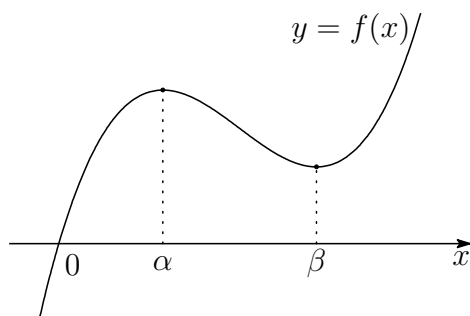
$$f(\beta) = \beta^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)\beta^2 + 3\alpha\beta^2 = \frac{\beta^2(3\alpha - \beta)}{2}$$

- (2) $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

$\alpha < \beta < 3\alpha$ より, $0 < \alpha < \beta$, $3\alpha - \beta > 0$ であるから, $f(\beta) > 0$

したがって, $y = f(x)$ のグラフの概形は, 次のようになる.



よって, $y = f(x)$ および $y = -1$ のグラフから, 3次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数は1個. ■

- 2** (1) $A(1, p, 0)$, $B(q, 1, 1)$, $C(-1, -1, r)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (q-1, 1-p, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1-p, r)$$

$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$ であるから, これらの z 成分に注目すると

$$\overrightarrow{AC} = r\overrightarrow{AB} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -2 = r(q-1) & \cdots \textcircled{1} \\ -1-p = r(1-p) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } r \neq 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$p = 1$ は, $\textcircled{2}$ を満たさない.

$p = -1$ を $\textcircled{2}$ に代入すると, $r = 0$ となり, $\textcircled{3}$ に反する.

よって $p \neq \pm 1$

- (2) $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$ であるから, これらの x 成分, y 成分により

$$(q-1)(-1-p) - (1-p) \cdot (-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q = \frac{3-p}{p+1}$$

$\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{BC}$ であるから, これらの y 成分, z 成分により

$$(p-1)(r-1) - (-1)(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{p+1}{p-1}$$

- (3) (2) の結果より, $A(1, p, 0)$, $B\left(\frac{3-p}{p+1}, 1, 1\right)$ であるから

$$(p+1)\overrightarrow{AB} = (2-2p, 1-p^2, 1+p)$$

$\overrightarrow{OA'} = (1, p', 0)$ は $\overrightarrow{AB}$ と垂直なので

$$2-2p+p'(1-p^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p' = -\frac{2}{p+1}$$

$\overrightarrow{OB'} = (q', 1, 1)$ は $\overrightarrow{AB}$ と垂直なので

$$q'(2-2p) + 1 - p^2 + 1 + p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}$$

$\overrightarrow{OC'} = (-1, -1', r')$ は $\overrightarrow{AB}$ と垂直なので

$$-(2-2p) - (1-p^2) + r'(1+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{ (3) の結果から } & A' \left(1, -\frac{2}{p+1}, 0 \right), \\
 & B' \left(-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}, 1, 1 \right), \\
 & C' \left(-1, -1, -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{A'B'} = \left(\frac{-p^2 - p + 4}{2(p-1)}, \frac{p+3}{p+1}, 1 \right)$$

$$\overrightarrow{A'C'} = \left(-2, \frac{-p+1}{p+1}, -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1} \right)$$

$\overrightarrow{A'B'} // \overrightarrow{A'C'}$ であるとき, これらの x 成分, y 成分から

$$\frac{-p^2 - p + 4}{2(p-1)} \cdot \frac{-p+1}{p+1} - \frac{p+3}{p+1} \cdot (-2) = 0$$

$$\text{整理すると } p^2 + 5p + 8 = 0 \quad \cdots (*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -7 < 0$$

したがって, 方程式 $(*)$ は実数解をもたない.

よって, 3点 A' , B' , C' は一直線上にない. ■

- 3 (1) 座標平面上に点 $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(8, 0)$, $X_n(x_n, 0)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をとる. 直線 AB の方程式は

$$y = x + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

直線 AC の方程式は

$$y = -\frac{1}{8}x + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

直線 X_nY_n は点 $(x_n, 0)$ を通り, 傾き $-\frac{1}{8}$ の直線であるから

$$y = -\frac{1}{8}(x - x_n) \quad \dots \textcircled{3}$$

点 Y_n の y 座標 l_n は, ①, ③ を解いて $l_n = \frac{1 + x_n}{9} \quad \dots \textcircled{4}$

このとき, $x_1 = 0$ であるから $l_1 = \frac{1}{9}$

- (2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから, その x 座標は, ② より

$$l_n = -\frac{x}{8} + 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = 8(1 - l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから $x_{n+1} = 8(1 - l_n)$

したがって, 上式および ④ から

$$l_{n+1} = \frac{1 + x_{n+1}}{9} = \frac{1 + 8(1 - l_n)}{9} = -\frac{8}{9}l_n + 1$$

- (3) (1), (2) の結果から $l_{n+1} = -\frac{8}{9}l_n + 1$, $l_1 = \frac{1}{9}$

この漸化式から $l_n = \frac{9}{17} + \frac{8}{17} \left(-\frac{8}{9}\right)^n$

$$l_n > \frac{1}{2} \text{ のとき } \frac{9}{17} + \frac{8}{17} \left(-\frac{8}{9}\right)^n > \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \left(-\frac{8}{9}\right)^n > -\frac{1}{16}$$

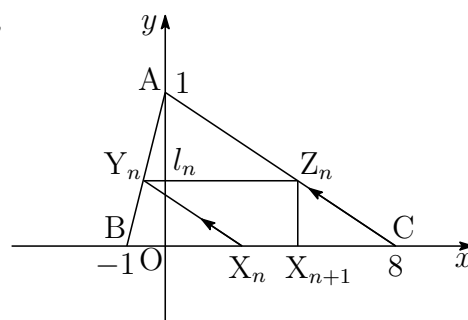
$$n \text{ は奇数であるから } (-1)^n \left(\frac{8}{9}\right)^n > -\frac{1}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{8}{9}\right)^n < \frac{1}{16}$$

したがって $n > \frac{4}{\log_2 9 - 3}$

このとき, $3.169 < \log_2 9 < 3.17$ より

$$23.5 \dots = \frac{4}{3.17 - 3} < \frac{4}{\log_2 9 - 3} < \frac{4}{3.169 - 3} = 23.6 \dots$$

よって, 求める最小の奇数 n は $n = 25$



$$\begin{aligned}
 \boxed{4} \quad (1) \quad a_{n+1} - a_n &= \int_0^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx - \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx \\
 &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx
 \end{aligned}$$

$$t = x - n\pi \text{ とおくと } \frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{array}{c|c} x & n\pi \longrightarrow (n+1)\pi \\ \hline t & 0 \longrightarrow \pi \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \int_0^{\pi} e^{-(n\pi+t)} |\sin(t+n\pi)| dt \\
 &= e^{-n\pi} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = e^{-n\pi} a_1 \\
 &= e^{-n\pi} \left[-\frac{e^{-t}}{2} (\sin t + \cos t) \right]_0^{\pi} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2} e^{-n\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad a_1 &= \int_0^{\pi} e^{-x} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx \\
 &= -\frac{1}{2} \left[e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_0^{\pi} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}
 \end{aligned}$$

上式および(1)の結果より, $a_{n+1} - a_n = e^{-n\pi} a_1$ であるから, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) &= a_1 \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k\pi} \\
 a_n &= a_1 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi} = a_1 \times \frac{1 - e^{-n\pi}}{1 - e^{-\pi}} \\
 &= \frac{e^{-\pi} + 1}{2} \times \frac{1 - e^{-n\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{(1 + e^{-\pi})(1 - e^{-n\pi})}{2(1 - e^{-\pi})}
 \end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから

$$a_n = \frac{(1 + e^{-\pi})(1 - e^{-n\pi})}{2(1 - e^{-\pi})}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n\pi} = 0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})}$$

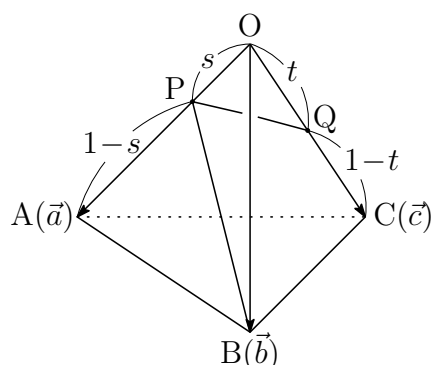


2.2 2016 年度

1 (1) $\overrightarrow{OP} = s\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = t\vec{c}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} \\ &= \vec{b} - s\vec{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= t\vec{c} - s\vec{a}\end{aligned}$$



(2) $\angle BPQ = 90^\circ$ のとき, $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ であるから, (1) の結果から

$$(\vec{b} - s\vec{a}) \cdot (t\vec{c} - s\vec{a}) = 0 \quad \text{整理すると} \quad t\vec{b} \cdot \vec{c} - s\vec{a} \cdot \vec{b} - st\vec{c} \cdot \vec{a} + s^2|\vec{a}|^2 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad |\vec{a}| = 1 \quad \text{であるから}$$

$$\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}st + s^2 \cdot 1^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (1-s)t = s(1-2s)$$

$$\text{このとき, } 0 < s < \frac{1}{2} \text{ に注意して} \quad t = \frac{s(1-2s)}{1-s}$$

(3) (2) の結果から

$$t = \frac{s(1-2s)}{1-s} = 2s + 1 - \frac{1}{1-s} = 3 - \left\{ 2(1-s) + \frac{1}{1-s} \right\} \quad \dots \textcircled{1}$$

$0 < s < \frac{1}{2}$ より $1-s > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の関係により

$$2(1-s) + \frac{1}{1-s} \geq 2\sqrt{2(1-s) \cdot \frac{1}{1-s}} = 2\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

上式で等号が成立するとき, $0 < s < \frac{1}{2}$ に注意して

$$2(1-s) = \frac{1}{1-s} \quad \text{すなわち} \quad s = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

このとき, ①, ② より t の最大値は $3 - 2\sqrt{2}$

(4) (1), (3) の結果から

$$\begin{aligned}
 PQ^2 &= |\overrightarrow{PQ}|^2 = |t\vec{c} - s\vec{a}|^2 = t^2|\vec{c}|^2 - 2st\vec{c}\cdot\vec{a} + s^2|\vec{a}|^2 \\
 &= s^2 - st + t^2 \\
 &= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}(3-2\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^2 \\
 &= \frac{27-19\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

■

2 (1) $\sum_{k=1}^a \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^a (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{a+1} - 1$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geq 1$ に等しいとき, (1) の結果から

$$\sqrt{a+1} - 1 = n \quad \text{ゆえに} \quad a = n(n+2)$$

よって, 求める数列の一般項は $a_n = n(n+2)$

(3) $n = 2m - 1$ のとき (m は整数)

$$\begin{aligned}
 a_n &= (2m-1)\{(2m-1)+2\} = (2m-1)(2m+1) \\
 &= 4m^2 - 1 = 4(m^2 - 1) + 3
 \end{aligned}$$

$n = 2m$ のとき (m は整数)

$$a_n = 2m(2m+2) = 4m(m+1)$$

よって, a_n を 4 で割った余りは 0 か 3 である.

