

令和 6 年 度
熊本県立第二高等学校
1 学期課題テスト問題
数 学 III

時 間 60 分

令和 6 年 4 月 10 日 (水) 2 限目 実施

3 年 普通科・理数科

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は 2 ページあります。問題用紙、解答用紙の印刷不鮮明、乱丁等がないかを確認してください。
3. 解答用紙は、この冊子の中に 1 枚入っています。
4. 白紙の計算用紙が 1 枚入っています (回収しません)。
5. 問題は全部で 5 題あります。
6. 問題文に指示のない限り、計算過程を記入してください。

1 次の各問いに答えよ。答えのみを解答欄に記入せよ。(I: 各3点)

- (1) $(1 + \sqrt{3}i)^6$ を計算せよ。
- (2) $\alpha = 2 + 2i$, $\beta = 1 - \sqrt{3}i$ のとき, $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。ただし, 偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (3) $a_1 = 6$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4) $a_1 = 1$, $2a_{n+1} = 6 - a_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。
- (5) 第 n 項が $\frac{4n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$ の数列の極限を求めよ。
- (6) 極限値 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)$ を求めよ。
- (7) $y = \frac{1}{\tan x}$ を微分せよ。
- (8) $y = e^x \sin x$ を微分せよ。
- (9) $y = \frac{1}{(x^2 - 2)^3}$ を微分せよ。
- (10) $y = \sin^3(2x + 1)$ を微分せよ。

2 次の各問いに答えよ。(I: 各5点)

- (1) 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ が極値をもたないための必要十分条件を求めよ。
- (2) 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $x = \alpha$ で極大値, $x = \beta$ で極小値をとるとき, $f(\alpha) - f(\beta) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3$ となることを示せ。
- (3) 4点 $A(1, 1, 0)$, $B(3, 4, 5)$, $C(1, 3, 6)$, $D(4, 5, z)$ が同一平面上にあるように z の値を求めよ。
- (4) 複素数平面上の異なる3点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形が等式 $4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$ を満たすとき, 三角形の3つの角の大きさを求めよ。
- (5) $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n - 1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (6) 初項が3, 公比が2の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が30000を超える最小の n の値を求めよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。
- (7) 等式 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 2} = -1$ を満たす定数 a, b を求めよ。
- (8) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}$ を微分せよ。

3 四面体 $OABC$ について, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。点 D を

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

で定める。点 E を線分 OD の中点とする。3点 A, B, C を通る平面を α とする。

- (1) 点 E が平面 α 上にあるかどうかを判定せよ。(C: 10点)
- (2) 点 O を通り α と平行な平面を β とする。2点 C, D を通る直線と平面 β との交点を F とする。このとき, $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。
- (3) $\triangle ABC$ の重心を G とする。3点 O, A, G を通る平面と, 2点 E, F を通る直線との交点を H とする。 $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。

4 2つの放物線

$$C_1: y = 2x^2, \quad C_2: y = 2x^2 - 8x + 16$$

の両方に接する直線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。(C: 10点)

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 2つの放物線 C_1, C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

5 与えられた自然数 a_0 に対して, 自然数からなる数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を次のように定める。

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{3a_n + 1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。(C: 10点)

- (1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。
- (2) $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

(5)	(6)
(7)	(8)

3

(途中の計算も書け.) C問題 (10点)

4

(途中の計算も書け.) C問題 (10点)

5

(途中の計算も書け.) C問題 (10点)

1 30点 (各3点)

(1)	64	(6)	$-\frac{1}{2}$
(2)	$\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi \right)$	(7)	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
(3)	$a_n = 5 \cdot 4^{n-1} + 1$	(8)	$y' = e^x (\sin x + \cos x)$
(4)	2	(9)	$y' = -\frac{6x}{(x^2 - 2)^4}$
(5)	2	(10)	$y' = 6 \sin^2(2x + 1) \cos(2x + 1)$

2 40点 (各5点)

(1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$

条件を満たすための必要十分条件は、 $f'(x)$ の符号が変わらないことである。

x^2 の係数が正であるから、常に $f'(x) \geq 0$

係数について $D/4 = a^2 - 3 \cdot 1 \leq 0$

これを解いて $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$

別解 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$ より $f''(x) = 6x + 2a$

変曲点の x 座標は、 $f''(x) = 0$ を解いて $x = -\frac{a}{3}$

条件を満たすための必要十分条件は、 $f(x)$ の最高次の係数が正であるから

$$f' \left(-\frac{a}{3} \right) = -\frac{a^2}{3} + 1 \geq 0 \quad \text{よって} \quad -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$$

(2) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を微分すると $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(x) = 0$ の解が α, β であるから、係数に注意して

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx = 3 \int_{\beta}^{\alpha} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= 3 \left(-\frac{1}{6} \right) (\alpha - \beta)^3 = \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

