

令和5年度 熊本大学2次試験前期日程 (物理問題)
令和5年2月25日

問題 1 2 3

1 図1のように、長さ L [m] の糸の先端に質量 M [kg] の物体 A がつるされて位置 a に静止している。この A に、質量 m [kg] の物体の物体 B が水平方向に速さ v [m/s] で衝突したところ、A と B が一つになって糸がたるむことなく最高点 b まで到達した。このときの糸の鉛直方向に対する角度は θ [rad] であった $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 。重力加速度の大きさを g [m/s²] とし、以下の問いに答えよ。ただし A, B の大きさおよび糸の質量を無視する。

- (1) 衝突直後の A および B の速さ V [m/s] を M, m, v を用いて表せ。
- (2) 衝突によって失われた力学的エネルギーは、衝突前の力学的エネルギーの何倍になるかを、 M と m を用いて表せ。
- (3) 衝突前の B の速さ v を、 M, m, L, θ, g を用いて表せ。

次に、図2のように、a の真上 r [m] の距離の位置 c に釘を設け、上記と同様に B を衝突させた。すると一つになった A および B が、糸がたるむことなく c の真上の最高点 d に達した。

- (4) d における A および B の速さ V' [m/s] と、このときの糸の張力の大きさ T [N] を M, m, v, g, r を用いて表せ。
- (5) 糸がたるむことなく d に達するためには、 r がある大きさ $r_{\max}$ [m] 以下である必要がある。 $r_{\max}$ を M, m, v, g を用いて表せ。

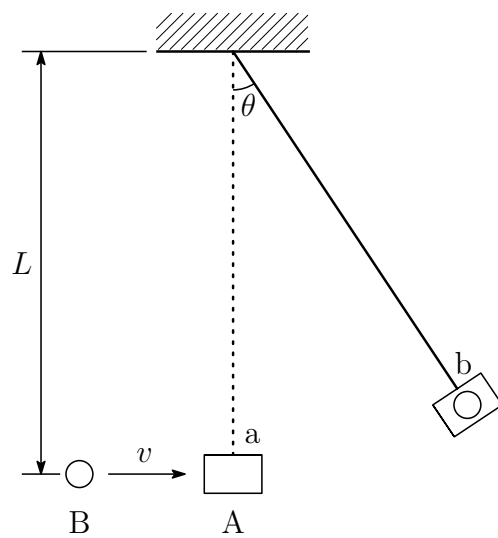


图 1

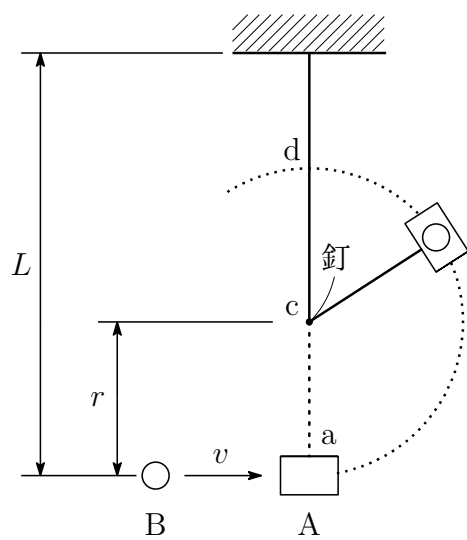


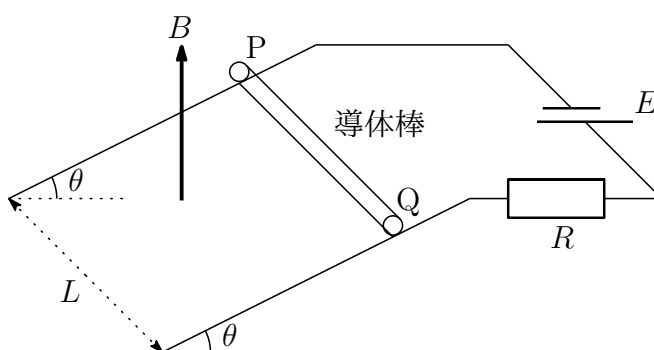
图 2

2 図のように直線導体を間隔 L [m] で平行に並べたレールをつくり、水平面に対して傾斜角 θ [rad] で設置した $\left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$. レールの上端には抵抗値 R [Ω] の抵抗と内部抵抗が無視できる起電力 E [V] の電池がつないである. 一様な磁束密度 B [T] の磁場を鉛直上向きにかけた状態で、図のように質量 m [kg] の導体棒 PQ をレールに対して垂直に置いた. レールは十分に長く、導体棒とレールは常に垂直であり、PQ はレールに接しているとする. レールと導体棒との摩擦、電気抵抗、導体棒の太さは無視できるものとする. 重力加速度の大きさを g [m/s²] とし、以下の問いに答えよ.