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+2)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) \\
 &= \frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}
 \end{aligned}$$

■

3 (1) $\alpha = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ より

$$\begin{aligned} z_n &= \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \{2(\cos \theta + i \sin \theta)\}^n - 2\{2(\cos \theta + i \sin \theta)\}^{n-1} \\ &= 2^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) - 2^n\{\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta\} \\ &= 2^n\{\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\} + 2^n i\{\sin n\theta - \sin(n-1)\theta\} \\ &= -2^{n+1} \sin \frac{2n-1}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} + 2^{n+1} i \cos \frac{2n-1}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} z_n &= -2^{n+1} \sin \frac{2n-1}{6}\pi \sin \frac{\pi}{6} + 2^{n+1} i \cos \frac{2n-1}{6}\pi \sin \frac{\pi}{6} \\ &= -2^n \sin \left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2} \right) + 2^n i \cos \left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2^n \left(\cos \frac{n+1}{3}\pi + i \sin \frac{n+1}{3}\pi \right) \end{aligned}$$

補足 $z_n = -2^n \sin \frac{2n-1}{6}\pi + 2^n i \cos \frac{2n-1}{6}\pi = 2^n i \left(\cos \frac{2n-1}{6}\pi + i \sin \frac{2n-1}{6}\pi \right)$

$$\begin{aligned} &= 2^n \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \left(\cos \frac{2n-1}{6}\pi + i \sin \frac{2n-1}{6}\pi \right) \\ &= 2^n \left(\cos \frac{n+1}{3}\pi + i \sin \frac{n+1}{3}\pi \right) \end{aligned}$$

別解 $z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha - 2) \quad \cdots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \alpha - 2 &= 2(\cos \theta + i \sin \theta) - 2 = 2(\cos \theta - 1 + i \sin \theta) \\ &= 4 \left(-\sin^2 \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) = 4i \sin \frac{\theta}{2} \left(i \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta + \pi}{2} + i \sin \frac{\theta + \pi}{2} \right) \end{aligned}$$

上式および $\textcircled{1}$ から

$$\begin{aligned} z_n &= 2^{n-1} \{\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta\} \cdot 4 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta + \pi}{2} + i \sin \frac{\theta + \pi}{2} \right) \\ &= 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{(2n-1)\theta + \pi}{2} + i \sin \frac{(2n-1)\theta + \pi}{2} \right) \end{aligned}$$

これに $\theta = \frac{\pi}{3}$ を代入すると $z_n = 2^n \left(\cos \frac{n+1}{3}\pi + i \sin \frac{n+1}{3}\pi \right)$

(2) (1)の結果より, $|z_k| = 2^k$ であるから

$$\sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{k=1}^n 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$$

$$\sum_{k=1}^n |z_k| > 500 \text{ のとき } 2(2^n - 1) > 500 \text{ ゆえに } 2^n > 251$$

これを満たす最小の整数 n は **8**

(3) (*) より $z_{1000} = -2^{1001} \sin \frac{1999}{2} \theta \sin \frac{\theta}{2} + 2^{1001} i \cos \frac{1999}{2} \theta \sin \frac{\theta}{2}$
 z_{1000} が実数であるとき, 自然数 j を用いて

$$\frac{1999}{2} \theta = \frac{2j-1}{2} \pi \text{ ゆえに } \theta = \frac{2j-1}{1999} \pi$$

このとき, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから $1 \leq j \leq 500$

よって, 求める θ の個数は **500** (個) ■

4 (1) $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ を微分すると

研

$$f'(x) = (\log x)' \frac{1}{x^2} + \log x \left(\frac{1}{x^2} \right)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + \log x \left(-\frac{2}{x^3} \right) = \frac{1 - 2 \log x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \sqrt{e}$$

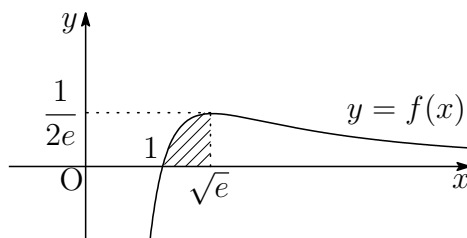
$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ ($x \geq 1$) の増減表は、次のようになる.

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって、求める最大値は $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

(2) 求める面積を S とすると、(1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2} dx = - \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x} \right)' \log x dx \\ &= - \left[\frac{1}{x} \log x \right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= - \left[\frac{1}{x} (\log x + 1) \right]_1^{\sqrt{e}} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$



(3) 求める立体の体積を V とすると

$$V = 2\pi \int_1^{\sqrt{e}} x \cdot \frac{\log x}{x^2} dx = 2\pi \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)(\log x)' dx = \pi \left[(\log x)^2 \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{\pi}{4}$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

■

2.3 2017年度

- 1 (1) $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ より

研

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$

2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角が θ であるから

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}$$

また, $\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{a^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}$$

- (2) $H(x, y, z)$ とおくと, H は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \cdots (*)$$

$\overrightarrow{HA} = (a - x, -y, -z)$, $\overrightarrow{HB} = (-x, b - y, -z)$, $\overrightarrow{HC} = (-x, -y, c - z)$ がいずれも $\overrightarrow{OH} = (x, y, z)$ に垂直であるから

$$(a - x)x - y^2 - z^2 = 0$$

$$-x^2 + (b - y)y - z^2 = 0$$

$$-x^2 - y^2 + (c - z)z = 0$$

(*) に注意してこれらを整理すると $ax = 1$, $by = 1$, $cz = 1$

上の 3 式から, $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ を (*) に代入して $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$

- (3) (1) の結果から $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} \times \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \end{aligned}$$

上式および (2) の結果により

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 c^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)} = \frac{1}{2} abc \quad \cdots (**)$$

$a = 3$ を (2) の結果と (**) に代入すると

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$S = \frac{3}{2}bc$$

2 数 $\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2} > 0$ について相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{8}{9} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} = \frac{2}{bc} \quad \text{すなわち} \quad bc \geq \frac{9}{4}$$

$$\text{したがって} \quad S = \frac{3}{2}bc \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$$

上式において、等号が成立するのは、 $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ のときであるから、 $\textcircled{1}$ より

$b = c = \frac{3}{2}$ のとき、 S は最小値 $\frac{27}{8}$ をとる.

補足 a を $a > 1$ を満たす定数とする.

$\frac{1}{b^2}$ と $\frac{1}{c^2}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1 - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} \quad \text{ゆえに} \quad bc \geq \frac{2a^2}{a^2 - 1}$$

$$\text{したがって, } S = \frac{1}{2}abc \text{ より} \quad S \geq \frac{a^3}{a^2 - 1}$$



- 2 (1) 点 C は直線 OB に関して点 A と反対側にあり, $\triangle OBC$ が正三角形であるから

$$\begin{aligned} z &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \beta = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (s + ti) \\ &= \frac{s - \sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}s + t}{2}i \end{aligned}$$

(2) $4\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$ より $\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) + 4 = 0$

2 点 A, B の位置関係に注意してこれを解くと

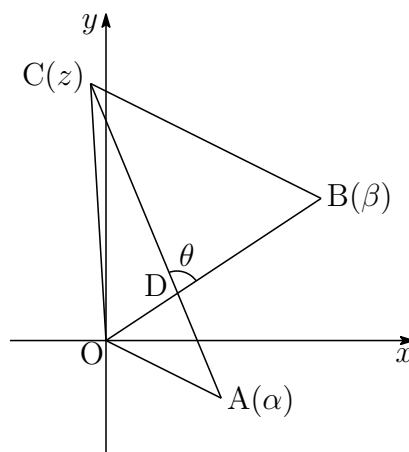
$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ とおくと, $\frac{\beta}{\alpha} = 2w$, $\frac{z}{\beta} = w$ より

$$\begin{aligned} \beta &= 2w\alpha = (1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = 2 + \sqrt{3} + (-1 + 2\sqrt{3})i \\ z &= 2w^2\alpha = (-1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = -2 + \sqrt{3} + (1 + 2\sqrt{3})i \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{z - \alpha}{\beta} &= \frac{2w^2\alpha - \alpha}{2w\alpha} \\ &= \frac{2w^2 - 1}{2w} = \frac{1}{2} \left(2w - \frac{1}{w} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3}i) \end{aligned}$$



上の図から, $\theta = \arg \frac{z - \alpha}{\beta}$ であるから

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

■

- 3** (1) $f(x) = \log_2 x - x + 1$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{x \log 2} - 1 = \frac{1}{\log 2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log_2 e} \right)$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\log_2 e$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

$$\text{極大値 } f(\log_2 e) = \log_2(\log_2 e) - \log_2 e + 1 = \log_2 \left(\frac{2 \log_2 e}{e} \right)$$

- (2) (1) で示した増減表により、 $f(x) = 0$ の解の個数は高々2個.

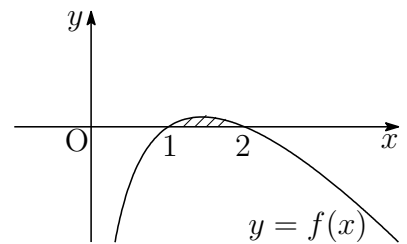
$$f(1) = 0, \quad f(2) = 0$$

よって、求める解は $x = 1, 2$

補足 $\log_2 x - x + 1 = 0$ の解は、 $y = \log_2 x$ と $y = x - 1$ の交点の x 座標.
凸関数のグラフと直線の共有点は高々2個.

- (3) (1),(2) の結果から、求める面積は、右の図の斜線部分で、その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(\frac{\log x}{\log 2} - x + 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{x(\log x - 1)}{\log 2} - \frac{1}{2}(x - 1)^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$



■

- 4 (1) $f(x) = x^2 + x$ を微分すると $f'(x) = 2x + 1$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + t) = (2t + 1)(x - t)$$

すなわち $y = (2t + 1)x - t^2$

これと直線 $y = x$ の方程式から y を消去すると

$$(2t + 1)x - t^2 = x \quad \text{ゆえに} \quad 2t \left(x - \frac{1}{2}t \right) = 0$$

$t = a_n^j$ とすると, $a_n > 0$ のとき, $t \neq 0$ であるから

$$x = \frac{1}{2}t \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^j > 0$$

$a_1 = 2 > 0$ により, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$

- (2) $a_n > 0$ より ($n \geq 1$), $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^j$ の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{1}{2}a_n^j \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = j \log_2 a_n - 1$$

$$b_n = \log_2 a_n \cdots \textcircled{1} \text{ であるから} \quad b_{n+1} = j b_n - 1$$

- (3) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$, $\textcircled{1}$ から $a_n = 2^{b_n} \cdots \textcircled{2}$

(i) $j = 1$ のとき, (2) の結果から $b_{n+1} = b_n - 1$

数列 $\{b_n\}$ は, 初項 1, 公差 -1 の等差数列であるから

$$b_n = 1 + (-1)(n - 1) \quad \text{すなわち} \quad b_n = 2 - n$$

$\textcircled{2}$ から $a_n = 2^{2-n}$

(ii) $j \geq 2$ のとき, (2) の結果から $b_{n+1} - \frac{1}{j-1} = j \left(b_n - \frac{1}{j-1} \right)$

数列 $\left\{ b_n - \frac{1}{j-1} \right\}$ は, 初項 $b_1 - \frac{1}{j-1}$, 公比 j の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{j-1} = \left(b_1 - \frac{1}{j-1} \right) j^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad b_n = \frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}$$

$\textcircled{2}$ から $a_n = 2^{\frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}}$ ■

2.4 2018 年度

- 1 (1) $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$ より

研

$$\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (t-1, 2t-5, t-1)$$

$\angle BAC = 90^\circ$ のとき, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ であるから

$$3(t-1) - 3(2t-5) + 0(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 4$$

- (2) (1) の結果から $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$

$$\overrightarrow{AD} = (1, 6, 1) - (1, 5, 0) = (0, 1, 1)$$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (1, 1, -2)$$

とおくと, $\overrightarrow{HD} = k\vec{n}$ であるから (k は実数), $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}$ より

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + k\vec{n}$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AH} \text{ であるから} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = k|\vec{n}|^2$$

$$\text{したがって} \quad -1 = 6k \quad \text{ゆえに} \quad k = -\frac{1}{6}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{HD} = -\frac{1}{6}\vec{n} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$

$$\vec{e}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \text{ とおくと, } \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HD} &= \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 - (\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 \\ &= \overrightarrow{AD} - \frac{(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB})}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} - \frac{(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AC}|^2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AD} = (1, 6, 1) - (1, 5, 0) = (0, 1, 1) \text{ より } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$$

また, $|\overrightarrow{AB}|^2 = 18$, $|\overrightarrow{AC}|^2 = 27$ であるから

$$\overrightarrow{HD} = (0, 1, 1) + \frac{1}{6}(3, -3, 0) - \frac{2}{9}(3, 3, 3) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

(3) よって、求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle ABC \cdot |\overrightarrow{HD}| &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{HD}| \\ &= \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

別解 D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h , $\vec{e} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ とおくと

$$h = |\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって、求める四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle ABC \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| h = \frac{3}{2}$$

補足 2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき、
ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は、 $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する。このベクトルを、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積と言い、 $\vec{a} \times \vec{b}$ で表す¹。本題において、 $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$ より

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-9, -9, 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$$

であるから、 $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 1)$ より

$$V = \frac{1}{6} |9| = \frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが、検算として利用できる。



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri_2004.pdf (p.10 を参照)

2 (1) $S_1 = a_1 = 1, S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \cdots (*)$

