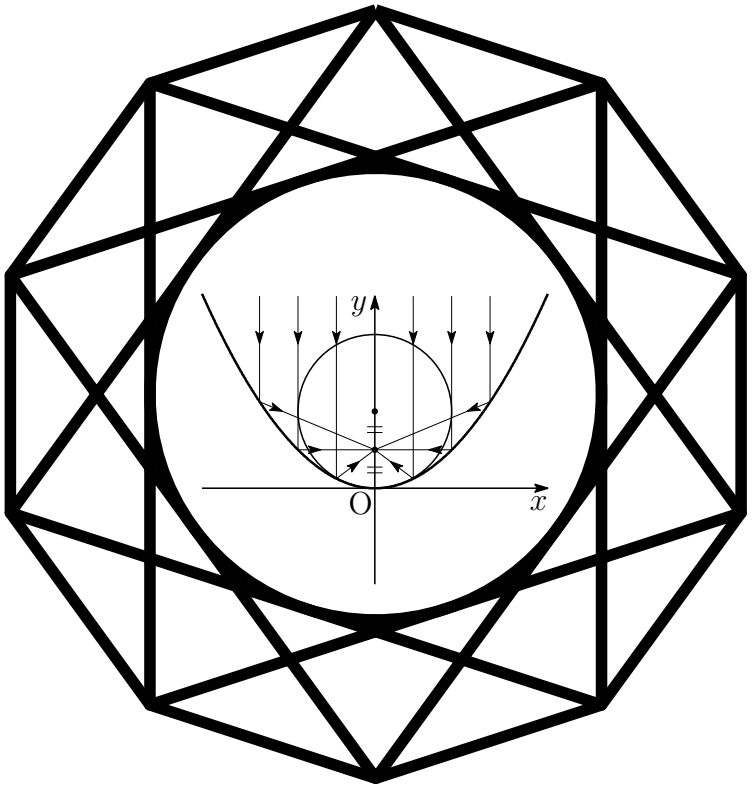
九州地区国立大学

大学受験　数学Ⅰ･A･Ⅱ･B

2001－2024

過去問



2025 年 1 月 29 日

序

2014 年に開催された第 68 回九州算数・数学教育研究 (熊本) 大会で研究発表者 (熊本県数学部会) より九州地区国立大学の入試問題を分析した大学入試問題集の作成に向けた取り組みが報告されました．この報告に対し多くの先生方からご賛同を頂き

『大学受験　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B』　『大学受験　数学Ⅲ』

が作成されました．

また，情報化に対応するため，本書および解答集の電子文書化 (PDF) を推進し，携帯端末やパソコンでの操作に対応した電子書籍も作成されました．

本書の編集にあたり，以下の点に留意しました．

1. 本書に掲載した問題は，九州大学・九州工業大学・福岡教育大学・佐賀大学・長崎大学・熊本大学・大分大学・宮崎大学・鹿児島大学・琉球大学の全学部全学科過去 24 年分 (2001-2024) の一般前期試験問題から厳選しました．

2. 本書は，系統的な問題配置を行うと共に，難易度を問題ごとに「基本」「標準」「応用」「発展」として明示しました．頻出問題については，□□を付けて繰り返し確認できるように配慮しました．

3. 本書に掲載した問題を含め，上記 10 大学の全学部全学科過去 24 年分 (2001-2024) の一般前期試験問題および解答を次のサイトから入手することもできます．

   https://math4u.site/

   また，本書に関する最新情報は，同サイトに掲載しています．

令和 7 年 1 月　西村　信一

目 次

序 **i**

第 1 章　数と式（数学 I） **1**
1.1　数の計算 1
1.2　実数 1
1.3　集合と命題 2

第 2 章　2 次関数（数学 I） **5**
2.1　2 次方程式・不等式 5
2.2　2 次関数の最大・最小 6

第 3 章　図形と計量（数学 I） **7**
3.1　三角比 7
3.2　正弦定理・余弦定理 7
3.3　三角形の面積 7
3.4　平面図形への応用 8
3.5　問題研究 10
3.5.1　ブラマーグプタの公式 10

第 4 章　データの分析（数学 I） **15**

第 5 章　場合の数と確率（数学 A） **17**
5.1　場合の数 17
5.2　確率 21
5.2.1　サイコロ 21
5.2.2　球 23
5.2.3　カード 25
5.2.4　その他 27
5.2.5　確率の最大・最小 29
5.2.6　独立試行の定理 31
5.2.7　反復試行の確率 34
5.2.8　条件付き確率 35

第 6 章　整数の性質（数学 A） **41**
6.1　約数と倍数 41
6.2　不定方程式 42

6.3 合同式 44
6.4 整数の性質の活用 45
6.5 問題研究 48
6.5.1 オイラーの φ 関数 48

第 7 章 図形の性質（数学 A） 53
7.1 角の大きさ 53
7.2 三角形の辺の比 53
7.3 三角形の外心・内心・重心 55
7.4 円と直線 56
7.5 方べきの定理 57
7.6 三角形と円 59
7.7 作図 61

第 8 章 式と証明（数学 II） 63
8.1 二項定理 63
8.2 等式と不等式の証明 64

第 9 章 複素数と方程式（数学 II） 67
9.1 複素数 67
9.2 剰余の定理・因数定理 67
9.3 高次方程式 68
9.4 解と係数の関係 69
9.5 その他の方程式・不等式 69
9.6 問題研究 71
9.6.1 無理数を解にもつ有理係数の方程式 71

第 10 章 図形と方程式（数学 II） 73
10.1 点と直線 73
10.2 円の方程式 73
10.3 軌跡の方程式 75
10.4 不等式の表す領域 76

第 11 章 三角関数（数学 II） 79
11.1 三角関数 79
11.2 加法定理 79
11.3 方程式・不等式 81
11.4 最大・最小 82
11.5 図形への応用 84

第 12 章 指数関数と対数関数（数学 II） 89
12.1 指数関数 . . . 89
12.2 対数の値 . . . 90
12.3 対数方程式 . . . 91
12.4 対数不等式 . . . 92
12.5 対数関数の最大・最小 . . . 93
12.6 常用対数 . . . 94

第 13 章 微分法と積分法（数学 II） 97
13.1 微分係数と導関数 . . . 97
13.2 曲線の接線・法線 . . . 97
13.3 関数の増減・極値，グラフ . . . 98
13.4 最大・最小 . . . 100
13.4.1 3 次関数の最大・最小 . . . 100
13.4.2 三角関数の最大・最小 . . . 102
13.4.3 指数・対数関数の最大・最小 . . . 103
13.5 方程式・不等式への応用 . . . 104
13.6 定積分 . . . 105
13.7 積分方程式 . . . 110
13.7.1 積分方程式 (定数型) . . . 110
13.7.2 積分方程式 (変数型) . . . 111
13.8 面積 . . . 112
13.8.1 放物線 . . . 112
13.8.2 放物線と直線 . . . 116
13.8.3 面積の最大値・最小値 . . . 121
13.8.4 放物線と接線 . . . 124
13.8.5 放物線と 2 本の接線 . . . 128
13.9 問題研究 . . . 131
13.9.1 面積公式 . . . 131

第 14 章 平面上のベクトル（数学 B） 135
14.1 ベクトルと図形 . . . 135
14.2 ベクトルの内積 . . . 138
14.3 三角形の内心・外心・垂心 . . . 146
14.4 三角形の面積 . . . 150
14.5 ベクトル方程式 . . . 151
14.6 問題研究 . . . 152
14.6.1 オイラー線 . . . 152
14.6.2 9 点円 (オイラー円) . . . 153

第 15 章 空間のベクトル（数学 B） **155**
15.1 ベクトルの成分 155
15.2 ベクトルの内積 155
15.3 法線ベクトル 159
15.4 空間図形 163
15.4.1 四面体 163
15.4.2 その他の立体 173
15.4.3 直線・平面・球面 178
15.5 問題研究 181
15.5.1 ベクトル積 (外積) 181

第 16 章 数列（数学 B） **183**
16.1 等差数列・等比数列 183
16.2 群数列 187
16.3 いろいろな数列の和 189
16.4 漸化式 195
16.4.1 2 項間の漸化式 195
16.4.2 3 項間の漸化式 200
16.4.3 S_n を含む漸化式 204
16.4.4 分数漸化式 207
16.4.5 連立漸化式 207
16.4.6 確率漸化式 210
16.4.7 その他の漸化式 216
16.5 数学的帰納法 217
16.6 問題研究 223
16.6.1 3 項間の漸化式 223
16.6.2 分数漸化式 225
16.6.3 ギャンブラーの破産問題 227
16.6.4 連続する自然数のべき乗和 230

第 17 章 確率分布と統計（数学 B） **231**
17.1 確率分布 231
17.2 統計的な推測 238

解答 **253**

第 1 章　数と式（数学I）

1.1　数の計算

□□ **1.1** $a^2(y-b)-(a+b)xy+ab(x+y)+b^2(x-a)$ を因数分解せよ．

(福岡教育大学 2004) 5

1.2　実数

□□ **1.2** α が無理数であり，a，b が有理数であるとき，

$$a+b\alpha=0 \quad \text{ならば} \quad a=b=0$$

であることを証明せよ．

(福岡教育大学 2011) 1

□□ **1.3** 次の計算は誤りである．① から ⑥ の等号の中で誤っているものをすべてあげ，誤りと判断した理由を述べよ．

(宮崎大学 2006) 2

$$8 \underset{①}{=} \sqrt{64} \underset{②}{=} \sqrt{2^6} \underset{③}{=} \sqrt{(-2)^6} \underset{④}{=} \sqrt{((-2)^3)^2} \underset{⑤}{=} (-2)^3 \underset{⑥}{=} -8$$

□□ **1.4** $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とするとき，

$$a^3+b^3,\ a^6+b^6$$

の値を求めよ．

(宮崎大学 2001) 9

□□ **1.5** $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．このとき，a^2+ab+b^2 と $\dfrac{1}{a-b-1}-\dfrac{1}{a+b+1}$ の値を求めよ．

(琉球大学 2011) 5

標準 1.6 次の問に答えよ．　(佐賀大学 2013) 7

(1) $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ が成り立つとき，a を b を用いて表せ．

(2) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{y}{8}+\dfrac{8}{y}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ をみたす実数 x，y の組をすべて求めよ．

標準 1.7 次の問いに答えよ．　(九大 [文]2001) 4

(1) 自然数 a，b が互いに素であるとはどういうことか．

(2) 自然数 a，b が互いに素であるなら a^2，b^2 は互いに素であることを示せ．

(3) n を自然数とする．もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ．ただし，有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである．

(4) n が自然数のとき，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ．

応用 1.8 多項式 $f(x)=x^4-x^3+cx^2-11x+d$ について，$f(1+\sqrt{2})=0$ が成り立つとする．ここで，c，d は有理数とする．次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2011) 2

(1) $S=\{a+\sqrt{2}b \mid a,\ b \text{ は有理数}\}$ とする．集合 S の元 $z=a+\sqrt{2}b$ (ただし，a，b は有理数) に対して，$j(z)=a-\sqrt{2}b$ と定義する．S の任意の元 z，w に対して，$j(z+w)=j(z)+j(w)$ および $j(zw)=j(z)j(w)$ が成り立つことを示せ．

(2) (1) を用いて，S の元 z が $f(z)=0$ を満たせは，$f(j(z))=0$ が成り立つことを示せ．このことを用いて，$f(1-\sqrt{2})=0$ を示せ．

(3) 有理数 c，d を求め，$f(x)$ を有理数の範囲で因数分解せよ．

1.3　集合と命題

□□ **1.9** $x^2-9x+14>0$ を満たさない整数 x で，3 の倍数でないものをすべて求めよ．　(鹿児島大学 2012) 1

□□ **1.10** 実数 x，y に関する次の各命題の真偽を述べよ．真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．　(鹿児島大学 2009) 1

(1) $x \geqq y$ ならば $x^2 \geqq y^2$ である．

(2) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x^2 \geqq y^2$ ならば $x \geqq y$ である．

□□ **1.11** 正の実数 x，y に関する次の各命題の真偽を述べよ．また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ． (鹿児島大学 2014) 1

(1) x が無理数かつ y が有理数ならば，その和 $x+y$ は無理数である．

(2) x が無理数かつ y が無理数ならば，その和 $x+y$ は無理数である．

□□ **1.12** 正の実数 a に関する次の各命題の真偽を述べよ．また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ． (鹿児島大学 2010) 1

(1) a が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である．

(2) a が無理数ならば $\sqrt{a}$ も無理数である．

□□ **1.13** a，b を実数とする．命題「$ab=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$」の逆と対偶を書き，それぞれの真偽を答えよ． (鹿児島大学 2013) 1

□□ **1.14** 次の (1)，(2) に答えよ． (鹿児島大学 2013) 2

(1) m，n が自然数ならば，$\dfrac{m}{n} \neq \sqrt{2}$ である．このことを証明せよ．

(2) p，q が自然数ならば，$\sqrt{2}$ は $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{2q}{p}$ の間にある．
すなわち，$\dfrac{p}{q} < \sqrt{2} < \dfrac{2q}{p}$ または $\dfrac{2q}{p} < \sqrt{2} < \dfrac{p}{q}$ が成り立つ．
このことを証明せよ．

基本 1.15 次の命題の真偽を述べよ．また，その命題が真である場合には証明し，偽である場合には反例をあげよ． (福岡教育大学 2007) 2

(1) ab が無理数ならば，a と b の少なくとも一方は無理数である．

(2) a が有理数，b が無理数ならば，$a+b$，ab はともに無理数である．

(3) n を正の整数とし，$f(n)=2^n+3^n$ とする．このとき，$f(2n-1)$ は 5 の倍数となる．

基本 1.16 次の命題について，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．

(1) 有理数と有理数の和は有理数である． (佐賀大学 2007) 8

(2) 無理数と無理数の和は無理数である．

(3) 無理数と無理数の積は無理数である．

(4) 無理数の無理数乗は無理数である．

基本 1.17 a，b，c を奇数とする．x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に関して，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2003) 3

(1) この 2 次方程式が有理数の解 $\dfrac{q}{p}$ をもつならば，p と q はともに奇数であることを背理法で証明せよ．ただし $\dfrac{q}{p}$ は既約分数とする．

(2) この 2 次方程式が有理数の解を持たないことを (1) を利用して証明せよ．

基本 1.18 $\sqrt{2}$ は $x^2=2$ を満たす正の実数 x を表したものである．このことを用いて，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2005) 12

(1) $\sqrt{2}$ は $1.4\cdots$ と無限に続く小数で表される．そこで，$\sqrt{2}$ の小数第 2 位の値が 1 であることを確かめよ．

(2) n を自然数とするとき，n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを示せ．

(3) (2) を利用して，$\sqrt{2}$ は有理数でないことを示せ．ただし，有理数は最大公約数が 1 である 2 つの整数 a，b $(b\neq 0)$ を用いて $\dfrac{a}{b}$ と表すことができる実数である．

第 2 章　2次関数（数学I）

2.1　2次方程式・不等式

□□ **2.1** 連続する 3 つの自然数 a，b，c があり，それらは $a^2+b^2=c^2$，$a<b<c$ をみたすとする．このような a，b，c はただ 1 組しかないことを示せ．

(福岡教育大学 2012) 5

基本 2.2 次の問に答えよ．　(佐賀大学 2014) 8

(1) 0 以上の整数 n に対して，2 次方程式 $x^2+2(n-5)x+n^2-n=0$ が実数解をもつとする．このとき，n の値をすべて求めよ．

(2) 二桁の自然数で，一の位の数と十の位の数の和の 2 乗がもとの二桁の自然数になるような数をすべて求めよ．

基本 2.3 a を実数とする．2 次方程式 $x^2-2ax+a+\dfrac{1}{4}=0$ について，次の問いに答えよ．　(琉球大学 2001) 1

(1) 実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(2) 2 つの解の差が 1 であるとき，a の値を求めよ．

(3) すべての解が 1 より大きい実数であるとき，a の値の範囲を求めよ．

2.2　2 次関数の最大・最小

基本 2.4 関数

$$f(x) = ax^2 + 2x + \frac{1}{a} - 2$$

について，以下の問に答えよ．ただし，a は定数で，$a > 1$ とする．

(1) $f(x) > 0$ を満たす x の範囲を求めよ．　(佐賀大学 2006) 1

(2) $y = f(x)$ のグラフをかけ．

(3) $-2 \leqq x \leqq 1$ において，$y = f(x)$ の最大値 $m(a)$ を求めよ．

応用 2.5 a，b，c を定数とし，$a > 0$ とする．$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく．実数 p に対し，x の関数 $px - f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく．　(九大 [文]2003) 3

(1) 2 つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が一致するとき，$f(x)$ を求めよ．

(2) 実数 x に対し，p の関数 $xp - g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく．$h(x)$ を求めよ．

(3) 直線 $y = px + q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y = f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は $g(p) = pt - f(t)$ かつ $q = -g(p)$ であることを示せ．

第 3 章　図形と計量（数学I）

3.1　三角比

□□ **3.1**　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を解け．　(福岡教育大学 2001) 5

$$-1 \leqq \tan\theta \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

3.2　正弦定理・余弦定理

基本 3.2　次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2008) 8

(1) 鋭角三角形 ABC の外接円の半径を R とし，頂点 A，B，C に向かい合う辺の長さを a，b，c とおく．このとき，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

を証明せよ．

(2) 45°，60°，75° を内角にもつ三角形を利用して，$\sin 75^\circ$ の値を求めよ．

基本 3.3　△ABC の 3 辺の長さが AB = 6，BC = 5，CA = 4 であるとき，次の問いに答えよ．　(琉球大学 2013) 6

(1) $\cos\angle$BAC を求めよ．

(2) $\angle$BAC の二等分線と辺 BC の交点を L とする．線分 AL の長さを求めよ．

3.3　三角形の面積

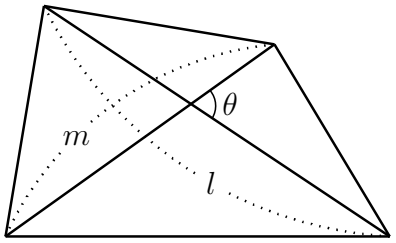
□□ **3.4**　三角形の 3 辺の長さ a，b，c の比が $a : b : c = 7 : 6 : 5$ であり，面積が $12\sqrt{6}$ のとき，a の値を求めよ．　(鹿児島大学 2011) 1

基本 3.5 △ABC において，∠B = 45°，∠C = 75°，BC = 3 のとき，次の問いに答えよ．(福岡教育大学 2008) 6

(1) △ABC の面積を求めよ．

(2) 辺 BC 上に点 D を BD = 1 となるようにとる．このとき，△ABC と △DAC が相似となることを証明せよ．

基本 3.6 右図のような四角形において，対角線の長さを l，m，対角線のなす角を θ とする．次の問いに答えよ．(佐賀大学 2007) 7



(1) 四角形の面積 S を l，m，θ を用いて表せ．

(2) 対角線の長さの和が k(定数) となる四角形の中で，その面積が最大となるものの面積を求めよ．

3.4　平面図形への応用

基本 3.7 △ABC は，$\tan A = \dfrac{4}{3}$，BC = 6 を満たしているものとする．ただし，A = ∠BAC とする．(琉球大学 2008) 6

(1) $\sin A$ および $\cos A$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) △ABC の外接円の半径を求めよ．

(3) △ABC の面積の最大値と，そのときの辺 AB の長さを求めよ．

基本 3.8 円に内接する五角形 ABCDE において，AB = 7，BC = 3，CD = 5，DE = 6，∠BCD = 120° とする．以下の問に答えよ．(佐賀大学 2006) 5

(1) BD の長さを求めよ．

(2) ∠BAD の大きさを求めよ．

(3) AE の長さを求めよ．

基本 3.9 二等辺三角形 ABC において ∠BAC = 120°，AB = AC = 1 とする．辺 BC 上に点 D をとり，AD を一辺とする正三角形 ADE をつくるとき，次の問いに答えよ．(熊大 [文]2002) 1

(1) BD : DC = m : n とするとき，正三角形 ADE の面積を m，n で表せ．

(2) 二等辺三角形 ABC の面積が正三角形 ADE の面積の 3 倍になるとき，m : n を求めよ．

標準 3.10 3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$，$4-x$，2 で表される三角形がある．長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より短くないとする．このとき，次の問いに答えよ．
(九大 [文]2007) 4

(1) このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ．

(2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ．

(3) x が (1) で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ．

標準 3.11 三角形 ABC の 3 辺の長さを a = BC，b = CA，c = AB とする．実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に AP $= tc$ となるように点 P をとる．次の問いに答えよ．
(九大 [文]2010) 1

(1) CP^2 を a，b，c，t を用いて表せ．

(2) 点 P が CP $= a$ を満たすとき，t を求めよ．

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle$A と $\angle$B に関する条件を求めよ．

標準 3.12 四角形 ABCD において，

$$\mathrm{AB}=a,\quad \mathrm{BC}=b,\quad \mathrm{CD}=c,\quad \mathrm{DA}=d,\quad \mathrm{AC}=x,\quad \mathrm{BD}=y$$

とする．以下の問いに答えよ．
(熊大 [文]2011) 1

(1) $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$，$\cos D$ を a，b，c，d，x，y を用いて表せ．

(2) 四角形 ABCD が円に内接するとき，

$$xy = ac + bd$$

が成り立つことを示せ．

3.5　問題研究

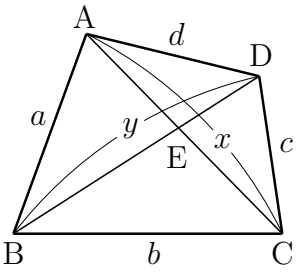
3.5.1　ブラマーグプタの公式

9 ページの 3.12(熊大 [文]2011) で出題された円に内接する四角形 ABCD 関する定理 (トレミーの定理) を含め，いくつかの公式を以下にまとめた．

円に内接する四角形 ABCD において，

$$\mathrm{AB}=a,\quad \mathrm{BC}=b,\quad \mathrm{CD}=c,\quad \mathrm{DA}=d,$$
$$\mathrm{AC}=x,\quad \mathrm{BD}=y$$

とすると，次が成り立つ．



(1)　$\cos A=\dfrac{d^2+a^2-b^2-c^2}{2(da+bc)}$,　$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$

(2)　$x^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$,　$y^2=\dfrac{(bd+ca)(ba+cd)}{bc+da}$

(3)　$xy=ac+bd$　(トレミーの定理)

(4) $2s=a+b+c+d$ とすると，四角形 ABCD の面積を S，外接円の半径を R とすると (ブラマーグプタの公式)

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

(5) AC と BD の交点を E とするとき

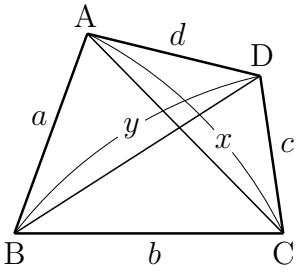
$$\mathrm{EA}:\mathrm{EB}:\mathrm{EC}:\mathrm{ED}=da:ab:bc:cd$$

(6) $\theta=\angle\mathrm{AED}$ とするとき

$$\cos\theta=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$$

解答 (1) 余弦定理により

$$y^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos A$$
$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$



このとき，$\cos C = -\cos A$ であるから

$$d^2 + a^2 - 2da\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

よって $\quad \cos A = \dfrac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(da + bc)}$

上式から $\quad \cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$

補足 $\cos B$ は $\cos A$ の結果を $a \to b,\ b \to c,\ c \to d,\ d \to a$ とすればよい.

(2) 余弦定理により $\quad x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B$

これに (1) の結果を代入すると

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

上式から $\quad y^2 = \dfrac{(bd + ca)(ba + cd)}{bc + da}$

(3) (2) の結果から $\quad x^2y^2 = (ac + bd)^2 \quad$ よって $\quad xy = ac + bd$

(4) (1) の結果から

$$1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b - c + d)(a - b + c + d)}{2(ad + bc)}$$
$$1 - \cos A = \frac{-(a - d)^2 + (b + c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b + c - d)(-a + b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

したがって $\quad \sin^2 A = (1 + \cos A)(1 - \cos A)$

$$= \frac{(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2d)}{4(ad + bc)^2}$$
$$= \frac{4(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}{(ad + bc)^2}$$

$\sin A = \sin C$ より $\quad S = \dfrac{1}{2}ad\sin A + \dfrac{1}{2}bc\sin C = \dfrac{1}{2}(ad + bc)\sin A$

$$= \frac{1}{2}(ad + bc) \times \frac{2\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}{ad + bc}$$
$$= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

$y=\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$，$\sin A=\dfrac{2S}{ad+bc}$ であるから，正弦定理により

$$R=\frac{y}{2\sin A}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

(5) $\triangle\mathrm{EDA}\backsim\triangle\mathrm{ECB}$ より　$\mathrm{EA}:\mathrm{EB}=\mathrm{ED}:\mathrm{EC}=d:b$

$\triangle\mathrm{EAB}\backsim\triangle\mathrm{EDC}$ より　$\mathrm{EA}:\mathrm{ED}=\mathrm{EB}:\mathrm{EC}=a:c$

よって　　$\mathrm{EA}:\mathrm{EB}:\mathrm{EC}:\mathrm{ED}=da:ab:bc:cd$

(6) (2)，(3)，(5) の結果から

$$\mathrm{AE}^2=\left(\frac{ad}{ad+bc}x\right)^2=\frac{a^2d^2}{(ad+bc)^2}\times\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}=\frac{a^2d^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$\mathrm{ED}^2=\left(\frac{cd}{ab+cd}y\right)^2=\frac{c^2d^2}{(ab+cd)^2}\times\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}=\frac{c^2d^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED}=\frac{ad}{ad+bc}x\times\frac{cd}{ab+cd}y=\frac{acd^2xy}{(ad+bc)(ab+cd)}=\frac{acd^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)}$$

これらを $2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED}\cos\theta=\mathrm{AE}^2+\mathrm{ED}^2-d^2$ に代入して整理すると

$$\frac{2acd^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)}\cos\theta=\frac{acd^2}{(ad+bc)(ab+cd)}(a^2+c^2-b^2-d^2)$$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$

(4) の別解　(6) の結果から

$$1+\cos\theta=\frac{(a+c)^2-(b-d)^2}{2(ac+bd)}=\frac{(a-b+c+d)(a+b+c-d)}{2(ac+bd)}$$

$$1-\cos\theta=\frac{(b+d)^2-(a-c)^2}{2(ac+bd)}=\frac{(-a+b+c+d)(a+b-c+d)}{2(ac+bd)}$$

$2s=a+b+c+d$ であるから

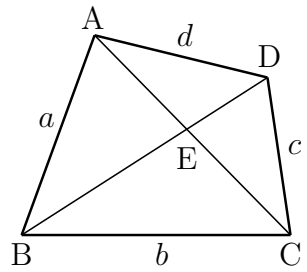
$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\\&=\frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}{4(ac+bd)^2}\\&=\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ac+bd)^2}\end{aligned}$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{1}{2}(ac+bd)\times\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ac+bd}\\&=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\end{aligned}$$

補足　たとえば，(1)，(6) から得られた

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$
$$\cos\angle\mathrm{BEC} = \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$$



の符号から，これらの角の大きさに関する次の性質が分かる．

$$\text{i)}\ \begin{cases} \angle\mathrm{ABC}\text{ が鋭角} & \Longleftrightarrow & a^2+b^2 > c^2+d^2 \\ \angle\mathrm{ABC}\text{ が直角} & \Longleftrightarrow & a^2+b^2 = c^2+d^2 \\ \angle\mathrm{ABC}\text{ が鈍角} & \Longleftrightarrow & a^2+b^2 < c^2+d^2 \end{cases}$$

$$\text{ii)}\ \begin{cases} \angle\mathrm{BEC}\text{ が鋭角} & \Longleftrightarrow & a^2+c^2 > b^2+d^2 \\ \angle\mathrm{BEC}\text{ が直角} & \Longleftrightarrow & a^2+c^2 = b^2+d^2 \\ \angle\mathrm{BEC}\text{ が鈍角} & \Longleftrightarrow & a^2+c^2 < b^2+d^2 \end{cases}$$

$d=0$ とすると，四角形 ABCD は三角形 ABC に退化し，$\angle\mathrm{ABC} = B$，$\angle\mathrm{BEC} = A$ となり，$\cos B$，$\cos A$ は余弦定理に一致する．

また，i)，ii) から，三角形 ABC における関係式を得る．

同様に，ブラマーグプタの公式

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \qquad (2s = a+b+c+d)$$

において，$d=0$ とすると，次のヘロンの公式を得る．

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (2s = a+b+c)$$

センター本試験 2011 から

点Oを中心とする円の円周上に4点A，B，C，Dがこの順にある．四角形ABCDの辺の長さは，それぞれ

$$\mathrm{AB}=\sqrt{7},\quad \mathrm{BC}=2\sqrt{7},\quad \mathrm{CD}=\sqrt{3},\quad \mathrm{DA}=2\sqrt{3}$$

とする．$\angle\mathrm{ABC}=\theta$，$\mathrm{AC}=x$ とするとき，$\cos\theta$，x，円Oの半径 R，四角形ABCDの面積 S

解答　$a=\sqrt{7}$，$b=2\sqrt{7}$，$c=\sqrt{3}$，$d=2\sqrt{3}$ とおくと

$$ab+cd=20,\qquad ac+bd=5\sqrt{21},$$
$$ad+bc=4\sqrt{21},\qquad a^2+b^2-c^2-d^2=20$$

したがって

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}=\frac{20}{2\cdot 20}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}=\sqrt{\frac{5\sqrt{21}\cdot 4\sqrt{21}}{20}}=\boldsymbol{\sqrt{21}}$$

$2s=\sqrt{7}+2\sqrt{7}+\sqrt{3}+2\sqrt{3}$ より，$s=\dfrac{3}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})$ であるから

$$s-a=\frac{1}{2}(3\sqrt{3}+\sqrt{7}),\qquad s-b=\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-\sqrt{7}),$$
$$s-c=\frac{1}{2}(3\sqrt{7}+\sqrt{3}),\qquad s-d=\frac{1}{2}(3\sqrt{7}-\sqrt{3})$$

したがって　$(s-a)(s-b)=5$，$(s-c)(s-d)=15$

よって　　$S=\boldsymbol{5\sqrt{3}}$

また　　$\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}=\sqrt{20\cdot 5\sqrt{21}\cdot 4\sqrt{21}}=20\sqrt{21}$

よって　　$R=\dfrac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}=\dfrac{20\sqrt{21}}{4\cdot 5\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

第 4 章　データの分析（数学I）

□□ **4.1** 変量 x の値が x_1，x_2，x_3 のとき，その平均値を $\overline{x}$ とする．分散 s^2 を

$$\frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2\}$$

で定義するとき，$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ となることを示せ．ただし $\overline{x^2}$ は ${x_1}^2$，${x_2}^2$，${x_3}^2$ の平均値を表す．　(琉球大学 2016) 5

標準 4.2 1 つのさいころを 3 回投げる．1 回目に出る目の数，2 回目に出る目の数，3 回目に出る目の数をそれぞれ X_1，X_2，X_3 とし，5 つの数

$$2,\ 5,\ 2-X_1,\ 5+X_2,\ X_3$$

からなるデータを考える．以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2016) 2

(1) データの範囲が 7 以下である確率を求めよ．

(2) X_3 がデータの中央値に等しい確率を求めよ．

(3) X_3 がデータの平均値に等しい確率を求めよ．

(4) データの中央値と平均値が一致するとき，X_3 が中央値に等しい条件付き確率を求めよ．

第 5 章　場合の数と確率（数学 A）

5.1　場合の数

□□ **5.1** 0，1，2，3，4，5 の数字が 1 つずつ記入された 6 枚のカードが入っている箱から 1 枚ずつ 3 枚のカードを取り出し，左から並べて自然数 n を作るとき，次の (1)，(2) に答えよ．ただし，例えば 012 は 12 を表すものとする．

(1) n が 3 桁の自然数になるのは何通りか．　(福岡教育大学 2014) 1

(2) 3 桁の自然数 n を作った後，箱の中に残っている 3 枚のカードを左から並べて 3 桁の自然数 m を作るとき，$n+m=555$ となる n は何通りか．

□□ **5.2** $-2 \leqq m < 2$ かつ $-2 < n \leqq 2$ であるような整数の組 $(m,\ n)$ のうち，条件「$1 \leqq m$ または $n < 0$」を満たすものの個数を求めよ．　(鹿児島大学 2008) 1

□□ **5.3** KADAI という語の 5 文字を並べて得られる順列のうち，2 つの A が隣り合わないものの総数を求めよ．　(鹿児島大学 2012) 1

□□ **5.4** SATTUN という 6 文字を並べかえて得られる順列のうち，最初が子音文字になるものの総数を求めよ．　(鹿児島大学 2015) 1

□□ **5.5** 1，2，3，4，5 の 5 種類の数字を，同じ数字を繰り返し用いることを許して 3 桁の整数をつくるとき，各位の数字の和が 3 の倍数になる整数は何個あるか．　(鹿児島大学 2009) 1

□□ **5.6** 正方形の各辺を n 等分した点から向かい合う辺に垂線を下ろす．このとき，正方形の 4 つの辺とこれらの垂線を利用してできる長方形のうち，正方形でないものの個数を n を用いて表せ．　(福岡教育大学 2016) 1

基本 5.7 6 個の文字 A，B，C，D，E，F を 1 列に並べて文字列をつくる．このとき，次の問いに答えなさい．　(大分大学 2009) 1

(1) 文字列の並べ方は全部で何通りあるか．

(2) 文字 A と B が隣り合う並べ方は何通りあるか．

(3) 文字 A と B の間に他の文字が 1 個以上入るような並べ方は何通りあるか．

基本 5.8 6個の数字1，2，3，4，5，6から重複を許して4個を取り出し，それらを並べて4桁の整数をつくる．千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ，a，b，c，dとおく．次のような整数は，それぞれ何通りできるか．

(佐賀大学 2001) 7

(1) $a < d$

(2) $a < b \leqq c < d$

基本 5.9 右上の図のような，縦方向に5行，横方向に5列の合計25個のマス目から，異なる5個のマス目を選んでマス目に○をつける．以下の問いに答えよ．

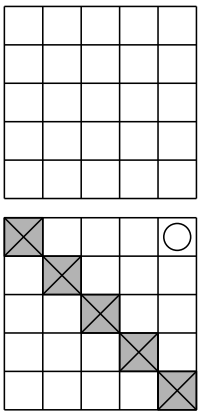
(九工大 [情]2013) 4

(1) すべての列に○がついているようなマス目の選び方の総数を求めよ．

(2) すべての行と列に○がついているようなマス目の選び方の総数を求めよ，

(3) ○のついている列が2列，○のついていない列が3列になるようなマス目の選び方の総数を求めよ．

(4) 右下の図のように，右上のマス目が選ばれて○がついており，かつ，×がついた対角線上のマス目を選んで○をつけることができないものとする．このとき，すべての行と列に○がついているようなマス目の選び方の総数を求めよ．



基本 5.10 1から9までの数字が1つずつ書かれた9個の玉があり，これらのうち，1，2，3が書かれた玉をそれぞれ玉1，玉2，玉3と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(九工大 [情]2015) 4

(1) 9個の玉から3個を選んで1つの箱に入れる．この入れ方は何通りあるか．

(2) (1)の入れ方のうち，箱に，玉1と玉2がいっしょに含まれず，玉1と玉3もいっしょに含まれないものは何通りあるか．

(3) 9個の玉を区別できない3つの箱に分けて入れる．ただし，各箱にはそれぞれ3個ずつの玉を入れるものとする．この入れ方は何通りあるか．

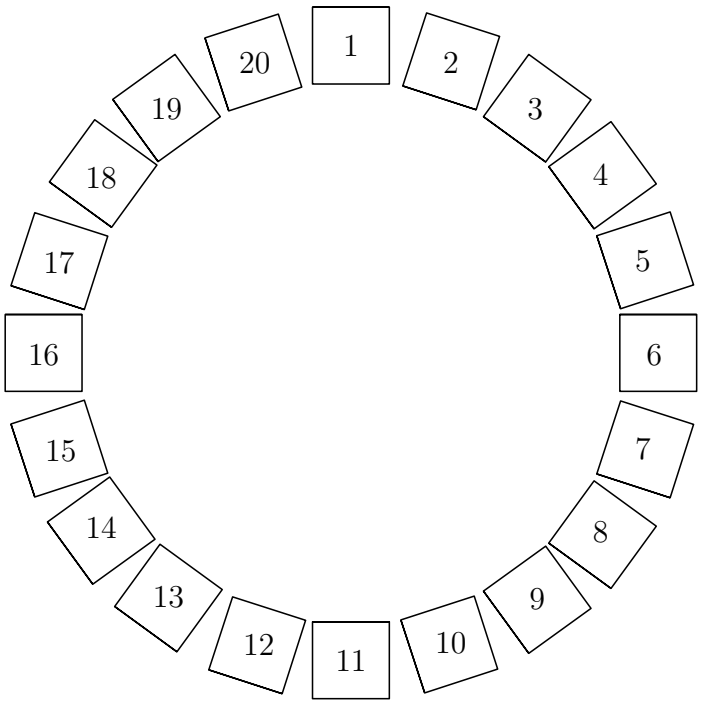
(4) (3)の入れ方のうち，どの箱にも，玉1と玉2がいっしょに含まれず，玉1と玉3もいっしょに含まれないものは何通りあるか．

基本 5.11 次の問いに答えよ. (琉球大学 2022) 4

(1) 1 から 9 までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9$ を満たすように 3 つの数を選び，それを $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とする．このような 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 3$ を満たすものは全部で何通りあるか.

(2) 1 から 50 までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50$ を満たすように 3 つの数を選び，それを $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とする．このような 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 10$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 10$ を満たすものは全部で何通りあるか.

(3) 1 番から 20 番までの番号が書かれた座席が，図のように円形に並んでいる．この中から，2 つ以上の間隔を空けて 3 つの座席を選ぶ (例えば，1 番を選んだときは 2 番，3 番，19 番，20 番は選べない)．このような 3 つの座席の選び方は全部で何通りあるか.



基本 5.12 1，2，3，4 を重複を許して並べてできる数について，次の問いに答えなさい. (大分大学 2008) 6

(1) 各けたの数の和が 6 となる 5 けたの数の個数を求めよ.

(2) 各けたの数の和が 7 となる 5 けたの数の個数を求めよ.

(3) 各けたの数の和が $k+3$ となる k けたの数の個数を求めよ.

基本 5.13 10個のアルファベットの大文字A，B，C，D，E，F，H，I，O，Xを重複を許して並べてできる5文字の順列を1枚のカードに1つずつ書くとする．なお，文字H，I，O，Xは上下を逆さまにしてもそれぞれH，I，O，Xと読めるので，これらの文字で書かれた5文字の順列はカードごと上下を逆さまにすると，$i = 1, 2, 3, 4, 5$に対してi番目の文字がもとの$6 - i$番目の文字に対応する5文字の順列が書かれたカードとして使えるとする．例えば，HIOXXと書かれたカードは上下を逆さかにして，XXOIHと書かれたカードとしても使える．しかし，ABEIFと書かれたカードは上下を逆さまにすると5文字の順列を表すカードとしては使えない．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2014) 3

(1) 上下を逆さまにして読んでも同じ順列を表すカードの総数を求めよ．

(2) 上下を逆さまにして読むと異なる順列を表すカードの総数を求めよ．

(3) 上下を逆さまにすることにより1枚のカードを2度まで使うことを許すとする．すべての順列を書くためには，最小限で何枚のカードが必要か．

標準 5.14 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2007) 3

(1) 10桁の自然数で，各桁の数の合計がちょうど3になるものはいくつあるか．

(2) 10桁以下の自然数で，各桁の数の合計がちょうど4になるものはいくつあるか．

(3) 右から読んでも左から読んでも同じ数になる自然数を「回文数」と呼ぶ．例えば1233321，467764は回文数であるが，12333210は回文数ではない．10桁以下の自然数の中に回文数はいくつあるか．

標準 5.15 正の整数Aに対して，つぎの条件(i)，(ii)をみたす整数の組$(a,\ b)$の総数を$N(A)$と表わす．　(分大 [医]2008) 7

(i) $a < b$

(ii) aとbの最小公倍数はAである．

(1) $N(105)$を求めよ．

(2) $N(2310)$を求めよ．

応用 5.16 $n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ を考える。以下の問いに答えよ。 (熊大 [医]2012) 1

(1) このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ.

(2) 数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ とおく. $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ.

(3) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ.

5.2 確率

5.2.1 サイコロ

□□ **5.17** 4 個のさいころを同時に投げるとき，3 の倍数の目のみが出る確率を求めよ. (鹿児島大学 2014) 1

□□ **5.18** 3 個のさいころを同時に投げるとき，3 個の目の積が 3 の倍数である確率を求めよ. (鹿児島大学 2013) 1

□□ **5.19** 4 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 7 になる確率を求めよ. (鹿児島大学 2010) 1

基本 5.20 大小 2 つのサイコロを投げて，大きいサイコロの目の数を a，小さいサイコロの目の数を b とする．次の問いに答えよ. (熊大 [文]2006) 1

(1) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ の最小値が -5 より小さくなる確率を求めよ.

(2) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと x 軸との交点で，x 座標の大きい方を選ぶ. その x 座標が 1 より大きくなる確率を求めよ.

(3) 関数 $y = ax^2 + 2x - b$ のグラフと関数 $y = bx^2$ のグラフが異なる 2 点で交わる確率を求めよ.

標準 5.21 さいころを繰り返し投げて，n 回目に出た目の数を X_n とし，$a_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ とする．このとき，各 n について，$a_n \leqq 9$ となる確率を求めよ．(熊大 [文]2002) 2

標準 5.22 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積をとる。積が 12 となる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_2, p_3 を求めよ。　(熊大理系 2023) 2

(2) $n \geqq 4$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする。出た目の数の積が n 回目にはじめて 12 となる確率を求めよ。

標準 5.23 4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする．以下の問いに答えよ．　(九大 [文]2020) 4

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ．

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ．

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ．

応用 5.24 X，Y は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする．また，n を自然数とする．A 君，B 君が以下のルールで対戦する．

(i) 1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする．出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする．

(ii) 1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける．ただし，n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする．

以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2013) 1

(1) さいころを投げたとき，X，Y に属する目が出る確率をそれぞれ p，q とする．A 君が勝つ確率を求めよ．

(2) A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 $(X,\ Y)$ は何通りあるか．

応用 5.25 m，n を整数とする．xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す．初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている．1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す．以下の問いに答えよ．ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする．
(熊大 [文]2018) 3

(1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ．

(2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ．

(3) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にある確率を求めよ．

応用 5.26 m，n を整数とする．xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す．初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている．1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す．以下の問いに答えよ．ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする．
(熊大 [医]2018) 2

(1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ．

(2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ．

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ．

5.2.2 球

□□ **5.27** 1 から 9 までの整数がひとつずつ書かれた 9 個の玉が入っている袋の中から玉を 3 個取り出す．取り出した玉に書かれた整数の和が 12 以上となる確率を求めよ．
(福岡教育大学 2010) 5

基本 5.28　AとBの2つの箱がある．箱Aには，赤玉が1個，青玉が4個，黄玉が5個入っている．箱Bには，当りくじが3本，はずれくじが7本入っている．
　箱Aから玉を1つ取り出し，それが赤玉のときは箱Bからくじを5本，青玉のときは3本，黄玉のときは2本引くとする．　(大分大学 2016) 3

(1) 青玉を取り出し，当たりくじを少なくとも1本引く確率を求めなさい．

(2) 当たりくじを少なくとも1本引く確率を求めなさい．

(3) 当たりくじをちょうど1本引く確率を求めなさい．

標準 5.29　赤球4個と白球6個の入った袋から2個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す．このとき，以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2010) 2

(1) 取り出した赤球の総数が2である確率を求めよ．

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ．

標準 5.30　赤球と白球の2色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率がpであるとき，確率p^2でゲームに勝つものとする．nを2以上の整数とし，赤球，白球ともにn個入っている箱からn個の球を取り出してゲームを行った．以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2019) 4

(1) kを0以上n以下の整数とする。取り出したn個の球のうち赤球がk個となる確率は$\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$となることを示せ。

(2) kを1以上n以下の整数とする。取り出したn個の球のうち赤球がk個となり，さらにゲームに勝つ確率は$\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$であることを示せ。

(3) ゲームに勝つ確率は$\dfrac{n}{2(2n-1)}$であることを示せ。

応用 5.31　nを2以上の自然数とする．1つの袋に1からnまでの数を1つずつ書いたn個の球と，数0を書いた2個の球が入っている．これら$(n+2)$個の球が入っている袋から，元に戻すことなく，1個ずつ3回球を取り出し，その3個に書かれている数を取り出した順にa，b，cとする．事象$a+b \leqq c$の起こる確率を$P(n)$とするとき，次の各問に答えよ．　(宮大 [医]2015) 7

(1) $P(3)$を求めよ．

(2) nを偶数とするとき，$P(n)$を，nを用いて表せ．

5.2.3 カード

基本 5.32 100 から 999 までの自然数の集合を全体集合 U とし，そのうち 14 で割ると 3 余るものの集合を A，9 の倍数の集合を B とおく． (大分大学 2014) 4

(1) A，B の要素の個数を求めなさい．

(2) $A \cap B$ の要素のうち，最小のものと最大のものを求めなさい．

(3) U の要素が 1 つずつ書かれた玉の入った袋から玉を 2 個取り出す．このとき，2 個の玉に書かれている数がいずれも 14 で割ると 3 余り，かつ 9 で割り切れない場合の確率を求めなさい．

基本 5.33 N を 3 以上の自然数とする．

1 から N までの数字が 1 つずつ書かれた N 枚のカードを袋に入れ,「無作為に 1 枚のカードを取り出し，そのカードを袋に戻さずに次のカードを取り出す」という作業を 3 枚のカードを取り出すまで繰り返す．取り出された 3 枚のカードに書かれた数の最大値を X とする．

また，1 から N までの数字が 1 つずつ書かれた N 枚のカードを袋に入れ,「無作為に 1 枚のカードを取り出してはそれに書かれた数を記録し，袋に戻す」という作業を 3 回行い，記録された数の最大値を Y とする．

n を N 以下の自然数とする．$X = n$ となる確率を p_n とし，$Y = n$ となる確率を q_n とする．

次の問いに答えよ． (琉球大学 2016) 4

(1) p_3，q_1，q_2，q_3 を求めよ．

(2) p_n と q_n を求めよ．

基本 5.34 1 から 5 の数字が書かれたカードが 1 枚ずつある．これらから 4 枚を選び，横 1 列に並べる．並べられたカードに書かれた数字を左から順に a，b，c，d とおく．このとき，次の問に答えよ． (佐賀大学 2016) 4

(1) カードの並べ方の総数を求めよ．

(2) 次のルールのもとで，3 と 4 のカードを捨てる場合は何通りあるかを求めよ．

- $a < b < c < d$ ならば，b と c のカードを捨てる．
- $a < b < d < c$ ならば，b と d のカードを捨てる．
- $b < a < c < d$ ならば，a と c のカードを捨てる．
- $b < a < d < c$ ならば，a と d のカードを捨てる．
- その他は何も捨てない．

(3) (2) のルールのもとで，何も捨てない確率を求めよ．

基本 5.35 A，B，Cの3人が自分の名前を書いたカードを各自3枚ずつ1つの箱の中に入れる．この箱の中からA，B，Cの順にそれぞれ1枚ずつカードを引くとする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，引いたカードは元に戻さないものとする．
(琉球大学 2002) 2

(1) ひとりだけが自分以外の名前のカードを引く確率を求めよ．

(2) ひとりだけが自分の名前のカードを引く確率を求めよ．

(3) 全員が自分以外の名前のカードを引く確率を求めよ．

基本 5.36 袋の中に1から5までのいずれかの数字を書いた同じ形の札が15枚入っていて，それらは1の札が1枚，2の札が2枚，3の札が3枚，4の札が4枚，5の札が5枚からなる．袋の中からこれらの札のうち3枚を同時にとり出すとき，札に書かれている数の和をSとする．このとき次の問いに答えよ．　(熊大 [理]2001) 4

(1) Sが2の倍数である確率を求めよ．

(2) Sが3の倍数である確率を求めよ．

標準 5.37 箱の中に，数字の1を記入したカード，2を記入したカード，3を記入したカードがそれぞれn枚，合計$3n$枚入っている．ただし，$n \geqq 4$であり，またカードの裏側には何も書かれていないものとする．以下の問いに答えよ．
(九工大 [情]2009) 4

(1) 箱の中からカードを1枚取り出し，数字を見ないでふせておく．次に箱の中から取り出したカードの数字が1である確率を求めよ．

(2) 箱の中から2枚のカードを同時に取り出したとき，カードの数字が異なる確率をnを用いて表せ．

(3) 箱の中から3枚のカードを同時に取り出したとき，カードの数字がちょうど2種類である確率をnを用いて表せ．

(4) 箱の中から4枚のカードを同時に取り出したとき，カードの数字がちょうど2種類である確率をnを用いて表せ．

標準 5.38 1から6までの数字が1つずつ書かれている6枚のカードがある．これらをよくきった上で，左から右に一列に並べる．カードに書かれた数字を左から順にa，b，c，d，e，fとする．このとき，次の問いに答えよ．　(九大 [文]2009) 3

(1) $a+b=c$となる確率を求めよ．

(2) $a+b=c+d$となる確率を求めよ．

5.2.4 その他

□□ **5.39** munakata の 8 文字を一列に並べるとき，次の確率を求めよ．ただし，この文字列中の母音は a，u で，子音は k，m，n，t である． (福岡教育大学 2009) 1

(1) 両端が子音となる確率

(2) 両端が母音となる確率

(3) 母音と子音が交互に並ぶ確率

□□ **5.40** 正六角形の頂点の中から異なる 3 点を選んで三角形を作る．この三角形が正三角形にも二等辺三角形にもならない確率を求めよ． (鹿児島大学 2008) 1

基本 5.41 A，B，C の 3 人がそれぞれある地域の東公園，西公園および北公園のいずれかに行こうとしている．この 3 人は次のように，硬貨の表裏によって，どの公園に行くのかを決める．

- A は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら東公園に行く．裏が出たら西公園に行く．
- B は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら西公園に行く．裏が出たら，もう 1 度その硬貨を投げて，表が出たら東公園に行き，裏が出たら北公園に行く．
- C は手持ちの硬貨を 1 枚投げて，表が出たら北公園に行く．裏が出たら，もう 1 度その硬貨を投げて，表が出たら東公園に行き，裏が出たら西公園に行く．

ただし，3 人が使用する硬貨は，表，裏がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で出るものとする．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2014) 10

(1) A と B が同じ公園に行く確率を求めよ．ただし，C はどの公園に行ってもよいものとする．

(2) B と C が同じ公園に行く確率を求めよ．ただし，A はどの公園に行ってもよいものとする．

(3) 3 人が同じ公園に行く確率を求めよ．

(4) 少なくとも 2 人が同じ公園に行く確率を求めよ．

標準 5.42 1個買うごとに景品を1個もらえる商品がある．景品は全部でn種類あり，それぞれ1からnまでの番号がつけてある．また，1からnまでの数字が1つずつ記入されたn枚のカードがある．n枚のカードは外から数字が見えない箱の中に入れてあり，購入した商品1個ごとに箱の中から1枚引いて数字を確認して景品と交換する．引いたカードは，そのつど箱に戻すものとする．もらえる景品の番号は，引いたカードの数字と同じ番号のものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2012) 7

(1) この商品をm個購入したとき，番号1の景品が少なくとも1個もらえる確率を求めよ．ただし，$m > n$とする．

(2) この商品をn個購入したとき，全種類の景品がそろわない確率を求めよ．

(3) この商品を$n+1$個購入したとき，全種類の景品がもらえる確率を求めよ．

標準 5.43 図のような番号のついたマス目と駒とサイコロを使って，以下に示す規則にしたがうゲームを考える．

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- 駒は最初0番のマス目に置く．
- サイコロを投げ，出た目の数だけ駒を10番のマス目に向かって進める．
- 駒がちょうど10番のマス目に止まればゴールとする．
- ただし，10番のマス目を超える場合は，その分だけ10番のマス目から0番のマス目側に戻る．

たとえば，7番のマス目に駒があり，出た目が5であった場合は，駒は8番のマス目に移動し，その次に出た目が2であった場合はゴールとする．以下の問いに答えよ．

(九工大 [情]2011) 4

(1) 2投目でゴールする確率を求めよ．

(2) 2投目の後，9番のマス目に駒がある確率を求めよ．

(3) 3投目でゴールする確率を求めよ．

(4) このゲームを使ってA，Bの2名が対戦する．Aから初めて，交互にサイコロを投げて各自の駒を進める試行を行ない，先にゴールした方を勝ちとする．ただし，どちらも2投以内でゴールしない場合は引き分けとする．引き分ける確率を求めよ．

(5) A，Bの駒をそれぞれ0番，k番$(0 < k < 10)$のマス目に置いて(4)と同様の対戦を開始するとき，Aが勝つ確率よりBが勝つ確率の方が高くなるためのkの条件を求めよ．

応用 5.44 人工知能ベンチャータウンにある A 社と B 社は,「はい」か「いいえ」で答えられる質問に回答する知能ロボットを開発した．質問に対して，A 社製のロボットは，$\frac{4}{5}$ の確率で正しい答えを返し，$\frac{1}{5}$ の確率で間違った答えを返す．B 社製のロボットは，$\frac{1}{10}$ の確率で正しい答えを返し，$\frac{9}{10}$ の確率で間違った答えを返す．A 社製のロボットが 3 体，B 社製のロボットが 3 体，計 6 体のロボットがある．これらのロボットは外見では区別することができない．
ベンチャータウンの入口に，二股の分かれ道があり，一方の道は A 社へ，もう一方の道は B 社へ続いている．この入口に，6 体の中から無作為に選ばれた 1 体のロボットが案内役として立っている．次に答えよ．　(九州工業大学 2018) 4

(1) 案内役ロボットに「あなたは A 社製のロボットですか？」と質問して，答えが「はい」である確率を求めよ．

(2) 案内役ロボットに「あなたは A 社製のロボットですか？」と質問して，答えが「はい」であったとき，このロボットが A 社製のロボットである確率を求めよ．

(3) 案内役ロボットに，無作為に選んだ一方の道を指しながら「この道はあなたを作った会社へ続く道ですか？」と質問して，答えが「はい」であったとき，指した道が A 社へ続く道である確率を求めよ．

(4) 案内役ロボットが，(2)，(3) のどちらの質問に対しても「はい」と答えたとき，指した道が A 社へ続く道である確率を求めよ．

(5) 残りの 5 体のロボットの中から無作為に選ばれた 1 体のロボットが入口にやってきた．これら 2 体のロボットに「あなたたちは同じ会社製のロボットですか？」と質問したところ，案内役ロボットは「はい」と答え，あとから来たロボットは「いいえ」と答えた．このとき，2 体とも A 社製のロボットである確率を求めよ．

5.2.5 確率の最大・最小

基本 5.45 n を 9 以上の自然数とする．袋の中に n 個の球が入っている．このうち 6 個は赤球で残りは白球である．この袋から 6 個の球を同時に取り出すとき，3 個が赤球である確率を P_n とする．　(大分大学 2013) 1

(1) P_{10} を求めなさい．
(2) $\dfrac{p_{n+1}}{P_n}$ を求めなさい．
(3) P_n が最大となる n を求めなさい．

基本 5.46 赤，青，黄 3 組のカードがある．各組は 10 枚ずつで，それぞれ 1 から 10 までの番号がひとつずつ書かれている．次の問いに答えよ．(福岡教育大学 2010) 3

(1) 30 枚のカードの中からカードを 4 枚取り出すとき，2 枚だけが同じ番号で残りの 2 枚は相異なる番号である確率を求めよ．

(2) 30 枚のカードの中から k 枚 $(4 \leqq k \leqq 10)$ を取り出すとき，2 枚だけが同じ番号で残りの $(k-2)$ 枚はすべて異なる番号が書かれている確率を $p(k)$ とする．

(ア) $\dfrac{p(k+1)}{p(k)}$ $(4 \leqq k \leqq 9)$ を求めよ．

(イ) $p(k)$ $(4 \leqq k \leqq 10)$ が最大となる k を求めよ．

基本 5.47 それぞれのカードに 1 から 25 までの相異なる数字が一つずつ書かれた 25 枚のカードが箱に入っている．箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出し，また箱に戻すという操作を 32 回繰り返す．以下に答えよ．　(九工大 [情]2004) 5

(1) 1 回の操作で取り出した 3 枚のカードの中に数字 13 が書かれたカードが含まれている確率を求めよ．

(2) 32 回の操作が終わった時点において，数字 13 が書かれたカードが出た回数が k である確率 q_k を k を用いて表せ．

(3) (2) で求めた確率 q_k について $\dfrac{q_k}{q_{k-1}}$ を k を用いて表せ．

(4) (2) で求めた確率 q_k が最大となる k を求めよ．

標準 5.48 r を 9 以上の整数として，赤球 r 個と白球 10 個が入っている袋がある．この袋から 9 個の球を同時に取り出し，そのうちの赤球の個数を調べ，取り出した球に白球を 1 個加えて袋に戻すという試行を繰り返す．つまり，1 回の試行ごとに袋の中の白球が 1 個ずつ増えるということになる．n 回目の試行において取り出された 9 個の球のうち，赤球がちょうど 4 個である確率を P_n で表す．　(琉球大学 2008) 4

(1) $P_1 < P_2$ が成り立つことを示せ．

(2) $P_n < P_{n+1}$ が成り立つための n の範囲を r を用いて表せ．

(3) $r = 50$ のとき，P_n が最大となる n の値を求めよ．

5.2.6 独立試行の定理

標準 5.49 9枚のカードがあり，カードの表にはそれぞれ「2」「3」「4」「5」「6」「7」「8」「9」「10」の数が書かれている．また，裏にはすべて「1」が書かれている．これらのカードを投げたときに，それぞれのカードの表が上側になる確率と裏が上側になる確率は，ともに $\frac{1}{2}$ であるとする．9枚のカードすべてを同時に投げて，各カードの上側に現れた数をすべて掛けあわせた値を得点とする．以下に答えよ．

(1) 得点が8点になる確率を求めよ． (九工大 [情]2005) 5

(2) 得点が偶数になる確率を求めよ．

(3) 得点が8の倍数になる確率を求めよ．

(4) 9枚のカードからある1枚のカードを取り除き，カードを8枚にした．この8枚のカードを同時に投げたときに得点が8の倍数になる確率は，(3) で求めた確率の $\frac{3}{4}$ 倍になった．取り除いたカードの表に書かれている数として考えられるものをすべて答えよ．

標準 5.50 出席者 n 人の会議で，出席者のうち $\frac{2}{3}$ 以上が議案に賛成する確率 T_n と，$\frac{1}{2}$ 以上が賛成する確率 H_n を考える．各出席者が議案に賛成する確率を p $(0 \leqq p \leqq 1)$ とし，各出席者が賛成するかしないかは互いにに独立であるとする．
たとえば，$H_2 = 2p(1-p) + p^2 = 2p - p^2$ である．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，出席者は賛成するかしないかのどちらかであるものとする．

(1) T_3 を求めよ． (九工大 [情]2008) 4

(2) $H_2 \geqq T_3$ を示せ．

(3) 差 $H_2 - T_3$ が最も大きくなるときの p の値を求めよ．

(4) $p = \frac{1}{2}$ のとき，$T_3 \geqq T_6 \geqq T_9$ を示せ．

(5) $p = \frac{1}{2}$ のとき，H_{2k+1} $(k \geqq 1)$ を求めよ．

標準 5.51 座標平面上に動点Pがあり，次のルールに従って移動するものとする．

ルール：サイコロ1個を振って，1，2，3の目が出たら $(x,\ y) \to (x+1,\ y)$ のように移動し，4，5の目が出たら $(x,\ y) \to (x,\ y+1)$ のように移動するが，6の目が出たら移動しない．

はじめ点Pは原点 $(0,\ 0)$ にあるとして以下の問いに答えなさい．ただし，サイコロの目はどれも同様な確からしさで出るものとする．　(分大 [医]2020) 8

(1) 1個のサイコロを5回振った時点で，点Pの座標が $(3,\ 2)$ である確率を求めなさい．

(2) 1個のサイコロを5回振った時点で，点Pの座標が $(2,\ 2)$ である確率を求めなさい．

(3) k は正の整数であり，m，n は負でない整数とする．1個のサイコロを k 回振った時点で，点Pの座標が $(m,\ n)$ である確率を $p_k(m,\ n)$ とする．和 $\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1} p_k(m,\ k-m-1)$ を，k を用いて表しなさい．

標準 5.52 大小2個のサイコロを投げ，大きいサイコロの目の数を p，小さいサイコロの目の数を q とする．$y=px^2$ のグラフと $y=qx+1$ のグラフの交点のうち，x 座標が負のものをA，正のものをBとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分ABの中点の y 座標が2より小さくなる確率を求めよ．(熊大 [理]2009) 3

(2) Aの x 座標が有理数となる確率を求めよ．

(3) $\angle$OABが 90° より大きくなる確率を求めよ．ただし，Oは座標平面の原点である．

標準 5.53 1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目に出る目の数を a，2回目に出る目の数を b とする．これらの a，b に対して，実数を要素とする集合 P，Q を次のように定める．

$$P=\{x \mid x^2+ax+b>0\}$$
$$Q=\{x \mid 5x+a \geqq 0\}$$

このとき，以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2011) 1

(1) P が実数全体の集合となる確率を求めよ．

(2) $Q \subset P$ となる確率を求めよ．

標準 5.54 さいころを3回続けて投げて出た目を順に a，b，c とする．これらの数 a，b，c に対して2次方程式

$$(*) \qquad ax^2+bx+c=0$$

を考える．ただし，さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [理]2007) 4

(1) 2次方程式 $(*)$ が異なる二つの実数の解をもつとき，積 ac の取りうる値を求め，積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 $(a,\ c)$ がそれぞれ何通りあるかを求めよ．

(2) 2次方程式 $(*)$ が異なる二つの有理数の解をもつ確率を求めよ．ただし，一般に自然数 n が自然数の2乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい．

標準 5.55 3個のさいころを同時に振るものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 次の確率を求めよ． (鹿児島大学 2001) 8

(a) 1の目のみが3個出る確率

(b) 1と2の両方の目が出て，その他の目が出ない確率

(c) 1と2と3の3種類の目が1個ずつ出る確率

(2) 出る目の最大値を M，最小値を m とする．$M-m=k$ となる確率 p_k $(0 \leqq k \leqq 5)$ を求めよ．ただし，必要ならば $k \geqq 2$ の計算には，次の事項 (i)，(ii) を用いてもよい．

(i) 出る目の数は，m，$m+k$ の2種類の目のみの場合と m，$m+k$，$m+i$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ の3種類の目の場合のいずれかである．

(ii) $1 \leqq m \leqq 6-k$ である．

応用 5.56 袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている．次の操作を繰り返し行う．

(操作) 袋から1個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉1個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる．袋に入っている3個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を1枚もらう．

(1) 2回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ． (九大 [理]2015) 4

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ．

(3) 8回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ．

(4) 8回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど1枚である確率を求めよ．

5.2.7　反復試行の確率

基本 5.57 箱の中に1から4までの番号が1つずつ書かれた4枚のカードが入っている．また，手元に0の番号が書かれたカードを持っているとする．箱の中からカードを1枚引き，手元のカードと比較して番号の小さい方のカードを箱に戻して，大きい方のカードを手元に残すという試行を繰り返す．このとき，次の問に答えよ．

(佐賀大学 2014) 11

(1) 3回繰り返して手元のカードが4である確率を求めよ．また，n回繰り返して手元のカードが4である確率を求めよ．

(2) 3回繰り返して手元のカードが2である確率を求めよ．また，n回繰り返して手元のカードが2である確率を求めよ．

(3) n回繰り返して手元のカードが3である確率を求めよ．

基本 5.58 座標平面上に点Pがあり，次のルールにより，点Pは移動する．

a，b，cの文字がそれぞれ1つずつ書かれた球3個が入った袋から，1個取り出してそこに書かれている文字を読み，その文字が

aのとき，点Pはx軸の正の方向へ1だけ移動し，

bのとき，点Pはx軸の負の方向へ1だけ移動し，

cのとき，点Pはy軸の正の方向へ1だけ移動する．

最初，点Pは原点Oにあるものとする．この試行を，取り出した球を元に戻しながら，5回続けて行う．例えば，これによって得られた5個の文字が順に$b \to a \to c \to c \to a$であるとすれば，上のルールにより，点Pの位置の座標は，

$$(0,\ 0) \to (-1,\ 0) \to (0,\ 0) \to (0,\ 1) \to (0,\ 2) \to (1,\ 2)$$

と変化する．

このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2015) 3

(1) y軸上で点Pの移動が終了する場合，終了したときの位置の座標をすべて求めよ．

(2) 点Pの移動が終了する位置の相異なる座標の個数を求めよ．

(3) 点Pの移動が終了する位置の座標$(x,\ y)$が$|x| \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$となる確率を求めよ．

応用 5.59 袋の中に，赤玉が 15 個，青玉が 10 個，白玉が 5 個入っている．袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える．

(操作) コインが点 $(x,\ y)$ にあるものとする．赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x+1,\ y)$ に移動，青玉を取り出したときには点 $(x,\ y+1)$ に移動，白玉を取り出したときには点 $(x-1,\ y-1)$ に移動し，取り出した球は袋に戻す．

最初に原点 $(0,\ 0)$ にコインを置き，この操作を繰り返して行う．指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする．このとき，以下の問いに答えよ． (九大 [文]2016) 3

(1) 操作を n 回繰り返したとき，白玉を 1 度だけ取り出したとする．このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ．

(2) 操作を n 回繰り返したとき，到達点となり得る点の個数を求めよ．

(3) 座標平面上の 4 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1, -1)$，$(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える．操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする．P_3 を求めよ．

(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ．

5.2.8 条件付き確率

基本 5.60 2 個のさいころを同時に 1 回投げる．出る目の和を 5 で割った余りを X，出る目の積を 5 で割った余りを Y とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $Y \geqq 1$ である確率を求めよ． (宮崎大学 2003) 7

(2) $X = 2$ または $Y = 2$ である確率を求めよ．

(3) $X = 2$ である条件のもとで $Y = 2$ である確率を求めよ．

基本 5.61 出る目の確率が次のようなさいころがひとつある．

・1，3の目が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{12}$

・5の目が出る確率は $\dfrac{1}{3}$

・2，4，6の目が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$

そこで，さいころを1回ふり，出た目を A とし，A を3で割った余りを X とする．次にもう1回さいころをふり，出た目を B とし，$A+B$ を3で割った余りを Y とする．このとき，次の各問に答えよ．（宮崎大学 2005） 9

(1) 事象 $X=Y=0$ が起こる確率を求めよ．

(2) 事象 $X+Y=3$ が起こる確率を求めよ．

(3) 事象 $X+Y=3$ が起こったという条件のもとでの，$X=1$，$Y=2$ である条件つき確率を求めよ．

標準 5.62 ある病原菌の検査試薬は，その病原菌に感染している個体に対し誤って陰性反応を示す確率が $\dfrac{3}{100}$ であり，感染していない個体に対し誤って陽性反応を示す確率が $\dfrac{1}{100}$ である．ある集団にこの試薬で病原菌の検査を行い，全体の4%が陽性反応を示したとき，次の問に答えよ．（佐賀大学 2020） 1

(1) 病原菌に感染している個体が陽性反応を示す確率を求めよ．

(2) この集団から1つの個体を取り出すとき，その個体が病原菌に感染している確率を求めよ．

(3) この集団の中で陽性反応を示した個体が，実際は病原菌に感染していない確率を求めよ．

標準 5.63 A チームと B チームは毎日 1 回野球の試合をする．毎回勝敗を決定し，引き分けはないものとする．どちらかのチームが 3 連勝したときにそのチームの優勝とする．1 回目の試合では，A チームの勝つ確率は B チームの勝つ確率の 2 倍である．また，2 回目の試合からは，A チームが勝つ確率は，前日の試合で勝ったときは B チームの勝つ確率の 2 倍であり，負けたときは B チームの勝つ確率の $\frac{1}{3}$ 倍である．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2007) 7

(1) 1 回目の試合で A チームが勝つ確率 P_A と B チームが勝つ確率 P_B を求めよ．

(2) 前日の試合で A チームが勝ったとき，今日の試合で A チームが勝つ確率 P_{AA} と，前日の試合で B チームが勝ったとき，今日の試合で B チームが勝つ確率 P_{BB} を求めよ．

(3) 4 回以内の試合で優勝が決まる確率を求めよ．

(4) 5 回目の試合で優勝が決まったことがわかっている．このとき A チームが優勝している確率を求めよ．

標準 5.64 はじめに，4 枚の硬貨 A，B，C，D が，表が上の状態で置かれている．これらの硬貨に対して以下の試行を繰り返すものとする．

試行：4 枚の硬貨のうち，裏が上の硬貨はそのままにし，
表が上の硬貨はすべて拾って同時に投げる．

ただし，すべての硬貨が，裏が上の場合も，0 枚の硬貨を拾って投げるとみなして，試行を繰り返すものとする．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2016) 4

(1) 硬貨 A が 3 回目の試行の後に表が上である確率を求めよ．

(2) 3 回目の試行の後，硬貨 A と B は表が上で，かつ，硬貨 C と D は裏が上である確率を求めよ．

(3) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ．

(4) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚であった．このとき，3 回目の試行に後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ．

(5) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚で，かつ，3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ．

(6) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚であった．このとき，1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚である確率を求めよ．

応用 5.65 3 つの部品 a，b，c からなる製品が多数入った箱がある．製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b，c が不良品である確率について次のことがわかっている．

- 部品 a が不良品である確率は p である．　(九大 [文]2018) 4
- 部品 a が不良品でないとき，部品 b が不良品である確率は q である．
- 部品 a が不良品であるとき，部品 b も不良品である確率は $3q$ である．
- 部品 b が不良品でないとき，部品 c が不良品である確率は r である．
- 部品 b が不良品であるとき，部品 c も不良品である確率は $5r$ である．

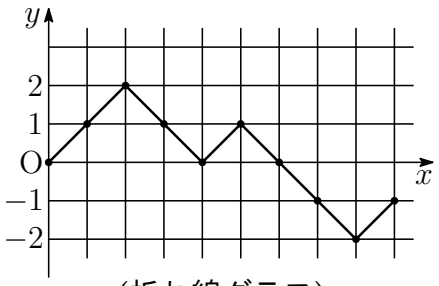
ただし，$0 < p < 1$，$0 < q < \dfrac{1}{3}$，$0 < r < \dfrac{1}{5}$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b の少なくとも一方が不良品である確率を p，q を用いて表せ．

(2) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 c が不良品である確率を p，q，r を用いて表せ．

(3) 製品を 1 つ取り出したところ部品 c が不良品であった．このとき，部品 b も不良品である確率を p，q を用いて表せ．

応用 5.66 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という．与えられた格子点を第1番目とし，この点から右斜め $45°$，または右斜め $-45°$ の方向にもっとも近い第2番目の格子点をとり，この2点を線分で結ぶ．同様にして第2番目の格子点から第3番目の格子点をとり，第2番目と第3番目を線分で結ぶ．以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする．右図に原点Oと格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す．次の問いに答えよ．



(折れ線グラフ)

(九大 [理]2002) 6

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする．原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ．また，この必要十分条件がみたされているとき，原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ．

(2) n は2以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n-2$ なる整数で，$n+k$ は偶数とする．原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも1つを通る折れ線グラフの数は，原点Oと格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の2倍に等しいことを示せ．

(3) コインを9回投げる．1回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す．このとき各格子点 $(i,\ T_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 9$，を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる．ただし，$T_0 = 0$ とする．$T_9 = 3$ が起きたとき，どの T_i $(i = 1, 2, \cdots, 7)$ も3にならない条件つき確率を求めよ．

第 6 章　整数の性質（数学 A）

6.1　約数と倍数

□□ **6.1** 3 桁の自然数 a について，百の位の数を a_1，十の位の数を a_2，一の位の数を a_3 とする．$a_1+a_2+a_3$ と a は 9 で割った余りが等しいことを示せ．

(福岡教育大学 2009) 1

□□ **6.2** n が 2 以上の整数のとき，n^3-n は 6 で割り切れることを示せ．

(宮崎大学 2009) 1

□□ **6.3** 自然数 n が 6 と互いに素であるとき，n^2-1 が 6 で割り切れることを示せ．

(鹿児島大学 2016) 1

□□ **6.4** m と n を正の整数とする．n を m で割ると 7 余り，$n+13$ は m で割り切れるとき，m の値をすべて求めよ．

(鹿児島大学 2011) 1

□□ **6.5** $20!=2^m k$ (k は奇数) が成り立つとき，整数 m の値を求めよ．

(鹿児島大学 2009) 1

基本 6.6 a を自然数とする．自然数 n に対し，$b_n=n(n^2+a)$ とする．このとき，命題

(∗)　すべての自然数 n に対し，b_n は 6 の倍数である

について，次の各問に答えよ．

(宮崎大学 2019) 5

(1) $a=5$ のとき，命題 (∗) が真であることを示せ．

(2) 命題 (∗) が真であるような a の値をすべて求めよ．

基本 6.7 次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2022) 10

(1) 整数 p を 5 以上の素数とする．このとき，$p+2$ が素数ならば，$p+1$ は 6 の倍数であることを示せ．

(2) ある素数を 2 進法で表したとき，すべての位の数字が 1 である k 桁の数 $\overbrace{11\cdots1}^{k\text{ 個}}$ になったとする．このとき，k は素数であることを示せ．ただし必要ならば自然数 m に対して，

$$X^m-1=(X-1)(X^{m-1}+X^{m-2}+\cdots+X+1)$$

が成り立つことを用いよ．

標準 6.8 x，y を整数とするとき，以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2011) 1

(1) x^5-x は 30 の倍数であることを示せ．

(2) x^5y-xy^5 は 30 の倍数であることを示せ．

6.2　不定方程式

□□ **6.9** 1 次不定方程式

$$37x+32y=1$$

の整数解を 1 組求めよ．　(鹿児島大学 2015) 1

□□ **6.10** $a^2b-3a^2+5b=21$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．
(福岡教育大学 2016) 1

基本 6.11 n を整数とする方程式を $5x+3y=2n$ とする．　(大分大学 2005) 7

(1) $n=30$ のとき，この方程式をみたす正の整数 x，y の組をすべて求めなさい．

(2) この方程式をみたす整数 x，y の組をすべて求めなさい．

標準 6.12 100 人の団体がある区間を列車で移動する．このとき，乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と，乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して，利用することにした．以下の問いに答えよ． (九大 [文]2012) 3

(1) x が 0 以上の整数であるとき，次のことを示せ．
$\frac{1}{3}(100-7x)$ は，x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり，
それ以外の場合は整数ではない．

(2) 購入した乗車券は，余らせずすべて利用するものとする．このとき，セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ．

(3) 購入した乗車券は余ってもよいものとする．このとき，A のみ，あるいは B のみを購入する場合も含めて，購入金額が最も低くなるのは，A，B をそれぞれ何セットずつ購入するときか．またそのときの購入金額はいくらか．

標準 6.13 以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2012) 1

(1) k を整数とするとき，x の方程式 $x^2-k^2=12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ．

(2) x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ．

応用 6.14 次の問いに答えよ． (分大 [医]2007) 7

(1) $6(x-y)=xy$ をみたす自然数の組 x，y をすべて求めよ．

(2) $7(x+y+z)=2(xy+yz+zx)$ をみたす自然数の組 $(x \leqq y \leqq z)$ をすべて求めよ．

応用 6.15 p を素数とするとき，次の問に答えよ． (佐大 [医]2015) 6

(1) 2 つの自然数 m，n の最大公約数は 1 であるとし，$x=\dfrac{n}{m}$ とおく．p^x が有理数であるならば，$m=1$ であることを示せ．

(2) 方程式
$$p^x=-x^2+9x-5$$
が有理数の解 x をもつような組 $(p,\ x)$ をすべて求めよ．

6.3　合同式

基本 6.16　a，b は自然数とする．a を 8 で割った余りを r，b を 8 で割った余りを s とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2002) 3

(1) $a+b$ を 8 で割った余りと $r+s$ を 8 で割った余りが等しいことを示せ．

(2) a^2 を 8 で割った余りと r^2 を 8 で割った余りが等しいことを示せ．

(3) 平方数を 8 で割ったとき，余りとしてえられる数をすべて求めよ．ただし，平方数とは自然数の平方となっている数のことである．

(4) 2 つの平方数の和を 8 で割ると余りは 3 にはならないことを示せ．

標準 6.17　自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく．a_n は 0 から 12 まで整数である．以下の問いに答えよ．　(九大 [文]2016) 4

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ．

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ．

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ．

(i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる．

(ii) N を十進数で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる．

(iii) N は 13 で割り切れる．

標準 6.18　以下の問いに答えよ．　(九大 [文]2018) 2

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ．

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示

$$101101101101101101_{(2)}$$

をもつとする．m を 7 で割った余りを求めよ．

応用 6.19　初項 $a_1=1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える．以下の問いに答えよ．　(九大 [理]2017) 3

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ．

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ．

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ．

基本 6.20 以下の問いに答えよ. (九大 [文]2017) 4

(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ.

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ.

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ.

基本 6.21 次の各問に答えよ. (宮崎大学 2023) 8

(1) $a = 2023$，$b = 1742$ とする．このとき，

$$\frac{1}{ab} = \frac{m}{a} + \frac{n}{b}$$

となる整数の組 $(m,\ n)$ で，$1 \leqq n \leqq 2000$ を満たすものをすべて求めよ.

(2) p を 3 以上の素数とする．このとき

$$(p-1)! \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right)$$

は p の倍数であることを示せ.

応用 6.22 以下の問いに答えよ. (九大 [理]2015) 5

(1) n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ.

(2) n を自然数とする．$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ.

(3) p，q を異なる素数とする．$2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p，q の組をすべて求めよ.

6.4 整数の性質の活用

基本 6.23 2 つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする．以下の問いに答えよ. (熊大 [文]2011) 2

(1) 集合 A のある要素 $a^2 + b^2$ $(a,\ b$ は整数$)$ が 3 で割り切れるとき，a，b はともに 3 で割り切れることを示せ.

(2) x を整数とする．$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ.

基本 6.24 次の各問に答えよ．　(鹿児島大学 2001) 3

(1) 次の等式を証明せよ．

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

(2) 二つの整数の平方の和で表される数の全体からなる集合を A とする．x，y が集合 A の要素であるとき，積 xy もまた集合 A の要素であることを証明せよ．

(3) (2) の集合 A に対して，5 および 5^5 は A の要素であることを証明せよ．

標準 6.25 次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2003) 1

(1) a，b を正の整数とし，$f(x)=ax+b$ とする．$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ のうち，2 つの値が 3 の倍数ならば a，b はともに 3 の倍数であることを示せ．

(2) a，b，c，d を正の整数とし，$f(x)=ax+b$，$g(x)=cx+d$ とする．
$F(x)=f(x)g(x)$ の係数，定数項がすべて 3 の倍数ならば，a，b はともに 3 の倍数であるか，または c，d はともに 3 の倍数であることを示せ．

標準 6.26 1 から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を $\varphi(n)$ とする．ただし，自然数 a と b が互いに素であるとは，a と b の最大公約数が 1 になることである．　(佐賀大学 2005) 1

(1) $\varphi(10)$ を求めよ．

(2) p を素数，k を自然数とするとき，$\varphi(p^k)$ を求めよ．

(3) $\varphi(100)$ を求めよ．

(4) $\varphi(1500)$ を求めよ．

標準 6.27 $f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．　(九大 [文]2007) 1

(1) 方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ．

(2) 不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ．

(3) 不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ．

応用 6.28 4次方程式の解について，次の問いに答えよ．ただし，右のことは既知としてよい． (長大 [医]2010) 7

> 自然数 k，l，m が次の条件
> (イ) k と l は1以外の約数をもたない
> (ロ) k は lm の約数である．
> を満たすならば，k は m の約数である．

(1) a，b，c，d は整数で，$d \neq 0$ とする．次の方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

が有理数の解 r をもつとき，$|r|$ は自然数であり，かつ $|d|$ の約数に限ることを証明せよ．

(2) 次の方程式

$$2x^4 - 2x - 1 = 0$$

の実数解はすべて無理数であることを証明せよ．

応用 6.29 以下の問いに答えよ． (九大 [文]2014) 2

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を3で割った余りは0か1であることを証明せよ．

(2) 自然数 a，b，c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると，a，b，c はすべて3で割り切れなければならないことを証明せよ．

(3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しないことを証明せよ．

応用 6.30 n を正の整数とする． (分大 [医]2004) 8

(1) 整式 x^n を $x^5 - 1$ で割った余りを求めよ．

(2) 整式 $x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n$ を $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ．

6.5　問題研究

6.5.1　オイラーの φ 関数

46 ページの 6.26(佐賀大学 2005) は，オイラーの φ 関数に関する出題である．

1 から n までの自然数のうちで，n と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または φ 関数 (phi function) という．6.26(2) の結果から，p を素数，k を自然数とするとき，次式が成り立つ．

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

定理 1

p，q を素数，k，l を自然数，$n = p^k q^l$ とするとき

$$\varphi(n) = \varphi(p^k)\varphi(q^l) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

証明　1 から n までの自然数のうちで，p，q，pq で割り切れる個数は，それぞれ $\dfrac{n}{p}$，$\dfrac{n}{q}$，$\dfrac{n}{pq}$ であるから，p または q で割り切れる個数は

$$\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq}$$

よって
$$\varphi(n) = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$
$$= p^k q^l\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \varphi(p^k)\varphi(q^l)$$

証終

補題　$\varphi(90) = \varphi(9)\varphi(10)$ を示せ．

証明　10 行 9 列の数の並びについて，第 i 行第 j 列を $9i + 10j$ とすると，次のページの表 1 のようになる．また，$9i + 10j$ を 90 で割った余り (ただし割り切れるときは，便宜上 90 とする) を求めると，表 2 のようになる．

表 2 からもわかるように，$9i + 10j$ $(1 \leqq i \leqq 10,\ 1 \leqq j \leqq 9)$ の値は，法 90 について，どの 2 つも合同ではない．仮に，$1 \leqq i, i' \leqq 10,\ 1 \leqq j, j' \leqq 9$ に対して

$$9i + 10j \equiv 9i' + 10j' \quad \text{すなわち} \quad 9(i - i') \equiv 10(j' - j) \pmod{90}$$

が成立するとき
$$9(i - i') \equiv 0 \pmod{10}$$
$$10(j' - j) \equiv 0 \pmod{9}$$

$-9 \leqq i - i' \leqq 9$，$-8 \leqq j' - j \leqq 8$ であるから　$i = i'$，　$j = j'$

したがって，表 2 には，1 から 90 までの自然数が 90 個並ぶ.

$9i + 10j$ の値 (表 1)

i \ j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	19	29	39	49	59	69	79	89	99
2	28	38	48	58	68	78	88	98	108
3	37	47	57	67	77	87	97	107	117
4	46	56	66	76	86	96	106	116	126
5	55	65	75	85	95	105	115	125	135
6	64	74	84	94	104	114	124	134	144
7	73	83	93	103	113	123	133	143	153
8	82	92	102	112	122	132	142	152	162
9	91	101	111	121	131	141	151	161	171
10	100	110	120	130	140	150	160	170	180

$9i + 10j$ を 90 で割った余り (表 2)

i \ j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	19	29	39	49	59	69	79	89	9
2	28	38	48	58	68	78	88	8	18
3	37	47	57	67	77	87	7	17	27
4	46	56	66	76	86	6	16	26	36
5	55	65	75	85	5	15	25	35	45
6	64	74	84	4	14	24	34	44	54
7	73	83	3	13	23	33	43	53	63
8	82	2	12	22	32	42	52	62	72
9	1	11	21	31	41	51	61	71	81
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90

$90 = 9 \times 10$ で 9 と 10 は互いに素であるから，1 から 90 までの自然数のうち，90 と互いに素である数は 9 または 10 と互いに素である.
表 2 の 1 から 90 までの自然数のうち，9 と互いに素でない数は，すべて 3 列目，6 列目，9 列目に並び，それ以外の列数は $\varphi(9)$. また，1 から 90 までの自然数のうち，10 と互いに素でない数は，すべて 2 行目，4 行目，5 行目，6 行目，8 行目，10 行目に並び，それ以外の行数は $\varphi(10)$. そこで，これらの数を除いた，すなわち互いに素であるものを残したものが左下の表である. さらに，これらの数の間を詰めて並べたものが右下の表で，数字が書かれた列数は $\varphi(9)$，数字が書かれた行数は $\varphi(10)$.
よって，$\varphi(90) = \varphi(9)\varphi(10)$ が成り立つ.

19	29		49	59		79	89	
37	47		67	77		7	17	
73	83		13	23		43	53	
1	11		31	41		61	71	

19	29	49	59	79	89			
37	47	67	77	7	17			
73	83	13	23	43	53			
1	11	31	41	61	71			

証終

補題の証明を一般化することにより，次の定理を得る.

定理 2

自然数 m，n が互いに素であるとき，次式が成り立つ.

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

定理 3

$p_1,\ p_2,\cdots,p_l$ を素数，$k_1,\ k_2,\cdots,k_l$ を自然数とすると

$$n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

証明　定理 2 の乗法的性質を用いると

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi({p_1}^{k_1})\varphi({p_2}^{k_2})\cdots\varphi({p_l}^{k_l})\\ &= {p_1}^{k_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right){p_2}^{k_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots{p_l}^{k_l}\left(1-\frac{1}{p_l}\right)\\ &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)\end{aligned}$$

証終

定理 4 フェルマー・オイラーの定理 (Fermat-Euler Theorem)

自然数 n と互いに素である自然数 a について，次式が成り立つ．

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

証明　n 以下の自然数で n と互いに素である数を

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_{\varphi(n)} \tag{6.1}$$

とする．これらに n と互いに素である自然数 a を掛けた数

$$ar_1,\ ar_2,\ \cdots,\ ar_{\varphi(n)} \tag{6.2}$$

は，どの 2 つも法 n について合同でない．$ar_i \equiv ar_j$ と仮定すると，$a(r_i - r_j) \equiv 0$ より，$r_i \equiv r_j$．ゆえに，法 n に関して，(6.1) と (6.2) は順序を無視すると一致する．したがって，(6.1) をすべて掛け合わせたものと (6.2) をすべて掛け合わせたものは合同である．すなわち

$$\begin{aligned} & a^{\varphi(n)}r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)} \equiv r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)} && \pmod{n}\\ \text{ゆえに}\quad & r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)}(a^{\varphi(n)}-1) \equiv 0 && \pmod{n}\\ \text{よって}\quad & a^{\varphi(n)} \equiv 1 && \pmod{n}\end{aligned}$$

とくに，n が素数 p のとき (フェルマーの小定理)　$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$　**証終**

定理 5

自然数 n と互いに素である自然数 a について

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数 e(位数) は，$\varphi(n)$ の約数である．

証明 $\varphi(n)$ が e で割り切れないと仮定し，$\varphi(n)$ を e で割った商を q，余りを r とすると

$$\varphi(n) = eq + r \quad (0 < r < e)$$

したがって $$a^{\varphi(n)} = a^{eq+r} = (a^e)^q a^r$$

$a^{\varphi(n)} \equiv 1$，$a^e \equiv 1 \pmod{n}$ であるから

$$a^r \equiv 1 \pmod{n}$$

これは，e が位数であることに反する． **証終**

例 例えば，7 と互いに素である数 1, 2, 3, 4, 5, 6 について

$$1^1 \equiv 1,\ \ 2^3 \equiv 1,\ \ 3^6 \equiv 1,\ \ 4^3 \equiv 1,\ \ 5^6 = 1,\ \ 6^2 \equiv 1 \pmod{7}$$

であるように，これらの位数は $\varphi(7) = 6$ の約数である．

素数 p について，$a^e \equiv 1$ となる位数 e が $p-1$ に等しいとき，a を法 p の原始根という．
このとき

$$a,\ a^2,\ \cdots,\ a^{p-1}$$

は法 p に関して，どの 2 つも合同ではない．
実際，$1 \leqq i < j \leqq p-1$ のとき $a^i \equiv a^j \pmod{p}$ とすると

$$a^i(a^{j-i} - 1) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad a^{j-i} \equiv 1 \pmod{p}$$

これは a が法 p の原始根であることに反する．

上の例から 3 と 5 は法 7 の原始根であり，法 7 に関して次の巡廻性がある．

$$3^1 \equiv 3,\ \ 3^2 \equiv 2,\ \ 3^3 \equiv 6,\ \ 3^4 \equiv 4,\ \ 3^5 \equiv 5,\ \ 3^6 \equiv 1 \pmod{7}$$
$$5^1 \equiv 5,\ \ 5^2 \equiv 4,\ \ 5^3 \equiv 6,\ \ 5^4 \equiv 2,\ \ 5^5 \equiv 3,\ \ 5^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

第 7 章　図形の性質（数学 A）

7.1　角の大きさ

□□ **7.1** 三角形 ABC において辺 AB 上に点 D を，辺 AC 上に点 E をとり，線分 BE と線分 CD の交点を F とする．点 A，D，E，F が同一円周上にあり，さらに角のあいだに

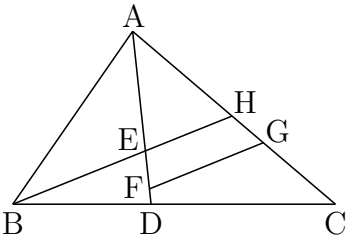
$$\angle AEB = 2\angle ABE = 4\angle ACD$$

という関係が成り立つとき，∠BAC の値を求めよ．　(鹿児島大学 2014) 1

7.2　三角形の辺の比

□□ **7.2** △ABC において ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする．AB = 6，BC = 5，BD = 3 のとき，辺 AC の長さを求めよ．　(鹿児島大学 2016) 1

基本 7.3 右図の △ABC において，AB : AC = 3 : 4 とする．また，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする．さらに，



線分 AD を 5 : 3 に内分する点を E，
線分 ED を 2 : 1 に内分する点を F，
線分 AC を 7 : 5 に内分する点を G

とする．直線 BE と辺の AC との交点を H とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{AH}{HC}$ の値を求めよ．　(宮崎大学 2010) 8

(2) BH//FG であることを示せ．

(3) FG = 7 のとき，線分 BE の長さを求めよ．

基本 7.4 △ABC は AB = AC で ∠C = 72° である．∠B の二等分線と AC との交点を D とする．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2009) 6

(1) △ABC と △BCD は相似であることを示せ．

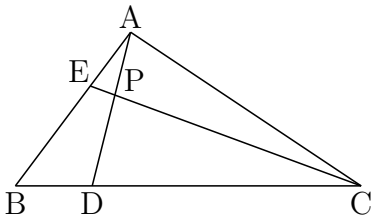
(2) AD : DC を求めよ．

(3) 直線 BC 上の点 E を BC = BE となるようにとる．ただし，E は C と異なる点である．DE と AB の交点を F とするとき，AF : FB を求めよ．

基本 7.5 右の図の三角形 ABC において，

$$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 1 : a$$
$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 1 : b$$

とする．ただし，$a > 0$，$b > 0$ である．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2001) 11



(1) AP : PD を a，b を用いて表せ．

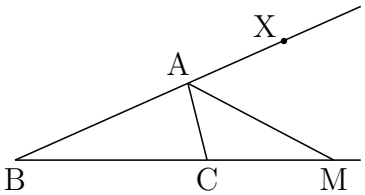
(2) △APE : △ABC を a，b を用いて表せ．

基本 7.6 AB > AC である △ABC について，次の各問に答えよ．なお，下の 2 つの図において，点 X は辺 BA の延長上の点とする．　(宮崎大学 2004) 13

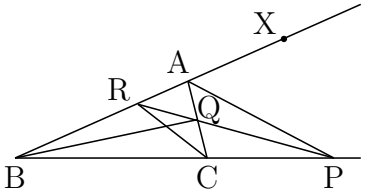
(1) 右図のように，点 M を辺 BC の延長上に AB : AC = BM : MC を満たすようにとる．このとき，次の (A)，(B) に答えよ．

(A) 点 N を辺 AB 上に AC = AN を満たすようにとるとき，MA//CN であることを示せ．

(B) AM が ∠A の外角を 2 等分することを示せ．



(2) 右図において，点 Q は ∠B の二等分線と辺 AC の交点，点 R は ∠C の二等分線と辺 AB との交点とする．また，直線 RQ と辺 BC の延長との交点を P とする．このとき，AP が ∠A の外角を 2 等分することを示せ．



標準 7.7 △ABC において，∠C = 90°，AB : AC = 5 : 4 とする．辺 BC の点 C 側の延長上に，CA = CD となる点 D をとる．辺 AB の中点を E とし，点 B から直線 AD に下した垂線を BF とするとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2016) 7

(1) EF = EC を示せ．

(2) 面積比 △ABC : △CEF を求めよ．

標準 7.8 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D，E，F とする．また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，以下の問いに答えよ． (九大 [文]2016) 2

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ．

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする．

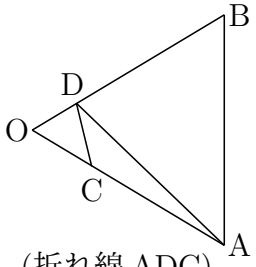
(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = \ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ求めよ．

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ．

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ．

標準 7.9 △AOB は $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$ なる二等辺三角形とする．$\alpha = \angle\mathrm{AOB}$ とし，線分 OB に関して A と対称な点を A′ とする．次の問いに答えよ． (九大 [文]2002) 3

(1) $\alpha < 90°$ とする．右図のように線分 OA 上に点 C をとる．点 C を固定し，線分 OB 上に点 D を折れ線 ADC の長さが最小となるようにとる．線分 OA′ 上に $\mathrm{OC}' = \mathrm{OC}$ をみたす点 C′ をとれば，線分 AC′ は点 D を通ることを示せ．



(折れ線 ADC)

(2) $\alpha < 45°$ とする．線分 OA 上に点 E を，線分 OB 上に点 F を折れ線 AFE の長さが最小となるようにとる．このとき ∠AEF は直角となることを示せ．

(3) $\alpha < 60°$ とする．線分 OA 上に点 G を，線分 OB 上に点 H を折れ線 AHGB の長さが最小となるようにとる．このとき，折れ線 AHGB の長さを α を用いて表せ．

7.3 三角形の外心・内心・重心

□□ **7.10** $\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$ である鋭角三角形 ABC の外心を O，重心を G とする．直線 OG と A から辺 BC におろした垂線との交点を H，BC の中点を M とするとき，AH : OM を求めよ． (鹿児島大学 2009) 1

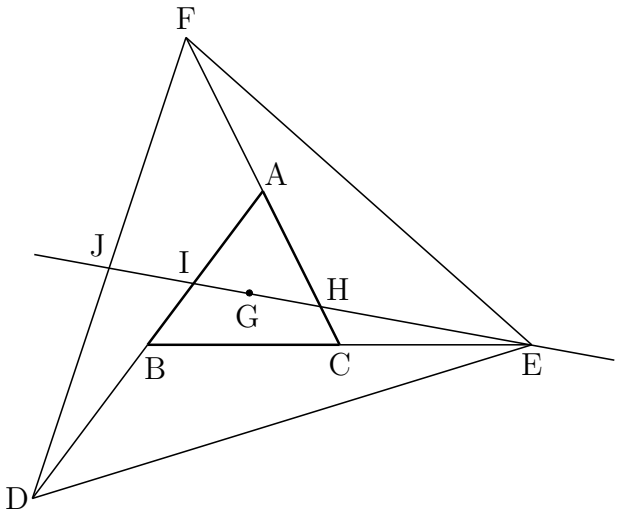
□□ **7.11** 三角形 ABC において，辺 AB の中点を D，辺 AC の中点を E とする．$\mathrm{BE} = \mathrm{CD}$ ならば $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ であることを示せ． (鹿児島大学 2012) 1

基本 7.12 右図の △ABC において，辺 AB 上の延長上に AB ＝ BD となる点 D がある．同様に，辺 BC の延長上に BC ＝ CE となる点 E が，辺 CA の延長上に CA ＝ AF となる点 F がそれぞれある．△ABC の重心を G とし，直線 GE と線分 AC，AB，FD との交点をそれぞれ H，I，J とする．このとき，次の比を求めよ．　(宮崎大学 2015) 11

(1) CH : HA

(2) BI : IA

(3) DJ : JF

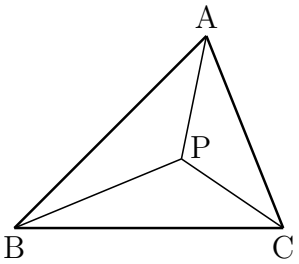


基本 7.13 右図のように，△ABC の内部に点 P をとる．△PAB，△PBC，△PCA の面積をそれぞれ S_{AB}，S_{BC}，S_{CA} とするとき，次の各問に答えよ．

(宮崎大学 2012) 9

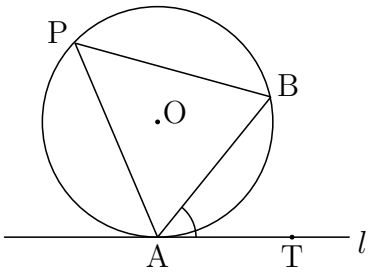
(1) 点 P が △ABC の内心で，${S_{AB}}^2 + {S_{CA}}^2 = {S_{BC}}^2$ が成り立つとき，∠BAC の大きさを求めよ．

(2) $S_{AB} = S_{BC} = S_{CA}$ が成り立つとき，点 P は △ABC の重心であることを示せ．



7.4　円と直線

□□ **7.14** 右図のような点 O を中心とする円において，弦 AB と点 A における接線 l とのなす角 ∠BAT は，その角内にある弧 AB に対する円周角 ∠APB に等しいことを証明せよ．ただし，∠BAT は鋭角とする．　(宮崎大学 2013) 12



基本 7.15 次の問いに答えよ. (佐賀大学 2008) 10

(1) 平面において，一直線上に相異なる 3 点 A，P，B をこの順にとる．次に線分 AB を直径とする半円 C をかき，点 P を通る直線 AB の垂線と半円 C との交点を Q とする．このとき，半円 C の半径と線分 PQ の長さをそれぞれ線分 AP の長さと線分 BP の長さを用いて表せ.

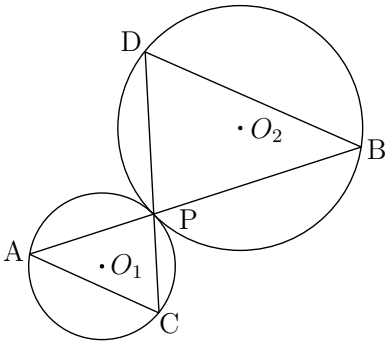
(2) (1) を用いて，2 つの正の数 a，b に対して，不等式

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合かも示せ.

基本 7.16 次の問に答えよ. (宮崎大学 2014) 9

(1) 右図のように半径 r_1 の円 O_1 と半径 r_2 の円 O_2 が外接している．円 O_1 と円 O_2 の接点を P とする．円 O_1 の周上に点 P と異なる点 A をとり，線分 AP の延長と円 O_2 の交点を B とする．また，円 O_1 の周上に点 P，点 A と異なる点 C をとり，線分 CP の延長と円 O_2 の交点を D とする.

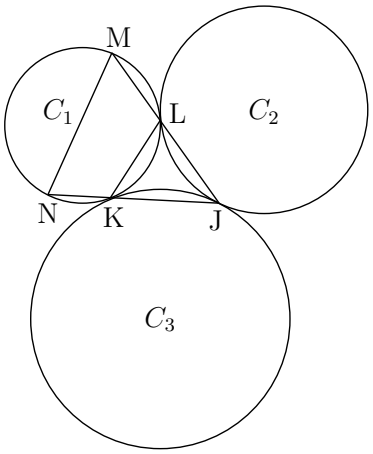


このとき，次の (a)，(b) に答えよ.

(a) 点 P における円 O_1 の接線を利用して，AC//BD であることを示せ.

(b) 円 O_1 の中心と円 O_2 の中心を結ぶ直線を利用して，点 P は線分 AB を $r_1 : r_2$ に内分することを示せ.

(2) 右図のように半径 3 の円 C_1，半径 4 の円 C_2，半径 5 の円 C_3 が互いに外接している．円 C_2 と円 C_3 の接点を J，円 C_3 と円 C_1 の接点を K，円 C_1 と円 C_2 の接点を L とする．線分 JL の延長と円 C_1 の交点を M とし，線分 JK の延長と円 C_1 の交点を N とする.



このとき，四角形 KLMN の面積は △JLK の面積の何倍であるかを求めよ.

7.5 方べきの定理

□□ **7.17** 四角形 ABCD において，線分 AC と線分 BD の交点を P とし，∠DAC = ∠CBD，AC = 8，AP = 2，PD = 4 とする．このとき BD の長さを求めよ.

(鹿児島大学 2013) 1

基本 7.18 三角形 ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ D，E とし，辺 BE，CD の交点を G とする．4 点 D，B，C，E が同一円周上にあるとき，次のことを証明せよ．

(1) AB = AC である．　(鹿児島大学 2006) 3

(2) 2∠ABG = ∠BAE であるとき，∠BAG = ∠ABG である．

(3) (2) の条件を満たすとき，三角形 ABC は正三角形である．

基本 7.19 次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2009) 11

(1) 図 1 のように，直線 AD と BC は点 P で交わっている．

$$PA \cdot PD = PB \cdot PC$$

が成り立つとき，四角形 ABCD は円に内接することを示せ．

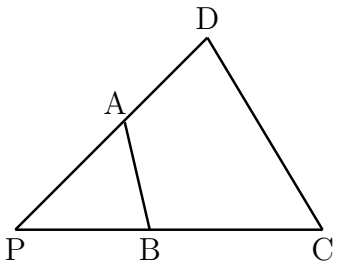


図 1

(2) 図 2 のように，鋭角三角形 ABC の内部に点 P をとり，直線 AP，BP，CP と，辺 BC，CA，AB との交点をそれぞれ D，E，F とする．次の 1)，2) がともに成り立つとき，点 P は △ABC の垂心であることを示せ．

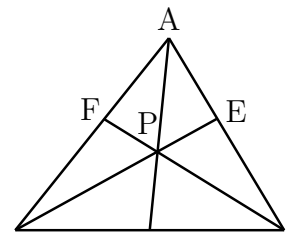


図 2

1) 四角形 AFPE は円に内接する．

2) 四角形 CEPD は円に内接する．

三角形の各頂点から対辺に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わる．
この点を三角形の垂心という．

基本 7.20 円周上の点 A における円の接線上に点 A と異なる点 P をとる．点 P を通る直線が点 P から近い順に 2 点 B，C で円と交わっている．∠APB の二等分線と線分 AB，AC との交点をそれぞれ D，E とする．PA : PB = r : $1-r$ とおき，BD = s，CE = t とおく．ただし，$0 < r < 1$ とする．　(大分大学 2012) 3

(1) 線分 AD の長さを r と s で表しなさい．

(2) PB : PC = 2 : 3 となるとき，r の値を求めなさい．

(3) (2) のとき，線分 AE の長さを t で表しなさい．

基本 7.21 △ABC において AB = 3，BC = 1，∠B = 90° とする．∠B の二等分線と辺 AC の交点を D とし，3 点 A，B，D を通る円と直線 BC の交点のうち点 B と異なる点を E とする．また，直線 AB と直線 DE の交点を F とする．

(1) 線分 AD の長さを求めなさい． (大分大学 2020) 1

(2) 線分 BE の長さを求めなさい．

(3) 線分 AF の長さを求めなさい．

7.6 三角形と円

□□ **7.22** 半径 r の円 O の外部の点 P からこの円に引いた接線の接点の一つを T とする．T を端点とする円 O の直径 TQ をとる．三角形 PTQ の辺 PQ と円 O との交点を R とするとき，PR の長さを求めよ．ただし，∠QPT = 30° とする．
(鹿児島大学 2008) 1

□□ **7.23** △ABC において，∠A = 75°，∠B = 60°，AB = 1 とする．頂点 A を通り辺 BC に垂直な直線と △ABC の外接円との交点を P とする．このとき，線分 AP の長さを求めよ． (鹿児島大学 2010) 1

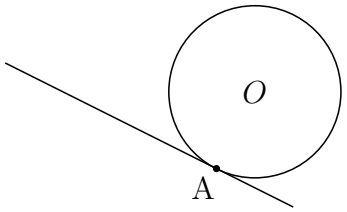
□□ **7.24** 半径 r の円 O′ が半径 $2r$ の円 O に点 P で内接し，さらに円 O′ は円 O の弦 AB に点 Q で接している．線分 PQ の延長が円 O と交わる点を M とする．∠PQB = 60° のとき，線分 QM の長さを求めよ． (鹿児島大学 2015) 1

基本 7.25 △ABC に対し，点 P は辺 AB の中点，点 Q は辺 BC 上の B，C と異なる点，点 R は直線 AQ と直線 CP との交点とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $a = \dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RP}}$，$b = \dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QB}}$ とおくとき，a と b の関係式を求めよ．(宮崎大学 2005) 14

(2) △ABC の外接円 O と直線 CP との点 C 以外の交点を X とする．AP = CR，CQ = QB であるとき，CR : RP : PX を求めよ．

基本 7.26 円 O の周上の点 A において円 O の接線を引く．



その接線上に A と異なる点 B をとる．B から円 O に 2 点で交わるように直線 ℓ を引き，その 2 点のうち B に近い方を C，B から遠い方を D とする．ただし，直線 ℓ は，$\angle \mathrm{ACD} < 90^\circ$ を満たすように引く．また，点 B から直線 AC と直線 AD に下ろした垂線の足をそれぞれ E，F とする．このとき，次の各問に答えよ．(宮崎大学 2021) 12

(1) $\angle \mathrm{BFE} = \angle \mathrm{ADC}$ を示せ．

(2) $\mathrm{BD} \perp \mathrm{EF}$ を示せ．

基本 7.27 円 O の直交する二つの直径 PQ と RS に対して，OR の延長上に点 A を PA = PQ となるようにとる．PA と円 O の交点を M とし，さらに線分 MQ と線分 OA の交点を B とする．このとき，次の各問に答えよ．　(鹿児島大学 2001) 5

(1) 点 M は線分 PA の中点であることを証明せよ．

(2) 線分の長さの比 AP : PB と AR : RB を求めよ．

(3) 線分 PR は $\angle \mathrm{APB}$ の二等分線であることを証明せよ．

基本 7.28 三角形 ABC の内接円の中心を O_1，この内接円と辺 AB，AC，BC との接点をそれぞれ P_1，P_2，P_3 とする．また，辺 AB を B の方向に伸ばした延長線，辺 AC を C の方向に伸ばした延長線，および辺 BC と接する三角形 ABC の傍接円の中心を O_2 とし，この傍接円と辺 AB の延長線，辺 AC の延長線，辺 BC との接点をそれぞれ Q_1，Q_2，Q_3 とする．このとき次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2004) 6

(1) $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$ であることを示せ．

(2) $\mathrm{BP}_3 + \mathrm{BQ}_3 = \mathrm{CP}_3 + \mathrm{CQ}_3$ であることを示せ．

標準 7.29 r を 1 より小さい正の定数とする．平面上の点 A を端点とする半直線 l 上の点で A からの距離が $1-r$，1，$1+r$ となるものをそれぞれ B，C，D とする．BD を直径とする円を描き，A を端点としその円に接する半直線のひとつを m とする．m 上の点で A からの距離が $1-r$，1，$1+r$ となるものをそれぞれ E，F，G とする．E，F を通り l に接する円を描きその接点を P とする．また F，G を通り l に接する円を描きその接点を Q とする． (九大 [文]2001) 5

(1) A と P との間の距離 AP を r で表せ．

(2) CF を r で表せ．

(3) PQ = CF を示せ．

標準 7.30 次の各問に答えよ． (宮大 [医]2012) 7

(1) 右図 I において，点 O を中心とする円の半径を R とする．この円の弦 XY 上の任意の点を P とするとき，等式

$$\mathrm{OP}^2 = R^2 - \mathrm{XP}\cdot\mathrm{YP}$$

が成り立つことを示せ．

図 I

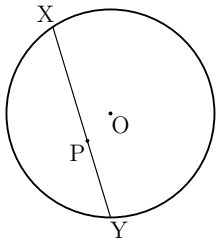
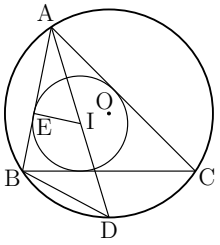


図 II



(2) 右図 II の △ABC の外心を O，内心を I とする．△ABC の外接円，内接円の半径をそれぞれ R，r とする．また，直線 AI と △ABC の外接円の，点 A と異なる交点を D，△ABC の内接円と辺 AB との接点を E とする．このとき，次の (A)，(B)，(C) に答えよ．

(A) DB = DI であることを示せ．

(B) $\mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI} = 2Rr$ であることを示せ．

(C) $\mathrm{OI}^2 = R^2 - 2Rr$ であることを示せ．

7.7 作図

□□ **7.31** 平面上で 2 つの円を考える．共通接線がちょうど 3 本引けるような 2 つの円の位置関係の例を図示せよ．また，3 本の共通接線も描け．

(鹿児島大学 2013) 1

第 8 章　式と証明（数学II）

8.1　二項定理

□□ **8.1** $\left(x-\dfrac{5}{x^2}\right)^6$ を展開したときの x を含まない項を求めよ．

(琉球大学 2003) 5

□□ **8.2** $(x-3y+2z)^7$ の展開式における x^4y^2z の項の係数を求めよ．

(福岡教育大学 2015) 1

□□ **8.3** $(2x-y+z)^8$ の展開式における $x^2y^3z^3$ の係数を求めよ．

(鹿児島大学 2011) 1

基本 **8.4** 次の問いに答えなさい．　(大分大学 2010) 2

(1) 正の整数 n について $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ の展開式に，定数項が含まれるための n の条件を求めなさい．

(2) $\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の展開式における定数項を求めなさい．

基本 **8.5** n を自然数とする．$(1+x)^n$ の展開式を利用して，次の問いに答えなさい．

(大分大学 2006) 1

(1) ${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=127$ を満たす n の値を求めなさい．

(2) 31^{17} を 900 で割ったときの余りを求めなさい．

標準 **8.6** n を 3 以上の自然数とする．以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2008) 2

(1) $2 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，$k(k-1){}_n\mathrm{C}_k=n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ．

標準 8.7 n を 3 以上の奇数として，次の集合を考える．

$$A_n = \left\{ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2013) 1

(1) A_9 のすべての要素を求め，それらの和を求めよ．

(2) ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ が A_n 内の最大の数であることを示せ．

(3) A_n 内の奇数の個数を m とする．m は奇数であることを示せ．

応用 8.8 以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2022) 4

(1) $m \leqq n$ であって，$mn+2 = {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ．

(2) $m \leqq n$ であって，$mn+2 = {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ は，(1) で求めた組に限ることを示せ．

8.2　等式と不等式の証明

□□ **8.9** $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ となることを証明せよ．
(琉球大学 2009) 5

□□ **8.10** $x > 0$，$y > 0$，$x+y = 1$ のとき，不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geqq 9$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合か答えよ．
(宮崎大学 2001) 9

□□ **8.11** a，b，c，x，y，z を実数とする．　(福岡教育大学 2011) 1

(1) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを示せ．

(2) $x+y+z = 1$ のとき，$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ．

基本 8.12 次の問いに答えよ. (福岡教育大学 2010) 2

(1) 恒等式 $\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=x^3+y^3+z^3-3xyz$ が成り立つことを示せ.

(2) $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$ のとき, $\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのは $a=b=c$ のときであることを示せ.

(3) 一辺の長さがそれぞれ a, b, c の三角形の面積は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で与えられることが知られている. ただし, $s=\frac{a+b+c}{2}$ とする. 三辺の長さの和が $2s$ $(s>0)$ であるような三角形の面積は $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ 以下であることを示せ. また, 面積が $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となるのは, 三角形が正三角形のときであることを示せ.

標準 8.13 0 でない 2 つの整式 $f(x)$, $g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする.

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7$$
$$g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

以下の問いに答えよ. (九大 [文]2019) 4

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ.

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ.

標準 8.14 次の各問いに答えよ. (鹿児島大学 2005) 3

(1) 2 個の負でない実数 a, b に対して, $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{a+b}{1+a+b}$ が成り立つことを示せ.

(2) 負でない実数 a, b, c について, $a+b \geqq c$ ならば

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ.

(3) n を 2 以上の整数とする. n 個の負でない実数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n と負でない実数 c について, $a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq c$ ならば

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_n} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ.

第 9 章　複素数と方程式（数学II）

9.1　複素数

□□ **9.1** 次の方程式を解け．

$$(1+i)x^2-(1+3i)x-2+2i=0$$

ただし，i は虚数単位，x は実数とする．　(琉球大学 2008) 5

□□ **9.2** a，b を実数とする．x の方程式 $x^2+ax+4=0$ が解 $-1+bi$ をもつとき，a，b の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．　(琉球大学 2009) 5

9.2　剰余の定理・因数定理

□□ **9.3** 整式 $P(x)$ は，$P\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{8}{3}$ と $P\left(-\dfrac{7}{2}\right)=-\dfrac{5}{2}$ を満たす．
$P(x)$ を $6x^2+11x-35$ で割った余りを求めよ．　(琉球大学 2016) 5

基本 9.4 3 次の整式 $P(x)$ は，次の条件 1)，2)，3) を満たしている．

1) $P(x)$ の x^3 の係数は 1 である．
2) $P(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れる．
3) $P(x)$ を $x+1$ で割った余りと，x^2-x-2 で割った余りは等しい．

このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2013) 11

(1) $P(x)$ を求めよ．
(2) $\{P(x)\}^2$ を $(x+1)^2$ で割った余りを求めよ．

標準 9.5　$P(x)$ は，x^5 の係数が 1 であるような 5 次式とする．$P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの商を $Q(x)$，$Q(x)$ を $x-2$ で割ったときの商を $R(x)$ とおく．

$$P(-2)=-10,\quad P(3)=5,\quad Q(2)=Q(-2)=R(-3)=2$$

であるとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2011) 5

(1)　$P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$R(x)$ を求めよ．

(3)　$P(x)$ を求め，展開して降べきの順に整理せよ．

標準 9.6　x についての整式 $P(x)$ は，$(x+1)^2$ で割ると $-x+4$ 余り，$(x-1)^2$ で割ると $2x+5$ 余るとする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮大 [医]2019) 9

(1)　$P(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(3)　$P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

9.3　高次方程式

□□ **9.7**　3 次方程式 $x^3-ax-6=0$ が $x=-1$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ．　(琉球大学 2015) 5

□□ **9.8**　a，b，c を実数とする．$a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ である．a，b，c のうち少なくとも 1 つは 1 に等しいことを示せ．　(福岡教育大学 2014) 1

□□ **9.9**　4 次方程式 $x^4+ax^3+14x^2+16x+b=0$ が $x=-2$ を 2 重解としてもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．　(福岡教育大学 2013) 1

基本 9.10　次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2016) 2

(1)　整式 $P(x)$ を 0 でない整式 $Q(x)$ で割った余りを $R(x)$ とおく．方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解は方程式 $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解であることを示せ．また逆に方程式 $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解は方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解であることを示せ．

(2)　整式 $P(x)$，$Q(x)$ を

$$P(x)=x^4+2x^3+x^2-1,\quad Q(x)=x^3+2x^2-1$$

とおく．方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解をすべて求めよ．

9.4 解と係数の関係

□□ **9.11** x についての 3 次方程式 $2x^3+ax^2+bx+c=0$ の 1 つの解が $1-2i$ であるとき，$1+2i$ もこの方程式の解であることを示せ．ただし，a，b，c は実数の定数とし，i は虚数単位とする． (福岡教育大学 2008) 5

□□ **9.12** 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-14=0$ の 1 つの解が $2+\sqrt{3}i$ であるとき，実数の定数 a，b の値を求めよ． (琉球大学 2011) 5

基本 9.13 以下の問いに答えよ． (佐賀大学 2009) 9

(1) 次を満たす 2 数 x，y を求めよ．

$$x+y=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$$

(2) 次を満たす 3 数 x，y，z を求めよ．

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3,\quad xyz=1$$

標準 9.14 k を実数とし，整式 $f(x)$ を

$$f(x)=x^4+6x^3-kx^2+2kx-64$$

で定める。方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $x-2$ で割り切れることを示せ． (九大 [文]2022) 3

(2) 方程式 $f(x)=0$ は負の実数解をもつことを示せ．

(3) 方程式 $f(x)=0$ のすべての実数解が整数であり，すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ．

9.5 その他の方程式・不等式

□□ **9.15** 方程式 $x^3-1=0$ の虚数解の一つを ω とするとき，$\omega^4+\omega^2+1$ の値を求めよ． (鹿児島大学 2008) 1

□□ **9.16** a を 0 でない実数とする．x についての 3 次方程式 $x^3-a^3=0$ の 2 つの虚数解を α，β とするとき，$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ の値を求めよ． (福岡教育大学 2012) 5

□□ **9.17** 次の (1)，(2)，(3) に答えよ．　(鹿児島大学 2014) 2

(1) $t = x + \dfrac{1}{x}$ とおく．このとき，$x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ と $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ をそれぞれ t についての多項式で表せ．

(2) $\dfrac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2}$ を t についての多項式で表せ．

(3) 4 次方程式 $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = 0$ の解を全て求めよ．

基本 9.18 次の問いに答えよ．　(琉球大学 2002) 5

(1) 複素数 $1 + 2i$ を解にもつ実数係数の x の 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 であるものを求めよ．

(2) a，b を実数とする．4 次方程式 $x^4 - x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ が $1 + 2i$ を解にもつとき，a，b の値を求めよ．

標準 9.19 次の問に答えよ．

(1) p，q を正の実数とし，正の実数 α，β が

$$\alpha - \beta = q, \quad \alpha\beta = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

を満たすとする．このとき，$\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$ は，方程式

$$x^3 + px - q = 0$$

の解であることを示せ．　(佐大 [医]2020) 5

(2) 3 次方程式 $x^3 + 6x - 2 = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつ．この実数解を求めよ．ただし，ただ 1 つの実数解をもつことは証明しなくてよい．

(3) 実数

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{28}{27}}}$$

は有理数である．この有理数の値を求めよ．

標準 9.20 i を虚数単位として，次の問いに答えよ．　(長崎大学 2008) 2

(1) 3 次方程式 $x^3 = 1$ を解け．

(2) $\alpha = m + \sqrt{7}\,ni$ とするとき，$\alpha^3 = 225 + 2\sqrt{7}\,i$ が成り立つ．このような整数 m，n の組を求めよ．

(3) $\beta^3 = 225 + 2\sqrt{7}\,i$ を満たす複素数 β をすべて求めよ．

9.6 問題研究

9.6.1 無理数を解にもつ有理係数の方程式

Q を有理数，$\sqrt{q}$ を無理数とするとき

$$Q[\sqrt{q}] = \{u + v\sqrt{q} \,|\, u, v \in Q\}$$

を考える．$x, \overline{x} \in Q[\sqrt{q}]$ を

$$\begin{aligned} x &= u + v\sqrt{q} \\ \overline{x} &= u - v\sqrt{q} \end{aligned}$$

と定義すると，$k \in Q,\ x, y \in Q[\sqrt{q}]$ について，次の 3 式が成り立つ．

$$\begin{cases} \overline{k} = k \\ \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} \\ \overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y} \end{cases} \tag{9.1}$$

第 3 式から　$\overline{x^2} = (\overline{x})^2$，　さらに　$\overline{x^n} = (\overline{x})^n$　(n は自然数)．

例えば，$a, b, c, d \in Q$ である 3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{9.2}$$

が $z \in Q[\sqrt{q}]$ を解をもつとき，$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ であるから，(9.1) により

$$\begin{aligned} \overline{az^3 + bz^2 + cz + d} &= \overline{0} \\ \overline{az^3} + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \overline{d} &= 0 \\ \overline{a}\,\overline{z^3} + \overline{b}\,\overline{z^2} + \overline{c}\,\overline{z} + d &= 0 \\ a(\overline{z})^3 + b(\overline{z})^2 + c\overline{z} + d &= 0 \end{aligned}$$

これから $\overline{z}$ が (9.2) の解であることが分かる．

(9.1) において，k を実数，x, y を複素数とし，x と $\overline{x}$ を互いに共役な複素数と考えても成り立つ．ゆえに，a, b, c, d を実数とするとき，(9.2) の方程式が複素数 z を解にもつとき，共役な複素数 $\overline{z}$ も (9.2) の解であることがわかる．
なお，n 次方程式についてもこれらのことが成立する．

第 10 章　図形と方程式（数学II）

10.1　点と直線

□□ **10.1** 放物線 $y = x^2 - x$ の頂点を P とする．点 Q はこの放物線上の点であり，原点 O$(0,\ 0)$ とも点 P とも異なるとする．∠OPQ が直角であるとき，点 Q の座標を求めよ．（長崎大学 2016）1

基本 10.2 t を実数とし，点 P の座標を $(t, -t^2)$ とする．点 P と直線 $l_1 : 2x+y+3 = 0$ の距離を d_1 とし，点 P と直線 $l_2 : 2x-y+4 = 0$ の距離を d_2 とする．また，$d = d_1+d_2$ とおく．（大分大学 2012）7

(1) $t = 2$ のとき，d の値を求めなさい．

(2) 点 P が直線 l_1 上またはその上側にあるための t の条件を求めなさい．

(3) d の最小値とそのときの t の値を求めなさい．

標準 10.3 $a > 1$，$a > p > 0$ とする．2 直線 $l_1 : y = 2x - 1$，$l_2 : y = a$ の交点を S，l_1 と x 軸の交点を T とし，y 軸上の点 P$(0,\ p)$，l_1 上の点 A$(1,\ 1)$，l_2 上の点 Q$(q,\ a)$ をとる．∠PQS $= 135°$，∠AQS $= 45°$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) p，q それぞれを a で表せ．（熊大 [文]2002）3

(2) ∠PAT $=$ ∠QAS であるとき，p，a それぞれの値を求めよ．

10.2　円の方程式

基本 10.4 座標平面上に原点 O$(0,\ 0)$，点 A$(-1,\ 3)$，点 B$(4,\ 8)$ がある．さらに，2 次関数 $y = f(x)$ のグラフ G と円 C はそれぞれ 3 点 O，A，B を通るものとする．このとき，次の各問に答えよ．（宮崎大学 2010）2

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 円 C の中心の座標および半径を求めよ．

(3) グラフ G と円 C との交点のうち，3 点 O，A，B 以外の点の座標を求めよ．

基本 10.5 座標平面上に 2 点 A(1, 3)，B(5, −5) があり，直線 AB に関して原点 O と対称な点を C とする．このとき，次の問いに答えなさい．　(大分大学 2009) 4

(1) 点 C の座標を求めよ．

(2) 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の外接円の方程式とその中心の座標を求めよ．

(3) 点 (0, 5) から △ABC の外接円に引いた接線の方程式を求めよ．

基本 10.6 a を実数とする．円 $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ と直線 $y=ax+1$ が異なる 2 点 A，B で交わっている．　(大分大学 2015) 1

(1) a の値の範囲を求めなさい．

(2) 弦 AB の長さが最大になるときの a の値を求めなさい．

(3) 弦 AB の長さが 2 になるときの a の値を求めなさい．

基本 10.7 2 つの円 $C_1: x^2+y^2=4$，$C_2: (x-4)^2+y^2=1$ の両方に接する直線は全部で 4 本ある．この 4 本の直線の方程式を求めよ．　(宮崎大学 2005) 2

標準 10.8 直線 $l_1: y=mx+3$ $(m>0)$ が，点 A(5, 3) を中心とする円 C_1 に接している．その接点を P とする．直線 l_1 と y 軸との交点を Q，2 点 A，P を通る直線 l_2 と x 軸との交点を R とする．　(大分大学 2011) 2

(1) 円 C_1 の半径 r を m を用いて表しなさい．

(2) 円 C_1 が x 軸と異なる 2 点で交わるような m の値の範囲を求めなさい．

(3) 線分 QR の中点 S の座標を求めなさい．

(4) 3 点 P，Q，R を通る円 C_2 の中心と円 C_1 の中心との距離を d とする．d の最小値とそのときの m の値を求めなさい．

標準 10.9 平面上の 3 点 A(0, 2)，B(−1, 0)，C(4, 0) を頂点とする △ABC について，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2001) 2

(1) 外接円の中心と半径を求めよ．

(2) 内接円の中心と半径を求めよ．

> 三角形の 3 頂点を通る円をその三角形の**外接円**という．
> また，三角形の 3 辺すべてに接する円をその三角形の**内接円**という．

標準 10.10 座標平面上の 3 つの円 C_1，C_2，C_3 は，それぞれ中心が (0, 0)，(0, 3)，(4, 0)，半径が r_1，r_2，r_3 であり，どの 2 つの円も互いに外側で接しているとする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2004) 3

(1) r_1，r_2，r_3 の値を求めよ．

(2) 円 C が C_1，C_2，C_3 のそれぞれと互いに外接しているとき，円 C の半径 r と中心の座標 (a, b) を求めよ．

10.3 軌跡の方程式

基本 10.11 円 $C : x^2+y^2-4kx+2ky-5=0$ について，次の問いに答えよ．
(熊大 [文]2003) 3

(1) C は k の値に関係なくある 2 つの点 A，B を通る．A，B の座標を求めよ．ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする．

(2) PA : PB = 2 : 1 となる点 P の軌跡を求めよ．

基本 10.12 座標平面上の 3 点 P(2, 1)，$\mathrm{Q}\left(-\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$，O(0, 0) を通る円を C_1 とする．このとき，次の問いに答えよ．
(佐賀大学 2009) 5

(1) 円 C_1 の方程式を求めよ．

(2) 円 C_1 に内接する正三角形の面積を求めよ．

(3) 円 $C_2 : x^2+y^2=5$ の円周上を動く点 M に対して，3 点 M，P，Q が三角形を作るとする．このとき，△MPQ の重心の軌跡を求めよ．

標準 10.13 座標平面上に，2 つの放物線

$$C_1 : y=(x-t)^2+t \qquad C_2 : y=-x^2+4$$

がある．ただし，t は実数とする．このとき，次の各問いに答えよ．
(宮崎大学 2012) 8

(1) C_1，C_2 が異なる 2 点で交わるとき，t の値の範囲を求めよ．

(2) (1) のとき，C_1 と C_2 の 2 つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を図示せよ．

標準 10.14 円 $C_1 : x^2+y^2=1$ と円 $C_2 : (x-2)^2+(y-4)^2=5$ とに点 P から接線を引く．P から C_1 の接点までの距離と C_2 の接点までの距離との比が 1 : 2 になるとする．このとき，P の軌跡を求めよ．
(熊大 [文]2004) 1

標準 10.15 座標平面上の直線 ℓ を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく．直線 ℓ と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする．ただし，a，b は ℓ と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする．以下の問いに答えよ．
(熊大 [文]2019) 4

(1) 直線 ℓ と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ．

(2) 点 A(1, −2)，点 B(−3, 0) に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ．

(3) △APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ．

標準 10.16 座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ がある．A を通る傾き t の直線と C との 2 つの交点を $\mathrm{Q}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}_2(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，$x_1 < x_2$ とする．また，C の Q_1 における接線を ℓ_1，Q_2 における接線を ℓ_2 とする．ℓ_1 と ℓ_2 は交わり，その交点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $x_2 - x_1$ と $y_2 - y_1$ を，それぞれ t を用いて表せ．　(宮崎大学 2022) 5

(2) $X = -2t$ であることを示せ．

(3) t がすべての実数値をとって変化するとき，点 P の軌跡を求めよ．

10.4　不等式の表す領域

□□ **10.17** xy 平面で次の不等式で表される領域を図示せよ．(鹿児島大学 2016) 1

$$|x| \leqq y \leqq 1 - |x|$$

□□ **10.18** 実数 x，y が $(x-2)^2 + y^2 \leqq 3$ を満たすとき，$\dfrac{y-7}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ．　(福岡教育大学 2013) 1

□□ **10.19** a を正の実数とするとき，座標平面において，連立不等式

$$x^2 + y^2 \leqq 4ax, \quad x^2 + y^2 \geqq 2ax, \quad \sqrt{3}\,x - y \leqq 2\sqrt{3}\,a$$

の表す領域を図示せよ．　(福岡教育大学 2006) 1

基本 10.20 座標平面上の 3 点を $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 0)$ とし，△ABC の内部の点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とする．ただし，点 P は △ABC の周上にはないものとする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2007) 3

(1) 直線 AB に関して，点 P と対称な点 Q の座標を求めよ．

(2) 直線 BC に関して，点 P と対称な点を R とするとき，2 点 Q，R を通る直線 l の方程式を求めよ．

(3) 原点 O と直線 l の距離が $\dfrac{4}{5}$ より小さくなるような点 P のとりうる範囲を図示せよ．

基本 10.21 x，y が不等式 $|x-2| + |y-2| \leqq 2$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) この不等式の表す領域を図示しなさい．　(大分大学 2010) 1

(2) $x + 2y$ の最大値と最小値を求めなさい．

基本 10.22 次の問いに答えよ. (鹿児島大学 2009) 2

(1) 直線 $4x-3y=a$ が放物線 $y=-x^2+6x-5$ と接するとき，a の値と接点の座標を求めよ.

(2) 点 $(x,\ y)$ が連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 25$，$y \leqq -x^2+6x-5$ の表す領域を動くとき，$4x-3y$ の最小値と最大値を求めよ.

基本 10.23 座標平面上で，x 軸までの距離と直線 $y=\dfrac{3}{4}x$ までの距離の和が 1 以下である点全体からなる領域を D とする．このとき，次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を図示せよ. (宮崎大学 2003) 2

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 上を動くとき，$x+y$ が最大となる点の座標を求めよ.

基本 10.24 直線 $l: y=x+1$ と曲線 $C: y=2x^2-4x+1$ との交点を P，Q とするとき，次の各問に答えよ．ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいものとする. (宮崎大学 2005) 6

(1) 直線 l に平行で曲線 C に接する直線を m とするとき，点 P と直線 m との距離を求めよ.

(2) 曲線 C と (1) における直線 m との接点を R とする．このとき，△PQR の面積を求めよ.

(3) 点 $(x,\ y)$ が直線 l と曲線 C で囲まれる領域にあるとき，$x+y$ の最小値を求めよ．ただし，領域は境界を含むものとする.

基本 10.25 座標平面において，原点 O$(0,\ 0)$，点 A$(1,\ 0)$，点 B$(1,\ 2)$ を頂点とする△OAB の内部またはその周上に点 P$(a,\ b)$ がある．点 P から 3 辺 OA，AB，BO までの距離の和を k とする．このとき，次の各問に答えよ. (宮崎大学 2008) 3

(1) k を a と b についての 1 次式で表せ.

(2) k の最大値と最小値を求めよ.

標準 10.26 点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2-1 \\ y \leqq x+1 \end{cases}$$

の表す領域を動くとき，x^2+y^2-4y の最大値と最小値を求めよ. (熊大 [文]2001) 1

標準 10.27 連立不等式 $\begin{cases} y \geqq |2x-3| \\ y \leqq x \end{cases}$ の表す領域を D とする．

(1) 領域 D を図示しなさい．　(大分大学 2013) 2

(2) a を 2 でない正の定数とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+y$ の最大値と最小値，およびそのときの点 $(x,\ y)$ を求めなさい．

(3) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，x^2+y^2 の最小値とそのときの点 $(x,\ y)$ を求めなさい．

標準 10.28 座標平面上で，次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$x+2y \leqq 5, \quad 3x+y \leqq 8, \quad -2x-y \leqq 4, \quad -x-4y \leqq 7$$

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$x+y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする．以下の問いに答えよ．　(九大 [文]2013) 2

(1) 点 Q および点 R の座標を求めよ．

(2) $a>0$ かつ $b>0$ とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする．このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ．

第 11 章　三角関数（数学II）

11.1　三角関数

□□ **11.1** $\dfrac{\sin 105^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}$ の値を求めよ．　(福岡教育大学 2004) 5

□□ **11.2** $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$，$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ とする．このとき，$\sin\theta - \cos\theta$ の値を求めよ．　(宮崎大学 2006) 2

11.2　加法定理

□□ **11.3** θ が $\tan\theta = \dfrac{1}{5}$ および $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ を満たすとき，$\tan 2\theta$ と $\tan 4\theta$ の値を求めよ．また，$4\theta = \dfrac{\pi}{4} + \alpha$ とおくとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ．　(長崎大学 2011) 5

□□ **11.4** 鋭角三角形の 3 つの角の大きさを α，β，γ とする．このとき，$\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$ を $\tan\alpha$，$\tan\beta$ を用いて表せ．　(福岡教育大学 2007) 1

基本 11.5 次の問いに答えよ．　(熊大 [文]2005) 2

(1) 三角関数の加法定理またはド・モアブルの定理を用いて，任意の角 θ に対し，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

(2) $\theta = 18^\circ$ のとき，$\cos 2\theta = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ．

(3) $\sin 18^\circ$ の値を求めよ．

基本 11.6 $0^\circ \leqq \alpha$，$\beta < 360^\circ$ とする．このとき，次の 2 つの等式

$$\sin\alpha = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \sin\beta$$

が同時に成り立つための必要十分条件を α と β の関係式で表せ．(宮崎大学 2005) 10

基本 11.7 x，y を実数とするとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2003) 1

(1) 等式 $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2(x+y)=2-\cos x\cos y\cos(x+y)$ が成り立つことを示せ．

(2) $x>0$，$y>0$，$x+y<\pi$ とする．$\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2(x+y)>2$ であるとき，不等式 $x+y>\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．

標準 11.8 整数 m，n が $1\leqq m<n$ を満たすとき，次の問いに答えよ．
(熊大 [文]2004) 2

(1) $x>3$ ならば，不等式

$$(mx-1)(nx-1)>x^2+1$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\tan\alpha=\dfrac{1}{m}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{n}$ を満たし，かつ $\tan(\alpha+\beta)$ の値が整数となる角度 α，β があるとする．このような，$(m,\ n)$ の組をすべて求めよ．

標準 11.9 平面上の点 $\mathrm{C}(c,\ 0)$ を通る直線 $l_1:y=m(x-c)$ を考える．ただし，c，m は定数で，$c>0$，$m>0$ とする．直線 l_1 上で x 軸より上側に点 A，x 軸上で点 C より右側に点 B をとるとき，次の問いに答えよ．　(長崎大学 2002) 2

(1) 原点 O を通り，$\angle\mathrm{ACB}$ の 2 等分線と平行な直線 l_2 の方程式を求めよ．

(2) 2 直線 l_1，l_2 の交点 P の座標と線分 CP の長さを求めよ．

(3) 直線 l_1 の傾き m が 1 から $\sqrt{3}$ まで変化するとき，点 P が描く曲線の長さを求めよ．

発展 11.10 関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して，つねに $f(x+p)=f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい，p を周期という．正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という．たとえば，関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である．このとき，次の問いに答えよ．　(九大 [理]2007) 5

(1) $y=|\sin x|$ のグラフをかき，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ．

(2) 自然数 m，n に対して関数 $f(x)$ を $f(x)=|\sin mx|\sin nx$ とおく．p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left(\dfrac{p}{2}\right)=f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=0$ が成り立つことを示せ．また，このとき mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍であることを示せ．

(3) m，n は 1 以外の公約数をもたない自然数とする．(2) の結果を用いて関数 $|\sin mx|\sin nx$ の基本周期を求めよ．

11.3 方程式・不等式

□□ **11.11** $4\cos^3\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$ を満たす θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ を求めよ.
(福岡教育大学 2003) 5

□□ **11.12** 不等式 $4\sin x \geqq \dfrac{3}{\sin x}$ $(0 < x < 2\pi,\ x \neq \pi)$ を解け.
(福岡教育大学 2005) 1

□□ **11.13** $\dfrac{\pi}{6} \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，等式

$$(1+\sqrt{3})\sin x \tan x = 2\sqrt{3}\sin x + (1-\sqrt{3})\cos x$$

を満たす x の値を求めよ. (宮崎大学 2008) 1

□□ **11.14** $0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$ のとき，連立方程式

$$3\sin x - \sin y = \sqrt{3}, \quad 3\cos x + \cos y = -1$$

を解け. (福岡教育大学 2014) 1

□□ **11.15** $0° \leqq \theta \leqq 360°$ のとき，方程式 $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$ を解け.
(琉球大学 2005) 5

□□ **11.16** $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき

$$\cos 2x + \cos x + 1 > 0$$

を満たす x の範囲を求めよ. (福岡教育大学 2016) 1

□□ **11.17** $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で,

$$5\sin^2\theta + 14\cos\theta - 13 \geqq 0$$

を満たす θ の中で最大のものを α とするとき，$\cos\alpha$ と $\tan 2\alpha$ の値を求めよ.
(鹿児島大学 2010) 2

□□ **11.18** 方程式 $\sin 3x + \cos 3x = 0$ を解け. ただし，$0 \leqq x \leqq \pi$ とする.
(福岡教育大学 2006) 1

□□ **11.19** $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け. (宮崎大学 2009) 1

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

□□ **11.20**　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，不等式 $\sin 3x + \sin 2x < \sin x$ を解け．
(長崎大学 2016) 1

基本 11.21　関数 $f(\theta) = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$y = f(\theta)$ のグラフをかけ．　(佐賀大学 2009) 10

(2)　$-\pi < \theta < \pi$ のとき，方程式 $f(\theta) = 1$ を解け．

(3)　$-\pi < \theta < \pi$ のとき，不等式 $\sin\theta > \sqrt{3}\cos\theta + 1$ を解け．

応用 11.22　実数 θ に対し，関数 $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を，

$$f(\theta) = (\cos\theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta), \quad g(\theta) = (\sin\theta)(\sin 2\theta)(\sin 3\theta)$$

とおくとき，次の (1)，(2) に答えよ．　(宮大 [医]2013) 7

(1)　関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ は，それぞれ

$$f(\theta) = p + q\cos 2\theta + r\cos 4\theta + s\cos 6\theta$$
$$g(\theta) = t + u\sin 2\theta + v\sin 4\theta + w\sin 6\theta$$

のように表されることを示せ．ただし，p，q，r，s，t，u，v，w は θ によらない定数とする．

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，方程式 $f(\theta) = g\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ を満たすような θ をすべて求めよ．

11.4　最大・最小

□□ **11.23**　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta - \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．　(福岡教育大学 2013) 1

基本 11.24　a を実数とする．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y = a\cos\theta - 2\sin^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ $M(a)$，$m(a)$ とする．以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2008) 1

(1)　$M(a)$ と $m(a)$ を求めよ．

(2)　a が実数全体を動くとき，$M(a)$ の最小値と $m(a)$ の最大値を求めよ．

基本 11.25　θ の範囲が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であり，$x = \sin\theta + \cos\theta$ とする．

(1)　$x = 0$ となる θ の値を求めよ．　(佐賀大学 2002) 5

(2)　x の値の範囲を求めよ．

(3)　a を実数とするとき，$y = a\sin\theta - \sin\theta\cos\theta + a\cos\theta$ を，a，x を用いて表せ．

(4)　y の最小値を求めよ．

基本 11.26 a，b を定数とし，$a > b$ をみたすものとする．

$$f(x) = a\cos^2 x + \sqrt{3}(a-b)\cos x \sin x + b\sin^2 x$$

とするとき，次の問いに答えよ． (熊大 [文]2009) 3

(1) $f(x)$ の最大値が 6，最小値が 2 となるときの a，b を求めよ．

(2) (1) で求めた a，b に対して，$f(x)$ を考える．$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$f(x) > 5$ となる x の範囲を求めよ．

基本 11.27 次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2003) 1

(1) a，b はともに 0 でない定数とするとき，

$$a\cos\theta - b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha)$$

が成り立つことを示せ．ここで α はある定数である．

(2) $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$ を (1) を用いて cos の式で表せ．α の値も求めよ．

(3) $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$\cos\theta - \sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ．そのときの θ の値もそれぞれ求めよ．

標準 11.28 関数 $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x$ について，以下の問いに答えよ． (熊大 [理]2010) 1

(1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = t$ とおいて，y を t の式で表せ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，y の最大値および最小値を求めよ．

標準 11.29 $0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ で定義された x の関数

$$f(x) = \log_2(\cos x + \sqrt{3}\sin x + 2) + 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x + 2$$

について，次の問いに答えよ． (鹿児島大学 2006) 1

(1) $t = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ とおく．$0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ のとき，t の値の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ を (1) の t を用いて表せ．

(3) (2) で求めた t の式を $g(t)$ とおく．この $g(t)$ は $0 \leqq t_1 < t_2$ ならば $g(t_1) < g(t_2)$ を満たすことを示せ．

(4) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

11.5　図形への応用

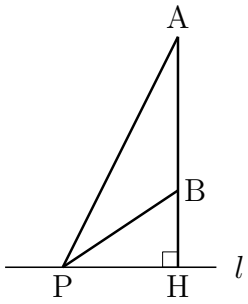
基本 11.30　三角形 ABC は $\mathrm{AB}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{AC}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ を満たしている．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2014) 9

(1) 角 A の大きさを求めよ．

(2) $\sin B$ と $\cos B$ の値を求めよ．

(3) 加法定理を用いて，角 B の大きさを求めよ．

基本 11.31　右図のように，直線 l 上にない点 A，AH$\perp l$ となる l 上の点 H，線分 AH 上の点 B をとる．点 P は直線 l 上を点 H から左へ動くものとする．



$$\mathrm{AH}=a,\quad \mathrm{BH}=b\ (a>b>0),$$
$$\mathrm{PH}=x\ (x>0),\quad \angle\mathrm{APB}=\theta$$

とおくとき，次の問に答えよ．　(宮崎大学 2002) 1

(1) $\tan\theta$ を a，b，x を用いて表せ．

(2) θ が最大となる x を a，b を用いて表せ．ただし，正の数 p，q に対して

$$\frac{p+q}{2}\geqq\sqrt{pq}\quad(\text{等号成り立つのは}\ p=q\ \text{のときに限る.})$$

が成り立つことを用いてもよい．

基本 11.32　座標平面上に，原点 O を中心とし，4 点 A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，C$(-1,\ 0)$，D$(0,-1)$ を通る円がある．点 P を弧 AB 上にとり，$\angle\mathrm{POA}=2\theta$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq45^\circ)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2006) 9

(1) PC の長さを θ を用いて表せ．

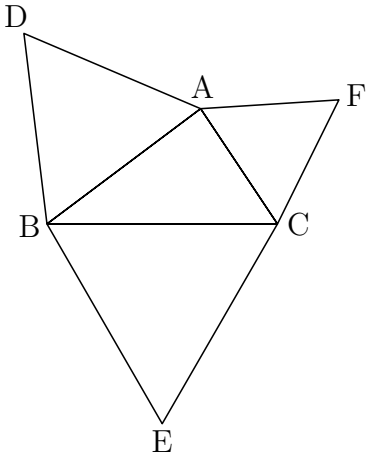
(2) $\mathrm{PA}+\mathrm{PC}-\mathrm{PD}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

標準 11.33 下図のように，△ABC の外部に 3 点 D，E，F を △ABD，△BCE，△CAF がそれぞれ正三角形になるようにとる．△ABC の面積を S，3 辺の長さを BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とおくとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2016) 1

(1) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とおくとき，$\sin\theta$ を b，c，S を用いて，$\cos\theta$ を，a，b，c を用いて表せ．

(2) DC^2 を a，b，c，S を用いて表し，$\mathrm{DC}^2 = \mathrm{EA}^2 = \mathrm{FB}^2$ が成り立つことを示せ．

(3) 3 つの正三角形の面積の平均を T とおくとき，DC^2 を S と T を用いて表せ．



標準 11.34 ∠A が直角の二等辺三角形 ABC を考える．辺 BC の中点を M とし，線分 AM を 1 : 3 に内分する点を P とする．また，点 P を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB，AC との交点をそれぞれ Q，R とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{QMR}$ を求めよ． (九大 [文]2009) 1

(2) ∠QMR の 2 倍と ∠QMB の大小を判定せよ．

標準 11.35 座標平面上の x 軸の正の部分にある点 A と y 軸の正の部分にある点 B を考える．原点 O から点 A，B を通る直線 l におろした垂線と，直線 l との交点を P とする．OP $= 1$ であるように点 A，B が動くとき，次の問に答えよ．

(琉球大学 2009) 1

(1) $\theta = \angle\mathrm{AOP}$ とするとき，OA + OB − AB を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ．

(2) OA + OB − AB の最小値を求めよ．

標準 11.36 $\alpha > 1$, $x > 0$ とする．O を原点とする座標平面上に 3 点 A$(0,\ 1)$, B$(0,\ \alpha)$, P$(\sqrt{x},\ 0)$ がある．次に答えよ．　(九工大 [工]2012) 3

(1) $\sin\angle$OPB と $\sin\angle$APB を α と x を用いて表せ．

(2) $\sin\angle$APB を x の関数と考え，その関数を $f(x)$ とおく．$f(x)$ の最大値を α を用いて表せ．

(3) (2) で求めた最大値が $\dfrac{1}{2}$ となる α を求めよ．

標準 11.37 △ABC における ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とし，A から D へのばした半直線と △ABC の外接円との交点を E とする．∠BAD の大きさを θ とし，BE $= 3$，$\cos 2\theta = \dfrac{2}{3}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．(宮崎大学 2020) 8

(1) 線分 BC の長さを求めよ．

(2) △BEC の面積を求めよ．

(3) AD : DE $= 4 : 1$ のとき，線分 AB，AC の長さを求めよ．ただし，AB $>$ AC とする．

応用 11.38 半径 1 の円に外接する △ABC について，$\angle\mathrm{CAB} = 2x$，$\angle\mathrm{ABC} = 2y$，$\angle\mathrm{BCA} = 2z$ とする．△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ．
(熊大 [医]2017) 1

(1) $S = \dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\tan y} + \dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ．

(2) $z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x，y を求めよ．

応用 11.39 鋭角三角形 △ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A, B, C とする．△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする．
(九大 [文]2014) 3

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C, \quad \mathrm{OE} = R\cos A$$

を証明せよ．

(2) G と O が一致するならば △ABC は正三角形であることを証明せよ．

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 3\mathrm{OE}, \quad \tan B\tan C = 3$$

を証明せよ．

応用 11.40 いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [理]2008) 5

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする．円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく．ただし，$0 < \theta < \pi$ とする．このとき，$\sin\theta$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ．

応用 11.41 正三角形 PQR の 3 辺 PQ，QR，RP 上にそれぞれ点 A，B，C をとる．△PCA，△QAB，△RBC の外接円の中心をそれぞれ O_1，O_2，O_3，その半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 とする．△ABC の 3 辺の長さを $a = BC$，$b = CA$，$c = AB$ とするとき，次の問いに答えよ． (熊大 [理]2003) 2

(1) r_1，r_2，r_3 を a，b，c で表わせ．

(2) $\triangle O_1O_2O_3$ は正三角形であることを示せ．

応用 11.42 円周率 π に関して次の不等式が成立することを証明せよ．
ただし，数値 $\pi = 3.141592\cdots$ を利用して直接比較する解答は 0 点とする．
(分大 [医]2010) 7

$$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$$

第 12 章　指数関数と対数関数（数学 II）

12.1　指数関数

□□ **12.1** 方程式 $2\cdot 8^x - 3\cdot 4^{x+1} + 5\cdot 2^{x+1} + 24 = 0$ を満たすような実数 x をすべて求めよ．　(宮崎大学 2013) 2

□□ **12.2** 不等式 $3^{3x+3} - 7\cdot 3^{2x+1} - 7\cdot 3^x + 1 < 0$ を解け．　(福岡教育大学 2003) 5

□□ **12.3** a を実数とする．x に関する方程式 $4^x - 2^{a+x} + 2^a = 0$ が実数解を持つように a の値の範囲を求めよ．　(琉球大学 2010) 6

基本 **12.4** a，b を実数とし，$f(x) = 2^{2x-1} - a\cdot 2^x + b$ とおく．　(大分大学 2014) 5

(1) $a = 3$，$b = 4$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ の解を求めなさい．

(2) $a > 0$，$b = 0$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ の解を求めなさい．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，点 $(a,\ b)$ の表す領域を図示しなさい．

標準 **12.5** 次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2015) 2

(1) x がすべての実数を動くとき，$2^x + 2^{-x}$ の最小値を m とする．次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) m の値を求め，$2^x + 2^{-x} = m$ を満たす x を求めよ．

(イ) $k > m$ のとき，$2^x + 2^{-x} = k$ を満たす x をすべて求めよ．

(2) a を定数とし，$a \leqq 2$ とする．方程式

$$4^x + 4^{-x} - 3a\cdot 2^x - 3a\cdot 2^{-x} + 2(a^2 + 1) = 0$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

12.2　対数の値

□□ **12.6**　$\log_2 \dfrac{1}{6} + \log_2 \dfrac{3}{4}$ の値を求めよ．　(琉球大学 2015) 5

□□ **12.7**　次の数を小さい順に並べよ．　(琉球大学 2012) 5

$$\log_3 5,\ \ \frac{1}{2} + \log_9 8,\ \ \log_9 26$$

□□ **12.8**　$0 < a < b < 1$ のとき，$\log_a b$ と $\log_b a$ の大小を比べよ．
(福岡教育大学 2002) 5

□□ **12.9**　定数 a は実数で，$a > 0$，$a \neq 1$ とする．このとき，すべての正の実数 x，y に対して $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ が成り立つ．このことを証明せよ．(鹿児島大学 2013) 2

□□ **12.10**　0 でない実数 $a,\ b,\ c,\ d$ が $3^a = 5^b = 7^c = 105^d$ を満たすとき，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを示せ．　(鹿児島大学 2015) 2

□□ **12.11**　a，b，c は互いに異なる実数で，$a > 1$，$b > 1$，$c > 1$ とする．次の等式が成り立つとき，比 $\log_2 a : \log_2 b : \log_2 c$ を求めよ．　(鹿児島大学 2014) 2

$$\log_2 a - \log_8 b = \log_2 b - \log_8 c, \quad \frac{\log_2 a}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

□□ **12.12**　2 次方程式 $x^2 - (2a+5)x + a + 3 = 0$ の 2 つの解が $\log_2 2b$ と $\log_2 4b$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ．　(福岡教育大学 2007) 1

応用 12.13　座標平面上で，不等式　$2|x-4|+|y-5| \leqq 3$，　$2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big| \leqq 3$ が表す領域を，それぞれ A，B とする．　(九大 [文]2003) 2

(1)　領域 A を図示せよ．

(2)　領域 B を図示せよ．

(3)　領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x |y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ．

12.3 対数方程式

□□ **12.14** 方程式 $2(\log_2 x)^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$ を解け. (長崎大学 2016) 1

□□ **12.15** x を 1 と異なる正の数とする．このとき，x についての方程式 $\log_{10} x - 3\log_x 10 = 2$ を解け. (福岡教育大学 2008) 1

□□ **12.16** 次の方程式を解け. (琉球大学 2011) 5

$$\log_5(1 - 4\cdot 5^x) = 2x + 1$$

□□ **12.17** $2\log_{10}(a-b) = \log_{10} a + \log_{10} b$ のとき，$\dfrac{a}{b}$ の値を求めよ. (琉球大学 2005) 5

□□ **12.18** 次の方程式を解け. (琉球大学 2008) 5

$$\log_4(4x-7) + \log_2 x = 1 + 3\log_4(x-1)$$

基本 12.19 角 θ は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ を満たしているとする．対数 $\log_{\sin\theta}\cos\theta$ の値が 2 以下の整数であるとき，$\sin\theta$ のとりうる値をすべて求めよ. (佐賀大学 2004) 9

標準 12.20 a，b，c は 1 でない正の数とし，次の式が成り立つとする.

$$\log_b a + \log_c b + \log_a c = -\frac{11}{3}$$

$\alpha = \log_a b$，$\beta = \log_b c$，$\gamma = \log_c a$ とおくとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\alpha\beta\gamma$ の値を求めよ. (佐賀大学 2004) 2

(2) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ の値を求めよ.

(3) α，β，γ が

$$3x^3 - 5x^2 + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - 3\alpha\beta\gamma = 0$$

の解であるとき，α，β，γ の値を求めよ．ただし，$\alpha < \beta < \gamma$ とする.

12.4　対数不等式

□□ **12.21**　不等式

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(x+1)>3$$

を満たす x の値の範囲を求めよ．　(宮崎大学 2008) 1

□□ **12.22**　$0<a<1$ とする．次の不等式を解け．　(鹿児島大学 2011) 1

$$\log_a(2x-1)+\log_a(x-1)\leqq 0$$

□□ **12.23**　$0<a<1$ とする．このとき，x の不等式 $\log_a(x-1)\geqq\log_{a^2}(x+11)$ を解け．　(琉球大学 2009) 5

□□ **12.24**　不等式 $\log_a(x+6)+\log_a(x-1)>\log_a(9x-7)$ を解け．ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする．　(福岡教育大学 2004) 1

□□ **12.25**　a を正の数で $a\neq 1$ とし，$b=\dfrac{1}{a}$ とおくとき，次の不等式を解け．　(福岡教育大学 2001) 1

$$\log_a\left(\frac{|x-1|}{3}\right)\leqq\log_b|x-5|$$

□□ **12.26**　a は正の定数で，$a\neq 1$ とする．不等式

$$\log_a(a-x-y)>\log_a x+\log_a y$$

が表す領域を図示せよ．　(福岡教育大学 2015) 1

応用 12.27　実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．例えば，$\left[\frac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である．このとき，$0^\circ<\theta<180^\circ$ として次の問いに答えよ．ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ を用いてよい．　(九大 [文]2005) 3

(1)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(2)　不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(3)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ．

12.5 対数関数の最大・最小

基本 12.28 関数 $f(x)=\log_2 x+2\log_2(6-x)$ の最大値を求めよ.

(熊大 [文]2003) 2

基本 12.29 $a>1$ とする.

$$y=-(\log_a x)^2+\log_a x^4$$

について，次の問いに答えよ. (佐賀大学 2008) 5

(1) $\log_a x=t$ とおくとき，y を t の式として表せ.

(2) $0\leqq y\leqq 3$ となる t の範囲を求めよ.

(3) $2\leqq x\leqq 4$ を満たすすべての x に対して，$0\leqq y\leqq 3$ となる a の範囲を求めよ.

標準 12.30 実数 $\theta\,(0<\theta<\pi)$ が等式

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3+2\sqrt{2}$$

を満たすとき，$x>0$ の範囲で関数

$$f(x)=\left(\log_2\frac{x}{2\sin\theta}\right)\left(\log_4\frac{x}{4\sin\theta}\right)$$

が最小となる x の値と，そのときの最小値を求めよ. (宮崎大学 2007) 2

標準 12.31 a を正の定数とするとき，関数

$$y=\left(\log_2\frac{1+\sin x}{a}\right)\left(\log_4\frac{1+\sin x}{2a}\right)\quad\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

の最小値を，a を用いて表せ. (宮崎大学 2012) 2

12.6　常用対数

□□ **12.32**　N は自然数で N^{10} が 16 桁であるとする．このとき，N^8 は何桁になるか求めよ．　(福岡教育大学 2011) 1

□□ **12.33**　$p=\dfrac{2^{148}+1}{17}$ は整数である．p は何けたの整数か答えよ．ただし，$0.301<\log_{10}2<0.302$ である．　(宮崎大学 2006) 2

基本 12.34　次の問いに答えなさい．　(大分大学 2004) 1

(1)　$2^{10}=1024>1000$ を利用して，$\log_{10}2$ と 0.3 の大小を比べなさい．

(2)　(1) の結果を利用して，2^{21} と 5^9 の大小を比べなさい．

基本 12.35　関数 $f(x)=4^x-2^{x+2}+3$ について，次の各問に答えよ．

(1)　$f(x)>0$ を満たす x の値の範囲を求めよ．　(宮崎大学 2004) 1

(2)　$f(1.59)$ の値の正負を判定せよ．ただし，$0.301<\log_{10}2<0.302$，$0.477<\log_{10}3<0.478$ である．

基本 12.36　次の問いに答えよ．ただし，$\dfrac{30}{100}<\log_{10}2<\dfrac{31}{100}$ であることは用いてよい．　(福岡教育大学 2009) 7

(1)　$\dfrac{n}{100}<\log_{10}5<\dfrac{n+1}{100}$ を満たす自然数 n を求めよ．

(2)　5^{21} は何桁の整数か．

(3)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 と異なる数字が現れるか．

基本 12.37　濃度 $a\,\%\,(a>0)$ の均一な食塩水がある．このとき，次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2009) 6

(1)　食塩水から質量の 10 分の 1 を取り出し，代わりに同じ質量の真水を加えて濃度が均一になるようにした．このときの食塩水の濃度を求めよ．

(2)　(1) の操作を n 回繰り返してできる食塩水の濃度を求めよ．

(3)　$0.4771<\log_{10}3<0.4772$ を用いて，(2) において濃度が $\dfrac{a}{10}\%$ 以下になる n の最小値を求めよ．

標準 12.38 半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある．その面積を S とする．D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる．さらに，D_1 の各辺の中点を結んで正十二角形 D_2 をつくる．このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる $(n \geqq 2)$．D_n の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) S と S_1 を求めよ． (長崎大学 2016) 3

(2) S_n を n の式で表せ $(n \geqq 1)$.

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ．ただし，

$$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$$

である．

第 13 章　微分法と積分法（数学II）

13.1　微分係数と導関数

□□ **13.1** 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-4h)}{h}$$

を $f'(a)$ を用いて表せ．　(福岡教育大学 2005) 1

13.2　曲線の接線・法線

□□ **13.2** 円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=x^2+5$ との共通の接線のうち，円と第 1 象限で接する接線の方程式を求めよ．　(福岡教育大学 2010) 1

基本 13.3 座標平面上の点 P から放物線 $y=x^2$ へ 2 本の接線が引けて，かつ，この 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ．　(熊大 [文]2005) 1

標準 13.4 以下の問に答えよ．　(佐賀大学 2007) 2

(1) $0^\circ<\alpha<90^\circ$ とする．角 β が $\alpha-\beta=90^\circ-\alpha$ を満たすとき，

$$\tan\beta=\frac{\tan^2\alpha-1}{2\tan\alpha}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $a>\dfrac{1}{2}$ とする．$f(x)=x^2-x+1$ とし，放物線 $y=f(x)$ の点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_1 とする．l_1 と x 軸とのなす角を α $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ とするとき，$\tan\alpha$ を a を用いて表せ．

(3) l_1 に関して直線 $x=a$ と対称な直線を l_2 とするとき，l_2 の方程式を求めよ．

(4) a の値にかかわらず，l_2 は定点を通ることを示し，その座標を求めよ．

標準 13.5　$f(x)=x^3-x$ とし，関数 $y=f(x)$ のグラフを C とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) 1

(1) C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式を求めよ．

(2) $t\neq t'$ のとき，点 $(t,\ f(t))$ における C の接線と $(t',\ f(t'))$ における接線は異なることを示せ．

(3) C の接線で点 $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ を通るものの方程式をすべて求めよ．

(4) 点 $(u,\ v)$ を通る C の接線が 3 本存在するための u，v の満たすべき条件を求めよ．また，その条件を満たす点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

標準 13.6　a を定数とする．2 つの放物線

$$C_1:y=-x^2,\qquad C_2:y=3(x-1)^2+a$$

について，以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2007) 1

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ．

(2) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ．

(3) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わるときの a の値を求めよ．

標準 13.7　放物線 $C:y=x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である．このとき，次の問いに答えよ．(九大 [文]2008) 2

(1) 点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ．

(2) y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ．

13.3　関数の増減・極値，グラフ

□□ 13.8　関数 $f(x)$ は以下の条件 (イ)，(ロ)，(ハ) を満たす．そのような正の数 a の値と $f(x)$ を求めよ．　(長崎大学 2016) 1

(イ)　$f'(x)=x^2+ax$

(ロ)　$f(0)=-1$

(ハ)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が $\dfrac{4}{81}$

基本 13.9 $k>0$ とし，$f(x)=x(x+k)(x+2k)$ とおく．曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) 関数 $f(x)$ は異なる 2 つの極値をもつことを示しなさい． (大分大学 2014) 1

(2) 曲線 C 上の極値をとる点を P，Q とする．線分 PQ の中点 R の座標を求めなさい．

(3) 点 R が曲線 C 上にあることを示し，点 R における曲線 C の接線の方程式を求めなさい．

基本 13.10 関数 $f(x)=x^3-6x^2+3kx$ (k は定数) を考える．次の問いに答えよ． (長崎大学 2001) 1

(1) $y=f(x)$ が極大値，極小値をもつような k の値の範囲を求めよ．

(2) $y=f(x)$ の極大値と極小値の差が 4 となる k の値を求めよ．

(3) (2) の場合について $y=f(x)$ のグラフをかけ．

標準 13.11 関数 $f(x)=x^3+3x^2\cos\theta+x\sin^2\theta+2$ は極大値，極小値をもつとする．ここで θ の範囲は $-90^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする．次の問いに答えよ． (長崎大学 2004) 3

(1) θ の値の範囲を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極大値，極小値に対応する $y=f(x)$ のグラフ上の 2 点を通る直線の傾きを m とおく．m を θ の関数として表せ．

(3) 傾き m のとりうる値の範囲を求めよ．

標準 13.12 a を整数とする．$x_n=n^3-an^2$ ($n=1,2,3,\cdots$) で定められている数列 $\{x_n\}$ が

$$x_1>x_2>\cdots>x_{14}>x_{15},\quad x_{15}<x_{16}<x_{17}<\cdots$$

をみたすとき，a を求めよ． (熊大 [理]2001) 3

標準 13.13 関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える． (九大 [文]2001) 1

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．

(2) $a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．

13.4　最大・最小

13.4.1　3 次関数の最大・最小

□□ **13.14**　3 点 O$(0,\ 0)$，A$(t,\ 0)$，B$(0,\ 1-t)$ $(0<t<1)$ を頂点とする三角形 OAB を，x 軸の周りに 1 回転させてできる円錐の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．　(琉球大学 2008) 5

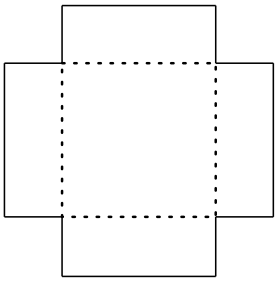
基本 13.15　t を $0 \leqq t < 2$ をみたす定数とする．放物線 $y=(x-2)^2$ 上の点 $(t,\ (t-2)^2)$ における接線を l とする．このとき，次の問いに答えよ．　(琉球大学 2013) 5

(1)　接線 l の方程式を求めよ．

(2)　直線 l と x 軸の交点を求めよ．

(3)　直線 l と x 軸，y 軸によって囲まれる部分の面積を $S(t)$ とする．$0 \leqq t < 2$ において $S(t)$ が最大となるときの t の値と $S(t)$ の値を求めよ．

基本 13.16　1 辺の長さが 24cm の正方形の厚紙の 4 すみから合同な正方形を切りとり，その残りの部分 (右図) を点線に沿って折り曲げてふたのない箱 A を作る．同様に 1 辺の長さが 36cm の正方形の厚紙からふたのない箱 B を作る．ここで，箱 A，B の底面が合同な正方形となるように作るものとする．このとき，2 つの箱 A，B の容積の和の最大値を求めよ．ただし，紙の厚みの影響は考えないものとする．　(宮崎大学 2003) 8



基本 13.17　座標平面上の曲線 $y=x^2$ を C とし，m を $0 \leqq m \leqq 1$ とする．次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2008) 7

(1)　点 $(m,\ m^2)$ における C の接線 L_m の式を求めよ．

(2)　P$(1,\ a)$ と Q$(b,\ 0)$ を L_m 上の点とする．a と b を m の式で表せ．

(3)　R$(1,\ 0)$ について，三角形 PQR の面積を m の式で表せ．

(4)　三角形 PQR の面積の最大値を求めよ．

基本 13.18　p を $0<p<1$ を満たす定数とする．関数 $y=x^3-(3p+2)x^2+8px$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ．　(佐賀大学 2010) 11

標準 13.19 m を定数とするとき，関数 $f(x)=x(x^2-5x+m)$ $(x>0)$ について，次の問いに答えよ． (長崎大学 2002) 1

(1) $x>0$ の範囲で関数 $f(x)$ が次の条件 (i)，(ii) を満たすような最小の整数 m を求めよ．
(i) $f(x)>0$ (ii) 極大値および極小値をもつ

(2) m を (1) で求めた整数とするとき，関数 $f(x)$ の $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3$ における増減表をつくれ．

(3) m を (1) で求めた整数とするとき，関数 $\log_a f(x)$ の $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3$ における最大値を求めよ．ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする．

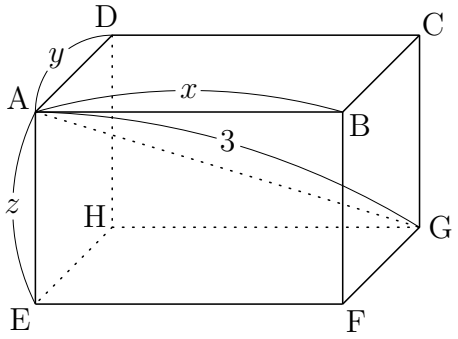
標準 13.20 下図のように，AB $=x$，AD $=y$，AE $=z$ である直方体 ABCD$-$EFGH が空間内にある．直方体の対角線 AG の長さを 3，表面積 S を 16 とするとき，以下の問いに答えよ． (長崎大学 2020) 5

(1) $x+y+z$ の値を求めよ．

(2) $y+z$ と yz を x の式で表し，x を用いて y，z を解とする t の 2 次方程式を作れ．

(3) x の値の取り得る範囲を求めよ．

(4) この直方体の体積を V とするとき，V の最大値および最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．



応用 13.21 関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える．曲線 $C:y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ． (九大 [文]2012) 2

(1) $t\geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本持つことを示せ．

(2) (1) において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする (ただし $p<q$)．このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ．

(3) $t\geqq 0$ のとき，2 点 P，Q の間の距離の最小値を求めよ．また，最小値を与えるときの P，Q の x 座標 p，q もそれぞれ求めよ．

13.4.2　三角関数の最大・最小

基本 13.22 次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2011) 1

(1) 定数 a，b を用いて，$\sin\theta+\cos\theta$ を $a\sin(\theta+b)$ の形に表せ．ただし，$a>0$，$0\leqq b<2\pi$ とする．

(2) $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で，$\sin\theta+\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cdot\cos\theta$ を t を用いて表し，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で $\sin\theta\cdot\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ．

(4) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ を t を用いて表し，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の最大値と最小値を求めよ．

基本 13.23 次の各問に答えよ．　(琉球大学 2006) 6

(1) $\sin\theta+\cos\theta=t$ とおく．$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

基本 13.24 関数 $y=\sin^3x-\cos^3x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\sin x-\cos x=t$ とおいて，t のとり得る値の範囲を求めよ．(熊大 [文]2010) 1

(2) y を t の式で表せ．

(3) y の最大値および最小値を求めよ．

基本 13.25 $y=2(\sin^3x-\cos^3x)-6\sin x\cos x(\sin x-\cos x-1)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ に対して，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2010) 6

(1) $t=\sin x-\cos x$ とおくとき，t の範囲を求めよ．

(2) y を t で表せ．

(3) y の最大値と最小値を求めよ．

基本 13.26 変数 θ が $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲を動くとき，θ の関数

$$f(\theta)=4\sin^3\theta-9\sin\theta\cos\theta+4\cos^3\theta+1$$

について，次の各問に答えよ．　(鹿児島大学 2001) 1

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とするとき，t のとる値の範囲を求めよ．

(2) θ の関数 $f(\theta)$ を t の関数 $g(t)$ として表せ．

(3) t が (1) の範囲を動くとき，関数 $g(t)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの t の値を求めよ．

基本 13.27 次の問に答えよ. (琉球大学 2012) 6

(1) 加法定理を用いて，$\cos 2x$ および $\cos 3x$ を $\cos x$ で表せ.

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $f(x) = \cos 3x + \cos 2x - 2\cos x$ の最大値および最小値を求めよ.

基本 13.28 $y = \cos 3\theta - 3\cos\theta + 1$ について，次の問いに答えよ.

(1) $30^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ のとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ. (福岡教育大学 2002) 7

(2) y を $\cos\theta$ を用いて表せ.

(3) $30^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ のとき，y の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ.

基本 13.29 a を定数とし，関数

$$f(\theta) = \sin^3\theta + a\cos 2\theta + \frac{21}{4}\sin\theta$$

は $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{13}{4}$ を満たすものとする．このとき，次の問に答えよ.

(1) a の値を求めよ. (佐賀大学 2015) 9

(2) $t = \sin\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t を用いて表せ.

(3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ.

標準 13.30 $f(\theta) = 4\left(\sin^3\dfrac{\theta}{2} + \cos^3\dfrac{\theta}{2}\right) + 6\left(\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2}\right)(\sin\theta - 2) - \sqrt{6}(\sin\theta + 1)$

とおく．ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) $x = \sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，$f(\theta)$ を x のみの式で表せ. (熊大 [文]2012) 3

(2) $f(\theta)$ の最小値そのときの θ の値を求めよ.