- (1) $\theta = 0$ のとき、導体棒に対してレールに沿った力 F [N] を外から加えることで静止状態に保った. 加えた力の大きさを、 E, R, B, L を用いて表せ.
- (2) $\theta = \theta_1$ のとき、導体棒は外から力を加えることなく静止した. このときの起電力 E を、 R, B, L, m, g, θ_1 を用いて表せ.

次に、 $\theta = \theta_2 (< \theta_1)$ にしたとき、導体棒はレールに沿って上向きに運動し始めた.

- (3) 導体棒の速さが v [m/s] となった瞬間の、導体棒に生じる誘導起電力の大きさ V [V]、および抵抗に流れる電流の大きさ I [A] を、 E, v, R, B, L, θ_2 のうち必要なものを用いて表せ.
- (4) このときの導体棒の加速度 a [m/s²] を、 $E, v, R, B, L, m, g, \theta_2$ を用いて表せ. ただし、レールに沿って上向きを正とする.
- (5) 時間が十分に経過した後の導体棒の速さ v' [m/s] を、 $E, R, B, L, m, g, \theta_2$ を用いて表せ.



3 半減期が T_A の放射性元素 A と半減期 T_B ($T_B < T_A$) を持つ放射性元素 B の原子を、時刻 0 で共に N_0 個準備した。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) A の時刻 t での個数を求めよ。
- (2) A の個数が $\frac{N_0}{8}$ になる時刻を求めよ。
- (3) B の個数が A の $\frac{1}{8}$ になる時刻 t' を、 T_A , T_B を用いて表せ。

遺伝情報を含む DNA がタンパク質を作り出す能力を評価するために、放射性物質を利用した測定が行われることがある。特に DNA においてはリン (原子番号 15) が重要な構成要素であるため、放射性元素である ^{32}P と ^{33}P を用いて測定が行われることが多い。この ^{32}P と ^{33}P は、それぞれ半減期 14 日と 25 日で原子核が崩壊して、それぞれ安定な硫黄 (原子番号 16) ^{32}S と ^{33}S に変わる。時刻 0 で、 ^{32}P と ^{33}P のどちらも 1mol であったとし、以下の問いに答えよ。

- (4) この崩壊の種類を答えよ。
- (5) ^{32}P の原子数が、 ^{33}P の原子数の $\frac{1}{8}$ になる時間 D [日] を、有理数で求めよ。
- (6) D までに放射性崩壊によって発生した S の全質量 m [g] を有効数字 2 桁で求めよ。ただし、計算過程において、 $2^{\frac{1}{14}} \doteq 1.13$ を用いよ。

解答例

- 1** (1) A と B の衝突前後の運動量保存則により

$$mv = (M + m)V \quad \text{ゆえに} \quad V = \frac{mv}{M + m} \quad \cdots \textcircled{1}$$

- (2) 衝突によって失われた力学的エネルギー ΔE は

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M + m)V^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M + m) \left(\frac{mv}{M + m} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 \left(1 - \frac{m}{M + m} \right) = \frac{1}{2}mv^2 \cdot \frac{M}{M + m} \end{aligned}$$

よって、求める倍率は $\Delta E \bigg/ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{M}{M + m}$

- (3) 衝突後の力学的エネルギーの保存則により

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)g \cdot L(1 - \cos \theta)$$

$V > 0$ に注意して、 V について解くと

$$V = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)}$$

これに $\textcircled{1}$ を代入すると $\frac{m}{M + m}v = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)}$

よって $v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gL(1 - \cos \theta)}$

(4) 力学的エネルギーの保存則から

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}(M+m)V'^2 + (M+m)g \cdot 2r$$

整理すると $V'^2 = V^2 - 4gr$ ゆえに $V' = \sqrt{V^2 - 4gr}$

上の第2式に ① を代入して

$$V' = \sqrt{\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 - 4gr} \quad \dots \textcircled{2}$$