(*) に $n = 1, 2$ を代入すると

$$S_2 = 2S_1 + 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$S_3 = 2S_2 + 2^2 + 2 \cdot 2 = 18$$

よって $a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 1 = 4, \quad a_3 = S_3 - S_2 = 18 - 5 = 13$

(2) (*) より $S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n$
 $S_n = 2S_{n-1} + (n-1)^2 + 2(n-1)$

上の 2 式の辺々を引くと $a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1$

(3) 1 次関数 $f(n) = pn + q$ が, すべての n について, 次式を満たすとき

$$f(n+1) = 2f(n) + 2n + 1 \cdots \textcircled{1}$$

したがって $p(n+1) + q = 2(pn + q) + 2n + 1$

整理すると $pn + p + q = (2p + 2)n + 2q + 1$

上式は, n に関する恒等式であるから

$$p = 2p + 2, \quad p + q = 2q + 1 \quad \text{これを解いて} \quad p = -2, \quad q = -3$$

ゆえに $f(n) = -2n - 3 \cdots \textcircled{2}$

(2) の結果と ① の辺々を引くと

$$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$f(2) = -2 \cdot 2 - 3 = -7$ であるから, $a_2 - f(2) = 4 - (-7) = 11$ より

$$a_n - f(n) = 11 \cdot 2^{n-2} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 11 \cdot 2^{n-2} + f(n)$$

これに ② を代入して $a_n = 11 \cdot 2^{n-2} - 2n - 3 \quad (n \geq 2)$ ■

- 3** (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x_k = \frac{k}{n}$, $L_k = \frac{1}{n}f(x_k)$ より

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left\{a\left(\frac{1}{n}\right)^2 + b\left(\frac{1}{n}\right) + c\right\} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{a}{n^2} + \frac{b}{n} + c\right), \\ L_n &= \frac{1}{n}f(1) = \frac{1}{n}(a + b + c) \end{aligned}$$

したがって $L_1 + L_n = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{n^2} + \frac{b}{n} + a + b + 2c\right)$

条件式から $L_1 + L_n = \frac{1}{n}\left(\frac{8}{n^2} + 10\right)$

上の2式から $a = 8$, $b = 0$, $a + b + 2c = 10$ ゆえに $c = 1$

(2) $kL_k = k \cdot \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \cdots (*)$

(1)の結果より, $f(x) = 8x^2 + 1$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kL_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 xf(x) dx \\ &= \int_0^1 x(8x^2 + 1) dx = \left[2x^4 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(3) (*) に $\frac{k}{n}$ を掛けると $\frac{k^2}{n}L_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 L_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2(8x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{8}{5}x^5 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{29}{15} \end{aligned}$$



4 (1) $f(t) = \sqrt{3t^2 + t^3}$ とおくと, $F(x) = \int_x^{x+3} f(t) dt$ より ($-3 \leq x \leq 0$)

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x+3) - f(x) = \frac{\{f(x+3)\}^2 - \{f(x)\}^2}{f(x+3) + f(x)} \\ &= \frac{3(x+3)^2 + (x+3)^3 - (3x^2 + x^3)}{f(x+3) + f(x)} = \frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3) + f(x)} \end{aligned}$$

よって, $-3 < x < 0$ における $F'(x) = 0$ の解は $x = -2$

(2) (1) で求めた $F'(x)$ により, $F(x)$ の増減表は次のようになる.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$f(x) = |x|\sqrt{x+3}$, $-3 \leq x \leq 0$ に注意して, $F(x)$ を求める.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{x+3} f(t) dt \\ &= \int_0^x t\sqrt{t+3} dt + \int_0^{x+3} t\sqrt{t+3} dt \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{まず} \quad \int_0^x t\sqrt{t+3} dt &= \int_0^x \{(t+3)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{t+3}\} dt \\ &= \left[\frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}} - 2(t+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x \\ &= \left[\frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x \\ &= \frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{5}\sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② より

$$F(x) = \frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + (x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\} + \frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表から, 求める最小値は

$$F(-2) = \frac{2}{5}(-4 - 4^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{24}{5}(\sqrt{3} - 1)$$



2.5 2019年度

- 1 (1) $a_1 \neq 2$ であるから、第 $m+1$ 項で初めて $a_{m+1} = 2$ になると仮定すると、漸化式 $a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \cdots (*)$ に $n = m$ を代入すると 研

$$2 = \frac{2}{a_m} + 1 \quad \text{すなわち} \quad a_m = 2$$

第 m 項ですでに $a_m = 2$ となり、矛盾を生じる。

よって、すべての自然数 n に対して $a_n \neq 2$

- (2) $b_n = \frac{3}{a_n - 2} + 1 \cdots (**)$ より $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n - 2}$ これと $(*)$ により

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 1 &= \frac{2}{a_n} + 2 = \frac{2(a_n + 1)}{a_n} \\ a_{n+1} - 2 &= \frac{2}{a_n} - 1 = \frac{-(a_n - 2)}{a_n} \end{aligned}$$

$$\text{上の2式から} \quad \frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 2} = -2 \cdot \frac{a_n + 1}{a_n - 2} \quad \text{すなわち} \quad b_{n+1} = -2b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{a_1 + 1}{a_1 - 2} = \frac{1 + 1}{1 - 2} = -2$ 、公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n = b_1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^n$$

補足 $\{a_n\}$ の特性方程式 $x = \frac{2}{x} + 1$ の解が $2, -1$ であるから、数列 $\left\{ \frac{a_n + 1}{a_n - 2} \right\}$ は等比数列である。

- (3) $(**)$ より $b_n - 1 = \frac{3}{a_n - 2}$ ゆえに $a_n - 2 = \frac{3}{b_n - 1}$

$$\text{上式および(2)の結果から} \quad a_n = \frac{3}{(-2)^n - 1} + 2$$

- (4) (3)の結果を $a_n > \frac{5}{2}$ に代入すると

$$\frac{3}{(-2)^n - 1} + 2 > \frac{5}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{(-2)^n - 1} > \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

したがって $0 < (-2)^n - 1 < 6$ ゆえに $1 < (-2)^n < 7$

これを満たす自然数 n は $n = 2$



- 2 (1) a に対する b の値は、次のようになる.

a	1	2	3	4	5	6
b	2	1	3	2	4	3

このとき, $a > b$ となるのは, 次の 4 通り

a	2	4	5	6
b	1	2	4	3

よって, 求める確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$(2) \sin \frac{\pi}{5} > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ より } \sin \frac{\pi}{5} > 0.5$$

$$\cos \frac{\pi}{5} < \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}} < \sqrt{0.81} = 0.9 \quad \text{ゆえに} \quad \cos \frac{\pi}{5} < 0.9$$

$$(3) \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0.5}, \quad \sqrt{0.49} < \sqrt{0.5} < \sqrt{0.64} \text{ より}$$

$$0.7 < \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} < 0.8$$

(2) および上の結果に注意すると, $a < b$ となる (a, b) について

$$(a, b) = (2, 1) \text{ のとき } S = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \pi = 0 < 1.7$$

$$(a, b) = (4, 2) \text{ のとき } S = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} > 0.7 + 1 = 1.7$$

$$(a, b) = (5, 4) \text{ のとき } S = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{4} < 0.9 + 0.8 = 1.7$$

$$(a, b) = (6, 3) \text{ のとき } S = \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > \sqrt{1.7^2} = 1.7$$

よって, 求める条件付き確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

補足 $a < b$ である事象を X , $S < 1.7$ である事象を Y とすると

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$(a, b) = (1, 2) \text{ のとき } S = \cos \pi + \sin \frac{\pi}{2} = 0 < 1.7$$

$$(a, b) = (3, 3) \text{ のとき } S = \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} < 1.7$$

$P(Y) = \frac{4}{6}$ より, $P_X(Y) \neq P(Y)$ であるから, X と Y は独立ではない. ■

- 3 (1) $C_1: y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ と $C_2: y = x^3 + 1$ から y を消去すると

$$x^3 + 1 = x^2 + 2ax - 2a + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2 - 2a) = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と C_2 の共有点がちょうど2個のとき, 方程式 $(*)$ の実数解は2個ある.
 $a \neq 0$ より, $x^2 - 2a = 0$ は重解をもたないから, 方程式 $x^2 - 2a = 0$ は
 $x = 1$ を解にもつ. したがって

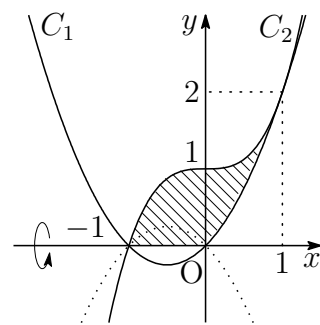
$$1^2 - 2a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2}$$

これを $(*)$ に代入すると $(x-1)^2(x+1) = 0$

これは, 条件を満たすから $a = \frac{1}{2}$

- (2) (1) の結果から $C_1: y = x^2 + x$

$$\begin{aligned} & |x^3 + 1|^2 - |x^2 + x|^2 \\ &= (x^3 + 1)^2 - (x^2 + x)^2 \\ &= (x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x + 1) \\ &= (x+1)^2(x-1)^2(x^2+1) \geq 0 \end{aligned}$$



したがって $|x^3 + 1| \geq |x^2 + x|$

求める回転体の体積は, 右の図の斜線部分を x 軸のまわりに1回転させたものであるから, その体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^1 (x^3 + 1)^2 dx - \int_0^1 (x^2 + x)^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^6 + 2x^3 + 1) dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^6 + 1) dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2) dx \\ &= \int_0^1 (2x^6 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 2) dx \\ &= \left[\frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = \frac{263}{210} \end{aligned}$$

よって $V = \frac{263}{210}\pi$

■

- 4 (1) $y = x \sin 3x + 3x^2$ を微分すると $y' = \sin 3x + 3x \cos 3x + 6x$
 C 上の x 座標が a である点における接線の方程式は

$$y - (a \sin 3a + 3a^2) = (\sin 3a + 3a \cos 3a + 6a)(x - a)$$

$$\text{すなわち } y = (\sin 3a + 3a \cos 3a + 6a)x - 3a^2(1 + \cos 3a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{これが原点を通るから } -3a^2(1 + \cos 3a) = 0$$

$$0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ より, } 0 < 3a < \frac{3}{2}\pi \text{ であるから}$$

$$3a = \pi \quad \text{よって} \quad a = \frac{\pi}{3}$$

- (2) (1) の結果を $\textcircled{1}$ に代入することにより $\ell : y = \pi x$
 C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x \sin 3x + 3x^2 = \pi x \quad \text{すなわち} \quad x(\pi - \sin 3x - 3x) = 0 \quad \cdots (*)$$

$$f(x) = \pi - \sin 3x - 3x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = -3 \cos 3x - 3 = -3(1 + \cos 3x) \leq 0$$

したがって, $f(x)$ は単調減少であり,

$$f(0) = \pi > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

$$\text{であるから, 方程式 } (*) \text{ の解は } x = 0, \frac{\pi}{3}$$

$$\text{よって, 求める共有点の座標は } (0, 0), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{3}\right)$$

- (3) (2) の結果から, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ において, $x(\pi - \sin 3x - 3x) \geq 0$ であるから,
 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\pi - \sin 3x - 3x) dx \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x dx \\ &= \frac{3}{6} \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \left[\frac{x}{3} \cos 3x - \frac{1}{9} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^3}{54} - \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$



2.6 2020年度

1 (1) 法5について

$x \equiv 0$ のとき	$x^2 \equiv 0$	(mod 5)
$x \equiv 1$ のとき	$x^2 \equiv 1$	(mod 5)
$x \equiv 2$ のとき	$x^2 \equiv 4$	(mod 5)
$x \equiv 3$ のとき	$x^2 \equiv 9 \equiv 4$	(mod 5)
$x \equiv 4$ のとき	$x^2 \equiv 16 \equiv 1$	(mod 5)

よって，題意は成立する．

(2) $x^2 + 5y = 2z^2$ より，法5について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}$$

(1)の結果から，(*)の左辺は法5について，0, 1, 4のいずれかに等しい．一方，右辺は0, 2, $8 \equiv 3 \pmod{5}$ のいずれかに等しい．

したがって， $x^2 \equiv 0, 2z^2 \equiv 0 \pmod{5}$ ，すなわち， $x \equiv z \equiv 0 \pmod{5}$