13.4.3 指数・対数関数の最大・最小

□□ **13.31** a は定数で，$0 < a < 1$ とする．関数

$$y = a^{3x} + a^{-3x} - 9(a^{2x} + a^{-2x}) + 27(a^x + a^{-x}) \quad (x \geqq 0)$$

の最小値を求め，そのときの x を求めよ. (福岡教育大学 2005) 1

基本 13.32 x の関数 $f(x) = 8^x + 8^{-x} - 9(4^x + 4^{-x}) + 27(2^x + 2^{-x}) - 26$ について，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2012) 2

(1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく．$f(x)$ を t の関数として表したものを $g(t)$ とするとき，$g(t)$ を求めよ．

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ のとる値の範囲を求めよ．

(3) t が (2) で求めた範囲を動くとき，関数 $y = g(t)$ の増減を調べよ．

(4) $x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x)$ の最小値とその最小値を与える x の値を求めよ．

13.5　方程式・不等式への応用

基本 13.33 a を実数とする．直線 $y = 3x - a$ を l とし，曲線 $y = 2x^3 - 3x$ を C とする．　(大分大学 2013) 5

(1) $a = 0$ のとき，直線 l と曲線 C の共有点の座標を求めなさい．

(2) 直線 l と曲線 C の共有点の個数が 3 個となるように a の範囲を求めなさい．

基本 13.34 点 $(a,\ b)$ を通り曲線 $y = x^3 - x$ に接するような異なる 3 本の直線が存在するための実数 a，b が満たすべき必要十分条件を求め，それを満たす点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ．　(琉球大学 2010) 3

基本 13.35 放物線 $C : y = x^2$ と，それと共有点をもたない直線 $\ell : y = ax + b$ を考える．直線 ℓ 上の点 P から放物線 C に相異なる 2 本の接線を引き，その接点をそれぞれ Q，R とする．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2014) 10

(1) 点 Q，R の座標をそれぞれ $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ とおく．点 P の x 座標を α，β で表せ．

(2) 直線 QR は点 P を ℓ 上どのようにとっても，定点を通ることを証明せよ．

標準 13.36 xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円を描き，その上半分を C とし，その両端を $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とする．C 上の 2 点 N，M を NM = MB となるように取る．ただし，N $\neq$ B とする．このとき，次の問いに答えよ．　(九大 [文]2010) 3

(1) $\angle \mathrm{MAB} = \theta$ と置くとき，弦の長さ MB 及び点 M の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 N から x 軸に降ろした垂線を NP としたとき，PB を θ を用いて表せ．

(3) $t = \sin\theta$ とおく．条件 MB = PB を t を用いて表せ．

(4) MB = PB となるような点 M が唯一つあることを示せ．

標準 13.37 $f(x)$ は x の 3 次多項式とし，x^3 の係数は 1，定数項は 0 とする．2 つの異なる実数 α，β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする．以下の問いに答えよ． (熊大 [理]2015) 1

(1) $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を α，β を用いて表せ．

(2) 不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ．

標準 13.38 a を実数とし，3 次方程式 $4x^3 - 3x - a = 0$ が 3 つの異なる実数解をもつとする．次の問いに答えよ． (長崎大学 2004) 1

(1) a はどのような範囲にあるか．

(2) 3 つの解はいずれも -1 と 1 の間にあることを示せ．

(3) 三角関数の加法定理および 2 倍角の公式を用いて，3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を導け．

(4) 上の方程式の 3 つの解のうち，最も大きなものを $\cos\theta$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ と表す．このとき，残りの 2 つの解は $\cos(\theta + 120^\circ)$ と $\cos(\theta - 120^\circ)$ であることを示し，それらの大小を調べよ．

13.6 定積分

□□ **13.39** 次の定積分を求めよ． (琉球大学 2012) 5

$$\int_0^3 |x^2 - x - 2|\, dx$$

□□ **13.40** 関数 $f(x) = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 6x^2 - 2nx - m$ について

$$S = \int_0^2 f(x)\, dx, \quad T = \int_0^2 g(x)\, dx$$

とおく．ただし，$m \geqq 0$，$n \geqq 0$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) S と T を m と n を用いて表せ． (鹿児島大学 2015) 2

(2) $S \geqq 0$，$T \geqq 0$ のとき，$m + n$ が最大となるような m と n を求めよ．

基本 13.41 関数 $f(x)=\displaystyle\int_a^x (t^2-t)\,dt$ について，次の問いに答えよ．ただし，a は実数の定数とする．　(長崎大学 2007) 1

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ の極大値および極小値を，a を用いて表せ．

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 3 点で交わるための a の範囲を求めよ．

基本 13.42 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_x^{2x}\left(\frac{1}{7}t^2-\frac{2}{3}t-3\right)dt$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．　(熊大 [文]2009) 1

(1) $f(x)=0$ をみたす x をすべて求めよ．

(2) $-3\leqq x\leqq 6$ における $f(x)$ の最小値を求めよ．

基本 13.43 $f(x)$ を $x=-1$ で極大，$x=2$ で極小となる 3 次関数で

$$\int_0^2 f'(x)\,dx=-5$$

を満たすものとする．以下の問いに答えよ．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．　(熊大 [文]2013) 2

(2) $f(x)$ の極大値と極小値の差を求めよ．

基本 13.44 k を実数とする．3 次関数 $y=x^3-kx^2+kx+1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする．このとき，k の値を求めよ．　(九大 [文]2019) 2

基本 13.45 関数 $f(x)$ は $f(0)=0$ および $f(-1)=f(1)=3a$ を満たす 2 次関数とし，関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\frac{4}{a}$$

とする．ただし，a は 0 でない定数である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．　(鹿児島大学 2008) 2

(2) 直線 $y=3x+2$ が曲線 $y=g(x)$ に接するように定数 a の値を定めよ．さらに，その接点の座標を求めよ．

基本 13.46 a，b は実数で，関数

$$f(x) = 2^{3x} - a2^{2x} + a2^{x+1} - b$$

のグラフは x 軸と相異なる 3 点 $0,\ \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ で交わるものとする．このとき，次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2007) 1

(1) $2^x = t$ とおいて，$f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とする．$g(t)$ を求めよ．

(2) b および $\alpha + \beta$ を，a を用いて表せ．

(3) α，β が

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{2}{3}t + 1\right) dt = 2(\beta - \alpha)$$

を満たすとき，a の値を求めよ．さらに，そのときの α，β の値を求めよ．

標準 13.47 t は実数とする．$f(x) = x|\,x - t\,|$ について，次の問いに答えよ．

(1) $S(t) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ．(福岡教育大学 2005) 7

(2) (1) で求めた $S(t)$ の最小値を求めよ．

標準 13.48 $0 \leqq x \leqq 1$ とする．このとき，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^1 |t^2 - xt|\,dt$$

と定義する．次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2011) 2

(1) t の関数 $g(t) = |t^2 - xt|$ のグラフの概形をかけ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

標準 13.49 a を 0 でない定数とし，関数 $f(x) = |(x-1)(x-a)|$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．(福岡教育大学 2001) 8

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の傾きを求めよ．

(2) $b = f'(0)$，$c = f(0)$，$S(a) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - (bx + c)|\,dx$ とおくとき，$S(a)$ を求めよ．

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ．

応用 13.50 実数 a，c を係数とする関数 $f(x)=ax^2+c$ について，次の条件を考える．

$(*)$　　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) \geqq (x+1)^2$ が成立する．　　(九大 [文]2003) 1

(1) $a \geqq 2$ のとき，条件 $(*)$ を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ であることを示せ．

(2) $a \leqq 2$ のとき，条件 $(*)$ を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ が条件 $(*)$ を満たしているとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を最小にする a，c と，そのときの定積分の値を求めよ．

応用 13.51 定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

(九大 [文]2022) 4

$f(x)$ を整式とする。$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \cdots ①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A)，(B)，(C) をもつ。

(A) $\displaystyle\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$

(B) $a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(C) 区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$ ならば，

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqq \int_a^b h(x)\,dx$$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は整式，k，l は定数である。

以下，$f(x)$ が区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上で増加関数になる場合を考える。n を自然数とする。定積分の性質 [ア] を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式 ② と定積分の性質 [イ] より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n} \qquad \cdots ③$$

よって，n を限りなく大きくすると，S_n は $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ に限りなく近づく。

応用 13.52 等式 $\displaystyle\int_0^2 \left\{|x^2-2x+a|-\frac{1}{2}x+a\right\}dx=a^2$ が成り立つような定数 a の値を求めよ．　(分大 [医]2006) 8

13.7　積分方程式

13.7.1　積分方程式 (定数型)

基本 13.53 a，b，c，k を実数とし，$k>0$ とする．2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は $f(0)=9$，$f(-1)=16$ をみたす．また，関数 $f(x)$ について，x に関する恒等式

$$f'(x)=6x-9k-4+\int_0^k f(t)\,dt$$

が成り立つ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．　(大分大学 2013) 6

(1) $f(x)$ を求めなさい．

(2) k の値を求めなさい．

基本 13.54 等式

$$f(x)=x^2-\int_{-2}^1 2xf(t)\,dt$$

を満たす関数 $f(x)$ について，次の問いに答えなさい．　(大分大学 2003) 5

(1) 関数 $f(x)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\int_{-2}^1 |f(x)|\,dx$ を求めなさい．

(3) k を実数とするとき，直線 $y=x+k$ と曲線 $y=|f(x)|$ との共有点の個数を求めなさい．

基本 13.55 関数 $f(x)=-3x^2-\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{1} 2xf(t)\,dt$ について，次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2004) 7

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線のうち，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通る接線の方程式を求めよ．ただし，$a>-\dfrac{1}{2}$ とする．

(3) (2) で求めた接線と $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

13.7.2 積分方程式 (変数型)

基本 13.56 関数 $f(x)$ が等式

$$f(x)=x^2-x\int_{0}^{1} f(t)\,dt+2\int_{1}^{x} f'(t)\,dt$$

を満たすとき次の問いに答えよ． (佐賀大学 2006) 10

(1) $f(x)$ は 2 次関数であることを示せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

基本 13.57 定数 a，b と関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_{2}^{x} f(t)\,dt=(x-a)(x^2+x+b)$ をみたすとする．次の問いに答えなさい． (長崎大学 2003) 1

(1) $y=f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 4)$ を通るとき，方程式 $f(x)=0$ の解を求めなさい．

(2) 定数 a が負のとき，$y=f(x)$ のグラフは，a の値に関係なく定点を通ることを示し，その定点の座標を求めなさい．

標準 13.58 2 次関数 $f(x)$ に対して

$$F(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

とおく．a を正の数とし，$F(x)$ が $x=a$ と $x=-a$ で極値をとるとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2016) 4

(1) すべての x について $F(-x)=-F(x)$ が成り立つことを示せ．

(2) $F(x)+F(a)=0$ を満たす x をすべて求めよ．

(3) 関数 $\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ の極大値を求めよ．

標準 13.59　2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ は，それぞれ

$$f(x)=\frac{3x^2}{16}\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{3x}{7}\int_{-1}^0 f(t)\,dt+7,$$
$$(x-1)g(x)=\int_0^x g(t)\,dt-\frac{2x^3}{3}+2x^2-2x+1$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2012) 7

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　$g(x)$ を求めよ．

(3)　放物線 $y=f(x)$ の点 $(4,\ f(4))$ における接線を l とする．直線 l と放物線 $y=g(x)$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

13.8　面積

13.8.1　放物線

基本 13.60　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & (x\leqq 0,\ x\geqq 2\ \text{のとき})\\ x^2 & (0<x<2)\end{cases}$$

とする．座標平面上の曲線 $C:y=f(x)$ と直線 $l:y=x$ で囲まれる部分の面積を S とする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2011) 13

(1)　曲線 C の概形をかけ．

(2)　S の値を求めよ．

基本 13.61　放物線 $C:y=(x-p)^2+q$ の頂点 $(p,\ q)$ が，放物線 $y=-4x^2+12x\ (y\geqq 0)$ 上を動くとき，放物線 C と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた部分の面積の最大値と，そのときの p の値を求めよ．　(琉球大学 2007) 5

基本 13.62 a を正の定数とし，放物線 $y=x^2$ の $x \geqq 0$ の部分が表す曲線を C とする．また $a<t$ をみたす t に対して，曲線 C と 2 つの直線 $x=a$，$y=t^2$ によって囲まれる図形の面積を $S(t)$ とおく．このとき次の問いに答えよ． (熊大 [文]2001) 2

(1) $\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}$ を a，t で表せ．

(2) $\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}<8$ を示せ．

基本 13.63 曲線 $y=-x^2+4$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を C とする．曲線 C と y 軸との交点を P とし，x 軸との交点を Q とする．さらに，原点 O と点 Q を結ぶ線分上に点 R をとる．点 R を通り，x 軸に垂直な直線がこの曲線 C と交わる点を S とする．このとき，次の各問に答えよ． (鹿児島大学 2001) 13

(1) 曲線 C と x 軸および y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(2) R の座標を $(t,\ 0)$ とするとき，線分 PR と線分 RS および曲線 C とで囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3) $S(t)$ の最大値を求めよ．また，そのときの t の値を求めよ．

基本 13.64 放物線 $y=4x^2+3$ を C とする．x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ $(p \neq 0$ とする$)$，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ をとり，点 A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする．さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における C の接線を m とする．以下の問いに答えよ．

(1) q を p を用いて表せ． (熊大 [文]2008) 3

(2) 接線 m が点 P を通るとする．p，q の値を求めよ．

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 13.65 2 つの放物線 $C_1 : y=x^2$，$C_2 : y=-x^2+2x-\dfrac{1}{2}$ を考える．

点 $\mathrm{A}\left(t,\ -t^2+2t-\dfrac{1}{2}\right)$ における C_2 の接線を ℓ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ℓ と C_1 との交点の x 座標を，t を用いて表せ． (熊大 [文]2011) 3

(2) 点 A の x 座標を $t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とするとき，第 1 象限において ℓ，C_1 および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 13.66　$a>1$ とする．2 つの 2 次関数 $f(x)=-x^2+2x+3$，$g(x)=x^2-2(a-1)x+3$ について，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2004) 3

(1) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標と y 座標を求めよ．

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ とで囲まれた図形の面積 S を a の式で表せ．

(3) (1) で求めた 2 つの交点 A，B と点 C$(1,\ 4)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を T とする．$T:S=1:k$ とするとき，k の最小値およびそのときの a の値を求めよ．

標準 13.67　a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C:y=ax^2$ $(x\geqq 0)$ を考える．曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする．このとき，次の問いに答えよ．　(九大 [文]2005) 1

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ．

(2) 曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(3) $a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

標準 13.68　曲線 $C:y=x^2$ 上に点 P$(t,\ t^2)$ をとり，点 P における曲線 C の接線を l，点 P を通り l に垂直な直線を m とする．ただし，$t>0$ とする．接線 l と x 軸との交点を Q とし，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ R_1，R_2 とする．また，$\triangle\mathrm{PQR}_1$ の面積を S_1 とし，曲線 C と y 軸および線分 PR_2 で囲まれる図形の面積を S_2 とする．このとき次の問いに答えよ．　(九大 [文]2006) 1

(1) 点 Q と点 R_1 の x 座標を t を用いて表せ．

(2) 面積 S_2 を t を用いて表せ．

(3) $S_1>S_2$ が成り立つ t の範囲を求めよ．

標準 13.69　関数 $f(x)=x^2$，$g(x)=|2x^2-4|$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=g(x)$ を満たす x の値を求めよ．　(熊大 [文]2004) 4

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフとで囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 13.70　a が正の値をとりながら動くとき，

$$I(a)=\int_0^1 |(x-a)(x-2a)|\,dx$$

が最小となる a の値を求めよ．　(佐賀大学 2007) 10

標準 13.71 a を実数とする．曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l とする．曲線 C_2 を $y = x^2 - 1$ とする．以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2015) 1

(1) l と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする．曲線 $C_3 : y = -x^2 + 1$ と C_2 とで囲まれた部分は l によって 2 つの部分に分けられる．これらのうち，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を含む部分の面積を求めよ．

標準 13.72 中心 $\mathrm{A}(0, a)$，半径 1 の円上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta, a + \sin\theta)$ について，θ が $180^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲を動くときの点 P の軌跡を C とする．C が不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域にあるとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2004) 5

(1) $a \geqq \dfrac{5}{4}$ であることを示せ．

(2) $a = \dfrac{5}{4}$ のとき，C と放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 13.73 3 次関数 $f(x)$ は $x = -1$ と $x = 1$ で極値をとり，$f(1) = 0$ である．次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2003) 8

(1) $f(-2)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分のうち，y 軸の左側にある部分の面積を S_1，y 軸の右側にある部分の面積を S_2 とする．このとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ (C は積分定数) である．

標準 13.74 座標平面上の円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ を C とする．以下の問いに答えよ． (九大 [文]2013) 4

(1) 直線 $y = x - 2$ は円 C に接することを示せ．また，接点の座標も求めよ．

(2) 円 C と放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$ の共有点の座標をすべて求めよ．

(3) 不等式 $y \geqq \dfrac{1}{4}x^2 - 1$ の表す領域を D とする．また，不等式 $|x| + |y| \leqq 2$ の表す領域を A とし，不等式 $(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqq 2$ の表す領域を B とする．そして，和集合 $A \cup B$，すなわち領域 A と領域 B をあわせた領域を E とする．このとき，領域 D と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を図示し，さらに，その面積を求めよ．

標準 13.75 次の各問いに答えよ． (九大文系 2023) 1

a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を，次のように定める。

$$C : y = |(x-3)(x+3)|, \quad \ell : y = a$$

曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち，$y \geqq a$ の領域にある部分の面積を S_1，$y \leqq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。$S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

13.8.2　放物線と直線

基本 13.76 次の問いに答えよ．　(琉球大学 2001) 6

(1) 2 つの実数 α，β について，定積分 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$ を求めよ．ただし，$\alpha<\beta$ とする．

(2) 座標平面上の点 A(1, 2) を通る傾き a の直線を L とする．直線 L と放物線 $y=x^2$ との 2 つの交点の x 座標を求めよ．

(3) (2) の直線 L と放物線 $y=x^2$ で囲まれる面積が最小になる a の値と，そのときの面積を求めよ．

基本 13.77 曲線 $C: y=x^2-2x+1$ と直線 $l: y=x+k$ が異なる 2 点 P，Q で交わり，点 P における曲線 C の接線と，点 Q における曲線 C の接線が直交している．

(1) k の値を求めよ．　(大分大学 2001) 3

(2) 2 点 P，Q の座標を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 l で囲まれる部分の面積を求めよ．

基本 13.78 a を 0 でない実数とする．2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ がある．　(大分大学 2016) 2

(1) 2 つの放物線は異なる 2 点で交わることを示しなさい．

(2) 2 つの放物線の交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，$\beta-\alpha$ を a の式で表しなさい．

(3) 2 つの放物線で囲まれた部分の面積 S を a の式で表しなさい．

(4) (3) で定めた面積 S の最小値を求めなさい．

基本 13.79 a，b を実数とし，関数 $f(x)=x^3-ax^2+bx+3$ は $x=-\dfrac{2}{3}$, 2 で極値をとる．　(大分大学 2005) 6

(1) a，b の値と，関数 $f(x)$ の極大値，極小値を求めなさい．

(2) 曲線 $y=f'(x)+\dfrac{7}{3}$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めなさい．

基本 13.80 放物線 $y=-x^2+6x-7$ を C_1 とし，C_1 の頂点を A，C_1 上の点 $(1,-2)$ を B とする．点 A，B を通る直線を l とし，点 A，B を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C_2 とする．ただし，a，b，c は実数，$a>0$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 A の座標を求めよ． (佐賀大学 2010) 7

(2) 直線 l の方程式を求めよ．

(3) b と c を a を用いて表せ．

(4) C_2 と l で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．

基本 13.81 $k>1$ とする．2 直線 $y=kx$，$y=(2k-1)x$ と放物線 $y=x^2$ によって囲まれた図形の面積を S とするとき，次の問いに答えよ． (佐賀大学 2009) 8

(1) S を k を用いて表せ．

(2) S は k に関して単調に増加することを示せ．

(3) $6S<6k^3-7k^2+1$ が成り立つような k の値の範囲を求めよ．

基本 13.82 $a>0$ のとき，放物線 $C:y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線を l_1 とし，P を通り l_1 と垂直な直線を l_2 とする．次の問いに答えよ．(佐賀大学 2012) 9

(1) 直線 l_2 と放物線 C との交点のうち，点 P と異なる方を Q とする．点 Q の座標を a の式で表せ．

(2) 放物線 C と直線 l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする．S を a の式で表せ．

(3) (2) の S の最小値を求めよ．またそのときの a の値を求めよ．

基本 13.83 放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P，Q がある．P，Q の x 座標がそれぞれ a，$a+2$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，$-2<a<0$ とする． (熊大 [文]2003) 4

(1) 原点を O とするとき，△OPQ の面積 S_1 を求めよ．

(2) 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ．

(3) $S_2=2S_1$ となる a の値を求めよ．

基本 13.84 関数 $f(x)=|x(x+1)|-x+1$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする．次の問いに答えよ． (熊大 [文]2006) 3

(1) 曲線 C 上の点 $(a,\ f(a))$ $(-1<a<0)$ における接線が 2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 2)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通る直線に平行になるとき，a の値およびその接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 放物線 $y=x^2+1$ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) (1) の接線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．

基本 13.85　a，b は実数で，$a>1$ とする．t の関数

$$f(t)=2t^3-3(a+1)t^2+6at+b$$

について，次の問いに答えよ．　(長崎大学 2010) 1

(1) 関数 $f(t)$ の極値を，a，b を用いて表せ．

(2) a の値を x 座標，b の値を y 座標とする xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える．このとき，3 次方程式 $f(t)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在する領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(3) D および D の境界からなる領域を E とする．領域 E のうち，

$$y\leqq -x^2+4x-11$$

を満たす部分の面積を求めよ．

基本 13.86　関数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2|x+1|+1$ に対し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t>-1)$ における曲線 C の接線に垂直で，点 P を通る直線を ℓ とする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2016) 11

(1) 直線 ℓ の方程式を，t を用いて表せ．

(2) 直線 ℓ が点 $(-1,\ f(-1))$ を通るとき，t の中で最も小さいものを求めよ．

(3) (2) で求めた t が定める直線 ℓ と曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

基本 13.87　座標平面上の原点 O，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ の 3 点を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C_1 とし，原点 O を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．
次の問いに答えよ．　(琉球大学 2016) 6

(1) a，b，c の値を求めよ．

(2) 放物線 C_1 と線分 PQ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 放物線 C_1 と円 C_2 で囲まれた図形のうち，放物線 C_1 の上側の部分の面積を求めよ．

基本 13.88　次の問いに答えよ．　(長崎大学 2001) 2

(1) 放物線 $y=x^2$ について，傾きが $\sqrt{3}$ の接線 l の方程式およびその接点 P の座標を求めよ．

(2) y 軸上に中心をもち，P において l に接する円の方程式を求めよ．

(3) (1) の放物線と (2) の円の下の弧とによって囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 13.89 放物線 $y = x^2$ を C とする．点 $(a,\ a^2 - 9)$ を通る C の 2 つの接線の接点をそれぞれ A，B とし，2 点 A，B を通る直線を l とする．以下の問に答えよ．

(1) 直線 l の方程式を a を用いて表せ． (佐賀大学 2007) 6

(2) l と C とで囲まれる図形の面積が，a の値にかかわらず，一定であることを示せ．

標準 13.90 放物線 $C : y = x(x-a)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$a > 0$ とする． (長崎大学 2003) 2

(1) 放物線 C と直線 $y = -x + a$ とで囲まれる図形の面積を求めなさい．

(2) $a = 2$ のとき，直線 $y = kx$ によって (1) の図形の面積が二等分されるように k の値を定めなさい．

(3) 放物線 C と点 $(0,\ 1)$ を通る直線とで囲まれる図形の面積が最小となるとき，直線の方程式およびその図形の面積を求めなさい．

標準 13.91 曲線 $C : y = |x^2 - 6x|$ と直線 $\ell : y = kx$ (k は実数) について，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2015) 12

(1) 曲線 C を座標平面上に図示せよ．

(2) 曲線 C と直線 ℓ が異なる 3 つの共有点をもつような k の値の範囲を求めよ．

(3) (2) のとき，曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積の和が最小になるような k の値を求めよ．

標準 13.92 k を実数とする．関数 $y = |x(x-1)|$ のグラフと直線 $y = kx$ が異なる 3 点を共有している．これらで囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする．

(1) k の値の範囲を求めなさい． (大分大学 2015) 3

(2) S を k の式で表しなさい．

(3) S が最小になるときの k の値を求めなさい．

標準 13.93 2 つの関数

$$f(x) = -px^2 + 2 \quad (p > 0)$$
$$g(x) = |\,x\,| - 2$$

が与えられていて，放物線 $y = f(x)$ が 2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るとする．

(1) p の値を求めよ．　(九大 [文]2004) 1

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた交点のうち，x 座標が最小になる点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする．このとき，点 A における $y = f(x)$ の接線 $y = h(x)$ を求めよ．また，この接線 $y = h(x)$ と $y = g(x)$ の，点 A とは異なる，交点 $\mathrm{B}(b,\ g(b))$ を求めよ．

(4) 次の連立不等式の定める図形の面積を求めよ．

$$a \leqq x \leqq b, \quad y \leqq h(x), \quad y \geqq f(x), \quad y \geqq g(x)$$

標準 13.94 放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き，交点を H とする．ただし，$t > 1$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．(九大 [文]2011) 1

(1) H の座標を t を用いて表せ．

(2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y = x$ との交点の座標を R とするとき，三角形 PRH の面積を t を用いて表せ．

(3) $x \geqq 1$ の範囲において，放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ．

(4) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1 = S_2$ であるとき，t の値を求めよ．

標準 13.95 座標平面上の直線 $y = -1$ を ℓ_1，直線 $y = 1$ を ℓ_2 とし，x 軸上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，次の条件を考える．

$$d(\mathrm{P}, \ell_1) \geqq \mathrm{PO} \quad \text{かつ} \quad d(\mathrm{P}, \ell_2) \geqq \mathrm{PA} \quad \cdots ①$$

ただし，$d(\mathrm{P}, \ell)$ は点 P と直線 ℓ の距離である．　(九大 [文]2014) 1

(1) 条件 ① を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ．

(2) 条件 ① を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ．ただし，a の値は (1) で求めた範囲にあるとする．

標準 13.96 座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

を考える．ただし，a，b は実数とする． (九大 [文]2015) 1

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a，b に関する条件を求めよ．

以下，a，b が (1) の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる面積が 9 であるとする．

(2) b を a を用いて表せ．

(3) a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ．

13.8.3 面積の最大値・最小値

基本 13.97 曲線 $y = x^2$ を C とする．$k > 0$ について，直線 $y = kx$ を l_1 とし，原点を通り直線 l_1 に垂直な直線を l_2 とする． (大分大学 2010) 6

(1) 曲線 C と直線 l_2 の交点の座標を求めなさい．

(2) 曲線 C と直線 l_1 とで囲まれる部分の面積を S_1，曲線 C と直線 l_2 とで囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1，S_2 をそれぞれ k の式で表しなさい．

(3) $S_1 + S_2$ の最小値を求めなさい．

基本 13.98 次の問いに答えよ． (琉球大学 2010) 5

(1) t を実数とする．放物線 $y = x(2-x)$ 上の点 $(t,\ t(2-t))$ における接線の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた直線と放物線 $y = x(2-x)$ および 2 直線 $x = 0$，$x = 3$ とで囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．$0 \leqq t \leqq 2$ における $S(t)$ の最大値，最小値とそのときの t の値を求めよ．

基本 13.99 放物線 $C : y = x^2$ とその上の点 $(a,\ a^2)$ $(0 < a \leqq 1)$ における接線を l とするとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2001) 5

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 直線 $x = 0$，$x = 1$，放物線 C と接線 l で囲まれる部分で，$y \geqq 0$ を満たす部分の面積 $S(a)$ を求めよ．

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ．

基本 13.100 a を $0 < a < 1$ の範囲の定数とする．直線 $l : y = 1 - a^2$ と曲線 $C : y = 1 - x^2$ $(x \geqq 0)$ について，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2004) 10

(1) 曲線 C，y 軸，直線 l で囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 C，直線 l，直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1，S_2 を a を用いて表せ．

(2) $S = S_1 + S_2$ とおくとき，$0 < a < 1$ の範囲おける S の最小値を求めよ．

基本 13.101 O を原点とする座標平面上に 2 点 A$(4,\ 0)$，P$(t,\ 0)$ をとる．ただし，$0 < t < 4$ とする．さらに放物線 $C : y = -x^2 + 7x$ 上に 2 点 B$(4,\ 12)$，Q$(t, -t^2 + 7t)$ をとる．△APB の面積を $f(t)$ とし，放物線 C，線分 PQ，線分 OP によって囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2016) 9

(1) $f(t)$ を t を用いて表せ．

(2) $g(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $h(t) = f(t) + g(t)$ とおく．$0 < t < 4$ における $h(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

基本 13.102 $0 \leqq m \leqq 1$ とする．$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y = x^2$ と直線 $y = mx$ で挟まれた部分の面積を $S(m)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $S(m)$ を求めよ．　(琉球大学 2002) 6

(2) $S(m)$ が最小となる m の値と，そのときの $S(m)$ の値を求めよ．

基本 13.103 k を正の数とし，放物線 $y = x(x-1)$ と直線 $y = kx$ と原点 O 以外の交点を A とする．x 軸上の点 B を，直線 AB が y 軸と平行になるようにとる．放物線と線分 OA とで囲まれた部分の面積を S_1，放物線と線分 AB および x 軸とで囲まれた部分の面積を S_2 とおく．このとき面積の差 $S_1 - S_2$ を最大とする k の値を求めよ．　(佐賀大学 2004) 11

基本 13.104 次の問に答えよ．　(宮崎大学 2005) 5

(1) $\alpha < \beta$ のとき，次の等式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (\beta - x)(x - \alpha)\, dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ が成り立つことを示せ．

(2) $-2 \leqq a \leqq 2$ のとき，曲線 $y = (3x - a^3)(x - a + 1)$ と x 軸で囲まれる部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．

標準 13.105 実数 $p>0$ と関数 $f(x)=x^3-x$ がある．2 曲線 $C_1: y=f(x)$，$C_2: y=f(x+p)-p$ について，次に答えよ． (九工大 [工]2011) 3

(1) 曲線 C_1 と C_2 が共有点を 2 個もつときの p の範囲を求めよ．

(2) 実数 α，β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta}(\beta-x)(x-\alpha)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を示せ．

(3) p が (1) で求めた範囲を動くとき，曲線 C_1，C_2 によって囲まれた図形の面積 $S(p)$ の最大値を求めよ．

標準 13.106 座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする．ただし，a，b は実数である．このとき，以下の問いに答えよ． (九大 [文]2016) 1

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする．S を α と β の式で表せ．

(2) β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ．

標準 13.107 a，b を実数とし，曲線 $C: y=x^3-3ax^2+bx$ を考える．C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [医]2016) 4

(1) b を a を用いて表せ．

(2) C が x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする．このとき a の値の範囲を求めよ．

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値の範囲を求めよ．

13.8.4　放物線と接線

□□ **13.108**　直線 $l : y = ax + b$ が原点を中心とする半径 1 の円と点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ で接しているとする．また，直線 l は放物線 $C : y = x^2 - \sqrt{3}x + c$ とも接しているとする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2010) 2

(1) 定数 a，b の値を求めよ．

(2) 放物線 C と直線 l との接点の座標および定数 c の値を求めよ．

(3) 放物線 C と直線 l および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

基本 13.109　頂点が点 $\mathrm{A}(0,\ 4)$ で，点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ を通る放物線を考える．次の問いに答えよ．　(琉球大学 2015) 6

(1) この放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

(2) この放物線上にあり，x 座標が $2a$ $(a > 0)$ である点を C とする．この放物線と x 軸との交点で，点 B と異なる点を D とする．点 C における放物線の接線 l_1 と点 D における放物線の接線 l_2 との交点 E の座標を，a を使って表せ．

(3) この放物線と直線 l_2，および点 E を通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 13.110　曲線 $C : y = -x^2 + 2x$ と，直線 $l : y = a$ が異なる 2 つの共有点 $\mathrm{Q}(b,\ a)$，$\mathrm{R}(c,\ a)$ $(b < c)$ をもつとする．直線 l と y 軸との交点を $\mathrm{P}(0,\ a)$ とおくとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2007) 8

(1) 点 Q が線分 PR を $1 : 2$ に内分するとき，a，b，c の値をそれぞれ求めよ．

(2) (1) で求めた a，b，c に対し，曲線 C の点 R における接線 m の方程式を求めよ．

(3) 点 Q を通り，y 軸に平行な直線を n とする．(2) で求めた接線 m，曲線 C，および直線 n で囲まれる部分の面積を求めよ．

基本 13.111　曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線が曲線 $C_2 : y = x^2 - 4$ と交わる点を B，C とする．ただし，B の x 座標は C の x 座標より小さいとする．以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2010) 2

(1) 線分 BC の中点 M および C の座標を a を用いて表せ．

(2) M を通り y 軸に平行な直線，線分 MC および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 13.112 定数 a は $0 < a < 1$ をみたすとする．曲線 $C : y = (x-1)^2$ と C 上の点 $(a,\ (a-1)^2)$ における接線 ℓ について，以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2012) 4

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と接線 ℓ および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(3) 曲線 C と 2 直線 $x = 0$，$y = 0$ とで囲まれ，接線 ℓ の上側にある 2 つの部分の面積の和 $T(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

基本 13.113 曲線 $C : y = x^2 + px + q$ と y 軸との交点を Q とし，x 座標 t が正である曲線 C 上の点を P とする．点 P における曲線 C の接線を l とする．曲線 C，接線 l および y 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とし，曲線 C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_2 とする． (大分大学 2012) 5

(1) l の方程式を求めなさい．

(2) S_1 を t で表しなさい．

(3) $S_1 : S_2$ を求めなさい．

基本 13.114 曲線 $y = (x-2)^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ (t-2)^2)$ と y 軸上の点 $\mathrm{Q}(0,\ (t-2)^2)$ を考える．ただし，t は $0 < t < 2$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．
(鹿児島大学 2002) 13

(1) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフ C は 2 点 P，Q を通り x 軸に接する．この $f(x)$ を求めよ．

(2) 線分 PQ と C によって囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3) t が上に指定してある範囲を変化するとき，$S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ．

標準 13.115 放物線 $y = x^2$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ (ただし，$a < b$) がある．また，グラフ上の点 A と点 B の間に点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ をとり，点 P における放物線の接線，線分 AB，2 直線 $x = a$，$x = p$ で囲まれた部分の面積を S_1，放物線，点 P における放物線の接線，直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．点 P が点 A と点 B の間 (両端を含まない) を放物線のグラフに沿って動くとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ のとる値の範囲を求めよ． (佐賀大学 2009) 12

標準 13.116 実数 a，b $(a>0,\ b>0)$ に対して，点 $(1,\ 1)$ を通る放物線 $C : y=ax^2+b$ と，放物線 C の点 $(1,\ 1)$ における接線 l を考える．以下の問いに答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．　(九工大 [情]2008) 2

(2) 接線 l の方程式を a を用いて表せ．

(3) 放物線 C，接線 l および y 軸で囲まれた図形のうち，$y \geqq 0$ の部分の面積 S を a を用いて表せ．

(4) S が最大となるときの a の値とそのときの S の値を求めよ．

標準 13.117 $a>0$ とし，2 つの放物線を

$$C_1 : y=x^2+ax$$
$$C_2 : y=\frac{1}{4}x^2$$

とする．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2007) 7

(1) 放物線 C_1 上の点 $(t,\ t^2+at)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する直線の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた接線のうち，傾きが正であるものを l とする．放物線 C_1，C_2 および接線 l で囲まれた部分の面積が 1 となるような a の値を求めよ．

標準 13.118 x についての 4 次の整式 $f(x)$ は，次の条件 (i)，(ii)，(iii) を満たしている．

(i) $f(x)$ の 4 次の係数は 1 である．

(ii) $f(1)=0$，$f(2)=-1$ である．

(iii) $f(x)$ を x^2-3x で割った余りは $7x+5$ である．

$f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの商を $g(x)$，余りを $k(x)$ とするとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2008) 10

(1) $k(x)$ を求めよ．

(2) $g(x)$ を求めよ．

(3) 座標平面上において，3 つの関数 $y=x^2-3x+2$，$y=g(x)$，$y=k(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 13.119 $a < -\dfrac{1}{2}$，$b > 1$ とする．放物線 $C : y = ax^2 + b$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の共有点が，$\mathrm{P}_1(p,\ q)$，$\mathrm{P}_2(-p,\ q)$ の 2 点のみとなるとき，次の問いに答えよ．ただし，$p > 0$ とする．(熊大 [文]2002) 4

(1) b を a で表せ．

(2) p，q それぞれを a で表せ．

(3) 座標平面の原点を O とする．$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = 90^\circ$ のとき，P_1 における放物線 C の接線と放物線 C および y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 13.120 座標平面上に，半円 $C : x^2 + y^2 = 4$ (ただし，$x > 0$) と放物線 $D : x^2 - 6y + 3 = 0$ がある．半円 C 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ (ただし，$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) における半円 C の接線を l とするとき，次の各問に答えよ．(宮崎大学 2013) 5

(1) 半円 C と放物線 D との交点 Q の座標を求めよ．

(2) 直線 l が放物線 D に点 R において接するとき，θ の値と点 R の座標を求めよ．

(3) (2) のとき，半円 C と放物線 D および直線 l によって囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 13.121 座標平面上において，点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を中心とし原点 O を通る円 C_1 について，点 $\mathrm{B}(0, -1)$ から引いた 2 本の接線の接点を P，Q とする．ただし，点 P の x 座標は正とする．さらに，y 軸に関して対称な放物線 C_2 が直線 BP と直線 BQ にそれぞれ点 P と点 Q で接するものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 2 点 P，Q の座標を求めよ．(宮崎大学 2011) 2

(2) 放物線 C_2 を表す方程式を求めよ．

(3) 点 A から放物線 C_2 上の各点までの距離は 1 以上であることを示せ．

(4) 円 C_1 の原点 O を含む弧 PQ と放物線 C_2 で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

応用 13.122 xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0, -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2 - t + 1,\ 0)$ を考える．t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする．以下の問いに答えよ．(熊大 [医]2011) 4

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ．

(2) K の体積を求めよ．

13.8.5　放物線と 2 本の接線

基本 13.123 放物線 $y=x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線が点 R で交わっている．次の問いに答えよ．　(琉球大学 2011) 6

(1) R の座標を求めよ．

(2) $p=-1$，$q=2$ のとき，2 本の接線と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

基本 13.124 座標平面において，曲線 $C:y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(2,\ 4)$ における接線を l とし，l と直線 $y=-1$ との交点を Q とする．また点 Q を通り，曲線 C と接する直線のうち，l と異なるものを m とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．　(宮崎大学 2006) 7

(2) 直線 m の方程式を求めよ．

(3) 曲線 l，m および曲線 C で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

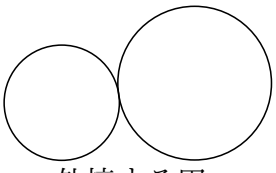
基本 13.125 放物線 $C:y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ が点 $\mathrm{P}(1,-2)$ と $\mathrm{Q}(5,\ 10)$ を通るとし，P，Q における C の接線をそれぞれ l，m とする．以下の問いに答えよ．

(1) b，c をそれぞれ a を用いて表せ．　(熊大 [文]2014) 3

(2) l と m の交点の y 座標が -4 であるとき，a，b，c を求めよ．

(3) (2) で求めた a，b，c について，放物線 C と l，m で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 13.126 円 $x^2+y^2-4y+3=0$ に外接し，直線 $y=-1$ に接する円の中心の軌跡を C とする．次の問に答えよ．ただし，ふたつの円が外接するとは，右の図のような状態のことである．　(琉球大学 2003) 6


外接する円

(1) C の方程式を求めよ．

(2) C 上の 2 点 $(x_1,\ 2)$，$(x_2,\ 2)$ における C の接線の方程式を求めよ．

(3) C と (2) で求めた 2 つの接線で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 13.127 $\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,-1)$，$\mathrm{C}(0,\ 1)$ とする．$0\leqq t\leqq 1$ に対して線分 AB を $t:1-t$ の比に内分する点を P，線分 BC を $t:1-t$ の比に内分する点を Q，線分 PQ を $t:1-t$ の比に内分する点を R とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) P の座標を t を用いて表せ．　(佐賀大学 2005) 6

(2) R の軌跡を求めよ．

(3) 線分 AB，BC と (2) で求めた軌跡によって囲まれた図形の面積を求めよ．

基本 13.128 放物線 $C : y = x^2 - 3x$ と点 $\mathrm{A}(2, -6)$ がある． (大分大学 2006) 2

(1) 点 A から放物線 C へ引いた接線の方程式を求めよ．

(2) 放物線 C 上を動く点 P に対して，線分 AP の中点 Q の軌跡の方程式を求めなさい．

(3) (1) で求めた接線と，(2) で求めた軌跡とで囲まれる部分の面積を求めなさい．

基本 13.129 座標平面上の放物線 $y = x^2$ と直線 $y = kx + 1$ (k は実数) の 2 つの交点を P，Q とし，点 P の x 座標を α，点 Q の x 座標を β ($\alpha < \beta$) とする．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2012) 11

(1) $\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ の値を，k を用いて表せ．

(2) 2 点 P，Q における放物線の接線をそれぞれ l，m とし，その交点を R とするとき，点 R の x 座標を，k を用いて表せ．

(3) 放物線と (2) の 2 つの接線 l，m で囲まれる部分の面積を，k を用いて表せ．

標準 13.130 次の問いに答えよ． (九大 [文]2002) 1

(1) 原点を中心とする半径 r ($r > 0$) の円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$ax + by = r^2$$

で与えられることを示せ．

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $C : y = x^2 + 1$ の両方に接する直線は 3 本ある．これら接線の方程式を求めよ．

(3) 問 (2) における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする．接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 13.131 2 次関数 $f(x)$ が

$$f'(x)\{2f'(x) - x\} = 6f(x) + 2x + 8$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2006) 8

(1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) k は正の実数とする．次の (i)，(ii) に答えよ．

(i) 点 $(0, -k)$ から曲線 $y = f(x)$ に引いた 2 本の接線の方程式を求めよ．

(ii) (i) で求めた 2 本の接線と曲線 $y = f(x)$ によって囲まれた部分の面積が $2\sqrt{3}$ となるような k の値を求めよ．

標準 13.132　p を正の定数として，放物線 $C : y = (x-p)^2 + p^2$ を考える．C の 2 本の接線 l，m を考え，接点の x 座標を，それぞれ a，b とする．ただし，$a < 0$，$b > 0$ とする．次の問いに答えよ．　(長崎大学 2014) 1

(1) l と m の方程式を求めよ．

(2) l，m が原点を通るとき，a，b を p を用いて表せ．

(3) l，m が原点を通るとき，放物線 C と 2 本の接線 l および m によって囲まれた図形の面積を S とする．S を p を用いて表せ．

標準 13.133　放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ を考える．2 本の直線

$$\ell_1 : y = \frac{5}{2}x \quad \text{および} \quad \ell_2 : y = -\frac{1}{2}x$$

は C に接するものとする．C と ℓ_1 の接点を P，C と ℓ_2 の接点を Q とする．以下の問いに答えよ．　(九工大 [情]2014) 1

(1) α，β，γ $(\alpha \neq 0)$ を定数とするとき，2 次方程式 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ が重解をもつための条件を求めよ．

(2) b の値を求めよ．また，c を a を用いて表せ．

(3) P，Q の x 座標を a を用いて表せ．

(4) a の値にかかわらず C の頂点は直線 m 上にある．m の方程式を求めよ．

(5) C と ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

標準 13.134　曲線 $y = x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする．ただし，$a < 0 < b$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ．　(九大 [文]2009) 4

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形 PRQS とする．折れ線 PSQ と曲線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) $\angle \mathrm{PRQ} = 90^\circ$ をみたしながら P と Q が動くとき，(2) で求めた面積の最小値を求めよ．

標準 13.135　定数 $a < 1$ に対し，放物線 $C_1 : y = 2x^2 + 1$，$C_2 : y = -x^2 + a$ を考える．以下の問いに答えよ．　(九大 [文]2017) 1

(1) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ．

(2) C_1 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

13.9 問題研究

13.9.1 面積公式

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x+k)^2$，$g(x)=\dfrac{1}{3}(x+k)^3$ とすると (k は定数)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+kx+\frac{1}{2}k^2$$
$$g(x)=\frac{1}{3}x^3+kx^2+k^2x+\frac{1}{3}k^2$$

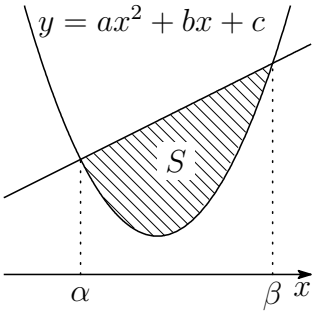
したがって　　$f'(x)=x+k,\quad g'(x)=x^2+2kx+k^2=(x+k)^2$

よって　　$\boldsymbol{\displaystyle\int (x+k)\,dx=\frac{1}{2}(x+k)^2+C}$　　(C は積分定数)

$$\boldsymbol{\int (x+k)^2\,dx=\frac{1}{3}(x+k)^3+C}$$

上の積分公式を使って，$a>0$ のとき放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線で囲まれた部分の面積を求めてみる $(\alpha<\beta)$.

［1］直線の方程式を $y=mx+n$ とすると



$$(mx+k)-(ax^2+bx+c)$$
$$=-a(x-\alpha)(x-\beta)$$

したがって

$$\begin{aligned}S&=-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx\\&=-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx+a(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\,dx\\&=-a\left[\ \frac{1}{3}(x-\alpha)^3\ \right]_\alpha^\beta+a(\beta-\alpha)\left[\ \frac{1}{2}(x-\alpha)^2\ \right]_\alpha^\beta\\&=\boldsymbol{\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}\end{aligned}$$

また，a の符号に関係なく　$\boldsymbol{S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3}$

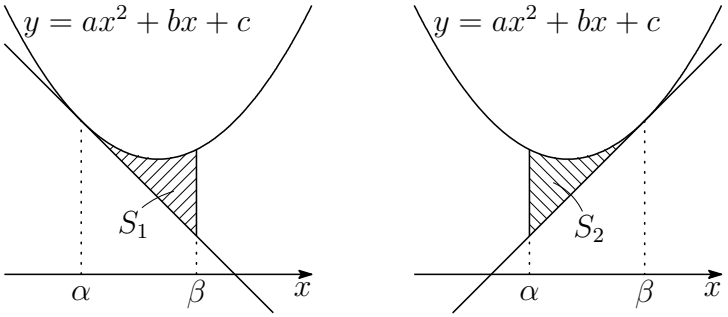
122 ページの 13.104(宮崎大学 2005) や 13.105(九工大 [工]2011) では

$$\int_{\alpha}^{\beta}(\beta-x)(x-\alpha)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を証明させる問題も出題されている．これらの公式を覚えるだけでなく，自分でも導けるようにしておくことも大切である．

［2］下の図の直線の方程式を $y=mx+n$ とすると

$$\begin{aligned}
S_1&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}dx\\
&=a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\,dx=a\left[\,\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\,\right]_{\alpha}^{\beta}=\boldsymbol{\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3}\\
S_2&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}dx\\
&=a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx=a\left[\,\frac{1}{3}(x-\beta)^3\,\right]_{\alpha}^{\beta}\\
&=-\frac{a}{3}(\alpha-\beta)^3=\boldsymbol{\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3}
\end{aligned}$$

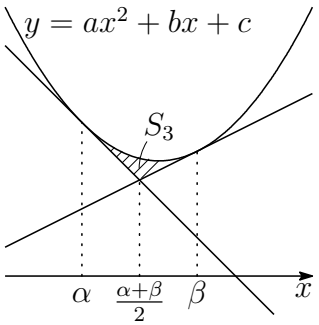


また，S_1，S_2 は，a の符号に関係なく　$\boldsymbol{\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3}$

数学 II では，放物線と直線で囲まれた図形の面積を求める問題は頻出である．入試対策として最も重要な単元である．

［3］$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$.
$y=f(x)$ 上の 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ における接線の方程式は，それぞれ

$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha),$$
$$y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$$



上の 2 式から y を消去すると

$$f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$$

ゆえに $\quad \{f'(\beta)-f'(\alpha)\}x+f(\beta)-f(\alpha)=\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha) \quad \cdots(*)$

このとき
$$f'(\beta)-f'(\alpha)=2a(\beta-\alpha),$$
$$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)\{a(\alpha+\beta)+b\},$$
$$\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)=(\beta-\alpha)\{2a(\alpha+\beta)+b\}$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$2a(\beta-\alpha)x+(\beta-\alpha)\{a(\alpha+\beta)+b\}=(\beta-\alpha)\{2a(\alpha+\beta)+b\}$$

$\beta-\alpha\neq 0$ であるから $\quad x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

直線 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ によって斜線部分を 2 つに分けて求めると
(［2］の結果を利用する)

$$S_3=\frac{a}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3+\frac{a}{3}\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$$
$$=\boldsymbol{\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3}$$

また，a の符号に関係なく $\quad \boldsymbol{S_3=\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3}$

第 14 章　平面上のベクトル（数学B）

14.1　ベクトルと図形

基本 14.1 正六角形 ABCDEF において，辺 DE の中点を P とし，線分 AP と BF の交点を Q とする．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2014) 5

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を用いて表せ．

(2) AQ : QP を最も簡単な整数の比で表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$ のとき，△BPQ の面積を求めよ．

基本 14.2 平面に四角形 ABCD があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とおくとき，頂点 C は

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}$$

を満たすものとする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2008) 4

(1) 直線 AB と DC の交点を E，直線 AD と BC の交点を F とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) 線分 BD の中点を Q，線分 EF の中点を R とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ．

(3) 線分 AC の中点を P とするとき，3 点 P，Q，R は同一直線上にあることを証明せよ．

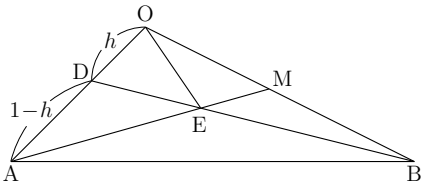
基本 14.3 △ABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を P，辺 AC を 1 : 2 に内分する点を Q とし，辺 BC 上に点 R があるとする．　(大分大学 2015) 2

(1) 線分 PQ の中点を M とし，点 A，M，R が一直線上にあるとき，BR : RC を求めなさい．

(2) △ABC の重心 G と △PRQ の重心 H が一致するとき，BR : RC を求めなさい．

(3) 直線 AR，BQ，CP が一点で交わるとき，BR : RC を求めなさい．

基本 14.4 △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 OA を $h : (1-h)$ $(0 < h < 1)$ に内分する点を D とし，線分 AM，BD の交点を E とする．次の各問に答えよ．　(琉球大学 2006) 5



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および h で表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 4$，$\angle \mathrm{AOB} = 60°$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ のとき，h の値を求めよ．

基本 14.5 平面上に △OAB と点 P があり，実数 k，m，n に対して

$$k\overrightarrow{\mathrm{PO}} + m\overrightarrow{\mathrm{PA}} + n\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{0}$$

が成り立つとする．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2014) 2

(1) $k = 4$，$m = 1$，$n = 2$ のとき，△POA，△POB，△PAB の面積比を最も簡単な整数の比で表せ．

(2) k を 0 以上の定数とする．点 P が $m \geqq 0$，$n \geqq 0$，$m + n = 3$ を満たしながら動くとき，点 P の軌跡は線分になることを示せ．

(3) 点 P が $k \geqq 1$，$m \geqq 0$，$n \geqq 0$，$m + n = 3$ を満たしながら動くとき，点 P の存在する領域 D を図示せよ．また，領域 D の面積は △OAB の面積の何倍になるかを求めよ．

基本 14.6 平面上に △ABC と点 O がある．△ABC の内部に点 D があって，三角形の面積比が

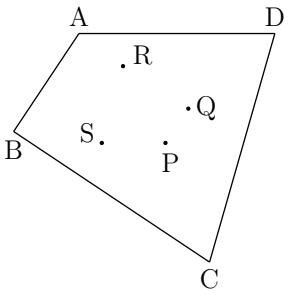
$$\triangle \mathrm{DBC} : \triangle \mathrm{DCA} : \triangle \mathrm{DAB} = p : q : r$$

であるとする．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2015) 3

(1) 直線 AD と辺 BC の交点を S，直線 BD と辺 AC の交点を T とするとき，BS : SC および CT : TA を p, q, r を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{p\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{p + q + r}$ となることを示せ．

基本 14.7 右図のような四角形 ABCD について，すべての内角の大きさは 180° 未満とする．△BCD の重心を P，△CDA の重心を Q，△DAB の重心を R，△ABC の重心を S とする．ただし，点 P と点 R は直線 AC 上になく，点 Q と点 S は直線 BD 上にないものとする．このとき，次の各問に答えよ．



(宮崎大学 2013) 10

(1) AC//RP を示せ．

(2) AB//QP を示せ．

(3) 四角形 ABCD が円に内接するとき，4 点 P，Q，R，S は同一円周上にあることを示せ．

標準 14.8 $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ とする．平行四辺形 ABCD の辺 BC を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点を P とし，辺 CD を $1-\beta:\beta$ に内分する点を Q とする．また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ として次の問いに答えよ． (九大 [文]2004) 3

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 長さの比 $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$ および $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(3) $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AD}=1$，$\angle\mathrm{DAB}=60^\circ$ とするとき，△AQR の面積を求めよ．

標準 14.9 座標平面に 3 点 O(0, 0)，A(2, 6)，B(3, 4) をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす．また，実数 s と t に対し，点 P を

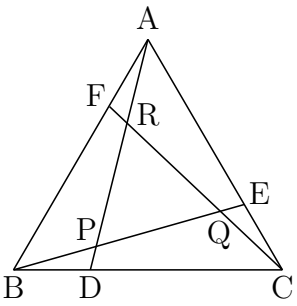
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [理]2009) 1

(1) 点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ．

(2) s を定数として，t を $t\geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ．

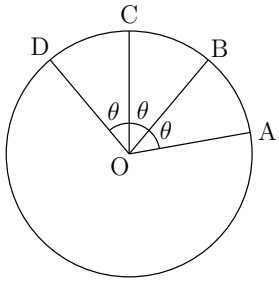
標準 14.10 右図の正三角形 ABC において，辺 BC，CA，AB を $m : n$ $(0 < m < n)$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．また，線分 AD と BE の交点を P，線分 BE と CF の交点を Q，線分 CF と AD の交点を R とする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2003) 11



(1) △PQR は正三角形であることを示せ．

(2) AR : AP $= m : n$ であることを示せ．

標準 14.11 右図のように，中心 O，半径 1 の円周上に相異なる 4 つの点 A，B，C，D を $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COD} = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ となるようにとる．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2005) 7



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，θ を用いて表せ．

(2) 線分 AC と線分 BD の交点を P とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，θ を用いて表せ．

14.2　ベクトルの内積

□□ **14.12** 平面上の 3 点 A，B，C に対して $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 5$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3$ である．$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ を求めよ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積とする．

(福岡教育大学 2010) 5

□□ **14.13** $|\vec{a}| = 3$，$|\vec{b}| = 2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，$|\vec{a} - 3\vec{b}|$ を求めよ．

(琉球大学 2012) 5

□□ **14.14** 平面上に 3 点 O(0, 0)，A(1, $\sqrt{3}$)，P($\cos\theta$, $\sin\theta$) をとる．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の最大値と，そのときの θ の値を求めよ．(琉球大学 2015) 5

□□ **14.15** 三角形 ABC の三辺を AB $= 4$，AC $= 3$，BC $= \sqrt{13}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおくとき，内積 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ．また，三角形 ABC の重心を G とするとき，線分 AG の長さを求めよ．　(琉球大学 2010) 6

基本 14.16 大きさ 1 のベクトル $\vec{a}$ と，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{b}$ のなす角を θ とする．(大分大学 2016) 1

(1) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ が最小となるような実数 t の値を $|\vec{b}|$，θ を用いて表しなさい．

(2) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる．$|\vec{b}|$ および $\cos\theta$ の値を求めなさい．

基本 14.17 △ABC において，$\angle A=60°$，$AB=2$，$AC=1$ とする．$\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする．また，$\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の垂直 2 等分線の交点を E とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．(福岡教育大学 2008) 2

(2) $\overrightarrow{AD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) AD : AE を求めよ．

基本 14.18 一辺の長さが 2 の正三角形 OAB において，線分 OA を 1 : 3 に内分する点を P，線分 OB を 3 : 1 に内分する点を Q とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問に答えよ．(佐賀大学 2013) 1

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 線分 PQ の長さを求めよ．

(4) 線分 OB の中点を C とし，線分 AC と線分 PQ の交点を R とする．$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

基本 14.19 三角形 ABC において，$AB=2$，$AC=1$，$\angle BAC=120°$ とし，実数 $k>0$，$l>0$ に対して，$4\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ で与えれている点を P，直線 AP と直線 BC との交点を D とし，$\overrightarrow{AQ}=l\overrightarrow{AD}$ で与えられている点を Q とする．このとき，次の各問に答えよ．(鹿児島大学 2001) 6

(1) 線分の長さの比 BD : DC を k を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ となるとき，k の値を求めよ．

(3) (2) の k の値に対して，点 Q が三角形 ABC の外接円の周上にあるとき，l の値を求めよ．

基本 14.20 △OAB について $\angle AOB=\dfrac{2}{3}\pi$ であり，$|\overrightarrow{OA}|=a$，$|\overrightarrow{OB}|=b$ とする．点 O から辺 AB に垂線をおろし，辺 AB との交点を H とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，a，b を用いて表せ．(福岡教育大学 2003) 3

基本 14.21　平面上の 3 点 O，A，B は同一直線上にないとし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の長さはそれぞれ $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=8$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=7$ とする．点 P を線分 AB を 2 : 1 に内分する点とする．また，2 点 O，P を通る直線と，線分 AB の垂直二等分線との交点を E とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2002) 6

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 s，t を求めよ．

基本 14.22　△OAB において，OA = 3，OB = 2 とし，辺 AB の中点を M，∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を D とする．また直線 OD に点 A から下ろした垂線の足を E とし，直線 OM と直線 AE の交点を F とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2003) 6

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

基本 14.23　△ABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 3 : 1 に内分する点を E とし，線分 CD，BE の交点を P とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．　(琉球大学 2014) 5

(2) AB = 3，AC = 4，$\mathrm{AP}=\sqrt{7}$ のとき，∠BAC の大きさを求めよ．

基本 14.24　OA = 3，OB = 2，∠AOB = 60° の △OAB において，辺 AB を 3 : 1 に内分する点を P，辺 OB の中点を Q，OP と AQ の交点を R とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表しなさい．　(大分大学 2005) 2

(2) 線分 PQ の長さを求めなさい．

(3) OR : RP を求めなさい．

(4) △PQR の面積を求めなさい．

基本 14.25　3 点 O，A，B があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{5}{6}$ が成り立っている．OA の中点を P とし，半直線 AB 上に $\mathrm{AB}:\mathrm{AH}=1:s$ $(s>0)$ となる点 H をとる．　(大分大学 2011) 3

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(2) 直線 OH と直線 AB が垂直に交わるような s の値を求めなさい．

(3) (2) のとき，直線 OH と直線 PB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

基本 14.26 平面上に一辺の長さが k の正方形 OABC がある．この平面上に $\angle \mathrm{AOP} = 60°$，$\angle \mathrm{COP} = 150°$，$\mathrm{OP} = 1$ となる点 P をとり，線分 AP の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とおいて，次に答えよ． (九工大 [工]2006) 2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の長さを k を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を k と $\vec{a}$，$\vec{p}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ が平行になるときの k の値を求めよ．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が垂直になるときの k の値を求めよ．

基本 14.27 平面上に $\mathrm{OA} = 4$，$\mathrm{OB} = \sqrt{2}$ を満たす △OAB がある．頂点 B から直線 OA に下ろした垂線を BC とする．また，頂点 O から直線 AB に下ろした垂線を OD とする．このとき，点 C は辺 OA を 1 : 3 に内分しているとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ． (佐賀大学 2024) 1

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) 実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表すとき，s と t の値を求めよ．さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ の値を求めよ．

(3) 直線 BC と直線 OD の交点を P とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ．

基本 14.28 四角形 ABCD に対して次の ① と ② が成り立つとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}} \quad \cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad \cdots ②$$

このとき，四角形 ABCD は向かい合う辺の長さが等しくなる (すなわち平行四辺形になる) ことを示せ． (鹿児島大学 2011) 3

基本 14.29 △ABC を 1 辺の長さが 1 の正三角形とし，△ABC の外接円の中心を O とする．次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2015) 7

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさを求めよ．

(2) 点 P が △ABC の外接円上を動くとき，次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) 内積の和 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の値を求めよ．

(イ) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値と最小値を求めよ．

基本 14.30 平面上に互いに異なる 3 点 O，A，B があり，それらは同一直線上にはないものとする．OA = 2，OB = 3 とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b} = t$ とおく．∠AOB の二等分線と線分 AB との交点を C とし，直線 OA に関して点 B と対称な点を D とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2012) 3

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるとき，∠AOB と OC を求めよ．

標準 14.31 次の各問いに答えよ．　(九大文系 2023) 3

点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a,\ c), \quad \vec{n} = (b,\ d)$$

に対して，$D = ad - bc$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D = 0$ であることを示せ。以下，$D \neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}$，$\vec{w}$ で

$$\vec{m}\cdot\vec{v} = \vec{n}\cdot\vec{w} = 1, \quad \vec{m}\cdot\vec{w} = \vec{n}\cdot\vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) 座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して

$$r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$$

を満たす実数 r と s を $\vec{q}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ を用いて表せ。

標準 14.32 平面上に OA⊥AP，OB⊥BP を満たす四角形 OAPB がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ と表すと，

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \frac{1}{7}$$

が成立している．　(大分大学 2010) 3

(1) ∠AOB = θ として，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(3) △OAB と △PBA の面積比を求めなさい．

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 2\sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めなさい．

標準 14.33 △OAB において，OA = 1，OB = $\sqrt{2}$，∠AOB = 90° とする．辺 AB を 2 : 1 に内分する点を P，線分 OP を P の方へ延長してその上の点を Q とするとき，次の問いに答えなさい．(大分大学 2003) 3

(1) △PQB = 2△POA のとき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表しなさい．

(2) ∠OQA = ∠OQB のとき，OP : PQ を求めなさい．

標準 14.34 各辺の長さが 1 の正三角形 OAB がある．$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおき，線分 AB を 1 : 2 に内分する点を C とする．さらに，2 点 P，Q は，正の実数 k，l について，$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OQ} = l\overrightarrow{OC}$ を満たすものとする．このとき，次の各問に答えよ．(宮崎大学 2011) 4

(1) 3 点 A，P，Q が一直線上にあるとき，k と l の関係式を求めよ．

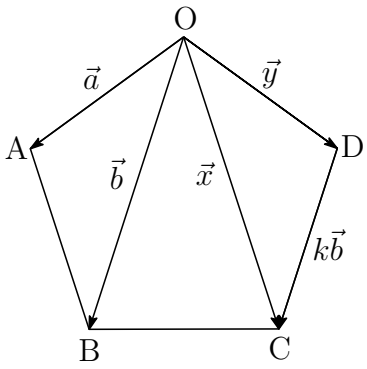
(2) 3 点 A，P，Q が一直線上にないものとし，△APQ の重心が ∠AOB の二等分線上にあるとする．このとき，k と l の関係式を求めよ．

(3) (2) のもとで，AP = AQ となるとき，k の値を求めよ．

標準 14.35 一辺の長さ 1 の正五角形 OABCD について，OB と DC は平行である．

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\quad \overrightarrow{OB} = \vec{b},\quad \overrightarrow{OC} = \vec{x},$$
$$\overrightarrow{OD} = \vec{y},\quad \overrightarrow{DC} = k\vec{b}\ \ (k \text{ は実数})$$

とするとき，次の各問に答えよ．(宮大 [医]2016) 5



(1) k の値を求め，$\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いてそれぞれ表せ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) $\vec{a}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよ．

標準 14.36 相異なる 3 点 O，A，B に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ が

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}\neq 1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}\neq -1$$

を満たしているものとする．$t=\vec{a}\cdot\vec{b}$ とおくとき，次の各問に答えよ．ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を，また，$|\vec{a}|$ はベクトル $\vec{a}$ の大きさを表す．

(宮崎大学 2001) 6

(1) 直線 OB に関して，点 A と対称な点を C とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と t を用いて表せ．

(2) 直線 OC に関して，点 A と対称な点を D とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\vec{b}$ が平行となるような t の値をすべて求めよ．

標準 14.37 座標平面において，点 $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とし，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円を S とする．S 上に点 $\mathrm{N}(0,\ 1)$ をとり，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，O は原点を表すものとする．

(鹿児島大学 2010) 3

(1) x 軸上に点 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ をとり，直線 NP と円 S との交点のうち，N と異なるものを Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a\vec{p}+b\vec{n}$ の形で表したとき，a，b を x で表せ．

(2) x 軸上に 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ 0)$ をとる．直線 NP_1 と円 S との交点のうち，N と異なるものを Q_1 とし，直線 NP_2 と円 S との交点のうち，N と異なるものを Q_2 とする．このとき，$x_1x_2=-1$ が成り立っていれば

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}_2}=\vec{0}$$

が成立することを証明せよ．ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルを表すものとする．

標準 14.38 座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$，$n=1,2,\cdots$ に対して，点 P_1 から原点 O と点 P_n $(n\geqq 2)$ を通る直線へ下ろした垂線を $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_n$ とし，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ のなす角を θ_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(熊大 [文]2001) 3

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}$ の成分を求めよ．

(2) $\cos\theta_n$ を求めよ．

(3) $\tan\theta_n<1.01$ をみたす最小の n の値を求めよ．

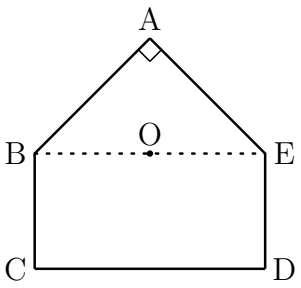
標準 14.39 △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を $\alpha : 1-\alpha$ に内分する点を P とする．ただし，$0 < \alpha < 1$ とする．線分 OP と AM の交点を Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはその延長と交わる点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，次の問いに答えよ． (九大 [理]2006) 2

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および α を用いて表せ．

(2) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\angle \mathrm{AOB} = \theta$ で $\cos\theta = \dfrac{1}{6}$ とする．このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と α を用いて表せ．

(3) (2) の条件のもとで，点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ．

標準 14.40 図のような五角形 ABCDE(角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形) において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする．線分 BE の中点を O とする．また，5 枚のカードがあり，それぞれに A，B，C，D，E と書いてある．カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す．この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする．たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$\mathrm{P}_i = \mathrm{B}$ である．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [文]2008) 3



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ の内積が 1 である確率を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ の内積を q_i とする．このとき，$q_1 q_2 \cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ．

標準 14.41 平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする．また，点 O は $4\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$ をみたしているとする．このとき，以下の問いに答えよ． (九大 [文]2011) 3

(1) 辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 10$ となることを示せ．

(3) $4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 = -4$ をみたす点を P とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ．

応用 14.42 △ABC において ∠CAB の二等分線に 2 つの頂点 B，C から垂線を引き，二等分線との交点をそれぞれ H, H′ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする．このとき以下の問いに答えなさい．　(分大 [医]2021) 7

(1) ベクトル $\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}$ の大きさは 1 であることを示しなさい．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CH'}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表しなさい．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CH'}}=\vec{0}$ であるとき，△ABC はどのような三角形になるか．その形状を答えなさい．

応用 14.43 点 O を原点とする座標平面において，点 P は中心が O，半径が 1 の円の周上を動き，点 Q は 4 点 A(2, 0)，B(0, 2)，C(−2, 0)，D(0, −2) を頂点とする四角形の周上を動くとする．ただし，P，Q は PQ = 2 を満たすように動くとする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮大 [医]2018) 6

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) 直線 PQ と点 O の距離の最大値と最小値を求めよ．

14.3　三角形の内心・外心・垂心

□□ **14.44** 三角形 ABC の垂心を H とする．次の等式が成り立つことを示せ．

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}$$

ただし，三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わる．この点を三角形の垂心という．　(鹿児島大学 2013) 3

基本 14.45 平面上に3点O，A，Bがあり，OA = 2，OB = 3，$\angle AOB = \dfrac{\pi}{3}$ とする．点Aから直線OBに垂線を下ろし，直線OBとの交点をHとする．また，点Bから直線OAに垂線を下ろし，直線OAとの交点をIとする．直線AHと直線BIの交点をPとし，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2015) 2

(1) $\overrightarrow{OH}$ を，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OP}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 線分OPの長さを求めよ．

基本 14.46 △OABにおいて，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$|\vec{a}| = \sqrt{3}$，$|\vec{b}| = \sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = t$ とする．点Aから直線OBに垂線APを下ろし，点Bから直線OAに垂線BQを下ろし，直線APと直線BQの交点をRとする． (大分大学 2013) 3

(1) t の範囲を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{OP}$ を t と $\vec{b}$ で，$\overrightarrow{OQ}$ を t と $\vec{a}$ で表しなさい．

(3) $t = 1$ のとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表し，$|\overrightarrow{OR}|$ を求めなさい．

基本 14.47 平面上に三角形ABCと点Oがあり，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} \neq 0$$

を満たしていると仮定する．辺BCの中点をM，線分OBの中点をNとし，三角形OBCの外心をPとする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2015) 4

(1) M ≠ P のとき，線分MPと線分OAは平行であることを示せ．

(2) $\overrightarrow{MP} = t\vec{a}$ とおいて，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{NP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および実数 t を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{NP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

基本 14.48 △ABCにおいて，AB = 5，BC = 7，CA = 6とする．$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ． (長崎大学 2014) 2

(1) △ABCの内心をIとする．∠Aの2等分線と∠Bの2等分線は点Iで交わる．∠Bの2等分線と辺ACの交点をDとするとき，AD : DC と BI : ID を求めよ．

(2) $\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\angle A = \theta$ とする．$\cos\theta$ と内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(4) 実数 x，y を用いて $\overrightarrow{AP} = x\vec{b} + y\vec{c}$ と表される点Pを考える．点Pが辺ABの垂直2等分線上にあるとき，x と y が満たす関係式を求めよ．

(5) △ABCの外心をOとする．辺ABの垂直2等分線と辺ACの垂直2等分線は点Oで交わる．$\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

標準 14.49　3 辺の長さが AB = 4，BC = 3，CA = 5 である直角三角形 ABC と，その内側にあって 2 辺 AB および AC に接する円 O を考える．この円の半径を r とし，中心 O から AB に引いた垂線と AB との交点を H とする．また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きで大きさが 1 のベクトルを，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\vec{u}$ $(t > 0)$ とする．次の問いに答えよ．　(長崎大学 2011) 2

(1) 直線 AO と辺 BC との交点を M とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を用いて表せ．

(2) ベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ の内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HO}}$ を，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ および t を用いて表せ．また，円 O の半径 r を t で表せ．

(3) 円 O が辺 BC にも接するとき，その中心を I とする．すなわち，I は三角形 ABC の内心である．そのときの t の値と，内接円 I の半径を求めよ．

(4) 円 O と内接円 I が共有点をもたないような t の範囲を求めよ．

標準 14.50　三角形 ABC において，AB = AC = 1，$\angle \mathrm{A} = \theta$ とし，この三角形の外接円の中心を O とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とし，実数 s，t に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\vec{b} + t\vec{c}$ となる点 P を考える．$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ であり，P が外接円の周上にあるとき，次の問いに答えよ．　(長崎大学 2008) 5

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) s，t の満たすべき関係式を求めよ．

(3) $s + t = u$，$st = v$ とおくとき，v のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) 上の (3) において，v が最小値をとるときの $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．また，中心 O との位置関係が分かるように，点 P を図示せよ．

標準 14.51 平面上に △ABC がある．点 O を △ABC の外心とし，外接円の半径を R とする．また，点 H は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を満たす点とする．ただし，点 H は 3 点 A，B，C と異なる点であるとする．
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．
(長崎大学 2020) 4

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，AH⊥BC，CH⊥AB であることを示せ．

(2) 線分 OH の中点を P とし，△ABC の各辺 AB，BC，CA の中点を，それぞれ L，M，N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，P は △LMN の外心になることを示せ．

(3) 線分 AH の中点を D とするとき，P は線分 DM の中点になることを示せ．

(4) 頂点 A から直線 BC に垂線を下ろし，直線 BC との交点を E とするとき，E は △LMN の外接円の周上にあることを示せ．

標準 14.52 △OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる．ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする．3 つの三角形 △OAP，△OBP，△ABP の面積をそれぞれ a，b，c とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a，b を用いて表せ．(九大 [理]2008) 3

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a，b，c を用いて表せ．

(3) 3 辺 OA，OB，AB の長さはそれぞれ 3，5，6 であるとする．点 P を中心とし，3 直線 OA，OB，AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

標準 14.53 四面体 OABC において，辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を ℓ，辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m，辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする．$\ell\perp m$，$m\perp n$，$n\perp\ell$ であり，$\mathrm{AB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CA}=2$ のとき，以下の問いに答えよ．(九大 [理]2008) 3

(1) 直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(2) 四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ．

応用 14.54　三角形 OAB で $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$ とする．このとき次の問いに答えよ．　(分大 [医]2012) 9

(1) 三角形 OAB の外接円の中心 (外心)Q の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(2) 原点 O と A からそれぞれの対辺 AB と OB に下ろした垂線の交点 (垂心) を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の値を求めよ．

(4) 三角形 OAB の内接円の中心 (内心)P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

14.4　三角形の面積

標準 14.55　△OAB の辺 AB，OB の中点をそれぞれ C，D とする．辺 OA 上に OE : EA = 1 : 4 となる点 E をとる．線分 OC と線分 BE，AD との交点をそれぞれ P，Q とし，線分 AD と線分 BE の交点を R とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，次の問いに答えよ．　(熊大 [文]2006) 4

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(3) $|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=1$，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ のとき，△PQR の面積を求めよ．

標準 14.56　放物線 $C: y=x^2$ 上に異なる 2 点 P，Q をとる．P，Q の x 座標をそれぞれ p，q (ただし，$p<q$) とする．直線 PQ の傾きを a とおく．以下の問いに答えよ．

(1) a を p，q を用いて表せ．　(長崎大学 2015) 3

(2) $a=1$ とする．直線 PQ と x 軸の正の向きとなす角 θ_1(ただし，$0<\theta_1<\pi$) を求めよ．

(3) $a=1$ とする．放物線 C 上に点 R をとる．R の x 座標を r(ただし，$r<p$) とする．三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR と x 軸の正の向きとのなす角 θ_2(ただし，$0<\theta_2<\pi$) を求めよ．また，このとき直線 PR の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ．さらに，正三角形 PQR の面積を求めよ．

(4) $a=2$ とする．放物線 C 上に点 S(1, 1) をとる．三角形 PQS が $\angle\mathrm{S}=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ．

応用 14.57　曲線 $y=f(x)=x(4-x)$ 上に四点 O(0, 0)，A(a, $f(a)$)，B(b, $f(b)$)，C(3, 3)　$(0<a<b<3)$ をとる．　(分大 [医]2004) 9

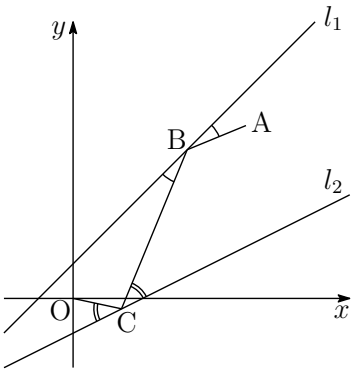
(1) 四角形 OABC の面積が最大になるときの a，b の値を求めよ．

(2) 角 OAC の大きさが最小になるときの a の値を求めよ．

14.5 ベクトル方程式

標準 14.58 O を原点とする座標平面上の 2 直線 $x-y+1=0$ と $x-2y-2=0$ をそれぞれ l_1，l_2 とし，点 A$(5,\ 5)$ をとる．点 B と点 C はそれぞれ l_1，l_2 上にあるとする．ただし，右図の影をつけた部分の角が示しているように，線分 AB，BC と直線 l_1 とのなす角は等しく，線分 BC，CO と直線 l_2 とのなす角は等しいとする．

(佐賀大学 2008) 1



(1) $a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$ を満たす定数 a，b，c に対して，直線 $ax+by+c=0$ を l とする．直線 l に関して点 P$(m,\ n)$ と対称な点 Q の座標は

$$\left(m-\frac{2a(am+bn+c)}{a^2+b^2},\ n-\frac{2b(am+bn+c)}{a^2+b^2}\right)$$

であることを証明せよ．ただし，P は l 上の点でないとする．

(2) 点 B と点 C の座標を求めよ．

14.6　問題研究

14.6.1　オイラー線

△ABC の垂心 H について，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ とする．線分 AB および BC の垂直二等分線の方程式は，実数 s，t を用いて

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+s\vec{c},\quad \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+t\vec{a}$$

△ABC の外心を O とすると，O はこれらの交点であるから

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+s\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+t\vec{a}\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{c}=\vec{0}$$

$\vec{a}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立であるから　　$s=t=\dfrac{1}{2}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{HO}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

また，△ABC の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

上の 2 式から　　$\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{HO}}$

よって，垂心，重心，外心は同一直線 (**オイラー線**) 上にあり，G は線分 HO を 2 : 1 に内分する点である．

ここで，146 ページの 14.44(鹿児島大学 2013) の結果から

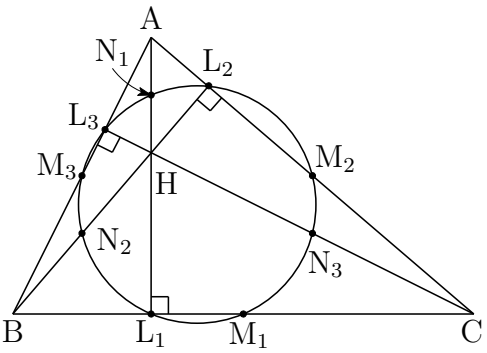
$$k=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\quad \cdots(*)$$

とおく．△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\begin{aligned}R^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{HA}}-\overrightarrow{\mathrm{HO}}|^2&=\left|\vec{a}-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|^2\\&=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)\end{aligned}$$

14.6.2 9 点円 (オイラー円)

△ABC の垂心 H から辺 BC，CA，AB にそれぞれ垂線 HL_1，HL_2，HL_3 を引く．また，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ M_1，M_2，M_3 とし，さらに，HA，HB，HC の中点をそれぞれ N_1，N_2，N_3 とする．



3 点 L_i, M_i, N_i を通る円を C_i とすると $(i = 1, 2, 3)$，C_i は M_iN_i を直径とする円である．C_i 上の点 P_i に対して $\vec{x} = \overrightarrow{HP_i}$ とおく．まず，C_1 のベクトル方程式は

$$\left(\vec{x} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right) \cdot \left(\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}\right) = 0$$

(∗) に注意して $$\left|\vec{x} - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\right|^2 = \frac{1}{16}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2k) \qquad \cdots (**)$$

同様の計算により，C_2 および C_3 のベクトル方程式も (∗∗) に一致する [1]．ゆえに L_i, M_i, N_i $(i = 1, 2, 3)$ は同一円周上にあり，この円を **9 点円 (オイラー円)** という．(∗∗) の中心を Q とすると，Q もオイラー線上にあり，Q は △ABC の垂心 H と外心 O の中点である．また，(∗∗) の半径を r とすると

$$r^2 = \frac{1}{16}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2k)$$

したがって，上式および前ページの結果から

$$r^2 = \frac{1}{4}R^2 \quad \text{すなわち} \quad r = \frac{1}{2}R$$

これらの内容については，図形の性質 (数学 A) の分野からの出題が多いが，複素数平面 (数学 III) で出題されることもある [2]．

[1] ベクトル方程式における $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の対称性からも明らか．
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf 5

第 15 章　空間のベクトル（数学B）

15.1　ベクトルの成分

□□ **15.1** O を原点とする xyz 座標空間において，4 点 A$(-1,\ 5,\ 5)$，B$(1,\ 4,\ -2)$，C$(3,\ 1,\ -3)$，D$(4,\ -2,\ 1)$ を考える．また，点 O に関する位置ベクトルが，定数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と表される点を E とする．このとき，3 点 A，C，E が同一直線上にあるように t の値を定め，AE : EC を求めよ．　(福岡教育大学 2001) 1

基本 15.2 点 O を原点とする空間の 2 点 A$(1,\ 3,\ 5)$，B$(6,\ -2,\ 10)$ の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とし，直線 AB 上の点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とする．

(1) $|\vec{p}|$ が最小となる点 P を求めなさい．　(大分大学 2002) 5

(2) (1) で求めた点 P に対して，△OAP の面積を求めなさい．

基本 15.3 中心が $(2,\ 0,\ 1)$，半径が $2\sqrt{5}$ の球面が yz 平面と交わってできる円を C とする．次の問いに答えよ．　(琉球大学 2011) 2

(1) C の中心の座標と半径を求めよ．

(2) 点 P は C 上を動き，点 Q は xy 平面上の直線 $x=y$ 上を動くとする．線分 PQ の長さの最小値，およびそのときの P，Q の座標を求めよ．

15.2　ベクトルの内積

□□ **15.4** 座標空間内の 3 点 A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(1,\ s,\ t)$ を頂点とする三角形 ABC の重心を G，原点を O とする．OG⊥AG，OG⊥AB となるときの s と t の値を求めよ．　(琉球大学 2016) 5

基本 15.5 空間に 3 点 A$(1,\ 2,\ 6)$，B$(7,\ 0,\ 9)$，C$(s,\ t,\ 0)$ がある．ただし，s，t は実数とする．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2016) 8

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を s と t を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ となるとき，s と t の関係式を求めよ．

(3) △ABC が $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ の直角二等辺三角形となるとき，s と t の値を求めよ．

基本 15.6 a を定数とする．座標平面において，3 点 A$(3, -2, -2)$，B$(-1, -1, 3)$，C$(1, a, 3a+2)$ がある．線分 AB を 3 : 2 に外分する点を D とするとき，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2006) 7

(1) 直線 AB と直線 CD が直交するときの a の値を求めよ．

(2) a は (1) で求めた値とし，G を三角形 BCD の重心とする．このとき，原点からの距離が 5 となるような線分 AG 上の点の座標を求めよ．

基本 15.7 a，b，c を定数とする．O を原点とする xyz 座標空間において，3 点 A$(a, -9, b)$，B$(2, c, 3)$，C$(-3, 2, 0)$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2001) 7

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすように a，b，c の値を定めよ．

(2) (1) で定めた a，b，c の値に対して，次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) 点 D$\left(-\dfrac{8}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{19}{5}\right)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(イ) 点 O に関する位置ベクトルが，定数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と表される点を E とする．3 点 A，C，E が同一直線上にあるとき，AE : EC を求めよ．

基本 15.8 4 点 O$(0, 0, 0)$，A$(2, 1, 4)$，B$(3, 0, 1)$，C$(1, 2, 1)$ を頂点とする四面体 AOBC がある．　(琉球大学 2007) 2

(1) 3 点 O，B，C の定める平面に，点 A から垂線 AH を下す．点 H の座標を求めよ．

(2) 三角形 OBC の面積と四面体 AOBC の体積を求めよ．

(3) 四面体 AOBC に外接する球，すなわち，4 点 A，O，B，C を通る球面を考える．この球面の方程式を求めよ．

基本 15.9 座標空間内で，原点 O，A$(1, 0, 0)$，B$(b_1, b_2, 0)$，C(c_1, c_2, c_3) を頂点とする正四面体を考える．ただし，b_2 と c_3 は正とする．次の問いに答えよ．

(1) b_1，b_2 および c_1，c_2，c_3 を求めよ．　(佐賀大学 2012) 1

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ．

(3) P は直線 BC 上の点で，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であるとする．P の座標を求めよ．また $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ．

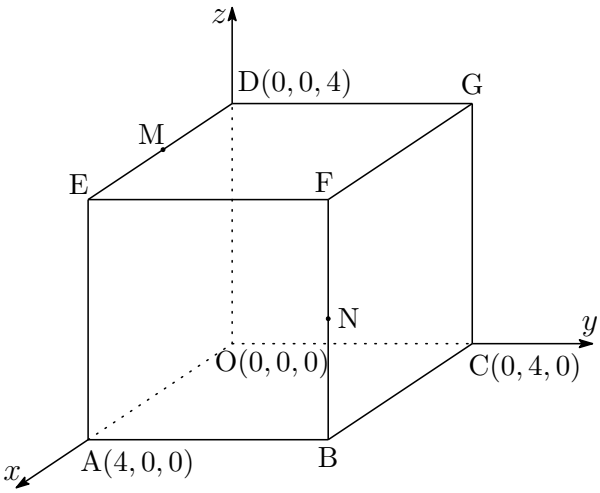
基本 15.10 xyz 空間に点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)，D(1, 1, 1) をとる．点 A，B，C，D を頂点とする四面体 T について，次の問いに答えよ．

(長崎大学 2001) 5

(1) z 軸上の点 $(0,\ 0,\ a)$ を通り z 軸に垂直な平面で T を切ったときの切り口の頂点 P，Q，R，S の座標を，a を用いて表せ．ただし，a は $0 < a < 1$ なる定数とし，P，Q，R，S はそれぞれ線分 AC，AD，BD，BC 上にあるものとする．

(2) (1) における切り口の面積 $S(a)$ と，その最大値，およびそのときの a の値を求めよ．

基本 15.11 4 点 O(0, 0, 0)，A(4, 0, 0)，C(0, 4, 0)，D(0, 0, 4) をとり，下図のように線分 OA，OC，OD を 3 辺とする立方体 OABC-DEFG を考える．辺 DE，BF の中点を，それぞれ M，N とする．以下の問いに答えよ． (長崎大学 2015) 2



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{GN}}$ を成分で表せ．

(2) $\angle \mathrm{MGN} = \theta$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) 3 点 G，M，N を頂点とする三角形 GMN の面積を求めよ．

(4) 三角錐(すい)FGMN において，三角形 GMN を底面としたときの高さを求めよ．

(5) 三角形 GMN を含む平面と線分 OF との交点を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を用いて表せ．

基本 15.12 空間上に相異なる 4 点 O，A，B，C があり，線分 OA，OB，OC は互いに直交している．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2010) 4

(1) 4 点 O，A，B，C からの距離が全て等しくなる点がただ一つ存在する．この点を G とする．線分 OA の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ が直交することを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

となることを示せ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の内積とする．

(2) (1) を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P}(1,\ \sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)$，$\mathrm{R}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とする．このとき線分 OP，OQ，OR は互いに直交していることを示せ．また，4 点 O，P，Q，R を通る球面の半径を求めよ．

基本 15.13 原点を O とする座標空間に，3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{C}(-2,\ 1,\ 3)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．　(九大 [文]2012) 1

(1) △ABC において，∠B は $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ．

(2) 点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする．
点 H の座標を求めよ．

(3) △OAH の面積を求めよ．

基本 15.14 座標空間内に 4 点 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{D}(3,\ 2,\ 0)$ を考え，線分 CD 上の点 $\mathrm{P}(x,\ 2,\ 0)$ に対して，三角形 PAB の面積を S とするとき，次の問いに答えよ．　(熊大 [文]2005) 3

(1) $\angle\mathrm{APB}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を x で表せ．

(2) S の最小値を求めよ．

標準 15.15 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 2,\ 1)$ がある．　(琉球大学 2010) 2

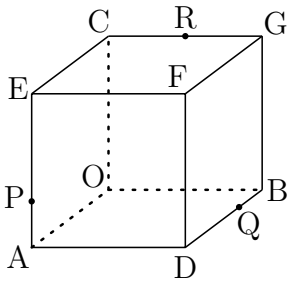
(1) z 軸上の点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ m)$ から直線 AB 上の点 H におろした垂線を CH とする．このとき，点 H が線分 AB 上にあるような m の値の範囲を求めよ．

(2) 点 H が線分 AB にあるとき，垂線 CH の長さの最大値，最小値とそのときの H の座標を求めよ．

(3) 三角形 OAB に外接する円の中心 P の座標とその半径 r を求めよ．

標準 15.16 右図のような1辺の長さが1の立方体 OADB-CEFG がある．辺 AE および辺 BD を $x : (1-x)$ に内分する点をそれぞれ P，Q とする．また辺 CG を $t : (1-t)$ に内分する点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，x および t の範囲は $0 < x < 1$，$0 < t < 1$ である．

(長崎大学 2002) 5



(1) △PQR の重心を S とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 直線 OS が △PQR に垂直となるとき，t を x を用いて表せ．

(3) (2) の場合の △PQR の面積を $f(x)$ とするとき，$f(x)$ が最小となる x の値と最小値を求めよ．

(4) $f(x)$ が最小となるとき，四面体 OPQR の体積を求めよ．

基本 15.17 空間内の点 A，B の座標をそれぞれ $(0,\ 0,\ 1)$，$(0,\ 0,\ -1)$ とし，原点を O とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2005) 6

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は A，B と異なる点で，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が垂直となるように動くものとする．このとき，x，y，z の満たすべき条件を求めよ．

(2) P が (1) の条件を満たすとき，直線 AP と xy 平面の交点を $\mathrm{Q}(u,\ v,\ 0)$ とする．u，v を x，y，z を用いて表せ．

(3) このとき，x，y，z を u，v を用いて表せ．

(4) P が (1) の条件を満たし，さらにベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ がベクトル $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$ に垂直となるように動くとき，Q は xy 平面上のどのような図形をえがくかを答えよ．

15.3 法線ベクトル

□□ **15.18** $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$\vec{b} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(福岡教育大学 2002) 5

基本 15.19 座標空間内の3点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$ を含む平面を H とする．以下の問いに答えよ．

(熊大 [文]2015) 2

(1) 点 $\mathrm{P}(-3,\ 2,\ 2)$ は H 上の点であることを示せ．

(2) 点 $\mathrm{Q}(1, -3, -4)$ を通る直線が H と直交するとき，その交点の座標を求めよ．

基本 15.20 空間内に 3 点 A(1, 2, 3)，B(2, −1, 4)，P がある．原点を O とするとき，次の問いに答えよ．(福岡教育大学 2004) 6

(1) $\angle \mathrm{AOB} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) 線分 OA と線分 OB を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ がそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直で，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = S$ のとき，P の座標を求めよ．

基本 15.21 空間内に 4 点 A(0, 0, 0)，B(2, 1, 1)，C(−2, 2, −4)，D(1, 2, −4) がある．(大分大学 2006) 3

(1) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値と $\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトルを 1 つ求めなさい．

(3) 点 D から，3 点 A，B，C を含む平面に垂直な直線を引き，その交点を E とするとき，線分 DE の長さを求めなさい．

(4) 四面体 ABCD の体積を求めなさい．

標準 15.22 $\mathrm{A_1}(1, 1, 1)$，$\mathrm{A_2}(2, 3, 1)$，$\mathrm{A_3}(2, 2, 2)$，$\mathrm{A_4}(4, 2, 0)$ を空間内の 4 点とし，O を原点とするとき，次の問いに答えよ．(佐賀大学 2009) 7

(1) $\mathrm{A_3}$ と $\mathrm{A_4}$ の中点を B とするとき，$\triangle \mathrm{A_1A_2B}$ の面積を求めよ．

(2) 2 つの四面体 $\mathrm{A_1A_2A_3B}$，および $\mathrm{A_1A_2A_4B}$ の体積をそれぞれ求めよ．

(3)
$$\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_4}})$$
を位置ベクトルに持つ点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{A_1P}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_1B}}$ を用いて表し，4 点 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，B，P は同一平面上にあることを示せ．

(4) $\mathrm{A_1}$ と $\mathrm{A_2}$ の中点を C とするとき，4 点 $\mathrm{A_3}$，$\mathrm{A_4}$，C，P は同一平面上にあることを示せ．

標準 15.23 空間において，3 点 A(5, 0, 1)，B(4, 2, 0)，C(0, 1, 5) を頂点とする三角形 ABC がある．以下の問いに答えよ．(長崎大学 2016) 2

(1) 線分 AB，BC，CA の長さを求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ．

(3) 原点 O(0, 0, 0) から平面 ABC に垂線を下し，平面 ABC との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくとき，実数 ℓ，m の値を求めよ．

(4) 直線 AH と直線 BC の交点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくとき，実数 k の値と三角形 HBC の面積 T を求めよ．

(5) 原点 O を頂点，四角形 ABHC を底面とする四角錐(すい) O-ABHC の体積 V を求めよ．

標準 15.24 a，b，c を正の定数とし，3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ の定める平面を α とする．また，原点を O とし，平面 α に垂直な単位ベクトルを $\vec{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3)$ とする．ただし，$n_1 > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(佐賀大学 2015) 8

(1) $\vec{n}$ を求めよ．

(2) 平面 α 上に点 H があり，直線 OH は α に垂直であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ および $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ を求めよ．

(3) △ABC の面積を S，△OBC の面積を S_1 とする．四面体 OABC の体積を考えることにより，$S_1 = n_1 S$ であることを示せ．

標準 15.25 座標空間の 6 点

$$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 3,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$
$$\mathrm{D}\left(3, -1,\ \frac{5}{6}\right),\ \mathrm{E}\left(8,\ 4, -\frac{1}{3}\right),\ \mathrm{F}\left(5,\ 3,\ \frac{1}{2}\right)$$

について，以下の問いに答えよ．

(熊大 [文]2022) 1

(1) 3 点 A，B，C は一直線にないこと，および 3 点 D，E，F は一直線上にないことを示せ．

(2) 3 点 A，B，C を通る平面と，3 点 D，E，F を通る平面の交わりとして得られる直線を ℓ とする．ℓ 上の点を 1 つと，ℓ と平行なベクトルを 1 つ求めよ．

標準 15.26 座標空間内の 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 1,\ 2),\ \mathrm{P}(4,\ 0, -1),\ \mathrm{Q}(4,\ 0,\ 5)$$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ．

(九大 [理]2022) 1

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ．

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P′ の座標を求めよ．

(3) 点 R が平面 α 上を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}| + |\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ．

標準 15.27 O を原点とする座標空間に一直線上にない 3 点 A，B，C がある．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示を $(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分表示を $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ とする．また，点 A を始点とし成分表示が $(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)$ となるベクトルの終点を D とする．次に答えよ．　(九工大 2022) 3

(1) 3 点 A，B，C の定める平面上の任意の点を P とする．このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の値が 0 になることを示せ．

以下では，3 点 A，B，C の座標をそれぞれ

$$(-1,\ 1,\ 2),\quad (3,-1,\ 0),\quad (1,\ 3,-2)$$

とする．

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(3) 正の実数 k に対して $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をみたす点 E がある．三角形 EBC の面積が $6\sqrt{5}$ であるとき，点 E の座標を求めよ．

(4) (3) で求めた点 E に対して，三角形 EBC の重心を G とする．以下の 2 つの条件をみたす点 Q の座標をすべて求めよ．

(条件 1)　$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$ は 3 点 E，B，C の定める平面に垂直である．

(条件 2)　四面体 QEBC の体積と四面体 EABC の体積が等しい．

応用 15.28 空間内に四面体 OABC があり，∠AOB，∠BOC，∠COA はすべて 90° であるとする．辺 OA，OB，OC の長さを，それぞれ a，b，c とし，三角形 ABC の重心を G とする．　(九大 [文]2003) 6

(1) ∠OGA，∠OGB，∠OGC がすべて 90° であるための条件を a，b，c の関係式で表せ．

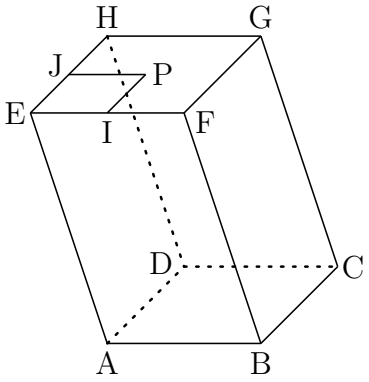
(2) 線分 BC を 1 : 2 に内分する点を D とする．点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く．このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ．

応用 15.29 空間内の図形について次の問いに答えよ. (九大 [理]2002) 4

(1) △ABC の面積は $\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ に等しいことを示せ. ここで, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ はベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ との内積を表す. 必要ならば, 二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい.

(2) 右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$, $|\overrightarrow{AE}|=2$ とし, $\angle FBC=\angle BCD=\frac{\pi}{2}$, $\angle EAB=\theta$ とする. ここで θ は $0<\theta<\pi$ なる定数とする. 面 EFGH 上に点 P をとり, 点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし, 点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす. $x=|\overrightarrow{EI}|$, $y=|\overrightarrow{EJ}|$ とするとき, △ACP の面積を θ, x, y を用いて表せ.

(3) (2) で点 P が面 EFGH 上を動くとき, △ACP の面積の最小値を求めよ.



(平行六面体 ABCD-EFGH)

15.4 空間図形

15.4.1 四面体

基本 15.30 四面体 OABC を考える. 辺 OA を 1 : 1 に内分する点を P とする. また辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q として, 辺 OC を 3 : 1 に内分する点を R とする. さらに三角形 ABC の重心を G とする. 3 点 P, Q, R を通る平面と線分 OG の交点を K とする. 線分 OK と KG の長さの比を求めよ. (鹿児島大学 2016) 4

基本 15.31 四面体 OABC がある. 辺 AC を 1 : 2 に内分する点を D とし, 線分 DB を 1 : 2 に内分する点を E とする. また, 線分 CE を延長した直線と辺 AB の交点を F とする. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を使って, $\overrightarrow{OD}$ および $\overrightarrow{OE}$ を表せ. (福岡教育大学 2005) 2

(2) CE : EF を最も簡単な整数比で表せ.

(3) 四面体 OABC の体積を V とするとき, 四面体 OBEF の体積を V を用いて表せ.

基本 15.32 四面体 OABC の 3 辺 OA，AB，BC 上に，それぞれ点 P，Q，R がある．OP = PA，AQ = 2QB とし，点 R は点 B と異なるものとする．△PQR の重心を H とするとき，次の各問に答えよ．ただし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を用いて表せ．　(宮崎大学 2015) 8

(2) △ABC の重心を G とする．3 点 O，G，H が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

基本 15.33 四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を E，辺 OC を 1 : 4 に内分する点を F とする．また，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．
(福岡教育大学 2007) 6

(1) 3 点 D，E，F の定める平面を α とする．直線 OG と平面 α の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を用いて表せ．

(3) △PDE，△PEF，△PFD の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とするとき，$S_1 : S_2 : S_3$ を最も簡単な整数の比で表せ．

基本 15.34 四面体 ABCD がある．点 P が $10\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たしているとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2004) 7

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ．

(2) 直線 AP と三角形 BCD との交点を Q としたとき，次の式を満たす実数 s，t，k を求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{BC}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

(3) 四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積の比を求めよ．

基本 15.35 四面体 OABC において，OA = OC であるとする．さらに，BC を 1 : 2 に内分する点を D，AD を 3 : 1 に内分する点を E とするとき，OE⊥AC であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \vec{e}$ とおくとき，次の各問に答えよ．

(1) $\vec{e}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．　(宮崎大学 2003) 5

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c}$ であることを示せ．ただし，記号 $\vec{x}\cdot\vec{y}$ はベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す．

(3) OA : OB = 2 : 1，OE⊥BC であるとき，∠AOC を求めよ．

基本 15.36 四面体 OABC において，OA = 2，OB = 1，OC⊥OA，OC⊥OB であるとする．点 D を，直線 AB 上に，OD⊥AB となるようにとる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = t$ とおくとき，次の各問に答えよ．ただし，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を表す．(宮崎大学 2004) 6

(1) $\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

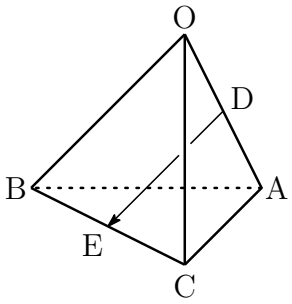
(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 120°，$\vec{d} - \vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角が 60° であるとき，$|\vec{c}|^2$ の値を求めよ．

基本 15.37 四面体 OABC において，OB = OC = 1，∠AOB = ∠BOC = ∠COA = $\dfrac{\pi}{3}$ とする．△OAC の重心を G，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P，辺 OA の中点を Q とし，2 直線 OP，BQ の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の各問に答えよ．(宮崎大学 2007) 4

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ であるとき，OA の長さを求めよ．さらに，CR の長さを求めよ．

基本 15.38 正四面体は，4 つの面が全て合同な正三角形からなる四面体である．右の図のような 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える．OA，BC の中点をそれぞれ D，E とする．



$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$$

とおく．次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2011) 3

(1) $\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) t を実数とし，F，G を $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = t\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = (2-t)\vec{d}$ を満たす点とする．$\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ を求めよ．

(3) E は線分 FG の中点であることを示せ．

(4) 四角形 BFCG の面積の最小値と，そのときの t の値を求めよ．

基本 15.39 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える．辺 OA の中点を P，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q，辺 OC を 1 : 3 に内分する点を R とする．以下の問いに答えよ．(九大 [文]2015) 2

(1) 線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ．

(3) 三角形 PQR の面積を求めよ．

基本 15.40 原点を O とする座標空間の 4 点 $A(\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$B(-\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$C(0,\ 2,\ 2)$，$P(0,\ 1,\ 0)$ および，平面 OAC，OBC，ABC 上にそれぞれ点 Q，R，S をとる．ベクトル $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$，$\overrightarrow{PS}$ が平面 OAC，OBC，ABC にそれぞれ直交するとき，次の問いに答えよ．　(熊大 [理]2006) 2

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を成分で表せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{PS}$ を成分で表せ．

(3) △QRS の面積を求めよ．

基本 15.41 四面体 OABC において，

$$OA = OC = 4,\ OB = 3,\ \angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$$

とする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の値を求めよ．　(宮崎大学 2012) 3

(2) 平面 ABC 上の点 D を，直線 OD が平面 ABC に垂直に交わるようにとる．$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$ とおくとき，p と q の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

基本 15.42 四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であり，△OAB の面積と △OAC の面積が等しいとする．このとき，次の問いに答えよ．　(熊大 [文]2009) 4

(1) OB = OC を示せ．

(2) △ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

基本 15.43 xyz 空間上に，点 $A(1,\ 0,\ 0)$，点 $B(-1,\ b,\ b)$，球 $S : x^2+(y-1)^2+z^2 = 1$ がある．ただし，b は実数とする．原点を O とする．　(鹿児島大学 2019) 4

(1) 直線 AB 上の点 P を，実数 t を用いて $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ と表すとき，点 P の座標を b，t を用いて表せ．

(2) 直線 AB が球 S と共有点をもつような b の値の範囲を求めよ．

(3) 球 S の中心を C とする．b が (2) の値の範囲を動くとき，三角形 ABC の面積 T の最大値と最小値を求めよ．

標準 15.44 四面体 OABC の 6 つの辺の長さを

$$\mathrm{OA}=\sqrt{10},\ \mathrm{OB}=\sqrt{5},\ \mathrm{OC}=\sqrt{6},\ \mathrm{AB}=\sqrt{5},\ \mathrm{AC}=2\sqrt{2},\ \mathrm{BC}=\sqrt{5}$$

とする．以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2007) 2

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のいずれとも直交することを示せ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

標準 15.45 四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=2$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=1$ とする．また，辺 OB 上に点 P を AP⊥OB となるようにとる．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とおく．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2006) 5

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) △APC の面積を求めよ．

(3) 平面 OAC 上に点 Q を直線 PQ が平面 OAC に垂直となるようにとる．このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．ただし，平面 OAC は 3 点 O，A，C を通る平面である．

標準 15.46 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC を考える．$0<s<\dfrac{1}{2}$ に対し OA を $s:(1-s)$ に内分する点を P とし，$0<t<1$ に対し OC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．
(熊大 [理]2016) 1

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{BPQ}=90^\circ$ であるとき，t を s を用いて表せ．

(3) (2) の条件の下で，t の最大値とそのときの s の値を求めよ．

(4) (3) で求めた s，t に対して，PQ^2 を求めよ．

標準 15.47 四面体 OABC の面はすべて合同であり，OA = 5，OB = 8，AB = 7 である．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，次に答えよ．　(九工大 [工]2016) 1

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) 3 点 O，A，B の定める平面を α とし，α 上の点 H を直線 CH と α が垂直になるように選ぶ．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) (2) の点 H に対して，線分 CH の長さを求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積 V_1 を求めよ．また，辺 OC の中点を D とし，さらに辺 OB 上に点 E を AE + ED が最小となるようにとる．このとき，四面体 OAED の体積 V_2 を求めよ．

標準 15.48 四面体 OABC は OA = OB = 2，OC = 1，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AOC} = 60^\circ$ をみたしている．線分 AB を 1 : 2 に内分する点を M とし，線分 OM を $s : 1-s$ $(0 < s < 1)$ に内分する点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC} = \theta$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ として，次に答えよ．　(九工大 [工]2011) 1

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と s を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ のとき，s を θ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\mathrm{BC} = \sqrt{\dfrac{17}{5}}$ とするとき，$\cos\theta$ と s の値を求めよ．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\mathrm{BC} = \sqrt{\dfrac{17}{5}}$ とするとき，四面体 OABC の体積 V を求めよ．

標準 15.49 四面体 OABC は OA $=1$，OB $=\sqrt{15}$，OC $=2$，$\angle$AOB $=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle$AOC $=\dfrac{\pi}{3}$ を満たしている．線分 OA と OB を $s:1-s$ $(0<s<1)$ に内分する点をそれぞれ P，Q とし，△CPQ の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle$BOC $=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ として，次に答えよ．（九工大 [工]2012） 2

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と s を用いて表せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は平面 ABC に垂直であるとする．

(a) s と $\cos\theta$ の値を求めよ．

(b) 線分 OG と BC の長さ，および $\angle$BAC を求めよ．

(c) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

標準 15.50 t を $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす数とし，空間内の 4 点 A$(t,\ 0,\ 1)$，B$(1,\ t,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ t)$，P$\left(\dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t\right)$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．（九大 [文]2007） 2

(1) △ABC は正三角形であることを示し，その面積 $S(t)$ を求めよ．

(2) △ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直であることを示せ．

(3) 四面体 PABC の体積 $V(t)$ を求めよ．また $V(t)$ の最小値とその最小値を与える t の値を求めよ．

標準 15.51 四面体 OABC は，OA $=$ OB $=\sqrt{2}$，OC $=1$，$\angle$OCA $=\angle$OCB $=90^\circ$ をみたしている．点 C から 3 点 O，A，B を通る平面に下した垂線とその平面との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle$AOB $=\theta$ とおいて，次に答えよ．（九工大 [工]2009） 1

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ と $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．また，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を θ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ とおくとき，s と t を θ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$ を θ を用いて表せ．

(3) △AOB と △ACB の面積をそれぞれ S と T とおく．$S=\sqrt{3}T$ のとき，θ と $\angle$ACB を求めよ．

標準 15.52 頂点が O で，各辺の長さが 1 である正四角錐(すい)O-ABCD がある．辺 OA，CO を $t : 1-t$ $(0<t<1)$ に内分する点をそれぞれ P，Q とし，辺 OD を $k : 1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を R とする．また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．次に答えよ．　(九工大 [工]2013) 1

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．また，内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．

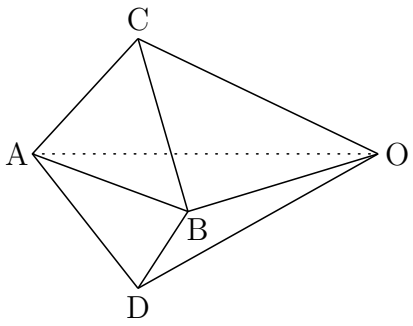
(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を k，t を用いて表せ．

(3) 点 R が 3 点 P，B，Q の定める平面上にあるとする．

(i) k を t を用いて表せ．

(ii) t の値が変化するとき，k の最大値を求めよ．また，k が最大値をとるときの四角形 PBQR の面積 S を求めよ．

標準 15.53 四面体 OABC において，三角形 ABC は 1 辺の長さが 1 の正三角形であり，OA = OB = OC = 2 とする．また，点 C を通り平面 OAB に垂直な直線上に点 D があり，線分 CD の中点 H は平面 OAB に含まれるとする．すなわち，点 D は平面 OAB に関して，点 C と対称な点である．



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおいて，次に答えよ．　(九工大 [工]2015) 1

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(3) 直線 BH と直線 OA の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表し，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{a}$ を求めよ．さらに，OP および BP の長さを求めよ．

(4) (3) で定めた点 P に対して，四角形 BCPD の面積 S を求めよ．また，四角錐(すい)O-BCPD の体積 V を求めよ．

応用 15.54 三角形 ABC を底面とする四面体 OABC において，OA = BC = 3，OB = CA = $\sqrt{13}$，OC = AB = 4 とし，外接球面 (4 頂点 O，A，B，C のすべてを通る一つの球面) の中心を P とする．このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の形で表しなさい．ただし，x，y，z は実数とする．　(分大 [医]2019) 7

応用 15.55 t を実数とする．空間の 4 点 A$(1,\ 5,\ 0)$，B$(4,\ 2,\ 0)$，C$(t,\ 2t,\ t-1)$，D$(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ． (熊大 [医]2018) 1

(1) △ABC が直角三角形になる t の値をすべて求めよ．

(2) A，B，C，D が同一平面上にあるような t の値を求めよ．

(3) ∠BAC が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ．

応用 15.56 空間において 1 点 O を固定し，O に関する位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を P$(\vec{p})$ で表す．4 点 O，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする四面体 OABC において，線分 OA，OB，BC を $s:1-s$ $(0<s<1)$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする．また，3 点 A，B，C の定める平面を α とし，$\vec{h}=\vec{a}-\dfrac{9}{16}\vec{b}+\dfrac{9}{16}\vec{c}$ を位置ベクトルとする平面 α 上の点を H$(\vec{h})$ とする．OA = AB = 3，OB $=3\sqrt{2}$，OC = BC = 4，AC = 5 として，次に答えよ． (九工大 [工]2014) 1

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および s を用いて表せ．また，内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) 線分 OH の長さを求めよ．

(3) 3 点 D，E，F の定める平面が点 H を通るときの s の値を求めよ．

(4) s を (3) で求めた値とするとき，四面体 OAFC の体積 V を求めよ．

応用 15.57 a，b を正の数とし，空間内の 3 点 A$(a,-a,\ b)$，B$(-a,\ a,\ b)$，C$(a,\ a,-b)$ を考える．A，B，C を通る平面を α，原点 O を中心とし A，B，C を通る球面を S とおく．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [理]2007) 3

(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ．また △ABC の面積を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ．また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ．

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ．ただし，P は平面 α 上にはないものとする．

応用 15.58 一辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，点 P を頂点とする四角錐 POABC がある．ただし，点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}$，および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$ をみたす．辺 AP を 2 : 1 に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする．さらに，点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は，平面 OMN に垂直であるとする．このとき，長さの比 BQ : QC，および線分 OP の長さを求めよ． (九大 [理]2013) 2

応用 15.59　一辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を N，辺 OC の中点を L とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2012) 4

(1) 3 点 L，M，N を通る平面と直線 OA の交点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

応用 15.60　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=\alpha$ $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ とする．辺 OC 上の点 P と辺 AB 上の点 R を，線分 PR の長さが最小となるような位置にとる．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．　(長大 [医]2009) 6

(1) $\cos\alpha=x$ とし，線分 PR の長さを x の関数として表せ．

(2) 線分 OA の中点を M，線分 BC を 5 : 9 に内分する点を N とする．線分 PR と線分 MN が交わるように x の値を定めよ．

応用 15.61　空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$．$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，OA の中点を P とする．以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2014) 1

(1) $0<t<1$ に対し，BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．また，PM + MQ が最小となる OB 上の点を M とし，PN + NQ が最小となる OC 上の点を N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) △QMN の面積を t を用いて表せ．

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMN の最大値を求めよ．

応用 15.62　O を原点とする空間内の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする．以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2013) 2

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ．

(2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となる C の座標を求めよ．

15.4.2 その他の立体

基本 15.63 四角形 ABCD を底面とし O を頂点とする四角錐 O-ABCD において，底面の四角形 ABCD は $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ をみたしている．辺 OD の中点を M とし，3 点 A，B，M を通る平面が辺 OC と交わる点を N とする．次に，四角形 ABNM の対角線の交点を P とし，直線 OP が底面 ABCD と交わる点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおいて，次に答えよ． (九工大 [工]2008) 2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

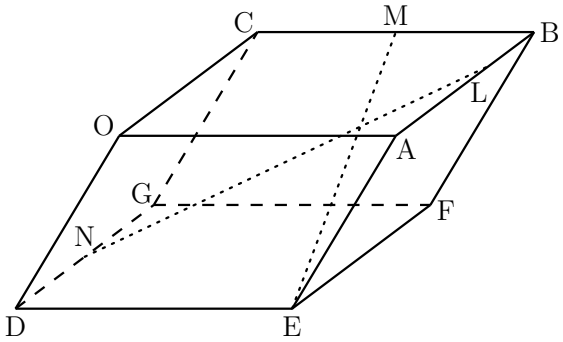
(4) 線分の長さの比 OP : PQ を求めよ．

基本 15.64 平行六面体 OABC-DEFG において，辺 AB を 3 : 1 の比に内分する点を L とし，辺 BC，DG の中点をそれぞれ M，N とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とおくとき，以下の問に答えよ． (佐賀大学 2007) 1

(1) 線分 EM を $t : (1-t)$ の比に分ける点を I とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) 線分 LN を $s : (1-s)$ の比に分ける点を J とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(3) 線分 EM と線分 LN とが交わることを示し，その交点を H とするとき，比 EH : HM を求めよ．



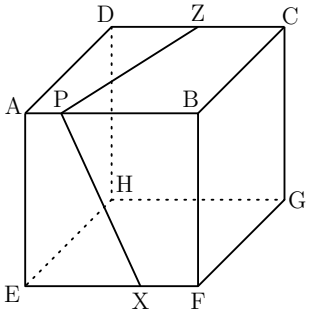
基本 15.65 すべての辺の長さが 1 の四角錐がある．この四角錐の頂点を O，底面を正方形 ABCD とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2010) 4

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めよ．

(3) 点 P，O，B，C が正四面体の頂点となるようなすべての点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

基本 15.66 空間内に右図のような 1 辺の長さが 1 である立方体がある．辺 EF を 3 : 1 に内分する点を X，辺 CD の中点を Z とする．さらに辺 AB を $t : 1-t$ $(0 < t < 1)$ に内分する点を P とする．3 点 P，X，Z を通る平面と直線 GH との交点を Y とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{c}$ とするとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2008) 4



(1) $\overrightarrow{\mathrm{PY}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ．

(2) 点 Y が辺 GH 上にあるとき，t の値の範囲を求めよ．

(3) (2) において四角形 PXYZ がひし形になるとき，t の値を求めよ．

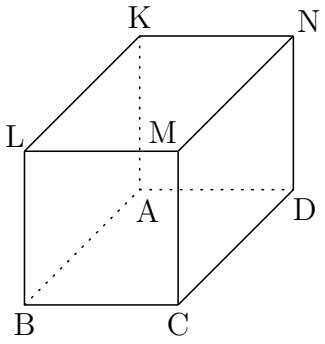
基本 15.67 図の長方体 ABCD-KLMN において，辺 AB の長さは 2，辺 AD の長さは $\sqrt{2}$ である．三角形 CLN の重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \vec{c}$ とおく．次に答えよ．　(九工大 [工]2001) 2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\angle \mathrm{AGC}$ が直角となるように辺 AK の長さを定めよ．

(4) 辺 AK が (3) で定めた長さのとき，三角形 CLN の面積を求めよ．



基本 15.68 一辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，OP = AP = BP = CP をみたす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある．辺 AP を 1 : 3 に内分する点を D，辺 CP の中点を E，辺 BC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする．このとき，以下の問いに答えよ． (九大 [文]2013) 1

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と t を用いて表せ．

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の値を求めよ．

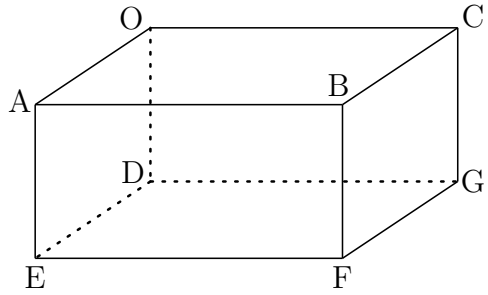
(4) 直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき，t の値および線分 OP の長さを求めよ．

標準 15.69 長方形 OABC-DEFG において，OA = OD = 1，OC = 2 とし，辺 EF の中点を M とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とし，点 P から線分 CM におろした垂線と線分 CM との交点を H とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2013) 3

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，t を用いて表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2$ の最小値を求めよ．



標準 15.70　1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH がある．下の図 1 にように，2 辺 BC，CD 上に，$\mathrm{BS}=\mathrm{CT}=x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を満たす点 S，T をとる．このとき，三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい．以下の問いに答えよ．　(長崎大学 2016) 4

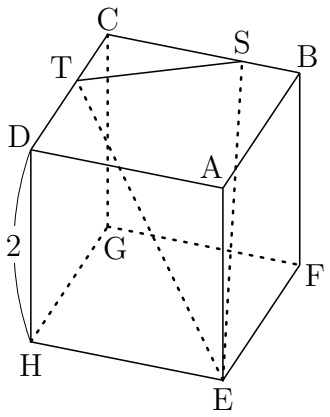


図 1

(1) 右の図 2 を参考にして，三角形 OPQ において $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおくとき，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ．

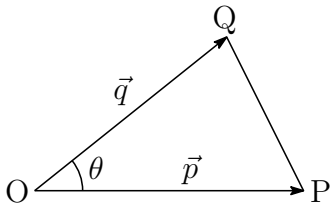


図 2

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\vec{c}$ とおく．立方体の 1 辺の長さが 2 であることに注意して，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を，それぞれ x の式として表せ．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない一定の値になることを示せ．

(3) 上の (1) を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値も答えよ．

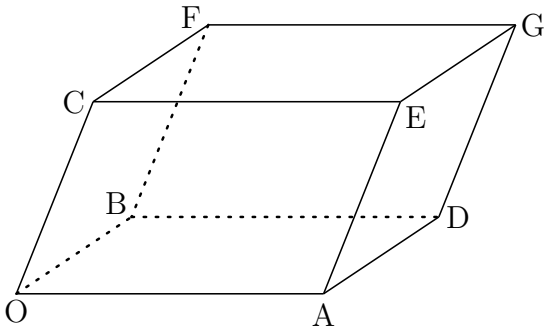
標準 15.71 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする．また，辺 OC を k : $1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(熊大 [理]2011) 2

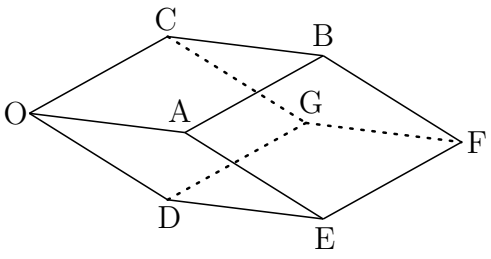
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 3 点 M，N，K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ．

(3) 3 点 M，N，K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ．



標準 15.72 右図の平行六面体において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，△ACD と線分 OF の交点を H とする．さらに，四面体 OACD が 1 辺の長さ 1 の正四面体であるとする．このとき，次の各問に答えよ．



(宮崎大学 2014) 3

(1) △ACD の重心が点 H に一致することを示し，2 つの線分 OH と HF の比 OH : HF を求めよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{HE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}}$ の値を求めよ．

(3) △HEF の面積を求めよ．

応用 15.73　1 辺の長さ $\sqrt{2}a$ の正方形の折り紙がある．正方形 ABCD の中心を点 O とし，AO 上に点 E をとり，$EO = b$ とする．図 1 の斜線部分を取り去り，OB，OE に沿って折り，OC と OD を貼り合わせ，図 2 のように三角錐 O-BCE を作って平面に置いた．O より三角形 BCE に下ろした垂線と三角形 BCE との交点を H とするとき，次の問いに答えよ．　(長大 [医]2008) 7

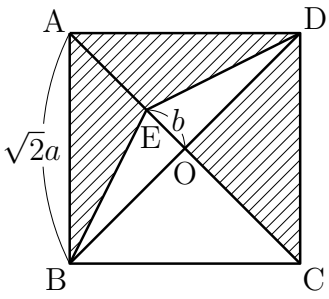


図 1

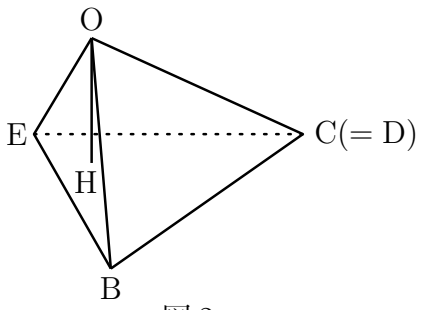


図 2

(1) $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OE}$ を用いて表せ．

(2) 三角形 BCE の外心を点 P とする．$HP = \dfrac{a}{4}$ のとき $\overrightarrow{OH}$ の長さを a を用いて表せ．

15.4.3　直線・平面・球面

基本 15.74　4 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) を頂点する四面体 ABCD について，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2007) 4

(1) △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ と，△BCD の重心 H の位置ベクトル $\vec{h}$ を求めよ．

(2) 2 点 D，G を通る直線 l_1 の方程式を求めよ．2 点 A，H を通る直線 l_2 の方程式を求めよ．

(3) (2) の 2 直線 l_1，l_2 は交点を持つことを示し，その交点の位置ベクトルを求めよ．

基本 15.75　原点 O を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の球面 S 上に 3 点 A，B，C があり，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 4, \quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 5, \quad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = 6$$

をみたしている．三角形 ABC の重心を G とし，直線 OG と球面 S の交点のうち G から遠い方を P とする．　(大分大学 2014) 2

(1) $|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表しなさい．

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角を求めなさい．

標準 15.76 空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(0,\ 2,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 3),\ \mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ． (九大 [理]2011) 4

(1) 4 点 O，A，B，C を通る球面の中心 D の座標を求めよ．

(2) 3 点 A，B，C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする．線分 DF の長さを求めよ．

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ．

応用 15.77 座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1,\quad 0 \leqq y \leqq 1,\quad x \geqq y,\quad 0 \leqq z \leqq 1$$

を考え，その xy 平面内の面を S，xz 平面内の面を T とする．点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする．ただし，点 A，B は原点 O とは異なるとする． (九大 [理]2004) 4

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ．

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ．ただし，点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．

(3) 点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする．このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A，B の位置をすべて求めよ．

応用 15.78 空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について次の問いに答えよ．ただし，h と k は実数とする． (九大 [文]2006) 3

(1) $h\vec{a}+\vec{b}$ が $\vec{a}$ と垂直であるとき，すべての実数 x に対して

$$|x\vec{a}+\vec{b}| \geqq |h\vec{a}+\vec{b}|$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと垂直であるとする．

(2) $h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるとき，すべての実数 x，y に対して

$$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}| \geqq |h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 4,\ -2)$，$\vec{c}=(-3,\ -6,\ 6)$ とするとき，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ の最小値を与える実数 x，y と，そのときの最小値を求めよ．

応用 15.79 原点を O とし，空間内に 3 点 A(4, 0, 0)，B(1, 2, 0)，C(2, 1, 2) をとる．線分 BC を $t : (1-t)$ $(0 < t < 1)$ に内分する点を P とおく．このとき，以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2010) 1

(1) △OAP の面積を最小にする t の値を求めよ．

(2) C を通り，3 点 O，A，P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする．D が △OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ．

15.5 問題研究

15.5.1 ベクトル積 (外積)

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表す．

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

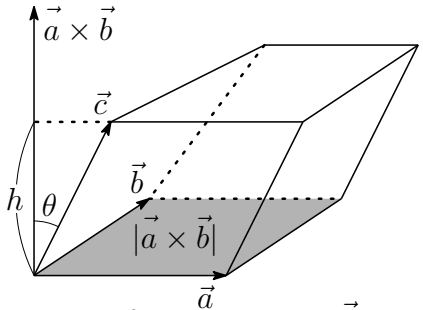
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は $\qquad\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

例えば，160 ページの 15.21(大分大学 2006) の四面体 ABCD の体積 V は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 1,\ 1)\times(-2,\ 2,-4)=(-6,\ 6,\ 6)$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-6,\ 6,\ 6)\cdot(1,\ 2,-4)=-18$$

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\frac{1}{6}\times18=3$$

注意 ベクトル積 (外積) は，センター試験などでは利用できるが，高校数学の範囲外であるから，筆記試験では $\vec{a}\times\vec{b}$ などの痕跡を残さないようにする．

第 16 章　数列（数学B）

16.1　等差数列・等比数列

□□ **16.1** 次の数列の一般項を求めよ．　(琉球大学 2012) 5

$$1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ 41,\ \cdots$$

基本 16.2 次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2001) 6

(1) 第 1 項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = an^2 + bn$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，a，b は定数とする．

(2) (1) における数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示し，その公差を求めよ．

基本 16.3 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2007) 11

(1) $a > 0$ とする．項数 3 の 2 つの有限数列

$$4,\ a,\ b \quad \text{および} \quad b,\ c,\ 36$$

はともに等比数列であり，

$$a,\ b,\ c$$

は等差数列とする．このとき，a，b，c の値を求めよ．

(2) (1) で求めた a に対し，数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 4$，$a_2 = a$ の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = 4$ を満たし，その階差数列が $\{a_n\}$ に等しいとする．このとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(3) 初項を p とする数列 $\{p_n\}$ において，その階差数列が元の数列と等しいとする．このとき，この数列の一般項 p_n を求めよ．

基本 16.4 等差数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{1}{6}, \qquad \sum_{k=11}^{40} a_k = 250$$

を満たすとする．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2015) 7

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $a_n \leqq 10$ となる n の最大値 N を求めよ．

(3) (2) で求めた N に対して，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k$ を求めよ．

基本 16.5 等比数列 $3,\ 6,\ 12,\ \cdots$ を $\{a_n\}$ とし，この数列の第 n 項から第 $2n-1$ 項までの和を T_n とする．　(大分大学 2010) 5

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい．

(2) T_n を求めなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$ を求めなさい．

基本 16.6 等差数列 $2,\ 5,\ 8,\ \cdots$ を $\{a_n\}$，等比数列 $2,\ -4,\ 8,\ \cdots$ を $\{b_n\}$ とする．次の問いに答えよ．　(大分大学 2008) 1

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 20 項までの和を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和が 300 を超える最小の n を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ との両方に含まれる数を順に取り出してできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

基本 16.7 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1 = 2$，公差 21 の等差数列で，数列 $\{b_n\}$ は初項 b_1 から第 n 項 b_n までの和が $2^{n+1} - 2$ である数列とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) b_n を n を用いて表せ．　(宮崎大学 2004) 12

(2) $c_n = b_n - a_n$ とおく．$n \geqq 5$ のとき，$c_{n+1} > c_n$ となることを示せ．

(3) $a_n = b_n$ となる n の値をすべて求めよ．

基本 16.8 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 2$ で，第 3 項 $a_3 = -\dfrac{1}{2}$ である．$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，数列 $\{S_n\}$ は等比数列となった．このとき次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2004) 5

(1) S_n を n の式で表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ．

基本 16.9 $\triangle$OAB において，$\mathrm{OA} = a$，$\mathrm{OB} = b$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とおく．ただし，$a \geqq b$ および $0° < \theta < 90°$ とする．点 B から辺 OA に下ろした垂線の足を A_1 とする．また点 A_1 を通って辺 AB に平行な直線と，辺 OB との交点を B_1 とする．次に点 B_1 から辺 OA_1 に下ろした垂線の足を A_2 とし，点 A_2 を通って辺 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ に平行な直線と，辺 OB_1 との交点を B_2 とする．以下，この操作を続け，三角形の列

$$\triangle\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1,\ \triangle\mathrm{OA}_2\mathrm{B}_2,\ \cdots,\ \triangle\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$$

をとる．このとき，次の問いに答えよ． (佐賀大学 2012) 8

(1) $\triangle\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ は，$\triangle$OAB に相似であることを示せ．

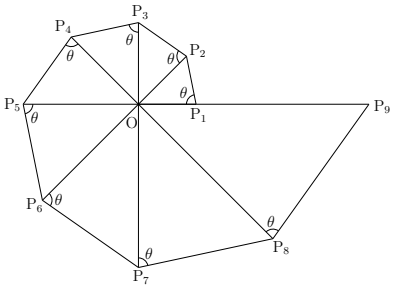
(2) $\dfrac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}}$ を a，b，θ の式で表せ．

(3) $\triangle\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k$ の面積を S_k とする．$a = 2$，$b = 1$，$\theta = 30°$ のとき，

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

を n の式で表せ．

標準 16.10 右の図のように 8 つの三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots 8)$ がある．ただし，$\mathrm{OP}_1 = 1$ であり各 n について $\angle\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1} = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1} = \dfrac{\pi}{4}$ とする．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2005) 1



(1) 辺 OP_2 の長さを θ を用いて表せ．

(2) 辺 OP_9 の長さを θ を用いて表せ．

(3) 辺 OP_9 の長さが $\dfrac{81}{16}$ であるとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

標準 16.11 座標平面上に原点 O(0, 0) と点 A(3, 0) がある．自然数 n に対して，点 $B_n(0,\ n)$ をとり，$\triangle AB_nO$ の境界を除いた内部に含まれる格子点の個数を a_n とする．ただし，x 座標と y 座標がともに整数の点を格子点という．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2010) 3

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3$ の値を求めよ．

(2) 自然数 k に対して，$n = 3k$ とする．このとき，$\triangle AB_nO$ の境界を除いた内部に含まれる格子点のうち，x 座標が 1 であるものの個数を，k を用いて表せ．

(3) 自然数 k に対して，a_{3k} を，k を用いて表せ．

(4) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．自然数 m に対して，S_{3m} を，m を用いて表せ．

標準 16.12 自然数 n について，a_n を $\sqrt{n}$ 以下の整数のうち最大のものとするとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2011) 3

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ の値を求めよ．

(2) 自然数 m について，$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m^2}$ を，m を用いて表せ．

標準 16.13 重ねた n 枚のカードを上から順に以下の方法を組み合わせて過不足なくすべて取ることを考える．

A：1 度にちょうど 1 枚取る

B：1 度にちょうど 2 枚取る

C：1 度にちょうど 3 枚取る

重ねた n 枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を a_n とする．
例えば，$n = 4$ のとき，1 回目に方法 A，2 回目に方法 A，3 回目に方法 B で 4 枚を過不足なくすべて取ることを AAB と表すことにすれば，4 枚のカードを過不足なくすべて取る仕方は

AAAA，AAB，ABA，BAA，AC，CA，BB

の 7 通りである．よって，$a_4 = 7$ である．
このとき，次の各問に答えよ．　(宮大 [医]2019) 7

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ．

(2) $n \geqq 4$ のとき，a_n を，$a_{n-1},\ a_{n-2},\ a_{n-3}$ を用いて表せ．

(3) a_{10} を求めよ．

(4) 「方法 C を 2 回以上続けて用いることはできない」という制約を付け加えるとき，重ねた 10 枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を求めよ．

16.2 群数列

基本 16.14 3の倍数を順に以下のように群に区切り，第n群には2^{n-1}個の項がある．ただし，nは自然数とする．

$$3 \mid 6\ 9 \mid 12\ 15\ 18\ 21 \mid 24\ 27\ 30\ 33\ 36\ 39\ 42\ 45 \mid 48\ \cdots$$

このとき，次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2002) 6

(1) 第5群の最後の項を求めよ．

(2) 第n群の最初の項をnを用いて表せ．

(3) 第n群の項の総和を求めよ．

基本 16.15 正の偶数mが順にm個ずつ並んだ数列

$$2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ \cdots$$

を$\{a_n\}$とする． (大分大学 2011) 5

(1) 正の偶数$2t$が数列$\{a_n\}$の第何項に初めて現れるかを自然数tを用いて表しなさい．

(2) a_{100}を求めなさい．

(3) a_1からa_{100}までの和を求めなさい．

基本 16.16 a を定数とする．$a_n = -2n + a$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を次のような群に分け，第 k 群には k 個の項が入るようにする．

$$\underset{\text{第 1 群}}{a_1} \;\Big|\; \underset{\text{第 2 群}}{a_2,\ a_3} \;\Big|\; \underset{\text{第 3 群}}{a_4,\ a_5,\ a_6} \;\Big|\; \underset{\text{第 4 群}}{a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10}} \;\Big|\; \cdots$$

第 k 群に含まれるすべての項の和を S_k とするとき，次の問いに答えよ．

(1) S_k を求めよ．　(福岡教育大学 2014) 3

(2) $a = 212$ のとき，S_k が最大となる群に含まれる項の平均値を求めよ．

(3) $a = 92$ のとき，$|S_k| = |S_{k+1}|$ を満たす k を求めよ．

基本 16.17 次の数列について，各問いに答えよ．

$$\overbrace{\frac{1}{1},}^{\text{第 1 群}}\ \overbrace{\frac{1}{2},\ \frac{2}{1},}^{\text{第 2 群}}\ \overbrace{\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},}^{\text{第 3 群}}\ \cdots\ \overbrace{\frac{1}{k},\ \frac{2}{k-1},\ \frac{3}{k-2},\ \cdots,\ \frac{k}{1},}^{\text{第 } k \text{ 群}}\ \cdots$$

(鹿児島大学 2009) 4

(1) $\dfrac{n}{m}$ は第何群の第何項か．ただし，m と n は正の整数とする．

(2) $\dfrac{n}{m}$ は数列の先頭から数えると何番目の項か．

(3) 数列の先頭から数えて 1000 番目の項 a を求めよ．

(4) a と値が等しい項のうちで最初に現れるのは，数列の先頭から数えて何番目か．

標準 16.18 数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{3}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{3}{2^3},\ \frac{5}{2^3},\ \frac{7}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \cdots,\ \frac{2^n-1}{2^n}$$

において，分母が 2^n である項をまとめて第 n 群とよぶことにする．次に答えよ．

(1) 第 n 群に含まれる数の和を求めよ．　(九工大 [工]2003) 1

(2) 分子に初めて 51 が現れるのは第何項目か．

(3) 初項から (2) で求めた項までの和を求めよ．

(4) 第 2003 項を求めよ．

標準 16.19 初項 1，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ と，一般項が $b_n = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right]$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ がある．ここで，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．たとえば，$b_1 = \left[\dfrac{4}{3}\right] = 1$，$b_2 = [2] = 2$，$b_3 = \left[\dfrac{8}{3}\right] = 2$ である．数列 $\{a_n\}$ を次のように，b_1 個，b_2 個，b_3 個，$\cdots$ の群に分け，第 k 群には b_k 個の数が入るようにする．

$$\mid\ a_1\ \mid\ a_2,\ a_3\ \mid\ a_4,\ a_5\ \mid\ a_6,\ \cdots$$

第 1 群　第 2 群　　第 3 群　　$\cdots$

第 k 群の最初の数を c_k とする．次に答えよ．　(九工大 [工]2015) 2

(1) 自然数 m に対して，b_{3m-2}，b_{3m-1}，b_{3m} をそれぞれ m の多項式で表せ．また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 S_{3m} を求めよ．

(2) 自然数 m に対して，c_{3m-2}，c_{3m-1}，c_{3m} をそれぞれ m の多項式で表せ．また，数列 $\{c_k\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 T_{3m} を求めよ．

(3) 1000 は第何群の何番目の数か．

(4) $x \geqq 1$ のとき $\sqrt{x^2+1} < x + \dfrac{1}{2}$ であることを用いて，次の不等式が成り立つことを示せ．ただし，m は自然数とする．

$$\sum_{k=1}^{3m}(\sqrt{c_k} - k) < \frac{m}{2}$$

16.3　いろいろな数列の和

□□ **16.20** $n \geqq 2$ であるような自然数 n に対して

$$1{\cdot}2{\cdot}3 + 2{\cdot}3{\cdot}4 + \cdots + (n-1){\cdot}n{\cdot}(n+1) = (1+2+3+\cdots+n)(2+3+\cdots+n)$$

が成り立つことを示せ．　(福岡教育大学 2010) 1

基本 16.21 $a_n = \log_{10}\left(\dfrac{1}{2} + 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}\right)$ について，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2003) 6

(1) a_n を求めよ．

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ．

基本 16.22 連続する自然数について，以下のような関係がある．

$$\begin{aligned} 1+2=3 &\quad \cdots ① \\ 4+5+6=7+8 &\quad \cdots ② \\ 9+10+11+12=13+14+15 &\quad \cdots ③ \\ \vdots & \end{aligned}$$

n 番目の式を ⓝ とし，その左辺の和を $S(n)$ で表す．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 4 番目の式 ④ と $S(4)$ を求めよ．　(宮崎大学 2001) 10

(2) n 番目の式 ⓝ を予想し，その等式が成り立つことを示せ．

基本 16.23 下記の一連の等式が成立しているという (ただし m は自然数)．これについて，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2003) 4

(1) ① の等式を証明せよ．

(2) 最下行の右辺の空欄に入る式を推測し，最下行の等式が成り立つことを証明せよ．なお，推測する式の中では，左辺と同様「$\cdots$」を用いてよい．

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{1}{2}n(n+1) \\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad \cdots ① \\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m) &= \boxed{} \end{aligned}$$

基本 16.24 整数 n について，$f(n) = (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)$ とおく．

(1) k を自然数とするとき，等式　(大分大学 2005) 5

$$f(k) - f(k-1) = a(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$$

が成立するように，定数 a の値を定めなさい．

(2) m が自然数であるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)$ を $f(m)$ を用いて表しなさい．

基本 16.25 n を自然数とするとき，和

$$S_n = n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots x^{n-1}$$

について，次の問いに答えなさい． (大分大学 2007) 2

(1) $x \neq 1$ のとき，$(1-x)S_n$ を求めなさい．

(2) $x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ を求めなさい．

標準 16.26 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

で表されるとする． (大分大学 2015) 5

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = 4n(n+1)(n+2)$ であることを示しなさい．

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を n の式で表しなさい．

標準 16.27 自然数 a に対して

$$S(a) = \sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

とおく．以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2016) 3

(1) 和 $S(a)$ を求めよ．

(2) $S(a)$ が整数となる自然数 a を小さい順に並べた数列を

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots$$

とする．一般項 a_n を求めよ．

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ について，a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ．

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と自然数 N に対して和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$ を求めよ．

標準 16.28 xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ．n を自然数とするとき，3 直線 $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{n}{3}$，$y = x - n$，$x = n$ で囲まれた図形を D_n とする．また，D_n の周上および内部の格子点の個数を L_n とする．以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2020) 3

(1) L_3 を求めよ．

(2) k を 0 以上の整数とする．直線 $\ell : x = n + 3k$ が D_n と交わるとき，D_n の周上および内部の格子点で ℓ 上にあるものの個数を n と k を用いて表せ．

(3) L_n を n を用いて表せ．

標準 16.29 以下の問いに答えよ．　(佐賀大学 2010) 8

(1) 等式 $2\sin k\theta \sin\dfrac{\theta}{2} = \cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\theta$ を示せ．

(2) n が自然数のとき，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$ を求めよ．

標準 16.30 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) 4

(1) m を正の整数とする．実数の集合 $\{y \,|\, 1 \leqq y < m^2\}$ に属する整数の個数を求めよ．

(2) 座標平面において，x 座標と y 座標が整数である点を格子点という．n を正の整数とするとき，集合 A，B を

$$A = \{(x,\ y) \,|\, 1 \leqq x \leqq n,\ 1 \leqq y \leqq n^2,\ y < x^2\}$$
$$B = \{(x,\ y) \,|\, 1 \leqq x \leqq n,\ 1 \leqq y \leqq n^2,\ x^2 \leqq y\}$$

によって定める．集合 A，B に属する格子点の個数をそれぞれ求めよ．

(3) 正の整数 n に対して，集合 C を

$$C = \{(x,\ y) \,|\, 1 \leqq x \leqq n^2,\ 1 \leqq y \leqq n,\ y \leqq \sqrt{x}\}$$

によって定める．集合 C に属する格子点の個数を求めよ．

標準 16.31 以下の問いに答えよ．答えだけでなく，必ず証明も記せ．

(1) 和 $1+2+\cdots+n$ を n の多項式で表せ．　(九大 [文]2010) 4

(2) 和 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ を n の多項式で表せ．

(3) 和 $1^3+2^3+\cdots+n^3$ を n の多項式で表せ．

標準 16.32 $a_n = 1+2+3\cdots+n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ において，a_n が 6 の倍数である項を最初から順に $b_1,\ b_2,\ b_3, \cdots$ とする．次に答えよ．

(1) $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$ を求めよ．　(九工大 [工]2004) 1

(2) すべての自然数 n に対して，$a_{n+12} - a_n$ は 6 の倍数であることを示せ．

(3) $b_{4k-3},\ b_{4k-2},\ b_{4k-1},\ b_{4k}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ を k を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n} b_k$ を求めよ．

標準 16.33 2以上の自然数 n と自然数 a について，和

$$1\cdot(1+a)+2\cdot(2+a)+\cdots+(n-1)\{(n-1)+a\}$$

を S とおく．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2016) 8

(1) 6 と n が互いに素であるとき，すべての自然数 a に対して，S は n で割り切れることを示せ．

(2) n を 6 で割った余りが 2 であるとき，すべての奇数 a に対して，S は n で割り切れることを示せ．

(3) n を 6 で割った余りが 3 であるとき，すべての自然数 a に対して，S を n で割った余りを，n を用いて表せ．ただし，求める余りは，0 以上 $n-1$ 以下の範囲で求めよ．

標準 16.34 n を正の整数，r を 1 でない実数とし，

$$S=\sum_{k=1}^{n}r^{k-1},\quad T=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1},\quad U=\sum_{k=1}^{n}k^2r^{k-1}$$

とする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2009) 9

(1) S を $\sum$ を用いずに，r，n で表せ．

(2) T を $\sum$ を用いずに，S，r，n で表せ．ただし，S を必ず用いること．

(3) U を $\sum$ を用いずに，S，T，r，n で表せ．ただし，S と T を必ず用いること．

応用 16.35 実数 x に対して，$[x]$ は x 以下の最大の整数を表すものとする．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{10}\right]=238$ をみたす正の整数 n の値を求めよ． (分大 [医]2009) 8

(2) 正の整数 n に対して $\left[\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]$ の値を求めよ．

応用 16.36 数列の和について次の一連の問いに答えなさい． (分大 [医]2014) 8

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ を示しなさい．

(2) 多項式 $(k+1)^3-k^3$ の展開を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示しなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示しなさい．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$ を求めなさい．結果は因数分解すること．

応用 16.37 n を 2 以上の自然数とする．数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$ で与えられている．　(九大 [理]2003) 9

(1) 不等式　$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$　が成り立つことを示せ．

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおく．数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ．

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log_n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ．

発展 16.38 正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す．ただし，1 および a 自身も約数とする．たとえば $f(1) = 1$ であり，$a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15) = 24$ となる．次の問いに答えよ．　(九大 [理]2002) 2

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする．このとき $f(a) = (2^{m+1} - 1) f(b)$ が成り立つことを示せ．

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする．このとき $f(a) \geqq (p+1)q$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，$q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ．

(3) 正の偶数 a，b は，ある整数 m，n とある奇数 r，s を用いて $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ のように表すことができる．このとき a，b が

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたせば，r，s は素数であり，かつ $r = 2^{n+1} - 1$，$s = 2^{m+1} - 1$ となることを示せ．

16.4 漸化式

16.4.1 2項間の漸化式

基本 16.39 $a_1 = \dfrac{1}{15}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 4(2n+3)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2004) 2

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第1項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

基本 16.40 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義されるとき，次の問いに答えよ． (佐賀大学 2010) 5

(1) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} + b = 2(a_n + b)$ が成り立つような定数 b を求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $\dfrac{a_{2n}}{a_n} \geqq 10^{25} + 1$ をみたす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

基本 16.41 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = -\frac{5}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また，$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) b_1 の値を求めよ． (福岡教育大学 2008) 7

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

基本 16.42 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = 5$，$a_n = 3a_{n-1} - 2^{n-1}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ で定められているとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2009) 8

(1) a_{n+1} を，a_{n-1} と n を用いて表せ．

(2) n が奇数のとき，a_n は5で割り切れることを示せ．

(3) $b_n = a_n - 2^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，b_n を n を用いて表せ．

(4) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ．

標準 16.43 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} + a_n = 3n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．　(熊大 [文]2006) 2

(1) $b_n = a_n - \dfrac{6n-7}{4}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} a_n$ の値を求めよ．

基本 16.44 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0, \ a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

によって定められている．以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2008) 4

(1) $b_n = n + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，$b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示せ．

(3) a_n を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

基本 16.45 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{2}{3}, \qquad 2(a_n - a_{n+1}) = (n+2)a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。　(熊大文系 2023) 1

(1) a_2, a_3 を求めよ。

(2) $a_n \neq 0$ を示せ。

(3) $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$ を n の式で表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

基本 16.46 初項 3 の数列 $\{a_n\}$ がある．$b_n = a_{n+1} - 3a_n$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は初項 6，公比 3 の等比数列である． (大分大学 2016) 5

(1) $c_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とするとき，$c_{n+1} - c_n$ を求めなさい．

(2) a_n を n の式で表しなさい．

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とするとき，S_n を n の式で表しなさい．

標準 16.47 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 0$，$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n\{1 + (-1)^{n+1}\}}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2015) 3

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 をそれぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n = a_{2n-1}, \quad c_n = a_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定めるとき，一般項 b_n，c_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} (-1)^n a_n$ を求めよ．

標準 16.48 数列 $\{a_n\}$ を次の条件で定義する． (大分大学 2006) 5

$$a_1 = 100, \quad a_{n+1} = 1.05 \times a_n - 10 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 一般項 a_n を求めなさい．

(2) $a_n \leqq 0$ となる最小の n を求めなさい．
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする．

標準 16.49 数列 $\{a_n\}$ は関係式

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3^n - a_n - 6$$

を満たしているとする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2008) 9

(1) 初項 a_1 を求めよ．

(2) 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 一般項 a_n を求めよ．

標準 16.50 $a_1 = \dfrac{1}{2}$，$a_{n+1} = a_n + \dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列を $\{a_n\}$ とする．　(大分大学 2005) 1

(1) a_4 を求めなさい．

(2) 一般項 a_n を求めなさい．

標準 16.51 数列 $\{a_n\}$ は次の 2 つの条件 (ア)，(イ) を満たす．

(ア) $a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(イ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$

このとき次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2009) 2

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ．

(2) ${a_{n+1}}^2 = a_{n+1} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

応用 16.52 数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - {a_n}^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

をみたしているとする．このとき，以下の問いに答えよ．　(九大 [理]2011) 3

(1) $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，一般項 a_n を求めよ．

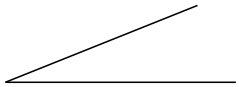
(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

(3) $a_1 = \tan\dfrac{\pi}{20}$ とするとき，

$$a_{n+k} = a_n, \quad n = 3, 4, 5, \cdots$$

をみたす最小の自然数 k を求めよ．

応用 16.53 n を正の整数とする．平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える．ここで直線は両側に無限にのびているものとし，**1 回折れ線**とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである．次の問いに答えよ． (九大 [文]2002) 5


(1 回折れ線)

(1) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする．

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の直線も交わる．

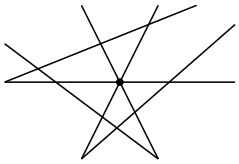
(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の直線も同一点では交わらない．

分割される平面の領域の個数を L_n で表す．$n \geqq 2$ のとき，L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ．また，$L_n\,(n \geqq 1)$ を求めよ．

(2) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとする．

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる．

(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の 1 回折れ線も同一点では交わらない (右図を参照せよ)．


(同一点で交わる 3 本の 1 回折れ線)

分割される平面の領域の個数を H_n で表す．H_3 を求めよ．

(3) $H_n\,(n \geqq 1)$ を求めよ．

応用 16.54 $\{m_k\}$ を公比 r の等比数列とする．2 次関数 $y = x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる．各自然数 k に対し，点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める．点 P_k を通り傾き m_k の直線を ℓ_k とし，この直線と C とのもう一つの交点を P_{k+1} とする．ただし，C と ℓ_k が接する場合は $\mathrm{P}_{k+1} = \mathrm{P}_k$ とする．点 P_k の x 座標を a_k とする．

(1) a_{k+1} を a_k と m_k で表せ． (九大 [文]2003) 4

(2) 数列 $\{a_k\}$ の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ．

(3) $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r}$ とする．このとき，ある 2 次関数 $y = bx^2$ があって，すべての自然数 k に対し直線 ℓ_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ．ただし，$m_1 \neq 0$，$r \neq -1, 0$ とする．

応用 16.55 a と b を正の実数とする．△ABC において，∠B と ∠C は鋭角とする．点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする．また，$\mathrm{BX}_1 = a$，$\mathrm{CX}_1 = b$ とする．各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う．

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする．また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする．点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする．

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2015) 3

(1) l_1 を a，b を用いて表せ．

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ．

(3) $b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ．必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい．

16.4.2　3 項間の漸化式

基本 16.56 数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 2,\quad a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められるとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2007) 7

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を，n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を，n を用いて表せ．

基本 16.57 数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たす．

$$a_1 = -1,\quad a_2 = 1,\quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2010) 7

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ を満たす実数 α，β の組を全て求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

基本 16.58 r を実数とする．$\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=ra_{n+1}-4a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定められる数列とする．次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2014) 3

(1) $r=0$ の場合に，以下のそれぞれについて一般項 a_n を n の式で表せ．

(i) n が奇数のとき．

(ii) n が偶数のとき．

(2) $r=5$ の場合に，次の (a)，(b) に答えよ．

(a) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n=a_{n+1}-a_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$
$$c_n=a_{n+1}-4a_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定めるとき，一般項 b_n，c_n を求めよ．

(b) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $r=4$ の場合に，次の (c)，(d) に答えよ．

(c) 数列 $\{d_n\}$ を

$$d_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定めるとき，一般項 d_n を求めよ．

(d) 一般項 a_n を求めよ．

基本 16.59 数列 $\{a_n\}$ に対して次の漸化式が成り立つとする．

$$a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2012) 2

(1) 定数 c に対して $b_n=a_n+c$ で定められた数列 $\{b_n\}$ を考える．

$$b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0 \quad (n=1,2,3\cdots)$$

を満たす c の値を求めよ．

(2) a_n を n の式で表せ．

基本 16.60 c を実数とし，$a_1 = c$，$a_2 = c^2 - 2$ および

$$a_{n+2} = a_1 a_{n+1} - a_n \quad (n \geqq 1)$$

で数列 $\{a_n\}$ を定義する．　(佐賀大学 2011) 6

(1) $n \geqq 1$ のとき $a_{n+4} = a_2 a_{n+2} - a_n$ となることを示せ．

(2) $c = \sqrt{2}$ のとき a_{100} を求めよ．

標準 16.61 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = (5+\sqrt{26})^{n-1} + (5-\sqrt{26})^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定義する．　(琉球大学 2004) 1

(1) すべての自然数 n に対して，$a_{n+2} = 10a_{n+1} + a_n$ であることを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，a_n は自然数であることを示せ．

(3) 実数 $(5+\sqrt{26})^{99}$ を無限小数で表すと，小数第 1 位から小数第 99 位までの数字がすべて 0 であることを示せ．$-0.1 < 5 - \sqrt{26} < 0$ を証明なしで用いてよい．

標準 16.62 階段を上るとき，一度に上ることができる段数は 1 段または 2 段のみであるとする．このとき以下の問いに答えなさい．　(分大 [医]2020) 7

(1) ちょうど 10 段上る方法は全部で何通りあるか答えなさい．

(2) n を正の整数とする．ちょうど n 段上る方法は全部で何通りあるか答えなさい．

標準 16.63 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定める．また α を $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$ を満たす正の実数とする．次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2016) 3

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ で定める．b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $b_n \geqq 1$ となることを示せ．

(3) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $|b_{n+1} - \alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha}|b_n - \alpha|$ となることを示せ．

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $|b_n - \alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha^n}$ となることを示せ．

標準 16.64 赤玉は，装置 M の中では，1 分経過後に 2 個の白玉に変化する．白玉は，装置 M の中では，1 分経過後に 1 個の赤玉と 1 個の白玉に変化する．時刻 $t=1$(分) に装置 M へ赤玉を 1 個入れ，以降，1 分経過ごとに装置 M へ赤玉を 1 個追加する．時刻 $t=n$(分) における装置 M 中の赤玉と白玉の個数をそれぞれ a_n と b_n $(n=1,2,\cdots)$ とする．このとき，時刻 $t=3$(分) までの赤玉と白玉の個数は，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=3$，$b_1=0$，$b_2=2$，$b_3=4$ となる．以下に答えよ． (九工大 [情]2006) 3

(1) a_{n+1} を b_n を用いて表し，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ．

(2) a_{n+2}，a_{n+1}，a_n $(n=1,2,\cdots)$ が満たす関係式を求めよ．

(3) $c_n=a_{n+1}-2a_n$ とするとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項が $c_n=(-1)^n$ となることを示せ．

(4) $d_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とするとき，数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

標準 16.65 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=\frac{10}{9},\quad a_2=2,\quad 100a_{n+2}-180a_{n+1}+81a_n=0\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって与えられている．次に答えよ． (九工大 [工]2002) 2

(1) $b_n=a_{n+1}-\dfrac{9}{10}a_n$ とおく．数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(2) $a_n=\dfrac{9}{10}b_nc_n$ により数列 $\{c_n\}$ を定める．一般項 c_n および a_n を求めよ．

(3) a_n が最大になるときの自然数 n を求めよ．

標準 16.66 袋の中に白色と黄色の 2 枚のカードが入っている．袋から無作為に 1 枚取り出してその色を記録し，袋にもどす試行を n 回くり返し行う．最後の 2 回の試行，つまり，$n-1$ 回目と n 回目にはじめて 2 枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数を $f(n)$ とおく．ただし $n \geqq 2$ とする．以下に答えよ．

(九工大 [情]2002) 5

(1) $f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ を求めよ．

(2) $f(n-2),\ f(n-1),\ f(n)$ $(n \geqq 4)$ の間の関係式を求めたい．下の (ア),(イ),(ウ) に当てはまる式を求めよ．
1 枚目のカードが白色で，さらに $n-1$ 回の試行を行った結果最後の 2 回ではじめて 2 枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数は［(ア)］である．1 枚目のカードが黄色で，さらに $n-1$ 回の試行を行った結果最後の 2 回ではじめて 2 枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数は［(イ)］である．したがって，$f(n-2)$，$f(n-1)$，$f(n)$ $(n \geqq 4)$ の間に［(ウ)］の関係式が成り立つ．

(3) 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解を α，β とし，$a_n = f(n) - \alpha f(n-1)$，$b_n = f(n) - \beta f(n-1)$ とおく．このとき数列 $\{a_n\}$ は公比 β の等比数列であり，数列 $\{b_n\}$ は公比 α の等比数列であることを示せ．

(4) $f(n)$ を求めよ．

16.4.3　S_n を含む漸化式

□□ **16.67** 第 1 項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = an^2 + bn + c$ で表される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を求めよ．ただし，a，b，c は定数とする．　(福岡教育大学 2001) 1

基本 16.68 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．いま $S_n = n^2 - 25n$ のとき，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2005) 6

(1) 初項 a_1 を求めよ．

(2) この数列が等差数列であることを示せ．

(3) $S_n > 396$ となる最小の n を求めよ．

基本 16.69 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$a_1=1,\quad S_{n-1}-a_n=-4\quad (n=2,3,4,\cdots)$$

が成り立つとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2008) 9

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 の値をそれぞれ求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

基本 16.70 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，関係式 $S_n=2a_n+n$ が成り立っている．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2006) 8

(1) $n\geqq 2$ のとき，a_n を a_{n-1} を用いて表せ．

(2) $n\geqq 1$ のとき，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおく．b_n を n を用いて表せ．

(3) a_n を n を用いて表せ．

基本 16.71 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=\dfrac{3}{2}a_n-n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたす． (大分大学 2012) 1

(1) a_1 を求めなさい．

(2) a_2 を求めなさい．

(3) 一般項 a_n を求めなさい．

標準 16.72 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする．

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=4a_n-S_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つとき，次の問いに答えなさい． (大分大学 2009) 2

(1) $n\geqq 1$ のとき，a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(2) $b_n=a_{n+1}-2a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

標準 16.73 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n=2a_n+n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [文]2013) 4

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(2) a_n を n の式で表せ．

標準 16.74 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和をそれぞれ

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

とおいたとき

$$s_n = \frac{3n^2 + n}{2}, \quad \log_2(t_n + 1) = 2n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2016) 2

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ．

標準 16.75 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_2 = 3, \ nS_n = (n-1)(2a_n + 2 - n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたしているとき，次の各問に答えよ．　(鹿児島大学 2001) 4

(1) 数列 $\{a_n\}$ は $na_{n+1} - 2(n+1)a_n = n + 2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたすことを証明せよ．

(2) $b_n = \dfrac{1}{n}(a_n + 1)$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2a_k + 1)$ を n の式で表せ．

16.4.4 分数漸化式

基本 16.76 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_n+5}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたす．

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ． (大分大学 2001) 1

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

基本 16.77 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=1,\quad a_n=\frac{a_{n-1}}{(4n+3)a_{n-1}+5}\quad (n=2,3,4,\cdots)$$

次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2013) 6

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2) (1) の b_n を用いて $c_n=b_{n+1}-b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

16.4.5 連立漸化式

基本 16.78 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が初項 $a_1=1$，$b_1=1$ であり，また

$$a_{n+1}=2a_n+b_n+2,\quad b_{n+1}=a_n+2b_n$$

の関係を満たしているとする．このとき次の問いに答えよ． (佐賀大学 2002) 1

(1) a_3，b_3 を求めよ．

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_n+b_n$ で定めたとき，その一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

標準 16.79 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は以下の条件を満たしているものとする．

$$\begin{aligned} &x_1 = 8, \qquad y_1 = -5 \\ &x_{n+1} = 2x_n + y_n + 3n - 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ &y_{n+1} = 2y_n + x_n - 3n + 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ．　(熊大 [文]2007) 4

(1) $z_n = x_n + y_n$，また $w_n = x_n - y_n$ とおく．数列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y = x$ との距離が最小になるような n の値をすべて求めよ．

標準 16.80 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，

$$\begin{cases} 2a_{2k+1} - 3a_{2k} + a_{2k-1} = 0 \\ 2a_{2k+2} - 3a_{2k+1} + a_{2k} = 1 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたしている．次に答えよ．　(九工大 [工]2005) 1

(1) a_3，a_4，a_5 の値をそれぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義する．b_{n+2} を b_n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

標準 16.81 各項が正となる数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1}a_{n-1} = {a_n}^2 + 1 \quad (n \geqq 2)$$

を満たすとする．　(鹿児島大学 2022) 3

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) c を実数とする．3 以上のすべての自然数 n に対して

$$(a_{n+1} + ca_n + a_{n-1})a_{n-1} = a_n(a_n + ca_{n-1} + a_{n-2})$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 3 以上のすべての自然数 n に対して

$$a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

標準 16.82 数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定める．また，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\cos(a_n\pi)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定め，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=\cos\left(\dfrac{a_n}{2}\pi\right)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定める．次に答えよ． (九工大 [工]2007) 2

(1) b_1，b_2，b_3，b_4，b_5，b_6 の値を求めよ，

(2) b_{n+3} $(n=1,2,3,\cdots)$ を b_n を用いて表せ．

(3) b_{100} の値を求めよ．

(4) c_1，c_2，c_3，c_4，c_5，c_6 の値を求めよ．

(5) c_{2007} の値を求めよ．

応用 16.83 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ の間に次の漸化式が成立する．

$$x_{n+1}=2x_n,\ y_{n+1}=3x_n+y_n,\ z_{n+1}=x_n-2y_n+3z_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ． (分大 [医]2013) 8

(1) 初項 $(x_1,\ y_1)=(2,\ 0)$ に対して，一般項 x_n と y_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が定数 c，d，r，s に対して，関係 $a_{n+1}=ra_n+cs^n+d$ で定義されるとき，$f_n=ps^n+q$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が次式を満たすように定数 p と q を求めよ．ただし，$r\neq s$，$r\neq 0,1$，$s\neq 0,1$ とする．

$$a_{n+1}+f_{n+1}=r(a_n+f_n) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) 初項 $(x_1,\ y_1,\ z_1)=(2,\ 0,\ 0)$ に対して，一般項 z_n を求めよ．

16.4.6　確率漸化式

標準 16.84 平面の上に正四面体がある．平面と接している面の 3 辺の 1 つを任意に選び，これを軸として正四面体をたおす．この操作を n 回続けて行ったとき，最初に平面と接していた面が再び平面と接する確率を p_n とする．　(琉球大学 2005) 4

(1) p_1，p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_n を n を用いて表せ．

標準 16.85 箱の中に赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている．この箱から玉を 1 個取り出し，玉の色を見た上で箱に戻すという試行を n 回繰り返す．赤玉が連続して m 回以上出た確率を $P(n,\ m)$ とおく．だだし，$n \geqq m \geqq 2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $P(2,\ 2)$，$P(3,\ 2)$，$P(4,\ 2)$ を求めよ．　(琉球大学 2019) 4

(2) $P(m,\ m)$，$P(m+1,\ m)$，$P(m+2,\ m)$ を求めよ．

(3) $n = m+1,\ m+2,\ m+3, \cdots, 2m$ に対し $P(n,\ m) - P(n-1,\ m)$ を求めよ．

(4) $P(2m,\ m)$ を求めよ．

標準 16.86 容器の中にある種類の生物がいて，この容器の中では増殖しない．この生物に関して，次の性質を満たす定数 p があることが知られている．

［性質］この生物の個体は k 日目に生存していれば，他の個体が何匹いるかにかかわりなく，$k+1$ 日目には確率 p で生存している $(k = 1, 2, 3, \cdots)$．

k 日目に生存している個体数を X_k で表す．$X_1 = n$ とするとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2009) 7

(1) $X_2 = 0$ となる確率を求めよ．

(2) $X_3 = 0$ となる確率を求めよ．

(3) $X_k > 0$ であるが $X_{k+1} = 0$ となる確率を求めよ．

標準 16.87 正三角形 ABC があり，点 X は正三角形 ABC の頂点を移動する点である．サイコロを投げて 5 の目が出たとき点 X は時計回りに隣の頂点に移動し，6 の目が出たとき点 X は反時計回りに隣の頂点に移動し，それ以外の目が出たとき点 X は移動しない．はじめに点 X は頂点 A にあるとし，サイコロを n 回投げたとき点 X が頂点 A にある確率を P_n とする． (大分大学 2014) 6

(1) P_1，P_2，P_3 を求めなさい．

(2) P_{n+1} を P_n を用いて表しなさい．

(3) P_n を求めなさい．

標準 16.88 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点を時計回りに P，Q，R とする．これらの頂点のいずれかにある動点が，次のように辺上を移動することを 1 回の試行とする．さいころを 1 回投げて，1 の目が出れば反時計回りに長さ 1 だけ移動し，6 の目が出れば移動せず，それ以外の場合は時計回りに長さ 1 だけ移動する．動点は最初に点 P にあり，n 回の試行後に動点が点 P，Q，R にある確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2012) 4

(1) p_1，p_2 をそれぞれ求めよ．

(2) q_2，r_2 をそれぞれ求め，さらに p_3 を求めよ．

(3) p_{n+1} を r_n を用いて表せ．

(4) p_{n+3} を p_n を用いて表せ．

(5) p_{3n} を n を用いて表せ．

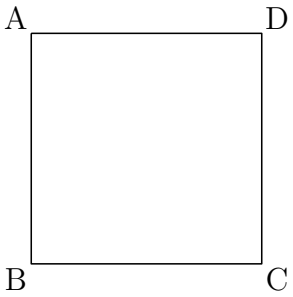
標準 16.89 正方形の 4 個の頂点を，時計回りに順に A，B，C，D とする．頂点 A から出発して頂点上を時計回りに点 P を進めるゲームを行う．硬貨を 1 回投げるごとに，表が出たときには頂点 1 つ分だけ点 P を進め，裏が出たときには頂点 2 つ分だけ点 P を進めるものとする．ただし，点 P が頂点 D にとまった時点でゲームは終わるものとする．硬貨を n 回投げ終えた時点で点 P が頂点 A に到達する確率を p_n とするとき，次の問に答えよ． (佐賀大学 2015) 4

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_4，p_5 を求めよ．

(3) p_{12} を求めよ．

標準 16.90 図のような一辺の長さが 1 の正方形 ABCD がある．この正方形の辺上の点 Q を，コインを投げて表が出れば反時計まわりに 1，裏が出れば時計まわりに 1 動かす試行を考える．点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする．このとき，次の問いに答えよ．　(九大 [文]2007) 3



(1) 表の出る確率が $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ．同様に上記の試行を 3 回および 4 回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ．

(2) 裏の出る確率 p が $\dfrac{1}{2}$ より大きいコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，頂点 A，B，C，D のうち点 Q が頂点 C にある確率が最大となることを示せ．同様に 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となることを示せ．

標準 16.91 A と B は，赤球 2 個と白球 1 個が入った袋をそれぞれ 1 つずつ持っている．次のような試行を考える．

> A と B が，それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を 1 つ選び，色を見てからもとの袋に戻す．

上の試行を n $(n \geqq 2)$ 回繰り返したとき，n 回の試行の中で A と B が取り出した球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない確率を P_n とする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2016) 4

(1) 1 回の試行で，A と B が取り出した球の色が一致する確率を求めよ．

(2) P_2，P_3 を求めよ．

(3) $n \geqq 4$ のとき，

$$P_n = \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{20}{81}P_{n-2} + \frac{5\cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

が成り立つことを示せ．

標準 16.92 2つの袋A，Bのそれぞれに，赤玉1個と白玉2個の合計3個が入っている．次のような試行を考える．

袋Aから無作為に玉を1個取り出し，

袋Bから無作為に玉を1個取り出す．

次に，上で袋Aから取り出した玉を袋Bに入れ，

上で袋Bから取り出した玉を袋Aに入れる．

この試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 行った後，袋Aの中を確認する．例えば，$n = 2$ の場合，1回目の試行で，袋Aから白玉，袋Bから赤玉を取り出し，2回目の試行で，袋Aから白玉，袋Bから白玉を取り出したとすると，その結果，袋Aには赤玉が2個，白玉が1個入っている．

n 回の試行の後で，

袋Aに赤玉1個と白玉2個が入っている確率を P_n，

袋Aに赤玉2個と白玉1個が入っている確率を Q_n，

袋Aに赤玉が入っていない確率を R_n

とする．ただし，どの玉も同じ確率で取り出されるとする．このとき，次の各問に答えよ．(宮崎大学 2018) 4

(1) P_1，Q_1，R_1 を求めよ．

(2) P_2 を求めよ．

(3) P_{n+1} を，P_n を用いて表せ．

(4) P_n を求めよ．

応用 16.93 赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A，B，C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している．3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える．1 回目は A が玉を取り出し，次のルール (a)，(b)，(c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す．

(a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする．

(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す．

(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣の人が次の回に玉を取り出す．

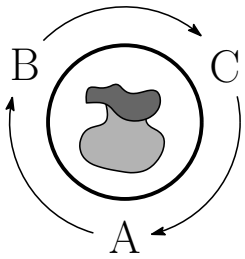
A，B，C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする．ただし，$a_1 = 1$，$b_1 = c_1 = 0$ である．以下の問いに答えよ．

(九大 [理]2017) 4

(1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ．

(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ．

(3) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ．



応用 16.94 k は 2 以上の自然数とする．「1」と書かれたカードが 1 枚，「2」と書かれたカードが 2 枚，$\cdots$，「k」と書かれたカードが k 枚ある．そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す．この $(M + N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す．記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(九大 [理]2009) 2

(1) p_1 と p_2 を M，N で表せ．

(2) p_{n+1} を p_n，M，N で表せ．

(3) $\dfrac{M - N}{M + N}$ を k で表せ．

(4) p_n を n と k で表せ．

応用 16.95 はじめに，袋 A には赤玉が 1 個と白玉が 2 個，袋 B にも赤玉が 1 個と白玉が 2 個入っている．袋 A から無作為に玉を 1 個取り出して袋 B に入れ，引き続き袋 B から無作為に玉を 1 個取り出して袋 A に戻す．この一連の操作を 1 回の試行とするとき，n 回 $(n \geqq 1)$ の試行の後，袋 A に赤玉が 1 個だけ入っている確率を p_n，2 個入っている確率を q_n，1 個も入っていない確率を r_n とする．以下に答えよ．(九工大 [情]2003) 5

(1) p_1，q_1，r_1 の値を求めよ．

(2) p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いて表せ．

(3) $q_n = r_n$ であることを示せ．

(4) p_n，q_n，r_n を求めよ．

応用 16.96 いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える．

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，
箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる．

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ．(九大 [文]2012) 4

(1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n = 1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ．

(2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n = 1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ．

(3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ．

応用 16.97 点 P は次の (i)，(ii)，(iii) の規則に従って数直線上を動く．

(i) 時刻 0 で，P は整数座標点 0 から 10 のいずれかの位置 i $(1 \leqq i \leqq 10)$ にある．

(ii) 時刻 t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ に位置 i $(1 \leqq i \leqq 9)$ にある P は，$t+1$ には確率 p $\left(0 < p < \dfrac{1}{2}\right)$ で位置 $i+1$ に，確率 $1-p$ で位置 $i-1$ に移動する．

(iii) 時刻 t に位置 0 または 10 にある P は，$t+1$ にもその位置に留まる．

以下の問いに答えよ．　(九工大 [情]2014) 4

(1) P が時刻 0 で位置 2 にあるとき，時刻 3 で位置 0 にある確率を求めよ．

(2) P が時刻 0 で位置 1 にあるとき，時刻 3 で位置 0 にある確率を求めよ．

時刻 0 で位置 i にある P が，いずれかの時刻で位置 0 に到達する確率を q_i とする．ただし，$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$ である．$1 \leqq i \leqq 9$ のとき，q_{i+1}，q_i，q_{i-1} の間には $q_i = pq_{i+1} + (1-p)q_{i-1}$ の関係が成り立つ．

(3) $q_{i+1} - q_i = \boxed{\text{(a)}}(q_i - q_{i-1})$ である．空欄の (a) に入る適切な数または式を求めよ．

(4) q_i を q_1 と p を用いて表せ．

(5) q_1 を求め，q_i を p を用いて表せ．

16.4.7　その他の漸化式

標準 16.98 数列 $\{a_n\}$ は

$$\sqrt[3]{3}\,{a_{n+2}}^3 = {a_n}^4, \quad a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしている．$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ のとき，a_{2k-1}(k は自然数) を，k を用いて表せ．
(宮大 [医]2015) 5

標準 16.99 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = {a_n}^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で与える．$a_1, \ldots, a_n$ の積を P_n とおく．　(九大 [文]2001) 3

(1) 各 n について $a_n > 0$ であることを示せ．

(2) 各 n について $a_{n+1} = P_n + 1$ であることを示せ．

(3) $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$ とおく．S_1，S_2，S_3，S_4 を求めよ．

(4) 各 n について S_n を P_n で表せ．

応用 16.100 放物線 $C : y = x^2 - 1$ と $a_1 > 1$ を満たす実数 a_1 を考える．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [文]2008) 4

(1) C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とするとき，a_2 を a_1 を用いて表せ．

(2) (1) で求めた a_2 に対して，C 上の点 $(a_2,\ {a_2}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする．この操作を繰り返してできる数列を a_1，a_2，$\cdots$，$a_n \cdots$ とする．このとき，すべての n に対して $a_n > 1$ を示せ．

(3) $b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$ とおくとき，すべての n に対して，$b_{n+1} < {b_n}^2$ を示せ．

(4) $a_1 = 2$ のとき，$b_n < 10^{-12}$ となる n の値を 1 つ求めよ．ただし，必要があれば，$\log_{10} 2$ を 0.3010 として計算してよい．

16.5 数学的帰納法

□□ **16.101** 次の (1)，(2) に答えよ． (鹿児島大学 2013) 3

(1) 自然数 n に対して自然数 a_n を次のように定義する．

$$a_n = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1$$

このとき，すべての自然数 k に対して $(2k)! = 2^k k! a_k$ が成り立つ．このことを証明せよ．

(2) すべての自然数 n に対して，$2^n!$ は $2^{(2^n-1)}$ で割り切れる．このことを数学的帰納法で証明せよ．

□□ **16.102** 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = \sin^2\theta$，$a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められているとき，次の (1)，(2) に答えよ． (宮崎大学 2013) 2

(1) a_2 と a_3 を，θ を用いて表せ．

(2) a_n が θ と n を用いてどのように表されるのか予想し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

□□ **16.103** n は 3 以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ． (福岡教育大学 2015) 1

$$2^n > \frac{1}{2}n^2 + n$$

□□ **16.104** 自然数 n について $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ． (福岡教育大学 2013) 5

基本 16.105 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=6$，$a_{n+1}=a_n+16n+8$ $(n=1,2,3,\cdots)$ により，定まるものとして，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2002) 4

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) 和 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$ を求めよ．

基本 16.106 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=3-\dfrac{2}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2006) 4

(1) すべての自然数 n について，$1<a_n<2$ であることを示せ．

(2) $x_n=\dfrac{1}{2-a_n}$ とおくとき，x_{n+1} と x_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

基本 16.107 $a_1=\dfrac{q}{p}$ $(p>q>0)$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ で定義された数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2003) 12

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2) 一般項 a_n を推定し，n，p，q を用いて表せ．さらに，その推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

基本 16.108 数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_1=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{1}{3-2a_n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定められているとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2012) 10

(1) a_2，a_3，a_4 の値を求めよ．

(2) 一般項 a_n を予想し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

基本 16.109 初項 $a_1 = 0$ と漸化式

$$a_{n+1} = (1-r)r^{n-1} + r^2 a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって与えられる数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．ただし，$r \neq 0$，$r \neq 1$ とする． (宮崎大学 2015) 10

(1) a_2，a_3，a_4 を，r を用いてそれぞれ表せ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それが正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算し，r，n を用いて表せ．

基本 16.110 条件 $a_1 = 0$，$na_{n+1} = (n+1)a_n + 2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列を $\{a_n\}$ とし，条件 $b_1 = 1$，$nb_{n+1} = (n+1)b_n + n(n+1)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列を $\{b_n\}$ とする． (大分大学 2002) 1

(1) a_n，b_n を表す n の式を推定し，それらが正しいことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．

(2) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる数を小さい順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とするとき，c_n を表す n の式を求め，簡潔にその理由を述べなさい．

(3) $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めなさい．

標準 16.111 i を虚数単位とし，複素数 a_n を

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} a_n + \sqrt{3}i \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定められる．また，複素数 b_n を

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = a_n b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ． (琉球大学 2020) 3

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(2) すべての正の整数 n について $a_{n+3} = a_n$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) b_n を求めよ．

標準 16.112 次の問いに答えよ．　(長崎大学 2012) 2

(1) m を 5 以上の自然数とする．次の不等式が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ．

$$m! > 2^m > m^2$$

(2) 自然数 n に対する次の和を求めよ．

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

(3) (2) で求めた S_n について，$S_n < \dfrac{3}{4}$ が成り立つことを示せ．

(4) (2) で求めた S_n について，$S_n > \dfrac{2}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

標準 16.113 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ に対し，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．すべての自然数 n に対して，$\dfrac{a_n + 3}{2} = \sqrt{3S_n}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．　(佐賀大学 2012) 5

(2) a_{n+1} を S_n を用いて表せ．

(3) n が自然数であるとき，数学的帰納法を用いて，$S_n = 3n^2$ が成り立つことを証明せよ．

標準 16.114 関係式

$$a_1 = \beta,\quad a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．ただし，$\beta < \dfrac{1}{2}$ とする．

(1) $n \geqq 1$ に対して，不等式 $a_n < \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．　(宮崎大学 2005) 13

(2) $n \geqq 1$ に対して，$b_n = \log_2\left(\dfrac{1}{2} - a_n\right)$ とおく．このとき，関係式

$$b_{n+1} = 2b_n + 1$$

が成り立つことを示せ．

(3) a_n を n と β を用いて表せ．

標準 16.115 1 次関数 $f_n(x) = a_n x + b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は以下の 2 つの条件を満たすとする.

(i) $f_1(x) = x$

(ii) $f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x) = \displaystyle\int_1^x 6t f_n(t)\, dt$ を $x^2 + x$ で割った余りに等しい.

以下の問いに答えよ. (熊大 [文]2014) 4

(1) $n \geqq 1$ のとき, a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ.

(2) $n \geqq 2$ のとき, $|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ.

(3) $n \geqq 2$ のとき, $|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数ではないことを示せ.