補足 解答では $1/6$ 公式を利用しているが、次のように計算してもよい。

$$\begin{aligned} 3 \int_{\beta}^{\alpha} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= 3 \int_{\beta}^{\alpha} (x - \alpha) \{ (x - \alpha) - (\beta - \alpha) \} dx \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} \{ 3(x - \alpha)^2 - 3(\beta - \alpha)(x - \alpha) \} dx \\ &= \left[(x - \alpha)^3 - \frac{3}{2}(\beta - \alpha)(x - \alpha)^2 \right]_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

(3) 4点 A, B, C, D が同一平面上にあるとき、 $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s, t が存在する。

$$\begin{aligned} (3, 4, z) &= s(2, 3, 5) + t(0, 2, 6) \\ &= (2s, 3s + 2t, 5s + 6t) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad 2s = 3, \quad 3s + 2t = 4 \quad \text{これを解いて} \quad s = \frac{3}{2}, \quad t = -\frac{1}{4}$$

$$\text{よって} \quad z = 5s + 6t = 5 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = 6$$

別解 $\overrightarrow{AB} = (2, 3, 5), \overrightarrow{AC} = (0, 2, 6), \overrightarrow{AD} = (3, 4, z)$ であるから

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (8, -12, 4) = 4(2, -3, 1)$$

4点 A, B, C, D が同一平面上にあるとき $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{AD}$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ であるから } 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot z = 0 \quad \text{よって} \quad z = 6$$

(4) $\alpha \neq 0$ であるから、等式の両辺を α^2 で割ると

$$4 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) + 4 = 0$$

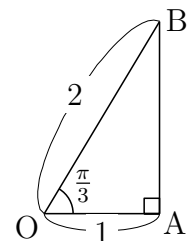
$$\text{したがって} \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 \pm \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \quad \text{ゆえに} \quad \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = 2, \quad \arg \frac{\beta}{\alpha} = \pm \frac{\pi}{3}$$

O(0), A(α), B(β) とすると

$$OB = 2OA, \quad \angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

$\triangle OAB$ は、 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形である。

よって、3つの角の大きさは $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$



$$(5) \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n - 1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$1 \leq n \leq k$ について $a_n \neq 0$, $a_{k+1} = 0$ となる k が存在すると仮定すると, ①より, $a_k = 0$ となり, 矛盾. したがって, すべての自然数 n について $a_n \neq 0$

$$\textcircled{1} \text{の両辺の逆数をとると} \quad \frac{1}{a_{n+1}} = 4 - \frac{1}{a_n}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ とおくと } b_1 = 5, b_{n+1} = 4 - b_n$$

$$b_{n+1} - 2 = -(b_n - 2) \quad \text{ゆえに} \quad b_n - 2 = (b_1 - 2)(-1)^{n-1} = 3 \cdot (-1)^{n-1}$$

$$\text{したがって} \quad b_n = 3 \cdot (-1)^{n-1} + 2 \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{1}{3 \cdot (-1)^{n-1} + 2}$$

(6) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 3(2^n - 1)$$

$$3(2^n - 1) > 30000 \text{ とすると } 2^n - 1 > 10^4$$

$$\text{両辺の偶奇に注意すると } 2^n - 1 \neq 10^4 \text{ であるから } 2^n > 10^4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{の両辺の常用対数をとると } n \log_{10} 2 > 4$$

$$n > \frac{4}{\log_{10} 2} = \frac{4}{0.3010} = 13.2 \dots$$

よって, 求める最小の n の値は **14**

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 2} = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{において, } \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x} + b) = 0$$

$$\text{ゆえに, } \sqrt{2}a + b = 0 \text{ となり } b = -\sqrt{2}a \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{から } \frac{a}{2\sqrt{2}} = -1 \text{ であるから } a = -2\sqrt{2} \quad \text{このとき, } \textcircled{2} \text{から } b = 4$$

$$\text{別解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 2} = -1 \text{ より, } f(x) = a\sqrt{x} + b \text{ とおくと } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} \cdot (x - 2) = -1 \cdot (2 - 2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad f(2) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \quad f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$f(x) = a\sqrt{x} + b \text{ より } f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より} \quad a\sqrt{2} + b = 0, \quad \frac{a}{2\sqrt{2}} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -2\sqrt{2}, b = 4$$

(8) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log |y| = 3 \log |x + 1| - \log |x - 1| - 2 \log |x + 2|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x + 2} \\ &= -\frac{6}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad y' &= -\frac{6}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)} \cdot \frac{(x + 1)^3}{(x - 1)(x + 2)^2} \\ &= -\frac{6(x + 1)^2}{(x - 1)^2(x + 2)^3} \end{aligned}$$

3 10点 (熊本大学理学部 2024 年度一般後期)

