

令和6年度 九州工業大学2次試験後期日程(数学問題)

工学部・情報工学部 令和6年3月12日

数I・II・III・A・B (120分)

問題 1 2 3 4

1 $x > -1$ の範囲で定義された関数 $g(x)$ を $g(x) = x - \log(x+1)$ とする. ただし, 対数は $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ を底とする自然対数とする. また, a ($0 < a < 1$) を定数とし, 2つの曲線 $y = ag(x)$, $y = g(ax)$, および $x = t$ ($t > 0$) によって囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする. 次に答えよ.

- (1) 曲線 $y = g(x)$ は x 軸に接することを示せ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{g(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$, および $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x)$ を調べよ.
- (3) $x > -1$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を $f(x) = ag(x) - g(ax)$ とする. このとき, $x > -1$ において, $f(x) \geq 0$ であることを示せ.
- (4) $\lim_{t \rightarrow \infty} tS''(t) = \frac{3}{4}$ となる a の値を求めよ.
- (5) a を (4) で求めた値とする. 0 でない実数 b に対して,
 $2\log(ab+1) = \log(b+1)$ が成り立つとする. このとき, b の値を求めよ.
- (6) (4) と (5) で求めた a と b に対して, $S(b)$ を求めよ.

2 n を自然数とする. 関数 $f(x)$ に対して, $f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ を n 回微分することによって得られる第 n 次導関数とする. また, $f^{(0)}(x) = f(x)$ とし, e は自然対数の底とする. 次に答えよ.

- (1) $g(x)$ と $h(x)$ を何回でも微分可能な関数とし, $f(x) = g(x)h(x)$ とする. このとき, $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n {}_nC_i g^{(i)}(x) h^{(n-i)}(x)$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示せ. ただし, $i \geq 1$ に対して, ${}_nC_i$ は n 個のものから i 個とった組合せの総数を表し, ${}_nC_0 = 1$ とする.

- (2) b を定数とし, $F(x) = e^{\frac{1}{2}bx^2}$ とする. このとき, $F^{(1)}(x)$ を求めよ.
- (3) $F(x)$ を (2) で与えられた関数とする. このとき, $k = 0, 1, \dots$ に対して, $F^{(2k+1)}(0)$ と $F^{(2k)}(0)$ を求めよ.
- (4) a, b を定数とし, $f(x) = e^{ax + \frac{1}{2}bx^2}$ とする. このとき, $f^{(7)}(0)$ を求めよ.

- 3** 箱 A には数字の 1 が記入されたカードと数字の 2 が記入されたカードがそれぞれ 1 枚ずつ、合計 2 枚入っている。箱 B には数字が記入されたカードが合計 4 枚入っている。これらの箱の 1 つに対して次の試行を行う。

箱からカード 1 枚を無作為に取り出し、カードの数字を調べてから箱に戻す。これを 3 回繰り返し、調べた 3 つの数の和を X とする。

次に答えよ。

- (1) 箱 A に対する試行で、 $X = 5$ となる確率を求めよ。
- (2) 箱 B には数字の 1 が記入されたカードが 1 枚と数字の 2 が記入されたカードが 3 枚入っているとす。このとき、箱 B に対する試行で、 $X = 5$ となる確率を求めよ。
- (3) 箱 B には数字の 1 が記入されたカードが 1 枚と数字の 2 が記入されたカードが 3 枚入っているとす。このとき、箱 A と箱 B のいずれか 1 つを無作為に選択して試行を行ったところ、 $X = 5$ であった。試行が行われた箱が箱 B である条件付き確率を求めよ。
- (4) 箱 B を空にし、以下の手順を 4 回繰り返すことにより、箱 B に合計 4 枚のカードを入れる。この箱 B に対して試行を行ったところ、 $X = 5$ であった。このとき、箱 B の中身が数字の 1 が記入されたカードが 1 枚と数字の 2 が記入されたカードが 3 枚である条件付き確率を求めよ。

(手順)

箱 A からカード 1 枚を無作為に取り出し、カードの数字を調べてから、箱 A に戻し、調べた数字を白紙のカードに記入し、その記入したカードを箱 B に入れる。

4 実数 x に対して, x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す. 次に答えよ.