標準 16.116 n を 2 以上の整数とする. n 個の実数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n が与えられたとき,

$$P_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2, \quad Q_n = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2$$

とおく. 次に, $1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i, j に対する $a_i a_j$ の和を R_n とする. たとえば, $R_2 = a_1 a_2$, $R_3 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$ である. 同様に, $1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i, j に対する $(a_i - a_j)^2$ の和を S_n とする. たとえば, $S_2 = (a_1 - a_2)^2$, $S_3 = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2$ である. 次の問いに答えよ.

(1) P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ. (長崎大学 2013) 3

(2) すべての $n \geqq 2$ に対して $S_n = (n-1)Q_n - 2R_n$ と表されることを, 数学的帰納法で証明せよ.

(3) Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ.

(4) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ のとき, Q_4 の最小値と, そのときの a_1, a_2, a_3, a_4 の値をそれぞれ求めよ.

標準 16.117 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, $a_1 = b_1 = 1$ および, 関係式

$$a_{n+1} = 2a_n b_n$$
$$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$$

をみたすものとする. このとき次の問いに答えよ. (九大 [文]2006) 2

(1) $n \geqq 3$ のとき, a_n は 3 で割り切れるが, b_n は 3 で割り切れないことを示せ.

(2) $n \geqq 2$ のとき, a_n と b_n は互いに素であることを示せ.

標準 16.118 自然数 n に対して，$a_n = (\cos 2^n)(\cos 2^{n-1}) \cdots (\cos 2)(\cos 1)$ とおく．ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a_1 = \dfrac{\sin 4}{4 \sin 1}$ を示せ．　(九大 [文]2008) 1

(2) $a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1} \sin 1}$ を示せ．

(3) $a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ．

応用 16.119 次の問いに答えよ．　(九大 [文]2002) 4

(1) n を正の整数とする．どんな角度 θ に対しても

$$\cos n\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ．また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta = p_n(\cos \theta)$$

と表されることを示せ．

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になることを示せ．

(3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ．また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ．

16.6 問題研究

16.6.1 3項間の漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_{n+2}-pa_{n+1}+qa_n=0$ の特性方程式

$$x^2-px+q=0$$

の解を α，β とすると，与えられた漸化式は　$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

これから
$$\begin{cases} a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \\ a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \end{cases}$$

ゆえに
$$\begin{cases} a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1) \\ a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1) \end{cases} \quad \cdots(*)$$

i) $\alpha\neq\beta$ のとき，$(*)$ の第1式から第2式を引くことにより

$$a_n=\frac{(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}-(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$$

ii) $\alpha=\beta$ のとき，$(*)$ から　$\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\dfrac{a_n}{\alpha^n}=\dfrac{a_2}{\alpha^2}-\dfrac{a_1}{\alpha}$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{\alpha}$，公差 $\dfrac{a_2}{\alpha^2}-\dfrac{a_1}{\alpha}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{a_1}{\alpha}+(n-1)\left(\frac{a_2}{\alpha^2}-\frac{a_1}{\alpha}\right)$$

よって　$a_n=\alpha^{n-1}\left\{a_1+(n-1)\left(\dfrac{a_2}{\alpha}-a_1\right)\right\}$

i)，ii) の結果から，定数 A，B，C，D を用いて

$\alpha\neq\beta$ のとき　$a_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$，　$\alpha=\beta$ のとき　$a_n=(Cn+D)\alpha^{n-1}$

例えば，201 ページの 16.58(鹿児島大学 2014) について，(2) は特性方程式 $x^2-5x+4=0$ の解が 1，4 であるから，一般項を

$$a_n=A+B\cdot 4^{n-1}$$

とおける．$a_1=1$，$a_2=3$ であるから

$$A+B=1,\quad A+4B=3 \quad \text{これを解いて} \quad A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{3}$$

よって
$$a_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot 4^{n-1}=\frac{1}{3}(1+2^{2n-1})$$

(3) は特性方程式 $x^2-4x+4=0$ が重解 2 をもつから，一般項を

$$a_n=(Cn+D)\cdot 2^{n-1}$$

とおける．$a_1=1$，$a_2=3$ であるから

$$C+D=1,\quad (2C+D)\cdot 2=3\quad \text{これを解いて}\quad C=D=\frac{1}{2}$$

よって　　$a_n=\left(\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=(n+1)\cdot 2^{n-2}$

(1) は特性方程式 $x^2+4=0$ の解が $\pm 2i$ であるから，一般項を

$$a_n=C(2i)^n+D(-2i)^n$$

とおくと，$a_1=1$，$a_2=3$ であるから

$$2i(C-D)=1,\quad -4(C+D)=3\quad \text{ゆえに}\quad C+D=-\frac{3}{4},\quad (C-D)i=\frac{1}{2}$$

したがって (ド・モアブルの定理 [数学 Ⅲ] を用いる)

$$\begin{aligned}
a_n&=2^n\{Ci^n+D(-i)^n\}\\
&=2^n\left\{C\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n+D\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n\right\}\\
&=2^n\left\{(C+D)\cos\frac{n}{2}\pi+(C-D)i\sin\frac{n}{2}\pi\right\}\\
&=2^n\left(-\frac{3}{4}\cos\frac{n}{2}\pi+\frac{1}{2}\sin\frac{n}{2}\pi\right)\\
&=2^{n-2}\left(-3\cos\frac{n}{2}\pi+2\sin\frac{n}{2}\pi\right)
\end{aligned}$$

i) n が奇数のとき，$\cos\dfrac{n}{2}\pi=0$，$\sin\dfrac{n}{2}\pi=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ より

$$a_n=2^{n-2}\cdot 2\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}=(-4)^{\frac{n-1}{2}}$$

ii) n が偶数のとき，$\cos\dfrac{n}{2}\pi=(-1)^{\frac{n}{2}}$，$\sin\dfrac{n}{2}\pi=0$ より

$$a_n=2^{n-2}\cdot(-3)\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}=3\cdot(-4)^{\frac{n-2}{2}}$$

16.6.2 分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について，以下に述べる．
$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．
$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots (***)$$
$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

したがって $\quad \dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \dfrac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha} \left(\dfrac{r\alpha + s}{r\beta + s} \right)^{n-1}$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると　　$\dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+\dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

例えば，207 ページの 16.76(大分大学 2001) の漸化式

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{2a_n}{3a_n+5}$$

の特性方程式 $x=\dfrac{2x}{3x+5}$ の解が $0,-1$ であるから

$$a_{n+1}+1=\frac{5(a_n+1)}{3a_n+5}$$

したがって　　$\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n}{a_n+1}$　　ゆえに　　$\dfrac{a_n}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

よって　　$a_n=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}}{4\cdot 5^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}$

次に，218 ページの 16.107(宮崎大学 2003) の漸化式

$$a_1=\frac{q}{p}\ (p>q>0),\quad a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

の特性方程式 $x=\dfrac{1}{2-x}$，すなわち $x^2-2x+1=0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

ゆえに　　$\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{\frac{q}{p}-1}-(n-1)$　　よって　　$a_n=\dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$

16.6.3 ギャンブラーの破産問題

ランダムウォークの応用として，ギャンブラーの破産問題と呼ばれているものを考える．あるギャンブラーの最初の所持金を 2 ドルとする．1 回賭けを行うごとに，勝てば所持金が 1 ドル増え，負ければ 1 ドル失うものとする．所持金がなくなればギャンブラーは破産しそこで賭けは終わり，また，所持金が 5 ドルになれば賭けは終了する．1 回の賭けで勝つ確率を $\frac{2}{3}$，負ける確率を $\frac{1}{3}$ としたとき，このギャンブラーが破産して終了する確率はいくらとなるかを考えてみよう．この問題を数直線上で考えると，数直線上の位置 2 からスタートし，0 と 5 の間で $+$ 方向へ移動する確率が $\frac{2}{3}$，$-$ 方向へ移動する確率が $\frac{1}{3}$ のランダムウォークとなる．0 から 5 の間で $+$ 方向へ移動する確率が $\frac{2}{3}$，$-$ 方向へ移動する確率が $\frac{1}{3}$ のランダムウォークとなる．0 または 5 に達したときに賭けは終了する．

さて，ランダムウォークでは，状態の変化は確率的に定まり，その確率は一定である．すなわち，ある状態にある場合，それ以降の過程は時刻や履歴によらず確率的に定まる．したがって，ギャンブラーの破産確率は，単にそのときの所持金の額で決まる．これを $r(i)$ $(i = 0, 1, \cdots, 5)$ としよう．$r(i)$ は所持金が i であるときに，破産して終了する確率である． (東大 [理]2002 年後期)

(1) $r(2)$ を $r(1)$，$r(3)$ で表せ．

(2) このような関係式を各状態について表し，それらを用いて最初の所持金が 2 ドルのギャンブラーが破産して終了する確率を求めよ．

解答 (1) $\boldsymbol{r(2) = \frac{2}{3}r(3) + \frac{1}{3}r(1)}$

(2) (1) と同様に $\quad r(1) = \frac{2}{3}r(2) + \frac{1}{3}r(0), \quad r(0) = 1$

$r(2) = x$ とおいて上式に代入すると $\quad r(1) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

(1) の結果から，さらに

$$r(3) = \frac{3}{2}r(2) - \frac{1}{2}r(1) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}$$

$$r(4) = \frac{3}{2}r(3) - \frac{1}{2}r(2) = \frac{3}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}x = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$r(5) = \frac{3}{2}r(4) - \frac{1}{2}r(3) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{31}{24}x - \frac{7}{24}$$

$r(5) = 0$ であるから $\quad x = \frac{7}{31}$ $\quad$ よって $\quad \boldsymbol{r(2) = \frac{7}{31}}$

補足　確率漸化式 $r(i)=\dfrac{2}{3}r(i+1)+\dfrac{1}{3}r(i-1)$ の特性方程式 $2x^2-3x+1=0$ の解が $\dfrac{1}{2}$, 1 から，定数 A，B を用いて

$$r(i)=A\left(\frac{1}{2}\right)^i+B$$

とおくと，$r(0)=1$，$r(5)=1$ であるから

$$A+B=1,\quad \frac{A}{32}+B=0\quad \text{これを解いて}\quad A=\frac{32}{31},\quad B=-\frac{1}{31}$$

よって　　$r(i)=\dfrac{32}{31}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i-\dfrac{1}{31}\quad (i=0,1,\cdots,5)$

次の問題も (216 ページの 16.97)，破産問題をテーマにした出題である．

点 P は次の (i)，(ii)，(iii) の規則に従って数直線上を動く．　　(九工大 [情]2014)

(i) 時刻 0 で，P は整数座標点 0 から 10 のいずれかの位置 i $(1 \leqq i \leqq 10)$ にある．

(ii) 時刻 t $(t=0,1,2,\ldots)$ に位置 i $(1 \leqq i \leqq 9)$ にある P は，$t+1$ には確率 p $\left(0<p<\dfrac{1}{2}\right)$ で位置 $i+1$ に，確率 $1-p$ で位置 $i-1$ に移動する．

(iii) 時刻 t に位置 0 または 10 にある P は，$t+1$ にもその位置に留まる．

(i)〜(iii) の規則に従うとき，最終的に q_i を求めさせる問題であるが，次の確率漸化式が成り立つ (1 つ先の確率過程に進む)．

$$(*)\quad q_0=1,\quad q_{10}=0,\quad q_i=pq_{i+1}+(1-p)q_{i-1}\qquad (i=1,2,\cdots,9)$$

注意　マルコフ性のように，1 つ前の確率過程をもとに

$$(\times)\quad q_i=pq_{i-1}+(1-p)q_{i+1}$$

とすると，規則 iii) により，$i=1$ のとき上式は成立しない．これ以外で成立したとしても，確率漸化式は，連立方程式であるから，間違いである．

確率漸化式 $(*)$ の特性方程式 $px^2-x+1-p=0$ の解は

$$1,\ \frac{1-p}{p}\quad \left(0<p<\frac{1}{2}\ \text{より}\ 1\neq\frac{1-p}{p}\right)$$

$\alpha=\dfrac{1-p}{p}$ とおくと，実数 C，D を用いて

$$q_i=C+D\alpha^i$$

とおける．$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$ であるから

$$C + D = 1,\ \ C + D\alpha^{10} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C = \frac{\alpha^{10}}{\alpha^{10} - 1},\ \ D = -\frac{1}{\alpha^{10} - 1}$$

よって $$q_i = \frac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1} \qquad (i = 0, 1, \cdots, 10)$$

本題を次のように書き直すこともできる．

破産問題 (Ruin problem)

P は所持金 i 万円で $(1 \leqq i \leqq 9)$，1 回のゲームで勝てば 1 万円だけ増え，負ければ 1 万円だけ減るゲームに参加する．P は所持金が 10 万円 (目標金額) になるか，所持金がなくなったときにゲームは終了する．1 回のゲームで P が勝つ確率を p $\left(0 < p < \frac{1}{2}\right)$ とし，P の所持金がなくなる確率を q_i を求めよ．

本題の結果から，$\alpha = \dfrac{1-p}{p}$ とおくと

$$q_i = \frac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1} \qquad (i = 0, 1, \cdots, 10)$$

また，このゲームの期待金額を E_i とすると

$$E_i = 10^5(1 - q_i) = \frac{10^5(\alpha^i - 1)}{\alpha^{10} - 1}$$

例えば，P の所持金が 5 万円のとき，破産する確率 q_5 およびゲームの期待金額 E_5 は (E_5 の 1 円未満は切り捨て)

p	q_5	E_5
0.40	0.88364	11636
0.41	0.86055	13945
0.42	0.83395	16605
0.43	0.80365	19635
0.44	0.76956	23044
0.45	0.73172	26828
0.46	0.69035	30965
0.47	0.64583	35417
0.48	0.59874	40126
0.49	0.54985	45015

このような不利なゲーム $\left(0 < p < \frac{1}{2}\right)$ に時間をかけて参加するより，1 回勝負で 5 万円をかけることができるならば，1 回勝負の期待金額の方が大きい．

16.6.4　連続する自然数のべき乗和

192 ページの 16.31(九大 [文]2010) や 193 ページの 16.36(大分大学 2014) で出題されたように，連続する自然数のべき乗和の公式を証明させる問題が出題されている．

一般には，次の定理が成り立つ．

ファウルハーバー (Faulhaber) の定理

0 以上の整数 i に対して，$S_i(n)=\sum_{k=1}^{n}k^i$ とすると，次式が成立する．

$$S_i(n)=\frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i+1}{j}B_jn^{i+1-j}$$

ただし　$B_j=\displaystyle\sum_{p=0}^{j}\frac{(-1)^p\,p!}{p+1}\left\{\begin{matrix}j\\p\end{matrix}\right\}=\sum_{p=0}^{j}\frac{1}{p+1}\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}q^j$

なお，B_j はベルヌーイ数，$\left\{\begin{matrix}j\\p\end{matrix}\right\}$ は第 2 種スターリング数，$\binom{p}{q}$ は 2 項係数．

0^0 は定義されないが，ここでは便宜的に，$0^0=1$ として計算する．

証明　第 2 種スターリング数[1] を Coupon collector's problem の関係式[2] から導き，独自の証明を与えた．　**証終**

実際に，ベルヌイ数を計算すると

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\ \cdots$$

したがって，$S_i(n)$ の n^{i+1}(最高次) の係数は $\dfrac{1}{i+1}$，n^i の係数は $\dfrac{1}{2}$．例えば，

$$\begin{aligned}S_4(n)&=\frac{1}{5}\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{5}{j}B_jn^{5-j}\\&=\frac{1}{5}\left(B_0n^5-5B_1n^4+10B_2n^3-10B_3n^2+5B_4n\right)\\&=\frac{1}{5}\left(n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n\right)\\&=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2014.pdf 8
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf 7

第 17 章　確率分布と統計（数学B）

17.1　確率分布

基本 17.1 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2016) 5

(1) 1個のさいころを10回投げるとき，1または2の目が出る回数 X の期待値 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\dfrac{2}{25}x$ $(0 \leqq x \leqq 5)$ で与えられているとき，X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) 2つの事象 A，B について，A と B が独立なら $\overline{A}$ と B も独立であることを示せ．ただし $\overline{A}$ は A の余事象を表す．

標準 17.2 確率変数 X は，n 個の値 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を等しい確率でとるものとする．このとき，次の各問に答えよ．　(鹿児島大学 2001) 12

(1) 確率変数 X の平均値と標準偏差を求めよ．

(2) 確率変数 $Y=2X-1$ の平均値 m と標準偏差 σ を求めよ．

(3) $|Y-m|<\sqrt{3}\sigma$ を証明せよ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

標準 17.3 1から n $(n>3)$ までの数字 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ を1つずつ書いた n 枚のカードが入っている箱の中から，同時に2枚のカードを取り出す．この2枚のカードに書いてある数字を $X,\ Y$ $(X>Y)$ とする．いま，自然数 s，t は $1 \leqq s<t \leqq n$ を満たしているとして，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2002) 8

(1) 次の各確率を求めよ．

(a) $X=t$ かつ $Y=s$ である確率 $P(X=t,\ Y=s)$

(b) $X=t$ である確率 $P(X=t)$

(c) $Y=s$ である確率 $P(Y=s)$

(d) $X=3Y$ である確率 $P(X=3Y)$

(2) X，Y の平均をそれぞれ $E(X)$，$E(Y)$ とするとき，$E(X)+E(Y)$ を求めよ．

標準 17.4 1，2，3，4，5 の番号をつけた 5 枚のカードがある．カード 1 枚をでたらめに取り出し，取り出したカードはもとに戻す試行を繰り返す．ただしこの試行は，取り出したカードの番号が 4 以上であるか，または取り出したカードの番号の和がはじめて 4 以上になったときに終了する．カードを取り出した回数を X とするとき，次の問いに答えよ．　(鹿児島大学 2003) 8

(1) 確率 $P(X=1)$ および $P(X=2)$ を求めよ．

(2) X の確率分布および平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

(3) 取り出したカードの番号の和が 8 である確率を求めよ．さらに，取り出したカードの番号の和が 8 であるときに，カードを取り出した回数が 2 回である条件つき確率を求めよ．

標準 17.5 A チームは B，C，D，E の 4 チームと 1 試合ずつ野球の試合をする．A チームが B，C，D，E のチームに勝つ確率は，それぞれ $\frac{2}{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．A チームが勝つ試合の数を X とする．このとき次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2004) 9

(1) A チームが少なくとも 1 つのチームに勝つ確率を求めよ．

(2) A チームがちょうど 1 つのチームに勝つ確率を求めよ．

(3) X の確率分布および平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

標準 17.6 区別のつかない 4 個の空箱と，1 から 4 までの番号をつけた 4 個の玉がある．番号 1，2，3，4 の玉を番号の順に，次の (ア)，(イ) のように箱に入れる．

(ア) 番号 1 の玉を空箱の一つに入れる．

(イ) $j=2,\ 3,\ 4$ について，番号 j の玉を番号 1 の玉が入っている箱かまたは空箱の一つへ入れる．ただし，番号 1 の玉が入っている箱へ入れる確率は $1-\frac{1}{j}$ で，空箱へ入れる確率は $\frac{1}{j}$ であるとする．

$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ について，番号 j の玉を入れ終わったとき，玉が入っている箱の個数を X_j とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) 8

(1) 確率 $P(X_2=1)$，$P(X_3=1)$，$P(X_4=1)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_2=2)$，$P(X_3=3)$，$P(X_4=4)$ を求めよ．

(3) $j=3,\ 4$ について，$2 \leqq i \leqq j-1$ を満たす i に対し，確率 $P(X_j=i)$ を $P(X_{j-1}=i)$ と $P(X_{j-1}=i-1)$ を用いて表せ．

(4) X_4 の確率分布を求めよ．

標準 17.7 2 つのさいころを投げ，出た目を X，Y $(X \leqq Y)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2006) 7

(1) $X = 1$ である事象を A，$Y = 5$ である事象を B とする．確率 $P(A \cap B)$，条件つき確率 $P_B(A)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 確率 $P(X = k)$，$P(Y = k)$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(3) $3X^2 + 3Y^2$ の平均 (期待値)$E(3X^2 + 3Y^2)$ を求めよ．

標準 17.8 1，2，3，4 の番号をつけた 4 枚のカードがある．この中からカードを 1 枚取り出しそこに書かれている番号を見る，という試行を繰り返す．ただし，取り出したカードはもとに戻さない．この試行は，取り出したカードに書かれた番号の合計が 3 の倍数になるか，または 4 枚全部を取り出したときに終了する．取り出したカードに書かれた番号の合計が 3 の倍数になったとき，この試行は成功したとよぶ．4 枚全部を取り出したとき，この試行は失敗したとよぶ．この試行の得点 X は，成功したときは取り出したカードの枚数とし，失敗しときは 0 点とする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2008) 7

(1) 確率 $P(X = 1)$ および $P(X = 2)$ を求めよ．

(2) この試行が成功する確率を求めよ．また，得点の平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

(3) 取り出したカードに書かれた番号の和が 6 となる確率を求めよ．さらに，取り出したカードに書かれた番号の和が 6 であることが分かっているとき，$X = 3$ である条件つき確率を求めよ．

標準 17.9 袋の中に 1 の数字が書かれている球が 5 個，2 の数字が書かれている球が 3 個，5 の数字が書かれている球が 2 個の合計 10 個の球が入っている．1 個の球を取り出して，その球に書かれている数を確認し，もとに戻すことを繰り返す．i 回目に取り出した球に書かれている数を X_i とする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2010) 7

(1) X_1 の確率分布を表で表せ．また，X_1 の平均と分散を求めよ．

(2) $Z = X_1 + X_2$ の確率分布を表で表せ．また，確率 $P(Z \leqq 4)$ の値を求めよ．

(3) $S = X_1 - X_2$ とするとき

$$P(W \leqq a) \leqq P(Z \leqq 4)$$

を満たす整数 a の最大値を求めよ．

(4) $S = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ が $n + 1$ となる確率を求めよ．

標準 17.10 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を考える．この試行で，大きいさいころの出た目を X，小さいさいころの出た目を Y とする．$T = 2X - Y$ とするとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2011) 7

(1) 確率 $P(T = 6)$，$P(T \geqq 0)$ を求めよ．

(2) 分散 $V(X)$，平均 $E(T)$ を求めよ．

(3) $V(aT) = 25$ となる定数 a の値を求めよ．

標準 17.11 0，1，2，3，4 の数字が 1 つずつ記入された 5 枚のカードがある．この 5 枚のカードの中から 1 枚引き，数字を記録して戻すという作業を 3 回繰り返す．ただし，3 回ともどのカードを引く確率も等しいとする．記録した 3 つのカード数字の最小値を X とするとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2013) 7

(1) $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対して確率 $P(X \geqq k)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の確率分布を表で表せ．

(3) 確率変数 X の平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

(4) 確率変数 X の分散 $V(X)$ を求めよ．

標準 17.12 2 つの確率変数 X，Y の確率分布を同時に考えた表 (同時確率分布表) が以下のように与えられている．ただし，X，Y は互いに独立であり，$0 < a < 1$，$0 < b < 1$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2014) 7

X \ Y	2	4	計
1			a
2			
計	b		1

(1) 表を完成させよ．

(2) 確率変数 $W = X - Y$ の平均 $E(W)$ を求めよ．

(3) 確率変数 $Z = \dfrac{Y}{X}$ の確率分布表を作成し，Z の平均 $E(Z)$ を求めよ．

(4) $E(Z) = \dfrac{9}{4}$，$E(W) = -\dfrac{3}{2}$ となる場合に，Z の分散 $V(Z)$ を求めよ．

標準 17.13 整数 n $(n \geqq 4)$ に対し，2 枚のコインを同時に投げる試行を繰り返し，2 枚とも表が出るか，または n 回繰り返した時点で試行を終了するときの試行の回数を X_n とする．確率変数 X_n について，次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2015) 5

(1) $n-1$ 以下の自然数 k に対して，確率 $P(X_n = k)$ を求めよ．また，確率 $P(X_n > 3)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_n = n)$ を n を用いて表せ．

(3) X_n の平均を E_n とかくとき，$E_{n+1} - E_n$ を求めよ．

標準 17.14 1 個のサイコロを投げ，1 の目が出るまでこれを繰り返し行う．ただし，このサイコロ投げを繰り返す最大の回数は N 回とし $(N \geqq 2)$，N 回まで繰り返して 1 の目が出なければ，終了する．このサイコロ投げにおける繰り返し回数を X とする．このとき，次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2018) 5

(1) 確率 $P(X = k)$ を，$k < N$ と $k = N$ の場合に分けて求めよ．

(2) X の期待値を求めよ．

標準 17.15 1 個のさいころを 3 回投げる．(鹿児島大学 2020) 5

(1) 3 回とも偶数の目が出る事象を A，出る目の数がすべて異なる事象を B とする．このとき，A と B は独立であるか，独立でないか，答えよ．

(2) 出る目の数の和を X とし，$Y = 2X$ とおく．確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めよ．

(3) 出る目の数の最大値を Z_1，最小値を Z_2 とする．このとき，$Z_1 = 5$ かつ $Z_2 = 2$ となる確率 $P(Z_1 = 5,\ Z_2 = 2)$ を求めよ．

標準 17.16 1，2，3，4，5，6 の数字が 1 つずつ記入された 6 枚のカードを袋の中に入れる．この袋の中から 2 枚のカードを同時に抜き出し，それらのカードの数の大きい方を X，小さい方を Y とする．(鹿児島大学 2021) 5

(1) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X と Y は互いに独立であるか，独立でないか，答えよ．

(3) 確率変数 XY の期待値 $E(XY)$ を求めよ．

標準 17.17 大小 2 個のサイコロを同時に投げる．大きいサイコロの出る目を十の位，小さいサイコロの出る目を一の位としてできる 2 桁の数を X とし，小さいサイコロの出る目を十の位，大きいサイコロの出る目を一の位としてできる 2 桁の数を Y とする．（鹿児島大学 2022）5

(1) 確率 $P(X-Y>0)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) 確率変数 $X-Y$ の標準偏差 $\sigma(X-Y)$ を求めよ．

標準 17.18 動点 P は数直線上の座標 1 あるいは -1 にある．表が出る確率 p $(0<p<1)$，裏が出る確率 $1-p$ のコインを投げ，その結果により P に以下のような操作を行う．（長崎大学 2022）8

操作

- 表が出たとき，P が 1 にあれば -1 に，-1 にあれば 1 に移動させる．
- 裏が出たとき，P は動かさない．

コインを n 回投げたときの P の座標を X_n とし，$X_n=1$ となる確率を q_n とする．最初に P は 1 にあるものとして，以下の問いに答えよ．

(1) q_1，q_2，q_3 を，それぞれ p を用いて表せ．

(2) q_{n+1} を p と q_n を用いて表せ．

(3) q_n を p と n を用いて表せ．

(4) 確率変数 X_n の平均 $E(X_n)$，分散 $V(X_n)$，標準偏差 $\sigma(X_n)$ を，それぞれ p と n を用いて表せ．

標準 17.19 袋に赤玉 4 個と白玉 2 個が入っている．無作為に玉を 1 個取り出して，それが赤玉であれば白玉と，白玉であれば赤玉と取り換えて袋に戻すという操作を考える．この操作を 2 回繰り返したあと袋にある赤玉の数を X とし，一方，3 回繰り返したあと袋にある白玉の数を Y とする．（鹿児島大学 2023）5

(1) 確率 $P(X=4)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) 確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ．

標準 17.20 袋の中に $-1,\ 0,\ 1$ が書かれたカードがそれぞれ 1 枚，1 枚，m 枚ずつ入っている．ただし，m は自然数である．この袋の中から無作為に 2 枚同時に取り出す．取り出されたカードに書かれた数字をそれぞれ X，Y とする．ただし，$X \leqq Y$ とする． (鹿児島大学 2024) 5

(1) $m = 2$ のとき，確率 $P(X \geqq 0)$ を求めよ．

(2) $m = 9$ のとき，確率 $P(Y = 1)$ を求めよ．

(3) XY の期待値 $E(XY)$ が正となるような m のうち，最小のものを求めよ．

17.2　統計的な推測

標準 17.21　2 つの変量 x，y の値からなる N 個の資料 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_N,\ y_N)$ がある．この資料による x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とし，標準偏差をそれぞれ σ_x，σ_y とする．また，σ_{xy}，$E(x^2)$ および $E(xy)$ を次で定める．

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y}),\quad E(x^2)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}{x_k}^2,\quad E(xy)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_ky_k$$

このとき，次の文中にある空欄□に適する式を求め，その結果だけを答えよ．
(鹿児島大学 2002) 12

(1) σ_x を $\overline{x}$ および $E(x^2)$ を用いて表すと $\sigma_x=$ □ である．

(2) σ_{xy} を $\overline{x}$，$\overline{y}$ および $E(xy)$ を用いて表すと $\sigma_{xy}=$ □ である．

(3) x，y の相関係数 r を σ_x，σ_y および σ_{xy} を用いて表すと $r=$ □ である．ただし，$\sigma_x\sigma_y\neq 0$ とする．

(4) $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(y_k-tx_k-1)^2$ の値を最小にする実数 t の値を $\overline{x}$，$E(x^2)$ および $E(xy)$ を用いて表すと $t=$ □ である．ただし，$E(x^2)\neq 0$ とする．

標準 17.22　確率変数 Z が平均 0，分散 1 の標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする．$P(0\leqq Z\leqq 1.5)=0.4332$ であるとして，次の各問いに答えよ．
(鹿児島大学 2003) 12

(1) 確率変数 X は平均 40，分散 20^2 の正規分布 $N(40,\ 20^2)$ に従うとする．確率 $P(X\leqq 10)$ を求めよ．

(2) 母平均 40，母分散 20^2 の母集団から，大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均を $\overline{X}$ とする．n が十分大きいとき，$\overline{X}$ が近似的に従う確率分布を求めよ．また，この確率分布に $\overline{X}$ が正確に従うと仮定して，$P(39\leqq\overline{X}\leqq 41)\geqq 0.8664$ となる n の値の範囲を求めよ．

標準 17.23 母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均を $\overline{X}$ とする．また，標本平均 $\overline{X}$ は平均 m，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ にしたがうとする．このとき次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2004) 13

(1) $\overline{X}$ の変換 $\dfrac{\overline{X}-a}{b}$ が，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうように a と b を定めよ．

(2) 標本平均 $\overline{X}$ を用いて母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ．また，その信頼区間を導きだす過程も示せ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうとき，$P(Z>1.96)=0.025$ であるとする．

(3) 母標準偏差 σ が 5 のとき，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間の幅が 2 以下となる標本の大きさ n の最小値を求めよ．

標準 17.24 ある工場で生産されている製品の不良品率を p とし，この製品の中から n 個を無作為に抽出して調べるとき，その中の不良品の個数を X 個とする．なお，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z について，

$$P(|Z|\leqq 1.96)=0.95,\quad P(0\leqq Z\leqq 1.8)=0.4641,\quad P(0\leqq Z\leqq 1.9)=0.4713$$
$$P(0\leqq Z\leqq 2)=0.4772,\quad P(0\leqq Z\leqq 2.1)=0.4821$$

であるとする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2005) 12

(1) X はどのような確率分布に従うかを答えよ．また，n が大きいとき X の確率分布は何で近似されるかを答えよ．

(2) 標本の不良率 (標本比率)p_0 は同じ値が得られるものとする．このとき，信頼度 95%の信頼区間の幅を，標本の大きさ n の場合の半分にするには，標本の大きさをいくらにすればよいかを求めよ．

(3) 製品の不良率を $p=0.05$ とする．標本の大きさが $n=1900$ のとき，確率 $P(76\leqq X\leqq 114)$ を，二項分布の正規分布による近似値を用いて表せ．

標準 17.25 次の各問いに答えよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z > 1.96) = 0.0250,\quad P(Z > 2.00) = 0.0228,\quad P(Z > 2.58) = 0.0049$$

である．　(鹿児島大学 2006) 8

(1) 1 枚の硬貨を 100 回投げる試行において，表の出た回数を X とする．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) X はどのような確率分布に従うかを答えよ．また，$P(X = k)$ を k を用いて表せ．

(ii) X を正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ で近似するとき，m，σ の値をそれぞれ求めよ．

(iii) (ii) において，確率 $P(50 \leqq X \leqq 60)$ と，$P(|X - 50| < a) = 0.95$ を満たす値 a をそれぞれ求めよ．

(2) 変形した硬貨が 1 枚ある．この硬貨の表の出る確率 (母比率という) を推定するために，400 回投げたところ，ちょうど 100 回表が出た．このとき，母比率の信頼度 99%の信頼区間の幅を求めよ．

標準 17.26 次の各問いに答えよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z \geqq 1.53) = 0.063,\quad P(Z \geqq 1.96) = 0.025,\quad P(Z \geqq 2.32) = 0.010$$

である．　(鹿児島大学 2007) 8

(1) 確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$\dfrac{X - a}{b}$ は，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする．また，確率変数 Y が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$\dfrac{Y - c}{d}$ は，n が十分大きいならば，近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする．このとき，a，b，c，d を m，σ，n，p を用いて表せ．

(2) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $0 \leqq x \leqq 2$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられている．

$$f(x) = k - |x - 1|$$

このとき，次の (a)，(b) に答えよ．

(a) k の値を求めよ．

(b) X の平均と標準偏差を求めよ．

(3) ある工場で 1kg 入りと表示する製品が生産されている．この製品の重さは，平均 1kg，標準偏差 50g の正規分布に従っているという．この工場より 1000 個の製品を仕入れた．この中に 902g 以下の製品は何個あると推測されるか．

標準 17.27 確率変数 Z が平均 0，分散 1 の標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとするとき，$P(Z > 1.65) = 0.05$，$P(Z > 1.96) = 0.025$ であるとして，次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2008) 8

(1) 確率変数 X は平均 65，分散 20^2 の正規分布 $N(65,\ 20^2)$ に従うとする．確率 $P(X > c)$ が 0.05 となるような c を求めよ．

(2) 母平均 m，母分散 20^2 の母集団から大きさ 100 の無作為標本を抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする．標本の大きさ 100 は十分大きい数であるとみなせるとする．このとき，$\overline{X}$ が近似的に従う確率分布を答えよ．また，母平均 m の信頼度 95%の信頼区間を $\overline{X}$ を用いて表せ．

基本 17.28 次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2009) 8

(1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1 \leqq x \leqq 1$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が，次の式で与えられている．

$$f(x) = \begin{cases} x + k & (-1 \leqq x < 0) \\ -x + k & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

(a) k の値と X の平均を求めよ．

(b) 確率 $P(-0.5 \leqq X \leqq 0.5)$ を求めよ．

(2) 母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均を $\overline{X}$ とする．標本平均 $\overline{X}$ は，n の値が大きいとき，近似的に正規分布 $N(x,\ y)$ に従う．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うならば，$P(Z \geqq 1.00) = 0.1587$，$P(Z \geqq 2.00) = 0.0228$ である．

(a) x と y を m，σ，n を用いて表せ．

(b) 母平均 50，母標準偏差 20 の母集団から，大きさ 100 の無作為標本を抽出するとき，確率 $P(46 \leqq \overline{X} \leqq 52)$ を求めよ．ただし，標本の大きさ 100 は十分大きい数であるとみなせるとする．

標準 17.29 数字 1 が書かれたカードが 1 枚，数字 2 が書かれたカードが 2 枚，数字 3 が書かれたカードが 1 枚の合計 4 枚のカードがある．この 4 枚のカードを母集団とし，カードに書かれている数字を変量とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，母集団の中から標本を抽出するのに，毎回もとに戻してから次のものを 1 個ずつ取り出すことを復元抽出といい，取り出したものをもとに戻さずに続けて抽出することを非復元抽出という．　(鹿児島大学 2010) 8

(1) 母平均 m と母標準偏差 σ を求めよ．

(2) この母集団から，非復元抽出によって，大きさ 2 の無作為標本を抽出し，そのカードの数字を取り出した順に Y_1，Y_2 とする．標本平均 $\overline{Y} = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}$ の確率分布，期待値 $E(\overline{Y})$，標準偏差 $\sigma(\overline{Y})$ を求めよ．

(3) この母集団から，復元抽出によって，大きさ 200 の無作為標本を抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする．このとき，標本平均 $\overline{X}$ が近似的に正規分布に従うとみなすことができるとして，$P(\overline{X} < a) = 0.05$ を満たす定数 a を求めよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，$P(Z > 1.65) = 0.05$ とする．

標準 17.30 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2011) 8

(1) 確率変数 X は 0 以上 3 以下の値をとり，その確率密度関数 $f(x)$ は次で与えられているとする．このとき，定数 k，平均 $E(X)$ を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leqq x < 1 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{4}x + k & (1 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) Z を標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数とする．また，任意の x $(x \geqq 0)$ に対して，関数 $g(x)$ を $g(x) = P(0 \leqq Z \leqq x)$ とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

(a) 確率 $P(a \leqq Z \leqq b)$ を関数 g で表せ．ただし，a と b は定数で $a < b$ とする．

(b) 母平均 50．母標準偏差 $3\sqrt{10}$ の母集団から大きさ 10 の標本を抽出するとき，標本平均が 41.0 以上 48.5 以下になる確率を関数 g で表せ．

(c) $0 < p < 1$ とし，l_p は $g(l_p) = \dfrac{p}{2}$ をみたすものとする．母分散 25 の母集団から大きさ 20 の標本を抽出したところ，標本平均が 45 であった．母平均 m に対する信頼度 $100p\%$ の信頼区間の区間幅を l_p を用いて表せ．

標準 17.31 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z > 1.96) = 0.025, \quad P(Z > 2.58) = 0.005, \quad \frac{2.58}{1.96} \fallingdotseq 1.32$$

であるとして，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2012) 8

(1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1 \leqq x \leqq 1$ で，その確率密度関数が $f(x) = k(1-x^2)$ で与えられている．このとき，定数 k の値と X の平均を求めよ．

(2) 母平均 m，母標準偏差 10 の母集団から大きさ 100 の無作為標本を抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする．標本の大きさ 100 は十分大きい数であるとみなせるとする．

(a) 標本平均 $\overline{X}$ を用いて，母平均 m の信頼度 95%の信頼区間を求めよ．

(b) 母平均 m を信頼度 99%の信頼区間を用いて区間推定するとき，信頼区間の幅を (a) で求めた幅より小さくするためには，標本の大きさ n をいくつ以上にとればよいか求めよ．

標準 17.32 確率変数 X のとる値の範囲が $0 \leqq X \leqq 2$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられるものとする．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{a} & (0 \leqq x \leqq a) \\ \dfrac{k}{2-a}(2-x) & (a < x \leqq 2) \end{cases}$$

ここで，a，k は $0 < a < 1$，$k > 0$ を満たす定数である．次の各問いに答えよ．

(1) 定数 k の値を求めよ． (鹿児島大学 2013) 8

(2) X の平均 (期待値)$E(X)$ を a を用いて表せ．

(3) $P(X \leqq u) = 0.5$ となる実数 u を a を用いて表せ．

標準 17.33 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2014) 8

(1) 数字 1 が書かれた玉 a 個 $(a \geqq 1)$ と，数字 2 が書かれた玉 1 個がある．これら $a+1$ 個の玉を母集団として，玉に書かれている数字を変量とする．このとき，この母集団から復元抽出によって大きさ 3 の無作為標本を抽出し，その玉の数字を取り出した順に X_1，X_2，X_3 とする．標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$ の平均 $E(\overline{X})$ が $\dfrac{3}{2}$ であるとき，$\overline{X}$ の確率分布とその分散 $V(\overline{X})$ を求めよ．ただし，復元抽出とは，母集団の中から標本を抽出するのに，毎回もとに戻してから次のものを 1 個取り出す抽出法である．

(2) ある企業の入社試験は採用枠 300 名のところ 500 名の応募があった．試験の結果は 500 点満点の試験に対し，平均点 245 点，標準偏差 50 点であった．得点の分布が正規分布であるとみなせるとき，合格最低点はおよそ何点であるか．小数点以下を切り上げて答えよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布に従うとき，$P(Z > 0.25) = 0.4$，$P(Z > 0.5) = 0.3$，$P(Z > 0.54) = 0.2$ とする．

標準 17.34 1 枚のコイン投げを $2n$ 回行う．この $2n$ 回のコイン投げで，表が出る合計回数を X とする．ただし，コインの表と裏の出る確率は等しいとする．次の各問いに答えよ．　※ n は自然数とする　(鹿児島大学 2017) 5

(1) X の期待値と標準偏差をそれぞれ求めよ．

(2) $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)}$ を求めよ．ただし，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-1$ とする．

(3) $P(X=k)$ を最大にする k の値を求めよ．

(4) $n = 200$ とする，試行回数が大きいとき，X の確率分布は正規分布で近似できることが知られており，試行回数 400 はこのような近似が成り立つのに十分大きいとみなせる．このことを利用して，X の値が

$$190 \leqq X \leqq 210$$

となる確率の近似値を求めよ．ただし，標準正規分布に従う確率変数 Z に対する $P(Z > 1)$ の近似値としては 0.159 を用いよ．

標準 17.35 A 市の有権者のうち，ある政策に対する賛成者の母比率を p $(0 < p < 1)$ とする．A 市の有権者 100 人を無作為に選んだときの，この政策に対する賛成者数を確率変数 X として，$X = k$ のときの確率を $P(X = k)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, 100)$ とする．以下の問いに答えよ．なお，必要に応じて次頁の正規分布表を用いてもよい．

(1) $P(X = k)$ を p，k を用いて表せ． (長崎大学 2020) 9

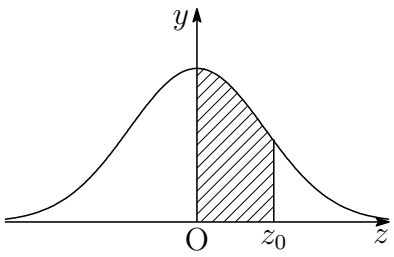
(2) 「100 人中 1 人だけが賛成者」ではない確率が,「100 人中 2 人だけが賛成者」ではない確率よりも大きくなるとき，p の値の範囲を求めよ．

(3) $X = 80$ のとき，p に対する信頼度 95%の信頼区間を求めよ．

(4) $P(X = k)$ の自然対数 $\log P(X = k)$ を最大にする p を求めよ．
ただし，$k = 1, 2, \cdots, 99$ とする．

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における
右図の斜線部分の面積をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

標準 17.36 1 回投げると，確率 p $(0 < p < 1)$ で表，確率 $1-p$ で裏が出るコインがある．このコインを投げたとき，動点 P は，表が出れば $+1$，裏が出れば -1 だけ，数直線上を移動することとする．はじめに，P は数直線上の原点 O にあり，n 回コインを投げた後の P の座標を X_n とする．以下の問いに答えよ．必要に応じて，次頁の正規分布表を用いてもよい． (長崎大学 2021) 11

(1) $p = \dfrac{1}{2}$ とする．X_4 と X_5 の確率分布，平均および分散を，それぞれ求めよ．

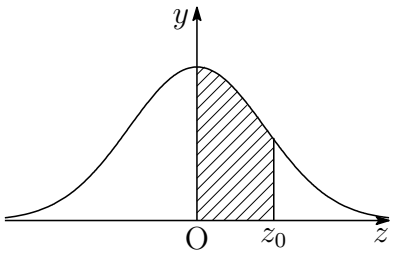
(2) $p = \dfrac{1}{2}$ とする．6 回コインを投げて，6 回目ではじめて原点 O に戻る確率を求めよ．

(3) X_1 の平均と分散を，それぞれ p を用いて表せ．また，X_n の平均と分散を，それぞれ n と p を用いて表せ．

(4) コインを 100 回投げたところ $X_{100} = 28$ であった．このとき，p に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ．

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における
右図の斜線部分の面積をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

標準 17.37 ある日の朝，ある養鶏場で無作為に 9 個の卵を抽出して，それぞれの卵の重さを測ったところ，表 1 の結果が得られた．

表 1　養鶏場で抽出した 9 個の卵の重さ (単位はグラム (g))

58	61	56	59	52	62	65	59	68

この養鶏場の卵の重さは，母平均が m，母分散が σ^2 の正規分布に従うものとするとき，以下の問いに答えよ．必要に応じて次ページの正規分布表を用いてもよい．

(1) 表 1 の標本の平均を求めよ．　(長崎大学 2023) 7

(2) 表 1 の標本の分散と標準偏差を求めよ．

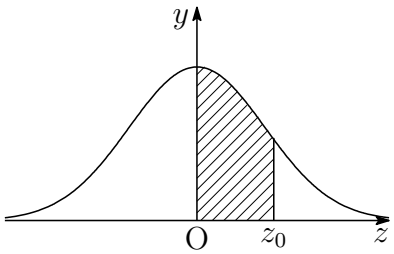
(3) 母分散 $\sigma^2 = 25$ であるとき，表 1 の標本から，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を，小数点第 3 位を四捨五入して求めよ．

(4) この養鶏場のすべての卵の重さからそれぞれ 10g を引いて，50g で割った数値は，母平均 m_1，母分散 ${\sigma_1}^2$ の正規分布に従う．このとき，m_1 と ${\sigma_1}^2$ を，それぞれ m と σ の式で表せ．また，$\sigma^2 = 25$ であるとき，表 1 の標本から，m_1 に対する信頼度 95% の信頼区間を，小数点第 3 位を四捨五入して求めよ．

(5) 次の日の朝に，n 個の卵を無作為に抽出して，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を求めることとする．信頼区間の幅が 5 以下となるための標本の大きさ n の最小値を求めよ．ただし，母分散 $\sigma^2 = 25$ であるとする．

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における
右図の斜線部分の面積をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

標準 17.38 ある町の中学校 1 年生の 50 メートル走における所要時間 (単位は秒) は，母平均 m，母分散 1 の正規分布に従うものとする．
高校生の花子さんと太郎さんは，この母集団から無作為に何人かを抽出して，母集団の調査をそれぞれ行った．
表 1 は，花子さんが 10 人の生徒 (A,B,C,$\cdots$,J) を無作為に抽出したときの各自の所要時間 (測定値) を示している．以下の問いに答えよ．必要に応じて，次のページの正規分布表を用いてもよい． (長崎大学 2024) 10

表 1

生徒	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
測定値 (秒)	9.0	9.0	8.0	8.0	9.0	9.0	10.0	9.0	10.0	x

(x は正の実数)

(1) 花子さんが選んだ 10 人の生徒のうち，J を除いた 9 人の標本の平均 m_1 と分散 ${S_1}^2$ を，それぞれ求めよ．

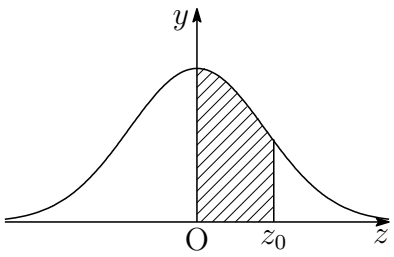
(2) 花子さんが選んだ (1) の 9 人の測定値の標本を用いて，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を，小数第 3 位を四捨五入して求めよ．

(3) 花子さんが選んだ 10 人の標本の平均 m_2 と分散 ${S_2}^2$ を，x を用いてそれぞれ表せ．また，$8 \leqq x \leqq 10$ のとき，平均 m_2 と分散 ${S_2}^2$ の取り得る値の範囲を，それぞれ求めよ．

(4) 太郎さんは，花子さんとは別に 4 人の生徒を無作為に抽出して調べることとした．母平均 $m = 8$ のとき，4 人の標本の平均が 9 秒以上となる確率を，小数第 3 位を四捨五入して求めよ．

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の斜線部分の面積の値をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

解答

1.1 $a^2(y-b)-(a+b)xy+ab(x+y)+b^2(x-a)$
$=\{a^2-(a+b)x+ab\}y-a^2b+abx+b^2(x-a)$
$=(a+b)(a-x)y-ab(a-x)-b^2(a-x)$
$=(a-x)\{(a+b)y-ab-b^2\}$
$=\boldsymbol{(a-x)(a+b)(y-b)}$

1.2 $a+b\alpha=0 \quad \cdots(*)$ とする．

$b\neq 0$ のとき，$(*)$ より　$\alpha=-\dfrac{a}{b} \quad \cdots①$

a，b は有理数であるから，$-\dfrac{a}{b}$ は有理数である．

このとき，α は無理数であるから，① は成立しない．

したがって　$b=0$　これを $(*)$ に代入して　$a=0$

よって，$a+b\alpha=0$ ならば $a=b=0$

1.3 ⑤

a が実数であるとき，一般に $\sqrt{a^2}=|\,a\,|$ である．ここでは $a=(-2)^3$ であるから，$|(-2)^3|=8$ となる．

1.4 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ より　　$a+b=1$，$ab=-1$

よって　　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=1^3-3\cdot(-1)\cdot 1=\boldsymbol{4}$
$a^6+b^6=(a^3+b^3)^2-2(ab)^3=4^2-2(-1)^3=\boldsymbol{18}$

1.5 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1=2+(\sqrt{3}-1)$　ゆえに　$a=2$，$b=\sqrt{3}-1$

したがって

$$a^2+ab+b^2=2^2+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2=\boldsymbol{6}$$

$$\frac{1}{a-b-1}-\frac{1}{a+b+1}=\frac{1}{2-(\sqrt{3}-1)-1}-\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)+1}$$
$$=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

1.6 (1) $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ の両辺に ab を掛けると

$$\begin{aligned} a^2b+b&=ab^2+a\\ ab(a-b)-(a-b)&=0\\ (a-b)(ab-1)&=0 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{a=b}$ **または** $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{b}}$

(2) 与式から

$$x+\frac{1}{x}=\frac{y}{8}+\frac{8}{y}\cdots①\quad \text{かつ}\quad x+\frac{1}{x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\cdots②$$

① から　$x=\dfrac{y}{8}$　または　$x=\dfrac{8}{y}$

② から　$x=\dfrac{x}{y}$　または　$x=\dfrac{y}{x}$

したがって，4 つの連立方程式

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{y}{8}\\ x=\frac{x}{y} \end{array}\right.,\quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{y}{8}\\ x=\frac{y}{x} \end{array}\right.,\quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{8}{y}\\ x=\frac{x}{y} \end{array}\right.,\quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{8}{y}\\ x=\frac{y}{x} \end{array}\right.$$

を解くと，それぞれ次の解を得る．

$$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\frac{1}{8},\ 1\right),\ (8,\ 64),\ (8,\ 1),\ (2,\ 4)}$$

1.7 (1) a，b は 1 以外に共通の約数をもたないことである．

(2) a，b を素因数分解して

$$a={a_1}^{m_1}{a_2}^{m_2}\cdots{a_k}^{m_k},\quad b={b_1}^{n_1}{b_2}^{n_2}\cdots{b_l}^{n_l}$$

とする．a，b が互いに素であるならば，$a_1,a_2,\cdots a_k$ と $b_1,b_2,\cdots b_k$ のどの 2 つも一致しない．上式から

$$a^2=({a_1}^{m_1}{a_2}^{m_2}\cdots{a_k}^{m_k})^2,\quad b^2=({b_1}^{n_1}{b_2}^{n_2}\cdots{b_l}^{n_l})^2$$

このとき，a^2 は $b_1,b_2,\cdots b_k$ で割れない．また，b^2 も $a_1,a_2,\cdots a_k$ で割れない．よって，a^2 と b^2 は互いに素である．

(3) $\sqrt{n}$ が有理数であるとき　　$\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$　(p,q は互いに素)

したがって　　$n=\dfrac{p^2}{q^2}$

上式おいて，左辺は自然数であり，p，q は互いに素であるから

$$q^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad q=1,\ \sqrt{n}=p$$

よって，$\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数である．

(4) $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数であるから，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ の中に有理数が 2 個以上あれば，それらの差で整数になるものがある．

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}+1}<1$$

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\leqq\frac{2}{\sqrt{3}+1}<1$$

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\leqq\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}<1$$

上の 3 式より，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ のうち 2 個以上が有理数となることはない．したがって，有理数は 1 個以下である．

よって，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ の少なくとも 2 個が無理数である．

1.8 (1) $z=a+\sqrt{2}b$，$w=a'+\sqrt{2}b'$ とすると

$$\begin{aligned} z+w&=(a+a')+\sqrt{2}(b+b'),\\ zw&=(a+\sqrt{2}b)(a'+\sqrt{2}b')\\ &=(aa'+2bb')+\sqrt{2}(ab'+a'b)\end{aligned}$$

このとき　　$j(z)=a-\sqrt{2}b,\quad j(w)=a'-\sqrt{2}b',$
$j(z+w)=(a+a')-\sqrt{2}(b+b'),$
$j(zw)=(aa'+2bb')-\sqrt{2}(ab'+a'b)$

よって　　$\begin{aligned} j(z)+j(w)&=(a-\sqrt{2}b)+(a'-\sqrt{2}b')\\ &=(a+a')-\sqrt{2}(b+b')=j(z+w),\\ j(z)j(w)&=(a-\sqrt{2}b)(a'-\sqrt{2}b')\\ &=(aa'+2bb')-(ab'+a'b)\sqrt{2}=j(zw)\end{aligned}$

(2) (1) の結果から，n を自然数，$z_i \in S$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とすると

$$j(z_1) + j(z_2) + \cdots + j(z_n) = j(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$$
$$j(z_1)j(z_2)\cdots j(z_n) = j(z_1 z_2 \cdots z_n)$$

また上の第 2 式から　　$\{j(z)\}^n = j(z^n)$

a が有理数のとき $j(a) = a$ であるから，上の諸式により

$$\begin{aligned} f(j(z)) &= \{j(z)\}^4 - \{j(z)\}^3 + c\{j(z)\}^2 - 11j(z) + d \\ &= j(z^4) + j(-1)j(z^3) + j(c)j(z^2) + j(-11)j(z) + j(d) \\ &= j(z^4) + j((-1)z^3) + j(cz^2) + j((-11)z) + j(d) \\ &= j(z^4 + (-1)z^3 + cz^2 + (-11)z + d) \\ &= j(z^4 - z^3 + cz^2 - 11z + d) \\ &= j(f(z)) \end{aligned}$$

$f(z) = 0$ のとき，$j(f(z)) = j(0) = 0$　ゆえに　$f(j(z)) = 0$

$f(1 + \sqrt{2}) = 0$ であるから，上の結果から

$$f(j(1 + \sqrt{2})) = j(f(1 + \sqrt{2}))$$

よって　　$f(1 - \sqrt{2}) = j(0) = 0$

(3) $\alpha = 1 + \sqrt{2}$，$\beta = 1 - \sqrt{2}$ とおくと，$f(\alpha) = f(\beta) = 0$ より，$f(x)$ は

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 - 2x - 1$$

を因数にもつ．このとき，$f(x)$ の最高次の係数と定数項に注意して

$$f(x) = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + ex - d) \quad (e \text{ は定数})$$

とおいて，右辺を展開すると

$$f(x) = x^4 + (e - 2)x^3 + (-d - 2e - 1)x^2 + (2d - e)x + d$$

上式の両辺の 3 次，2 次，1 次の項の係数を比較して

$$e - 2 = -1, \quad -d - 2e - 1 = c, \quad 2d - e = -11$$

これを解いて　$\boldsymbol{c = 2}$，$\boldsymbol{d = -5}$，$e = 1$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + x + 5)}$

1.9 $x^2 - 9x + 14 > 0$ を満たさない整数は，$x^2 - 9x + 14 \leqq 0$ を満たす整数．

ゆえに，$2 \leqq x \leqq 7$ を満たす整数で，3 の倍数でないものは　**2, 4, 5, 7**

1.10 (1) **偽** 反例：$x=1$，$y=-2$

(2) **真**

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)\geqq 0$$

ここで $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ より　$x+y\geqq 0$ であるから

$$x-y\geqq 0 \quad \text{よって} \quad x\geqq y$$

1.11 (1) 真である．

(背理法で証明する)

x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ が有理数であると仮定すると

$$x=(x+y)-y$$

において，左辺は無理数，右辺は有理数となり，矛盾を生じる．

よって，x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ は無理数である．

(2) 偽である．

(反例) $x=1+\sqrt{2}$，$y=1-\sqrt{2}$ とおくと，

(1) の結論から x，y は無理数である．

$$x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$$

よって，x，y は無理数であるが，$x+y$ は有理数である．

1.12 (1) **偽，反例　$a=4$**

(2) **真**

対偶：「$\sqrt{a}$ が有理数ならば，a も有理数である」を証明する．

［証明］$\sqrt{a}$ が有理数のとき，整数 m と 0 でない整数 n を用いて

$$\sqrt{a}=\frac{m}{n}$$

と表される．この式の両辺を平方すると

$$a=\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{m^2}{n^2}$$

m^2 は整数で，n^2 も 0 でない整数なので，a は有理数である．

対偶が証明されたので，本命題も真である．

1.13 逆の命題は「$\boldsymbol{a=0}$ かつ $\boldsymbol{b=0}$ ならば $\boldsymbol{ab=0}$」 **(真)**

対偶命題は「$\boldsymbol{a\neq 0}$ または $\boldsymbol{b\neq 0}$ ならば $\boldsymbol{ab\neq 0}$」 **(偽)**(反例 $a=0, b=1$)

1.14 (1) m と n の最大公約数を G とし

$$m = Gm', \quad n = Gn'$$

とすると (m', n'は互いに素)

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$$

が成り立つ．ここで，$\dfrac{m'}{n'} = \sqrt{2}$ であると仮定すると

$$m' = \sqrt{2}n'$$

この両辺を平方すると

$$m'^2 = 2n'^2$$

よって，m'^2 は偶数，すなわち m' は偶数である．偶数 m' はある自然数 k を用いて，$m' = 2k$ と表されるから

$$(2k)^2 = 2n'^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2k^2 = n'^2$$

よって，n'^2 は偶数となり，n' も偶数である．

m' と n' がともに偶数となることは，m' と n' が互いに素であることに反する．

したがって　　$\dfrac{m'}{n'} \neq \sqrt{2}$　　よって　　$\dfrac{m}{n} \neq \sqrt{2}$

(2) (1) の結果から，p，q が自然数ならば $\dfrac{p}{q} \neq \sqrt{2}$ であるから

$$\frac{p}{q} < \sqrt{2} \text{ のとき} \quad \frac{q}{p} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{2q}{p} > \sqrt{2}$$

$$\frac{p}{q} > \sqrt{2} \text{ のとき} \quad \frac{q}{p} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{2q}{p} < \sqrt{2}$$

よって，$\dfrac{p}{q} < \sqrt{2} < \dfrac{2q}{p}$ または $\dfrac{2q}{p} < \sqrt{2} < \dfrac{p}{q}$ が成り立つ．

1.15 (1) 真　命題「a と b がともに有理数ならば ab は有理数である」は真である．この命題の対偶が本命題である．

(2) 偽　反例：$a = 0$，$b = \sqrt{2}$

(3) 真　$f(2n-1) = 2^{2n-1} + 3^{2n-1} \equiv 2^{2n-1} + (-2)^{2n-1} \equiv 0 \pmod 5$

1.16 (1) **真**

2 つの有理数を整数 a，b，c，d ($b \neq 0$, $d \neq 0$) を用いて $\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{c}{d}$ とおくと，その和

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

は有理数である．

(2) **偽**

［反例］2 つの無理数 $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ の和 0 は有理数である．

(3) **偽**

［反例］2 つの無理数 $\sqrt{2}$ と $\sqrt{2}$ の積 2 は有理数である．

(4) **偽**

［反例 1］$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ を考える．

「$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ が有理数」ならば，これが反例を与える．

「$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ が無理数」ならば，

$$\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となり，無理数 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ の $\sqrt{2}$ 乗 (無理数乗) が有理数となる．

［反例 2］($\log_2 9$ が無理数であることを用いる)

$$(\sqrt{2})^{\log_2 9} = 3$$

なお，$\log_2 9$ が有理数 $\dfrac{p}{q}$ ($p,\ q$ は整数, $q \neq 0$) とすると

$$9 = 2^{\frac{p}{q}} \quad \text{すなわち} \quad 3^{2q} = 2^p$$

これを満たす整数 p，q はないので，$\log_2 9$ は無理数である．

1.17 (1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数の解 $\dfrac{q}{p}$ をもつとき

$$a\left(\frac{q}{p}\right)^2 + b\left(\frac{q}{p}\right) + c = 0 \quad \text{ゆえに} \quad aq^2 + bpq + cp^2 = 0 \quad \cdots(*)$$

「p と q がともに奇数」の否定は「p，q の少なくとも一方が偶数」であるが，$\dfrac{q}{p}$ は既約分数であるから，次の (i)，(ii) である．

(i) p が偶数，q が奇数のとき，$(*)$ より

$$p(bq + cp) = -aq^2$$

上式において，左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾．

(ii) p が奇数，q が偶数のとき，$(*)$ より

$$q(aq + bp) = -cp^2$$

上式において，左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾．

(i)，(ii) より，p と q はともに奇数である．

(2) この 2 次方程式が有理数の解をもつとき，$(*)$ をみたす p，q が存在する．
また，(1) の結果から，aq^2，bpq，cp^2 は奇数である．
このとき，$(*)$ の左辺は奇数，$(*)$ の右辺は偶数であるから，矛盾する．
よって，この 2 次方程式は有理数の解をもたない．

1.18 (1) $1.41^2 = 1.9881$，$1.42^2 = 2.0164$ であるから

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2 \quad \text{ゆえに} \quad 1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

よって，$\sqrt{2}$ の小数第 2 位の値は 1 である．

(2) 「n^2 が偶数ならば，n は偶数である．」
この命題の対偶は

「n が奇数ならば，n^2 は奇数である．」 $\cdots(*)$

奇数 n は，ある整数 m を用いて $n = 2m + 1$ と表され

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1 \end{aligned}$$

となる．$2m^2 + 2m$ は整数であるから，n^2 は奇数である．
よって，命題 $(*)$ は真であり，元の命題も真である．

(3) 「$\sqrt{2}$ は有理数」であると仮定すると，
$\sqrt{2}$ は整数 a，b を用いて (a，b は互いに素)

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

と表すことができる．ゆえに $\sqrt{2}b = a$ これを平方すると

$$2b^2 = a^2 \quad \cdots ①$$

よって，a^2 は偶数である．(2) の結果から，a は偶数である．
偶数 a は，整数 c を用いて，$a = 2c$ と表されるから，① に代入して

$$2b^2 = (2c)^2 \quad \text{ゆえに} \quad b^2 = 2c^2$$

よって，b^2 は偶数となり，b も偶数である．
a と b が偶数となることは，a と b が互いに素であることに反する．
よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではない．

2.1 a，b，c は連続する 3 つの自然数であるから　$a=b-1$，$c=b+1$

これを $a^2+b^2=c^2$ に代入すると

$$(b-1)^2+b^2=(b+1)^2 \quad \text{整理すると} \quad b(b-4)=0$$

$b>0$ であるから　$b=4$　　よって　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$ の 1 組のみ

2.2　(1) 2 次方程式 $x^2+2(n-5)x+n^2-n=0$ の判別式を D とすると

$$D/4=(n-5)^2-1\cdot(n^2-n)=-9n+25$$

方程式が実数解をもつので，$D\geqq 0$ より

$$-9n+25\geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad n\leqq \frac{25}{9}$$

n は 0 以上の整数であるから　　$\boldsymbol{n=0,\ 1,\ 2}$

(2) 求める 2 桁の自然数の十の位を x，一の位を n とすると

$$(x+n)^2=10x+n \quad \text{ゆえに} \quad x^2+2(n-5)x+n^2-n=0 \quad \cdots(*)$$

x は実数であるから，(1) の結果より　$n=0,\ 1,\ 2$

i) $n=0$ のとき，$(*)$ は

$$x^2-10x=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=0,\ 10$$

x は十の位の数であるから，これらは不適.

ii) $n=1$ のとき，$(*)$ は

$$x^2-8x=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=0,\ 8$$

x は十の位の数であるから，適するのは　$x=8$

iii) $n=2$ のとき，$(*)$ は

$$x^2-6x+2=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=3\pm\sqrt{7}$$

x は十の位の数であるから，これらは不適.

i)〜iii) より，求める 2 けた数は　　**81**

2.3　(1) $x^2-2ax+a+\dfrac{1}{4}=0$　$(*)$ の判別式を D とすると

$$D=(-2a)^2-4\cdot 1\cdot\left(a+\frac{1}{4}\right)=4a^2-4a-1$$

2 次方程式 $(*)$ が実数解をもつとき，$D\geqq 0$ であるから

$$4a^2-4a-1\geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a\leqq \frac{1-\sqrt{2}}{2},\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq a}$$

(2) 2 つの解の差は $\dfrac{2a+\sqrt{D}}{2}-\dfrac{2a-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}$

このとき $\sqrt{D}=1$ ゆえに $D=1$

したがって $4a^2-4a-1=1$ ゆえに $2a^2-2a-1=0$

これを解いて $\boldsymbol{a=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$

(3) $(*)$ の解について，次式が成り立てばよいから

$$\frac{2a-\sqrt{D}}{2}>1 \quad \text{ゆえに} \quad 2(a-1)>\sqrt{D}$$

したがって $\begin{cases} a-1>0 \\ 4(a-1)^2>4a^2-4a-1 \end{cases}$ これを解いて $1<a<\dfrac{5}{4}$

よって，上の結果と (1) の共通範囲を求めて $\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq a<\dfrac{5}{4}}$

別解 $f(x)=x^2-2ax+a+\dfrac{1}{4}=(x-a)^2-\dfrac{D}{4}$ であるから

$$a>1, \quad f(1)>0, \quad -\frac{D}{4}\leqq 0$$

すなわち $a>1, \quad -a+\dfrac{5}{4}>0, \quad 4a^2-4a-1\geqq 0$

これを解いて $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq a<\dfrac{5}{4}$

2.4 (1) $f(x)>0$ より $ax^2+2x+\dfrac{1}{a}-a>0$

$a>0$ であるから $x^2+\dfrac{2}{a}x+\dfrac{1}{a^2}-1>0$

したがって $\left(x+\dfrac{1}{a}+1\right)\left(x+\dfrac{1}{a}-1\right)>0$

よって $\boldsymbol{x<-\dfrac{1}{a}-1, \quad -\dfrac{1}{a}+1<x}$

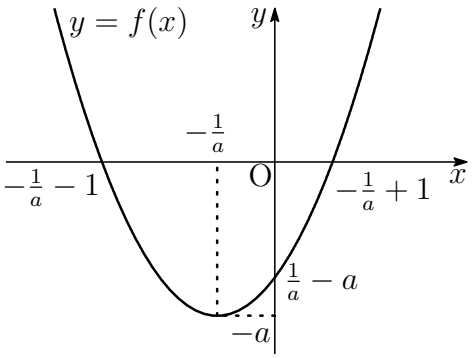
(2) $f(x)=a\left(x+\dfrac{1}{a}\right)^2-a$ であるから，

$y=f(x)$ は

$$\left(-\frac{1}{a},\ -a\right)$$

を頂点とする下に凸の放物線.

グラフは，右の図のようになる.



(3) 放物線 $y=f(x)$ の軸は　$x=-\dfrac{1}{a}$

$-2\leqq x\leqq 1$ の中央は　$x=-\dfrac{1}{2}$

i) $-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{1}{a}$　すなわち　$a>2$ のとき

$$m(a)=f(-2)=3a+\frac{1}{a}-4$$

ii) $-\dfrac{1}{a}\leqq-\dfrac{1}{2}$　すなわち　$1<a\leqq 2$ のとき

$$m(a)=f(1)=2+\frac{1}{a}$$

$$\boldsymbol{m(a)=\begin{cases}\boldsymbol{2+\dfrac{1}{a}} & \boldsymbol{(1<a\leqq 2\ \text{のとき})}\\ \boldsymbol{3a+\dfrac{1}{a}-4} & \boldsymbol{(2<a\ \text{のとき})}\end{cases}}$$

解説 2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値は

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，

定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる.

2.5 (1)
$$\begin{aligned}px-f(x)&=px-(ax^2+bx+c)\\&=-ax^2+(p-b)x-c\\&=-a\left(x-\frac{p-b}{2a}\right)^2+\frac{(p-b)^2}{4a}-c\end{aligned}$$

$-a<0$ より，$px-f(x)$ の最大値 $g(p)$ は

$$\begin{aligned}g(p)&=\frac{(p-b)^2}{4a}-c\\&=\frac{1}{4a}p^2-\frac{b}{2a}p+\frac{b^2}{4a}-c\end{aligned}$$

したがって　　$g(x)=\dfrac{1}{4a}x^2-\dfrac{b}{2a}x+\dfrac{b^2}{4a}-c$

$f(x)=g(x)$ であるから

$$a=\frac{1}{4a},\quad b=-\frac{b}{2a},\quad c=\frac{b^2}{4a}-c$$

$a>0$ より　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=0$，$c=0$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{2}x^2}$

(2)　$xp-g(p)=xp-\left(\dfrac{1}{4a}p^2-\dfrac{b}{2a}p+\dfrac{b^2}{4a}-c\right)$

$$=-\frac{1}{4a}p^2+\frac{b+2ax}{2a}p+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$=-\frac{1}{4a}\{p-(b+2ax)\}^2+ax^2+bx+c$$

$-\dfrac{1}{4a}<0$ より，求める最大値 $h(x)$ は

$$\boldsymbol{h(x)=ax^2+bx+c}$$

別解 条件から

$$px-f(x)\leqq g(p)\quad \text{したがって}\quad xp-g(p)\leqq f(x)$$

第 2 式から，p の関数 $xp-g(p)$ の最大値 $h(x)$ は

$$\boldsymbol{h(x)=ax^2+bx+c}$$

(3) $y=px+q$ が $x=t$ で $y=f(x)$ に接するとき，2 式から y を消去すると

$$f(x)=px+q\cdots①\quad \text{すなわち}\quad ax^2+(b-p)x+c-q=0\cdots②$$

$x=t$ は，① の解であるから

$$f(t)=pt+q\cdots③$$

$x=t$ は ② の重解であるから，$D=0$ より

$$(b-p)^2-4a(c-q)=0\quad \text{ゆえに}\quad q=-\frac{1}{4a}(p-b)^2+c$$

よって　　$q=-g(p)\cdots④$

③，④ より　　$\boldsymbol{pt-f(t)=g(p)}$，$\boldsymbol{q=-g(p)}$　$\cdots(*)$

逆に，$(*)$ の第 1 式から

$$pt-(at^2+bt+c)=\frac{1}{4a}(p-b)^2-c$$

$$t^2-\frac{1}{a}(p-b)t+\frac{1}{4a^2}(p-b)^2=0$$

したがって　　$$\left(t-\frac{p-b}{2a}\right)^2=0$$

ゆえに　　$t=\dfrac{p-b}{2a}$　よって　$p=2at+b\cdots⑤$

$(*)$ より　　$q=-pt+f(t)\cdots⑥$

⑤，⑥ および $p=f'(t)$ であるから，直線 $y=px+q$ は

$$y=px-pt+f(t)\quad \text{すなわち}\quad y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

上式は，$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式である．

別解　$(px-f(x)$ の最大値が $g(p)$ であることを利用する$)$

$y=px+q$ が $x=t$ で $y=f(x)$ に接する．

$\Longleftrightarrow$ 2 次方程式 $px+q=f(x)$ は $x=t$ を重解にもつ．

$\Longleftrightarrow$ 2 次方程式 $px-f(x)=-q$ は $x=t$ を重解にもつ．

$\Longleftrightarrow$ 上に凸の放物線 $y=px-f(x)$ と直線 $y=-q$ は点 $(t,\ g(p))$ で接する．

$\Longleftrightarrow pt-f(t)=g(p)$，$-q=g(p)$，すなわち $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$

3.1　$\boldsymbol{0^\circ\leqq\theta\leqq 30^\circ,\ 135^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ}$

3.2　(1) 右の図で，△ABC の外接円の半径を R とし，線分 BD は △ABC の直径とする．

このとき，円周角と中心角の性質により，

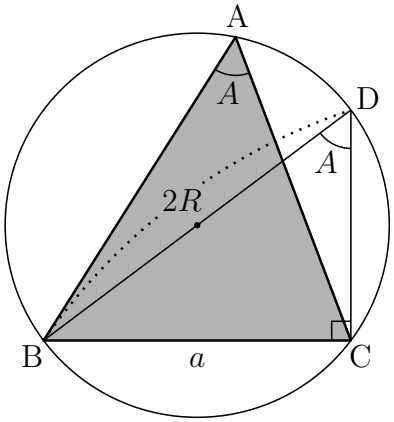
$$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{BAC}=A$$
$$\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$$

が成り立つ．また，$\mathrm{BD}=2R$ である．

よって，△BCD において

$$a=2R\sin A$$

が成り立つ．



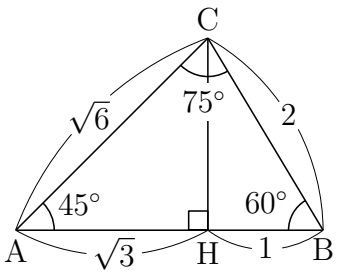
$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とおくと，同様に

$$b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C$$

が成り立つ．よって，次の正弦定理を得る．

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(2) $A = 45°$，$B = 60°$，$C = 75°$，$a = 2$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ の C から辺 AB に垂線 CH を引くと，$\mathrm{BH} = 1$，$\mathrm{AH} = \mathrm{CH} = \sqrt{3}$ であるから



$$b = \sqrt{6}, \quad c = \sqrt{3} + 1$$

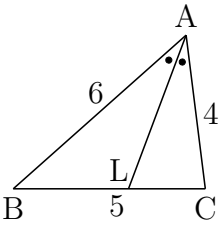
$\triangle\mathrm{ABC}$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{2}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin 75°}$$

ゆえに $\quad \sin 75° = \dfrac{(\sqrt{3}+1)\sin 45°}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

3.3 (1) $\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると $\quad \cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6} = \boldsymbol{\dfrac{9}{16}}$

(2) (1) と同様に



$$\cos B = \frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot4} = \frac{3}{4}$$

AL は $\angle\mathrm{A}$ の二等分線であるから

$$\mathrm{BL} = \frac{6}{6+4}\mathrm{BC} = \frac{3}{5}\times 5 = 3$$

$\triangle\mathrm{ABL}$ に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AL}^2 = 6^2 + 3^2 - 2\cdot6\cdot3\cos B = 18 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\mathrm{AL} = 3\sqrt{2}}$$

3.4 $a : b : c = 7 : 6 : 5$ より

$$a = 7k, \quad b = 6k, \quad c = 5k$$

とおくと (k は正の定数)，余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(6k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot6k\cdot5k} = \frac{1}{5}$$

ゆえに　　$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\dfrac{1}{25}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

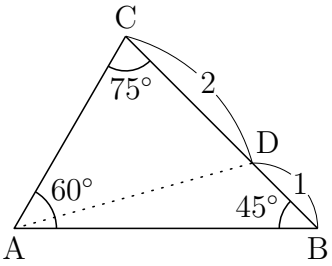
$\dfrac{1}{2}bc\sin A = 12\sqrt{6}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 6k\cdot 5k \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 12\sqrt{6} \quad \text{これを解いて} \quad k = \sqrt{2}$$

よって　　$a = \mathbf{7\sqrt{2}}$

3.5　(1) 正弦定理により

$$\frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad b = \sqrt{6}$$



加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

△ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}ab\sin 75^\circ = \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}(3+\sqrt{3})}$$

別解　第 1 余弦定理により

$$c = a\cos B + b\cos A = 3\cos 45^\circ + \sqrt{6}\cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

よって　$S = \dfrac{1}{2}ca\sin 45^\circ = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\times 3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4}(3+\sqrt{3})$

第 1 余弦定理

$$\begin{aligned}a &= b\cos C + c\cos B\\ b &= c\cos A + a\cos C\\ c &= a\cos B + b\cos A\end{aligned}$$

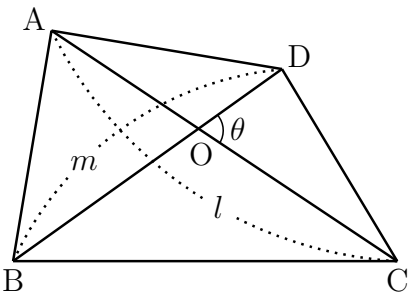
単に余弦定理というと第 2 余弦定理を指す.

(2) △DAC と △ABC について

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CA}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}, \quad \angle\mathrm{C} \text{ は共通}$$

2 組の辺の比とその間の角が等しいから　　△ABC ∽ △DAC

3.6 (1) 右の図において，$a=\mathrm{OA}$，$b=\mathrm{OB}$，$c=\mathrm{OC}$，$d=\mathrm{OD}$ とおくと



$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab\sin\theta,$$
$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}bc\sin\theta$$
$$\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}cd\sin\theta,$$
$$\triangle\mathrm{ODA}=\frac{1}{2}da\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}da\sin\theta$$

よって　$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCD}+\triangle\mathrm{ODA}$
$$=\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin\theta=\boldsymbol{\frac{1}{2}lm\sin\theta}$$

(2) 条件より　$l+m=k$

相加平均・相乗平均の関係 $\dfrac{l+m}{2}\geqq\sqrt{lm}$ に上式を代入すると

$$\frac{k}{2}\geqq\sqrt{lm}\quad\text{ゆえに}\quad lm\leqq\frac{k^2}{4}$$

が成り立つ．等号が成立するのは $l=m=\dfrac{k}{2}$ のときである．

よって，$l=m=\dfrac{k}{2}$，$\theta=90^\circ$ のとき面積の最大値 $\boldsymbol{\dfrac{k^2}{8}}$ をとる．

3.7 (1) $\tan A=\dfrac{4}{3}$ を $1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ に代入すると

$$1+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 A}\quad\text{ゆえに}\quad\cos^2 A=\frac{9}{25}$$

$\tan A>0$ より，A は鋭角であるから，$\cos A>0$ より

$$\boldsymbol{\cos A=\frac{3}{5}}$$

また　$\sin A=\tan A\cos A=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{5}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

(2) 外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=6\div\frac{4}{5}\qquad\text{よって}\qquad\boldsymbol{R=\frac{15}{4}}$$

(3) $b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とおくと，余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

に $a = 6$，$\cos A = \dfrac{3}{5}$ を代入すると

$$6^2 = b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc \quad \text{ゆえに} \quad 36 - \frac{4}{5}bc = (b-c)^2$$

したがって　$36 - \dfrac{4}{5}bc \geqq 0$　すなわち　$bc \leqq 45$

上式において，等号が成立するのは $b = c = 3\sqrt{5}$ のときである．

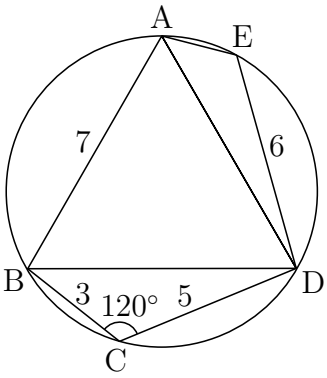
よって，△ABC の面積は，$\mathbf{AB = 3\sqrt{5}}$ のとき最大となり，その最大値は

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 45\cdot\frac{4}{5} = \mathbf{18}$$

3.8 (1) △BCD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cos 120^\circ \\ &= 49\end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　$\mathbf{BD = 7}$



(2) 四角形 ABCD は円に内接しているので，
対角の和は 180°．したがって

$$\angle\mathrm{BAD} = 180^\circ - \angle\mathrm{BCD} = \mathbf{60^\circ}$$

(3) (1) の結果から $\mathrm{AB} = \mathrm{BD}$ の二等辺三角形であるから　$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BDA}$
さらに，(2) の結果により　$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BDA} = 60^\circ$
したがって，△ABD は正三角形である．
また，四角形 ABDE も円に内接するので

$$\angle\mathrm{AED} = 180^\circ - \angle\mathrm{ABD} = 120^\circ$$

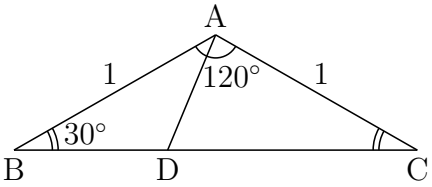
$x = \mathrm{AE}$ とおいて，△ADE に余弦定理を適用すると

$$7^2 = 6^2 + x^2 - 2\cdot 6\cdot x\cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 6x - 13 = 0$$

$x > 0$ に注意して，これを解くと　$\mathbf{AE = -3 + \sqrt{22}}$

3.9 (1) △ABC に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos A \\ &= 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cos 120^\circ \\ &= 3\end{aligned}$$



$\mathrm{BC} > 0$ より　$\mathrm{BC} = \sqrt{3}$

D は，BC を $m : n$ に内分する点であるから

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} \times \frac{m}{m+n} = \frac{\sqrt{3}m}{m+n}$$

△ABC は，$\angle \mathrm{BAC} = 120^\circ$ の二等辺三角形であるから　$\angle \mathrm{ABD} = 30^\circ$

△ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos B \\ &= 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}m}{m+n}\right)^2 - 2\times 1\times\frac{\sqrt{3}m}{m+n}\cos 30^\circ \\ &= \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2}\end{aligned}$$

よって，正三角形 ADE の面積は

$$\triangle\mathrm{ADE} = \frac{1}{2}\mathrm{AD}^2\sin 60^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(m^2 - mn + n^2)}{4(m+n)^2}}$$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

このとき，$\triangle\mathrm{ABC} = 3 \times \triangle\mathrm{ADE}$ であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = 3\times\frac{\sqrt{3}(m^2 - mn + n^2)}{4(m+n)^2} \quad \text{ゆえに} \quad 2m^2 - 5mn + 2n^2 = 0$$

これから　$(m-2n)(2m-n) = 0$　すなわち　$m = 2n$，$n = 2m$

よって　**$m : n = 2 : 1$　または　$1 : 2$**

3.10 (1) 辺の長さは正であるから　$x^2 - 2x > 0$　かつ　$4 - x > 0$

これを解いて　$x < 0,\ 2 < x < 4$　$\cdots$①

題意より　$\sqrt{x^2 - 2x} \geqq 4 - x$，　$\sqrt{x^2 - 2x} \geqq 2$

第 1 式から　$x^2 - 2x \geqq 16 - 8x + x^2$　ゆえに　$x \geqq \dfrac{8}{3}$　$\cdots$②

第 2 式から　　$x^2-2x \geqq 4$　ゆえに　$x \leqq 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} \leqq x$　$\cdots$③

3 辺の長さによる三角形の存在条件から　$\sqrt{x^2-2x} < (4-x)+2$

したがって　$\sqrt{x^2-2x} < 6-x$　ゆえに　$x^2-2x < 36-12x+x^2$

これを解いて　　$x < \dfrac{18}{5}$　$\cdots$④

①，②，③，④ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1+\sqrt{5} \leqq x < \dfrac{18}{5}}$

(2) $2-(4-x) = x-2$

(1) の結果から　　$\sqrt{5}-2 \leqq x-2 < \dfrac{8}{5}$

また，$\sqrt{5}-2 > 0$ であるから　$x-2>0$　ゆえに　$2-(4-x)>0$

すなわち　$2 > 4-x$　よって，最短の辺の長さは　$4-x$

余弦定理により　$\cos\theta = \dfrac{(x^2-2x)+2^2-(4-x)^2}{2\cdot 2\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}$

このとき，$x-2>0$ であるから

$$\cos\theta = \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}}$$

(3) (2) の結果から　$\cos\theta = \dfrac{3}{2}\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}$

上式と (1) の結果から，$\cos\theta$ は $\boldsymbol{x = 1+\sqrt{5}}$ のとき最小となり，最小値は

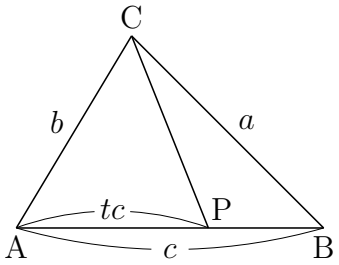
$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})-2}{1+\sqrt{5}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} = \boldsymbol{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{4}}$$

3.11　(1) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

△APC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CP}^2 = b^2 + (tc)^2 - 2b\cdot tc\cos A$$



したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2 &= b^2 + (tc)^2 - 2b\cdot tc \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= b^2 + t^2c^2 - t(b^2+c^2-a^2)\\ &= \boldsymbol{ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2}\end{aligned}$$

(2) CP $= a$ を (1) の結果に代入すると

$$a^2 = ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2$$

ゆえに　　$(t-1)(a^2 - b^2 + tc^2) = 0$

$t \geqq 0$ に注意して

$$\boldsymbol{b \geqq a \text{ のとき} \quad t = 1,\ \dfrac{b^2 - a^2}{c^2}}$$
$$\boldsymbol{b < a \text{ のとき} \quad t = 1}$$

(3) AB 上にちょうど 2 つあるのは，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に (2) の条件を満たす t が 2 個あればよい．したがって，(2) の結果から

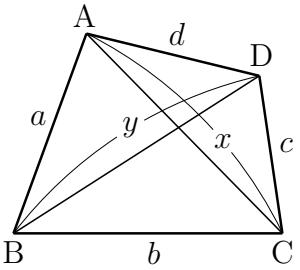
$b \geqq a$ のとき $(B \geqq A)$

$$\frac{b^2 - a^2}{c^2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad b^2 < c^2 + a^2 \quad \text{ゆえに} \quad B < 90^\circ$$

よって　　$\boldsymbol{A \leqq B < 90^\circ}$

3.12 (1) 余弦定理により

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{a^2 + d^2 - y^2}{2ad}}$$
$$\boldsymbol{\cos B = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}}$$
$$\boldsymbol{\cos C = \frac{b^2 + c^2 - y^2}{2bc}}$$
$$\boldsymbol{\cos D = \frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd}}$$



(2) 四角形 ABCD が円に内接するとき，$B + D = 180^\circ$ より　$\cos B + \cos D = 0$

(1) の結果をこれに代入して

$$\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} + \frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd} = 0$$

したがって　　$(ab + cd)x^2 = cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)$

$$x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \quad \cdots ①$$

同様に，$\cos A + \cos C = 0$ に (1) の結果を代入して

$$\frac{a^2 + d^2 - y^2}{2ad} + \frac{b^2 + c^2 - y^2}{2bc} = 0$$

したがって　$(ad+bc)y^2=bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)$

$$y^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}\quad\cdots②$$

①，② より　$x^2y^2=(ac+bd)^2$　よって　$xy=ac+bd$

解説　トレミーの定理 (熊大 [文]2011) 1

4.1　分散 s^2 の定義により

$$\begin{aligned}s^2&=\frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2\}\\&=\frac{1}{3}\{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2-2\overline{x}(x_1+x_2+x_3)+3\overline{x}^2\}\end{aligned}$$

$\overline{x}=\dfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ より，$x_1+x_2+x_3=3\overline{x}$ であるから

$$\begin{aligned}s^2&=\frac{1}{3}\{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2-2\overline{x}\cdot3\overline{x}+3\overline{x}^2\}\\&=\frac{1}{3}({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)-\overline{x}^2\\&=\overline{x^2}-\overline{x}^2\end{aligned}$$

4.2　(1) 5 つのデータの最大値と最小値はそれぞれ $5+X_2$，$2-X_1$ であるから，データの範囲は

$$(5+X_2)-(2-X_1)=X_1+X_2+3$$

これが 7 以下であるから

$$X_1+X_2+3\leqq 7\quad\text{ゆえに}\quad X_1+X_2\leqq 4$$

これを満たす $(X_1,\ X_2)$ の組は，次の 6 通り．

$$(X_1,\ X_2)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

このとき，X_3 は，1〜6 の 6 通りであるから，求める確率は

$$\frac{6\times6}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) $2-X_1<2<5<5+X_2$ であるから，X_3 がデータの中央値であるとき

$$2\leqq X_3\leqq 5\quad\text{これを満たす}\ X_3\text{は}\ 4\ \text{通り}$$

このとき，X_1，X_2 は，ともに 1〜6 の 6 通りであるから，求める確率は

$$\frac{4\times6\times6}{6^3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(3) 条件から　　$X_3 = \dfrac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5}$

整理すると　　$4(X_3-3) = X_2 - X_1 + 2 \quad \cdots ①$

このとき，$1 \leqq X_1 \leqq 6$，$1 \leqq X_2 \leqq 6$ であるから

$$-3 \leqq X_2 - X_1 + 2 \leqq 7 \quad \cdots ②$$

①，② より，$X_2 - X_1 + 2 = 0,\ 4$ であるから

$$X_2 = X_1 - 2 \ (X_1 = 3,4,5,6) \text{ のとき} \quad X_3 = 3$$
$$X_2 = X_1 + 2 \ (X_1 = 1,2,3,4) \text{ のとき} \quad X_3 = 4$$

よって，求める確率は　　$\dfrac{4+4}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{27}}$

(4) $2 - X_1 < 2 < 5 < 5 + X_2$ より，中央値は 2，5，X_3 のいずれかである．

i) 中央値が 2 のとき

$$\frac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad X_1 = X_2 + X_3 + 4$$

このとき　$(X_1,\ X_2,\ X_3) = (6,\ 1,\ 1)$ の 1 通り

ii) 中央値が 5 のとき

$$\frac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5} = 5 \quad \text{ゆえに} \quad X_1 + 11 = X_2 + X_3$$

このとき　$(X_1,\ X_2,\ X_3) = (1,\ 6,\ 6)$ の 1 通り

iii) 中央値が X_3 のとき，(3) の結果より 8 通り

i)〜iii) から，求める条件付き確率は　　$\dfrac{\dfrac{8}{6^3}}{\dfrac{1+1+8}{6^3}} = \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

5.1 (1) 0，1，2，3，4，5 の 6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出し左から並べてできる自然数の個数は

$${}_6\mathrm{P}_3 = 120 \text{ (通り)}$$

このうち，2 桁の自然数の個数は

$${}_5\mathrm{P}_2 = 20 \text{ (通り)}$$

よって，求める個数は　$120 - 20 = \boldsymbol{100}$ (通り)

(2) $A=\{0,\ 5\}$，$B=\{1,\ 4\}$，$C=\{2,\ 3\}$，$a\in A$，$b\in B$，$c\in C$ とすると，3 桁の自然数 n は a，b，c を並べる次の 4 通りである．

$$bac,\quad bca,\quad cab,\quad cba$$

a，b，c の選び方は，それぞれ 2 通りであるから，求める場合の数は

$$4\times 2^3=\mathbf{32}\ (\text{通り})$$

5.2 「$1\leqq m$ または $n<0$」の整数の組は

$$\begin{aligned}(m,\ n)=&(1,-1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\\ &(-2,-1),\ (-1,-1),\ (0,-1)\end{aligned}$$

よって，求める整数の組の個数は　$\mathbf{7}$ (個)

5.3 KADAI の 5 文字の並べ方の総数は　$\dfrac{5!}{2!}=60$ (通り)

その中で 2 つの A が隣り合う並べ方の総数は　$4!=24$ (通り)

したがって，求める場合の総数は　$60-24=\mathbf{36}$ (通り)

5.4 最初の文字が S または N のとき，ともに　$\dfrac{5!}{2!}$ (通り)

最初の文字が T のとき　$5!$ (通り)

よって，求める総数は　$\dfrac{5!}{2!}\times 2+5!=\mathbf{240}$ (通り)

5.5 $A=\{1,\ 4\}$，$B=\{2,\ 5\}$，$C=\{3\}$ とする．

A の要素だけからなる 3 桁の整数は　2^3 個

B の要素だけからなる 3 桁の整数は　2^3 個

C の要素だけからなる 3 桁の整数は　1 個

A，B，C の要素 1 個ずつからなる 3 桁の整数は

$$2\times 2\times 1\times 3!=24\ (\text{個})$$

よって，求める 3 桁の整数の個数は　$2^3+2^3+1+24=\mathbf{41}$ (個)

5.6 正方形の一辺の長さを n とすると，一辺の長さが k の正方形の個数は

$$(n+1-k)^2\qquad (1\leqq k\leqq n)$$

であるから，その総数は

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

また，長方形の総数は

$${}_{n+1}\mathrm{C}_2\times{}_{n+1}\mathrm{C}_2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

よって，求める個数は

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2)}$$

5.7 (1) 異なる 6 文字の並び方は　$6!=\mathbf{720}$ **(通り)**

(2) A，B をひとまとめにする．
残りの 4 文字と A，B ひとまとめの 5 つの並び方は　$5!$ (通り)
また，ひとまとめにした A，B の並び方は　2 (通り)
よって，並び方の総数は　$5!\times 2=\mathbf{240}$ **(通り)**

(3) A と B が隣り合わない並び方であるから，(1)，(2) より

$$720-240=\mathbf{480}\ \textbf{(通り)}$$

5.8 (1) a と d の決め方は　${}_6\mathrm{C}_2$ (通り)，　b と c の決め方は　6^2 (通り)
よって　${}_6\mathrm{C}_2\times 6^2=15\times 36=\mathbf{540}$ (通り)

(2) $a<b<c<d$ のとき　${}_6\mathrm{C}_4$ (通り)，　$a<b=c<d$ のとき　${}_6\mathrm{C}_3$ (通り)
よって　${}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_3=15+20=\mathbf{35}$ (通り)

5.9 (1) 1 列目の○のつけ方は 5 通り．2〜5 列目の○のつけ方も同様に 5 通り．
したがって　$5^5=\mathbf{3125}$ (通り)

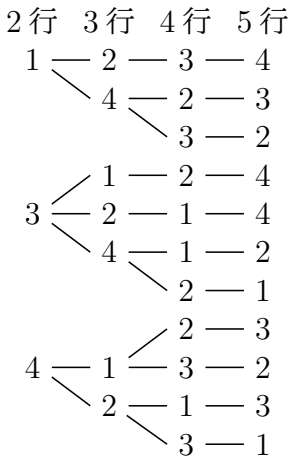
(2) 1 行目には a 列目に○をつけ，2〜5 行目には，それぞれ b 列目，c 列目，d 列目，e 列目に○をつけるとする．求める選び方の総数は，a，b，c，d，e に 1 から 5 の数字を並べる順列の総数に等しい．よって　$5!=\mathbf{120}$ (通り)

(3) ○のついている 2 列の選び方は　${}_5\mathrm{P}_2$ (通り)
○のついている 2 列が，4 個と 1 個の場合は　${}_5\mathrm{C}_4{\cdot}{}_5\mathrm{C}_1$ (通り)
○のついている 2 列が，3 個と 2 個の場合は　${}_5\mathrm{C}_3{\cdot}{}_5\mathrm{C}_2$ (通り)
よって，求める選び方の総数は

$${}_5\mathrm{P}_2({}_5\mathrm{C}_4{\cdot}{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_3{\cdot}{}_5\mathrm{C}_2)=20(5\times 5+10\times 10)=\mathbf{2500}\ \text{(通り)}$$

(4) 2行から5行までの列の番号を樹形図で示すと次のようになる．

よって　**11** (通り)



5.10　(1) ${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{84}$ (通り)

(2) 玉1と玉2がいっしょに含まれる場合の数は　7 (通り)

玉1と玉3がいっしょに含まれる場合の数は　7 (通り)

玉1，玉2，玉3の3個がいっしょに含まれる場合が1通りある．

よって，求める場合の数は

$$84 - (7 + 7 - 1) = \mathbf{71} \quad (\text{通り})$$

(3) 9個の玉をA，B，Cの3つの箱に3個ずつ入れる場合の数は

$${}_9\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_3 = 84 \times 20 \ (\text{通り})$$

求める場合の数は，A，B，Cの区別をなくせばよいので

$$\frac{84 \times 20}{3!} = \mathbf{280} \ (\text{通り})$$

(4) 玉1と玉2がいっしょに含まれる場合の数は

$$7 \times \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 70 \ (\text{通り})$$

玉1と玉3がいっしょに含まれる場合の数は

$$7 \times \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 70 \ (\text{通り})$$

玉1，玉2，玉3がいっしょに含まれる場合の数は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 10 \ (\text{通り})$$

よって，求める場合の数は

$$280 - (70 + 70 - 10) = \mathbf{150} \ (\text{通り})$$

5.11 (1) 5 個の石を横 1 列に並べ，その中から 3 つ選び，選んだ 3 つの石を左から $a_1,\ a_2,\ a_3$ とする．このとき，a_1 と a_2 および a_2 と a_3 の間にそれぞれ石を 2 個ずつ追加する操作を考える．これら 9 個並んだ石の配置について，$a_1,\ a_2,\ a_3$ を左から数えた順番とすればよいから，求める場合の総数は

$$ {}_5\mathrm{C}_3 = \mathbf{10}\ (\text{通り}) $$

(2) 32 個の石を横 1 列に並べ，その中から 3 つ選び，選んだ 3 つの石を左から $a_1,\ a_2,\ a_3$ とする．このとき，a_1 と a_2 および a_2 と a_3 の間にそれぞれ石を 9 個ずつ追加する操作を考える．これら 50 個並んだ石の配置について，$a_1,\ a_2,\ a_3$ を左から数えた順番とすればよいから，求める場合の総数は

$$ {}_{32}\mathrm{C}_3 = \mathbf{4960}\ (\text{通り}) $$

(3) 座席が横 1 列のとき，条件を満たす場合の総数は (1) と同様にして

$$ {}_{16}\mathrm{C}_3 = 560\ (\text{通り}) $$

座席が円形であるため，この中から $(a_1,\ a_3) = (1,\ 20),\ (1,\ 19),\ (2, 20)$ の場合を除けばよい．

$(a_1,\ a_3) = (1,\ 20)$ のとき　$a_2 = 4, 5, \cdots, 17$ の 14 通り
$(a_1,\ a_3) = (1,\ 19)$ のとき　$a_2 = 4, 5, \cdots, 16$ の 13 通り
$(a_1,\ a_3) = (2,\ 19)$ のとき　$a_2 = 5, 6, \cdots, 17$ の 13 通り

よって，求める場合の総数は

$$ 560 - (14 + 13 + 13) = \mathbf{520}\ (\text{通り}) $$

5.12 (1) 各桁の数の組合せは　$\{1, 1, 1, 1, 2\}$
したがって，求める個数は　${}_5\mathrm{C}_1 = \mathbf{5}$ (個)

(2) 各桁の数の組合せは　$\{1, 1, 1, 1, 3\},\ \{1, 1, 1, 2, 2\}$
したがって，求める個数は　${}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 = 5 + 10 = \mathbf{15}$ (個)

(3) 各桁の数の組合せは

$$ \{\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{k-1\ \text{個}}, 4\},\ \{\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{k-2\ \text{個}}, 2, 3\},\ \{\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{k-3\ \text{個}}, 2, 2, 2\} $$

したがって，求める個数は

$$ \begin{aligned} {}_k\mathrm{C}_1 + {}_k\mathrm{C}_2 \times 2 + {}_k\mathrm{C}_3 &= k + \frac{k(k-1)}{2!} \times 2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{k(k+1)(k+2)}\ \ (\text{個}) \end{aligned} $$

5.13 (1) 上下を逆さまにしても読めるのはH，I，O，Xの4文字で，これらの4文字から重複を許して並べるとき，上下を逆さまにして読んでも同じ順列を表すのは，1番目と5番目，2番目と4番目が同じ文字の場合である．

よって，求める順列の総数は，4文字から1(5)番目，2(4)番目，3番目の3つを重複を許して並べるカードの総数である．

$$4^3 = \mathbf{64} \quad (\text{枚})$$

(2) 上下を逆さまにしても読めるのはH，I，O，Xの4文字で，これらの4文字から重複を許して並べるカードの総数は

$$4^5 = 1024 \quad (\text{枚})$$

このうち，上下を逆さまにして読んでも同じ順列を表すのが，(1)の結果であるから，よって，求めるカードの総数は

$$1024 - 64 = \mathbf{960} \quad (\text{枚})$$

(3) 上下を逆さまにすると読めないカードの総数は

$$10^5 - 4^5 \quad (\text{枚})$$

(1)の結果から．上下を逆さまにしても読めるが，1度しか使えないカードの総数は

$$4^3 \quad (\text{枚})$$

(2)の結果から，上下を逆さまにしても読めて，2度使えるカードの総数は

$$\frac{4^5 - 4^3}{2} \quad (\text{枚})$$

よって，求めるカードの総数は

$$(10^5 - 4^5) + \frac{4^5 - 4^3}{2} + 4^3 = 10^5 - \frac{4^5}{2} + \frac{4^3}{2} = \mathbf{99520} \quad (\text{枚})$$

5.14 (1) (i) 最高位が「3」のとき
残りの9個の位に「0」が並ぶ　1 (通り)

(ii) 最高位が「2」のとき
残りの9個の位に「1」が1個と「0」が8個並ぶ　9 (通り)

(iii) 最高位が「1」のとき
残りの9個の位に「2」が1個と「0」が8個並ぶ　9 (通り)
また「1」が2個と「0」が7個並ぶ　${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ (通り)

(i)〜(iii)から　　$1 + 9 + 9 + 36 = \mathbf{55}$ (通り)

(2) (i) 「4」が1個,「0」が9個並ぶ　10 (通り)

(ii) 「3」が1個,「1」が1個,「0」が8個並ぶ　$\dfrac{10!}{8!} = 90$ (通り)

(iii) 「2」が2個,「0」が8個並ぶ　$\dfrac{10!}{2!8!} = 45$ (通り)

(iv) 「2」が1個,「1」が2個,「0」が7個並ぶ　$\dfrac{10!}{2!7!} = 360$ (通り)

(v) 「1」が4個,「0」が6個並ぶ　$\dfrac{10!}{4!6!} = 210$ (通り)

(i)〜(v) から　　$10 + 90 + 45 + 360 + 210 = \mathbf{715}$ (通り)

(3) $2n$ 桁の回文数は，上位 n 桁を決めればよいので $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$，その最高位が0でないことに注意して

$$9{\cdot}10^{n-1} \quad (\text{通り})$$

$2n-1$ 桁の回文数は，上位 n 桁を決めればよいので $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$，その最高位が0でないことに注意して

$$9{\cdot}10^{n-1} \quad (\text{通り})$$

よって，求める回文数の総数は

$$2\sum_{n=1}^{5} 9{\cdot}10^{n-1} = 18\sum_{n=1}^{5} 10^{n-1} = 18 \times 11111 = \mathbf{199998} \quad (\text{通り})$$

5.15 (1) $105 = 3 \times 5 \times 7$

105 を最小公倍数とする2数 a，b について，次の場合がある．

「a だけが3を因数にもつ」

「b だけが3を因数にもつ」

「a と b がともに3を因数にもつ」

5，7についても同様であるから，$(a,\ b)$ の組合せは全部で 3^3 個ある．

このうち，$a = b$ となるのは a と b がともに3，5，7を因数にもつ，すなわち，$a = b = 3 \times 5 \times 7$ のときである．残りが $a < b$ または $a > b$ であり，これらの個数は等しい．

したがって　　$N(105) = \dfrac{3^3 - 1}{2} = \mathbf{13}$

(2) $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

2310 を最小公倍数とする2数 a，b について，次の場合がある．

「a だけが2を因数にもつ」

「b だけが 2 を因数にもつ」

「a と b がともに 2 を因数にもつ」

3，5，7，11 についても同様であるから，$(a,\ b)$ の組合せは全部で 3^5 個ある．このうち，$a=b$ となるのは a と b がともに 2，3，5，7，11 を因数にもつ，すなわち，$a=b=2\times3\times5\times7\times11$ のときである．残りが $a<b$ または $a>b$ であり，これらの個数は等しい．

したがって　　$N(2310)=\dfrac{3^5-1}{2}=\mathbf{121}$

5.16　(1) $(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 を並べる順列の総数であるから

$$\frac{n!}{(n-1)!4!}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}}\boldsymbol{n(n-1)(n-2)(n-3)}\quad(\text{通り})$$

(2) $b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大となるのは，$\{a_n\}$ において -1 が連続して偶数回並ぶ場合であり，このとき，数列 $\{b_n\}$ は $n-2$ 個の 1 と 2 個の -1 からなる．したがって，求める最大値は

$$(n-2)\cdot1+2\cdot(-1)=\boldsymbol{n-4}$$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小となるのは，$\{a_n\}$ において $a_1=a_n=-1$ であり，残りの 2 つの -1 が連続して並ぶ場合であり，このとき，数列 $\{b_n\}$ は $n-2$ 個の -1 と 2 個の 1 からなる．したがって，求める最小値は

$$(n-2)\cdot(-1)+2\cdot1=\boldsymbol{-n+4}$$

(3) $b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大となるのは，$\{a_n\}$ において -1 が連続して偶数回並ぶ場合であるから，連続する 2 つの -1 をひとまとめにしたものを c とする．このとき，$n-4$ 個の 1 と 2 個の c を並べる順列の総数であるから

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!2!}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{(n-2)(n-3)}\quad(\text{通り})$$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小となるのは，$\{a_n\}$ において $a_1=a_n=-1$ であり，2 つの -1 が連続して並ぶ場合であるから，連続する 2 つの -1 をひとまとめにしたものを d とする．このとき，$n-4$ 個の 1 と 1 個の d を並べる順列の総数であるから

$$\frac{(n-3)!}{(n-4)!1!}=\boldsymbol{n-3}\quad(\text{通り})$$

5.17　目の出方の総数は　6^4 (通り)

3 の倍数の目，すなわち 3 または 6 の目が出る場合の総数は　2^4 (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{2^4}{6^4}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{81}}$

5.18 3 個とも 3 の倍数の目でない確率は　$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$

求める確率は，この余事象 (少なくとも 1 個は 3 の倍数) の確率であるから

$$1 - \frac{8}{27} = \boldsymbol{\frac{19}{27}}$$

5.19 起こり得る場合の総数は　6^4 (通り)

4 個のさいころの目の和が 7 になるのは

$$\{1,\ 1,\ 1,\ 4\} \quad \cdots \quad \frac{4!}{3!} = 4 \text{ (通り)}$$

$$\{1,\ 1,\ 2,\ 3\} \quad \cdots \quad \frac{4!}{2!} = 12 \text{ (通り)}$$

$$\{1,\ 2,\ 2,\ 2\} \quad \cdots \quad \frac{4!}{3!} = 4 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{4+12+4}{6^4} = \dfrac{20}{6^4} = \boldsymbol{\dfrac{5}{324}}$

5.20 (1) $y = ax^2 + 2x - b = a\left(x + \dfrac{1}{a}\right)^2 - \dfrac{1}{a} - b$

$a > 0$ であるから　最小値は $-\dfrac{1}{a} - b$

条件より　$-\dfrac{1}{a} - b < -5$　すなわち　$5 - b < \dfrac{1}{a}$

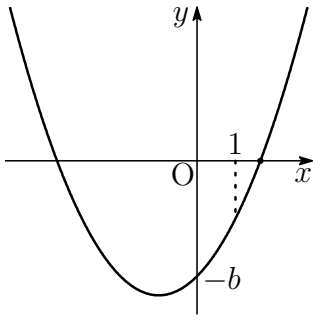
$0 < \dfrac{1}{a} \leqq 1$ であり，$5 - b$ は整数であるから

$$5 - b \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 5,\ 6$$

また，a は 1，2，3，4，5，6 の 6 通りある．

よって　$\dfrac{6 \times 2}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2) $f(x)=ax^2+2x-b$ とおくと



$$f(0)=-b<0$$

$a>0$ かつ $f(0)<0$ より $f(1)<0$ を満たせばよいから

$$f(1)=a+2-b<0 \text{ より} \quad b>a+2$$

これを満たすのは，

$$(a,b)=(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,6)$$

の 6 通り．　　よって　$\dfrac{6}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) 2 式より　$ax^2+2x-b=bx^2$　すなわち　$(a-b)x^2+2x-b=0$

条件を満たすのは，$a-b\neq 0$ かつ 判別式 $D>0$ のときであるから

$$D/4=1+b(a-b)>0 \text{ より} \quad b(b-a)<1$$

$b(b-a)$ は整数で，$a-b\neq 0$ であるから

$$b(b-a)<0 \quad \text{ゆえに} \quad b<a$$

$b<a$ を満たす a，b の組は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{6^2}=\boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

5.21 $a_n\leqq 9$ となる確率を p_n とする．

［1］$n=1$ のとき　すべての X_1 に対して $a_1=X_1\leqq 9$ であるから　$p_1=1$

［2］$n=2$ のとき

1 の目が 2 回出るのは，1 通り

1 の目が 1 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5\times {}_2\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が出ないのは，次の 6 通り

$$(X_1,\ X_2)=(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

したがって　　$p_2=\dfrac{1+5\times {}_2\mathrm{C}_1+6}{6^2}=\dfrac{17}{36}$

［3］$n\geqq 3$ のとき，1 以外の目が出る回数は 3 回以内であることに注意して

1 の目が n 回出るのは，1 通り

1 の目が $(n-1)$ 回だけ出るのは，残りの目が 1 以外で　$5\times {}_n\mathrm{C}_1$ (通り)

1 の目が $(n-2)$ 回だけ出るのは，残りの目が次の組合せで　$6\times {}_n\mathrm{C}_2$ (通り)

$$(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)$$

1 の目が $(n-3)$ 回だけ出るのは，残りの目が $(2,\ 2,\ 2)$ で　${}_n\mathrm{C}_3$ (通り)

したがって　$p_n = \dfrac{1}{6^n}(1+5\times {}_n\mathrm{C}_1+6\times {}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3)$

$$= \frac{1}{6^n}\left\{1+5n+3n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right\}$$

$$= \frac{1}{6^{n+1}}(n^3+15n^2+14n+6) \qquad \cdots ①$$

① は，$n=1$，$n=2$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{6^{n+1}}(n^3+15n^2+14n+6)}$$

5.22　(1) 2 回投げて出た目の数の積が 12 となるのは，出た目が $\{2,\ 6\}$，$\{3,\ 4\}$ であるから

$$p_2 = \frac{2!}{1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$$

3 回投げて出た目の数の積が 12 となるのは，出た目が $\{1,\ 2,\ 6\}$，$\{1,\ 3,\ 4\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$ であるから

$$p_3 = \frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 2+\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{72}}$$

(2)　n 回の目の出方で，1 以外の目の出方は $\{2,\ 6\}$，$\{3,\ 4\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$ であるから

$$p_n = \frac{n!}{1!1!(n-2)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n\times 2+\frac{n!}{2!1!(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$= \frac{2n(n-1)}{6^n}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 6^n} = \boldsymbol{\frac{n(n-1)(n+2)}{2\cdot 6^n}}$$

(3)　$n-1$ 回目までの目の積が 12 で，n 回目で 1 の目が出る確率は

$$p_{n-1}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{6}p_{n-1}$$

これと (2) の結果から，求める確率は

$$p_n-\frac{1}{6}p_{n-1} = \frac{n(n-1)(n+2)}{2\cdot 6^n}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n+1)}{2\cdot 6^{n-1}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{(n-1)(3n+2)}{2\cdot 6^n}}$$

5.23 (1) X が 5 で割り切れない，すなわち，4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0，X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{625}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \mathbf{\frac{19}{144}}$$

(2) X が 2 で割り切れない，すなわち，4 回とも奇数の目が出る確率を q_0，X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \mathbf{\frac{37}{48}}$$

(3) X が 100 の倍数となるは，出る目の組合せが次の (i)〜(iv) の場合である．

(i) $\{\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ 5,\ 5\}$ のとき $(\mathrm{A} = 2,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

(ii) $\{4,\ 5,\ 5,\ \mathrm{B}\}$ のとき $(\mathrm{B} = 1,\ 2,\ 3,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

(iii) $\{4,\ 4,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

(iv) $\{4,\ 5,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は $\dfrac{24+48+6+4}{1296} = \dfrac{82}{1296} = \mathbf{\dfrac{41}{648}}$

5.24 (1) A 君が k $(1 \leqq k \leqq n)$ 回目に勝つ確率は　$(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}p$

条件より，$0<p<1$，$0<q<1$ であるから　$(1-p)(1-q) \neq 1$

よって，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}p = \frac{\boldsymbol{p\{1-(1-p)^n(1-q)^n\}}}{\boldsymbol{1-(1-p)(1-q)}}$$

(2) B 君が k $(1 \leqq k \leqq n)$ 回目に勝つ確率は　$(1-p)^{k}(1-q)^{k-1}q$

(1) と同様に，B の勝つ確率は

$$\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k}(1-q)^{k-1}q = \frac{q(1-p)\{1-(1-p)^n(1-q)^n\}}{1-(1-p)(1-q)}$$

A 君の勝つ確率が B 君の勝つ確率よりも大きくなるのは，上式および (1) の結果から

$$p > q(1-p)$$

このとき，$p+q \leqq 1$ に注意して　$\dfrac{q}{1+q} < p \leqq 1-q$

p，q は $\dfrac{j}{6}$ $(j=1,2,3,4,5)$ であるから

(i) $q=\dfrac{1}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{7} < p \leqq \dfrac{5}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{6},\ \dfrac{2}{6},\ \dfrac{3}{6},\ \dfrac{4}{6},\ \dfrac{5}{6}$

(ii) $q=\dfrac{2}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{4} < p \leqq \dfrac{4}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{2}{6},\ \dfrac{3}{6},\ \dfrac{4}{6}$

(iii) $q=\dfrac{3}{6}$ のとき　$\dfrac{1}{3} < p \leqq \dfrac{3}{6}$　ゆえに　$p=\dfrac{3}{6}$

(iv) $q=\dfrac{4}{6}$ のとき　$\dfrac{2}{5} < p \leqq \dfrac{2}{6}$　ゆえに　p は存在しない

(v) $q=\dfrac{5}{6}$ のとき　$\dfrac{5}{11} < p \leqq \dfrac{1}{6}$　ゆえに　p は存在しない

よって，求める $(X,\ Y)$ の組の総数は

$$\begin{aligned}&{}_6\mathrm{C}_1\sum_{k=1}^{5}{}_5\mathrm{C}_k + {}_6\mathrm{C}_2\sum_{k=2}^{4}{}_4\mathrm{C}_k + {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3\\ =&6(2^5-1)+15(2^4-1-4)+20\times 1 = \boldsymbol{371}\end{aligned}$$

5.25 (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}\mathrm{C}_i\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}\mathrm{C}_i}{2^{i+j}} \quad \cdots(*)$$

である (i, j は 0 以上の整数).

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから，$(*)$ に $i=2$，$j=3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2) 事象 A，B を，次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある.

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある.

$P(A)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから，$(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A \cap B)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通って，$R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にあるとき，途中反転する (1 の目が上から下，下から上). 5 回投げる中で反転は 2 度起き，さいころの 1 の目が下にくるのは硬貨を 2 回目または 3 回目に投げたあとである.

さいころが 2 回で反転する事象を X とすると，X が起きるのは. 硬貨が「表表」または「裏裏」の順に出るときであるから，その確率は

$$P(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

さいころが 3 回で反転する事象を Y とすると，Y が起きるのは，硬貨が「表裏表」または「裏表裏」の順に出るときであるから，その確率は

$$P(Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

求める確率は，X, Y または Y, X の順に起こる確率であるから

$$P(X)P(Y) + P(Y)P(X) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

5.26 (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}\mathrm{C}_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}\mathrm{C}_i}{2^{i+j}} \quad \cdots (*)$$

である (i, j は 0 以上の整数).

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから，$(*)$ に $i=2$，$j=3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2) 事象 A，B を，次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある.

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある.

$P(A)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから，$(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A \cap B)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通って，$R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

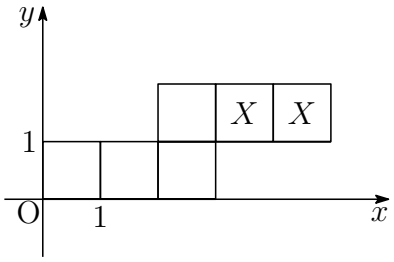
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

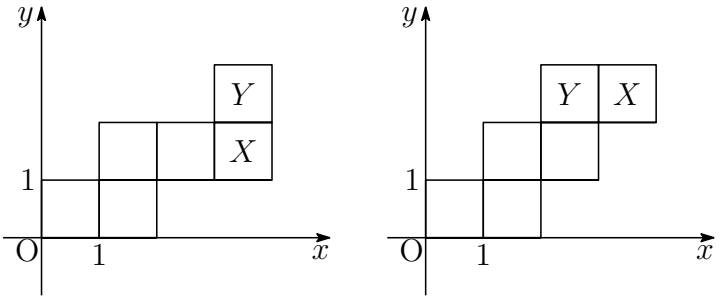
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) 1 枚の硬貨を投げて表，裏が出る事象をそれぞれ X，Y とする．5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて出るには，最初の 3 回目までに X と Y が少なくとも 1 回ずつ起こる．最初の 3 回で 1 回目が X であるのは，次の (i)〜(iii) である.

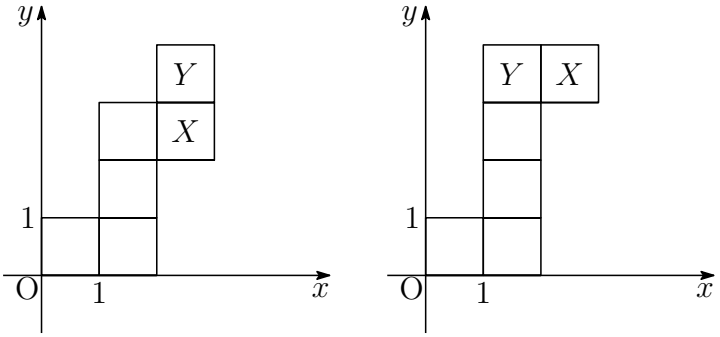
(i) 最初の 3 回が X, X, Y の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5 回目は X, X の順に起こる.



(ii) 最初の 3 回が $X,\ Y,\ X$ の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5 回目は $X,\ Y$ または $Y,\ X$ の順に起こる．



(iii) 最初の 3 回が $X,\ Y,\ Y$ の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5 回目は $X,\ Y$ または $Y,\ X$ の順に起こる．



(i)〜(iii) より，1 回目が X であるのは，5 通りである．また，1 回目が Y であるのは，(i)〜(iii) の展開図を直線 $y=x$ に関して対称移動したものであるから，5 通りである．このとき，X，Y が起こる確率はともに $\dfrac{1}{2}$ であるから，求める確率は

$$(5+5)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

5.27 9 個の玉から 3 個取り出す場合の総数は　${}_9\mathrm{C}_3 = 84$ (通り)

取り出し 3 個の玉に書かれた整数の和が 12 未満になる組は，次の 16 通り．

$$\begin{array}{llll}
\{1,2,3\}, & \{1,2,4\}, & \{1,2,5\}, & \{1,2,6\},\\
\{1,2,7\}, & \{1,2,8\}, & \{1,3,4\}, & \{1,3,5\},\\
\{1,3,6\}, & \{1,3,7\}, & \{1,4,5\}, & \{1,4,6\},\\
\{2,3,4\}, & \{2,3,5\}, & \{2,3,6\}, & \{2,4,5\}
\end{array}$$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{16}{84} = \boldsymbol{\frac{17}{21}}$

5.28 (1) 箱 A から青玉を取り出す確率は $\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

箱 B からくじ 3 本引くとき，少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$1-\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{17}{24}$$

よって，求める確率は $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{17}{24}=\boldsymbol{\dfrac{17}{60}}$

(2) (1) と同様に，箱 A から赤玉を取り出し，箱 B から少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{1}{10}\left(1-\frac{{}_7\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5}\right)=\frac{11}{120}$$

また，箱 A から黄玉を取り出し，箱 B から少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{5}{10}\left(1-\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\right)=\frac{4}{15}$$

よって，求める確率は，これと (1) の結果により

$$\frac{11}{120}+\frac{17}{60}+\frac{4}{15}=\boldsymbol{\frac{77}{120}}$$

(3) 箱 A から赤玉を取り出し，箱 B から当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{1}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{1}{24}$$

箱 A から青玉を取り出し，箱 B から当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{4}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{21}{100}$$

箱 A から黄玉を取り出し，箱 B から当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{5}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{30}$$

よって，求める確率は $\dfrac{1}{24}+\dfrac{21}{100}+\dfrac{7}{30}=\boldsymbol{\dfrac{97}{200}}$

5.29 (1) 取り出した赤球の総数が 2 であるのは，次［1］，［2］の場合である．

［1］1 回目に赤球 2 個を取り出し，箱の中には赤球 2 個，白球 6 個が残り，2 回目にこの箱から白球 2 個を取り出す場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{6}{45}\times\frac{15}{28}=\frac{1}{14}$$

［2］1 回目に赤球，白球をそれぞれ 1 個ずつ取り出し，箱の中には赤球 3 個，白球 5 個が残り，2 回目に赤球 1 個を取り出す場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \times \frac{3}{8} = \frac{4 \times 6}{45} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{5}$$

［1］，［2］は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{19}{70}}$$

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえるのは，上の［2］と次の［3］の場合である．

［3］1 回目に赤球を 2 個取り出し，2 回目に取り出した球が 2 個とも赤球，または，赤球と白球が 1 個ずつの場合で，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_2 + {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2} = \frac{6}{45} \times \frac{1 + 2 \times 6}{28} = \frac{13}{210}$$

［2］，［3］は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{5} + \frac{13}{210} = \boldsymbol{\frac{11}{42}}$$

5.30 (1) $2n$ 個の球から n 個取り出すとき，n 個の赤球から k 個取り出し，n 個の白球から $n-k$ 個取り出す確率であるから

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

(2) 取り出した n 個の球のうち赤球が k 個取り出されるとき，勝つ確率は $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ であるから，(1) の結果により

$$\frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{k}{n} \cdot {}_n\mathrm{C}_k\right)^2 \quad \cdots (*)$$

がゲームに勝つ確率である．ここで

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

$${}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n} \cdot {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

上の 2 式をそれぞれ変形すると

$$\frac{k}{n} \cdot {}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}, \quad \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$$

これらを $(*)$ に代入することにより

$$(*) = \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} ({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2 = \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$$

(3) $n \geqq 2$ および $k \geqq 1$ の整数について，

$$(1+x)^{n-1}(1+x)^{n-1} = (1+x)^{2n-2}$$

上式の両辺の x^{n-1} の係数を比較することにより

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-k} = {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

すなわち $$\sum_{k=1}^{n} ({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2 = {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

これと (2) の結果により，ゲームに勝つ確率は

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} = \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} ({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2$$

$$= \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} = \frac{n}{2(2n-1)}$$

5.31 (1) $n = 3$ のとき，0, 0, 1, 2, 3 の数が書かれた 5 個の球を，数 0 が書かれた 2 個の球を 0_1, 0_2 と区別する．

0_1, 0_2, 1, 2, 3 の 5 つから 3 つとる a, b, c の順列の総数は

$${}_5\mathrm{P}_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ (通り)}$$

$a + b \leqq c$ となる (a, b) の組は c の値により，次の場合に分けられる．

(i) $c = 1$ のとき，0_1, 0_2 の 2 つを並べる順列の総数であるから

$$2! = 2 \cdot 1 = 2 \text{ (通り)}$$

(ii) $c = 2$ のとき，0_1, 0_2, 1 の 3 つから 2 つとる順列の総数であるから

$${}_3\mathrm{P}_2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ (通り)}$$

(iii) $c = 3$ のとき，0_1, 0_2, 1, 2 の 4 つから 2 つとる順列の総数であるから

$${}_4\mathrm{P}_2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (通り)}$$

よって $$P(3) = \frac{2 + 6 + 12}{60} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) (iv) $a+b=c\cdots$① を満たすのは $c \geqq 3$，$a \neq 0$，$b \neq 0$ のときである．
c が奇数のとき，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は下に示した　$c-1$ (組)

$$(a,\ b)=(1,\ c-1),\ (2,\ c-2),\cdots,(c-1,\ 1)$$

c が偶数のとき，$a \neq b$ により，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は　$c-2$ (組)
したがって，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は

$$c-1-\frac{1+(-1)^c}{2}=c-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{c-1} \quad (c \geqq 3)$$

(v) a，b の少なくとも 1 つが 0 で $a+b \leqq c$ $(c \geqq 3)$ を満たす $(a,\ b)$ の組数は，$0_1,\ 0_2,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ c-1$ の $c+1$ 個から 2 個とる順列の総数から $1,\ 2,\ \cdots,\ c-1$ の $c-1$ 個から 2 個とる順列の総数を引いたものであるから

$$_{c+1}\mathrm{P}_2-{}_{c-1}\mathrm{P}_2=(c+1)c-(c-1)(c-2)=4c-2$$

$a+b \leqq c\cdots$② を満たす c の値は　$c \geqq 1$
c の値に対して ② を満たす $(a,\ b)$ の組の総数を $f(c)$ とする．
$c \geqq 3$ のとき，(iv)，(v) から

$$\begin{aligned} f(c)&=\sum_{k=3}^{c}\left\{k-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{k-1}\right\}+4c-2 \\ &=\frac{1}{2}(c-2)(3+c)-\frac{3}{2}(c-2)+\frac{1}{2}\times\frac{1-(-1)^{c-2}}{1-(-1)}+4c-2 \\ &=\frac{1}{2}c^2+3c-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{c-1} \qquad \cdots(*) \end{aligned}$$

(i)，(ii) から　　$f(1)=2,\quad f(2)=6$

上の結果から，$c=1,\ 2$ のときも $(*)$ は成立するから

$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^{n}f(c)&=\sum_{c=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}c^2+3c-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{c-1}\right\} \\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{7}{4}n+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} \\ &=\frac{1}{12}n(2n^2+21n-2)+\frac{1}{8}\{1-(-1)^n\} \end{aligned}$$

n が偶数のとき　　$\displaystyle\sum_{c=1}^{n}f(c)=\frac{1}{12}n(2n^2+21n-2)$

よって　　$P(n)=\dfrac{1}{{}_{n+2}\mathrm{P}_3}\displaystyle\sum_{c=1}^{n} f(c)$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+1)n}\times\frac{1}{12}n(2n^2+21n-2)$$

$$=\boldsymbol{\frac{2n^2+21n-2}{12(n+1)(n+2)}}$$

5.32　(1)　$A=\{a\,|\,a=14m+3\,(m\text{ は整数}),\ 100\leqq a\leqq 999\}$

$B=\{b\,|\,b=9n\,(n\text{ は整数}),\ 100\leqq b\leqq 999\}$

ゆえに　　$100\leqq 14m+3\leqq 999,\quad 100\leqq 9n\leqq 999$

m，n が整数であることに注意してこれらを解くと

$$7\leqq m\leqq 71,\quad 12\leqq n\leqq 111$$

A の要素の個数 $n(A)$ および B の要素の個数 $n(B)$ は

$$n(A)=71-7+1=\boldsymbol{65},$$
$$n(B)=111-12+1=\boldsymbol{100}$$

(2)　$c\in A\cap B$ とすると，(1) の結果から

$$c=14m+3=9n\quad\text{ゆえに}\quad c-45=14(m-3)=9(n-5)$$

$m-3$ は 9 を因数にもつので，$m-3=9k$ とおくと (k は整数)

$$c-45=14\cdot 9k\quad\text{すなわち}\quad c=126k+45$$

ゆえに　　$A\cap B=\{c\,|\,c=126k+45\,(c\text{ は整数}),\ 100\leqq c\leqq 999\}$

したがって　　$100\leqq 126k+45\leqq 999$

k が整数であることに注意してこれを解くと　$1\leqq k\leqq 7$

よって，$A\cap B$ の要素のうち　最小のものは　$126\cdot 1+45=\boldsymbol{171}$

最大のものは　$126\cdot 7+45=\boldsymbol{927}$

(3)　U の要素のうち，14 で割ると 3 余り，かつ 9 で割り切れない要素の個数は

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=65-7=58$$

よって，求める確率は　　$\dfrac{{}_{58}\mathrm{C}_2}{{}_{900}\mathrm{C}_2}=\dfrac{58\cdot 57}{2\cdot 1}\times\dfrac{2\cdot 1}{900\cdot 899}=\boldsymbol{\dfrac{19}{4650}}$

5.33 (1) p_3 は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (非復元抽出)，1，2，3 を取り出す確率であるから

$$p_3 = \frac{{}_3\mathrm{P}_3}{{}_N\mathrm{P}_3} = \frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{N(N-1)(N-2)}}$$

q_1 は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 1 だけの確率であるから

$$q_1 = \left(\frac{1}{N}\right)^3 = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N^3}}$$

q_2 は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 2 以下の確率からすべて 1 だけの確率を引いた確率であるから

$$q_2 = \left(\frac{2}{N}\right)^3 - \left(\frac{1}{N}\right)^3 = \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{N^3}}$$

q_3 は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 3 以下の確率からすべての 2 以下の確率を引いた確率であるから

$$q_3 = \left(\frac{3}{N}\right)^3 - \left(\frac{2}{N}\right)^3 = \frac{\boldsymbol{19}}{\boldsymbol{N^3}}$$

(2) p_n は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (非復元抽出)，1 枚は n で，残りの 2 枚が $n-1$ 以下の確率であるから

$$p_n = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 \times 3!}{{}_N\mathrm{P}_3} = \frac{\boldsymbol{3(n-1)(n-2)}}{\boldsymbol{N(N-1)(N-2)}}$$

q_n は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて n 以下の確率からすべての $n-1$ 以下の確率を引いた確率であるから

$$q_n = \left(\frac{n}{N}\right)^3 - \left(\frac{n-1}{N}\right)^3 = \frac{\boldsymbol{3n^2 - 3n + 1}}{\boldsymbol{N^3}}$$

5.34 (1) 異なる 5 枚のカードから 4 枚を 1 列に並べる順列の総数であるから

$${}_5\mathrm{P}_4 = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2 = \boldsymbol{120}\ (\text{通り})$$

(2) i) $a < b < c < d$ において，$(b,\ c) = (3,\ 4)$ のとき，次の 2 通り．

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

ii) $a < b < d < c$ において，$(b,\ d) = (3,\ 4)$ のとき，次の 2 通り．

$$(a,\ b,\ d,\ c) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

iii) $b<a<c<d$ において，$(a,\ c)=(3,\ 4)$ のとき，次の 2 通り．

$$(b,\ a,\ c,\ d)=(1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

iv) $b<a<d<c$ において，$(a,\ d)=(3,\ 4)$ のとき，次の 2 通り．

$$(b,\ a,\ d,\ c)=(1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

i)〜iv) の総数であるから　$2+2+2+2=\mathbf{8}$ (通り)

(3) 捨てられるカードは，3 と 4，2 と 3，2 と 4 の 3 つの場合がある．
2 と 3 の場合は，(2) で求めた 3 と 4 の場合と同様に 8 通り．
また，2 と 4 の場合は，次の i)〜iv) の 4 通り．

i) $a<b<c<d$ において，$(b,\ c)=(2,\ 4)$ のとき

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

ii) $a<b<d<c$ において，$(b,\ d)=(2,\ 4)$ のとき

$$(a,\ b,\ d,\ c)=(1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

iii) $b<a<c<d$ において，$(a,\ c)=(2,\ 4)$ のとき

$$(b,\ a,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

iv) $b<a<d<c$ において，$(a,\ d)=(3,\ 4)$ のとき

$$(b,\ a,\ d,\ c)=(1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

したがって，カードを捨てる確率は　$\dfrac{8+8+4}{120}=\dfrac{1}{6}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\dfrac{1}{6}=\mathbf{\dfrac{5}{6}}$

5.35 (1) A だけが自分以外の名前のカードを引く確率は，右の計算から

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{28}=\frac{1}{14}$$

A	B	C	確率
B	B	C	$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{28}$
C	B	C	$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{28}$

B または C が自分以外の名前のカードを引く確率もこれに等しい．

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{14}\times 3=\mathbf{\dfrac{3}{14}}$

(2) A だけが自分の名前のカードを引く確率は，右の計算から

$$\frac{2}{168}+\frac{6}{168}+\frac{6}{168}+\frac{9}{168}=\frac{23}{168}$$

A	B	C	確率
A	A	A	$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{2}{168}$
A	A	B	$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{168}$
A	C	A	$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{168}$
A	C	B	$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{168}$

B または C だけが自分の名前のカードを引く確率もこれに等しい．

よって，求める確率は　$\dfrac{23}{168}\times 3=\boldsymbol{\dfrac{23}{56}}$

(3) A，B，C の 3 人が自分の名前のカードを引く確率は

$$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{56}$$

求める確率は，これと (1)，(2) の余事象の確率であるから

$$1-\left(\frac{3}{56}+\frac{3}{14}+\frac{23}{56}\right)=\boldsymbol{\frac{9}{28}}$$

5.36 (1) S が偶数になるのは，3 枚が偶数または 1 枚が偶数で 2 枚が奇数の場合である．したがって，S が 2 の倍数になる確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\frac{20+6\times 36}{455}=\boldsymbol{\frac{236}{455}}$$

(2) 3 で割った余りが 0 となる数の札が 3 枚，1 となる数の札が 5 枚，2 となる数の札が 7 枚あり，S が 3 の倍数となる余りの組み合わせは $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 2,\ 2)$，$(0,\ 1,\ 2)$ である．したがって，S が 3 の倍数になる確率は

$$\frac{1+{}_5\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\frac{1+10+35+105}{455}=\boldsymbol{\frac{151}{455}}$$

5.37 (1) 最初のカードが 1 で，次に取り出したカードも 1 である確率は

$$\frac{n}{3n}\times\frac{n-1}{3n-1}=\frac{n-1}{3(3n-1)}$$

最初のカードが 1 以外で，次に取り出したカードも 1 である確率は

$$\frac{2n}{3n}\times\frac{n}{3n-1}=\frac{2n}{3(3n-1)}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{n-1}{3(3n-1)}+\dfrac{2n}{3(3n-1)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

解説 取り出す順番に関係なく，カードが 1 である確率は $\dfrac{1}{3}$

(2) 異なる数字の組み合わせは，${}_3\mathrm{C}_2$(通り) であるから

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2 \times n^2}{{}_{3n}\mathrm{C}_2} = 3n^2 \times \frac{2}{3n(3n-1)} = \boldsymbol{\frac{2n}{3n-1}}$$

(3) 3 枚のカードの組み合わせは，次の 6 通り．

$$\{1,1,2\},\ \{1,1,3\},\ \{2,2,1\},\ \{2,2,3\},\ \{3,3,1\},\ \{3,3,2\}$$

よって，求める確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times {}_n\mathrm{C}_1}{{}_{3n}\mathrm{C}_3} \times 6 = \frac{n(n-1)}{2} \times n \times \frac{6}{3n(3n-1)(3n-2)} \times 6 = \boldsymbol{\frac{6n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)}}$$

(4) 4 枚のカードの組み合わせは，次の場合に分けて求める．

i) $\{1,1,1,2\},\ \{1,1,1,3\},\ \{2,2,2,1\},$
$\{2,2,2,3\},\ \{3,3,3,1\},\ \{3,3,3,2\}$

ii) $\{1,1,2,2,\},\ \{1,1,3,3,\},\ \{2,2,3,3\}$

i) の場合の確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3 \times {}_n\mathrm{C}_1}{{}_{3n}\mathrm{C}_4} \times 6 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} \times n \times \frac{4!}{3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)} \times 6 = \frac{8n(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

ii) の場合の確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times {}_n\mathrm{C}_2}{{}_{3n}\mathrm{C}_4} \times 3 = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{4!}{3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)} \times 3 = \frac{2n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)}$$

i) と ii) は互いに独立であるから

$$\frac{8n(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} + \frac{2n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)} = \boldsymbol{\frac{2n(7n-11)}{3(3n-1)(3n-2)}}$$

5.38 (1) $a+b=c$ を満たす $a<b$ の組は，次の 6 通り

$c=3$ のとき　$(a,\ b) = (1,\ 2)$

$c=4$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 3)$
$c=5$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 3)$
$c=6$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4)$

このとき，$a>b$ の場合も含めて $6\times 2!$ 通りある．また，d，e，f の並べ方が $3!$ 通りあるので，求める確率は

$$\frac{6\times 2!\times 3!}{6!}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$$

(2) $a+b=c+d$ を満たす $a<b$，$c<d$ の組は，次の 14 通り

$a+b=5$ のとき　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 4,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1,\ 4)$
$a+b=6$ のとき　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 5,\ 2,\ 4),\ (2,\ 4,\ 1,\ 5)$
$a+b=7$ のとき　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 6,\ 2,\ 5),\ (2,\ 5,\ 1,\ 6),$
$(1,\ 6,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 1,\ 6),$
$(2,\ 5,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 2,\ 5)$
$a+b=8$ のとき　$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 6,\ 3,\ 5),\ (3,\ 5,\ 2,\ 6)$
$a+b=9$ のとき　$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 6,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 3,\ 6)$

このとき，$a>b$，$c>d$ の場合も含めて $14\times 2!\times 2!$ 通りある．また，e，f の並べ方が $2!$ 通りあるので，求める確率は

$$\frac{14\times 2!\times 2!\times 2!}{6!}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{45}}$$

5.39 母音を X，子音を Y で表すと，X4 個と Y4 個の並べ方の総数は

$$\frac{8!}{4!4!}=70\ (\text{通り})$$

(1) 両端が Y となるとき，X4 個と Y2 個の並べ方の総数であるから

$$\frac{6!}{4!2!}=15\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　$\dfrac{15}{70}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{14}}$

(2) (1) における X と Y を入れ替えたものであるから，求める確率は

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{14}}$$

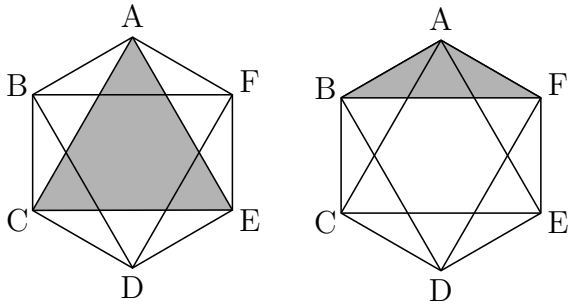
(3) 母音と子音が交互に並ぶのは，次の 2 通りである

XYXYXYXY,　YXYXYXYX

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{70}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{35}}$

5.40 三角形の総数は　${}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ (個)

正三角形が 2 個，正三角形でない二等辺三角形 6 個



よって，求める確率は　$\dfrac{20-(2+6)}{20} = \dfrac{12}{20} = \boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

5.41　(1) A，B，C の 3 人が東公園，西公園，北公園に行く確率は，次のようになる．

	東	西	北
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

A と B が東公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$

A と B が西公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

(2) B と C が東公園に行く確率は　$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$

B と C が西公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$

B と C が北公園に行く確率は　$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8} = \boldsymbol{\dfrac{5}{16}}$

(3) 3 人が東公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{32}$

3 人が西公園に行く確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{16} = \boldsymbol{\dfrac{3}{32}}$

(4) A，B，C の 3 人が異なる公園に行くのは，次の場合である．

東　西　北
A　B　C $\cdots \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
A　C　B $\cdots \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$
B　A　C $\cdots \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$
C　A　B $\cdots \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$

ゆえに，A，B，C の 3 人が異なる公園に行く確率は　$\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{1}{4}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$

5.42 (1) 番号 1 の景品をもらえない確率は　$\left(\frac{n-1}{n}\right)^m$

求めるのはこの余事象の確率であるから　$\boldsymbol{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^m}$

(2) 全種類の景品がそろう確率は　$\frac{n!}{n^n}$

求めるのはこの余事象の確率であるから　$\boldsymbol{1-\frac{n!}{n^n}}$

(3) $n+1$ 個購入したとき，景品のもらい方の総数は　n^{n+1} (通り)

1 種類だけ景品を 2 個もらうので，その総数は　$n\times\frac{(n+1)!}{2!}$ (通り)

よって，求める確率は　$\frac{n\times\frac{(n+1)!}{2!}}{n^{n+1}}=\boldsymbol{\frac{(n+1)!}{2n^n}}$

解説 クーポン・コレクター問題 (鹿児島大学 2012) 7

5.43 (1) 1 投目に出た目が i，2 投目に出た目が j である場合を $(i,\ j)$ と表す．2 投目でゴールするのは，$(4,\ 6)$，$(5,\ 5)$，$(6,\ 4)$ の 3 通り．よって，その確率は

$$\frac{3}{6^2}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

(2) 1 投目に出た目と 2 投目に出た目の和が 9 または 11 である．
出た目の和が 9 となるのは，$(3,\ 6)$ $(4,\ 5)$，$(5,\ 4)$，$(6,\ 3)$ の 4 通り．
出た目の和が 11 となるのは，$(5,\ 6)$，$(6,\ 5)$ の 2 通り．
よって，求める確率は　$\frac{4+2}{6^2}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(3) 3 投の目の和が 10 となる組合せは次のとおりである．

$$\{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 2,\ 6\},\ \{2,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 4,\ 4\},\ \{3,\ 3,\ 4\}$$

これらの場合の総数は　$3!\times 3+\dfrac{3!}{2!}\times 3=27$ (通り)

また，最初の 2 投の和が 11 または 12 となるのが，それぞれ 2 通り，1 通りであるから，求める確率は

$$\frac{27+2+1}{6^3}=\frac{30}{6^3}=\boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

(4) A，B がともに 2 投目でゴールしない確率であるから，(1) の結果から

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)^2=\boldsymbol{\frac{121}{144}}$$

(5) (i) $k\geqq 4$ のとき，B が勝つのは，B が 1 投でゴールするか，A が 2 投目でゴールできず B が 2 投目でゴールする場合である．このとき B が 1 投目でゴールする確率 $\dfrac{1}{6}$ が A が 2 投目でゴールする確率より大きいので，A の勝つ確率より B の勝つ確率より大きい．

(ii) $k=3$ のとき，B が勝つ確率は (A が 2 回でゴールできず，B が 2 回でゴールするときで，B の目の和は 7 で 6 通りある)

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)\times\frac{6}{6^2}=\frac{11}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}\times\frac{11}{6}>\frac{1}{12}$$

(iii) $k=2$ のとき，B が勝つ確率は

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)\times\frac{5}{6^2}=\frac{11}{12}\times\frac{5}{36}=\frac{1}{12}\times\frac{55}{36}>\frac{1}{12}$$

(iv) $k=1$ のとき，B が勝つ確率は

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)\times\frac{4}{6^2}=\frac{11}{12}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{12}\times\frac{11}{9}>\frac{1}{12}$$

よって，求める k の値の範囲は　　$\boldsymbol{1\leqq k\leqq 9}$

5.44 質問に対して A 社製ロボットが正しい答え，間違った答えを返す確率をそれぞれ a, $\overline{a}$ とし，同様に B 社製ロボットが正しい答え，間違った答えを返す確率をそれぞれ b, $\overline{b}$ とする $\left(a=\frac{8}{10},\ \overline{a}=\frac{2}{10},\ b=\frac{1}{10},\ \overline{b}=\frac{9}{10}\right)$.

(1) 案内役ロボットが A 社製，B 社製である確率は，ともに　$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

案内役ロボットが「はい」と答える確率は

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\overline{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{10}+\frac{9}{10}\right)=\boldsymbol{\frac{17}{20}}$$

(2) 案内役ロボットが「はい」と答えたとき，ロボットがA社製である確率は

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\overline{b}}=\frac{a}{a+\overline{b}}=\frac{\frac{8}{10}}{\frac{8}{10}+\frac{9}{10}}=\boldsymbol{\frac{8}{17}}$$

(3) 案内役ロボットがどちらか，指した道がどちらであるかにより，次の4つの場合がある．

(i) A社製ロボットにA社への道を指した
(ii) B社製ロボットにA社への道を指した
(iii) A社製ロボットにB社への道を指した
(iv) B社製ロボットにB社への道を指した

これらの確率は，すべて $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

したがって，案内ロボットが「はい」と答える確率は

(i) のとき $\frac{1}{4}a$，(ii) のとき $\frac{1}{4}\overline{b}$，(iii) のとき $\frac{1}{4}\overline{a}$，(iv) のとき $\frac{1}{4}b$

よって，指した道がA社へ続く道である確率は

$$\frac{\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\overline{b}}{\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\overline{b}+\frac{1}{4}\overline{a}+\frac{1}{4}b}=\frac{a+\overline{b}}{(a+\overline{a})+(b+\overline{b})}=\frac{\frac{8}{10}+\frac{9}{10}}{1+1}=\boldsymbol{\frac{17}{20}}$$

(4) 前問と同様に，(2)，(3) どちらの質問に対しても「はい」と答える確率は

(i) のとき $\frac{1}{4}a^2$，(ii) のとき $\frac{1}{4}\overline{b}^2$，(iii) のとき $\frac{1}{4}a\overline{a}$，(iv) のとき $\frac{1}{4}\overline{b}b$

よって，指した道がA社へ続く道である確率は

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}\overline{b}^2}{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}\overline{b}^2+\frac{1}{4}a\overline{a}+\frac{1}{4}\overline{b}b}&=\frac{a^2+\overline{b}^2}{a(a+\overline{a})+\overline{b}(b+\overline{b})}=\frac{a^2+\overline{b}^2}{a+\overline{b}}\\&=\frac{\left(\frac{8}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\frac{8}{10}+\frac{9}{10}}=\frac{8^2+9^2}{10(8+9)}=\boldsymbol{\frac{29}{34}}\end{aligned}$$

(5) 案内役ロボットとあとから来たロボットの組合せとその確率は，次のようになる．

① 案内役がA社製，後からきたのもA社製のとき $\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$
② 案内役がA社製，後からきたのがB社製のとき $\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$
③ 案内役がB社製，後からきたのもA社製のとき $\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

④ 案内役がB社製，後からきたのがB社製のとき　$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$

案内役ロボットは「はい」，あとから来たロボットが「いいえ」と答える確率は

①のとき $\dfrac{1}{5}a\overline{a}$，　②のとき $\dfrac{3}{10}\overline{a}b$，　③のとき $\dfrac{3}{10}\overline{b}a$，　④のとき $\dfrac{1}{5}b\overline{b}$

したがって，2体ともA社製のロボットである確率は

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{5}a\overline{a}}{\frac{1}{5}a\overline{a}+\frac{3}{10}\overline{a}b+\frac{3}{10}\overline{b}a+\frac{1}{5}b\overline{b}}&=\frac{2a\overline{a}}{2a\overline{a}+3\overline{a}b+3\overline{b}a+2b\overline{b}}\\&=\frac{2\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{10}}{2\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}+2\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}\\&=\frac{2\cdot8\cdot2}{2\cdot8\cdot2+3\cdot2\cdot1+3\cdot9\cdot8+2\cdot1\cdot9}\\&=\frac{32}{272}=\boldsymbol{\frac{2}{17}}\end{aligned}$$

5.45　(1)　$P_{10}=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_6}=\dfrac{20\times4}{210}=\boldsymbol{\dfrac{8}{21}}$

(2)　$P_n=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_{n-6}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_6}$，　$P_{n+1}=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6}$ より

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}}{P_n}&=\frac{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6}\times\frac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_{n-6}\mathrm{C}_3}\\&=\frac{{}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n-6}\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6}\\&=\frac{n-5}{n-8}\times\frac{n-5}{n+1}=\boldsymbol{\frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)}}\end{aligned}$$

(3)　(2)の結果から

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}-1=\frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)}-1=\frac{3(11-n)}{(n+1)(n-8)}$$

したがって　$P_9<P_{10}<P_{11}=P_{12}>P_{13}>P_{14}>\cdots$

よって，P_n が最大となる n の値は　$\boldsymbol{n=11,\ 12}$

5.46　(1)　30枚から4枚取る取り出し方の総数は　${}_{30}\mathrm{C}_4$　(通り)

2枚だけ同じ番号の取り出し方は　${}_{10}\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2$　(通り)

残り2枚の相異なる番号の取り出し方は　${}_9\mathrm{C}_2\cdot3^2$　(通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2\times{}_9\mathrm{C}_2\cdot3^2}{{}_{30}\mathrm{C}_4}=\boldsymbol{\dfrac{72}{203}}$

(2)(ア) 30 枚から k 枚取る取り出し方の総数は　$_{30}\mathrm{C}_k$　(通り)
2 枚だけ同じ番号の取り出し方は　$_{10}\mathrm{C}_1{\cdot}_3\mathrm{C}_2$　(通り)
残り $k-2$ 枚の相異なる番号の取り出し方は　$_9\mathrm{C}_{k-2}{\cdot}3^{k-2}$　(通り)

したがって　$P(k)=\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_1{\cdot}_3\mathrm{C}_2\times{}_9\mathrm{C}_{k-2}{\cdot}3^{k-2}}{{}_{30}\mathrm{C}_k}$

$$\begin{aligned}\frac{P(k+1)}{P(k)}&=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_1{\cdot}_3\mathrm{C}_2\times{}_9\mathrm{C}_{k-1}{\cdot}3^{k-1}}{{}_{30}\mathrm{C}_{k+1}}\times\frac{{}_{30}\mathrm{C}_k}{{}_{10}\mathrm{C}_1{\cdot}_3\mathrm{C}_2\times{}_9\mathrm{C}_{k-2}{\cdot}3^{k-2}}\\&=3\times\frac{{}_9\mathrm{C}_{k-1}}{{}_9\mathrm{C}_{k-2}}\times\frac{{}_{30}\mathrm{C}_k}{{}_{30}\mathrm{C}_{k+1}}\\&=3\times\frac{9!}{(k-1)!(10-k)!}\cdot\frac{(k-2)!(11-k)!}{9!}\\&\qquad\times\frac{30!}{k!(30-k)!}\cdot\frac{(k+1)!(29-k)!}{30!}\\&=3\times\frac{11-k}{k-1}\times\frac{k+1}{30-k}\\&=\boldsymbol{\frac{3(k+1)(11-k)}{(k-1)(30-k)}}\quad(4\leqq k\leqq 9)\end{aligned}$$

(イ) (ア) の結果から

$$\frac{P(k+1)}{P(k)}-1=\frac{3(k+1)(11-k)}{(k-1)(30-k)}-1=\frac{63-k(2k+1)}{(k-1)(30-k)}$$

したがって　$4\leqq k\leqq 5$ のとき　$\dfrac{P(k+1)}{P(k)}>1$

$6\leqq k\leqq 9$ のとき　$\dfrac{P(k+1)}{P(k)}<1$

よって，$P(k)$ を最大にする k の値は　$\boldsymbol{k=6}$

5.47 (1) $\dfrac{{}_{24}\mathrm{C}_2}{{}_{25}\mathrm{C}_3}=\boldsymbol{\dfrac{3}{25}}$

(2) $\boldsymbol{q_k={}_{32}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{3}{25}\right)^k\left(\dfrac{22}{25}\right)^{32-k}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{q_k}{q_{k-1}}&=\frac{{}_{32}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{3}{25}\right)^k\left(\dfrac{22}{25}\right)^{32-k}}{{}_{32}\mathrm{C}_{k-1}\left(\dfrac{3}{25}\right)^{k-1}\left(\dfrac{22}{25}\right)^{33-k}}=\frac{{}_{32}\mathrm{C}_k{\cdot}\dfrac{3}{25}}{{}_{32}\mathrm{C}_{k-1}{\cdot}\dfrac{22}{25}}\\&=\frac{32!}{k!(32-k)!}\times\frac{(k-1)!(33-k)!}{32!}\times\frac{3}{22}=\boldsymbol{\frac{3(33-k)}{22k}}\end{aligned}$$

(4) (2) の結果から

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} - 1 = \frac{3(33-k)}{22k} - 1 = \frac{99-25k}{22k}$$

$1 \leqq k \leqq 3$ のとき　$\dfrac{q_k}{q_{k-1}} - 1 > 0$　すなわち　$q_{k-1} < q_k$

$4 \leqq k \leqq 32$ のとき　$\dfrac{q_k}{q_{k-1}} - 1 < 0$　すなわち　$q_{k-1} > q_k$

したがって　$q_1 < q_2 < q_3 > q_4 > q_5 > \cdots > q_{32}$

よって　$\boldsymbol{k = 3}$ のとき最大

5.48 (1) $P_1 = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_5}{{}_{10+r}\mathrm{C}_9}$，$P_2 = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot {}_{11}\mathrm{C}_5}{{}_{11+r}\mathrm{C}_9}$　であるから

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{{}_{10+r}\mathrm{C}_9}{{}_{11+r}\mathrm{C}_9} \times \frac{{}_{11}\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{2+r}{11+r} \times \frac{11}{6} = \frac{11r+22}{6r+66}$$

したがって　$\dfrac{P_2}{P_1} - 1 = \dfrac{5r-44}{6r+66}$

$r > 9$ であるから　$\dfrac{P_2}{P_1} - 1 > 0$　よって　$P_2 > P_1$

(2) $P_n = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot {}_{n+9}\mathrm{C}_5}{{}_{n+r+9}\mathrm{C}_9}$，$P_2 = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot {}_{n+10}\mathrm{C}_5}{{}_{n+r+10}\mathrm{C}_9}$　であるから

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{{}_{n+r+9}\mathrm{C}_9}{{}_{n+r+10}\mathrm{C}_9} \times \frac{{}_{n+10}\mathrm{C}_5}{{}_{n+9}\mathrm{C}_5} \\ &= \frac{n+r+1}{n+r+10} \times \frac{n+10}{n+5} = \frac{n^2+(r+11)n+10r+10}{n^2+(r+15)n+5r+50}\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n} - 1 = \dfrac{-4n+5r-40}{n^2+(r+15)n+5r+50}$

$P_{n+1} > P_n$ が成り立つとき

$$-4n+5r-40 > 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{n < \frac{5}{4}r - 10}$$

(3) $r = 50$ のとき，(2) の結果から

$$n < \frac{5}{4} \cdot 50 - 10 \quad \text{これをみたす最大の } n \text{ は} \quad 52$$

したがって　$P_1 < P_2 < \cdots < P_{52} < P_{53} > P_{54} > \cdots$

よって，P_n が最大となる n は　$\boldsymbol{n = 53}$

5.49 (1) 得点が 8 点になるのは，次の (i)，(ii) である．

(i) 「8」のカードが表で，他の 8 枚のカードはすべて裏

(ii) 「2」,「4」のカードが表で，他の 7 枚のカードはすべて裏

よって，求める確率は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{2^8}=\boldsymbol{\frac{1}{256}}$$

(2) 得点が奇数になるのは，偶数のカード「2」,「4」,「6」,「8」,「10」の 5 枚のカードすべてが裏になる確率であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{1}{32}=\boldsymbol{\frac{31}{32}}$$

(3) 得点が,「8」の倍数になる確率を，次の (i)〜(iii) の場合に分けて求める．

(i) 「8」が表であるとき

$$\frac{1}{2}$$

(ii) 「8」が裏で,「4」が表であるとき，
「2」「6」「10」の少なくとも 1 枚は表であるから

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}=\frac{7}{32}$$

(iii) 「8」,「4」が裏であるとき，
「2」,「6」,「10」の 3 枚がすべて表であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

(i)〜(iii) は，互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{7}{32}+\frac{1}{32}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

(4) 奇数のカードを取り除いても元の確率に等しいから，取り除いたカードは,「2」,「4」,「6」,「8」,「10」のいずれかである．

(i) 「2」,「6」,「10」のいずれか 1 枚を取り除いたとき，8 の倍数になる確率は，(3) と同様にして

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{11}{16}$$

(ii) 「4」を取り除いたとき，8 の倍数になる確率は，(3) と同様にして

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{16}$$

(iii) 「4」を取り除いたとき，8 の倍数になる確率は，(3) と同様にして

$$\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$$

よって，取り除いたカードの表に書かれている数は「**4**」

5.50 (1) 3 人のうち，2 人または 3 人が賛成する確率であるから

$$T_3={}_3\mathrm{C}_2p^2(1-p)+p^3=\boldsymbol{3p^2-2p^3}$$

(2) (1) の結果および $H_2=2p-p^2$ から

$$\begin{aligned}H_2-T_3&=(2p-p^2)-(3p^2-2p^3)\\&=2p^3-4p^2+2p\\&=2p(p-1)^2\geqq 0\end{aligned}$$

よって　　$H_2\geqq T_3$

(3) $f(p)=H_2-T_3$ とおくと　$f(p)=2p^3-4p^2+2p$

ゆえに　　$f'(p)=6p^2-8p+2=2(3p-1)(p-1)$

$0\leqq p\leqq 1$ における $f(p)$ の増減表は次のようになる．

p	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		↗	極大	↘	

よって，H_2-T_3 が最大になるとき　　$\boldsymbol{p=\frac{1}{3}}$

(4) $$T_{3n}=\sum_{k=2n}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3n-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\sum_{k=2n}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k$$

上式に $n=1,\ 2,\ 3$ をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}
T_3&=\left(\frac{1}{2}\right)^3\sum_{k=2}^{3}{}_3\mathrm{C}_k=\frac{1}{8}\left({}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_3\right)\\
&=\frac{3+1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{128}{256},\\
T_6&=\left(\frac{1}{2}\right)^6\sum_{k=4}^{6}{}_6\mathrm{C}_k=\frac{1}{64}\left({}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_5+{}_6\mathrm{C}_6\right)\\
&=\frac{15+6+1}{64}=\frac{22}{64}=\frac{88}{256},\\
T_9&=\left(\frac{1}{2}\right)^9\sum_{k=6}^{9}{}_9\mathrm{C}_k=\frac{1}{512}\left({}_9\mathrm{C}_6+{}_9\mathrm{C}_7+{}_9\mathrm{C}_8+{}_9\mathrm{C}_9\right)\\
&=\frac{84+36+9+1}{512}=\frac{65}{256}
\end{aligned}$$

よって　$T_3\geqq T_6\geqq T_9$

(5) $$\begin{aligned}
H_{2k+1}&=\sum_{j=k+1}^{2k+1}{}_{2k+1}\mathrm{C}_j\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2k+1-j}\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\sum_{j=k+1}^{2k+1}{}_{2k+1}\mathrm{C}_j\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}\sum_{j=k+1}^{2k+1}\left(2\times{}_{2k+1}\mathrm{C}_j\right)\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}\sum_{j=k+1}^{2k+1}\left({}_{2k+1}\mathrm{C}_j+{}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k+1-j}\right)\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}\sum_{j=0}^{2k+1}{}_{2k+1}\mathrm{C}_j\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}\times 2^{2k+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

5.51　(1) 1，2，3 の目が 3 回，4，5 の目が 2 回出る確率であるから

$$\frac{5!}{3!2!}\left(\frac{3}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^2=\boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

(2) 1，2，3 の目が 2 回，4，5 の目が 2 回，6 の目が 1 回出る確率であるから

$$\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$$

(3) $p_k(m,\ k-m-1)$ は，1，2，3 の目が m 回，4，5 の目が $k-m-1$ 回，6 の目が 1 回出る確率であるから

$$\begin{aligned}p_k(m,\ k-m-1)&=\frac{k!}{m!(k-m-1)!1!}\left(\frac{3}{6}\right)^m\left(\frac{2}{6}\right)^{k-m-1}\frac{1}{6}\\&=\frac{k}{6}\cdot\frac{(k-1)!}{m!(k-m-1)!}\left(\frac{3}{6}\right)^m\left(\frac{2}{6}\right)^{k-m-1}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{k-1}p_k(m,\ k-m-1)&=\frac{k}{6}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{m!(k-m-1)!}\left(\frac{3}{6}\right)^m\left(\frac{2}{6}\right)^{k-m-1}\\&=\frac{k}{6}\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)^{k-1}=\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{6}}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)^{\boldsymbol{k-1}}\end{aligned}$$

5.52 (1) $y=px^2$，$y=qx+1$ から y を消去すると

$$px^2-qx-1=0\quad\cdots①$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-q)^2-4\cdot p\cdot(-1)=q^2+4p$$

$p>0$ より $D>0$ となり，2 次方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつ．その解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{q}{p},\quad\alpha\beta=-\frac{1}{p}$$

$p>0$ より $\alpha\beta<0$ であるから，A，B の x 座標はそれぞれ α，β となる．線分 AB の中点の y 座標は，上の第 1 式から

$$q\times\frac{\alpha+\beta}{2}+1=q\times\frac{q}{2p}+1=\frac{q^2}{2p}+1$$

これが 2 より小さいので

$$\frac{q^2}{2p}+1<2\quad\text{すなわち}\quad\frac{q^2}{2}<p\leqq 6$$

上式より，$q \leqq 3$ であるから

$$\begin{aligned} q=1 \text{ のとき} \quad & 1 \leqq p \leqq 6 \quad \text{の } 6 \text{ 通り} \\ q=2 \text{ のとき} \quad & 3 \leqq p \leqq 6 \quad \text{の } 4 \text{ 通り} \\ q=3 \text{ のとき} \quad & 5 \leqq p \leqq 6 \quad \text{の } 2 \text{ 通り} \end{aligned}$$

よって，求める確率は $\dfrac{6+4+2}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2) A の x 座標 α は 2 次方程式 ① の負の解であるから

$$\alpha = \frac{q - \sqrt{q^2+4p}}{2p} \quad \cdots ②$$

これが有理数となるは，q^2+4p が平方数のときである．

q^2+4p の値は次のようなる．

q \ p	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	5	9	13	17	21	25
2	8	12	16	20	24	28
3	13	17	21	25	29	33
4	20	24	28	32	36	40
5	29	33	37	41	45	49
6	40	44	48	52	56	60

したがって条件をみたす $(p,\ q)$ の組は，次の 6 組である．

$$(p,\ q) = (2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 1),\ (6,\ 5)$$

よって，求める確率は $\dfrac{6}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) $\mathrm{A}(\alpha,\ q\alpha+1)$ および ② から，直線 AO の傾きは

$$\frac{q\alpha+1}{\alpha} = q + \frac{1}{\alpha} = q + \frac{2p}{q-\sqrt{q^2+4p}} = \frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}$$

A，B を通る直線の方程式から，直線 AB の傾きは　q

直線 AO および直線 AB の方向ベクトルをそれぞれ

$$\vec{u} = \left(1,\ \frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}\right),\ \vec{v} = (1,\ q)$$

とおくと，$\angle\mathrm{OAB}$ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角である．$\angle\mathrm{OAB}$ が 90° より大きくなるとき，$\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ であるから

$$1\cdot 1+\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}\cdot q<0$$

ゆえに　　$2+q^2<q\sqrt{q^2+4p}$

上式の両辺がともに正であることに注意して，両辺を平方して整理すると

$$p>1+\frac{1}{q^2}$$

したがって　$q=1$ のとき　　$3\leqq p\leqq 6$　の 4 通り

$2\leqq q\leqq 6$ のとき　$2\leqq p\leqq 6$　の 5 通り

よって，求める確率は　　$\dfrac{4+5\times 5}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{29}{36}}$

5.53　(1) 2 次不等式 $x^2+ax+b>0$ の係数について，$D=a^2-4b$ とおくと，P が実数全体となるのは，$D<0$ のときであるから

$$a^2-4b<0\quad \text{すなわち}\quad \frac{a^2}{4}<b\leqq 6$$

上式より，$a\leqq 4$ であるから

$a=1$ のとき　$1\leqq b\leqq 6$　の 6 通り

$a=2$ のとき　$2\leqq b\leqq 6$　の 5 通り

$a=3$ のとき　$3\leqq b\leqq 6$　の 4 通り

$a=4$ のとき　$5\leqq b\leqq 6$　の 2 通り

よって，求める確率は　　$\dfrac{6+5+4+2}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{17}{36}}$

(2) Q は　$x\geqq -\dfrac{a}{5}$

$Q\subset P$ となる事象の個数について D の符号により場合分けを行う．

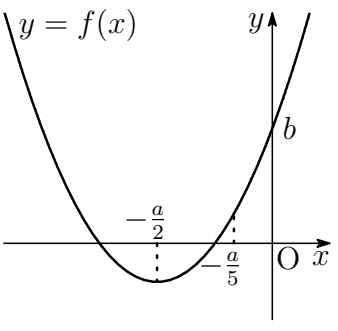
［1］$D<0$ のとき，$Q\subset P$ が成り立ち，(1) の結果により 17 通り

［2］$D\geqq 0$ のとき，$f(x)=x^2+ax+b$ とおくと

$$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

$a>0$ から　　$-\dfrac{a}{2}<-\dfrac{a}{5}$

$y=f(x)$ のグラフから，$f\left(-\frac{a}{5}\right)>0$ を満たせばよいから



$$b-\frac{4a^2}{25}>0$$

$a^2-4b\geqq 0$ に注意して　　$\dfrac{4a^2}{25}<b\leqq \dfrac{a^2}{4}$

これをみたす $(a,\ b)$ の組は，次の 7 通り

$$(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 6)$$

［1］，［2］より，求める確率は　$\dfrac{17+7}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

別解　Q は　$x \geqq -\dfrac{a}{5}$

$Q \subset P$ となる事象の個数について D の符号により場合分けを行う．

［1］$D<0$ のとき，$Q \subset P$ が成り立ち，(1) の結果により 17 通り

［2］$D \geqq 0$ のとき，P は

$$x < \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\ \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} < x$$

$Q \subset P$ となるための条件は

$$\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} < -\frac{a}{5} \quad \text{すなわち} \quad 5\sqrt{a^2-4b} < 3a$$

両辺を平方して整理すると　$4a^2-25b<0$

$a^2-4b \geqq 0$ に注意して　$\dfrac{4a^2}{25} < b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

これをみたす $(a,\ b)$ の組は，次の 7 通り

$$(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 6)$$

［1］，［2］より，求める確率は　$\dfrac{17+7}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

5.54　(1) 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は

$$b^2-4ac>0 \quad \text{ゆえに} \quad ac < \frac{b^2}{4}$$

$\dfrac{b^2}{4} \leqq \dfrac{6^2}{4}=9$ であるから　$ac < \dfrac{b^2}{4} \leqq 9$　すなわち　$ac \leqq 8$

したがって，ac のとりうる値は　$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8$

よって，ac の値とその組 $(a,\ c)$ の個数は次のとおりである．

$ac=1$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 1)$ の **1 通り**

$ac=2$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の **2 通り**

$ac=3$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ の **2 通り**

$ac=4$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ の **3 通り**

$ac=5$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)$ の **2 通り**

$ac=6$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$ の **4 通り**

$ac=8$ のとき　$(a,\ c)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)$ の **2 通り**

(2) (1) の場合において，$D=b^2-4ac$ が平方数となる b の個数を調べる．

$ac=1$ のとき　$D=b^2-4$ より　b の値はなし
$ac=2$ のとき　$D=b^2-8$ より　$b=3$ の 1 通り
$ac=3$ のとき　$D=b^2-12$ より　$b=4$ の 1 通り
$ac=4$ のとき　$D=b^2-16$ より　$b=5$ の 1 通り
$ac=5$ のとき　$D=b^2-20$ より　$b=6$ の 1 通り
$ac=6$ のとき　$D=b^2-24$ より　$b=5$ の 1 通り
$ac=8$ のとき　$D=b^2-32$ より　$b=6$ の 1 通り

よって，求める確率は，(1) の結果に注意して

$$\frac{2\cdot1+2\cdot1+3\cdot1+2\cdot1+4\cdot1+2\cdot1}{6^3}=\frac{15}{6^3}=\boldsymbol{\frac{5}{72}}$$

5.55 (1) (a) 1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{216}}$$

(b) 1 または 2 の目が出る確率から 1 だけまたは 2 だけが出る場合の確率を引けばよいから

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3-2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{36}}$$

(c) 1，2，3 の目が 1 個ずつ出る確率は

$$\frac{3!}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{36}}$$

(2) i) $k=0$ のとき，3 個とも m であるから $(1\leqq m\leqq 6)$，(1)-(a) より

$$p_0=\frac{1}{216}\times 6=\boldsymbol{\frac{1}{36}}$$

ii) $k=1$ のとき，m または $m+1$ である確率であるから $(1\leqq m\leqq 5)$，(1)-(b) より

$$p_1=\frac{1}{36}\times 5=\boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

iii) $2\leqq k\leqq 5$ のとき
m，$m+k$ の 2 種類の目である確率は $(1\leqq m\leqq 6-k)$，(1)-b より

$$\frac{1}{36}(6-k)$$

m，$m+k$，$m+i$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ の 3 種類である確率は $(1 \leqq m \leqq 6-k)$，(1)-c より

$$\frac{1}{36}(k-1)(6-k)$$

したがって　　$p_k = \dfrac{1}{36}(6-k) + \dfrac{1}{36}(k-1)(6-k) = \dfrac{1}{36}k(6-k)$

よって　　$\boldsymbol{p_2 = \dfrac{2}{9}}$，$\boldsymbol{p_3 = \dfrac{1}{4}}$，$\boldsymbol{p_4 = \dfrac{2}{9}}$，$\boldsymbol{p_5 = \dfrac{5}{36}}$

5.56　(1) 求める確率は，2 回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2) 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

(3) 偶数回目の操作で青玉の個数は 1 個または 3 個であるから，2 回目の操作で青玉が 1 個である確率を p とすると，(1) の結果から

$$p = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p) = p^3(1-p) = \left(\frac{7}{9}\right)^3 \frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{686}{6561}}$$

(4) 青玉 3 個の状態から，2 回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$(1-p)qpp = p^2(1-p)q$$

4 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$p(1-p)qp = p^2(1-p)q$$

6 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$pp(1-p)q = p^2(1-p)q$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} 3\times p^2(1-p)q+p^3(1-p) &= 2p^2(1-p)+p^3(1-p) \\ &= p^2(1-p)(2+p) \\ &= \left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{25}{9}=\boldsymbol{\frac{2450}{6561}} \end{aligned}$$

5.57 (1) 3 回繰り返して手元のカードが 3 以下である確率は，3 回とも 4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

よって，3 回繰り返して手元のカードが 4 である確率は

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\boldsymbol{\frac{37}{64}}$$

同様に，n 回繰り返して手元のカードが 3 以下である確率は，n 回とも 4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \cdots ①$$

よって，n 回繰り返して手元のカードが 4 である確率は

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n=\boldsymbol{\frac{4^n-3^n}{4^n}}$$

(2) 3 回繰り返して手元のカードが 2 以下である確率は，3 回とも 3,4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{2}{4}\right)^3$$

3 回繰り返して手元のカードが 1 である確率は，3 回とも 2,3,4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ゆえに，3 回繰り返して手元のカードが 2 である確率は

$$\left(\frac{2}{4}\right)^3-\left(\frac{1}{4}\right)^3=\boldsymbol{\frac{7}{64}}$$

同様に，n 回繰り返して手元のカードが 2 以下である確率は，n 回とも 3,4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{2}{4}\right)^n \quad \cdots ②$$

n 回繰り返して手元のカードが 1 である確率は，n 回とも 2,3,4 以外の確率であるから

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，n 回繰り返して手元のカードが 2 である確率は

$$\left(\frac{2}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\boldsymbol{2^n - 1}}{\boldsymbol{4^n}}$$

(3) n 回繰り返して手元のカードが 3 である確率は，①，② より

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{2}{4}\right)^n = \frac{\boldsymbol{3^n - 2^n}}{\boldsymbol{4^n}}$$

5.58 (1) a，b，c の文字が書かれた球を取り出した個数をそれぞれ k_a，k_b，k_c とすると，y 軸上で点 P の移動が終了する場合，$k_a = k_b$，$k_a + k_b + k_c = 5$ より

$$\begin{aligned} &k_a = k_b = 0 \text{ のとき} \qquad k_c = 5 \\ &k_a = k_b = 1 \text{ のとき} \qquad k_c = 3 \\ &k_a = k_b = 2 \text{ のとき} \qquad k_c = 1 \end{aligned}$$

よって，求める点 P の座標は　　$\boldsymbol{(0,\ 5),\ (0,\ 3),\ (0,\ 1)}$

(2) 点 P の移動が終了する位置の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = k_a - k_b, \quad y = 5 - (k_a + k_b) \quad (0 \leqq k_a + k_b \leqq 5)$$

ここで，$j = k_a$，$k = k_a + k_b$ とおくと $(0 \leqq j \leqq k,\ 0 \leqq k \leqq 5)$，
$k_b = k - j$ であるから

$$x = j - (k - j) = 2j - k, \quad y = 5 - k \quad \cdots (*)$$

直線 $y = 5 - k$ 上に，点 $(x,\ y)$ は，$0 \leqq j \leqq k$ の $k + 1$ 個.
よって，求める座標の個数は

$$\sum_{k=0}^{5}(k+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7 = \boldsymbol{21}$$

(3) $1 \leqq y \leqq 2$ より，$k = 3,\ 4$ であるから

$$k = 3 \text{ のとき} \quad x = 2j - 3, \qquad k = 4 \text{ のとき} \quad x = 2j - 4$$

また，$|\,x\,| \leqq 1$ であるから　　$(k,\ j) = (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 2)$

$k_a = j$，$k_b = k - j$，$k_c = 5 - k$ であるから，上の $(k,\ j)$ に対して

$$(k_a,\ k_b,\ k_c) = (1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1)$$

これらの場合の数は　$\dfrac{5!}{1!2!2!} \times 3 = 90$

よって，求める確率は　$\dfrac{90}{3^5} = \boldsymbol{\dfrac{10}{27}}$

5.59 (1) 白玉を 1 度だけ取り出すので，赤玉を m 回 $(m = 0, 1, \cdots, n-1)$ 取り出すとすると，青玉を取り出す回数は $n - m - 1$ であるから，到達点 $(x,\ y)$ は

$$x = m - 1, \quad y = (n - m - 1) - 1 = n - m - 2$$

よって，到達点は　$\boldsymbol{(m - 1,\ n - m - 2)}$　$\boldsymbol{(m = 0, 1, \cdots, n - 1)}$