$x = 5x', z = 5z'$ (x', z' は整数) を $x^2 + 5y = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y \equiv 0 \pmod{5}$ であるから， x, y, z はすべて5の倍数である．

(3) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z が存在し，これら3数の最大公約数が1であるものを仮定する．

$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ より，法5について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}$$

(1)の結果から，(*)の左辺は法5について，0, 1, 4のいずれかに等しい．一方，右辺は0, 2, $8 \equiv 3 \pmod{5}$ のいずれかに等しい．

したがって， $x^2 \equiv 0, 2z^2 \equiv 0 \pmod{5}$ ，すなわち， $x \equiv z \equiv 0 \pmod{5}$

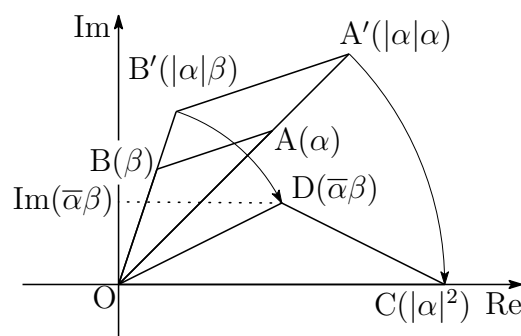
$x = 5x', z = 5z'$ (x', z' は整数) を $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ より， $y \equiv 0 \pmod{5}$ であるから， x, y, z が5を共通因数にもつことになり，仮定に反する．よって，題意は証明された。 ■

- 2 (1) 2点 $C(|\alpha|^2)$, $D(\bar{\alpha}\beta)$ は, それぞれ2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を原点を中心に $|\alpha|$ 倍の相似拡大, さらに原点を中心に $\arg \bar{\alpha}$ だけ回転 ($\times \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|}$) したものであるから

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\triangle OCD}{\triangle OAB} = |\alpha|^2$$



- (2) $\triangle OCD$ の底辺を $|\alpha|^2$, 高さを $|\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ とみると $S_2 = \frac{1}{2}|\alpha|^2|\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$

$$(1) \text{の結果から } S_1 = \frac{1}{|\alpha|^2} S_2 \quad \text{よって} \quad S_1 = \frac{1}{|\alpha|^2} \cdot \frac{1}{2} |\alpha|^2 |\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)| = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$$

別解 $\theta = \angle \alpha 0 \beta$ とすると $\cos \theta + i \sin \theta = \frac{\frac{\beta}{|\beta|}}{\frac{\alpha}{|\alpha|}} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \cdot \frac{\bar{\alpha}\beta}{\alpha\bar{\alpha}} = \frac{\bar{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|} \quad \text{であるから} \quad S_1 = \frac{1}{2} |\alpha||\beta| |\sin \theta| = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$$

- (3) (2) の結果から, 3点 $O(0)$, $P(z)$, $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\bar{z} \cdot \frac{1}{z} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \right|$$

$z = a + bi$ ($1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 3$) であるから

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}}{z} &= \frac{a - bi}{a + bi} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2}i, \\ \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \right| &= \frac{1}{2} \left| -\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right| = \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} = u, \quad \triangle OPQ = S(u) \quad \text{とおくと} \quad S(u) = \frac{u}{1 + u^2} \quad \left(\frac{1}{2} \leq u \leq 3 \right)$$

ゆえに $S'(u) = \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}$

u	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(u)$		+	0	-	
$S(u)$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{10}$

よって 最大値 $\frac{1}{2}$, 最小値 $\frac{3}{10}$

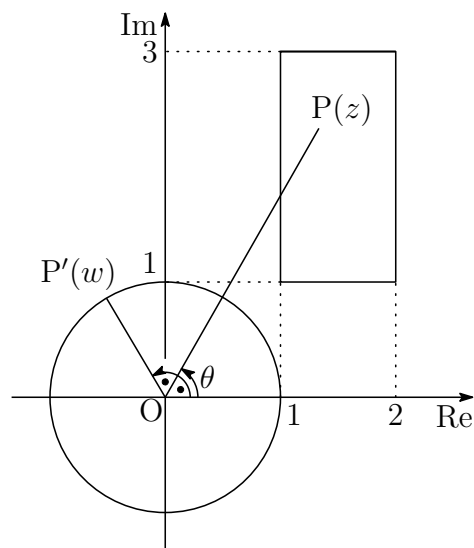
別解 $\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)$ であるから

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \right|$$

$\theta = \arg(z)$, $w = \frac{z}{\bar{z}}$ とすると

$$w = \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1,$$

$$\begin{aligned} \arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \\ &= \arg(z) - \arg(\bar{z}) \\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta \end{aligned}$$



点 $P'(w)$ は、点 $P(z)$ から単位円周上の点 P' への写像で、その偏角について

$$\arg(w) = 2\arg(z)$$

が成立する． $z = a + bi$ ($1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 3$) より、 $\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ とすると、上の図から

$$\tan \theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \tan \theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{したがって} \quad \triangle OPQ = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \cdots (*)$$

$$\text{このとき} \quad \sin 2\theta_1 = \frac{2 \tan \theta_1}{1 + \tan^2 \theta_1} = \frac{4}{5}, \quad \sin 2\theta_2 = \frac{2 \tan \theta_2}{1 + \tan^2 \theta_2} = \frac{3}{5}$$

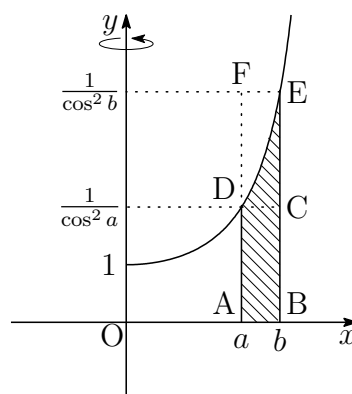
(*) より、 $\triangle OPQ$ は、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、最大値 $\frac{1}{2}$,

$\theta = \theta_2$ のとき、最小値 $\frac{3}{10}$ ■

- 3 (1) 曲線 $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) が x 軸と区間 $a \leq x \leq b$ において囲まれた斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は

$$\int_0^b \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^a \frac{dx}{\cos^2 x} = V(b) - V(a)$$

右の図の長方形 ABCD, 長方形 ABEF を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1, V_2 とすると



$$V_1 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$V_2 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} = \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}$$

$V_1 \leq V(b) - V(a) \leq V_2$ であるから

$$\pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a} \leq V(b) - V(a) \leq \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}$$

- (2) (1) の結果から, $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ に注意して

$$\pi(b+a) \frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{V(b) - V(a)}{b-a} \leq \pi(b+a) \frac{1}{\cos^2 b} \quad \dots (*)$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$, $0 < u < \frac{\pi}{2}$ に対して, (*) より

$0 < t < u < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 t} \leq \frac{V(u) - V(t)}{u-t} \leq \pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 u} \quad \dots \textcircled{1}$$

$0 < u < t < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 u} \leq \frac{V(u) - V(t)}{u-t} \leq \pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 t} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\lim_{u \rightarrow t} \pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 u} = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t} \quad \dots \textcircled{3}, \quad \lim_{u \rightarrow t} \pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 t} = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t} \quad \dots \textcircled{4}$$

①~④ から, $\frac{d}{dt} V(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{f(u) - f(t)}{u-t}$ は, はさみうちの原理により

$$\frac{d}{dt} V(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$$

(3) (2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)' dx \\ &= 2\pi \left[x \tan x + \log \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2 \right) \end{aligned}$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

補足 バウムクーヘン型求積法は, 教科書では扱っていないが, 問題集・参考書では重要公式として扱われている. 熊大ではバウムクーヘン型求積法を用いる出題が目立ち, 近年だけでも 2014 年 (理系), 2016 年 (理系・医医) で出題されている. 2016 年では理系・医医の共通問題として出題され, 理系の 5 割, 医医の 7 割の受験生がバウムクーヘン型求積法を用いて解答したそうである (熊大入試連絡会). 本題 (3) は多くの受験生が, (1), (2) の出来と関係なく独立して解答できたものと予想される. 勿論, 教科書にない公式 (バウムクーヘン型求積法) であるからということで減点されることはなかったそうである. 熊大は発展的な解法に対しても寛大である. 2018 年の空間のベクトルで四面体の体積をベクトル積 (外積) を用いた解答についても間違っていなかったため, 正解として減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会). 2020 年文系でも外積を用いることができる問題が出題された. 2020 年文系 4 番の解答にベクトル積 (外積) に関する解説を行っている. ■

- 4 (1) 2点 $F(t, 0)$, $F'(3t, 0)$ からの距離の和が一定である点 P の描く軌跡 C は楕円で, その中心は $(2t, 0)$ である. 楕円 C の直軸の長さを $2a$, 短軸の長さを $2b$ とすると ($a > b > 0$)

$$2a = 2\sqrt{2}t, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}FF' = t$$

$$\text{これを解いて } a = \sqrt{2}t, \quad b = t$$

$$\text{したがって, 楕円 } C \text{ の方程式は } \frac{(x-2t)^2}{2t^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$$

これと直線 $\ell: y = x - 1$ の方程式から y を消去すると

$$\frac{(x-2t)^2}{2t^2} + \frac{(x-1)^2}{t^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3x^2 - 4(t+1)x + 2(t^2+1) = 0 \quad \cdots (*)$$

C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつとき, $(*)$ の係数について

$$D/4 = \{-2(t+1)\}^2 - 3 \cdot 2(t^2+1) = -2(t^2 - 4t + 1) > 0$$

$$\text{これを解いて} \quad 2 - \sqrt{3} < t < 2 + \sqrt{3}$$

- (2) 2 次方程式 $(*)$ の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{2(t+1) + \sqrt{D/4}}{3} - \frac{2(t+1) - \sqrt{D/4}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{D/4}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)} \end{aligned}$$

C と ℓ の 2 つの交点 $A(\alpha, \alpha - 1)$, $B(\beta, \beta - 1)$ を結ぶ線分の長さは

$$AB = \sqrt{2}(\beta - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)}$$

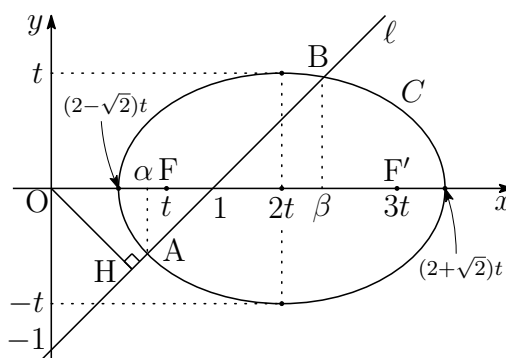
原点 O から直線 $\ell: x - y - 1 = 0$ に垂線 OH を引くと

$$OH = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\triangle OAB$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)} = \frac{1}{3} \sqrt{-2(t-2)^2 + 6} \end{aligned}$$

- (1) の結果に注意して, $t = 2$ のとき, 最大値 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ をとる. ■



2.7 2021年度

- 1 (1) ℓ 上の点 X について

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) = \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

このとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数の和は

$$\frac{2t}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right) = 1$$

よって, ℓ は平面 α 上の点である.

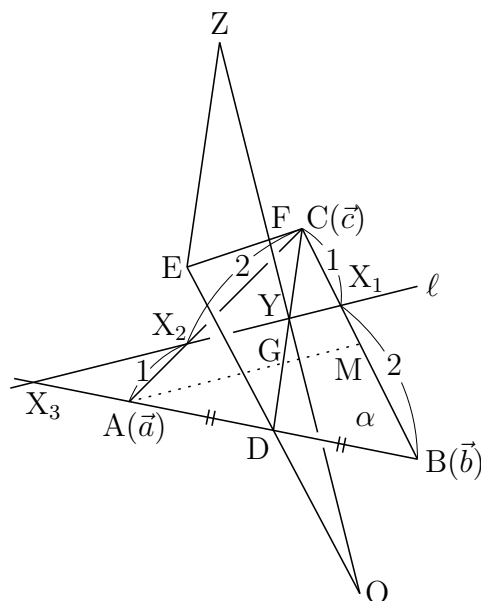
- (2) $\overrightarrow{OX}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数が 0 となる点をそれぞれ X_1 , X_2 , X_3 とすると

$$\overrightarrow{OX_1} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3},$$

$$\overrightarrow{OX_2} = \frac{2\vec{a} + \vec{c}}{3},$$

$$\overrightarrow{OX_3} = \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3}$$

直線 ℓ と $\triangle ABC$ の各辺との交点の個数について, 辺 BC 上は X_1 の 1 個, 辺 CA 上は X_2 の 1 個, 辺 AB 上は 0 個.