(1) E は線分 OD の中点であるから

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

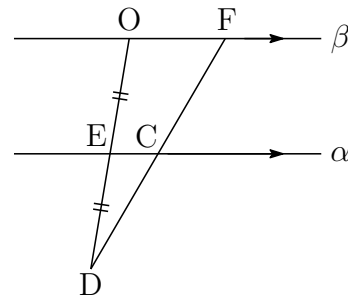
$\overrightarrow{OE}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数について

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = 1$$

よって、点 E は平面 α 上にある。 **3点**

(2) E は OD の中点であり、2点 E, C は平面 α 上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= 2\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OE} \\ &= 2\vec{c} - 2\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right) \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c} \quad \text{3点}\end{aligned}$$



(3) 直線 EF 上の点 H は、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= (1-k)\overrightarrow{OE} + k\overrightarrow{OF} \\ &= (1-k)\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right) + k\left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - k\right)\vec{a} + \left(\frac{5}{12} - \frac{5}{4}k\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}k\right)\vec{c} \quad \dots (*)\end{aligned}$$

平面 OAG 上の点 H は、実数 s, t を用いて

$$s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OG} = s\vec{a} + \frac{t}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \left(s + \frac{t}{3}\right)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c}$$

H が平面 OAG 上の点であるとき ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立)

$$\frac{1}{3} - k = s + \frac{t}{3}, \quad \frac{5}{12} - \frac{5}{4}k = \frac{t}{3}, \quad \frac{1}{4} + \frac{5}{4}k = \frac{t}{3}$$

これを解いて $k = \frac{1}{15}, s = -\frac{1}{15}, t = 1$

$k = \frac{1}{15}$ を (*) に代入すると $\overrightarrow{OH} = \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ **4点**

4 10点 (九州大学文系 2024 年度一般前期)

(1) $y = 2x^2$ を微分すると $y' = 4x$

C_1 上の点 $(t, 2t^2)$ における接線の方程式は

$$y - 2t^2 = 4t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 4tx - 2t^2 \quad \dots \text{①}$$

C_2 と直線 ①の方程式から y を消去すると

$$2x^2 - 8x + 16 = 4tx - 2t^2$$

整理すると $x^2 - 2(t+2)x + t^2 + 8 = 0 \quad \dots \text{②}$

C_2 と直線 ①が接するから、②の係数について

$$D/4 = (t+2)^2 - (t^2 + 8) = 4t - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 1$$

求める直線 ℓ の方程式は、 $t = 1$ を ①に代入して $y = 4x - 2$ **5点**

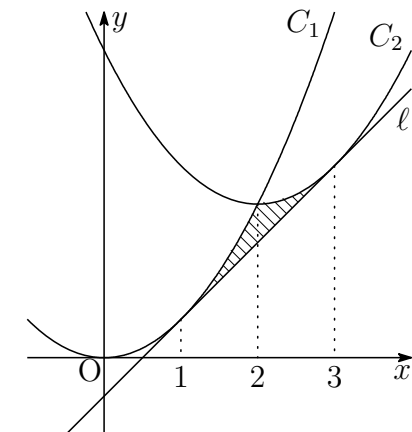
(2) $t = 1$ より、 C_1 と ℓ の接点の x 座標は $x = 1$

また、②の係数から、 C_2 と ℓ の接点の x 座標は

$$x = -\frac{-2(t+2)}{2 \cdot 1} = t + 2 = 1 + 2 = 3$$

よって、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_1^2 \{2x^2 - (4x - 2)\} dx + \int_2^3 \{(2x^2 - 8x + 16) - (4x - 2)\} dx \\ &= \int_1^2 2(x-1)^2 dx + \int_2^3 2(x-3)^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \left[(x-1)^3 \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[(x-3)^2 \right]_2^3 = \frac{4}{3} \quad \text{5点}\end{aligned}$$



5 10 点 (京都大学理系 2024 年度一般前期)

(1) 条件を満たすとき, $n = 0, 1, 2$ について

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{2}$$

が成立するから $a_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(a_n + 1)$

$$a_n = (a_0 + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad (*)$$

$(a_0 + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^3$ が偶数となる最小の自然数 a_0 を求めるとよいから

$$a_0 + 1 = 2^4 \quad \text{よって} \quad a_0 = 15 \quad \boxed{5 \text{ 点}}$$

(2) (*) と同様に, 条件を満たすとき

$$a_n = (a_0 + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \quad (n = 0, 1, \dots, 10)$$

$(a_0 + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ が偶数となる最小の自然数 a_0 を求めるとよいから

$$a_0 + 1 = 2^{11} \quad \text{よって} \quad a_0 = 2047 \quad \boxed{5 \text{ 点}}$$

※ これらの入試問題は, 第二高校数学サイトに掲載されています.