(2) 赤玉，青玉，白玉を取り出す回数を，それぞれ i，j，k とすると，到達点 $(x,\ y)$ は $(i + j + k = n)$

$$x = i - k, \quad y = j - k$$

このとき，$k = n - i - j$ であるから

$$(*) \begin{cases} x = i - (n - i - j) = 2i + j - n \\ y = j - (n - i - j) = i + 2j - n \end{cases}$$

ここで

$$2i + j - n = 2i' + j' - n, \quad i + 2j - n = i' + 2j' - n$$

とすると

$$2(i - i') + (j - j') = 0, \quad (i - i') + 2(j - j') = 0$$

これを解くと　$(i,\ j) = (i',\ j')$
したがって，$(i,\ j) \neq (i',\ j')$ のとき

$$(2i + j - n,\ i + 2j - n) \neq (2i' + j' - n,\ i' + 2j' - n)$$

このことから，$(i,\ j,\ k)$ の組合せの個数とその到達点の個数は一致する．
よって，求める到達点の個数は，赤玉，青玉，白玉の 3 種類の玉から n 個取り出す重複組合せの総数に一致するので

$${}_3\mathrm{H}_n = {}_{3+n-1}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_2 = \boldsymbol{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

(3) $(*)$ から

$$i=\frac{2x-y}{3}+\frac{n}{3},\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+\frac{n}{3}\quad\cdots(**)$$

$n=3$ のとき，上式より

$$i=\frac{2x-y}{3}+1,\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+1$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k=3-i-j)$

$$(x,\ y,\ i,\ j,\ k)=(-1,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),\ (1,-1,\ 2,\ 0,\ 1)$$

よって，求める確率は

$$P_3=\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{6}+\frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{25}{72}}$$

(4) $n=3N$ のとき，$(**)$ より

$$i=\frac{2x-y}{3}+N,\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+N$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k=3N-i-j)$

$$(x,\ y,\ i,\ j,\ k)=(-1,\ 1,\ N-1,\ N+1,\ N),\ (0,\ 0,\ N,\ N,\ N),$$
$$(1,-1,\ N+1,\ N-1,\ N)$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P_{3N}&=\frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&\quad+\frac{(3N)!}{N!N!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^{N}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&\quad+\frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&=\boldsymbol{\frac{(19N+6)(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^2(N+1)!}}\end{aligned}$$

5.60 (1) 求める確率は

$$\begin{aligned}P(Y\geqq 1)&=1-P(Y=0)\\&=1-\frac{11}{6^2}=\boldsymbol{\frac{25}{36}}\end{aligned}$$

X(和を5で割った余り)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	0
5	1	2	3	4	0	1
6	2	3	4	0	1	2

Y(積を5で割った余り)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	0	1
2	2	4	1	3	0	2
3	3	1	4	2	0	3
4	4	3	2	1	0	4
5	0	0	0	0	0	0
6	1	2	3	4	0	1

(2) $X=2$，$Y=2$ となる事象をそれぞれ A，B とすると，上の表から

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ &= \frac{8}{36}+\frac{6}{36}-\frac{2}{36}=\frac{12}{36}=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{2}{36}\div\dfrac{8}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

5.61 (1) $X=0$ となるのは，A が3または6のときで，このとき，$Y=0$ となるのは，B も3または6のときである．よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{16}}$$

(2) $X+Y=3$ となるのは，次の場合である．

(i) $X=1$，$Y=2$ のとき，
A が1または4，B も1または4で，その確率は

$$P(X=1,\ Y=2)=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{16}$$

(ii) $X=2$，$Y=1$ のとき，
A が2または5，B も2または5で，その確率は

$$P(X=2,\ Y=1)=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(i)，(ii) は，互いに排反であるから，求める確率は

$$P(X+Y=3)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(3) (2) の結果から，求める確率は

$$\frac{P(X=1,\ Y=2)}{P(X+Y=3)}=\frac{1}{16}\div\frac{5}{16}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

5.62 (1) 感染している事象を X，陽性と判定される事象を Y とすると

$$P_X(\overline{Y})=\frac{3}{100},\quad P_{\overline{X}}(Y)=\frac{1}{100},\quad P(Y)=\frac{4}{100}\quad\cdots(*)$$

上の第 1 式および第 2 式から

$$\left.\begin{aligned}P_X(Y)&=1-P_X(\overline{Y})=1-\frac{3}{100}=\frac{97}{100}\\ P_{\overline{X}}(\overline{Y})&=1-P_{\overline{X}}(Y)=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}\end{aligned}\right\}\quad\cdots(**)$$

よって，求める確率 $P_X(Y)$ は　$\boldsymbol{\dfrac{97}{100}}$

(2)
$$\begin{aligned}P(Y)&=P(X\cap Y)+P(\overline{X}\cap Y),\\ P(X\cap Y)&=P(X)P_X(Y),\\ P(\overline{X}\cap Y)&=P(\overline{X})P_{\overline{X}}(Y)=\{1-P(X)\}P_{\overline{X}}(Y)\end{aligned}$$

上の第 2 式，第 3 式を第 1 式に代入すると

$$P(Y)=P(X)P_X(Y)+\{1-P(X)\}P_{\overline{X}}(Y)$$

$(*)$，$(**)$ をこれに代入すると

$$\frac{4}{100}=P(X)\cdot\frac{97}{100}+\{1-P(X)\}\cdot\frac{1}{100}$$

よって，求める確率 $P(X)$ は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$

(3) (1)，(2) の結果により，求める確率は

$$\begin{aligned}P_Y(\overline{X})&=\frac{P(Y\cap\overline{X})}{P(Y)}=\frac{P(Y)-P(Y\cap X)}{P(Y)}=1-\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}\\ &=1-\frac{P(X)}{P(Y)}\cdot\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=1-\frac{P(X)}{P(Y)}\cdot P_X(Y)\\ &=1-\frac{1}{32}\cdot\frac{100}{4}\cdot\frac{97}{100}=\boldsymbol{\frac{31}{128}}\end{aligned}$$

別解
$$\begin{aligned}P_Y(\overline{X})&=\frac{P(Y\cap\overline{X})}{P(Y)}=\frac{P(\overline{X})}{P(Y)}\cdot\frac{P(\overline{X}\cap Y)}{P(\overline{X})}=\frac{1-P(X)}{P(Y)}\cdot P_{\overline{X}}(Y)\\ &=\left(1-\frac{1}{32}\right)\cdot\frac{100}{4}\cdot\frac{1}{100}=\boldsymbol{\frac{31}{128}}\end{aligned}$$

5.63 (1) $P_A=2P_B$，$P_A+P_B=1$ より　$\boldsymbol{P_A=\dfrac{2}{3},\ P_B=\dfrac{1}{3}}$

(2) $P_{AA}=2P_{AB}$，$P_{AA}+P_{AB}=1$ より　$P_{AA}=\dfrac{2}{3}$，$P_{AB}=\dfrac{1}{3}$

$P_{BA}=\dfrac{1}{3}P_{BB}$，$P_{BA}+P_{BB}=1$ より　$P_{BA}=\dfrac{1}{4}$，$P_{BB}=\dfrac{3}{4}$

よって　$\boldsymbol{P_{AA}=\dfrac{2}{3}}$，$\boldsymbol{P_{BB}=\dfrac{3}{4}}$

(3) 3 回で優勝が決まる確率は (AAA と BBB の場合)

$$P_A{\cdot}(P_{AA})^2+P_B{\cdot}(P_{BB})^2=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{8}{27}+\frac{3}{16}$$

4 回で優勝が決まる確率は ($BAAA$ と $ABBB$ の場合)

$$P_B{\cdot}P_{BA}{\cdot}(P_{AA})^2+P_A{\cdot}P_{AB}{\cdot}(P_{BB})^2=\frac{1}{3}{\cdot}\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}{\cdot}\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{27}+\frac{1}{8}$$

よって，4 回以内に優勝が決まる確率は

$$\left(\frac{8}{27}+\frac{3}{16}\right)+\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{3}+\frac{5}{16}=\boldsymbol{\frac{31}{48}}$$

(4) 5 回目に A が優勝する確率は ($ABAAA$ と $BBAAA$ の場合)

$$\begin{aligned}&P_A{\cdot}P_{AB}{\cdot}P_{BA}{\cdot}(P_{AA})^2+P_B{\cdot}P_{BB}{\cdot}P_{BA}{\cdot}(P_{AA})^2\\=&\frac{2}{3}{\cdot}\frac{1}{3}{\cdot}\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}{\cdot}\frac{3}{4}{\cdot}\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{17}{324}\end{aligned}$$

5 回目に B が優勝する確率は ($BABBB$ と $AABBB$ の場合)

$$\begin{aligned}&P_B{\cdot}P_{BA}{\cdot}P_{AB}{\cdot}(P_{BB})^2+P_A{\cdot}P_{AA}{\cdot}P_{AB}{\cdot}(P_{BB})^2\\=&\frac{1}{3}{\cdot}\frac{1}{4}{\cdot}\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{2}{3}{\cdot}\frac{2}{3}{\cdot}\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{19}{192}\end{aligned}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{\dfrac{17}{324}}{\dfrac{17}{324}+\dfrac{19}{192}}=\boldsymbol{\dfrac{272}{785}}$

5.64 (1) 硬貨 A が 3 回続けて表が上の確率であるから　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

(2) それぞれの硬貨は 3 回目の試行の後，表が上である確率が $\dfrac{1}{8}$ であるから，
それぞれの硬貨が 3 回目の試行の後，裏である確率は

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

よって，求める確率は　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\left(\dfrac{7}{8}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{49}{4096}}$

(3) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚の場合の総数は　${}_4\mathrm{C}_2$ (通り)

よって，(2) の結果により　${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^2=\boldsymbol{\frac{147}{2048}}$

(4) 1 枚の硬貨が 2 回連続して表が上である確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

3 枚の硬貨について，2 枚が 2 回連続して表が上で，残りの 1 枚が裏が上の確率であるから

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{9}{64}} $$

(5) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚である確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} $$

これと (4) の結果により　$\frac{1}{4}\times\frac{9}{64}=\boldsymbol{\frac{9}{256}}$

(6) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚で，かつ，3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{128} $$

1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 4 枚で，かつ，3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率は

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{2048} $$

(5) と以上の結果により，求める確率は　$\dfrac{\frac{9}{256}}{\frac{3}{128}+\frac{9}{256}+\frac{27}{2048}}=\boldsymbol{\frac{24}{49}}$

別解　(3)，(5) より　$\frac{9}{256}\div\frac{147}{2048}=\frac{24}{49}$

5.65　a，b，c がそれぞれ不良品である事象をそれぞれ A，B，C とすると

$$ P(A)=p,\ P_{\overline{A}}(B)=q,\ P_A(B)=3q,\ P_{\overline{B}}(C)=r,\ P_B(C)=5r $$

(1)　$P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{1-P(A)}$，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ より

$$ P(\overline{A}\cap B)=\{1-P(A)\}P_{\overline{A}}(B)=(1-p)q $$
$$ P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=p\cdot 3q=3pq $$

ゆえに　$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$
$= 3pq + (1-p)q = (1+2p)q$

よって，求める確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= p + (1+2p)q - 3pq = \boldsymbol{p + q - pq}$$

(2) $P_{\overline{B}}(C) = \dfrac{P(\overline{B} \cap C)}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{B} \cap C)}{1 - P(B)}$，$P_B(C) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(B)}$ より

$$P(\overline{B} \cap C) = \{1 - P(B)\}P_{\overline{B}}(C) = \{1 - (1+2p)q\}r$$
$$P(B \cap C) = P(B)P_B(C) = (1+2p)q \cdot 5r = 5(1+2p)qr$$

よって，求める確率は

$$P(C) = P(\overline{B} \cap C) + P(B \cap C)$$
$$= \{1 - (1+2p)q\}r + 5(1+2p)qr$$
$$= \{1 + 4(1+2p)q\}r = \boldsymbol{(1 + 4q + 8pq)r}$$

(3) (2) の結果から，求める確率は

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{5(1+2p)qr}{(1+4q+8pq)r} = \boldsymbol{\frac{5(1+2p)q}{1+4q+8pq}}$$

5.66 (1) 原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め $-45°$ の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．

$$\frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2} - k$$

であるから，$\dfrac{n+k}{2}$ が整数であればよい．したがって $n+k$ は偶数である．
逆に $n+k$ が偶数，すなわち $n+k = 2m$ をみたす整数 m が存在するとき，折れ線グラフは，右斜め 45° の方向に m 回，右斜め $-45°$ の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む．

また，原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は　${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$

(2) 原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y = k$ と交わる格子点を $\mathrm{A}(a,\ k)$ とする $(0 \leqq a \leqq n-2)$．A と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数，A と格子点 $(n-1,\ k-1)$ を通る数は，直線 $y = k$ に関する対称性によりその数は等しくともに N とおく．また，原

点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数はそれらの和で

$$N+N=2N$$

である．したがって，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数の 2 倍に等しい．

(3) 2 つの事象 A，B を $A: T_9=3$，$B:$ すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i\neq 3$ とすると

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap\overline{B})}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}$$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数は，(1) の結果より　${}_9\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A)=\dfrac{{}_9\mathrm{C}_6}{2^9}$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフで，少なくとも $(1,\ 3)$，$(2,\ 3)$，$\cdots$，$(7,3)$ を通る数は，(2) の結果から，O と $(8,\ 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍であるから，(1) の結果より　$2\times{}_8\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A\cap\overline{B})=\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{2^9}$

よって　　$P_A(B)=1-\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{{}_9\mathrm{C}_6}=1-\dfrac{2\times 8\cdot 7}{2\cdot 1}\times\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 7}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

解説　ランダム・ウォーク (九大 [理]2002) 6

6.1　$$\begin{aligned}a&=100a_1+10a_2+a_3\\&=9(11a_1+a_2)+(a_1+a_2+a_3)\end{aligned}$$

$9(11a_1+a_2)$ は，9 の倍数であるから，3 桁の自然数 a と $a_1+a_2+a_3$ を 9 で割った余りは等しい．

別解　$10\equiv 1,\ \ 10^2\equiv 1\pmod 9$ であるから

$$a=10^2a_1+10a_2+a_3\equiv a_1+a_2+a_3\pmod 9$$

よって，3 桁の自然数 a と $a_1+a_2+a_3$ を 9 で割った余りは等しい．

6.2　$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$

連続する 3 数の積 $(n-1)n(n+1)$ は，2，3 を因数にもつので，

n^3-n は 6 で割り切れる．

6.3 連続する 3 数 $n-1,\ n,\ n+1$ の中には，必ず偶数と 3 の倍数がある．

n が 6 と互いに素であるから，n は偶数でなく，3 の倍数でもない．

したがって，$(n-1)(n+1)$ は偶数であり，かつ 3 の倍数である．

よって　$n^2-1=(n-1)(n+1)$ は 6 で割り切れる．

補足 このとき，n は奇数であるから，$n-1$，$n+1$ はともに偶数である．

実際は，n^2-1 は 12 で割り切れる．

6.4 n を m で割った商を q とすると　$n=mq+7\ \ (m>7)$

したがって　　$(n+13)-mq=20$

上式の左辺が m で割り切れるから，$m>7$ に注意して　$\boldsymbol{m=10,\ 20}$

6.5 2 を因数にもつのは，次の 10 個

$$2=2,\quad 4=2^2,\quad 6=2\cdot3,\quad 8=2^3,\quad 10=2\cdot5,$$
$$12=2^2\cdot3,\quad 14=2\cdot7,\quad 16=2^4,\quad 18=2\cdot3^2,\quad 20=2^2\cdot5$$

よって　　$m=1+2+1+3+1+2+1+4+1+2=\mathbf{18}$

6.6 (1) $a=5$ のとき　　$b_n=n(n^2+5)=n(n^2-1)+6n$
$$=(n-1)n(n+1)+6n$$

連続する 3 整数の積は 6 の倍数であるから，上式より，命題 $(*)$ は真である．

(2) $b_n=n(n^2+a)=n(n^2-1+a+1)=(n-1)n(n+1)+(a+1)n$

$a,\ n$ は自然数であるから

$$b_n=(n-1)n(n+1)+(a+1)n\equiv(a+1)n\pmod 6$$

すべての自然数 n に対して，$b_n\equiv0\pmod 6$ のとき，上式から

$$a+1\equiv0\pmod 6$$

a は自然数であることに注意して

$$a+1=6k\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{a=6k-1}\quad(\boldsymbol{k}\text{ は自然数})$$

6.7 (1) p は 5 以上の素数であるから，p は奇数，すなわち，$p+1$ は偶数．

2 数 $p,\ p+2\ (p\geqq5)$ が素数であるから，p と $p+2$ はともに 3 で割り切れない．このとき，連続する 3 整数 $p,\ p+1,\ p+2$ のうち 1 つが 3 の倍数，すなわち，$p+1$ が 3 の倍数である．ゆえに，$p+1$ は偶数かつ 3 の倍数．

よって，$p+1$ は 6 の倍数である．

補足 $p \geqq 5$ とする双子素数 $(p,\ p+2)$ について，その間の $p+1$ が 6 の倍数になることは，次からも分かる．5 以上の整数を

$$6n-1,\ 6n,\ 6n+1,\ 6n+2,\ 6n+3,\ 6n+4 \quad (n=1,2,\cdots)$$

とおくと，$6n,\ 6n+2=2(3n+1),\ 6n+3=3(2n+1),\ 6n+4=2(3n+2)$ であるから，2 整数

$$(p,\ p+2)=(6n-1,\ 6n+1)$$

が双子素数であるための必要条件である．

よって，$(p,\ p+2)$ が双子素数のとき，$p+1=6n$ は 6 の倍数である．

一般に，5 以上の整数 N について，$N \equiv \pm 1 \pmod 6$ は N が素数であるための必要条件である．エラトステネスの篩(ふるい) (素数判定) で数字を書き並べるとき，1 列に 6 個ずつ数字を並べると，素数の配列が分かりやすい．

双子素数は無数に存在するかという問題，いわゆる「双子素数の予想」や「双子素数の問題」は，いまだに数学上の未解決問題である．無数に存在するだろうと，多くの数論学者が予想している．

(2) すべての位の数字が 1 である k 桁の数 $\overbrace{11\cdots1}^{k\text{ 個}}$ を N とすると

$$N=2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2+1=2^k-1$$

k が素数でない，すなわち，$k=pq$ $(p,q$ は 2 以上の整数$)$ とすると

$$N=2^{pq}-1=(2^p)^q-1=(2^p-1)\{2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\cdots+2^p+1\}$$

このとき，$2^p-1 \geqq 3$，$2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\cdots+2^p+1 \geqq 2^p+1 \geqq 5$

したがって　k が素数でない　$\Longrightarrow$　N は素数ではない

よって　　N が素数　$\Longrightarrow$　k は素数

6.8 (1)
$$\begin{aligned} x^5-x &= x(x^2+1)(x^2-1) \\ &= x\{(x^2-4)+5\}(x^2-1) \\ &= (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+5(x-1)x(x+1) \end{aligned}$$

$(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ は連続する 5 整数の積で 5! の倍数であり，$5(x-1)x(x+1)$ は $5\cdot 3!$ の倍数であるから，x^5-x は 30 の倍数である．

別解 2 項定理により

$$(a+b)^5-a^5-b^5=\sum_{j=1}^{4}{}_5\mathrm{C}_j a^{5-j}b^j$$

${}_5\mathrm{C}_j$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ は 5 の倍数であるから，a，b が整数であるとき，上式は 5 の倍数である．k が整数のとき，$a = k-1$，$b = 1$ とし，数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = k^5 - (k-1)^5 - 1$$

とおく．この数列の初項から第 n 項までの和を求めると

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^5 - n$$

a_k は 5 の倍数であるから，自然数 n について，$n^5 - n$ は 5 の倍数である．
また，負の整数 m について，$m = -n$ とすると

$$m^5 - m = (-n)^5 - (-n) = -(n^5 - n)$$

したがって，上式は 5 の倍数である．
$x = 0$ のとき，$x^5 - x$ が 5 の倍数であることは明らか．以上のことから，x が整数であるとき，$x^5 - x$ は 5 の倍数である．次に

$$x^5 - x = (x-1)x(x+1)(x^2+1)$$

であるから，上式は連続する 3 数の積を因数にもち，2×3 の倍数である．
よって，$x^5 - x$ は $2 \times 3 \times 5$，すなわち，30 の倍数である．

(2) $$x^5y - xy^5 = y(x^5 - x) - x(y^5 - y)$$

(1) の結果により x，y が整数のとき，$x^5 - x$，$y^5 - y$ は 30 の倍数であるから，上式は，30 の倍数である．

6.9 $37x + 32y = 1 \cdots (*)$ より，$37 \equiv 5$，$32 \equiv 0 \pmod{32}$ であるから

$$5x \equiv 1 \pmod{32} \quad \text{ゆえに} \quad 13 \cdot 5x \equiv 13 \pmod{32}$$

すなわち　$x \equiv 13 \pmod{32}$　これを満たす整数 x の 1 つは　13

$(*)$ より，$5x + 32(x+y) = 1$ であるから

$$5 \times 13 + 32(13+y) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 64 + 32(13+y) = 0$$

これを解いて　$y = -15$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y) = (13, -15)}$

6.10 $a^2b - 3a^2 + 5b = 21$ より　$(a^2+5)b = 3a^2 + 21$

したがって　$b = \dfrac{3a^2+21}{a^2+5} = 3 + \dfrac{6}{a^2+5} \quad \cdots (*)$

$a^2 + 5 \geqq 5$ は 6 の約数であるから　$a^2 + 5 = 6$

ゆえに　$a = \pm 1$　これを $(*)$ に代入して　$\boldsymbol{(a,\ b) = (\pm 1,\ 4)}$

6.11 (1) $$5x+3y=2n \quad \cdots ①$$

をみたす整数解の 1 つが $(x,\ y)=(n,-n)$ であるから

$$5n+3(-n)=2n \quad \cdots ②$$

①，② から　$5(x-n)+3(y+n)=0$　ゆえに　$5(n-x)=3(y+n)$

ここで，5 と 3 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$n-x=3k,\ \ y+n=5k \quad \text{ゆえに} \quad x=n-3k,\ \ y=-n+5k \quad \cdots(*)$$

$n=30$ のとき　　$x=30-3k$，$y=-30+5k$

x，y は，正の整数であるから

$$30-3k>0, \quad -30+5k>0 \quad \text{ゆえに} \quad 6<k<10$$

すなわち　　$k=7,\ 8,\ 9$

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y)=(9,\ 5),\ (6,\ 10),\ (3,\ 15)}$

(2) $(*)$ より　$\boldsymbol{(x,\ y)=(n-3k,\ -n+5k)}$　$\boldsymbol{(k}$ **は整数)**

6.12 (1) $$\frac{1}{3}(100-7x)=\frac{1}{3}(99-6x+1-x)=33-2x-\frac{x-1}{3}$$

上式が整数であるのは，$x-1$ が 3 の倍数，すなわち x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に限る．

(2) A を x セット，B を y セット，合計 100 枚の乗車券を購入すると

$$7x+3y=100 \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{1}{3}(100-7x)$$

ここで，y は整数であるから，(1) の結果より，k を 0 以上の整数とすると，$x=3k+1 \cdots ①$ とおける．このとき

$$y=\frac{1}{3}\{100-7(3k+1)\}=31-7k \cdots ②$$

y は 0 以上の整数であるから　$31-7k \geqq 0$　ゆえに　$k \leqq 4$

$k=0,1,2,3,4$ であるから ①，② より，A，B それぞれの組合せは

$$\textbf{(A,\ B)} = \textbf{(1,\ 31),\ (4,\ 24),\ (7,\ 17),\ (10,\ 10),\ (13,\ 3)}$$

(3) セット A とセット B を組み合せて購入金額が最も低くなるのは，同じ購入枚数であれば，セット A を最大に組み合せた場合である．A だけで 15 セット (乗車券 105 枚) 購入した場合は

$$480 \times 15 = 7200 \text{ (円)}$$

100 枚以上 104 枚以下の枚数の乗車券を A と B で組み合せる場合，B セットが 3 枚入りであるから

$$100+3=103,\quad 101+3=104$$

したがって，乗車券を 100 枚，101 枚，102 枚購入する場合について調べればよい．

i) 乗車券を 100 枚購入する場合，(2) の結果から，A を 13 セット，B を 3 セット購入するとき，購入金額は最小になり，その金額は

$$480\times 13+220\times 3=6900\ (\text{円})$$

ii) 乗車券を 101 枚購入する場合，A を x_1 セット，B を y_1 セット購入するとき

$$7x_1+3y_1=101\quad \text{ゆえに}\quad y_1=\frac{1}{3}(101-7x_1)=33-2x_1-\frac{x_1-2}{3}$$

x_1 は 0 以上の整数 k_1 を用いて，$x_1=3k_1+2$ とおけるので，
$y_1=29-7k_1$ となり，y_1 は 0 以上の整数であるから，$0\leqq k_1\leqq 4$
購入金額が最小となるのは，$k_1=4$，すなわち A を 14 セット，B を 1 セット購入するときで，その金額は

$$480\times 14+220\times 1=6940\ (\text{円})$$

iii) 乗車券を 102 枚購入する場合，A を x_2 セット，B を y_2 セット購入するとき

$$7x_2+3y_2=102\quad \text{ゆえに}\quad y_2=\frac{1}{3}(102-7x_2)=34-2x_1-\frac{x_2}{3}$$

x_2 は 0 以上の整数 k_2 を用いて，$x_2=3k_2$ とおけるので，
$y_2=34-7k_2$ となり，y_2 は 0 以上の整数であるから，$0\leqq k_2\leqq 4$
購入金額が最小となるのは，$k_2=4$，すなわち A を 12 セット，B を 6 セット購入するときで，その金額は

$$480\times 12+220\times 6=7080\ (\text{円})$$

以上のことから，**A を 13 セット，B を 3 セット**購入したとき，購入金額は最小となり，その金額は **6900 円**である．

補足

(2) d を整数とする．整数 x，y を解とする次の 1 次不定方程式を考える．

$$7x+3y=d\cdots(*)$$

$7x+3y=1$ の整数解の 1 つは $(x,\ y)=(1,-2)$ であるから，
$(*)$ の整数解の 1 つは　$(x,\ y)=(d,-2d)$
$7x+3y=0$ の整数解は，整数 k を用いて　$(x,\ y)=(-3k,\ 7k)$
ゆえに，$(x,\ y)=(d-3k,\ -2d+7k)$ は $(*)$ の解である．
$(x',\ y')$ が $(*)$ の解であるとすると

$$7x'+3y'=d\cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$7(x'-x)+3(y'-y)=0$
ゆえに，整数 k' を用いて　$x'-x=-3k',\ y'-y=7k'$
したがって　　$x'=d-3(k+k'),\ y'=-2d+7(k+k')$
よって，$(x,\ y)=(d-3k,\ -2d+7k)$ は $(*)$ の一般解である．

$d=100$ とすると，$(*)$ の解は　$(x,\ y)=(100-3k,-200+7k)$
このとき，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ であるから　$29\leqq k\leqq 33$
よって　$(x,\ y)=(13,\ 3),\ (10,\ 10),\ (7,\ 17),\ (4,\ 24),\ (1,\ 31)$

(3) $(x,\ y)=(d-3k,\ -2d+7k)$ より，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ であるから，購入金額は

$$480(d-3k)+220(-2d+7k)=40d+100k\quad\left(\frac{2d}{7}\leqq k\leqq\frac{d}{3}\right)$$

購入金額が最小となるのは，d に対して，最小の整数 k をとるときである．
$d\geqq 100$ において購入金額が最小となるのは，$d=100$ のとき，$k=29$ で，
その購入金額は 6900 円である．このとき，$x=13$，$y=3$ である．

6.13　(1) 整数解を m とすると　　$m^2-k^2=12$
$|m|^2-|k|^2=12$
ゆえに　　$(|m|+|k|)(|m|-|k|)=12$

ここで，$|m|+|k|=(|m|-|k|)+2|k|$ および上式の偶奇性により，$|m|+|k|$，$|m|-|k|$ はともに偶数であるから

$$\begin{cases}|m|+|k|=6\\ |m|-|k|=2\end{cases}\quad\text{ゆえに}\quad|m|=4,\ \ |k|=2$$

よって　　$\boldsymbol{k=\pm 2}$

(2) a は整数であるから　$2a-1 \neq 0$

したがって，x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ の解は

$$x = \frac{-(3a+2) \pm \sqrt{(3a+2)^2-4(2a-1)(a+2)}}{2(2a-1)}$$
$$= \frac{-(3a+2) \pm \sqrt{a^2+12}}{2(2a-1)}$$

この方程式が整数解をもつとき

$$l^2 = a^2+12 \quad \text{すなわち} \quad l^2-a^2=12$$

を満たす整数 l が存在するから，(1) の結果から，$a = \pm 2$

ゆえに，　$a=2$ のとき　　$x = -2, -\dfrac{2}{3}$

$a=-2$ のとき　$x = 0, -\dfrac{4}{5}$

よって　　$\boldsymbol{a=2}$ **のとき**　　$\boldsymbol{x=-2}$

$\boldsymbol{a=-2}$ **のとき**　$\boldsymbol{x=0}$

6.14　(1) $6(x-y)=xy$ より　　$(6+x)(6-y)=36$

x，y は自然数であるから

$$(6+x,\ 6-y) = (9,\ 4),\ (12,\ 3),\ (18,\ 2),\ (36,\ 1)$$

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 2),\ (6,\ 3),\ (12,\ 4),\ (30,\ 5)}$

(2) $7(x+y+z)=2(xy+yz+zx)\cdots(*)$ より

$$(2y+2z-7)x = 7y+7z-2yz$$

y，z は整数であるから，$2y+2z-7 \neq 0$ より

$$x = \frac{7(y+z)-2yz}{2(y+z)-7} \quad \text{ゆえに} \quad x-\frac{7}{2} = \frac{2\left(\dfrac{49}{4}-yz\right)}{2(y+z)-7} \quad \cdots(**)$$

$x \geqq 4$ のとき，$4 \leqq y \leqq z$ であるから，$(**)$ の左辺は正，右辺は負となり，不適．したがって，$x=1,\ 2,\ 3$ の場合について求めればよい．

(i) $x=1$ を $(*)$ に代入して整理すると　$(2y-5)(2z-5)=39$

$-3 \leqq 2y-5 \leqq 2z-5$ より

$(2y-5,\ 2z-5) = (1,\ 39),\ (3,\ 13)$　すなわち　$(y,\ z) = (3,\ 22),\ (4,\ 9)$

(ii) $x=2$ を $(*)$ に代入して整理すると　$(2y-3)(2z-3)=37$

$1 \leqq 2y-3 \leqq 2z-3$ より

$$(2y-3,\ 2z-3)=(1,\ 37) \quad \text{すなわち} \quad (y,\ z)=(2,\ 20)$$

(iii) $x=3$ を $(*)$ に代入して整理すると　$(2y-1)(2z-1)=43$

$5 \leqq 2y-3 \leqq 2z-3$ より，これを満たす自然数 y，z は存在しない．

(i)，(ii)，(iii) より　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 22),\ (1,\ 4,\ 9),\ (2,\ 2,\ 20)}$

解説 $(*)$ より　$x(2y-7)+y(2z-7)+z(2x-7)=0$

$x(2y-7)$，$y(2z-7)$，$z(2x-7)$ は 0 ではないので，これらの少なくと 1 つは負である．このとき

$$2x-7 \leqq 2y-7 \leqq 2z-7 \quad \text{ゆえに} \quad 2x-7<0$$

6.15 (1) p^x が有理数 $\dfrac{a}{b}$ に等しいとき (a，b は互いに素とする)

$$p^{\frac{n}{m}}=\frac{a}{b} \quad \text{ゆえに} \quad p^n=\frac{a^m}{b^m} \quad \cdots ①$$

① は整数であるから　$b^m=1$　ゆえに　$b=1$

これを ① に代入すると　$p^n=a^m$　$\cdots ②$

② より，a は p を因数にもつから，$a=p^k$ とおく (k は整数)．

これを ② に代入すると

$$p^n=(p^k)^m \quad \text{ゆえに} \quad p^n=p^{km}$$

上の第 2 式から　$n=km$　ゆえに　$k=\dfrac{n}{m}$

m，n の最大公約数は 1 であるから　$m=1$

(2) (1) の結果から，x は整数であるから

$$p^x=-x^2+9x-5 \quad \cdots (*)$$

は正の整数である．$f(x)=-x^2+9x-5$ とおくと，$f(x)>0$ となる x は

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	9	13	15	15	13	9	3

上の表から，$(*)$ を満たすのは，次の 2 つである．

$$3^1=f(1),\quad 3^2=f(2)$$

よって　$\boldsymbol{(p,\ x)=(3,\ 1),\ (3,\ 2)}$

6.16 (1) $a \equiv r,\quad b \equiv s \pmod 8$

したがって $a+b \equiv r+s \pmod 8$

$a+b$ を 8 で割った余りと $r+s$ を 8 で割った余りは等しい.

(2) 仮定より $a-r \equiv 0 \pmod 8$

$a^2-r^2=(a+r)(a-r)$ であるから

$$a^2-r^2 \equiv (a+r)\cdot 0 \pmod 8$$

したがって $a^2-r^2 \equiv 0 \pmod 8$

よって，a^2 を 8 で割った余りと r^2 を 8 で割った余りは等しい.

(3) $(2k+1)^2=4k(k+1)+1,\ (2k)^2=4k^2$

k が整数のとき，$k(k+1)$ は偶数であるから $(2k+1)^2 \equiv 1 \pmod 8$

k が偶数のとき $(2k)^2 \equiv 0 \pmod 8$，k が奇数のとき $(2k)^2 \equiv 4 \pmod 8$

よって，平方数を 8 で割った余りは **0, 1, 4**

(4) (3) の結果から 2 つの平方数の和を 8 で割った余りは.

$0+0,\ 0+1,\ 1+1,\ 0+4,\ 1+4,\ 4+4$ すなわち 0, 1, 2, 4, 5

よって，2 つの平方数の和を 8 で割った余りは 3 にはならない.

6.17 (1) 仮定から $10^n \equiv a_n,\quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1=10$ より $\boldsymbol{a_1=10}$

(1) の結果を用いると，法 13 について

$$a_2 \equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9$$
$$a_3 \equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12$$
$$a_4 \equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3$$
$$a_5 \equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4$$
$$a_6 \equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1$$

よって $\boldsymbol{a_2=9,\ a_3=12,\ a_4=3,\ a_5=4,\ a_6=1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N=p\cdot 10^5+2\cdot 10^4+10^2+6\cdot 10+q$$

とおくと，法 13 に関して

$$\begin{aligned} N &\equiv p\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 10^2 + 6\cdot 10 + q \\ &\equiv p\cdot 4 + 2\cdot 3 + 9 + 6\cdot 10 + q = 4p + q + 75 \\ &\equiv 4p + q - 3 \end{aligned}$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166

6.18 (1) $2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ であるから

2^n を 7 で割った余りは $\begin{cases} \boldsymbol{n \equiv 0 \pmod 3} \text{ のとき} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{n \equiv 1 \pmod 3} \text{ のとき} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{n \equiv 2 \pmod 3} \text{ のとき} & \mathbf{4} \end{cases}$

(2) $m = 101101101101101101_{(2)}$

これに (1) の結果を用いると，法 7 に関して

$$m = \sum_{k=0}^{5} (2^2 + 1)2^{3k} \equiv \sum_{k=0}^{5} 5\cdot 1 = 30 \equiv 2 \pmod{7}$$

よって，求める余りは **2**

6.19 (1) 初項 $a_1 = 1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3 \cdots ①$$

a_n が 7 の倍数であるとき，$4n - 3 \equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$8n \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -1 \pmod{7}$$

このとき，n は整数 m を用いて

$$n = 7m - 1 \quad \cdots ②$$

したがって，$1 \leqq 7m - 1 \leqq 600$ を満たす整数 m の個数は

$$\frac{2}{7} \leqq m \leqq \frac{601}{7} \quad \text{すなわち} \quad 1 \leqq m \leqq 85$$

よって，求める個数は **85** (個)

(2) ② を ① に代入すると

$$a_n = 4(7m-1) - 3 = 7(4m-1)$$

a_n が 7^2 の倍数であるとき，$4m-1 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8m \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad m \equiv 2 \pmod 7$$

このとき，m は整数 l を用いて

$$m = 7l + 2$$

これを ② に代入すると

$$n = 7(7l+2) - 1 = 49l + 13 \quad \cdots ③$$

したがって，$1 \leqq 49l + 13 \leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leqq l \leqq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq l \leqq 11$$

よって，求める個数は　　**12** (個)

(3) ③ を ① に代入すると

$$a_n = 4(49l+13) - 3 = 7^2(4l+1)$$

a_n が 7^3 の倍数であるとき，$4l+1 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8l \equiv -2 \quad \text{ゆえに} \quad l \equiv -2 \pmod 7$$

このとき，l は整数 k を用いて

$$l = 7k - 2$$

これを ③ に代入すると

$$n = 49(7k-2) + 13 = 343k - 85 \quad \cdots ④$$

$1 \leqq 343k - 85 \leqq 600$ を満たす整数 k は 1 で，このとき　$n = 258$

④ を ① に代入すると

$$a_n = 4(343k-85) - 3 = 7^3(4k-1)$$

これから，a_n が 7^4 の倍数となることはない．

以上の結果および ②，③ より，$1 \leqq n \leqq 600$ に対して

a_n が 7 の倍数であるとき　$n \equiv -1 \pmod 7$
a_n が 7^2 の倍数であるとき　$n \equiv 13 \pmod{49}$
a_n が 7^3 の倍数であるとき　$n = 258$

数列 $\{a_n\}$ のうち，7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

上の表で 2 列目のみ 7^2 を因数にもち，それ以外の列は 7 を因数にもつ．
ただし，第 6 行目第 2 列の a_{258} のみ 7^3 を因数にもつ．
したがって，2 列目以外の 32 項 (7 を因数にもつ)，2 列目の第 1 行から第 5 行目までの 5 項 (7^2を因数にもつ) および第 6 行目第 2 列の a_{258} より

$$32 \times 1 + 2 \times 5 + 3 = 45$$

よって，求める n の最小値は　$\boldsymbol{n = 265}$

別解 (九大 [理]2017)　(九大 [理]2017) 3

6.20 (1) ユークリッドの互除法を用いて

$$2017 = 225 \times 8 + 217,$$
$$225 = 217 \times 1 + 8,$$
$$217 = 8 \times 27 + 1$$

よって，求める最大公約数は　$\mathbf{1}$

(2) $225 = 3^2 \times 5^2$，$2017 = 15 \times 134 + 7$
全体集合を $U = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 134\}$ とし，その部分集合を

$$A = \{3{\cdot}1,\ 3{\cdot}2,\ 3{\cdot}3,\ \cdots,\ 3{\cdot}44\},$$
$$B = \{5{\cdot}1,\ 5{\cdot}2,\ 5{\cdot}3,\ \cdots,\ 5{\cdot}26\}$$

とすると

$$A \cap B = \{15{\cdot}1,\ 15{\cdot}2,\ 15{\cdot}3,\ \cdots,\ 15{\cdot}8\}$$

したがって，求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B}) &= n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 134 - (44 + 26 - 8) = \mathbf{72} \end{aligned}$$

(3) $225 = 3^2 \times 5^2$，$15 = 3 \times 5$，$1998 = 2 \times 3^3 \times 37$，$111 = 3 \times 37$

求める数は 2017 以下で，$3 \times 5 \times 37$ の倍数は

$$\{555n \,|\, n = 1, 2, 3\}$$

ただし，n は 2，3，5 と互いに素であるから，求める数は　　**555**

6.21 (1) ユークリッドの互除法により

$$\begin{array}{rrrr} & 5 & 6 & 1 \\ \hline 56 &) 281 &) 1742 &) 2023 \\ & 280 & 1686 & 1742 \\ \hline & 1 & 56 & 281 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 5 & 6 & 1 \\ \hline d &) c &) b &) a \\ & & & \\ \hline & 1 & d & c \end{array}$$

$c = 281$，$d = 56$ とおくと

$$\begin{cases} a = b + c \\ b = 6c + d \\ c = 5d + 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} c = a - b \\ d = b - 6c \\ 1 = c - 5d \end{cases}$$

$(*)$ の 3 式から $c,\ d$ を消去すると

$$1 = c - 5(b - 6c) = -5b + 31c = -5b + 31(a - b) = 31a - 36b$$

したがって　　$\dfrac{1}{ab} = \dfrac{31a - 36b}{ab} = \dfrac{-36}{a} + \dfrac{31}{b} = \dfrac{m}{a} + \dfrac{n}{b}$

$$\frac{m + 36}{a} = \frac{31 - n}{b} \quad \text{ゆえに} \quad b(m + 36) = a(31 - n)$$

$a,\ b$ は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$\begin{cases} m + 36 = ak \\ 31 - n = bk \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} m = -36 + 2023k \\ n = 31 - 1742k \end{cases}$$

$1 \leqq n \leqq 2000$ を満たす整数 k は　　$k = 0, -1$

よって，求める整数の組 $(m,\ n)$ は

$$\boldsymbol{(m,\ n) = (-36,\ 31),\ (-2059,\ 1773)}$$

(2) p は 3 以上の素数 (奇素数) であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は整数より

$$(p-1)! \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right) \qquad (*)$$

$$= (p-1)! \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k}\right) = p \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$$

$(p-1)!$ は $k,\ p-k$ を因数にもつから，$\dfrac{(p-1)!}{k(p-k)}$ は整数である．

よって，$(*)$ は p の倍数である．

6.22 (1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n-1 \equiv 4^{\frac{n}{2}}-1 \equiv 1^{\frac{n}{2}}-1 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，2^n-1 は 3 の倍数である．

(2) n が自然数のとき，2^n-1 は奇数である．

i) $n=1$ のとき，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である．

ii) $n \geqq 2$ のとき

$$2^n+1 = 1(2^n-1)+2$$

上式より，2^n+1 を 2^n-1 で割った余りは 2．

2^n-1 を 2 で割った余りは 1 であるから，ユークリッドの互除法により，2^n+1 と 2^n-1 の最大公約数は 1 である．

よって，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である．

(3) $2^{p-1}-1 = pq^2$ $(p,\ q$ は異なる素数$)$ $\cdots(*)$

$(*)$ について，$p=2$ のとき　　$1=2q^2$

これを満たす素数 q は存在しない．

$p \neq 2$ となり，p は奇素数であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数である．

(1) の結果から，$2^{p-1}-1$ は 3 の倍数であるから，pq^2 は 3 を因数にもつ．

i) $p=3$ のとき，$(*)$ より　　$3=3q^2$

q は素数であるから，不適．

ii) $q=3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{p-1}-1 = 9p \quad \text{ゆえに} \quad (2^{\frac{p-1}{2}}+1)(2^{\frac{p-1}{2}}-1) = (2^3+1)p$$

(2) の結果から，$2^{\frac{p-1}{2}}+1$ と $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ は互いに素であることに注意して

$$\frac{p-1}{2}=3, \quad 2^{\frac{p-1}{2}}-1=p \quad \text{これを解いて} \quad p=7$$

よって　　$\boldsymbol{(p,\ q)=(7,\ 3)}$

6.23 (1) k を整数とすると

$$(3k)^2 = 3\cdot 3k^2, \quad (3k\pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k)+1$$

したがって，a^2+b^2 が 3 で割り切れるのは，a，b がともに 3 で割り切れるときに限る．

(2) $9x \in A$ のとき

$$a^2+b^2 = 9x = 3{\cdot}3x$$

をみたす整数 a，b が存在する．このとき，a^2+b^2 は 3 で割り切れるから，(1) の結論により，$a=3p$，$b=3q$ をみたす整数 p，q が存在し

$$(3p)^2+(3q)^2 = 9x \quad \text{ゆえに} \quad p^2+q^2 = x$$

よって　　$x \in A$

6.24 (1)
$$\begin{aligned}(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 &= a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2\\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2)\end{aligned}$$

(2) $x=a^2+b^2$，$y=c^2+d^2$ とおくと ($a,\ b,\ c,\ d$ は整数)

$$xy = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

$ac+bd$，$ad-bc$ は整数であるから，xy は A の要素である．

(3) $5 = 1^2+2^2$ であるから

$$5^5 = 5^4{\cdot}5 = 5^4(1^2+2^2) = (5^2)^2+(5^2{\cdot}2)^2 = 25^2+50^2$$

よって，5，5^5 は A の要素である．

補足 n を自然数とすると，5^n は A の要素である．

i) $5 = 1^2+2^2$ より，$n=1$ のとき成立する．

ii) $n=k$ のとき，成立すると仮定すると，(2) において，$x=5$，$y=5^k$ とすると，$xy = 5^{k+1}$ は A の要素である．

i), ii) により，すべての自然数 n に対して，5^n は A の要素である．

6.25 (1) $f(0)=b$，$f(1)=a+b$，$f(2)=2a+b$ より

$$f(1)-f(0)=a, \quad f(2)-f(1)=a, \quad f(2)-f(0)=2a$$

$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ のうち，2 つの値が 3 の倍数であるから，上の 3 つの値のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数であるから，整数 a は 3 の倍数である．また

$$b=f(0), \quad b=f(1)-a, \quad b=f(2)-2a$$

であるから，b も 3 の倍数である．

(2) $F(x)=f(x)g(x)$ の係数，定数項がすべて 3 の倍数であるから

$$F(0)=f(0)g(0),\quad F(1)=f(1)g(1),\quad F(2)=f(2)g(2)$$

は，すべて 3 の倍数である．a，b，c，d が整数であるから，
$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$g(0)$，$g(1)$，$g(2)$ は整数である．

(i) $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ のうち，2 つの値が 3 の倍数であるとき
(1) の結果から，a，b はともに 3 の倍数である．

(ii) $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ のうち，2 つの値が 3 の倍数でないとき
$g(0)$，$g(1)$，$g(2)$ のうち，2 つ値が 3 の倍数であるから，
(i) と同様に，c，d はともに 3 の倍数である．

6.26 (1) 1 から 10 までの自然数のうち，10 と互いに素である数は

$$1,\quad 3,\quad 7,\quad 9$$

よって　　$\boldsymbol{\varphi(10)=4}$

(2) 1 から p^k までの自然数のうち (p は素数)，p^k と互いに素でない数は，p の倍数の $\dfrac{p^k}{p}$ 個であるから

$$\varphi(p^k)=p^k-\frac{p^k}{p}=\boldsymbol{p^k-p^{k-1}}$$

(3) $100=2^2\times 5^2$

1 から 100 までの自然数の中で，2 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ A，B とすると

$$n(A)=\frac{100}{2}=50,\quad n(B)=\frac{100}{5}=20,\quad n(A\cap B)=\frac{100}{10}=10$$

ゆえに　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+20-10=60$

よって　$\varphi(100)=100-n(A\cup B)=100-60=\mathbf{40}$

(4) $1500=2^2\cdot 3\cdot 5^3$

1 から 1500 までの自然数の中で，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ X，Y，Z とすると

$$n(X)=\frac{1500}{2}=750,\quad n(Y)=\frac{1500}{3}=500,\quad n(Z)=\frac{1500}{5}=300$$
$$n(X\cap Y)=\frac{1500}{6}=250,\quad n(Y\cap Z)=\frac{1500}{15}=100$$
$$n(Z\cap X)=\frac{1500}{10}=150,\quad n(X\cap Y\cap Z)=\frac{1500}{30}=50$$

したがって

$$\begin{aligned} n(X \cup Y \cup Z) &= n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(Y \cap Z) \\ &\qquad - n(Z \cap X) + n(X \cap Y \cap Z) \\ &= 750 + 500 + 300 - 250 - 100 - 150 + 50 = 1100 \end{aligned}$$

よって　　$\varphi(1500) = 1500 - n(X \cup Y \cup Z) = 1500 - 1100 = \mathbf{400}$

解説 フェルマー・オイラーの定理 (佐賀大学 2005) 1

6.27 (1) $f(x) = 0$ より　$(x^2 - 2)(x^2 - 4x + 2) = 0$

これを解いて　　$x = \pm\sqrt{2},\ 2 \pm \sqrt{2}$

よって，$f(x) = 0$ の解を小さい順に並べると

$$\boldsymbol{-\sqrt{2},\ 2 - \sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}}$$

(2) $f(x) \leqq 0$ の解は，(1) の結果から

$$-\sqrt{2} \leqq x \leqq 2 - \sqrt{2},\quad \sqrt{2} \leqq x \leqq 2 + \sqrt{2}$$

したがって，$f(n) \leqq 0$ を満たす整数 n は

$$-\sqrt{2} \leqq n \leqq 2 - \sqrt{2},\quad \sqrt{2} \leqq n \leqq 2 + \sqrt{2}$$

よって　　$\boldsymbol{n = -1,\ 0,\ 2,\ 3}$

(3) n が整数のとき，$f(n)$ は整数であるから，$f(n) \leqq 1$ を満たす整数 n を，次の 2 つの場合に分けて求める．

i) $f(n) \leqq 0$ のとき，(2) の結果から　$n = -1,\ 0,\ 2,\ 3$

ii) $f(n) = 1$ のとき　$(n^2 - 2)(n^2 - 4n + 2) = 1$

$n^2 - 2$ は整数であるから，上式から　$n^2 - 2 = \pm 1$

$n^2 - 2 = 1$ を満たす整数 n は存在しないから

$$n^2 - 2 = n^2 - 4n + 2 = -1 \quad \text{これを解いて} \quad n = 1$$

i)，ii) から，求める整数 n は　　$\boldsymbol{n = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3}$

補足 (高次不等式)

$\alpha < \beta < \gamma < \delta$ とすると

1 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) < 0$ の解は　$x < \alpha,\ \beta < x < \gamma$

2 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) > 0$ の解は　$\alpha < x < \beta,\ \gamma < x$

3 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) < 0$ の解は　$\alpha < x < \beta,\ \gamma < x < \delta$

4 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) > 0$ の解は　$x < \alpha,\ \beta < x < \gamma,\ \delta < x$

6.28 (1) $a,\ b,\ c,\ d$ を整数 $(d \neq 0)$ とする 4 次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \cdots (*)$$

の有理数の解 r は 0 ではないので，整数 p，q を用いて $(p \neq 0)$

$$r = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素})$$

と表すことができる．これを $(*)$ に代入すると

$$\left(\frac{p}{q}\right)^4 + a\left(\frac{p}{q}\right)^3 + b\left(\frac{p}{q}\right)^2 + c\left(\frac{p}{q}\right) + d = 0$$

したがって　　$ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = -\dfrac{p^4}{q}$

上式から，$-\dfrac{p^4}{q}$ が整数である．p，q は互いに素であるから　$q = 1$

よって，解 r は整数であるから $(r \neq 0)$

$$r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d = 0 \quad \text{ゆえに} \quad r^3 + ar^2 + br + c = -\frac{d}{r}$$

上式から，$-\dfrac{d}{r}$ は整数であるから，r は d の約数である．

以上のことから，$|r|$ は整数であり，かつ $|d|$ の約数に限る．

(2) 方程式 $2x^4 - 2x - 1 = 0$ の解は 0 ではないので，有理数の解 α $(\alpha \neq 0)$ をもつと仮定すると

$$2\alpha^4 - 2\alpha - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 - 2 = 0$$

上式より，方程式

$$t^4 + 2t^3 - 2 = 0 \quad \cdots (**)$$

が有理数の解 $\dfrac{1}{\alpha}$ をもつ．

このとき，(1) の結論から，その有理数の解は，$|-2|$ の約数になるが，$t = \pm 1,\ \pm 2$ は $(**)$ の解ではないので，矛盾を生じる．

よって，方程式 $2x^4 - 2x - 1 = 0$ の実数解はすべて無理数である．

6.29 (1) 自然数 a を 3 で割った商を k，余りを r とすると $(r = 0,\ 1,\ 2)$

$r = 0$ のとき　　$a^2 = (3k)^2 = 3 \cdot 3k^2$

$r = 1$ のとき　　$a^2 = (3k+1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$

$r = 2$ のとき　　$a^2 = (3k+2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

よって，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

(2) 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすとき，a^2+b^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果から a^2，b^2 がともに 3 の倍数である．
このとき，自然数 l，m を用いて

$$a=3l,\quad b=3m$$

とおける．したがって

$$(3l)^2+(3m)^2=3c^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2=3(l^2+m^2)$$

c^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果により，c も 3 の倍数である．
よって，a，b，c はすべて 3 で割り切れる．

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c が存在すると仮定すると，(2) の結果から

$$a=3^nA,\quad b=3^nB,\quad c=3^nC$$

とおける (n は自然数，3 つの自然数 A，B，C の少なくとも 1 つは 3 で割り切れない)．このとき

$$(3^nA)^2+(3^nB)^2=3(3^nC)^2$$
$$A^2+B^2=3C^2$$

上式および (2) の結果から，A，B，C はすべて 3 で割り切れることになり，A，B，C の仮定に反する．
よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しない．

6.30 (1)

$$x^{n+5}-x^n=x^n(x^5-1)$$

x^{n+5} と x^n を x^5-1 で割った余りは等しいから，$m\equiv n \pmod 5$ のとき，x^m と x^n を x^5-1 で割った余りは等しい．
よって，n を 5 で割った余りを r とすると，x^n を x^5-1 で割った余りは

$$\begin{cases} \boldsymbol{0<r\leqq 4} \text{ のとき} & \text{余り } \boldsymbol{x^r} \\ \boldsymbol{r=0} \text{ のとき} & \text{余り } \boldsymbol{1} \end{cases}$$

(2) 整数 r，s を $1\leqq r,s\leqq 4$，$r\neq s$ とする．
$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ に注意して

(i) $n\not\equiv 0 \pmod 5$ のとき，$rn\not\equiv sn \pmod 5$ であるから，(1) の結果から $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$ を x^5-1 で割った余りは，$x^4+x^3+x^2+x$ を x^5-1 で割った余りに等しいから

$$x^4+x^3+x^2+x=(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot 1-1$$

したがって，求める余りは　-1

(ii) $n \equiv 0 \pmod 5$ のとき，(1) の結果から，$x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$ を x^5-1 で割った余りは，$x^5+x^5+x^5+x^5=4x^5$ を x^5-1 で割った余りに等しいから

$$4x^5=(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot 4(x-1)+4$$

したがって，求める余りは　4

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{n \not\equiv 0 \pmod 5} \text{ のとき　余り } \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{n \equiv 0 \pmod 5} \text{ のとき　余り } \boldsymbol{4} \end{cases}$

解説 $n \not\equiv 0 \pmod 5$ のとき，$rn \equiv sn \pmod 5$ が成り立つ仮定すると

$$(r-s)n \equiv 0 \pmod 5$$

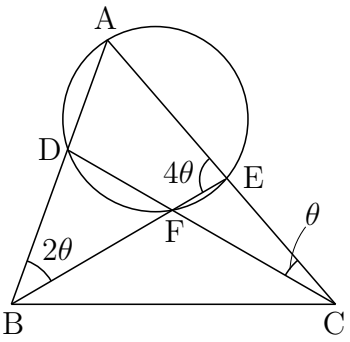
このとき，$-3 \leqq r-s \leqq 3$，$n \not\equiv 0 \pmod 5$ であるから，矛盾．

法 5 について，n，$2n$，$3n$，$4n$ はどれも合同ではないので，これらは順序を無視すると，法 5 について，1，2，3，4 である．

したがって，x^n，x^{2n}，x^{3n}，x^{4n} を x^5-1 で割った余りは，順序を無視すると，x．x^2，x^3，x^4 で割った余りに等しい．

よって，$x^n+x^{2n}+x^{3n}+x^{4n}$ を x^5-1 で割った余りは，$x^4+x^3+x^2+x$ を x^5-1 で割った余りに等しい．

7.1 $\theta=\angle\mathrm{ACD}$ とおくと



$$\angle\mathrm{AEB}=4\theta,\quad \angle\mathrm{ABE}=2\theta$$

点 A，D，E，F が同一円周上にあるので

$$\angle\mathrm{ADF}=180^\circ-4\theta$$

△ABE および △ACD の内角の和について

$$A+2\theta+4\theta=180^\circ,\qquad A+\theta+(180^\circ-4\theta)=180^\circ$$

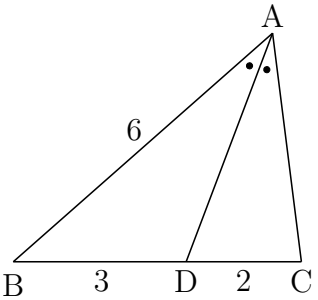
これを解いて　　$\theta=20^\circ$，$\boldsymbol{A=60^\circ}$

7.2 BC = 5，BD = 3 より

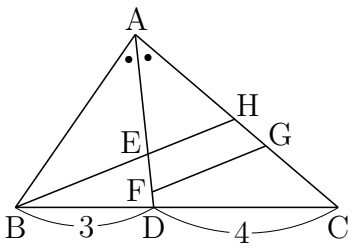
$$\mathrm{DC}=\mathrm{BC}-\mathrm{BD}=5-3=2$$

AD は ∠A の二等分線であるから，
AB : AC = AD : DC より

$$6:\mathrm{AC}=3:2\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{\mathrm{AC}=4}$$



7.3 (1) △ACD と直線 BH について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{AH}{HC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}=1 \quad \cdots ①$$

仮定より $\dfrac{DE}{EA}=\dfrac{3}{5}$ $\cdots ②$

AD は，∠A の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 3 : 4 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{CB}{BD}=\frac{7}{3} \quad \cdots ③$$

②，③ を ① に代入すると

$$\frac{AH}{HC}\times\frac{7}{3}\times\frac{3}{5}=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{AH}{HC}=\frac{5}{7}}$$

(2) (1) の結果から $\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{5}{12}$ $\cdots ④$，　仮定から $\dfrac{AG}{AC}=\dfrac{7}{12}$

上の 2 式から $\dfrac{AH}{AG}=\dfrac{5}{7}$ $\cdots ⑤$

仮定から $\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{5}{3}$，$\dfrac{EF}{ED}=\dfrac{2}{3}$

上の 2 式から $\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{5}{2}$ ゆえに $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{5}{7}$ $\cdots ⑥$

⑤，⑥ より　EH//FG　よって　BH//FG

(3) (2) の結果から，△AEH ∽ △AFG であるから $\dfrac{EH}{FG}=\dfrac{AE}{AF}$

上式に FG = 7 および ⑤ を代入すると　$EH=5$ $\cdots ⑦$

仮定より $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$ これと ④ により $\dfrac{AB}{AH}=\dfrac{9}{5}$ $\cdots ⑧$

AE は ∠A の二等分線であるから，BE : EH = AB : AH

⑦，⑧ により　BE : 5 = 9 : 5　よって　$\boldsymbol{BE=9}$

7.4 (1) $\angle BAC = 180^\circ - 2\times 72^\circ = 36^\circ$

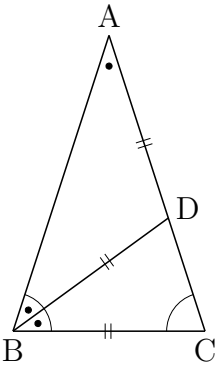
$\angle CBD = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle ACB = 36^\circ$

△ABC と △BCD について

∠C は共通，

$\angle BAC = \angle CBD$

2 角が等しいから，△ABC ∽ △BCD



(2) (1) の結果より，△BCD は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{BC}=\mathrm{BD}\quad\cdots①$$

$\angle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABC}=36^\circ$ より，△ABD は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}\quad\cdots②$$

①，② より，$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{DC}=x$ とおくと

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}+\mathrm{DC}=1+x$$

(1) の結果より，$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{BC}:\mathrm{DC}$ であるから

$$(1+x):1=1:x\quad\text{ゆえに}\quad x^2+x-1=0$$

$x>0$ に注意して，これを解くと　$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって　　$\mathrm{AD}:\mathrm{DC}=1:\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\mathbf{2:\sqrt{5}-1}$

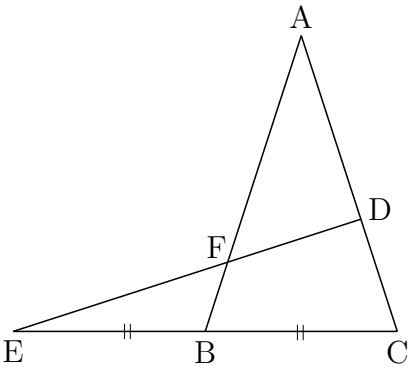
(3) △ABC と直線 DE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}}=1\quad\text{ゆえに}\quad\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}=1$$

よって　　$\mathrm{AF}:\mathrm{FB}=2:x$

$$=2:\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$=\mathbf{\sqrt{5}+1:1}$$



7.5 (1) △ABD および直線 EP について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}=1\quad\text{ゆえに}\quad\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{b}{b+1}\cdot\frac{a}{1}=1$$

よって　　$\mathbf{AP:PD=(}\boldsymbol{b}\mathbf{+1):}\boldsymbol{ab}$

(2)　　$\dfrac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{1}{b+1}$，$\dfrac{\triangle\mathrm{APE}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\cdot\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{a+1}\cdot\dfrac{b+1}{(b+1)+ab}$

上の 2 式の辺々を掛けると　　$\dfrac{\triangle\mathrm{APE}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{1}{(a+1)(ab+b+1)}$

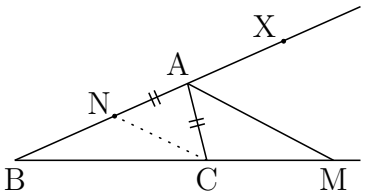
よって　　$\mathbf{\triangle APE:\triangle ABC=1:(}\boldsymbol{a}\mathbf{+1)(}\boldsymbol{ab}\mathbf{+}\boldsymbol{b}\mathbf{+1)}$

7.6 (1) $\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BM}:\mathrm{MC}\quad\cdots①$

(A) AC = AN と ① から

$$\mathrm{BA} : \mathrm{AN} = \mathrm{BM} : \mathrm{MC}$$

よって　　MA//CN



(B) (A) の結果から

$$\angle\mathrm{XAM} = \angle\mathrm{ANC}\ (\text{同位角}),\quad \angle\mathrm{CAM} = \angle\mathrm{ACN}\ (\text{錯角})\quad \cdots ①$$

△ANC は二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{ANC} = \angle\mathrm{ACN}\quad \cdots ②$$

①，② から　　$\angle\mathrm{XAM} = \angle\mathrm{CAM}$

よって，AM が ∠A の外角を二等分する．

(2) BQ，CR はそれぞれ ∠B，∠C の二等分線であるから

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}},\quad \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RA}}$$

上の 2 式の辺々を掛けると　　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RA}}\quad \cdots ③$

△ABC と直線 QR について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = 1\quad \text{ゆえに}\quad \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RA}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\quad \cdots ④$$

③，④ より　　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$

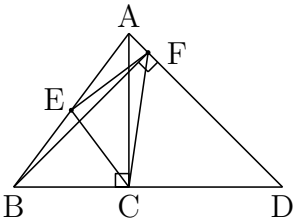
よって，AP は ∠A の外角を二等分線する．

7.7 (1) $\angle\mathrm{AFB} = \angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ であるから，2 点 F，C は，AB を直径とする円周上にある．このとき，E はこの円の中心であるから

$$\mathrm{EF} = \mathrm{EC}$$

(2) $\angle\mathrm{C} = 90^\circ$，AB : AC = 5 : 4 より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} : \mathrm{AC} : \mathrm{BC} &= 5 : 4 : \sqrt{5^2 - 4^2}\\ &= 5 : 4 : 3\end{aligned}$$



条件から，$k > 0$ とし

$$\mathrm{AB} = 5k,\quad \mathrm{BC} = 3k,\quad \mathrm{AC} = \mathrm{CD} = 4k,\quad \mathrm{AD} = 4\sqrt{2}k$$

とおく．△ABD の面積により

$$\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BF}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{2}7k\cdot4k=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}k\cdot\mathrm{BF}$$

これから　$\mathrm{BF}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}k,\quad \mathrm{AF}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BF}^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$

ゆえに　$\mathrm{AF}:\mathrm{FD}=1:7$　また　$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=1:1,\quad \mathrm{BC}:\mathrm{CD}=3:4$

△ABD の面積を S とすると

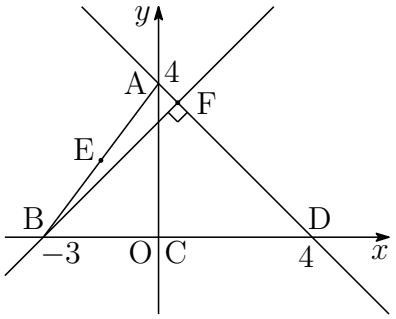
$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{7}S$$
$$\triangle\mathrm{AEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}S=\frac{1}{16}S$$
$$\triangle\mathrm{BCE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}S=\frac{3}{14}S$$
$$\triangle\mathrm{CDF}=\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{8}S=\frac{1}{2}S$$

したがって　　$\triangle\mathrm{CEF}=S-\dfrac{1}{16}S-\dfrac{3}{14}S-\dfrac{1}{2}S=\dfrac{25}{112}S$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{CEF}=\dfrac{3}{7}\mathrm{S}:\dfrac{25}{112}\mathrm{S}=\mathbf{48:25}$

別解　$\angle\mathrm{C}=90°$，$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=5:4$ より

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}:\mathrm{BC}=5:4:\sqrt{5^2-4^2}$$
$$=5:4:3$$



C を原点とし，条件から

$\mathrm{A}(0,\ 4)$，$\mathrm{B}(-3,\ 0)$，$\mathrm{C}(4,\ 0)$

とおき，求める三角形の面積比を示してもよい．

E は AB の中点であるから　$\mathrm{E}\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$

直線 AD の方程式は　　$y=-x+4\quad\cdots①$

直線 BF の方程式は　　$y=x+3\quad\cdots②$

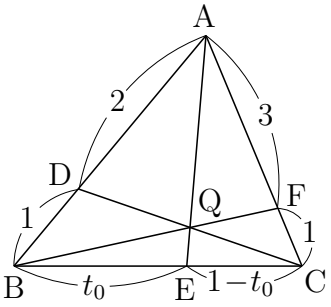
①，② を解いて　$\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

したがって　　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4=6$

$$\triangle\mathrm{CEF}=\frac{1}{2}\left|-\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\right|=\frac{25}{8}$$

よって　　$\triangle ABC : \triangle CEF = 6 : \dfrac{25}{8} = \mathbf{48 : 25}$

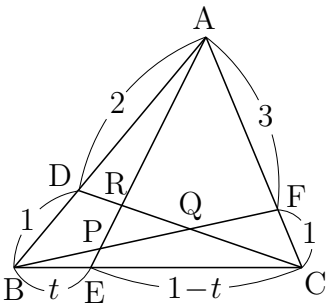
7.8　(1) チェバの定理により



$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AD}{DB}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

これを解いて　　$\boldsymbol{t_0=\dfrac{3}{5}}$

(2) △AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{AP}{PE}\cdot\frac{EB}{BC}\cdot\frac{CF}{FA} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AP}{PE}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって　　$\dfrac{AP}{PE}=\dfrac{3}{t}$

よって　　$k=\dfrac{AP}{AE}=\boldsymbol{\dfrac{3}{3+t}}$

△BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DA}{AB}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{2}{3}=1$$

したがって　　$\dfrac{CR}{RD}=\dfrac{3(1-t)}{2t}$

よって　　$\ell=\dfrac{CR}{CD}=\dfrac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\boldsymbol{\dfrac{3(1-t)}{3-t}}$

(3) (2) の図について，△BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CA}{AF}\cdot\frac{FP}{PB}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{FP}{PB}=1$$

したがって　　$\dfrac{FP}{PB}=\dfrac{3(1-t)}{4t}$　　$\cdots$①

$t=\dfrac{3}{5}$ のとき，P は Q に一致するので　　$\dfrac{FQ}{QB}=\dfrac{1}{2}$　　$\cdots$②

よって　　$\triangle BCQ=\dfrac{2}{3}\triangle BCF=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle ABC=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 1=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(4) $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，R は Q に一致するので，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\mathrm{CQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，② から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-\mathrm{t})}{3(1-\mathrm{t})+4\mathrm{t}}-\frac{1}{3}=3+\mathrm{t}:3-5\mathrm{t}$$

$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{CQ}:\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=(3+t)(3-t):(3-5t)^2$$

(3) の結果から　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)}=\boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$

解説 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\cdot\frac{3}{4}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=3(1-t):2t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3(1-t)+2t}=\frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}\}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b}-3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると [1]

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{(5-3\mathrm{t})^2}{6(3+\mathrm{t})(3-\mathrm{t})}:1$

外積は高校数学の範囲外であるから，2 次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

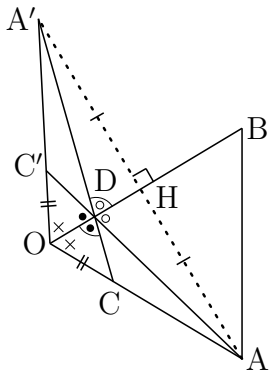
$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}$$

また，これに $\vec{c}=\vec{b}$ を代入すると　$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

7.9 (1) OB 上に点 P をとると

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}+\mathrm{PC} &= \mathrm{A'P}+\mathrm{PC} \\ &\geqq \mathrm{AC} \end{aligned}$$



等号が成り立つのは，P を A′C と OB の交点とするときで，この点が D である．
A から OB に下ろした垂線を AH とすると

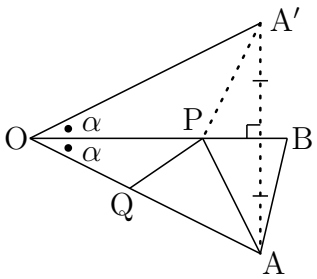
$$\angle \mathrm{AOH} = \angle \mathrm{A'OH}$$

$\triangle \mathrm{OCD} \equiv \triangle \mathrm{OC'D}$ より　$\angle \mathrm{CDO} = \angle \mathrm{C'DO}$　$\cdots$①
$\triangle \mathrm{ADH} \equiv \triangle \mathrm{A'DH}$ より　$\angle \mathrm{ADH} = \angle \mathrm{A'DH}$　$\cdots$②
OB と A′C の対頂角から　$\angle \mathrm{CDO} = \angle \mathrm{A'DH}$　$\cdots$③

①，②，③ より　$\angle \mathrm{ADH} = \angle \mathrm{C'DO}$
よって，3 点 A，D，C′ は，同一直線上にあり，線分 AC′ は D を通る．

(2) 線分 OB 上に P，線分 OA 上に Q をとると

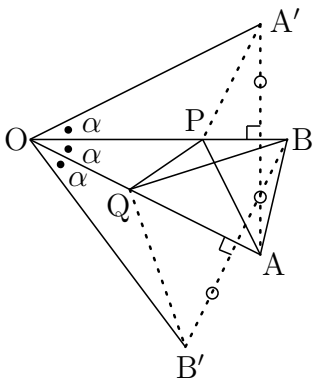
$$\begin{aligned} \mathrm{AP}+\mathrm{PQ} &= \mathrm{A'P}+\mathrm{PQ} \\ &\geqq \mathrm{A'Q} \end{aligned}$$



等号が成り立つのは，P を A′Q と OB の交点とするときで，この点が F である．
さらに，A′Q が最小となるのは，Q を A′ から OA に下ろした垂線の足とするときで，この点が E である．
よって，折れ線 AFE が最小となるとき，$\angle \mathrm{AEF}$ は直角である．

(3) 線分 OA に関して B と対称な点を B′ とし，線分 OB 上に P，線分 OA 上に Q をとると

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB} &= \mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB'} \\ &\geqq \mathrm{A'B'} \end{aligned}$$

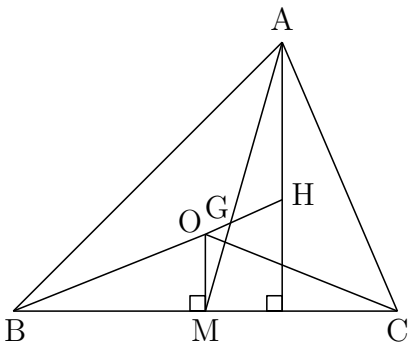


等号が成り立つのは，P を A′B′ と OB の交点，Q を A′B′ と OA の交点とするときで，このとき，P が H，Q が G である．よって，折れ線 AHGB の長さは

$$\mathbf{A'B' = 2\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

7.10 △OBM と △OCM について，条件から
OB = OC，BM = CM，OM は共通であるから，△OBM ≡ OCM.
したがって　　OM//AH
ゆえに　　△OMG ∽ △HAG
また，AG : GM = 2 : 1 であるから

AH : OM = 2 : 1



別解 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とすると

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$$

△ABC の重心 G の位置ベクトルは　　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

BC の中点 M の位置ベクトルは　　$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

ゆえに　　$\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM})$　　$\cdots$①

ここで　　$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\dfrac{1}{2}(|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2)=0$

$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{BC}$ であるから　　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OM}$　　$\cdots$②

①，② より　　$\dfrac{\alpha}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OM}$

ゆえに　　$\left(\dfrac{\alpha}{3}-1\right)\overrightarrow{OA}+\left(\dfrac{2}{3}\alpha-\beta\right)\overrightarrow{OM}=\vec{0}$

$\dfrac{\alpha}{3}-1\neq 0$ のとき，$\overrightarrow{OA}//\overrightarrow{OM}$ となり，このとき，A は BC の垂直二等分線上にあり，AB = AC となり不適．したがって

$$\frac{\alpha}{3}-1=0,\quad \frac{2}{3}\alpha-\beta=0 \quad \text{これを解いて} \quad \alpha=3,\ \beta=2$$

$\beta=2$ を ② に代入することにより　$\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$

よって　　AH : OM = 2 : 1

7.11 BE，CD は，△ABC の中線であるから，その交点 (重心) を G とすると

$$GB=\frac{2}{3}BE,\quad GE=\frac{1}{3}BE,\quad GC=\frac{2}{3}CD,\quad GD=\frac{1}{3}CD$$

∠BGD = ∠CGE であるから，BE = CD のとき，△BGD ≡ △CGE
ゆえに　BD = CE　よって　AB = AC

7.12 (1) B，C の中点を M とし，直線 GE を ℓ とする．

△AMC と ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GM}}\cdot\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1$$

したがって $\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=\dfrac{1}{3}$ よって **CH : HA = 1 : 3**

(2) △ABC と ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって $\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}=\dfrac{3}{2}$ よって **BI : IA = 2 : 3**

(3) (1),(2) の結果から

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=3:2+5=3:7, \quad \mathrm{FH}:\mathrm{HA}=4+3:3=7:3$$

△ADF と ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}}\cdot\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}\cdot\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{7}\cdot\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}\cdot\frac{7}{3}=1$$

したがって $\dfrac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}=1$ よって **DJ : JF = 1 : 1**

7.13 (1) $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とし，△ABC の内接円の半径を r とすると

$$S_{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}cr, \quad S_{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}ar, \quad S_{\mathrm{CA}}=\frac{1}{2}br$$

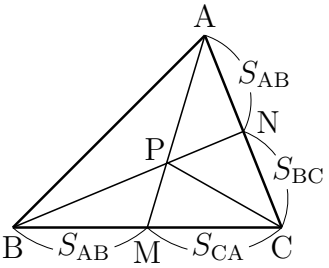
これらを ${S_{\mathrm{AB}}}^2+{S_{\mathrm{CA}}}^2={S_{\mathrm{BC}}}^2$ に代入すると

$$\left(\frac{1}{2}cr\right)^2+\left(\frac{1}{2}br\right)^2=\left(\frac{1}{2}ar\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2+b^2=a^2$$

よって **∠BAC = 90°**

(2) 直線 AP と辺 BC の交点を M，直線 BP と辺 CA の交点を N とすると

$$\mathrm{BM}:\mathrm{MC}=S_{\mathrm{AB}}:S_{\mathrm{CA}},$$
$$\mathrm{CN}:\mathrm{NA}=S_{\mathrm{BC}}:S_{\mathrm{AB}}$$



$S_{\mathrm{AB}}=S_{\mathrm{BC}}=S_{\mathrm{CA}}$ であるとき，M，N は，それぞれ辺 BC，CA の中点である．このとき，P は中線 AM と BN の交点であるから，P は △ABC の重心である．

補足 上の図において，メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AN}}\cdot\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PB}}=\frac{S_{\mathrm{CA}}}{S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}}}$$

したがって

$$\begin{aligned}(S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}})\overrightarrow{\mathrm{PN}}+S_{\mathrm{CA}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=\vec{0}\\ (S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}})\cdot\frac{S_{\mathrm{BC}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+S_{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{S_{\mathrm{AB}}+S_{\mathrm{BC}}}+S_{\mathrm{CA}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=\vec{0}\\ S_{\mathrm{BC}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+S_{\mathrm{CA}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}+S_{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{PC}}&=\vec{0}\end{aligned}$$

一般に，△ABC の内部の点 P について

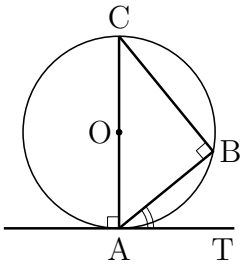
$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

であるとき，$S_{\mathrm{BC}}:S_{\mathrm{CA}}:S_{\mathrm{AB}}=\alpha:\beta:\gamma$

また，$\mathrm{P}(\vec{p})$，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ とすると

$$\vec{p}=\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

7.14 右の図のように，円 O の弦 AB の端点 A における円の接線 AT と弦 AB が作る ∠BAT を考える．

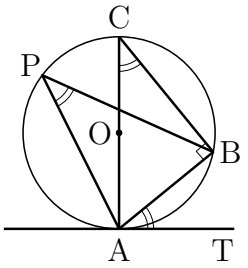


直径 AC を引くと，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BAT}+\angle\mathrm{CAB}&=90^\circ\\ \angle\mathrm{ACB}+\angle\mathrm{CAB}&=90^\circ\end{aligned}$$

となるから，次が成り立つ．

$$\angle\mathrm{BAT}=\angle\mathrm{ACB}$$

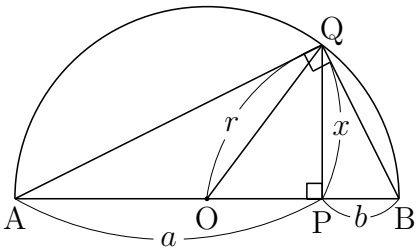


ここで，∠ACB は弧 AB の円周角であるから，右の図で

$$\angle\mathrm{BAT}=\angle\mathrm{APB}$$

となる．

7.15 (1) 半円 C の半径を r とすると，
右の図から



$$2r = \mathrm{AB} = \mathrm{AP} + \mathrm{BP}$$

よって　　$\boldsymbol{r = \dfrac{AP + BP}{2}}$

$a = \mathrm{AP}$，$b = \mathrm{BP}$，$x = \mathrm{PQ}$ とし，3 つの直角三角形 APQ，BPQ，ABQ に三平方の定理を適用すると

$$\mathrm{AQ}^2 = a^2 + x^2, \quad \mathrm{BQ}^2 = b^2 + x^2, \quad \mathrm{AQ}^2 + \mathrm{BQ}^2 = (a+b)^2$$

第 1，2 式を第 3 式に代入すると

$$(a^2 + x^2) + (b^2 + x^2) = (a+b)^2 \quad \text{整理すると} \quad x^2 = ab$$

$x > 0$ より　$x = \sqrt{ab}$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{PQ} = \sqrt{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}}}$

(2) (1) の結果から　$r = \dfrac{a+b}{2}$，$x = \sqrt{ab}$

(1) の図から　$r \geqq x$　ゆえに　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad \cdots (*)$

$(*)$ について，等号が成立するのは，O と P が一致するとき，すなわち，$a = b$ のときである．

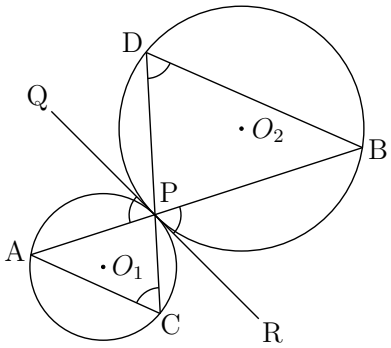
7.16 (1) (a) P における共通接線 QR を引く．
接線と弦の作る角により

$\angle \mathrm{QPA} = \angle \mathrm{ACP}$，$\angle \mathrm{RPB} = \angle \mathrm{BDP}$

また，2 直線 AB，QR の対頂角により

$\angle \mathrm{QPA} = \angle \mathrm{RPB}$

であるから，$\angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{BDP}$ である．
錯角が等しいので，AC//BD



(b) △ACP と △BDP に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin\angle\mathrm{ACP}} = 2r_1, \quad \frac{\mathrm{PB}}{\sin\angle\mathrm{BDP}} = 2r_2$$

$\angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{BDP}$ より，$\sin\angle\mathrm{ACP} = \sin\angle\mathrm{BDP}$ であるから

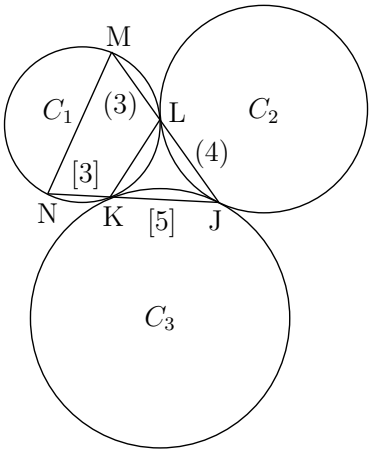
$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = r_1 : r_2$$

別解 (その 1) 2 直線 AB，$\mathrm{O_1O_2}$ の対頂角により，$\angle \mathrm{APO_1} = \angle \mathrm{BPO_2}$．
2 つの二等辺三角形 $\triangle \mathrm{APO_1}$，$\triangle \mathrm{BPO_2}$ の相似比を利用する．

(その 2) 2 円 O_1，O_2 の中心を通る直線とこれらの円の P 以外の交点を，それぞれ S，T とすると，$\angle \mathrm{APS} = \angle \mathrm{BPT}$ である．
2 つの直角三角形 $\triangle \mathrm{APS}$，$\triangle \mathrm{BPT}$ の相似比を利用する．

(2) (1)(b) の結果により

$$\mathrm{ML} : \mathrm{LJ} = 3 : 4$$
$$\mathrm{NK} : \mathrm{KJ} = 3 : 5$$



したがって

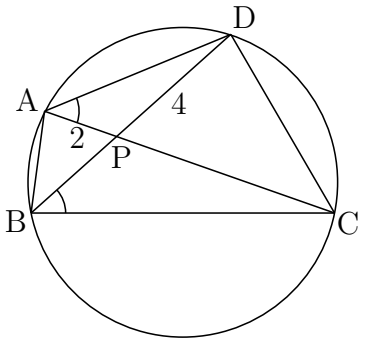
$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{JMN} : \triangle \mathrm{JLK} &= (3+4)(3+5) : 4{\cdot}5 \\ &= 56 : 20 = 14 : 5\end{aligned}$$

ゆえに，四角形 KLMN と $\triangle$JLK の相似比は

$$\begin{aligned}(\triangle \mathrm{JMN} - \triangle \mathrm{JLK}) : \triangle \mathrm{JLK} &= (14-5) : 5 \\ &= 9 : 5\end{aligned}$$

よって，四角形 KLMN の面積は $\triangle$JLK の面積の $\boldsymbol{\frac{9}{5}}$ 倍．

7.17 $\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{CBD}$ であるから，円周角の定理により，四角形 ABCD は円に内接する．



AC = 8，AP = 2 より　　PC = 6

方べきの定理により

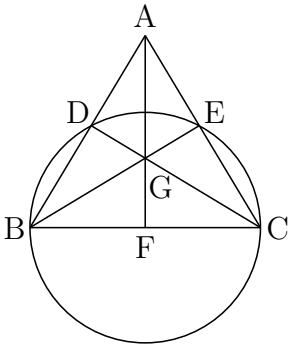
$$\mathrm{PA}{\cdot}\mathrm{PC} = \mathrm{PB}{\cdot}\mathrm{PD} \quad \text{ゆえに} \quad 2{\cdot}6 = \mathrm{PB}{\cdot}4$$

したがって　PB = 3

よって　$\mathrm{BD} = \mathrm{PB} + \mathrm{PD} = 3 + 4 = \boldsymbol{7}$

7.18 (1) 方べきの定理により

$$\mathrm{AD}{\cdot}\mathrm{AB} = \mathrm{AE}{\cdot}\mathrm{AC} \quad \cdots ①$$



D，E はそれぞれ辺 AB，AC の中点であるから

$$\mathrm{AD} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}, \quad \mathrm{AE} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}$$

上の 2 式を ① に代入すると

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{AC}^2 \quad \text{よって} \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$$

(2) △ABC の中線 BE，CD の交点 G は △ABC の重心であるから，AG の延長と辺 BC の交点を F とすると，F は辺 BC の中点である．
△ABF と △ACF について

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}\ (\text{(1) の結果から}),\quad \mathrm{BF}=\mathrm{CF},\quad \mathrm{AF}\ \text{は共通}$$

3 辺の長さがそれぞれ等しいので　　$\mathrm{ABF}\equiv\mathrm{ACF}$

よって　　$\angle\mathrm{BAE}=2\angle\mathrm{BAG}\quad\cdots②$

これを条件式 $2\angle\mathrm{ABG}=\angle\mathrm{BAE}$ に代入すると

$$2\angle\mathrm{ABG}=2\angle\mathrm{BAG}\quad\text{よって}\quad\angle\mathrm{BAG}=\angle\mathrm{ABG}\quad\cdots③$$

(3) (2) の結果から，中線 AF は BC に下ろした垂線であり，G は AF を 2 : 1 に内分する．また，△ABG は二等辺三角形であるから，AG = BG.
このとき，直角三角形 AGF において，BG : GF = 2 : 1 であるから

$$\angle\mathrm{GBF}=30^\circ,\quad\angle\mathrm{BGF}=60^\circ\quad\cdots④$$

また，△ABG について　$\angle\mathrm{BAG}+\angle\mathrm{ABG}=\angle\mathrm{BGF}\quad\cdots⑤$
③，④，⑤ より　$\angle\mathrm{BAG}=30^\circ$　これを ② に代入して　$\angle\mathrm{BAE}=60^\circ$
さらに，(1) の結果により，△ABC は正三角形である．

7.19 (1) △PAB と △PCD において　　$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{CPD}$　(共通)
条件より，PA·PD = PB·PC であるから　　PA : PB = PC : PD
2 組の辺の比が等しく，その間の角が等しいので

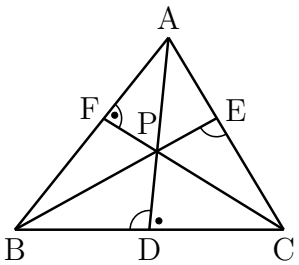
$$\triangle\mathrm{PAB}\backsim\triangle\mathrm{PCD}$$

したがって　　$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PCD}$
ゆえに，$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=180^\circ$ となり，四角形 ABCD は，向かい合う角の和が 180° であるから，四角形 ABCD は円に内接する．

(2) 1), 2) より

$$\angle\mathrm{PFA}=\angle\mathrm{PEC}=\angle\mathrm{PDB}=\alpha$$

とおく．



1) より　　$\mathrm{BF}\cdot\mathrm{BA}=\mathrm{BP}\cdot\mathrm{BE}\quad\cdots①$
2) より　　$\mathrm{BP}\cdot\mathrm{BE}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BC}\quad\cdots②$

①，② より　　BF·BA = BD·BC

したがって，方べきの定理の逆により，四角形 AFDC は円に内接するので

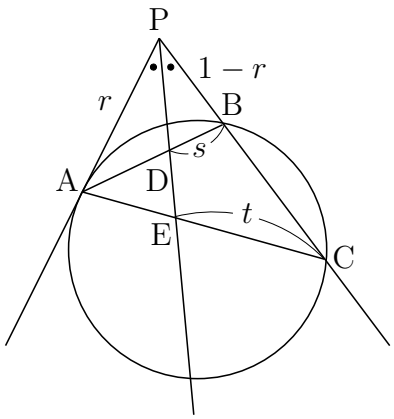
$$\angle \mathrm{PFA} = \angle \mathrm{PDC} = \beta$$

とおくと，このとき

$$\alpha = \beta,\quad \alpha + \beta = 180^\circ \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \beta = 90^\circ$$

よって，点 P は △ABC の垂心である．

7.20　(1) D は ∠APB と線分 AB の交点であるから



$$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{PA} : \mathrm{PB}$$

ゆえに　　$\mathrm{AD} : s = r : 1 - r$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{AD} = \dfrac{rs}{1 - r}}$

(2) △PAB ∽ △PCA であるから

$$\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = \mathrm{PC} : \mathrm{PA} \quad \cdots ①$$

$$\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC} = \mathrm{PA}^2 \quad \cdots ①'$$

PB : PC = 2 : 3 であるから

$$\mathrm{PC} = \frac{3}{2}\mathrm{PB} \quad \cdots ②$$

② を ①′ に代入して　$\dfrac{3}{2}\mathrm{PB}^2 = \mathrm{PA}^2$

したがって　$2\mathrm{PA}^2 = 3\mathrm{PB}^2$　ゆえに　$\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = \sqrt{3} : \sqrt{2} \quad \cdots ③$

$\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = r : 1 - r$ であるから　　$r : 1 - r = \sqrt{3} : \sqrt{2}$

よって　　$\boldsymbol{r = 3 - \sqrt{6}}$

(3) ①，③ より　　$\mathrm{PC} : \mathrm{PA} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$

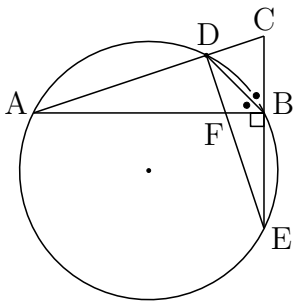
E は ∠CPA の二等分線と線分 CA の交点であるから

$$\mathrm{CE} : \mathrm{AE} = \mathrm{PC} : \mathrm{PA} \qquad \text{したがって} \qquad t : \mathrm{AE} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{AE} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}t}$

7.21 (1) $\angle ABC = 90^\circ$ から，三平方の定理により

$$CA = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$



BD は $\angle ABC$ の二等分線であるから

$$AD : DC = AB : BC = 3 : 1$$

よって　$AD = \dfrac{3}{3+1}CA = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}\sqrt{10}}$

(2) また，$CD = \dfrac{1}{3+1}CA = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$　方べきの定理により　$CB \cdot CE = CD \cdot CA$

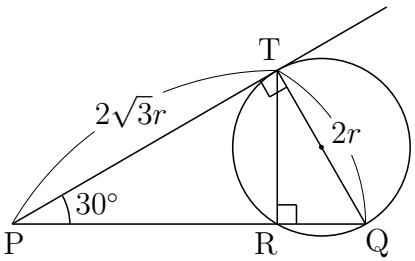
したがって　$1 \cdot (1 + BE) = \dfrac{\sqrt{10}}{4} \cdot \sqrt{10}$　これを解いて　$\boldsymbol{BE = \dfrac{3}{2}}$

(3) $\angle ABE = 90^\circ$ であるから，AE は $\triangle ABE$ の外接円の直径である．
また，D はこの円周上の点であるから　$\angle ADE = 90^\circ$
したがって　$\triangle ABC \backsim \triangle ADF$　ゆえに　$AC : AB = AF : AD$ より

$$\sqrt{10} : 3 = AF : \frac{3}{4}\sqrt{10}$$　これを解いて　$\boldsymbol{AF = \dfrac{5}{2}}$

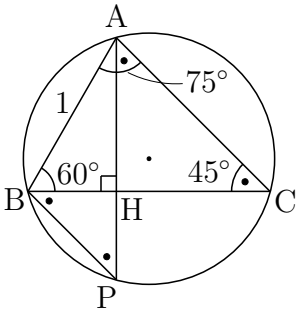
7.22 直角三角形 TPQ において，
$TQ = 2r$ より　$PT = 2\sqrt{3}r$
直角三角形 TPR により

$$PR = PT\cos 30^\circ$$
$$= 2\sqrt{3}r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{3r}$$



7.23 AP と BC の交点を H とすると，

$$AH = AB\sin 60^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$BH = AB\cos 60^\circ = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



右の図から　$HP = BH = \dfrac{1}{2}$

よって　$AP = AH + HP = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}}$

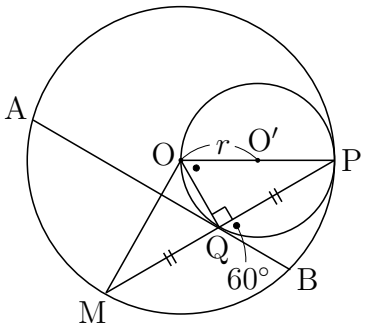
7.24 Q は弦 AB と円 O′ の接点であるから

$$\angle POQ = \angle PQB = 60^\circ$$

弦 OP は，円 O′ の直径であるから

$$\angle OQP = 90^\circ$$

△OMQ ≡ △OPQ であるから



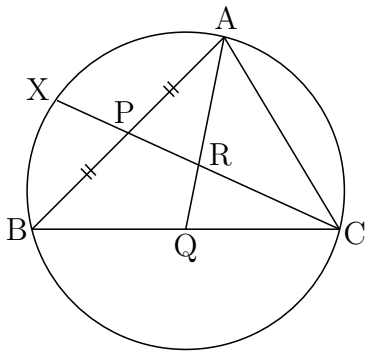
$$QM = PQ = OP\sin 60^\circ = 2r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}\,r}$$

7.25 (1) △BCP と直線 AQ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RP}\cdot\frac{PA}{AB} = 1$$

ゆえに　$\dfrac{1}{b}\cdot a\cdot\dfrac{1}{2} = 1$

よって　$\boldsymbol{a = 2b}$



(2) CQ = QB より，R は △ABC の重心であるから

$$CR = 2k,\quad RP = k\quad (k \text{ は定数})$$

とおくと，AP = CR より　AP = PB = $2k$

方べきの定理により

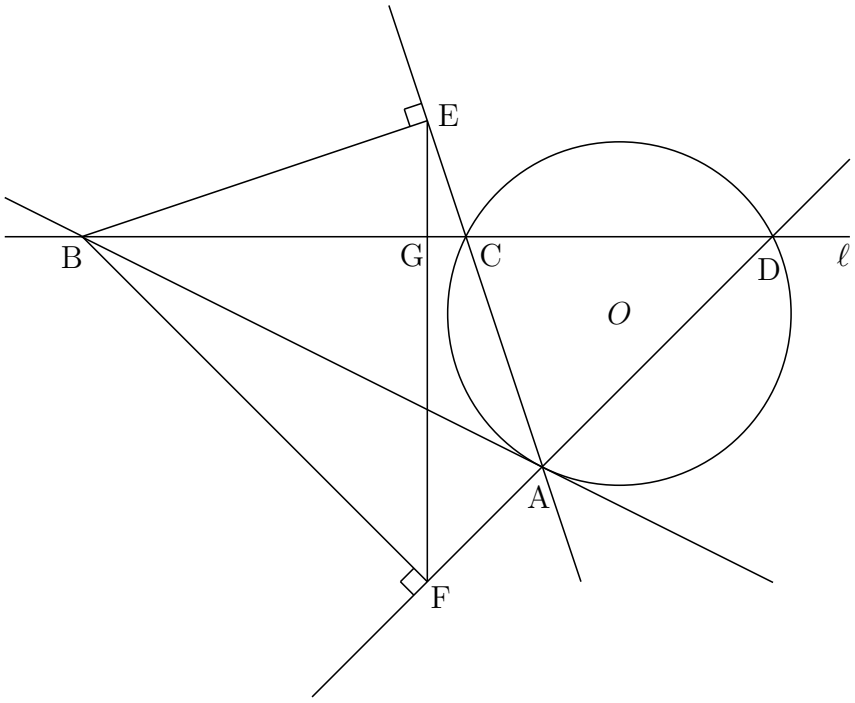
$$AP\cdot PB = CP\cdot PX \quad \text{ゆえに} \quad 2k\cdot 2k = 3k\cdot PX$$

したがって　$PX = \dfrac{4}{3}k$

よって　$CR : RP : PX = 2k : k : \dfrac{4}{3}k = \boldsymbol{6 : 3 : 4}$

7.26 (1) 接弦定理により　∠ADC = ∠BAE

四角形 BFAE は AB を直径の両端とする円に内接するから，円周角の定理により　∠BFE = ∠BAE　よって　∠BFE = ∠ADC



(2) BD と EF の交点を G とし，△GFD について

$$\angle BGF = \angle GFD + \angle GDF$$

(1) の結果より，$\angle GDF = \angle BFG$ であるから

$$\angle BGF = \angle GFD + \angle BFG = \angle BFD = 90^\circ$$

よって　　BD⊥EF

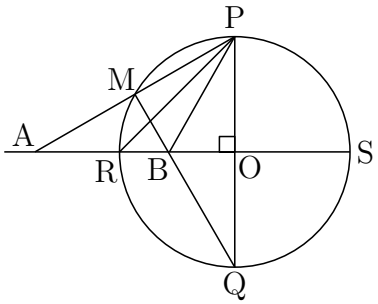
7.27 (1) 円 O の半径を r とする．PA = PQ より，直角三角形 APO について，$PA = 2r$，$PO = r$ であるから　　$\angle APO = 60^\circ$

PQ は円 O の直径であるから　$\angle PMQ = 90^\circ$

ゆえに　$PM = PQ\cos 60^\circ = 2r\cdot\dfrac{1}{2} = r$

よって　$PA : PM = 2r : r = 2 : 1$

したがって，M は PA の中点である．



(2) (1) の結果から，△PQM について

$$\angle PQM = 180^\circ - (\angle MPQ + \angle PMQ) = 30^\circ$$

△PBO ≡ △QBO であるから　　$\angle BPO = 30^\circ$

ゆえに　$\mathrm{PB}=\dfrac{\mathrm{PO}}{\cos 30^\circ}=\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$　　よって　$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=2r:\dfrac{2r}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{3}:1}$

また　$\mathrm{AR}=\mathrm{AO}-\mathrm{RO}=\mathrm{AP}\sin 60^\circ-\mathrm{RO}=\sqrt{3}\,r-r=(\sqrt{3}-1)r$

$$\mathrm{RB}=\mathrm{RO}-\mathrm{BO}=\mathrm{RO}-\mathrm{PO}\tan 30^\circ=r-\frac{r}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}r$$

よって　　$\mathrm{AR}:\mathrm{RB}=(\sqrt{3}-1)r:\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}r=\boldsymbol{\sqrt{3}:1}$

(3) (2) の結果から　$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=\mathrm{AR}:\mathrm{RB}$

よって，PR は ∠APB の二等分線である．

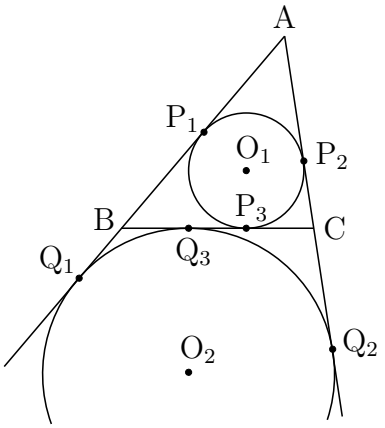
7.28　(1) A から $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ に引いた 2 接線により

$$\mathrm{AP_1}=\mathrm{AP_2},\quad \mathrm{AQ_1}=\mathrm{AQ_2}$$

第 2 式から第 1 式の辺々の差をとると

$$\mathrm{AQ_1}-\mathrm{AP_1}=\mathrm{AQ_2}-\mathrm{AP_2}$$

よって　　$\mathrm{P_1Q_1}=\mathrm{P_2Q_2}$



(2) B から $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ に引いた 2 接線により　$\mathrm{BP_3}=\mathrm{BP_1},\quad \mathrm{BQ_3}=\mathrm{BQ_1}$

上の 2 式の辺々を加えると　　$\mathrm{BP_3}+\mathrm{BQ_3}=\mathrm{BP_1}+\mathrm{BQ_1}=\mathrm{P_1Q_1}$　　$\cdots$①

C から $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ に引いた 2 接線により　$\mathrm{CP_3}=\mathrm{CP_2},\quad \mathrm{CQ_3}=\mathrm{CQ_2}$

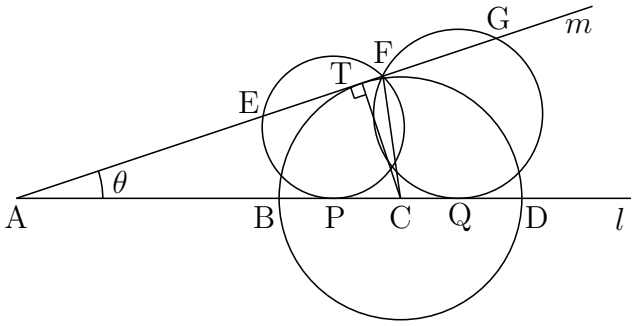
上の 2 式の辺々を加えると　　$\mathrm{CP_3}+\mathrm{CQ_3}=\mathrm{CP_2}+\mathrm{CQ_2}=\mathrm{P_2Q_2}$　　$\cdots$②

①，② および (1) の結果から　　$\mathrm{BP_3}+\mathrm{BQ_3}=\mathrm{CP_3}+\mathrm{CQ_3}$

7.29　(1) 方べきの定理により

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF}=(1-r)\cdot 1=1-r$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{AP}=\sqrt{1-r}}$



(2) $\theta = \angle\mathrm{FAC}$ とおいて，△FAC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CF}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CF} = \sqrt{2 - 2\cos\theta}$$

$\mathrm{CT} = \mathrm{AC}\sin\theta$ より

$$r = 1\cdot\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - r^2}$$

よって　　$\mathbf{CF = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - r^2}}}$

(3) 方べきの定理により

$$\mathrm{AQ}^2 = \mathrm{AF}\cdot\mathrm{AG} = 1\cdot(1 + r) = 1 + r \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AQ} = \sqrt{1 + r}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \mathrm{AQ} - \mathrm{AP} = \sqrt{1 + r} - \sqrt{1 - r}\\ \mathrm{PQ}^2 &= (\sqrt{1 + r} - \sqrt{1 - r})^2\\ &= (1 + r) - 2\sqrt{1 + r}\sqrt{1 - r} + (1 - r)\\ &= 2 - 2\sqrt{1 - r^2}\end{aligned}$$

したがって　　$\mathrm{PQ} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - r^2}}$

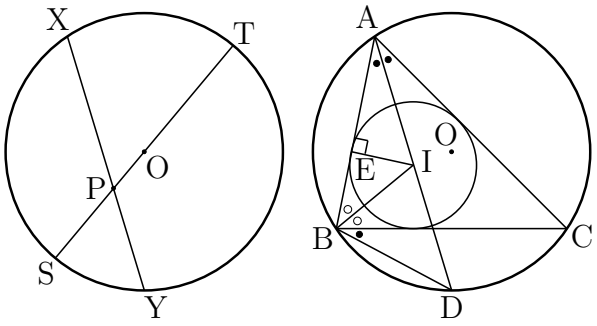
よって，上式および (2) の結果から　　PQ=CF

7.30 (1) 直線 OP と円の交点を S，T とすると，方べきの定理により

$$\mathrm{XP}\cdot\mathrm{YP} = \mathrm{SP}\cdot\mathrm{TP} = (R - \mathrm{OP})(R + \mathrm{OP}) = R^2 - \mathrm{OP}^2$$

よって　　$\mathrm{OP}^2 = R^2 - \mathrm{XP}\cdot\mathrm{YP}$

図 I　　図 II



(2) (A) △ABC において，$A=2\alpha$，$B=2\beta$ とする．
∠CAD，∠CBD は，弦 CD に対する円周角であるから

$$\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{CBD}\quad\text{ゆえに}\quad\angle\mathrm{DBI}=\alpha+\beta\quad\cdots①$$

∠DIB は，∠AIB の外角であるから

$$\angle\mathrm{DIB}=\angle\mathrm{IAB}+\angle\mathrm{IBA}=\alpha+\beta\quad\cdots②$$

①，② より △DBI は，二等辺三角形であるから　DB = DI

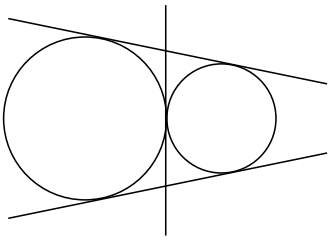
(B) $r=\mathrm{IE}$ であるから，△AIE について　$\mathrm{AI}\sin\alpha=r\quad\cdots③$
△ABD に正弦定理を適用すると　$\dfrac{\mathrm{DB}}{\sin\alpha}=2R$
(A) の結果から DB = DI であるから　$\dfrac{\mathrm{DI}}{\sin\alpha}=2R\quad\cdots④$
③，④ の辺々をかけると　　$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI}=2Rr$

(C) 図 I の X，Y，P に図 II の A，D，I をそれぞれ適用すると，
(1) の結果から

$$\mathrm{OI}^2=R^2-\mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI}$$

これに (B) の結果を代入すると　　$\mathrm{OI}^2=R^2-2Rr$

7.31 共通接線が 3 本引けるのは，2 円が外接するときで，次の図のようになる．



8.1 $\left(x-\dfrac{5}{x^2}\right)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_k x^{6-k}\left(-\frac{5}{x^2}\right)^k={}_6\mathrm{C}_k(-5)^k x^{6-3k}$$

定数項 (x を含まない項) は，$6-3k=0$，すなわち $k=2$ より

$${}_6\mathrm{C}_2(-5)^2=\mathbf{375}$$

8.2 $(x-3y+2z)^7$ の展開式における x^4y^2z の項は

$$\frac{7!}{4!2!1!}x^4(-3y)^2\cdot 2z=1890x^4y^2z$$

よって，x^4y^2z の係数は　**1890**

8.3 $(2x-y+z)^8$ の展開式における $x^2y^3z^3$ の項は

$$\frac{8!}{2!3!3!}(2x)^2(-y)^3z^3 = -2240x^2y^3z^3$$

よって，$x^2y^3z^3$ の係数は　**-2240**

8.4 (1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ の展開式の一般項は

$${}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = {}_n\mathrm{C}_k x^{n-2k} \quad (0 \leqq k \leqq n)$$

したがって，$n-2k=0$ より　　**n は偶数**

(2) $A = x+\dfrac{1}{x}$ とおくと　$\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7 = (1+A)^7$

$(1+A)^7$ の展開式の一般項は

$${}_7\mathrm{C}_n 1^{7-n}A^n = {}_7\mathrm{C}_n A^n \quad (0 \leqq n \leqq 7)$$

$\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の定数項の一般項は，上式および (1) の結果から

$${}_7\mathrm{C}_n \cdot {}_n\mathrm{C}_k \quad (n=2k,\ k=0,1,2,3)$$

よって，求める定数項は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3} {}_7\mathrm{C}_{2k}\cdot{}_{2k}\mathrm{C}_k &= {}_7\mathrm{C}_0\cdot{}_0\mathrm{C}_0 + {}_7\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1 + {}_7\mathrm{C}_4\cdot{}_4\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_6\cdot{}_6\mathrm{C}_3 \\ &= 1\times 1 + 21\times 2 + 35\times 6 + 7\times 20 \\ &= \mathbf{393}\end{aligned}$$

別解　(大分大学 2010) 2

8.5 (1) 2 項定理により

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k \qquad \cdots(*)$$

これに $x=1$ を代入することにより

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n - 1$$

条件により　$2^n-1=127$　ゆえに　$2^n=2^7$　よって　**$n=7$**

(2) $(*)$ に $x=30$，$n=17$ を代入すると

$$\begin{aligned}31^{17} &= \sum_{k=0}^{17} {}_{17}\mathrm{C}_k \cdot 30^k \\ &= 1 + {}_{17}\mathrm{C}_1 \cdot 30 + 30^2 \sum_{k=2}^{17} {}_{17}\mathrm{C}_k \cdot 30^{k-2} \\ &= 511 + 900 \sum_{k=2}^{17} {}_{17}\mathrm{C}_k \cdot 30^{k-2}\end{aligned}$$

よって，31^{17} を 900 で割った余りは　**511**

8.6　(1) $2 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned}k(k-1){}_n\mathrm{C}_k &= k(k-1) \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1) \times \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} = \boldsymbol{n(n-1)\cdot 2^{n-2}}\end{aligned}$$

(3) $1 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned}k\,{}_n\mathrm{C}_k &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\end{aligned}$$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\cdot 2^{n-1}$

したがって，上式および (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k \\ &= n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1} \\ &= \boldsymbol{n(n+1)\cdot 2^{n-2}}\end{aligned}$$

8.7 (1) $A_9 = \{{}_9\mathrm{C}_1,\ {}_9\mathrm{C}_2,\ {}_9\mathrm{C}_3,\ {}_9\mathrm{C}_4\}$
$= \{9,\ 36,\ 84,\ 126\}$

求める要素の和は　$9 + 36 + 84 + 126 = \mathbf{255}$

(2) n は 3 以上の奇数であるから，$n = 2l + 1$ (l は自然数) とおくと

$$A_n = \{{}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_l\}$$

自然数 k を $1 \leqq k < l$ とすると

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_{k+1} - {}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!\{(n-k)-(k+1)\}}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\{(2l-1)-2k-1\}}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!\cdot 2(l-k)}{(k+1)!(n-k)!} > 0\end{aligned}$$

ゆえに　　${}_n\mathrm{C}_1 < {}_n\mathrm{C}_2 < \cdots < {}_n\mathrm{C}_l$

よって，A_n 内の最大の数は ${}_n\mathrm{C}_l$，すなわち ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ である．

(3) 2 項定理により　${}_n\mathrm{C}_0 + \sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=l+1}^{2l} {}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$　$\cdots$①

ここで　　$\sum_{k=l+1}^{2l} {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=n-l}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_{n-k} = \sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_k$　$\cdots$②

② を ① に代入して整理すると　　$\sum_{k=1}^{l} {}_n\mathrm{C}_k = 2^{n-1} - 1$

n は 3 以上の奇数であるから，A_n の和が奇数である．

よって，A_n 内の奇数の個数 m は，奇数である．

8.8 (1) $f(m,\ n) = {}_{m+n}\mathrm{C}_m - mn - 2$ $(m \leqq n)$ とおくと

$$f(1,\ n) = (1+n) - 1\cdot n - 2 = -1$$
$$f(2,\ n) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) - 2n - 2 = \frac{1}{2}(n+1)(n-2)$$

$f(m,\ n) = 0$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めればよいから

$$\boldsymbol{(m,\ n) = (2,\ 2)}$$

(2) 正の整数 $l = 2, 3, \cdots, m-1$ について

$$\begin{aligned} {}_{m+n}\mathrm{C}_{l+1} - {}_{m+n}\mathrm{C}_l &= \frac{(m+n)!}{(l+1)!(m+n-l-1)!} - {}_{m+n}\mathrm{C}_m \\ &= \frac{m+n-l}{l+1}\cdot {}_{m+n}\mathrm{C}_m - {}_{m+n}\mathrm{C}_m \\ &= \frac{m+n-2l-1}{l+1}\cdot {}_{m+n}\mathrm{C}_m \\ &= \frac{n-m+2(m-1-l)+1}{l+1}\cdot {}_{m+n}\mathrm{C}_m > 0 \end{aligned}$$

ゆえに　　${}_{m+n}\mathrm{C}_2 < {}_{m+n}\mathrm{C}_3 < \cdots < {}_{m+n}\mathrm{C}_{m-1} < {}_{m+n}\mathrm{C}_m$

したがって，$2 \leqq m \leqq n$ を満たす整数 $m,\ n$ について次式が成立する．

$$ {}_{m+n}\mathrm{C}_m - {}_{m+n}\mathrm{C}_2 \geqq 0 \qquad (*)$$

ただし，上式について等号が成立するとき，$m = 2$ である．

$$f(m,\ n) = {}_{m+n}\mathrm{C}_m - {}_{m+n}\mathrm{C}_2 + {}_{m+n}\mathrm{C}_2 - mn - 2$$

とすると，$2 \leqq m \leqq n$ であるから

$$\begin{aligned} {}_{m+n}\mathrm{C}_2 - mn - 2 &= \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1) - mn - 2 \\ &= \frac{1}{2}(m+1)(m-2) + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \geqq 0 \qquad (**) \end{aligned}$$

が成立する．ただし，等号が成立するとき，$m = n = 2$ である．

$(*)$，$(**)$ から，$f(m,\ n) = 0$ となるのは，(1) の結果に限る．

別解 1 (1) で $1 \leqq m \leqq 2$ のとき，$(m,\ n) = (2,\ 2)$ がただ 1 つの解である．

$m \geqq 3$ のとき，$(m,\ n)$ の解が存在しないことを示せばよい．

$m \geqq 3$ のとき　　${}_{m+n}\mathrm{C}_2 < {}_{m+n}\mathrm{C}_3 < \cdots < {}_{m+n}\mathrm{C}_m$

また　　${}_{m+n}\mathrm{C}_2 - (mn+2) = \dfrac{1}{2}\{n(n-1) + m(m-1) - 4\}$

$n \geqq m \geqq 3$ より　$n(n-1) \geqq m(m-1) \geqq 3 \cdot 2 > 4$

よって　　${}_{m+n}\mathrm{C}_2 > mn + 2$

別解 2 与えられた等式から

$$g(m,\ n) = \frac{{}_{m+n}\mathrm{C}_m}{mn+2} = \frac{(m+n)!}{m!n!(mn+2)}$$

とおく．(1) の結果から $g(m,\ n) = 1$ を満たす整数 $m,\ n$ $(2 \leqq m \leqq n)$ を求めればよい．

$$\begin{aligned}
\frac{g(m,\ n+1)}{g(m,\ n)} - 1 &= \frac{(m+n+1)(mn+2)}{(n+1)(mn+m+2)} - 1 \\
&= \frac{\{(n+1)+m\}(mn+2)}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} - 1 \\
&= \frac{m(mn+2) - m(n+1)}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} \\
&= \frac{m\{(m-1)n+1\}}{(n+1)\{(mn+2)+m\}} > 0
\end{aligned}$$

$g(m,\ n+1) > g(m,\ n)$ であるから，m を固定すると，$g(m,\ n)$ は n について単調増加．また，$g(m,\ n)$ は m，n の対称式であるから，同様に n を固定すると，$g(m,\ n)$ は m について単調増加．したがって

$$g(m,\ n) \geqq g(2,\ 2) = 1$$

が成立する．ただし，等号が成立するとき，$m = n = 2$ である．

よって，求める正の整数の組 $(m,\ n)$ は (1) の結果に限る．

8.9 $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ より

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$$

よって，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ．

8.10 $x+y=1$ に注意して

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}$$
$$=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{2}{xy} \quad \cdots ①$$

$x>0$，$y>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$1=x+y\geqq 2\sqrt{xy} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{xy}\geqq 8 \quad \cdots ②$$

①，② より $\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqq 9$

また，等号が成立するのは，② より，次のときである．

$$x=y \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=y=\frac{1}{2}}$$

8.11 (1) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$=(bz-cy)^2+(az-cx)^2+(ay-bx)^2\geqq 0$

よって $\quad (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq (ax+by+cz)^2$

(2) (1) の不等式に $a=b=c=1$ を代入すると

$$3(x^2+y^2+z^2)\geqq (x+y+z)^2$$

$x+y+z=1$ であるから $\quad x^2+y^2+z^2\geqq \frac{1}{3}$

よって，$x^2+y^2+z^2$ の最小値は $\quad \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

別解 (福岡教育大学 2011) 1

8.12 (1) $\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$=\{(x+y)+z\}\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2-3xy\}$
$=\{(x+y)+z\}\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2\}-3xy\{(x+y)+z\}$
$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y)-3xyz$
$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

(2) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ のとき

$$(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geqq 0$$

等号が成立するのは，$x=y=z$ のときである．

(1) の結果から $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ のとき

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geqq 0 \quad (\text{等号が成立するのは } x=y=z \text{ のとき})$$

$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0$ より，上式に $x=\sqrt[3]{a},\ y=\sqrt[3]{b},\ z=\sqrt{3}$ を代入すると

$$a+b+c-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b} \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

また，上式において等号が成立するのは，次のときである．

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c} \quad \text{すなわち} \quad a=b=c$$

(3) (2) の結果から $\dfrac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geqq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$

ゆえに $(s-a)(s-b)(s-c) \leqq \dfrac{1}{27}\{3s-(a+b+c)\}^3 = \dfrac{s^3}{27}$

したがって $s(s-a)(s-b)(s-c) \leqq \dfrac{s^4}{27}$

よって $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leqq \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$

また，上式において，等号が成立するのは，次のときである．

$$s-a=s-b=s-c \quad \text{すなわち} \quad a=b=c$$

よって，面積が $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となるのは，三角形が正三角形のときである．

8.13 (1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とすると

$$\begin{cases} 2m=2+n & \cdots ① \\ 3n=\max(4+m,\ 2+n) & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より $3n=4+m$ ゆえに $m=3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと $m=n=2$

(ii) $4+m<2+n$ のとき，② より $3n=2+n$ ゆえに $n=1$
これを ① に代入すると，$m=\dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2+2)g(-x) + 7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　　$g(-x) = g(x)$　$\cdots$③

また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(-x) - 6x^2 - 2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　　$f(-x) = f(x)$

また，$(*)$ に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0) + 7,\quad g(0) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 3$$

以上の結果から，$f(x) = ax^2 + 3$，$g(x) = px^2 - 2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4 + 3 = (x^2+2)(px^2-2) + 7 \\ px^6 - 2 = x^4(ax^2+3) - 3x^2(px^2-2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

整理すると　　$\begin{cases} ax^4 = px^4 + 2(p-1)x^2 \\ px^6 = ax^6 - 3(p-1)x^4 \end{cases}$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = p,\quad p - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = p = 1$$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 3,\ \ g(x) = x^2 - 2}$

8.14 (1) $a,\ b \geqq 0$ より，$\dfrac{a}{1+a} \geqq \dfrac{a}{1+a+b}$，$\dfrac{b}{1+b} \geqq \dfrac{b}{1+a+b}$ の辺々を加えると

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geqq \frac{a+b}{1+a+b}$$

(2) $a + b \geqq c \geqq 0$ より，$\dfrac{1}{1+a+b} \leqq \dfrac{1}{1+c}$ であるから

$$1 - \frac{1}{1+a+b} \geqq 1 - \frac{1}{1+c} \quad \text{すなわち} \quad \frac{a+b}{1+a+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

上式および (1) の結果から　　$\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} \geqq \dfrac{c}{1+c}$

(3) $a_k \geqq 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ であるから，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+a_k} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+S_n} = \frac{S_n}{1+S_n} \quad \cdots ①$$

$S_n \geqq c \geqq 0$ より，$\dfrac{1}{1+S_n} \leqq \dfrac{1}{1+c}$ であるから

$$1 - \frac{1}{1+S_n} \geqq 1 - \frac{1}{1+c} \quad \text{すなわち} \quad \frac{S_n}{1+S_n} \geqq \frac{c}{1+c} \quad \cdots ②$$

①，② から $\quad \dfrac{a_1}{1+a_1} + \dfrac{a_2}{1+a_2} + \cdots + \dfrac{a_n}{1+a_n} \geqq \dfrac{c}{1+c}$

9.1 与えられた方程式から

$$x^2 - x - 2 + (x^2 - 3x + 2)i = 0$$

ゆえに $\quad (x-2)(x+1) + (x-2)(x-1)i = 0$

x は，実数であるから

$$(x-2)(x+1) = 0 \ \text{かつ} \ (x-2)(x-1) = 0$$

よって $\quad \boldsymbol{x = 2}$

9.2 実数を係数とする 2 次方程式 $x^2 + ax + 4 = 0$ が $-1 + bi$ を解にもつとき，これと共役な複素数 $-1 - bi$ も解にもつので，解と係数の関係により

$$(-1+bi) + (-1-bi) = -a, \quad (-1+bi)(-1-bi) = 4$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{a = 2,\ b = \pm\sqrt{3}}$

9.3 $P(x)$ を $6x^2 + 11x - 35$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax + b$ とおくと

$$\begin{aligned} P(x) &= (6x^2 + 11x - 35)Q(x) + ax + b \\ &= (3x-5)(2x+7)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$P\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$，$P\left(-\dfrac{7}{2}\right) = -\dfrac{5}{2}$ であるから

$$\frac{5}{3}a + b = \frac{8}{3}, \quad -\frac{7}{2}a + b = -\frac{5}{2}$$

これを解いて $\quad a = b = 1 \quad$ よって，求める余りは $\quad \boldsymbol{x + 1}$

9.4 (1) 3 次式 $P(x)$ の x^3 の係数が 1 で $(x-1)^2$ で割り切れるので

$$P(x) = (x-1)^2(x+a) \quad \cdots ①$$

とおける (a は定数).

$P(x)$ を x^2-x-2 で割った商を $Q(x)$ とし，余りは，$P(x)$ を $x+1$ で割った余り $P(-1)$ に等しいので，次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-x-2)Q(x) + P(-1) \\ &= (x+1)(x-2)Q(x) + P(-1) \end{aligned}$$

これに $x=2$ を代入すると　$P(2) = P(-1)$　$\cdots ②$

①，② より　　$(2-1)^2(2+a) = (-1-1)^2(-1+a)$

これを解いて　$a=2$　よって　$\boldsymbol{P(x) = (x-1)^2(x+2)}$

(2) (1) の結果から

$$P(x) = x^3 - 3x + 2 = (x+1)^2(x-2) + 4$$

したがって

$$\begin{aligned} \{P(x)\}^2 &= \{(x+1)^2(x-2)+4\}^2 \\ &= (x+1)^4(x-2)^2 + 8(x+1)^2(x-2) + 16 \\ &= (x+1)^2\{(x+1)^2(x-2)^2 + 8(x-2)\} + 16 \end{aligned}$$

よって，$\{P(x)\}^2$ を $(x+1)^2$ で割った余りは　**16**

9.5 (1) 求める余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x) = (x^2-x-6)Q(x) + ax + b$$

このとき，$Q(x)$ は最高次の係数が 1 の 3 次式である.

$P(-2) = -10$，$P(3) = 5$ であるから

$$-2a + b = -10, \quad 3a + b = 5$$

これを解いて　$a=3$，$b=-4$　よって，求める余りは　$\boldsymbol{3x-4}$

(2) 3 次式 $Q(x)$ を $x-2$ で割ったときの商 $R(x)$ は，最高次の係数が 1 の 2 次式である．$Q(2) = 2$ より

$$Q(x) = (x-2)R(x) + 2$$

また，$Q(-2)=2$ であるから

$$(-2-2)R(-2)+2=2 \quad \text{ゆえに} \quad R(-2)=0$$

2 次式 $R(x)$ は，$x+2$ を因数にもつので，x^2 の係数に注意して

$$R(x)=(x+2)(x+c)$$

とおける．$R(-3)=2$ より

$$(-3+2)(-3+c)=2 \quad \text{ゆえに} \quad c=1$$

よって　$R(x)=(x+2)(x+1)=\boldsymbol{x^2+3x+2}$

(3) (2) の結果から　$Q(x)=(x-2)(x^2+3x+2)+2$
$=x^3+x^2-4x-2$

これを (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-x-6)(x^3+x^2-4x-2)+3x-4\\&=\boldsymbol{x^5-11x^3-4x^2+29x+8}\end{aligned}$$

9.6 (1) $P(x)$ を $(x+1)^2$，$(x-1)^2$ で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると，条件から

$$(*)\begin{cases}P(x)=(x+1)^2Q_1(x)-x+4\\P(x)=(x-1)^2Q_2(x)+2x+5\end{cases}$$

$P(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$，余りを $mx+n$ とおくと

$$P(x)=(x+1)(x-1)Q_3(x)+mx+n$$

上式に $x=-1,\ 1$ を代入すると　$P(-1)=-m+n$，$P(1)=m+n$
$(*)$ から，$P(-1)=5$，$P(1)=7$ であるから

$$-m+n=5, \quad m+n=7 \quad \text{これを解いて} \quad m=1,\ n=6$$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{x+6}$

(2) $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $2x+5$ であるから，$P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割った商を $Q_4(x)$，余りを $p(x-1)^2+2x+5$ とおくと

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)(x-1)^2Q_4(x)+p(x-1)^2+2x+5\\&=(x+1)(x-1)\{(x-1)Q_4(x)+p\}+(-2p+2)x+(2p+5)\end{aligned}$$

上の第 2 式と (1) の結果から　$-2p+2=1$，$2p+5=6$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{2}$

よって，求める余りは　$\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2x+5=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{11}{2}}$

別解 $P(-1)=5$ を上の第 1 式に代入すると　$4p+3=5$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{2}$

(3) (2) の結果から，$P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割った商を $Q_5(x)$，
余りを $q(x+1)(x-1)^2+\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{11}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)^2(x-1)^2Q_5(x)+q(x+1)(x-1)^2+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}\\&=(x+1)^2(x-1)^2Q_5(x)+q(x+1)\{(x+1)(x-3)+4\}+\frac{1}{2}(x+1)^2+5\\&=(x+1)^2\left\{(x-1)^2Q_5(x)+q(x-3)+\frac{1}{2}\right\}+4qx+4q+5\end{aligned}$$

$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $-x+4$ であるから

$$4q=-1,\ \ 4q+5=4\quad\text{ゆえに}\quad q=-\frac{1}{4}$$

よって，求める余りは

$$-\frac{1}{4}(x+1)(x-1)^2+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{21}{4}}$$

別解 $(*)$ の第 1 式を微分すると

$$P'(x)=2(x+1)Q_1(x)+(x+1)^2Q_1'(x)-1 \quad \text{ゆえに} \quad P'(-1)=-1$$

前ページで示した等式

$$P(x)=(x+1)^2(x-1)^2Q_5(x)+q(x+1)(x-1)^2+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}$$

を微分すると

$$\begin{aligned}P'(x)=&\{(x+1)^2(x-1)^2Q_5(x)\}'\\&+q\{(x-1)^2+2(x+1)(x-1)\}+x+1\end{aligned}$$

ゆえに $P'(-1)=4q$ よって $p=-\dfrac{1}{4}$

解説 $(*)$ より $P(-1)=5$，$P(1)=7$，$P'(-1)=-1$，$P'(1)=2$

$P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^3+bx^2+cx+d とすると

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)^2(x-1)^2Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d\\P'(x)&=\{(x+1)^2(x-1)^2Q(x)\}'+3ax^2+2bx+c\end{aligned}$$

上の 2 式に $x=-1,\ 1$ を代入して

$$\begin{aligned}-a+b-c+d=5,&\quad a+b+c+d=7\\3a-2b+c=-1,&\quad 3a+2b+c=2\end{aligned}$$

これを解いて $a=-\dfrac{1}{4},\ b=\dfrac{3}{4},\ c=\dfrac{5}{4},\ d=\dfrac{21}{4}$

$$P(x)=(x+1)^2(x-1)^2Q(x)-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{21}{4}$$

ここで，$R(x)=-\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{5}{4}x+\dfrac{21}{4}$ とおく．

$R(x)$ をそれぞれ $(x+1)(x-1)$，$(x+1)(x-1)^2$ で割ることにより

$$\begin{aligned}R(x)&=(x+1)(x-1)\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)+x+6,\\R(x)&=(x+1)(x-1)^2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}\end{aligned}$$

よって，$P(x)$ を $(x+1)(x-1)$，$(x+1)(x-1)^2$ で割った余りは，それぞれ

$$x+6,\quad \frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}$$

9.7 $x^3-ax-6=0\cdots(*)$ が $x=-1$ を解にもつから

$$(-1)^3-a(-1)-6=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=7}$$

これを $(*)$ に代入すると

$$x^3-7x-6=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x+2)(x-3)=0$$

よって，求める他の解は　$\boldsymbol{x=-2,\ 3}$

9.8 与えられた条件から

$$1-(a+b+c)=0, \quad ab+bc+ca-abc=0$$

ここで，$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ とおくと，3 次方程式 $f(x)=0$ の解は，a，b，c である．このとき，上の 2 式より

$$\begin{aligned} f(1)&=(1-a)(1-b)(1-c)\\ &=1-(a+b+c)+ab+bc+ca-abc\\ &=0 \end{aligned}$$

したがって，1 は，$f(x)=0$ の解である．

よって，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 1 に等しい．

9.9 4 次方程式 $x^4+ax^3+14x^2+16x+b=0$ が $x=-2$ を 2 重解としてもつから

$$x^4+ax^3+14x^2+16x+b=(x^2+4x+4)(x^2+px+q) \quad \cdots(*)$$

とおいて (p，q は定数)，右辺を展開すると

$$x^4+ax^3+14x^2+16x+b=x^4+(p+4)x^3+(4p+q+4)x^2+(4p+4q)x+4q$$

となる．上式は，x に関する恒等式であるから，2 次の項と 1 次の項の係数を比較すると

$$14=4p+q+4, \quad 16=4p+4q \quad \text{これを解いて} \quad p=2,\ q=2$$

また，3 次の項の係数と定数項を比較して

$$a=p+4, \quad b=4q \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=6,\ b=8}$$

求める他の解は $(*)$ より，$x^2+2x+2=0$ を解いて　$\boldsymbol{x=-1\pm i}$

別解 (福岡教育大学 2013) 1

9.10 (1) $P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの商を $S(x)$ とすると

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x) \qquad \cdots ①$$
$$R(x) = P(x) - Q(x)S(x) \qquad \cdots ②$$

② より，$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解は，$R(x) = 0$ の解である．
① より，$Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解は，$P(x) = 0$ の解である．
よって，上の 1 番目の結論から
$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解は，$Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解である．
また，上の 2 番目の結論から
$Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解は，$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解である．

(2) $P(x)$ を $Q(x)$ で割ることにより　$P(x) = xQ(x) + x^2 + x - 1$

$P(x)$ を $Q(x)$ で割った余りを $R(x)$ とすると　$R(x) = x^2 + x - 1$

$Q(x)$ を $R(x)$ で割ることにより　$Q(x) = R(x)(x + 1)$

(1) の結果から，$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解であることと $Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解であることは同値である．したがって，$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解は，$Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解であるから

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

9.11 $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ とおく．$P(x)$ を $x^2 - 2x + 5$ で割った商と余りは，それぞれ $2x + a + 4$，$(2a + b - 2)x + (-5a + c - 20)$ であるから

$$P(x) = (x^2 - 2x + 5)(2x + a + 4) + (2a + b - 2)x + (-5a + c - 20) \qquad \cdots (*)$$

$z = 1 - 2i$ とすると，$P(z) = 0$，$z^2 - 2z + 5 = 0$ であるから

$$(2a + b - 2)z + (-5a + c - 20) = 0$$

$2a + b - 2$，$-5a + c - 20$ は実数であるから

$$2a + b - 2 = 0, \quad -5a + c - 20 = 0$$

これを $(*)$ に代入すると

$$P(x) = (x^2 - 2x + 5)(2x + a + 4)$$

$\overline{z} = 1 + 2i$ とすると　　$\overline{z}^2 - 2\overline{z} + 5 = 0$

したがって，$P(\overline{z}) = 0$ となる．よって，$1 + 2i$ も $P(x) = 0$ の解である．

参照 (九大 [理]2012) 4 の補足

9.12 実数を係数とする3次方程式の解の1つが $2+\sqrt{3}\,i$ であるから，他の解は $2-\sqrt{3}\,i$ で，これらを α，β とする．また残りの解を γ とおくと

$$\alpha+\beta=4,\quad \alpha\beta=7$$

3次方程式 $x^3+ax^2+bx-14=0$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\quad \alpha\beta\gamma=14$$

したがって

$$\begin{array}{lll}(\alpha+\beta)+\gamma=-a & \alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)=b & \alpha\beta\cdot\gamma=14\\ 4+\gamma=-a & 7+4\gamma=b & 7\gamma=14\end{array}$$

上の第3式から　$\gamma=2$　これを第1式，第2式に代入すると　$\boldsymbol{a=-6,\quad b=15}$

9.13 (1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ より　$\dfrac{x+y}{xy}=2$

$x+y=2$ であるから　$xy=1$

x，y を解とする2次方程式は　$t^2-2t+1=0$

これを解いて　$t=1$　よって　$\boldsymbol{x=y=1}$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$ より　$\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=3$

$xyz=1$ であるから　$xy+yz+zx=3$

上の2式および $x+y+z=3$ から，x，y，z を解とする3次方程式は

$$t^3-3t^2+3t-1=0\quad \text{これを解いて}\quad t=1$$

よって　$\boldsymbol{x=y=z=1}$

9.14 (1) $f(x)=x^4+6x^3-kx^2+2kx-64$ について

$$f(2)=2^4+6\cdot2^3-k\cdot2^2+2k\cdot2-64=0$$

因数定理により，$f(x)$ は $x-2$ を因数にもつ，すなわち，$f(x)$ は $x-2$ で割り切れる．

(2) (1) の結果から

$$f(x) = (x-2)\{x^3 + 8x^2 + (16-k)x + 32\}$$

条件から，3 次方程式 $x^3 + 8x^2 + (16-k)x + 32 = 0$ の解を $\alpha,\ \overline{\alpha},\ r$ とおくと，解と係数の関係から

$$\alpha\overline{\alpha}r = -32 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2 r = -32$$

したがって，r は負の実数．よって，$f(x) = 0$ は負の実数解をもつ．

(3) $\alpha = p + qi,\ \overline{\alpha} = p - qi$ とおく．条件から，$p,\ q,\ r$ は整数であり，解と係数の関係から

$$\begin{aligned} (p+qi) + (p-qi) + r &= -8, \\ (p+qi)(p-qi) + (p+qi)r + (p-qi)r &= 16-k, \\ (p+qi)(p-qi)r &= -32 \end{aligned}$$

これらをそれぞれ整理すると

$$2p + r = -8, \quad p^2 + q^2 + 2pr = 16 - k, \quad (p^2+q^2)r = -32 \qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式から，$r = -2p - 8 \cdots$①．これを $(*)$ の第 3 式に代入すると

$$(p^2+q^2)(p+4) = 16$$

上式において $p + 4 \geqq 1$ ($p+4$ は 16 の約数)，$p^2 < p^2 + q^2 \leqq 16$ より

$$p = -3, -2,\ 0$$

$p = -3$ のとき，$9 + q^2 = 16$ より，$q^2 = 7$ となり，不適
$p = -2$ のとき，$(4 + q^2)\cdot 2 = 16$ より，$q = 2$
$p = 0$ のとき，$4q^2 = 16$ より，$q = 2$

① より $\quad (p,\ q,\ r) = (-2,\ 2, -4),\ (0,\ 2, -8)$

$(*)$ の第 2 式より，$k = 16 - (p^2 + q^2 + 2pr)$ であるから $\quad \boldsymbol{k = -8,\ 12}$

9.15 ω は方程式 $x^3 - 1 = 0$ の解であるから $\qquad \omega^3 - 1 = 0 \quad \cdots$①

したがって $\qquad (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$

ω は虚数であるから，$\omega - 1 \neq 0$ より $\quad \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \cdots$②

①，② より $\qquad \omega^4 + \omega^2 + 1 = \omega^3\omega + \omega^2 + 1$

$$= \omega + \omega^2 + 1 = \mathbf{0}$$

9.16 $x^3 - a^3 = 0$ より　$(x-a)(x^2+ax+a^2) = 0$

虚数解 α，β は $x^2+ax+a^2=0$ の解であるから，これを解いて

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{3}\,ai}{2}$$

ゆえに　　$\alpha+\beta = -a$，$\alpha-\beta = \mp\sqrt{3}\,ai$

よって　　$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \dfrac{\mp\sqrt{3}\,ai}{-a} = \boldsymbol{\pm\sqrt{3}\,i}$

9.17　(1) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = \boldsymbol{t^2-2}$,

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = \boldsymbol{t^3-3t}$$

(2) (1) の最初の結果を用いると

$$\begin{aligned}\frac{2x^4-3x^3-5x^2-3x+2}{x^2} &= 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) - 5\\ &= 2(t^2-2) - 3t - 5\\ &= \boldsymbol{2t^2-3t-9}\end{aligned}$$

(3) $x=0$ は $2x^4-3x^3-5x^2-3x+2=0$ の解ではないので，この両辺を x^2 で割ると

$$\frac{2x^4-3x^3-5x^2-3x+2}{x^2} = 0$$

(2) の結果により　$2t^2-3t-9=0$　ゆえに　$t=3,\ -\dfrac{3}{2}$

$t=3$ のとき　　$x+\dfrac{1}{x}=3$ より　　$x^2-3x+1=0$　　$\cdots$①

$t=-\dfrac{3}{2}$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{2}$ より　$2x^2+3x+2=0$　$\cdots$②

①，② を解いて　$x = \boldsymbol{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{7}\,i}{4}}$

9.18　(1) 実数係数の 2 次方程式が $1+2i$ を解にもつとき，これと共役な複素数 $1-2i$ もこの方程式の解であるから，

$$(1+2i)+(1-2i) = 2,\quad (1+2i)(1-2i) = 5$$

よって，求める方程式は　$\boldsymbol{x^2-2x+5=0}$

(2) 実数係数の 4 次方程式 $x^4-x^3+2x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつので，これと共役な複素数 $1-2i$ もこの方程式の解である．したがって，(1) の結果から 4 次式 $x^4-x^3+2x^2+ax+b$ は x^2-2x+5 を因数にもつ．

$$x^4-x^3+2x^2+ax+b=(x^2-2x+5)(x^2+x-1)+(a-7)x+(b+5)$$

上式から　$a-7=0$，$b+5=0$　すなわち　$\boldsymbol{a=7,\ b=-5}$

9.19 (1) $p,\ q,\ \alpha,\ \beta$ は正の実数であるから，$\alpha\beta=\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ より　$p=3\sqrt[3]{\alpha\beta}$

$q=\alpha-\beta$ であるから，方程式 $x^3+px-q=0$ は

$$x^3+3\sqrt[3]{\alpha\beta}x-(\alpha-\beta)=0 \quad \cdots(*)$$

$x=\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$ を $(*)$ の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}(*)\text{ の左辺}&=(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})^3+3\sqrt[3]{\alpha\beta}(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})-(\alpha-\beta)\\&=\alpha-3\sqrt[3]{\alpha^2\beta}+3\sqrt[3]{\alpha\beta^2}-\beta\\&\qquad\qquad+3\sqrt[3]{\alpha^2\beta}-3\sqrt[3]{\alpha\beta^2}-\alpha+\beta\\&=0\end{aligned}$$

よって，$\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$ は方程式 $x^3+px-q=0$ の解である．

(2) 3 次方程式 $x^3+6x-2=0$ を (1) の結果に適用すると，$p=6$，$q=2$ より

$$\alpha-\beta=2,\quad \alpha\beta=\left(\frac{6}{3}\right)^3=8$$

第 1 式から　$\alpha=\beta+2$　これを第 2 式に代入すると

$$(\beta+2)\beta=8 \quad \text{ゆえに} \quad (\beta-2)(\beta+4)=0$$

与えれた方程式から，$\beta>0$ に注意して　$\beta=2$　ゆえに　$\alpha=4$

求める実数解は　$\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$，すなわち，$\boldsymbol{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$

(3) $t=\sqrt[3]{1+\sqrt{\dfrac{28}{27}}}-\sqrt[3]{-1+\sqrt{\dfrac{28}{27}}}$ とし，

$$\alpha=1+\sqrt{\frac{28}{27}},\quad \beta=-1+\sqrt{\frac{28}{27}}$$

とすると

$$q=\alpha-\beta=2,\quad p=3\sqrt[3]{\alpha\beta}=3\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=1$$

(1) の結果から，t は方程式 $x^3+px-q=0$，すなわち，$x^3+x-2=0$ の解であるから

$$(x-1)(x^2+x+2)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

t は実数であるから　$t=1$　よって　求める有理数は　$\mathbf{1}$

9.20　(1)　$x^3=1$ より　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

これを解いて　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

(2)　$\alpha=m+\sqrt{7}\,ni$ より　$\alpha^3=m^3-21mn^2+n(3m^2-7n^2)\sqrt{7}\,i$

$\alpha^3=225+2\sqrt{7}\,i$ であるから

$$m^3-21mn^2+n(3m^2-7n^2)\sqrt{7}\,i=225+2\sqrt{7}\,i$$

m，n は整数であるから，上式の両辺の実部と虚部を比較すると

$$m^3-21mn^2=225,\quad n(3m^2-7n^2)=2 \qquad \cdots(*)$$

m，n は整数であるから，$(*)$ の第 2 式から　$n=\pm1,\ \pm2$
これを $(*)$ の第 2 式に代入して，m が整数となるのは，次の 2 組

$$(m,\ n)=(-3,-2),\ (3,\ 2)$$

このうち，$(*)$ の第 1 式をみたすのは　$\boldsymbol{(m,\ n)=(-3,-2)}$

(3)　$\beta^3=\alpha^3$ より　$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3=1$

(1) の結果から　$\dfrac{\beta}{\alpha}=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

したがって　$\beta=\alpha$，$\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\alpha$

これに，(2) の結果を代入して

$$\boldsymbol{\beta=-3-2\sqrt{7}\,i,}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{3\pm2\sqrt{21}+(2\sqrt{7}\mp3\sqrt{3})i\right\}}\quad \text{(複号同順)}$$

10.1 $y = x^2 - x = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$　ゆえに　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

直線 OP の傾きは　$\dfrac{-\frac{1}{4} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = -\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{Q}(t,\ t^2 - t)$ とすると，直線 OP と直線 PQ は垂直であるから

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 - t - \left(-\frac{1}{4}\right)}{t - \frac{1}{2}} = -1 \quad \text{整理すると} \quad (2t-1)(2t-5) = 0$$

$t \neq \dfrac{1}{2}$ であるから　$t = \dfrac{5}{2}$　よって　$\mathbf{Q}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}\right)$

10.2　(1)　$t = 2$ のとき　$\mathrm{P}(2, -4)$

P と直線 $l_1 : 2x + y + 3 = 0$ の距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|2 \cdot 2 + (-4) + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

P と直線 $l_2 : 2x - y + 4 = 0$ の距離 d_2 は

$$d_2 = \frac{|2 \cdot 2 - (-4) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

よって　$d = d_1 + d_2 = \dfrac{3}{\sqrt{5}} + \dfrac{12}{\sqrt{5}} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} = \mathbf{3\sqrt{5}}$

(2)　直線 l_1 上またはその上側を表す領域は　$y \geqq -2x - 3$

$\mathrm{P}(t, -t^2)$ がこの領域にあるとき　$-t^2 \geqq -2t - 3$

ゆえに　$t^2 - 2t - 3 \leqq 0$　これを解いて　$\mathbf{-1 \leqq t \leqq 3}$

(3)　$\mathrm{P}(t, -t^2)$ と直線 $l_1 : 2x + y + 3 = 0$ の距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|2t - t^2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|t^2 - 2t - 3|}{\sqrt{5}}$$

$\mathrm{P}(t, -t^2)$ と直線 $l_2 : 2x - y + 4 = 0$ の距離 d_2 は

$$d_2 = \frac{|2t + t^2 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|(t+1)^2 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{t^2 + 2t + 4}{\sqrt{5}}$$

ゆえに　$d = d_1 + d_2 = \dfrac{|t^2 - 2t - 3|}{\sqrt{5}} + \dfrac{t^2 + 2t + 4}{\sqrt{5}}$

(i) $t^2-2t-3 \geqq 0$　すなわち　$t \leqq -1,\ 3 \leqq t$ のとき

$$d = \frac{t^2-2t-3}{\sqrt{5}} + \frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}} = \frac{2t^2+1}{\sqrt{5}}$$

このとき，d は，$t=-1$ のとき，最小値 $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ をとる．

(ii) $t^2-2t-3 < 0$　すなわち　$-1 < t < 3$ のとき

$$d = \frac{-(t^2-2t-3)}{\sqrt{5}} + \frac{t^2+2t+4}{\sqrt{5}} = \frac{4t+7}{\sqrt{5}}$$

このとき，d は，最小値をとらない．

よって　$\boldsymbol{t=-1}$ のとき最小値 $\dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{\sqrt{5}}}$ をとる．

10.3　(1) $a>1$，$a>p$，$\angle \mathrm{PQS}=135°$，$\angle \mathrm{AQS}=45°$ であるから，直線 AQ の傾きは -1，直線 PQ の傾きは 1 である．

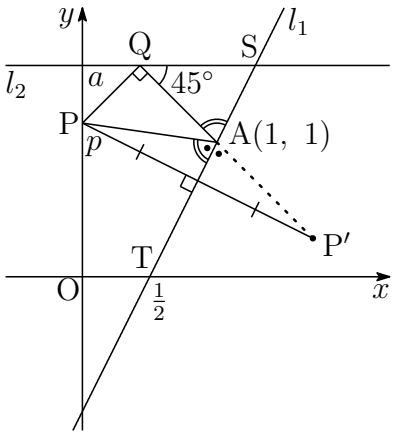
したがって，直線 AQ の方程式は

$$y-1=-1(x-1)$$

すなわち　$y=-x+2$　$\cdots$①

直線 ① と直線 $l_2: y=a \cdots$② の交点が Q であるから，①，② を解いて

$$\mathrm{Q}(2-a,\ a)$$



直線 PQ は，Q を通り傾き 1 の直線であるから，その方程式は

$$y-a=1\{x-(2-a)\}　\text{すなわち}　y=x+2a-2$$

ゆえに，P の座標は　$(0,\ 2a-2)$

よって　$\boldsymbol{p=2a-2,\ q=2-a}$

(2) l_1 に関して，P と対称な点を $\mathrm{P}'(s,\ t)$ とする．

l_1 の傾きは 2，直線 PP′ の傾きは $\dfrac{t-2a+2}{s}$ である．$l_1 \perp \mathrm{PP}'$ であるから

$$2 \times \frac{t-2a+2}{s} = -1　\text{すなわち}　s+2t=4a-4　\cdots③$$

線分 PP′ の中点 $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{2a-2+t}{2}\right)$ が l_1 上にあるから

$$\frac{2a-2+t}{2} = 2 \times \frac{s}{2} - 1　\text{すなわち}　2s-t=2a　\cdots④$$

③，④ を解いて $s=\dfrac{8a-4}{5}$，$t=\dfrac{6a-8}{5}$　ゆえに　$\mathrm{P}'\left(\dfrac{8a-4}{5},\ \dfrac{6a-8}{5}\right)$

$\angle\mathrm{PAT}=\angle\mathrm{QAS}$ であるとき，P' は直線 ① 上にあるので

$$\frac{6a-8}{5}=-\frac{8a-4}{5}+2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=\frac{11}{7}}$$

これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{p=\frac{8}{7}}$

10.4　(1)　G は，原点を通るから，$f(x)=ax^2+bx$ とおける．

$f(-1)=3$，$f(4)=8$ であるから

$$a-b=3,\ 4a+b=2 \quad \text{これを解いて} \quad a=1,\ b=-2$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2-2x}$

(2)　C は，原点を通るから，その方程式は $x^2+y^2+px+qy=0$ とおける．

2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$，$\mathrm{B}(4,\ 8)$ を通るから

$$-p+3q+10=0,\ \ p+2q+20=0 \quad \text{これを解いて} \quad p=-8,\ q=-6$$

したがって，円の方程式は

$$x^2+y^2-8x-6y=0 \quad \text{すなわち} \quad (x-4)^2+(y-3)^2=5^2$$

よって　中心 $\boldsymbol{(4,\ 3)}$，半径 $\boldsymbol{5}$

(3)　(1)，(2) の結果から　$\begin{cases} y=x^2-2x & \cdots ① \\ x^2+y^2-8x-6y=0 & \cdots ② \end{cases}$

① を ② に代入すると　$x^2+(x^2-2x)^2-8x-6(x^2-2x)=0$

整理すると　$x^4-4x^3-x^2+4x=0$

ゆえに　$x(x-4)(x+1)(x-1)=0$

3 点 O，A，B 以外の点の x 座標は　$x=1$

これを ① に代入して　$y=-1$　よって，残りの交点は　$\boldsymbol{(1,-1)}$

10.5 (1) 2 点 A(1, 3)，B(5, −5) を通る直線の方程式は

$$y-3=\frac{-5-3}{5-1(x-1)}$$

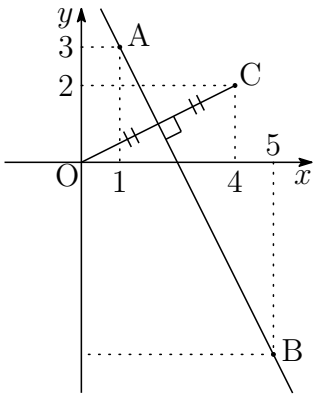
すなわち　$y=-2x+5$　$\cdots$①

原点 O を通り，① に垂直な直線の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x \quad \cdots②$$

①，② の交点は　(2, 1)

線分 OC の中点が (2, 1) であるから　$\mathbf{C(4,\ 2)}$



(2) △ABC の外接円の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad \cdots(*)$$

とおくと，円 (∗) は，3 点 A(1, 3)，B(5, −5)，C(4, 2) を通るから

$$a+3b+c=-10,\quad 5a-5b+c=-50,\quad 4a+2b=-20$$

これを解いて　$a=-2$，$b=4$，$c=-20$

したがって，△ABC の外接円の方程式は

$$x^2+y^2-2x+4y-20=0$$

すなわち　$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=25}$

よって，中心 $\mathbf{(1,-2)}$，半径 5 の円

(3) 求める接線は，y に平行ではないので，その方程式を

$$y=mx+5\ (mx-y+5=0)$$

とおく．このとき，この直線と円の中心 (1, −2) との距離は 5 であるから

$$\frac{|m\cdot 1-(-2)+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5 \quad \text{ゆえに} \quad |m+7|=5\sqrt{m^2+1}$$

この両辺を平方して整理すると

$$12m^2-7m-12=0 \quad \text{これを解いて} \quad m=\frac{4}{3},-\frac{3}{4}$$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{4}{3}x+5,\quad y=-\frac{3}{4}x+5}$$

10.6 (1) $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ より　　$(x-2)^2+(y-4)^2=5$　$\cdots(*)$

円 $(*)$ の中心 $(2,\ 4)$ から直線 $ax-y+1=0$ までの距離 d は

$$d=\frac{|\,a\cdot 2-4+1\,|}{a^2+(-1)^2}=\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}}\quad\cdots①$$

また，円 $(*)$ の半径 r は　　$r=\sqrt{5}$

円と直線が異なる 2 点で交わるとき，$d<r$ であるから

$$\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}}<\sqrt{5}\quad\text{整理すると}\quad a^2+12a-4>0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a<-6-2\sqrt{10},\ -6+2\sqrt{10}<a}$

(2) 直線 $y=ax+1$ が円の中心 $(2,\ 4)$ を通るときであるから

$$4=a\cdot 2+1\quad\text{これを解いて}\quad \boldsymbol{a=\frac{3}{2}}$$

(3) $d^2+\left(\dfrac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2=r^2$ であるから

$$d^2+1^2=(\sqrt{5})^2\qquad\text{ゆえに}\qquad d=2$$

これを ① に代入すると

$$\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}}=2\qquad\text{よって}\qquad \boldsymbol{a=\frac{5}{12}}$$

10.7 求める接線は，y 軸に平行ではないので，$l:y=ax+b$ とおく．

l と原点の距離は 2 であるから

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=2\quad\text{ゆえに}\quad b^2=4(a^2+1)\quad\cdots①$$

l と $(4,\ 0)$ の距離は 1 であるから

$$\frac{|4a+b|}{\sqrt{a^2+1}}=1\quad\text{ゆえに}\quad (4a+b)^2=a^2+1\quad\cdots②$$

①，② から

$$b^2=4(4a+b)^2\quad\text{ゆえに}\quad b^2=(8a+2b)^2$$

(i) $b=8a+2b$　すなわち　$b=-8a$ のとき

これを ① に代入すると

$$(-8a)^2=4(a^2+1)\quad\text{ゆえに}\quad 15a^2=1$$

すなわち　　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{15}}(x-8)$

(ii) $b=-(8a+2b)$　すなわち　$b=-\dfrac{8}{3}a$ のとき

これを ① に代入すると

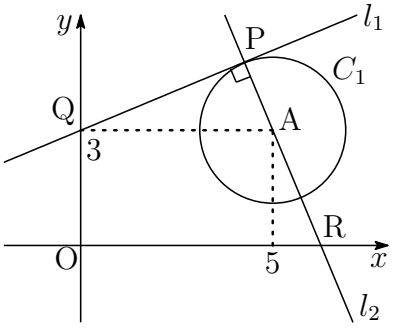
$$\left(-\frac{8}{3}a\right)^2=4(a^2+1)\quad \text{ゆえに}\quad 7a^2=9$$

すなわち　　$y=\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}\left(x-\dfrac{8}{3}\right)$

よって　　$\boldsymbol{y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{15}}(x-8),\ y=\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}\left(x-\dfrac{8}{3}\right)}$

10.8　(1) 円の中心 A(5, 3) から直線 $mx-y+3=0$ $(m>0)$ までの距離が，円 C_1 の半径 r であるから

$$r=\frac{|m\cdot 5-3+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\boldsymbol{\frac{5m}{\sqrt{m^2+1}}}$$



(2) C_1 が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$r>3$ であるから，(1) の結果より

$$\frac{5m}{\sqrt{m^2+1}}>3\quad m>0 \text{ に注意してこれを解くと}\quad \boldsymbol{m>\frac{3}{4}}$$

(3) l_2 は点 A(5, 3) を通り，l_1 に垂直な直線であるから，l_2 の方程式は

$$y-3=-\frac{1}{m}(x-5)\quad \text{すなわち}\quad x+my-3m-5=0$$

l_2 と x 軸との共有点の座標は，これに $y=0$ を代入して　$x=3m+5$

ゆえに，点 R の座標は　$(3m+5,\ 0)$

よって，線分 QR の中点 S の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{3m+5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)}$

(4) $\angle \mathrm{QPR}=90^\circ$ より，C_2 は線分 QR を直径とする円であるから，その中心は S である．d は AS 間の距離であるから

$$d^2=\mathrm{AS}^2=\left(\frac{3m+5}{2}-5\right)^2+\left(\frac{3}{2}-3\right)^2=\left(\frac{3m-5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

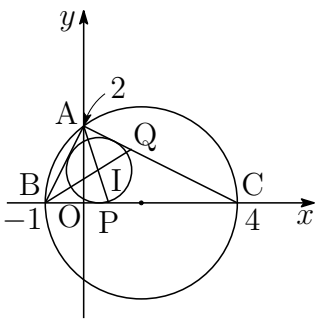
よって　$\boldsymbol{m=\dfrac{5}{3}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

10.9 (1) $\mathrm{AB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AC}=2\sqrt{5}$，$\mathrm{BC}=5$ であるから

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$$

したがって，△ABC は $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ の直角三角形であり，BC はこの三角形の外接円の直径である．よって，外接円の中心と半径は

$$\text{中心}\ \left(\boldsymbol{\frac{3}{2},\ 0}\right),\ \text{半径}\ \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$



(2) ∠CAB，∠ABC の二等分線と BC，CA との交点をそれぞれ P，Q とすると

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=1:2,\quad \mathrm{CQ}:\mathrm{QA}=\mathrm{BC}:\mathrm{BA}=\sqrt{5}:1$$

したがって　P の座標は　$\left(\dfrac{2\cdot(-1)+1\cdot4}{1+2},\ 0\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$

Q の座標は　$\left(\dfrac{\sqrt{5}\cdot0+1\cdot4}{\sqrt{5}+1},\ \dfrac{\sqrt{5}\cdot2+1\cdot0}{\sqrt{5}+1}\right)$　すなわち　$\left(\sqrt{5}-1,\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$

これから，2 直線 AP，BQ の方程式は，それぞれ

$$y=-3x+2,\quad y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}(x+1)$$

△ABC の内接円の中心を I とすると，I はこの 2 直線の交点であるから

$$\mathrm{I}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)$$

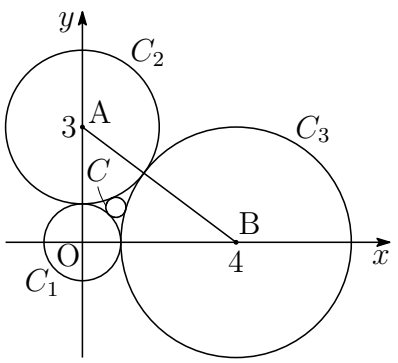
また，内接円の半径は，I の y 座標に等しい．よって

$$\text{中心}\ \left(\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{2}}\right),\ \text{半径}\ \boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$$

10.10 (1) 2 点 A(0, 3)，B(4, 0) 間の距離は 5
右の図から

$$r_1+r_2=3$$
$$r_2+r_3=5$$
$$r_3+r_1=4$$

よって　$\boldsymbol{r_1=1,\ r_2=2,\ r_3=3}$



(2) C の中心を $\mathrm{P}(a,\ b)$，半径 r について

$$\mathrm{OP}=1+r,\ \ \mathrm{AP}=2+r,\ \ \mathrm{BP}=3+r$$

である．したがって

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=(1+r)^2 &&\cdots①\\ a^2+(b-3)^2&=(2+r)^2 &&\cdots②\\ (a-4)^2+b^2&=(3+r)^2 &&\cdots③ \end{aligned}$$

② − ① および ③ − ① より

$$\begin{cases} -6b+9=2r+3\\ -8a+16=4r+8 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{2-r}{2},\ b=\frac{3-r}{3} \quad \cdots④$$

④ を ① に代入すると

$$\left(\frac{2-r}{2}\right)^2+\left(\frac{3-r}{3}\right)^2=(1+r)^2$$

$$23r^2+132r-36=0$$

$$(r+6)(23r-6)=0$$

$r>0$ であるから $\qquad \boldsymbol{r=\dfrac{6}{23}}$

これを ④ に代入すると $\quad \boldsymbol{(a,\ b)=\left(\dfrac{20}{23},\ \dfrac{21}{23}\right)}$

10.11 (1) 円 C の方程式から

$$x^2+y^2-5-2k(2x-y)=0$$

これが k の値に関係なく成り立つための条件は

$$x^2+y^2-5=0,\quad 2x-y=0$$

上の 2 式を解いて $\quad (x,\ y)=(-1,-2),\ (1,\ 2)$

求める 2 定点 A，B は，x 座標に注意して $\quad \mathbf{A(-1,-2),\ B(1,\ 2)}$

(2) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．

P に関する条件は $\qquad \mathrm{PA}:\mathrm{PB}=2:1$

これより $\qquad \mathrm{PA}=2\mathrm{PB}$

すなわち $\qquad \mathrm{PA}^2=4\mathrm{PB}^2$

上式に

$$\mathrm{PA}^2=(x+1)^2+(y+2)^2,\quad \mathrm{PB}^2=(x-1)^2+(y-2)^2$$

を代入すると

$$(x+1)^2+(y+2)^2=4\{(x-1)^2+(y-2)^2\}$$

整理すると　$x^2+y^2-\dfrac{10}{3}x-\dfrac{20}{3}y+5=0$

すなわち　$\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{10}{3}\right)^2=\dfrac{80}{9}$

よって，点 P の軌跡は，**点 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ の円**である．

10.12　(1) C_1 が O を通ることに注意して，求める円 C_1 の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by=0$$

とおくと，これが 2 点 P$(2,\ 1)$，Q$\left(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{11}{5}\right)$ を通るから

$$2a+b+5=0,\quad -\frac{2}{5}a-\frac{11}{5}b+5=0$$

これを解いて　$a=-4$，$b=3$　よって　$\boldsymbol{x^2+y^2-4x+3y=0}$

(2) (1) の結果から　$(x-2)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$　ゆえに　C_1 の半径は $\dfrac{5}{2}$

C_1 に内接する正三角形の一辺の長さを d とすると，正弦定理により

$$\frac{d}{\sin 60^\circ}=2\times\frac{5}{2}\quad \text{ゆえに}\quad d=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

よって，求める正三角形の面積は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin 60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{75\sqrt{3}}{16}}$

(3) C_2 上の点 M の座標を $(s,\ t)$ とすると，M は P，Q 以外の点であるから

$$s^2+t^2=5\cdots①,\quad (s,\ t)\neq(2,\ 1),\ \left(-\frac{2}{5},-\frac{11}{5}\right)$$

△MPQ の重心を G$(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{s+2-\frac{2}{5}}{3},\quad y=\frac{t+1-\frac{11}{5}}{3},\quad (x,\ y)\neq\left(\frac{6}{5},-\frac{1}{15}\right),\ \left(\frac{2}{5},-\frac{17}{15}\right)$$

すなわち　　$s = 3x - \dfrac{8}{5},\ t = 3y + \dfrac{6}{5}$

これを ① に代入して　$\left(3x - \dfrac{8}{5}\right)^2 + \left(3y + \dfrac{6}{5}\right)^2 = 5$

$$\left(x - \frac{8}{15}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

よって　**中心** $\left(\dfrac{8}{15}, -\dfrac{2}{5}\right)$，**半径** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ **の円，**

ただし，2 点 $\left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{1}{15}\right)$，$\left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{17}{15}\right)$ **は除く**

10.13　(1)　$C_1 : y = (x-t)^2 + t$ と $C_2 : y = -x^2 + 4$ から y を消去すると

$(x-t)^2 + t = -x^2 + 4$　整理すると　$2x^2 - 2tx + t^2 + t - 4 = 0$　$\cdots(*)$

2 次方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = (-t)^2 - 2(t^2 + t - 4) = -t^2 - 2t + 8 = -(t+4)(t-2)$$

C_1，C_2 が異なる 2 点で交わるので，$D > 0$ より

$$-(t+4)(t-2) > 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-4 < t < 2}$$

(2)　2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = t, \qquad \alpha\beta = \frac{t^2 + t - 4}{2}$$

C_1，C_2 の 2 つの交点 $(\alpha, -\alpha^2 + 4)$，$(\beta, -\beta^2 + 4)$ の中点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{t}{2}$$

$$y = \frac{(-\alpha^2 + 4) + (-\beta^2 + 4)}{2} = \frac{-(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta + 8}{2}$$

$$= \frac{-t^2 + (t^2 + t - 4) + 8}{2} = \frac{t+4}{2}$$

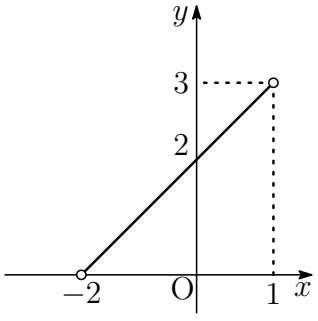
上の 2 式から t を消去すると　$y = x + 2$

また，(1) の結果から　$-2 < \dfrac{t}{2} < 1$

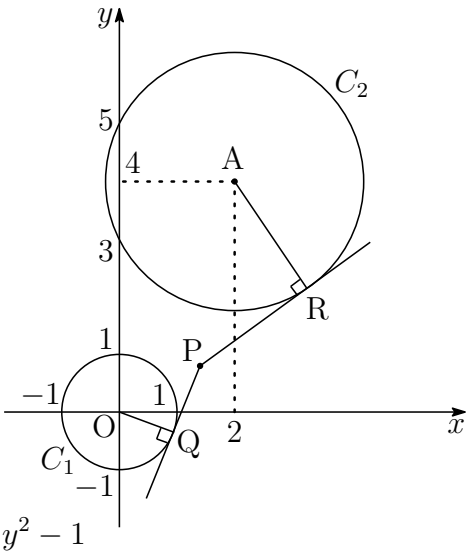
したがって，求める軌跡の方程式は

$$y = x + 2 \quad (-2 < x < 1)$$

よって，軌跡は右の図のようになる．



10.14 C_1，C_2 の中心をそれぞれ O，A とし，P から C_1，C_2 に引いた接線の接点を，それぞれ Q，R とする．



P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P に関する条件は

$$\mathrm{PQ} : \mathrm{PR} = 1 : 2$$

これより　　$2\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$

すなわち　　$4\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PR}^2 \quad \cdots ①$

△OQP，△ARP において，$\angle \mathrm{OQP} = 90°$，$\angle \mathrm{ARP} = 90°$ であるから

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{OQ}^2 = x^2 + y^2 - 1$$
$$\mathrm{PR}^2 = \mathrm{AP}^2 - \mathrm{AR}^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 - 5$$

上の 2 式を ① に代入して，整理すると

$$4(x^2 + y^2 - 1) = (x-2)^2 + (y-4)^2 - 5$$
$$3x^2 + 3y^2 + 4x + 8y - 19 = 0$$
$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{77}{9} \quad \cdots ②$$

C_1，C_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とすると　　$r_1 = 1$，$r_2 = \sqrt{5}$

$\mathrm{OA} = 2\sqrt{5}$ より，$r_1 + r_2 < \mathrm{OA}$ であるから，2 円 C_1，C_2 は互いに外部にある．

よって，点 P は円 ② 上にある．

したがって，求める軌跡は，**点 $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{77}}{3}$ の円**である．

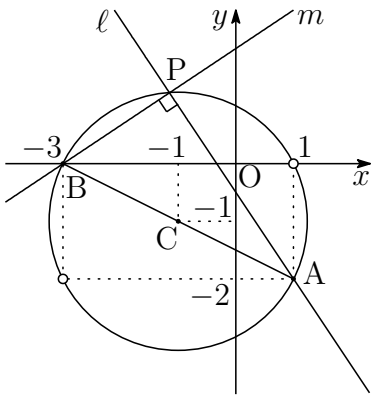
10.15 (1) $\ell : y = ax - a - 2$ は $y + 2 = a(x-1)$ より，点 $\mathrm{A}(1, -2)$ を通り，傾き a の直線．

$m : y = bx + 3b$ は $y = b(x+3)$ より，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ を通り，傾き b の直線．

ℓ と m は直交するから，ℓ と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円周上を動く．

線分 AB の中点を C とすると　$\mathrm{C}(-1, -1)$

$$\mathrm{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$



求める点 P の軌跡は，2 直線 ℓ，m が x 軸と垂直ではないことに注意して

$$\boldsymbol{(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5, \quad (x,\ y) \neq (1,\ 0),\ (-3, -2)}$$

(2) $\ell \perp m$ より，$ab=-1$ であるから

$$\ell : ax-y-a-2=0, \quad m : x+ay+3=0$$

線分 AP の長さは，点 $\mathrm{A}(1,-2)$ と直線 m の距離であるから

$$\mathrm{AP}=\frac{|1+a\cdot(-2)+3|}{\sqrt{1^2+a^2}}=\frac{\boldsymbol{2|a-2|}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2+1}}}$$

線分 BP の長さは，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ と直線 ℓ の距離であるから

$$\mathrm{BP}=\frac{|a\cdot(-3)+0-a-2|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{\boldsymbol{2|2a+1|}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2+1}}}$$

(3) △APB の面積が最大となるとき，P は線分 AB の垂直二等分線上にあるから，AP = BP より

$$\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}} \quad \text{ゆえに} \quad |a-2|=|2a+1|$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3},-3}$

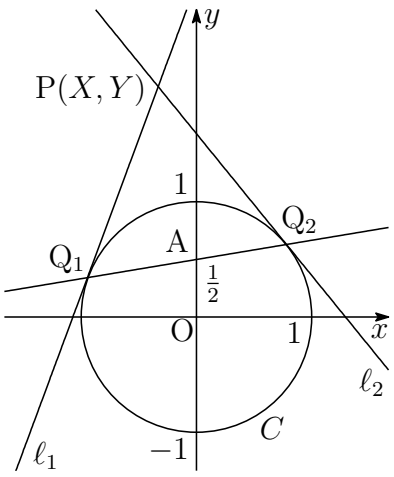
別解 直線 AB の傾きは，その偏角を θ とすると　$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$

△APB の面積が最大となるとき，ℓ の傾き a は

$$a=\tan(\theta\pm 45^\circ)=\frac{\tan\theta\pm\tan 45^\circ}{1\mp\tan\theta\tan 45^\circ}=\frac{-\frac{1}{2}\pm 1}{1\pm\frac{1}{2}}=\frac{-1\pm 2}{2\pm 1}=\frac{1}{3},-3$$

10.16 (1) 点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り，傾き t の直線は

$$y=tx+\frac{1}{2} \qquad (*)$$



この直線と $C : x^2+y^2=1$ の方程式から y を消去して整理すると

$$(t^2+1)x^2+tx-\frac{3}{4}=0$$

これを解くと　$x=\dfrac{-t\pm\sqrt{4t^2+3}}{2(t^2+1)}$

この方程式の解が $x_1,\ x_2$ であるから $(x_1<x_2)$

$$x_2-x_1=\frac{-t+\sqrt{4t^2+3}}{2(t^2+1)}-\frac{-t-\sqrt{4t^2+3}}{2(t^2+1)}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{4t^2+3}}}{\boldsymbol{t^2+1}}$$

$y_1 = tx_1 + \dfrac{1}{2}$，$y_2 = tx_2 + \dfrac{1}{2}$ であるから

$$y_2 - y_1 = t(x_2 - x_1) = \boldsymbol{\dfrac{t\sqrt{4t^2+3}}{t^2+1}}$$

(2) 2 点 Q_1, Q_2 を通る直線は点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を極とする極線

$$Xx + Yy = 1$$

である．$(*)$ より，これが $-2tx + 2y = 1$ に一致するから

$$X = -2t, \quad Y = 2 \qquad (**)$$

(3) $(**)$ より，$\mathrm{P}(-2t,\ 2)$ であるから，点 P の軌跡は　$\boldsymbol{y = 2}$

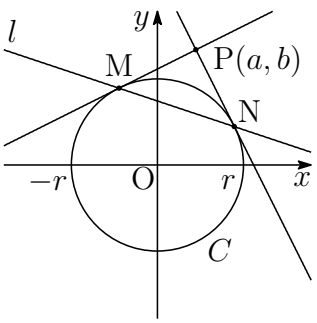
円 $C : x^2 + y^2 = r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．2 本の接線

$$x_1x + y_1y = r^2, \quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2, \quad ax_2 + by_2 = r^2$$

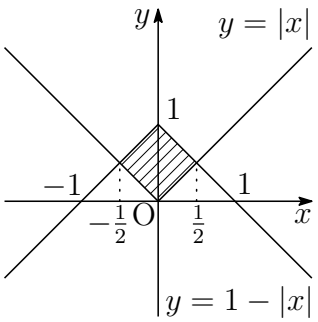
上の 2 式から直線 $l : ax + by = r^2$ は 2 点 M，N を通る．
このとき，l を P を**極**とする C の**極線**という．



10.17　$x \geqq 0$ のとき　$x \leqq y \leqq 1 - x$

$x < 0$ のとき　$-x \leqq y \leqq 1 + x$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．



10.18　$k = \dfrac{y-7}{x}$ とおくと　$y = kx + 7$

これを $(x-2)^2 + y^2 \leqq 3$ に代入すると　$(x-2)^2 + (kx+7)^2 \leqq 3$

整理すると　　$(k^2+1)x^2 + 2(7k-2)x + 50 \leqq 0$

$k^2+1>0$ であるから，この不等式が実数解をもつとき

$$D/4=(7k-2)^2-(k^2+1)\cdot 50 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad k^2+28k+46 \leqq 0$$

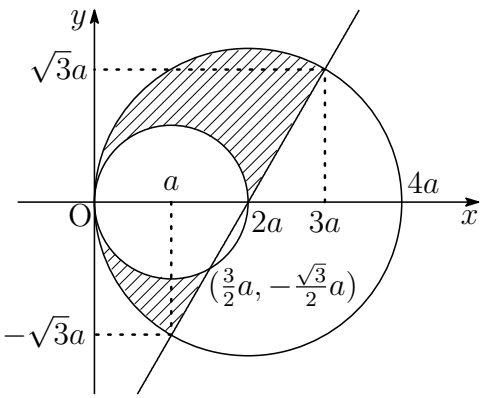
よって　　$\boldsymbol{-14-5\sqrt{6} \leqq k \leqq -14+5\sqrt{6}}$

別解　(福岡教育大学 2013) 1

10.19　与えられた不等式から

$$\begin{cases} (x-2a)^2+y^2 \leqq (2a)^2 \\ (x-a)^2+y^2 \geqq a^2 \\ y \geqq \sqrt{3}(x-2a) \end{cases}$$

よって，右の図の斜線部分で境界線を含む．



10.20　(1)　直線 AB に関して，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と対称な点 Q の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする．

PQ の中点 $\left(\dfrac{x_1+a}{2},\ \dfrac{y_1+b}{2}\right)$ は直線 $y=-x+1$ 上にあるから

$$\frac{y_1+b}{2}=-\frac{x_1+a}{2}+1 \quad \text{ゆえに} \quad x_1+y_1=2-a-b \quad \cdots ①$$

直線 PQ は直線 $y=-x+1$ に垂直であるから

$$\frac{y_1-b}{x_1-a}=1 \quad \text{ゆえに} \quad x_1-y_1=a-b \cdots ②$$

①，② より　$x_1=1-b$，$y_1=1-a$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}(1-b,\ 1-a)}$

(2)　直線 BC に関して，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と対称な点 R の座標を $(x_2,\ y_2)$ とする．

PR の中点 $\left(\dfrac{x_2+a}{2},\ \dfrac{y_2+b}{2}\right)$ は直線 $y=x+1$ 上にあるから

$$\frac{y_2+b}{2}=\frac{x_2+a}{2}+1 \quad \text{ゆえに} \quad -x_2+y_2=a-b+2 \quad \cdots ③$$