- (3) Y は CD 上の点であるから $\overrightarrow{CY} = s\overrightarrow{CD} = \frac{s}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ (s は実数)

$$\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CX_2}, \quad \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CX_1} \text{ を代入すると } \overrightarrow{CY} = \frac{3s}{4}\overrightarrow{CX_2} + \frac{3s}{2}\overrightarrow{CX_1}$$

$$Y \text{ は直線 } X_1X_2 \text{ 上の点であるから } \frac{3s}{4} + \frac{3s}{2} = 1$$

$$\text{これを解いて } s = \frac{4}{9} \quad \text{すなわち } CY : YD = 4 : 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\overrightarrow{OZ} = 2\overrightarrow{OY}$ となる点 Z をとると, 条件から

$$\triangle OYD \sim \triangle OZE, \quad YD : ZE = 1 : 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② および $\triangle CYF \sim \triangle EZF$ より $CF : FE = CY : ZE = 2 : 5$

このとき, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{OF} = \frac{5\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OE}}{2+5} = \frac{5\vec{c} + 2(\vec{a} + \vec{b})}{7} = \frac{1}{7}(2\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c})$$

別解 X_3 は線分 AB を $1:4$ に外分する点, D は AB の中点であるから

$$X_3A : AB = 1 : 3 \quad \text{ゆえに} \quad X_3A : AD = 2 : 3$$

$\triangle CAD$ と直線 ℓ について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{CX_2}{X_2A} \cdot \frac{AX_3}{X_3D} \cdot \frac{DY}{YC} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{DY}{YC} = 1$$

したがって $CY : YD = 4 : 5$ (以下同様)

別解 ℓ 上の点 Y について, $\overrightarrow{OY} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CY} &= \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) - \vec{c} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{c}) + \frac{t}{3}\{2(\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c})\} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{t}{3}(2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = \frac{2t}{3}\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{CY}$ は $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ と平行であるから

$$\frac{2t}{3} = \frac{1}{3} - \frac{t}{3} \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{CY} = \frac{2}{9}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{4}{9}\overrightarrow{CD} \quad \text{すなわち} \quad CY : YD = 4 : 5 \quad (\text{以下同様})$$

補足 直線 ℓ について

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

BC の中点を M とすると, この直線 ℓ の方向ベクトル $2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ は

$$2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = -\{(\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a})\} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AM}$$

したがって, ℓ は中線 AM と平行である.

2つの中線 AM と CD の交点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$CG : GD = 2 : 1$$

$\ell // AM$ であるから $CY : YG = CX_2 : X_2A = 2 : 1$

$$CD : CY = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9 : 4 \quad \text{ゆえに} \quad CY : YD = 4 : 5$$

2 (1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を ℓ とすると

$$y - (t^3 - 2t^2 + t) = (3t^2 - 4t + 1)(x - t)$$

整理すると $\ell: y = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x^3 - 2x^2 + x = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$$

整理すると $(x - t)^2(x + 2t - 2) = 0$ ゆえに $x = t, -2t + 2$

したがって, C と ℓ の共有点で点 $(t, f(t))$ と異なる点は

$$(-2t + 2, f(-2t + 2)) \quad (*)$$

点 $P_1(2, f(2))$ のとき

$$P_2(-2, f(-2)) \quad \text{すなわち} \quad P_2(-2, -18)$$

(2) ℓ_n は ℓ の方程式において, $t = a_n$ とすればよいから

$$\ell_n: y = (3a_n^2 - 4a_n + 1)x - 2a_n^3 + 2a_n^2$$

よって, ℓ_n の傾き $3a_n^2 - 4a_n + 1$, y 切片 $-2a_n^3 + 2a_n^2$

(3) $P_1(2, 2)$ および $(*)$ から, $a_1 = 2$

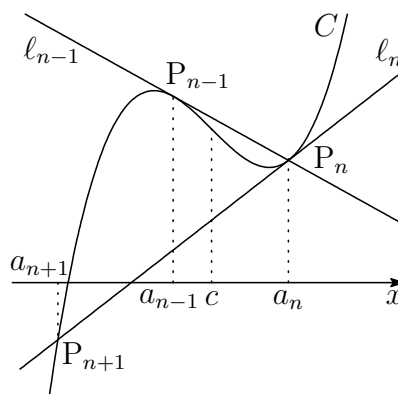
$$a_{n+1} = -2a_n + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - \frac{2}{3} = -2 \left(a_n - \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{したがって} \quad a_n - \frac{2}{3} = \left(a_1 - \frac{2}{3} \right) (-2)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{4}{3}(-2)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

補足 3次関数 $C: y = f(x)$ のグラフ上の点 $P_n(a_n, f(a_n))$ における接線 ℓ_n とする. C と ℓ_n の共有点のうち, P_n と異なるものを $P_{n+1}(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ とし, C の変曲点の x 座標を c とすると

$$a_{n+1} - c = -2(a_n - c)$$

が成立する.



$$\boxed{3} \quad (1) \quad \{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$$

これを w について整理すると

$$\begin{aligned} w^2(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) &= 4(\gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2) \\ w^2(\beta - \alpha)^2 &= 4(\gamma - \alpha)^2 \end{aligned}$$

α, β, γ は相異なる複素数であるから

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 = \frac{w^2}{4}$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から } \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \frac{w}{2}$$

w の実部, 虚部はともに正であるから $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$

$$(i) \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{w}{2} \text{ のとき } \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \arg\left(\frac{w}{2}\right) = \arg w$$

$$0 < \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$(ii) \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -\frac{w}{2} \text{ のとき } \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \arg\left(-\frac{w}{2}\right) = \arg w + \pi$$

$$\pi < \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) < \frac{3}{2}\pi$$

$\triangle ABC$ が正三角形であるとき

$$\left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

$\arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \frac{5}{3}\pi$ は, (i), (ii) とともに満たさない.

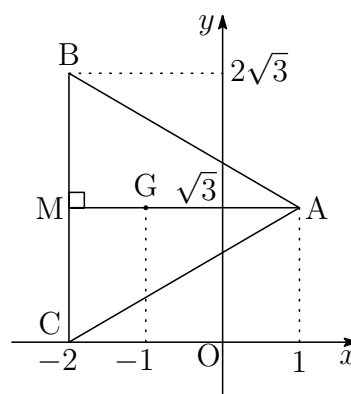
$\arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \frac{\pi}{3}$ は (i) を満たし, このとき

$$\left|\frac{w}{2}\right| = \left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \arg\left(\frac{w}{2}\right) = \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = \frac{\pi}{3}$$

したがって $(*) \quad \frac{w}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{よって} \quad w = 1 + \sqrt{3}i$

(3) (*) より

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 2 \cdot \frac{w}{2} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= 1 + \sqrt{3}i \\
 \frac{w^2}{2} &= 2 \left(\frac{w}{2} \right)^2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\
 &= -1 + \sqrt{3}i
 \end{aligned}$$

BC の中点を M とすると $M(-2 + \sqrt{3}i)$ AM = 3 より $BM = CM = \sqrt{3}$ よって $\beta = -2 + 2\sqrt{3}i, \gamma = -2$ **4** (1) $\sin x = \sin 2x$ より

$$\sin x = 2 \sin x \cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x(1 - 2 \cos x) = 0$$

 $0 \leq x \leq \pi$ のとき, これを解くと $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi$ (2) $f(x) = \sin x - \sin 2x$ とし, $I = \int_0^\pi |f(x)| dx$ とおくと

$$I = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^\pi |f(x)| dx + \int_\pi^{2\pi} |f(x)| dx$$

 $\int_\pi^{2\pi} |f(x)| dx$ について, $x = 2\pi - u$ とおくと

$$\frac{dx}{du} = -1 \quad \begin{array}{c|c} x & \pi \longrightarrow 2\pi \\ \hline u & \pi \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f(2\pi - x) &= \sin(2\pi - x) - \sin 2(2\pi - x) \\
 &= -\sin x + \sin 2x = -f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_\pi^{2\pi} |f(x)| dx &= \int_\pi^0 |f(2\pi - u)| (-1) du \\
 &= \int_0^\pi |f(u)| du = \int_0^\pi |f(x)| dx
 \end{aligned}$$

したがって

$$I = 2 \int_0^\pi |f(x)| dx$$

$$f(x) = \sin x(1 - 2 \cos x) \text{ より } |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}) \\ f(x) & (\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f(x) dx = -\left[F(x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[F(x) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) + F(\pi) = -\frac{1}{2} - 2\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって } I = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

$$(3) \quad I_n = \int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx| dx \text{ とおく.}$$

$$t = nx \text{ とすると } \frac{dt}{dx} = n \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow 2\pi \\ \hline t & 0 \longrightarrow 2n\pi \end{array}$$

$$I_n = \int_0^{2n\pi} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{2n\pi} |\sin x - \sin 2x| dx \quad (*)$$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数であるから, (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \int_0^{2n\pi} |f(x)| dx = \frac{1}{n} \cdot n \int_0^{2\pi} |f(x)| dx \\ &= \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = I = 5 \end{aligned}$$

$$(4) J_n = \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx| \text{ とおく.}$$

$$t = nx \text{ とすると } \frac{dt}{dx} = n \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow c \\ \hline t & 0 \longrightarrow nc \end{array}$$

$$J_n = \int_0^{nc} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(t)| dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)| dx$$

$\frac{nc}{2\pi}$ 以下の最大の整数を N とすると

$$(**) \quad N \leq \frac{nc}{2\pi} < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2N\pi \leq nc < 2(N+1)\pi$$

(*) および (2) の結果により, $I_N = \frac{1}{N} \int_0^{2N\pi} |f(x)| dx = 5$ であるから

$$\int_0^{2N\pi} |f(x)| dx = 5N$$

したがって

$$\frac{1}{n} \int_0^{2N\pi} |f(x)| dx \leq \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)| dx < \frac{1}{n} \int_0^{2(N+1)\pi} |f(x)| dx$$

$$\frac{1}{n} \cdot 5N \leq J_n < \frac{1}{n} \cdot 5(N+1)$$

(**) より $\frac{nc}{2\pi} - 1 < N$, $N+1 \leq \frac{nc}{2\pi} + 1$ であるから

$$\frac{5}{n} \left(\frac{nc}{2\pi} - 1 \right) < J_n < \frac{5}{n} \left(\frac{nc}{2\pi} + 1 \right)$$

$$\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} < J_n < \frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}$$

$$\text{このとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} \right) = \frac{5c}{2\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n} \right) = \frac{5c}{2\pi}$$

よって, はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{5c}{2\pi}$

2.8 2022 年度

1 (1) $P_1(a, 0, 0)$, $P_2(a+1, 0, 0)$ より $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 0)$

$Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 3)$. $\triangle P_1QR$, $\triangle P_2QR$ のそれぞれの重心 G_1 , G_2 は

$$G_1\left(\frac{a}{3}, \frac{1}{3}, 1\right), \quad G_2\left(\frac{a+1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{G_1G_2} = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$$

したがって $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$

よって, P_1 , P_2 を通る直線と, G_1 , G_2 を通る直線は平行である.