点 d における円運動の運動方程式は

$$(M+m)\frac{V'^2}{r} = (M+m)g + T$$

したがって、② を利用して

$$\begin{aligned} T &= (M+m)\frac{V'^2}{r} - (M+m)g \\ &= \frac{M+m}{r} \left\{ \left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 - 4gr \right\} - (M+m)g \\ &= \frac{m^2v^2}{(M+m)r} - 5(M+m)g \end{aligned}$$

(5) 糸がたるむことなく最高点 d に達する条件は、 $T \geq 0$ であるから、これを (4) の結果に適用すると

$$\frac{m^2v^2}{(M+m)r} - 5(M+m)g \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad r \leq \frac{m^2v^2}{5(M+m)^2g}$$

よって、求める $r_{\max}$ [m] は

$$r_{\max} = \frac{m^2v^2}{5(M+m)^2g}$$



- 2 (1) 導体棒に流れる電流 I_1 と働く力は下の図のようになる (導体棒は静止しているので, 誘導起電力は生じない). レールに沿った方向の力のつり合いにより

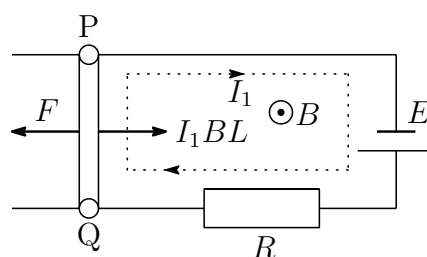
$$0 = F - I_1 BL$$

キルヒホッフの第2法則より

$$E = I_1 R$$

上の2式から I_1 を消去すると

$$F = \frac{EBL}{R} [\text{N}]$$



(上から見た図)

- (2) このとき, 導体棒に流れる電流 I_2 と働く力は下図のようになる (導体棒は静止しているので, 誘導起電力は生じない). レールに沿った方向の力のつり合いから

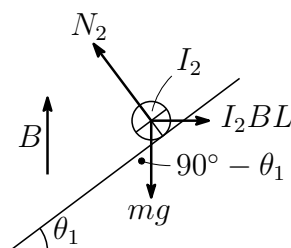
$$0 = I_2 BL \cos \theta_1 - mg \cos(90^\circ - \theta_1) \quad \text{ゆえに} \quad I_2 = \frac{mg \tan \theta_1}{BL}$$

キルヒホッフの第2法則より

$$E = I_2 R$$

上の2式から I_2 を消去すると

$$E = \frac{mgR}{BL} \tan \theta_1$$



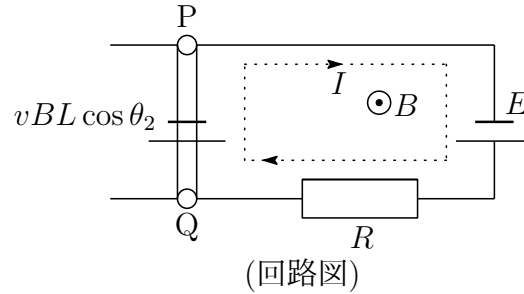
(横から見た図)

- (3) 導体棒の速度の磁場に垂直な成分は、 $v \cos \theta_2$ であるから、導体棒に生じる誘導起電力の大きさは

$$V = vBL \cos \theta_2 [\text{V}]$$

したがって、下図のような回路図を得る．キルヒホッフの第2法則より

$$E - vBL \cos \theta_2 = IR \quad \text{よって} \quad I = \frac{E - vBL \cos \theta_2}{R} \quad [\text{A}]$$

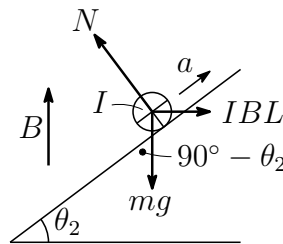


- (4) レールに沿った運動方程式より

$$\begin{aligned} ma &= IBL \cos \theta_2 - mg \cos(90^\circ - \theta_2) \\ &= IBL \cos \theta_2 - mg \sin \theta_2 \end{aligned}$$

これに (3) の結果を代入すると

$$\begin{aligned} ma &= \left(\frac{E - vBL \cos \theta_2}{R} \right) BL \cos \theta_2 - mg \sin \theta_2 \\ a &= \frac{(E - vBL \cos \theta_2) BL \cos \theta_2}{mR} - g \sin \theta_2 \end{aligned}$$