直線 PR は直線 $y=x+1$ に垂直であるから

$$\frac{y_2-b}{x_2-a}=-1 \quad \text{ゆえに} \quad x_2+y_2=a+b \cdots ④$$

③，④ より　$x_2=b-1$，$y_1=a+1$　よって　$\mathrm{R}(b-1,\ a+1)$

2 点 $\mathrm{Q}(1-b,\ 1-a)$，$\mathrm{R}(b-1,\ a+1)$ を通る直線 l の方程式は

$$y-(1-a)=\frac{(a+1)-(1-a)}{(b-1)-(1-b)}\{x-(1-b)\}$$

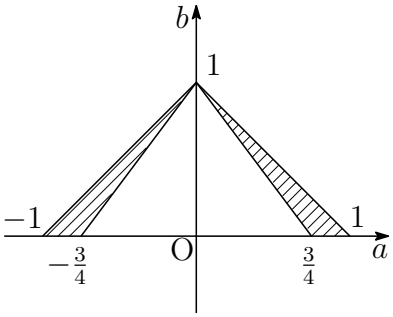
すなわち　　$\boldsymbol{ax+(1-b)y+b-1=0}$

(3) (2) の結果から，$\dfrac{|b-1|}{\sqrt{a^2+(1-b)^2}} < \dfrac{4}{5}$ であるから

$$16\{a^2+(1-b)^2\} > 25(b-1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 16a^2-9(b-1)^2>0$$

したがって　　$(4a+3b-3)(4a-3b+3)>0$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分．ただし，境界線を含まない．



10.21 (1) $|x-2|+|y-2| \leqq 2$ より　$|y-2| \leqq 2-|x-2|$　$\cdots$①

ゆえに　$0 \leqq 2-|x-2|$　これを解いて　$0 \leqq x \leqq 4$

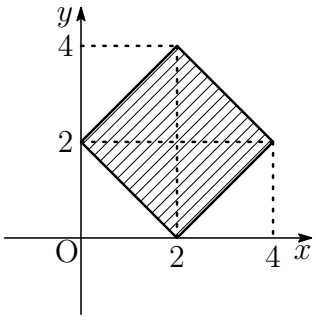
① から　　$|x-2|-2 \leqq y-2 \leqq 2-|x-2|$

ゆえに　　$|x-2| \leqq y \leqq 4-|x-2|$

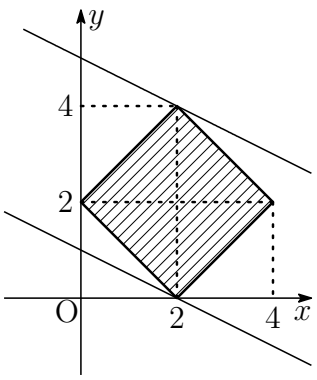
上式より　$0 \leqq x < 2$ のとき　$-x+2 \leqq y \leqq x+2$

$2 \leqq x \leqq 4$ のとき　$x-2 \leqq y \leqq -x+6$

よって，不等式の表す領域は，図の斜線部分で，境界線を含む．



(2) $x+2y=k\cdots(*)$ とおくと，これは傾きが $-\dfrac{1}{2}$，y 切片が $\dfrac{k}{2}$ である直線を表す．この直線 $(*)$ が (1) で求めた領域と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい．右の図から，直線 $(*)$ が



$(2,\ 4)$ を通るとき k は最大で　　$k=10$

$(2,\ 0)$ を通るとき k は最小で　　$k=2$

よって　　$x=2$，$y=4$ のとき，**最大値 10**，

$x=2$，$y=0$ のとき，**最小値 2**

10.22　(1) $4x-3y=a\cdots$① と $y=-x^2+6x-5\cdots$② から，y を消去すると

$$3x^2-14x+15-a=0 \quad \cdots③$$

上の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-7)^2-3(15-a)=4+3a$$

① と ② が接するとき，$D=0$ であるから

$$4+3a=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=-\frac{4}{3}}$$

③ から，接点の x 座標は　　$x=-\dfrac{-14}{2\cdot 3}=\dfrac{7}{3}$

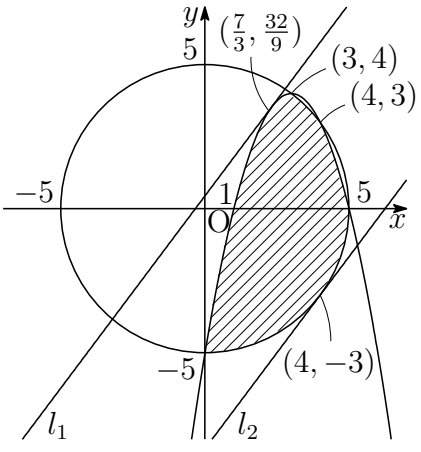
上の a と x の値を ① に代入すると

$$4\cdot\frac{7}{3}-3y=-\frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{32}{9}$$

よって，接点の座標は　　$\left(\boldsymbol{\frac{7}{3}},\ \boldsymbol{\frac{32}{9}}\right)$

(2) 円 $x^2+y^2=25$ と放物線 $y=-x^2+6x-5$ の共有点の x 座標は

$$x^2+(-x^2+6x-5)^2=25$$
$$x^4-12x^3+47x^2-60x=0$$
$$x(x-3)(x-4)(x-5)=0$$
$$x=0,\ 3,\ 4,\ 5$$



したがって，連立不等式

$$x^2+y^2\leqq 25,\quad y\leqq -x^2+6x-5$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．

(1) で求めた接線を $l_1 : 4x - 3y = -\dfrac{4}{3}$ とし，円周上の点 $(4, -3)$ における接線を $l_2 : 4x - 3y = 25$ とすると，l_1，l_2 の接点は領域内の点である．

したがって，$4x - 3y$ のこの領域内における値は

$$-\frac{4}{3} \leqq 4x - 3y \leqq 25$$

よって　　**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$　$\left(x = \dfrac{7}{3},\ y = \dfrac{32}{9}\text{のとき}\right)$

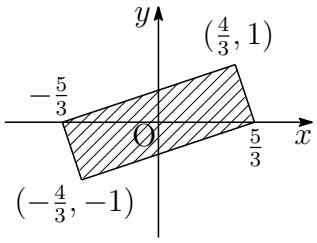
最大値 25　$(x = 4,\ y = -3\ \text{のとき})$

10.23　(1)　領域 D 内の点 $(x,\ y)$ について，条件から，次式が成り立つ．

$$|y| + \frac{|3x - 4y|}{5} \leqq 1$$

ここで，$y = s$，$3x - 4y = 5t$ とおくと

$$(x,\ y) = s\left(\frac{4}{3},\ 1\right) + t\left(\frac{5}{3},\ 0\right), \quad |s| + |t| \leqq 1$$



D は 4 点 $\left(\frac{4}{3},\ 1\right)$，$\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$，$\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$，$\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$ を頂点する平行四辺形の周およびその内部であり，右の図の斜線部分．

(2)　$$x + y = \left(\frac{4}{3}s + \frac{5}{3}t\right) + s = \frac{7}{3}s + \frac{5}{3}t$$

上式から，$x + y$ が最大となるとき，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ であるから $(s + t \leqq 1)$

$$s = 1,\ t = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x,\ y) = \left(\frac{4}{3},\ 1\right) \text{のとき最大値 } \boldsymbol{\frac{7}{3}}$$

10.24　(1)　$C : y = 2x^2 - 4x + 1$ と $l : y = x + 1$ から，y を消去すると

$$2x^2 - 4x + 1 = x + 1 \quad \text{ゆえに} \quad x(2x - 5) = 0$$

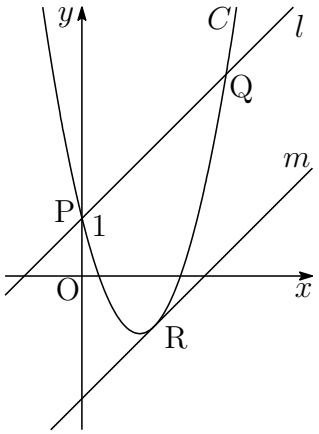
したがって　　$\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

$f(x)=2x^2-4x+1$ とおく．

これを微分すると　　$f'(x)=4x-4$

$f'(x)=1$ とすると　　$4x-4=1$

ゆえに　　$x=\dfrac{5}{4}$，$f\left(\dfrac{5}{4}\right)=-\dfrac{7}{8}$



m は，$\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{7}{8}\right)$ を通り，傾き 1 の直線であるから

$$y-\left(-\frac{7}{8}\right)=x-\frac{5}{4}\quad \text{すなわち}\quad y=x-\frac{17}{8}$$

P と m の距離を d とすると　　$d=\dfrac{\left|-1-\dfrac{17}{8}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\boldsymbol{\dfrac{25\sqrt{2}}{16}}$

(2) $\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\dfrac{7}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}-0\right)^2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

よって　　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\sqrt{2}\times\dfrac{25\sqrt{2}}{16}=\boldsymbol{\dfrac{125}{32}}$

(3) $x+y=k$ とおくと　$y=-x+k$

この直線が C に接するとき，k は最小になるから，$f'(x)=-1$ より

$$4x-4=-1\quad \text{ゆえに}\quad x=\frac{3}{4},\quad f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{7}{8}$$

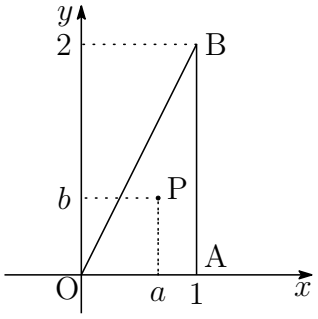
よって，$\left(\dfrac{3}{4},-\dfrac{7}{8}\right)$ で，最小値

$$k=\frac{3}{4}+\left(-\frac{7}{8}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{8}}$$

10.25　(1) $\mathrm{P}(a,\ b)$ から OA，AB までの距離は，それぞれ b，$1-a$ である．

直線 OB の方程式は $2x-y=0$ であるから，P から OB までの距離は，$b\leqq 2a$ に注意して

$$\frac{|\,2a-b\,|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2a-b}{\sqrt{5}}$$



よって　　$k = b + (1-a) + \dfrac{2a-b}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a + \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}b + 1}$

(2) (1) の結果より，k は a，b の 1 次式であるから，k の最大値・最小値は境界線上でとるから，△OAB の周上における k の値を調べればよい．

i) P が OA 上にあるとき，$b = 0$ より

$$k = \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a + 1 \quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

よって　　$\dfrac{2}{\sqrt{5}} \leqq k \leqq 1$

ii) P が AB 上にあるとき，$a = 1$ より

$$k = \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}b + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}b + \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (0 \leqq b \leqq 2)$$

よって　　$\dfrac{2}{\sqrt{5}} \leqq k \leqq 2$

iii) P が OB 上にあるとき，$b = 2a$ より

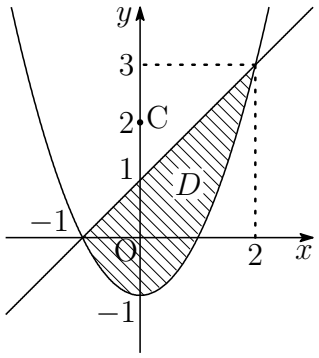
$$k = \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}a + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} \cdot 2a + 1 = a + 1 \quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

よって　　$1 \leqq k \leqq 2$

i)，ii)，iii) より　$\begin{cases} \textbf{最大値 2} & \boldsymbol{(a = 1,\ b = 2\ \text{のとき})} \\ \textbf{最小値}\ \dfrac{\boldsymbol{2\sqrt{5}}}{\boldsymbol{5}} & \boldsymbol{(a = 1,\ b = 0\ \text{のとき})} \end{cases}$

別解　(宮崎大学 2008) 3

10.26　連立不等式の表す領域を D とすると，D は，右の図の斜線部分で境界を含む．



$$x^2 + y^2 - 4y = x^2 + (y-2)^2 - 4$$

であるから，点 C(0,　2) をとると，D 内の点 P$(x,\ y)$ について

$$x^2 + y^2 - 4y = \mathrm{CP}^2 - 4$$

CP は D の境界で最大値・最小値をとるので，P が次の Q および R にあるとき，その最大値・最小値を調べる．

$$\mathrm{Q}(s,\ s+1)\ (-1 \leqq s \leqq 2), \qquad \mathrm{R}(t,\ t^2-1)\ (-1 \leqq t \leqq 2)$$

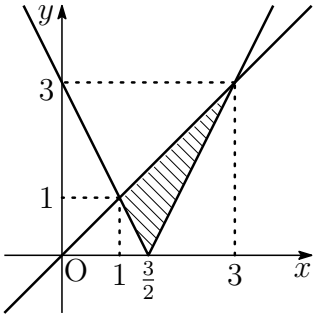
したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{CQ}^2 - 4 &= s^2 + \{(s+1)-2\}^2 - 4 \quad (-1 \leqq s \leqq 2) \\
&= 2s^2 - 2s - 3 \\
&= 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} \\
\mathrm{CR}^2 - 4 &= t^2 + \{(t^2-1)-2\}^2 - 4 \quad (-1 \leqq t \leqq 2) \\
&= t^4 - 5t^2 + 5 \\
&= \left(t^2 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

ゆえに $\quad -\dfrac{7}{2} \leqq \mathrm{CQ}^2 - 4 \leqq 1, \qquad -\dfrac{5}{4} \leqq \mathrm{CR}^2 - 4 \leqq 5$

よって，x^2+y^2-4y は，D において**最大値 5，最小値 $-\dfrac{7}{2}$** をとる．

10.27 (1) D の表す領域は図の斜線部分で，境界を含む．



(2) $f(x,\ y) = ax + y$ とおく．(1) の結果から，D における $f(x,\ y)$ の最大値と最小値は，次の 3 つの値

$$f(1,\ 1) = a+1, \quad f\left(\frac{3}{2},\ 0\right) = \frac{3}{2}a, \quad f(3,\ 3) = 3a+3$$

の中から選べばよいので (a は 2 でない正の定数)

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{3}{2},\ 0\right) - f(1,\ 1) &= \frac{1}{2}(a-2) \\
f(3,\ 3) - f\left(\frac{3}{2}a,\ 0\right) &= \frac{3}{2}a + 3 > 0 \\
f(3,\ 3) - f(1,\ 1) &= 2a + 2 > 0
\end{aligned}$$

よって　　点 $\mathbf{(3,\ 3)}$ で最大値 $\boldsymbol{3a+3}$

$0<a<2$ のとき点 $\left(\mathbf{\frac{3}{2},\ 0}\right)$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{3}{2}a}$

$2<a$ のとき点 $\mathbf{(1,\ 1)}$ で最小値 $\boldsymbol{a+1}$

(3) D において x^2+y^2 の最小値を与える点 $(x,\ y)$ は，2点 $(1,\ 1)$，$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ を結ぶ線分上にあるから，この点を $(t, -2t+3)$ とおくと $\left(1 \leqq t \leqq \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= t^2+(-2t+3)^2 \\ &= 5t^2-12t+9 \\ &= 5\left(t-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{9}{5} \end{aligned}$$

よって　$t=\frac{6}{5}$　すなわち　点 $\left(\mathbf{\frac{6}{5},\ \frac{3}{5}}\right)$ で最小値 $\mathbf{\frac{9}{5}}$ をとる．

10.28 (1) $x+2y=5\cdots$①，$3x+y=8\cdots$②，$-2x-y=4\cdots$③，$-x-4y=7\cdots$④ とおく．D の表す領域は，図の斜線部分で，境界線を含む．直線 $x+y=k$ を l とする．l は傾き -1 の直線で，①，② の直線の傾きは，それぞれ $-\frac{1}{2}$，-3 であり，

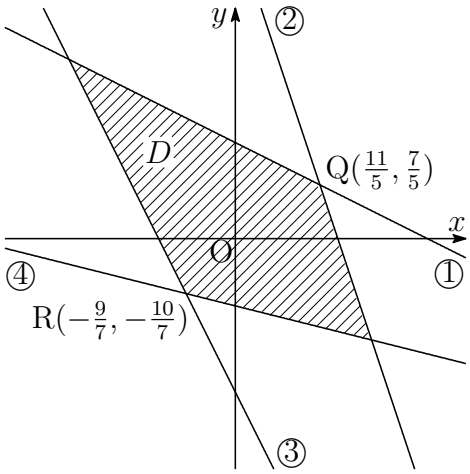
$$-3<-1<-\frac{1}{2}$$

ゆえに，D 内の点 $\left(\frac{11}{5},\ \frac{7}{5}\right)$ で，k は最大となる．

また，③，④ の傾きは，それぞれ -2，$-\frac{1}{3}$ であり，

$$-2<-1<-\frac{1}{4}$$

ゆえに，D 内の点 $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$ で，k は最小となる．



よって　　$\mathbf{Q}\left(\mathbf{\frac{11}{5},\ \frac{7}{5}}\right)$，　$\mathbf{R}\left(\mathbf{-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}}\right)$

(2) 直線 $ax+by=k'$ を l' とする．

l' は傾き $-\frac{a}{b}$，切片 $\frac{k'}{b}$ の直線である．$b>0$ であるから，k' が最大・最小となるのは，それぞれ $\frac{k'}{b}$ が最大・最小となるときである．

k' が Q で最大値をとるとき，l' と ①，② の傾きから

$$-3 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 3 \qquad \cdots(*)$$

k' が R で最小値をとるとき，l' と ③，④ の傾きから

$$-2 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{4} < \frac{a}{b} < 2 \qquad \cdots(**)$$

$a > 0$，$b > 0$ より，$\dfrac{a}{b}$ の符号に注意し，$(*)$，$(**)$ の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2}$$

11.1 $\sin 105^\circ + \cos 75^\circ = \cos 15^\circ + \sin 15^\circ$

よって $\quad \dfrac{\sin 105^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ} = \boldsymbol{1}$

11.2 $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より $\quad \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0 \quad \cdots①$

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$ であるから，これに $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\frac{1}{4} + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin\theta - \cos\theta)^2 = \frac{7}{4}$$

① より $\quad \boldsymbol{\sin\theta - \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$

11.3

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2\cdot\dfrac{1}{5}}{1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

$$\tan 4\theta = \frac{2\tan 2\theta}{1 - \tan^2 2\theta} = \frac{2\cdot\dfrac{5}{12}}{1 - \left(\dfrac{5}{12}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{120}{119}}$$

$4\theta = \dfrac{\pi}{4} + \alpha$ より，$\alpha = 4\theta - \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\tan\alpha = \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\theta - \tan\dfrac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\theta \tan\dfrac{\pi}{4}} = \frac{\dfrac{120}{119} - 1}{1 + \dfrac{120}{119}\cdot 1} = \boldsymbol{\frac{1}{239}}$$

11.4 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ であるから，$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ より

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\boldsymbol{\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}}$$

11.5 (1) (加法定理による証明)

$$\begin{aligned}\sin3\theta&=\sin(2\theta+\theta)\\&=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\sin\theta\\&=2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\&=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta\\&=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{aligned}$$

(ド・モアブルの定理による証明)

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^3&=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)\end{aligned}$$

ド・モアブルの定理により　$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$
上の 2 式から

$$\cos3\theta+i\sin3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

上式の虚部は等しいので

$$\begin{aligned}\sin3\theta&=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\\&=3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta\\&=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{aligned}$$

(2) $\theta=18^\circ$ のとき，$5\theta=90^\circ$ より　$2\theta=90^\circ-3\theta$
ゆえに　$\cos2\theta=\cos(90^\circ-3\theta)=\sin3\theta$

(3) (2) の結果に (1) および $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned}1-2\sin^2\theta&=3\sin\theta-4\sin^3\theta\\4\sin^3\theta-2\sin^2\theta-3\sin\theta+1&=0\\(\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)&=0\end{aligned}$$

$0<\sin18^\circ<1$ であるから　$\boldsymbol{\sin18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

11.6　$(\sin\alpha-\cos\beta)^2+(\cos\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$=2\{1-\sin(\alpha+\beta)\}$　$\cdots(*)$

$\sin\alpha=\cos\beta$，$\cos\alpha=\sin\beta$ のとき，$(*)$ より，$0^\circ\leqq\alpha$，$\beta<360^\circ$ より

$$\sin(\alpha+\beta)=1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\alpha+\beta=90^\circ,\ 450^\circ}$$

逆に，$\alpha+\beta=90^\circ,\ 450^\circ$ のとき，$(*)$ より

$$\sin\alpha=\cos\beta,\ \cos\alpha=\sin\beta$$

11.7　(1)

$$\begin{aligned}&\sin^2x+\sin^2y+\sin^2(x+y)\\&=\frac{1}{2}(1-\cos2x)+\frac{1}{2}(1-\cos2y)+1-\cos^2(x+y)\\&=2-\frac{1}{2}(\cos2x+\cos2y)-\cos^2(x+y)\\&=2-\cos(x+y)\cos(x-y)-\cos^2(x+y)\\&=2-\{\cos(x-y)+\cos(x+y)\}\cos(x+y)\\&=2-2\cos x\cos y\cos(x+y)\end{aligned}$$

(2)　$\sin^2x+\sin^2y+\sin^2(x+y)>2$ のとき，(1) の結果から

$2-2\cos x\cos y\cos(x+y)>2$　ゆえに　$\cos x\cos y\cos(x+y)<0$　$\cdots(*)$

$x>0$，$y>0$，$x+y<\pi$ のとき，$x+y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ と仮定すると

$$0<x<\frac{\pi}{2},\quad 0<y<\frac{\pi}{2},\quad 0<x+y\leqq\frac{\pi}{2}$$

したがって　$\cos x>0$，$\cos y>0$，$\cos(x+y)\geqq0$

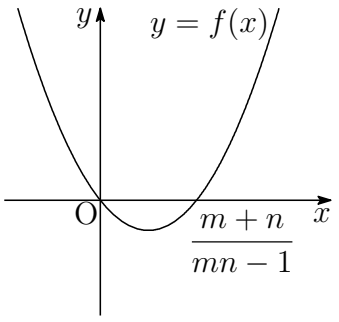
これは，$(*)$ に矛盾する．よって，$x+y>\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ．

11.8　(1)　$f(x)=(mx-1)(nx-1)-(x^2+1)$ とおくと

$$f(x)=(mn-1)x^2-(m+n)x$$

$1\leqq m<n$ より $mn-1>0\cdots①$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，x 軸との共有点の x 座標は

$$x=0,\quad \frac{m+n}{mn-1}$$



ここで

$$3-\frac{m+n}{mn-1}=\frac{3(mn-1)-(m+n)}{mn-1}$$
$$=\frac{(9mn-3m-3n+1)-10}{3(mn-1)}$$
$$=\frac{(3m-1)(3n-1)-10}{3(mn-1)} \quad \cdots ②$$

m，n は $1 \leqq m < n$ である整数であるから　$n \geqq 2$

ゆえに　　$3m-1 \geqq 2$，$3n-1 \geqq 5$

$mn-1>0$，$(3m-1)(3n-1) \geqq 2 \cdot 5$ および ② から

$$3-\frac{m+n}{mn-1} \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{m+n}{mn-1} \leqq 3 \quad \cdots ③$$

③ より，$x>3$ のとき　$f(x)>0$

すなわち　$x>3$ のとき　$(mx-1)(nx-1)>x^2+1$

(2)　　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}}=\dfrac{m+n}{mn-1}$

$1 \leqq m < n$，①，③ より，$\tan(\alpha+\beta)$ がとる整数値は，3 以下の自然数であるから，次の 3 つに場合に分けて求める．

i) $\tan(\alpha+\beta)=1$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=1 \quad \text{ゆえに} \quad (m-1)(n-1)=2$$

このとき，$0 \leqq m-1 < n-1$ に注意して

$$m-1=1,\ \ n-1=2 \quad \text{すなわち} \quad (m,\ n)=(2,\ 3)$$

ii) $\tan(\alpha+\beta)=2$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=2 \quad \text{ゆえに} \quad (2m-1)(2n-1)=5$$

このとき，$1 \leqq 2m-1 < 2n-1$ に注意して

$$2m-1=1,\ \ 2n-1=5 \quad \text{すなわち} \quad (m,\ n)=(1,\ 3)$$

iii) $\tan(\alpha+\beta)=3$ のとき

$$\frac{m+n}{mn-1}=3 \quad \text{ゆえに} \quad (3m-1)(3n-1)=10$$

このとき，$2 \leqq 3m-1 < 3n-1$ に注意して

$$3m-1=2,\ \ 3n-1=5 \quad \text{すなわち} \quad (m,\ n)=(1,\ 2)$$

i)〜iii) より　　$\boldsymbol{(m,\ n) = (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)}$

11.9　(1) l_1 と x 軸のなす角を θ とすると　　$m = \tan\theta$

このとき，l_2 の傾きを k とすると　　$k = \tan\dfrac{\theta}{2}$

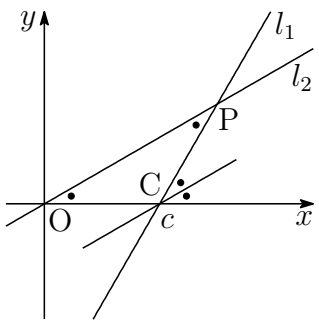
2 倍角の公式により　　$\tan\theta = \dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$

したがって　$\dfrac{2k}{1-k^2} = m$　　整理すると　$mk^2 + 2k - m = 0$

$k > 0$ に注意してこれを解くと　　$k = \dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}$

よって，l_2 の方程式は　　$\boldsymbol{y = \left(\dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}\right)x}$

(2) 右の図から，△OCP は OC = CP = c の二等辺三角形であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (c\cos\theta,\ c\sin\theta)$$

このとき　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = (c,\ 0) + \left(\frac{c}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{cm}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$
$$= \left(c + \frac{c}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{cm}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(c + \dfrac{c}{\sqrt{1+m^2}},\ \dfrac{cm}{\sqrt{1+m^2}}\right)}$，$\mathrm{CP} = \boldsymbol{c}$

(3) (2) の結果から，P は，C を中心とする半径 c の円周上にある．

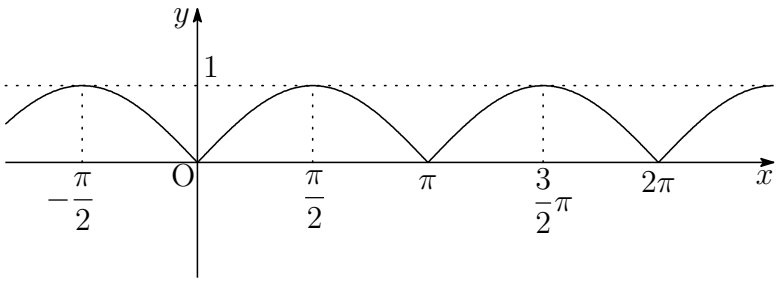
$m = 1$ のとき　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$，　$m = \sqrt{3}$ のとき　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

よって，点 P が描く曲線の長さは　　$c\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi c}{12}}$

11.10 (1) $\sin x \geqq 0$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

$\sin x < 0$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$

$y = |\sin x|$ のグラフは，下の図のようになる．



任意の実数 x について $|\sin(x+p)| = |\sin x|$ が成り立つので，$x = 0$ のとき

$$|\sin p| = 0$$

これを満たす最小の正の数 p は　$p = \pi$

実際，任意の実数 x について $|\sin(x+\pi)| = |\sin x|$ が成り立つ．

よって，求める基本周期は　$\boldsymbol{\pi}$

(2) 任意の x に対して　$f(x+p) = f(x)$

これに $x = -\dfrac{p}{2}$ を代入して　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = f\left(\dfrac{p}{2}\right)$　$\cdots$①

また　$f(-x) = |\sin(-mx)|\sin(-nx)$

$= -|\sin mx|\sin nx = -f(x)$

ゆえに　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = -f\left(\dfrac{p}{2}\right)$　$\cdots$②

①，② より　$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = 0$

$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = 0$ より　$\left|\sin\dfrac{mp}{2}\right|\sin\dfrac{np}{2} = 0$

ゆえに　$\sin\dfrac{mp}{2} = 0$　または　$\sin\dfrac{np}{2} = 0$

したがって　$mp = 2k\pi$　または　$np = 2l\pi$　(k，l は整数)

i) $mp = 2k\pi$ (k は整数) のとき

$$\begin{aligned} f(x+p) &= |\sin m(x+p)|\sin n(x+p) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin(mx+2k\pi)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin mx|\sin(nx+np) \end{aligned}$$

このとき，$f(x+p)=f(x)$ が成り立つ，すなわち

$$|\sin mx|\sin(nx+np)=|\sin mx|\sin nx \quad \cdots(*)$$

任意の実数 x に対して $(*)$ が成り立つとき　$\sin(nx+np)=\sin nx$
ゆえに，np は 2π の整数倍．

ii) $np=2l\pi$ (l は整数) のとき

$$\begin{aligned} f(x+p) &= |\sin m(x+p)|\sin n(x+p) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin(nx+2l\pi) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin nx \end{aligned}$$

このとき，$f(x+p)=f(x)$ が成り立つ，すなわち

$$|\sin(mx+mp)|\sin nx=|\sin mx|\sin nx \quad \cdots(**)$$

任意の実数 x に対して $(**)$ が成り立つとき

$$|\sin(mx+mp)|=|\sin mx|$$

上式に $x=0$ を代入すると　$|\sin mp|=0$
ゆえに，mp は π の整数倍である．
実際，mp が π の整数倍であれば，$(**)$ が成り立つ．

i)，ii) より，mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍である．

(3) (2) の結果より，改めて，$mp=k\pi$，$np=2l\pi$ とおくと (k，l は整数)

$$p=\frac{k\pi}{m}=\frac{2l\pi}{n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{kn}{m}=2l$$

m と n は互いに素であるから，k は m の倍数．
ゆえに，$k=mk'$ とおくと (k' は整数)，$p=k'\pi\cdots$③ であるから

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x+k'\pi) \\ &= |\sin m(x+k'\pi)|\sin n(x+k'\pi) \\ &= |\sin(mx+mk'\pi)|\sin(nx+nk'\pi) \\ &= |\sin mx|(\sin nx\cos nk'\pi+\cos nx\sin nk'\pi) \\ &= (-1)^{nk'}|\sin mx|\sin nx \\ &= (-1)^{nk'}f(x) \quad \cdots④ \end{aligned}$$

i) n が偶数のとき
$k'=1$ とすると，③，④ より　$f(x+\pi)=f(x)$
したがって，基本周期は π

ii) n が奇数のとき
$k'=2$ とすると，③，④ より　$f(x+2\pi)=f(x)$
したがって，基本周期は 2π

よって，基本周期は，n が偶数のとき $\boldsymbol{\pi}$，n が奇数のとき $\boldsymbol{2\pi}$

11.11 $4\cos^3\theta-7\cos\theta+3=0$ より

$$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)(2\cos\theta+3)=0$$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから　　$\cos\theta=1,\ \dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　　$\boldsymbol{\theta=0^\circ,\ 60^\circ}$

11.12　i) $0<x<\pi$ のとき，$\sin x>0$ であるから

$$4\sin^2x\geqq3\quad\text{ゆえに}\qquad(2\sin x+\sqrt{3}\,)(2\sin x-\sqrt{3}\,)\geqq0$$

$\sin x>0$ より　$\sin x\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

ii) $\pi<x<2\pi$ のとき，$\sin x<0$ であるから

$$4\sin^2x\leqq3\quad\text{ゆえに}\qquad(2\sin x+\sqrt{3}\,)(2\sin x-\sqrt{3}\,)\leqq0$$

$\sin x<0$ より　　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin x<0$

すなわち　　$\pi<x\leqq\dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}\leqq x<2\pi$

i)，ii) より　　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{2\pi}{3},\ \pi<x\leqq\dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}\leqq x<2\pi}$

11.13 $\dfrac{\pi}{6}\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\cdots$① より $\sin x\neq0$ であるから，与えられた等式は

$$(1+\sqrt{3})\tan x=2\sqrt{3}+\frac{1-\sqrt{3}}{\tan x}$$

整理すると　　$(\sqrt{3}+1)\tan^2x-2\sqrt{3}\tan x+(\sqrt{3}-1)=0$

ゆえに　　$(\tan x-1)\{(\sqrt{3}+1)\tan x-(\sqrt{3}-1)\}=0$

① より，$\tan x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{4}{3}\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) > 0$$

したがって　$\tan x = 1$　① に注意して　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{4}}$

別解（宮崎大学 2008）[1]

11.14 与えられた 2 式から

$$\sin y = 3\sin x - \sqrt{3} \quad \cdots ①, \quad \cos y = -3\cos x - 1 \quad \cdots ②$$

①，② を $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ に代入すると

$$(3\sin x - \sqrt{3})^2 + (-3\cos x - 1)^2 = 1$$

整理すると　$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$　ゆえに　$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$

$0 \leqq x \leqq \pi$ であるから　　$\boldsymbol{x = \dfrac{2}{3}\pi}$

これを ①，② に代入すると

$$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos y = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq y \leqq \pi$ であるから　　$\boldsymbol{y = \dfrac{\pi}{3}}$

11.15 $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$ より　$(2\cos^2\theta - 1) + \cos\theta = 0$

ゆえに　　$(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$0° \leqq \theta \leqq 360°$ であるから　　$\boldsymbol{\theta = 60°,\ 180°,\ 300°}$

11.16 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ であるから，不等式 $\cos 2x + \cos x + 1 > 0$ は

$$(2\cos^2 x - 1) + \cos x + 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos x(2\cos x + 1) > 0$$

したがって　　$\cos x < -\dfrac{1}{2}, \quad 0 < \cos x$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ に注意して，これを解くと

$$\boldsymbol{0 \leqq x < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < x \leqq 2\pi}$$

11.17 $5\sin^2\theta + 14\cos\theta - 13 \geqq 0$ より

$$5(1-\cos^2\theta) + 14\cos\theta - 13 \geqq 0$$
$$5\cos^2\theta - 14\cos\theta + 8 \leqq 0$$

整理すると　$(\cos\theta - 2)(5\cos\theta - 4) \leqq 0$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　$\dfrac{4}{5} \leqq \cos\theta \leqq 1$

これを満たす θ で最大なものが α であるから　$\boldsymbol{\cos\alpha = \dfrac{4}{5}}$

このとき　$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$

よって　$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{24}{7}}$

11.18 $\sin 3x + \cos 3x = 0$ において，$\cos 3x \neq 0$ であるから　$\tan 3x = -1$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$0 \leqq 3x \leqq 3\pi$ であるから

$$3x = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi, \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi}$$

11.19 加法定理により

$$\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x, \quad \cos x + \cos 3x = 2\cos 2x\cos x$$

これを方程式

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

に代入すると

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$$
$$(2\cos x + 1)\sin 2x = (2\cos x + 1)\cos 2x$$
$$(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

ゆえに　$(2\cos x + 1)\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$\boldsymbol{x = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi}$

11.20 与えられた不等式から　$(\sin 3x - \sin x) + \sin 2x < 0$

$$2\cos 2x \sin x + 2\sin x \cos x < 0$$
$$\sin x(\cos 2x + \cos x) < 0$$
$$\sin x(2\cos^2 x + \cos x - 1) < 0$$
$$\sin x(\cos x + 1)(2\cos x - 1) < 0$$

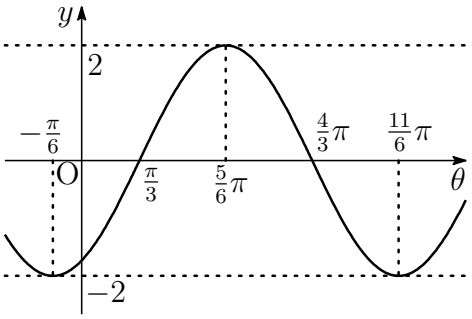
$\sin x > 0$　すなわち　$0 < x < \pi$ のとき　$\cos x < \dfrac{1}{2}$

$\sin x < 0$　すなわち　$\pi < x < 2\pi$ のとき　$\cos x > \dfrac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < x < \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi < x < 2\pi}$

11.21　(1)　$f(\theta) = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$y = f(\theta)$ は $y = 2\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に，$\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもの．



(2)　(1) の結果を $f(\theta) = 1$ に代入すると

$$2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$-\pi < \theta < \pi$ より，$-\dfrac{4}{3}\pi < \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{2}{3}\pi$ において，上の方程式を解くと

$$\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{7}{6}\pi,\ \frac{\pi}{6} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\theta = -\frac{5}{6}\pi,\ \frac{\pi}{2}}$$

(3)　$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\theta + 1$ より　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) > \dfrac{1}{2}$

(2) の結果に注意して

$$-\frac{4}{3}\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < -\frac{7}{6}\pi, \quad \frac{\pi}{6} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$$

よって　$\boldsymbol{-\pi < \theta < -\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi}$

11.22 (1)
$$\begin{aligned} f(\theta) &= (\cos\theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta) \\ &= \frac{1}{2}(\cos 3\theta + \cos\theta)\cos 3\theta \\ &= \frac{1}{2}(\cos^2 3\theta + \cos\theta\cos 3\theta) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\cos 6\theta + 1) + \frac{1}{2}(\cos 4\theta + \cos 2\theta)\right\} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\cos 6\theta \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} g(\theta) &= (\sin\theta)(\sin 2\theta)(\sin 3\theta) \\ &= \frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta)\sin 3\theta \\ &= \frac{1}{2}(\sin 3\theta\cos\theta - \sin 3\theta\cos 3\theta) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\sin 4\theta + \sin 2\theta) - \frac{1}{2}\sin 6\theta\right\} \\ &= \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{4}\sin 6\theta \end{aligned}$$

よって
$$\boldsymbol{p = q = r = s = \frac{1}{4},\ t = 0,\ u = v = \frac{1}{4},\ w = -\frac{1}{4}}$$
とすればよい.

(2) (1) の結果から
$$\begin{aligned} g\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{4}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin(4\theta + \pi) - \frac{1}{4}\sin\left(6\theta + \frac{3}{2}\pi\right) \\ &= \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta + \frac{1}{4}\cos 6\theta \end{aligned}$$

$f(\theta) = g\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ より
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\cos 6\theta = \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta + \frac{1}{4}\cos 6\theta$$

ゆえに　$\sin 4\theta + \cos 4\theta = -1$　すなわち　$\sin\left(4\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq 4\theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{17}{4}\pi$ であるから
$$4\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi,\ \frac{15}{4}\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{8}\pi}$$

11.23 $0 \leqq \theta < 2\pi$ より $x = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ とおくと　$-1 \leqq x \leqq 1$

また，$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2$ であるから

$$y = -x^2 - x + 1 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$
$$= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

よって　$x = -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi}$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$

$x = 1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0}$ のとき　**最小値** $\boldsymbol{-1}$

11.24　(1)　$a\cos\theta - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta + a\cos\theta - 2$ であるから

$\cos\theta = x$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$y = 2x^2 + ax - 2 = 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} - 2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ゆえに，この関数のグラフは下に凸の放物線で，

軸は $x = -\dfrac{a}{4}$ である．$-1 \leqq x \leqq 1$ の中央は　$x = 0$

最大値 $M(a)$ は，次の 2 つの場合に分けて求める．

2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

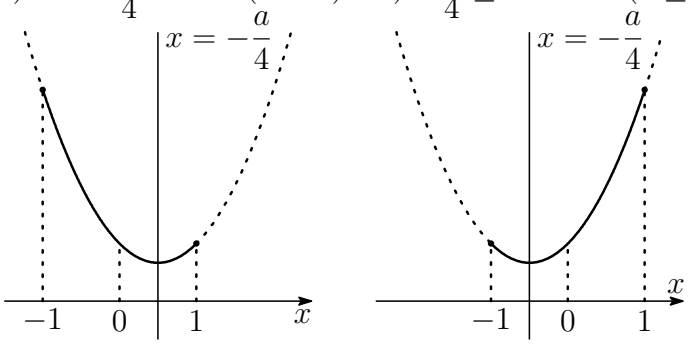
i)　$0 < -\dfrac{a}{4}$　すなわち　$a < 0$ のとき

$x = -1$ で最大値をとるから　$M(a) = 2(-1)^2 + a(-1) - 2 = -a$

ii)　$-\dfrac{a}{4} \leqq 0$　すなわち　$a \geqq 0$ のとき

$x = 1$ で最大値をとるから　$M(a) = 2\cdot 1^2 + a\cdot 1 - 2 = a$

i) $0 < -\dfrac{a}{4}$ のとき $(a < 0)$　　ii) $-\dfrac{a}{4} \leqq 0$ のとき $(a \geqq 0)$



したがって　$\boldsymbol{M(a) = \begin{cases} -a & (a < 0) \\ a & (a \geqq 0) \end{cases}}$

最小値 $m(a)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

i) $1 < -\dfrac{a}{4}$　すなわち　$a < -4$ のとき

$x = 1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2\cdot 1^2 + a\cdot 1 - 2 = a$

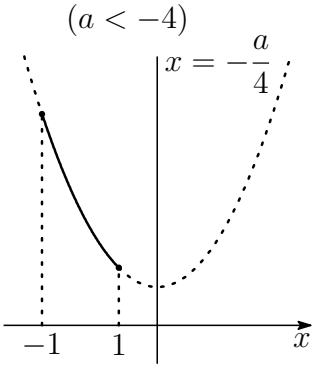
ii) $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$　すなわち　$-4 \leqq a \leqq 4$ のとき

$x = -\dfrac{a}{4}$ で最小値をとるから　$m(a) = -\dfrac{a^2}{8} - 2$

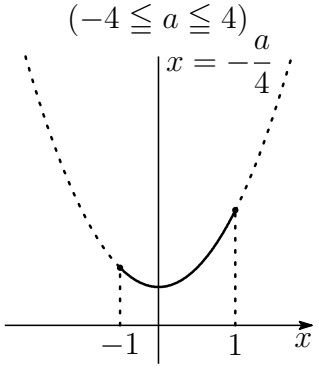
iii) $-\dfrac{a}{4} < -1$　すなわち　$4 < a$ のとき

$x = -1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2\cdot(-1)^2 + a\cdot(-1) - 2 = -a$

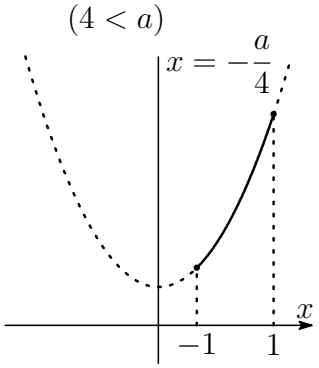
i) $1 < -\dfrac{a}{4}$ のとき　$(a < -4)$



ii) $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$ のとき　$(-4 \leqq a \leqq 4)$



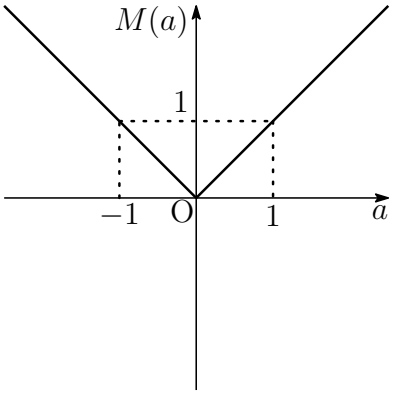
iii) $-\dfrac{a}{4} < -1$ のとき　$(4 < a)$

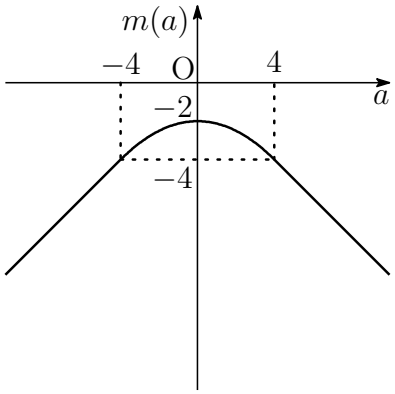


したがって　$\boldsymbol{m(a) = \begin{cases} a & (a < -4) \\ -\dfrac{a^2}{8} - 2 & (-4 \leqq a \leqq 4) \\ -a & (4 < a) \end{cases}}$

(2) (1) の結果から

$M(a)$ の最小値は 0，　$m(a)$ の最大値は -2





11.25　(1)　$x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$45^\circ \leqq \theta + 45^\circ \leqq 225^\circ$ であるから，$x = 0$ となるのは

$$\theta + 45^\circ = 180^\circ \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta = 135^\circ}$$

(2) $45^\circ \leqq \theta + 45^\circ \leqq 225^\circ$ であるから

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin(\theta + 45^\circ) \leqq 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}}$$

(3) $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$ であるから

$$\begin{aligned} y &= -\sin\theta\cos\theta + a(\sin\theta + \cos\theta) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 1) + ax = \boldsymbol{-\frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(4) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + ax + \dfrac{1}{2}$ とおくと，(3) の結果から

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x - a)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}$$

定義域 $-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の中央が $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$ であるから

$\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} \leqq a$ のとき，$f(x)$ の最小値は $f(-1)$

$a < \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$ のとき，$f(x)$ の最小値は $f(\sqrt{2})$

よって，求める y の最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} \leqq a} \text{ のとき} & \boldsymbol{-a} \\ \boldsymbol{a < \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}} \text{ のとき} & \boldsymbol{\sqrt{2}a - \dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

11.26 (1)
$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos^2 x + \sqrt{3}(a - b)\cos x \sin x + b\sin^2 x \\ &= a\cdot\frac{1 + \cos 2x}{2} + \sqrt{3}(a - b)\cdot\frac{\sin 2x}{2} + b\cdot\frac{1 - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{a - b}{2}(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x) + \frac{a + b}{2} \\ &= (a - b)\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

$a > b$ より $a - b > 0$，$-1 \leqq \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$ であるから

$$-(a-b)+\frac{a+b}{2} \leqq (a-b)\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{a+b}{2} \leqq (a-b)+\frac{a+b}{2}$$

ゆえに $\quad \dfrac{-a+3b}{2} \leqq f(x) \leqq \dfrac{3a-b}{2}$

したがって $\quad \dfrac{3a-b}{2}=6,\ \dfrac{-a+3b}{2}=2$ $\quad$ これを解いて $\quad \boldsymbol{a=5,\ b=3}$

(2) (1) の結果から $\quad f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4$

$f(x)>5$ より $\quad \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)>\dfrac{1}{2}$ $\quad \cdots ①$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $\quad \dfrac{\pi}{6} \leqq 2x+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{\pi}{6}+2\pi$

この範囲で ① を解くと

$$\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0<x<\frac{\pi}{3}}$$

11.27 (1) $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とすると

$$\begin{aligned} a\cos\theta-b\sin\theta &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果に $a=\sqrt{3}$, $b=1$ を代入すると, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ より

$$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=\boldsymbol{2\cos(\theta+\alpha)},$$

$$\boldsymbol{\alpha=30^\circ+360^\circ\times n\ (n\text{ は整数})}$$

(3) (1) の結果を利用すると

$$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\theta+45^\circ)$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より, $45^\circ \leqq \theta+45^\circ \leqq 225^\circ$ であるから

$\theta+45^\circ=45^\circ$ $\quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{\theta=0^\circ}$ のとき $\quad$ **最大値 1**

$\theta+45^\circ=180^\circ$ $\quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{\theta=135^\circ}$ のとき $\quad$ **最小値 $-\sqrt{2}$**

11.28 (1) $\quad t=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$x-\dfrac{\pi}{3}=\theta$ とおくと $t=2\sin\theta \cdots ①$ であるから

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x &= 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left\{2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right\} \\ &= 2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2\theta \\ &= 2(1-2\sin^2\theta)=2-(2\sin\theta)^2=2-t^2 \end{aligned}$$

また　　$2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x = 2(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 2t$

よって　　$y = (2 - t^2) + 2t = \boldsymbol{-t^2 + 2t + 2}$

(2) ① より $0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$　ゆえに　$-\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3}$

(1) の結果から　$y = -(t-1)^2 + 3$

よって

$t = 1$　　すなわち　$\theta = \dfrac{\pi}{6}\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき　**最大値 3**

$t = -\sqrt{3}$　すなわち　$\theta = -\dfrac{\pi}{3}(x = 0)$ のとき　**最小値 $-2\sqrt{3} - 1$**

11.29　(1)　　$t = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq x + \dfrac{\pi}{6} \leqq \pi$　よって　$\boldsymbol{0 \leqq t \leqq 2}$

(2)
$$\begin{aligned} t^2 &= (\cos x + \sqrt{3}\sin x)^2 \\ &= \cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x + 3\sin^2 x \\ &= 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x + 1 \end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned} f(x) &= \log_2\{(\cos x + \sqrt{3}\sin x) + 2\} \\ &\quad + (2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x + 1) + 1 \\ &= \boldsymbol{\log_2(t+2) + t^2 + 1} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} g(t_2) - g(t_1) &= \log_2(t_2 + 2) + {t_2}^2 + 1 - \{\log_2(t_1 + 2) + {t_1}^2 + 1\} \\ &= \log_2 \frac{t_2 + 2}{t_1 + 2} + (t_2 + t_1)(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

$0 \leqq t_1 < t_2$ であるから　$\dfrac{t_2 + 2}{t_1 + 2} > 1$，$t_2 + t_1 > 0$，$t_2 > t_1$

したがって　$g(t_2) - g(t_1) > 0$　よって　$g(t_2) > g(t_1)$

(4) $g(t)$ は単調増加であるから，$f(x)$ の最大値・最小値はそれぞれ

$$g(2) = \log_2(2+2) + 2^2 + 1 = 7, \quad g(0) = \log_2 2 + 1 = 2$$

$t = 2$ のとき　$2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$　すなわち　$x = \dfrac{\pi}{3}$

$t = 0$ のとき　$2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$　すなわち　$x = \dfrac{5}{6}\pi$

よって　　最大値 **7**　$\left(\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3}}\right)$,　　最小値 **2**　$\left(\boldsymbol{x = \dfrac{5}{6}\pi}\right)$

11.30 (1) $a=4$，$b=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ であるから，余弦定理により

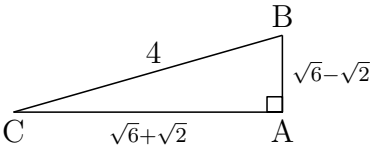
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-4^2}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=0$$

よって　　$\boldsymbol{A=90^\circ}$

(2) (1) の結果から，右図により

$$\sin B=\frac{\boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}$$

$$\cos B=\frac{\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}$$



(3) 加法定理から

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ&=\sin(45^\circ+30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

B は鋭角であるから，上式および (2) の結果から　　$\boldsymbol{B=75^\circ}$

11.31 (1) $\alpha=\angle\mathrm{APH}$，$\beta=\angle\mathrm{BPH}$ とおくと　　$\tan\alpha=\dfrac{a}{x}$，　$\tan\beta=\dfrac{b}{x}$

$\theta=\alpha-\beta$ より　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x}}{1+\dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{b}{x}}=\frac{\boldsymbol{(a-b)x}}{\boldsymbol{x^2+ab}}$$

(2) $x>0$，$\dfrac{ab}{x}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$x+\frac{ab}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{ab}{x}}=2\sqrt{ab}$$

$a-b>0$ より　　$\tan\theta=\dfrac{(a-b)x}{x^2+ab}=\dfrac{a-b}{x+\dfrac{ab}{x}}\leqq\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$

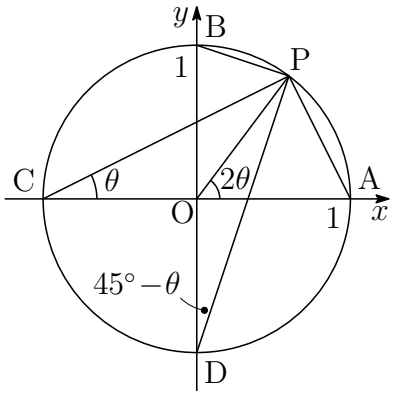
上式において，等号が成立するのは，$x=\dfrac{ab}{x}$，すなわち $x=\sqrt{ab}$ のとき，$\tan\theta$ は最大となり，θ もこのとき最大となる

よって　　$\boldsymbol{x=\sqrt{ab}}$

11.32 (1) $\angle\mathrm{POA} = 2\theta$ より，$\angle\mathrm{PCA} = \theta$，$\angle\mathrm{APC} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{PC} = \mathrm{CA}\cos\theta = \boldsymbol{2\cos\theta}$$

(2) (1) と同様に



$$\mathrm{PA} = \mathrm{CA}\sin\theta = 2\sin\theta$$

$\angle\mathrm{POB} = 90^\circ - 2\theta$ であるから

$$\angle\mathrm{PDB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{POB} = 45^\circ - \theta$$

$\angle\mathrm{DPB} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{PD} = \mathrm{DB}\cos(45^\circ - \theta) = 2\cos(45^\circ - \theta)$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{PA} + \mathrm{PC} &= 2\sin\theta + 2\cos\theta = 2\sqrt{2}\cos(45^\circ - \theta)\,,\\ \mathrm{PA} + \mathrm{PC} - \mathrm{PD} &= 2\sqrt{2}\cos(45^\circ - \theta) - 2\cos(45^\circ - \theta)\\ &= 2(\sqrt{2} - 1)\cos(45^\circ - \theta)\end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ であるから　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos(45^\circ - \theta) \leqq 1$

よって　　$\boldsymbol{2 - \sqrt{2} \leqq \mathrm{PA} + \mathrm{PC} - \mathrm{PD} \leqq 2(\sqrt{2} - 1)}$

11.33 (1) 面積の公式から　$S = \dfrac{1}{2}bc\sin\theta$　ゆえに　$\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{2S}{bc}}$

余弦定理により　　$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$

(2) △ACD に余弦定理を適用すると，(1) の結果により

$$\begin{aligned}\mathrm{DC}^2 &= \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AD}\cos(\theta + 60^\circ)\\ &= b^2 + c^2 - 2bc(\cos\theta\cos 60^\circ - \sin\theta\sin 60^\circ)\\ &= b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2S}{bc}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}S \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$ は，a，b，c に関する対称式であるから　$\mathrm{DC}^2 = \mathrm{EA}^2 = \mathrm{FB}^2$

(3) $T=\dfrac{1}{3}(\triangle\mathrm{BCE}+\triangle\mathrm{CAF}+\triangle\mathrm{ABD})$ であるから

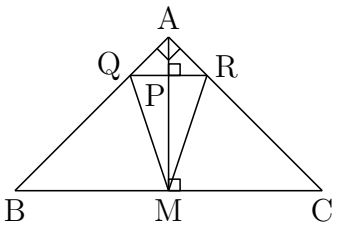
$$T=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ+\frac{1}{2}b^2\sin 60^\circ+\frac{1}{2}c^2\sin 60^\circ\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2)$$

ゆえに　　$a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}T$

これを $(*)$ に代入すると

$$\mathrm{DC}^2=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}T+2\sqrt{3}S=\boldsymbol{2\sqrt{3}(S+T)}$$

11.34 (1) 求める三角比は，三角形の大きさに関係にしないので，右の図において $\mathrm{AP}=1$ とすると



$\mathrm{PM}=3$，$\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}=1$，$\mathrm{QR}=2$，

$\mathrm{MQ}=\mathrm{MR}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{QMR}=\frac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{10+10-4}{2\cdot 10}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

(2) $\mathrm{MB}=4$，$\mathrm{MQ}=\sqrt{10}$，$\mathrm{BQ}=3\sqrt{2}$ であるから，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{QMB}=\frac{4^2+(\sqrt{10})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{10}}=\frac{16+10-18}{2\cdot 4\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

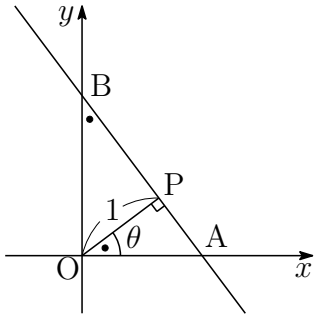
(1) の結果から　$\cos 2\angle\mathrm{QMR}=2\cos^2\angle\mathrm{QMR}-1=2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2-1=\dfrac{7}{25}$

ここで　　$\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\dfrac{7}{25}=\dfrac{5\sqrt{10}-14}{50}=\dfrac{\sqrt{250}-\sqrt{196}}{50}>0$

よって，$2\angle\mathrm{QMR}$，$\angle\mathrm{QMB}$ は鋭角であるから　　$\boldsymbol{2\angle QMR>\angle QMB}$

別解　(九大 [文]2009) 1

11.35 (1) 右の図から



$$\mathrm{OA}=\frac{\mathrm{OP}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$$
$$\mathrm{OB}=\frac{\mathrm{OP}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$$
$$\mathrm{AB}=\frac{\mathrm{OB}}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

よって　　$\mathbf{OA+OB-AB=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}}$

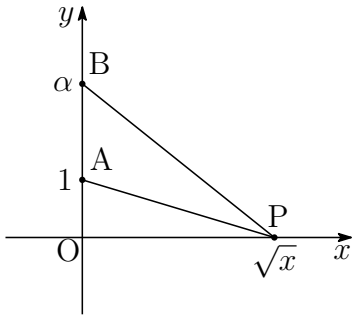
(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{OA+OB-AB}&=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{2\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\\&=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{(\sin\theta+\cos\theta+1)(\sin\theta+\cos\theta-1)}\\&=\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta+1}=\frac{2}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+1}\end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}=\mathbf{2(\sqrt{2}-1)}$ をとる．

11.36　(1) 右の図から

$$\sin\angle\mathrm{OPB}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{PB}}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\sqrt{x+\alpha^2}}}$$
$$\cos\angle\mathrm{OPB}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PB}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\alpha^2}}$$
$$\sin\angle\mathrm{OPA}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{PA}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$
$$\cos\angle\mathrm{OPA}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$



したがって

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{APB}&=\sin(\angle\mathrm{OPB}-\angle\mathrm{OPA})\\&=\sin\angle\mathrm{OPB}\cos\angle\mathrm{OPA}-\cos\angle\mathrm{OPB}\sin\angle\mathrm{OPA}\\&=\frac{\alpha}{\sqrt{x+\alpha^2}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\alpha^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}\\&=\frac{\boldsymbol{(\alpha-1)\sqrt{x}}}{\boldsymbol{\sqrt{(x+1)(x+\alpha^2)}}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{(\alpha-1)\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)(x+\alpha^2)}}=\frac{(\alpha-1)\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+(\alpha^2+1)x+\alpha^2}}\\&=\frac{\alpha-1}{\sqrt{x+(\alpha^2+1)+\dfrac{\alpha^2}{x}}}=\frac{\alpha-1}{\sqrt{\left(\sqrt{x}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)^2+(\alpha+1)^2}}\end{aligned}$$

$\alpha > 1$ より　$\sqrt{x} - \dfrac{\alpha}{\sqrt{x}} = 0$　すなわち　$x = \alpha$ のとき，最大値

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{(\alpha+1)^2}} = \boldsymbol{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}}$$

をとる．

(3) (2) の結果から　$\dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \dfrac{1}{2}$　$\alpha > 1$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{\alpha = 3}$

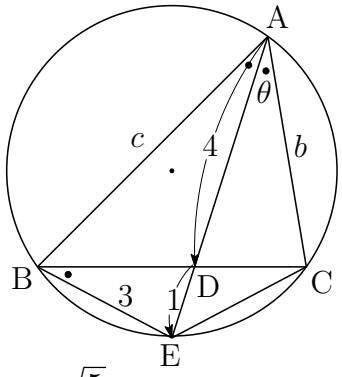
11.37　(1) $\cos 2\theta = \dfrac{2}{3} > 0$ より，$0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{2}{3}$　ゆえに　$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$\sin^2 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$　ゆえに　$\sin 2\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

△ABC の外接円の半径を R とし，△ABC，△ABE に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 2\theta} = 2R, \quad \frac{\mathrm{BE}}{\sin\theta} = 2R$$



上の 2 式から

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 2\theta} = \frac{\mathrm{BE}}{\sin\theta}$$

したがって　$\mathrm{BC} = \dfrac{\mathrm{BE}\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\mathrm{BE}\cos\theta = 2{\cdot}3{\cdot}\sqrt{\dfrac{5}{6}} = \boldsymbol{\sqrt{30}}$

(2) 円周角の定理により　$\angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{EAC} = \theta$

よって　$\triangle\mathrm{BEC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BE}{\cdot}\mathrm{BC}\sin\theta = \dfrac{1}{2}{\cdot}3{\cdot}\sqrt{30}{\cdot}\dfrac{1}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt{5}}$

(3) AD : DE = 4 : 1 であるから　$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{BEC} = 4 : 1$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC} = 4\triangle\mathrm{BEC} = 4{\cdot}\dfrac{3}{2}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とすると　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}bc{\cdot}\dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}bc$

上の 2 式から　$\dfrac{\sqrt{5}}{6}bc = 6\sqrt{5}$　ゆえに　$bc = 36$　$\cdots$①

△ABC に余弦定理を適用すると　$\mathrm{BC}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 2\theta$

したがって　$(\sqrt{30})^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}36{\cdot}\dfrac{2}{3}$　ゆえに　$b^2 + c^2 = 78$　$\cdots$②

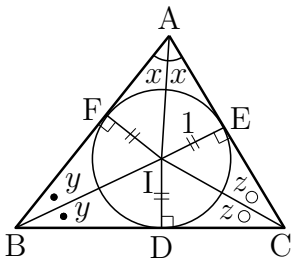
①，② より，b^2，c^2 を解とする 2 次方程式は　$t^2-78t+36^2=0$

これを解いて　　$t=39\pm\sqrt{39^2-36^2}=39\pm15=54,\ 24$

AB > AC であるから　$\mathrm{AB}=\sqrt{54}=\mathbf{3\sqrt{6}},\ \mathrm{AC}=\sqrt{24}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

補足　本題の計算結果から，△ABC は $C=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形.

11.38　(1)　右の図のように △ABC の内心を I とし，この内接円と 3 辺 BC，CA，AB との接点をそれぞれ D，E，F とする．△AEI について



$$\tan x=\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{AE}}\quad\text{ゆえに}\quad \mathrm{AE}=\frac{1}{\tan x}$$

AE = AF であるから

$$\triangle\mathrm{AEI}=\triangle\mathrm{AFI}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot1=\frac{1}{2\tan x}$$

同様に　$\triangle\mathrm{BDI}=\triangle\mathrm{BFI}=\dfrac{1}{2\tan y},\quad \triangle\mathrm{CDI}=\triangle\mathrm{CEI}=\dfrac{1}{2\tan z}$

S はこれらの三角形の面積の和であるから

$$S=2\left(\frac{1}{2\tan x}+\frac{1}{2\tan y}+\frac{1}{2\tan z}\right)=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}$$

(2)　$2x+2y+2z=\pi$ より，$z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$x+y=\dfrac{\pi}{3}\cdots$① であるから

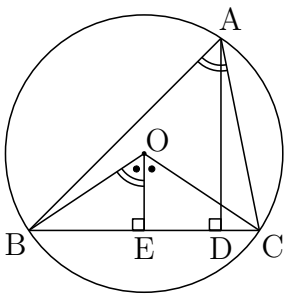
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos y}{\sin y}+\sqrt{3}\\&=\frac{\cos x\sin y+\sin x\cos y}{\sin x\sin y}+\sqrt{3}=\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y)-\cos(x+y)}+\sqrt{3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{\cos(x-y)-\frac{1}{2}}+\sqrt{3}\end{aligned}$$

$0<x,y<\dfrac{\pi}{3}$ であるから，S は $\boldsymbol{x=y=\dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最小値 $\mathbf{3\sqrt{3}}$ をとる.

補足　(熊大 [医]2017) 1

11.39 (1) 直角三角形 ABD において

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\sin B \quad \cdots ①$$



正弦定理を △ABC に適用すると

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin C} = 2R \text{ より} \quad \mathrm{AB} = 2R\sin C \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C \quad \cdots ③$$

$A < 90^\circ$ より，円周角と中心角の定理により　$\angle \mathrm{BOC} = 2A$

また，$\triangle \mathrm{BOE} \equiv \triangle \mathrm{COE}$ であるから　$\angle \mathrm{BOE} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{BOC} = A$

$\mathrm{OB} = R$ であるから △BOE において　$\mathrm{OE} = R\cos A \quad \cdots ④$

(2) △ABC の重心 G は，中線 AE 上にあるから，G と O が一致するとき，直線 AE は辺 BC の垂直二等分線であるから　$\mathrm{CA} = \mathrm{AB}$

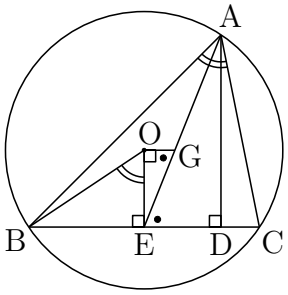
同様に，辺 CA の中点を F とすると，$\mathrm{OF} \perp \mathrm{CA}$

G は，中線 BF 上にあるから，G と O か一致するとき，直線 BF は辺 CA の垂直二等分線であるから　$\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$

よって，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ より，△ABC は正三角形である．

(3) $\mathrm{OG} /\!/ \mathrm{BC}$ より，$\triangle \mathrm{EGO} \backsim \triangle \mathrm{AED}$

$\mathrm{EG} : \mathrm{GA} = 1 : 2$ であるから



$$\mathrm{OE} : \mathrm{AD} = 1 : 3 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AD} = 3\mathrm{OE}$$

③，④ を上式に代入すると

$$2R\sin B\sin C = 3R\cos A$$

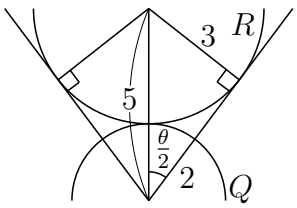
$A + B + C = \pi$ より $\cos A = -\cos(B + C)$ であるから

$$\begin{aligned} 2\sin B\sin C &= -3\cos(B + C) \\ &= -3(\cos B\cos C - \sin B\sin C) \end{aligned}$$

ゆえに　$3\cos B\cos C = \sin B\sin C$　よって　$\tan B\tan C = 3$

別解 (九大 [文]2014) 3

11.40 (1) 右の図から　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$



$0<\theta<\pi$ より，$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

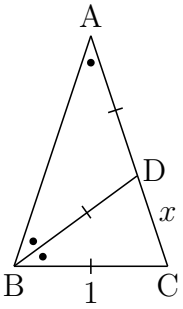
$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

よって　$\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\boldsymbol{\dfrac{24}{25}}$

(2) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{5}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$\sin\dfrac{\pi}{6}<\sin\dfrac{\theta}{2}<\sin\dfrac{\pi}{4}$

したがって　$\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$　　よって　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{5}$ とする．BC $=1$，$A=\alpha$，$B=C=2\alpha$ である二等辺三角形について，∠B の二等分線と CA との交点を D とする．BC $=$ BD $=$ AD $=1$．CD $=x$ とおくと，AB : BC $=$ BC : CD であるから



$$(1+x):1=1:x\quad\text{ゆえに}\quad x^2+x-1=0$$

$x>0$ に注意してこれを解くと　$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

△BCD に余弦定理を適用すると，$x^2=1-x$ であることに注意して

$$\cos\alpha=\frac{1^2+1^2-x^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{x+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

ここで　$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{5\sqrt{5}-11}{20}=\dfrac{\sqrt{125}-\sqrt{121}}{20}>0$

したがって　$\cos\alpha>\cos\dfrac{\theta}{2}$　ゆえに　$\alpha<\dfrac{\theta}{2}$　すなわち　$\dfrac{2}{5}\pi<\theta$

上式および (2) の結果から　　$\dfrac{2}{5}\pi<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

これから　　$4<\dfrac{2\pi}{\theta}<5$

よって，配置できる半径 3 の円の最大個数は　**4** (個)

11.41 (1) △CPA，△AQB，△BRC に正弦定理を適用すると

$$r_1 = \frac{b}{2\sin\angle\mathrm{CPA}} = \frac{b}{2\sin 60^\circ} = \boldsymbol{\frac{b}{\sqrt{3}}}$$
$$r_2 = \frac{c}{2\sin\angle\mathrm{AQB}} = \frac{c}{2\sin 60^\circ} = \boldsymbol{\frac{c}{\sqrt{3}}}$$
$$r_3 = \frac{a}{2\sin\angle\mathrm{BRC}} = \frac{b}{2\sin 60^\circ} = \boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{3}}}$$

(2) (中心角) = 2 × (円周角) であるから

$$\angle\mathrm{CO_1A} = 2\times\angle\mathrm{CPA} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$$
$$\angle\mathrm{AO_2B} = 2\times\angle\mathrm{AQB} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$$
$$\angle\mathrm{BO_3C} = 2\times\angle\mathrm{BRC} = 2\times 60^\circ = 120^\circ$$

△$\mathrm{CO_1A}$，△$\mathrm{AO_2B}$，△$\mathrm{BO_3C}$ は，二等辺三角形であるから，これらの三角形の底角は 30° である．$\angle\mathrm{O_1AO_2}$ について

$\angle\mathrm{CAB} \leqq 120^\circ$ のとき (図 1)　　$\angle\mathrm{O_1AO_2} = 60^\circ + \angle\mathrm{CAB}$

$\angle\mathrm{CAB} > 120^\circ$ のとき (図 2)　　$\angle\mathrm{O_1AO_2} = 360^\circ - (60^\circ + \angle\mathrm{CAB})$

これらの場合において，ともに　$\cos\angle\mathrm{O_1AO_2} = \cos(60^\circ + \angle\mathrm{CAB})$

図 1

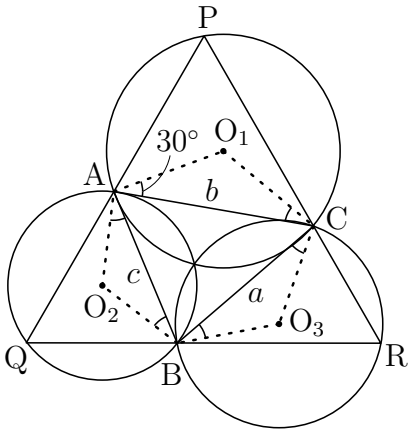
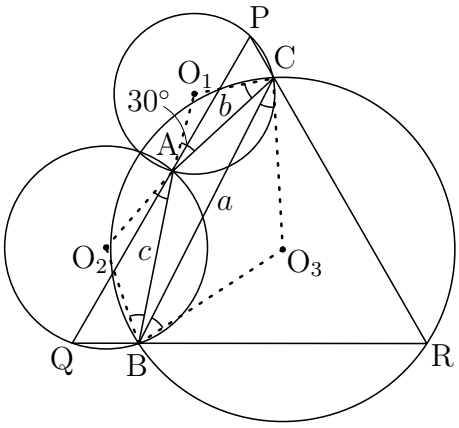


図 2



△$\mathrm{O_1AO_2}$ に余弦定理を適用すると，(1) の結果から

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{O_1O_2}}^2 &= {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos\angle\mathrm{O_1AO_2}\\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\cos(60^\circ + \angle\mathrm{CAB})\\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}(\cos 60^\circ\cos\angle\mathrm{CAB} - \sin 60^\circ\sin\angle\mathrm{CAB})\\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{1}{3}bc\cos\angle\mathrm{CAB} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}bc\sin\angle\mathrm{CAB}\end{aligned}$$

△ABC の面積を S とする．また，余弦定理により

$$\overline{\mathrm{O_1O_2}}^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{1}{3}bc \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{2\sqrt{3}}{3}S$$
$$= \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}S$$

このとき，式の対称性から

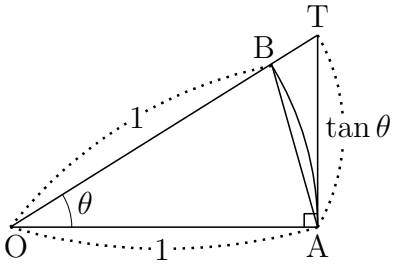
$$\overline{\mathrm{O_2O_3}}^2 = \overline{\mathrm{O_3O_1}}^2 = \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}S$$

したがって　　$\mathrm{O_1O_2} = \mathrm{O_2O_3} = \mathrm{O_3O_1}$

よって，$\triangle \mathrm{O_1O_2O_3}$ は，正三角形である．

11.42 右の図のように，半径が 1，中心角が θ の扇形 OAB の点 A における円の接線と直線 OB の交点を T とすると，面積について

$$\triangle \mathrm{OAB} < \text{扇形 OAB} < \triangle \mathrm{OAT}$$



が成り立つから

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin\theta < \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \theta < \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \tan\theta \quad \text{すなわち} \quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ とすると，加法定理により

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1} = 2 - \sqrt{3}$$

したがって　　$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} < \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} < 2 - \sqrt{3}$

$$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$$

12.1 $t=2^x$ とおくと $(t>0)$，方程式 $2\cdot 8^x-3\cdot 4^{x+1}+5\cdot 2^{x+1}+24=0$ は

$$2t^3-12t^2+10t+24=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t-3)(t-4)=0$$

$t>0$ より　$t=3,\ 4$　ゆえに　$2^x=3,\ 4$　すなわち　$\boldsymbol{x=\log_2 3,\ 2}$

12.2 $t=3^x$ とおくと $(t>0)$，不等式 $3^{3x+3}-7\cdot 3^{2x+1}-7\cdot 3^x+1<0$ は

$$27t^3-21t^2-7t+1<0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-1)(9t-1)(3t+1)<0$$

$t>0$ より　$\dfrac{1}{9}<t<1$　ゆえに　$\dfrac{1}{9}<3^x<1$　すなわち　$\boldsymbol{-2<x<0}$

12.3 与えられた方程式から　$(2^x)^2-2^a2^x+2^a=0$

$X=2^x$ とおくと　$X^2-2^aX+2^a=0 \quad \cdots(*)$

$(*)$ の解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=2^a>0, \quad \alpha\beta=2^a>0$$

$(*)$ の判別式を D とすると

$$D=(2^a)^2-4\cdot 2^a=2^a(2^a-4)$$

$D\geqq 0$，すなわち，$2^a-4\geqq 0$ のとき，$(*)$ は正の実数解をもつ．

このとき，与えられた方程式は，実数解をもつ．

よって，$2^a-4\geqq 0$ を解いて　$\boldsymbol{a\geqq 2}$

12.4　(1)　このとき，$f(x)=0$ は

$$\frac{1}{2}(2^x)^2-3\cdot 2^x+4=0 \quad \text{ゆえに} \quad (2^x-2)(2^x-4)=0$$

したがって　$2^x=2,\ 4$　これを解いて　$\boldsymbol{x=1,\ 2}$

(2)　このとき，$f(x)=0$ は

$$\frac{1}{2}(2^x)^2-a\cdot 2^x=0 \quad \text{ゆえに} \quad 2^x(2^x-2a)=0$$

$2^x>0$ であるから，$a>0$ に注意して

$$2^x=2a \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=1+\log_2 a}$$

(3) $t=2^x$ とおくと，$t>0$ で，方程式 $f(x)=0$ は

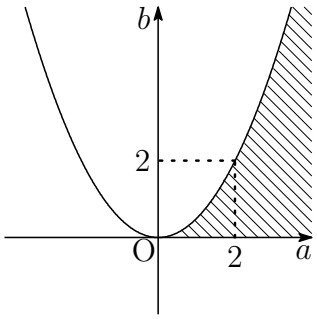
$$\frac{1}{2}t^2-at+b=0 \quad \text{すなわち} \quad t^2-2at+2b=0$$

この方程式が異なる 2 つの正の実数解を α，β とすると，係数について

$$\alpha+\beta=2a>0, \quad \alpha\beta=2b>0, \quad D/4=(-a)^2-2b>0$$

したがって　$a>0$，$b>0$，$b<\dfrac{1}{2}a^2$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分である．
ただし，境界線を含まない．



別解　(大分大学 2014) 5

12.5　(1)(ア)　$2^x+2^{-x}=(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}})^2+2$

$2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=0$　すなわち　$\boldsymbol{x=0}$ のとき，最小値 m は $\boldsymbol{2}$

(イ) $t=2^x$ とおくと，$2^x+2^{-x}=k\cdots$① より

$$t+\frac{1}{t}=k \quad \text{すなわち} \quad t^2-kt+1=0$$

$k>2$ に注意して，これを解くと　$t=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$

ゆえに　$2^x=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$　よって　$\boldsymbol{x=\log_2\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}}$

(2) 方程式 $4^x+4^{-x}-3a\cdot2^x-3a\cdot2^{-x}+2(a^2+1)=0\cdots(*)$ を変形すると

$$(2^x+2^{-x})^2-3a(2^x+2^{-x})+2a^2=0$$

① から　$k^2-3ak+2a^2=0$　ゆえに　$(k-a)(k-2a)=0$　$\cdots$②

(1) の結果より $k\geqq 2$ であるから，② の実数解は，$a\leqq 2$ に注意して

$2a<2$	すなわち	$a<1$ のとき	実数解はない
$2a=2$	すなわち	$a=1$ のとき	$k=2$
$a<2<2a$	すなわち	$1<a<2$ のとき	$k=2a$
		$a=2$ のとき	$k=2,\ 4$

① が実数解をもつのは，$k\geqq 2$ のときで，$k=2$ のとき実数解は 1 個，

$k > 2$ のとき実数解は 2 個であるから，方程式 $(*)$ の実数解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < 1} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{a = 1} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{1 < a < 2} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a = 2} \text{ のとき} & \textbf{3 個} \end{cases}$$

12.6 $\log_2 \dfrac{1}{6} + \log_2 \dfrac{3}{4} = \log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = \boldsymbol{-3}$

12.7 $\log_3 5 = \dfrac{\log_9 5}{\log_9 3} = \log_3 9 \log_9 5 = 2 \log_9 5 = \log_9 25$

$\dfrac{1}{2} + \log_9 8 = \dfrac{1}{2} \log_9 9 + \log_9 8 = \log_9 3 + \log_9 8 = \log_9 24$

$\log_9 24 < \log_9 25 < \log_9 26$ より

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} + \log_9 8 < \log_3 5 < \log_9 26}$$

12.8 $0 < a < b < 1$ より　　$\log_a a > \log_a b, \quad \log_b a > \log_b b$

$\log_a a = \log_b b = 1$ であるから　　$\log_a b < 1 < \log_b a$

よって　　$\boldsymbol{\log_a b < \log_b a}$

12.9 $b = x^{\log_a y}$，$c = y^{\log_a x}$ とおき，2 式の両辺を a を底とする対数をとると

$$\log_a b = \log_a x^{\log_a y} = \log_a y \log_a x \qquad \log_a c = \log_a y^{\log_a x} = \log_a x \log_a y$$

ゆえに　$\log_a b = \log_a c$　すなわち　$b = c$　よって　$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

12.10 $3^a = 5^b = 7^c = 105^d = M$ とおく．

a，b，c は 0 でない実数であるから，M は 1 でない正数．

したがって

$$a = \log_3 M = \frac{1}{\log_M 3} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 3 = \frac{1}{a}$$

$$b = \log_5 M = \frac{1}{\log_M 5} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 5 = \frac{1}{b}$$

$$c = \log_7 M = \frac{1}{\log_M 7} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 7 = \frac{1}{c}$$

$$d = \log_{105} M = \frac{1}{\log_M 105} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 105 = \frac{1}{d}$$

$\log_M 3 + \log_M 5 + \log_M 7 = \log_M 105$ であるから　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{d}$

12.11 $\log_8 b = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 8} = \dfrac{1}{3}\log_2 b$，$\log_8 c = \dfrac{\log_2 c}{\log_2 8} = \dfrac{1}{3}\log_2 c$ を

$$\log_2 a - \log_8 b = \log_2 b - \log_8 c, \quad \frac{\log_2 a}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

に代入して整理すると

$$3\log_2 a - 4\log_2 b + \log_2 c = 0, \quad \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \frac{\log_2 b}{\log_2 c}$$

$k = \dfrac{\log_2 a}{\log_2 b} = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 c}$ とおくと，$\dfrac{\log_2 a}{\log_2 c} = k^2$ であるから，上の第 1 式から

$$3\cdot\frac{\log_2 a}{\log_2 c} - 4\cdot\frac{\log_2 b}{\log_2 c} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3k^2 - 4k + 1 = 0$$

a，b，c は互いに異なる実数であるから，$k \neq 1$ に注意して　$k = \dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b} = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 c} = \dfrac{1}{3}$　よって　$\boldsymbol{\log_2 a : \log_2 b : \log_2 c = 1 : 3 : 9}$

12.12　$\log_2 2b = \log_2 b + 1$，$\log_2 4b = \log_2 b + 2$

2 次方程式 $x^2 - (2a+5)x + a + 3 = 0$ の解が $\log_2 b + 1$，$\log_2 b + 2$ であるから，解と係数の関係により

$$(\log_2 b + 1) + (\log_2 b + 2) = 2a + 5, \quad (\log_2 b + 1)(\log_2 b + 2) = a + 3$$

上の第 1 式から，$\log_2 b = a + 1 \cdots$①．これを第 2 式に代入すると

$$(a+2)(a+3) = a + 3 \quad \text{これを解いて} \quad a = -1, -3$$

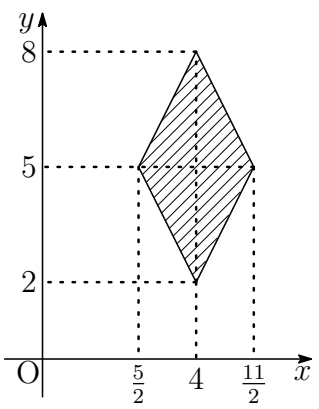
① より　$a = -1$ のとき　$\log_2 b = 0$　すなわち　$b = 1$

$a = -3$ のとき　$\log_2 b = -2$　すなわち　$b = \dfrac{1}{4}$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b) = (-1,\ 1),\ \left(-3,\ \dfrac{1}{4}\right)}$

12.13　(1) 不等式 $2|x| + |y| \leqq 3$ の表す領域は，4 点 $(\frac{3}{2},\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(-\frac{3}{2},\ 0)$，$(0, -3)$ を頂点とする四角形の周およびその内部である．

不等式 $2|x-4| + |y-5| \leqq 3$ の表す領域 A は，$2|x| + |y| \leqq 3$ の表す領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものであるから，A の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



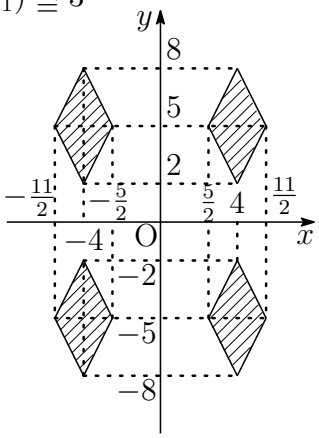
(2) $f(x,\ y)=2|x-4|+|y-5|$，$g(x,\ y)=2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big|$ とおく．
$f(x,\ y)\leqq 3$ の表す領域 A の点 $(x_1,\ y_1)$ は，(1) の結果から $x_1>0$，$y_1>0$ であり，$g(x,\ y)=f(|x|,\ |y|)$ が成り立つから

$$g(\pm x_1, \pm y_1)=f(x_1,\ y_1)\leqq 3$$

$g(x,\ y)\leqq 3$ の表す領域は B であるから

$(x_1,\ y_1)\in A \quad\Longrightarrow\quad (\pm x_1, \pm y_1)\in B$

したがって，B の表す領域は，A および A を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したものである．よって，B の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



(3) x，$|y|$ は正の整数であるから，領域 B 内の点において，これを満たす $(x,\ |y|)$ の組は，次のとおりである．

$$\begin{aligned}(x,\ |y|)=&(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\\ &(4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7),\ (4,\ 8),\\ &(5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)\end{aligned}$$

$\log_x|y|=\dfrac{m}{n}$ (m，n は整数) とおくと

$$x^{\frac{m}{n}}=|y| \quad\text{ゆえに}\quad x^m=|y|^n \quad\cdots①$$

素因数分解の一意性により，① を満たすものは

$$(x,\ |y|)=(4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 8),\ (5,\ 5)$$

よって，求める $(x,\ y)$ の組は次の 8 組である．

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(4,\pm 2),\ (4,\pm 4),\ (4,\pm 8),\ (5,\pm 5)}$$

12.14 与えられた方程式から　　$2|\log_2 x|^2-7|\log_2 x|-4=0$

ここで，$t=|\log_2 x|$ とおくと $(t\geqq 0)$

$$2t^2-7t-4=0 \quad\text{ゆえに}\quad (t-4)(2t+1)=0$$

$t\geqq 0$ より　$t=4$　ゆえに　$\log_2 x=\pm 4$　よって　$x=2^{\pm 4}=\boldsymbol{16,\ \dfrac{1}{16}}$

12.15 $\log_{10} x - 3\log_x 10 = 2$ より

$$\log_{10} x - \frac{3\log_{10} 10}{\log_{10} x} = 2 \quad \text{整理すると} \quad (\log_{10} x)^2 - 2\log_{10} x - 3 = 0$$

したがって　　$(\log_{10} x + 1)(\log_{10} x - 3) = 0$

ゆえに　$\log_{10} x = -1,\ 3$　　よって　$\boldsymbol{x = \frac{1}{10},\ 1000}$

12.16 $\log_5(1 - 4{\cdot}5^x) = 2x + 1$ より

$$5^{2x+1} = 1 - 4{\cdot}5^x \quad \text{ゆえに} \quad 5{\cdot}5^{2x} + 4{\cdot}5^x - 1 = 0$$

$X = 5^x$ とおくと　$5X^2 + 4X - 1 = 0$　　ゆえに　$(X + 1)(5X - 1) = 0$

$X > 0$ に注意して　$X = \frac{1}{5}$　　すなわち　$5^x = 5^{-1}$　　よって　$\boldsymbol{x = -1}$

12.17 真数は正であるから

$$a - b > 0,\quad a > 0,\quad b > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a}{b} > 1$$

$2\log_{10}(a - b) = \log_{10} a + \log_{10} b$ より

$$\log_{10}(a - b)^2 = \log_{10} ab \quad \text{すなわち} \quad (a - b)^2 = ab$$

ゆえに　$a^2 - 3ab + b^2 = 0$　したがって　$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0$

$\frac{a}{b} > 1$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$

12.18 真数は正であるから

$$4x - 7 > 0,\quad x > 0,\quad x - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x > \frac{7}{4} \quad \cdots ①$$

与えられた方程式から

$$\log_4(4x - 7) + \log_4 x^2 = \log_4 4 + \log_4(x - 1)^3$$
$$\log_4(4x - 7)x^2 = \log_4 4(x - 1)^3$$

ゆえに　$(4x - 7)x^2 = 4(x - 1)^3$　整理すると　$5x^2 - 12x + 4 = 0$

したがって　$(x - 2)(5x - 2) = 0$　これを ① に注意して解くと　$\boldsymbol{x = 2}$

12.19 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$0 < \sin\theta < 1$，$0 < \cos\theta < 1$ であるから

$$\log_{\sin\theta}\cos\theta > 0$$

条件から　　$\log_{\sin\theta}\cos\theta = 1,\ 2$

i) $\log_{\sin\theta}\cos\theta = 1$ のとき

$$\cos\theta = \sin\theta \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

ii) $\log_{\sin\theta}\cos\theta = 2$ のとき

$$\cos\theta = \sin^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

$\cos\theta > 0$ に注意して，これを解くと　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって　　$\sin\theta = \sqrt{\cos\theta} = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}}$

12.20 (1) $\alpha\beta\gamma = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \times \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \times \dfrac{1}{\log_a c} = \boldsymbol{1}$

(2) $\log_b a + \log_c b + \log_a c = -\dfrac{11}{3}$ より

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} + \frac{1}{\log_c a} = -\frac{11}{3} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{11}{3}$$

(1) の結果から

$$\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{11}{3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{11}{3}}$$

(3)　　$3x^3 - 5x^2 + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - 3\alpha\beta\gamma = 0$

上式に (1)，(2) の結果を代入すると

$$3x^3 - 5x^2 - 11x - 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(3x+1)(x-3) = 0$$

この方程式の解が $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ であるから $(\alpha < \beta < \gamma)$

$$\boldsymbol{\alpha = -1,\ \beta = -\frac{1}{3},\ \gamma = 3}$$

12.21 真数は正であるから

$$x-1>0 \text{ かつ } x+1>0 \quad \text{すなわち} \quad x>1 \quad \cdots ①$$

不等式から $-\log_3(x-1)+\log_3(x+1)>3$ ゆえに $\log_3\dfrac{x+1}{x-1}>\log_3 27$

底 3 は 1 より大きいから $\dfrac{x+1}{x-1}>27$

① に注意して，これを解くと $\boldsymbol{1<x<\dfrac{14}{13}}$

12.22 真数は正であるから

$$2x-1>0 \quad \text{かつ} \quad x-1>0 \quad \text{すなわち} \quad x>1 \quad \cdots ①$$

与えられた不等式から $\log_a(2x-1)(x-1)\leqq\log_a 1$

底 a は $0<a<1$ であるから $(2x-1)(x-1)\geqq 1$

$x(2x-3)\geqq 0$

① に注意して $\boldsymbol{x\geqq\dfrac{3}{2}}$

12.23 x の不等式 $\log_a(x-1)\geqq\log_{a^2}(x+11)$ の真数は正であるから

$$x-1>0 \text{ かつ } x+11>0 \quad \text{すなわち} \quad x>1 \quad \cdots ①$$

$\log_a(x-1)=\log_{a^2}(x-1)^2$ であるから，与えられた不等式は

$$\log_{a^2}(x-1)^2\geqq\log_{a^2}(x+11)$$

$0<a<1$ より，$0<a^2<1$ であるから

$$(x-1)^2\leqq x+11 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-5)\leqq 0$$

① に注意して，これを解くと $\boldsymbol{1<x\leqq 5}$

12.24 $$\log_a(x+6)+\log_a(x-1)>\log_a(9x-7)$$

真数は正であるから

$$x+6>0,\ \ x-1>0,\ \ 9x-7>0 \quad \text{すなわち} \quad x>1 \quad \cdots ①$$

与えられ不等式から $\log_a(x+6)(x-1)>\log_a(9x-7) \quad \cdots (*)$

i) $a>1$ のとき，$(*)$ から

$$(x+6)(x-1)>9x-7 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-4x+1>0$$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{x>2+\sqrt{3}}$

ii) $0<a<1$ のとき，$(*)$ から

$$(x+6)(x-1)<9x-7 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-4x+1<0$$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{1<x<2+\sqrt{3}}$

12.25 $b=\dfrac{1}{a}$ より，$\log_b|x-5|=-\log_a|x-5|$ であるから

$$\log_a\left(\frac{|x-1|}{3}\right)\leqq-\log_a|x-5|$$

$$\log_a\frac{|(x-1)(x-5)|}{3}\leqq\log_a 1$$

$a>1$ のとき　$0<\dfrac{|(x-1)(x-5)|}{3}\leqq 1$

$$-3\leqq(x-1)(x-5)<0,\quad 0<(x-1)(x-5)\leqq 3$$

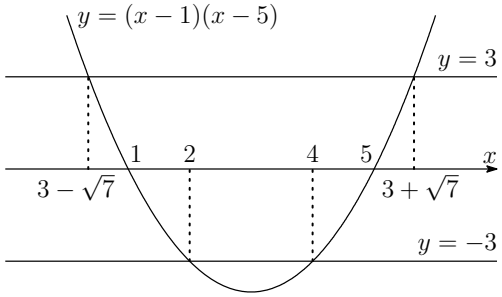
$0<a<1$ のとき　$\dfrac{|(x-1)(x-5)|}{3}\geqq 1$

$$(x-1)(x-5)\leqq-3,\quad 3\leqq(x-1)(x-5)$$

ここで　$(x-1)(x-5)=3$ を解いて　$x=3\pm\sqrt{7}$

$(x-1)(x-5)=-3$ を解いて　$x=2,\ 4$

放物線 $y=(x-1)(x-5)$ と 2 直線 $y=3$，$y=-3$ の位置関係は，下の図のようになる．



よって，求める不等式の解は

$a>1$ のとき

$\boldsymbol{3-\sqrt{7} \leqq x<1,\ 1<x \leqq 2,\ 4 \leqq x<5,\ 5<x \leqq 3+\sqrt{7}}$

$0<a<1$ のとき

$\boldsymbol{x \leqq 3-\sqrt{7},\ 2 \leqq x \leqq 4,\ 3+\sqrt{7} \leqq x}$

12.26　$\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y \quad \cdots(*)$

$(*)$ において，真数は正であるから

$$a-x-y>0 \quad \text{かつ} \quad x>0 \quad \text{かつ} \quad y>0$$

すなわち　$x>0, \quad y>0, \quad x+y<a \quad \cdots①$

$(*)$ から　$\log_a(a-x-y) > \log_a xy \quad \cdots②$

i) $0<a<1$ のとき，② から

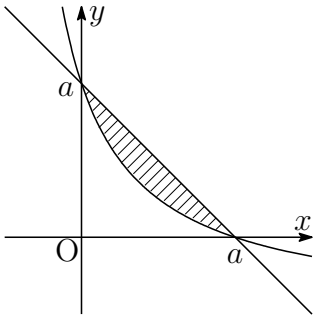
$$a-x-y<xy \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(y+1)>a+1$$

ii) $1<a$ のとき，② から

$$a-x-y>xy \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(y+1)<a+1$$

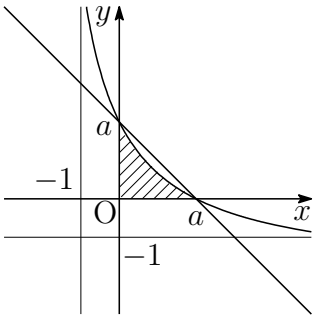
i)，ii) および ① から，求める領域は，次のようになる．

$0<a<1$ のとき



境界線を含まない

$1<a$ のとき



境界線を含まない

12.27　(1)　$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 1$ より　$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 2$

したがって　$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 2$

ゆえに　$\frac{5}{2}+\cos\theta<3$　すなわち　$\cos\theta<\frac{1}{2}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より　$\boldsymbol{60^\circ<\theta<180^\circ}$

(2) $\left[\ \dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\ \right]\geqq 1$ より

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\sin\theta\geqq\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって $\sin\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\quad \boldsymbol{45^\circ\leqq\theta\leqq 135^\circ}$

(3) $\log_2\left[\ \dfrac{5}{2}+\cos\theta\ \right]\leqq 0$ であるから $\log_2\left[\ \dfrac{5}{2}+\cos\theta\ \right]\leqq\log_2 1$

したがって $\left[\ \dfrac{5}{2}+\cos\theta\ \right]\leqq 1$

ゆえに $\dfrac{5}{2}+\cos\theta<2$ すなわち $\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\quad 120^\circ<\theta<180^\circ \quad \cdots①$

次に，$\left[\ \dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\ \right]\geqq 0$ であるから

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\sin\theta\geqq\log_2\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

したがって $\sin\theta\geqq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\quad \alpha\leqq\theta\leqq 180^\circ-\alpha \quad \cdots②$

①，② の共通範囲を求めて $\quad \boldsymbol{120^\circ<\theta\leqq 180^\circ-\alpha}$

12.28 真数は正であるから $x>0$ かつ $6-x>0$

すなわち $0<x<6$

また $f(x)=\log_2 x(6-x)^2$

ここで，$g(x)=x(6-x)^2$ とおくと

$$g'(x)=3(x-6)(x-2)$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	極大 32	↘	

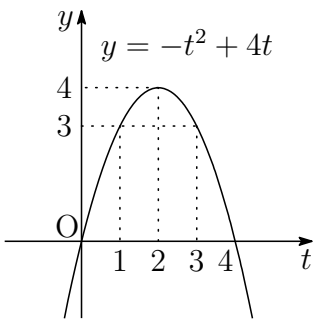
$g(x)$ の増減表は右のようになる．

したがって，$g(x)$ は $x=2$ で極大かつ最大となり，$g(x)$ が最大値をとるとき，$f(x)$ も最大値をとる．

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=2}$ **で最大値** $\log_2 32=\boldsymbol{5}$ をとる．

12.29 (1) $y=-(\log_a x)^2+4\log_a x$ より

$$\boldsymbol{y=-t^2+4t}$$



(2) $0 \leqq y \leqq 3$ のとき　$0 \leqq -t^2+4t \leqq 3$

ゆえに　$\begin{cases} -t^2+4t \geqq 0 \\ -t^2+4t \leqq 3 \end{cases}$

これを解いて　$\boldsymbol{0 \leqq t \leqq 1,\ 3 \leqq t \leqq 4}$

(3) (2) の結果から　$0 \leqq \log_a x \leqq 1$　または　$3 \leqq \log_a x \leqq 4$

$a>1$ であるから

$$\log_a 1 \leqq \log_a x \leqq \log_a a \quad \text{または} \quad \log_a a^3 \leqq \log_a x \leqq \log_a a^4$$

すなわち　$1 \leqq x \leqq a$　または　$a^3 \leqq x \leqq a^4$

$2 \leqq x \leqq 4$ を満たすすべての x に対して，これが成り立つならば

$$\text{i)}\ \ 4 \leqq a \quad \text{または} \quad \text{ii)} \ \begin{cases} a^3 \leqq 2 & (a \leqq 2^{\frac{1}{3}}) \\ a^4 \geqq 4 & (a \geqq 2^{\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

このとき，ii) を満たす a は存在しない．よって　$\boldsymbol{a \geqq 4}$

12.30 等式 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3+2\sqrt{2}$ $(0<\theta<\pi)$ において $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=3+2\sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad \tan\theta=\sqrt{2}$$

$\tan\theta>0$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\log_2 \frac{x}{2\sin\theta}\right)\left(\log_4 \frac{x}{4\sin\theta}\right) \\ &= \left(\log_2 \frac{x}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{2}\log_2 \frac{x}{\sin\theta}-1\right) \end{aligned}$$

ここで，$t=\log_2 \dfrac{x}{\sin\theta}$，$g(t)=f(x)$ とおくと

$$g(t)=(t-1)\left(\frac{1}{2}t-1\right)=\frac{1}{2}(t-1)(t-2)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$$

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき　$\log_2 \dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{3}{2}$　ゆえに　$x=2^{\frac{3}{2}}\sin\theta=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

よって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{8}}$ をとる．

12.31 $t=\log_2(1+\sin x)$，$A=\log_2 a$ とおくと，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$0\leqq t\leqq 1$

$$\begin{aligned}\log_2\frac{1+\sin x}{a}&=\log_2(1+\sin x)-\log_2 a\\&=t-A\\\log_4\frac{1+\sin 2}{2a}&=\frac{1}{2}\log_2\frac{1+\sin x}{2a}\\&=\frac{1}{2}\{\log_2(1+\sin 2x)-\log_2 a-1\}\\&=\frac{1}{2}(t-A-1)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\left(\log_2\frac{1+\sin x}{a}\right)\left(\log_4\frac{1+\sin 2}{2a}\right)&=\frac{1}{2}(t-A)(t-A-1)\\&=\frac{1}{2}\{t^2-(2A+1)t+A(A+1)\}\\&=\frac{1}{2}\left\{t-\left(A+\frac{1}{2}\right)\right\}^2-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

i) $A+\dfrac{1}{2}<0$　すなわち　$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$t=0$ で最小値は　$\dfrac{1}{2}A(A+1)=\dfrac{1}{2}(\log_2 a)(\log_2 a+1)$

ii) $0\leqq A+\dfrac{1}{2}\leqq 1$　すなわち　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq a\leqq\sqrt{2}$ のとき

$t=\log_2\sqrt{2}a$ で最小値は　$-\dfrac{1}{8}$

iii) $1<A+\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\sqrt{2}<a$ のとき

$t=1$ で最小値は　$\dfrac{1}{2}A(A-1)=\dfrac{1}{2}(\log_2 a)(\log_2 a-1)$

よって，求める最小値は

$$\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(\log_2 a)(\log_2 a+1)} & \boldsymbol{\left(0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}\\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{8}} & \boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq a\leqq\sqrt{2}\right)}\\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(\log_2 a)(\log_2 a-1)} & \boldsymbol{(\sqrt{2}<a)}\end{cases}$$

12.32 N^{10} は 16 桁であるから　$10^{15}\leqq N^{10}<10^{16}$

ゆえに　　$(10^{15})^{0.8}\leqq(N^{10})^{0.8}<(10^{16})^{0.8}$

すなわち　　$10^{12}\leqq N^8<10^{12.8}$　　よって　N^8 は **13** 桁の数

12.33 $a=16$ とおくと

$$p=\frac{2^{148}+1}{17}=\frac{(2^4)^{37}+1}{16+1}=\frac{a^{37}+1}{a+1}=\sum_{k=0}^{36}(-1)^k a^{36-k}$$

このとき　$p=a^{36}-(a^{35}-a^{34})-(a^{33}-a^{32})-\cdots-(a-1)$

$p=a^{36}-a^{35}+(a^{34}-a^{33})+(a^{32}-a^{31})+\cdots+(a^2-a)+1$

ゆえに　$(a-1)a^{35}<p<a^{36}$　すなわち　$10{\cdot}2^{140}<15{\cdot}2^{140}<p<2^{144}$

したがって，$10{\cdot}2^{140}<p<2^{144}$ の各辺の常用対数をとることにより

$$1+140\log_{10}2<\log_{10}p<144\log_{10}2$$
$$43.140=1+140\times0.301<\log_{10}p<144\times0.302=43.488$$

したがって　$43<\log_{10}p<44$　ゆえに　$10^{43}<p<10^{44}$

よって，p は **44** 桁の整数である．

解説 (宮崎大学 2006) 2

12.34 (1) $2^{10}>10^3$ より　$\log_{10}2^{10}>\log_{10}10^3$

ゆえに　$10\log_{10}2>3$　よって　$\boldsymbol{\log_{10}2>0.3}$

(2) $\log_{10}2^{21}-\log_{10}5^9=21\log_{10}2-9\log_{10}\dfrac{10}{2}$

$=30\log_{10}2-9=30(\log_{10}2-0.3)>0$

ゆえに　$\log_{10}2^{21}>\log_{10}5^9$　よって　$\boldsymbol{2^{21}>5^9}$

補足 $\dfrac{2^{21}}{5^9}=\dfrac{2^9{\cdot}2^{21}}{2^9{\cdot}5^9}=\left(\dfrac{2^{10}}{10^3}\right)^3>1$　よって　$2^{21}>5^9$

12.35 (1)　$f(x)=4^x-2^{x+2}+3=(2^x)^2-4{\cdot}2^x+3=(2^x-1)(2^x-3)$

$f(x)>0$ より　$2^x<1$，$3<2^x$　よって　$\boldsymbol{x<0}$，$\boldsymbol{\log_2 3<x}$

(2) $0.301<\log_{10}2<0.302$，$0.477<\log_{10}3<0.478$ より

$$\log_2 3=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}<\frac{0.478}{0.301}=1.58\cdots<1.59$$

(1) の結果から　$\boldsymbol{f(1.59)>0}$

12.36 (1) $\dfrac{31}{100} < \log_{10} 2 < \dfrac{31}{100}$ より　　$-\dfrac{31}{100} < -\log_{10} 2 < -\dfrac{30}{100}$

上式の辺々に 1 を加えると　　$\dfrac{69}{100} < \log_{10} 5 < \dfrac{70}{100}$

よって，$\dfrac{n}{100} < \log_{10} 5 < \dfrac{n+1}{100}$ を満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n = 69}$

(2) $\log_{10} 5^{21} = 21 \log_{10} 5$ より　$21 \times \dfrac{69}{100} < \log_{10} 5^{21} < 21 \times \dfrac{70}{100}$

ゆえに　　$14 < 14.47 < \log_{10} 5^{21} < 14.7 < 15$

したがって　$10^{14} < 5^{21} < 10^{15}$　　よって　5^{21} は **15 桁**の整数

(3) $\log_{10} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{20} = 20(2 \log_{10} 2 - 1)$ より

$$-8 = 20 \left(2 \times \frac{30}{100} - 1\right) < \log_{10} \left(\frac{2}{5}\right)^{20} < 20 \left(2 \times \frac{31}{100} - 1\right) = -7.6$$

ゆえに　$-8 < \log_{10} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{20} < -7$　　したがって　$10^{-8} < \left(\dfrac{2}{5}\right)^{20} < 10^{-7}$

よって，$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{20}$ は**小数第 8 位**に初めて 0 と異なる数字が現れる．

12.37 (1) この操作により，全体の質量は変わらず食塩の質量は $\dfrac{9}{10}$ になるから，求める食塩水の濃度は

$$a \times \frac{9}{10} = \frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{10}} \boldsymbol{a} \ [\%]$$

(2) (1) の操作を n 回繰り返すから，求める食塩水の濃度は

$$a \times \left(\frac{9}{10}\right)^n = \left(\frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{10}}\right)^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a} \ [\%]$$

(3) (2) の結果を条件に適用すると

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n a \leqq \frac{a}{10} \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{9}{10}\right)^n \leqq \frac{1}{10}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} \left(\frac{9}{10}\right)^n \leqq -1 \quad \text{ゆえに} \quad n(2 \log_{10} 3 - 1) \leqq -1$$

したがって　　$n \geqq \dfrac{1}{1 - 2 \log_{10} 3}$　$\cdots (*)$

ここで，$0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$ より，$0.0456 < 1 - 2\log_{10} 3 < 0.0458$ であるから

$$21.8\cdots = \frac{1}{0.458} < \frac{1}{1-2\log_{10} 3} < \frac{1}{0.456} = 21.9\cdots$$

よって，$(*)$ をみたす最小の n は　**22**

12.38　(1)　$S = 12 \times \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 \sin 30^\circ = \mathbf{3}$

S と S_1 の相似比は　$1 : \cos 15^\circ = 1 : \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

S と S_1 の面積比は　$1 : \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 : \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

したがって　$S_1 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} S = \dfrac{\mathbf{3(2+\sqrt{3})}}{\mathbf{4}}$

(2)　$S_n = \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n S = \mathbf{3}\left(\dfrac{\mathbf{2+\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}\right)^{\boldsymbol{n}}$

(3)　(1)，(2) の結果を $S_n \leqq \dfrac{1}{2}$ に代入すると

$$3\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \leqq \frac{1}{2}\cdot 3 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{4}{2+\sqrt{3}}\right)^n \geqq 2$$

2 を底とする対数をとると　$n \log_2 \dfrac{4}{2+\sqrt{3}} \geqq 1$

$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$，$\log_2 \dfrac{4}{2+\sqrt{3}} = 2 - \log_2(2+\sqrt{3})$ より

$$0.1 < \log_2 \frac{4}{2+\sqrt{3}} < 0.11$$

したがって　$n \geqq \dfrac{1}{\log_2 \frac{4}{2+\sqrt{3}}} > \dfrac{1}{0.11} \fallingdotseq 9.09\cdots$

よって，求める最小の整数 n は　**10**

13.1

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+3h)-f(a-4h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(a+3h)-f(a)}{3h} \times 3 + \frac{f(a-4h)-f(a)}{-4h} \times 4 \right\}$$

$$= 3f'(a) + 4f'(a) = \mathbf{7}\boldsymbol{f'(a)}$$

13.2 $y = x^2 + 5$ より　$y' = 2x$

放物線 $y = x^2 + 5$ 上の点 $(a,\ a^2 + 5)$ における接線の方程式は

$$y - (a^2 + 5) = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 + 5 \quad \cdots (*)$$

この直線が円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するから，原点から直線 $2ax - y - a^2 + 5 = 0$ までの距離が 1 であるから

$$\frac{|-a^2 + 5|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2 - 2)(a^2 - 12) = 0$$

直線は，円と第 1 象限で接するから，直線 $(*)$ の傾きおよび y 切片について

$$2a < 0 \quad \text{かつ} \quad -a^2 + 5 > 0$$

であることに注意すると　　$a = -\sqrt{2}$

よって，求める接線の方程式は　　$\boldsymbol{y = -2\sqrt{2}x + 3}$

13.3 P から放物線に引いた 2 本の接線の接点を Q，R とし，それぞれの点における接線の傾きを m_1，m_2 とする $(m_1 \neq m_2)$.

$y' = 2x$ より，接点の座標は　　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{m_1}{2},\ \dfrac{{m_1}^2}{4}\right)$,　$\mathrm{R}\left(\dfrac{m_2}{2},\ \dfrac{{m_2}^2}{4}\right)$

Q における接線の方程式は

$$y - \frac{{m_1}^2}{4} = m_1\left(x - \frac{m_1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = m_1 x - \frac{{m_1}^2}{4} \quad \cdots ①$$

同様に，R における接線の方程式は　　$y = m_2 x - \dfrac{{m_2}^2}{4} \quad \cdots ②$

直線 ①，② の交点が P であるから，$m_1 \neq m_2$ に注意して ①，② を解くと

$$x = \frac{m_1 + m_2}{4},\quad y = \frac{m_1 m_2}{4}$$

①，② は直交するので，$m_1 m_2 = -1$ より，P の座標は　$\left(\dfrac{{m_1}^2 - 1}{4m_1}, -\dfrac{1}{4}\right)$

m_1 は 0 でない任意の実数であるから，P の軌跡は　**直線** $\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{4}}$

13.4　(1)　　$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$,　$\tan(90^\circ - \alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

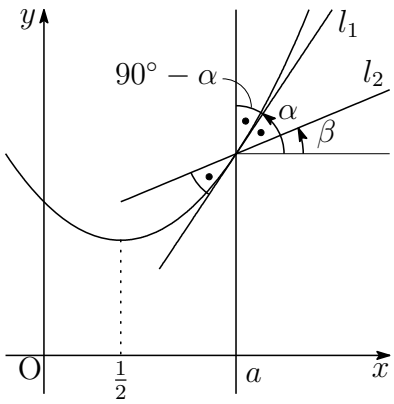
$\alpha - \beta = 90^\circ - \alpha$ であるから

$$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{\tan\alpha} \quad \text{よって} \quad \tan\beta = \frac{\tan^2\alpha - 1}{2\tan\alpha}$$

(2) $f(x)=x^2-x+1$ より　$f'(x)=2x-1$

よって　　$\tan\alpha=f'(a)=\boldsymbol{2a-1}$

(3) 右の図のように，x 軸の正の向きと l_2 のなす角を β とすると $(-90^\circ<\beta<90^\circ)$，



$$\alpha-\beta=90^\circ-\alpha$$

が成り立つ．したがって，l_2 の傾きは，(1)，(2) の結果から

$$\tan\beta=\frac{(2a-1)^2-1}{2(2a-1)}=\frac{2a(a-1)}{2a-1}$$

したがって，l_2 の方程式は

$$y-(a^2-a+1)=\frac{2a(a-1)}{2a-1}(x-a)$$

よって　　$\boldsymbol{y=\dfrac{2a(a-1)}{2a-1}x-\dfrac{a^2-3a+1}{2a-1}}$

(4) l_2 の方程式を a について整理すると

$$(2x-1)a^2-(2x+2y-3)a+y-1=0$$

これが a に関する恒等式であるとき

$$2x-1=0,\quad 2x+2y-3=0,\quad y-1=0$$

上の 3 式を同時にみたす x，y は　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$

よって，l_2 は a の値にかかわらず，定点 $\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2}},\ \boldsymbol{1}\right)$ を通る．

解説 (佐賀大学 2007) 2

13.5 (1) $f(x)=x^3-x$ を微分すると　$f'(x)=3x^2-1$

C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きは $3t^2-1$ であるから，その方程式は

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=(3t^2-1)x-2t^3}$$

(2) C 上の点 $(t,\ f(t))$，$(t',\ f(t'))$ における接線の方程式は，それぞれ

$$y=(3t^2-1)x-2t^3,\quad y=(3t'^2-1)x-2t'^3$$

であり，これらの直線が一致するとき

$$3t^2-1=3t'^2-1,\quad -2t^3=-2t'^3\quad \text{ゆえに}\quad t=t'$$

となり，$t\neq t'$ に反する．したがって，$t\neq t'$ のとき，2 つの接線は異なる．

(3) (1) で求めた接線が点 $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ を通るとき

$$-\frac{2}{3}=(3t^2-1)\cdot\frac{2}{3}-2t^3\quad \text{整理すると}\quad t^2(t-1)=0$$

よって，求める接線の方程式は

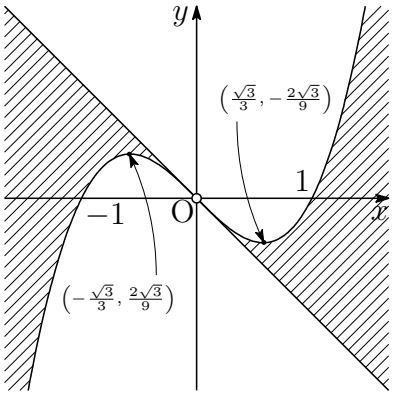
$$t=0\ \text{のとき}\quad \boldsymbol{y=-x},\qquad t=1\ \text{のとき}\quad \boldsymbol{y=2x-2}$$

(4) (1) で求めた接線が点 $(u,\ v)$ を通るとき

$$v=(3t^2-1)u-2t^3$$

ゆえに $\quad 2t^3-3ut^2+u+v=0\quad \cdots(*)$

点 $(u,\ v)$ を通る C の接線が 3 本存在するための条件は，t の方程式 $(*)$ が異なる 3 つの実数解もつことである．



$$g(t)=2t^3-3ut^2+u+v$$

とおくと $\quad g'(t)=6t^2-6ut=6t(t-u)$

t の方程式 $(*)$ が異なる 3 つの実数解をもつとき $\quad g(0)g(u)<0$

すなわち $\qquad (u+v)(-u^3+u+v)<0$

よって $\quad \begin{cases} v>-u \\ v<u^3-u \end{cases}$ $\quad$ または $\quad \begin{cases} v<-u \\ v>u^3-u \end{cases}$

$(u,\ v)$ の存在範囲は，右の図の斜線部分で，境界線および原点を含まない．

13.6 (1) $y=-x^2$ を微分すると $\qquad y'=-2x$

C_1 上の点 $(t,-t^2)$ における接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $-2t$ であるから，接線の方程式は

$$y-(-t^2)=-2t(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=-2tx+t^2$$

ℓ と C_2 の共有点の x 座標は

$$3(x-1)^2+a=-2tx+t^2$$

すなわち $\qquad 3x^2+2(t-3)x-t^2+a+3=0$

の解であり，ℓ と C_2 が接するとき，この方程式は重解をもつので

$$(t-3)^2-3\cdot(-t^2+a+3)=0 \quad \text{すなわち} \quad 4t^2-6t-3a=0 \quad \cdots ①$$

このとき，ℓ が2本存在するためには，① の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(-3a)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

別解 (熊大 [理]2007) 1

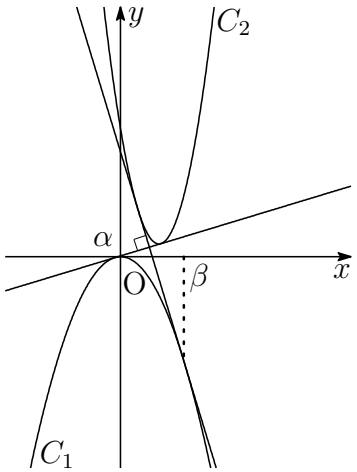
(2) ① の 2 解を α，β とすると，2 点 $(\alpha,-\alpha^2)$，$(\beta,-\beta^2)$ における接線の傾きは，それぞれ 2α，2β であり，これらが直交するとき

$$2\alpha\cdot 2\beta=-1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha\beta=-\frac{1}{4}$$

また，① の解と係数の関係から $\alpha\beta=-\dfrac{3a}{4}$

したがって $-\dfrac{3a}{4}=-\dfrac{1}{4}$

$a>-\dfrac{3}{4}$ に注意して $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{3}}$



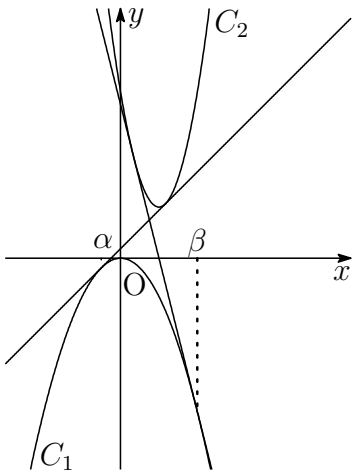
(3) ℓ 上の 2 点 $(\alpha,-\alpha^2)$，$(\beta,-\beta^2)$ における接線を x 軸の正の向きから測った角を，それぞれ θ_1，θ_2 とすると

$$\tan\theta_1=-2\alpha,\quad \tan\theta_2=-2\beta$$

このとき，$|\theta_1-\theta_2|=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$ であるから $|\tan(\theta_1-\theta_2)|=1$ より

$$\left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|=1$$

したがって $\left|\dfrac{2(\beta-\alpha)}{1+4\alpha\beta}\right|=1$



平方して整理すると $4(\beta-\alpha)^2=(1+4\alpha\beta)^2$

したがって $4\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=(1+4\alpha\beta)^2$

① の解と係数の関係から $\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta=-\dfrac{3a}{4}$ であるから

$$4\left(\frac{9}{4}+3a\right)=(1-3a)^2$$

すなわち $9a^2-18a-8=0$

$a>-\dfrac{3}{4}$ に注意して $\boldsymbol{a=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{3}}$

13.7 (1) $y' = 2x$ より，点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における C の接線のベクトルは　$(1,\ 2p)$
ゆえに，P における C の法線の方程式は

$$1(x-p) + 2p(y-p^2) = 0$$

よって　　$\boldsymbol{x + 2py - 2p^3 - p = 0}$

(2) (1) で求めた法線が点 $(0,\ a)$ を通るとき

$$2pa - 2p^3 - p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p\left(p^2 - \frac{2a-1}{2}\right) = 0 \quad \cdots ①$$

① を p に関する 3 次方程式と考えると，この 3 次方程式の実数解の個数が求める法線の本数と一致する．したがって，次の 3 つに場合分けをする．

i) $\dfrac{2a-1}{2} < 0$ すなわち $a < \dfrac{1}{2}$ のとき
すべての実数 p に対して　$p^2 - \dfrac{2a-1}{2} > 0$
したがって，① の実数解は　$p = 0$ の 1 個

ii) $\dfrac{2a-1}{2} = 0$ すなわち $a = \dfrac{1}{2}$ のとき
方程式は　$p^3 = 0$
したがって，① の実数解は　$p = 0$ の 1 個

iii) $\dfrac{2a-1}{2} > 0$ すなわち $a > \dfrac{1}{2}$ のとき
方程式は　$p\left(p + \sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}\right)\left(p - \sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}\right) = 0$
したがって，① の実数解は　$p = 0,\ \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$ の 3 個

i)，ii)，iii) より，法線の本数は

$$\boldsymbol{a \leqq \frac{1}{2}} \textbf{ のとき 1 本，} \quad \boldsymbol{a > \frac{1}{2}} \textbf{ のとき 3 本}$$

13.8 $f'(x) = x^2 + ax = x(x+a)$ より $(a > 0)$，3 次関数 $f(x)$ は，極大値 $f(-a)$，極小値 $f(0)$ をとる．

$$f(-a) - f(0) = \int_0^{-a} f'(x)\,dx = \left[\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2\ \right]_0^{-a} = \frac{1}{6}a^3$$

条件から，$f(-a) - f(0) = \dfrac{4}{81}$ であるから

$$\frac{1}{6}a^3 = \frac{4}{81} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \frac{2}{3}}$$

$f'(x)=x^2+\dfrac{2}{3}x$ であるから，$f(0)=-1$ より　$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3}x^2-1}$

13.9　(1)　$f(x)=x(x+k)(x+2k)=x^3+3kx^2+2k^2x$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2+6kx+2k^2$$

2 次方程式 $f'(x)=0\cdots(*)$ の判別式を D とすると，$k>0$ より

$$D/4=(3k)^2-3\cdot 2k^2=3k^2>0$$

$(*)$ の異なる 2 つの実数解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$f(x)$ は異なる 2 つの極値をもつ．

(2)　$(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-2k,\quad \alpha\beta=\frac{2}{3}k^2$$

したがって，$f(x)$ を $f'(x)$ で割った商 $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{k}{3}$，余り $-\dfrac{2}{3}k^2x-\dfrac{2}{3}k^3$ により

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{k}{3}\right)f'(x)-\frac{2}{3}k^2x-\frac{2}{3}k^3$$

上式および解と係数の関係により

$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\beta)&=-\frac{2}{3}k^2(\alpha+\beta)-\frac{4}{3}k^3\\&=-\frac{2}{3}k^2(-2k)-\frac{4}{3}k^3=0\end{aligned}$$

2 点 P，Q の中点 R の座標は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{(-k,\ 0)}$$

(3)　$f(-k)=0$ であるから，R は C 上の点である．

$$f'(-k)=3(-k)^2+6k(-k)+2k^2=-k^2$$

したがって，C 上の点 $\mathrm{R}(-k,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y-0=-k^2(x+k)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-k^2x-k^3}$$

13.10 (1) $f(x)=x^3-6x^2+3kx$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2-12x+3k=3(x^2-4x+k)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x^2-4x+k=0$　$\cdots$①

2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$D/4=(-2)^2-1\cdot k=4-k>0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k<4}$$

(2) $f'(x)=0$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=4, \quad \alpha\beta=k,$$
$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4^2-4k}=2\sqrt{4-k}$$

また　$f(x)=\dfrac{1}{3}(x-2)f'(x)+(2k-8)x+2k$

$f(\alpha)$ が極大値，$f(\beta)$ が極小値であるから

$$f(\alpha)-f(\beta)=(2k-8)(\alpha-\beta)=2(4-k)(\beta-\alpha)$$
$$=2(4-k)\cdot 2\sqrt{4-k}=4(\sqrt{4-k}\,)^3$$

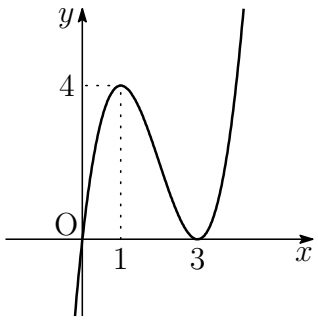
$f(\alpha)-f(\beta)=4$ であるから　$4(\sqrt{4-k}\,)^3=4$　よって　$\boldsymbol{k=3}$

(3) $k=3$ のとき　$f(x)=x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$

$$f'(x)=3(x-1)(x-3)$$

したがって，$f(x)$ の増減表および $y=f(x)$ のグラフは，次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	4	↘	0	↗



13.11 (1) $f(x)=x^3+3x^2\cos\theta+x\sin^2\theta+2$ より

$$f'(x)=3x^2+6x\cos\theta+\sin\theta$$

$f(x)$ が極大値・極小値をもつのは，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつときであるから，$D/4>0$ より

$$\begin{aligned}(3\cos\theta)^2-3\sin^2\theta&>0\\ 3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta&>0\\ 4\sin^2\theta-3&<0\\ (2\sin\theta+\sqrt{3})(2\sin\theta-\sqrt{3})&<0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta&<\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$-90^\circ<\theta<90^\circ$ より　　$\boldsymbol{-60^\circ<\theta<60^\circ}$

(2) $f(x)$ を $f'(x)$ で割ると

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\cos\theta\right)f'(x)+\frac{2}{3}(4\sin^2\theta-3)x+2-\frac{1}{3}\sin^2\theta\cos\theta$$

$f(x)$ の極大値・極小値に対応するグラフ上の 2 点を通る直線の方程式は

$$y=\frac{2}{3}(4\sin^2\theta-3)x+2-\frac{1}{3}\sin^2\theta\cos\theta$$

よって，この直線の傾き m は

$$\boldsymbol{m=\frac{2}{3}(4\sin^2\theta-3)}$$

(3) (1)，(2) の結果から，m のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-2\leqq m<0}$$

13.12 $f(t)=t^3-at^2$ とおくと，$x_n=f(n)$　$f'(t)=3t^2-2at$

i) $a\leqq 0$ のとき，$t>0$ において，$f'(t)>0$ であるから

$$f(1)<f(2)<\cdots\quad\text{すなわち}\quad x_1<x_2<\cdots$$

これは条件に反する．

ii) $a>0$ のとき，$f(t)$ の増減は次のようなる．

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	極小	↗

条件を満たすとき

$$14 < \frac{2}{3}a < 16, \quad f(14) > f(15), \quad f(15) < f(16)$$

第 1 式から　　$21 < a < 24$　$\cdots$①

第 2 式から

$$\begin{aligned} 14^3 - a\cdot 14^2 &> 15^3 - a\cdot 15^2 \\ (15^2 - 14^2)a &> 15^3 - 14^3 \\ (15+14)a &> 15^2 + 15\cdot 14 + 14^2 \\ a &> 21\frac{22}{29} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

第 3 式から

$$\begin{aligned} 15^3 - a\cdot 15^2 &< 16^3 - a\cdot 16^2 \\ (16^2 - 15^2)a &< 16^3 - 15^3 \\ (16+15)a &< 16^2 + 16\cdot 15 + 15^2 \\ a &< 23\frac{8}{31} \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

①，②，③ の共通範囲にある整数を求めて　$\boldsymbol{a = 22,\ 23}$

別解　(熊大 [理]2001) 3

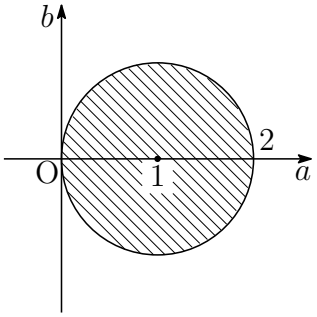
13.13　(1)　$f(x)$ を微分すると，$f'(x) = 2ax^2 + 2(a+b)x + b + 1$　　$\cdots (*)$

$a \neq 0$ のとき，すべての自然数 x に対して，$f'(x) \geqq 0$ となるための条件は

$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると　　$2a > 0, \quad D \leqq 0$

$D/4 = (a+b)^2 - 2a(b+1) = a^2 + b^2 - 2a \cdots$① により

$$a > 0, \quad (a-1)^2 + b^2 \leqq 1$$



$a = 0$ のとき　$f(x) = bx^2 + (b+1)x$ となる．

これがつねに増加するためには　$b = 0$

すなわち $f(x) = x$ となり，条件を満たす．

よって　$a > 0$ のとき　$(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$

　　$a = 0$ のとき　$b = 0$

したがって　$(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$

これを ab 平面上に図示すると，右の図のような円 $(a-1)^2 + b^2 = 1$ の内部で，境界線を含む．

(2) $a=0$ のとき　$f(x)=bx^2+(b+1)x$

$b \geqq 0$ は，$x>-1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=2bx+b+1$

$b>0$ のとき，$f'(-1) \geqq 0$ であることが条件であるから

$$b>0,\quad 2b(-1)+b+1 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0<b \leqq 1$$

$b=0$ のとき　$f(x)=x$ となり，これは条件を満たす．

よって　　$\boldsymbol{0 \leqq b \leqq 1}$

(3) $a \geqq 0$ は，$x>-1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$a=0$ の場合が (2) であり，$a>0$，$D \leqq 0$ の場合が (1) である．

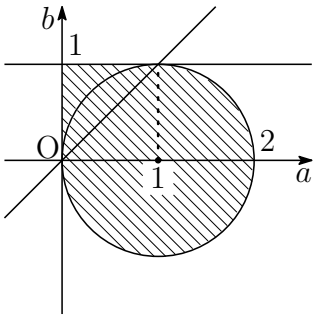
したがって，$a>0$，$D>0$ の場合を求める．

$(*)$ より

$$f'(x)=2a\left(x+\frac{a+b}{2a}\right)^2-\frac{a^2+b^2-2a}{2a}$$

ゆえに　$-\dfrac{a+b}{2a} \leqq -1$，$f'(-1)=-b+1 \geqq 0$

$D>0$ であるから，① より　$a^2+b^2-2a>0$



これを解いて　$a>0$，$b \geqq a$，$b \leqq 1$，$(a-1)^2+b^2>1$

求める領域は，右の図のように (1)，(2) の結果および上式をまとめた領域で，境界線を含む．

13.14 円錐の体積を V とすると $(0<t<1)$

$$V=\frac{\pi}{3}(1-t)^2t=\frac{\pi}{3}(t^3-2t^2+t)$$

V を t で微分すると

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}(3t^2-4t+1)=\frac{\pi}{3}(t-1)(3t-1)$$

V の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{dt}$		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{81}\pi}$

13.15 (1) $y=(x-2)^2$ より $y'=2(x-2)$ であるから　$x=t$ のとき　$y'=2(t-2)$
よって，点 $(t,\ (t-2)^2)$ における接線 l の方程式は

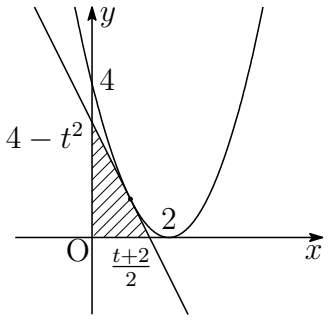
$$y-(t-2)^2=2(t-2)(x-t)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=2(t-2)x-t^2+4}$$

(2) (1) の結果に $y=0$ を代入すると

$$2(t-2)x-t^2+4=0\quad \text{ゆえに}\quad 2(t-2)x=(t+2)(t-2)$$

$t\neq 2$ より　$x=\dfrac{t+2}{2}$　よって，求める x 軸との交点は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{t+2}{2},\ 0\right)}$

(3) l の y 軸との交点の座標は $(0,\ 4-t^2)$ であるから，$0\leqq t<2$ および (2) の結果から



$$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t+2}{2}\times(4-t^2)$$
$$=-\frac{1}{4}(t^3+2t^2-4t-8)$$

ゆえに　$S'(t)=-\dfrac{1}{4}(3t^2+4t-4)$

$$=-\frac{1}{4}(t+2)(3t-2)$$

したがって，$0\leqq t<2$ における $S(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	2	↗	極大	↘	

よって　　$\boldsymbol{t=\dfrac{2}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{64}{27}}$

13.16 箱 A，B の底面が合同な正方形であるから，その一辺を $2x$ cm とすると，箱 A，B の高さはそれぞれ $12-x$ cm，$18-x$ cm であるから

$$2x>0,\quad 12-x>0,\quad 18-x>0\quad \text{すなわち}\quad 0<x<12$$

2 つの箱の容積の和を V とすると

$$V=(2x)^2(12-x)+(2x)^2(18-x)$$
$$=8x^2(15-x),$$
$$V'=24x(10-x)$$

したがって，V の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	10	$\cdots$	(12)
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	4000	↘	

よって，$x = 10$ のとき，最大値 **4000 (cm^3)**

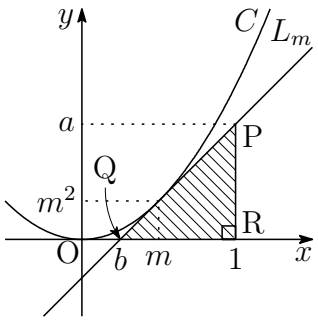
13.17 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

$x = m$ のとき　$y' = 2m$

L_m は，点 $(m,\ m^2)$ を通り，傾き $2m$ の直線．

ゆえに　　$y - m^2 = 2m(x - m)$

よって　　$\boldsymbol{y = 2mx - m^2}$



(2) P$(1,\ a)$，Q$(b,\ 0)$ は L_m 上の点であるから

$$a = 2m\cdot 1 - m^2, \quad 0 = 2mb - m^2$$

よって　$\boldsymbol{a = 2m - m^2}$，$\boldsymbol{b = \dfrac{m}{2}}$

(3) $\mathrm{PR} = a = 2m - m^2$，$\mathrm{QR} = 1 - b = 1 - \dfrac{m}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{QR} \\ &= \frac{1}{2}(2m - m^2)\left(1 - \frac{m}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(m^3 - 4m^2 + 4m)}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から，$S(m) = \dfrac{1}{4}(m^3 - 4m^2 + 4m)$ とおくと

$$S'(m) = \frac{1}{4}(3m^2 - 8m + 4) = \frac{1}{4}(m - 2)(3m - 2)$$

したがって，$S(m)$ の増減表は，次のようになる．

m	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$S'(m)$		$+$	0	$-$	
$S(m)$	0	↗	$\frac{8}{27}$	↘	$\frac{1}{4}$

よって，求める三角形 PQR の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{8}{27}}$

13.18 $f(x) = x^3 - (3p + 2)x^2 + 8px$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 2(3p + 2)x + 8p = (3x - 4)(x - 2p)$$

i) $2p \geqq 1$　すなわち　$\dfrac{1}{2} \leqq p < 1$ のとき

$f(x)$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ で単調増加であるから

最大値 $f(1) = 5p - 1$，最小値 $f(0) = 0$

ii) $0 < 2p < 1$　すなわち　$0 < p < \dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$2p$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$4p^2(2-p)$	↘	$5p-1$

最大値 $f(2p) = 4p^2(2-p)$，最小値 $\begin{cases} f(1) = 5p - 1 & (0 < p < \frac{1}{5}) \\ f(0) = 0 & (\frac{1}{5} \leqq p < \frac{1}{2}) \end{cases}$

i)，ii) より

$0 < p < \dfrac{1}{5}$ のとき　**最大値 $4p^2(2-p)$，最小値 $5p-1$**

$\dfrac{1}{5} \leqq p < \dfrac{1}{2}$ のとき　**最大値 $4p^2(2-p)$，最小値 0**

$\dfrac{1}{2} \leqq p < 1$ のとき　**最大値 $5p-1$，最小値 0**

13.19　(1) $g(x) = x^2 - 5x + m$ とおくと　$g(x) = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + m - \dfrac{25}{4}$

条件 (i) により，$x > 0$ において，$g(x) > 0$ であるから

$$m - \frac{25}{4} > 0 \quad \text{すなわち} \quad m > \frac{25}{4} \quad \cdots ①$$

$f(x) = x(x^2 - 5x + m) = x^3 - 5x^2 + mx$ より　$f'(x) = 3x^2 - 10x + m$

条件 (ii) より，2 次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつから

$$D/4 = (-5)^2 - 3 \cdot m > 0 \quad \text{ゆえに} \quad m < \frac{25}{3}$$

このとき，$f'(x) = 0$ の解を α，β とすると，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ であるから

$$\alpha + \beta = \frac{10}{3}, \quad \alpha\beta = \frac{m}{3} > 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < m < \frac{25}{3} \quad \cdots ②$$

①，② の共通範囲を求めると　$\dfrac{25}{4} < m < \dfrac{25}{3}$

よって，上式を満たす最小の整数 m は　$\boldsymbol{m = 7}$

(2) (1) の結果から　$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$

これを微分して　$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = (x-1)(3x-7)$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{19}{8}$	↗	極大 3	↘	極小 $\frac{49}{27}$	↗	3

(3)　$\boldsymbol{a > 1}$ のとき　　最大値 $\boldsymbol{\log_a 3}$ $\boldsymbol{(x = 1}$ または $\boldsymbol{3}$ のとき$\boldsymbol{)}$

$\boldsymbol{0 < a < 1}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{\log_a \frac{49}{27}}$ $\boldsymbol{\left(x = \frac{7}{3}\text{のとき}\right)}$

13.20　(1) 長方形の対角線の長さが 3 であるから　$x^2 + y^2 + z^2 = 9$　$\cdots$①

表面積が 16 であるから　$2(xy + yz + zx) = 16$

上の 2 式の辺々を加えると

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9 + 16$$

したがって　$(x + y + z)^2 = 25$　よって　$\boldsymbol{x + y + z = 5}$

(2) (1) の結果から　$\boldsymbol{y + z = 5 - x}$

上式の両辺を平方すると　$y^2 + z^2 + 2yz = 25 - 10x + x^2$

① より　$y^2 + z^2 = 9 - x^2$　これを上式に代入すると

$$9 - x^2 + 2yz = 25 - 10x + x^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{yz = x^2 - 5x + 8}$$

したがって，y, z を解とする 2 次方程式は

$$\boldsymbol{t^2 - (5 - x)t + x^2 - 5x + 8 = 0} \quad \cdots(*)$$

(3) $x > 0$，$y > 0$，$z > 0$ であるから

$$y + z = 5 - x > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < x < 5 \quad \cdots②$$

$$yz = x^2 - 5x + 8 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

方程式 $(*)$ が実数解をもつから，係数について

$$D = (5 - x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 - 5x + 8) \geqq 0$$

整理すると　$3x^2 - 10x + 7 \leqq 0$　ゆえに　$(x-1)(3x-7) \leqq 0$

② に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq \frac{7}{3}}$

(4) $yz = x^2 - 5x + 8$ より，$V = xyz = x^3 - 5x^2 + 8x$

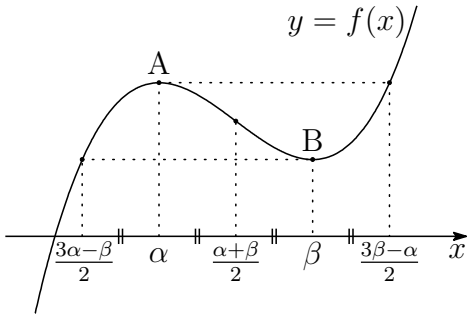
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x$ とおくと $\left(1 \leqq x \leqq \dfrac{7}{3}\right)$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 8 = (x-2)(3x-4)$$

x	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{7}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↗	$\frac{112}{27}$	↘	4	↗	$\frac{112}{27}$

よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{4}{3},\ \dfrac{7}{3}}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{112}{27}}$，$\boldsymbol{x = 1,\ 2}$ で最小値 $\boldsymbol{4}$ をとる．

補足 $a > 0$，$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について，$y = f(x)$ が点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$ で極大，点 $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ で極小であるとき，変曲点 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ f(\frac{\alpha+\beta}{2})\right)$ は A，B の中点である．また，$f(\frac{3\alpha-\beta}{3}) = f(\beta)$，$f(\alpha) = f(\frac{3\beta-\alpha}{2})$ が成立する．



本題のグラフの変曲点の座標について　$\dfrac{\frac{4}{3}+2}{2} = \dfrac{5}{3}$，$\dfrac{f(\frac{4}{3}) + f(2)}{2} = f(\frac{5}{3})$

x 座標 $1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2,\ \frac{7}{3}$ は等差数列をなし，$f(1) = f(2)$，$f(\frac{4}{3}) = f(\frac{7}{3})$．

13.21 (1) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$ より，C 上の点 $(u,\ f(u))$ における接線の傾きが t であるとき，u は方程式

$$3x^2 + 6x + 1 = t \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 + 6x + 1 - t = 0 \quad \cdots ①$$

の解である．この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = 3^2 - 3(1-t) = 3t + 6$$

$t \geqq 0$ のとき，$D > 0$ であるから，① は異なる 2 つの実数解をもつ．

よって，C は傾きが t $(t \geqq 0)$ である接線を 2 本もつ．

(2) p，q は 2 次方程式 ① の解であるから，解と係数の関係により

$$p + q = -2, \quad pq = \frac{1-t}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(p)+f(q) &= (p^3+3p^2+p-1)+(q^3+3q^2+q-1) \\ &= p^3+q^3+3(p^2+q^2)+p+q-2 \\ &= (p+q)^3-3pq(p+q)+3\{(p+q)^2-2pq\} \\ &\qquad +(p+q)-2 \\ &= (-2)^3-3\times\frac{1-t}{3}\times 2+3\left\{(-2)^2-2\times\frac{1-t}{3}\right\} \\ &\qquad +(-2)-2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに　　$\dfrac{p+q}{2}=-1$，$\dfrac{f(p)+f(q)}{2}=0$

よって，2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称である．

(3) $\mathrm{PQ}^2=(p-q)^2+\{f(p)-f(q)\}^2$ であるから，まず

$$\begin{aligned}f(p)-f(q)&=(p^3+3p^2+p-1)-(q^3+3q^2+q-1)\\&=p^3-q^3+3(p^2-q^2)+p-q\\&=(p-q)\{(p^2+pq+q^2)+3(p+q)+1\}\\&=(p-q)\{(p+q)^2-pq+3(p+q)+1\}\\&=(p-q)\left\{(-2)^2-\frac{1-t}{3}+3(-2)+1\right\}\\&=\frac{1}{3}(t-4)(p-q)\end{aligned}$$

次に　　$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=(-2)^2-4\times\dfrac{1-t}{3}=\dfrac{4}{3}(t+2)$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(p-q)^2+\{f(p)-f(q)\}^2\\&=(p-q)^2+\frac{1}{9}(t-4)^2(p-q)^2\\&=(p-q)^2\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}\\&=\frac{4}{3}(t+2)\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}=\frac{4}{27}(t^3-6t^2+9t+50)\end{aligned}$$

$g(t)=\dfrac{4}{27}(t^3-6t^2+9t+50)$ $(t\geqq 0)$ の最小値を求めればよいから

$g'(t)=\dfrac{4}{9}(t-1)(t-3)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\frac{200}{27}$	↗	8	↘	$\frac{200}{27}$	↗

上の増減表により，$g(t)$ は，$t=0,\ 3$ で最小値 $\dfrac{200}{27}$ をとる．

ゆえに，PQ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{10\sqrt{6}}{9}}$ である．

$p,\ q$ $(p<q)$ は方程式 ① の解であるから

$t=0$ のとき，$3x^2+6x+1=0$ を解いて

$$\boldsymbol{p=\frac{-3-\sqrt{6}}{3},\quad q=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}}$$

$t=3$ のとき，$3x^2+6x-2=0$ を解いて

$$\boldsymbol{p=\frac{-3-\sqrt{15}}{3},\quad q=\frac{-3+\sqrt{15}}{3}}$$

補足 (九大 [文]2012) 2

13.22 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

(2) (1) の結果から　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき**最大値 $\sqrt{2}$**，$\theta=\pi$ のとき**最小値 -1**

(3) (2) の結果から　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を平方すると　$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{t^2-1}}{\boldsymbol{2}}$　$(-1\leqq t\leqq\sqrt{2})$

よって　$t=\sqrt{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき　**最大値 $\dfrac{1}{2}$**

$t=0$　すなわち　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき　**最小値 $-\dfrac{1}{2}$**

(4) (3) の結果から

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=t^3-3\cdot\frac{t^2-2}{2}\cdot t=\boldsymbol{-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t}$$

$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t$　$\left(-1\leqq t\leqq\sqrt{2}\right)$ とおいて，これを微分すると

$$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

したがって，$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって　$t=1$　すなわち　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき　**最大値 1**

$t=-1$　すなわち　$\theta=\pi$ のとき　**最小値 -1**

13.23 (1) $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$ より　$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ のとき　$\boldsymbol{1\leqq t\leqq\sqrt{2}}$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を平方すると

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta\quad\text{ゆえに}\quad\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

したがって　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$
$$=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

ここで，$f(t)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$ $(1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$ とおくと

$$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

したがって，$f(t)$ の増減表は，右のようなる．

t	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって　$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \sin^3\theta+\cos^3\theta \leqq 1}$

13.24　(1)　$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$-\frac{\pi}{4} \leqq x-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$　よって　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(2)　$t=\sin x-\cos x \cdots$① の両辺を平方すると

$$t^2=1-2\sin x\cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2} \quad \cdots②$$

$y=\sin^3 x-\cos^3 x$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}\sin^3 x-\cos^3 x&=(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)\\&=(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)\end{aligned}$$

上式に ①，② を代入すると

$$\sin^3 x-\cos^3 x=t\left(1+\frac{1-t^2}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

よって　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t}$

(3)　(2) の結果から

$$\begin{aligned}y'&=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}\\&=-\frac{3}{2}(t+1)(t-1)\end{aligned}$$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ における y の増減表は，次のようになる．

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	極大 1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって，y は

$t=1$　すなわち　$x=\frac{\pi}{2},\ \pi$ のとき　**最大値 1** をとり，

$t=-1$　すなわち　$x=0$ のとき　**最小値 −1** をとる．

13.25 (1) $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ より　$\boldsymbol{-1\leqq t\leqq\sqrt{2}}$

(2) $t=\sin x-\cos x$ の両辺を平方すると

$$t^2=1-2\sin x\cos x\quad\text{ゆえに}\quad\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$$

また　$\sin^3x-\cos^3x=(\sin x-\cos x)(\sin^2x+\sin x\cos x+\cos^2x)$

$=(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)$

$=t\left(1+\dfrac{1-t^2}{2}\right)=\dfrac{3t-t^3}{2}$

よって　$y=2(\sin^3x-\cos^3x)-6\sin x\cos x(\sin x-\cos x-1)$

$=2\cdot\dfrac{3t-t^3}{2}-6\cdot\dfrac{1-t^2}{2}(t-1)=\boldsymbol{2t^3-3t^2+3}$

(3) $y=2t^3-3t^2+3$ を微分すると　$y'=6t^2-6t=6t(t-1)$

したがって，増減表は次のようなる．

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	↗	3	↘	2	↗	$4\sqrt{2}-3$

よって　**最大値 3，最小値 −2**

13.26 (1) $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$45^\circ\leqq\theta+45^\circ\leqq225^\circ$ であるから

$$\boldsymbol{-1\leqq t\leqq\sqrt{2}}$$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ より

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1\}=\frac{1}{2}(t^2-1)$$

したがって

$$\begin{aligned}f(\theta)&=4\sin^3\theta-9\sin\theta\cos\theta+4\cos^3\theta+1\\&=4\{(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\}-9\sin\theta\cos\theta+1\\&=4\left\{t^3-3\cdot\frac{1}{2}(t^2-1)\cdot t\right\}-9\cdot\frac{1}{2}(t^2-1)+1\\&=-2t^3-\frac{9}{2}t^2+6t+\frac{11}{2}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{g(t)=-2t^3-\dfrac{9}{2}t^2+6t+\dfrac{11}{2}}$

(3) (2) の結果から

$$g'(t) = -6t^2 - 9t + 6 = -3(t+2)(2t-1)$$

したがって，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-3	↗	$\frac{57}{8}$	↘	$2\sqrt{2} - \frac{7}{2}$

よって　　$\boldsymbol{t = \frac{1}{2}}$**のとき**　　**最大値** $\boldsymbol{\frac{57}{8}}$

$\boldsymbol{t = -1}$ **のとき**　**最小値** $\boldsymbol{-3}$

13.27　(1) 2 倍角の公式により

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \boldsymbol{2\cos^2 x - 1}\end{aligned}$$

加法定理により

$$\begin{aligned}\cos(2x+x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ \cos(2x-x) &= \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x\end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}\cos 3x + \cos x &= 2\cos 2x \cos x \\ &= 2(2\cos^2 x - 1)\cos x\end{aligned}$$

よって　　$\cos 3x = \boldsymbol{4\cos^3 x - 3\cos x}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos 3x + \cos 2x - 2\cos x \\ &= (4\cos^3 x - 3\cos x) + (2\cos^2 x - 1) - 2\cos x \\ &= 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 5\cos x - 1\end{aligned}$$

$t = \cos x$，$g(t) = f(x)$ とおくと

$$g(t) = 4t^3 + 2t^2 - 5t - 1 \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

$g(t)$ を微分すると　$g'(t) = 12t^2 + 4t - 5 = (6t+5)(2t-1)$

したがって，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$-\frac{5}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	2	↗	$\frac{121}{54}$	↘	$-\frac{5}{2}$	↗	0

よって　最大値 $\boldsymbol{\frac{121}{54}}$，最小値 $\boldsymbol{-\frac{5}{2}}$

13.28　(1)　$30^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ のとき　$\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2)　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるから

$$y = \cos 3\theta - 3\cos\theta + 1 = (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 3\cos\theta + 1$$
$$= \boldsymbol{4\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1}$$

(3)　$x = \cos\theta$ とおくと，(1)，(2) より　　$y = 4x^3 - 6x + 1$　　$\left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

微分すると　　$y' = 12x^2 - 6 = 12\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

したがって，y の増減表は

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{7}{2}$	↘	$1-2\sqrt{2}$	↗	$1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 120^\circ}$**のとき**　**最大値** $\boldsymbol{\frac{7}{2}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$**のとき**　　**最小値** $\boldsymbol{1 - 2\sqrt{2}}$

13.29　(1)　$f(\theta) = \sin^3\theta + a\cos 2\theta + \frac{21}{4}\sin\theta$ に $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入すると

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - a + \frac{21}{4} = \frac{25}{4} - a$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{13}{4}$ であるから

$$\frac{25}{4} - a = \frac{13}{4}　\text{これを解いて}　\boldsymbol{a = 3}$$

(2)　$a = 3$，$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より

$$f(\theta) = t^3 + 3(1 - 2t^2) + \frac{21}{4}t$$
$$= \boldsymbol{t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3}$$

(3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

$$g(t) = t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3 \qquad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 12t + \frac{21}{4} \\ &= \frac{3}{4}(4t^2 - 16t + 7) = \frac{3}{4}(2t-1)(2t-7) \end{aligned}$$

したがって，$g(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{37}{4}$	↗	$\frac{17}{4}$	↘	$\frac{13}{4}$

よって　$t = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{17}{4}}$

$t = -1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = -\dfrac{\pi}{2}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{37}{4}}$

13.30　(1) $x = \sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2}$ の両辺を平方すると

$$x^2 = 1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 1 + \sin\theta$$

ゆえに

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(x^2-1), \quad \sin\theta = x^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \sin^3\frac{\theta}{2} + \cos^3\frac{\theta}{2} &= \left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^3 - 3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= x^3 - 3\cdot\frac{1}{2}(x^2-1)x = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

したがって，上の諸式より

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4\left(\sin^3\frac{\theta}{2} + \cos^3\frac{\theta}{2}\right) + 6\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)(\sin\theta - 2) - \sqrt{6}(\sin\theta + 1) \\ &= 4\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x\right) + 6x\{(x^2-1) - 2\} - \sqrt{6}\{(x^2-1) + 1\} \\ &= \boldsymbol{4x^3 - \sqrt{6}x^2 - 12x} \end{aligned}$$

(2) $\quad x=\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\quad\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi\right)\quad\cdots①$

このとき $\quad\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\leqq\pi\quad$ ゆえに $\quad 0\leqq x\leqq\sqrt{2}$

(1) の結果より

$$g(x)=4x^3-\sqrt{6}x^2-12x\quad(0\leqq x\leqq\sqrt{2})$$

とおくと

$$g'(x)=12x^2-2\sqrt{6}x-12=2(2x-\sqrt{6})(3x+\sqrt{6})$$

したがって，$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	極小 $-\frac{9}{2}\sqrt{6}$	↗	

また，① により $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\quad$ すなわち $\quad\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\quad\text{ゆえに}\quad\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{9}{2}\sqrt{6}}$ をとる．

13.31 $\quad y=a^{3x}+a^{-3x}-9(a^{2x}+a^{-2x})+27(a^x+a^{-x})\quad\cdots(*)$

$t=a^x+a^{-x}$ とおくと $\quad t=\left(a^{\frac{x}{2}}-a^{-\frac{x}{2}}\right)^2+2\geqq 2$

また $\quad a^{2x}+a^{-2x}=(a^x+a^{-x})^2-2=t^2-2$

$$a^{3x}+a^{-3x}=(a^x+a^{-x})^3-3(a^x+a^{-x})=t^3-3t$$

上の諸式を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}y&=(t^3-3t)-9(t^2-2)+27t\\&=t^3-9t^2+24t+18\\y'&=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)\end{aligned}$$

t	2	$\cdots$	4	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	34	↗

ゆえに，y の増減表は次のようになる．

$t=4$ のとき $\quad a^x+a^{-x}=4\quad$ ゆえに $\quad(a^x)^2-4a^x+1=0$

$0<a^x<1$ であるから $\quad a^x=2-\sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{x=\log_a(2-\sqrt{3})}$ のとき最小値 $\boldsymbol{34}$ をとる．

13.32 (1) $t = 2^x + 2^{-x}$ より

$$8^x + 8^{-x} = (2^x + 2^{-x})^3 - 3(2^x + 2^{-x}) = t^3 - 3t$$
$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$$

したがって　$g(t) = (t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) + 27t - 26$
$= \boldsymbol{t^3 - 9t^2 + 24t - 8}$

(2) 相加平均・相乗平均の関係により

$$2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t \geqq 2}$$

(3) $g(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 8$ を微分すると

$$g'(t) = 3t^2 - 18t + 24$$
$$= 3(t-2)(t-4)$$

t	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$	12	↘	8	↗

$g(t)$ の増減は右の表のようになる.

(4) (3) の結果から，$f(x)$ の最小値は　**8**
このとき，$t = 4$ より

$$2^x + 2^{-x} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$x \geqq 0$ より，$2^x \geqq 1$ であるから，最小値を与える x の値は

$$2^x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \log_2(2 + \sqrt{3})}$$

13.33 (1) $a = 0$ より，連立方程式 $\begin{cases} y = 3x \\ y = 2x^3 - 3x \end{cases}$ を解いて

$$\boldsymbol{(0,\ 0),\ (\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}),\ (-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})}$$

(2) $l : y = 3x - a$ と $C : y = 2x^3 - 3x$ の共有点の個数は，方程式

$$-2x^3 + 6x = a$$

の実数解の個数に等しい.

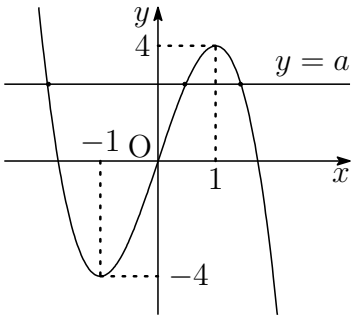
関数 $y=-2x^3+6x$ について

$$\begin{aligned} y' &= -6x^2+6 \\ &= -6(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

y の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -4	↗	極大 4	↘

よって，$y=-2x^3+6x$ のグラフは，右の図のようなる．



求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$\boldsymbol{-4<a<4}$$

13.34 $y=x^3-x$ を微分すると　$y'=3x^2-1$

曲線 $y=x^3-x$ 上の点 $(t,\ t^3-t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$

これが点 $(a,\ b)$ を通るから

$$b-(t^3-t)=(3t^2-1)(a-t) \quad \text{ゆえに} \quad 2t^3-3at^2+a+b=0 \quad \cdots(*)$$

$f(t)=2t^3-3at^2+a+b$ とおくと　$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$

$f'(t)=0$ とすると，$t=0,\ a$ であるから，極値は

$$f(0)=a+b,\quad f(a)=-a^3+a+b$$

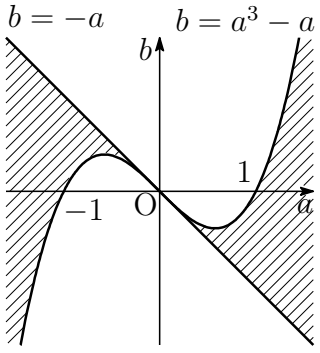
t の 3 次方程式 $(*)$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，関数 $f(t)$ は，符号違いの極値をもつので

$$\begin{cases} a+b>0 \\ -a^3+a+b<0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} a+b<0 \\ -a^3+a+b>0 \end{cases}$$

$(a,\ b)$ の表す領域は右の図の斜線部分で，境界線を含まない．



解説　(琉球大学 2010) 3

13.35 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

C 上の点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線の方程式は

$$y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad y = 2\alpha x - \alpha^2 \quad \cdots ①$$

同様に，C 上の点 $\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2\beta x - \beta^2 \quad \cdots ②$$

P は ①，② の交点であるから，①，② を解いて　$\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$

よって，点 P の x 座標は　$\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

(2) 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ は直線 $y = ax + b$ 上の点であるから

$$\alpha\beta = a \times \frac{\alpha+\beta}{2} + b \quad \cdots ③$$

2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を通る直線の方程式は

$$y - \alpha^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad y = (\alpha+\beta)x - \alpha\beta \cdots ④$$

直線 ④ は，③ により　$y = (\alpha+\beta)x - a \times \dfrac{\alpha+\beta}{2} - b$

ゆえに　$y + b = (\alpha+\beta)\left(x - \dfrac{a}{2}\right)$

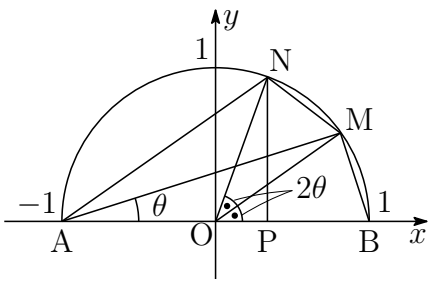
よって，この直線は，定点 $\left(\dfrac{a}{2}, -b\right)$ を通る．

13.36 (1) $\angle \mathrm{AMB} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{MB} = \mathrm{AB}\sin\theta = \boldsymbol{2\sin\theta}$$

$\angle \mathrm{BOM} = 2\theta$ であるから

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\cos 2\theta},\ \boldsymbol{\sin 2\theta})$$



(2) $\angle \mathrm{BON} = 4\theta$ であるから　$\mathrm{N}(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$

したがって　$\mathbf{PB = 1 - \cos 4\theta}$

(3) (1) の結果から　$\mathrm{MB} = 2t$

(2) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{PB} &= 1 - \cos 4\theta = 1 - (1 - 2\sin^2 2\theta) \\ &= 2\sin^2 2\theta = 2(2\sin\theta\cos\theta)^2 \\ &= 8\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) = 8t^2(1 - t^2)\end{aligned}$$

MB = PB より

$$2t = 8t^2(1-t^2) \quad \text{すなわち} \quad t(4t^3-4t+1)=0$$

ここで，$0° < \angle \mathrm{BON} \leqq 180°$ であるから　$0° < \theta \leqq 45°$

したがって　　$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，求める条件は　　$\boldsymbol{4t^3-4t+1=0}$

(4) $f(t)=4t^3-4t+1$ $\left(0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおくと　$f'(t)=12\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	↘	極小 $1-\frac{8}{9}\sqrt{3}$	↗	$1-\sqrt{2}$

したがって，$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，$f(t)=0$ の解は 1 個存在し，その解を t_0 とすると

$$\sin\theta = t_0 \quad (0 < \theta \leqq 45°)$$

を満たす θ はただ 1 つ存在する．すなわち，MB = PB となるような M がただ一つ存在する．

13.37 (1) x の 3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数が 1，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ であるから

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)=3x^2-3(\alpha+\beta)x+3\alpha\beta$$

また，$f(x)$ の定数項は 0 であるから

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2+3\alpha\beta x$$

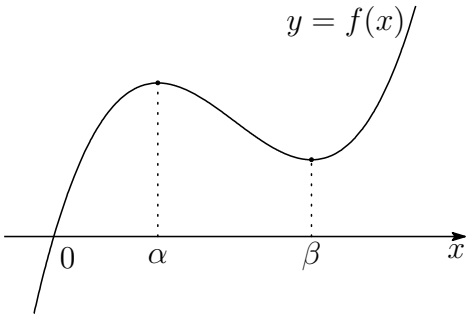
したがって

$$f(\alpha)=\alpha^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2+3\alpha^2\beta=\boldsymbol{\frac{\alpha^2(3\beta-\alpha)}{2}}$$
$$f(\beta)=\beta^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\beta^2+3\alpha\beta^2=\boldsymbol{\frac{\beta^2(3\alpha-\beta)}{2}}$$

(2) $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

$\alpha < \beta < 3\alpha$ より，$0 < \alpha < \beta$，$3\alpha - \beta > 0$ であるから，$f(\beta) > 0$
したがって，$y = f(x)$ のグラフの概形は，次のようになる．



よって，$y = f(x)$ および $y = -1$ のグラフから，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数は **1 個**.