(2) $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{P_1G_1} = \left(-\frac{2a}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ より

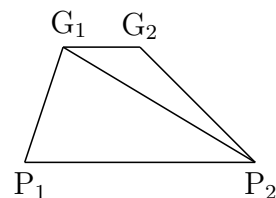
$$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 = 1, \quad |\overrightarrow{P_1G_1}|^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{10}{9}, \quad \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1G_1} = -\frac{2a}{3}$$

したがって $\triangle P_1P_2G_1 = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_1P_2}|^2|\overrightarrow{P_1G_1}|^2 - (\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1G_1})^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{10}{9}\right) - \left(-\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

求める四角形 $P_1P_2G_2G_1$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle P_1P_2G_1 + \triangle G_1G_2P_2 \\ &= \triangle P_1P_2G_1 + \frac{1}{3}\triangle P_1P_2G_1 \\ &= \frac{4}{3}\triangle P_1P_2G_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6} = \frac{2\sqrt{10}}{9} \end{aligned}$$



(3) $\overrightarrow{P_1R} = (-a, 0, 3)$. $\overrightarrow{P_1P_2}$ および $\overrightarrow{P_1G_1}$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, -3, 1)$$

とする. 点 R から四角形 $P_1P_2G_1G_2$ に引いた垂線の長さ h は

$$h = |\overrightarrow{P_1R} \cdot \vec{n}| = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

よって, 求める立体の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{2}{9}$$

2 (1) 違う色の玉を取り出す確率は $\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2 \times 2}{6} = \frac{2}{3}$

同じ色の玉を取り出す確率は、上の余事象の確率であるから $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

よって、B が 1 巡目で勝者になる確率は $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

(2) N 巡目で B が勝者になる確率は $\left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right\}^{N-1} \times \frac{2}{9} = \frac{2}{9} \left(\frac{4}{9} \right)^{N-1}$

よって、 N 巡目以内に B が勝者になる確率 p_N は

$$p_N = \sum_{k=1}^N \frac{2}{9} \left(\frac{4}{9} \right)^{k-1} = \frac{2}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9} \right)^N}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{4}{9} \right)^N \right\}$$

$$p_N > 0.396 \text{ となるとき } \frac{2}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{4}{9} \right)^N \right\} > 0.396$$

$$\left(\frac{4}{9} \right)^N < \frac{1}{100} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{3}{2} \right)^N > 10$$

上の第 2 式について 2 を底とする対数をとると

$$N(\log_2 3 - 1) > 1 + \log_2 5 \quad \text{ゆえに} \quad 0.585N > 3.322$$

$$\text{したがって } N > \frac{3322}{585} = 5.6 \dots \quad \text{よって } N \text{ の最小値は } 6$$

(3) N 巡目で A が勝者になる確率は $\frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right\}^{N-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^{N-1}$

N 巡目以内に A が勝者になる確率を q_N とすると

$$q_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^{k-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9} \right)^N}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{4}{9} \right)^N \right\}$$

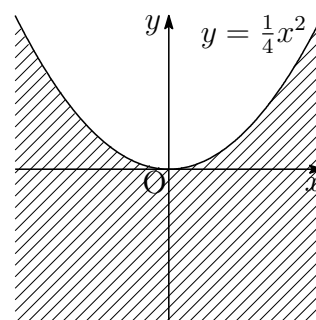
$$\text{したがって} \quad q_N - p_N = \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{4}{9} \right)^N \right\} > 0$$

よって、求める確率は、A の方が大きい。

- 3 (1) $f(p) = p^2 + xp + y$ について, $f(p) = 0$ が実数解を持つから係数について

$$x^2 - 4y \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \leq \frac{1}{4}x^2$$

よって, $D: y \leq \frac{1}{4}x^2$ の表す領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含む.



$$(2) f(p) = \left(p + \frac{x}{2}\right)^2 + y - \frac{x^2}{4}$$

[1] $f(p) = 0$ の 2 つの解がともに $0 \leq p \leq 1$ にあるとき,

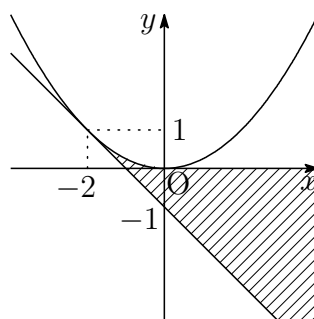
$$0 \leq -\frac{x}{2} \leq 1, \quad y - \frac{x^2}{4} \leq 0, \quad f(0) \geq 0, \quad f(1) \geq 0 \text{ より}$$

$$-2 \leq x \leq 0, \quad y \leq \frac{x^2}{4}, \quad y \geq 0, \quad y \geq -x - 1$$

[2] $f(p) = 0$ の 1 つの解が $p \leq 0$, 他の 1 つの解が $0 \leq p \leq 1$ にあるとき, $f(0) \leq 0, f(1) \geq 0$ より

$$y \leq 0, \quad y \geq -x - 1$$

E の表す領域は, [1] または [2] を満たす領域で境界線を含む.



- (3) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 4$ とおくと, $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$ は点 (x, y) と点 $(0, 2)$ の距離の 2 乗である. これを最小にする E 上の点は

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad (-2 \leq x \leq 0)$$

にあるから, $-2 \leq x \leq 0$ における次式の最小値を求めればよい.

$$f\left(x, \frac{1}{4}x^2\right) = x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right)^2 = \frac{1}{16}x^4 + 4$$

よって, 求める最小値は $f(0, 0) = 4$

- 4 (1) $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) は単調増加であるから

$$\text{最小値 } f(0) = 1, \quad \text{最大値 } f(1) = \sqrt{2}$$

- (2) $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ とおく ($0 \leq x \leq 1$).

曲線 $y = g(x)$ は上に凸であり, 2点 $(0, 0)$, $(1, 1)$ を結ぶ線分

$$y = x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

の下側になくから

$$g(x) \geq x \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

が成り立つ. したがって, $0 \leq x \leq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x)^2 - 2x^2 &= 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2} - 2x^2 \\ &= 1 - x^2 + g(x)^2 - x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$f(x) > 0 \text{ であるから } f(x) \geq \sqrt{2}x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$\text{上式および (1) の結果から } \sqrt{2}x \leq f(x) \leq \sqrt{2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

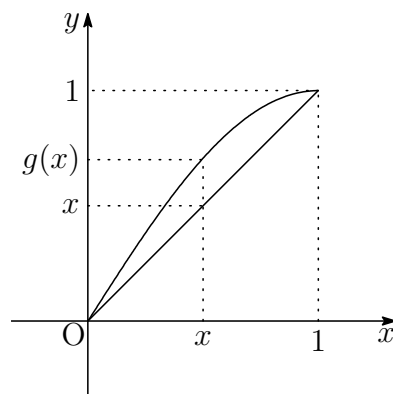
- (3) (2) の結果から

$$\int_0^1 (\sqrt{2}x)^n dx \leq \int_0^1 \{f(x)\}^n dx \leq \int_0^1 (\sqrt{2})^n dx$$

$$\text{したがって } \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} \leq a_n \leq (\sqrt{2})^n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt{2} \quad \cdots (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1 \quad \cdots (**)$$

$$(*), (**) \text{ から, はさみうちの原理により } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{2}$$



2.9 2023 年度

- 1** (1) (*) $(4n^2 - 1)(a_n - a_{n+1}) = 8(n^2 - 1)a_n a_{n+1}$
 (*) に $n = 1, 2$ を代入すると

$$3(a_1 - a_2) = 0, \quad 15(a_2 - a_3) = 24a_2 a_3$$

$a_1 = \frac{1}{8}$ を上の第 1 式に代入して $a_2 = \frac{1}{8}$
 これを第 2 式に代入すると

$$15\left(\frac{1}{8} - a_3\right) = 24 \cdot \frac{1}{8} a_3 \quad \text{ゆえに} \quad a_3 = \frac{5}{48}$$

- (2) (1) の結果に注意して, $k \geq 3$ に対して, $a_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots, k$), $a_{k+1} = 0$ と仮定し, (*) に $n = k$ を代入すると

$$(4k^2 - 1)a_k = 0$$

$4k^2 - 1 \neq 0$ より, $a_k = 0$ となり, 矛盾. よって $a_n \neq 0$

- (3) (*) の両辺を $(4n^2 - 1)a_n a_{n+1}$ で割ると

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{8(n^2 - 1)}{4n^2 - 1}$$

- (4) (3) の結果から $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2 - 3\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$
 $n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 2 - 3 \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \right\}$$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = 2(n-1) - 3 \left(1 - \frac{1}{2n-1} \right)$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから, $a_1 = \frac{1}{8}$ を代入して整理すると

$$\frac{1}{a_n} = 2n + 3 + \frac{3}{2n-1} = \frac{(2n+3)(2n-1) + 3}{2n-1} = \frac{4n(n+1)}{2n-1}$$

よって
$$a_n = \frac{2n-1}{4n(n+1)}$$

- 2** (1) 2回投げて出た目の数の積が12となるのは、出た目が $\{2, 6\}$, $\{3, 4\}$ であるから

$$p_2 = \frac{2!}{1!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{9}$$

3回投げて出た目の数の積が12となるのは、出た目が $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 2, 3\}$ であるから

$$p_3 = \frac{3!}{1!1!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 2 + \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5}{72}$$

- (2) n 回の目の出方で、1以外の目の出方は $\{2, 6\}$, $\{3, 4\}$, $\{2, 2, 3\}$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n!}{1!1!(n-2)!} \left(\frac{1}{6}\right)^n \times 2 + \frac{n!}{2!1!(n-3)!} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{2n(n-1)}{6^n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 6^n} = \frac{n(n-1)(n+2)}{2 \cdot 6^n} \end{aligned}$$

- (3) $n-1$ 回目までの目の積が12で、 n 回目で1の目が出る確率は

$$p_{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} p_{n-1}$$

これと(2)の結果から、求める確率は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{6} p_{n-1} &= \frac{n(n-1)(n+2)}{2 \cdot 6^n} - \frac{1}{6} \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n+1)}{2 \cdot 6^{n-1}} \\ &= \frac{(n-1)(3n+2)}{2 \cdot 6^n} \end{aligned}$$

- 3** (1) $w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, $P(z_p)$, $Q(z_q)$, $R(z_r)$ とおくと、条件から

$$\frac{z_p - 0}{\alpha - 0} = w, \quad \frac{z_q - \beta}{0 - \beta} = w, \quad \frac{z_r - \alpha}{\beta - \alpha} = w$$

$$\text{ゆえに} \quad z_p = w\alpha, \quad z_q = (1-w)\beta, \quad z_r = (1-w)\alpha + w\beta$$

$$w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ より}$$

$$P\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\alpha\right), Q\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\beta\right), R\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\alpha + \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\beta\right)$$

(2) $G(z_1)$, $H(z_2)$, $I(z_3)$ とおくと, 条件から

$$(*) \begin{cases} z_1 = \frac{1}{3}(w\alpha + 0 + \alpha) = \frac{1+w}{3}\alpha \\ z_2 = \frac{1}{3}\{(1-w)\beta + \beta + 0\} = \frac{2-w}{3}\beta \\ z_3 = \frac{1}{3}\{(1-w)\alpha + w\beta + \alpha + \beta\} = \frac{2-w}{3}\alpha + \frac{1+w}{3}\beta \end{cases}$$

$$w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ より}$$

$$G\left(\frac{3 + \sqrt{3}i}{6}\alpha\right), H\left(\frac{3 - \sqrt{3}i}{6}\beta\right), I\left(\frac{3 - \sqrt{3}i}{6}\alpha + \frac{3 + \sqrt{3}i}{6}\beta\right)$$

(3) (*) より

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= \frac{1}{3}\{-(1+w)\alpha + (2-w)\beta\} \\ z_3 - z_1 &= \frac{1}{3}\{(1-2w)\alpha + (1+w)\beta\} \end{aligned}$$

ここで, $w^3 = -1$ より ($w \neq -1$), $(w+1)(w^2 - w + 1) = 0$ であるから

$$w^2 - w + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad w^2 = w - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

① に注意して

$$\begin{aligned} w(z_2 - z_1) &= \frac{1}{3}\{-(w + w^2)\alpha + (2w - w^2)\beta\} \\ &= \frac{1}{3}\{-(w + w - 1)\alpha + (2w - w + 1)\beta\} \quad (**) \\ &= \frac{1}{3}\{(1 - 2w)\alpha + (1 + w)\beta\} = z_3 - z_1 \end{aligned}$$

(**) について, $z_2 - z_1 = 0$ のとき $-(1+w)\alpha + (2-w)\beta = 0$

このとき, ① により $\beta = \frac{1+w}{2-w}\alpha = \frac{2w-w^2}{2-w}\alpha = w\alpha$

したがって, $\beta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha$ のとき, 3点 G , H , I は一致する.

よって $\beta \neq \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha$ のとき, $\triangle GHI$ は正三角形である.

$\beta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha$ のとき, $\triangle GHI$ は正三角形でない.