- (1) $-2 \leq x \leq 2$ の範囲において, $y = [x]$ のグラフをかけ.
- (2) a, b を実数とする. このとき, すべての実数 x に対して, $x + a < [x]$ が成り立つような a の最大値を求めよ. また, すべての実数 x に対して, $[x] \leq x + b$ が成り立つような b の最小値を求めよ.
- (3) $[x] - 3x + 3 = 0$ の解を求めよ. ただし, (2) を利用してもよい.
- (4) $x^2 - 6[x] + 5 = 0$ の解を求めよ.
- (5) $[x^2] - 6x + 5 = 0$ の解を求めよ. ただし, 必要ならば $\sqrt{5} = 2.236\cdots$ を利用してもよい.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad g(x) = x - \log(x+1) \text{ より } g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0 \quad (*)$$

よって、曲線 $y = g(x)$ は原点で x 軸と接する。

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} g(x) = \infty \text{ より } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{g(x)}{x} = -\infty$$

$$\frac{g(x)}{x} = 1 - \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 1 - \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \right\} = 1 - \log e = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) = 1$$

別解 $(*)$ を利用すると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0) = 0$$

$$(3) \quad \textcircled{1} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ag'(x) - ag'(ax) = a \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) - a \left(1 - \frac{1}{ax+1} \right) \\ &= a \left(\frac{1}{ax+1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{a(1-a)x}{(x+1)(ax+1)} \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ であるから、 $x > -1$ における $f(x)$ の増減表は

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

$f(0) = ag(0) - g(0) = 0$ であるから、 $x > -1$ において $f(x) \geq 0$

- (4) 2 曲線 $y = ag(x)$, $y = g(ax)$, および $x = t$ ($t > 0$) によって囲まれた図形の面積 $S(t)$ は, (3) の結果から

$$S(t) = \int_0^t \{ag(x) - g(ax)\} dx = \int_0^t f(x) dx$$

上式より, $S'(t) = f(t)$ であるから

$$S''(t) = f'(t) = \frac{a(1-a)t}{(t+1)(at+1)}$$

これから

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} tS''(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(1-a)t^2}{(t+1)(at+1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(1-a)}{\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(a+\frac{1}{t}\right)} = 1-a \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tS''(t) = \frac{3}{4} \text{ のとき } 1-a = \frac{3}{4} \text{ よって } a = \frac{1}{4}$$

- (5) $a = \frac{1}{4}$ を $2 \log(ab+1) = \log b$ に代入すると

$$2 \log \left(\frac{1}{4}b + 1 \right) = \log(b+1) \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{4}b + 1 \right)^2 = b+1$$

整理すると $b^2 - 8b = 0$ これを解いて $b = 8$

- (6) $f(x) = ag(x) - g(ax)$, $g(x) = x - \log(x+1)$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= a\{x - \log(x+1)\} - \{ax - \log(ax+1)\} \\ &= -a \log(x+1) + \log(ax+1) \end{aligned}$$

$a = \frac{1}{4}$, $b = 8$ であるから

$$\begin{aligned} S(b) &= \int_0^b f(x) dx = \int_0^b \{-a \log(x+1) + \log(ax+1)\} dx \\ &= \left[-a(x+1)\{\log(x+1) - 1\} + \frac{1}{a}(ax+1)\{\log(ax+1) - 1\} \right]_0^b \\ &= -a(b+1)\{\log(b+1) - 1\} - a + \frac{1}{a}(ab+1)\{\log(ab+1) - 1\} + \frac{1}{a} \\ &= -\frac{9}{4}(\log 9 - 1) - \frac{1}{4} + 12(\log 3 - 1) + 4 = \frac{15}{2} \log 3 - 6 \end{aligned}$$

■

2 (1) $f(x) = g(x)h(x)$ とするとき, $n = 1, 2, \dots$ に対して, 次式を示す.