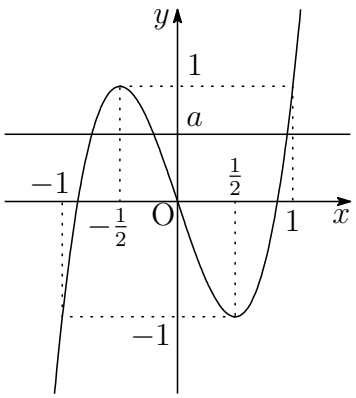
解説 (熊大 [理]2015) 1

13.38 (1) 関数 $y = 4x^3 - 3x$ について

$$\begin{aligned} y' &= 12x^2 - 3 \\ &= 3(2x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

y の増減表は右のようになる．
よって，$y = 4x^3 - 3x$ のグラフは，右の図のようになる．
求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y = a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから



$$\boldsymbol{-1 < a < 1}$$

(2) 方程式 $4x^3 - 3x - a = 0$ の解は，$y = 4x^3 - 3x$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の x 座標であるから，$-1 < a < 1$ のとき，(1) の図から，3 つの解はいずれも -1 と 1 の間にある．

(3) $$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

(4) $\cos\theta$ は，$4x^3-3x-a=0$ の解であるから　$4\cos^3\theta - 3\cos\theta - a = 0$

(3) の結果から　　$\cos 3\theta - a = 0$

上式から　$\cos(3\theta \pm 360^\circ) - a = 0$　　ゆえに　$\cos 3(\theta \pm 120^\circ) - a = 0$

したがって　　$4\cos^3(\theta \pm 120^\circ) - 3\cos(\theta \pm 120^\circ) - a = 0$

よって，$\cos(\theta \pm 120^\circ)$ は，3 次方程式 $4x^3-3x-a=0$ の解である．

最も大きい解 $\cos\theta$ は，(1) の図から　$\dfrac{1}{2} < \cos\theta < 1$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$0^\circ < \theta < 60^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}&\cos(\theta-120^\circ) - \cos(\theta+120^\circ)\\ =&\cos\theta\cos 120^\circ + \sin\theta\sin 120^\circ - (\cos\theta\cos 120^\circ - \sin\theta\sin 120^\circ)\\ =&2\sin\theta\sin 120^\circ = \sqrt{3}\sin\theta > 0\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\cos(\theta-120^\circ) > \cos(\theta+120^\circ)}$

13.39 $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ より

$0 \leqq x \leqq 2$ において　$x^2-x-2 \leqq 0$,
$2 \leqq x \leqq 3$ において　$x^2-x-2 \geqq 0$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^3 |\,x^2-x-2\,|dx &= \int_0^2 (-x^2+x+2)dx + \int_2^3 (x^2-x-2)dx\\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3\\ &= \boldsymbol{\frac{31}{6}}\end{aligned}$$

13.40 (1) $S = \displaystyle\int_0^2 (-3mx+2n)\,dx = \left[-\frac{3}{2}mx^2+2nx\right]_0^2 = \boldsymbol{-6m+4n}$

$T = \displaystyle\int_0^2 (6x^2-2nx-m)\,dx = \left[2x^3-nx^2-mx\right]_0^2 = \boldsymbol{-2m-4n+16}$

(2) (1) の結果から

$$m = 2 - \frac{1}{8}S - \frac{1}{8}T, \quad n = 3 + \frac{1}{16}S - \frac{3}{16}T$$

したがって　　$m + n = 5 - \dfrac{1}{16}S - \dfrac{5}{16}T$

$S \geqq 0$，$T \geqq 0$ のとき，$m + n$ が最大となるのは，上の諸式より

$$S = T = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{m = 2,\ n = 3}$$

13.41 (1)　$f'(x) = x^2 - x = x(x-1)$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ 1$

増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_a^x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2}$$

よって　極大値　$f(0) = \boldsymbol{-\dfrac{a^3}{3} + \dfrac{a^2}{2}}$,

極小値　$f(1) = \boldsymbol{-\dfrac{a^3}{3} + \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{1}{6}}$

(2) (1) の結果から，$f(0) > 0$，$f(1) < 0$ より

$$-\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} > 0, \quad -\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{6} < 0$$

これらを整理すると

$$a^2(2a - 3) < 0, \quad (a-1)^2(2a+1) > 0$$

上の第 1 式から　$a < \dfrac{3}{2}$ $(a \neq 0)$,　　第 2 式から　$a > -\dfrac{1}{2}$ $(a \neq 1)$

よって　　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{3}{2}}$ $\boldsymbol{(a \neq 0,\ a \neq 1)}$

13.42 (1) $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1}{7}t^2 - \frac{2}{3}t - 3 \right) dt = \left[\frac{t^3}{21} - \frac{t^2}{3} - 3t \right]_x^{2x}$

$$= \frac{(2x)^3 - x^3}{21} - \frac{(2x)^2 - x^2}{3} - 3(2x - x)$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$f(x)=0$ より　$\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x=0$

ゆえに　$x(x^2-3x-9)=0$

よって　$\boldsymbol{x=0,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f'(x)&=x^2-2x-3\\ &=(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

$-3\leqq x\leqq 6$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-9	↗	極大 $\frac{5}{3}$	↘	極小 -9	↗	18

よって，$f(x)$ は $x=\pm3$ で**最小値 -9** をとる．

13.43　(1) 3 次関数 $f(x)$ は，$x=-1,\ 2$ で極値をとるから，定数 a を用いて

$$f'(x)=a(x+1)(x-2)=a(x^2-x-2)$$

とおける．

$$\begin{aligned}\int_0^2 f'(x)\,dx&=a\int_0^2(x^2-x-2)\,dx\\ &=a\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^2=-\frac{10}{3}a\end{aligned}$$

このとき　$-\dfrac{10}{3}a=-5$　ゆえに　$a=\dfrac{3}{2}$

よって　$\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{3}{2}(x^2-x-2)}$

(2) 極大値 $f(-1)$ と極小値 $f(2)$ の差は

$$\begin{aligned}f(-1)-f(2)&=\int_2^{-1}f'(x)\,dx\\ &=\frac{3}{2}\int_2^{-1}(x+1)(x-2)\,dx\\ &=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-1-2)^3=\boldsymbol{\frac{27}{4}}\end{aligned}$$

13.44 $f(x)=x^3-kx^2+kx+1$ とおくと　$f'(x)=3x^2-2kx+k$

$f(x)$ は極大値と極小値をもつから，$f'(x)=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha=\frac{k+\sqrt{k^2-3k}}{3}-\frac{k-\sqrt{k^2-3k}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{k(k-3)}\quad\cdots①$$

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$$

極大値，極小値は，それぞれ $f(\alpha)$，$f(\beta)$ であるから

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx=3\int_\beta^\alpha(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

条件により，$f(\alpha)-f(\beta)=4|k|^3$ であるから

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=4|k|^3\quad\text{ゆえに}\quad\beta-\alpha=2|k|\quad\cdots②$$

①，② より　$2|k|=\dfrac{2}{3}\sqrt{k(k-3)}$　ゆえに　$k(8k+3)=0$

$k(k-3)>0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{k=-\dfrac{3}{8}}$

13.45　(1)　$f(0)=0$ より，$f(x)=px^2+qx$ とおくと，$f(-1)=f(1)=3a$ より

$$p-q=3a,\quad p+q=3a\quad\text{よって}\quad p=3a,\ q=0$$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=3ax^2}$

(2)　(1) の結果により　　$\begin{aligned}g(x)&=\int_0^x 3at^2\,dt+\frac{4}{a}\\&=\left[\,at^3\,\right]_0^x+\frac{4}{a}=ax^3+\frac{4}{a}\end{aligned}$

$g(x)$ を微分すると　　$g'(x)=3ax^2$

$y=3x+2$ と $y=g(x)$ の接点の座標を $(p,\ 3p+2)$ とすると，$g'(p)=3$，$g(p)=3p+2$ より

$$3ap^2=3,\quad ap^3+\frac{4}{a}=3p+2$$

第 1 式から，$a=\dfrac{1}{p^2}\cdots①$，これを第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{p^2}\cdot p^3+4p^2=3p+2\quad\text{整理すると}\quad 2p^2-p-1=0$$

これを解いて　$p=1,\ -\dfrac{1}{2}$

① より，$p=1$ のとき $a=1$，$p=-\dfrac{1}{2}$ のとき $a=4$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{a=1} \text{ のとき}\quad \text{接点 } \boldsymbol{(1,\ 5)} \\ \boldsymbol{a=4} \text{ のとき}\quad \text{接点 } \boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)} \end{cases}$

13.46　(1)　$f(x)=2^{3x}-a2^{2x}+a2^{x+1}-b$

$=(2^x)^3-a(2^x)^2+2a2^x-b$

よって　$\boldsymbol{g(t)=t^3-at^2+2at-b}$

(2)　$g(t)=0$ の解が $1(=2^0),\ 2^\alpha,\ 2^\beta$ であるから，解と係数の関係により

$$1+2^\alpha+2^\beta=a,\quad 2^\alpha+2^\beta+2^{\alpha+\beta}=2a,\quad 2^{\alpha+\beta}=b \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ の第 1 式と第 2 式から　$2^{\alpha+\beta}=a+1$

これと $(*)$ の第 3 式から　$\boldsymbol{b=a+1,\ \alpha+\beta=\log_2(a+1)}$

(3)　$\displaystyle\int_\alpha^\beta\left(\frac{2}{3}t+1\right)dt=\left[\ \frac{1}{3}t^2+t\ \right]_\alpha^\beta=\frac{1}{3}(\beta^2-\alpha^2)+(\beta-\alpha)$

条件より，$\displaystyle\int_\alpha^\beta\left(\frac{2}{3}t+1\right)dt=2(\beta-\alpha)$ であるから $(\alpha\neq\beta)$

$$\frac{1}{3}(\beta^2-\alpha^2)+(\beta-\alpha)=2(\beta-\alpha)\quad \text{ゆえに}\quad \alpha+\beta=3$$

これを (2) の結果に代入すると

$$\log_2(a+1)=3\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a=7},\ b=8$$

これらを $(*)$ に代入すると　$2^\alpha+2^\beta=6,\ 2^{\alpha+\beta}=8$

$\alpha<\beta$ より，$2^\alpha=2,\ 2^\beta=4$ であるから　$\boldsymbol{\alpha=1,\ \beta=2}$

13.47　(1)　$\displaystyle S(t)=\int_0^1 x|\,x-t\,|\,dx$

(i)　$t<0$ のとき

$$S(t)=\int_0^1 x(x-t)\,dt=\left[\ \frac{1}{3}x^3-\frac{t}{2}x^2\ \right]_0^1=\boldsymbol{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}}$$

(ii) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t x(-x+t)\,dx + \int_t^1 x(x-t)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2 \right]_0^t + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{t}{2}x^2 \right]_t^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(iii) $1 < t$ のとき

$$S(t) = \int_0^1 x(-x+t)\,dt = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2 \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}}$$

(2) (1) の (i)，(iii) の開区間における $S(t)$ は，それぞれ単調減少，単調増加であるから最小値をもたない．したがって，(ii) についてその最小値を求めればよい．

$$S'(t) = t^2 - \frac{1}{2} = \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

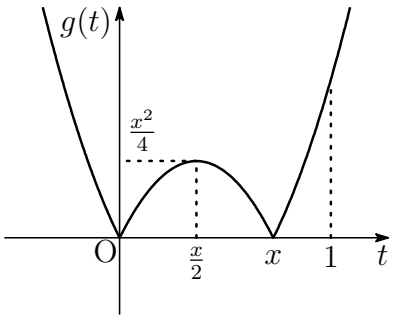
$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘	極小	↗	

よって，最小値は　$S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \right) = \boldsymbol{\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}}$

13.48　(1) $g(t) = |t(t-x)| = \begin{cases} t^2 - xt & (t \leqq 0,\ x \leqq t) \\ -t^2 + xt & (0 < x < t) \end{cases}$

したがって，グラフの概形は，次のようになる．



(2) t の関数 $t^2 - xt$ の原始関数の 1 つを $G(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{xt^2}{2}$ とすると，

$0 \leqq x \leqq 1$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 |t^2 - xt| = -\int_0^x (t^2 - xt)dt + \int_x^1 (t^2 - xt)dt \\ &= -\Big[\ G(t)\ \Big]_0^x + \Big[\ G(t)\ \Big]_x^1 \\ &= G(0) + G(1) - 2G(x) \end{aligned}$$

ここで　　$G(0) = 0$，$G(1) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}x$，$G(x) = -\dfrac{1}{6}x^3$

よって　　$f(x) = 0 + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}x\right) - 2\left(-\dfrac{1}{6}x^3\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}}$

(3) (2) の結果から　$f'(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

よって　$x = 0$ のとき**最大値** $\dfrac{1}{3}$，$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

13.49　(1) $f(x) = |(x-1)(x-a)|$ より　$f(0) = |\,a\,|$

i) $a < 0$ のとき，$a < x < 1$ において

$f(x) = -(x-1)(x-a)$，$f'(x) = -2x + a + 1$

ii) $a > 0$ のとき，$x < \min\{a,\ 1\}$ において

$f(x) = (x-1)(x-a)$，$f'(x) = 2x - a - 1$

よって　$a < 0$ のとき　$\boldsymbol{f'(0) = a + 1}$，

$a > 0$ のとき　$\boldsymbol{f'(0) = -a - 1}$

(2) (1) の結果から　$f(x) - bx - c = |(x-1)(x-a)| - f'(0)x - f(0)$ より

i) $a < 0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x) - bx - c &= |(x-1)(x-a)| - (a+1)x + a \\ &= -(x-1)(x-a) - (a+1)x + a = -x^2 \end{aligned}$$

したがって　$S(a) = \displaystyle\int_0^1 |-x^2|\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

ii) $0<a<1$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x)-bx-c &= |(x-1)(x-a)|+(a+1)x-a \\ &= \begin{cases} (x-1)(x-a)+(a+1)x-a & (0 \leqq x \leqq a) \\ -(x-1)(x-a)+(a+1)x-a & (a \leqq x \leqq 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 & (0 \leqq x \leqq a) \\ -(x-a-1)^2+a^2+1>0 & (a \leqq x \leqq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a x^2\,dx+\int_a^1 \{-(x-a-1)^2+a^2+1\}\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a+\left[-\frac{1}{3}(x-a-1)^3+(a^2+1)x\right]_a^1 \\ &= \frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{3}-\frac{1}{3}+(a^2+1)(1-a) \\ &= -\frac{a^3}{3}+a^2-a+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

iii) $1 \leqq a$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x)-bx-c &= |(x-1)(x-a)|+(a+1)x-a \\ &= (x-1)(x-a)+(a+1)x-a = x^2 \end{aligned}$$

したがって　$S(a)=\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

よって
$$\begin{cases} a<0 \text{ のとき} & \boldsymbol{S(a)=\dfrac{1}{3}} \\ 0<a<1 \text{ のとき} & \boldsymbol{S(a)=-\dfrac{a^3}{3}+a^2-a+\dfrac{2}{3}} \\ 1 \leqq a \text{ のとき} & \boldsymbol{S(a)=\dfrac{1}{3}} \end{cases}$$

(3) (2) の結果から，$0<a<1$ のとき

$$S'(a)=-a^2+2a-1=-(a-1)^2$$

$S(a)$ は $0<a<1$ で単調減少であるから，$0<a<1$ に極値をもたない．

よって，$S(a)$ の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ $(a<0,\ 1 \leqq a)$

13.50　(1) $g(x)=f(x)-(x+1)^2$ とおくと

$$g(x)=(a-1)\left(x-\frac{1}{a-1}\right)^2+c-\frac{a}{a-1}$$

$a \geqq 2$ のとき，$a-1 \geqq 1$ であるから，$0 < \dfrac{1}{a-1} \leqq 1$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　　$c - \dfrac{a}{a-1}$

したがって，条件 $(*)$ が成り立つための条件は

$$c - \frac{a}{a-1} \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geqq \frac{a}{a-1}$$

よって，最小の c の値は　　$\dfrac{a}{a-1}$

(2)　i) $1 < a \leqq 2$ のとき，$0 < a-1 \leqq 1$，$1 \leqq \dfrac{1}{a-1}$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

ii) $a = 1$ のとき，$g(x) = -2x + c - 1$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

iii) $a < 1$ のとき，$a - 1 < 0$，$\dfrac{1}{a-1} < 0$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

i)〜iii) より，条件 $(*)$ が成り立つための条件は

$$g(1) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geqq 4 - a$$

よって，最小の c の値は　　$4 - a$

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2 + c)\,dx = \frac{a}{3} + c$

i) $a \geqq 2$ のとき，$c \geqq \dfrac{a}{a-1}$ より

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &\geqq \frac{a}{3} + \frac{a}{a-1} = \frac{(a-1)+1}{3} + \frac{(a-1)+1}{a-1} \\ &= \frac{a-1}{3} + \frac{1}{a-1} + \frac{4}{3} \\ &\geqq 2\sqrt{\frac{a-1}{3} \times \frac{1}{a-1}} + \frac{4}{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

ゆえに　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

等号が成り立つのは

$$\frac{a-1}{3} = \frac{1}{a-1}, \quad c = \frac{a}{a-1}$$

$a \geqq 2$ より　　$a = 1+\sqrt{3},\quad c = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

ii) $a \leqq 2$ のとき，$c \geqq 4-a$ より

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{a}{3}+4-a = -\frac{2}{3}a+4 \geqq -\frac{2}{3}\cdot 2+4 = \frac{8}{3}$$

ゆえに　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{8}{3}$

等号が成り立つのは　$a=2$，$c=4-a=2$

i)，ii) より，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ は

$$\boldsymbol{a = 1+\sqrt{3},\ c = \frac{3+\sqrt{3}}{3}}\ \text{のとき，最小値}\ \boldsymbol{\frac{4+2\sqrt{3}}{3}}\ \text{をとる}$$

13.51　(1) $F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ を満たす $F(x)$，$G(x)$ をとり，

$$H(x) = F(x)+G(x),\quad h(x) = H'(x)$$

とすると，次式が成立する．

$$h(x) = H'(x) = \{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$$

上式および定積分の定義 ① により

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b h(x)\,dx &= \Big[\,H(x)\,\Big]_a^b = H(b)-H(a)\\ &= F(b)+G(b)-\{F(a)+G(a)\}\\ &= F(b)-F(a)+G(b)-G(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

(2) $G'(x)=g(x)$ を満たす $G(x)$ をとると，定積分の定義により

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(b)-G(a)$$

区間 $a \leqq x \leqq b$ において $G'(x)=g(x)>0$ より，関数 $G(x)$ はこの区間で増加するから

$$G(a) < G(b)\quad \text{ゆえに}\quad G(b)-G(a)>0$$

以上の結果から

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0$$

(3) 答 **(C)**

$f(x)$ は，区間 $\dfrac{i-1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{i}{n}$ で連続な増加関数であるから $(i = 1, 2, \cdots, n)$

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq f(x) \leqq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

性質 (C) により

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i-1}{n}\right) dx \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\, dx \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i}{n}\right) dx \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

したがって

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\, dx \leqq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(4) 答 **(B)**

S_n の定義により

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0) \\
&= S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n}
\end{aligned}$$

上式に注意すると，② より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\, dx &\leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
S_n \leqq \int_0^1 f(x)\, dx &\leqq S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n}
\end{aligned}$$

よって $\quad 0 \leqq \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx - S_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n}$

13.52 与えられた等式から

$$\int_0^2 |x^2 - 2x + a|\, dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x - a\right) dx + a^2 \quad \cdots (*)$$

したがって

$$\int_0^2 |x^2-2x+a|\,dx = \int_0^2 |(x-1)^2+a-1|\,dx$$
$$= \int_{-1}^1 |x^2+a-1|\,dx = 2\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx,$$
$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x-a\right)dx = \left[\ \frac{1}{4}x^2-ax\ \right]_0^2 = 1-2a$$

上の 2 式を $(*)$ に代入すると

$$2\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx = 1-2a+a^2 \quad \cdots(**)$$

i) $a<0$ のとき

$$\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx = -\int_0^1 (x^2+a-1)\,dx$$
$$= -\left[\ \frac{1}{3}x^3+(a-1)x\ \right]_0^1 = \frac{2}{3}-a$$

これを $(**)$ に代入すると

$$2\left(\frac{2}{3}-a\right) = 1-2a+a^2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2=\frac{1}{3}$$

$a<0$ に注意してこれを解くと　　$a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき，$t=\sqrt{1-a}$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx = \int_0^1 |x^2-t^2|\,dx$$
$$= -\int_0^t (x^2-t^2)\,dx + \int_t^1 (x^2-t^2)\,dx$$
$$= -\left[\ \frac{x^3}{3}-t^2x\ \right]_0^t + \left[\ \frac{x^3}{3}-t^2x\ \right]_t^1$$
$$= \frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3},$$
$$1-2a+a^2 = (1-a)^2 = t^4$$

これらを $(**)$ に代入すると　　$2\left(\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3}\right)=t^4$

整理すると　　$3t^4-8t^3+6t^2-2=0$

ここで，$f(t)=3t^4-8t^3+6t^2-2$ とおくと，$0<t<1$ において

$$f'(t)=12t^3-24t^2+12t=12t(t-1)^2>0$$

$f(t)$ は，$0<t<1$ で単調増加，$f(1)=-1<0$ であるから，$f(t)=0$ をみたす t $(0\leqq t\leqq 1)$ は存在しない．

iii) $a>1$ のとき

$$\int_0^1 |x^2+a-1|\,dx=\int_0^1 (x^2+a-1)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+(a-1)x\right]_0^1=a-\frac{2}{3}$$

これを $(**)$ に代入すると

$$2\left(a-\frac{2}{3}\right)=1-2a+a^2 \quad \text{整理すると} \quad 3a^2-12a+7=0$$

$a>1$ に注意してこれを解くと　　$a=\dfrac{6+\sqrt{15}}{3}$

i)〜iii) から，求める a の値は　　$\boldsymbol{a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{6+\sqrt{15}}{3}}$

13.53 (1) $f(0)=9$ より　$c=9$

$f'(x)=2ax+b$ より，恒等式の x の係数を比較して　$a=3$

したがって，$f(x)=3x^2+bx+9$．これに $x=-1$ を代入すると

$$f(-1)=3-b+9=16 \quad \text{ゆえに} \quad b=-4$$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-4x+9}$

(2) (1) の結果から，$f'(x)=6x-4$．これと恒等式の定数項を比較して

$$-9k-4+\int_0^k (3t^2-4t+9)dt=-4$$
$$-9k+\left[t^3-2t^2+9t\right]_0^k=0$$
$$k^3-2k^2=0$$

$k>0$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{k=2}$

13.54 (1) $f(x)=x^2-2x\displaystyle\int_{-2}^{1}f(t)\,dt$ より，$k=\displaystyle\int_{-2}^{1}f(t)\,dt$ とおくと

$$f(x)=x^2-2kx$$

したがって　$k=\displaystyle\int_{-2}^{1}(t^2-2kt)\,dt$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-kt^2\right]_{-2}^{1}=3k+3$$

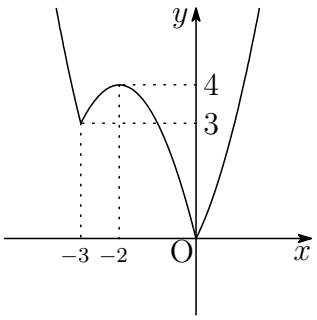
ゆえに　$k=3k+3$　これを解いて　$k=-\dfrac{3}{2}$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+3x}$

(2)　$\displaystyle\int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx=\int_{-2}^{0}(-x^2-3x)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2+3x)\,dx$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{1}=\boldsymbol{\frac{31}{6}}$$

(3) 直線 $y=x+k$ と曲線 $y=|f(x)|$ との共有点の個数は，曲線 $y=|f(x)|-x$ と直線 $y=k$ との共有点の個数に等しい．



$$y=|f(x)|-x=\begin{cases}x^2+2x & (x\leqq -3,\ 0\leqq x)\\ -x^2-4x & (-3\leqq x\leqq 0)\end{cases}$$

よって

$\boldsymbol{k<0}$ のとき	共有点 **0** 個
$\boldsymbol{k=0}$ のとき	共有点 **1** 個
$\boldsymbol{0<k<3,\ 4<k}$ のとき	共有点 **2** 個
$\boldsymbol{k=3,\ 4}$ のとき	共有点 **3** 個
$\boldsymbol{3<k<4}$ のとき	共有点 **4** 個

13.55 (1)　$f(x)=-3x^2+2x\displaystyle\int_{0}^{1}f(t)\,dt-\int_{-1}^{0}f(t)\,dt$

$A=\displaystyle\int_{0}^{1}f(t)\,dt$，$B=\displaystyle\int_{-1}^{0}f(t)\,dt$ とおくと

$$f(x)=-3x^2+2Ax-B$$

ゆえに　　$A = \displaystyle\int_0^1 (-3t^2 + 2At - B)\,dt = \Big[-t^3 + At^2 - Bt \Big]_0^1$

$= -1 + A - B$

$B = \displaystyle\int_{-1}^0 (-3t^2 + 2At - B)\,dt = \Big[-t^3 + At^2 - Bt \Big]_{-1}^0$

$= -1 - A - B$

上の 2 式から　　$A = 1,\ B = -1$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = -3x^2 + 2x + 1}$

(2) (1) の結果から　　$f'(x) = -6x + 2$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y - (-3a^2 + 2a + 1) = (-6a + 2)(x - a)$

すなわち　　$y = (-6a + 2)x + 3a^2 + 1$

これが，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るから

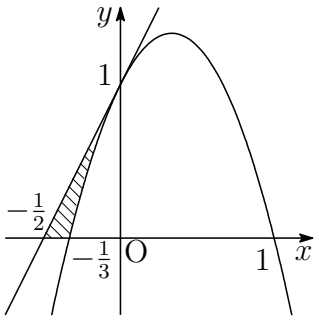
$0 = (-6a + 2)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3a^2 + 1$　ゆえに　$3a(a + 1) = 0$

$a > -\dfrac{1}{2}$ であるから　$a = 0$　よって　$\boldsymbol{y = 2x + 1}$

(3) 求める面積を S とすると

$S = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1 - \displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^0 (-3x^2 + 2x + 1)\,dx$

$= \dfrac{1}{4} - \Big[-x^3 + x^2 + x \Big]_{-\frac{1}{3}}^0 = \boldsymbol{\dfrac{7}{108}}$



13.56　(1) 等式 $f(x) = x^2 - x\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt + 2\int_1^x f'(t)\,dt$ から

$f(x) = x^2 - x\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt + 2\{f(x) - f(1)\}$

したがって　　$f(x) = -x^2 + x\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt + 2f(1)$

ここで，$a=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$，$b=f(1)$ とおくと (a，b は定数)

$$f(x)=-x^2+ax+2b$$

よって，$f(x)$ は 2 次関数である．

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}a&=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(-t^2+at+2b)\,dt\\&=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+2bt\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+2b,\\b&=f(1)=-1+a+2b\end{aligned}$$

整理すると　$a-4b=-\dfrac{2}{3}$,　$a+b=1$

これを解いて　$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$　よって　$\boldsymbol{f(x)=-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}$

13.57 (1)　$\displaystyle\int_2^x f(t)\,dt=(x-a)(x^2+x+b)\qquad\cdots(*)$

上式に $x=2$ を代入すると　$(2-a)(6+b)=0$

したがって　$a=2$　または　$b=-6$　$\cdots$①

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$$f(x)=3x^2+2(1-a)x-a+b$$

$f(-1)=4$ であるから

$$3-2(1-a)-a+b=4\quad\text{ゆえに}\quad a+b=3\quad\cdots②$$

①，② より　$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$　または　$\begin{cases}a=9\\b=-6\end{cases}$

(i) $a=2$，$b=1$ のとき　$f(x)=3x^2-2x-1$

$f(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=-\frac{1}{3},\ 1}$

(ii) $a=9$，$b=-6$ のとき　$f(x)=3x^2-16x-15$

$f(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=\dfrac{8\pm\sqrt{109}}{3}}$

(2) $a<0$ であるから，① より　$b=-6$

したがって　$y=3x^2+2(1-a)x-a-6$

これを a について整理すると

$$(2x+1)a+y-3x^2-2x+6=0$$

任意の a に対して，上式をみたす点 $(x,\ y)$ は

$$2x+1=0,\quad y-3x^2-2x+6=0$$

これを解いて　$\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2},-\frac{25}{4}}\right)$

13.58　(1) $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を x で微分すると　$F'(x)=f(x)$

条件より，$F(x)$ は $x=\pm a$ で極値をとるから

$$F'(\pm a)=0\quad \text{すなわち}\quad f(\pm a)=0$$

2 次関数 $f(x)$ は，$x+a$，$x-a$ を因数にもつから，定数 $k\neq 0$ を用いて

$$f(x)=k(x+a)(x-a)=k(x^2-a^2)$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x k(t^2-a^2)\,dt\\&=k\left[\ \frac{t^3}{3}-a^2t\ \right]_0^x=k\left(\frac{x^3}{3}-a^2x\right)\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

このとき　$F(-x)=k\left\{\dfrac{(-x)^3}{3}-a^2(-x)\right\}=-k\left(\dfrac{x^3}{3}-a^2x\right)=-F(x)$

(2) $(*)$ より　$F(a)=-\dfrac{2}{3}ka^3\quad\cdots①$

$F(x)+F(a)=0$ のとき　$k\left(\dfrac{x^3}{3}-a^2x\right)-\dfrac{2}{3}ka^3=0$

$k\neq 0$ であるから，これを整理すると

$$x^3-3a^2x-2a^3=0\quad\text{ゆえに}\quad(x+a)^2(x-2a)=0$$

よって，求める x は　$\boldsymbol{x=-a,\ 2a}$

(3) $F'(0)=f(0)$ より　$F'(0)=-ka^2$

$g(x)=\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ とおくと　$g(x)=-\dfrac{F(x)}{ka^2}$．これを微分すると

$$g'(x)=-\frac{F'(x)}{ka^2}=-\frac{f(x)}{ka^2}=-\frac{k(x+a)(x-a)}{ka^2}=-\frac{1}{a^2}(x+a)(x-a)$$

このとき，$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，求める極大値は，① により

$$g(a)=-\frac{F(a)}{ka^2}=-\frac{-\frac{2}{3}ka^3}{ka^2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}a}$$

13.59　(1) $a=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$，$b=\int_{-1}^0 f(t)\,dt$ とおくと　$f(x)=\dfrac{3a}{16}x^2-\dfrac{3b}{7}x+7$

したがって

$$\begin{aligned}a&=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\left(\frac{3a}{16}t^2-\frac{3b}{7}t+7\right)dt\\&=\left[\,\frac{a}{16}t^3-\frac{3b}{14}t^2+7t\,\right]_0^1=\frac{a}{16}-\frac{3b}{14}+7 \qquad \cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b&=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_{-1}^0\left(\frac{3a}{16}t^2-\frac{3b}{7}t+7\right)dt\\&=\left[\,\frac{a}{16}t^3-\frac{3b}{14}t^2+7t\,\right]_{-1}^0=\frac{a}{16}+\frac{3b}{14}+7 \qquad \cdots②\end{aligned}$$

①，② を解いて　$a=\dfrac{16}{3}$，$b=\dfrac{28}{3}$　よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2-4x+7}$

(2) $(x-1)g(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt-\frac{2x^3}{3}+2x^2-2x+1$ より

$$\int_0^x g(t)\,dt=(x-1)g(x)+\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x-1$$

$g(x)$ は 2 次関数であるから，$g(x)=px^2+qx+r$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_0^x g(t)\,dt&=(x-1)(px^2+qx+r)+\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x-1\\&=\left(p+\frac{2}{3}\right)x^3+(-p+q-2)x^2+(-q+r+2)x-r-1 \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$ に $x=0$ を代入すると　$0=-r-1$　ゆえに　$r=-1$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$$px^2+qx+r=(3p+2)x^2+2(-p+q-2)x+(-q+r+2)$$

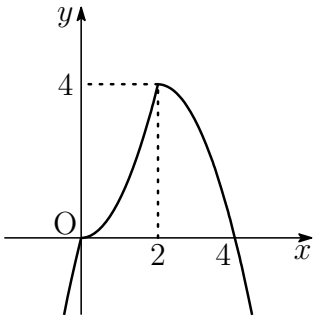
上式の両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$p=3p+2,\quad q=2(-p+q-2),\quad r=-q+r+2$$

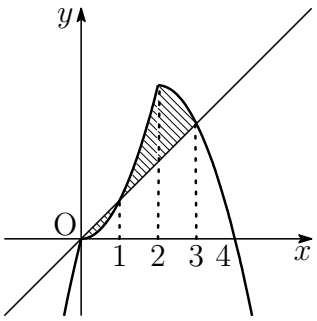
これを解いて　$p=-1$，$q=2$　よって　$\boldsymbol{g(x)=-x^2+2x-1}$

別解 (佐賀大学 2012) 7

13.60 (1) 曲線 C の概形は，次のようになる．



(2) 求める面積は，下の図の斜線部分である．



よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1(x-x^2)dx+\int_1^2(x^2-x)dx+\int_2^3\{(-x^2+4x)-x\}dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_2^3=\boldsymbol{\frac{13}{6}}$$

13.61 $C:y=(x-p)^2+q$ の頂点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は，放物線 $y=-4x^2+12x$ $(y\geqq 0)$ 上を動くので，P は x 軸の上側にあり，

$$q=-4p^2+12p\quad\cdots①$$

である．したがって，C と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた部分の面積を S とすると

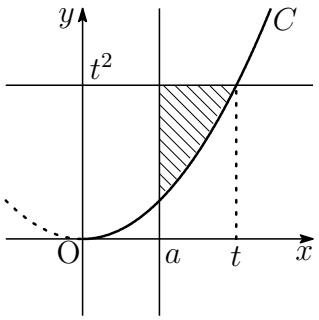
$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(x-p)^2+q\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x-p)^3+qx\ \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3}-4p+2p^2+2q \end{aligned}$$

上式に ① を代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{8}{3}-4p+2p^2+2(-4p^2+12p) \\ &= -6p^2+20p+\frac{8}{3} \\ &= -6\left(p-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{58}{3} \end{aligned}$$

よって，面積は $\boldsymbol{p=\dfrac{5}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{58}{3}}$ をとる．

13.62 (1) $S(t)$ は，右の図の斜線部分の面積である．



$$\begin{aligned} S(t) &= \int_a^t (t^2-x^2)\,dx \\ &= \left[\ t^2x-\frac{1}{3}x^3\ \right]_a^t \\ &= \frac{1}{3}(2t^3-3at^2+a^3) \\ &= \frac{1}{3}(t-a)^2(2t+a) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

① より

$$\begin{aligned} S\left(\frac{t+a}{2}\right) &= \frac{1}{3}\left(\frac{t+a}{2}-a\right)^2\left(2\cdot\frac{t+a}{2}+a\right) \\ &= \frac{1}{12}(t-a)^2(t+2a) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② より

$$\frac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)} = \frac{1}{3}(t-a)^2(2t+a)\times\frac{12}{(t-a)^2(t+2a)} = \boldsymbol{\frac{4(2t+a)}{t+2a}}$$

(2) (1) の結果から

$$8-\frac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}=8-\frac{4(2t+a)}{t+2a}=\frac{12a}{t+2a}$$

$0<a<t$ であるから　　$\dfrac{12a}{t+2a}>0$

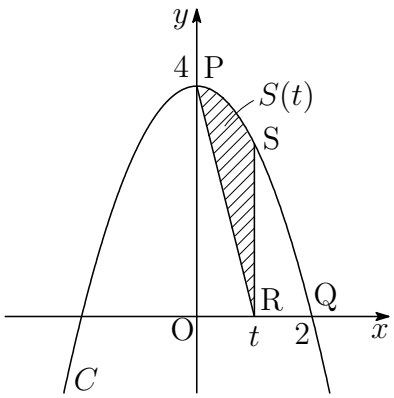
ゆえに　$8-\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}>0$　　よって　$\dfrac{S(t)}{S\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}<8$

13.63 (1) 求める面積は

$$\int_0^2(-x^2+4)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2=\mathbf{\frac{16}{3}}$$

(2) 右の図から

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_0^t(-x^2+4)\,dx-\frac{1}{2}\mathrm{OR}\cdot\mathrm{OP}\\&=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^t-\frac{1}{2}\cdot t\cdot 4\\&=-\frac{t^3}{3}+4t-2t\\&=\mathbf{-\frac{t^3}{3}+2t}\end{aligned}$$



(3) (2) の結果から

$$S'(t)=-t^2+2=-(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

したがって，$S(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	0	↗	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$	↘	$\frac{4}{3}$

よって，$\boldsymbol{t=\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\mathbf{\dfrac{4\sqrt{2}}{3}}$ をとる．

13.64 (1) $y=4x^2+3$ を微分すると　$y'=8x$

点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ における接線 l の傾きは $8p$ であるから，その方程式は

$$y-(4p^2+3)=8p(x-p)$$

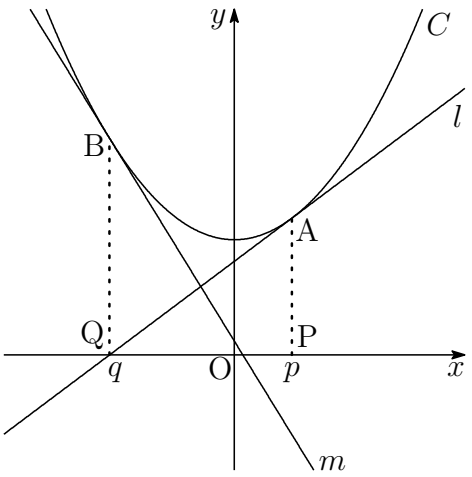
すなわち　$y=8px-4p^2+3$

l は $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4p^2+3 \quad \cdots ①$$

$p\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{q=\dfrac{4p^2-3}{8p}}$$



(2) 点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における接線 m の方程式は，(1) と同様にして

$$y=8qx-4q^2+3$$

を得る．これが点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4q^2+3 \quad \cdots ②$$

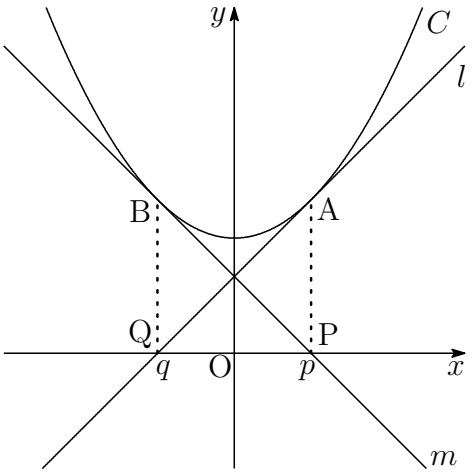
①，② より　$q=\pm p$

$q=p$ のとき，① より

$4p^2+3=0$ となり，不適

$q=-p$ のとき，① より

$0=-12p^2+3$



となり，これを解いて　$\boldsymbol{(p,\ q)=\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \mp\dfrac{1}{2}\right)}$ **(複号同順)**

(3) (2) の結果から，2 本の接線の方程式は　$y=4x+2$，$y=-4x+2$

これらの接線と放物線で囲まれた部分は，y 軸に関して対称であるから，求める面積 S は

$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\{(4x^2+3)-(4x+2)\}\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

13.65 (1) $y=-x^2+2x-\frac{1}{2}$ を微分すると　$y'=-2x+2$

点 $\mathrm{A}\left(t,-t^2+2t-\frac{1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y-\left(-t^2+2t-\frac{1}{2}\right)=(-2t+2)(x-t)$$

すなわち　$y=(-2t+2)x+t^2-\dfrac{1}{2}$

l と C_1 の交点の x 座標は

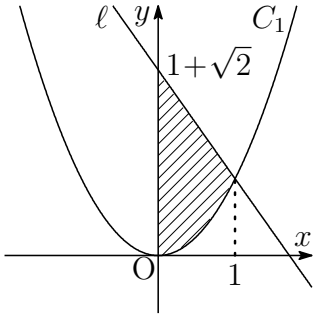
$$x^2=(-2t+2)x+t^2-\frac{1}{2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{x=-t+1\pm\frac{|2t-1|}{\sqrt{2}}}$$

(2) $t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，ℓ の方程式は，(1) の結果から　$y=-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}$

また，ℓ と C_1 の交点の x 座標は　$x=1,\ -1-\sqrt{2}$

右の図から，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\{(-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2})-x^2\}dx\\&=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+(1+\sqrt{2})x\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$



13.66　(1) $f(x)=-x^2+2x+3$，$g(x)=x^2-2(a-1)x+3$．$f(x)=g(x)$ とすると

$$-x^2+2x+3=x^2-2(a-1)x+3\quad \text{ゆえに}\quad x(x-a)=0$$

よって　　$\boldsymbol{(0,\ 3),\ (a,\ -a^2+2a+3)}$

(2) $S=\displaystyle\int_0^a\{f(x)-g(x)\}\,dx=-2\int_0^a x(x-a)\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}a^3}$

(3) A$(0,\ 3)$，B$(a,\ -a^2+2a+3)$ とし，C$(1,\ 4)$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ -a^2+2a),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1)$$

$a>1$ に注意して　$T=\dfrac{1}{2}|a\cdot1-(-a^2+2a)\cdot1|=\dfrac{1}{2}|a(a-1)|=\dfrac{1}{2}a(a-1)$

$$k=\frac{S}{T}=\frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}a(a-1)}=\frac{2a^2}{3(a-1)}=\frac{2}{3}\left(a-1+\frac{1}{a-1}+2\right)$$

ここで，$a-1>0$ より，相加平均・相乗平均の関係により

$$a-1+\frac{1}{a-1}\geqq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}=2\quad \text{ゆえに}\quad k\geqq\frac{8}{3}$$

上式において等号が成立するのは

$$a-1=\frac{1}{a-1} \quad \text{すなわち} \quad a=2$$

よって，$\boldsymbol{a=2}$ のとき k は最小値 $\boldsymbol{\frac{8}{3}}$ をとる．

13.67 (1) C 上の点を $\mathrm{X}(t,\ at^2)$ とすると $(t \geqq 0)$

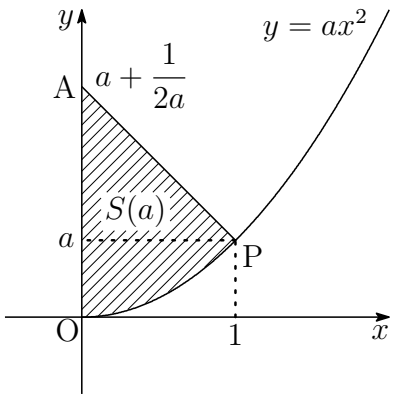
$$\begin{aligned}\mathrm{AX}^2 &= t^2+\left\{at^2-\left(a+\frac{1}{2a}\right)\right\}^2\\ &= a^2t^4-2a^2t^2+\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2\\ &= a^2(t^2-1)^2+1+\frac{1}{4a^2}\end{aligned}$$

AX^2 は，$t^2=1$ すなわち $t=1$ のとき，AX^2 は最小値 $1+\frac{1}{4a^2}$ をとる．

よって $\quad \boldsymbol{\mathrm{P}(1,\ a),\ \mathrm{AP}=\sqrt{1+\frac{1}{4a^2}}}$

(2) $S(a)=\frac{1}{2}\left\{a+\left(a+\frac{1}{2a}\right)\right\}\times 1-\int_0^1 ax^2\,dx$

$$\begin{aligned}&=a+\frac{1}{4a}-\frac{a}{3}\\ &=\boldsymbol{\frac{2a}{3}+\frac{1}{4a}}\end{aligned}$$



(3) $a>0$ より，$\frac{2a}{3}>0$，$\frac{1}{4a}>0$ であるから，
相加平均および相乗平均の関係により

$$\frac{2a}{3}+\frac{1}{4a} \geqq 2\sqrt{\frac{2a}{3}\cdot\frac{1}{4a}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号が成り立つのは $\quad \frac{2a}{3}=\frac{1}{4a} \quad$ すなわち $\quad a=\frac{\sqrt{6}}{4}$ のときに限る．

よって，$S(a)$ は，$\boldsymbol{a=\frac{\sqrt{6}}{4}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$ をとる．

13.68 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

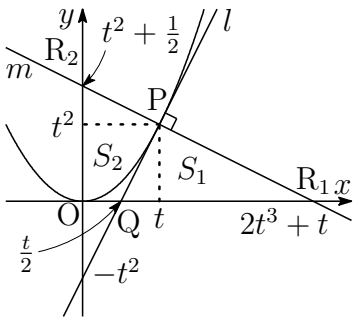
P$(t,\ t^2)$ における接線 l の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

ゆえに　　$y = 2tx - t^2$

Q の x 座標は，これに $y = 0$ を代入して

$$\boldsymbol{x = \frac{t}{2}}$$



P$(t,\ t^2)$ を通り，l に垂直な直線 m の方程式は

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

R_1 の x 座標は，これに $y = 0$ を代入して　$\boldsymbol{x = 2t^3 + t}$

(2) S_2 は，$0 \leqq x \leqq t$ において，m と C で囲まれた部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}\left\{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) + t^2\right\} \times t - \int_0^t x^2\,dx \\ &= t^3 + \frac{t}{4} - \frac{t^3}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t} \end{aligned}$$

(3) $S_1 = \frac{1}{2}\left\{(2t^3 + t) - \frac{t}{2}\right\} \times t^2 = t^5 + \frac{1}{4}t^3$

これと (2) の結果から

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \left(t^5 + \frac{1}{4}t^3\right) - \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t\right) \\ &= \frac{t}{12}(12t^4 - 5t^2 - 3) \\ &= \frac{t}{12}(3t^2 + 1)(4t^2 - 3) \\ &= \frac{t}{12}(3t^2 + 1)(2t + \sqrt{3})(2t - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$t > 0$ であるから，$S_1 > S_2$ が成り立つとき

$$\frac{t}{12}(3t^2 + 1)(2t + \sqrt{3})(2t - \sqrt{3}) > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t > \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

13.69 (1) $f(x) = g(x)$　すなわち　$x^2 = |2x^2 - 4|$

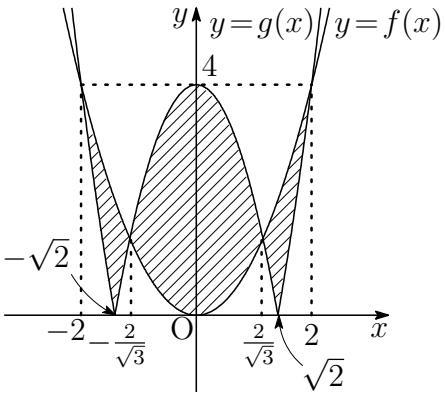
ゆえに　　$2x^2 - 4 = \pm x^2$

したがって　　$2x^2-4=x^2$　　を解いて　$x=\pm 2$

$2x^2-4=-x^2$　を解いて　$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって　　$\boldsymbol{x=\pm 2,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(2) $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$ が成り立つので，右の図のように $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフは，ともに y 軸に関して対称である．



したがって，求める面積を S とすると，(1) で求めた結果により

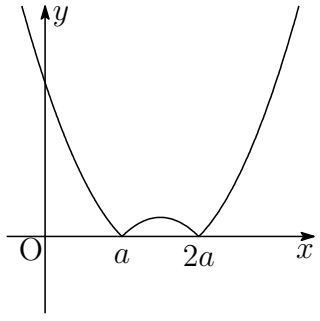
$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\{(4-2x^2)-x^2\}\,dx+\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\{x^2-(4-2x^2)\}\,dx\\&\qquad+\int_{\sqrt{2}}^{2}\{x^2-(2x^2-4)\}\,dx\\&=\left[-x^3+4x\right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}+\left[x^3-4x\right]_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}+\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{\sqrt{2}}^{2}\\&=\frac{32\sqrt{3}}{9}-\frac{16\sqrt{2}}{3}+\frac{16}{3}\end{aligned}$$

よって　　$S=\boldsymbol{\dfrac{64\sqrt{3}}{9}-\dfrac{32\sqrt{2}}{3}+\dfrac{32}{3}}$

13.70 $x^2-3ax+2a^2$ の原始関数の 1 つを $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}ax^2+2a^2x$ とおく．

i) $1\leqq a$ のとき

$$\begin{aligned}I(a)&=\int_0^1(x-a)(x-2a)\,dx\\&=F(1)-F(0)=2a^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}\\I'(a)&=4a-\frac{3}{2}>0\end{aligned}$$



ii) $a < 1 \leqq 2a$ すなわち $\dfrac{1}{2} \leqq a < 1$ のとき

$$I(a) = \int_0^a (x-a)(x-2a)\,dx - \int_a^1 (x-a)(x-2a)\,dx$$
$$= 2F(a) - F(0) - F(1) = \frac{5}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{1}{3}$$
$$I'(a) = 5a^2 - 4a + \frac{3}{2} = 5\left(a - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{7}{10} > 0$$

iii) $0 < 2a \leqq 1$ すなわち $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$I(a) = \int_0^a (x-a)(x-2a)\,dx - \int_a^{2a} (x-a)(x-2a)\,dx$$
$$+ \int_{2a}^1 (x-a)(x-2a)\,dx$$
$$= 2F(a) - F(2a) - F(0) + F(1) = \frac{1}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3}$$
$$I'(a) = a^2 + 4a - \frac{3}{2}$$

このとき，$I'(a) = 0$ となるのは　　$a = \dfrac{-4+\sqrt{22}}{2}$

i)〜iii) より $I(a)$ の増減表は右のようになる．したがって，$I(a)$ が最小となる a の値は

a	(0)	$\cdots$	$\frac{-4+\sqrt{22}}{2}$	$\cdots$
$I'(a)$		$-$	0	$+$
$I(a)$		↘	極小	↗

$$\boldsymbol{a = \frac{-4+\sqrt{22}}{2}}$$

13.71　(1) $y = x^2$ を微分すると　　$y' = 2x$

C_1 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

l と $C_2 : y = x^2 - 1$ の共有点の x 座標は

$$2ax - a^2 = x^2 - 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = a \pm 1$$

求める面積は

$$\int_{a-1}^{a+1} \{(2ax - a^2) - (x^2 - 1)\}\,dx = -\int_{a-1}^{a+1} (x-a+1)(x-a-1)\,dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a+1) - (a-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

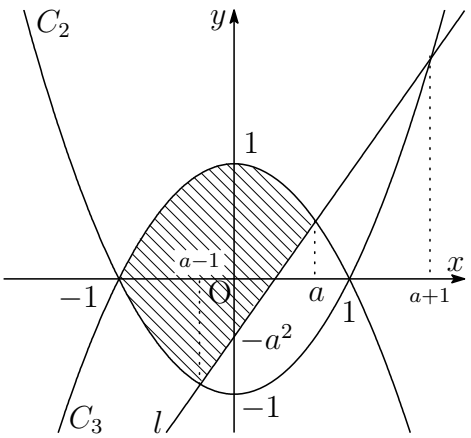
(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，l の方程式は

$$l : y=\sqrt{2}x-\frac{1}{2}$$

l と C_3 の共有点の x 座標は

$$\sqrt{2}x-\frac{1}{2}=-x^2+1$$

ゆえに　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(=a),\ -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$



$f(x)=-x^2+1$ とし，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x$ とする．

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S&=2\int_{-1}^{a-1}f(x)\,dx+\int_{a-1}^{a}\{f(x)-(2ax-a^2)\}\,dx\\
&=2\Big[\,F(x)\,\Big]_{-1}^{a-1}+\Big[\,F(x)\,\Big]_{a-1}^{a}+\Big[-ax^2+a^2x\Big]_{a-1}^{a}\\
&=F(a)+F(a-1)-2F(-1)-a^2+a\\
&=-\frac{1}{3}a^3+a-\frac{1}{3}(a-1)^3+a-1-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)-a^2+a\\
&=-\frac{2}{3}a^3+2a+\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

このとき，$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　　$\boldsymbol{S=\dfrac{5\sqrt{2}+4}{6}}$

13.72　(1) $\mathrm{P}(\cos\theta,\ a+\sin\theta)$ が $y\geqq x^2$ の表す領域にあるとき

$$a+\sin\theta\geqq\cos^2\theta\quad\text{ゆえに}\quad\sin^2\theta+\sin\theta+a-1\geqq0$$

したがって　　$\left(\sin\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2+a-\dfrac{5}{4}\geqq0\quad\cdots(*)$

$180^\circ\leqq\theta\leqq360^\circ$ であるから

$$-1\leqq\sin\theta\leqq0\quad\text{ゆえに}\quad0\leqq\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{1}{4}$$

上式から，$(*)$ を常にみたす a の値の範囲は

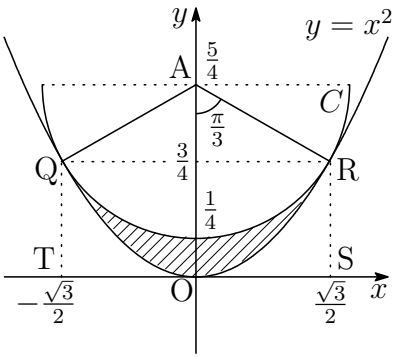
$$a-\frac{5}{4}\geqq0\quad\text{よって}\quad a\geqq\frac{5}{4}$$

(2) $a=\dfrac{5}{4}$ のとき，C の方程式は

$$x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=1 \quad \left(y\leqq\frac{5}{4}\right)$$

これと $y=x^2$ から x^2 を消去すると

$$\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=0$$



ゆえに，C と放物線 $y=x^2$ は，次の 2 点で，右の図のように接する．

$$\mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$$

$\angle\mathrm{QAR}=\dfrac{2}{3}\pi$ より，C と直線 QR で囲まれ部分の面積を S_1 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\triangle\mathrm{AQR}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

四角形 QRST の面積が $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{3}{4}\sqrt{3}-S_1-2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2\,dx\\&=\frac{3}{4}\sqrt{3}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-2\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

13.73 (1) $f'(x)$ は 2 次式で，$f'(-1)=f'(1)=0$ であるから

$$f'(x)=3a(x+1)(x-1)=3ax^2-3a$$

とおくと (a は定数)

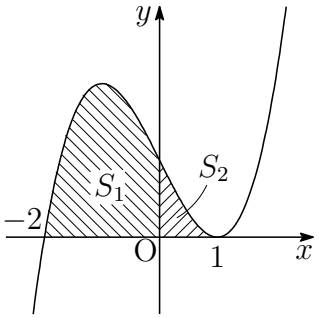
$$f(x)=ax^3-3ax+b\quad(b\text{ は定数})$$

また，$f(1)=0$ であるから　$-2a+b=0$

したがって　$f(x)=a(x^3-3x+2)=a(x-1)^2(x+2)$

よって　　$\boldsymbol{f(-2)=0}$

(2) (1) の結果から



$$S_1 : S_2 = \int_{-2}^{0} (x^3-3x+2)\,dx : \int_{0}^{2} (x^3-3x+2)\,dx$$

したがって

$$\int_{-2}^{0} (x^3-3x+2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{0}$$
$$= 6$$
$$\int_{0}^{1} (x^3-3x+2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{0}^{1}$$
$$= \frac{3}{4}$$

ゆえに　$S_1 : S_2 = 6 : \dfrac{3}{4} = 8 : 1$　　よって　$\boldsymbol{\dfrac{S_1}{S_2} = 8}$

13.74　(1) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ と $y=x-2$ から y を消去すると

$$(x-1)^2+\{(x-2)-1\}^2=2 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2=0$$

ゆえに，$x=2$ で重解をもち，このとき $y=x-2$ より $y=0$
よって，直線 $y=x-2$ は円 C に点 $\mathbf{(2,\ 0)}$ で接する．

(2) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ と $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ から y を消去し，整理すると

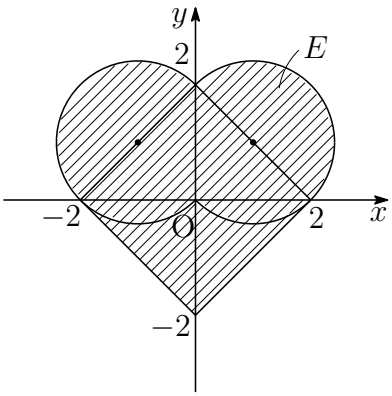
$$x^4-32x+48=0 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2\{(x+2)^2+8\}=0$$

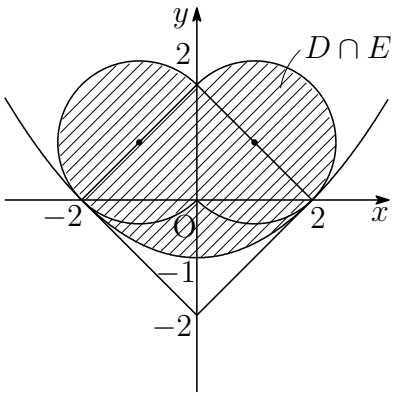
ゆえに，$x=2$ で 2 重解をもち，このとき $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ より $y=0$
よって，求める共有点の座標は　$\mathbf{(2,\ 0)}$

(3) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，A の表す領域は，x 軸，y 軸および直線 $x+y=2$ で囲まれた図形の内部および境界線である．このとき，$(x,\ y)$ に対して，x 軸，y 軸，原点に関して，それぞれ対称な点 $(x, -y)$，$(-x,\ y)$，$(-x, -y)$ も不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ をみたす．したがって，A の表す領域は，4 点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(-2,\ 0)$，$(0, -2)$ を頂点とする四角形の内部およびその周上である．

$x \geqq 0$ のとき，B の表す領域は，y 軸の右側で，円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ の内部とその境界線である．このとき，$(x,\ y)$ に対して，y 軸と対称な点 $(-x,\ y)$ も不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ をみたす．

したがって，$A \cup B$ の表す領域 E および $D \cap E$ の表す領域は，次のようになる．ただし，境界線を含む．





3 点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(-2,\ 0)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4$$

放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の x 軸の下側の部分の面積は

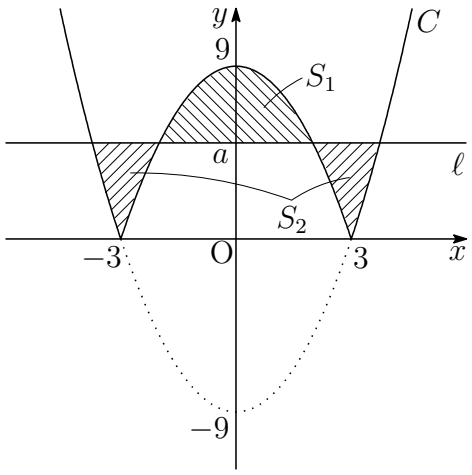
$$-\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)dx = \frac{8}{3}$$

2 点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$ を直径とする円の半径は $\sqrt{2}$ である．

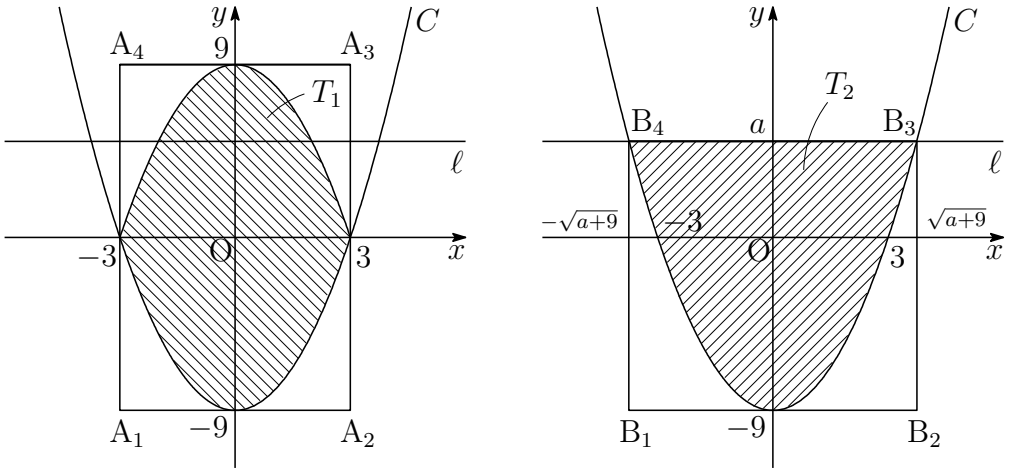
よって，求める面積は

$$4+\frac{8}{3}+\pi(\sqrt{2})^2 = \boldsymbol{\frac{20}{3}+2\pi}$$

13.75 S_1，S_2 は下の図の斜線部分の面積である．



$S_1 = S_2$ のとき，下の 2 つ図の斜線部分の面積 $T_1,\ T_2$ について，$T_1 = T_2$ である．



$T_1,\ T_2$ は，それぞれ図の長方形 $A_1A_2A_3A_4$，$B_1B_2B_3B_4$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ であるから，このとき，これら 2 つの長方形の面積は等しい．

$$6 \times 18 = 2\sqrt{a+9} \times (a+9) \quad \text{ゆえに} \quad (a+9)^{\frac{3}{2}} = 2{\cdot}3^3$$

したがって　$a + 9 = 2^{\frac{2}{3}}{\cdot}3^2$　よって　$\boldsymbol{a = 9(\sqrt[3]{4} - 1)}$

補足 下の fig-1 について，2 つの面積 S_1 と S_2 の面積比を考える．

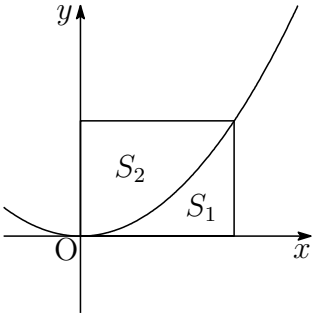


fig-1

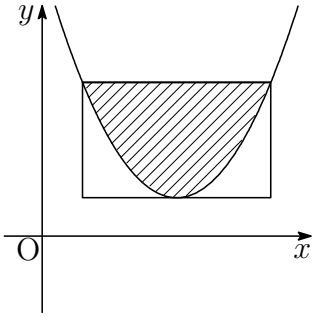


fig-2

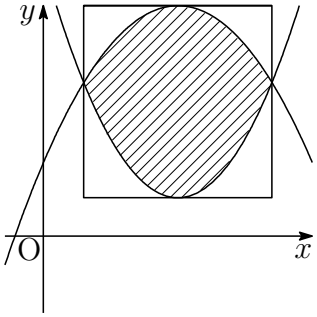


fig-3

S_1 を放物線 $y = kx^2$ と直線 $x = a$ と x 軸で囲まれた部分の面積とすると

$$S_1 = \int_0^a kx^2\,dx = k\left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_0^a = \frac{1}{3}ka^3 \qquad (k, a > 0)$$

$S_1 + S_2$ は x 軸，y 軸，直線 $x = a$，直線 $y = ka^2$ で囲まれた部分の面積であるから

$$S_1 + S_2 = a{\cdot}ka^2 = ka^3 \quad \text{上の結果から} \quad S_2 = \frac{2}{3}ka^3 \quad \text{よって} \quad S_1 : S_2 = 1 : 2$$

fig-2 の放物線は fig-1 の放物線を平行移動したものとする．fig-2 の放物線の軸に関する対称性により，斜線部の面積は長方形の面積の 2/3 であることがわかる．

さらに，fig-2 の面積比を利用すると，fig-3 における斜線部分の面積も長方形の面積の 2/3 であることもわかる．

13.76 (1) $$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx \\ &= \left[\,\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\,\right]_\alpha^\beta \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}\end{aligned}$$

(2) L は点 $(1,\ 2)$ を通り，傾き a の直線であるから

$$y - 2 = a(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = ax - a + 2$$

L と放物線 $y=x^2$ の方程式から y を消去して

$$x^2=ax-a+2 \quad \text{すなわち} \quad x^2-ax+a-2=0 \quad \cdots(*)$$

求める共有点の x 座標は，$(*)$ を解いて $\quad \boldsymbol{x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4a+8}}{2}}$

(3) 2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-4a+8}}{2}-\frac{a-\sqrt{a^2-4a+8}}{2}=\sqrt{a^2-4a+8}$$

L と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S&=\int_{\alpha}^{\beta}(ax-a+2-x^2)\,dx \\ &=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{a^2-4a+8}\,)^3 \end{aligned}$$

ここで $\qquad a^2-4a+8=(a-2)^2+4$

よって，S は，$\boldsymbol{a=2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ をとる．

13.77 (1) $C:y=f(x)=x^2-2x+1$ と $l:y=x+k$ から y を消去すると

$$x^2-2x+1=x+k \quad \text{ゆえに} \quad x^2-3x+1-k=0 \quad \cdots①$$

C と l は異なる 2 点で交わるから，2 次方程式 ① の判別式 D は

$$D=(-3)^2-4\cdot1(1-k)>0 \quad \text{すなわち} \quad k>-\frac{5}{4} \quad \cdots②$$

また，共有点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，2 次方程式 ① の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=3, \quad \alpha\beta=1-k \quad \cdots③$$

$f(x)$ を微分すると $\qquad f'(x)=2(x-1)$

このとき，$f'(\alpha)f'(\beta)=-1$ であるから

$$2(\alpha-1)\cdot2(\beta-1)=-1 \quad \text{ゆえに} \quad 4\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\}=-1$$

上式に ③ を代入すると $\qquad 4(1-k-3+1)=-1$

② に注意してこれを解くと $\qquad \boldsymbol{k=-\dfrac{3}{4}}$

(2) $k=-\dfrac{3}{4}$ のとき，① は　　$x^2-3x+\dfrac{7}{4}=0$

これを解いて　　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{2}$　　また　$y=\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3\pm2\sqrt{2}}{4}$

よって，2 点 P，Q の座標は

$$\left(\frac{\boldsymbol{3-\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}},\ \frac{\boldsymbol{3-2\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}\right),\quad \left(\frac{\boldsymbol{3+\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}},\ \frac{\boldsymbol{3+2\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}\right)$$

(3) (1)，(2) から　　$\beta-\alpha=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)-(x^2-2x+1)\right\}dx\\&=-\int_\alpha^\beta\left(x^2-3x+\frac{7}{4}\right)dx\\&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{2})^3=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}}\end{aligned}$$

13.78　(1) 2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ の共有点の x 座標は

$$x^2=-x^2+2ax+\frac{1}{2a^2}\quad\text{ゆえに}\quad 2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2}=0\quad\cdots(*)$$

方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=(-a)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2a^2}\right)=a^2+\frac{1}{a^2}>0$$

よって，2 つの放物線は，異なる 2 点で交わる．

(2) 方程式 $(*)$ の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{4a^2}\quad\cdots(**)$

したがって　　$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=a^2-4\left(-\frac{1}{4a^2}\right)=a^2+\frac{1}{a^2}\end{aligned}$

$\alpha<\beta$ より，$\beta-\alpha>0$ であるから　　$\boldsymbol{\beta-\alpha=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}}$

(3) (∗)，(∗∗) より

$$\begin{aligned} 2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2} &= 2\left(x^2-ax-\frac{1}{4a^2}\right) \\ &= 2\left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\} \\ &= 2(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned}$$

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ は $y=x^2$ の上側にあるから

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left\{\left(-x^2+2ax+\frac{1}{2a^2}\right)-x^2\right\}dx \\ &= -\int_\alpha^\beta \left(2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2}\right)dx \\ &= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -2\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(4) 相加平均・相乗平均の関係により

$$a^2+\frac{1}{a^2} \geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}} = 2$$

上式において等号が成立するのは　$a^2=\dfrac{1}{a^2}$　すなわち　$a=\pm 1$

したがって　　$S=\dfrac{1}{3}\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \geqq \dfrac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$a=\pm 1$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ をとる．

13.79 (1) $f(x)=x^3-ax^2+bx+3$ より　$f'(x)=3x^2-2ax+b$

$f'(x)=0$ の解が $-\dfrac{2}{3}$，2 であるから，解と係数の関係により

$$-\frac{2}{3}+2=\frac{2a}{3},\quad -\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{b}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=2,\ b=-4}$$

すなわち　　$f(x)=x^3-2x^2-4x+3$

$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{121}{27}$	$\searrow$	-5	$\nearrow$

よって　$\begin{cases} \textbf{極大値}\ \boldsymbol{\frac{121}{27}} & \boldsymbol{(x=-\frac{2}{3})} \\ \textbf{極小値}\ \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{(x=2)} \end{cases}$

(2)　$f'(x)+\dfrac{7}{3}=3x^2-4x-\dfrac{5}{3}=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{5}{3}\right)$

求める面積を S とすると

$$S=-\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}3\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)dx=\frac{3}{6}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\right)^3=\boldsymbol{4}$$

13.80　(1)　$y=-x^2+6x-7=-(x-3)^2+2$　よって　$\boldsymbol{A(3,\ 2)}$

(2)　l は 2 点 A$(3,\ 2)$，B$(1,-2)$ を通る直線であるから

$$y-2=\frac{-2-2}{1-3}(x-3)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=2x-4}$$

(3)　$y=ax^2+bx+c$ が 2 点 A$(3,\ 2)$，B$(1,-2)$ を通るから

$$2=9a+3b+c,\quad -2=a+b+c$$

よって　$\boldsymbol{b=-4a+2,\ c=3a-4}$

(4)　$C_2:y=ax^2+(-4a+2)x+(3a-4)$ と $l:y=2x-4$ で囲まれた図形の面積を S とすると，$a>0$ より

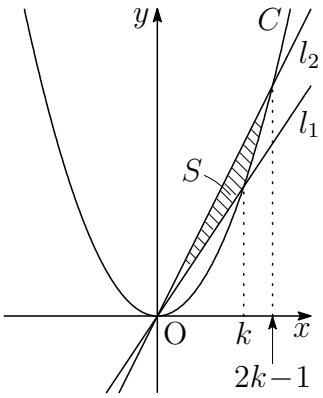
$$\begin{aligned} S&=\int_1^3[2x-4-\{ax^2+(-4a+2)x+(3a-4)\}]dx \\ &=-a\int_1^3(x^2-4x+3)dx \\ &=-a\int_1^3(x-1)(x-3)dx \\ &=-a\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}a} \end{aligned}$$

13.81　(1)　$C:y=x^2$，$l_1:y=kx$，$l_2:y=(2k-1)x$ とする．

C と l_1 の交点の x 座標は　$0,\ k$
C と l_2 の交点の x 座標は　$0,\ 2k-1$

$k>1$ より　$(2k-1)-k=k-1>0$

ゆえに　　$2k-1>k$



C と l_1 で囲まれた部分の面積を S_1，C と l_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_1=\frac{1}{6}k^3,\quad S_2=\frac{1}{6}(2k-1)^3$$

求める面積は，右の図の斜線部分で

$$\begin{aligned}S=S_2-S_1&=\frac{1}{6}(2k-1)^3-\frac{1}{6}k^3\\&=\boldsymbol{\frac{7}{6}k^3-2k^2+k-\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{dS}{dk}=\frac{7}{2}k^2-4k+1=\frac{7}{2}(k-1)^2+3(k-1)+\frac{1}{2}$$

$k>1$ のとき，$\dfrac{dS}{dk}>0$ であるから，S は k に関して単調に増加する．

(3) $6S<6k^3-7k^2+1$ に (1) の結果を代入すると

$$6\left(\frac{7}{6}k^3-2k^2+k-\frac{1}{6}\right)<6k^3-7k^2+1$$

整理すると　　$k^3-5k^2+6k-2<0$

ゆえに　　$(k-1)(k-2+\sqrt{2})(k-2-\sqrt{2})<0$

$k>1$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{1<k<2+\sqrt{2}}$

13.82　(1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線 l_1 の傾きは　$2a$

l_1 に垂直な直線 l_2 の傾きは $-\dfrac{1}{2a}$ であるから，l_2 の方程式は

$$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)$$

l_2 と C の方程式から y を消去すると

$$x^2-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)\quad\text{ゆえに}\quad(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)=0$$

P と異なる Q の x 座標は　$x=-a-\dfrac{1}{2a}$　また y 座標は　$y=\left(a+\dfrac{1}{2a}\right)^2$

よって，Q の座標は　$\boldsymbol{\left(-a-\dfrac{1}{2a},\ \left(a+\dfrac{1}{2a}\right)^2\right)}$

(2) $-a-\dfrac{1}{2a}\leqq x\leqq a$ において，直線 $l_2: y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$ は，放物線 $C: y=x^2$ の上側にある．したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-a-\frac{1}{2a}}^{a}\left\{-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2-x^2\right\}dx\\&=-\int_{-a-\frac{1}{2a}}^{a}(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)dx\\&=\frac{1}{6}\left\{a-\left(-a-\frac{1}{2a}\right)\right\}^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^3}\end{aligned}$$

(3) $2a>0$，$\dfrac{1}{2a}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

上式において，等号が成り立つのは

$$2a=\frac{1}{2a}\quad\text{すなわち}\quad a=\frac{1}{2}$$

のときである．

よって，S の最小値は　$\dfrac{1}{6}\cdot 2^3=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$　そのときの a の値は　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

13.83 (1) 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(a+2,\ (a+2)^2)$ を通る直線の方程式は

$$y-a^2=\frac{(a+2)^2-a^2}{(a+2)-a}(x-a)$$

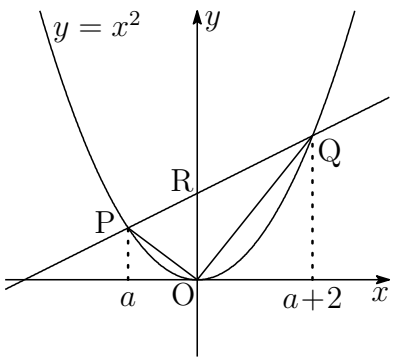
すなわち　$y=2(a+1)x-a(a+2)$

この直線と y 軸の交点を R とすると，$-2<a<0$ より

$$\mathrm{OR}=-a(a+2)$$

ゆえに，△OPQ の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{OR}\times\{(a+2)-a\}=\frac{1}{2}\{-a(a+2)\}\times 2=\boldsymbol{-a(a+2)}$$



(2) 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積は，上の図から

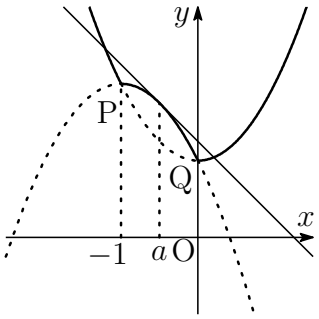
$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^{a+2} \{2(a+1)x - a(a+2) - x^2\}\,dx \\ &= -\int_a^{a+2} (x-a)\{x-(a+2)\}\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a+2)-a\}^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

(3) $S_2 = 2S_1$ に (1)，(2) の結果を代入すると

$$\frac{4}{3} = -2a(a+2) \quad \text{ゆえに} \quad 3a^2+6a+2=0$$

$-2 < a < 0$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}}$

13.84 (1)



i) $x(x+1) \geqq 0$　すなわち

$x \leqq -1$，$0 \leqq x$ のとき

$f(x) = x(x+1) - x + 1 = x^2 + 1$

ii) $x(x+1) < 0$　すなわち

$-1 < x < 0$ のとき

$f(x) = -x(x+1) - x - 1 = -x^2 - 2x + 1$

i)，ii) より，曲線 C は右の図のようになる．

直線 PQ の傾きは　$\dfrac{1-2}{0-(-1)} = -1$

$f'(x) = -2x - 2$ より点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ の傾きは　$-2a-2$

この点における接線が直線 PQ に平行であるから

$$-2a - 2 = -1$$

$-1 < a < 0$ に注意して　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2}}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{4}$ より，接線 ℓ の方程式は

$$y - \frac{7}{4} = -\left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -x + \frac{5}{4}}$$

(2) 求める面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^{0} \{(-x^2-2x+1)-(x^2+1)\}\,dx \\ &= -2\int_{-1}^{0}(x+1)x\,dx = -2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{0-(-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) 曲線 C と接線 ℓ の接点以外の交点の x 座標は

$$x^2+1=-x+\frac{5}{4} \quad \text{すなわち} \quad x^2+x-\frac{1}{4}=0 \quad \cdots ①$$

の解である．この解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおき，求める面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta}\left\{\left(-x+\frac{5}{4}\right)-(x^2+1)\right\}dx - S_1 \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta}\left(x^2+x-\frac{1}{4}\right)dx - \frac{1}{3} \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

① の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{4}$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=2$$

$\alpha<\beta$ より $\beta-\alpha=\sqrt{2}$ であるから

$$S_2=\frac{1}{6}(\sqrt{2})^3-\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$$

13.85 (1) $f(t)=2t^3-3(a+1)t^2+6at+b$ より

$$f'(t)=6t^2-6(a+1)t+6a=6(t-1)(t-a)$$

$a>1$ より，$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$3a+b-1$	↘	$-a^3+3a^2+b$	↘

よって　$t=1$ のとき極大値 $\boldsymbol{3a+b-1}$，
$t=a$ のとき極小値 $\boldsymbol{-a^3+3a^2+b}$

(2) 方程式 $f(t)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつのは，(1) の結果から

$$-a^3+3a^2+b<0<3a+b-1 \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} b>-3a+1 \\ b<a^3-3a^2 \end{cases}$$

である $(a>1)$．xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在する領域 D を表す不等式は

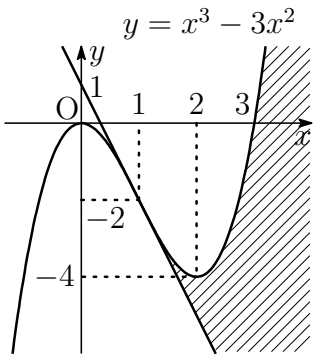
$$x>1, \quad y>-3x+1, \quad y<x^3-3x^2$$

ここで，$y=-3x+1\cdots$①，$y=x^3-3x^2\cdots$② とおくと，② から

$$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$$

これから，② の増減表，次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗



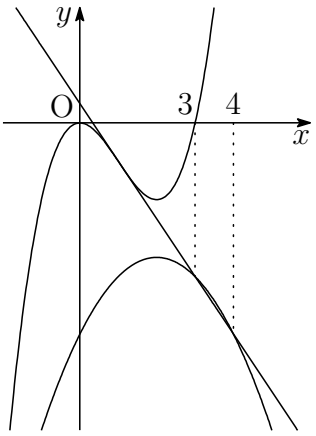
①，② から y を消去すると

$$x^3-3x^2=-3x+1$$
$$(x-1)^3=0$$
$$x=1 \ (3\text{ 重解})$$

ゆえに ①，② の共有点は　　$(1,-2)$
よって，D の表す領域は右の図の斜線部分で，
境界線を含まない．

(3) $y = -x^2 + 4x - 11 \quad \cdots ③$

$= -(x-2)^2 - 7$



ゆえに，$x > 1$ において，② と ③ の共有点はない．① と ③ の共有点の x 座標は

$$-3x + 1 = -x^2 + 4x - 11$$
$$(x-3)(x-4) = 0$$
$$x = 3,\ 4$$

よって，求める面積を S とすると

$$S = \int_3^4 \{(-x^2 + 4x - 11) - (-3x + 1)\}dx$$
$$= -\int_3^4 (x-3)(x-4)dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)(4-3)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

解説 (長崎大学 2010) 1

13.86 (1) $x \geqq -1$ のとき　$f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 3$，$f'(x) = -x + 2$

ℓ の方程式は $(t > -1)$，$t \neq 2$ のとき　$y - f(t) = -\dfrac{1}{f'(t)}(x - t)$

ゆえに　$y - \left(-\dfrac{1}{2}t^2 + 2t + 3\right) = -\dfrac{1}{-t+2}(x - t)$

よって　$t \neq 2$ のとき　$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{t-2}(x-t) - \dfrac{1}{2}t^2 + 2t + 3}$

$t = 2$ のとき　$\boldsymbol{x = 2}$

(2) $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ であるから，ℓ が $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{t-2}(-1-t) - \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3$$

整理すると　$t^3 - 6t^2 + 5t + 12 = 0$　ゆえに　$(t+1)(t-3)(t-4) = 0$

これを満たす t の中で $(t > -1)$，最小の t の値は　$\boldsymbol{t = 3}$

(3) $t = 3$ を (1) の結果に代入すると　$\ell : y = x + \dfrac{3}{2}$

$C : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2|x+1| + 1$ は

$$x \leqq -1 \text{ のとき} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$$
$$x \geqq -1 \text{ のとき} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$$

ℓ と C の共有点の x 座標は

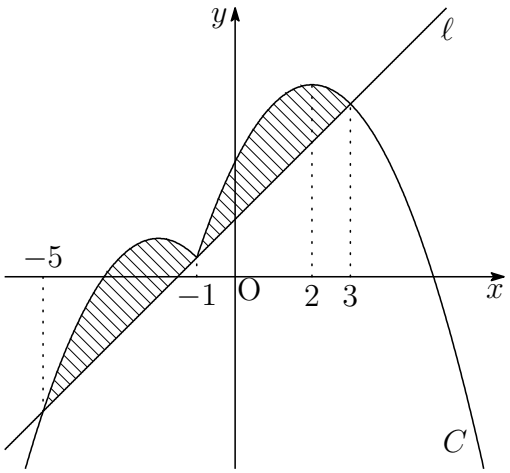
$x \leqq -1$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = x + \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = -5, -1$$

$x \geqq -1$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = x + \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = -1,\ 3$$

ℓ と C で囲まれた部分は，下の図の斜線部分である．



したがって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-5}^{-1} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 \right) - \left(x + \frac{3}{2} \right) \right\} dx \\ &\qquad + \int_{-1}^{3} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \right) - \left(x + \frac{3}{2} \right) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-5}^{-1} (x+5)(x+1)\, dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^{3} (x+1)(x-3)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \{-1 - (-5)\}^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \{3 - (-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

13.87 (1) C_1 は原点 O を通るから　　$\boldsymbol{c = 0}$

2 点 P，Q の y 座標が等しいので，C_1 の軸は，線分 PQ の垂直二等分線であるから，C_1 は y 軸に関して対称な放物線である．したがって

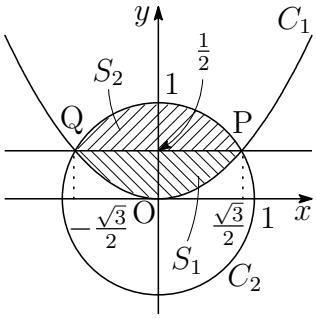
$$\boldsymbol{b = 0}$$

さらに，$C_1 : y = ax^2$ が点 P を通ることから

$$\frac{1}{2} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \frac{2}{3}}$$

(2) 求める部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x^2\right) dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}x - \frac{2}{9}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$



(3) C_2 と直線 PQ で囲まれた図形のうち，線分 PQ の上側の部分の面積を S_2 とすると，$\angle \mathrm{POQ} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \triangle \mathrm{POQ}$$
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

求める面積を S とすると

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}}$$

13.88 (1) $y = x^2$ を微分すると　　$y' = 2x$

接点 P の x 座標は　$2x = \sqrt{3}$　すなわち　$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，接点 P の座標は　　$\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \boldsymbol{\frac{3}{4}}\right)$

l は点 P を通り，傾き $\sqrt{3}$ の直線であるから

$$y - \frac{3}{4} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}}$$

(2) P を通り，l に垂直な直線は

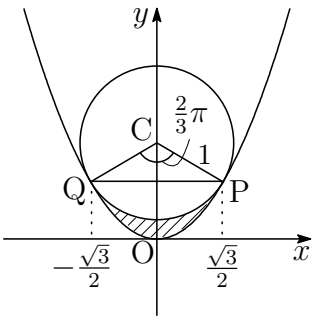
$$y-\frac{3}{4}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{4}$$

求める円の中心 C は，この直線と y 軸との交点であるから　$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$

また，円の半径は　$\mathrm{CP}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{4}\right)^2}=1$

よって，求める円の方程式は　　$\boldsymbol{x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1}$

(3) (2) で求めた円と放物線 $y=x^2$ と P 以外の接点を Q とすると　$\angle\mathrm{PCQ}=\dfrac{2}{3}\pi$
この角を中心角とする扇形から $\triangle\mathrm{PCQ}$ の部分を除いた面積を S_1 とすると



$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot1^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

放物線 $y=x^2$ と線分 PQ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2=\frac{1}{6}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，求める面積を S とすると

$$S=S_2-S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}$$

13.89　(1) $y=x^2$ より　$y'=2x$

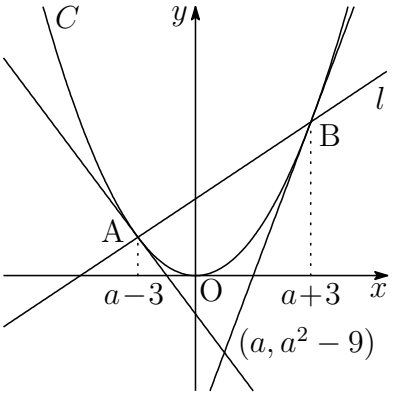
C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)$$
$$y=2tx-t^2$$

これが点 $(a,\ a^2-9)$ を通るとき

$$a^2-9=2ta-t^2$$

これを解いて　$t=a\pm3$



A$(a-3,\ (a-3)^2)$，B$(a+3,\ (a+3)^2)$ とすると，l の方程式は

$$y-(a-3)^2=\frac{(a+3)^2-(a-3)^2}{(a+3)-(a-3)}\{x-(a-3)\}$$

よって　　$\boldsymbol{y=2ax-a^2+9}$

別解　(佐賀大学 2007) 6

(2)　l と C とで囲まれる図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{a-3}^{a+3}\{(2ax-a^2+9)-x^2\}dx\\&=-\int_{a-3}^{a+3}(x-a+3)(x-a-3)\,dx\\&=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a+3)-(a-3)\}^3=36\end{aligned}$$

よって，S は a の値にかかわらず一定である．

13.90　(1)　放物線 $C:y=x(x-a)$ と直線 $y=-x+a$ の共有点の x 座標は $(a>0)$

$$x(x-a)=-x+a\quad\text{ゆえに}\quad(x+1)(x-a)=0$$

これを解いて　　$x=-1,\ a$

よって，求める面積を $S(a)$ とすると

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_{-1}^{a}\{-x+a-x(x-a)\}\,dx\\&=-\int_{-1}^{a}(x+1)(x-a)\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{6}(a+1)^3}\end{aligned}$$

(2)　(1) の結果から　　$\dfrac{1}{2}S(2)=\dfrac{9}{4}$

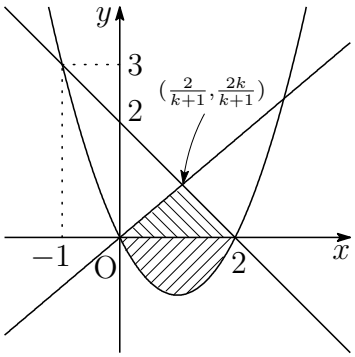
また　$-\displaystyle\int_0^2 x(x-2)\,dx=\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$

$\frac{1}{2}S(2)>\frac{4}{3}$ であるから，直線 $y=-x+2\cdots①$ と直線 $y=kx\cdots②$ の交点は，2 点 $(-1,\ 3)$，$(2,\ 0)$ を結ぶ線分上にある．このとき，その交点の y 座標は，$k\neq-1$ に注意して，①，② を解くと

$$y=\frac{2k}{k+1}$$

したがって，求める k の値は

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{2k}{k+1}+\frac{4}{3}=\frac{9}{4}\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{k=\frac{11}{13}}$$



(3) 点 $(0,\ 1)$ を通る直線を $l : y = mx + 1$ とおく．C と l の共有点の x 座標は

$$x(x-a) = mx + 1 \quad \text{整理すると} \quad x^2 - (m+a)x - 1 = 0$$

この方程式の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = m + a, \quad \alpha\beta = -1$$

C と l で囲まれた図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{mx + 1 - x(x-a)\}\,dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\{(m+a)^2 + 4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

S が最小となるとき　$m = -a$．このとき，l の方程式および S は

$$\boldsymbol{y = -ax + 1}, \quad S = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}$$

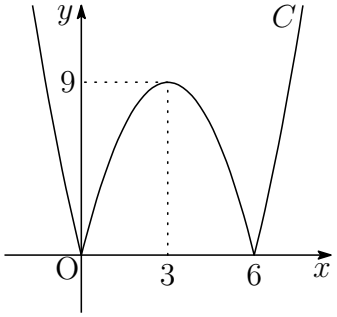
解説 (長崎大学 2003) 2

13.91 (1) $|x^2 - 6x| = \begin{cases} (x-3)^2 - 9 & (x \leqq 0,\ 6 \leqq x) \\ -(x-3)^2 + 9 & (0 \leqq x \leqq 6) \end{cases}$

したがって

$$C : y = |x^2 - 6x|$$

のグラフは，右の図のようになる．



(2) $y = -x^2 + 6x$ を微分すると　$y = -2x + 6$

$y = -x^2 + 6x$ の $x = 0$ における接線の傾きは　$y' = 6$

(1) のグラフから，C と ℓ が異なる 3 つの共有点をもつ k の値の範囲は

$$\boldsymbol{0 < k < 6}$$

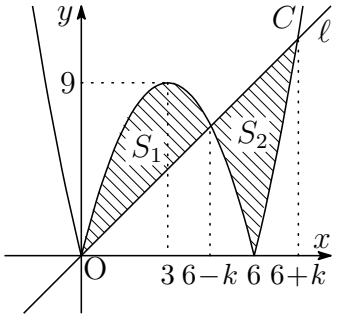
(3) C と ℓ の共有点の x 座標は

$x \leqq 0,\ 6 \leqq x$ のとき，

$$x^2 - 6x = kx \quad \text{よって} \quad x = 0,\ 6 + k$$

$0 \leqq x \leqq 6$ のとき，

$$-x^2 + 6x = kx \quad \text{よって} \quad x = 0,\ 6 - k$$



$0 \leqq x \leqq 6-k$ の範囲で C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{6-k} \{-x^2+6x-kx\}\,dx \\ &= -\int_0^{6-k} x(x-6+k)\,dx = \frac{1}{6}(6-k)^3 \end{aligned}$$

$f(x)=x(x-6)$ とし，この原始関数を $F(x)$ とする．

$6-k \leqq x \leqq 6+k$ の範囲で C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{6-k}^{6+k} \{kx-|f(x)|\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{6-k}^{6+k} + \int_{6-k}^{6} f(x)\,dx - \int_{6}^{6+k} f(x)\,dx \\ &= 12k^2 - F(6-k) - F(6+k) + 2F(6) \end{aligned}$$

C と ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を $S(k)$ とすると，

$S(k)=S_1+S_2$ より

$$S(k) = \frac{1}{6}(6-k)^3 + 12k^2 - F(6-k) - F(6+k) + 2F(6)$$

これを k について微分すると

$$\begin{aligned} S'(k) &= -\frac{1}{2}(6-k)^2 + 24k + f(6-k) - f(6+k) \\ &= -\frac{1}{2}(6-k)^2 + 24k + (k^2-6k) - (k^2+6k) \\ &= -\frac{1}{2}(k^2-36k+36) \end{aligned}$$

$S'(k)=0$ とすると　　$k = 6(3 \pm 2\sqrt{2}\,)$

ここで　　$0 < 6(3-2\sqrt{2}\,) = \dfrac{6}{3+2\sqrt{2}} < 6 < 6(3+2\sqrt{2}\,)$

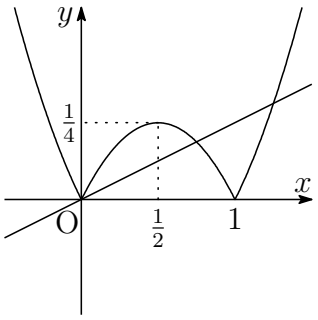
したがって，$0 \leqq x \leqq 6$ における $S(k)$ の増減表は，次のようになる．

k	0	$\cdots$	$6(3-2\sqrt{2}\,)$	$\cdots$	6
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘	極小	↗	

よって，求める k の値は　　$\boldsymbol{k = 6(3-2\sqrt{2}\,)}$

別解（宮崎大学 2015）12

13.92 (1) $|x(x-1)| = \begin{cases} x^2 - x & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ -x^2 + x & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$



したがって

$$y = |x(x-1)| \quad \cdots (*)$$

のグラフは，右の図のようになる．

$y = -x^2 + x$ を微分すると　$y = -2x + 1$

$y = -x^2 + x$ の $x = 0$ における接線の傾きは　　$y' = 1$

$(*)$ グラフと直線 $y = kx$ が異なる 3 つの共有点をもつ k の値の範囲は

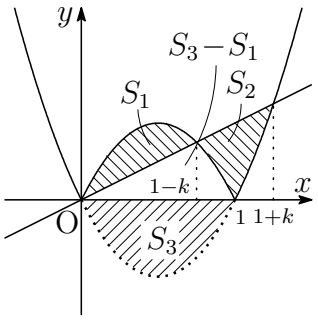
$$\boldsymbol{0 < k < 1}$$

(2) $(*)$ のグラフと直線 $y = kx$ の共有点の x 座標は

$x \leqq 0,\ 1 \leqq x$ のとき　　$x(x-1) = kx$　これを解いて　$x = 1 + k$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　　$-x(x-1) = kx$　これを解いて　$x = 1 - k$

右の図について，求める面積 S は



$$S = S_1 + S_2, \quad S_1 = \frac{1}{6}(1-k)^3, \quad S_3 = \frac{1}{6},$$

$$S_3 + (S_3 - S_1) + S_2 = \frac{1}{6}(1+k)^3 \text{ より}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{6}(1+k)^3 + 2S_1 - 2S_3$$

$$= \frac{1}{6}(1+k)^3 + 2 \times \frac{1}{6}(1-k)^3 - 2 \times \frac{1}{6}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}(-k^3 + 9k^2 - 3k + 1)}$$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{dS}{dk} = -\dfrac{1}{2}(k^2 - 6k + 1)$　　$\dfrac{dS}{dk} = 0$ とすると　$k = 3 \pm 2\sqrt{2}$

ここで　　$0 < 3 - 2\sqrt{2} = \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} < 1 < 3 + 2\sqrt{2}$

したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ における S の増減表は，次のようになる．

k	0	$\cdots$	$3 - 2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{dk}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，求める k の値は　　$\boldsymbol{k = 3 - 2\sqrt{2}}$

13.93 (1) 放物線 $y=-px^2+2$ は，2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るから

$$-p\cdot 18+2=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p=\frac{1}{9}}$$

(2) $y=-\dfrac{1}{9}x^2+2$ と $y=|\,x\,|-2$ から y を消去すると

$$-\frac{1}{9}x^2+2=|\,x\,|-2 \quad \text{ゆえに} \quad |\,x\,|^2+9|\,x\,|-36=0$$

したがって $(|\,x\,|+12)(|\,x\,|-3)=0$ すなわち $x=\pm 3$

よって，求める交点の座標は $\boldsymbol{(3,\ 1),\ (-3,\ 1)}$

(3) (2) の結果より，点 A の座標は $(-3,\ 1)$

$f(x)=-\dfrac{1}{9}x^2+2$ を微分すると $f'(x)=-\dfrac{2}{9}x$

$y=f(x)$ の A における接線の傾きは $f'(-3)=-\dfrac{2}{9}\cdot(-3)=\dfrac{2}{3}$

よって，$y=f(x)$ の A における接線の方程式 $y=h(x)$ は

$$y-1=\frac{2}{3}(x+3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+3}$$

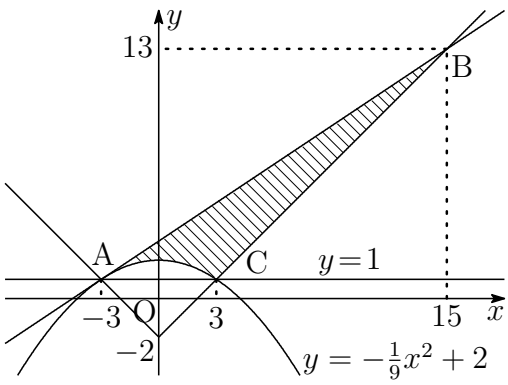
$y=h(x)$，$y=g(x)$ の共有点の座標は

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x+3 \\ y=|\,x\,|-2 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad (x,\ y)=(-3,\ 1),\ (15,\ 13)$$

B は A と異なる点であるから $\boldsymbol{\mathrm{B}(15,\ 13)}$

(4) (2) で求めた 2 交点で，A と異なる点を C とし，直線 AC と $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-3}^{3}\left\{\left(-\frac{1}{9}x^2+2\right)-1\right\}dx \\ &= -\frac{1}{9}\int_{-3}^{3}(x+3)(x-3)\,dx \\ &= 4 \end{aligned}$$



求める面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABC}-S_1=\frac{1}{2}\{3-(-3)\}(13-1)-4=\boldsymbol{32}$$

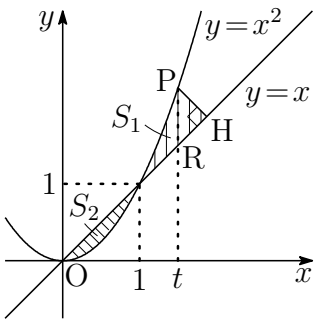
13.94 (1) 直線 PH は，点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，直線 $y=x\cdots$① に垂直な直線であるから

$$y-t^2=-(x-t)$$

すなわち　$y=-x+t^2+t$　$\cdots$②

H の座標は ①，② を解いて

$$\left(\frac{\boldsymbol{t^2+t}}{\boldsymbol{2}},\ \frac{\boldsymbol{t^2+t}}{\boldsymbol{2}}\right)$$



(2) $\mathrm{R}(t,\ t)$ であるから

$$\triangle\mathrm{PRH}=\frac{1}{2}\mathrm{PH}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{PR}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2-t}{\sqrt{2}}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}(t^4-2t^3+t^2)}$$

(3) (2) の結果を用いて，求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1&=\int_1^t(x^2-x)\,dx+\triangle\mathrm{PRH}\\&=\left[\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\ \right]_1^t+\frac{1}{4}(t^4-2t^3+t^2)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

(4)　$$S_2=\int_0^1(x-x^2)\,dx=-\int_0^1 x(x-1)dx=\frac{1}{6}$$

$S_1=S_2$ のとき，上式および (3) の結果より

$$\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\quad\text{ゆえに}\quad t^2(3t^2-2t-3)=0$$

$t>1$ に注意して　$$\boldsymbol{t=\frac{1+\sqrt{10}}{3}}$$

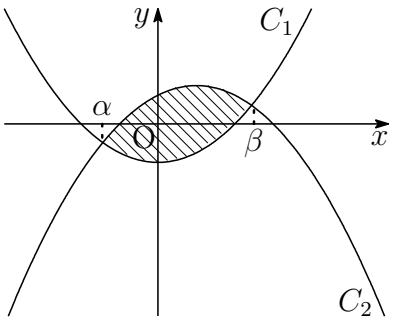
13.95 (1) $d(\mathrm{P},\ell_1)=|y+1|$，$d(\mathrm{P},\ell_2)=|y-1|$ であるから，① より

$$|y+1|\geqq\sqrt{x^2+y^2}\quad\text{かつ}\quad|y-1|\geqq\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

これらを整理すると

$$y\geqq\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\quad\text{かつ}\quad y\leqq-\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2}$$

上の 2 式を同時にみたす領域が存在する条件は，2 つの放物線



$$C_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$
$$C_2 : y = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

が共有点をもつことであるから，2 次方程式

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

すなわち　　$x^2 - ax + \dfrac{1}{2}a^2 - 1 = 0 \quad \cdots(*)$

が実数解をもてばよい．したがって，係数について

$$(-a)^2 - 4\cdot 1\left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right) \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-2 \leqq a \leqq 2}$$

(2) $(*)$ の方程式の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)$$
$$\beta - \alpha = \sqrt{4 - a^2}$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left\{-\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\right\} dx \\ &= -\int_\alpha^\beta \left(x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1\right) dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}(4-a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

13.96　(1) $y = x^2$ と $y = -x^2 + ax + b$ から y を消去すると

$$x^2 = -x^2 + ax + b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - ax - b = 0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるとき，$(*)$ より

$$(-a)^2 - 4\cdot 2\cdot(-b) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a^2 + 8b > 0}$$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$\alpha+\beta=\frac{a}{2},\quad \alpha\beta=-\frac{b}{2}$$
$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b}\quad \cdots ①$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \{(-x^2+ax+b)-x^2\}\,dx &= -\int_\alpha^\beta (2x^2-ax-b)\,dx\\ &= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=9$　ゆえに　$\beta-\alpha=3$　$\cdots ②$

①，② より　$\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+8b}=3$　よって　$\boldsymbol{b=-\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2}}$

(3) (2) の結果から，C_2 は

$$y=-x^2+ax-\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2}\quad \text{すなわち}\quad y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2}$$

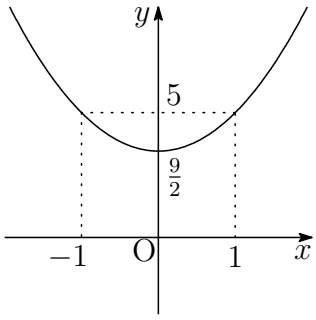
C_2 の頂点を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

よって，C_2 の頂点が描く軌跡の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$$

その軌跡は，右の図のようになる．



13.97　(1) $l_1 : y=kx$ に垂直な直線 l_2 の傾きは　$-\dfrac{1}{k}$

l_2 は，原点を通る直線であるから　$l_2 : y=-\dfrac{1}{k}x$

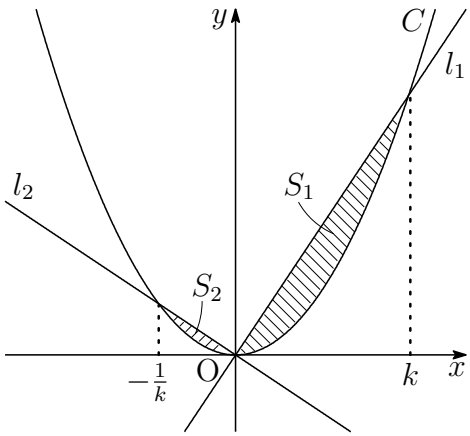
C と l_2 の交点の座標は

$$\text{連立方程式}\begin{cases} y=x^2 \\ y=-\dfrac{1}{k}x \end{cases}\quad \text{を解いて}\quad \boldsymbol{(0,\ 0)},\ \left(\boldsymbol{-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k^2}}\right)$$

(2) C と l_1 の共有点の x 座標は，$y=x^2$ と $y=kx$ から y を消去して

$$x^2=kx \quad \text{これ解いて} \quad x=0,\ k$$

したがって，右の図から



$$S_1=\int_0^k \left(kx-x^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{kx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^k=\boldsymbol{\frac{k^3}{6}}$$
$$S_2=\int_{-\frac{1}{k}}^0 \left(-\frac{1}{k}x-x^2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{2k}-\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{k}}^0=\boldsymbol{\frac{1}{6k^3}}$$

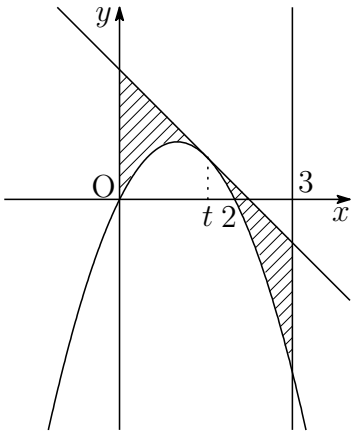
別解 (大分大学 2010) 6

13.98 (1) $y=x(2-x)$ を微分すると $\quad y'=2-2x$

この曲線上の点 $(t,\ t(2-t))$ における接線の方程式は

$$y-t(2-t)=(2-2t)(x-t) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y=2(1-t)x+t^2}$$

(2) (1) の結果および右の図から



$$S(t)=\int_0^3 \{2(1-t)x+t^2-x(2-x)\}dx$$
$$=\int_0^3 (x-t)^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^3=\frac{1}{3}(3-t)^3+\frac{1}{3}t^3$$
$$=3t^2-9t+9=3\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

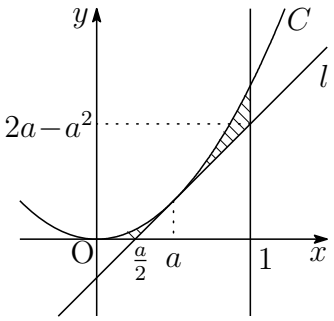
よって $\quad \boldsymbol{t=0}$ のとき**最大値 9**，$\boldsymbol{t=\frac{3}{2}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\frac{9}{4}}$

13.99 (1) $y=x^2$ を微分すると $\quad y'=2x$

l は点 $(a,\ a^2)$ を通り，傾き $2a$ の直線であるから

$$y-a^2=2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2ax-a^2}$$

(2) l，x 軸，直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を T とすると



$$T=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)(2a-a^2)$$
$$=\frac{a^3}{4}-a^2+a$$

よって　$S(a)=\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx-T$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\left(\frac{a^3}{4}-a^2+a\right)$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{4}a^3+a^2-a+\frac{1}{3}}$$

(3) (2) の結果から

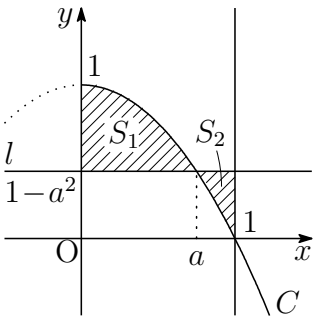
$$S'(a)=-\frac{3}{4}a^2+2a-1=-\frac{1}{4}(3a-2)(a-2)$$

$S(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	$\frac{1}{27}$	↗	

よって　$a=\dfrac{2}{3}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{27}}$

13.100　(1) C と l の交点は　$(a,\ 1-a^2)$



$$S_1=\int_0^a\{(1-x^2)-(1-a^2)\}\,dx$$
$$=\int_0^a(a^2-x^2)\,dx$$
$$=\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}$$
$$S_2=\int_a^1\{(1-a^2)-(1-x^2)\}\,dx$$
$$=\int_a^1(x^2-a^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_a^1=\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \frac{2}{3}a^3 + \left(\frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3} \\ S' &= 4a^2 - 2a \\ &= 2a(2a-1) \end{aligned}$$

したがって，S の増減表は，次のようになる．

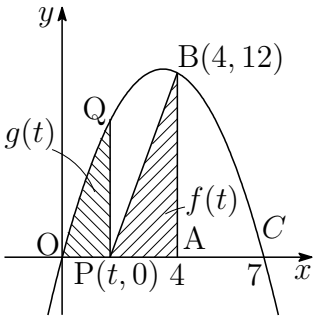
a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる．

13.101 (1) 右の図から　$f(t) = \dfrac{1}{2}(4-t) = \boldsymbol{-6t+24}$

(2) 右の図から

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t (-x^2 + 7x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 \right]_0^t \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2} \end{aligned}$$



(3) (1)，(2) の結果から　$h(t) = f(t) + g(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{7}{2}t^2 - 6t + 24$

これを微分すると　$h'(t) = -t^2 + 7t - 6 = -(t-1)(t-6)$

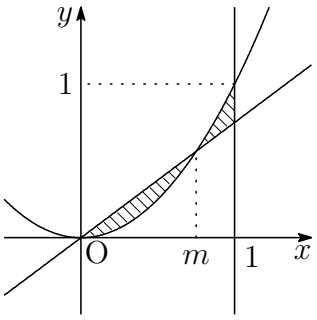
$0 < t < 4$ であるから，その増減表は

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		↘	極小	↗	

よって，最小値は　$\boldsymbol{h(1) = \dfrac{127}{6}}$

13.102 (1) $y=x^2$ と $y=mx$ の共有点の x 座標は

$$x^2=mx \quad \text{これを解いて} \quad x=0,\ m$$



x^2-mx の原始関数の 1 つを

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2$$

とおく．$0 \leqq m \leqq 1$ より，$S(m)$ は

$$\begin{aligned}S(m)&=-\int_0^m (x^2-mx)\,dx+\int_m^1 (x^2-mx)\,dx\\&=-\Big[\ F(x)\ \Big]_0^m+\Big[\ F(x)\ \Big]_m^1\\&=F(0)+F(1)-2F(m)\\&=0+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}m\right)-2\left(-\frac{1}{6}m^3\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $\quad S'(m)=m^2-\dfrac{1}{2}$

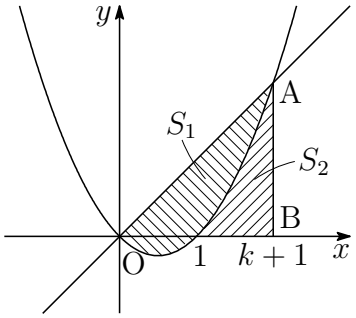
したがって，$S(m)$ の増減表は次のようになる．

m	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$S'(m)$		$-$	0	$+$	
$S(m)$		↘	極小	↗	

よって $\quad \boldsymbol{m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ のとき最小値 $S\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}}$

13.103 $y=x(x-1)$ と $y=kx$ から y を消去すると

$$x(k-1)=kx \quad \text{ゆえに} \quad x=0,\ k+1$$



したがって

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^{k+1}\{kx-x(x-1)\}\,dx\\&=-\int_0^{k+1}x(x-k-1)\,dx=\frac{1}{6}(k+1)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2&=\int_1^{k+1}x(x-1)\,dx=\int_1^{k+1}\{(x-1)^2+(x-1)\}\,dx\\&=\left[\ \frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{2}(x-1)^2\ \right]_1^{k+1}=\frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2\end{aligned}$$

ここで，$f(k)=S_1-S_2$ とおくと

$$f(k)=\frac{1}{6}(k+1)^3-\left(\frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2\right)=-\frac{1}{6}k^3+\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}$$
$$f'(k)=-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(k+1)(k-1)$$

$k>0$ における $f(k)$ の増減表は，次のようになる．

k	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(k)$		$+$	0	$-$
$f(k)$		↗	極大	↘

よって，S_1-S_2 を最大にする k の値は　　$\boldsymbol{k=1}$

13.104　(1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta(\beta-x)(x-\alpha)\,dx=\int_\alpha^\beta\{(\beta-\alpha)-(x-\alpha)\}(x-\alpha)\,dx$

$$=\int_\alpha^\beta\{(\beta-\alpha)(x-\alpha)-(x-\alpha)^2\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2-\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

(2) $f(a)=\dfrac{1}{3}a^3-(a-1)$ とおくと　$f'(a)=(a+1)(a-1)$

$-2\leqq a\leqq 2$ における $f(a)$ の増減表は次のようになる．

a	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{5}{3}$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{5}{3}$

(1) の結果を利用すると

$$S(a)=-\int_{a-1}^{\frac{1}{3}a^3}(3x-a^3)(x-a+1)\,dx$$
$$=3\int_{a-1}^{\frac{1}{3}a^3}\left(\frac{1}{3}a^3-x\right)\{x-(a-1)\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\{f(a)\}^3$$

よって，$a=-2,\ 1$ のとき $S(a)$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{54}}$

13.105 (1) C_2 の方程式は　$y=(x+p)^3-(x+p)-p$

すなわち　$y=x^3+3px^2+(3p^2-1)x+p^3-2p$

C_1 と C_2 から，y を消去すると，$p\neq 0$ より

$$3px^2+3p^2x+p^3-2p=0 \quad \text{ゆえに} \quad 3x^2+3px+p^2-2=0 \quad \cdots(*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D=(3p)^2-4\cdot 3\cdot(p^2-2)=3(-p^2+8)$$

方程式 $(*)$ が異なる 2 つの解をもつので，$D>0$ より

$$-p^2+8>0 \quad \text{ゆえに } p>0 \text{ に注意して} \quad \boldsymbol{0<p<2\sqrt{2}}$$

(2) $$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (\beta-x)(x-\alpha)dx&=\int_\alpha^\beta \{(\beta-\alpha)-(x-\alpha)\}(x-\alpha)dx\\&=(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)dx-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2dx\\&=(\beta-\alpha)\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta-\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta\\&=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

(3) $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=\frac{p^2-2}{3},\quad (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{8-p^2}{3}$$

C_2 の関数を $y=g(x)$ とおくと，解と係数の関係により

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=(x^3-x)-\{x^3+3px^2+(3p^2-1)x+p^3-2p\}\\&=-3px^2-3p^2x-p^3+2p\\&=-3p(x-\alpha)(x-\beta)=3p(\beta-x)(x-\alpha)\end{aligned}$$

面積 $S(p)$ は，(2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}S(p)&=\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}dx=3p\int_\alpha^\beta (\beta-x)(x-\alpha)dx\\&=3p\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{p}{2}\left(\frac{8-p^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$\{S(p)\}^2=\dfrac{1}{108}p^2(8-p^2)^3$ から，$t=p^2$ とおき

$$h(t)=t(8-t)^3 \quad (0<t<8)$$

とすると　　$h'(t) = -4(t-2)(8-t)^2$

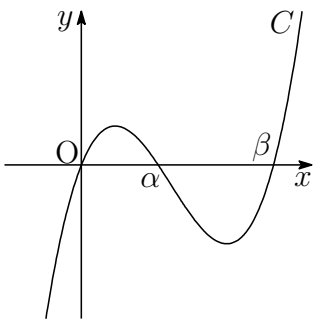
$h(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(8)
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	(0)	↗	極大	↘	(0)

$p^2 = 2$，すなわち $p = \sqrt{2}$ のとき，$S(p)$ は最大となる．

最大値は　$S(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{8-2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \mathbf{2}$

13.106　(1) C は x 軸との共有点の x 座標が $x = 0,\ \alpha,\ \beta$ であるから，$C : y = f(x)$ の方程式は x^3 の係数に注意して $(0 < \alpha < \beta)$



$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2$$

とおくと

$$F(0) = 0, \quad F(\alpha) = -\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta, \quad F(\beta) = -\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\alpha} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_0^{\alpha} - \Big[\ F(x)\ \Big]_{\alpha}^{\beta} \\ &= 2F(\alpha) - F(\beta) - F(0) \\ &= 2\left(-\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta\right) - \left(-\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3\right) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^3\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^4} \end{aligned}$$

(2)　(1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= -\frac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2\beta - \frac{1}{6}\beta^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\alpha-\beta)\{2\alpha(\beta-\alpha) + \beta^2\} \end{aligned}$$

$0<\alpha<\beta$ であるから　　$2\alpha(\beta-\alpha)+\beta^2>0$

したがって

α	(0)	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	(β)
$\frac{dS}{d\alpha}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，S を最小にする α は　　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{\beta}{2}}$

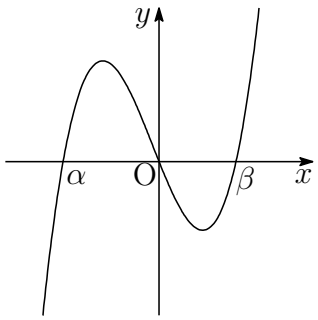
13.107　(1) $y=x^3-3ax^2+bx$ を微分すると

$$y'=3x^2-6ax+b=3(x-a)^2-3a^2+b$$

y' の最小値が -3 であるから

$$-3a^2+b=-3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b=3a^2-3}$$

(2) $y=x(x^2-3ax+b)$ より，このグラフの x 軸の負の部分，正の部分で交わる点の x 座標をそれぞれ α，β とすると $(\alpha<0<\beta)$，α，β は2次方程式 $x^2-3ax+b=0$ の解であるから，解と係数の関係により



$$\alpha+\beta=3a,\quad \alpha\beta=b \quad \cdots(*)$$

このとき，$b<0$ であるから，(1) の結果から

$$3a^2-3<0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-1<a<1}$$

(3) $(*)$ から，$y=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$．図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{\alpha}^{0}\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}dx-\int_{0}^{\beta}\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3+\frac{1}{2}\alpha\beta x^2\right]_{\alpha}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3+\frac{1}{2}\alpha\beta x^2\right]_{0}^{\beta}\\&=\frac{1}{12}(\alpha^4+\beta^4)-\frac{1}{6}\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)\end{aligned}$$

ここで，(1) の結果および $(*)$ に注意して

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=b=3a^2-3\\\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(3a)^2-2(3a^2-3)=3a^2+6\\\alpha^4+\beta^4&=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2\\&=(3a^2+6)^2-2(3a^2-3)^2=-9a^4+72a^2+18\end{aligned}$$

したがって

$$S = \frac{1}{12}(-9a^4 + 72a^2 + 18) - \frac{1}{6}(3a^2 - 3)(3a^2 + 6)$$
$$= -\frac{9}{4}a^4 + \frac{9}{2}a^2 + \frac{9}{2}$$
$$\frac{dS}{da} = -9a^3 + 9a = -9a(a+1)(a-1)$$

S の増減表は次のようになる.

a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\frac{dS}{da}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	極小 $\frac{9}{2}$	$\nearrow$	

$\boldsymbol{a = 0}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ をとる.

13.108 (1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ における接線方程式は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \sqrt{3}x - 2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \sqrt{3},\ b = -2}$$

(2) $y = x^2 - \sqrt{3}x + c$ と $y = \sqrt{3}x - 2$ から y を消去すると

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + c + 2 = 0 \quad \cdots ①$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = (-\sqrt{3})^2 - 1\cdot(c+2) = 1 - c$$

C と l が接するのは，$D = 0$ のときであるから

$$1 - c = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c = 1}$$

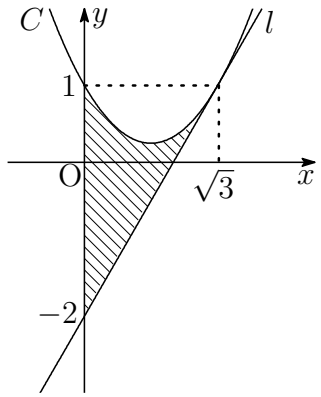
これを ① に代入すると

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x - \sqrt{3})^2 = 0$$

したがって　$x = \sqrt{3}$　これを l の方程式に代入して　$y = 1$

よって　　$\boldsymbol{(\sqrt{3},\ 1)}$

(3) (2) の結果から，求める面積を S とすると，右の図の斜線部分であるから



$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \{(x^2 - \sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3}x - 2)\} dx$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}} (x - \sqrt{3})^2 \, dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x - \sqrt{3})^3 \right]_0^{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

13.109 (1) 点 A(0, 4) を頂点とする放物線を $y = kx^2 + 4$ とおく (k は定数).
これが点 B(2, 0) を通るから

$$k \cdot 2^2 + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = -1$$

よって，求める 2 次関数は　　$\boldsymbol{y = -x^2 + 4}$

(2) (1) の結果から　$y = -(x + 2)(x - 2)$
放物線と x 軸との交点で点 B(2, 0) と異なる点 D の座標は　$(-2, 0)$
$y = -x^2 + 4$ を微分すると　$y' = -2x$
放物線上の点 C$(2a, -4a^2 + 4)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y - (-4a^2 + 4) = -4a(x - 2a)$$

すなわち　　$y = -4ax + 4a^2 + 4 \quad \cdots ①$

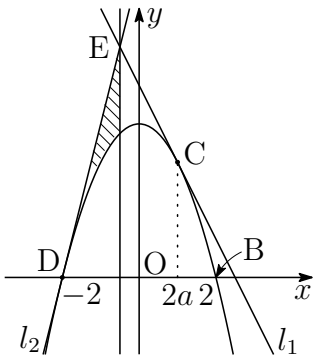
また，放物線上の点 D(−2, 0) における接線 l_2 の方程式は，① に $a = -1$ に代入して　　$y = 4x + 8 \quad \cdots ②$

①，② から y を消去すると

$$-4ax + 4a^2 + 4 = 4x + 8 \quad \text{ゆえに} \quad (a + 1)x = a^2 - 1$$

$a > 0$ より，$a + 1 \neq 0$ であるから　$x = a - 1$
これを ② に代入して　$y = 4a + 4$　よって，E の座標は　$\boldsymbol{(a - 1,\ 4a + 4)}$

(3) 求める面積を S とすると，(2) の結果から



$$S = \int_{-2}^{a-1} \{(4x + 8) - (-x^2 + 4)\} \, dx$$
$$= \int_{-2}^{a-1} (x + 2)^2 \, dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x + 2)^3 \right]_{-2}^{a-1} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(a + 1)^3}$$

13.110 (1) Q は線分 PR を 1 : 2 に内分する点であるから　$c = 3b$　$\cdots$①

2 点 Q，R の中点の x 座標は 1 であるから　$\dfrac{b+c}{2} = 1$　$\cdots$②

①，② を解いて　$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{2},\ c = \dfrac{3}{2}}$

$y = -x^2 + 2x$ と $y = a$ から y を消去すると　$x^2 - 2x + a = 0$　$\cdots$③

方程式 ③ の解が b，c であるから，解と係数の関係により

$$a = bc = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

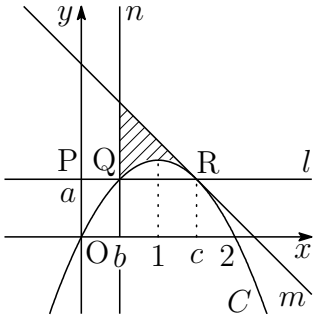
(2) $y = -x^2 + 2x$ より　$y' = -2x + 2$　ゆえに　$x = \dfrac{3}{2}$ のとき　$y' = -1$

l は点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ を通り，傾き -1 の直線であるから

$$y - \frac{3}{4} = -1\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -x + \frac{9}{4}}$$

(3) 求める面積を S とすると

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\{\left(-x + \frac{9}{4}\right) - (-x^2 + 2x)\right\} dx$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 dx$$
$$= \left[\ \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3\ \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$



別解 C と l で囲まれた部分の面積は　$\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{6}$

よって　$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{QR}^2 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

13.111 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

C_1 上の点 A における接線の傾きは $2a$ であるから，その方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

この接線と $C_2 : y = x^2 - 4$ の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

の解であるから，2 式から y を消去して

$$x^2-4=2ax-a^2$$

ゆえに　　$(x-a)^2=4$

したがって　　$x=a\pm 2$

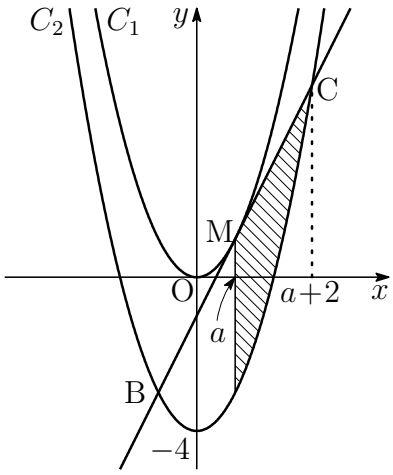
B，C の x 座標は，それぞれ $a-2$，$a+2$ であるから

$$\mathrm{B}(a-2,\ a^2-4a),\quad \mathbf{C(}\boldsymbol{a+2,\ a^2+4a}\mathbf{)}$$

よって，BC の中点 M の座標は　　$\boldsymbol{(a,\ a^2)}$

(2) 求める面積 S は，右の図から

$$\begin{aligned}S&=\int_a^{a+2}\{(2ax-a^2)-(x^2-4)\}\,dx\\&=\int_a^{a+2}\{4-(x-a)^2\}\,dx\\&=\left[\,4x-\frac{1}{3}(x-a)^3\,\right]_a^{a+2}\\&=\boldsymbol{\frac{16}{3}}\end{aligned}$$



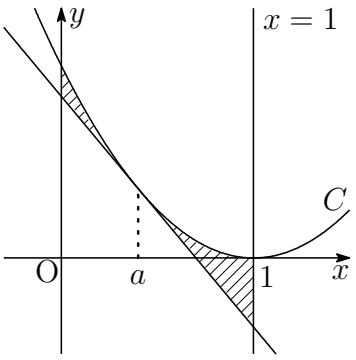
13.112　(1) $y=(x-1)^2$ を微分すると　$y'=2(x-1)$

ゆえに，ℓ の方程式は

$$y-(a-1)^2=2(a-1)(x-a)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=2(a-1)x-a^2+1}$$

(2) (1) の結果から

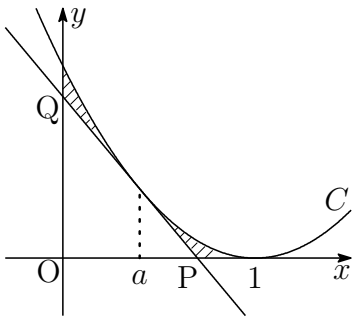
$$\begin{aligned}S(a)&=\int_0^1\left[(x-1)^2-\{2(a-1)x-a^2+1\}\right]dx\\&=\int_0^1(x^2-2ax+a^2)dx\\&=\left[\,\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\,\right]_0^1\\&=a^2-a+\frac{1}{3}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\end{aligned}$$



$0<a<1$ より，

$S(a)$ は $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{12}}$ をとる．

(3) ℓ の x 軸および y 軸との交点を，それぞれ
$\mathrm{P}\left(\dfrac{a+1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(0, -a^2+1)$ とすると



$$\begin{aligned} T(a) &= \int_0^1 (x-1)^2 dx - \triangle \mathrm{OPQ} \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x-1)^3\ \right]_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{2}\cdot(-a^2+1) \\ &= \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

これを微分すると

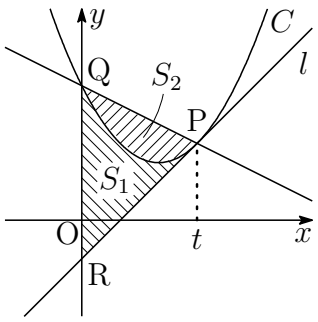
$$T'(a) = \frac{1}{4}(3a^2+2a-1) = \frac{1}{4}(a+1)(3a-1)$$

したがって，$T(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$T'(a)$		$-$	0	$+$	
$T(a)$		↘	極小 $\frac{1}{27}$	↗	

よって，$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{27}}$ をとる．

13.113 (1) $y = x^2 + px + q$ より　$y' = 2x + p$
$x = t$ のとき　$y' = 2t + p$
l は点 $(t,\ t^2+pt+q)$ を通り，傾き $2t+p$ の直線であるから



$$y - (t^2+pt+q) = (2t+p)(x-t)$$

よって　$\boldsymbol{y = (2t+p)x - t^2 + q}$

(2) $0 < x < t$ において，C は l の上側にあるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^t [(x^2+px+q) - \{(2t+p)x - t^2 + q\}]dx \\ &= \int_0^t (x-t)^2 dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x-t)^3\ \right]_0^t = \boldsymbol{\frac{t^3}{3}} \end{aligned}$$

(3) l と y 軸の交点を R とすると，Q$(0,\ q)$，R$(0, -t^2+q)$ であるから

$$\mathrm{QR} = q-(-t^2+q) = t^2 \quad \text{ゆえに} \quad \triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}t^2\cdot t = \frac{t^3}{2}$$

したがって　　$S_2 = \triangle\mathrm{PQR} - S_1 = \dfrac{t^3}{2} - \dfrac{t^3}{3} = \dfrac{t^3}{6}$

よって　　$S_1 : S_2 = \dfrac{t^3}{3} : \dfrac{t^3}{6} = \mathbf{2:1}$

13.114　(1) 2 点 P，Q の y 座標が等しいので，C の頂点の座標は　$\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$

C の方程式を $y = a\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2$ とおくと，これが P を通るから

$$(t-2)^2 = a\left(t-\frac{t}{2}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{4}{t^2}(t-2)^2$$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{4}{t^2}(t-2)^2\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2}$

(2) 求める面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= t(t-2)^2 - \int_0^t \frac{4}{t^2}(t-2)^2\left(x-\frac{t}{2}\right)^2 dx \\ &= t(t-2)^2 - \frac{4}{t^2}(t-2)^2\left[\ \frac{1}{3}\left(x-\frac{t}{2}\right)^3\ \right]_0^t \\ &= t(t-2)^2 - \frac{1}{3}t(t-2)^2 = \boldsymbol{\frac{2}{3}t(t-2)^2} \end{aligned}$$

(3) $S(t) = \dfrac{2}{3}(t^3-4t^2+4t)$ を微分すると

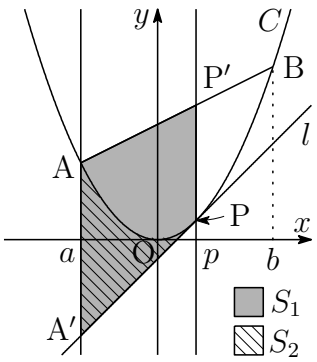
$$S'(t) = \frac{2}{3}(3t^2-8t+4) = \frac{2}{3}(3t-2)(t-2)$$

したがって，$S(t)$ の増減表は $(0<t<2)$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	(0)	↗	$\frac{64}{81}$	↘	(0)

よって　　$\boldsymbol{t = \dfrac{2}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$

13.115 曲線 $y=x^2$ を C，C 上の点 P における接線を l とする．また，l と直線 $x=a$ の交点を A′，線分 AB と直線 $x=p$ の交点を P′ とする．



$y=x^2$ を微分すると　　$y'=2x$

接線 l の方程式は

$$y-p^2=2p(x-p)\quad \text{すなわち}\quad y=2px-p^2$$

線分 AB の方程式は

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=(a+b)x-ab$$

ゆえに　　$\mathrm{A}'(a,\ 2ap-p^2)$，$\mathrm{P}'(p,\ (a+b)p-ab)$

したがって　　$\mathrm{AA}'=a^2-(2ap-p^2)=(p-a)^2$

$$\mathrm{PP}'=(a+b)p-ab-p^2=(p-a)(b-p)$$

$$\begin{aligned}
S_1&=\frac{1}{2}(p-a)(\mathrm{AA}'+\mathrm{PP}')\\
&=\frac{1}{2}(p-a)\{(p-a)^2+(p-a)(b-p)\}=\frac{1}{2}(p-a)^2(b-a)\\
S_2&=\int_a^p\{x^2-(2px-p^2)\}dx=\int_a^p(x-p)^2\,dx\\
&=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(x-p)^3\right]_a^p=\frac{1}{3}(p-a)^3\\
\frac{S_2}{S_1}&=\frac{\frac{1}{3}(p-a)^3}{\frac{1}{2}(p-a)^2(b-a)}=\frac{2(p-a)}{3(b-a)}
\end{aligned}$$

このとき，$a<p<b$ であるから　$0<p-a<b-a$

よって　　$\boldsymbol{0<\dfrac{S_2}{S_1}<\dfrac{2}{3}}$

13.116　(1) 放物線 $y=ax^2+b$ は点 $(1,\ 1)$ を通るから

$$1=a\cdot 1^2+b\qquad \text{よって}\qquad \boldsymbol{b=1-a}$$

(2) $y=ax^2+b$ を微分すると　　$y'=2ax$

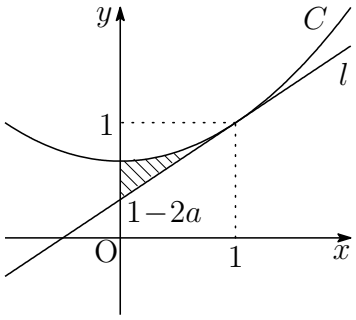
ゆえに，$x=1$ のとき　　$y'=2a$

求める接線 l は，点 $(1,\ 1)$ を通り，傾き $2a$ の直線であるから

$$y-1=2a(x-1)\qquad \text{よって}\qquad \boldsymbol{y=2ax+1-2a}$$

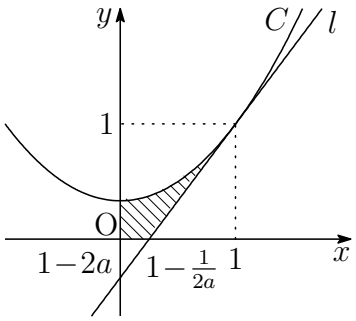
(3) $a>0$，$b>0$ および (1) の結果から　$1-a>0$　ゆえに　$0<a<1$

i) $1-2a>0$　すなわち　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき



$$S=\int_0^1\{ax^2+1-a-(2ax+1-2a)\}\,dx$$
$$=a\int_0^1(x-1)^2\,dx$$
$$=a\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{a}{3}}$$

ii) $1-2a\leqq 0$　すなわち　$\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ のとき



$$S=\int_0^1(ax^2+1-a)\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\left\{1-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right\}\cdot 1$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+(1-a)x\right]_0^1-\frac{1}{4a}$$
$$=\boldsymbol{1-\left(\frac{2a}{3}+\frac{1}{4a}\right)}$$

(4) (3) の結果から，$\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ において，S は最大値をとる．

相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{2a}{3}+\frac{1}{4a}\geqq 2\sqrt{\frac{2a}{3}\cdot\frac{1}{4a}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

上式において，等号が成立するとき　$\dfrac{2a}{3}=\dfrac{1}{4a}$　すなわち　$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{4}<1$ に注意して，$\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ をとる．

13.117　(1) $y=x^2+ax$ を微分すると　$y'=2x+a$

したがって，C_1 上の点 $(t,\ t^2+at)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+at)=(2t+a)(x-t)\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{y=(2t+a)x-t^2}$$

(2) (1) で求めた直線と C_2 の方程式から y を消去して，整理すると

$$\frac{1}{4}x^2-(2t+a)x+t^2=0\quad\cdots①$$

この方程式は重解をもつので，係数について

$$(2t+a)^2-4\cdot\frac{1}{4}t^2=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=-a,-\frac{a}{3}$$

これらを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{y=-ax-a^2,\ y=\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{9}}$

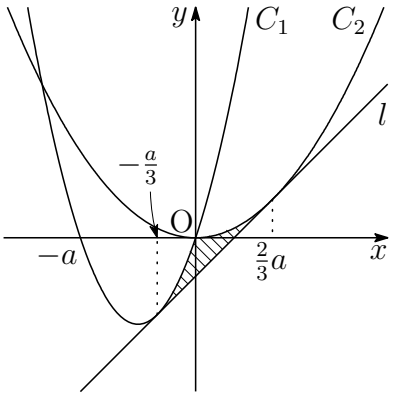
(3) $a>0$ より　$l:y=\dfrac{a}{3}x-\dfrac{a^2}{9}$

ゆえに C_1 と l の接点の x 座標は

$$x=t=-\frac{a}{3}$$

C_2 と l の接点の x 座標は，① より

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{a}{3}x+\frac{a^2}{9}=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{2}{3}a$$



C_1，C_2 および l で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\int_{-\frac{a}{3}}^{0}\left\{(x^2+ax)-\left(\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{9}\right)\right\}dx+\int_{0}^{\frac{2}{3}a}\left\{\frac{1}{4}x^2-\left(\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{9}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{a}{3}}^{0}\left(x+\frac{a}{3}\right)^2dx+\int_{0}^{\frac{2}{3}a}\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2dx$$

$$=\left[\ \frac{1}{3}\left(x+\frac{a}{3}\right)^3\ \right]_{-\frac{a}{3}}^{0}+\left[\ \frac{1}{12}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^3\ \right]_{0}^{\frac{2}{3}a}=\frac{a^3}{27}$$

$S=1$ であるから　$\dfrac{a^3}{27}=1$　よって　$\boldsymbol{a=3}$

13.118　(1) (i)，(iii) より，$f(x)=(x^2-3x)(x^2+px+q)+7x+5$ とおける (p，q は定数)．(ii) を上式に適用すると

$$(1-3)(1+p+q)+12=0 \qquad \text{ゆえに} \qquad p+q=5$$
$$(4-6)(4+2p+q)+19=-1 \qquad \text{ゆえに} \qquad 2p+q=6$$

これを解いて　　$p=1$，$q=4$

したがって

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-3x)(x^2+x+4)+7x+5\\&=\{(x^2-3x+2)-2\}\{(x^2-3x+2)+(4x+2)\}+7x+5\\&=(x^2-3x+2)^2+4x(x^2-3x+2)-2(4x+2)+7x+5\\&=(x^2-3x+2)(x^2+x+2)-x+1\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{k(x) = -x + 1}$

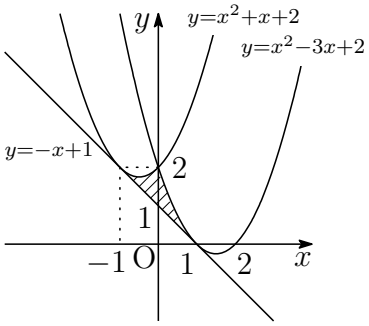
(2) (1) の結果から　　$\boldsymbol{g(x) = x^2 + x + 2}$

(3) $y = x^2 - 3x + 2 \cdots ①$，$y = x^2 + x + 2 \cdots ②$，$y = -x + 1 \cdots ③$ とおく．

①，② を解くと　交点 $(0,\ 2)$，

①，③ を解くと　接点 $(1,\ 0)$，

②，③ を解くと　接点 $(-1,\ 2)$

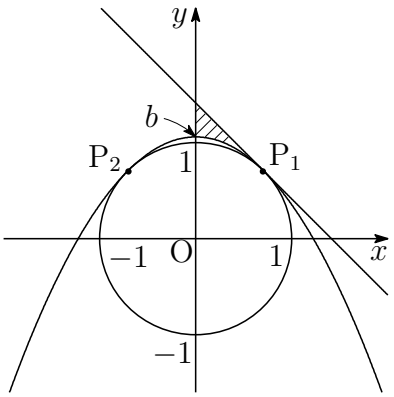


したがって，①，②，③ で囲まれ部分は，
下の図の斜線部分である．
斜線部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0} \{(x^2 + x + 2) - (-x + 1)\} dx \\ &\qquad + \int_{0}^{1} \{(x^2 - 3x + 2) - (-x + 1)\} dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x + 1)^2 \, dx + \int_{0}^{1} (x - 1)^2 \, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + 1)^3 \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}(x - 1)^3 \right]_{0}^{1} = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

13.119　(1) (2)　$\mathrm{P}_1(p,\ q)$ は，C および円周上の点であるから

$$q = ap^2 + b \quad \cdots ①$$
$$p^2 + q^2 = 1 \quad \cdots ②$$



$y = ax^2 + b$ を微分すると　$y' = 2ax$

P_1 における C の接線の傾きは　$2ap$

直線 OP_1 の傾きは　$\dfrac{q}{p}$

P_1 における C の接線と直線 OP_1 は，垂直であるから

$$2ap \times \frac{q}{p} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q = -\frac{1}{2a}} \quad \cdots ③$$

③ を ② に代入すると

$$p^2 + \frac{1}{4a^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 = 1 - \frac{1}{4a^2}$$

$a<-\dfrac{1}{2}$，$p>0$ に注意して　$\boldsymbol{p=\sqrt{1-\dfrac{1}{4a^2}}}$　$\cdots$④

③，④ を ① に代入すると

$$-\frac{1}{2a}=a\left(1-\frac{1}{4a^2}\right)+b \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b=-\left(a+\frac{1}{4a}\right)}$$

(3) $\angle \mathrm{P_1OP_2}=90^\circ$ のとき，直線 $\mathrm{OP_1}$ の傾きは 1 であるから

$$\frac{q}{p}=1 \quad \text{すなわち} \quad q=p$$

③，④ をこれに代入すると　$-\dfrac{1}{2a}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4a^2}}$

$a<-\dfrac{1}{2}$ に注意して解くと　$a=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$\mathrm{P_1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\mathrm{P_1}$ における C の接線は，傾き -1 の直線であるから，その方程式は

$$y-\frac{1}{\sqrt{2}}=-1\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=-x+\sqrt{2}$$

このとき，b の値は，(1) の結果から　$b=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

よって，求める部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{(-x+\sqrt{2})-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\right\}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\ \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}\end{aligned}$$

13.120　(1) C と D の共有点 Q の座標は，$x^2+y^2=4\cdots$①，$x^2-6y+3=0\cdots$② から x^2 を消去すると

$$y^2+6y-7=0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+7)(y-1)=0$$

①，② より，$\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq 2$ であるから　$y=1$

したがって　$x^2=3$　また $x>0$ より　$x=\sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 1)}$

(2) 放物線 D の方程式は　$y=\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{2}$　これを微分すると　$y'=\dfrac{1}{3}x$

D 上の接点 R の座標を $\left(a,\ \dfrac{1}{6}a^2+\dfrac{1}{2}\right)$ とすると，接線 l の方程式は

$$y=\frac{1}{3}a(x-a)+\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}\quad \text{すなわち}\quad 2ax-6y-a^2+3=0$$

これが，原点を中心とする半径 2 の円に接するから

$$\frac{|-a^2+3|}{\sqrt{4a^2+36}}=2\quad \text{整理すると}\quad a^4-22a^2-135=0$$

したがって　$(a^2+5)(a^2-27)=0$　ゆえに　$a=\pm 3\sqrt{3}$

このとき，接線の方程式は

$$\pm 6\sqrt{3}\,x-6y-27+3=0\quad \text{すなわち}\quad \pm\sqrt{3}\,x-y=4$$

これが，$C:x^2+y^2=4\ (x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線

$$(2\cos\theta)x+(2\sin\theta)y=4$$

に一致するので，$a>0$．したがって

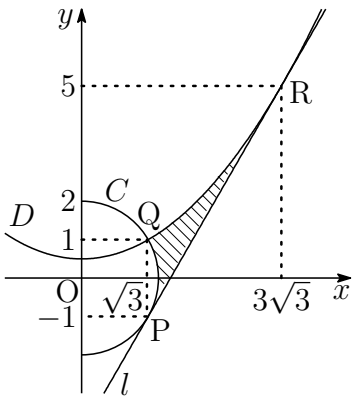
$$a=3\sqrt{3},\ \ 2\cos\theta=\sqrt{3},\ \ 2\sin\theta=-1,\ \ l:y=\sqrt{3}x-4$$

よって　　$\boldsymbol{\theta=-\dfrac{\pi}{6}}$，$\mathbf{R(3\sqrt{3},\ 5)}$

(3) (2) の結果から　$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{3}$

C と線分 PQ で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{\pi}{3}\\&=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\end{aligned}$$

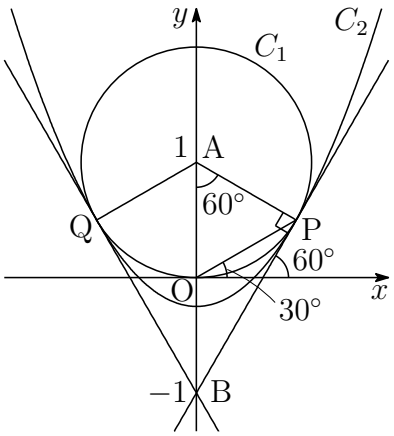


求める面積 S は，図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned}S&=\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}\right)-\left(\sqrt{3}x-4\right)\right\}dx-S_1\\&=\frac{1}{6}\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}(x-3\sqrt{3}\,)^2dx-\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)\\&=\frac{1}{18}\Big[\,(x-3\sqrt{3}\,)^3\,\Big]_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\\&=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3}-\frac{2\pi}{3}}\end{aligned}$$

13.121 (1) △ABP は AB = 2，AP = 1 の直角三角形であるから　∠BAP = 60°
ゆえに，△AOP は 1 辺の長さが 1 の正三角形である．直線 OP と x 軸の正の向きとなす角は 30° であるから，P の座標は

$(\cos 30^\circ,\ \sin 30^\circ)$　すなわち　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$



Q は，P と y 軸に関して対称であるから

$$\mathbf{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

(2) $C_2 : y = f(x)$ とすると，C_2 は y 軸に関して対称であるから，$f(x) = ax^2 + b$ とおける．P は C_2 上の点であるから

$$a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + b = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 3a + 4b = 2 \quad \cdots ①$$

直線 BP と x 軸の正の向きとなす角は 60°
$f'(x) = 2ax$ より，$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tan 60^\circ$ であるから

$$2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad a = 1 \quad \cdots ②$$

② を ① に代入して　$b = -\dfrac{1}{4}$

よって，求める C_2 の方程式　　$\boldsymbol{y = x^2 - \dfrac{1}{4}}$

(3) C_2 上の任意の点を $\mathrm{R}(t,\ t^2 - \frac{1}{4})$ とおくと

$$\mathrm{AR}^2 = t^2 + \left\{\left(t^2 - \frac{1}{4}\right) - 1\right\}^2 = t^2 + \left(t^2 - \frac{5}{4}\right)^2$$
$$= t^4 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{25}{16} = \left(t^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + 1$$

よって，点 A から放物線 C_2 上の各点までの距離は 1 以上である．

(4) 直線 BP の方程式は，$y=\sqrt{3}\,x-1$ であるから

$$\frac{S}{2}=\triangle\mathrm{ABP}-\text{扇形 OAP}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(x^2-\frac{1}{4}\right)-\left(\sqrt{3}\,x-1\right)\right\}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}$$

よって　　$\boldsymbol{S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}}$

13.122 (1) R は，xy 平面上の放物線 $y=x^2-x+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上を動く．
放物線と原点を通る直線 $y=kx$ が接するときの k の値は，2 式から y を消去して

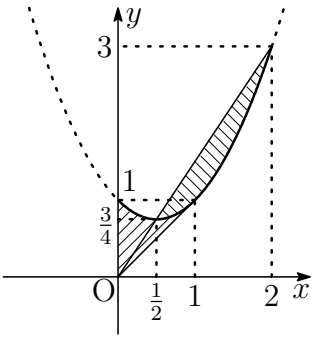
$$x^2-x+1=kx\quad\text{すなわち}\quad x^2-(k+1)x+1=0$$

この方程式の判別式および重解について，$D=0$，$x=\dfrac{k+1}{2}$ であるから

$$(k+1)^2-4\cdot1\cdot1=0,\quad 0\leqq\frac{k+1}{2}\leqq 2$$

したがって　　$k=1$

よって，原点を通る直線 $y=x$ は，点 $(1,\ 1)$ で接する．原点と点 $(2,\ 3)$ を通る直線 $y=\frac{3}{2}x$ は，放物線との交点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$ をもつから，求める面積を S とすると，右の図から



$$S=\int_0^1\{(x^2-x+1)-x\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^2\left\{\frac{3}{2}x-(x^2-x+1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1(x-1)^2\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx=\boldsymbol{\frac{43}{48}}$$

別解　数学 III (熊大 [医]2011) 4

(2) K は xy 平面に関して対称であるから，求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{OP}\times 2=\frac{1}{3}\cdot\frac{43}{48}\cdot1\times 2=\boldsymbol{\frac{43}{72}}$$

13.123 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

ゆえに，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - p^2 \quad \cdots ①$$

同様に，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線の方程式は　$y = 2qx - q^2$　$\cdots ②$

R の座標は，①，② を解いて　$\left(\dfrac{\boldsymbol{p+q}}{\boldsymbol{2}},\ \boldsymbol{pq}\right)$

(2) $p = -1$，$q = 2$ より，$y = x^2$ の P，Q における接線の方程式は，それぞれ

$$y = -2x - 1, \quad y = 4x - 4$$

また，R の x 座標は　$x = \dfrac{-1+2}{2} = \dfrac{1}{2}$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{x^2 - (-2x - 1)\}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \{x^2 - (4x - 4)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x+1)^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (x-2)^2\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x+1)^3\ \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\ \frac{1}{3}(x-2)^2\ \right]_{\frac{1}{2}}^{2} \\ &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \boldsymbol{\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

解説 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S = \frac{1}{2}S_1, \qquad S_1 = \frac{1}{6}\{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2}$$

13.124 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

C の点 $\mathrm{P}(2,\ 4)$ における接線の傾きは 4 であるから，l の方程式は

$$y - 4 = 4(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 4x - 4}$$

(2) l と直線 $y=-1$ の交点 Q は $\left(\dfrac{3}{4},\ -1\right)$

R の座標を $(a,\ a^2)$ とすると $(a \neq 2)$，傾きは $2a$ となるから，その方程式は

$$y - a^2 = 2a(x-a)$$

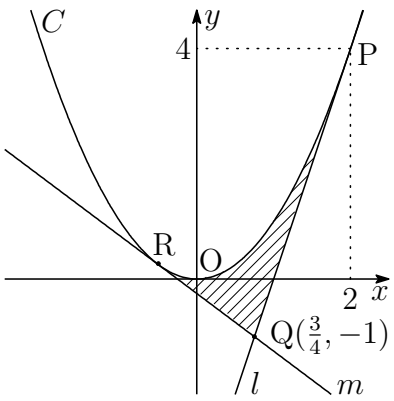
すなわち　$y = 2ax - a^2$　$\cdots$①

これが点 Q を通るから

$$-1 = 2a\cdot\frac{3}{4} - a^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2a^2 - 3a - 2 = 0$$

したがって　$(a-2)(2a+1)=0$　$a \neq 2$ に注意して　$a = -\dfrac{1}{2}$

これを ① に代入すると　　$\boldsymbol{y = -x - \dfrac{1}{4}}$



(3) 求める面積 S は，上の図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \left\{x^2 - \left(-x - \frac{1}{4}\right)\right\} dx + \int_{\frac{3}{4}}^{2} \{x^2 - (4x-4)\}\, dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 dx + \int_{\frac{3}{4}}^{2} (x-2)^2\, dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\ \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} + \left[\ \frac{1}{3}(x-2)^3\ \right]_{\frac{3}{4}}^{2} = \boldsymbol{\frac{125}{96}} \end{aligned}$$

解説　1. 放物線 C 上の 2 点 P，R におけるそれぞれの接線 l，m の交点 Q の x 座標は，2 点 P，R の中点の x 座標である．

2. C と直線 PR で囲まれた部分の面積を S_0 とすると，C と 2 接線 l，m で囲まれた部分の面積 S は (S_0 は，x^2 の係数および接点の x 座標から)

$$S = \frac{1}{2}S_0, \qquad S_0 = \frac{1}{6}\left\{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3 = \frac{125}{48}$$

13.125　(1) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が点 $\mathrm{P}(1,-2)$，$\mathrm{Q}(5,\ 10)$ を通るから

$$-2 = a + b + c, \quad 10 = 25a + 5b + c$$

これを解いて　　$\boldsymbol{b = -6a + 3,\ c = 5a - 5}$

(2) $f(x)=ax^2+(-6a+3)x+5a-5$ とおくと，$f'(x)=2ax-6a+3$ より

$$f'(1)=-4a+3,\quad f'(5)=4a+3$$

ゆえに，P における接線 l の方程式は

$$y-(-2)=(-4a+3)(x-1)$$

すなわち　$y=(-4a+3)x+4a-5$　　$\cdots$①

また，Q における接線 m の方程式は

$$y-10=(4a+3)(x-5)$$

すなわち　$y=(4a+3)x-20a-5$　　$\cdots$②

l と m の交点は，①，② を解いて　$(3,\,-8a+4)$

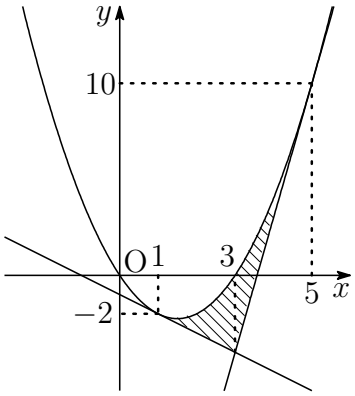
この交点の y 座標が -4 であるから

$$-8a+4=-4\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=1}$$

これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{b=-3,\ c=0}$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_1^3\{(x^2-3x)-(-x-1)\}dx\\&\qquad+\int_3^5\{(x^2-3x)-(7x-25)\}dx\\&=\int_1^3(x-1)^2\,dx+\int_3^5(x-5)^2\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}(x-5)\right]_3^5=\boldsymbol{\frac{16}{3}}\end{aligned}$$



解説　1. l と m の交点の x 座標は　$x=\dfrac{1+5}{2}$

2. C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S=\frac{1}{2}S_1,\qquad S_1=\frac{1}{6}(5-1)^3=\frac{32}{3}$$

13.126　(1) $x^2+y^2-4y+3=0$ より　$x^2+(y-2)^2=1$

この円の中心は $(0,\ 2)$ で半径 1 の円であるから，C 上の点を $(x,\ y)$ とすると，$y>-1$ であるから，条件により

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}-1=y-(-1)\quad \text{ゆえに}\quad \sqrt{x^2+(y-2)^2}=y+2$$

平方すると　$x^2+(y-2)^2=(y+2)^2$　整理すると　$\boldsymbol{y=\frac{1}{8}x^2}$

(2) (1) で求めた C の方程式に $y=2$ を代入すると

$$2=\frac{1}{8}x^2 \quad \text{これを解いて} \quad x=\pm 4$$

$y=\dfrac{1}{8}x^2$ を微分すると $\quad y'=\dfrac{1}{4}x$

C の点 $(4,\ 2)$ における接線の傾きは 1 であるから，その方程式は

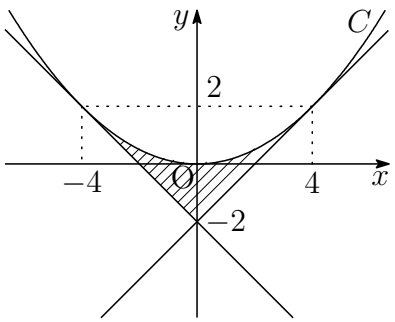
$$y-2=(x-4) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=x-2} \quad \cdots ①$$

C の点 $(-4,\ 2)$ における接線の傾きは -1 であるから，その方程式は

$$y-2=-(x+4) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-x-2} \quad \cdots ②$$

(3) C と ①，② で囲まれた図形は y 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^4\left\{\frac{1}{8}x^2-(x-2)\right\}dx\\&=\left[\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^4=\frac{8}{3}\end{aligned}$$



よって $\quad \boldsymbol{S=\dfrac{16}{3}}$

補足 $\dfrac{S}{2}=\displaystyle\int_0^4\left\{\frac{1}{8}x^2-(x-2)\right\}dx=\int_0^4\frac{1}{8}(x-4)^2\,dx=\left[\frac{1}{24}(x-4)^3\right]_0^4=\frac{8}{3}$

13.127 (1) A$(2,\ 1)$，B$(1,-1)$ を $t:1-t$ に内分する点 P の座標は

$$((1-t)\cdot 2+t\cdot 1,\ (1-t)\cdot 1+t\cdot(-1)) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(2-t,\ 1-2t)}$$

(2) B$(1,-1)$，C$(0,\ 1)$ を $t:1-t$ に内分する点 Q の座標は

$$((1-t)\cdot 1+t\cdot 0,\ (1-t)\cdot(-1)+t\cdot 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(1-t,\ -1+2t)}$$

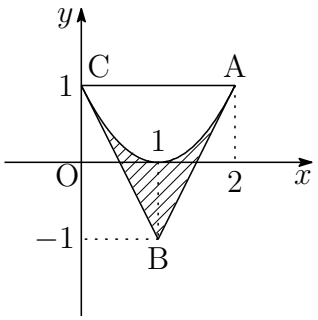
(3) P$(2-t,\ 1-2t)$，Q$(1-t,-1+2t)$ を $t:1-t$ に内分する点 R$(x,\ y)$ は

$$\begin{aligned}x&=(1-t)(2-t)+t(1-t)=2(1-t)\\y&=(1-t)(1-2t)+t(-1+2t)=(1-2t)^2\end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq 1$ より，$0\leqq x\leqq 2$．上の 2 式から t を消去すると $\quad y=(x-1)^2$

よって，R の軌跡の方程式は $\quad \boldsymbol{y=(x-1)^2\ \ (0\leqq x\leqq 2)}$

(4) 直線 BC の方程式は　$y=-2x+1$



求める面積を S とすると

$$\frac{S}{2}=\int_0^1\{(x-1)^2-(-2x+1)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]=\frac{1}{3}$$

よって　　$S=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

13.128　(1) $y=x^2-3x$ を微分すると　$y'=2x-3$

C 上の点 $(a,\ a^2-3a)$ における接線の方程式は

$$y-(a^2-3a)=(2a-3)(x-a)\quad\text{ゆえに}\quad y=(2a-3)x-a^2$$

これが A$(2,-6)$ を通るから

$$-6=(2a-3)\cdot 2-a^2\quad\text{これを解いて}\quad a=0,\ 2$$

よって，求める接線は　$\boldsymbol{y=5x-16,\ \ y=-3x}$

(2) C 上の点 P$(t,\ t^2-3t)$ に対して線分 AP の中点を Q$(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{2+t}{2},\quad y=\frac{-6+t^2-3t}{2}$$

上式の第 1 式から　$t=2x-2$　これを第 2 式に代入すると

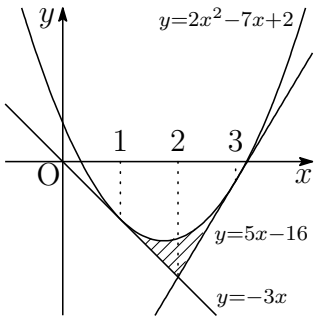
$$y=\frac{-6+(2x-2)^2-3(2x-2)}{2}=2x^2-7x+2$$

よって，点 Q の軌跡の方程式は　　$\boldsymbol{y=2x^2-7x+2}$

(3) $y=2x^2-7x+2\cdots$①，$y=-3x\cdots$②，$y=5x-16\cdots$③ とおく．

①，② から y を消去すると

$$2x^2-4x+2=0\quad\text{ゆえに}\quad 2(x-1)^2=0$$



①，② は点 $(1,\ 0)$ で接する．

また，①，③ から y を消去すると

$$2x^2-12x+18=0\quad\text{ゆえに}\quad 2(x-3)^2=0$$

①，③ は点 $(3,\ 0)$ で接する．

したがって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(2x^2-7x+2)-(-3x)\}\,dx \\ &\qquad + \int_2^3 \{(2x^2-7x+2)-(5x-16)\}\,dx \\ &= \int_1^2 2(x-1)^2\,dx + \int_2^3 2(x-3)^2\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x-1)^3\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}(x-3)^3\right]_2^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

13.129 (1) $y=x^2$ と $y=kx+1$ から y を消去すると

$$x^2 = kx+1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-kx-1=0 \quad \cdots(*)$$

2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=k,\quad \alpha\beta=-1}$$

(2) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線 l の方程式は

$$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2 \quad \text{すなわち} \quad y=2\alpha x-\alpha^2 \quad \cdots①$$

同様に，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ における接線 m の方程式は　$y=2\beta x-\beta^2$　$\cdots②$

①，② を解いて　$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,　$y=\alpha\beta$

(1) の結果より　$\mathrm{R}\left(\dfrac{k}{2},-1\right)$　よって，R の x 座標は　$\boldsymbol{\dfrac{k}{2}}$

(3) (1) の結果から，$\alpha<\beta$ より

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{k^2+4}$$

直線 $y=kx+1$ 上の点で x 座標が $\dfrac{k}{2}$ である点を $\mathrm{S}\left(\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k^2}{2}+1\right)$ とすると

$$\mathrm{RS}=\left(\frac{k^2}{2}+1\right)-(-1)=\frac{1}{2}(k^2+4)$$

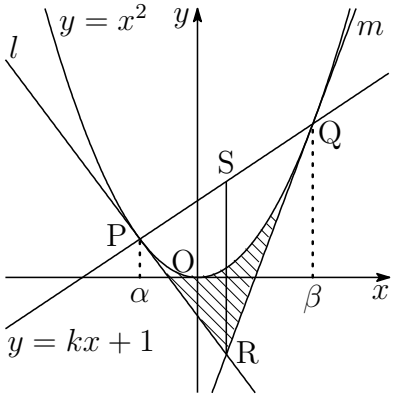
$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{RS}\cdot(\beta-\alpha)=\frac{1}{4}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}$$

(1) の結果から，直線 PQ は

$$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

であるから，直線 PQ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{\alpha}^{\beta}[\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\}-x^2]dx\\&=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$



よって，求める面積は　$\triangle \mathrm{PQR}-S=\dfrac{1}{4}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{6}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}}$

13.130　(1) 接点を $\mathrm{A}(a,\ b)$ とすると，A は円 $x^2+y^2=r^2$ の周上の点であるから

$$a^2+b^2=r^2$$

A を通り，OA に垂直な直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ であるから

$$a(x-a)+b(y-b)=0\quad \text{すなわち}\quad ax+by=a^2+b^2$$

したがって，接線の方程式は　　$ax+by=r^2$

(2) $y=x^2+1$ を微分すると　$y'=2x$
C 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+1)=2t(x-t)\quad \text{すなわち}\quad 2tx-y-t^2+1=0$$

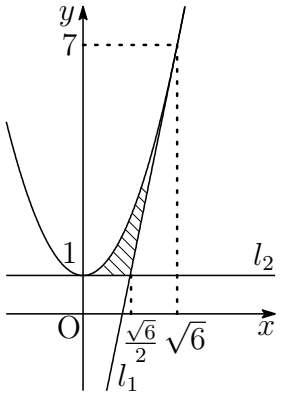
この直線が円 $x^2+y^2=1$ に接するとき，原点からこの直線までの距離が 1 であるから

$$\frac{|-t^2+1|}{\sqrt{(2t)^2+(-1)^2}}=1\quad \text{これを解いて}\quad t=0,\ \pm\sqrt{6}$$

よって，求める 3 本の接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=1,\ \pm 2\sqrt{6}x-y-5=0}$$

(3) 求める面積 S は，右の図の斜線部の面積であるから



$$S=\int_0^{\sqrt{6}}\{(x^2+1)-1\}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot 6$$
$$=2\sqrt{6}-\frac{3\sqrt{6}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

補足 $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}(\sqrt{6}-0)^3=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

13.131 (1) $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと $(a\neq 0)$　　$f'(x)=2ax+b$

これらを $f'(x)\{2f'(x)-x\}=6f(x)+2x+8$ に代入すると

$$(2ax+b)\{2(2ax+b)-x\}=6(ax^2+bx+c)+2x+8$$

x について整理すると

$$2a(4a-1)x^2+(8a-1)bx+2b^2=6ax^2+(6b+2)x+6c+8$$

上式の同じ次数の項の係数を比較すると

$$2a(4a-1)=6a,\quad (8a-1)b=6b+2,\quad 2b^2=6c+8$$

$a\neq 0$ より，上式の第 1 式から，$a=1$．これを第 2 式に代入して，$b=2$．
さらに，$b=2$ を第 3 式に代入して　$c=0$．　よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+2x}$

(2) (i) $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ t^2+2t)$ における接線の方程式は

$$y-t^2=(2t+2)(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=2(t+1)x-t^2$$

これが点 $(0,-k)$ を通るとき

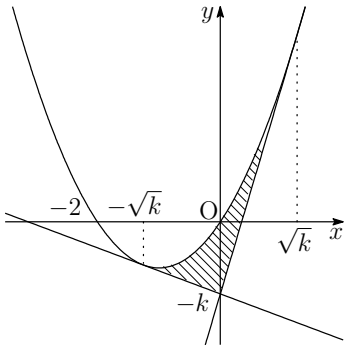
$$-k=-t^2\quad \text{これを解いて}\quad t=\pm\sqrt{k}$$

よって，求める接線の方程式は　　$\boldsymbol{y=2(\pm\sqrt{k}+1)x-k}$

(ii) (1) の結果から

$$f(x)-\{2(\sqrt{k}+1)x-k\}=(x-\sqrt{k})^2,$$
$$f(x)-\{2(-\sqrt{k}+1)x-k\}=(x+\sqrt{k})^2$$

右の図の斜線部分の面積を S とすると



$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{0}(x+\sqrt{k})^2\,dx+\int_{0}^{\sqrt{3}}(x-\sqrt{k})^2\,dx$$
$$=\left[\ \frac{1}{3}(x+\sqrt{k})^3\ \right]_{-\sqrt{3}}^{0}+\left[\ \frac{1}{3}(x-\sqrt{k})^3\ \right]_{0}^{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2}{3}k\sqrt{k}$$

$S=2\sqrt{3}$ より　$\dfrac{2}{3}k\sqrt{k}=2\sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{k=3}$

補足　$S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}\{\sqrt{k}-(-\sqrt{k})\}^3=\dfrac{2}{3}k\sqrt{k}$

13.132　(1)　$f(x)=(x-p)^2+p^2$ とおくと　$f'(x)=2(x-p)$

C 上の x 座標が a である点における接線 l の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

ゆえに　$y-\{(a-p)^2+p^2\}=2(a-p)(x-a)$

よって　$\boldsymbol{y=2(a-p)x-a^2+2p^2}$

同様に，C 上の x 座標が b である点における接線 m の方程式は

$$\boldsymbol{y=2(b-p)x-b^2+2p^2}$$

(2)　l が原点を通るとき，(1) の結果から

$$0=2(a-p)\cdot0-a^2+2p^2=0\quad\text{ゆえに}\quad a^2=2p^2$$

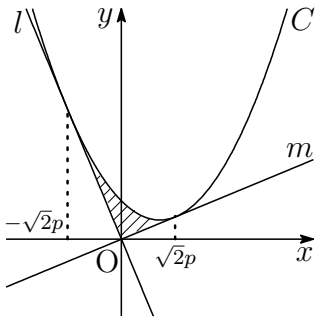
$a<0$，$p>0$ であるから　$\boldsymbol{a=-\sqrt{2}p}$

同様に，m が原点を通るとき，(1) の結果から　$b^2=2p^2$

$b>0$，$p>0$ であるから　$\boldsymbol{b=\sqrt{2}p}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$l : y = -2(\sqrt{2}+1)px$$
$$m : y = 2(\sqrt{2}-1)px$$



よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{2}p}^{0} [(x-p)^2 + p^2 - \{-2(\sqrt{2}+1)px\}]dx \\ &\qquad + \int_{0}^{\sqrt{2}p} \{(x-p)^2 + p^2 - 2(\sqrt{2}-1)px\}dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}p}^{0} (x+\sqrt{2}p)^2 dx + \int_{0}^{\sqrt{2}p} (x-\sqrt{2}p)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+\sqrt{2}p)^3 \right]_{-\sqrt{2}p}^{0} + \left[\frac{1}{3}(x-\sqrt{2}p)^3 \right]_{0}^{\sqrt{2}p} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}p^3} \end{aligned}$$

補足 $S = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6}\{\sqrt{2}p - (-\sqrt{2}p)\}^3 = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}p^3$

13.133 (1) 2 次方程式 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ が重解をもつ条件は，係数から

$$\boldsymbol{\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0}$$

(2) k を定数とする．直線 $y = kx$ と放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が接するとき，

$$ax^2 + bx + c = kx \quad \text{すなわち} \quad ax^2 + (b-k)x + c = 0 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ が重解をもつから　　$(b-k)^2 - 4ac = 0$

k について整理すると　　$k^2 - 2bk + b^2 - 4ac = 0$

この k の 2 次方程式の解が $\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}$ であるから，解と係数の関係により

$$\frac{5}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 2b, \quad \frac{5}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = b^2 - 4ac$$

上の第 1 式から　$\boldsymbol{b = 1}$　これを第 2 式に代入することにより

$$4ac = \frac{9}{4} \quad \text{このとき，} a \neq 0 \text{ であるから} \quad \boldsymbol{c = \frac{9}{16a}}$$

(3) 接点の x 座標は，$(*)$ および $b=1$ から　$x=-\dfrac{b-k}{2a}=\dfrac{k-1}{2a}$

これにそれぞれ $k=\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$ を代入することにより

$$\text{P の } x \text{ 座標は}\quad \boldsymbol{x=\frac{3}{4a}},\qquad \text{Q の } x \text{ 座標は}\quad \boldsymbol{x=-\frac{3}{4a}}$$

(4) (2) の結果により，放物線 C の方程式は

$$y=ax^2+x+\frac{9}{16a}=a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{5}{16a}$$

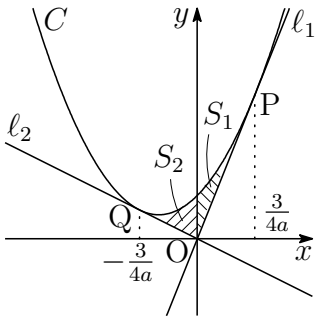
ゆえに，C の頂点を $(X,\ Y)$ とおくと

$$X=-\frac{1}{2a},\quad Y=\frac{5}{16a}$$

上の 2 式から a を消去すると　　$Y=-\dfrac{5}{8}X$

よって，求める m の方程式は　　$\boldsymbol{y=-\dfrac{5}{8}x}$

(5) (2)，(3) の結果から，C と y 軸，ℓ_1 で囲まれた部分の面積を S_1 とすると



$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^{\frac{3}{4a}}\left\{\left(ax^2+x+\frac{9}{16a}\right)-\frac{5}{2}x\right\}dx\\&=a\int_0^{\frac{3}{4a}}\left(x-\frac{3}{4a}\right)^2dx\\&=a\left[\ \frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{4a}\right)^3\ \right]_0^{\frac{3}{4a}}=\frac{9}{64a^2}\end{aligned}$$

同様に，C と y 軸，ℓ_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned}S_2&=\int_{-\frac{3}{4a}}^{0}\left\{\left(ax^2+x+\frac{9}{16a}\right)-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right\}dx\\&=a\int_{-\frac{3}{4a}}^{0}\left(x+\frac{3}{4a}\right)^2dx\\&=a\left[\ \frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{4a}\right)^3\ \right]_{-\frac{3}{4a}}^{0}=\frac{9}{64a^2}\end{aligned}$$

よって，求める面積を S とすると

$$S=S_1+S_2=\frac{9}{64a^2}+\frac{9}{64a^2}=\boldsymbol{\frac{9}{32a^2}}$$

補足 x^2 の係数および接点の x 座標から

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{a}{6}\left\{\frac{3}{4a}-\left(-\frac{3}{4a}\right)\right\}^3=\frac{9}{32a^2}$$

13.134 (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$.
点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a)\quad\text{ゆえに}\quad y=2ax-a^2\quad\cdots①$$

同様に，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線の方程式は　$y=2bx-b^2$　$\cdots②$
①，② を解いて　　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\frac{a+b}{2},\ ab}\right)$
直線 PQ の方程式は

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)\quad\text{すなわち}\quad y=(a+b)x-ab$$

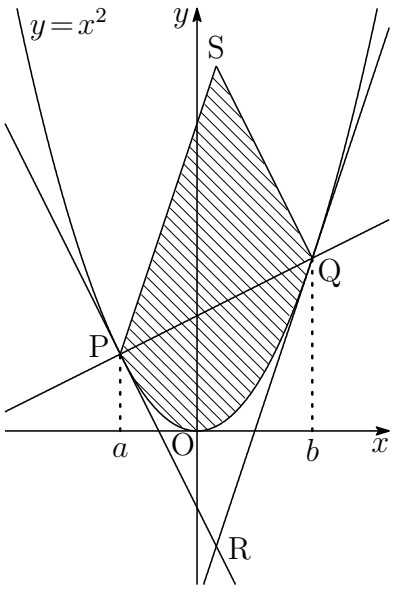
直線 PQ 上の x 座標が $\dfrac{a+b}{2}$ である点を M とすると　$\mathrm{M}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$

このとき　　$\mathrm{MR}=\dfrac{a^2+b^2}{2}-ab=\dfrac{1}{2}(b-a)^2$

よって　$\triangle\mathrm{PRQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{MR}\times(b-a)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}(b-a)^2\times(b-a)=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(b-a)^3}$

(2) 直線 PQ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}&\int_a^b\{(a+b)x-ab-x^2\}\,dx\\=&-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx\\=&\frac{1}{6}(b-a)^3\end{aligned}$$



$\triangle$PSQ の面積は $\triangle$PRQ の面積に等しいので，上式および (1) の結果から，求める図形の面積は

$$\frac{1}{6}(b-a)^3+\frac{1}{4}(b-a)^3=\boldsymbol{\frac{5}{12}(b-a)^3}$$

(3) $\angle \mathrm{PRQ} = 90^\circ$ のとき，直線 ①，② は直交するので

$$2a \times 2b = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{4b}$$

これを ② の結果に代入すると $\quad \dfrac{5}{12}\left(b + \dfrac{1}{4b}\right)^3$

ここで，$b > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$b + \frac{1}{4b} \geqq 2\sqrt{b \times \frac{1}{4b}} = 1$$

よって，求める最小値は $\quad \dfrac{5}{12} \cdot 1^3 = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

補足 (九大 [文]2009) 4

13.135 (1) 求める直線を $l : y = px + q$ とおく．C_1 と l の方程式から y を消去すると

$$2x^2 + 1 = px + q \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - px - q + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と l は接するので，方程式 $(*)$ の係数について

$$(-p)^2 - 4 \cdot 2(-q + 1) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 + 8q - 8 = 0 \quad \cdots ①$$

同様に，C_2 と l の方程式から y を消去すると

$$-x^2 + a = px + q \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + px + q - a = 0 \quad \cdots (**)$$

C_2 と l は接するので，上の方程式の係数について

$$p^2 - 4 \cdot 1(q - a) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - 4q + 4a = 0 \quad \cdots ②$$

①，② から $\quad p^2 = \dfrac{8}{3}(1 - a)$，$q = \dfrac{1}{3}(a + 2)$

よって，求める 2 直線の方程式は

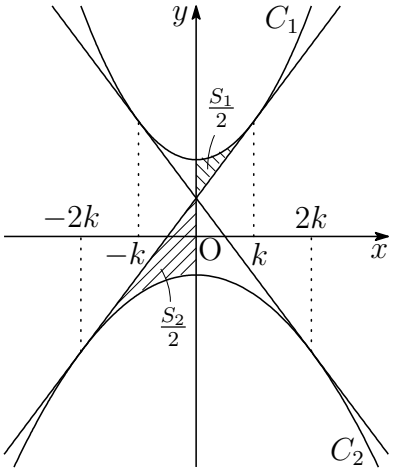
$$\boldsymbol{y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1 - a)}\, x + \frac{1}{3}(a + 2)}$$

(2) (1) の結果から，次の 2 式は平方式になることに注意して

$$2x^2 + 1 - (px + q) = 2\left(x - \frac{p}{4}\right)^2$$

$$px + q - (-x^2 + a) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$p=2\sqrt{\dfrac{2}{3}(1-a)}$ のとき，$k=\dfrac{p}{4}$ とおく．
C_1，C_2 および 2 接線は y 軸に関して対称であることに注意して

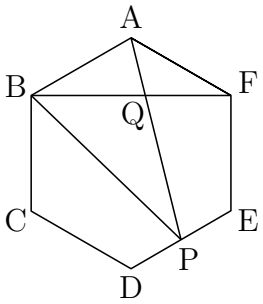


$$\frac{S_1}{2}=\int_0^k 2(x-k)^2\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(x-k)^3\right]_0^k=\frac{2k^3}{3},$$
$$\frac{S_2}{2}=\int_{-2k}^0 (x+2k)^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x+2k)^3\right]_{-2k}^0=\frac{8k^3}{3}$$

よって　$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{16k^3}{3}\times\dfrac{3}{4k^3}=\mathbf{4}$

解説　(九大 [文]2017) 1

14.1　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}$
$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}$



よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$
$=\dfrac{\mathbf{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AF}}}{\mathbf{2}}$

(2)　(1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{7}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{7}\cdots①$　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

よって　$\mathrm{AQ}:\mathrm{QP}=1:\dfrac{7}{2}-1=\mathbf{2:5}$

(3)　$\triangle\mathrm{ABF}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

① より，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QF}=4:3$ であるから

$$\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{4}{4+3}\triangle\mathrm{ABF}=\frac{4}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{7}$$

(2) の結果から

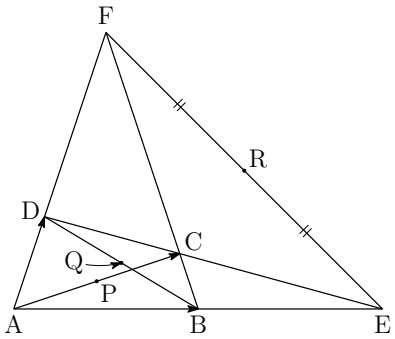
$$\triangle\mathrm{BPQ}=\frac{5}{2}\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{5}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{7}=\mathbf{\frac{5}{14}\sqrt{3}}$$

14.2 (1) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

$$= \left(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}\right) - \vec{d} = \frac{2}{5}(2\vec{b} - \vec{d})$$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$= \left(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}\right) - \vec{b} = \frac{1}{5}(-\vec{b} + 3\vec{d})$$



したがって

$$\overrightarrow{AE} = \vec{d} + \alpha(2\vec{b} - \vec{d}) = 2\alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{d}$$
$$\overrightarrow{AF} = \vec{b} + \beta(-\vec{b} + 3\vec{d}) = (1-\beta)\vec{b} + 3\beta\vec{d}$$

E，F はそれぞれ直線 AB，AC 上の点であるから

$$1 - \alpha = 0, \quad 1 - \beta = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \alpha = \beta = 1$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{AE} = 2\vec{b},\ \overrightarrow{AF} = 3\vec{d}}$

(2) Q は線分 BD の中点であるから　　$\overrightarrow{AQ} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2} = \dfrac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$

R は線分 EF の中点であるから　　$\overrightarrow{AR} = \dfrac{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}}{2} = \dfrac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{2}$

よって　　$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AQ} = \dfrac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{2} - \dfrac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{d}}$

(3) P は AC の中点であるから　　$\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{5}\vec{b} + \dfrac{3}{10}\vec{d}$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{d}\right) - \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = -\frac{1}{10}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{d}$$

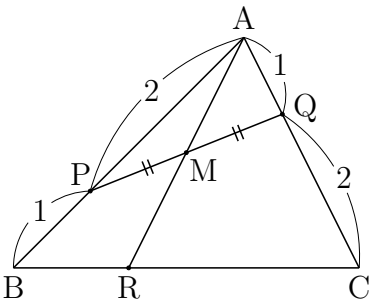
ゆえに　$\overrightarrow{QP} = -\dfrac{1}{5}\overrightarrow{QR}$　　よって，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．

14.3 (1) M は線分 PQ の中点であるから

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

条件から　$\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

したがって　$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$



点 A，M，R が一直線上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{6}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

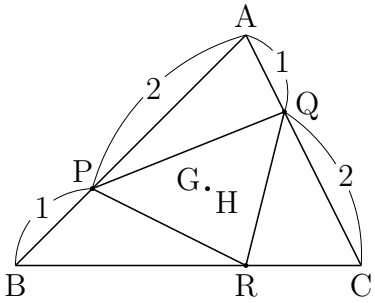
R は直線 BC 上の点であるから

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = 2$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ よって **BR : RC = 1 : 2**

(2) G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



H は △PQR の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}\right)$$

これに $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}\right) = \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから

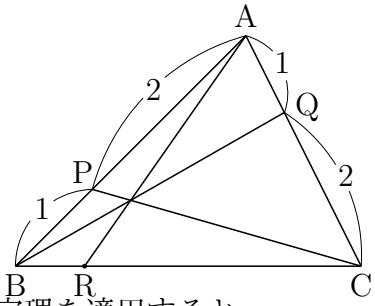
$$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ よって **BR : RC = 2 : 1**

(3) チェバの定理により $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = 1$

したがって $\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{2}{1}$ ゆえに $\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}} = \dfrac{1}{4}$

よって **BR : RC = 1 : 4**



14.4 (1) △OAM と直線 BD について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EM}}\cdot\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BO}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{h}{1-h}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EM}}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

AE : EM $= 2(1-h) : h$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{h\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2(1-h)\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{2(1-h)+h} = \frac{\boldsymbol{h\vec{a} + (1-h)\vec{b}}}{\boldsymbol{2-h}}$$

(2) OA = 3，OM = 2，∠AOM = 60° であるから，△OAM に余弦定理を適用すると

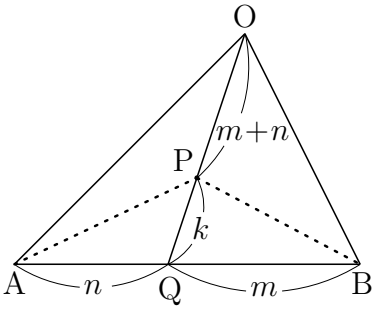
$$\mathrm{AM}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ = 7 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AM} = \sqrt{7}$$

$\mathrm{AE} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ より，E は AM の中点であるから

$$2(1-h) : h = 1 : 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{h = \frac{2}{3}}$$

14.5 (1) 線分 AB を $n : m$ に内分する点を Q とすると

$$m\overrightarrow{\mathrm{PA}} + n\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (m+n)\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$



これを条件式

$$k\overrightarrow{\mathrm{PO}} + m\overrightarrow{\mathrm{PA}} + n\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{0} \quad \cdots (*)$$

に代入すると

$$k\overrightarrow{\mathrm{PO}} + (m+n)\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \vec{0} \quad \cdots (**)$$

P は線分 OQ を $m+n : k$ に内分する点であるから，$S = \triangle\mathrm{OAB}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{PAB} &= \frac{k}{k+(m+n)}S, \\
\triangle\mathrm{POB} &= \frac{m+n}{k+(m+n)}\triangle\mathrm{OBQ} \\
&= \frac{m+n}{k+(m+n)} \times \frac{m}{m+n}S = \frac{m}{k+(m+n)}S, \\
\triangle\mathrm{POA} &= \frac{m+n}{k+(m+n)}\triangle\mathrm{OAQ} \\
&= \frac{m+n}{k+(m+n)} \times \frac{n}{m+n}S = \frac{n}{k+(m+n)}S
\end{aligned}$$

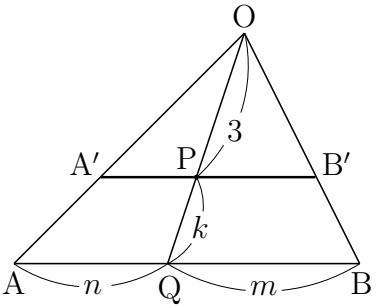
$(*)$ が成り立つとき　　$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{POB} : \triangle\mathrm{POA} = k : m : n$

よって　　$\triangle\mathrm{POA} : \triangle\mathrm{POB} : \triangle\mathrm{PAB} = n : m : k = \mathbf{2 : 1 : 4}$

(2) $m+n=3$ を $(**)$ に代入すると

$$-k\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\vec{0}$$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{k+3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$



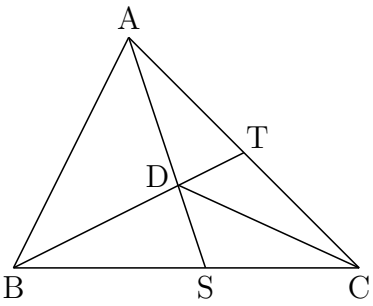
OA，OB を $3:k$ に内分する点を，それぞれ A′，B′ とする．$m \geqq 0$，$n \geqq 0$ であるから，点 P の軌跡は線分 A′B′ である．

(3) $k=1$ のとき，A′，B′ は，それぞれ OA，OB を $3:1$ に内分する点であるから，$k \geqq 1$，$m \geqq 0$，$n \geqq 0$ のとき，D の表す領域は △OA′B′ である．
したがって，D の面積は △OAB の面積の

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}\quad \text{倍}$$

14.6 (1) 右の図から

$$\begin{aligned}\mathrm{BS}:\mathrm{SC}&=\triangle\mathrm{SAB}:\triangle\mathrm{SCA}\\&=\triangle\mathrm{DAB}:\triangle\mathrm{DCA}=\boldsymbol{r}:\boldsymbol{q},\\\mathrm{CT}:\mathrm{TA}&=\triangle\mathrm{TBC}:\triangle\mathrm{TAB}\\&=\triangle\mathrm{DBC}:\triangle\mathrm{DAB}=\boldsymbol{p}:\boldsymbol{r}\end{aligned}$$



(2) △BCT および直線 AS について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AT}}\cdot\frac{\mathrm{TD}}{\mathrm{DB}}=1\quad\text{ゆえに}\quad\frac{r}{q}\times\frac{p+r}{r}\times\frac{\mathrm{TD}}{\mathrm{DB}}=1$$

したがって　　$\mathrm{TD}:\mathrm{DB}=q:p+r$

D は TB を $q:p+r$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{(p+r)\overrightarrow{\mathrm{OT}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{q+(p+r)}\qquad\cdots①$$

T は CA を $p:r$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{r\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{p+r}\qquad\cdots②$$

② を ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{(p+r)\cdot\dfrac{r\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{p+r}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{q+(p+r)}=\frac{p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}+r\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{p+q+r}$$

14.7 (1) A，B，C，D，P，Q，R，S の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$ とすると

$$\vec{p}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) \qquad \vec{q}=\frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{a})$$
$$\vec{r}=\frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b}) \qquad \vec{s}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})-\frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって　AC//RP

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})-\frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{a})=\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　$\cdots$①

よって　AB//QP

(3) (2) と同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{a})-\frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \cdots ②$$
$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\frac{1}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}(\vec{d}-\vec{c})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad \cdots ③$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{d})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}} \quad \cdots ④$$

①，② より　$\angle\mathrm{PQR}=\angle\mathrm{ABC}$　$\cdots$⑤

③，④ より　$\angle\mathrm{RSP}=\angle\mathrm{CDA}$　$\cdots$⑥

四角形 ABCD は円に内接するので　$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{CDA}=180^\circ$　$\cdots$⑦

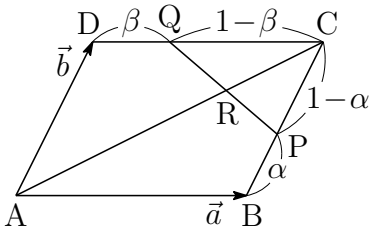
⑤，⑥，⑦ より　$\angle\mathrm{PQR}+\angle\mathrm{RSP}=180^\circ$

よって，4 点 P，Q，R，S は同一円周上にある．

14.8 (1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\boldsymbol{\vec{a}+\alpha\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\boldsymbol{\vec{b}+\beta\vec{a}}$$



(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-\alpha\beta)\vec{a}, \quad -\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-\alpha\beta)\vec{b}$$

$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ より，$1-\alpha\beta\neq 0$ であるから

$$\vec{a}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}, \quad \vec{b}=\frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{a} + \vec{b} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta} + \frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}$$
$$= \frac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}$$
$$= \frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta} \times \frac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(1-\alpha)+(1-\beta)}$$

ゆえに $\quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(1-\alpha)+(1-\beta)}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$

よって $\quad \mathbf{\dfrac{QR}{RP} = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}}, \quad \mathbf{\dfrac{AR}{AC} = \dfrac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}}$

(3) $\quad \triangle\mathrm{AQR} = \dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} \times \triangle\mathrm{AQC}$
$$= \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{DC}} \times \triangle\mathrm{ADC}$$
$$= \frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta} \times (1-\beta) \times \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin 120^\circ$$
$$= \mathbf{\frac{\sqrt{3}(1-\alpha\beta)(1-\beta)}{2(2-\alpha-\beta)}}$$

14.9 (1) C は直線 AB 上にあるから，実数 α を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= \alpha(2,\ 6) + (1-\alpha)(3,\ 4)$$
$$= (3-\alpha,\ 4+2\alpha)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 4) - (2,\ 6) = (1, -2)$ であるから

$$(3-\alpha)\cdot 1 + (4+2\alpha)\cdot(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = -1$$

したがって $\quad \mathbf{C(4,\ 2)}$

与式および上の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$= s(2,\ 6) + t(3,\ 4) - (4,\ 2)$$
$$= (2s+3t-4,\ 6s+4t-2)$$

よって $\quad |\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = (2s+3t-4)^2 + (6s+4t-2)^2$
$$= \mathbf{40s^2 + 25t^2 + 60st - 40s - 40t + 20}$$

(2) (1) の結果を t について整理すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= 25t^2-(40-60s)t+40s^2-40s+20\\ &= 2\left(t-\frac{4-6s}{5}\right)^2+4s^2+8s+4 \quad (t \geqq 0)\end{aligned}$$

i) $0 \leqq \dfrac{4-6s}{5}$ すなわち $s \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき

$t=\dfrac{4-6s}{5}$ で最小値 $4s^2+8s+4$ をとる.

ii) $\dfrac{4-6s}{5}<0$ すなわち $s>\dfrac{2}{3}$ のとき

$t=0$ で最小値 $40s^2-40s+20$ をとる.

i), ii) より, $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値は

$$\boldsymbol{s \leqq \frac{2}{3}} \textbf{ のとき } \boldsymbol{4s^2+8s+4}, \quad \boldsymbol{s>\frac{2}{3}} \textbf{ のとき } \boldsymbol{40s^2-40s+20}$$

14.10 (1) △ADC と直線 PE について, メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m}{n}=1$$

$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=n(m+n):m^2 \cdots$ ① であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}\cdot\frac{n\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{m+n}\\ &= \frac{n}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}})\end{aligned}$$

A, B, C, P, Q, R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ とすると

$$\begin{aligned}\vec{p}-\vec{a} &= \frac{n}{m^2+mn+n^2}\{n(\vec{b}-\vec{a})+m(\vec{c}-\vec{a})\}\\ \vec{p} &= \frac{m^2\vec{a}+n^2\vec{b}+mn\vec{c}}{m^2+mn+n^2}\end{aligned}$$

A, B, C と P, Q, R の対称性により

$$\vec{q}=\frac{m^2\vec{b}+n^2\vec{c}+mn\vec{a}}{m^2+mn+n^2}, \qquad \vec{r}=\frac{m^2\vec{c}+n^2\vec{a}+mn\vec{b}}{m^2+mn+n^2}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = \dfrac{m^2\overrightarrow{\mathrm{CA}} + n^2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + mn\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{m^2+mn+n^2}$

$= \dfrac{-m^2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + n^2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + mn(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})}{m^2+mn+n^2}$

$= \dfrac{n-m}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \dfrac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　$\cdots$②

同様にして　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \dfrac{n-m}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{BC}} + m\overrightarrow{\mathrm{BA}}) = \dfrac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \dfrac{n-m}{m^2+mn+n^2}(n\overrightarrow{\mathrm{CA}} + m\overrightarrow{\mathrm{CB}}) = \dfrac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BE}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CF}}|$ であるから

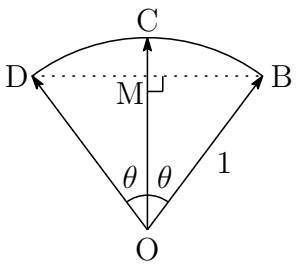
$|\overrightarrow{\mathrm{RP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{QR}}|$　よって　△PQR は正三角形

(2) ① より　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}$

② より　$\dfrac{\mathrm{RP}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{n^2-m^2}{m^2+mn+n^2}$

$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}} - \dfrac{\mathrm{RP}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{m(m+n)}{m^2+mn+n^2}$　よって　$\mathrm{AR} : \mathrm{AP} = m : n$

14.11　(1) B，D の中点を M とすると，M は OC 上にあり，



$\mathrm{OM} = \cos\theta$

したがって　$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$

ゆえに　$\dfrac{\vec{b} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2} = (\cos\theta)\vec{c}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2(\cos\theta)\vec{c} - \vec{b}}$

(2) (1) と同様に，A，C の中点を N とすると

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2} = \overrightarrow{\mathrm{ON}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = (\cos\theta)\vec{b}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2(\cos\theta)\vec{b} - \vec{c}$

AC と BD の交点 P は，実数 s，t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\{2(\cos\theta)\vec{b} - \vec{c}\} + (1-s)\vec{c} = (1-t)\vec{b} + t\{2(\cos\theta)\vec{c} - \vec{b}\}$

整理すると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2s(\cos\theta)\vec{b} + (1-2s)\vec{c} = (1-2t)\vec{b} + 2t(\cos\theta)\vec{c}$

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$2s\cos\theta = 1-2t, \quad 1-2s = 2t\cos\theta$$

上の 2 式から　　$2s = 2t = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)\vec{b} + \left(\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)\vec{c}}$

14.12　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$= 5^2 - 2\cdot3 + 1^2 = 20$

よって　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = 2\sqrt{5}}$

14.13　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 3\cdot2\cdot\dfrac{1}{2} = 3$

$$|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2 - 2\cdot3 + 9\cdot2^2 = 27$$

よって　　$\boldsymbol{|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3\sqrt{3}}$

14.14　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ \sqrt{3})$,　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ であるから

$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ のとき　最大値 **2**

14.15　△ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{3^2 + 4^2 - (\sqrt{13})}{2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{2}$$

よって　　$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos A = 4\cdot3\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{6}$

BC の中点を M とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

また　$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}| = \frac{1}{3}|\vec{b}+\vec{c}| = \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{4^2 + 2\cdot 6 + 3^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{37}}{3}}$

14.16　(1)　$|\vec{a}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}|\cos\theta$ であるから

$$|3\vec{a}+t\vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 + 6t\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$$
$$= |\vec{b}|^2t^2 + 6t|\vec{b}|\cos\theta + 9$$
$$= |\vec{b}|^2\left(t + \frac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}\right)^2 - 9\cos^2\theta + 9$$

$|3\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき，$|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は最小となる．

よって，$\boldsymbol{t = -\frac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}}$ のとき，$|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は最小となる．

(2)　$|3\vec{a}+t\vec{b}|$ が $t = -\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $2\sqrt{2}$ をとるから，(1) の結果より

$$-\frac{3\cos\theta}{|\vec{b}|} = -\frac{1}{2},\quad -9\cos^2\theta + 9 = (2\sqrt{2})^2$$

ゆえに　$|\vec{b}| = 6\cos\theta > 0$，$9\cos^2\theta = 1$　よって　$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{3}}$，$\boldsymbol{|\vec{b}| = 2}$

14.17　(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{1}$

(2)　AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC = AD : AC = 2 : 1

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}}$

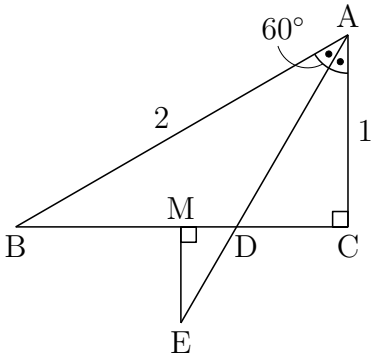
(3)　M は BC の中点，BD : DC = 2 : 1 より

MD : DC = 1 : 2

また，△MED ∽ △CAD より

ED : AD = 1 : 2

よって　**AD : AE = 2 : 3**



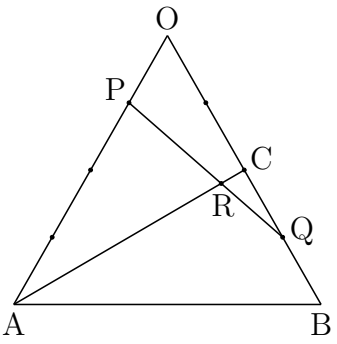
14.18　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}=\boldsymbol{-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{4}(-\vec{a}+3\vec{b})$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{1}{4}|-\vec{a}+3\vec{b}|$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{2^2-6\cdot2+9\cdot2^2}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$



(4) R は AC 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}\quad\cdots①$$

$\vec{a}=4\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{b}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=4(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

また，R は PQ 上の点であるから

$$4(1-t)+\frac{2t}{3}=1\quad\text{ゆえに}\quad t=\frac{9}{10}$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{10}\vec{a}+\frac{9}{20}\vec{b}}$

14.19 (1) $4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+k\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ より　$-4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+k(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{k+2}{k+6}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{k+2}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{k+2}$

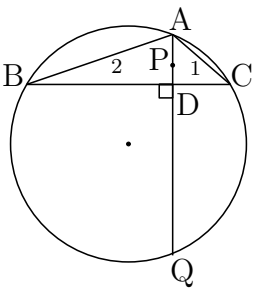
よって　$\boldsymbol{\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=k:2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0$ であるから

$$-2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+(2-k)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+k|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0$$
$$-2\cdot2^2+(2-k)\cdot2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+k\cdot1^2=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{k=5}$

(3) △ABC に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{BC}^2 = 2^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cos 120^\circ = 7$$

ゆえに　　$\mathrm{BC} = \sqrt{7}$

また　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC} = \triangle\mathrm{ABC}$ であるから

$$\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\sqrt{7} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

(1)，(2) の結果から　$\mathrm{BD} = \dfrac{5}{7}\mathrm{BC} = \dfrac{5}{\sqrt{7}}$，$\mathrm{DC} = \dfrac{2}{7}\mathrm{BC} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$

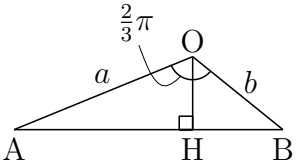
方べきの定理により，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DQ} = \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$ であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\mathrm{DQ} = \frac{5}{\sqrt{7}}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{DQ} = \frac{10}{\sqrt{21}}$$

したがって　　$\mathrm{AD} : \mathrm{DQ} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} : \dfrac{10}{\sqrt{21}} = 3 : 10$

よって　　$l = \dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\mathrm{AD} + \mathrm{DQ}}{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{\dfrac{13}{3}}$

14.20 条件により



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}ab$$

H は辺 AB 上の点であるから，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，
$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad (t \text{ は実数})$$

このとき

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \\
&= (t-1)|\vec{a}|^2 + (1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 \\
&= a^2(t-1) - \frac{1}{2}ab(1-2t) + b^2t \\
&= (a^2 + ab + b^2)t - a^2 - \frac{1}{2}ab
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$ であるから

$$t = \frac{a^2 + \frac{1}{2}ab}{a^2 + ab + b^2}, \quad 1 - t = \frac{\frac{1}{2}ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{\frac{1}{2}ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}\vec{a} + \frac{a^2 + \frac{1}{2}ab}{a^2 + ab + b^2}\vec{b} \\ &= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a^2 + ab + b^2}} \left\{ \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b^2} \right) \overrightarrow{\mathbf{OA}} + \left(\boldsymbol{a^2} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{ab} \right) \overrightarrow{\mathbf{OB}} \right\}\end{aligned}$$

14.21 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 \quad \text{ゆえに} \quad 7^2 = 5^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 8^2$$

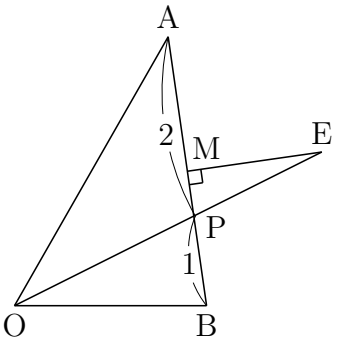
これを解いて　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 20}$

別解 余弦定理により　$\cos \angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}} = \dfrac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \dfrac{1}{2}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \cos \angle \mathrm{AOB} = 8 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{2} = 20$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ について，E は直線 OP 上の点であるから　　$t = 2s$　$\cdots$①

ゆえに 2 点 A，B の中点を M とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ME}} &= \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} \\ &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2s\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= \left(s - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(2s - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ME}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} &= \left\{ \left(s - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(2s - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{\mathrm{OB}} \right\} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= \left(s - \frac{1}{2} \right) |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + s\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \left(2s - \frac{1}{2} \right) |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= 64 \left(s - \frac{1}{2} \right) + 20s - 25 \left(2s - \frac{1}{2} \right) \\ &= 34s - \frac{39}{2}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{ME}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{ME}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} = 0$ であるから

$$34s - \frac{39}{2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{s = \frac{39}{68}}$$

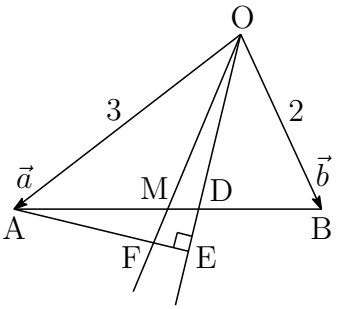
これを ① に代入すると $\boldsymbol{t = \frac{39}{34}}$

14.22 (1) M は辺 AB の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \frac{\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}}{\mathbf{2}},$$

OD は ∠AOB の二等分線であるから，
AD : DB = OA : OB = 3 : 2 より

$$\overrightarrow{\mathbf{OD}} = \frac{\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{b}}}{\mathbf{5}}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e} = \frac{5\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|5\overrightarrow{\mathrm{OD}}|} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = (\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e} = \frac{\vec{a}\cdot(2\vec{a} + 3\vec{b})}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|^2}(2\vec{a} + 3\vec{b})$$

ゆえに
$$\frac{\vec{a}\cdot(2\vec{a} + 3\vec{b})}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|^2} = \frac{2|\vec{a}|^2 + 3\vec{a}\cdot\vec{b}}{4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2}$$
$$= \frac{2\cdot 3^2 + 3\vec{a}\cdot\vec{b}}{4\cdot 3^2 + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\cdot 2^2} = \frac{3(6 + \vec{a}\cdot\vec{b})}{12(6 + \vec{a}\cdot\vec{b})} = \frac{1}{4}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{4}(2\vec{a} + 3\vec{b}) = \frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

△ADE と直線 MF について，メネラウスの定理を適用すると

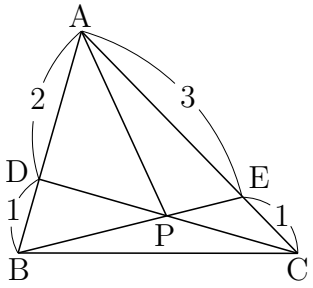
$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MD}}\cdot\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{5}{1}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}} = 1$$

したがって EF : FA = 1 : 4

よって
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{5} = \frac{\vec{a} + (2\vec{a} + 3\vec{b})}{5} = \frac{\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{a}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{b}}}{\mathbf{5}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3\vec{a} + 3\vec{b}}{5} - \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\vec{\boldsymbol{a}}$$

14.23 (1) $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ とおく．



$\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ であるから　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{2}x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AC}$

点 P は直線 CD 上にあるから

$$\frac{3}{2}x+y=1 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AE}$ であるから　$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}y\overrightarrow{AE}$

点 P は直線 BE 上にあるから

$$x+\frac{4}{3}y=1 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

別解 △ACD と直線 BE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DB}{BA}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{1}\times\frac{CP}{PD}\times\frac{1}{3}=1$$

CP = PD となり，P は線分 CD の中点であるから

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$$

これに $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ を代入すると

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

(2) (1) の結果から

$$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2$$

これに $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{7}$，$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=4$ を代入すると

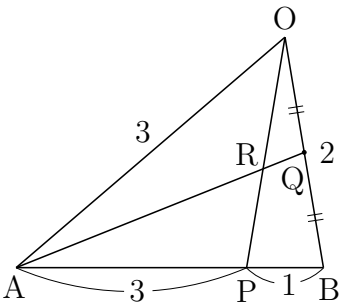
$$(\sqrt{7})^2=\frac{1}{9}\cdot 3^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\cdot 4^2 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$$

したがって　$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{6}{3\cdot 4}=\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\angle BAC=60^\circ}$

14.24 (1) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{4}$$

$$= \mathbf{-\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}$$



(2) (1) の結果から

$$PQ = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{4}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{3^2 + 2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ + 2^2} = \mathbf{\frac{\sqrt{19}}{4}}$$

(3) △OPB と直線 AQ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{OR}{RP}\cdot\frac{PA}{AB}\cdot\frac{BQ}{QO} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{OR}{RP}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1} = 1$$

よって　　**OR : RP = 4 : 3**

(4) $\triangle OPB = \frac{1}{4}\triangle OAB$，$\triangle OPQ = \frac{1}{2}\triangle OPB$，$\triangle PQR = \frac{3}{7}\triangle OPQ$

よって　　$\triangle PQR = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\triangle OAB = \frac{3}{56} \times \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{9\sqrt{3}}{112}}$

14.25 (1) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) = \mathbf{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}}$

(2) $|\vec{a}| = 3$，$|\vec{b}| = 2$，$\cos\angle AOB = \frac{5}{6}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB = 3\cdot 2\cdot\frac{5}{6} = 5$

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = \{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\}\cdot(\vec{b} - \vec{a})$$

$$= (s-1)|\vec{a}|^2 + (1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b} + s|\vec{b}|^2$$

$$= (s-1)\cdot 3^2 + (1-2s)\cdot 5 + s\cdot 2^2 = 3s - 4$$

OH⊥AB より，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ であるから　$3s - 4 = 0$　ゆえに　$\boldsymbol{s = \frac{4}{3}}$

(3) (1)，(2) の結果から　$\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

Q は直線 OH 上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OH} = -\frac{k}{3}\vec{a} + \frac{4k}{3}\vec{b} \qquad \cdots ①$$

Q は直線 PB 上にあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1-t}{2}\vec{a} + t\vec{b} \qquad \cdots ②$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は，1 次独立であるから，①，② より

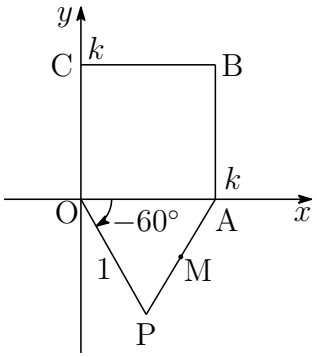
$$-\frac{k}{3} = \frac{1-t}{2}, \quad \frac{4k}{3} = t \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{3}{2},\ t = 2$$

よって $\qquad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}}$

14.26 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{p})$，$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{p}| = k$，$\vec{a}\cdot\vec{p} = |\vec{a}||\vec{p}|\cos 60^\circ = \frac{k}{2}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = \frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{p}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{p} + |\vec{p}|^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2\cdot\frac{k}{2} + k^2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{k^2+k+1}}$$

(2) 右の図のように，図形を座標平面上にとる．



$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\vec{a} + t\vec{p}$$

とおくと (s，t は実数)

$$(0,\ k) = s(k,\ 0) + t\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

したがって $\quad sk + \frac{t}{2} = 0$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}t = k \quad$ ゆえに $\quad s = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$t = -\frac{2k}{\sqrt{3}}$

よって $\qquad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a} - \frac{2k}{\sqrt{3}}\vec{p}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (0,\ k) - (k,\ 0) = k(-1,\ 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}(k,\ 0) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2k+1, -\sqrt{3})$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} // \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より，$(-1,\ 1) // (2k+1, -\sqrt{3})$ であるから

$$-1\cdot(-\sqrt{3}) - 1\cdot(2k+1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (k,\ 0) = \frac{1}{2}(1-2k, -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，$(-1,\ 1) \perp (1-2k, -\sqrt{3})$ であるから

$$-1\cdot(1-2k) + 1\cdot(-\sqrt{3}) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k = \frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

14.27 (1) $\mathrm{OA} = 4,\ \mathrm{OC} = 1,\ \mathrm{OB} = \sqrt{2},\ \angle\mathrm{OCB} = 90^\circ$ であるから　$\mathrm{BC} = 1$

O を座標平面上の原点とし，A$(4,\ 0)$，B$(1,\ 1)$，C$(1,\ 0)$ とすると

$$\vec{a} = (4,\ 0),\ \vec{b} = (1,\ 1) \quad \text{よって} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \mathbf{4}$$

(2) 直線 AB の方程式は

$$y = \frac{0-1}{4-1}(x-4) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

直線 AB に垂直な直線 OD の方程式は　$y = 3x$

2 直線 AB，OD の交点 D の座標は　$\left(\frac{2}{5},\ \frac{6}{5}\right)$

$(1,\ 0) = \frac{1}{4}\vec{a},\ (0,\ 1) = -\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$ であるから

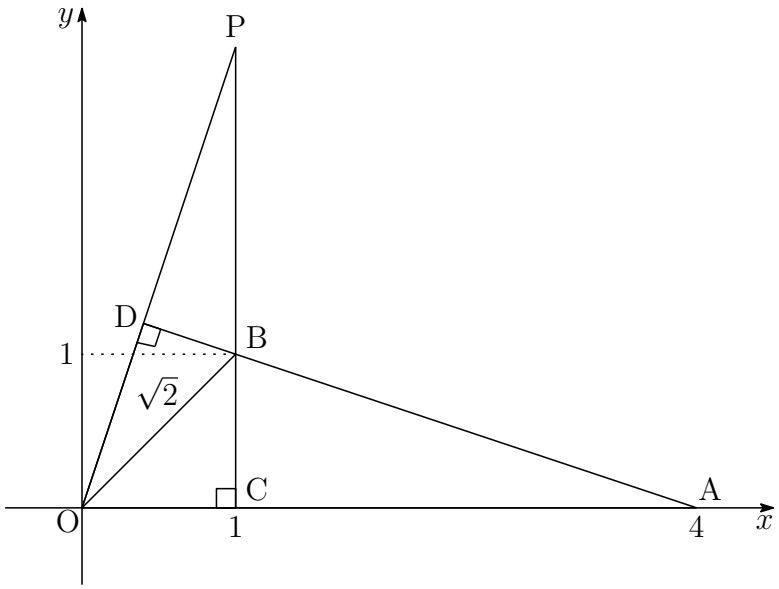
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}$$

よって　$\boldsymbol{s = -\frac{1}{5},\ t = \frac{6}{5}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2}{5}(1,\ 3)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = \frac{2}{5}\sqrt{1^2+3^2} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{10}}{5}}$

(3) 点 P の x 座標が 1 であり，P は直線 $y = 3x$ 上の点であるから　P$(1,\ 3)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{1^2+3^2} = \boldsymbol{\sqrt{10}}$



14.28 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおくと　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$　$\cdots(*)$

与えれた条件から　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{a}$，　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}$　$\cdots(**)$

$(*)$ から，$\vec{d}=-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ を $(**)$ に代入すると

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=-\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$|\vec{a}|^2=-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a} \qquad |\vec{c}|^2=-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}$$

上の 2 式から　　$|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2$　ゆえに　$\mathrm{DA}=\mathrm{BC}$

同様に，$(*)$ から，$\vec{a}=-(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ を $(**)$ に代入すると

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{d}\cdot(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) \qquad -(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}$$
$$|\vec{d}|^2=-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{d}\cdot\vec{b} \qquad -\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{d}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$$

上の 2 式から　　$|\vec{d}|^2=|\vec{b}|^2$　ゆえに　$\mathrm{CD}=\mathrm{AB}$

よって，2 組の対辺がそれぞれ等しいので，四角形 ABCD は平行四辺形である．

14.29　(1) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$2R=\frac{1}{\sin 60^\circ}\quad \text{よって}\quad R=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさは R であるから　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2)(ア)　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2$

このとき　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 120^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{6}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{1}{6}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}$

同様に　$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{6}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=\dfrac{1}{6}-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OP}$

上の 3 式の辺々を加えると

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=\frac{1}{2}-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}$$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ であるから

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(イ)　i) P が A，B に一致するとき　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

ii) P が弦 AB に関して C と同じ側にあるとき，$\angle APB=60^\circ$

$x=PA$，$y=PB$ とし，$\triangle APB$ に余弦定理を適用すると

$1^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ$　ゆえに　$xy=1-(x-y)^2\leqq 1$

したがって　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=xy\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}xy\leqq\dfrac{1}{2}$

iii) P が弦 AB に関して C と反対側にあるとき，$\angle APB=120^\circ$

同様に，$\triangle APB$ に余弦定理を適用すると

$1^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ$　ゆえに　$xy=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}(x-y)^2\leqq\dfrac{1}{3}$

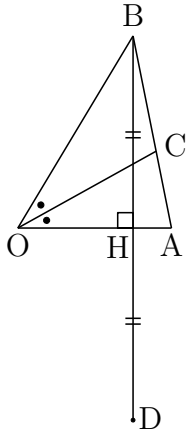
したがって　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=xy\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}xy\geqq-\dfrac{1}{6}$

i)〜iii) により，最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{6}}$

14.30　(1) 直線 OC は，$\angle AOB$ の二等分線であるから

AC : CB = OA : OB = 2 : 3

よって　$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}}$



(2) B から直線 OA に垂線 BH を引く.