- 4 (1) $f(x) = 2tx^2e^{-tx^2}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2t\{2xe^{-tx^2} + x^2 \cdot (-2tx)e^{-tx^2}\} \\ &= 4tx(1 - tx^2)e^{-tx^2} \end{aligned} \quad (*)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } t > 0 \text{ より } x = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{t}}$$

したがって, $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{t}}$ のとき, 極大値 $\frac{2}{e}$, $x = 0$ のとき, 極小値 0

- (2) (*) より

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_1^{\sqrt{t}} f'(x) \log x \, dx = \left[f(x) \log x \right]_1^{\sqrt{t}} - \int_1^{\sqrt{t}} f(x) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= f(\sqrt{t}) \log \sqrt{t} - \int_1^{\sqrt{t}} 2txe^{-tx^2} \, dx = 2t^2 e^{-t^2} \log \sqrt{t} + \left[e^{-tx^2} \right]_1^{\sqrt{t}} \\ &= (t^2 \log t + 1)e^{-t^2} - e^{-t} \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から $g(t) = (t^2 \log t + 1)e^{-t^2} - e^{-t}$

$$h(t) = (t^{\frac{5}{2}} - t^2 + 1)e^{-t^2} - e^{-t} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} g(t) - h(t) &= (t^2 \log t - t^{\frac{5}{2}} + t^2)e^{-t^2} \\ &= t^2(\log t - \sqrt{t} + 1)e^{-t^2} \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \log t - \sqrt{t} + 1 \text{ とおくと } (1 \leq t \leq 4)$$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2 - \sqrt{t}}{2t}$$

$$\varphi(1) = 0, \quad 1 < t < 4 \text{ において, } \varphi'(t) > 0 \text{ であるから}$$

$$1 < t < 4 \text{ において } \varphi(t) > 0$$

$$1 < t < 4 \text{ において, } g(t) - h(t) = t^2 e^{-t^2} \varphi(t) > 0 \text{ であるから}$$

$$1 < t < 4 \text{ において } g(t) > (t^{\frac{5}{2}} - t^2 + 1)e^{-t^2} - e^{-t}$$

2.10 2024 年度

- 1 (1) $y = e^x$ を微分すると $y' = e^x$
したがって、曲線 $y = e^x$ 上の点 (a, e^a) における接線の方程式は
- $$y - e^a = e^a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = e^a x + e^a(1 - a)$$
- (2) (1) の結果から $p = e^a, q = e^a(1 - a)$
 $e^a = p, a = \log p$ より $q = p(1 - \log p)$
- (3) (2) の結果から $f(x) = x(1 - \log x)$ これを微分すると $f'(x) = -\log x$
 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は
- $$y - a(1 - \log a) = -(x - a) \log a \quad \text{ゆえに} \quad y = -x \log a + a$$
- ℓ_1, ℓ_2 は、上式の a にそれぞれ $1, e$ を代入したものであるから

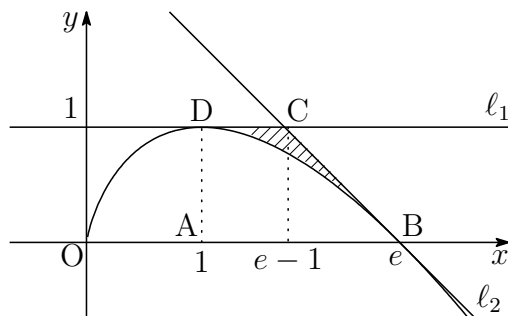
$$\ell_1 : y = 1, \quad \ell_2 : y = -x + e$$

- (4) $f''(x) = -\frac{1}{x} < 0$ から、 ℓ_1, ℓ_2 は曲線 $y = f(x)$ の上側にある。ここで

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x(1 - \log x) dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' (1 - \log x) dx \\ &= \frac{x^2}{2}(1 - \log x) - \int \frac{x^2}{2} \left(-\frac{1}{x}\right) dx \\ &= x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \log x\right) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

求める面積を S とすると、下の図から

$$\begin{aligned} S &= \text{台形 ABCD} - \int_1^e f(x) dx \\ &= \frac{1}{2}\{(e-2) + (e-1)\} - \left[x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \log x\right) \right]_1^e \\ &= -\frac{1}{4}(e^2 - 4e + 3) \end{aligned}$$



- 2 (1) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $0 < \angle AOB < \pi$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle AOB$ より

$$-4 < \vec{a} \cdot \vec{b} < 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\vec{p} = \vec{OP}$ とおくと, $\vec{OA} \cdot \vec{AP} = 0$, $\vec{OB} \cdot \vec{BP} = 0$ であるから

$$\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{p} = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{p} = 4$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は, 1次独立であるから, $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とすると (x, y は実数)

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b}) = 4 \\ \vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b}) = 4 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} 4x + (\vec{a} \cdot \vec{b})y = 4 \\ (\vec{a} \cdot \vec{b})x + 4y = 4 \end{cases}$$

① に注意してこれを解くと $x = y = \frac{4}{4 + \vec{a} \cdot \vec{b}}$

よって, $\vec{OP} = \frac{4}{4 + \vec{a} \cdot \vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$ が成立する.

- (2) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2(4 + \vec{a} \cdot \vec{b})$ であるから, (1) の結果から

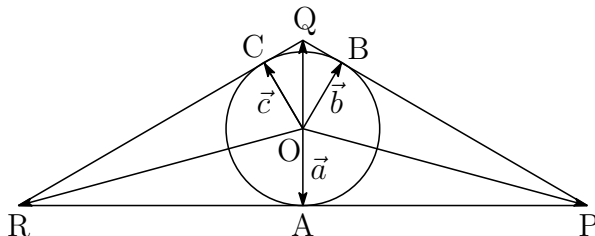
$$\vec{OP} = \frac{8}{|\vec{a} + \vec{b}|} \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}$$

したがって $OP = \frac{8}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{8 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}} = \frac{8}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}$
 $= \frac{8}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

別解 $\cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ゆえに $\angle AOB = 150^\circ$

$\angle AOP = 75^\circ$ であるから

$$OP = \frac{OA}{\cos 75^\circ} = 2 \times \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$



(3) 与えられた条件より, $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\angle AOB = \angle AOC = 150^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \angle QPR = \angle QRP = 30^\circ$$

$$(2) \text{ と同様に} \quad OQ = \frac{8}{\sqrt{8 + 2\vec{b} \cdot \vec{c}}} = \frac{8}{\sqrt{8 + 2 \cdot 2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

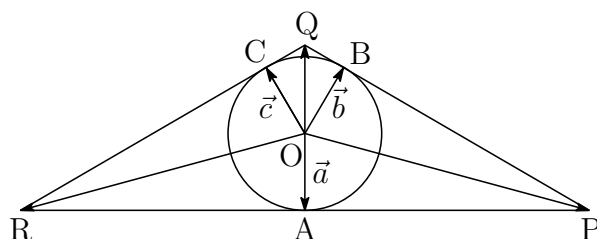
$\triangle QRP$ は, $PQ = RQ$ の二等辺三角形であるから

$$AQ = OA + OQ = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$PR = 2AP = 2\sqrt{3}AQ$$

よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}PR \cdot AQ &= \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot 2\sqrt{3}AQ = \sqrt{3}AQ^2 \\ &= \sqrt{3} \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2 = 16 + \frac{28}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$



補足 $\cos \angle BOC = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ より, $\angle BOC = 60^\circ$

$\angle BOQ = 30^\circ$ であるから

$$OQ = \frac{OB}{\cos 30^\circ} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

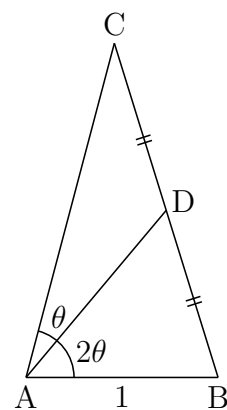
- 3 (1) $BD = CD$ より, $\triangle ABD = \triangle ACD$ であるから

$$\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin 2\theta = \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin \theta$$

したがって $AB \sin 2\theta = AC \sin \theta$

$AB = 1$ より

$$AC = \frac{AB \sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta$$



- (2) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 3\theta \\ &= 1^2 + (2 \cos \theta)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos \theta \cdot (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ &= -16 \cos^4 \theta + 16 \cos^2 \theta + 1 \end{aligned}$$

よって $BC = \sqrt{-16 \cos^4 \theta + 16 \cos^2 \theta + 1}$

- (3) (2) の結果から

$$BC^2 = -16 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)^2 + 5$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ に注意して

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, 最大値 $\sqrt{5}$

- 4 (1) $a_m < 0$ となる $m \geq 2$ が存在すると仮定すると

$$a_m = \log_3 a_{m-1} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{m-1} < 1$$

したがって, $a_m = 3^{m-2} > 0$ となり, 矛盾を生じる.

よって, 2 以上の自然数 n に対して $a_n \geq 0$ である.

- (2) (1) の結論から $a_4 \geq 0, a_5 \geq 0$

$a_4 + a_5 = 1$ であるから

$$a_4 = 1 - a_5 \geq 0, \quad a_5 = 1 - a_4 \geq 0$$

したがって $0 \leq a_4 \leq 1, \quad 0 \leq a_5 \leq 1 \quad \dots (*)$

$a_4 < 1$ とすると, $a_5 = 3^3$ となり, $(*)$ に反する.

したがって $a_4 = 1, \quad a_5 = \log a_4 = 0$

$a_3 < 1$ とすると, $a_4 = 3^2 = 9$ となり, 不適.

$a_3 \geq 1$ であるから $a_4 = \log_3 a_3 = 1$ ゆえに $a_3 = 3$

よって **$a_3 = 3, a_4 = 1, a_5 = 0$**

- (3) $0 \leq a_2 < 1$ のとき, $a_3 = 3^1 = 3$ となり, (2) の結果を満たす.

$a_2 \geq 1$ のとき, $a_3 = \log_3 a_2 = 3$ ゆえに $a_2 = 27$

したがって, a_2 の取り得る値の範囲は

$$0 \leq a_2 < 1, \quad a_2 = 27 \tag{A}$$

$a_1 < 1$ とすると, $a_2 = 3^0 = 1$ となり, (A) に反するので, 不適.

$a_1 \geq 1$ とすると, $a_2 = \log_3 a_1$ より

$$0 \leq \log_3 a_1 < 1, \quad \log_3 a_1 = 27$$

したがって, a_1 の取り得る値の範囲は

$$1 \leq a_1 < 3, \quad a_1 = 3^{27} \tag{B}$$

(A), (B) より $m_1 = 1, M_1 = 3^{27}, m_2 = 0, M_2 = 27$

よって $m_1 + m_2 + \log_3 M_1 M_2 = 1 + 0 + \log_3 3^{27} \cdot 27 = 31$

第 3 章 一般前期研究

3.1 2015 年度

3.1.1 1 番 テイラー展開

$f(t)$ を必要な回数だけ微分可能 (C^∞ 級) な関数とし, $k \geq 1$ とする.

問 解

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) dt &= - \int_a^x \left\{ \frac{(x-t)^k}{k!} \right\}' f^{(k)}(t) dt \\ &= - \left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt \end{aligned}$$

よって $\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) dt - \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

上式を $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ について辺々を加えると

$$\int_a^x f'(t) dt - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \quad (3.1)$$

さらに, 積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値, 最小値を, それぞれ M, m とすると,

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \text{ は}$$

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M dt = \frac{M}{n!} (x-a)^n, \quad \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} m dt = \frac{m}{n!} (x-a)^n$$

の間の値をとるので, この区間内のある c は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n \quad (3.2)$$

を満たす. (3.2) を (3.1) に代入すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n \quad (3.3)$$

(3.3) を $f(x)$ の $x=a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という.
とくに $a=0$ とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n \quad (3.4)$$

となり, これをマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という.
さらに, (3.3) から得られる級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

をテイラー級数 (Taylor series) という. 同様に, (3.4) から得られる級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \dots (*)$$

をマクローリン級数 (Maclaurin's series) という.

- $f(x) = e^x$ のとき, $f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(0) = 1$
- $f(x) = \cos x$ のとき, $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2}$
- $f(x) = \sin x$ のとき, $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$

これらの結果を (*) に代入すると

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

上の第1式から
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \cos x + i \sin x
 \end{aligned}$$

等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ をオイラーの公式 (Euler's Formula) という.