(横から見た図)

- (5) (4) の結果において、時間が十分経過し、 v' に収束したとき、(4) の結果において、 $a \rightarrow 0$ 、 $v \rightarrow v'$ とすると

$$0 = \frac{(E - v'BL \cos \theta_2) BL \cos \theta_2}{mR} - g \sin \theta_2$$

これを v' について解くと

$$v' = \frac{1}{BL \cos \theta_2} \left(E - \frac{mgR \tan \theta_2}{BL} \right) \quad [\text{m/s}]$$



- 3** (1) 時刻 t における A の個数を $N_A(t)$ とすると

$$N_A(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T_A}}$$

- (2) 求める時刻を t_1 とすると

$$N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t_1}{T_A}} = \frac{N_0}{8} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t_1}{T_A}} = \left(\frac{1}{2} \right)^3$$

$$\text{したがって} \quad \frac{t_1}{T_A} = 3 \quad \text{よって} \quad t_1 = 3T_A$$

- (3) 時刻 t における B の個数を $N_B(t)$ とすると

$$N_B(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T_B}}$$

上式および (1) の結果から

$$\frac{N_B(t)}{N_A(t)} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T_B} - \frac{t}{T_A}}$$

求める時間を t_2 とすると

$$(*) \quad \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t_2}{T_B} - \frac{t_2}{T_A}} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^{\left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right) t_2}$$

$$\text{したがって} \quad 3 = \left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right) t_2 \quad \text{よって} \quad t_2 = \frac{3T_A T_B}{T_A - T_B}$$

- (4) どちらも質量数が変わらず、原子番号が 1 増える崩壊であるので、この崩壊は、どちらも β 崩壊である。

- (5) (3) の結果において、 $T_A = 25$, $T_B = 14$, $t_2 = D$ とすればよいから

$$D = \frac{3 \times 25 \times 14}{25 - 14} = \frac{1050}{11}$$

- (6) D 日で発生する S の質量 m [g] は, ^{32}P と ^{33}P が失った質量と等しい.
 ^{32}P と ^{33}P の 1mol の質量はそれぞれ 32g と 33g であるから

$$m = 32 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{D}{14}} \right\} + 33 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{D}{25}} \right\} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで (*) に $T_A = 25$, $T_B = 14$, $t_2 = D$ を代入すると

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{D}{14} - \frac{D}{25}} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{D}{14}} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{D}{25}} \quad \dots \textcircled{2}$$

② を ① に代入すると, (5) の結果を利用して

$$\begin{aligned} m &= 32 \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{D}{25}} \right\} + 33 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{D}{25}} \right\} \\ &= 65 - 37 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{D}{25}} = 65 - 37 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{42}{11}} \\ &= 65 - 37 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \cdot 2^{\frac{2}{11}} \\ &= 65 - 37 \times \frac{1}{16} \times 1.13 = 62.3 \doteq \mathbf{62} \quad [\text{g}] \end{aligned}$$

解説 放射性同位体の原子数は、時間の経過により (原子の崩壊), その原子数は減少する. 原子数 N は時刻 t の減少関数で, その変化率は $\frac{dN}{dt} < 0$ で, N に比例し

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \cdots (*)$$

であることが分かっている (崩壊定数 λ は物質の種類による固有の定数).

$$N' = \frac{dN}{dt} \text{ とおくと} \quad N' + \lambda N = 0$$

両辺に $e^{\lambda t}$ を掛けると

$$N'e^{\lambda t} + N \cdot \lambda e^{\lambda t} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (Ne^{\lambda t})' = 0$$

上の第2式を積分すると (C は積分定数)

$$Ne^{\lambda t} = C \quad \text{したがって} \quad N = Ce^{-\lambda t}$$

ここで, 初期条件 $t = 0$ のとき $N = N_0$ とすると, $C = N_0$ より

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \cdots \textcircled{1}$$

さらに, $t = T$ (T は半減期) のとき $N = \frac{1}{2}N_0$ とすると

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T} \quad \text{ゆえに} \quad e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

崩壊定数 λ は, (*) により個体数 N と単位時間当たり (1 秒間) の崩壊数を観測することで求めることができる. したがって, 半減期 T は $\textcircled{2}$ から

$$T = \frac{\log 2}{\lambda}$$