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\vec{a}$ (k は実数) とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \vec{b} - k\vec{a}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{HB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}} = 0$ であるから

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - k\vec{a}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} - k|\vec{a}|^2 = 0$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = t$，$|\vec{a}| = 2$ より $\quad t - k \cdot 2^2 = 0 \quad$ ゆえに $\quad k = \dfrac{t}{4}$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HD}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + (-\overrightarrow{\mathrm{HB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + (\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$$= 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2 \cdot \frac{t}{4}\vec{a} - \vec{b} = \boldsymbol{\frac{t}{2}\vec{a} - \vec{b}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$ であるから

$$\frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5} \cdot \left(\frac{t}{2}\vec{a} - \vec{b} \right) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (t\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$$

したがって $\quad 3t|\vec{a}|^2 + (2t-6)\vec{a} \cdot \vec{b} - 4|\vec{b}|^2 = 0$

$$3t \cdot 2^2 + (2t-6)t - 4 \cdot 3^2 = 0$$

整理すると $\quad (t-3)(t+6) = 0 \quad$ ゆえに $\quad t = 3, -6$

(i) $t = 3$ のとき $\quad \cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{3}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{2} \quad$ ゆえに $\quad \angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$

(ii) $t = -6$ のとき $\quad \cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-6}{2 \cdot 3} = -1 \quad$ ゆえに $\quad \angle\mathrm{AOB} = \pi$

条件により，O，A，B は一直線上にないので，不適.

よって $\quad \boldsymbol{\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}}$

また $\quad \mathrm{OC} = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \dfrac{1}{5}|3\vec{a} + 2\vec{b}| = \dfrac{1}{5}\sqrt{9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2}$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2} = \boldsymbol{\frac{6\sqrt{3}}{5}}$$

14.31 (1) $\vec{m} = (a,\ c)$，$\vec{n} = (b,\ d)$ より $(\vec{m} \neq \vec{0},\ \vec{n} \neq \vec{0})$

$$\begin{cases} d\vec{m} - c\vec{n} = (ad - bc,\ 0) = (D,\ 0) \\ -b\vec{m} + a\vec{n} = (0,\ ad - bc) = (0,\ D) \end{cases} \qquad (*)$$

$(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (ab + cd)^2 + (ad - bc)^2$ より

$$|\vec{m}|^2|\vec{n}|^2 = (\vec{m} \cdot \vec{n})^2 + D^2 \qquad (**)$$

(i) $D=0$ のとき，$(*)$ より

$$d\overrightarrow{m}=c\overrightarrow{n},\quad b\overrightarrow{m}=a\overrightarrow{n}\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$$

(ii) $\overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$ のとき，$|\overrightarrow{m}|^2|\overrightarrow{n}|^2=(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n})^2$ であるから，$(**)$ より

$$D=0$$

(i)，(ii) より　$D=0 \iff \overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$　　［証終］

(2) $D\neq 0$ のとき，基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$ は，$(*)$ より

$$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)=\frac{d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n}}{D},\quad \overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)=\frac{-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n}}{D}\qquad (\#)$$

と表される．

$(\#)$ の基本ベクトルと $\overrightarrow{v}$ の内積をとると

$$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{(d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{d\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}-c\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{d}{D}$$
$$\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{(-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{-b\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}+a\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{D}=-\frac{b}{D}$$

よって　　$\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}=\boldsymbol{\frac{1}{D}(d,-b)}$

同様に，$(\#)$ の基本ベクトルと $\overrightarrow{w}$ の内積をとると

$$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{w}=\frac{(d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{d\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}-c\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}}{D}=-\frac{c}{D}$$
$$\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{w}=\frac{(-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{-b\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}+a\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{a}{D}$$

よって　　$\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}+(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}=\boldsymbol{\frac{1}{D}(-c,\ a)}$

(3) ベクトル $\vec{v}$，$\vec{w}$ が

$$\vec{m}\cdot\vec{v}=\vec{n}\cdot\vec{w}=1,\quad \vec{m}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$$

を満たすことを利用して，内積 $\vec{q}\cdot\vec{v}$，$\vec{q}\cdot\vec{w}$ を求めると

$$\begin{aligned}\vec{q}\cdot\vec{v}&=(r\vec{m}+s\vec{n})\cdot\vec{v}\\&=r\vec{m}\cdot\vec{v}+s\vec{n}\cdot\vec{v}=r,\\\vec{q}\cdot\vec{w}&=(r\vec{m}+s\vec{n})\cdot\vec{w}\\&=r\vec{m}\cdot\vec{w}+s\vec{n}\cdot\vec{w}=s\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{r=\vec{q}\cdot\vec{v},\quad s=\vec{q}\cdot\vec{w}}$

14.32　(1) $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\dfrac{1}{7}$ の辺々を掛けると　$\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{28}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ に注意して　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\sqrt{\dfrac{1}{28}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{14}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ (x, y は実数) とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x-1)\vec{a}+y\vec{b}\\\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=x\vec{a}+(y-1)\vec{b}\end{aligned}$$

OA⊥AP，OB⊥BP より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\vec{a}\{(x-1)\vec{a}+y\vec{b}\}\\&=(x-1)|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=0\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\vec{b}\{x\vec{a}+(y-1)\vec{b}\}\\&=x\vec{a}\cdot\vec{b}+(y-1)|\vec{b}|^2=0\end{aligned}$$

条件から，$|\vec{a}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{b}|^2=7\vec{a}\cdot\vec{b}$ であるから

$$4(x-1)+y=0,\quad x+7(y-1)=0\quad\text{これを解いて}\quad x=\frac{7}{9},\quad y=\frac{8}{9}$$

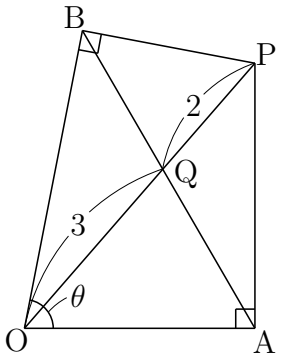
よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{8}{9}\vec{b}}$

(3) 四角形 OAPB の対角線 OP と AB の交点を Q とすると，(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{7\vec{a}+8\vec{b}}{15}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

したがって，Q は線分 OP を 3 : 2 に内分する．

よって　$\boldsymbol{\triangle OAB:\triangle PBA=3:2}$



別解 ベクトル積 (外積) (大分大学 2010) 3

(4) $\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OBP}=90^\circ$ であるから，四角形 OAPB は，OP を直径とする円に内接する．(1) の結果から

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{28}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

正弦定理により $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\theta}=\mathrm{OP}$ よって $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\sqrt{7}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\mathbf{3\sqrt{3}}$

14.33 (1) $\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{BPQ}=\theta$ とおくと

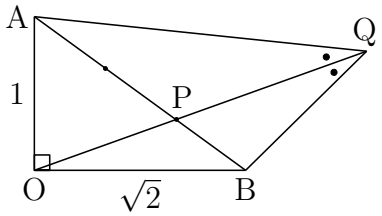
$$\triangle\mathrm{PQB}=\frac{1}{2}\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PQ}\sin\theta,\quad \triangle\mathrm{POA}=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{AP}\sin\theta$$

$\triangle\mathrm{PQB}=2\triangle\mathrm{POA}$ より $\quad \mathrm{PB}\cdot\mathrm{PQ}=2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{AP}$

また，$\mathrm{AP}=2\mathrm{PB}$ より $\quad \mathrm{PQ}=4\mathrm{OP}$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=5\overrightarrow{\mathrm{OP}}=5\times\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\mathbf{\dfrac{5}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{10}{3}\overrightarrow{OB}}$

(2) $\angle\mathrm{OQA}=\angle\mathrm{OQB}$ より



$$\mathrm{AQ}:\mathrm{BQ}=\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$$

したがって $\quad |\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=4|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2 \quad \cdots(*)$

ここで，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$|\vec{a}|^2=1,\quad |\vec{b}|^2=2,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \cdots(**)$$

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと $(k>1)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=k\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{2k}{3}\vec{b}\\
\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\
&=\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{2k}{3}\vec{b}-\vec{a}=\left(\frac{k}{3}-1\right)\vec{a}+\frac{2k}{3}\vec{b}\\
\overrightarrow{\mathrm{BQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\
&=\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{2k}{3}\vec{b}-\vec{b}=\frac{k}{3}\vec{a}+\left(\frac{2k}{3}-1\right)\vec{b}
\end{aligned}$$

$(**)$ により　$|\overrightarrow{AQ}|^2 = \left(\dfrac{k}{3}-1\right)^2 + \left(\dfrac{2k}{3}\right)^2 \cdot 2 = k^2 - \dfrac{2}{3}k + 1$

$|\overrightarrow{BQ}|^2 = \left(\dfrac{k}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2k}{3}-1\right)^2 \cdot 2 = k^2 - \dfrac{8}{3}k + 2$

上の 2 式を $(*)$ に代入すると　$k^2 - \dfrac{2}{3}k + 1 = 4\left(k^2 - \dfrac{8}{3}k + 2\right)$

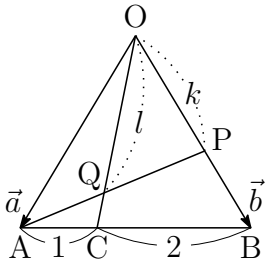
整理すると　$3k^2 - 10k + 7 = 0$　すなわち　$(k-1)(3k-7) = 0$

$k > 1$ に注意して，これを解くと　　$k = \dfrac{7}{3}$

したがって　$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{7}{3}\overrightarrow{OP}$　よって　**OP : PQ = 3 : 4**

14.34　(1)　$\overrightarrow{OQ} = l\overrightarrow{OC} = l\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$

$= \dfrac{2l}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{l}{3}\overrightarrow{OB} = \dfrac{2l}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{l}{3k}\overrightarrow{OP}$



Q は，AP 上の点であるから

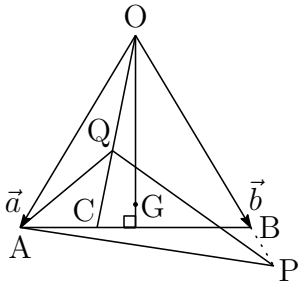
$\dfrac{2l}{3} + \dfrac{l}{3k} = 1$　ゆえに　$\boldsymbol{l(2k+1) = 3k}$

(2)　△APQ の重心を G とすると

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$

$= \dfrac{1}{3}\left\{\vec{a} + k\vec{b} + l\left(\dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}\right)\right\}$

$= \dfrac{2l+3}{9}\vec{a} + \dfrac{3k+l}{9}\vec{b}$



G は，∠AOB の二等分線上にあるから

$\dfrac{2l+3}{9} = \dfrac{3k+l}{9}$　ゆえに　$l = 3(k-1)$

A，P，Q は同一直線上にないから，上式および (1) の結果から，正数 k は

$3(k-1)(2k+1) \neq 3k$　すなわち　$k \neq \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

また，$l > 0$ より　$\boldsymbol{l = 3(k-1)}$　$\left(\boldsymbol{k > 1,\ k \neq \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}\right)$

(3)　$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = k\vec{b} - \vec{a}$

(2) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= l\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right) = 3(k-1)\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\\ &= 2(k-1)\vec{a}+(k-1)\vec{b}\\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= 2(k-1)\vec{a}+(k-1)\vec{b}-\vec{a}\\ &= (2k-3)\vec{a}+(k-1)\vec{b}\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ であるから

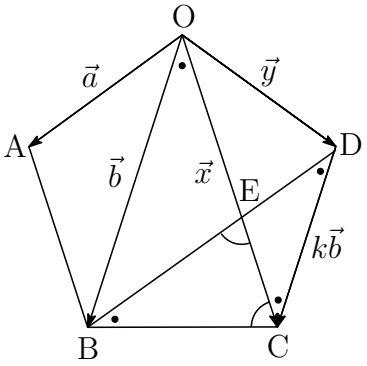
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 &= |k\vec{b}-\vec{a}|^2 = k^2|\vec{b}|^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2\\ &= k^2-k+1\\ |\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 &= |(2k-3)\vec{a}+(k-1)\vec{b}|^2\\ &= (2k-3)^2|\vec{a}|^2+2(2k-3)(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(k-1)^2|\vec{b}|^2\\ &= (2k-3)^2+(2k-3)(k-1)+(k-1)^2\\ &= 7k^2-19k+13\end{aligned}$$

AP = AQ のとき

$$k^2-k+1 = 7k^2-19k+13 \quad \text{ゆえに} \quad (k-1)(k-2)=0$$

(2) の結果に注意して　　$\boldsymbol{k=2}$

14.35　(1) $t = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{BD}$ とし，OC と BD の交点を E とすると，$\mathrm{BC} = \mathrm{BE} = 1$ より



$$\mathrm{CE} = \mathrm{DE} = t-1$$

$\triangle\mathrm{OBC} \backsim \triangle\mathrm{BCE}$ より $\mathrm{OB} : \mathrm{BC} = \mathrm{BC} : \mathrm{CE}$ であるから

$$t : 1 = 1 : t-1$$

したがって　　$t^2-t-1=0 \quad \cdots ①$

$t>0$ に注意して，これを解くと　$t = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

よって　　$k=\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{t}=\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{5}-1}}{\boldsymbol{2}}$

$$\vec{x}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=t(\vec{b}-\vec{a})=\frac{\boldsymbol{\sqrt{5}+1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{(\vec{b}-\vec{a})}$$

$$\vec{y}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{x}-k\vec{b}=t(\vec{b}-\vec{a})-k\vec{b}=-t\vec{a}+(t-k)\vec{b}$$

$$=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\vec{b}=-\frac{\boldsymbol{\sqrt{5}+1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\vec{a}}+\boldsymbol{\vec{b}}$$

(2) △OAB に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{1^2+t^2-1^2}{2\cdot1\cdot t}=\frac{t}{2}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{5}+1}}{\boldsymbol{4}}$$

(3) $|\vec{b}|=t$，$\cos\theta=\dfrac{t}{2}$，および ① に注意して

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=1\cdot t\cdot\frac{t}{2}=\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}(t+1)$$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot t(\vec{b}-\vec{a})=t(\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2)$

$$=t\left\{\frac{1}{2}(t+1)-1^2\right\}=\frac{1}{2}(t^2-t)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

別解　$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\dfrac{t}{2}\right)^2-1=\dfrac{1}{2}t^2-1=\dfrac{1}{2}(t+1)-1=\dfrac{1}{2}(t-1)$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{x}=|\vec{a}||\vec{x}|\cos2\theta=1\cdot t\cdot\dfrac{1}{2}(t-1)=\dfrac{1}{2}(t^2-t)=\dfrac{1}{2}$

14.36　(1) $\vec{b}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\overrightarrow{m}$ とすると

$$\overrightarrow{m}=|\vec{b}|^2\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}=\vec{a}-t\vec{b}\quad\text{ゆえに}\quad\vec{a}=t\vec{b}+\overrightarrow{m}$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\vec{b}-\overrightarrow{m}$

$$=t\vec{b}-(\vec{a}-t\vec{b})=\boldsymbol{-\vec{a}+2t\vec{b}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{n}$ とすると

$$\vec{n}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots①$$

ここで　　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|-\vec{a}+2t\vec{b}\,|^2=|\vec{a}|^2-4t\vec{a}\cdot\vec{b}+4t^2|\vec{b}|^2$

$$=1^2-4t\cdot t+4t^2\cdot1^2=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}\cdot(-\vec{a}+2t\vec{b})$$

$$=-|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}=2t^2-1$$

ゆえに　$\vec{n} = \vec{a} - (2t^2-1)(-\vec{a}+2t\vec{b})$
$= 2t^2\vec{a} - 2t(2t^2-1)\vec{b}$

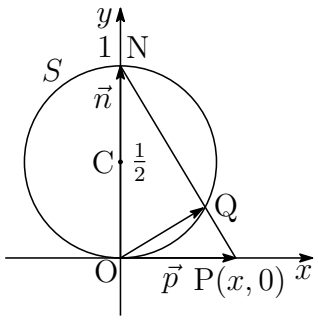
① より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2t^2-1)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \vec{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= (2t^2-1)\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \vec{n} \\ &= (2t^2-1)(-\vec{a}+2t\vec{b}) - \{2t^2\vec{a} - 2t(2t^2-1)\vec{b}\} \\ &= (1-4t^2)\vec{a} + 4t(2t^2-1)\vec{b}\end{aligned}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} // \vec{b}$ であるから

$$1-4t^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t = \pm\frac{1}{2}}$$

14.37　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a\vec{p} + b\vec{n}$ について，Q は線分 NP 上の点であるから



$$a + b = 1 \quad \cdots ①$$

$\angle \mathrm{OQN} = 90^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{NP}} = 0$ より

$$(a\vec{p} + b\vec{n}) \cdot (\vec{p} - \vec{n}) = 0$$
$$a|\vec{p}|^2 + (b-a)\vec{p}\cdot\vec{n} - b|\vec{n}|^2 = 0$$

$|\vec{p}|^2 = x^2$，$\vec{p}\cdot\vec{n} = 0$，$|\vec{n}| = 1$ であるから

$$ax^2 + (b-a)\cdot 0 - b\cdot 1^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad ax^2 - b = 0 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{1+x^2}}$，$\boldsymbol{b = \dfrac{x^2}{1+x^2}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \frac{1}{1+x^2}\vec{p} + \frac{x^2}{1+x^2}\vec{n} = \frac{1}{1+x^2}(x,\ 0) + \frac{x^2}{1+x^2}(0,\ 1) \\ &= \left(\frac{x}{1+x^2},\ \frac{x^2}{1+x^2}\right) \\ \overrightarrow{\mathrm{CQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \left(\frac{x}{1+x^2},\ \frac{x^2}{1+x^2}\right) - \left(0,\ \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x}{1+x^2},\ \frac{x^2-1}{2(1+x^2)}\right)\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1}=\left(\dfrac{x_1}{1+{x_1}^2},\ \dfrac{{x_1}^2-1}{2(1+{x_1}^2)}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_2}=\left(\dfrac{x_2}{1+{x_2}^2},\ \dfrac{{x_2}^2-1}{2(1+{x_2}^2)}\right)$

$x_1x_2=-1$ のとき，$x_2=-\dfrac{1}{x_1}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_2}=\left(\frac{-\frac{1}{x_1}}{1+\frac{1}{{x_1}^2}},\ \frac{\frac{1}{{x_1}^2}-1}{2\left(1+\frac{1}{{x_1}^2}\right)}\right)=-\left(\frac{x_1}{1+{x_1}^2},\ \frac{{x_1}^2-1}{2(1+{x_1}^2)}\right)=-\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1}$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}_2}=\vec{0}$

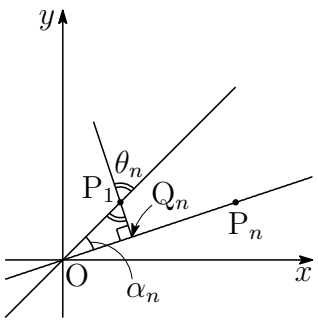
別解　(鹿児島大学 2010) 3

14.38　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=(n,\ 1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=n+1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2=n^2+1$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_1}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\\&=(1,\ 1)-\frac{n+1}{n^2+1}(n,\ 1)\\&=\left(\boldsymbol{\frac{1-n}{n^2+1}},\ \boldsymbol{\frac{n^2-n}{n^2+1}}\right)\end{aligned}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ のなす角を α_n とすると

$$\cos\alpha_n=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}||\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|}=\frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}$$

また　　$\sin^2\alpha_n=1-\cos^2\alpha_n=1-\dfrac{(n+1)^2}{2(n^2+1)}=\dfrac{(n-1)^2}{2(n^2+1)}$

$\sin\alpha_n>0$ であるから　　$\sin\alpha_n=\dfrac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}$

$\theta_n=90^\circ-\alpha_n$ であるから

$$\cos\theta_n=\cos(90^\circ-\alpha_n)=\sin\alpha_n=\frac{\boldsymbol{n-1}}{\sqrt{\boldsymbol{2(n^2+1)}}}$$

(3)　　$\tan^2\alpha_n=\dfrac{1}{\cos^2\alpha_n}-1=\dfrac{2(n^2+1)}{(n+1)^2}-1=\dfrac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$

$0<\alpha_n<90^\circ$ であるから $\tan\alpha_n>0$ より　　$\tan\alpha_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

$\theta_n = 90^\circ - \alpha_n$ であるから

$$\tan\theta_n = \tan(90^\circ - \alpha_n) = \frac{1}{\tan\alpha_n} = \frac{n+1}{n-1}$$

$\tan\theta_n < 1.01$ をみたす最小の n は

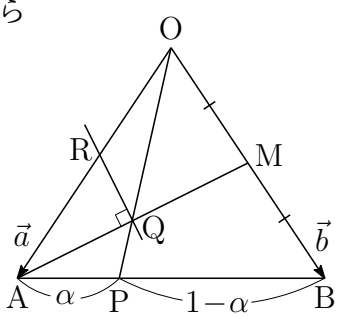
$$\frac{n+1}{n-1} < 1.01 \quad \text{ゆえに} \quad n > 201$$

したがって，これをみたす最小の n は　**202**

解説　(熊大 [文]2001) 3

14.39　(1) P は AB を $\alpha : 1-\alpha$ に内分する点であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}} \quad \cdots ①$$



Q は OP 上の点であるから

$$\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OP} \quad \cdots ②$$

とおくと

$$\overrightarrow{OQ} = s\{(1-\alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha\cdot 2\overrightarrow{OM}\} = s(1-\alpha)\overrightarrow{OA} + 2s\alpha\overrightarrow{OM}$$

Q は，AM 上の点であるから

$$s(1-\alpha) + 2s\alpha = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{1}{1+\alpha} \quad \cdots ③$$

①，②，③ より

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{1+\alpha}\{(1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}\} = \boldsymbol{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}}$$

(2) $\overrightarrow{OR} = t\vec{a}$ とおくと　　$\overrightarrow{RQ} = \left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)\vec{a} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$

また　　$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{RQ} \perp \overrightarrow{AM}$ より，$\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ であるから

$$\left(t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)|\vec{a}|^2 + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}|\vec{b}|^2 = 0$$

ここで，$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{6} = 1$ であるから

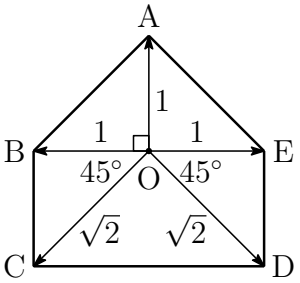
$$4\left(t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\} + \frac{9\alpha}{2(1+\alpha)} = 0$$

したがって　$t = \dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OR} = \frac{1-2\alpha}{1+\alpha}\vec{a}}$

(3) R が OA の中点であるから

$$\frac{1-2\alpha}{1+\alpha}=\frac{1}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{\alpha=\frac{1}{5}}$$

14.40 (1) 右の図から



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 45^\circ\\&=1\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{1}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=1$ となる $(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)$ の組は，
次の 7 組である．

$$(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)=(\mathrm{A},\ \mathrm{A}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{E}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{C},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{D},\ \mathrm{E}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{D})$$

よって，求める確率は $\dfrac{7}{5^2}=\boldsymbol{\dfrac{7}{25}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ゆえに $q_i=-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$

$q_i\neq 0$ となる P_i は，A，C，D の 3 組である．

したがって，$q_1q_2\cdots q_n\neq 0$ となる確率は $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

よって，$q_1q_2\cdots q_n=0$ となる確率は $\boldsymbol{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$

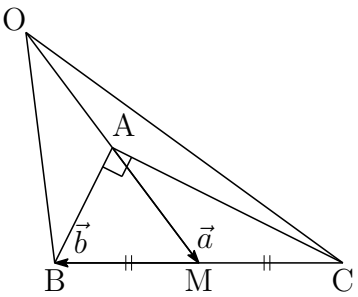
14.41 (1) $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}\cdots①$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$

M は BC の中点であるから $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$

上の 2 式より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

よって，点 A は OM の中点である．

(2) $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ であるから，(1) の結果から，A は
BC を直径とする円周上の点である．
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\vec{a}-\vec{b}$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|2\vec{a}+\vec{b}|+|2\vec{a}-\vec{b}|^2=8|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=10$

(3) $4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=-4$ より

$$4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=-4$$
$$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2)=-4$$

上式に ①，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，および (2) の結果を代入し整理すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1}$$

14.42　(1) $\vec{d}=\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}$ とおくと

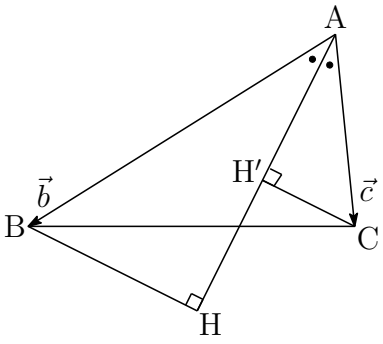
$$|\vec{d}|^2=\vec{d}\cdot\vec{d}=\left(\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}\right)=\frac{\vec{c}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=\frac{|\vec{c}|^2}{|\vec{c}|^2}=1$$

したがって　$|\vec{d}|=1$　よって　ベクトル $\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}$ の大きさは 1

(2) 角 A の二等分線の方向ベクトルを

$$\vec{v}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

とおくと



$$|\vec{v}|^2=\left|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right|^2=2\left(1+\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}\right)$$

$\vec{e}=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{e})\vec{e}$,　$\overrightarrow{\mathrm{H'C}}=\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CH'}}=((\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{e})\vec{e}-\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{|\vec{v}|^2}((\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{v})\vec{v}-\vec{b}-\vec{c}$$

このとき　$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{v}=(\vec{b}+\vec{c})\cdot\left(\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)=|\vec{b}|+|\vec{c}|+\dfrac{(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{b}||\vec{c}|}(|\vec{b}|+|\vec{c}|)$

$$=\left(1+\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}\right)(|\vec{b}|+|\vec{c}|)=\frac{1}{2}|\vec{v}|^2(|\vec{b}|+|\vec{c}|)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CH'}}=\dfrac{1}{2}(|\vec{b}|+|\vec{c}|)\vec{v}-\vec{b}-\vec{c}$

$$=\frac{1}{2}(|\vec{b}|+|\vec{c}|)\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)-\vec{b}-\vec{c}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|}-1\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{c}|}-1\right)\vec{c}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CH'}}=\vec{0}$ のとき，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから，(2) の結果から

$$\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|}-1=0,\quad \frac{|\vec{b}|}{|\vec{c}|}-1=0 \quad \text{すなわち} \quad |\vec{b}|=|\vec{c}|$$

よって　△ABC は **AB = AC の二等辺三角形**

14.43　(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$$

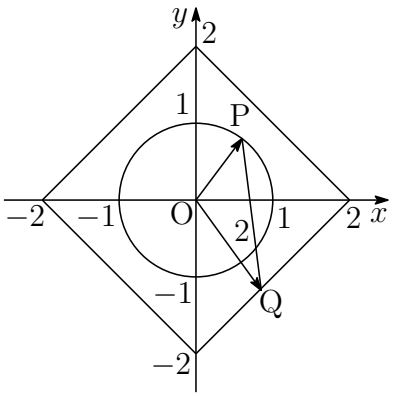
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$ より

$$2^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+1^2$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-3)$

$\sqrt{2}\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\leqq 2$ であるから

$$-\frac{1}{2}\leqq\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leqq\frac{1}{2}\quad \text{よって}\quad \text{最大値 } \boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \text{最小値 } \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$



(2) 直線 PQ に垂線 OH を引くと，H は直線 PQ 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\quad (t\text{ は実数})$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}})=0\quad \text{ゆえに}\quad t=-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+2t\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t^2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\frac{2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}+\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}$$

$$=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}=1-\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2$$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-1$

ゆえに　$-\dfrac{3}{2}\leqq\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\leqq-\dfrac{1}{2}$　したがって　$\dfrac{7}{16}\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2\leqq\dfrac{15}{16}$

よって，求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$，最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}$

補足　点 A から直線 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\vec{v}$ に引いた垂線の長さは (t は媒介変数)

$$\frac{\sqrt{|\vec{v}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}}{|\vec{v}|}$$

14.44　$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{HC}}-\overrightarrow{\mathrm{HB}})=0$$

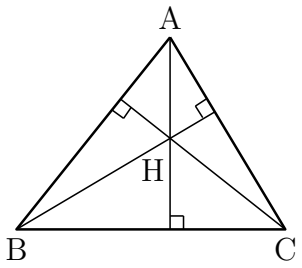
ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}$　$\cdots$①

また $\overrightarrow{\mathrm{HB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{HA}}-\overrightarrow{\mathrm{HC}})=0$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC}}$　$\cdots$②

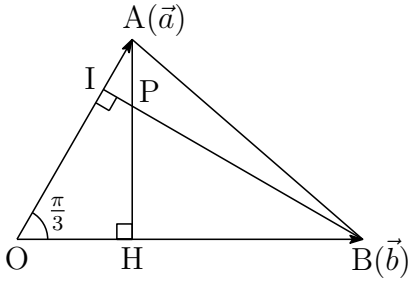
①，② より　$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}$



14.45　(1)　$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}\cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}}$



(2)　(1) と同様にして　$\mathrm{OI}=\mathrm{OB}\cos\dfrac{\pi}{3}=3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{3}{4}\vec{a}$

上式および (1) の結果から　$\vec{a}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OI}}$，$\vec{b}=3\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3y\overrightarrow{\mathrm{OH}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{4}{3}x\overrightarrow{\mathrm{OI}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

P は 2 直線 AH，IB 上の点であるから

$$x+3y=1,\quad \frac{4}{3}x+y=1 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{2}{3},\quad y=\frac{1}{9}$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}}$

(3) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=3$ より，(2) の結果から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=\left|\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}\right|^2\\&=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{27}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{81}|\vec{b}|^2\\&=\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{21}{9}\end{aligned}$$

よって　　$\mathrm{OP}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{3}}$

14.46 (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{3}\sqrt{2}\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad t=\sqrt{6}\cos\theta$$

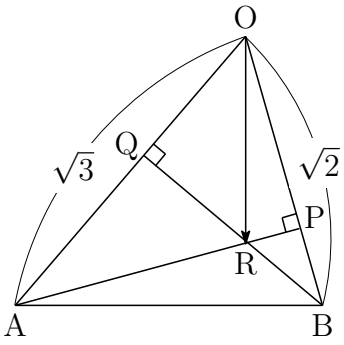
$-1<\cos\theta<1$ であるから　　$\boldsymbol{-\sqrt{6}<t<\sqrt{6}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{b}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{b}$ であるから

$$(k\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$$
$$k|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

ゆえに　$k=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=\dfrac{t}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{t}{2}\vec{b}}$



同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k'\vec{a}$ とおくと　$k'=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}=\dfrac{t}{3}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{t}{3}\vec{a}}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{t}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{t}{3}\vec{a}$

(3) $t=1$ のとき，(2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}$

R は直線 AP 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\vec{a}+\frac{s}{2}\vec{b} \quad \cdots①$$

$\vec{a}=3\overrightarrow{OQ}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ であるから，上式より

$$\overrightarrow{OR}=3(1-s)\overrightarrow{OQ}+\frac{s}{2}\overrightarrow{OB}$$

また，R は直線 QB 上の点でもあるから

$$3(1-s)+\frac{s}{2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad s=\frac{4}{5}$$

これを ① に代入して $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{OR}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}}$

また $\quad \overrightarrow{OR}=\frac{1}{5}|\vec{a}+2\vec{b}|=\frac{1}{5}\sqrt{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{3+4\cdot1+4\cdot2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{5}}$$

14.47 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ より

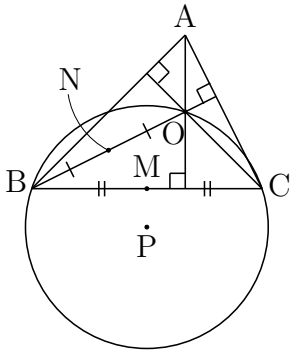
$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

すなわち

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

したがって，O は △ABC の垂心であり，

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{b}\cdot\vec{c}\neq0 \quad \text{ゆえに} \quad O\neq A$$



以上のことから　　OA⊥BC　⋯①

また，P は △OBC の外心であるから，P は線分 BC の垂直二等分線上にある．したがって　MP⊥BC　⋯②

①，② から　　MP//OA

(2) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+t\vec{a}=\boldsymbol{t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$

$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}=\left(t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}=\boldsymbol{t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

(3) N は外接円の弦 OB の中点であるから　$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{NP}$

したがって，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{NP}=0$ より

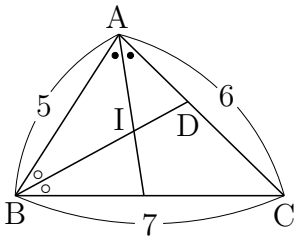
$$\vec{b}\cdot\left(t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=0 \quad \text{ゆえに} \quad t\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} \neq 0$ であるから　　$t = -\dfrac{1}{2}$

これを (2) の結果に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{b}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{c}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{NP}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{c}}$$

14.48　(1) BD は ∠B の二等分線であるから



$$\mathrm{AD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathbf{5 : 7}$$

ゆえに　$\mathrm{AD} = \dfrac{5}{5+7}\mathrm{AC} = \dfrac{5}{12} \times 6 = \dfrac{5}{2}$

AI は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BI} : \mathrm{ID} = \mathrm{AB} : \mathrm{AD} = 5 : \frac{5}{2} = \mathbf{2 : 1}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2 \times \dfrac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{5}{18}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathbf{\dfrac{1}{3}\vec{\boldsymbol{b}} + \dfrac{5}{18}\vec{\boldsymbol{c}}}$

(3) △ABC に余弦定理を適用すると　$\cos\theta = \cos A = \dfrac{6^2 + 5^2 - 7^2}{2\cdot 6\cdot 5} = \mathbf{\dfrac{1}{5}}$

よって　　$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta = 5\cdot 6 \times \dfrac{1}{5} = \mathbf{6}$

(4) AB の中点を M とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\vec{b} + y\vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + y\vec{c}$$

P が AB の垂直二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{MP}} \perp \vec{b}$ であるから

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2 + y\vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot 5^2 + y\cdot 6 = 0$$

よって　　$\mathbf{25}\boldsymbol{x} + \mathbf{6}\boldsymbol{y} = \mathbf{\dfrac{25}{2}}$

(5) AC の中点を N とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{NP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AN}} = x\vec{b} + y\vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{c}$

$$= x\vec{b} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{c}$$

P が AC の垂直二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{NP}} \perp \vec{c}$ であるから

$$x\vec{b}\cdot\vec{c} + \left(y - \frac{1}{2}\right)|\vec{c}|^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x\cdot 6 + \left(y - \frac{1}{2}\right)\cdot 6^2 = 0$$

よって　　$x + 6y = 3$

O はこれと (4) の結果を満たす点であるから　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \frac{19}{48}\vec{b} + \frac{125}{288}\vec{c}}$

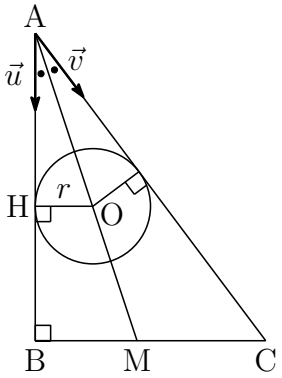
14.49　(1) AM は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BM} : \mathrm{MC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 4 : 5$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 4\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 5\vec{v}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{5\cdot 4\vec{u} + 4\cdot 5\vec{v}}{9} = \boldsymbol{\frac{20}{9}(\vec{u} + \vec{v})}$$



(2) $\cos A = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{4}{5}$ であるから　　$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos A = 1\cdot 1\cdot\dfrac{4}{5} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$

△AHO ∽ △ABM であるから

$$\mathrm{AO} : \mathrm{AM} = \mathrm{AH} : \mathrm{AB} = t : 4$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \dfrac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{t}{4}\cdot\dfrac{20}{9}(\vec{u} + \vec{v}) = \boldsymbol{\frac{5t}{9}(\vec{u} + \vec{v})}$

$$\overrightarrow{\mathrm{HO}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{5t}{9}(\vec{u} + \vec{v}) - t\vec{u} = \boldsymbol{\frac{t}{9}(-4\vec{u} + 5\vec{v})}$$

また，$\mathrm{BM} = \dfrac{4}{9}\mathrm{BC} = \dfrac{4}{9}\times 3 = \dfrac{4}{3}$ であるから

$$\mathrm{AH} : \mathrm{HO} = \mathrm{AB} : \mathrm{BM} = 4 : \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad t : r = 3 : 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r = \frac{t}{3}}$$

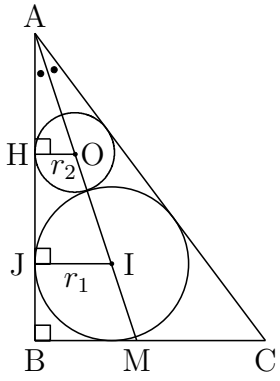
(3) 内接円 I の半径を r_1 とし，I から AB に垂線 IJ を引くと　$\mathrm{JB} = r_1$

△AJI ∽ △AHO であるから，(2) の結果から

$$\mathrm{AJ} : \mathrm{JI} = 3 : 1 \quad \text{ゆえに} \quad t = \mathrm{AJ} = 3r_1$$

AJ + JB = AB = 4 であるから

$$3r_1 + r_1 = 4 \quad \text{よって} \quad r_1 = \boldsymbol{1},\ t = \boldsymbol{3}$$



(4)　$\mathrm{AI}=\sqrt{\mathrm{AJ}^2+\mathrm{JI}^2}\ \sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

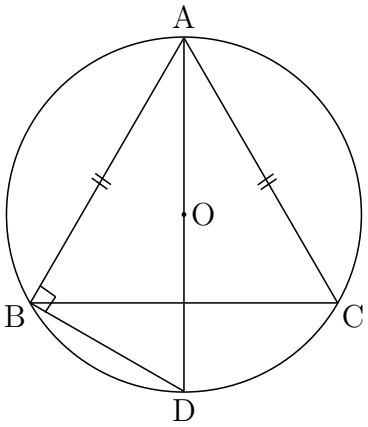
右の図のように，円 O と内接円 I が外接するとき，O の半径を r_2 とすると　$\mathrm{AO}=\sqrt{10}\,r_2$

$\mathrm{OI}=r_2+1$ であるから，$\mathrm{AO}+\mathrm{OI}=\mathrm{AI}$ より

$$\sqrt{10}\,r_2+(r_2+1)=\sqrt{10}\quad\text{ゆえに}\quad r_2=\frac{11-2\sqrt{10}}{9}$$

このとき，$0<r<r_2$ であるから，$0<t<3r_2$ より　$\boldsymbol{0<t<\dfrac{11-2\sqrt{10}}{3}}$

14.50　(1) AB = AC より，AO は ∠BAC の二等分線であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=k(\vec{b}+\vec{c})\quad(k\text{ は定数})$$

AD を △ABC の外接円の直径とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AO}}=2k(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2k-1)\vec{b}+2k\vec{c}$$

AB⊥BD であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ より

$$\vec{b}\cdot\{(2k-1)\vec{b}+2k\vec{c}\}=0\quad\text{ゆえに}\quad(2k-1)|\vec{b}|^2+2k\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

ここで　$|\vec{b}|=1,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=1\cdot1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

したがって　$(2k-1)\cdot1^2+2k\cdot\dfrac{1}{3}=0$　これを解いて　$k=\dfrac{3}{8}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{3}{8}(\vec{b}+\vec{c})}$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{3}{4}(\vec{b}+\vec{c})$

P が円周上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0\quad\text{ゆえに}\quad|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

したがって

$$|s\vec{b}+t\vec{c}|^2-\frac{3}{4}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(s\vec{b}+t\vec{c})=0$$
$$s^2|\vec{b}|^2+2st\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2-\frac{3}{4}s(|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c})-\frac{3}{4}t(\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)=0$$

よって　$\boldsymbol{s^2+\dfrac{2}{3}st+t^2-s-t=0}$

(3) $s+t=u$，$st=v$ より，s，t を解とする 2 次方程式 $x^2-ux+v=$ は実数解をもつから

$$u^2-4v \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad v \leqq \frac{u^2}{4} \quad \cdots ①$$

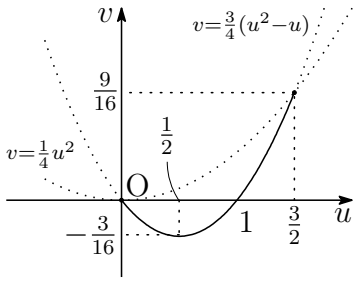
(2) の結果から

$$(s+t)^2-\frac{4}{3}st-(s+t)=0 \quad \text{ゆえに} \quad u^2-\frac{4}{3}v-u=0$$

したがって $v=\dfrac{3}{4}(u^2-u)$

すなわち $v=\dfrac{3}{4}\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{16} \quad \cdots ②$

① を満たしながら動くとき，② の表す図形は右の図の実線部分である．



よって $\quad \boldsymbol{-\dfrac{3}{16} \leqq v \leqq \dfrac{9}{16}}$

(4) v が最小となるとき，(3) で示したグラフから $\quad u=\dfrac{1}{2}$，$v=-\dfrac{3}{16}$

このとき，s，t は 2 次方程式 $x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{16}=0$ の解であるから

$$(s,\ t)=\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$$

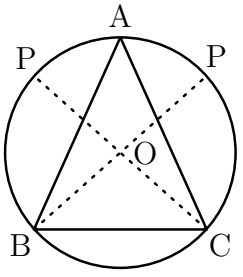
よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}}$ または $\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}}$

(1) の結果から $\quad \overrightarrow{BO}=-\dfrac{5}{8}\vec{b}+\dfrac{3}{8}\vec{c}$，$\overrightarrow{CO}=\dfrac{3}{8}\vec{b}-\dfrac{5}{8}\vec{c}$

$$\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}=\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\left(\frac{3}{8}\vec{b}-\frac{5}{8}\vec{c}\right)=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}$$

$$-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}=\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\left(-\frac{5}{8}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c}\right)=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$$

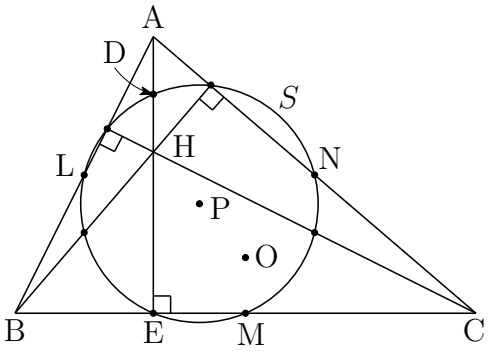
P は O に関して B，C と対称な点であるから，次のようになる．



解説 (長崎大学 2008) 5

14.51 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$,
$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{c}}\\\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{c}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}\end{aligned}$$



上式および $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2=R^2-R^2=0\\\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=R^2-R^2=0\end{aligned}$$

よって　AH⊥BC，CH⊥AB

補足 同様の計算により，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となる．これと (1) の結果より，H が△ABC の垂心であることがわかる．また，△ABC の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

△ABC の重心 G は外心 O と垂心 H を 1 : 2 に内分する点である．3 点 O，G，H は同一直線 (オイラー線) 上にある．

(2) L，M，N は AB，BC，CA の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$$

点 P は OH の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PL}}&=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{c}}\\\overrightarrow{\mathrm{PM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}}\\\overrightarrow{\mathrm{PN}}&=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{b}}\end{aligned}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PL}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|=\frac{1}{2}R$ である．
よって，点 P は△LMN の外心である．

(3) 点 D は線分 AH の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

線分 DM の中点は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

よって，P は線分 DM の中点である．

(4) △LMN の外接円を S とすると，(3) の結果から，DM は S の直径である．∠DEM は直角であるから，E は外接円 S 上の点である．

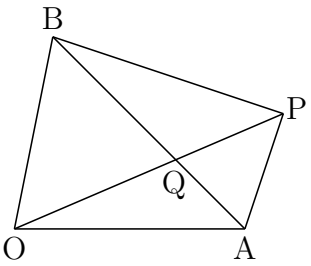
補足 E と同様に，頂点 B から直線 CA に垂直に引いた直線と CA との交点，頂点 C から直線 AB に垂直に引いた直線と AB との交点も S 上にある．また，D と同様に，線分 BH の中点，線分 CH の中点も S 上にある．これら 9 点が S 上にあるから，九点円 (オイラー円) と呼ばれている．S の中心 P もオイラー線上にある．△ABC の外心 O，重心 G，垂心 H を含めて次の比に内分される．

$$\mathrm{OG} : \mathrm{GP} : \mathrm{PH} = 2 : 1 : 3$$

S の半径は，△ABC の外接円の $\dfrac{1}{2}$ である．

14.52 (1) $\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = \triangle\mathrm{OAP} : \triangle\mathrm{OBP} = a : b$

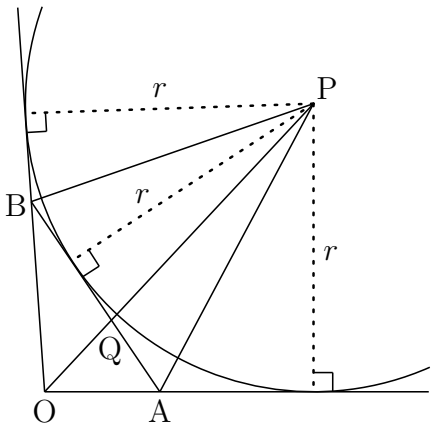
よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}} + a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}}$



(2)　$\mathrm{OQ} : \mathrm{OP}$
$= \triangle\mathrm{OAB} : \triangle\mathrm{OAP} + \triangle\mathrm{OBP}$
$= a+b-c : a+b$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}} + a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b-c}}$

(3) 3 直線 OA，OB，AB に接する円の半径を r とすると



$$\begin{aligned}&\triangle OAP : \triangle OBP : \triangle ABP\\ =&\frac{1}{2}OA\cdot r : \frac{1}{2}OB\cdot r : \frac{1}{2}AB\cdot r\\ =&OA : OB : AB\end{aligned}$$

したがって　$a : b : c = 3 : 5 : 6$

よって，(2) の結果から

$$\overrightarrow{OP} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3+5-6} = \frac{\mathbf{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}}{\mathbf{2}}$$

別解　OP は △OAB の O の内角の二等分線であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OP} = s\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} + \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right) = \frac{s}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{s}{5}\overrightarrow{OB}$$

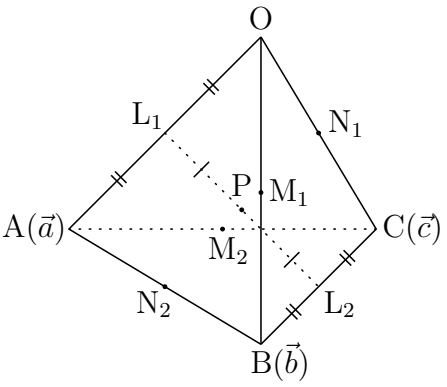
AP は △OAB の A の外角の二等分線であるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right) = \overrightarrow{OA} + t\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{3} + \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{6}\right)\\ &= \left(1 + \frac{t}{6}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{t}{6}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

上の 2 式より　$\dfrac{s}{3} = 1 + \dfrac{t}{6}$，$\dfrac{s}{5} = \dfrac{t}{6}$　ゆえに　$s = \dfrac{15}{2}$，$t = 9$

よって　$\overrightarrow{OP} = \dfrac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{2}$

14.53　(1) 点 O を始点とし，3 点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする．線分 OA，OB，OC の中点をそれぞれ L_1，M_1，N_1 とし，線分 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L_2，M_2，N_2 とすると



$$\begin{aligned}2\overrightarrow{L_1L_2} &= \vec{b} + \vec{c} - \vec{a},\\ 2\overrightarrow{M_1M_2} &= \vec{c} + \vec{a} - \vec{b},\\ 2\overrightarrow{N_1N_2} &= \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

直線 $\mathrm{L_1L_2}$，$\mathrm{M_1M_2}$，$\mathrm{N_1N_2}$ はそれぞれ直線 ℓ，m，n であるから，$\ell \perp m$ より，$\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}} \perp \overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$ であるから

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}) &= (\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}) \\ &= |\vec{c}|^2 - |\vec{b}-\vec{a}|^2 = 0 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$\vec{m} \perp \vec{n}$，$\vec{n} \perp \vec{\ell}$ であるから，同様にして

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}}) &= (\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{c}-\vec{b}|^2 = 0 \quad \cdots ② \\ (2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) &= (\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{c}|^2 = 0 \quad \cdots ③\end{aligned}$$

①〜③ より
$$\begin{aligned}|\vec{c}| = |\vec{b}-\vec{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| &= \mathrm{AB} = \sqrt{5} \\ |\vec{a}| = |\vec{c}-\vec{b}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| &= \mathrm{BC} = \sqrt{3} \\ |\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{c}| = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| &= \mathrm{CA} = 2\end{aligned}$$

①〜③ をそれぞれ整理すると

$$\begin{aligned}2\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = 3+4-5 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 1 \\ 2\vec{b}\cdot\vec{c} &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 = 4+5-3 = 6 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 3 \\ 2\vec{c}\cdot\vec{a} &= |\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 5+3-4 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{c}\cdot\vec{a} = 2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}-\vec{c}$ のなす角を φ とすると $(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})}{|\vec{b}||\vec{a}-\vec{c}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1-3}{2^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

よって，直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ は

$$\theta = \pi - \varphi = \pi - \frac{2\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2 = 1+2-3=0$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) = (\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = |\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}$

$= 5-4+1-2=0$

したがって　　$\mathrm{OA}\perp\mathrm{L_1L_2}$，$\mathrm{BC}\perp\mathrm{L_1L_2}$

2 点 $\mathrm{L_1}$，$\mathrm{L_2}$ の中点を P とすると　$\mathrm{PO}=\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$

点 P は，四面体 OABC の 4 頂点を通る球面の中心である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OL_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OL_2}}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

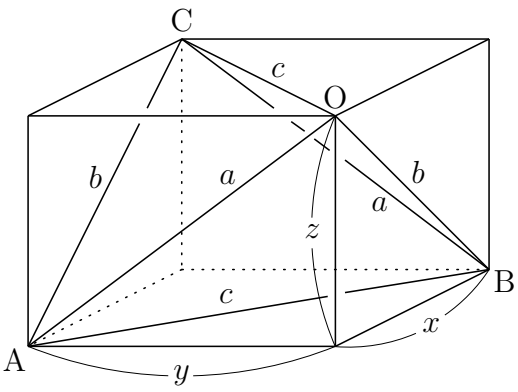
このとき　$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$= 3+4+5+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot2 = 24$

よって，求める半径は　$\dfrac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \dfrac{1}{4}\sqrt{24} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

補足 四面体 OABC のすべての面が合同である四面体を等面四面体という．$a=\mathrm{OA}$，$b=\mathrm{OB}$，$c=\mathrm{OC}$ とすると，直方体の縦，横，高さがそれぞれ x，y，z で

$$y^2+z^2=a^2$$
$$z^2+x^2=b^2$$
$$x^2+y^2=c^2$$



を満たすものが唯一存在する．

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

したがって，等面四面体はこの直方体に埋め込まれ，求める球面の半径はこの長方形に外接する球面の半径 R に等しい．

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

等面四面体の体積を V とすると [2](直方体から 4 つの直角四面体を除く)

$$V = xyz-4\cdot\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}xyz$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (pp.11-12)

14.54 (1) $\vec{u}=|\vec{a}|^2\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$，$\vec{v}=|\vec{b}|^2\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}$ とすると　$\vec{u}\perp\vec{a}$，$\vec{v}\perp\vec{b}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{6}=1\cdot1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\vec{u}=\vec{b}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a},\qquad\qquad \vec{v}=\vec{a}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$$

線分 OA の垂直二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 s を用いて

$$\frac{1}{2}\vec{a}+s\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\left(\vec{b}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)\vec{a}+s\vec{b}\quad\cdots①$$

線分 OB の垂直二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 t を用いて

$$\frac{1}{2}\vec{b}+t\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{b}+t\left(\vec{a}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}\right)=t\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\vec{b}\quad\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は ①，② を同時にみたす位置ベクトルであるから

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}s=t,\quad s=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\quad\text{これを解いて}\quad s=t=2-\sqrt{3}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2-\sqrt{3})(\vec{a}+\vec{b})}$

(2) A を通り OB に垂直な直線上の点の位置ベクトルは，実数 m を用いて

$$\vec{a}+m\vec{v}=\vec{a}+m\left(\vec{a}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}\right)=(1+m)\vec{a}-\frac{\sqrt{3}}{2}m\vec{b}\quad\cdots③$$

B を通り OA に垂直な直線上の点の位置ベクトルは，実数 n を用いて

$$\vec{b}+n\vec{u}=\vec{b}+n\left(\vec{b}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}n\vec{a}+(1+n)\vec{b}\quad\cdots④$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は ③，④ を同時にみたす位置ベクトルであるから

$$1+m=-\frac{\sqrt{3}}{2}n,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}m=1+n\quad\text{ゆえに}\quad m=n=2\sqrt{3}-4$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2\sqrt{3}-3)(\vec{a}+\vec{b})}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2}$

$$=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$$

(4) ∠AOB の二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 x を用いて

$$x\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)=x\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=x\vec{a}+x\vec{b}\quad\cdots⑤$$

(3) の結果から　$\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

したがって，∠OAB の二等分線上の点の位置ベクトルは，実数 y を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)&=\vec{a}+y\left\{-\vec{a}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}(\vec{b}-\vec{a})\right\}\\&=\left\{1-\left(1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)y\right\}\vec{a}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}y\vec{b}\quad\cdots⑥\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，⑤，⑥ を同時にみたす位置ベクトルであるから

$$x=1-\left(1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)y,\quad x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}y$$

第2式から　$y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}x$　第1式に代入して　$x=1-\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+1\right)x$

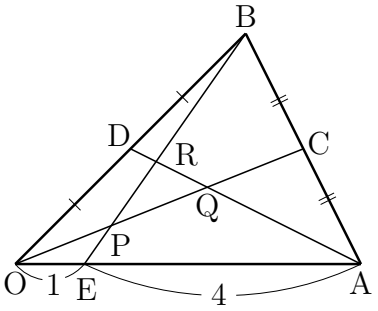
これを解いて　$x=\dfrac{2}{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}(\vec{a}+\vec{b})}$

14.55　(1) 点 P は線分 OC 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(0\leqq k\leqq 1)$$

とおける．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}\\&=\frac{5k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$



点 P は線分 BE 上にあるから

$$\frac{5k}{2}+\frac{k}{2}=1$$

これを解くと　$k=\dfrac{1}{3}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}\quad\cdots①$

点 Q は △OAB の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \quad \cdots ②$$

①，② より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}}\end{aligned}$$

(2) 点 R は線分 AD 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

とおける．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-s)\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} \\ &= 5(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \frac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

点 R は線分 BE 上にあるから

$$5(1-s) + \frac{s}{2} = 1$$

これを解くと　　$s = \dfrac{8}{9}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{9}\vec{a} + \dfrac{4}{9}\vec{b} \quad \cdots ③$

①，③ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \left(\frac{1}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{18}\vec{a} + \frac{5}{18}\vec{b}}\end{aligned}$$

(3) △PQR の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}$$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = \left|\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2$$
$$= \frac{1}{36}(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2) = \frac{1}{36}(5+2+1) = \frac{2}{9}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 = \left|-\frac{1}{18}(\vec{a}-5\vec{b})\right|^2$$
$$= \frac{1}{324}(|\vec{a}|^2 - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 25|\vec{b}|^2) = \frac{1}{324}(5-10+25) = \frac{5}{81}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left\{\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})\right\}\cdot\left\{-\frac{1}{18}(\vec{a}-5\vec{b})\right\}$$
$$= -\frac{1}{108}(|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 5|\vec{b}|^2) = -\frac{1}{108}(5-4-5) = \frac{1}{27}$$

したがって　$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{5}{81} - \left(\dfrac{1}{27}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$

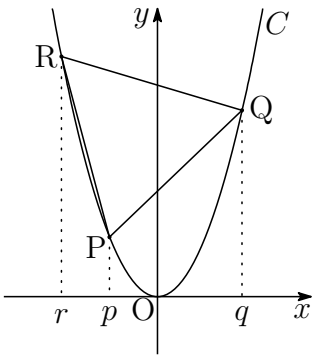
14.56　(1) $\mathrm{P}(p,\ q)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ であるから，直線 PQ の傾き a は

$$a = \frac{q^2-p^2}{q-p} = \boldsymbol{p+q}$$

(2) $a=1$ より　$\tan\theta_1 = 1$　これをみたす θ_1 $(0<\theta_1<\pi)$ は　$\boldsymbol{\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}}$

(3) (2) 結果から，直線 PR と x 軸の正の向きとなす角 θ_2 $(0<\theta_2<\pi)$ は，$r<p$ に注意して

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{7}{12}\pi}$$



また，直線 PR，QR の傾きは，(1) と同様にして

$$p+r = \tan\theta_2 = \tan\frac{7}{12}\pi = \boldsymbol{-2-\sqrt{3}}$$
$$q+r = \tan\left(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi\right) = \tan\frac{11}{12}\pi = \boldsymbol{-2+\sqrt{3}}$$

$a=1$ であるから，(1) の結果および上の 2 式から

$$p+q=1,\quad p+r=-2-\sqrt{3},\quad q+r=-2+\sqrt{3}$$

これを解くと　$p = \dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$，$q = \dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$，$r = -\dfrac{5}{2}$

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$ より　　$\mathrm{PQ} = \sqrt{2}(q-p) = \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$

よって　　$\triangle \mathrm{PQR} = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{6})^2 \sin 60^\circ = \mathbf{6\sqrt{3}}$

(4) $a = 2$ より，(1) の結果から　　$p + q = 2 \quad \cdots ①$

$\mathrm{S}(1,\ 1)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{SP}} = (p-1,\ p^2-1) = (p-1)(1,\ p+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = (q-1,\ q^2-1) = (q-1)(1,\ q+1)$

$\angle \mathrm{S} = \dfrac{\pi}{2}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{SP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SQ}} = 0$ であるから

$$1 \cdot 1 + (p+1)(q+1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad pq + p + q + 2 = 0$$

① を上式に代入すると　　$pq = -4$

よって　　$\triangle \mathrm{PQS} = \dfrac{1}{2}|(p-1)(q-1)||1(q+1) - 1(p+1)|$

$$= \frac{1}{2}|pq - (p+q) + 1|(q-p) = \frac{1}{2}|-4-2+1|(q-p)$$

$$= \frac{5}{2}(q-p) = \frac{5}{2}\sqrt{(p+q)^2 - 4pq} = \frac{5}{2}\sqrt{2^2 - 4\cdot(-4)} = \mathbf{5\sqrt{5}}$$

14.57　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a,\ a(4-a))$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (b,\ b(4-b))$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (3,\ 3)$ より

四角形 OABC の面積を S とすると，$0 < a < b < 3$ に注意して

$$S = \triangle \mathrm{OAB} + \triangle \mathrm{OBC}$$

$$= \frac{1}{2}|a \cdot b(4-b) - a(4-a) \cdot b| + \frac{1}{2}|b \cdot 3 - b(4-b) \cdot 3|$$

$$= \frac{1}{2}|ab(a-b)| + \frac{3}{2}|b(b-3)|$$

$$= \frac{1}{2}ab(b-a) + \frac{3}{2}b(3-b) = \frac{1}{2}(-ba^2 + b^2a - 3b^2 + 9b)$$

$$= -\frac{b}{2}\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}(b^3 - 12b^2 + 36b)$$

したがって，$a = \dfrac{b}{2}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{1}{8}(b^3 - 12b^2 + 36b)$ をとる．

ここで，$g(b) = b^3 - 12b^2 + 36b$ とおくと

$$g'(b) = 3b^2 - 24b + 36 = 3(b-2)(b-6)$$

$g(b)$ の増減表は次のようになる．

b	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$		↗	極大	↘	

よって，$a=\dfrac{b}{2}=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{2}$ のとき，S は最大になる．

(2) $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ a(4-a))$，$\mathrm{C}(3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ a(4-a)),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3-a,\ a^2-4a+3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の x 軸の正の向きとなす角をそれぞえ α，β とすると

$$\tan\alpha=\frac{a(4-a)}{a}=4-a,\quad \tan\beta=\frac{a^2-4a+3}{3-a}=1-a$$

$\theta=\angle\mathrm{OAC}$ とすると，$\theta=\pi-(\alpha-\beta)$ であるから

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan\{\pi-(\alpha-\beta)\}=-\tan(\alpha-\beta)\\&=-\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{4-a-(1-a)}{1+(4-a)(1-a)}\\&=-\frac{3}{a^2-5a+5}=\frac{3}{-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

θ が最小となるのは，$\tan\theta>0$ で，$\tan\theta$ が最小になるのときであるから

$$\boldsymbol{a=\frac{5}{2}}$$

14.58 (1) $\mathrm{P}(m,\ n)$ から直線 $l:ax+by+c=0$ に引いた垂線 PH を引くと，
実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(m,\ n)+t(a,\ b)=(m+at,\ n+bt)$$

H は l 上の点であるから

$$a(m+at)+b(n+bt)+c=0\quad\text{ゆえに}\quad t=-\frac{am+bn+c}{a^2+b^2}$$

このとき $\quad\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2t(a,\ b)$

$$\begin{aligned}&=(m,\ n)-\frac{2(am+bn+c)}{a^2+b^2}(a,\ b)\\&=\left(m-\frac{2a(am+bn+c)}{a^2+b^2},\ n-\frac{2b(am+bn+c)}{a^2+b^2}\right)\end{aligned}$$

よって $\quad\mathrm{Q}\left(m-\dfrac{2a(am+bn+c)}{a^2+b^2},\ n-\dfrac{2b(am+bn+c)}{a^2+b^2}\right)$

(2) l_1 に関して A と対称な点を A′，l_2 に関して O と対称な点を O′ とすると，(1) の結果から

$$\mathrm{A}'(4,\ 6), \quad \mathrm{O}'\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

2 点 A′O′ を通る直線の方程式は　　$19x - 8y - 28 = 0$

この直線と l_1，l_2 との交点が，それぞれ B，C であるから，これらの直線の方程式を連立することにより

$$\mathbf{B}\left(\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{11}},\ \frac{\mathbf{47}}{\mathbf{11}}\right),\ \mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

15.1　$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (4, -2,\ 1) - (1,\ 4, -2) = (3, -6,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= (1,\ 4, -2) + t(3, -6,\ 3)\\ &= (1 + 3t,\ 4 - 6t, -2 + 3t),\\ \overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= (1 + 3t,\ 4 - 6t, -2 + 3t) - (-1,\ 5,\ 5)\\ &= (2 + 3t, -1 - 6t, -7 + 3t)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,\ 1, -3) - (-1,\ 5,\ 5) = (4, -4, -8)$

A，C，E が同一直線上にあるとき，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表されるから

$$(2 + 3t, -1 - 6t, -7 + 3t) = s(4, -4, -8)$$

したがって　　$s = \dfrac{3}{4},\ \boldsymbol{t = \dfrac{1}{3}}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　**AE : EC = 3 : 1**

15.2　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (6, -2,\ 10) - (1,\ 3,\ 5) = 5(1, -1,\ 1)$

直線 AB 上の点 P の位置ベクトルを

$$\vec{p} = (1,\ 3,\ 5) + t(1, -1,\ 1) = (t + 1, -t + 3,\ t + 5)$$

とおくと (t は媒介変数)，このとき

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2 &= (t+1)^2 + (-t+3)^2 + (t+5)^2 \\ &= 3t^2 + 6t + 35 \\ &= 3(t+1)^2 + 32\end{aligned}$$

$|\vec{p}|$ が最小となるとき　$t = -1$　ゆえに　$\vec{p} = (0,\ 4,\ 4)$

よって　　**P(0, 4, 4)**

(2) (1) の結果から　　$|\vec{a}|^2 = 35,\quad |\vec{p}|^2 = 32,\quad \vec{a}\cdot\vec{p} = 32$

よって　$\triangle \mathrm{OAP} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{p}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{p})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{35\cdot 32 - 32^2} = \mathbf{2\sqrt{6}}$

解説　(大分大学 2002) 5

15.3　(1) 中心 $(2,\ 0,\ 1)$，半径 $2\sqrt{5}$ の球面の方程式は

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

この球面と yz 平面と交わってできる円の方程式は，$x = 0$ を代入して

$$(0-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 20 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 + (z-1)^2 = 16$$

よって　**中心 (0, 0, 1)，半径 4 の円**

(2) (1) の結果から，C 上の点 P の座標を $(0,\ 4\cos\theta,\ 4\sin\theta + 1)$ とおく．
また，xy 平面上の直線 $x = y$ 上の点 Q の座標を $(t,\ t,\ 0)$ とおく．

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= t^2 + (t - 4\cos\theta)^2 + (4\sin\theta + 1)^2 \\ &= 2t^2 - 8t\cos\theta + 8\sin\theta + 17 \\ &= 2(t - 2\cos\theta)^2 - 8\cos^2\theta + 8\sin\theta + 17 \\ &= 2(t - 2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta + 8\sin\theta + 9 \\ &= 2(t - 2\cos\theta)^2 + 8\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + 7\end{aligned}$$

PQ が最小となるとき　　$t = 2\cos\theta,\quad \sin\theta = -\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$t = \pm\sqrt{3}$

よって　**P(0, $\pm 2\sqrt{3}$, -1)，Q($\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}$, 0)** (複号同順) のとき，
PQ の最小値 $\sqrt{7}$

15.4 A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(1,\ s,\ t)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\left(\frac{4}{3},\ \frac{s}{3}+1,\ \frac{t}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(-\frac{5}{3},\ \frac{s}{3}+1,\ \frac{t}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-3,\ 3,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=0$ であるから

$$-\frac{20}{9}+\left(\frac{s}{3}+1\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=0 \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$-4+3\left(\frac{s}{3}+1\right)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s=1}$$

$s=1$ を ① に代入すると

$$-\frac{20}{9}+\left(\frac{1}{3}+1\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t=\pm 2}$$

15.5 (1) A$(1,\ 2,\ 6)$，B$(7,\ 0,\ 9)$，C$(s,\ t,\ 0)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(6,-2,\ 3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(s-1,\ t-2,-6)$$

したがって $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6(s-1)-2(t-2)+3\cdot(-6)$
$$=\boldsymbol{6s-2t-20}$$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$ であるから

$$6^2+(-2)^2+3^2=(s-1)^2+(t-2)^2+(-6)^2$$

したがって $\quad \boldsymbol{(s-1)^2+(t-2)^2=13}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ を (1) の結果に代入すると

$$6s-2t-20=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=3s-10 \quad \cdots①$$

さらに，① を (2) の結果に代入すると

$$(s-1)^2+(3s-10-2)^2=13 \quad \text{整理すると} \quad 5s^2-37s+66=0$$

ゆえに $\quad (s-3)(5s-22)=0 \quad$ これを解いて $\quad s=3,\ \dfrac{22}{5}$

よって，① から $\quad \boldsymbol{(s,\ t)=(3,-1),\ \left(\dfrac{22}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)}$

15.6 (1) 点 D は線分 AB を 3 : 2 に外分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3-2} = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= -2(3,-2,-2)+3(-1,-1,\ 3) = (-9,\ 1,\ 13)\end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (-1,-1,\ 3)-(3,-2,-2) \\ &= (-4,\ 1,\ 5) \\ \overrightarrow{\mathrm{CD}} &= (-9,\ 1,\ 13)-(1,\ a,\ 3a+2) \\ &= (-10,\ 1-a,\ 11-3a)\end{aligned}$$

直線 AB と直線 CD が直交するので，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より

$$-4\cdot(-10)+1\cdot(1-a)+5\cdot(11-3a)=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=6}$

(2) (1) の結果より，C$(1,\ 6,\ 20)$ であるから，△BCD の重心 G の座標は

$$\left(\frac{-1+1+(-9)}{3},\ \frac{-1+6+1}{3},\ \frac{3+20+13}{3}\right)\quad \text{すなわち}\quad (-3,\ 2,\ 12)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = (-3,\ 2,\ 12)-(3,-2,-2) = (-6,\ 4,\ 14)$
したがって，求める点を P とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AG}} \quad (0\leqq t\leqq 1) \\ &= (3,-2,-2)+t(-6,\ 4,\ 14) \\ &= (3-6t,\ -2+4t,\ -2+14t) \\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= (3-6t)^2+(-2+4t)^2+(-2+14t)^2 \\ &= 248t^2-108t+17\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=5$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=25$ であるから

$$\begin{aligned}248t^2-108t+17&=25 \\ 62t^2-27t-2&=0 \\ (2t-1)(31t+2)&=0\end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq 1$ であるから　$t=\dfrac{1}{2}$　よって，P の座標は　$\boldsymbol{(0,\ 0,\ 5)}$

15.7 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2a - 9c + 3c$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -3a - 18$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -6 + 2c$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ であるから

$$2a - 9c + 3c = 0, \quad -3a - 18 = 0, \quad -6 + 2c = 0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = -6,\ b = 13,\ c = 3}$

(2)(ア) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると

$$\left(-\frac{8}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{19}{5}\right) = \alpha(-6, -9,\ 13) + \beta(2,\ 3,\ 3) + \gamma(-3,\ 2,\ 0)$$
$$= (-6\alpha + 2\beta - 3\gamma, -9\alpha + 3\beta + 2\gamma,\ 13\alpha + 3\beta)$$

したがって
$$\begin{cases} -6\alpha + 2\beta - 3\gamma = -\dfrac{8}{15} \\ -9\alpha + 3\beta + 2\gamma = \dfrac{1}{5} \\ 13\alpha + 3\beta = \dfrac{19}{5} \end{cases}$$

ゆえに　$\alpha = \dfrac{1}{5},\ \beta = \dfrac{2}{5},\ \gamma = \dfrac{2}{5}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

(イ) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$= -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$
$$= \left(-1 + \frac{1}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1 - \frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{5}t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\left(-1 + \frac{1}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1 - \frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{5}t\overrightarrow{\mathrm{OC}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

したがって

$$\left(-1 + \frac{1}{5}t + k\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1 - \frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left(\frac{2}{5}t - k\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は互いに直交するので，これらは1次独立であるから

$$-1 + \frac{1}{5}t + k = 0, \quad 1 - \frac{3}{5}t = 0, \quad \frac{2}{5}t - k = 0$$

これを解いて　　$t = \dfrac{5}{3},\ k = \dfrac{2}{3}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{AE} : \mathrm{EC} = 2 : 1}$

15.8 (1) H は平面 OBC 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおける (s，t は実数).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= s(3,\ 0,\ 1) + t(1,\ 2,\ 1) - (2,\ 1,\ 4) \\ &= (3s + t - 2,\ 2t - 1,\ s + t - 4)\end{aligned}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ より

$$\begin{aligned}3(3s + t - 2) + 1(s + t - 4) &= 0 \\ 5s + 2t &= 5 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ より

$$\begin{aligned}1(3s + t - 2) + 2(2t - 1) + 1(s + t - 4) &= 0 \\ 2s + 3t &= 4 \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② を解いて　　$s = \dfrac{7}{11}$，$t = \dfrac{10}{11}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{7}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{10}{11}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$= \frac{7}{11}(3,\ 0,\ 1) + \frac{10}{11}(1,\ 2,\ 1) = \left(\frac{31}{11},\ \frac{20}{11},\ \frac{17}{11}\right)$$

よって　　$\mathbf{H}\left(\dfrac{\mathbf{31}}{\mathbf{11}},\ \dfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{11}},\ \dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{11}}\right)$

(2) $\triangle \mathrm{OBC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{10 \cdot 6 - 4^2} = \boldsymbol{\sqrt{11}}$

(1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{31}{11},\ \frac{20}{11},\ \frac{17}{11}\right) - (2,\ 1,\ 4) \\ &= \frac{9}{11}(1,\ 1, -3) \\ |\overrightarrow{\mathrm{AH}}| &= \frac{9}{11}\sqrt{1 + 1 + 9} = \frac{9}{\sqrt{11}}\end{aligned}$$

したがって，四面体 AOBC の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle \mathrm{OBC} \times |\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \frac{1}{3} \times \sqrt{11} \times \frac{9}{\sqrt{11}} = \mathbf{3}$$

解説 (琉球大学 2007) 2

(3) 求める球面の方程式は，原点を通ることに注意して

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$$

とおく．これが 3 点 A(2, 1, 4)，B(3, 0, 1)，C(1, 2, 1) を通るから

$$2a+b+4c=-21$$
$$3a+c=-10$$
$$a+2b+c=-6$$

これを解いて　$a=-\dfrac{17}{9}$，$b=\dfrac{1}{9}$，$c=-\dfrac{13}{3}$

よって，求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2-\frac{17}{9}x+\frac{1}{9}y-\frac{13}{3}z=0}$$

15.9 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2,\ 0)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ より

$${b_1}^2+{b_2}^2=1 \quad \cdots ①$$

また，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 60^\circ$ より

$$b_1=1\times 1\times\frac{1}{2} \qquad \text{ゆえに} \qquad \boldsymbol{b_1=\frac{1}{2}}$$

これを ① に代入すると　${b_2}^2=\dfrac{3}{4}$　$b_2>0$ より　$\boldsymbol{b_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ より

$${c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2=1 \quad \cdots ②$$

$\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 60^\circ$ より

$$c_1=1\times 1\times\frac{1}{2} \qquad \text{ゆえに} \qquad \boldsymbol{c_1=\frac{1}{2}} \quad \cdots ③$$

$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 60^\circ$ より

$$\frac{1}{2}c_1+\frac{\sqrt{3}}{2}c_2=1\times 1\times\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad c_1+\sqrt{3}c_2=1$$

③ を上式に代入して　$\boldsymbol{c_2=\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$　$\cdots ④$

③，④ を ② に代入すると　${c_3}^2=\dfrac{2}{3}$　$c_3>0$ より　$\boldsymbol{c_3=\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ 0)$,

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) - \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right) = \left(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 1\cdot 0 + 0\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 0\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

(3) 直線 BC 上の点 P は，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ であるから

$$(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = 0 \quad \cdots ⑤$$

ここで，△OBC は一辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -|\overrightarrow{\mathrm{BO}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = 1$$

これらを ⑤ に代入して $\quad t = \dfrac{1}{2}$

したがって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$$= \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right) + \frac{1}{2}\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

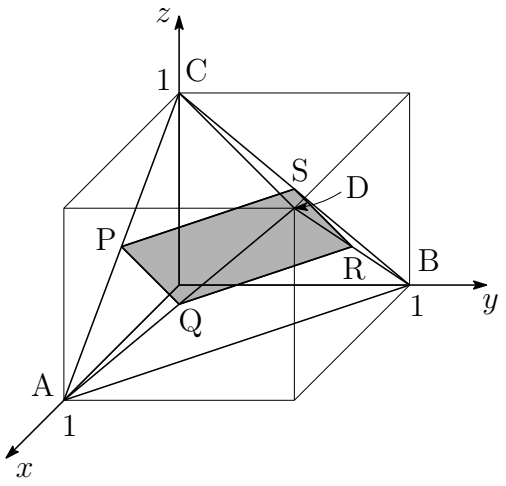
よって $\quad \mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{6}}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right) - (1,\ 0,\ 0) = \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = 0$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

15.10 (1) 4 点 P，Q，R，S は，それぞれ線分 AC，AD，BD，BC を $a : 1-a$ に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + a\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-a)(1,\ 0,\ 0) + a(0,\ 0,\ 1) = (1-a,\ 0,\ a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + a\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-a)(1,\ 0,\ 0) + a(1,\ 1,\ 1) = (1,\ a,\ a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + a\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-a)(0,\ 1,\ 0) + a(1,\ 1,\ 1) = (a,\ 1,\ a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + a\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-a)(0,\ 1,\ 0) + a(0,\ 0,\ 1) = (0,\ 1-a,\ a)$$

よって　$\mathbf{P(1-a,\ 0,\ a)}$，$\mathbf{Q(1,\ a,\ a)}$，$\mathbf{R(a,\ 1,\ a)}$，$\mathbf{S(0,\ 1-a,\ a)}$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (a,\ a,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{SR}} = (a,\ a,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{PS}} = (a-1,\ 1-a,\ 0)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{SR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}} = 0$

したがって，切り口の面積 $S(a)$ は $(0 < a < 1)$

$$S(a) = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PS}}| = \sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}(1-a)$$
$$= -2a^2 + 2a = -2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

よって　$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

15.11 (1) G(0, 4, 4)，M(2, 0, 4)，N(4, 4, 2) であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = (2,\ 0,\ 4) - (0,\ 4,\ 4) = \mathbf{(2, -4,\ 0)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GN}} = (4,\ 4,\ 2) - (0,\ 4,\ 4) = \mathbf{(4,\ 0, -2)}$$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GN}} = 2\times 4+(-4)\times 0+0\times(-2)=8$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}| = \sqrt{2^2+(-4)^2+0^2}=2\sqrt{5}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{GN}}| = \sqrt{4^2+0^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$$

よって　　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GM}}||\overrightarrow{\mathrm{GN}}|} = \dfrac{8}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

(3) (2) の結果から　　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

よって　　$\triangle\mathrm{GMN} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{GM}}||\overrightarrow{\mathrm{GN}}|\sin\theta$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{21}}{5} = \boldsymbol{2\sqrt{21}}$$

(4) $\triangle$GMN の高さを h とすると，三角錐 FGMN の体積により

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{GMN}\times h = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{MFG}\times\mathrm{FN}$$

したがって　　$\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{21}\times h = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\times 2$

これを解いて　　$h = \dfrac{8}{\sqrt{21}} = \boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{21}}{21}}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおくと (α，β，γ は実数)

$$(4,\ 4,\ 4) = \alpha(0,\ 4,\ 4)+\beta(2,\ 0,\ 4)+\gamma(4,\ 4,\ 2)$$
$$= (2\beta+4\gamma,\ 4\alpha+4\gamma,\ 4\alpha+4\beta+2\gamma)$$

成分を比較して　$\beta+2\gamma=2$,　$\alpha+\gamma=1$,　$2\alpha+2\beta+\gamma=2$

ゆえに　$\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\beta=\dfrac{2}{5}$，$\gamma=\dfrac{4}{5}$　　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ とおくと (k は実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)$$
$$= \frac{k}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{2k}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{4k}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

このとき，P は平面 GMN 上の点であるから

$$\frac{k}{5}+\frac{2k}{5}+\frac{4k}{5}=1 \quad \text{ゆえに} \quad k=\frac{5}{7} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OF}}}$$

15.12 (1) $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}$，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ より　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MG}$　$\cdots$①

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{MG}$ より　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MG}=0$　$\cdots$②

①，② より　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MG}\right)$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MG}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|^2$$

補足 M は線分 OA の中点であるから

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MG},$$
$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MG}$$

OG = AG より，$|\overrightarrow{OG}|^2=|\overrightarrow{AG}|^2$ であるから

$$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MG}\right|^2=\left|-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MG}\right|^2$$　整理すると　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MG}=0$

(2) (1) の結果から，同様にして　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}|^2$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OC}|^2$

$\overrightarrow{OG}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$ とおくと，(1) および上の 2 式から

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$$

よって　　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

(3) $\overrightarrow{OP}=(1,\ \sqrt{3},\ 0)$，$\overrightarrow{OQ}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{OR}=\left(\frac{\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

したがって　　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+0\cdot\sqrt{2}=0$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=1\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=-\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

よって，OP，OQ，OR は互いに直交している．

(2) の結果により，O，P，Q，R を通る球の中心を G とすると

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})\\ &= \left(1-\frac{\sqrt{6}}{4},\ \sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

したがって　$4|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2 = \left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 9$

よって，求める球面の半径は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

別解　$2\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 1$ であるから

$$\begin{aligned}4|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2 &= (\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2\\ &= 4+4+1 = 9\end{aligned}$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| = \dfrac{3}{2}$

15.13　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1,\ 0,-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-2,\ 1,\ 1)$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{B} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|} = \frac{1\cdot(-2)+0\cdot1+(-2)\cdot1}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \frac{-4}{\sqrt{30}} < 0$$

よって　$\angle\mathrm{B} > \dfrac{\pi}{2}$

(2)　点 H は BC 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (0,\ 0,\ 2)+t(-2,\ 1,\ 1) = (-2t,\ t,\ t+2)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-2t,\ t,\ t+2)-(1,\ 0,\ 0) = (-2t-1,\ t,\ t+2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ であるから

$$(-2t-1)\cdot(-2)+t\cdot1+(t+2)\cdot1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -\frac{2}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$　　よって　$\boldsymbol{\mathrm{H}\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ 0)$ および (2) の結果から

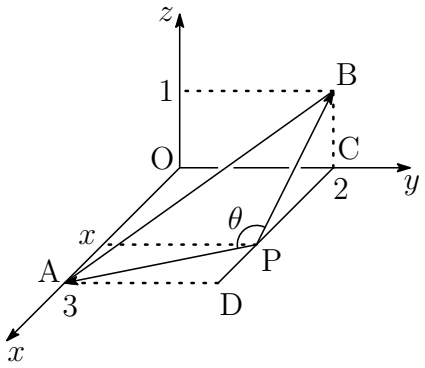
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{2}{3}\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = 2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{4}{3}$$

よって，△OAH の面積は

$$\triangle \mathrm{OAH} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot 2^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

15.14 (1) P は線分 CD 上の点であるから　　$0 \leqq x \leqq 3$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (3,\ 0,\ 0) - (x,\ 2,\ 0) = (3-x, -2,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (0,\ 2,\ 1) - (x,\ 2,\ 0) = (-x,\ 0,\ 1)$$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (3-x)\cdot(-x) + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 1 = x^2 - 3x$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \sqrt{(3-x)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \sqrt{(-x)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

よって　　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} = \boldsymbol{\dfrac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}\sqrt{x^2 + 1}}}$　　$\boldsymbol{(0 \leqq x \leqq 3)}$

(2) △PAB の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 - 6x + 13)(x^2 - 3x) - (x^2 - 3x)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{5x^2 - 6x + 13}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}}$$

$0 \leqq x \leqq 3$ において，S は最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{56}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{70}}{5}}$ をとる．

15.15 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 2,\ 1) - (3,\ 0,\ 0) = (-2,\ 2,\ 1)$

点 H が線分 AB 上にあるとき，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k(-2,\ 2,\ 1) \quad (0 \leqq k \leqq 1)$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \\ &= (3,\ 0,\ 0) + k(-2,\ 2,\ 1) \\ &= (-2k+3,\ 2k,\ k) \quad \cdots ①\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= (-2k+3,\ 2k,\ k) - (0,\ 0,\ m) \\ &= (-2k+3,\ 2k,\ k-m) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}} = 0$ より

$$-2(-2k+3) + 2 \cdot 2k + 1 \cdot (k-m) = 0$$

したがって　　$m = 9k - 6 \quad \cdots ③$

$0 \leqq k \leqq 1$ であるから　　$\boldsymbol{-6 \leqq m \leqq 3}$

(2) ③ を ② に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = (-2k+3,\ 2k, -8k+6)$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = (-2k+3)^2 + (2k)^2 + (-8k+6)^2$

$$\begin{aligned}&= 72k^2 - 108k + 45 \\ &= 72\left(k - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

上式および ① により，$0 \leqq k \leqq 1$ において，$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$ は

$k = 0$　すなわち　$\mathbf{H(3,\ 0,\ 0)}$ のとき　　最大値 $\boldsymbol{3\sqrt{5}}$,

$k = \dfrac{3}{4}$　すなわち　$\mathbf{H}\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$ のとき　最小値 $\dfrac{\boldsymbol{3\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$

(3) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,\ 0,\ 0)$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1,\ 2,\ 1)$ とおくと

$$|\vec{a}|^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 3, \quad |\vec{b}|^2 = 6$$

P は平面 OAB 上にあるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \cdots ④$$

とおける．OA，OB の中点をそれぞれ M，N とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} = s\vec{a} + t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{NP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{ON}} = s\vec{a} + t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}} &= \vec{a}\cdot\left(s\vec{a} + t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\\ &= s|\vec{a}|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}|\vec{a}|^2\\ &= 9s + 3t - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}(6s + 2t - 3)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NP}} &= \vec{b}\cdot\left(s\vec{a} + t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\\ &= s\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{b}|^2\\ &= 3s + 6t - 3 = 3(s + 2t - 1)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NP}} = 0$ より

$$6s + 2t - 3 = 0, \quad s + 2t - 1 = 0$$

これを解いて　$s = \dfrac{2}{5}$，$t = \dfrac{3}{10}$

ゆえに
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b} = \frac{2}{5}(3,\ 0,\ 0) + \frac{3}{10}(1,\ 2,\ 1) = \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{3}{10}\right)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{27}{10}$$

よって　$\mathbf{P\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{3}{10}\right)}$，　$r = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{\dfrac{27}{10}} = \mathbf{\dfrac{3\sqrt{30}}{10}}$

15.16　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + x\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{b} + x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{c} + t\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}})\\ &= \frac{1}{3}\{(\vec{a} + x\vec{c}) + (\vec{b} + x\vec{a}) + (\vec{c} + t\vec{b})\}\\ &= \mathbf{\frac{1}{3}\{(x+1)\vec{a} + (t+1)\vec{b} + (x+1)\vec{c}\}}\end{aligned}$$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = b + x\vec{a} - (\vec{a} + x\vec{c}) = (x-1)\vec{a} + \vec{b} - x\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = c + t\vec{b} - (\vec{a} + x\vec{c}) = -\vec{a} + t\vec{b} - (x-1)\vec{c}$$

直線 OS が △PQR に垂直なとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$ であるから

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

であることに注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{3}\{(x+1)(x-1)+(t+1)-x(x+1)\}=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{3}\{-(x+1)+t(t+1)-(x+1)(x-1)\}=0$$

整理すると　$t=x$，$(x-t)(x+t+1)=0$　よって　$\boldsymbol{t=x}$

(3) (2) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(x-1)^2+1+x^2=2(x^2-x+1)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=1+x^2+(x-1)^2=2(x^2-x+1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-(x-1)x+x+x(x-1)=x^2-x+1$$

したがって　$f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4(x^2-x+1)^2-(x^2-x+1)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-x+1)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$ をとる．

(4) (3) の結果から，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)=\frac{3}{4}\quad\text{ゆえに}\quad|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，求める体積は　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{16}}$

15.17　(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ z-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y,\ z+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ であるから

$$x^2+y^2+(z-1)(z+1)=0\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=1}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 1) + t(u,\ v, -1)$

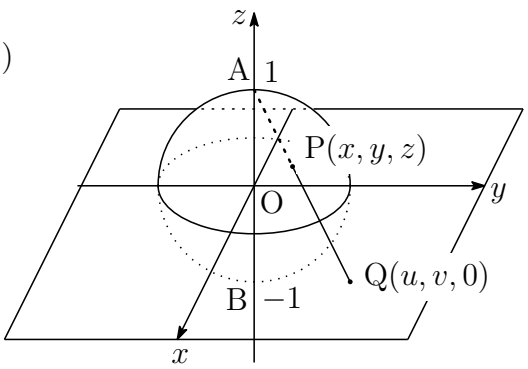
$= (tu,\ tv,\ 1-t)$

したがって

$x = tu,\ y = tv,\ z = 1-t \quad \cdots (*)$

$t = 1 - z \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{u = \frac{x}{1-z},\ \ v = \frac{y}{1-z}}$$



(3) $(*)$ を (1) の結果に代入すると

$(tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = 1$ 整理すると $t\{(u^2+v^2+1)t - 2\} = 0$

$t \neq 0$ であるから $\quad t = \dfrac{2}{u^2+v^2+1}$

これを $(*)$ に代入すると

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ \frac{2v}{u^2+v^2+1},\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \vec{a}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{a} = 0$ であるから

$$x + y + z = 0$$

これに (3) の結果を代入して整理すると

$u^2 + v^2 + 2u + 2v - 1 = 0$ すなわち $(u+1)^2 + (v+1)^2 = 3$

よって，**点 $(-1, -1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円**をえがく．

15.18 $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$\vec{b} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に垂直なベクトルを

$\vec{n} = (x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{a} \perp \vec{n}$，$\vec{b} \perp \vec{n}$ より，$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$，$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ であるから

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y = 0$ ゆえに $x - y = 0$

$\dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{\sqrt{2}}{4}y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}z = 0$ ゆえに $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2\sqrt{3}z = 0$

上の 2 式から $\quad x : y : z = \sqrt{3} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$

$\vec{n}$ は，実数 t を用いて　$\vec{n} = t(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{2})$

$|\vec{n}| = 1$ であるから　$|t|\sqrt{3+3+2} = 1$　ゆえに　$t = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

よって　$\vec{n} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{2}) = \pm\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},\ \dfrac{\sqrt{6}}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$

15.19　(1) A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(3,\ 0,\ 1)$，C$(1,\ 2,\ 0)$，P$(-3,\ 2,\ 2)$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,-1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (0,\ 1,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (-4,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと (α，β は実数)

$$(-4,\ 1,\ 1) = \alpha(2,-1,\ 0) + \beta(0,\ 1,-1)$$

したがって　　$2\alpha = -4$，$-\alpha + \beta = 1$，$-\beta = 1$

これを解いて　　$\alpha = -2$，$\beta = -1$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって，点 P は平面 H 上の点である．

(2) 平面 H を媒介変数 s，t を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= (1,\ 1,\ 1) + s(2,-1,\ 0) + t(0,\ 1,-1)\\ &= (1+2s,\ 1-s+t,\ 1-t)\quad \cdots ①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (0,\ 1,-1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (1,\ 2,\ 2)$$

とおく．Q を通り $\vec{n}$ に平行な直線を媒介変数 k を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (1,-3,-4) + k(1,\ 2,\ 2)\\ &= (1+k,-3+2k,-4+2k)\quad \cdots ②\end{aligned}$$

求める交点 $(x,\ y,\ z)$ は，①，② から

$$\begin{aligned}x &= 1+2s = 1+k\\ y &= 1-s+t = -3+2k\\ z &= 1-t = -4+2k\end{aligned}$$

これを解いて　　$s = 1$，$t = 1$，$k = 2$，$x = 3$，$y = 1$，$z = 0$

よって，求める交点は　　**(3，1，0)**

15.20 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 2,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,-1,\ 4)$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{2-2+12}{\sqrt{14}\sqrt{21}}=\frac{12}{7\sqrt{6}}=\boldsymbol{\frac{2}{7}\sqrt{6}}$$

(2) (1) の結果から　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{24}{49}}=\dfrac{5}{7}$

よって　　$S=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta=\sqrt{14}\sqrt{21}\times\dfrac{5}{7}=\boldsymbol{5\sqrt{6}}$

(3) $\vec{n}=(x,\ y,\ z)\neq\vec{0}$ が，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{n}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\vec{n}$ であるとき

$$x+2y+3z=0,\quad 2x-y+4z=0\quad\text{ゆえに}\quad x=-\frac{11}{5}z,\quad y=-\frac{2}{5}z$$

したがって，$\vec{n}$ の 1 つを $\vec{n}=(11,\ 2,-5)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\pm|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\pm\frac{S}{|\vec{n}|}\vec{n}=\pm\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{11^2+2^2+(-5)^2}}(11,\ 2,-5)$$
$$=\boldsymbol{\pm(11,\ 2,-5)}$$

15.21 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 2,-4)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6},$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-4)^2}=2\sqrt{6},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\cdot(-2)+1\cdot2+1\cdot(-4)=-6$$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{-6}{\sqrt{6}\cdot2\sqrt{6}}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$$

別解　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{6\cdot24-36}=3\sqrt{3}$

(2) 求めるベクトルを $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=0$

したがって　　$2x+y+z=0,\quad -x+y-2z=0$

ゆえに　　$x:y:z=-1:1:1$　よって　$\boldsymbol{(-1,\ 1,\ 1)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1,\ 2, -4)$ と $\vec{n} = (-1,\ 1,\ 1)$ のなす角を α とすると

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\vec{n}|} = \frac{-1+2-4}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\sqrt{1+1+1}} = -\frac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}$$

よって　　$\mathrm{DE} = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\cos\alpha| = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

(4) (1)，(3) の結果から　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DE} = \dfrac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = \boldsymbol{3}$

解説 外積 (ベクトル積) を用いると簡単に求めることができる．外積は，高校数学の範囲外であるから，検算用に使用し，答案には書かないようにする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2,\ 1,\ 1) \times (-2,\ 2, -4) = (-6,\ 6,\ 6)$$

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 3\sqrt{3}$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-6,\ 6,\ 6)\cdot(1,\ 2, -4) = -18$$

四面体 ABCD の体積 V は　$V = \dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \dfrac{1}{6}\times 18 = 3$

15.22 (1) $\mathrm{A}_3(2,\ 2,\ 2)$ と $\mathrm{A}_4(4,\ 2,\ 0)$ の中点 B の座標は

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{2+2}{2},\ \frac{2+0}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (3,\ 2,\ 1)$$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = (2,\ 3,\ 1) - (1,\ 1,\ 1) = (1,\ 2,\ 0)$,

$\overrightarrow{\mathrm{A_1B}} = (3,\ 2,\ 1) - (1,\ 1,\ 1) = (2,\ 1,\ 0)$

よって　3 点 A_1，A_2，B は平面 $z = 1$ 上にあるから，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{A_1B}}$ の x 成分および y 成分から

$$\triangle\mathrm{A_1A_2B} = \frac{1}{2}|1\cdot 1 - 2\cdot 2| = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2) 3 点 A_1，A_2，B は平面 $z = 1$ 上にあるから，2 点 $\mathrm{A}_3(2,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{A}_4(4,\ 2,\ 0)$ からこの平面に下ろした垂線の長さは，ともに 1 である．

よって，四面体 $\mathrm{A_1A_2A_3B}$ および四面体 $\mathrm{A_1A_2A_4B}$ の体積は，ともに

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{A_1A_2B}\times 1 = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3)
$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_4}} \\ &= (1,\ 1,\ 1) + (2,\ 3,\ 1) + (2,\ 2,\ 2) + (4,\ 2,\ 0) \\ &= (9,\ 8,\ 4) \end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{9}{4},\ 2,\ 1\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{A_1P}}=\left(\dfrac{9}{4},\ 2,\ 1\right)-(1,\ 1,\ 1)=\left(\dfrac{5}{4},\ 1,\ 0\right)$

上式および (1) の結果から，$\overrightarrow{\mathrm{A_1P}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{A_1B}}$ とおくと

$$\left(\frac{5}{4},\ 1,\ 0\right)=\alpha(1,\ 2,\ 0)+\beta(2,\ 1,\ 0)$$

これを解いて　$\alpha=\dfrac{1}{4},\ \beta=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{A_1P}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_1B}}$

よって，4 点 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，B，P は同一平面上にある．

(4) $\mathrm{A_1}(1,\ 1,\ 1)$ と $\mathrm{A_2}(2,\ 3,\ 1)$ の中点 C の座標は

$$\left(\frac{1+2}{2},\ \frac{1+3}{2},\ \frac{1+1}{2}\right)\quad\text{すなわち}\quad\left(\frac{3}{2},\ 2,\ 1\right)$$

これと (1) の結果から，4 点 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，B，C の y 座標が 2 であるから，これらの 4 点は，平面 $y=2$ 上にある．

15.23　(1) $\mathrm{A}(5,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 5)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,-1),\quad\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-4,-1,5),\quad\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(5,-1,-4)$$

したがって　$\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

$\mathrm{BC}=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+5^2}=\boldsymbol{\sqrt{42}}$

$\mathrm{CA}=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-4)^2}=\boldsymbol{\sqrt{42}}$

(2) (1) の結果から，三角形 ABC は $\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ の二等辺三角形であるから，C から辺 AB に下した垂線の長さは

$$\sqrt{(\sqrt{42})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{9}{2}\sqrt{2}$$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\dfrac{9}{2}\sqrt{2}=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}\sqrt{3}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-5,1,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\&=(5,\ 0,\ 1)+\ell(-1,\ 2,-1)+m(-5,\ 1,\ 4)\\&=(5-\ell-5m,\ 2\ell+m,\ 1-\ell+4m)\quad\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=-1(5-\ell-5m)+2(2\ell+m)-1(1-\ell+4m)\\&=6\ell+3m-6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=-5(5-\ell-5m)+(2\ell+m)+4(1-\ell+4m)\\&=3\ell+42m-21\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$ より

$$\begin{cases} 6\ell+3m-6=0 \\ 3\ell+42m-21=0 \end{cases} \qquad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{\ell=\frac{7}{9},\ m=\frac{4}{9}}$$

(4) (3) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{11}{9}\cdot\frac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{11}$

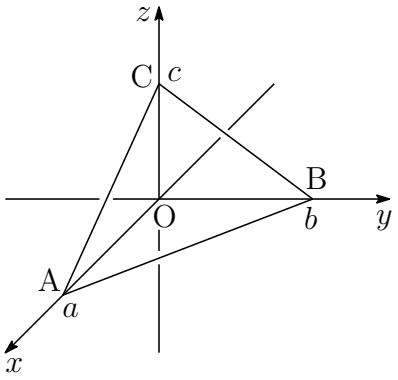
ゆえに $\boldsymbol{k=\frac{11}{9}}$，$\mathrm{AM}:\mathrm{MH}=9:2$ よって $T=\frac{2}{9}S=\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(5) (3) の結果を ① に代入すると $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ 2,\ 2)$ ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=2\sqrt{3}$

(4) の結果から，四角形 ABHC の面積は $\frac{11}{9}S=\frac{11}{9}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3}=\frac{11}{2}\sqrt{3}$

よって $V=\frac{1}{3}\times\frac{11}{2}\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=\boldsymbol{11}$

15.24 (1) $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ b,\ 0),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-a,\ 0,\ c)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{r}=(bc,\ ca,\ ab)$$

とおくと，$\vec{n}$ の x 成分の符号に注意して

$$\vec{n}=\frac{1}{|\vec{r}\,|}\vec{r}=\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}}\boldsymbol{(bc,\ ca,\ ab)}$$

(2) $$\vec{r}=(bc,\ ca,\ ab)=\frac{bc}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{ca}{b}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{ab}{c}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{r}$ に平行であるから (k は定数) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{r}$ $\cdots②$

① を ② に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=k\left(\frac{bc}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{ca}{b}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{ab}{c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{bc}{a}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{ca}{b}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{ab}{c}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

H は平面 α 上の点であるから $\frac{bc}{a}k+\frac{ca}{b}k+\frac{ab}{c}k=1$

したがって　　$k=\dfrac{abc}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}=\dfrac{abc}{|\vec{r}\,|^2}$　　$\cdots$③

②，③ および $k>0$ に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{abc}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}\vec{r}$$

$$=\frac{\boldsymbol{abc}}{\boldsymbol{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}\boldsymbol{(bc,\ ca,\ ab)}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=k|\vec{r}\,|=\frac{abc}{|\vec{r}\,|^2}|\vec{r}\,|=\frac{abc}{|\vec{r}\,|}=\frac{\boldsymbol{abc}}{\boldsymbol{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}}$$

(3)　(1) の結果から　　$n_1=\dfrac{bc}{|\vec{r}\,|}$

四面体 OABC の体積により，$\dfrac{1}{3}S_1a=\dfrac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ であるから

$$S_1a=S\times\frac{abc}{|\vec{r}\,|}\qquad\text{ゆえに}\qquad S_1=\frac{bc}{|\vec{r}\,|}S=n_1S$$

15.25　(1)　A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 0,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の x 成分が等しく，y 成分および z 成分が異なる．

したがって，3 点 A，B，C は一直線上にない．

D$\left(3,-1,\ \dfrac{5}{6}\right)$，E$\left(8,\ 4,-\dfrac{1}{3}\right)$，F$\left(5,\ 3,\ \dfrac{1}{2}\right)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\left(5,\ 5,-\frac{7}{6}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{DF}}=\left(2,\ 4,-\frac{1}{3}\right)$$

これから　　$\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\left(1,\ 1,-\dfrac{7}{30}\right)$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\left(1,\ 2,-\dfrac{1}{6}\right)$

$\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ の x 成分が等しく，y 成分および z 成分が異なる．

したがって，3 点 D，E，F は一直線上にない．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{u}=(3,\ 2,\ 6)$ とし，

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ に垂直なベクトルの 1 つを $\vec{v}=(9,-2,\ 30)$ とする．

平面 ABC 上の点 P$(x,\ y,\ z)$ について，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ であるから

$$3(x-2)+2y+6z=0\quad\text{ゆえに}\quad 3x+2y+6z=6\quad\cdots①$$

平面 DEF 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ について，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=0$ であるから

$$9(x-3)-2(y+1)+30\left(z-\frac{5}{6}\right)=0$$

整理すると　　$9x-2y+30z=54$　$\cdots$②

①，② から y を消去すると　$x=-3z+5$　$\cdots$③

③ を ① に代入すると　$z=\dfrac{2}{3}y+3$　$\cdots$④

$y=3t$ とおくと，③，④ より　$x=-6t-4$，$z=2t+3$

したがって　$\ell:(x,\ y,\ z)=(-4,\ 0,\ 3)+t(-6,\ 3,\ 2)$

よって，ℓ は点 **(−4, 0, 3)** を通り，ベクトル **(−6, 3, 2)** に平行.

15.26　(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,\ 2)$

$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ であるから

$$x+y=0,\quad 2x+y+2z=0\quad\text{ゆえに}\quad y=-x,\quad z=-\frac{1}{2}x$$

$\vec{n}=\left(x,-x,-\dfrac{1}{2}x\right)$，$|\vec{n}|^2=1$ であるから

$$x^2+x^2+\frac{1}{4}x^2=1\quad\text{ゆえに}\quad 9x^2=4$$

$x>0$ に注意して　$x=\dfrac{2}{3}$　よって　　$\boldsymbol{\vec{n}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}$

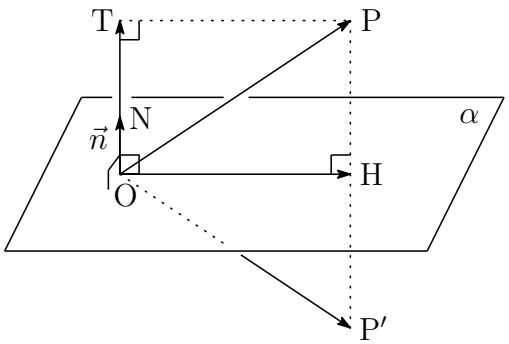
(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$ とし，P から平面 α および直線 ON に引いた垂線の交点をそれぞれ H，T とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OT}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n})\vec{n}\qquad(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 0,-1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(2,-2,-1)$

これと $(*)$ の第 1 式により，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ 2,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+(-\overrightarrow{\mathrm{OT}})=(0,\ 4,\ 1)\quad\text{よって}\quad\mathbf{P'(0,4,\ 1)}$$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき，$\mathrm{PR}:\mathrm{RQ}=\mathrm{P'R}:\mathrm{RQ}=3:1$ であるから，R は線分 P′Q を $3:1$ に内分する点である．

$$\left(\frac{1\cdot0+3\cdot4}{3+1},\ \frac{1\cdot4+3\cdot0}{3+1},\ \frac{1\cdot1+3\cdot5}{3+1}\right)\quad\text{すなわち}\quad\mathbf{R(3,\ 1,\ 4)}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき点 R は，2 点 P′$(0,\ 4,\ 1)$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ を通る直線上にある．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+t\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}\qquad(t\text{ は実数})\\&=(0,\ 4,\ 1)+t(4,-4,\ 4)\\&=(4t,\ 4-4t,\ 1+4t)\end{aligned}$$

点 R は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n}=0$ より

$$\frac{2}{3}\cdot4t-\frac{2}{3}(4-4t)-\frac{1}{3}(1+4t)=0\quad\text{これを解いて}\quad t=\frac{3}{4}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(3,\ 1,\ 4)$ よって $\mathbf{R(3,\ 1,\ 4)}$

15.27 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$，
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)$ について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=b_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_2(b_3c_1-b_1c_3)+b_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=b_1b_2c_3-b_3b_1c_2+b_2b_3c_1-b_1b_2c_3+b_3b_1c_2-b_2b_3c_1=0,\\\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=c_1(b_2c_3-b_3c_2)+c_2(b_3c_1-b_1c_3)+c_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=b_2c_3c_1-b_3c_1c_2+b_3c_1c_2-b_1c_2c_3+b_1c_2c_3-b_2c_3c_1=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が 1 次独立であるから，平面 ABC 上の任意の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad(\alpha,\ \beta\text{は実数})$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0\end{aligned}$$

(2) 等式

$$\begin{aligned}({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)({c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2)&=(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2+(b_2c_3-b_3c_2)^2\\&\quad+(b_3c_1-b_1c_3)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2\end{aligned}$$

より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$ が成立する．

したがって，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| \qquad (*)$$

$\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}(3,-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 3,-2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,-2,-2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 2,-4)$$

ゆえに　$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=(-2\cdot(-4)-(-2)\cdot 2,\ (-2)\cdot 2-4\cdot(-4),\ 4\cdot 2-(-2)\cdot 2)\\&=(12,\ 12,\ 12)\end{aligned}$

よって　$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2+12^2}=\mathbf{6\sqrt{3}}$

(3) $(*)$ と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(d_1,\ d_2,\ d_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(e_1,\ e_2,\ e_3)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=(d_2e_3-d_3e_2,\ d_3e_1-d_1e_3,\ d_1e_2-d_2e_1) \qquad (**)$$

とすると，$\triangle\mathrm{BCE}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BF}}|$ である．

$\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}(3,-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 3,-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=(-1,\ 1,\ 2)+k(12,\ 12,\ 12)\\&=(12k-1,\ 12k+1,\ 12k+2)\quad \cdots①\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 3,-2)-(3,-1,\ 0)=(-2,\ 4,-2),\\\overrightarrow{\mathrm{BE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(12k-1,\ 12k+1,\ 12k+2)-(3,-1,\ 0)\\&=(12k-4,\ 12k+2,\ 12k+2)\end{aligned}$$

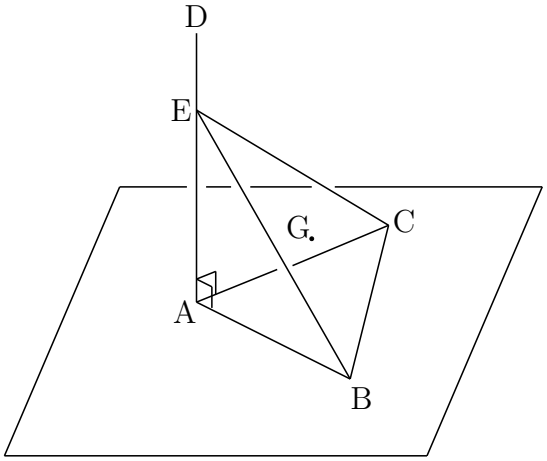
$(**)$ により，$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=12(-6k-1,-1,\ 6k-1)$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCE}&=\frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{(-6k-1)^2+(-1)^2+(6k-1)^2}\\&=6\sqrt{72k^2+3}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{EBC}=6\sqrt{5}$ であるから

$$6\sqrt{72k^2+3}=6\sqrt{5}\quad \text{これを解いて } (k>0)\quad k=\frac{1}{6}$$

① より　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1,\ 3,\ 4)$　よって　$\mathbf{E(1,\ 3,\ 4)}$



(4) A$(-1,\ 1,\ 2)$，E$(1,\ 3,\ 4)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = (2,\ 2,\ 2) \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = 2\sqrt{3}$$

2 つの条件から $\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{BCE}|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|$

$$\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{5}|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}| \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{GQ}}| = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

(3) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{BF}} = 12(-2, -1,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{v} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 1,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ は平行であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|\vec{e} = \pm\frac{6}{5}(2,\ 1,\ 0)$$

また，E$(1,\ 3,\ 4)$，B$(3, -1,\ 0)$，C$(1,\ 3, -2)$ より，△EBC の重心 G は

$$\mathrm{G}\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

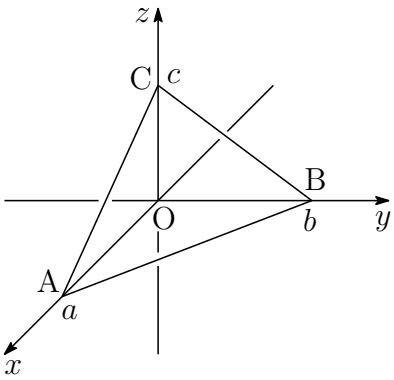
したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GQ}} = \left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right) \pm \frac{6}{5}(2,\ 1,\ 0)$$

よって，求める点 E の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{61}{15}},\ \boldsymbol{\frac{43}{15}},\ \boldsymbol{\frac{2}{3}}\right) \quad \text{または} \quad \left(\boldsymbol{-\frac{11}{15}},\ \boldsymbol{\frac{7}{15}},\ \boldsymbol{\frac{2}{3}}\right)$$

15.28 (1) ∠AOB，∠BOC，∠COA はすべて 90° であるから座標空間に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ を定めると，△ABC の重心 G の座標は



$$\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$

3 点 A,B,C を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ は　　$\vec{n}=\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}/\!/\vec{n}$ であるから，定数 k を用いて

$$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)=k\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)\quad \text{ゆえに}\quad a^2=b^2=c^2=3k$$

よって，$a>0,\ b>0,\ c>0$ より　　$\boldsymbol{a=b=c}$

(2) D は線分 BC を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P は直線 AD 上の A 以外の点であるから $(t\neq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

△APQ の重心が G であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\quad \text{すなわち}\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

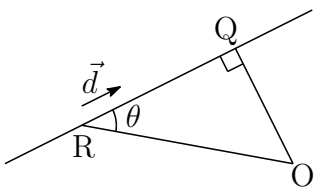
したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$=(-a,\ b,\ c)+\frac{t}{3}(3a,-2b,-c)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-a,\ b,\ c)$，$\vec{d}=(3a,-2b,-c)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{t}{3}\vec{d}\quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\vec{d}$ のベクトルのなす角を θ とすると $(0\leqq\theta\leqq\pi)$，OQ が最小となるとき



$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\sin\theta,\qquad \sin\theta=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\times\vec{d}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\vec{d}|}$$

上の 2 式から　　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$　　$\cdots$②

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \vec{d}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{d} = 0$ であるから，① をこれに代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d} + \frac{t}{3}|\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって　　$t = \dfrac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \neq 0$

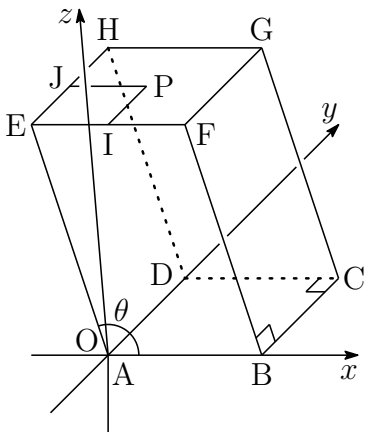
$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d} = (bc,\ 2ca,\ -ab)$ であるから，② より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{\sqrt{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}}{\sqrt{9a^2 + 4b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}}{\boldsymbol{9a^2 + 4b^2 + c^2}}}$$

15.29　(1) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とすると，$0 < \theta < \pi$ より，$\sin\theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned}
\triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}
\end{aligned}$$

(2) $\angle \mathrm{BCD} = \frac{\pi}{2}$ より，四角形 ABCD は正方形であり，$\angle \mathrm{FBC} = \frac{\pi}{2}$ より，四角形 FBCD は長方形である．したがって，面 ABFE$\perp$BC．
空間内で点 A，B，D，E の座標を $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{E}(2\cos\theta,\ 0,\ 2\sin\theta)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x + 2\cos\theta,\ y,\ 2\sin\theta)$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 2, \quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = (x + 2\cos\theta)^2 + y^2 + 4\sin^2\theta$$
$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = x + 2\cos\theta + y$ であるから
$$\begin{aligned}
\triangle \mathrm{ACP} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}})^2} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(y - x - 2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta}}
\end{aligned}$$

補足 $\overrightarrow{AC}=(1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{AP}=(x+2\cos\theta,\ y,\ 2\sin\theta)$ より

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AP}=(2\sin\theta,-2\sin\theta,\ y-x-2\cos\theta)$$
$$|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AP}|^2=(y-x-2\cos\theta)^2+8\sin^2\theta$$

よって

$$\triangle ACP=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AP}|=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(y-x-2\cos\theta)^2+8\sin^2\theta}}$$

(3) $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ より，$-1\leqq y-x\leqq 1$ であるから，(2) の結果から

i) $1<2\cos\theta$　すなわち　$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ のとき

$y-x=1$ で $\triangle ACP$ は，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{9-4\cos\theta-4\cos^2\theta}}$ をとる．

ii) $-1\leqq 2\cos\theta\leqq 1$　すなわち　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{2\pi}{3}$ のとき

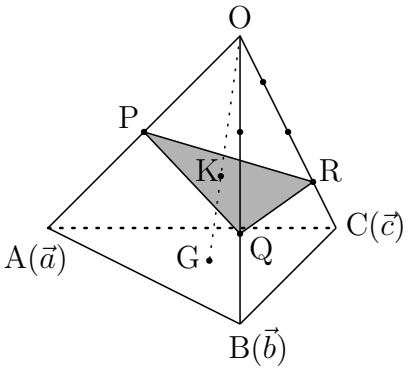
$y-x=2\cos\theta$ で $\triangle ACP$ は，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\theta}$ をとる．

iii) $2\cos\theta<-1$　すなわち　$\frac{2\pi}{3}<\theta<\pi$ のとき

$y-x=-1$ で $\triangle ACP$ は，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{9+4\cos\theta-4\cos^2\theta}}$ をとる．

15.30 K は OG 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OG}=\frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$=\frac{k}{3}\left(2\overrightarrow{OP}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OQ}+\frac{4}{3}\overrightarrow{OR}\right)$$
$$=\frac{2k}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{k}{2}\overrightarrow{OQ}+\frac{4k}{9}\overrightarrow{OR}$$



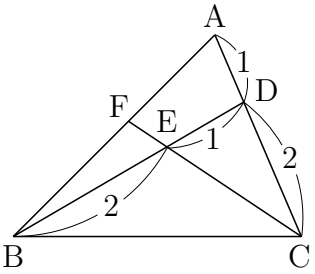
また，K は平面 PQR 上の点であるから

$$\frac{2k}{3}+\frac{k}{2}+\frac{4k}{9}=1\quad\text{ゆえに}\quad k=\frac{18}{29}$$

よって　　$\boldsymbol{OK:KG=18:11}$

15.31 (1) $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}}$,

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}}$$



(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{7}{9}\cdot\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}+\frac{2}{9}\vec{c}=\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+7\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{9}$$

したがって　　$\mathbf{CE : EF = 7 : 2}$

(3) (2) から　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7}$　ゆえに　$\mathrm{BF : FA = 4 : 3}$

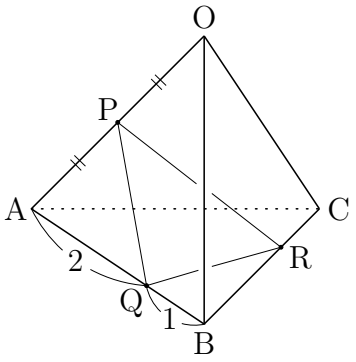
したがって　　$\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{4}{7}\triangle\mathrm{ABC}$

(2) の結果から　$\triangle\mathrm{BEF}=\dfrac{2}{9}\triangle\mathrm{BCF}$

上の 2 式から　　$\triangle\mathrm{BEF}=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{4}{7}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{8}{63}\triangle\mathrm{ABC}$

よって，四面体 OBEF の体積は　　$\boldsymbol{\dfrac{8}{63}V}$

15.32　(1) 条件から，P は線分 OA の中点，Q は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

よって，△PQR の重心 H の位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{18}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

O，G，H は同一直線上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{5}{18}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OR}}\quad\cdots①$$

G は平面 ABR 上の点であるから

$$\frac{5}{18}k+\frac{2}{9}k+\frac{1}{3}k=1\quad\text{すなわち}\quad k=\frac{6}{5}$$

これを ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{15}\vec{b} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

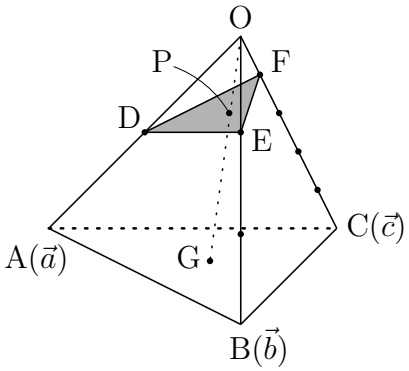
また，G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

上の 2 式から　$\dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{4}{15}\vec{b} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{c}}$

15.33　(1) P は OG 上の点であるから，実数 k を用いて



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \\ &= \frac{k}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{OD}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OE}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OF}}) \quad \cdots ① \\ &= \frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}} + k\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \frac{5k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\end{aligned}$$

また，P は平面 DEF 上の点であるから

$$\frac{2k}{3} + k + \frac{5k}{3} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{3}{10}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{10}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$

(2) ① より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{10}(2\overrightarrow{\mathrm{OD}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OE}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OF}}) \quad \cdots ①'$

$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = s\overrightarrow{\mathrm{DE}} + t\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = s(\overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}) + t(\overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}})$$

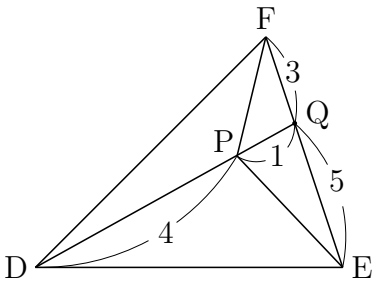
したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{OF}} \quad \cdots ②$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ は 1 次独立であるから，①′ と ② の係数を比較して

$$s = \frac{3}{10},\ t = \frac{1}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{DE}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}}}$$

(3) (2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{DE}} + 5\overrightarrow{\mathrm{DF}}}{8}$$



DP と EF の交点を Q とおくと

$$\mathrm{DP} : \mathrm{PQ} = 4 : 1$$

△DEF の面積を S とすると

$$S_1 = \triangle\mathrm{PDE} = \frac{4}{5}\triangle\mathrm{DEQ} = \frac{4}{5}\times\frac{5}{8}S = \frac{1}{2}S$$
$$S_2 = \triangle\mathrm{PEF} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{DQ}}S = \frac{1}{5}S$$
$$S_3 = \triangle\mathrm{PFD} = \frac{4}{5}\triangle\mathrm{DQF} = \frac{4}{5}\times\frac{3}{8}S = \frac{3}{10}S$$

よって　　$S_1 : S_2 : S_3 = \dfrac{1}{2}S : \dfrac{1}{5}S : \dfrac{3}{10}S = \mathbf{5 : 2 : 3}$

15.34　(1) $10\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ より

$$-10\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}) + 3(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}}$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{6} \qquad \cdots ①$$

Q は平面 BCD 上の点であるから，上式より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{6} \qquad \cdots ②$$

①，② より　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　よって　$\boldsymbol{k = -\dfrac{2}{3}}$

また，② より

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \frac{-\overrightarrow{\mathrm{BA}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}}) + 3(\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}})}{6}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　よって　$\boldsymbol{s = \dfrac{1}{3},\ t = \dfrac{1}{2}}$

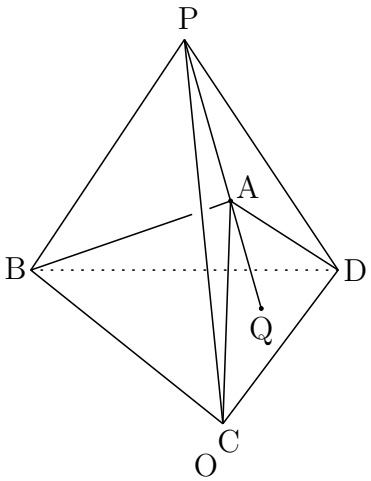
(3) $\overrightarrow{AQ}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AP}$ より

$$-\overrightarrow{QA}=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QA})$$

したがって　　$\overrightarrow{QP}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{QA}$

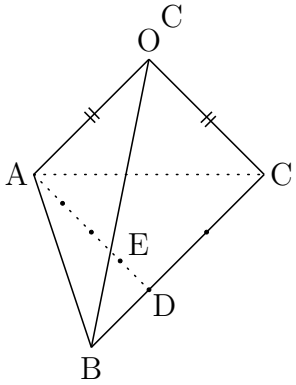
四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積比は

$$AQ : PQ = \mathbf{2 : 5}$$



15.35 (1)

$$\begin{aligned}\vec{e}&=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OD})\\&=\frac{1}{4}\left\{\vec{a}+3\times\frac{2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right\}\\&=\mathbf{\frac{1}{4}(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})}\end{aligned}$$



(2) OE⊥AC より，$\vec{e}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ であるから

$$\begin{aligned}4\vec{e}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\&=|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2+2(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})=0\end{aligned}$$

OA = OC より，$|\vec{a}|=|\vec{c}|$ を上式に代入すると

$$2(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})=0 \quad \text{よって} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$$

(3) OE⊥BC より，$\vec{e}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ であるから

$$\begin{aligned}4\vec{e}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{a}\cdot\vec{c}-2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=0 \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

OA = OC，OA : OB = 2 : 1 より，$|\vec{a}|:|\vec{b}|:|\vec{c}|=2:1:2$ であるから

$$|\vec{b}|^2=\frac{1}{4}|\vec{a}||\vec{c}|,\quad |\vec{c}|^2=|\vec{a}||\vec{c}|$$

上式および (1) の結果を (∗) に代入すると

$$\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|+|\vec{a}||\vec{c}|=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=-\frac{1}{2}$$

$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{2}{3}\pi$$

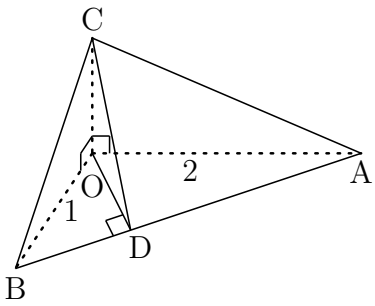
よって　　$\angle \mathbf{AOC} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$

15.36　(1) D は直線 AB 上にあるから

$$\vec{d} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} \quad (s \text{ は実数})$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$，OD⊥AB より

$$\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\}\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = 0$$
$$(s-1)|\vec{a}|^2 + (1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b} + s|\vec{b}|^2 = 0$$



$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = t$ であるから

$$4(s-1) + (1-2s)t + s = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{t-4}{2t-5}$$

よって　　$\vec{\boldsymbol{d}} = \dfrac{\boldsymbol{t-1}}{\boldsymbol{2t-5}}\vec{\boldsymbol{a}} + \dfrac{\boldsymbol{t-4}}{\boldsymbol{2t-5}}\vec{\boldsymbol{b}}$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 120° であるから

$$t = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

これを (1) の結果に代入すると　　$\vec{d} = \dfrac{2}{7}\vec{a} + \dfrac{5}{7}\vec{b}$

したがって　　$|\vec{d}| = \dfrac{1}{7}\sqrt{4|\vec{a}|^2 + 20\vec{a}\cdot\vec{b} + 25|\vec{b}|^2}$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{16 - 20 + 25} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$\vec{d} - \vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角が 60° であるから　$\angle \mathrm{ODC} = 60^\circ$

直角三角形 ODC から　　$|\vec{c}| = \sqrt{3}|\vec{d}|$

ゆえに　$|\vec{c}| = \sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{21}}{7} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$　　よって　$|\,\vec{\boldsymbol{c}}\,|^{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}}$

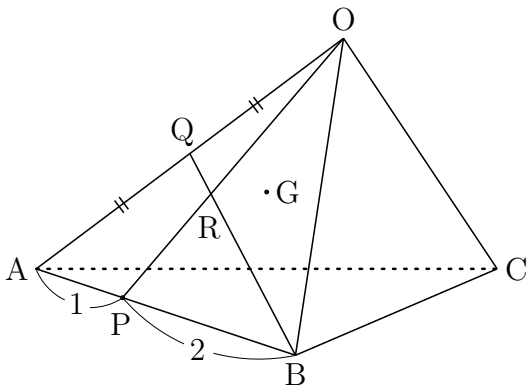
15.37 (1) △OAP と直線 BQ についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RO}}=1$$

ゆえに $\quad \dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RO}}=1$

したがって $\quad \mathrm{PR}:\mathrm{RO}=2:3$

R は線分 OP を 3 : 2 に内分するから



$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{5}\times\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\boldsymbol{\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{5}}$$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{3}-\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{5}-\vec{c}=\frac{1}{5}(2\vec{a}+\vec{b}-5\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}=0$ であるから

$$(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})\cdot(2\vec{a}+\vec{b}-5\vec{c})=0$$
$$2|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2-5|\vec{c}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}+16\vec{b}\cdot\vec{c}-3\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot1\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ より

$$2|\vec{a}|^2-3-5-\frac{5}{2}|\vec{a}|+16\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}|\vec{a}|=0 \quad \text{ゆえに} \quad 2|\vec{a}|^2-4|\vec{a}|=0$$

$|\vec{a}|\neq0$ であるから $\quad \mathrm{OA}=|\vec{a}|=\boldsymbol{2}$

このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot1\cos\dfrac{\pi}{3}=1$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CR}}|^2&=\frac{1}{25}|2\vec{a}+\vec{b}-5\vec{c}|^2\\&=\frac{1}{25}(4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+25|\vec{c}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-10\vec{b}\cdot\vec{c}-20\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=\frac{1}{25}\left(4\cdot2^2+1+25+4\cdot1-10\cdot\frac{1}{2}-20\cdot1\right)=\frac{21}{25}\end{aligned}$$

よって $\quad \mathrm{CR}=|\overrightarrow{\mathrm{CR}}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{5}}$

15.38 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ であるから

$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{a}=\boldsymbol{\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=t\vec{d}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{a}+(2-t)\vec{d}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FG}}&=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\{\vec{a}+(2-t)\vec{d}\}-t\vec{d}=\vec{a}+2(1-t)\vec{d}\\&=\vec{a}+(1-t)(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})=\boldsymbol{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+(1-t)\vec{c}}\end{aligned}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FG}}&=(\vec{c}-\vec{b})\cdot\{t\vec{a}+(1-t)(\vec{b}+\vec{c})\}\\&=t(\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b})+(1-t)(|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2)\\&=t\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+(1-t)(1^2-1^2)=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{2}&=\frac{t\vec{d}+\{\vec{a}+(2-t)\vec{d}\}}{2}=\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{2}\\&=\frac{\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}\end{aligned}$$

よって，E は線分 FG の中点である．

(4) (2)，(3) の結果から，四角形 BFCG はひし形で，その面積を S とすると

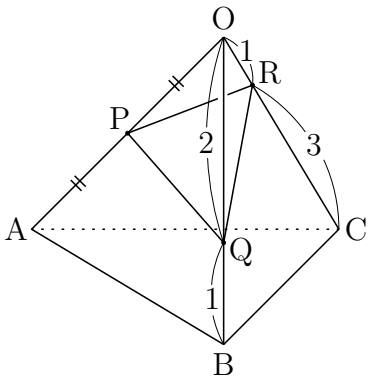
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{FG}}|$$

△OBC は，正三角形であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=1$　ゆえに　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|^2&=|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+(1-t)\vec{c}|^2\\&=t^2|\vec{a}|^2+(1-t)^2|\vec{b}|^2+(1-t)^2|\vec{c}|^2\\&\qquad+2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(1-t)^2\vec{b}\cdot\vec{c}+2t(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=2t^2-4t+3=2(t-1)^2+1\end{aligned}$$

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(t-1)^2+1}$ となるから　S は $\boldsymbol{t=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

15.39 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと



$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{4}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{4}{9}|\vec{b}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

よって
$$\mathbf{PQ}=\frac{\sqrt{13}}{6},\ \mathbf{PR}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

別解 △OPQ および △OPR に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{36}$$
$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OR}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{5}{48}}$$

(3) $$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{36}\cdot\frac{3}{16}-\left(\frac{5}{48}\right)^2}=\mathbf{\frac{\sqrt{131}}{96}}$$

15.40 (1) 点 Q は平面 OAC 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad (s,t\text{ は実数の定数})$$

とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp$平面 OAC より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ であるから　$(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$

$$s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ であるから　$(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$$

上の 2 式に $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\sqrt{3},\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (0,\ 1,\ 0)$ を代入すると

$$12s + 6t - 3 = 0, \quad 6s + 8t - 2 = 0$$

これを解いて　$s = \dfrac{1}{5}$，$t = \dfrac{1}{10}$

したがって，① より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \frac{1}{5}(\sqrt{3},\ 3,\ 0) + \frac{1}{10}(0,\ 2,\ 2) - (0,\ 1,\ 0) \\ &= \left(\frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{5}}, -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}\right)\end{aligned}$$

(2) 点 S は平面 ABC 上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp$平面 ABC より $\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ は yz 平面上のベクトルである．

ゆえに，点 $\mathrm{M}(0,\ 3,\ 0)$ をとると，S は直線 CM 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = k\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad (k \text{ は実数の定数})$$

とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PS}} &= \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= k\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= k(0,\ 2,\ 2) + (1-k)(0,\ 3,\ 0) - (0,\ 1,\ 0) \\ &= (0,\ 2-k,\ 2k)\end{aligned}$$

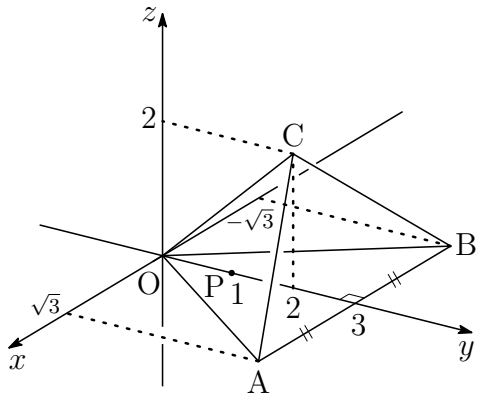
また，$\overrightarrow{\mathrm{PS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CM}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 3,\ 0) - (0,\ 2,\ 2) = (0,\ 1, -2)$$

これらを $\overrightarrow{\mathrm{PS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CM}} = 0$ に代入すると

$$0 \cdot 0 + (2-k) \cdot 1 + 2k \cdot (-2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{2}{5}$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)$



(3) (1) より　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$$= (0,\ 1,\ 0) + \left(\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

(2) より　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PS}}$

$$= (0,\ 1,\ 0) + \left(0,\ \frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

$$= \left(0,\ \frac{13}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

四面体 OABC は yz 平面に関して対称である．点 Q と点 R は yz 平面に関して対称であるから

$$\mathrm{R}\left(-\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

△QRS は，QS = RS の二等辺三角形であり，QR の中点を T とすると

$$\mathrm{T}\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

であるから

$$\mathrm{ST}=\sqrt{(0-0)^2+\left(\frac{4}{5}-\frac{13}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\mathrm{QR}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

したがって，求める $\triangle\mathrm{QRS}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{QR}\times\mathrm{ST}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{5}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{30}}{25}}$$

15.41 (1) $|\vec{a}|=|\vec{c}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=4\cdot3\cdot\frac{1}{2}=6$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ=4\cdot4\cdot\frac{1}{2}=8$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=6$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\&=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2\\&=6-6-8+4^2=\boldsymbol{8}\end{aligned}$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=6-4^2=-10$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2=8-4^2=-8$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|a|^2=3^2-2\cdot6+4^2=13$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|a|^2=4^2-2\cdot8+4^2=16$$

上の諸式および (1) の結果を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=0\\\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+q\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=0\\-10+13p+8q&=0\quad\cdots①\end{aligned}$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=0\\\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+q|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2&=0\\-8+8p+16q&=0\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② を解いて　　$\boldsymbol{p=\frac{2}{3}}$，$\boldsymbol{q=\frac{1}{6}}$

(3)　$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{13\cdot 16 - 8^2} = 6$

(2) の結果より，$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OD}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{36}|\overrightarrow{AC}|^2 \\ &\quad + \frac{4}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= 4^2 + \frac{4}{9}\cdot 13 + \frac{1}{36}\cdot 16 + \frac{4}{3}\cdot(-10) + \frac{1}{3}\cdot(-8) + \frac{2}{9}\cdot 8 = 8\end{aligned}$$

ゆえに　　$|\overrightarrow{OD}| = 2\sqrt{2}$

よって，四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\triangle ABC\cdot|\overrightarrow{OD}| = \dfrac{1}{3}\cdot 6\cdot 2\sqrt{2} = \mathbf{4\sqrt{2}}$

15.42　(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく．

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$ より　　$\vec{a}\cdot(\vec{c} - \vec{b}) = 0$

したがって　　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$

ここで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ_1，$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ_2 とすると

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_1 = |\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta_2$$

ゆえに　　$|\vec{b}|\cos\theta_1 = |\vec{c}|\cos\theta_2$　　$\cdots$①

△OAB と △OAC の面積が等しいから

$$\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta_1 = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|\sin\theta_2$$

ゆえに　　$|\vec{b}|\sin\theta_1 = |\vec{c}|\sin\theta_2$　$\cdots$②

①，② から

$$\begin{aligned}(|\vec{b}|\cos\theta_1)^2 + (|\vec{b}|\sin\theta_1)^2 &= (|\vec{c}|\cos\theta_2)^2 + (|\vec{c}|\sin\theta_2)^2 \\ |\vec{b}|^2(\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1) &= |\vec{c}|^2(\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2) \\ |\vec{b}|^2 &= |\vec{c}|^2\end{aligned}$$

したがって　$|\vec{b}| = |\vec{c}|$　すなわち　OB = OC

別解　$\triangle OAB = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$，$\triangle OAC = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{c})^2}$

である．したがって $\triangle OAB = \triangle OAC$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$ により

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{c}|^2$　よって　$|\vec{b}| = |\vec{c}|$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\frac{1}{3}\{\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\frac{1}{3}\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})+\frac{1}{3}(|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2)\end{aligned}$$

これに (1) で示した $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0 \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

15.43 (1) 原点 O，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(-1,\ b,\ b)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ b,\ b)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 0,\ 0)+t(-2,\ b,\ b)=(1-2t,\ bt,\ bt)$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{P}(1-2t,\ bt,\ bt)}$

(2) (1) で求めた点 P の座標を球 $S:x^2+(y-1)^2+z^2=1$ に代入すると

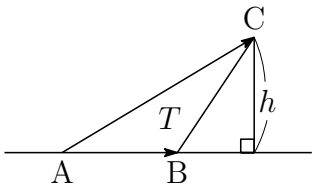
$$\begin{aligned}(1-2t)^2+(bt-1)^2+(bt)^2&=1\\2(b^2+2)t^2-2(b+2)t+1&=0\end{aligned}$$

このとき，t に関する 2 次方程式が実数解をもつから，判別式 D について

$$D/4=(b+2)^2-2(b^2+2)\cdot1=-b^2+4b\geqq 0$$

したがって　$b(b-4)\leqq 0$　　これを解いて　$\boldsymbol{0\leqq b\leqq 4}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ b,\ b)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 1,\ 0)$ より，
△ABC の面積 T は



$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(2b^2+4)\cdot2-(2+b)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3b^2-4b+4}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

C から直線 AB に下ろした垂線の長さを h とすると

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|h=T \quad \text{ゆえに} \quad h=\frac{2T}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\frac{\sqrt{3b^2-4b+4}}{\sqrt{2b^2+4}}$$

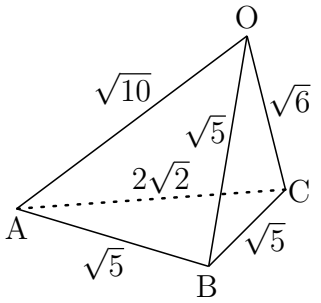
このとき，$h\leqq 1$ であるから　　$\sqrt{\dfrac{3b^2-4b+4}{2b^2+4}}\leqq 1$

したがって　$3b^2-4b+4\leqq 2b^2+4$　これを解いて　$\boldsymbol{0\leqq b\leqq 4}$

(3) $3b^2-4b+4=3\left(b-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}$ であるから，$(*)$ および (2) の結果より，

T は，$\boldsymbol{b=4}$ のとき最大値 $\mathbf{3}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{2}{3}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ をとる．

15.44 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であるから



$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{5}$ を代入して

$$5=5-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+10$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=5}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{10}$ を代入して

$$8=6-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+10$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=4}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{5}$ を代入して

$$5=6-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+5$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{1}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

したがって，(1) の結果を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{1}{5}\times 10 + \frac{2}{5}\times 5 - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{1}{5}\times 5 + \frac{2}{5}\times 5 - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，(2) の結果より H は C から △OAB に下ろした垂線の足である．

△ABO は $\angle\mathrm{ABO} = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$$\triangle\mathrm{ABO} = \frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = \frac{5}{2}$$

また

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 &= \left|\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{25}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \frac{4}{25}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \\ &\qquad + \frac{4}{25}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{1}{25}\cdot 10 + \frac{4}{25}\cdot 5 + 6 + \frac{4}{25}\cdot 5 - \frac{2}{5}\cdot 4 - \frac{4}{5}\cdot 3 = 4\end{aligned}$$

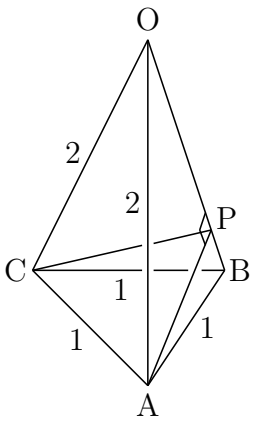
ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = 2$

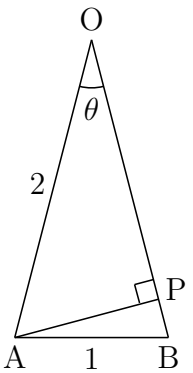
したがって，求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABO}\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \frac{1}{3}\times\frac{5}{2}\times 2 = \boldsymbol{\frac{5}{3}}$$

15.45　(1) $\theta = \angle\mathrm{AOB}$ とおくと

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} \\ &= \frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$





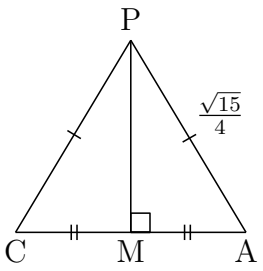
ゆえに　$\mathrm{OP} = \mathrm{OA}\cos\theta$
$= 2\times\frac{7}{8} = \frac{7}{4}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と同じ向きの単位ベクトルは　$\dfrac{\vec{b}}{2}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathrm{OP}\cdot\dfrac{\vec{b}}{2} = \dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{\vec{b}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{7}{8}\vec{b}}$

(2) (1) の結果から

$$\mathrm{AP} = \mathrm{OA}\sin\theta = 2\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$= 2\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$



$\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{CBP}$ であるから　$\mathrm{CP} = \mathrm{AP} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

CA の中点を M とすると　$\mathrm{PM} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$

よって　$\triangle\mathrm{APC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{PM} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{11}}{8}}$

(3) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \theta$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 2\cdot 2\cos\theta = 2\cdot 2\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{2}$$

Q は線分 OM 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{|\vec{c}+\vec{a}|} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{\sqrt{|\vec{c}|^2 + 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2}} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{\sqrt{4+7+4}} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{\sqrt{15}}$$

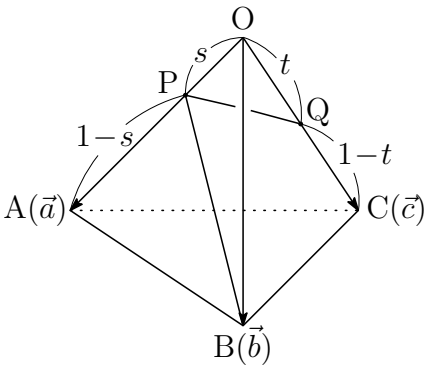
よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e})\vec{e} = \dfrac{1}{15}\left\{\dfrac{7}{8}\vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{a})\right\}(\vec{c}+\vec{a}) = \dfrac{7}{120}(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}+\vec{a})$

$$= \frac{7}{120}\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\right)(\vec{c}+\vec{a}) = \boldsymbol{\frac{49}{120}(\vec{c}+\vec{a})}$$

15.46　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$= \boldsymbol{\vec{b} - s\vec{a}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$= \boldsymbol{t\vec{c} - s\vec{a}}$$



(2) $\angle \mathrm{BPQ} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$ であるから，(1) の結果から

$$(\vec{b} - s\vec{a})\cdot(t\vec{c} - s\vec{a}) = 0 \quad \text{整理すると} \quad t\vec{b}\cdot\vec{c} - s\vec{a}\cdot\vec{b} - st\vec{c}\cdot\vec{a} + s^2|\vec{a}|^2 = 0$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$|\vec{a}| = 1$ であるから

$$\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}st + s^2\cdot 1^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (1-s)t = s(1-2s)$$

このとき，$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に注意して　　$\boldsymbol{t = \dfrac{s(1-2s)}{1-s}}$

(3) (2) の結果から

$$t = \frac{s(1-2s)}{1-s} = 2s + 1 - \frac{1}{1-s} = 3 - \left\{2(1-s) + \frac{1}{1-s}\right\} \quad \cdots ①$$

$0 < s < \dfrac{1}{2}$ より $1 - s > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$2(1-s) + \frac{1}{1-s} \geqq 2\sqrt{2(1-s)\cdot\frac{1}{1-s}} = 2\sqrt{2} \quad \cdots ②$$

上式で等号が成立するとき，$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に注意して

$$2(1-s) = \frac{1}{1-s} \quad \text{すなわち} \quad s = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\boldsymbol{2-\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}}$$

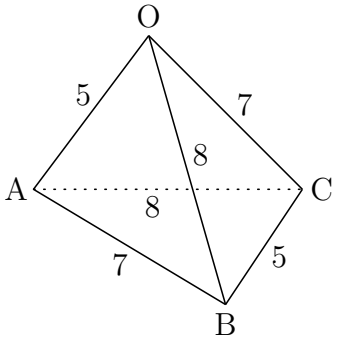
このとき，①，② より t の最大値は　　$\boldsymbol{3 - 2\sqrt{2}}$

(4) (1)，(3) の結果から

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= |t\vec{c} - s\vec{a}|^2 = t^2|\vec{c}|^2 - 2st\vec{c}\cdot\vec{a} + s^2|\vec{a}|^2 \\
&= s^2 - st + t^2 \\
&= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 \\
&= \frac{\boldsymbol{27 - 19\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}}
\end{aligned}$$

15.47 (1) 余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}$$
$$\cos\angle\mathrm{BOC} = \frac{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}}$$
$$\cos\angle\mathrm{COA} = \frac{\mathrm{OC}^2 + \mathrm{OA}^2 - \mathrm{CA}^2}{2\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}}$$



したがって

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB} &= \frac{1}{2}(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2)\\ &= \frac{1}{2}(5^2+8^2-7^2) = \mathbf{20}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} = \mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cos\angle\mathrm{BOC} &= \frac{1}{2}(\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2)\\ &= \frac{1}{2}(8^2+7^2-5^2) = \mathbf{44}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} = \mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{COA} &= \frac{1}{2}(\mathrm{OC}^2+\mathrm{OA}^2-\mathrm{CA}^2)\\ &= \frac{1}{2}(7^2+5^2-8^2) = \mathbf{5}\end{aligned}$$

(2) x，y を実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}$$

このとき，$\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$，$\vec{b}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ より

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}) &= 0 & \vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}) &= 0\\ x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a} &= 0 & x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0\end{aligned}$$

上の 2 式に $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=8$，および (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}25x+20y-5 &= 0 & 20x+64y-44 &= 0\\ 5x+4y &= 1 & 5x+16y &= 11\end{aligned}$$

これを解いて　$x=-\dfrac{7}{15}$，$y=\dfrac{5}{6}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = -\dfrac{7}{15}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}}$

(3) (1),(2) の結果から，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\mathrm{CH}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \left(-\frac{7}{15}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}\\ &= -\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\vec{c}\cdot\left(-\frac{7}{15}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\vec{c}\right)\\ &= \frac{7}{15}\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2 = \frac{7}{15}\cdot 5-\frac{5}{6}\cdot 44+7^2 = \frac{44}{3}\end{aligned}$$

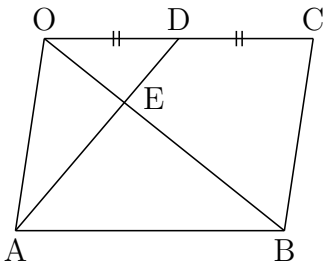
よって　　$\mathrm{CH} = \sqrt{\dfrac{44}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{33}}{3}}$

(4) △OAB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\cdot8^2-(20)^2}=10\sqrt{3}$$

よって　　$V_1=\dfrac{1}{3}S\times \mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\cdot10\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{33}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{20\sqrt{11}}{3}}$

右の図の展開図において，$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}=5$，$\mathrm{AB}=\mathrm{OC}=7$ であるから，四角形 OABC は平行四辺形である．D は OC の中点，△EDO ∽ △EAB より



$$\mathrm{OE}=\frac{1}{3}\mathrm{OB}$$

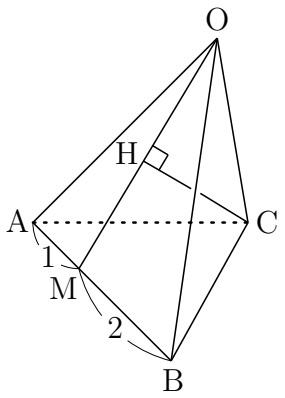
ゆえに　　$\triangle\mathrm{OAE}=\dfrac{1}{3}S$

また，D から α までの距離は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{CH}$　よって　$V_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}V_1=\boldsymbol{\dfrac{10\sqrt{11}}{9}}$

補足　(1) の余弦定理により　　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

15.48　(1) M は，線分 AB を 1 : 2 に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

$\mathrm{OM}:\mathrm{OH}=1:s$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\boldsymbol{\frac{2s}{3}\vec{a}+\frac{s}{3}\vec{b}}$$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\dfrac{2s}{3}\vec{a}+\dfrac{s}{3}\vec{b}-\vec{c}}$

(2)　　$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2,\ |\vec{c}|=1,$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=2\cdot2\cdot\dfrac{1}{2}=2,$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos60^\circ=2\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=1,$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=2\cdot1\cos\theta=2\cos\theta$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}9\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\{s(2\vec{a}+\vec{b})-3\vec{c}\}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})\\&=s|2\vec{a}+\vec{b}|^2-3\vec{c}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})\\&=s(4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)-6\vec{a}\cdot\vec{c}-3\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=s(4\cdot2^2+4\cdot2+2^2)-6\cdot1-3\cdot2\cos\theta\\&=28s-6-6\cos\theta\end{aligned}$$

ゆえに　$28s-6-6\cos\theta=0$　　よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{3\cos\theta+3}{14}}$

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{\dfrac{17}{5}}$ より　$|\vec{c}-\vec{b}|^2=\dfrac{17}{5}$ であるから

$$|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=\frac{17}{5}\quad\text{ゆえに}\quad1^2-2\cdot2\cos\theta+2^2=\frac{17}{5}$$

したがって　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{2}{5}}$　(2) の結果により　$\boldsymbol{s=\dfrac{3}{10}}$

別解　△OBC に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}}=\frac{2^2+1^2-\frac{17}{5}}{2\cdot2\cdot1}=\frac{2}{5}$$

(4)　C から平面 OAB に垂線 CD をおろすと，実数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\vec{a}+y\vec{b}\quad\text{ゆえに}\quad\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}$$

とおける．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より

$$\begin{aligned}&\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c})=0\qquad\text{ゆえに}\qquad x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}\\&\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c})=0\qquad\text{ゆえに}\qquad x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

(2)，(3) の結果から　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=2\cos\theta=2\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{5}$

ゆえに　$4x+2y=1$，$2x+4y=\dfrac{4}{5}$　　これを解いて　$x=\dfrac{1}{5}$，$y=\dfrac{1}{10}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{10}\vec{b}-\vec{c}$

ここで，(1)，(3) の結果から　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{10}\vec{b}-\vec{c}$

上の 2 式から D と H は一致する．

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2&=\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\left(\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\vec{c}\right)=\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}\\&=-\vec{c}\cdot\left(\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}-\vec{c}\right)\\&=-\frac{1}{5}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{10}\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\\&=-\frac{1}{5}\times1-\frac{1}{10}\times\frac{4}{5}+1^2=\frac{18}{25}\end{aligned}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\dfrac{18}{25}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

また　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

よって，求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{5}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{5}}$$

15.49　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{b}$ であるから，△CPQ の重心 G の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\boldsymbol{\frac{s}{3}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{3}\vec{c}}$$

(2)　(a)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{15}$，$|\vec{c}|=2$，

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0\\\vec{a}\cdot\vec{c}&=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3}=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1\\\vec{b}\cdot\vec{c}&=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=\sqrt{15}\cdot2\cos\theta=2\sqrt{15}\cos\theta\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ が平面 ABC に垂直であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}s(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}-\vec{a})+\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})&=0\\s(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2)+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}&=0\\14s+2\sqrt{15}\cos\theta-1&=0\quad\cdots①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$s(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}-\vec{a})+\vec{c}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$$
$$s(\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{c}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$
$$(2\sqrt{15}\cos\theta)s+3=0 \quad \cdots ②$$

①，② より　$(1-14s)s+3=0$　ゆえに　$(2s-1)(7s+3)=0$

$0<s<1$ に注意して　$\boldsymbol{s=\frac{1}{2}}$　ゆえに　$\boldsymbol{\cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{5}}$