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n {}_n C_i g^{(i)}(x) h^{(n-i)}(x) \quad (\text{A})$$

[1] $n = 1$ のとき, $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$ より, (A) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (A) が成立すると仮定すると

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k {}_k C_i g^{(i)}(x) h^{(k-i)}(x)$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \sum_{i=0}^k {}_k C_i \{g^{(i+1)}(x)h^{(k-i)}(x) + g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)\} \\ &= g^{(k+1)}(x)h(x) + \sum_{i=0}^{k-1} {}_k C_i g^{(i+1)}(x)h^{(k-i)}(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k {}_k C_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x) + g(x)h^{(k+1)}(x) \\ &= g^{(k+1)}(x)h(x) + \sum_{i=1}^k {}_k C_{i-1} g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k {}_k C_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x) + g(x)h^{(k+1)}(x) \\ &= g^{(k+1)}(x)h(x) + \sum_{i=1}^k ({}_k C_{i-1} + {}_k C_i) g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x) \\ &\quad + g(x)h^{(k+1)}(x) \\ &= {}_{k+1} C_{k+1} g^{(k+1)}(x)h(x) + \sum_{i=1}^k {}_{k+1} C_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x) \\ &\quad + {}_{k+1} C_0 g(x)h^{(k+1)}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} {}_{k+1} C_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x) \end{aligned}$$

よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成立する.

[1] , [2] より, すべての自然数 n に対して, (A) が成立する.

$$(2) \quad F(x) = e^{\frac{1}{2}bx^2} \quad \text{より} \quad F^{(1)}(x) = e^{\frac{1}{2}bx^2} \left(\frac{1}{2}bx^2 \right)' = bx e^{\frac{1}{2}bx^2}$$

(3) $F^{(1)}(x) = bx F(x)$ であるから, (1) の結論を適用して計算すると

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(x) &= \sum_{i=0}^n {}_n C_i (bx)^{(i)} F^{(n-i)}(x) \\ &= bx F^{(n)}(x) + bn F^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

これに $x = 0$ を代入すると

$$F^{(n+1)}(0) = bn F^{(n-1)}(0) \quad (*)$$

(2) の結果より $F^{(1)}(0) = 0$ を得る. $(*)$ に $n = 2k$ を適用すると

$$F^{(2k+1)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$(*)$ に $n = 2j - 1$ を代入すると $F^{(2j)}(0) = b(2j - 1)F^{(2j-2)}(0)$
 $F^{(0)}(0) = 1$ より, $F^{(2j)}(0) \neq 0$ に注意して ($j = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^k \frac{F^{(2j)}(0)}{F^{(2j-2)}(0)} &= \prod_{j=1}^k \frac{b}{2} \cdot \frac{2j(2j-1)}{j} \\ F^{(2k)}(0) &= \left(\frac{b}{2} \right)^k \frac{(2k)!}{k!} \end{aligned}$$

別解 $F(x)$ は偶関数であるから $F(x) = \frac{F(x) + F(-x)}{2}$

$$F^{(n)}(x) = \frac{F^{(n)}(x) + (-1)^n F^{(n)}(-x)}{2}$$

$n = 2k + 1$, $x = 0$ を代入すると $F^{(2k+1)}(0) = 0$

(4) $f(x) = e^{ax} F(x)$ であるから, (1), (3) の結論を利用すると

$$\begin{aligned} f^{(7)}(x) &= \sum_{i=0}^7 {}_7 C_i (e^{ax})^{(i)} F^{(7-i)}(x) \\ &= \sum_{i=0}^7 {}_7 C_i a^i e^{ax} F^{(7-i)}(x), \\ f^{(7)}(0) &= \sum_{i=0}^7 {}_7 C_i a^i F^{(7-i)}(0) \\ &= {}_7 C_1 a F^{(6)}(0) + {}_7 C_3 a^3 F^{(4)}(0) \\ &\quad + {}_7 C_5 a^5 F^{(2)}(0) + {}_7 C_7 a^7 F^{(0)}(0) \\ &= 105ab^3 + 105a^3b^2 + 21a^5b + a^7 \end{aligned}$$



- 3** (1) 箱 A に対する試行で, $X = 5$ となるのは, 数字の 1 が 1 回, 数字の 2 が 2 回である確率は

$$\frac{3!}{1!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

- (2) 箱 B に対する試行で, $X = 5$ となるのは, 数字の 1 が 1 回, 数字の 2 が 2 回である確率は

$$\frac{3!}{1!2!} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

- (3) (1), (2) の結果から, 求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{27}{64}}{\frac{3}{8} + \frac{27}{64}} = \frac{9}{17}$$