3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数を a とし, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ を満たすとする ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3a(x - \alpha)(x - \beta) = 3a\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} \\
 f''(x) &= 3a\{2x - (\alpha + \beta)\} \\
 f'''(x) &= 6a
 \end{aligned}$$

$f(x)$ を $x = \alpha$ を極として, テイラー展開を行うと

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x - \alpha)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x - \alpha)^3$$

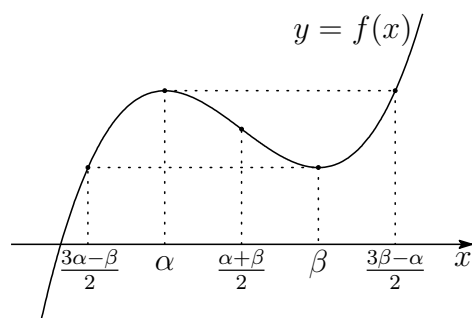
したがって

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(\alpha) &= \frac{3a}{2}(\alpha - \beta)(x - \alpha)^2 + a(x - \alpha)^3 \\
 &= a(x - \alpha)^2 \left(x - \frac{3\beta - \alpha}{2} \right)
 \end{aligned}$$

同様にして

$$f(x) - f(\beta) = a(x - \beta)^2 \left(x - \frac{3\alpha - \beta}{2} \right)$$

$a > 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフは次のようになる.



とくに, 数列 $\frac{3\alpha - \beta}{2}, \alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}, \beta, \frac{3\beta - \alpha}{2}$ は, 等差数列をなす.

本題において, $f(0) = 0$, $\alpha < \beta < 3\alpha$ より, $0 < \frac{3\alpha - \beta}{2}$ であるから

$$f\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right) > 0$$

よって, $y = f(x)$, $y = -1$ のグラフから, 方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数は 1 個.

3.1.2 2番 研究

零ベクトルでない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, 次が成立する.

問 解

空間ベクトルの平行条件

零ベクトルでない2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ について

$$\vec{a} // \vec{b} \iff (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = (0, 0, 0)$$

証明 84 ページに示したベクトル積 (外積)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

により, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積と等しいから

$$\vec{a} // \vec{b} \iff |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \quad \text{すなわち} \quad \vec{a} // \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 0)$$

証終

(1) $A(1, p, 0)$, $B(q, 1, 1)$, $C(-1, -1, r)$ が一直線上にあるとき

$$\overrightarrow{AB} = (q-1, 1-p, 1) \quad // \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1-p, r)$$

平行条件により, 次式が成立する.

$$(r(1-p) + 1 + p, -2 - r(q-1), (q-1)(-1-p) + 2(1-p)) = (0, 0, 0) \quad \dots (*)$$

$p=1$ のとき, 左辺の x 成分が2となり不適. また, $p=-1$ のとき, 左辺の z 成分が4となり不適. ■

(2) (*) の x 成分および z 成分により

$$r(1-p) + 1 + p = 0, \quad (q-1)(-1-p) + 2(1-p) = 0$$

$$q, r \text{ について解くと } q = \frac{3-p}{p+1}, \quad r = \frac{p+1}{p-1} \quad \blacksquare$$

平面の方程式

点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通り, 法ベクトル $\vec{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面 S の方程式は

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

証明 S 上に任意の点 $P(x, y, z)$ をとる. $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ より明らか¹.

証終

¹昭和59年3月以前の高卒者は授業で学んでいた.

(3) (1),(2) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (q-1, 1-p, 1) = \left(\frac{2(1-p)}{1+p}, 1-p, 1 \right) \\ &= \frac{1}{1+p} (2(1-p), (1+p)(1-p), 1+p)\end{aligned}$$

条件より, 4 点 O, A', B', C' は点 O を通り, $\overrightarrow{AB}$ に垂直な平面上にある.
この平面 S の方程式は

$$S: 2(1-p)x + (1+p)(1-p)y + (1+p)z = 0$$

S 上に $A'(1, p', 0)$, $B'(q, 1, 1)$, $C'(-1, -1, r')$ があるから

$$\begin{aligned}2(1-p) + (1+p)(1-p)p' &= 0, \\ 2(1-p)q' + (1+p)(1-p) + (1+p) &= 0, \\ -2(1-p) - (1+p)(1-p) + (1+p)r' &= 0\end{aligned}$$

$p \neq \pm 1$ に注意して, それぞれ解くと

$$p' = -\frac{2}{p+1}, \quad q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}, \quad r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}$$

■

(4) 3 点 $A'(1, p', 0)$, $B'(q', 1, 1)$, $C'(-1, -1, r')$ が一直線上にあると仮定すると,
(1) と同様にして

$$(r'(1-p') + 1 + p', -2 - r'(q' - 1), (q' - 1)(-1 - p') + 2(1 - p')) = (0, 0, 0)$$

上式の x 成分から

$$r'(1-p') + 1 + p' = 0$$

これに (3) の結果を代入すると

$$-\frac{(p+3)(p-1)}{p+1} \left(1 + \frac{2}{p+1} \right) + 1 - \frac{2}{p+1} = 0$$

整理すると

$$p^2 + 5p + 8 = 0 \quad \cdots (**)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -7 < 0$$

したがって, (**) を満たす実数 p は存在しない.

よって, 3 点 A' , B' , C' は一直線上にない.

3.2 2016年度

3.2.1 4番 バウムクーヘン型求積法

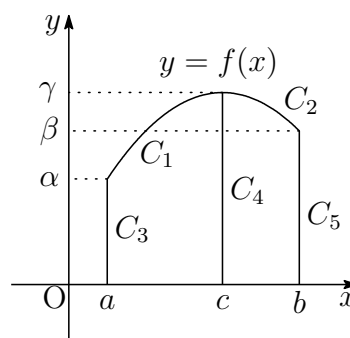
次の回転体の体積について、円筒形に区分して考えると積分の意味が理解できる.

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸および2直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに1回転してできる立体の体積 V は 問 解

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

証明 $y = f(x)$ のグラフを単調増加または単調減少の区間に分けて証明する. 例えば, 右の図のように $y = f(x)$ は $a \leq x \leq c$ で単調増加, $c \leq x \leq b$ では単調減少とする. このとき, それぞれの区間で逆関数が存在することから

$$\begin{aligned} C_1 : x &= g_1(y) \quad (\alpha \leq y \leq \gamma), \\ C_2 : x &= g_2(y) \quad (\beta \leq y \leq \gamma) \end{aligned}$$



とおき, さらに次のようにおく.

$$C_3 : x = a \quad (0 \leq y \leq \alpha), \quad C_4 : x = c \quad (0 \leq y \leq \gamma), \quad C_5 : x = b \quad (0 \leq y \leq \beta)$$

x 軸と C_1, C_3, C_4 で囲まれた部分および C_2, C_4, C_5 で囲まれた部分をそれぞれ y 軸の回りに1回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1, V_2 とすると

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_0^\gamma c^2 dy - \int_0^\alpha a^2 dy - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2 dy \\ &= c^2\gamma - a^2\alpha - \int_a^c x^2 f'(x) dx \\ &= c^2\gamma - a^2\alpha - \left[x^2 f(x) \right]_a^c + 2 \int_a^c xf(x) dx = 2 \int_a^c xf(x) dx \\ \frac{V_2}{\pi} &= \int_0^\beta b^2 dy + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2 dy - \int_0^\gamma c^2 dy \\ &= b^2\beta - c^2\gamma + \int_b^c x^2 f'(x) dx \\ &= b^2\beta - c^2\gamma + \left[x^2 f(x) \right]_b^c - 2 \int_b^c xf(x) dx = 2 \int_c^b xf(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{よって } V = V_1 + V_2 = 2\pi \int_a^c xf(x) dx + 2\pi \int_c^b xf(x) dx = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

一般に, 単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る. 証終

3.3 2017 年度

3.3.1 1 番 相加平均・相乗平均・調和平均

n 個の正数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ の相加平均 A , 相乗平均 G , 調和平均 H は 問 解

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

関数 $g(x) = x - 1 - \log x$ は, $x = 1$ で最小値 0 をとるから, $A > 0$ とすると

$$f(x) = g\left(\frac{x}{A}\right) = \frac{x}{A} - 1 - \log \frac{x}{A} \geq 0$$

等号が成立するのは, $x = A$ のときに限る.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{A} - 1 - \log \frac{a_k}{A} \right) \\ &= \log A - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log a_k = \log A - \log G \geq 0 \end{aligned}$$

上式において, 等号が成立するのは, $a_k = A$ ($k = 1, 2, \dots, n$) のときに限る.

すなわち $A \geq G$ (等号は, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ のとき)

「相加平均 $\geq$ 相乗平均」の大小関係により, 「相乗平均 $\geq$ 調和平均」の大小関係を導くことができる.

実際, n 個の正数 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ に相加平均と相乗平均の大小関係を適用すると

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}}$$

ゆえに $\frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$ すなわち $G \geq H$ (等号は, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ のとき)

よって $A \geq G \geq H$ (等号は, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ のとき)

補足 (3) の別解 (2) の結果に $a = 3$ を代入すると

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9}, \quad S = \frac{3}{2}bc$$

b^2, c^2 の相乗平均・調和平均の大小関係により

$$\sqrt{b^2 c^2} \geq \frac{2}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad \text{ゆえに} \quad bc \geq \frac{9}{4} \quad \text{よって} \quad S \geq \frac{27}{8}$$

3.4 2018年

3.4.1 1番 ベクトル積 (外積)

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき, ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は, $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する. このベクトルを, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積と言い, $\vec{a} \times \vec{b}$ で表し, その成分は

問 解

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

であるから, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ が成り立つ. また, その大きさについて

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

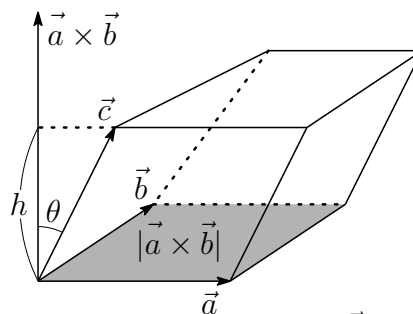
であるから, $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい.

$\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos \theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| |\cos \theta|$$



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の張る平行六面体について, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平面を底面とすると, $|\vec{c}| \cos \theta$ は, その高さ h であるから, この平行六面体の体積 V_1 は

$$V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

また, 対称性により, $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$ が成り立つ.

補足 本題で, $\vec{AB} = (3, -3, 0)$, $\vec{AC} = (3, 3, 3)$ より $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-9, -9, 18)$

$$\text{したがって} \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{9}{2} \sqrt{6}$$

$$\vec{AD} = (0, 1, 1) \text{ より } V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} |9| = \frac{3}{2}$$

3.5 2019 年

3.5.1 1 番 分数漸化式

$p, q, r \neq 0, s$ を定数とする漸化式

問 解

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について、以下に述べる.

$ps - qr = 0$ のとき、右辺は定数となるので、 $ps - qr \neq 0$ とする.

(*) の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α, β とすると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots (***) \\ a_{n+1} - \beta &= \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)} \end{aligned}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき、上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha} \left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \right)^{n-1}$$

上式から、 a_n が求まる.

ii) $\alpha = \beta$ のとき、(*) の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、 α は (**) の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② により、(***) は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると
$$\frac{1}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{a_n - \alpha} + \frac{2r}{p + s}$$

このとき、数列 $\left\{ \frac{1}{a_n - \alpha} \right\}$ は初項が $\frac{1}{a_1 - \alpha}$ 、公差が $\frac{2r}{p + s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n - \alpha} = \frac{1}{a_1 - \alpha} + \frac{2r}{p + s}(n - 1)$$

これから、 a_n が求まる.

例えば、大分大学 2001 年の漸化式²

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 5}$$

の特性方程式 $x = \frac{2x}{3x + 5}$ の解が $0, -1$ であるから

$$a_{n+1} + 1 = \frac{5(a_n + 1)}{3a_n + 5}$$

したがって $\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + 1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a_n}{a_n + 1}$ ゆえに $\frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}$

よって
$$a_n = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{4 \cdot 5^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}}$$

次に、宮崎大学 2003 年の漸化式³

$$a_1 = \frac{q}{p} \quad (p > q > 0), \quad a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

の特性方程式 $x = \frac{1}{2 - x}$ 、すなわち $x^2 - 2x + 1 = 0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} - 1$$

ゆえに $\frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{\frac{q}{p} - 1} - (n - 1)$ よって $a_n = \frac{(n - 1)p - (n - 2)q}{np - (n - 1)q}$

²http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2001.pdf [1]

³http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2003.pdf [12]