- (4) (i) 箱 B に数字の 1 が 3 枚, 数字の 2 が 1 枚のとき, $X = 5$ となる確率は

$$\frac{3!}{1!2!} \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

- (ii) 箱 B に数字の 1 が 2 枚, 数字の 2 が 2 枚のとき, $X = 5$ となる確率は

$$\frac{3!}{1!2!} \left(\frac{2}{4}\right)^1 \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{24}{64}$$

箱 B に数字の 1 が 3 枚, 2 枚, 1 枚となる場合の確率は, それぞれ

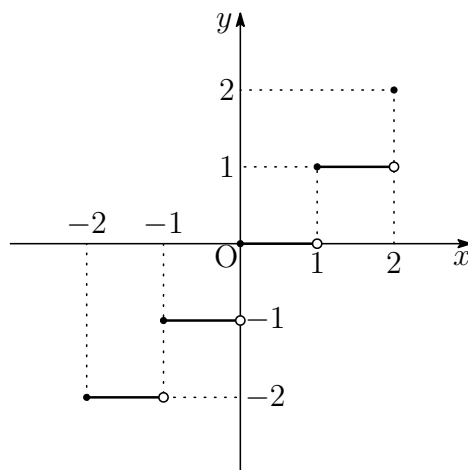
$$\frac{{}_4C_3}{2^4} = \frac{1}{4}, \quad \frac{{}_4C_2}{2^4} = \frac{3}{8}, \quad \frac{{}_4C_1}{2^4} = \frac{1}{4}$$

よって, (i), (ii) および (2) の結果から, 求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{4} \times \frac{9}{64} + \frac{3}{8} \times \frac{24}{64} + \frac{1}{4} \times \frac{27}{64}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}} = \frac{3}{8}$$



- 4 (1) $-2 \leq x \leq 2$ における $y = [x]$ のグラフは次のとおり. ただし, $(\cdot)$ は含み, $(\circ)$ は含まない.



- (2) $x - 1 < [x] \leq x$ であるから, a の最大値は -1 , b の最小値は 0

- (3) $[x] = 3x - 3$ であるから

$$x - 1 < 3x - 3 \leq x \quad \text{これを解くと} \quad \frac{2}{3} < x \leq \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{1}{3}[x] + 1 \text{ に注意して} \quad x = \frac{4}{3}$$

- (4) $[x] = \frac{x^2 + 5}{6}$ であるから $x - 1 < \frac{x^2 + 5}{6} \leq x$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 11 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0 \end{cases} \quad \text{これを解くと} \quad 1 \leq x \leq 5$$

$$x = \sqrt{6[x] - 5} \text{ に注意して} \quad x = 1, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt{19}, 5$$

(5) (*) $[x^2] = 6x - 5$ であるから $x^2 - 1 < 6x - 5 \leq x^2$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 4 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

これを解くと $3 - \sqrt{5} < x \leq 1, 5 \leq x < 3 + \sqrt{5}$

(i) $3 - \sqrt{5} < x < 1$ のとき, $[x^2] = 0$ であるから, (*) より

$$0 = 6x - 5 \quad \text{これを解くと} \quad x = \frac{5}{6}$$

(ii) $x = 1$ は (*) を満たす.

(iii) $5 \leq x < 3 + \sqrt{5}$ のとき, $25 \leq x^2 < 14 + \sqrt{180}$ より, $[x^2] = 25, 26, 27$

$[x^2] = 25$ のとき $25 = 6x - 5$ ゆえに $x = 5$ (適する)

$[x^2] = 26$ のとき $26 = 6x - 5$ ゆえに $x = \frac{31}{6} = 5 + \frac{1}{6}$ (適する)

$$\left(5 + \frac{1}{6}\right)^2 = 25 + \frac{5}{3} + \frac{1}{36} = 26 + \frac{2}{3} + \frac{1}{36} = 26 + \frac{25}{36}$$

$[x^2] = 27$ のとき $27 = 6x - 5$ ゆえに $x = \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$ (不適)

$$\left(5 + \frac{1}{3}\right)^2 = 25 + \frac{10}{3} + \frac{1}{9} = 28 + \frac{4}{9}$$

(i)~(iii) より $x = \frac{5}{6}, 1, 5, \frac{31}{6}$