(b) 以上の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-6$

$$\begin{aligned}\mathrm{OG}=|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|&=\frac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{a}\cdot\vec{c}}\\&=\frac{1}{6}\sqrt{1^2+(\sqrt{15})^2+4\cdot2^2+2\cdot0+4\cdot(-6)+4\cdot1}\\&=\frac{1}{6}\sqrt{12}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\vec{c}-\vec{b}|&=\sqrt{|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2}\\&=\sqrt{2^2-2\cdot(-6)+(\sqrt{15})^2}=\boldsymbol{\sqrt{31}}\\\mathrm{CA}=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=|\vec{a}-\vec{c}|&=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2}\\&=\sqrt{1^2-2\cdot1+2^2}=\sqrt{3}\\\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{b}-\vec{a}|&=\sqrt{|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{15})^2-2\cdot0+1^2}=4\end{aligned}$$

△ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}=\frac{(\sqrt{3})^2+4^2-(\sqrt{31})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{\angle\mathrm{BAC}=\frac{5}{6}\pi}$

(c) O から平面 ABC に垂線 OH を引くと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ (k は実数) から

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{k}{6}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}$$

H は平面 ABC 上の点であるから

$$\frac{k}{6}+\frac{k}{6}+\frac{k}{3}=1 \quad \text{ゆえに} \quad k=\frac{3}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ より　　$\mathrm{OH}=\frac{3}{2}\mathrm{OG}=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

△ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 4\sin\frac{5}{6}\pi=\sqrt{3}$$

よって，求める四面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

15.50　(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-t)^2+(t-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{(0-1)^2+(1-t)^2+(t-0)^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}$

$\mathrm{CA}=\sqrt{(t-0)^2+(0-1)^2+(1-t)^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}$

ゆえに　$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$．よって，△ABC は正三角形

したがって　$S(t)=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin 60^\circ=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)}$

(2) △ABC の重心 G の座標は

$$\left(\frac{t+1+0}{3},\ \frac{0+t+1}{3},\ \frac{1+0+t}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$=\left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right)-\left(\frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t\right)$$

$$=\frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-t,\ t,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-t,\ 1,\ t-1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)\cdot(1-t,\ t,\ -1)=\frac{3-t}{9}(1-t+t-1)=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)\cdot(-t,\ 1,\ t-1)=\frac{3-t}{9}(-t+1+t-1)=0$$

$t\neq 3$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\neq\vec{0}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}| = \dfrac{\sqrt{3}}{9}(3-t)$ であるから，(2) の結果から

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{3}S(t)|\overrightarrow{\mathrm{PG}}| \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1) \times \frac{\sqrt{3}}{9}(3-t) \\ &= \frac{1}{18}(-t^3+4t^2-4t+3) \end{aligned}$$

$V(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{1}{18}(-3t^2+8t-4) \\ &= -\frac{1}{18}(t-2)(3t-2) \end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘	極小 $\frac{49}{486}$	↗	

増減表から，$V(t)$ は，$\boldsymbol{t = \dfrac{2}{3}}$ で**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{49}{486}}$ をとる．

15.51 (1) $\mathrm{OA} = \sqrt{2}$，$\mathrm{OC} = 1$，$\angle\mathrm{AOC} = 45^\circ$ より

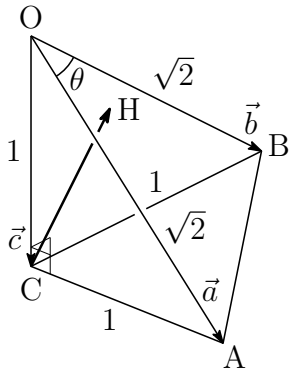
$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \sqrt{2}\cdot 1\cos 45^\circ = \mathbf{1}$$

$\mathrm{OB} = \sqrt{2}$，$\mathrm{OC} = 1$，$\angle\mathrm{BOC} = 45^\circ$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \sqrt{2}\cdot 1\cos 45^\circ = \mathbf{1}$$

$\mathrm{OA} = \sqrt{2}$，$\mathrm{OB} = \sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\theta = \boldsymbol{2\cos\theta}$$



(2) $\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$，$\vec{b}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = 0$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = 0$ より

$$\vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}) = 0 \qquad \vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}) = 0$$
$$s|\vec{a}|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \qquad s\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$$

$|\vec{a}| = \sqrt{2}$，$|\vec{b}| = \sqrt{2}$ および (1) の結果を上の 2 式に代入すると

$$2s + 2t\cos\theta - 1 = 0 \quad \cdots ①, \qquad 2s\cos\theta + 2t - 1 = 0 \quad \cdots ②$$

① − ② より　　$(1-\cos\theta)(s-t) = 0$

$0 < \theta < \pi$ であるから，$1-\cos\theta \neq 0$ より　$s = t$

これを ① に代入して　　$\boldsymbol{s = t = \dfrac{1}{2(1+\cos\theta)}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = s\vec{a} + s\vec{b} - \vec{c}$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 &= s^2|\vec{a}|^2 + s^2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2s^2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2s\vec{b}\cdot\vec{c} - 2s\vec{a}\cdot\vec{c} \\ &= 2s^2 + 2s^2 + 1 + 4s^2\cos\theta - 2s - 2s \\ &= 4s^2(1+\cos\theta) - 4s + 1 \\ &= \frac{1}{1+\cos\theta} - \frac{2}{1+\cos\theta} + 1 = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \sqrt{\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}}$

注意 AC = 1，BC = 1 より，AB = AC + BC < 2 であるから

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} > 0$$

(3) 四面体 OABC の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \frac{1}{3}T|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| \qquad \text{ゆえに} \qquad \frac{T}{S} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|} = \sqrt{\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$S = \sqrt{3}T$ より，$\dfrac{T}{S} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから　$\sqrt{\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

これを解いて　　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　　よって　　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$

したがって，△OAB は一辺が $\sqrt{2}$ の正三角形である．

AB = $\sqrt{2}$，BC = 1，CA = 1 であるから　　$\boldsymbol{\angle \mathrm{ACB} = 90^\circ}$

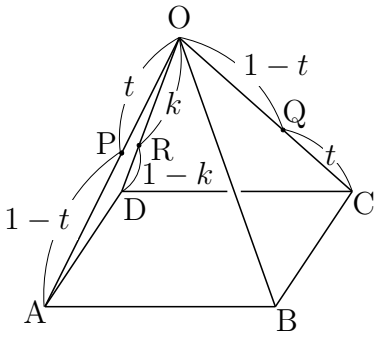
15.52 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{c} - \vec{b}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \vec{a} + (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \boldsymbol{\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}\end{aligned}$$

△AOC ≡ △ABC であるから

$$\angle \mathrm{AOC} = \angle \mathrm{ABC} = 90^\circ$$

よって　　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{c} = 0}$



(2) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 1\cdot1\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= k(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - \vec{b} \\ &= k\vec{a} - (k+1)\vec{b} + k\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= (1-t)\vec{c} - t\vec{a}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \{k\vec{a}-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}\}\cdot\{(1-t)\vec{c}-t\vec{a}\}\\ &= k(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c}-kt|\vec{a}|^2-(k+1)(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}\\ &\qquad +(k+1)t\vec{a}\cdot\vec{b}+k(1-t)|\vec{c}|^2-kt\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &= 0-kt-\frac{1}{2}(k+1)(1-t)+\frac{1}{2}(k+1)t+k(1-t)-0\\ &= -kt+\frac{1}{2}k+t-\frac{1}{2}=\boldsymbol{(1-k)\left(t-\frac{1}{2}\right)}\end{aligned}$$

(3) (i)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= k\vec{a}-k\vec{b}+k\vec{c}\\ &= k\cdot\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OP}}-k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\cdot\frac{1}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= \frac{k}{t}\overrightarrow{\mathrm{OP}}-k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{k}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\end{aligned}$$

点 R が 3 点 P，B，Q の定める平面上にあるとき

$$\frac{k}{t}-k+\frac{k}{1-t}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{k=\frac{-t^2+t}{t^2-t+1}}$$

(ii) (i) の結果から $k=\dfrac{1}{t^2-t+1}-1=\dfrac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-1$

ゆえに，k は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ をとる．

このとき，(2) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{BR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{BR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

したがって $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$

$$\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\frac{1}{3}(\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}),\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{c})$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}| &= \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2+16|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}}\\ &= \frac{1}{3}\sqrt{1^2+16\cdot1^2+1^2-8\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}+2\cdot0}=\frac{\sqrt{10}}{3}\\ |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2-2\cdot0+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

よって $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BR}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{6}}$

15.53 (1) $\theta=\angle\mathrm{AOB}$ とし，$\triangle\mathrm{OAB}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\cdot2\cdot2}=\frac{7}{8}$$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\cdot 2\cdot\dfrac{7}{8} = \boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

$\triangle$OAB $\equiv \triangle$OBC $\equiv$ OCA であるから　　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \dfrac{7}{2}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{a} = (\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} = \boldsymbol{0}$

(2) (1) の結果から

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$
$$= 2^2 + 2\cdot\frac{7}{2} + 2^2 = 15 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に平行な単位ベクトルの 1 つを $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e} = \left(\frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|}\right)\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$$
$$= \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}+\vec{b}|^2}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{\frac{7}{2}+\frac{7}{2}}{15}(\vec{a}+\vec{b}) = \boldsymbol{\frac{7}{15}(\vec{a}+\vec{b})}$$

2 点 C，D の中点が H であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$= 2\cdot\frac{7}{15}(\vec{a}+\vec{b}) - \vec{c} = \boldsymbol{\frac{14}{15}\vec{a} + \frac{14}{15}\vec{b} - \vec{c}}$$

(3) H は直線 BP 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{7}{15}\vec{a} + \frac{7}{15}\vec{b} = \frac{8}{15}\left(\frac{7}{8}\vec{a}\right) + \frac{7}{15}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{7}{8}\vec{a}$$

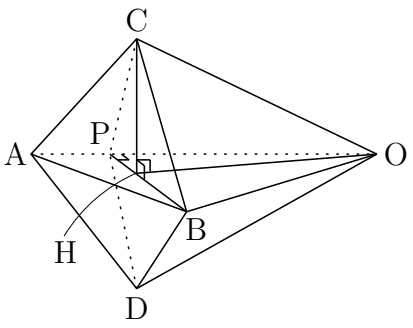
よって　　$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{\frac{7}{8}\vec{a} - \vec{b}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{a} = \left(\frac{7}{8}\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a} = \frac{7}{8}|\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{7}{8}\cdot 2^2 - \frac{7}{2} = \boldsymbol{0}$$

$$\mathrm{OP} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \frac{7}{8}|\vec{a}| = \frac{7}{8}\cdot 2 = \boldsymbol{\frac{7}{4}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{a} = 0$ より，$\angle\mathrm{OPB} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{BP} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 - \mathrm{OP}^2}$$
$$= \sqrt{2^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$



(4) ① より　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{15}$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{7}{15}|\vec{a}+\vec{b}|=\dfrac{7}{\sqrt{15}}$

したがって　$\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{7}{\sqrt{15}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{11}{15}}$

$$\frac{S}{2}=\triangle\mathrm{BCP}=\frac{1}{2}\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times\sqrt{\frac{11}{15}}=\frac{\sqrt{11}}{8}$$

よって　$S=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{11}}{4}}$

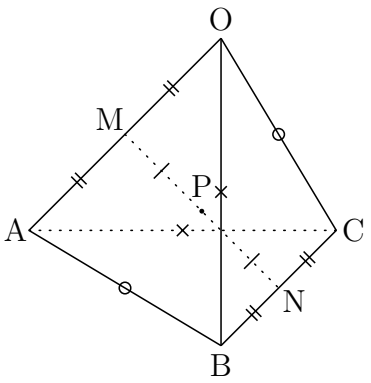
$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{7}{15}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=\frac{7}{15}(|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b})-\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{7}{15}\left(2^2+\frac{7}{2}\right)-\frac{7}{2}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{a}$ であるから

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{OP}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{11}}{4}\times\frac{7}{4}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{11}}{48}}$$

15.54 2辺OA，BCの中点をそれぞれM，Nとすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}&=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\quad\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}&=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② の辺々を加えて2倍すると

$$4\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{MN}\perp\mathrm{BC},\quad \mathrm{MN}\perp\mathrm{OA}$$

$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}$ より，線分 MN の中点を P とすると　$\mathrm{PO}=\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$

したがって，点 P は 4 点 O，A，B，C を通る球の中心である．

よって　$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}\end{aligned}$$

15.55　(1)　$\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

(i)　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$3(t-1)-3(2t-5)+0(t-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=4$$

(ii)　$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$3(t-4)-3(2t-2)+0(t-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=-2$$

(iii)　$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$(t-1)(t-4)+(2t-5)(2t-2)+(t-1)^2=0$$

整理すると　$2t^2-7t+5=0$　これを解いて　$t=1,\ \dfrac{5}{2}$

(i)〜(iii) から　　$\boldsymbol{t = 4, -2,\ 1,\ \dfrac{5}{2}}$

(2) $\vec{b} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと　$\vec{b} = (1, -1,\ 0)$，$\vec{d} = (0,\ 1,\ 1)$

A，B，C，D が同一平面上にあるとき，定数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = x\vec{b} + y\vec{d}$$

ゆえに　　$(t-1,\ 2t-5,\ t-1) = x(1, -1,\ 0) + y(0,\ 1,\ 1)$
$$= (x, -x+y,\ y)$$

したがって　　$(*)\begin{cases} t-1 = x \\ 2t-5 = -x+y \\ t-1 = y \end{cases}$

$(*)$ の第 1，第 3 式から　$x = y$　これを第 2 式に代入すると

$$2t - 5 = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t = \dfrac{5}{2}}$$

別解 $\vec{b}$，$\vec{d}$ に垂直なベクトルの 1 つは　　$\vec{n} = (1,\ 1, -1)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ より

$$1(t-1) + 1(2t-5) - 1(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{5}{2}$$

(3) (1)(i) より，$t = 4$ であるから　C$(4,\ 8,\ 3)$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3,\ 3,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3, -3,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3,\ 3,\ 3)$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1, -2)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,\ 1,\ 1)$ であるから，D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h とすると

$$h = |\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \vec{e}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}| h$$
$$= \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

補足 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}$ で表す．本題において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-9,-9,\ 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

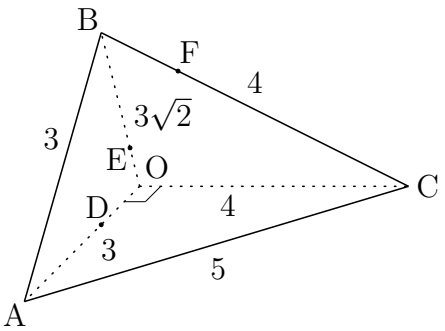
であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ より

$$V=\frac{1}{6}|9|=\frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが，検算として利用できる．

15.56 (1) 条件から

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boldsymbol{s\vec{b}-s\vec{a}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=\boldsymbol{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}-s\vec{a}}$$

$\beta=\angle\mathrm{BOC}$ とし，$\triangle\mathrm{OBC}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\beta=\frac{\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}}=\frac{(3\sqrt{2})^2+4^2-4^2}{2\cdot3\sqrt{2}\cdot4}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

よって　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\beta=3\sqrt{2}\times4\times\dfrac{3\sqrt{2}}{8}=\boldsymbol{9}$

(2) $\alpha=\angle\mathrm{AOB}$ とし，$\triangle\mathrm{AOB}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{3^2+(3\sqrt{2})^2-3^2}{2\cdot3\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = 3\times 3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 9$

$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2=\mathrm{AC}^2$ であるから　$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$　ゆえに　$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$t=\dfrac{9}{16}$ とおくと，$\vec{h}=\vec{a}-t\vec{b}+t\vec{c}$ であるから

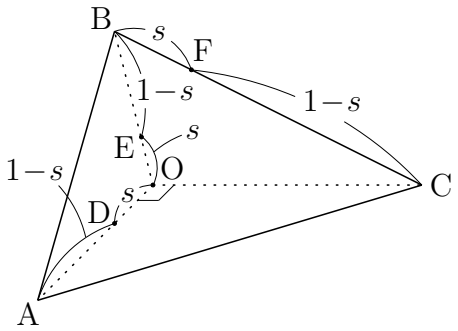
$$\begin{aligned}|\vec{h}|^2 &= |\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+t^2|\vec{c}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}-2t^2\vec{b}\cdot\vec{c}+2t\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 3^2+t^2\cdot(3\sqrt{2})^2+t^2\cdot 4^2-2t\cdot 9-2t^2\cdot 9+2t\cdot 0\\ &= 16t^2-18t+9 = t(16t-9)-9t+9\\ &= -9\times\frac{9}{16}+9 = 9\left(-\frac{9}{16}+1\right)=\frac{9\cdot 7}{16}\end{aligned}$$

よって　　$\mathrm{OH}=|\vec{h}|=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{7}}{4}}$

(3) $\vec{h}=\vec{a}+t(\vec{c}-\vec{b})$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

条件より　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{BF}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$



したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{t}{s}\overrightarrow{\mathrm{BF}}\\ &= \frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{t}{s}(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= \frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{t}{s}\left(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)\\ &= \frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\frac{t}{s^2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{t}{s}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\end{aligned}$$

点 H が平面 DEF 上にあるから

$$\frac{1}{s}-\frac{t}{s^2}+\frac{t}{s}=1 \quad \text{整理すると} \quad s^2-st-s+t=0$$

ゆえに　$(s-1)(s-t)=0$　$s\neq 1$ であるから　$s=t=\boldsymbol{\dfrac{9}{16}}$

(4) (1)，(2) で得られた結果から

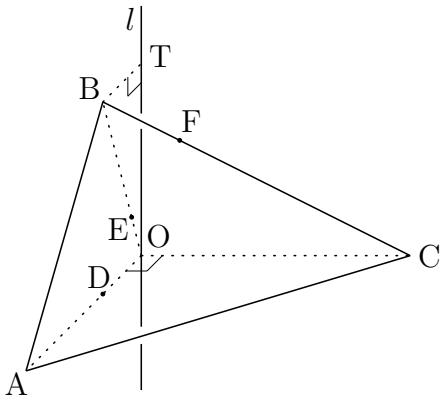
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{h} &= (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{a}-t\vec{b}+t\vec{c})\\ &= -|\vec{a}|^2 - t|\vec{b}|^2 + (t+1)\vec{a}\cdot\vec{b} + t\vec{b}\cdot\vec{c} - t\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= -3^2 - t\cdot(3\sqrt{2})^2 + (t+1)\cdot 9 + t\cdot 9 - t\cdot 0 = 0\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{h} &= (\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{a}-t\vec{b}+t\vec{c})\\ &= -|\vec{a}|^2 + t|\vec{c}|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} - t\vec{b}\cdot\vec{c} + (1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= -3^2 + t\cdot 4^2 + t\cdot 9 - t\cdot 9 + (1-t)\cdot 0\\ &= 16t - 9 = 0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{h}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{h}$ であるから，OH は O から平面 α に引いた垂線である．
したがって，四面体 OABC の体積を V_0 とすると

$$V_0 = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OH} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\times\frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

よって　　$V = (1-s)V_0 = \left(1-\dfrac{9}{16}\right)\times\dfrac{3\sqrt{7}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{21\sqrt{7}}{32}}$

別解 O を通り，平面 OAC に垂直な直線を l とし，l と直線 OB のなす角を γ とすると



$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

これに (1)，(2) の結果を代入すると

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$$

ゆえに　　$|\cos\gamma| = \dfrac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$

B から直線 l に垂線 BT を引くと

$$\mathrm{OT} = \mathrm{OB}|\cos\gamma| = 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

四面体 OABC の体積を V_0 とすると

$$V_0 = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAC}\times\mathrm{OT} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\times\frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

よって　　$V = (1-s)V_0 = \left(1-\dfrac{9}{16}\right)\times\dfrac{3\sqrt{7}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{21\sqrt{7}}{32}}$

15.57 (1) AB の中点 D は

$$\left(\frac{a+(-a)}{2},\ \frac{-a+a}{2},\ \frac{b+b}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (0,\ 0,\ b)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = (a,\ a, -b) - (0,\ 0,\ b) = (a,\ a, -2b)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-a,\ a,\ b) - (a, -a,\ b) = (-2a,\ 2a,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{DO}} = -\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -(0,\ 0,\ b) = (0,\ 0, -b)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = a\cdot(-2a) + a\cdot 2a + (-2b)\cdot 0 = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0\cdot(-2a) + 0\cdot 2a + (-b)\cdot 0 = 0$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

DC⊥AB より，$a > 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-2a)^2 + (2a)^2 + 0^2}\sqrt{a^2 + a^2 + (-2b)^2} \\ &= \boldsymbol{2a\sqrt{a^2 + 2b^2}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$b > 0$ に注意して

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|} = \frac{2b^2}{\sqrt{2a^2 + 4b^2} \times b} = \frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

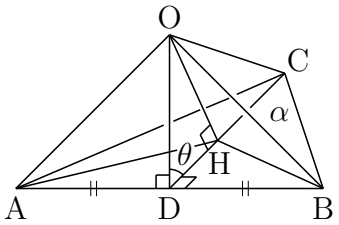
$\sin \geqq 0$ であるから　$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2 + 2b^2}}}$

DO⊥AB であるから　OA = OB

ゆえに　△OAH ≡ △OBH　さらに　△HAD ≡ △HBD

DC⊥AB であるから，H は直線 CD 上にある．

よって　$\mathrm{OH} = \mathrm{DO}\sin\theta = b \times \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} = \dfrac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2 + 2b^2}}}$

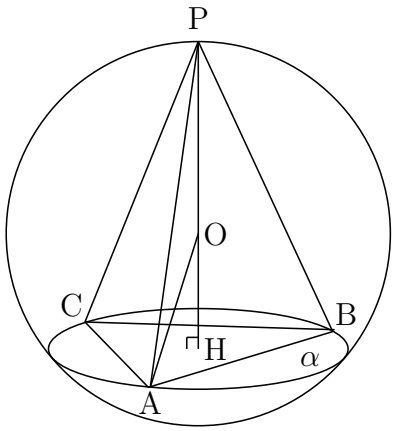


(3) 直線 OH と球面 S の交点のうち，平面 α に関して，O と同じ側にある点を P とするとき，四面体 ABCP の体積は最大となる．このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{PH} &= \mathrm{PO} + \mathrm{OH} \\ &= \mathrm{OA} + \mathrm{OH} \\ &= \sqrt{2a^2+b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\end{aligned}$$

よって，求める最大値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC} \times \mathrm{PH} &= \frac{1}{3} \times 2a\sqrt{a^2+2b^2}\left(\sqrt{2a^2+b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{2a}{3}\left(\sqrt{(a^2+2b^2)(a^2+2b^2)} + ab\right)}\end{aligned}$$



15.58 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{e} \perp \vec{a}$，$\vec{e} \perp \vec{c}$，$|\vec{e}| = 1$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{e}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{a} + y\vec{c} + z\vec{e} \qquad (x,\ y,\ z \text{ は実数})$$

とおくと，条件により　$x = \dfrac{1}{4}$，$y = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c} + z\vec{e}$

したがって，M，N の条件により

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + z\vec{e}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}z\vec{e}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + z\vec{e}\right) = \frac{1}{8}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c} + \frac{1}{2}z\vec{e}$$

α，β，γ を実数とし，$\alpha\vec{a} + \beta\vec{c} + \gamma\vec{e}$ が，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ に垂直であるとき

$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{2}{3}z\gamma = 0, \quad \frac{1}{8}\alpha + \frac{3}{4}\beta + \frac{1}{2}z\gamma = 0$$

したがって　　$\alpha : \beta : \gamma = 2z : z : -2$

ゆえに，直線 PQ の方向ベクトルを $\vec{v} = 2z\vec{a} + z\vec{c} - 2\vec{e}$ とすると，直線 PQ は，媒介変数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\vec{v} &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + z\vec{e} + t(2z\vec{a} + z\vec{c} - 2\vec{e}) \\ &= \left(\frac{1}{4} + 2zt\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} + zt\right)\vec{c} + (z - 2t)\vec{e}\end{aligned}$$

Q は BC 上の点であるから，上式より

$$\frac{1}{2} + zt = 1, \quad z - 2t = 0 \quad \text{すなわち} \quad z = \pm 1, \ t = \pm\frac{1}{2} \quad \text{(複号同順)}$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{5}{4}\vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \frac{5}{4}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{a} + \vec{c}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \frac{1}{4}\vec{a}$

よって　　$\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = \frac{1}{4} : \frac{5}{4} = \mathbf{1 : 5}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + z\vec{e}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + z\vec{e}\right)$，$z = \pm 1$ より

$$\mathrm{OP} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{4}}$$

15.59　(1) 与えられた条件により　　$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3}$

3 点 L，M，N を通る平面上の位置ベクトルは，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OL}} + s\overrightarrow{\mathrm{LM}} + t\overrightarrow{\mathrm{LN}} &= \frac{1}{2}\vec{c} + s\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) + t\left(\frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\ &= \frac{s}{2}\vec{a} + \left(\frac{s}{2} + \frac{2}{3}t\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2} - \frac{t}{6}\right)\vec{c}\end{aligned}$$

この平面と直線 OA の交点 D の位置ベクトルは

$$\frac{s}{2} + \frac{2}{3}t = 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{s}{2} - \frac{t}{6} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{4}{3}, \quad t = -1$$

したがって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2}{3}\vec{a}}$

(2) 与えられた条件により　　$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{2}$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$

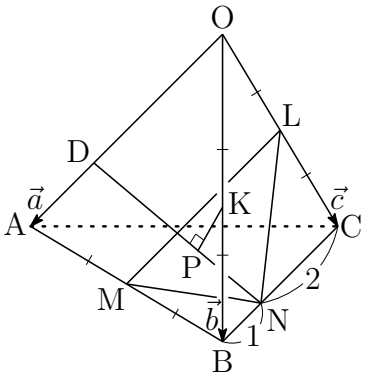
$\overrightarrow{\mathrm{DK}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}-\dfrac{2}{3}\vec{a}$ であるから

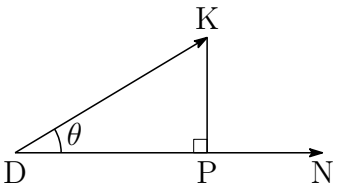
$$\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{1}{3}|\vec{b}|^2-\frac{7}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{13}{18}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{1}{9}|\vec{c}|^2-\frac{8}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{4}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{10}{9}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{13}{20}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\boldsymbol{\dfrac{7}{30}\vec{a}+\dfrac{13}{30}\vec{b}+\dfrac{13}{60}\vec{c}}$





補足

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DK}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}$ のなす角を θ とすると　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DK}}||\overrightarrow{\mathrm{DN}}|}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=|\overrightarrow{\mathrm{DK}}|\cos\theta\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}})}{|\overrightarrow{\mathrm{DN}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{DN}}$

15.60　(1)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{3}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，$\vec{b}c=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha=3x$

実数 s，t を用いて

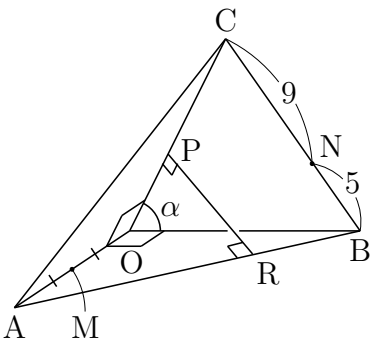
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

とおく．PR の長さが最小であるとき，

OC⊥PR，AB⊥PR であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$ より

$$\vec{c}\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-s\vec{c}\}=0\quad\text{ゆえに}\quad tx-s=0\quad\cdots①$$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$ より

$$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-s\vec{c}\}=0 \quad \text{ゆえに} \quad -3sx+4t-1=0 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$s=\dfrac{x}{4-3x^2}$，$t=\dfrac{1}{4-3x^2}$

$0<x<1$ であるから，$0<s<1$，$0<t<1$ となり，このとき，P，R はそれぞれ線分 OC，AB 上にある．

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-s\vec{c}=\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=(\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\\&=\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\vec{a}\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-s\vec{c}\}\\&=1-t=1-\frac{1}{4-3x^2}=\frac{3-3x^2}{4-3x^2}\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{PR}=\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{3-3x^2}}{\boldsymbol{4-3x^2}}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$，　　$s=\dfrac{x}{4-3x^2}$，$t=\dfrac{1}{4-3x^2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{9}{14}\vec{b}+\dfrac{5}{14}\vec{c}$,

線分 PR 上の点の位置ベクトルは，実数 α を用いて $(0\leqq\alpha\leqq1)$

$$(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-\alpha)s\vec{c}+\alpha(1-t)\vec{a}+\alpha t\vec{b} \quad \cdots ③$$

線分 MN 上の点の位置ベクトルは，実数 β を用いて $(0\leqq\beta\leqq1)$

$$(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(1-\beta)\vec{a}+\frac{9}{14}\beta\vec{b}+\frac{5}{14}\beta\vec{c} \quad \cdots ④$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから，線分 PR と線分 MN の交点において，③，④ より，次式が成り立つ．

$$\alpha(1-t)=\frac{1}{2}(1-\beta)\cdots⑤, \quad \alpha t=\frac{9}{14}\beta\cdots⑥, \quad (1-\alpha)s=\frac{5}{14}\beta\cdots⑦$$

①，⑥，⑦ より　　$\alpha=\dfrac{9x}{9x+5}$，$\beta=\dfrac{14x}{(9x+5)(4-3x^2)}$

これらを ⑤ に代入すると

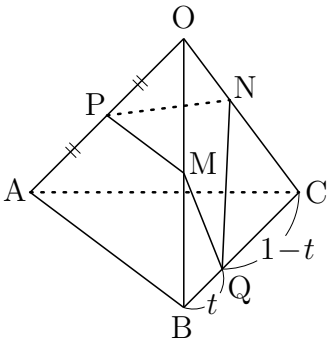
$$\frac{9x}{9x+5}\left(1-\frac{1}{4-3x^2}\right)=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{14x}{(9x+5)(4-3x^2)}\right\}$$

整理すると　　$27x^3 - 15x^2 - 32x + 20 = 0$

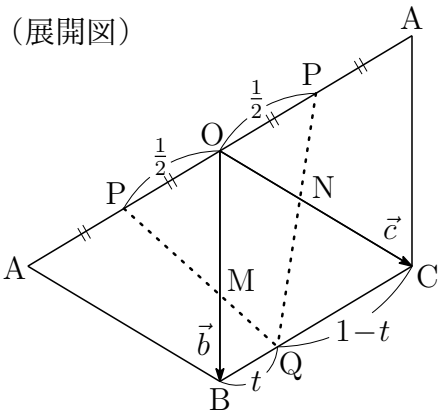
ゆえに　　$(x-1)(3x-2)(9x+10) = 0$

$x = \cos\alpha$ $(0° < \alpha < 90°)$ より，$0 < x < 1$ であるから　　$\boldsymbol{x = \dfrac{2}{3}}$

15.61　(1) 正四面体 OABC(左図) において PM + MQ が最小となる OB 上の点 M は，その展開図 (右図) において，線分 PQ と OB の交点である．また，点 N は展開図において，線分 PQ と OC の交点である．



（展開図）



展開図において，△OPM ∽ △BQM，△OPN ∽ △CQN であるから，これらの相似比から

$$\mathrm{OM} : \mathrm{MB} = \frac{1}{2} : t, \quad \mathrm{ON} : \mathrm{NC} = \frac{1}{2} : (1-t)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+t}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{1+2t}\vec{b}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}}$

(2) (1) で示した相似比から

$$\frac{\triangle\mathrm{OMN}}{\triangle\mathrm{OBC}} = \frac{1}{1+2t} \times \frac{1}{3-2t} = \frac{1}{(1+2t)(3-2t)}$$

$$\frac{\triangle\mathrm{BQM}}{\triangle\mathrm{OBC}} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{OB}} \times \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BC}} = \frac{t}{\frac{1}{2}+t} \times t = \frac{2t^2}{1+2t}$$

$$\frac{\triangle\mathrm{CQN}}{\triangle\mathrm{OBC}} = \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{OC}} \times \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BC}} = \frac{1-t}{\frac{1}{2}+(1-t)} \times (1-t) = \frac{2(1-t)^2}{3-2t}$$

△OMN + △BQM + △CQN = △OBC − △QMN であるから，上の 3 式の辺々を加えると

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\triangle\mathrm{QMN}}{\triangle\mathrm{OBC}} &= \frac{1}{(1+2t)(3-2t)} + \frac{2t^2}{1+2t} + \frac{2(1-t)^2}{3-2t} \\ &= \frac{1+2t^2(3-2t)+2(1-t)^2(1+2t)}{(1+2t)(3-2t)} \\ &= \frac{3}{(1+2t)(3-2t)} \end{aligned}$$

$\triangle \mathrm{OBC} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ であるから

$$\triangle \mathrm{QMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1 - \frac{3}{(1+2t)(3-2t)}\right\} \quad \cdots ①$$
$$= \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}t(1-t)}}{\boldsymbol{(1+2t)(3-2t)}}$$

(3) ① から

$$\triangle \mathrm{QMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1 - \frac{3}{4-(2t-1)^2}\right\}$$

$0 < t < 1$ であるから，$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{16}}$ をとる．

15.62 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2,\ 1,\ -2)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 3, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 9, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -3$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\} \\
&= k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= k\cdot 3 + (1-k)\cdot(-3) = 6k - 3 \\
\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\{k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\} \\
&= k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-k)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\
&= k\cdot(-3) + (1-k)\cdot 9 = -12k + 9
\end{aligned}$$

Q は D 上の点より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geqq 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geqq 0$ であるから

$$\begin{cases} 6k - 3 \geqq 0 \\ -12k + 9 \geqq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq k \leqq \frac{3}{4}}$$

(2) D 内の点 P について，s，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots ①$$

とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= s\cdot 3+t\cdot(-3)=3(s-t)\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\ &= s\cdot(-3)+t\cdot 9=3(-s+3t)\end{aligned}$$

与えられた条件により，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ であるから

$$s-t=\alpha,\quad -s+3t=\beta$$

とおくと，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$．また上の 2 式から

$$s=\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,\quad t=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\quad\cdots②$$

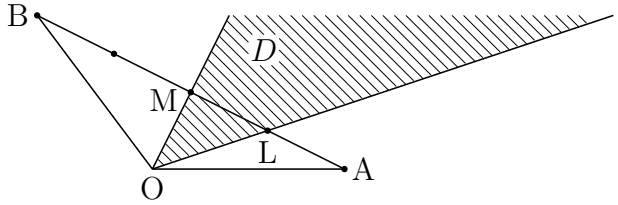
② を ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \left(\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{1}{2}\alpha(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\frac{1}{2}\beta(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= 2\alpha\times\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}+\beta\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\end{aligned}$$

線分 AB を 1 : 3 に内分する点を L，中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\alpha\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OM}}\quad(\alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0)$$

ゆえに，P の表す領域 D は，次の図の斜線部分で，境界線を含む．



$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}=\frac{1}{4}(-1,\ 4,\ 1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\frac{1}{2}(1,\ 2,-1)$$

$\overrightarrow{\ell} = (-1,\ 4,\ 1)$，$\overrightarrow{m} = (1,\ 2, -1)$ とおくと

$$|\overrightarrow{\ell}| = \sqrt{18},\ \ |\overrightarrow{m}| = \sqrt{6} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\ell}| : |\overrightarrow{m}| = \sqrt{3} : 1$$

ここで，D 上の点 H を

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\ell} + \sqrt{3}\overrightarrow{m} = (-1+\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$$

とすると，H は ∠LOM の二等分線上にある．また

$$|\overrightarrow{m}|^2\overrightarrow{\ell} - (\overrightarrow{\ell}\cdot\overrightarrow{m})\overrightarrow{m} = 6(-1,\ 4,\ 1) - 6(1,\ 2, -1) = 12(-1,\ 1,\ 1)$$

は平面 OLM に平行で，$\overrightarrow{m}$ に垂直．これと平行な単位ベクトルの 1 つを

$$\overrightarrow{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,\ 1,\ 1)$$

とおく．

H から直線 OM に下ろした垂線の長さは

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{e}| = 2\sqrt{3}$$

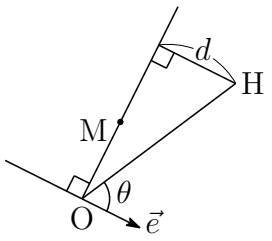
$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となる点 C の位置ベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の向きが同じであることに注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3}) \\ &= \left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ 2\sqrt{2}+\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)\end{aligned}$$

よって，求める C の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ 2\sqrt{2}+\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)}$$

補足 平面 HOM 上のベクトルで，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると，H から直線 OM に下ろした垂線の長さ d は



$$d = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\cos\theta|$$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{e} = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\vec{e}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos\theta$

上の 2 式より　$d = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{e}|$

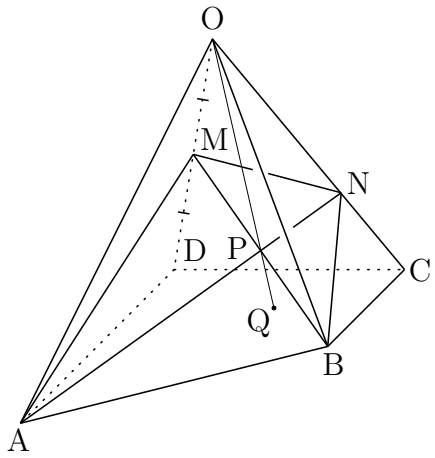
15.63 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \vec{a} + 2(\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}$$



(2) 3 点 A，B，M を通る平面上の位置ベクトルは

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned}&= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{2}\gamma\right)\vec{a} + (\beta - \gamma)\vec{b} + \gamma\vec{c}\end{aligned}$$

この平面と直線 OC の交点が N であるから

$$\alpha + \frac{1}{2}\gamma = 0 \quad \cdots ②, \quad \beta - \gamma = 0 \quad \cdots ③, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \gamma\vec{c}$$

①，②，③ を解いて　$\alpha = -\dfrac{1}{3}$，$\beta = \gamma = \dfrac{2}{3}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{2}{3}\vec{c}}$

(3) P は直線 BM 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{2}t\vec{a} + (1-2t)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であり，P は平面 OAC 上の点であるから

$1 - 2t = 0$　これを解いて　$t = \dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{k}{4}\vec{a} + \dfrac{k}{2}\vec{c}$

Q は，平面 ABC 上の点であるから

$$\frac{k}{4} + \frac{k}{2} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{4}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{OP} : \mathrm{PQ} = 3 : 1}$

15.64 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (1-t)(\vec{a}+\vec{d}) + t\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}\right)$

$$= \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}\right)\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{c}} + \mathbf{(1-t)}\vec{\boldsymbol{d}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OL}} + s\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (1-s)\left(\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}\right) + s\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)$

$$= \mathbf{(1-s)}\vec{\boldsymbol{a}} + \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{s}\right)\vec{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{s}\vec{\boldsymbol{d}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ とすると，(1)，(2) より

$$1 - \frac{1}{2}t = 1 - s, \quad t = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}s, \quad 1 - t = s$$

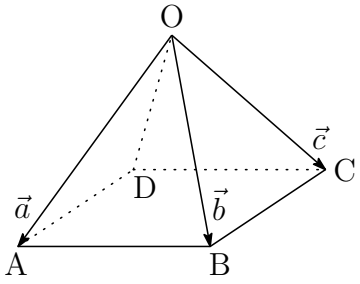
第 1 式，第 2 式より　$s = \frac{1}{3}$，$t = \frac{2}{3}$

これは第 3 式もみたす．したがって，線分 EM と線分 LN は交わる．

よって　　$\mathrm{EH} : \mathrm{HM} = t : 1-t = \frac{2}{3} : 1 - \frac{2}{3} = \mathbf{2 : 1}$

15.65 (1) 正方形 OABC において $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \vec{a} + (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}\end{aligned}$$



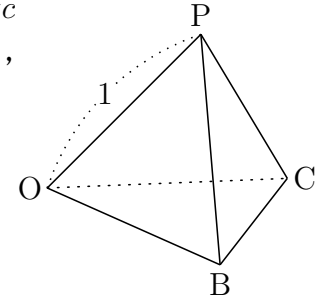
(2) △OAB，△OBC は，1 辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

1 辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さが $\sqrt{2}$ であるから，

△OAC について，$\angle \mathrm{OAC} = 90^\circ$．よって　$\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos 90^\circ = \mathbf{0}$

(3) 点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とし，$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ とおく．△OBP は 1 辺が 1 の正三角形であるから，$\vec{b}\cdot\vec{p} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ より，(2) の結果を用いて



$$\vec{b}\cdot(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}$$

ゆえに　　$x + 2y + z = 1 \quad \cdots ①$

△OCP についても同様に，$\vec{c}\cdot\vec{p}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\vec{c}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=\frac{1}{2}y+z=\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad y+2z=1\quad\cdots②$$

$|\vec{p}|=1$ であるから，$|\vec{p}|^2=1$ より

$$|x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}|^2=x^2+y^2+z^2+xy+yz=1$$

①，② から，$x=3z-1$，$y=1-2z$ となる．これを上式に代入して

$$(3z-1)^2+(1-2z)^2+z^2+(3z-1)(1-2z)+(1-2z)z=1$$

これを整理すると　$z(3z-2)=0$　ゆえに　$z=0,\ \dfrac{2}{3}$

したがって　$(x,\ y,\ z)=(-1,\ 1,\ 0),\ \left(1,-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}}$

15.66　(1) 条件から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AZ}}=\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\vec{a}+\left(\dfrac{3}{4}-t\right)\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{PZ}}=\vec{c}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{b}$

Y は平面 PXZ 上にあるから，α，β を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AY}}&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PZ}}\quad\cdots①\\&=t\vec{b}+\alpha\left\{\vec{a}+\left(\frac{3}{4}-t\right)\vec{b}\right\}+\beta\left\{\vec{c}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}\right\}\end{aligned}$$

また，Y は直線 GH 上にあるから，上式の $\vec{a}$ と $\vec{c}$ の係数に注意すると，$\alpha=1$，$\beta=1$ である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AY}}=\vec{a}+\vec{c}+\left(\frac{5}{4}-t\right)\vec{b}\quad\cdots②$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PY}}=\overrightarrow{\mathrm{AY}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$\begin{aligned}&=\vec{a}+\vec{c}+\left(\frac{5}{4}-t\right)\vec{b}-t\vec{b}\\&=\boldsymbol{\vec{a}+\left(\frac{5}{4}-2t\right)\vec{b}+\vec{c}}\end{aligned}$$

(2) Y が辺 GH 上にあるとき，② から

$$0 \leqq \frac{5}{4} - t \leqq 1 \quad \text{これを } 0 < t < 1 \text{ に注意して解くと} \quad \boldsymbol{\frac{1}{4} \leqq t < 1}$$

(3) ① に $\alpha = 1$，$\beta = 1$ を代入すると　　$\overrightarrow{\mathrm{PY}} = \overrightarrow{\mathrm{PX}} + \overrightarrow{\mathrm{PZ}}$

したがって，四角形 PXYZ は平行四辺形である．
これがひし形であるためには，$|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PZ}}|^2$ である．
ここで，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ であるから

$$1 + \left(\frac{3}{4} - t\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t = \frac{5}{8}}$$

別解 四角形 PXYZ は平行四辺形であるから，これがひし形であるためには，$\overrightarrow{\mathrm{PY}} \perp \overrightarrow{\mathrm{XZ}}$ である．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}} = 0$ より

$$\left\{\vec{a} + \left(\frac{5}{4} - 2t\right)\vec{b} + \vec{c}\right\} \cdot \left(-\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \vec{c}\right) = 0$$

ゆえに　$-1 - \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} - 2t\right) + 1 = 0$　これを解いて　$t = \frac{5}{8}$

15.67 (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{a} + \vec{b}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AL}} = \vec{c} + \vec{a}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \vec{b} + \vec{c}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AL}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}}{3} = \dfrac{(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c})}{3}$

$= \boldsymbol{\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CG}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}} = 0$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ に注意して

$$\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\frac{1}{3}(-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 = 0$$

これに $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = \sqrt{2}$ を代入すると

$$-2^2 - (\sqrt{2})^2 + 2|\vec{c}|^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{c}|^2 = 3 \quad \text{よって} \quad \mathrm{AK} = |\vec{c}| = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CL}}=-\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{CN}}=-\vec{a}+\vec{c}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{CL}}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=2+3=5$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{CN}}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2=4+3=7$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}}=|\vec{c}|^2=3$$

よって $\quad \triangle\mathrm{CLN}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CL}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CN}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}})^2}$

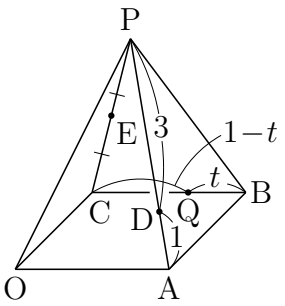
$$=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot7-3^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{26}}$$

15.68 (1) D は線分 AP を 1 : 3 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{1+3}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OP}}}$$

E は線分 CP の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

したがって $\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$=\boldsymbol{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}}$$

(3) OP = AP であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{POA}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{POA}=1\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(4) (3) と同様にして $\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\}\\&=3(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(t+2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=\frac{5}{2}-\frac{7}{2}t-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=0\quad\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\}\\&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=0\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② より　$\boldsymbol{t=\frac{1}{3}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\frac{4}{3}$　すなわち　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

15.69　(1) $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\vec{c}-t\,\vec{d}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FM}}=\vec{a}+\vec{d}+\left(-\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\left(\vec{c}-t\,\vec{d}\right)+\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)=\boldsymbol{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+(1-t)\vec{d}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ により，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=0$ に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=-\overrightarrow{\mathrm{PC}}=-\left(\vec{c}-t\vec{d}\right)=-\vec{c}+t\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\left(-\vec{c}+t\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{c}|^2+t|\vec{d}|^2=\frac{1}{2}\cdot2^2+t\cdot1^2=2+t$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)$$

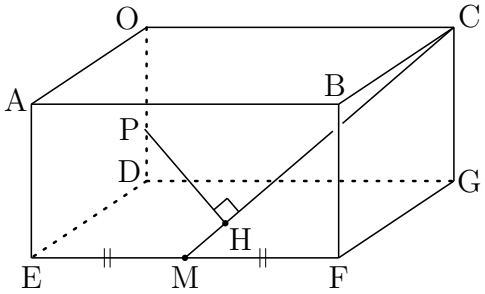
$$=|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2=1^2+\frac{1}{4}\cdot2^2+1^2=3$$

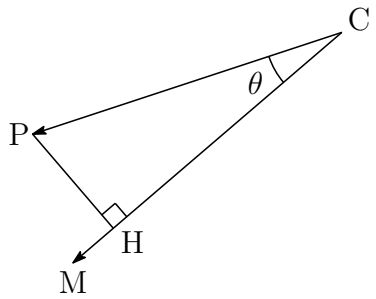
したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{t+2}{3}\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$$=\frac{2+t}{3}\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)-\left(-\vec{c}+t\vec{d}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{2+t}{3}\vec{a}+\frac{4-t}{6}\vec{c}+\frac{2-2t}{3}\vec{d}}$$





補足

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ のなす角を θ とすると　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}||\overrightarrow{\mathrm{CM}}|}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = |\overrightarrow{\mathrm{CP}}|\cos\theta\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|} = \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$

(3) (2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2 \\
=&t^2|\vec{d}|^2 + \left(\frac{2+t}{2}\right)^2|\vec{a}|^2 + \left(\frac{4-t}{6}\right)^2|\vec{c}|^2 + \left(\frac{2-2t}{3}\right)^2|\vec{d}|^2 \\
=&t^2\cdot1^2 + \left(\frac{2+t}{3}\right)^2\cdot1^2 + \left(\frac{4-t}{6}\right)^2\cdot2^2 + \left(\frac{2-2t}{3}\right)^2\cdot1^2 \\
=&\frac{5}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{8}{3} \\
=&\frac{5}{3}\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{12}{5} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)
\end{aligned}$$

よって，求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{12}{5}}$

15.70 (1) $\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta = \dfrac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ES}} = \vec{a} + \dfrac{x}{2}\vec{b} + \vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{ET}} = \dfrac{2-x}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2 &= |\vec{a}|^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 2^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 2^2 + 2^2 \\
&= \boldsymbol{x^2 + 8} \\
|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2 &= \left(\frac{2-x}{2}\right)^2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 2^2 + 2^2 + 2^2 \\
&= \boldsymbol{(2-x)^2 + 8} \\
\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}} &= \frac{2-x}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{x}{2}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = \frac{2-x}{2}\cdot2^2 + \frac{x}{2}\cdot2^2 + 2^2 \\
&= \boldsymbol{8}
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果を (1) に代入すると

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+8)\{(2-x)^2+8\} - 8^2}$$

ここで，$y=2-x$ とおくと，$x+y=2$ であるから

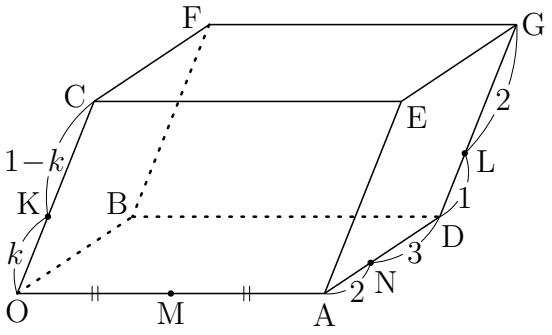
$$\begin{aligned}(x^2+8)\{(2-x)^2+8\}-8^2 &= (x^2+8)(y^2+8)-8^2\\ &= x^2y^2+8(x^2+y^2)\\ &= x^2y^2+8\{(x+y)^2-2xy\}\\ &= x^2y^2+8(4-2xy)=x^2y^2-16xy+32\\ &= (8-xy)^2-32=\{8-x(2-x)\}^2-32\\ &= \{(x-1)^2+7\}^2-32\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\{(x-1)^2+7\}^2-32}}$

(4) $0 \leqq x \leqq 2$ であるから，(3) の結果から

$\boldsymbol{x=0,\ 2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ をとり，$\boldsymbol{x=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{17}}{2}}$ をとる．

15.71　(1)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}}\\ \overrightarrow{\mathrm{ML}} &= \overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DL}}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}\\ \overrightarrow{\mathrm{MK}} &= \overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OK}}\\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}}\end{aligned}$$



(2) 3 点 M，N，K を通る平面を α とする．α 上の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は，(1) の結果から，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}}+s\overrightarrow{\mathrm{MN}}+t\overrightarrow{\mathrm{MK}}\\ &= \frac{1}{2}\vec{a}+s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}\right)\\ &= \frac{1}{2}(1+s-t)\vec{a}+\frac{2}{5}s\vec{b}+tk\vec{c}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

点 L の位置ベクトルは，$\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$ であるから，L が α 上の点であるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$\frac{1}{2}(1+s-t)=1,\quad \frac{2}{5}s=1,\quad tk=\frac{1}{3}$$

これを解いて　　$s=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{3}{2}$，$\boldsymbol{k=\dfrac{2}{9}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\vec{a}$ より，辺 GF 上の点の位置ベクトルは実数 x を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}+x\overrightarrow{\mathrm{FG}}=x\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\qquad(0\leqq x\leqq 1)$$

α と辺 GF が交点をもつとき，上式および $(*)$ から

$$\frac{1}{2}(1+s-t)=x,\quad \frac{2}{5}s=1,\quad tk=1$$

第 1 式および第 2 式から　$t=\dfrac{7}{2}-2x$

$0\leqq x\leqq 1$ であるから　$\dfrac{3}{2}\leqq t\leqq\dfrac{7}{2}$

$0<k<1$ に注意しながら，これを第 3 式に代入すると　$\boldsymbol{\dfrac{2}{7}\leqq k\leqq\dfrac{2}{3}}$

15.72 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$

△ACD と線分 OF の交点 H は，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=k\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})\\&=k\vec{a}+k\vec{c}+k\vec{d}\end{aligned}$$

このとき，H は平面 ACD 上にあるから

$$k+k+k=1\quad\text{ゆえに}\quad k=\frac{1}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$　よって，H は △ACD の重心である．

また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ より　**OH : HF = 1 : 2**

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{a}+\vec{d}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{HE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\vec{a}+\vec{d})-\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$

$$=\frac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{c}+2\vec{d})$$

(1) の結果より　$\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{2}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$

ここで　$|\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{HE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\left\{\dfrac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{c}+2\vec{d})\right\}\cdot\left\{\dfrac{2}{3}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})\right\}$

$$\begin{aligned}&=\frac{2}{9}(2|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2+2|\vec{d}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{d}+4\vec{d}\cdot\vec{a})\\&=\frac{2}{9}\left(2\cdot1^2-1^2+2\cdot1^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果により

$$|\overrightarrow{\mathrm{HE}}|^2 = \frac{1}{9}(4|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + 4|\vec{d}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{c} - 4\vec{c}\cdot\vec{d} + 8\vec{d}\cdot\vec{a})$$
$$= \frac{1}{9}\left(4\cdot 1^2 + 1^2 + 4\cdot 1^2 - 4\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} + 8\cdot\frac{1}{2}\right) = 1$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{HF}}|^2 = \frac{4}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{d} + 2\vec{d}\cdot\vec{a})$$
$$= \frac{4}{9}\left(1^2 + 1^2 + 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}$$

△ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{HE}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{HF}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{HE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1\cdot\frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

15.73 (1) 図 1 の直角三角形 OBE について，OB $= a$，OE $= b$ から

$$\mathrm{BE} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \mathrm{BE} = \mathrm{DE}$$

図 3 の二等辺三角形 BCE の BC の中点を M とすると

$$\mathrm{BM} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

図 3 の直角三角形 BEM について

$$\mathrm{EM} = \sqrt{\mathrm{BE}^2 - \mathrm{BM}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2}$$

図 1 の直角二等辺三角形 OBC から　　$\mathrm{OM} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

△OEM の 3 辺の長さから，∠EOM $= 90°$ である．

また，図 3 から H は EM 上にあるから，図 4 から

$$\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{OE}} = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EM}}, \quad \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{EM}}$$

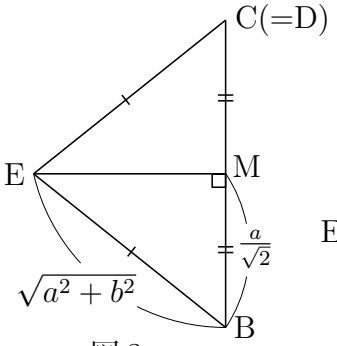


図 3

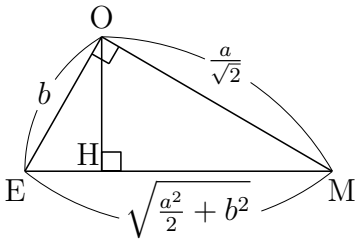


図 4

したがって

$$\mathrm{EH}:\mathrm{HM}=\frac{\mathrm{OE}^2}{\mathrm{EM}}:\frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{EM}}=\mathrm{OE}^2:\mathrm{OM}^2=b^2:\frac{a^2}{2}=2b^2:a^2$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OE}}+2b^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{2b^2+a^2}=\dfrac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OE}}+2b^2\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}}{a^2+2b^2}$

$$=\frac{\boldsymbol{a^2\overrightarrow{\mathrm{OE}}+b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+b^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}}{\boldsymbol{a^2+2b^2}}$$

(2) 図3の二等辺三角形BCEについて$\theta=\angle\mathrm{BEC}$とすると，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{BE}^2+\mathrm{CE}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{BE}\cdot\mathrm{CE}}$$
$$=\frac{(\sqrt{a^2+b^2})^2+(\sqrt{a^2+b^2})^2-(\sqrt{2a})^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

ゆえに　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{a^2+2b^2}}{a^2+b^2}$

二等辺三角形BCEの外接円の半径EPは，正弦定理により

$$\mathrm{EP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\sin\theta}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\frac{a^2+b^2}{a\sqrt{a^2+2b^2}}=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}$$

(1) で示した結果から

$$\mathrm{EH}=\frac{\mathrm{OE}^2}{\mathrm{EM}}=\frac{b^2}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}}=\frac{2b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}$$

二等辺三角形BCEの外心PはEM上にあるから，$a>b$に注意して

$$\mathrm{HP}=\mathrm{EP}-\mathrm{EH}=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}-\frac{2b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}$$

$\mathrm{HP}=\dfrac{a}{4}$のとき　$\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{2(a^2+2b^2)}}=\dfrac{a}{4}$　ゆえに　$7a^4-18a^2b^2+8b^4=0$

したがって　$(a^2-2b^2)(7a^2-4b^2)=0$　$a>b>0$により　$b=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

このとき，図4の△OEMについて，$\mathrm{OE}=\mathrm{OM}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$\mathrm{EM}=a$から

$$\mathrm{OH}=\frac{a}{2}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{a}{2}}$$

15.74 (1) $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\vec{h} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$

(2) s を媒介変数とすると，l_1 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{DG}} = \vec{d} + s(\vec{g}-\vec{d}) \\ &= \vec{d} + s\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} - \vec{d}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c} + (1-s)\vec{d}}\end{aligned}$$

t を媒介変数とすると，l_2 上の点 $\mathrm{Q}(\vec{q})$ は

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{a} + t(\vec{h}-\vec{a}) \\ &= \vec{a} + t\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3} - \vec{a}\right) \\ &= \boldsymbol{(1-t)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c} + \frac{t}{3}\vec{d}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果において，$s = t = \dfrac{3}{4}$ とすると

$$\vec{p} = \vec{q} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{d}$$

したがって，2 直線 l_1，l_2 は交点をもち，その位置ベクトルは

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})}$$

15.75 (1) ABC は原点 O を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円周上にあるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| &= \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}| \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{8+8+8+2\cdot4+2\cdot5+2\cdot6} \\ &= \frac{1}{3}\cdot3\sqrt{6} = \boldsymbol{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

(2) P は直線 OG と球面 S の交点のうち G から遠い方であるから，実数 $k<0$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=-k|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$$

と表される．これに $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\sqrt{6}$ を代入すると

$$2\sqrt{2}=-k\cdot\sqrt{6} \quad \text{これを解いて} \quad k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{\mathrm{OG}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

$$=\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{3}}{9}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})}$$

(3) (2) の結果により

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$=-\frac{2\sqrt{3}}{9}(8+4+6)=-4\sqrt{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{-4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角は　**150°**

15.76 (1) O(0, 0, 0) を通ることに注意して，球面の方程式を

$$x^2+y^2+z^2+lx+my+nz=0$$

とおくと

点 A(0, 2, 3) を通るから　$2m+3n+13=0$
点 B(1, 0, 3) を通るから　$l+3n+10=0$
点 C(1, 2, 0) を通るから　$l+2m+5=0$

これを解いて　$l=-1,\ m=-2,\ n=-3$

したがって，球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$$

すなわち　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{7}{2}$

よって，求める球面の中心 D の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)}$

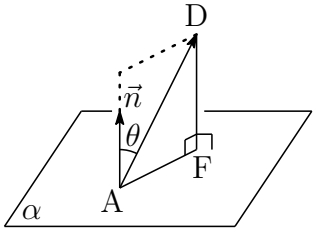
(2) 3 点 A，B，C を通る平面を α とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1, -2,\ 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0, -3),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトル，すなわち，α の法線ベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (6,\ 3,\ 2)$$

とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると



$$\mathrm{DF} = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\cos\theta|, \quad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\vec{n}|}$$

上の 2 式から　　$\mathrm{DF} = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \dfrac{|\frac{1}{2}\cdot 6 + (-1)\cdot 3 + (-\frac{3}{2})\cdot 2|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \boldsymbol{\frac{3}{7}}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2(\sqrt{10})^2 - 1^2} = \dfrac{7}{2}$

よって，求める体積は　　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DF} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{2}\times\dfrac{3}{7} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

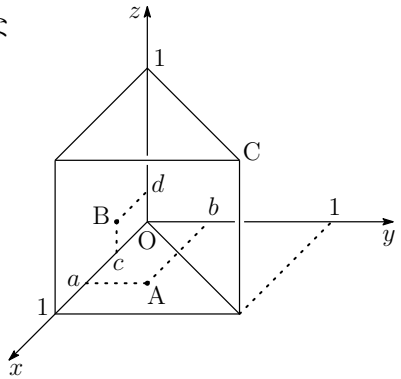
15.77　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a,\ b,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1,\ 1,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (b, -a,\ a-b)$$

とすると

$$|\vec{n}| = \sqrt{2(a^2 - ab + b^2)}$$

求める単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると



$$\vec{e} = \pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2(a^2 - ab + b^2)}}}\boldsymbol{(b, -a,\ a-b)}$$

ゆえに　　$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \pm\dfrac{bc + (a-b)d}{\sqrt{2(a^2 - ab + b^2)}}$

$bc \geqq 0$，$a - b \geqq 0$，$d \geqq 0$ であるから　　$|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \dfrac{\boldsymbol{bc + (a-b)d}}{\sqrt{\boldsymbol{2(a^2 - ab + b^2)}}}$

(2) △OAC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$

四面体 OABC において △OAC を底面とすると，高さは $|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから

求める四面体の体積 V は　　$V=\dfrac{1}{3}S\times|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\boldsymbol{\dfrac{bc+(a-b)d}{6}}$

(3) $0\leqq b\leqq a\leqq 1$，$0\leqq c\leqq 1$，$0\leqq d\leqq 1$ であるから，(2) の結果より

i) $b>0$，$a-b>0$ のとき　　$V\leqq\dfrac{b\cdot 1+(a-b)\cdot 1}{6}=\dfrac{a}{6}\leqq\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V\leqq\dfrac{1}{6}$　(等号は $a=1,\ 0<b<1,\ c=1,\ d=1$ のとき)

ii) $b=0$ のとき　　$V=\dfrac{ad}{6}\leqq\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V\leqq\dfrac{1}{6}$　(等号は $a=1,\ 0\leqq c\leqq 1,\ d=1$ のとき)

iii) $a-b=0$ のとき　　$V=\dfrac{bc}{6}\leqq\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V\leqq\dfrac{1}{6}$　(等号は $b=c=1,\ 0\leqq d\leqq 1$ のとき)

よって，V の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ で，そのときの A，B は次の 3 組である．

$$\mathbf{A(1,\ }\boldsymbol{b}\mathbf{,\ 0),\ B(1,\ 0,\ 1)}\quad\mathbf{(0<}\boldsymbol{b}\mathbf{<1)}$$
$$\mathbf{A(1,\ 0,\ 0),\ B(}\boldsymbol{c}\mathbf{,\ 0,\ 1)}\quad\mathbf{(0\leqq}\boldsymbol{c}\mathbf{\leqq 1)}$$
$$\mathbf{A(1,\ 1,\ 0),\ B(1,\ 0,\ }\boldsymbol{d}\mathbf{)}\quad\mathbf{(0\leqq}\boldsymbol{d}\mathbf{\leqq 1)}$$

解説 (ベクトル積)

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表し，その成分は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

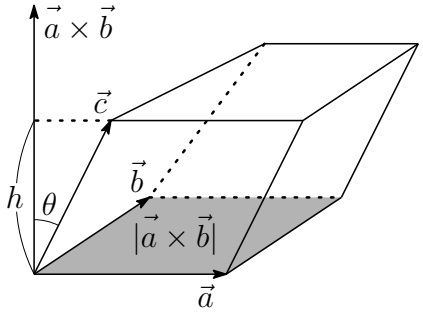
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

補足　本題 (2) で，$\vec{a}=(a,\ b,\ 0)$，$\vec{b}=(c,\ 0,\ d)$，$\vec{c}=(1,1,1)$ とすると

$$\vec{a}\times\vec{c}=(b,-a,\ a-b),\quad(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=bc+(a-b)d$$

よって，四面体の体積 V は　$V=\dfrac{1}{6}|bc+(a-b)d|$

15.78　(1)　$h\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直であるから，$\vec{a}\cdot(h\vec{a}+\vec{b})=0$ より

$$\begin{aligned}|x\vec{a}+\vec{b}|^2&=|(x-h)\vec{a}+(h\vec{a}+\vec{b})|^2\\&=(x-h)^2|\vec{a}|^2+2(x-h)\vec{a}\cdot(h\vec{a}+\vec{b})+|h\vec{a}+\vec{b}|^2\\&=(x-h)^2|\vec{a}|^2+|h\vec{a}+\vec{b}|^2\\&\geqq|h\vec{a}+\vec{b}|^2\end{aligned}$$

よって　　$|x\vec{a}+\vec{b}|\geqq|h\vec{a}+\vec{b}|$

(2)　$h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ と $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるから，$\vec{d}=h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ とする

と，$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ より，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|^2&=|(x-h)\vec{a}+(y-k)\vec{b}+\vec{d}|^2\\&=(x-h)^2|\vec{a}|^2+(y-k)^2|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2+2(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=|x-h|^2|\vec{a}|^2-2|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|+|y-k|^2|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2\\&\qquad+2\{|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|-(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\&=(|x-h||\vec{a}|-|y-k||\vec{b}|)^2+|\vec{d}|^2\\&\qquad+2\{|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|-(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\&\geqq|\vec{d}|^2\end{aligned}$$

よって　　$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|\geqq|h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$

(3)　　$\begin{aligned}\vec{d}&=h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}\\&=h(1,\ 1,\ 1)+k(1,\ 4,-2)+(-3,-6,\ 6)\\&=(h+k-3,\ h+4k-6,\ h-2k+6)\end{aligned}$

$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ であるから

$$\begin{cases}h+k-1=0\\h+7k-13=0\end{cases}$$　これを解いて　$h=-1,\ k=2$

(2) の結果から，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は，$x=h$，$y=k$ すなわち $\boldsymbol{x=-1,\ y=2}$ のとき最小となり，最小値は　$|-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|=|(-2,\ 1,\ 1)|=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

補足　(1) の $x\vec{a}+\vec{b}$ は点 $\mathrm{B}(\vec{b})$ を通り，方向ベクトルが $\vec{a}$ の直線である．$|x\vec{a}+\vec{b}|$ は原点からこの直線までの距離である．

(2) の $x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}$ は点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ を通り，接ベクトルが $\vec{a}$，$\vec{b}$ の平面である．$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は原点からこの平面までの距離である．

15.79　(1)　P は BC を $t:(1-t)$ に内分する点であるから $(0<t<1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ゆえに　$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)(1,\ 2,\ 0)+t(2,\ 1,\ 2)\\&=(1+t,\ 2-t,\ 2t)\end{aligned}$

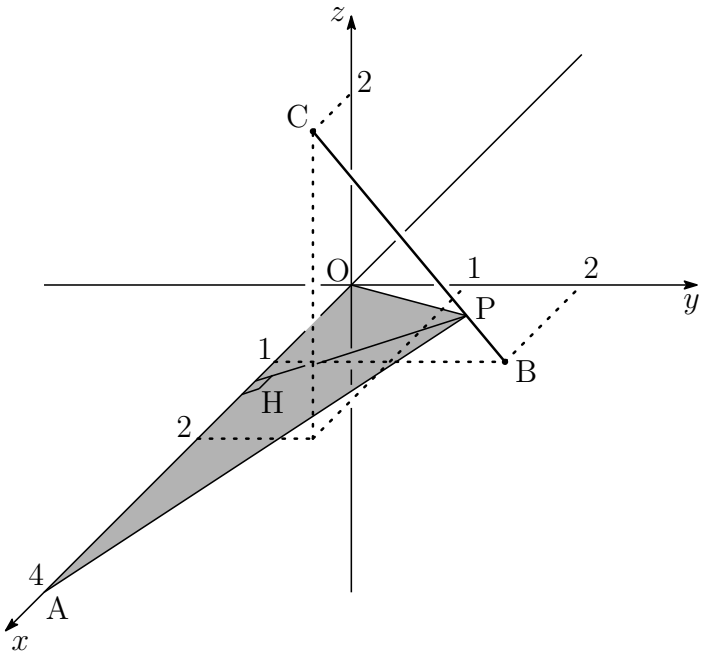
OA 上に $\mathrm{H}(1+t,\ 0,\ 0)$ をとると　$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=(0,\ 2-t,\ 2t)$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{HP}}$　ゆえに　$\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{HP}$

したがって，HP が最小のとき，△OAP は最小となる．

$$\begin{aligned}\mathrm{HP}^2 &= (2-t)^2+(2t)^2 = 5t^2-4t+4\\ &= 5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}\end{aligned}$$

よって，求める t の値は，$0<t<1$ に注意して　$\boldsymbol{t=\dfrac{2}{5}}$



補足

一般に，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 がねじれの位置にあるとき，ℓ_1 上の点 P と ℓ_2 上の点 Q を結ぶ線分 PQ が最小となるとき，PQ$\perp\ell_1$，PQ$\perp\ell_2$ である．
ここでは，2 直線 OA，BC がねじれの位置にあり，このとき $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ を解いて t の値を求めることができる．

(2) D は xy 平面上の点であるから，その座標を $(a,\ b,\ 0)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (a,\ b,\ 0)-(2,\ 1,\ 2) = (a-2,\ b-1,-2)$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より　$4(a-2)+0(b-1)+0\cdot(-2)=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より　$(1+t)(a-2)+(2-t)(b-1)+2t\cdot(-2)=0$

$2-t\neq 0$ であるから上の 2 式より　　$a=2,\ b=\dfrac{2+3t}{2-t}$

したがって　　$\mathrm{D}\left(2,\ \dfrac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$

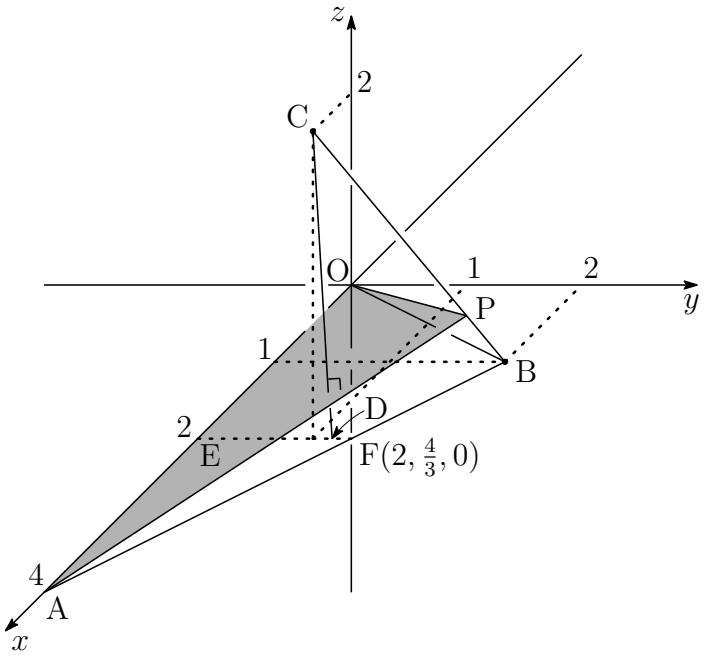
点 E を $(2,\ 0,\ 0)$，AB 上の x 座標が 2 である点を F とすると，3 点 A，F，B の x 座標から F は線分 AB を $2:1$ に内分する点であるから，その座標は

$$\left(\frac{1\cdot 4+2\cdot 1}{2+1},\ \frac{1\cdot 0+2\cdot 2}{2+1},\ \frac{1\cdot 0+2\cdot 0}{2+1}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(2,\ \frac{4}{3},\ 0\right)$$

D が △OAB の内部にあるためには，D は EF 間にあればよいので

$$0<\frac{2+3t}{2-t}<\frac{4}{3}$$

$0<t<1$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{0<t<\dfrac{2}{13}}$



16.1 求める数列を $\{a_n\}$ とすると　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=2n+2$

$n>1$ のとき　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$

ゆえに　$a_n-a_1=2\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1)+2(n-1)=n^2+n-2$

したがって　　$a_n=n^2+n-1$

上式は $n=1$ のときも成り立つ．よって　$\boldsymbol{a_n=n^2+n-1}$

16.2 (1) 初項 a_1 は　$a_1 = S_1 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 = a + b$　$\cdots$①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= an^2 + bn - \{a(n-1)^2 + b(n-1)\}$

$= 2an - a + b$

① より，この式は，$n = 1$ のときにも成り立つ．

よって，一般項は　$\boldsymbol{a_n = (2n-1)a + b}$

(2) $a_{n+1} - a_n = (2n+1)a + b - \{(2n-1)a + b\} = 2a$

よって，公差 $\boldsymbol{2a}$ の等差数列

16.3 (1) 題意より

$$a^2 = 4b \quad \cdots①, \quad c^2 = 36b \quad \cdots②, \quad a + c = 2b \quad \cdots③$$

① − ② より　$a^2 - c^2 = -32b$

ゆえに　$(a + c)(a - c) = -32b$

これに ③ を代入すると　$2b(a - c) = -32b$

$a > 0$ であるから，① より，$b \neq 0$ であることに注意して

$$a - c = -16 \quad \text{ゆえに} \quad c = a + 16 \quad \cdots④$$

④ を ③ に代入すると

$$a + (a + 16) = 2b \quad \text{ゆえに} \quad b = a + 8 \quad \cdots⑤$$

⑤ を ① に代入すると

$$a^2 = 4(a + 8) \quad \text{ゆえに} \quad (a + 4)(a - 8) = 0$$

$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = 8}$

これを ④，⑤ に代入して　$\boldsymbol{b = 16,\ c = 24}$

(2) $\{a_n\}$ の公比は　$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

ゆえに　$a_n = a_1\cdot 2^{n-1} = 4\cdot 2^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき　$b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 4\cdot 2^{k-1}$

$= 4 + \dfrac{4(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1}$

$n = 1$ のときも上式は成り立つので　$\boldsymbol{b_n = 2^{n+1}}$

(3) $p_{n+1}-p_n=p_n$　ゆえに　$p_{n+1}=2p_n$

したがって，$\{p_n\}$ は初項が p，公比が 2 の等比数列．

よって　　$\boldsymbol{p_n=p\cdot 2^{n-1}}$

16.4 (1) $\{a_n\}$ の公差を d とすると

$$a_{11}=\frac{1}{6}+10d,\quad a_{40}=\frac{1}{6}+39d$$

$\displaystyle\sum_{k=11}^{40}a_k=250$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 30\left\{\left(\frac{1}{6}+10d\right)+\left(\frac{1}{6}+39d\right)\right\}=250\quad\text{これを解いて}\quad d=\frac{1}{3}$$

よって，$\{a_n\}$ の一般項は　　$a_n=\dfrac{1}{6}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}n-\dfrac{1}{6}}$

(2) (1) の結果から，$a_n\leqq 10$ のとき

$$\frac{1}{3}n-\frac{1}{6}\leqq 10\quad\text{ゆえに}\quad n\leqq 30+\frac{1}{2}$$

これを満たす n の最大値 N は　　$\boldsymbol{30}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}a_k&=\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{3}k-\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 30(30+1)-\frac{1}{6}\cdot 30=\boldsymbol{150}\end{aligned}$$

16.5 (1) 数列 $\{a_n\}$ は，初項 3，公比 2 の等比数列であるから　$\boldsymbol{a_n=3\cdot 2^{n-1}}$

(2) (1) の結果から　$a_{2n-1}=3\cdot 2^{(2n-1)-1}=3\cdot 2^{2n-2}$

よって　　$T_n=\dfrac{2\times 3\cdot 2^{2n-2}-3\cdot 2^{n-1}}{2-1}=\boldsymbol{3(2^{2n-1}-2^{n-1})}$

解説　初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和 S は　$\boldsymbol{S=\dfrac{rl-a}{r-1}}$

(証明) 末項 l が第 n 項とすると，$l=ar^{n-1}$ であるから

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{r\cdot ar^{n-1}-a}{r-1}=\frac{rl-a}{r-1}$$

(3) (2) の結果から　$T_n = 6\cdot 4^{n-1} - 3\cdot 2^{n-1}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k = 6\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} - 3\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$

$$= 6\times\frac{4^n-1}{4-1} - 3\times\frac{2^n-1}{2-1}$$

$$= 2(4^n-1) - 3(2^n-1) = \mathbf{2\cdot 4^n - 3\cdot 2^n + 1}$$

16.6 (1) 初項 2，公差 3 の等差数列の初項から第 20 項まで和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 2 + (20-1)\cdot 3\} = \mathbf{610}$$

(2) 初項 2，公比 -2 の等比数列の初項から第 n 項までの和が 300 を超えるとき

$$\frac{2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} > 300 \quad \text{ゆえに} \quad (-2)^n < -449$$

これをみたす n は奇数である．$(-2)^7 = -128,\quad (-2)^9 = -512$

したがって，求める最小の n は　　**9**

(3) $\{a_n\}$ のすべての項は正，$\{b_n\}$ の奇数の項は正，$\{b_n\}$ の偶数の項は負である．したがって，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の両方に含まれる項は，$\{b_n\}$ の奇数の項から調べればよい．$\{b_n\}$ の奇数の項からなる数列は $\{2\cdot 4^{n-1}\}$．

$$2\cdot 4^{n-1} \equiv 2\cdot 1^{n-1} \equiv 2 \pmod 3$$

よって，任意の n に対して，$2\cdot 4^{n-1} = 3k+2$ を満たす自然数 k が存在する．このとき，$3k+2$ は $\{a_n\}$ の第 $k+1$ 項である．したがって

$$c_n = 2\cdot 4^{n-1} = 2\cdot 2^{2n-2} = \mathbf{2^{2n-1}}$$

16.7 (1) $n=1$ のとき　$b_1 = 2^2 - 2 = 2$

$n \geqq 2$ のとき　$b_n = 2^{n+1} - 2 - (2^n - 2) = 2^n$

$n=1$ のときも上式は成り立つので　$\boldsymbol{b_n = 2^n}$

(2) $a_n = 2 + 21(n-1) = 21n - 19$

$c_n = b_n - a_n = 2^n - 21n + 19 \quad \cdots ①$

$c_{n+1} - c_n = 2^{n+1} - 21(n+1) + 19 - \{2^n - 21n + 19\}$

$= 2^n - 21 \quad \cdots ②$

よって，$n \geqq 5$ のとき　$c_{n+1} - c_n = 2^n - 21 \geqq 2^5 - 21 > 0$

(3) ①，② から

$$c_1 = 2 - 21 + 19 = 0, \quad c_7 = 2^7 - 147 + 19 = 0$$
$$c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > c_5 < c_6 < c_7 < \cdots$$

したがって，$c_n = 0$ となる n は　　$\boldsymbol{n = 1,\ 7}$

16.8 (1) 等比数列 $\{S_n\}$ の初項は $S_1 = a_1 = 2$，公比を r とすると

$$S_2 = a_1 - a_2 = 2r, \quad S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = 2r^2$$

上の第 2 式から第 1 式を引くと　　$a_3 = 2r^2 - 2r$

これに $a_3 = -\dfrac{1}{2}$ を代入すると　　$-\dfrac{1}{2} = 2r^2 - 2r$

整理すると　$(2r-1)^2 = 0$　ゆえに　$r = \dfrac{1}{2}$

よって　　$S_n = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{n-2}}$

(2) $n \geqq 2$ のとき　$S_n - S_{n-1} = (-1)^{n-1}a_n$

これに (1) の結果を代入すると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = (-1)^{n-1}a_n$$
$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = (-1)^{n-1}a_n$$
$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

よって　　$\boldsymbol{a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}}$　$\boldsymbol{(n \geqq 2 \text{ のとき})}$

$\boldsymbol{a_1 = 2}$

16.9 (1) $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ と $\triangle \mathrm{OAB}$ について

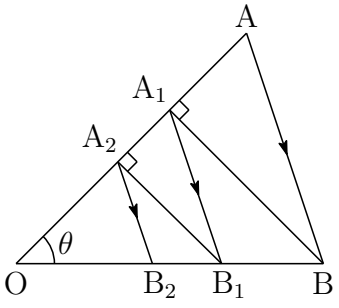
$\angle \mathrm{O}$ は共通

$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n // \mathrm{AB}$ であるから

$\angle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n = \angle \mathrm{OAB}$

ゆえに，2 角が等しいので

$\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n \backsim \triangle \mathrm{OAB}$



(2) $\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1} \backsim \triangle \mathrm{OAB}$ であるから

$$\frac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}} = \frac{\mathrm{OA}_n}{\mathrm{OA}_{n-1}} = \frac{\mathrm{OB}_{n-1}\cos\theta}{\mathrm{OA}_{n-1}} = \frac{\mathrm{OB}\cos\theta}{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{\frac{b\cos\theta}{a}}$$

(3) (2) の結果に $a=2$，$b=1$，$\theta = 30^\circ$ を代入すると

$$\frac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}} = \frac{1\cdot\cos 30^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{S_n}{S_{n-1}} = \left(\frac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

また $\quad S_1 = \dfrac{3}{16}\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{3}{16}\times\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\sin 30^\circ = \dfrac{3}{32}$

$S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ は，初項が $\dfrac{3}{32}$，公比が $\dfrac{3}{16}$ の等比数列の和であるから

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{\dfrac{3}{32}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{3}{16}} = \boldsymbol{\frac{3}{26}\left\{1-\left(\frac{3}{16}\right)^n\right\}}$$

16.10 (1) $\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP}_1}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)} = \frac{\mathrm{OP}_2}{\sin\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OP}_2 = \frac{\sin\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}$$

(2) $\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ に正弦定理を適用すると $(n = 1, 2, \cdots, 8)$

$$\frac{\mathrm{OP}_n}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)} = \frac{\mathrm{OP}_{n+1}}{\sin\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OP}_{n+1} = \frac{\mathrm{OP}_n\sin\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\mathrm{OP}_n\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}$$

数列 $\{\mathrm{OP}_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{\mathrm{OP}_9 = 16\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8}$$

(3) $\mathrm{OP}_9 = \dfrac{81}{16}$ のとき，(2) の結果から

$$16\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8 = \frac{81}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^8 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} > 0$ であるから

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (2-\sqrt{3})\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$$

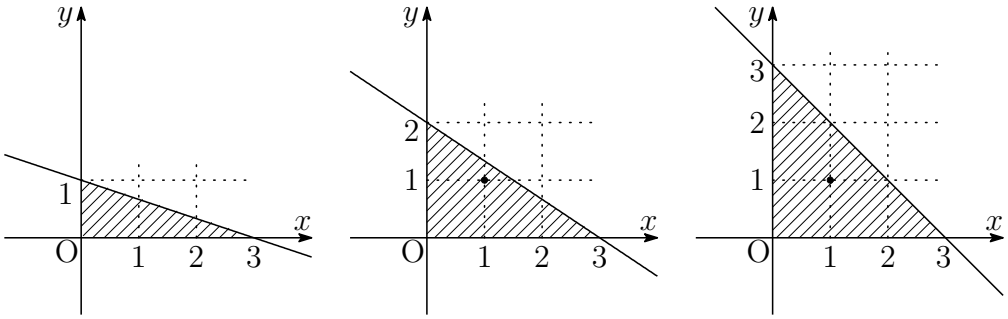
よって $\quad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \boldsymbol{2\sqrt{3}+3}$

16.11 (1) 2 点 A(3, 0)，$B_n(0,\ n)$ を通る直線は

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{n}=1 \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{n}{3}x+n$$

ゆえに，領域内の格子点 $(x,\ y)$ は，次式をみたす整数 x，y である．

$$(*)\begin{cases} x=1 \text{ のとき} & 0<y<\dfrac{2n}{3} \\ x=2 \text{ のとき} & 0<y<\dfrac{n}{3} \end{cases}$$



したがって　$n=1$ のとき，$(*)$ をみたす格子点はない．

$n=2$ のとき，$(*)$ をみたす格子点は $(1,\ 1)$ の 1 個．

$n=3$ のとき，$(*)$ をみたす格子点は $(1,\ 1)$ の 1 個．

よって　　$\boldsymbol{a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=1}$

(2) $n=3k$ を $(*)$ に代入すると，$x=1$ のとき　$0<y<2k$

よって，これに含まれる格子点の個数は　$\boldsymbol{2k-1}$ (個)

(3) (2) と同様に，$n=3k$ を $(*)$ に代入すると　$x=2$ のとき　$0<y<k$

ゆえに，これに含まれる格子点の個数は　$k-1$ (個)

これと (2) の結果により　$a_{3k}=(2k-1)+(k-1)=\boldsymbol{3k-2}$

(4) $(*)$ から，n が 3 の倍数でないとき

$$a_n=\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{2n}{3}\right]$$

($[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す)

$$\begin{aligned} a_{3k-2} &= \left[\frac{3k-2}{3}\right]+\left[\frac{2(3k-2)}{3}\right] \\ &= \left[(k-1)+\frac{1}{3}\right]+\left[(2k-2)+\frac{2}{3}\right] \\ &= (k-1)+(2k-2) \\ &= 3k-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3k-1} &= \left[\frac{3k-1}{3} \right] + \left[\frac{2(3k-1)}{3} \right] \\ &= \left[(k-1) + \frac{2}{3} \right] + \left[(2k-1) + \frac{1}{3} \right] \\ &= (k-1) + (2k-1) \\ &= 3k-2 \end{aligned}$$

よって，上の 2 式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} S_{3m} &= \sum_{k=1}^{m} (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) = \sum_{k=1}^{m} \{(3k-3) + (3k-2) + (3k-2)\} \\ &= \sum_{k=1}^{m} (9k-7) \\ &= 9 \cdot \frac{1}{2} m(m+1) - 7(m+1) = \boldsymbol{\frac{1}{2} m(9m-5)} \end{aligned}$$

補足 (宮崎大学 2010) 3

16.12 (1) $\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2}$

(2) $a_n = k$ となるのは　$k \leqq \sqrt{n} < k+1$　ゆえに　$k^2 \leqq n \leqq (k+1)^2 - 1$

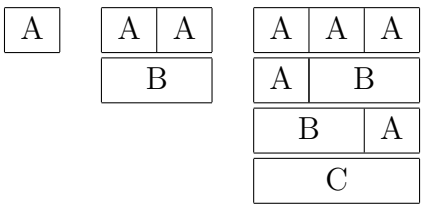
これを，満たす n は

$$\{(k+1)^2 - 1\} - k^2 + 1 = 2k+1 \text{ (個)}$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{m-1} \{a_{k^2} + a_{k^2+1} + \cdots + a_{(k+1)^2-1}\} + a_{m^2} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \{k(2k+1)\} + m = \sum_{k=1}^{m-1} (2k^2 + k) + m \\ &= 2 \times \frac{1}{6} m(m-1)(2m-1) + \frac{1}{2} m(m-1) + m \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6} m(4m^2 - 3m + 5)} \end{aligned}$$

16.13 (1) $\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4}$



(2) (i) 1回目が方法Aのとき，残り $n-1$ 枚をすべて取る a_{n-1} 通り．
(ii) 1回目が方法Bのとき，残り $n-2$ 枚をすべて取る a_{n-2} 通り．
(iii) 1回目が方法Cのとき，残り $n-3$ 枚をすべて取る a_{n-3} 通り．
したがって，(i)〜(iii) より　　$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}
a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 = 4 + 2 + 1 = 7 \\
a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 = 7 + 4 + 2 = 13 \\
a_6 &= a_5 + a_4 + a_3 = 13 + 7 + 4 = 24 \\
a_7 &= a_6 + a_5 + a_4 = 24 + 13 + 7 = 44 \\
a_8 &= a_7 + a_6 + a_5 = 44 + 24 + 13 = 81 \\
a_9 &= a_8 + a_7 + a_6 = 81 + 44 + 24 = 149 \\
a_{10} &= a_9 + a_8 + a_7 = 149 + 81 + 44 = \mathbf{274}
\end{aligned}$$

(4) 方法Aと方法Bだけで重ねた n 枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を b_n とすると

$$b_1 = 1,\quad b_2 = 2,\quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\ \ (n \geqq 3)\quad \text{ゆえに}\quad b_3 = 3,\quad b_4 = 5$$

(i) 方法Cを2回だけ，それを続けて用いる場合の数は

$$b_4 + b_1b_3 + b_2b_2 + b_3b_1 + b_4 = 5 + 1{\cdot}3 + 2{\cdot}2 + 3{\cdot}1 + 5 = 20 \text{ 通り}$$

$$\boxed{\mathrm{CC}b_4,\ b_1\mathrm{CC}b_3,\ b_2\mathrm{CC}b_2,\ b_3\mathrm{CC}b_1,\ b_4\mathrm{CC}}$$

(ii) 方法Cを3回，それを2回以上続けて用いる場合は，次の4通り．

$$\mathrm{CCCA},\quad \mathrm{CCAC},\quad \mathrm{CACC},\quad \mathrm{ACCC}$$

よって，求める場合の数は　　$274 - (20 + 4) = \mathbf{250}$ (通り)

16.14 (1) 第5群の最後の項は

$$\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1} = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31 \text{ (番目)}\quad \text{よって}\quad 3{\cdot}31 = \mathbf{93}$$

(2) 第 n 群の最初の項は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + 1 = \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 1 = 2^{n-1} \text{ (番目)}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{3{\cdot}2^{n-1}}$$

(3) 第 n 群の項の総和は，初項 $3\cdot 2^{n-1}$，公差 3，項数 2^{n-1} の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\{2\cdot 3\cdot 2^{n-1}+(2^{n-1}-1)\cdot 3\}=\mathbf{9\cdot 2^{2n-3}-3\cdot 2^{n-2}}$$

16.15 (1) 正の偶数 $2j$ が $2j$ 個並んでいる数列を第 j 群とすると，第 j 群の最後の項の項数は

$$\sum_{i=1}^{j}2i=2\cdot\frac{1}{2}j(j+1)=j(j+1)$$

ゆえに，$t-1$ 群の最後の項の項数は $(t\geqq 2)\quad (t-1)\{(t-1)+1\}=t^2-t$

よって，$2t$ が初めて現れるのは　第 t^2-t+1 項

これは，$t=1$ のときも成り立つから　**第 $\boldsymbol{t^2-t+1}$ 項**

(2) 第 9 群の最後の項の項数は　$9(9+1)=90$

第 10 群の最後の項の項数は　$10(10+1)=110$

よって，a_{100} は第 10 群にあるので　$a_{100}=2\cdot 10=\mathbf{20}$

(3) 第 j 群にある項の和は　$2j\times 2j=4j^2$

第 10 群の最初の項の項数は　$10^2-10+1=91$

よって，求める和は　$\displaystyle\sum_{j=1}^{9}4j^2+10\times 20=4\times\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 10\cdot 19+200=\mathbf{1340}$

16.16 (1) 第 k 群の初項および末項は，$\{a_n\}$ のそれぞれ第 $\dfrac{1}{2}k(k-1)+1$ 項，第 $\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 項であるから

$$a_{\frac{1}{2}k(k-1)+1}=-2\left\{\frac{1}{2}k(k-1)+1\right\}+a=-k^2+k-2+a$$

$$a_{\frac{1}{2}k(k+1)}=-2\times\frac{1}{2}k(k+1)+a=-k^2-k+a$$

よって　$S_k=\dfrac{1}{2}k\{(-k^2+k-2+a)+(-k^2-k+a)\}$

$$=\mathbf{-k^3+(a-1)k}$$

(2) (1) の結果から，$a=212$ のとき，$S_k=-k^3+211k$ であるから

$$S_{k+1}-S_k=\{-(k+1)^3+211(k+1)\}-(-k^3+211k)$$
$$=3\{70-k(k+1)\}$$

ゆえに　$S_1<S_2<\cdots<S_8>S_9>S_{10}>\cdots$

S_k の群に含まれる項の平均は，(1) の結果から

$$\frac{S_k}{k} = \frac{-k^3+211k}{k} = -k^2+211$$

よって，求める値は　$-8^2+211 = \mathbf{147}$

(3) (1) の結果から，$a=92$ のとき，$S_k = -k^3+91k$ であるから

$$\begin{aligned} S_{k+1}-S_k &= \{-(k+1)^3+91(k+1)\}-(-k^3+91k) \\ &= -3(k-5)(k+6) \\ S_{k+1}+S_k &= \{-(k+1)^3+91(k+1)\}+(-k^3+91k) \\ &= -2k^3-3k^2+179k+90 \\ &= -(k-9)(k+10)(2k+1) \end{aligned}$$

よって，$|S_k| = |S_{k+1}|$ を満たす自然数 k は　　$\boldsymbol{k=5,\ 9}$

補足 $S_k = k(91-k^2)$ より，$k \leqq 9$ のとき $S_k > 0$，$k \geqq 10$ のとき $S_{k+1} < 0$ であることに注意すると

$$S_9 = 90, \quad S_{10} = -90$$

したがって，$S_{k+1}+S_k$ は $k-9$ を因数にもつことが分かる．

16.17 (1) 第 k 群にある分数の分母と分子の和は $k+1$ であるから，$\dfrac{n}{m}$ は $m+n-1$ 群にある．よって，$\dfrac{n}{m}$ は $\boldsymbol{m+n-1}$ **群の第** $\boldsymbol{n}$ **項.**

(2) $m+n-2$ 群までの項数に n を加えたものであるから

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+n}\ \ \textbf{(番目)}$$

(3) 1000 番目の項が第 k 群にあるとすると

$$\frac{1}{2}(k-1)k < 1000 \leqq \frac{1}{2}k(k+1)$$

ここで　　$\dfrac{1}{2}\cdot 44\cdot 45 = 990$，$\dfrac{1}{2}\cdot 45\cdot 46 = 1035$，$1000 = 990+10$

したがって，1000 番目の項 a は第 45 群の第 10 項である．

$a = \dfrac{n}{m}$ とすると，(1) の結果から

$$m+n-1 = 45, \quad n = 10 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{n}{m} = \boldsymbol{\frac{10}{36}}$$

(4) $\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$ であるから，$n'=5$，$m'=18$ とすると，(2) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(n'+m'-2)(n'+m'-1)+n' &= \frac{1}{2}(5+18-2)(5+18-1)+5\\ &= \mathbf{236}\ (\text{番目})\end{aligned}$$

16.18 (1) $2^n-1=2\cdot 2^{n-1}-1$ より，第 n 群 $\dfrac{1}{2^n},\ \dfrac{3}{2^n},\cdots,\ \dfrac{2^n-1}{2^n}$ の項数は　2^{n-1}

第 n 群の項の和は　$\dfrac{1}{2^n}\{1+3+\cdots+(2\cdot 2^{n-1}-1)\}=\dfrac{1}{2^n}(2^{n-1})^2=\mathbf{2^{n-2}}$

解説 $1+3+\cdots+(2N-1)=N^2$

(2) $2^5-1<51\leqq 2^6-1$ より，分子にはじめて 51 が現れるのは　第 6 群

また，$51=2\cdot 26-1$ より　第 6 群の 26 番目

第 5 群までの項数は　$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}2^{n-1}=\frac{2^5-1}{2-1}=31$

よって，求める項数は　$31+26=\mathbf{57}$

(3) (1)，(2) の結果から，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}2^{n-2}+\frac{1}{2^6}\times 26^2 &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}2^{n-1}+\frac{26^2}{2^6}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2^5-1}{2-1}+\frac{13^2}{2^4}\\ &= \frac{31}{2}+\frac{169}{16}=\frac{\mathbf{417}}{\mathbf{16}}\end{aligned}$$

(4) 第 n 群までの項数は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=2^n-1$

$2^{10}-1<2003\leqq 2^{11}-1$ より，2003 は第 11 群にある．

また，$2003-(2^{10}-1)=980$ より，2003 は第 11 群の 980 番目

よって，第 2003 項は　$\dfrac{2\cdot 980-1}{2^{11}}=\dfrac{\mathbf{1959}}{\mathbf{2048}}$

16.19 (1) $b_n = \left[\dfrac{2n+2}{3} \right]$ より

$$b_{3m-2} = \left[\frac{2(3m-2)+2}{3} \right] = \left[2m - 1 + \frac{1}{3} \right] = \boldsymbol{2m-1}$$

$$b_{3m-1} = \left[\frac{2(3m-1)+2}{3} \right] = [\ 2m\ ] = \boldsymbol{2m}$$

$$b_{3m} = \left[\frac{2\cdot 3m+2}{3} \right] = \left[2m + \frac{2}{3} \right] = \boldsymbol{2m}$$

$$S_{3m} = \sum_{k=1}^{m}(b_{3k-2} + b_{3k-1} + b_{3k}) = \sum_{k=1}^{m}\{(2k-1) + 2k + 2k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(6k-1) = 6\cdot\frac{1}{2}m(m+1) - m = \boldsymbol{m(3m+2)}$$

(2) $\{a_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列であるから，一般項は

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 2$$

$m \geqq 2$ のとき　$S_{3(m-1)} = (m-1)\{3(m-1)+2\} = (m-1)(3m-1)$

c_{3m-2} は $\{a_n\}$ の第 $S_{3(m-1)} + 1$ 項であるから

$$c_{3m-2} = 3\{(m-1)(3m-1) + 1\} - 2$$

$$= 9m^2 - 12m + 4 = \boldsymbol{(3m-2)^2}$$

c_{3m-1} は $\{a_n\}$ の第 $S_{3(m-1)} + b_{3m-2} + 1$ 項であるから

$$c_{3m-1} = 3\{(m-1)(3m-1) + (2m-1) + 1\} - 2$$

$$= 9m^2 - 6m + 1 = \boldsymbol{(3m-1)^2}$$

c_{3m} は $\{a_n\}$ の第 $S_{3(m-1)} + b_{3m-2} + b_{3m-1} + 1$ 項であるから

$$c_{3m} = 3\{(m-1)(3m-1) + (2m-1) + 2m + 1\} - 2$$

$$= \boldsymbol{9m^2 + 1}$$

上の c_{3m-2}，c_{3m-1}，c_{3m} は $m = 1$ のときも成り立つことに注意して

$$T_{3m} = \sum_{k=1}^{m}(c_{3k-2} + c_{3k-1} + c_{3k}) = \sum_{k=1}^{m}\{(3k-2)^2 + (3k-1)^2 + (9k^2+1)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(27k^2 - 18k + 6) = 27 \times \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) - 18 \times \frac{1}{2}m(m+1) + 6m$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}m(6m^2 + 3m + 1)}$$

(3) (2) の結果から，$31^2 < 1000 < 32^2$ であるから

$$c_{31} = 31^2 = 961, \quad 1000 = 961 + 3 \times 13$$

よって，1000 は　**第 31 群の 14 番目**

(4) (2) の結果から，$\sqrt{c_{3k-2}} - (3k-2) = 0$，$\sqrt{c_{3k-1}} - (3k-1) = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m}(\sqrt{c_k} - k) &= \sum_{k=1}^{m}(\sqrt{c_{3k}} - 3k) \\ &= \sum_{k=1}^{m}(\sqrt{(3k)^2+1} - 3k) < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2} = \frac{m}{2}\end{aligned}$$

16.20

$$\begin{aligned}&1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + (n-1)\cdot n\cdot(n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+2) - (k-2)\}(k-1)k(k+1) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k-1)k(k+1)(k+2) - (k-2)(k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{2}n(1+n) \times \frac{1}{2}(n-1)(2+n) \\ &= (1+2+3+\cdots+n)(2+3+\cdots+n)\end{aligned}$$

16.21 (1) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{3-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$ より

$$a_n = \log_{10}\left(\frac{1}{2} + \frac{3^n - 1}{2}\right) = \log_{10}\frac{3^n}{2} = \boldsymbol{n\log_{10}3 - \log_{10}2}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k\log_{10}3 - \log_{10}2) \\ &= \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}\log_{10}3 - n\log_{10}2}\end{aligned}$$

16.22 (1) ④ は　$\boldsymbol{16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24}$

よって　$\boldsymbol{S(4) = 90}$

(2) ⓝ は

$$\boldsymbol{n^2+(n^2+1)+\cdots+(n^2+n)=(n^2+n+1)+\cdots+(n^2+2n)}$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\sum_{k=1}^{n+1}(n^2-1+k)\\&=(n^2-1)(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\\&=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n^2-1)+(n+2)\}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\\(\text{右辺})&=\sum_{k=1}^{n}(n^2+n+k)\\&=n^2(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

よって，ⓝ は成り立つ．

16.23 (1) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\&=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)\\&=\frac{1}{m+2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)(k+m+1)\\&\qquad-\frac{1}{m+2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{m+2}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)(n+m+1)}\end{aligned}$$

16.24 (1) $$\begin{aligned}&f(k)-f(k-1)\\&=(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)(2k+9)\\&\qquad-(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)\\&=(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)\{(2k+9)-(2k-1)\}\\&=10(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a=10}$

(2) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{m}(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7) = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{m}\{f(k)-f(k-1)\}$$
$$= \frac{1}{10}\{f(m)-f(0)\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{10}\{f(m)-945\}}$$

16.25 (1)

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & S_n = & n & +(n-1)x & +\cdots & +2x^{n-2} & +x^{n-1} & \\ -) & xS_n = & & nx & +\cdots & +3x^{n-2} & +2x^{n-1} & +x^n \\ \hline & (1-x)S_n = & n & -x & -\cdots & -x^{n-2} & -x^{n-1} & -x^n \end{array}$$

$x \neq 1$ であるから

$$(1-x)S_n = n - x(1+x+\cdots+x^{n-1}) = \boldsymbol{n - \frac{x(1-x^n)}{1-x}}$$

(2) (1) の結果に $x = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$\frac{1}{2}S_n = n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad S_n = 2n - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって $\quad S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{2k - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \boldsymbol{n^2 - n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

16.26 (1) $S_n = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ より $\quad S_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$

$n = 1$ のとき $\quad a_1 = S_1 = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)$$
$$= n(n+1)(n+2)\{(n+3)-(n-1)\}$$
$$= 4n(n+1)(n+2)$$

上式は，$n = 1$ のときも成り立つ．

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\quad a_n = 4n(n+1)(n+2)$

(2) (1) の結果から　$b_k = \dfrac{1}{a_k} = \dfrac{1}{4k(k+1)(k+2)}$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\} \\ &= \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(n+3)}{16(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

16.27　(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{a}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \boldsymbol{\sqrt{a+1}-1}$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geqq 1$ に等しいとき，(1) の結果から

$$\sqrt{a+1} - 1 = n \quad \text{ゆえに} \quad a = n(n+2)$$

よって，求める数列の一般項は　$\boldsymbol{a_n = n(n+2)}$

(3) $n = 2m-1$ のとき (m は整数)

$$\begin{aligned} a_n &= (2m-1)\{(2m-1)+2\} = (2m-1)(2m+1) \\ &= 4m^2 - 1 = 4(m^2-1) + 3 \end{aligned}$$

$n = 2m$ のとき (m は整数)

$$a_n = 2m(2m+2) = 4m(m+1)$$

よって，a_n を 4 で割った余りは 0 か 3 である．

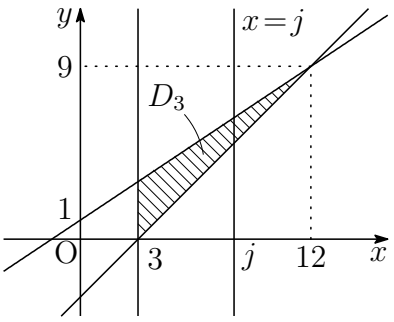
(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}} \end{aligned}$$

16.28 (1) $n=3$ のとき，3 直線

$$y=\frac{2}{3}x+1,\quad y=x-3,\quad x=3$$

で囲まれた領域 D_3 で，直線 $x=j$ 上の格子点の個数は $(3\leqq j\leqq 12)$



$$\left[\frac{2}{3}j+1\right]-(j-3)+1=\left[\frac{15-j}{3}\right]$$

よって，求める個数は ($[x]$ は x を超えない最大の整数を表す)

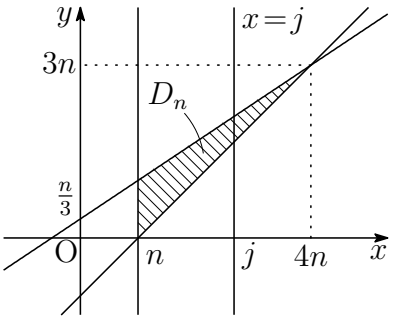
$$\begin{aligned}&\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]+\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{12}{3}\right]\\&=\left(\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]\right)+\left(\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]\right)\\&\qquad+\left(\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]\right)+\left[\frac{12}{3}\right]\\&=3+6+9+4=\mathbf{22}\end{aligned}$$

補足 次頁の定理を参照.

(2) 3 直線

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{n}{3},\quad y=x-n,\quad x=n$$

で囲まれた領域 D_n で，直線 $x=j$ 上の格子点の個数を a_j とすると $(n\leqq j\leqq 4n)$



$$\begin{aligned}a_j&=\left[\frac{2}{3}j+\frac{n}{3}\right]-(j-n)+1\\&=\left[\frac{4n-j}{3}\right]+1\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

求める個数は $\quad a_{n+3k}=\left[\dfrac{4n-(n+3k)}{3}\right]+1=\boldsymbol{n-k+1}$

(3) $(*)$ より　$a_{n+3k+1} = \left[\ \dfrac{4n-(n+3k+1)}{3}\ \right] + 1 = n-k$

$a_{n+3k+2} = \left[\ \dfrac{4n-(n+3k+2)}{3}\ \right] + 1 = n-k$

上の 2 式および (2) の結果により

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{j=n}^{4n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{n+3k} + a_{n+3k+1} + a_{n+3k+2}) + a_{4n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\{(n-k+1)+(n-k)+(n-k)\} + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)+k+k\} + 1 = \sum_{k=1}^{n}(3k+1) + 1 \\ &= 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)} \end{aligned}$$

別解 $(*)$ により

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{j=n}^{4n} a_j = \sum_{j=n}^{4n}\left(\left[\ \frac{4n-j}{3}\ \right] + 1\right) = \sum_{j=n}^{4n}\left[\ \frac{4n-j}{3}\ \right] + \sum_{j=n}^{4n} \\ &= \left(\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{3}{3}\right]\right) + \left(\left[\frac{4}{3}\right] + \left[\frac{5}{3}\right] + \left[\frac{6}{3}\right]\right) \\ &\qquad + \cdots + \left(\left[\frac{3n-2}{3}\right] + \left[\frac{3n-1}{3}\right] + \left[\frac{3n}{3}\right]\right) + (3n+1) \\ &= 1 + 4 + \cdots + (3n-2) + (3n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)\{1+(3n+1)\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)} \end{aligned}$$

定理 a，n を整数とすると，次式が成立する．

$$\text{(A)} \quad \left[\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}}\right] + \left[\frac{\boldsymbol{a+1}}{\boldsymbol{n}}\right] + \cdots + \left[\frac{\boldsymbol{a+n-1}}{\boldsymbol{n}}\right] = \boldsymbol{a}$$

証明 連続する n 個の整数 $a,\ a+1, \cdots, a+n-1$ 中で n の倍数を $a+q$ とする．

$q=0$ のとき　(A) のすべての項が $\dfrac{a}{n}$ であるから，(A) の値は　$\dfrac{a}{n}\cdot n = a$

$q \neq 0$ のとき　$\left[\dfrac{a}{n}\right] = \left[\dfrac{a+1}{n}\right] = \cdots = \left[\dfrac{a+q-1}{n}\right] = \dfrac{a+q}{n} - 1,$

$\left[\dfrac{a+q}{n}\right] = \left[\dfrac{a+q+1}{n}\right] = \cdots = \left[\dfrac{a+n-1}{n}\right] = \dfrac{a+q}{n}$

(A) の値は　$\left(\dfrac{a+q}{n} - 1\right)q + \dfrac{a+q}{n}(n-q) = a$　**証終**

16.29 (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}&\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\\=&\cos k\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}-\left(\cos k\theta\cos\frac{\theta}{2}-\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\\=&2\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

(2) $\sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0$　すなわち　$\theta\neq 2m\pi$ のとき (m は整数)，(1) の結果から

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta&=\frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}\\&=\frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\left\{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}\end{aligned}$$

$\theta=2m\pi$ のとき (m は整数)　$\sin k\theta=\sin 2km\pi=0$

ゆえに　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\boldsymbol{0}$

16.30 (1) $\boldsymbol{m^2-1}$ (個)

(2) $x=k$ 上の格子点の個数は，(1) の結果から，k^2-1 (個) であるから

$$\begin{aligned}n(A)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n-1)(2n+5)}\end{aligned}$$

$A\cap B=\phi$ であるから，$n(A)+n(B)=n\cdot n^2$ より

$$n(B)=n^3-\frac{1}{6}(n-1)(2n+5)=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)}$$

(3)　$B=\{(x,\ y)\,|\,1\leqq x\leqq n,\ 1\leqq y\leqq n^2,\ x^2\leqq y\}$,

$C=\{(x,\ y)\,|\,1\leqq x\leqq n^2,\ 1\leqq y\leqq n,\ y\leqq\sqrt{x}\}$

$=\{(x,\ y)\,|\,1\leqq y\leqq n,\ 1\leqq x\leqq n^2,\ y^2\leqq x\}$

よって　$n(C)=n(B)=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+5)}$

16.31 (1) $2k = k(k+1) - (k-1)k$ より

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1) - (k-1)k\}$$
$$= n(n+1)$$

よって $\quad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)}$

(2) $3k^2 + 3k = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)$ より

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$
$$= n(n+1)(n+2)$$

これに (1) の結果を代入すると

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)(n+2)$$

よって $\quad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

(3) $4k^3 = k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2$ より

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\{k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2\}$$
$$= n^2(n+1)^2$$

よって $\quad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$

16.32 (1) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$, $a_5 = 15$, $a_6 = 21$,
$a_7 = 28$, $a_8 = 36$, $a_9 = 45$, $a_{10} = 55$, $a_{11} = 66$, $a_{12} = 78$

よって $\quad \boldsymbol{b_1 = 6,\ b_2 = 36,\ b_3 = 66,\ b_4 = 78}$

(2) $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ であるから

$$a_{n+12} - a_n = \frac{1}{2}(n+12)(n+13) - \frac{1}{2}n(n+1) = 6(2n+13)$$

$2n+13$ は整数であるから，$a_{n+12} - a_n$ は 6 の倍数.

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} b_{4k-3} &= a_{3+12(k-1)} = a_{12k-9} = \frac{1}{2}(12k-9)(12k-8) \\ &= \boldsymbol{6(4k-3)(3k-2)} \\ b_{4k-2} &= a_{8+12(k-1)} = a_{12k-4} = \frac{1}{2}(12k-4)(12k-3) \\ &= \boldsymbol{6(3k-1)(4k-1)} \\ b_{4k-1} &= a_{11+12(k-1)} = a_{12k-1} = \frac{1}{2}(12k-1)\cdot 12k \\ &= \boldsymbol{6k(12k-1)} \\ b_{4k} &= a_{12+12(k-1)} = a_{12k} = \frac{1}{2}\cdot 12k(12k+1) \\ &= \boldsymbol{6k(12k+1)} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から　$b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k} = 6(48k^2-24k+7)$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4n} b_k &= \sum_{k=1}^{n}(b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}) \\ &= 6\sum_{k=1}^{n}(48k^2-24k+7) \\ &= 6\left\{48\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 24\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 7n\right\} \\ &= \boldsymbol{6n(16n^2+12n+3)} \end{aligned}$$

16.33 (1)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+a) = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2+ak) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}an(n-1) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1+3a) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

$(*)$ より　$S = n\times\dfrac{(n-1)(2n-1+3a)}{6}$　$\cdots$①

S は整数であるから，6 と n が互いに素であるとき

$$(n-1)(2n-1+3a)$$

は 6 で割り切れる．よって，① により，S は n で割り切れる．

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}n(n-1)\{2(n-2)+3(a+1)\} \\ &= n(n-1)\left(\frac{n-2}{3}+\frac{a+1}{2}\right) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

条件から，$n-2$ は 6 で割り切れ，$a+1$ は偶数であるから

$$\frac{n-2}{3}+\frac{a+1}{2}$$

は整数である．よって，② により，S は n で割り切れる．

(3) $(*)$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}n\{(n-3)+2\}\{2(n-3)+3a+5\} \\ &= \frac{1}{6}n\{2(n-3)^2+3(a+3)(n-3)+6(a+1)+4\} \\ &= n\left\{\frac{(n-3)^2}{3}+\frac{(a+3)(n-3)}{2}+a+1\right\}+\frac{2}{3}n \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

条件から，$n-3$ は 6 で割り切れ，a は自然数であるから

$$\frac{(n-3)^2}{3}+\frac{(a+3)(n-3)}{2}+a+1$$

は整数である．このことと S が整数であることから，$\dfrac{2}{3}n$ は整数である．

さらに，$0 \leqq \dfrac{2}{3}n < n$，すなわち，$0 \leqq \dfrac{2}{3}n \leqq n-1$ である．

よって，③ により，S を n で割った余りは　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}n}$

16.34 (1) S は，初項 1，公比 $r \neq 1$，項数 n の等比数列の和であるから

$$\boldsymbol{S = \frac{1-r^n}{1-r}}$$

(2) $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ より

$$\begin{aligned} T &= 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1} \\ rT &= \quad r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned} (1-r)T &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n \\ &= S - nr^n \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{T = \dfrac{S-nr^n}{1-r}}$

(3) $U=\sum_{k=1}^{n}k^2r^{k-1}$ より

$$\begin{aligned} U&=1+2^2r+3^2r^2+\cdots\qquad\quad+n^2r^{n-1}\\ rU&=\qquad r+2^2r^2+\cdots+(n-1)^2r^{n-1}+nr^n \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned}(1-r)U&=1+3r+5r^2+\cdots+(2n-1)r^{n-1}-n^2r^n\\ &=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)r^{k-1}-n^2r^n\\ &=2\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}-n^2r^n\\ &=2T-S-n^2r^n\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{U=\dfrac{2T-S-n^2r^n}{1-r}}$

16.35　(1) $n=10q+r$ $(0\leqq r<10)$ をみたす整数 q，r をとると

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{10}\right]=\sum_{j=1}^{q-1}10j+q(r+1)=5q(q-1)+q(r+1)=q(5q+r-4)$$

このとき，$q(5q+r-4)=238$，$q<5q+r-4$ であるから

$$238=1\times238=2\times119=7\times34=14\times17$$

したがって　$q=7$，$r=3$　　よって　$\boldsymbol{n=73}$

(2)　(i) $\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}=m$ とすると，$\sqrt{n+1}=m-\dfrac{1}{2}$ より

$$n+1=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\quad\text{すなわち}\quad n=m(m-1)-\frac{3}{4}$$

$\left[\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす最小の自然数 n は　$n=k(k-1)$

ゆえに，$\left[\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす自然数 n は

$$k(k-1)\leqq n<k(k+1)$$

(ii) $\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}=m$ とすると，$\sqrt{n}=m-\dfrac{1}{2}$ より

$$n=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{すなわち} \quad n=m(m-1)+\frac{1}{4}$$

$\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす最小の自然数 n は　$n=k(k-1)+1$

ゆえに，$\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]=k$ を満たす自然数 n は

$$k(k-1)+1 \leqq n < k(k+1)+1$$

(i)，(ii) より k を自然数として

$$\left[\sqrt{\boldsymbol{n+1}}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right]-\left[\sqrt{\boldsymbol{n}}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right]=\begin{cases}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{(n\neq k(k+1))}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{(n=k(k+1))}\end{cases}$$

16.36　(1)　$k(k+1)-(k-1)k=2k$ であるから

$$2\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-(k-1)k\} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2)　$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}=(n+1)^3-1^3$$

これに (1) の結果および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}=n$ を代入すると

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{1}{2}n(n+1)+n=n^3+3n^2+3n$$

よって　$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

補足　証明法に制約がなければ，次式を利用するとよい．

$$k(k+1)(2k+1)-k(k-1)(2k-1)=6k^2$$

(3) $k^2(k+1)^2-k^2(k-1)^2=4k^3$ であるから

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{n}\{k^2(k+1)^2-k^2(k-1)^2\}\quad\text{ゆえに}\quad\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

補足 S_n は分かっているので，$S_k-S_{k-1}=a_k$ を利用する．

(4)
$$\begin{aligned}
f_1(k)&=k&&=k\\
f_2(k)&=k(k+1)&&=k^2+k\\
f_3(k)&=k(k+1)(k+2)&&=k^3+3k^2+2k\\
f_4(k)&=k(k+1)(k+2)(k+3)&&=k^4+6k^3+11k^2+6k
\end{aligned}$$

とおくと，$k^4=f_4(k)-6f_3(k)+7f_2(k)-f_1(k)$ である．ここで

$$\sum_{k=1}^{n}f_1(k)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}f_2(k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}f_3(k)&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\\
&=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}f_4(k)&=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}\\
&=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^4&=\sum_{k=1}^{n}\{f_4(k)-6f_3(k)+7f_2(k)-f_1(k)\}\\
&=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\\
&\quad-6\times\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\\
&\quad+7\times\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\
&\quad-\frac{1}{2}n(n+1)\\
&=\frac{1}{30}n(n+1)\{6(n+2)(n+3)(n+4)-45(n+2)(n+3)+70(n+2)-15\}\\
&=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}
\end{aligned}$$

解説 $(k+1)^5-k^5$ の展開式を利用するのが一般的であるが，別解を紹介した．

補足 連続する自然数のべき乗和 (分大 [医]2014) 8

16.37 (1) $k \geqq 1$ のとき $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ すなわち $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < S_n$

よって $\log(n+1) < S_n \quad \cdots ①$

$k \geqq 2$ のとき $\displaystyle\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$

ゆえに $\displaystyle 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ すなわち $\displaystyle S_n < 1+\int_1^n \frac{dx}{x}$

よって $S_n < 1+\log n \quad \cdots ②$

①，② より $\log(n+1) < S_n < 1+\log n$

(2) $$\begin{aligned} a_k\Delta b_k + b_{k+1}\Delta a_k &= a_k(b_{k+1}-b_k)+b_{k+1}(a_{k+1}-a_k) \\ &= a_{k+1}b_{k+1}-a_kb_k \end{aligned}$$

ゆえに $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(a_k\Delta b_k + b_{k+1}\Delta a_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}b_{k+1}-a_kb_k) \\ &= a_nb_n - a_1b_1 \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k\Delta b_k = a_nb_n - a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}\Delta a_k \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $a_k = S_k$，$\Delta b_k = k$ を適用すると，

$\Delta a_k = \dfrac{1}{k+1}$，$b_k = \dfrac{1}{2}k(k-1)$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k &= S_n\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - S_1\cdot 0 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k(k+1)\cdot\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)S_n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)S_n - \frac{1}{4}n(n-1) \\ &= \left(S_n-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{P(n) = \dfrac{1}{2}n(n-1)}$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = S_n - \frac{1}{2}$

ゆえに　$\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n = S_n - \log n - \frac{1}{2}$　$\cdots$③

(1) の結果から　$\log(n+1) - \log n - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2} < \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$　$\cdots$④

③，④ より　$-\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n < \frac{1}{2}$

よって　$\left|\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n\right| < \frac{1}{2}$

16.38　(1) 正の奇数 b を，3 以上の素数 p_k と自然数 i_k を用いて

$$b = {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n} \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(b) &= (1 + p_1 + {p_1}^2 + \cdots + {p_1}^{i_1})(1 + p_2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_2}^{i_2}) \\ &\qquad \cdots (1 + p_n + {p_n}^2 + \cdots + {p_n}^{i_n}) \\ &= \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \end{aligned}$$

$a = 2^m b$ より，$a = 2^m {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n}$ であるから，上の結果を利用して

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \\ &= (2^{m+1} - 1) f(b) \end{aligned}$$

(2) $p \geqq 2$ より，a は少なくとも pq，q の 2 個の約数にもつから

$$f(a) \geqq pq + q = (p+1)q$$

等号が成り立つのは，a の約数が pq，q の 2 個，すなわち，pq は素数，$q = 1$ のときである．よって，等号は p が素数，$q = 1$ のときに限り成り立つ．

(3) $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ を (1) の結果に適用すると

$$f(a) = (2^{m+1} - 1) f(r), \quad f(b) = (2^{n+1} - 1) f(s)$$

$f(a)=2b$，$f(b)=2a$ をみたすとき

$$(2^{m+1}-1)f(r)=2\cdot 2^n s,\quad (2^{n+1}-1)f(s)=2\cdot 2^m r$$

ゆえに　$(2^{m+1}-1)f(r)=2^{n+1}s,\quad (2^{n+1}-1)f(s)=2^{m+1}r\quad\cdots①$

① において $2^{m+1}-1$ および $2^{n+1}-1$ は 2 と互いに素であるから，

$$s=(2^{m+1}-1)s',\quad r=(2^{n+1}-1)r'\quad (s',r'\text{は自然数})\quad\cdots②$$

とおける．② を ① に代入すると

$$f(r)=2^{n+1}s'\cdots③,\quad f(s)=2^{m+1}r'\cdots④$$

② を (2) の結果に適用すると

$$f(s)\geqq\{(2^{m+1}-1)+1\}s'=2^{m+1}s'\quad\cdots⑤$$
$$f(r)\geqq\{(2^{n+1}-1)+1\}r'=2^{n+1}r'\quad\cdots⑥$$

③，⑥ より $s'\geqq r'$ となり，④，⑤ より $r'\geqq s'$ となるから　$r'=s'$

このとき，⑤，⑥ において等号が成り立つ．

ゆえに，(2) の結論から，$2^{m+1}-1$，$2^{n+1}-1$ は素数，$r'=s'=1$ である．

よって，② より，r，s は素数であり，$r=2^{n+1}-1$，$s=2^{m+1}-1$ となる．

16.39　(1)　$b_1=15$，$b_{n+1}=b_n+4(2n+3)\quad(n\geqq 1)$ であるから

$n\geqq 2$ のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}4(2k+3)$

$$=15+8\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+12(n-1)$$

$$=4n^2+8n+3=(2n+1)(2n+3)$$

上式は，$n=1$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{b_n=(2n+1)(2n+3),\ a_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}}$$

(2)　(1) の結果から

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{3(2n+3)}}$$

16.40　(1)　$a_{n+1}+b=2(a_n+b)$ より　$a_{n+1}=2a_n+b$

これが $a_{n+1}=2a_n+2$ に一致するから　$\boldsymbol{b=2}$

(2) (1) の結果から　$a_{n+1}+2=2(a_n+2)$

ゆえに　$a_n+2=(a_1+2)\cdot 2^{n-1}=(2+2)\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

よって　　$\boldsymbol{a_n=2^{n+1}-2}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{a_{2n}}{a_n}=\frac{2^{2n+1}-2}{2^{n+1}-2}=\frac{2(2^{2n}-1)}{2(2^n-1)}=\frac{(2^n+1)(2^n-1)}{2^n-1}=2^n+1$$

$\dfrac{a_{2n}}{a_n}\geqq 10^{25}+1$ より　$2^n+1\geqq 10^{25}+1$　ゆえに　$2^n\geqq 10^{25}$

両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}2\geqq 25$　ゆえに　$n\geqq\dfrac{25}{\log_{10}2}$

$\dfrac{25}{\log_{10}2}=\dfrac{25}{0.3010}=83.05\cdots$ より，上式をみたす最小の n は　$\boldsymbol{n=84}$

16.41　(1) $a_2=\dfrac{1}{3}a_1+1=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{5}{4}\right)+1=\dfrac{7}{12}$

$b_1=a_2-a_1=\dfrac{7}{12}-\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{11}{6}}$

(2) 与えらえた漸化式から

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+n,\quad a_{n+2}=\frac{1}{3}a_{n+1}+n+1$$

上の第 2 式から第 1 式の辺々を引くと

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)+1\quad\text{すなわち}\quad b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+1$$

したがって　　$b_{n+1}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{3}\left(b_n-\dfrac{3}{2}\right)$

$$b_n-\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(b_1-\frac{3}{2}\right)$$

よって　　$\boldsymbol{b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{2}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= -\frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \right\} \\ &= -\frac{5}{4} + \frac{\dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \dfrac{1}{3}} + \frac{3}{2}(n-1) \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{9}{4}} \end{aligned}$$

16.42 (1) $a_n = 3a_{n-1} - 2^{n-1}, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2^n$

上の第 1 式を第 2 式に代入すると

$$a_{n+1} = 3(3a_{n-1} - 2^{n-1}) - 2^n = \boldsymbol{9a_{n-1} - 5 \cdot 2^{n-1}}$$

(2) (1) の結果から $\quad a_{n+1} + a_{n-1} = 5(2a_{n-1} - 2^{n-1})$

$a_{n+1} + a_{n-1}$ は 5 の倍数であるから，a_{n-1} が 5 の倍数のとき，a_{n+1} は 5 の倍数である．$a_1 = 5$ であるから，n が奇数のとき，a_n は 5 で割り切れる．

(3) 与えられた漸化式から

$$a_n - 2^n = (3a_{n-1} - 2^{n-1}) - 2^n \quad \text{ゆえに} \quad a_n - 2^n = 3(a_{n-1} - 2^{n-1})$$

したがって $\quad b_n = 3b_{n-1}$

また $\quad b_1 = a_1 - 2^1 = 5 - 2 = 3$

$\{b_n\}$ は，初項 3，公比 3 の等比数列であるから $\quad b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = \boldsymbol{3^n}$

(4) (3) の結果から，$a_k = 2^k + 3^k$ であるから

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n}(2^k + 3^k) &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(3^{n+1} + 2^{n+2} - 7)} \end{aligned}$$

16.43 (1) $b_n = a_n - \dfrac{6n-7}{4}$ より $\quad a_n = b_n + \dfrac{6n-7}{4}, \quad a_{n+1} = b_{n+1} + \dfrac{6n-1}{4}$

よって　$a_{n+1}+a_n=\left(b_{n+1}+\dfrac{6n-1}{4}\right)+\left(b_n+\dfrac{6n-7}{4}\right)$

$=b_{n+1}+b_n+3n-2$

$a_{n+1}+a_n=3n-2$ であるから　$\boldsymbol{b_{n+1}+b_n=0}$

(2) (1) の結果より　$b_{n+1}=-b_n$ $(n \geqq 1)$

よって　$b_n=b_1\cdot(-1)^{n-1}$

また　$b_1=a_1-\dfrac{6-7}{4}=-2+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{7}{4}$

ゆえに　$b_n=-\dfrac{7}{4}\cdot(-1)^{n-1}$

したがって　$a_n=b_n+\dfrac{6n-7}{4}=\boldsymbol{-\dfrac{7}{4}\cdot(-1)^{n-1}+\dfrac{6n-7}{4}}$

(3) (2) の結果より

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{50}a_n&=\sum_{n=1}^{50}\left\{-\frac{7}{4}\cdot(-1)^{n-1}+\frac{6n-7}{4}\right\}\\&=-\frac{7}{4}\sum_{n=1}^{50}(-1)^{n-1}+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{50}n-\sum_{n=1}^{50}\frac{7}{4}\\&=-\frac{7}{4}\cdot\frac{1-(-1)^{50}}{1-(-1)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{50(50+1)}{2}-\frac{7}{4}\cdot50\\&=0+\frac{3825}{2}-\frac{175}{2}=\boldsymbol{1825}\end{aligned}$$

16.44　(1)　$a_n=b_n-n$ であるから，これを数列 $\{a_n\}$ の漸化式に代入すると

$$\begin{aligned}b_n-n&=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-k)\\b_n&=n+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}b_k-\sum_{k=1}^{n-1}k\\&=n+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}b_k-\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

したがって　$b_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k$　$\cdots$①

(2)　① により　$b_{n+1}=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$　$\cdots$②

② − ① から　$b_{n+1}-b_n=b_n$　ゆえに　$b_{n+1}=2b_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1 = 1 + a_1 = 1 + 0 = 1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　　$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

(3) $a_n = b_n - n$ により，(2) の結果から　　$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - n}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}(2^{k-1} - k) \\ &= \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \boldsymbol{2^n - 1 - \frac{1}{2}n(n+1)}\end{aligned}$$

16.45 (1) $(*)\quad 2(a_n - a_{n+1}) = (n+2)a_n a_{n+1}$

$(*)$ に $n = 1,\ 2$ を代入すると

$$2(a_1 - a_2) = 3a_1 a_2, \quad 2(a_2 - a_3) = 4a_2 a_3$$

$a_1 = \dfrac{2}{3}$ を上の第 1 式に代入して　$\boldsymbol{a_2 = \dfrac{1}{3}}$

これを第 2 式に代入すると

$$2\left(\frac{1}{3} - a_3\right) = 4 \cdot \frac{1}{3}a_3 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a_3 = \frac{1}{5}}$$

(2) (1) の結果に注意して，$k \geqq 3$ に対して，$a_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots, k)$，$a_{k+1} = 0$ と仮定し，$(*)$ に $n = k$ を代入すると，$a_k = 0$ となり，矛盾．よって　$a_n \neq 0$

(3) $(*)$ の両辺を $2a_n a_{n+1}$ で割ると

$$\boldsymbol{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{n}{2} + 1}$$

(4) (3) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{4}n(n-1) + n - 1$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから，$a_1=\dfrac{2}{3}$ を代入して整理すると

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)$$

よって　　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{4}{(n+1)(n+2)}}$

16.46　(1)　$\{b_n\}$ は初項 6，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n=6\cdot3^{n-1}=2\cdot3^n$$

$b_n=a_{n+1}-3a_n$ に上の結果を代入すると

$$2\cdot3^n=a_{n+1}-3a_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{2}{3}$$

$c_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ であるから　　$c_{n+1}-c_n=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2)　$c_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{3}{3}=1$，および (1) の結果から，$\{c_n\}$ は初項 1，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列であるから

$$c_n=1+\frac{2}{3}(n-1)=\frac{1}{3}(2n+1)$$

$c_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より，$a_n=3^nc_n$ であるから

$$a_n=3^n\cdot\frac{1}{3}(2n+1)=\boldsymbol{(2n+1)\cdot3^{n-1}}$$

(3)　$b_n=6\cdot3^{n-1}$ および $b_n=a_{n+1}-3a_n$ より

$$\sum_{k=1}^{n}6\cdot3^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-3a_k)$$

$$3(3^n-1)=\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}-3\sum_{k=1}^{n}a_k \quad \cdots(*)$$

このとき，条件および (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}=S_n+a_{n+1}-a_1$$

$$=S_n+(2n+3)\cdot3^n-3$$

上の 2 式を $(*)$ に代入すると

$$3(3^n-1)=\{S_n+(2n+3)\cdot 3^n-3\}-3S_n$$

これを S_n について解くと　　$\boldsymbol{S_n=n\cdot 3^n}$

16.47　(1)　$a_1=0$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{n\{1+(-1)^{n+1}\}}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$　$\cdots(*)$

$(*)$ に $n=1,2,3,4$ を代入すると

$$a_2-a_1=1,\quad a_3-a_2=0,\quad a_4-a_3=3,\quad a_5-a_4=0$$

$a_1=0$ であるから　　$\boldsymbol{a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=4,\ a_5=4}$

(2)　$(*)$ の n をそれぞれ，$2n$，$2n+1$ に置き換えると

$$a_{2n+1}-a_{2n}=\frac{2n\{1+(-1)^{2n+1}\}}{2}=0$$

$$a_{2n+2}-a_{2n+1}=\frac{(2n+1)\{1+(-1)^{2n+2}\}}{2}=2n+1$$

したがって　　$\begin{cases} b_{n+1}-c_n=0 & \cdots① \\ c_{n+1}-b_{n+1}=2n+1 & \cdots② \end{cases}$

上の 2 式から b_{n+1} を消去すると　　$c_{n+1}-c_n=2n+1$

$n\geqq 2$ のとき　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

したがって　　$c_n-c_1=2\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1)+n-1=n^2-1$

$c_1=a_2=1$ であるから　　$c_n=n^2$

上式は，$n=1$ のときも成り立つ．

① から，$n\geqq 2$ のとき　　$b_n=c_{n-1}=(n-1)^2$

$b_1=a_1=0$ であるから，上式は，$n=1$ のときも成り立つ．

よって，求める一般項は　　$\boldsymbol{b_n=(n-1)^2,\ c_n=n^2}$

(3)　(2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{50}(-1)^n a_n&=\sum_{k=1}^{25}\{(-1)^{2k-1}a_{2k-1}+(-1)^{2k}a_{2k}\}\\&=\sum_{k=1}^{25}(-b_k+c_k)=\sum_{k=1}^{25}\{-(k-1)^2+k^2\}\\&=\sum_{k=1}^{25}(2k-1)=25^2=\mathbf{625}\end{aligned}$$

16.48 (1) $a_{n+1} = 1.05 \times a_n - 10$ より　$a_{n+1} - 200 = 1.05(a_n - 200)$

したがって，数列 $\{a_n - 200\}$ は，初項が $a_1 - 200 = -100$，公比が 1.05 の等比数列であるから

$$a_n - 200 = -100 \cdot 1.05^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a_n = 200 - 100 \cdot 1.05^{n-1}}$$

(2) $a_n \leqq 0$ より　$200 \leqq 100 \cdot 1.05^{n-1}$　したがって　$1.05^{n-1} \geqq 2$

両辺の常用対数をとると　$(n-1)\log_{10} 1.05 \geqq \log_{10} 2$

ここで　$\log_{10} 1.05 = \log_{10} \dfrac{21}{20}$

$= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 - (\log_{10} 2 + 1)$

$= 0.4771 + 0.8451 - 0.3010 - 1$

$= 0.0212$

したがって　$n \geqq \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.05} + 1 = 15.1\cdots$

よって，求める n は　$\boldsymbol{16}$

16.49 (1) 与えられた関係式に $n = 1$ を代入すると

$$2a_1 = 3 - a_1 - 6 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a_1 = -1}$$

(2) 与えられた関係式から

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3^n - a_n - 6, \quad 2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3^{n+1} - a_{n+1} - 6$$

上の第 2 式から第 1 式の辺々を引くと $(n \geqq 1)$

$$2a_{n+1} = 2 \cdot 3^n - a_{n+1} + a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2 \cdot 3^{n-1}$$

(3) (2) の結果の式の両辺に 3^{n+1} を掛けると

$$3^{n+1}a_{n+1} = 3^n a_n + 2 \cdot 3^{2n} \quad \text{ゆえに} \quad 3^{n+1}a_{n+1} - 3^n a_n = 18 \cdot 9^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(3^{k+1}a_{k+1} - 3^k a_k) = 18\sum_{k=1}^{n-1} 9^{n-1}$

$$3^n a_n - 3a_1 = 18 \times \frac{9^{n-1} - 1}{9 - 1}$$

$a_1 = -1$ を代入して　$3^n a_n = \dfrac{9^n}{4} - \dfrac{21}{4}$　ゆえに　$a_n = \dfrac{3^n}{4} - \dfrac{7}{4 \cdot 3^{n-1}}$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{3^n}{4} - \dfrac{7}{4 \cdot 3^{n-1}}}$

16.50 (1) 与えられた漸化式から

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=a_1+\frac{3}{4},\quad a_3=a_2+\frac{5}{8},\quad a_4=a_3+\frac{7}{16}$$

上式から　$a_4=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}=\boldsymbol{\frac{37}{16}}$

(2) $a_{n+1}=a_n+\frac{2n+1}{2^{n+1}}$ より

$$2^{n+1}a_{n+1}-2\cdot 2^n a_n=2n+1\quad\cdots①$$

ここで，次式をみたす定数 a，b を求める．

$$f(n)=an+b,\quad f(n+1)-2f(n)=2n+1\quad\cdots②$$

すなわち　$a(n+1)+b-2(an+b)=2n+1$

整理すると　$-an+a-b=2n+1$

係数を比較すると　$-a=2$，$a-b=1$

これを解いて　$a=-2$，$b=-3$　ゆえに　$f(n)=-2n-3$

①，② から　$2^{n+1}a_{n+1}-f(n+1)=2\{2^n a_n-f(n)\}$

$\{2^n a_n-f(n)\}$ は，初項 $2a_1-f(1)=6$，公比 2 の等比数列であるから

$$2^n a_n-f(n)=6\cdot 2^{n-1}\quad\text{よって}\quad a_n=3+\frac{f(n)}{2^n}=\boldsymbol{3-\frac{2n+3}{2^n}}$$

16.51 (1) $a_1>0$，${a_1}^3={a_1}^2$ を解いて　$\boldsymbol{a_1=1}$

$a_2>0$，$1^3+{a_2}^3=(1+a_2)^2$ より

$$a_2(a_2+1)(a_2-2)=0\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{a_2=2}$$

$a_3>0$，$1^3+2^3+{a_3}^3=(1+2+a_3)^2$ より

$$a_3(a_3+2)(a_3-3)=0\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{a_3=3}$$

(2) (イ) より

$$\sum_{k=1}^{n+1}{a_k}^3=\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)^2,\quad\sum_{k=1}^{n}{a_k}^3=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned}{a_{n+1}}^3&=\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\\&=\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\\&=a_{n+1}\left(a_{n+1}+2\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\end{aligned}$$

$a_{n+1} \neq 0$ であるから　　${a_{n+1}}^2 = a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k$

(3) (2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$${a_{n+1}}^2 = a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad {a_n}^2 = a_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$${a_{n+1}}^2 - {a_n}^2 = a_{n+1} - a_n + 2a_n$$

整理すると　　$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 1) = 0$

$a_{n+1} + a_n > 0$ であるから　　$a_{n+1} = a_n + 1$

数列 $\{a_n\}$ は初項が 1 で公差 1 の等差数列であるから

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 1 = \boldsymbol{n}$$

16.52　(1) 与えられた漸化式より

$$a_2 = \frac{2a_1}{1 - {a_1}^2} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{1 - {a_2}^2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = -\sqrt{3}$$

$$a_4 = \frac{2a_3}{1 - {a_3}^2} = \frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1 - \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

したがって，a_2 以降は，交互に $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ の繰り返しであるから

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_n = (-1)^n\sqrt{3} \quad (n \geqq 2)}$$

(2)　　$\tan\dfrac{\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \boldsymbol{2 - \sqrt{3}}$

(3) $a_n = \tan\theta_n$ とおくと　$a_{n+1} = \dfrac{2\tan\theta_n}{1 - \tan^2\theta_n} = \tan 2\theta_n$

$a_1 = \tan\dfrac{\pi}{20}$ より

$$a_2 = \tan\frac{\pi}{10}, \quad a_3 = \tan\frac{\pi}{5}, \quad a_4 = \tan\frac{2}{5}\pi, \quad a_5 = \tan\frac{4}{5}\pi,$$

$$a_6 = \tan\frac{8}{5}\pi = \tan\frac{3}{5}\pi,\quad a_7 = \tan\frac{6}{5}\pi = \tan\frac{\pi}{5}$$

ゆえに，a_3 以降は，$\tan\dfrac{\pi}{5}$，$\tan\dfrac{2}{5}\pi$，$\tan\dfrac{4}{5}\pi$，$\tan\dfrac{3}{5}\pi$ の繰り返しである．

よって，$a_{n+k} = a_n$ $(n = 3, 4, 5\cdots)$ をみたす最小の自然数 k は　**4**

16.53　(1) $n-1$ 本の直線で分割された領域に n 本目の直線を引くことにより，新たな交点が $n-1$ 個でき，分割される領域の個数が n 個増える．したがって

$$L_1 = 2,\quad \boldsymbol{L_n = L_{n-1} + n}\ \ \boldsymbol{(n \geqq 2)}$$

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(L_{k+1} - L_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

ゆえに　$L_n - L_1 = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n - 1$

すなわち　$L_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

$L_1 = 2$ であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{L_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)}$

(2) $H_1 = 2$ で，2 本目の 1 回折れ線を引くことで，4 個の交点ができ，分割される領域が 5 個増えるから　$H_2 = H_1 + 5 = 7$

さらに，3 本目の 1 回折れ線を引くことで，4·2 個の交点ができ，分割される領域が 4·2 + 1 個増えるから　$H_3 = H_2 + 4\cdot 2 + 1 = \mathbf{16}$

(3) n 本の 1 回折れ線で分割された領域に $n+1$ 本目の 1 回折れ線を引くことで，$4n$ 個の交点ができ，分割される領域が $4n+1$ 個増えるから

$$H_1 = 2,\quad H_{n+1} = H_n + 4n + 1$$

が成り立つ．

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(H_{k+1} - H_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)$

ゆえに　$H_n - H_1 = 2n^2 - n - 1$

すなわち　$H_n = 2n^2 - n + 1$

$H_1 = 2$ であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{H_n = 2n^2 - n + 1}$

16.54 (1) $a_{k+1} \neq a_k$ のとき，m_k は直線 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の傾きであるから

$$m_k = \frac{{a_{k+1}}^2 - {a_k}^2}{a_{k+1} - a_k} = a_{k+1} + a_k$$

$a_{k+1} = a_k$ のとき，m_k は上式における $a_{k+1} \to a_k$ の極限値であるから

$$m_k = 2a_k$$

上の 2 式から　$m_k = a_{k+1} + a_k$　よって　$\boldsymbol{a_{k+1} = -a_k + m_k}$

(2) $m_k = m_1 r^{k-1}$ であるから　$a_{k+1} + a_k = m_1 r^{k-1}$

ゆえに　$(-1)^{k+1}a_{k+1} - (-1)^k a_k = m_1(-r)^{k-1}$

$k \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}\{(-1)^{j+1}a_{j+1} - (-1)^j a_j\} = m_1\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1}$

$$(-1)^k a_k + a_1 = m_1\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1}$$

したがって　$\displaystyle a_k = (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1} \quad \cdots(*)$

i) $-r \neq 1$　すなわち　$r \neq -1$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1 \times \frac{1-(-r)^{k-1}}{1+r} \\ &= (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1 \end{aligned}$$

ii) $-r = 1$　すなわち　$r = -1$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1(k-1) \\ &= (-1)^k\{-a_1 + (k-1)m_1\} \end{aligned}$$

i)，ii) で得られた結果は，ともに $k = 1$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{r \neq -1 \text{ のとき} \quad a_k = (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1}$$

$$\boldsymbol{r = -1 \text{ のとき} \quad a_k = (-1)^k\{-a_1 + (k-1)m_1\}}$$

(3) $m_1 \neq 0$ より $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r} \neq 0$．$r \neq -1$ より (2) の結果から

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1 \\ &= (-1)^{k+1}a_1 + \{(-1)^k + r^{k-1}\}a_1 \\ &= r^{k-1}a_1 \end{aligned}$$

$m_k = a_{k+1} + a_k$ および上式から $a_{k+1} = ra_k$ であるから

$$m_k = ra_k + a_k = (1+r)a_k$$

よって ℓ_k の方程式は

$$y - {a_k}^2 = (1+r)a_k(x - a_k) \quad \text{すなわち} \quad y = (1+r)a_k x - r{a_k}^2$$

直線 $y = (1+r)a_k x - r{a_k}^2$ について，$(1+r)a_k \neq 0$ であるから，これが $y = bx^2$ に接するとき，$b \neq 0$ である．2 式から y を消去し整理すると

$$bx^2 - (1+r)a_k x + r{a_k}^2 = 0$$

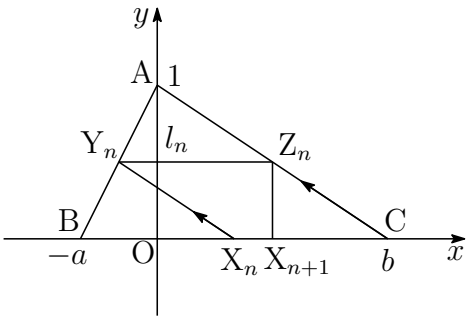
このとき

$$\begin{aligned} D &= (1+r)^2{a_k}^2 - 4br{a_k}^2 \\ &= \{(1+r)^2 - 4br\}{a_k}^2 \end{aligned}$$

$r \neq 0, -1$ であるから，$\boldsymbol{b = \dfrac{(1+r)^2}{4r}}$ とすると，$D = 0$ となる．

よって，任意の k に対して，直線 ℓ_k は放物線 $y = \dfrac{(1+r)^2}{4r}x^2$ に接する．

16.55 (1) 座標平面上に点 A$(0,\ 1)$，B$(-a,\ 0)$，C$(b,\ 0)$，X$_n(x_n,\ 0)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をとる．直線 AB の方程式は



$$y = \frac{1}{a}x + 1 \quad \cdots ①$$

直線 AC の方程式は

$$y = -\frac{1}{b}x + 1 \quad \cdots ②$$

直線 X$_n$Y$_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{b}$ の直線であるから

$$y = -\frac{1}{b}(x - x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y$_n$ の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　　$l_n = \dfrac{a + x_n}{a + b}$　$\cdots ④$

このとき，$x_1 = 0$ であるから　　$\boldsymbol{l_1 = \dfrac{a}{a+b}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，② より

$$l_n = -\frac{x}{b} + 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = b(1 - l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから　　$x_{n+1} = b(1 - l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1} = \frac{a + x_{n+1}}{a + b} = \frac{a + b(1 - l_n)}{a + b} = \boldsymbol{-\frac{b}{a+b} l_n + 1}$$

(3) $b = 8a$ のとき，(1)，(2) の結果から　$l_{n+1} = -\dfrac{8}{9} l_n + 1$，$l_1 = \dfrac{1}{9}$

この漸化式から　　$l_n = \dfrac{9}{17} + \dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$

$l_n > \dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{9}{17} + \dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n > \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n > -\dfrac{1}{16}$

n は奇数であるから　$(-1)^n \left(\dfrac{8}{9}\right)^n > -\dfrac{1}{16}$　ゆえに　$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n < \dfrac{1}{16}$

したがって　　$n > \dfrac{4}{\log_2 9 - 3}$

このとき，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ より

$$23.5\cdots = \frac{4}{3.17 - 3} < \frac{4}{\log_2 9 - 3} < \frac{4}{3.169 - 3} = 23.6\cdots$$

よって，求める最小の奇数 n は　　$\boldsymbol{n = 25}$

16.56 (1) $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$ より

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -2(a_{n+1} - a_n) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_{n+1} = -2b_n}$$

(2) $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

$\{b_n\}$ は初項が 1，公比が -2 の等比数列であるから

$$b_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = \boldsymbol{(-2)^{n-1}}$$

(3) (2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k-1} \\ &= 1 + \frac{1 - (-2)^{n-1}}{1 - (-2)} = \frac{4 - (-2)^{n-1}}{3} \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するので　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{4 - (-2)^{n-1}}{3}}$

解説 (宮崎大学 2007) 7

16.57 (1) 与えられた漸化式から

$$a_3 = 5a_2 - 6a_1 = 5\cdot 1 - 6\cdot(-1) = \mathbf{11}$$
$$a_4 = 5a_3 - 6a_2 = 5\cdot 11 - 6\cdot 1 = \mathbf{49}$$
$$a_5 = 5a_4 - 6a_3 = 5\cdot 49 - 6\cdot 11 = \mathbf{179}$$

(2) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha)$ より　　$a_{n+2} = (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$

これと $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ の係数を比較して

$\alpha+\beta = 5,\ \ \alpha\beta = 6$　これを解いて　$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta) = (2,\ 3),\ (3,\ 2)}$

(3) (2) の結果から

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$　ゆえに　$a_{n+1} - 2a_n = 3^{n-1}(a_2 - 2a_1) = 3^n$

$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n)$　ゆえに　$a_{n+1} - 3a_n = 2^{n-1}(a_2 - 3a_1) = 2^{n+1}$

上の 2 式の辺々を引いて　　$\boldsymbol{a_n = 3^n - 2^{n+1}}$

16.58 (1) $r = 0$ のとき　$a_{n+2} = -4a_n$ より

(i) n が奇数のとき，$n = 2m-1$ とおくと　$a_{2m+1} = -4a_{2m-1}$

数列 $\{a_{2m+1}\}$ は，初項 $a_1 = 1$，公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{2m-1} = (-4)^{m-1}$$

$m = \dfrac{n+1}{2}$ であるから　　$\boldsymbol{a_n = (-4)^{\frac{n-1}{2}}}$

(ii) n が偶数のとき，$n = 2m$ とおくと　$a_{2m+2} = -4a_{2m}$

数列 $\{a_{2m}\}$ は，初項 $a_2 = 3$，公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{2m} = 3\cdot(-4)^{m-1}$$

$m = \dfrac{n}{2}$ であるから　　$\boldsymbol{a_n = 3\cdot(-4)^{\frac{n-2}{2}}}$

(2) (a) $r = 5$ のとき，$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ より

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n),\quad a_{n+2} - 4a_{n+2} = a_{n+1} - 4a_n$$

ゆえに　　$b_{n+1} = 4b_n$，$c_{n+1} = c_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$，公比 4 の等比数列であるから

$$b_n = 2\cdot 4^{n-1} = \mathbf{2^{2n-1}}$$

数列 $\{c_n\}$ は初項 $a_2 - 4a_1 = 3 - 4\cdot 1 = -1$ および漸化式から

$$c_n = \mathbf{-1}$$

(b) (a) の結果から　$a_{n+1}-a_n=2^{2n-1}$,　$a_{n+1}-4a_n=-1$

上の 2 式から，a_{n+1} を消去すると　$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{3}(2^{2n-1}+1)}$

(3) (c) $r=4$ のとき，$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$ より

$$\frac{a_{n+2}}{2^{n+2}}-\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}\quad\text{ゆえに}\quad d_{n+1}=d_n$$

数列 $\{d_n\}$ は初項 $\dfrac{a_2}{2^2}-\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{4}$ および漸化式から　$d_n=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(d) 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{4}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(n-1)\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}}$$

16.59 (1) $b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0\cdots$① と $a_{n+2}-5a_{n+1}+6_n=1$ の辺々の差をとると

$$(b_{n+2}-a_{n+2})-5(a_{n+1}-b_{n+1})+6(b_n-a_n)=-1$$

$b_n-a_n=c$ であるから

$$c-5c+6c=-1\quad\text{これを解いて}\quad \boldsymbol{c=-\frac{1}{2}}$$

(2) (1) の結果より，$b_n=a_n-\dfrac{1}{2}$ であるから

$$b_1=a_1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad b_2=a_2-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

① より

$$b_{n+2}-2b_{n+1}=3(b_{n+1}-2b_n)$$
$$b_{n+2}-3b_{n+1}=2(b_{n+1}-3b_n)$$

数列 $\{b_{n+1}-2b_n\}$ は初項 b_2-2b_1，公比 3 の等比数列であり，同様に，
数列 $\{b_{n+1}-3b_n\}$ は初項 b_2-3b_1，公比 2 の等比数列であるから

$$b_{n+1}-2b_n=3^{n-1}(b_2-2b_1)=\frac{1}{2}\cdot 3^n$$
$$b_{n+1}-3b_n=2^{n-1}(b_2-3b_1)=2^{n-1}$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$b_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n-2^{n-1}$$

$a_n=b_n+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n-2^{n-1}+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3^n-2^n+1}{2}}$$

16.60 (1) 漸化式から

$$a_{n+4} = ca_{n+3} - a_{n+2} \qquad \cdots ①$$
$$a_{n+3} = ca_{n+2} - a_{n+1} \qquad \cdots ②$$
$$a_{n+2} = ca_{n+1} - a_n \qquad \cdots ③$$

上の 3 式から (a_{n+3}，a_{n+1} を消去する)

$$a_{n+4} = ca_{n+3} - a_{n+2} \qquad \cdots ①$$
$$ca_{n+3} = c^2a_{n+2} - ca_{n+1} \qquad \cdots ② \times c$$
$$a_{n+2} = ca_{n+1} - a_n \qquad \cdots ③$$

これらの 3 式の辺々を加えて整理すると

$$a_{n+4} = (c^2 - 2)a_{n+2} - a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+4} = a_2a_{n+2} - a_n$$

(2) $c = \sqrt{2}$ のとき，$a_2 = 0$ であるから，(1) の結果から

$$a_{n+4} = -a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{4(n+1)} = -a_{4n} \quad \cdots (*)$$

また，$a_1 = \sqrt{2}$，$a_2 = 0$，$a_{n+2} = \sqrt{2}a_{n+1} - a_n$ より

$$a_3 = \sqrt{2}a_2 - a_1 = -\sqrt{2}$$
$$a_4 = \sqrt{2}a_3 - a_2 = -2$$

$100 - 4 = 4 \times 24$ であるから，$(*)$ より

$$a_{100} = (-1)^{24}a_4 = \mathbf{-2}$$

16.61 (1) $\qquad (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$

$\alpha = 5 + \sqrt{26}$，$\beta = 5 - \sqrt{26}$ とおくと $\quad \alpha + \beta = 10$，$\alpha\beta = -1$

ゆえに $\qquad 10(\alpha^n + \beta^n) = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$

したがって $\quad 10a_{n+1} = a_{n+2} - a_n \quad$ よって $\quad a_{n+2} = 10a_{n+1} + a_n$

(2) $a_1 = 2$，$a_2 = \alpha + \beta = 10$ であるから，(1) の結果から，すべての自然数 n に対して，a_n は自然数である．

(3) $-0.1 < 5 - \sqrt{26} < 0$ より，$0 < -\beta < 0.1$ であるから

$$0 < (-\beta)^{99} < 0.1^{99} \quad \text{すなわち} \quad 0 < -\beta^{99} < 0.1^{99} \quad \cdots ①$$

$a_{100} = \alpha^{99} + \beta^{99}$ であるから $\qquad -\beta^{99} = \alpha^{99} - a_{100} \quad \cdots ②$

①，② より $\qquad 0 < \alpha^{99} - a_{100} < 0.1^{99}$

(2) の結果から a_{100} は自然数であるから，α^{99}，すなわち，$(5 + \sqrt{26})^{99}$ の小数第 1 位から小数第 99 位までの数字がすべて 0 である．

16.62 (1) 与えらた規則により，n 段の階段を上る方法を a_n 通りとすると

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \cdots (*)$$

が成立する．これから，順次

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3,\\
a_4 &= a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5,\\
a_5 &= a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8,\\
a_6 &= a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13,\\
a_7 &= a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21,\\
a_8 &= a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34,\\
a_9 &= a_8 + a_7 = 34 + 21 = 55,\\
a_{10} &= a_9 + a_8 = 55 + 34 = 89
\end{aligned}$$

よって　**89** 通り

(2) (1) より，特性方程式

$$x^2 = x + 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$　$\alpha + \beta = 1$，$\alpha\beta = -1$

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

したがって　$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

$(*)$ から　$a_0 = 1$ であるから

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - \alpha a_n &= \beta^n(a_1 - \alpha a_0) = \beta^n(1 - \alpha) = \beta^{n+1}\\
a_{n+1} - \beta a_n &= \alpha^n(a_1 - \beta a_0) = \alpha^n(1 - \beta) = \alpha^{n+1}
\end{aligned}$$

上の 2 式から　$(\beta - \alpha)a_n = \beta^{n+1} - \alpha^{n+1}$　ゆえに　$a_n = \dfrac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$

方程式 $(**)$ の解は　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$　ゆえに　$\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$，　$\beta = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

よって，階段をちょうど n 段上る方法は

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}$$

16.63 (1) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ より

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}=\boldsymbol{1+\frac{1}{b_n}}$$

(2) $a_1=a_2=1$，$b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=1$

(1) で求めた $\{b_n\}$ の漸化式を

$$b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n}\quad\cdots(*)$$

とすると，$b_1=1$ および $(*)$ から　$b_n>0$

さらに，$(*)$ から，$n=2,3,4\cdots$ に対して　$b_n>1$

よって，$n=1,2,3,\cdots$ に対して　$b_n\geqq 1$

(3) $(*)$ および $\alpha=1+\dfrac{1}{\alpha}\cdots$① に注意して

$$b_{n+1}-\alpha=1-\alpha+\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\alpha}$$

したがって，(2) の結果により

$$|b_{n+1}-\alpha|=\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{\alpha b_n}|b_n-\alpha|\leqq\frac{1}{\alpha}|b_n-\alpha|$$

(4) (3) の結果および① に注意して $(\alpha>0)$

$$|b_n-\alpha|\leqq\frac{1}{\alpha^{n-1}}|b_1-\alpha|=\frac{1}{\alpha^{n-1}}|1-\alpha|=\frac{1}{\alpha^{n-1}}\left|-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{\alpha^n}$$

16.64 (1) n 分後における赤玉 a_n 個は，$n+1$ 分後に白玉 $2a_n$ 個に変化し，n 分後における白玉 b_n 個は，$n+1$ 分後に赤玉 b_n 個と白玉 b_n 個に変化する．これに赤玉 1 個が追加されるから，$n+1$ 分後には赤玉 b_n+1 個と白玉 $2a_n+b_n$ 個になる．よって　$\boldsymbol{a_{n+1}=b_n+1}\cdots$①，$\boldsymbol{b_{n+1}=2a_n+b_n}\cdots$②

(2) ① より　$b_n=a_{n+1}-1$，$b_{n+1}=a_{n+2}-1$

これらを ② に代入すると

$$a_{n+2}-1=2a_n+(a_{n+1}-1)\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n}$$

(3) (2) の結果から　　$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$

$c_n=a_{n+1}-a_n$ より　　$c_{n+1}=-c_n$

$c_1=a_2-2a_1=1-2\cdot1=-1$ であるから

$$c_n=c_1\cdot(-1)^{n-1}=-1\cdot(-1)^{n-1}=\boldsymbol{(-1)^n}$$

(4) (3) の結果から　　$a_{n+1}-2a_n=(-1)^n$　　ゆえに　　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$d_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より　　$d_{n+1}-d_n=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$d_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} d_n &= d_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するので　　$\boldsymbol{d_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$

(5) (4) の結果から

$$a_n=2^nd_n=2^n\times\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\}}$$

① より

$$b_n=a_{n+1}-1=\frac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\}-1=\boldsymbol{\frac{1}{3}\{2^{n+1}-(-1)^{n+1}-3\}}$$

解説　(九工大 [情]2006) 3

16.65　(1)　$p=\dfrac{9}{10}$ とおくと，与えられた漸化式は

$$a_1=\frac{1}{p},\ a_2=2,\ a_{n+2}-2pa_{n+1}+p^2a_n=0 \quad \cdots ①$$

したがって　　$a_{n+2}-pa_{n+1}=p(a_{n+1}-pa_n)$

$b_n=a_{n+1}-pa_n$ であるから

$$b_1=a_2-pa_1=1,\quad b_{n+1}=pb_n$$

数列 $\{b_n\}$ は，初項が 1，公比が p の等比数列であるから

$$b_n=1\cdot p^{n-1}\quad すなわち\quad \boldsymbol{b_n=\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}}$$

(2) $b_n = p^{n-1}$ を $a_n = pb_nc_n$ に代入すると　$a_n = p^nc_n$　$\cdots$②

また，$a_1 = \dfrac{1}{p}$，$a_2 = 2$ より　$c_1 = \dfrac{1}{p^2}$，$c_2 = \dfrac{2}{p^2}$

② を ① に代入すると　$p^{n+2}c_{n+2} - 2p\cdot p^{n+1}c_{n+1} + p^2\cdot p^nc_n = 0$

したがって　$c_{n+2} - c_{n+1} = c_{n+1} - c_n$，$c_2 - c_1 = \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{p^2}$

数列 $\{c_n\}$ は，初項が $\dfrac{1}{p^2}$，公差が $\dfrac{1}{p^2}$ の等比数列であるから

$$c_n = \frac{1}{p^2} + (n-1)\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{n}{p^2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c_n = \frac{100}{81}n}$$

これを ② に代入して　$a_n = p^n\cdot\dfrac{n}{p^2} = np^{n-2}$　よって　$\boldsymbol{a_n = n\left(\frac{9}{10}\right)^{n-2}}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)p^{n-1}}{np^{n-2}} = \frac{(n+1)p}{n} = \frac{9(n+1)}{10n}$$

したがって　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \dfrac{9-n}{10n}$

ゆえに　$a_1 < a_2 < \cdots < a_9 = a_{10} > a_{11} > \cdots$

よって，a_n は $\boldsymbol{n = 9,\ 10}$ のとき最大

16.66 (1) 次の場合により　$\boldsymbol{f(2) = 1,\ f(3) = 1,\ f(4) = 2,\ f(5) = 3}$

黄黄	白黄黄	白白黄黄 黄白黄黄	白白白黄黄 白黄白黄黄 黄白白黄黄

(2) $n \geqq 4$ のとき，$f(n)$ の総数は，次の 2 つの場合に分けられる．

i) 1 枚目のカードが白色である場合，その総数は，2 回目以降，すなわちその後の $n-1$ 回の総数 $f(n-1)$ に等しい．

ii) 1 枚目のカードが黄色であるとき，2 枚目のカードは白色であり，その総数は，3 回目以降，すなわちその後の $n-2$ 回の総数 $f(n-2)$ に等しい．

したがって，$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ が成り立つ．

(ア) $\boldsymbol{f(n-1)}$ (イ) $\boldsymbol{f(n-2)}$ (ウ) $\boldsymbol{f(n) = f(n-1) + f(n-2)}$

(3) $x^2-x-1=0$ の 2 つの解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-1$$

(2) の結果から　　$f(n)=(\alpha+\beta)f(n-1)-\alpha\beta f(n-2)$

したがって　　$f(n)-\alpha f(n-1)=\beta\{f(n-1)-\alpha f(n-2)\}$

$f(n)-\beta f(n-1)=\alpha\{f(n-1)-\beta f(n-2)\}$

すなわち　　$a_n=\beta a_{n-1}$，$b_n=\alpha b_{n-1}$

よって，$\{a_n\}$ は公比 β の等比数列であり，$\{b_n\}$ は公比 α の等比数列である．

(4) (3) の結果から

$$f(n+1)-\alpha f(n)=\beta^{n-2}\{f(3)-\alpha f(2)\}=\beta^{n-2}(1-\alpha)=\beta^{n-1}$$
$$f(n+1)-\beta f(n)=\alpha^{n-2}\{f(3)-\beta f(2)\}=\alpha^{n-2}(1-\beta)=\alpha^{n-1}$$

したがって　　$(\beta-\alpha)f(n)=\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}$

α，β は，2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解であるから，

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とすると

$$\boldsymbol{f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

16.67 初項 a_1 は　$a_1=S_1=a\cdot1^2+b\cdot1+c=\boldsymbol{a+b+c}$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=an^2+bn+c-\{a(n-1)^2+b(n-1)+c\}$

$=\boldsymbol{2an-a+b}$

16.68 (1) $a_1=S_1=1^2-25\cdot1=\boldsymbol{-24}$

(2) $n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-25n-\{(n-1)^2-25(n-1)\}$$
$$=2n-26=-24+(n-1)\cdot2$$

上式は，(1) の結果から，$n=1$ のときも成り立つ．

よって，$\{a_n\}$ は初項 -24，公差 2 の等差数列である．

(3) (1) より，$a_n = 2(n-13)$ であるから，$n \geqq 13$ のとき，S_n は単調増加

$S_n = n(n-25)$ であるから　$S_{36} = 36(36-25) = 396$

よって，$S_n > 396$ となる最小の n は　　$\boldsymbol{n = 37}$

16.69 (1) 漸化式から，$S_1 = a_1 = 1$，$a_n = S_{n-1} + 4$．また，$S_n = S_{n-1} + a_n$

上の 2 式に順次 $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$ を代入すると

$$\begin{aligned} &a_2 = S_1 + 4 = 1 + 4 = 5, && S_2 = S_1 + a_2 = 1 + 5 = 6, \\ &a_3 = S_2 + 4 = 6 + 4 = 10, && S_3 = S_2 + a_3 = 6 + 10 = 16, \\ &a_4 = S_4 + 4 = 16 + 4 = 20, && S_4 = S_3 + a_4 = 16 + 20 = 36, \\ &a_5 = S_4 + 4 = 36 + 4 = 40 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a_2 = 5,\ a_3 = 10,\ a_4 = 20,\ a_5 = 40}$

(2) $n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_{n-1} + 4$，$a_{n+1} = S_n + 4$

上の第 2 式から第 1 式の辺々を引くと　$a_{n+1} - a_n = S_n - S_{n-1}$

また，$S_n - S_{n-1} = a_n$ であるから　$a_{n+1} - a_n = a_n$

したがって　$a_{n+1} = 2a_n$　ゆえに　$a_n = a_2 \cdot 2^{n-2} = 5 \cdot 2^{n-2}$

よって　　$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 5 \cdot 2^{n-2} & (n = 2, 3, \cdots) \end{cases}}$

16.70 (1) $n \geqq 2$ のとき

$$S_n = 2a_n + n$$
$$S_{n-1} = 2a_{n-1} + n - 1$$

上の 2 式の辺々を引くと　　$S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} + 1$

$S_n - S_{n-1} = a_n$ であるから

$$a_n = 2a_n - 2a_{n-1} + 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = 2a_{n-1} - 1}$$

(2) (1) の結果から，$n \geqq 1$ のとき

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 1$$
$$a_{n+1} = 2a_n - 1$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \quad \text{すなわち} \quad b_{n+1} = 2b_n$$

ここで，$S_1 = 2a_1 + 1,\ S_1 = a_1,\ a_2 = 2a_1 - 1$ であるから

$$a_1 = -1,\ a_2 = -3$$

$\{b_n\}$ は，初項が $b_1 = a_2 - a_1 = -2$，公比が 2 の等比数列であるから

$$b_n = -2 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{-2^n}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$a_{n+1} = 2a_n - 1, \quad b_n = a_{n+1} - a_n$$

上の 2 式から a_{n+1} を消去すると

$$a_n = b_n + 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = -2^n + 1}$$

16.71 (1) $S_n = \dfrac{3}{2}a_n - n\ (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots (*)$

$(*)$ より，$n = 1$ のとき $\quad S_1 = \dfrac{3}{2}a_1 - 1$

$S_1 = a_1$ であるから $\quad a_1 = \dfrac{3}{2}a_1 - 1 \quad$ これを解いて $\quad \boldsymbol{a_1 = 2}$

(2) $(*)$ より，$n = 2$ のとき $\quad S_2 = \dfrac{3}{2}a_2 - 2$

$S_2 = a_1 + a_2$ であるから，上式および (1) の結果から

$$2 + a_2 = \frac{3}{2}a_2 - 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a_2 = 8}$$

(3) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\ &= \left\{\frac{3}{2}a_{n+1} - (n+1)\right\} - \left(\frac{3}{2}a_n - n\right) \\ &= \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n - 1 \end{aligned}$$

整理すると $\quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad$ ゆえに $\quad a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

したがって $\quad a_n + 1 = (a_1 + 1) \cdot 3^{n-1} \quad$ よって $\quad \boldsymbol{a_n = 3^n - 1}$

16.72 (1) 与えられた漸化式から $\quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - S_{n+1}$

$$a_{n+1} = 4a_n - S_n$$

上の 2 式の辺々を引くと $\quad a_{n+2} - a_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n) - (S_{n+1} - S_n)$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ を代入して，整理すると

$$\boldsymbol{a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n} \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) $a_1 = 2$，$a_2 = 4a_1 - S_1$，$S_1 = a_1$ より，$a_2 = 6$ であるから

$$b_1 = a_2 - 2a_1 = 6 - 2\cdot 2 = 2$$

(1) の結果から　$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$　すなわち　$b_{n+1} = 2b_n$

よって　　$b_n = b_1\cdot 2^{n-1} = 2\cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^n}$

(3) (2) の結果から　$a_{n+1} - 2a_n = 2^n$　ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{1}{2}$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項が $\dfrac{a_1}{2}$，公差が $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{2}$$　よって　$\boldsymbol{a_n = (n+1)2^{n-1}}$

16.73 (1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ より

$$a_{n+1} = \{2a_{n+1} + (n+1)^2\} - (2a_n + n^2)$$

ゆえに　　$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1}$　$\cdots$①

(2) 初項 a_1 は　　$S_1 = 2a_1 + 1^2$

$S_1 = a_1$ より　　$a_1 = -1$

① に対して，次の等式をみたす n の 1 次式 $f(n)$ を考える．

$$f(n+1) = 2f(n) - 2n - 1 \quad \cdots ②$$

$f(n) = pn + q$ とおくと　　$p(n+1) + q = 2(pn+q) - 2n - 1$

n に関する恒等式であるから　　$p = 2$，$q = 3$

ゆえに　　$f(n) = 2n + 3$　$\cdots$③

① − ② から　　$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$

したがって　　$a_n - f(n) = 2^{n-1}\{a_1 - f(1)\}$

$a_1 = -1$，③ より　　$a_n - (2n+3) = 2^{n-1}(-1-5)$

よって　　$\boldsymbol{a_n = 2n + 3 - 3\cdot 2^n}$

16.74 (1) $a_1 = s_1$ であるから　$a_1 = \dfrac{3\cdot 1^2 + 1}{2} = 2$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{3n^2+n}{2} - \frac{3(n-1)^2 + (n-1)}{2} = 3n - 1$$

これは，$n = 1$ のときも成立するから　　$\boldsymbol{a_n = 3n - 1}$

(2) $\log_2(t_n+1)=2n$ より　$t_n=2^{2n}-1$

$b_1=t_1$ であるから　$b_1=2^2-1=3$

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n=t_n-t_{n-1}=(2^{2n}-1)-\{2^{2(n-1)}-1\}=3\cdot 2^{2n-2}$$

これは，$n=1$ のときも成立するから　　$\boldsymbol{b_n=3\cdot 2^{2n-2}}$

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ とおくと，(1),(2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$S_n=3\sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 2^{2k-2} \qquad \cdots ①$$

$$S_n=3\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)\cdot 2^{2k} \qquad \cdots ②$$

① $\times 4$ − ② から

$$4S_n-S_n=3\sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 2^{2k}-3\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)\cdot 2^{2k}$$

$$\begin{aligned} S_n&=\sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 2^{2k}-\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)\cdot 2^{2k} \\ &=(3n-1)\cdot 2^{2n}-2-3\sum_{k=1}^{n-1}2^{2k} \\ &=(3n-1)\cdot 2^{2n}-2-3\times\frac{4(2^{2n-2}-1)}{4-1} \\ &=(3n-2)\cdot 2^{2n}+2 \end{aligned}$$

$S_1=a_1b_1=2\cdot 3=6$ であるから，上式は $n=1$ のときも成立する．

よって　　$\boldsymbol{S_n=(3n-2)\cdot 2^{2n}+2}$

16.75 (1) 与えらえた漸化式から

$$nS_n=(n-1)(2a_n+2-n) \qquad \cdots ①$$

$$(n+1)S_{n+1}=n(2a_{n+1}+1-n) \qquad \cdots ②$$

したがって

$$n(n+1)S_{n+1}=n^2(2a_{n+1}+1-n) \qquad \cdots ② \times n$$

$$n(n+1)S_n=(n+1)(n-1)(2a_n+2-n) \qquad \cdots ① \times (n+1)$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$n(n+1)(S_{n+1}-S_n) = 2n^2a_{n+1} - 2(n+1)(n-1)a_n - (n-1)(n+2)$$
$$n(n+1)a_{n+1} = 2n^2a_{n+1} - 2(n+1)(n-1)a_n - (n-1)(n+2)$$

整理すると　　$n(n-1)a_{n+1} - 2(n+1)(n-1)a_n = (n-1)(n+2)$

$n \neq 1$ のとき　　$na_{n+1} - 2(n+1)a_n = n+2 \quad \cdots(*)$

$n = 1$ のとき，① より，$a_1 = S_1$ であるから　$a_1 = 0$

$a_1 = 0$，$a_2 = 3$ より，$n = 1$ のとき，$(*)$ は成立する．

よって，すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成立する．

(2) $(*)$ より　　$n(a_{n+1}+1) = 2(n+1)(a_n+1)$

上式の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$\frac{1}{n+1}(a_{n+1}+1) = \frac{2}{n}(a_n+1) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = 2b_n$$

$b_1 = a_1 + 1 = 1$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = \mathbf{2^{n-1}}$$

(3) $b_n = \dfrac{1}{n}(a_n+1)$ より　$a_n = nb_n - 1 = n \cdot 2^{n-1} - 1$

ここで，$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} 2T_n &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 2^k + n \cdot 2^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k-1) \cdot 2^{k-1} + n \cdot 2^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + n \cdot 2^n \\ &= T_n - (2^n - 1) + n \cdot 2^n \\ T_n &= (n-1) \cdot 2^n + 1 \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2a_k+1)=\sum_{k=1}^{n}\{2(k\cdot 2^{k-1}-1)+1\}$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}$$
$$=2T_n-n$$
$$=2\{(n-1)\cdot 2^n+1\}-n$$
$$=\boldsymbol{(n-1)2^{n+1}+2-n}$$

16.76　(1) $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_n+5}$，$b_n=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ より

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}=\frac{\frac{2a_n}{3a_n+5}}{\frac{2a_n}{3a_n+5}+1}=\frac{2a_n}{5(a_n+1)}=\frac{2}{5}b_n$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{a_1+1}=\dfrac{3}{3+1}=\dfrac{3}{4}$，公比 $\dfrac{2}{5}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{b_n=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}$$

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ より，$a_n=\dfrac{b_n}{1-b_n}$ であるから

$$a_n=\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}=\boldsymbol{\frac{3\cdot 2^{n-1}}{4\cdot 5^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}}$$

補足　与えらえた漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{3}{2}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{a_{n+1}}+1=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$$

したがって，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}+1\right\}$ は初項が $\dfrac{4}{3}$，公比が $\dfrac{5}{2}$ の等比数列であるから

$$\frac{1}{a_n}+1=\frac{4}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}\quad\text{よって}\quad a_n=\frac{1}{\frac{4}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}$$

解説　p，q，$r\neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}\quad\cdots(*)$$

の一般項について，以下に述べる．

$ps-qr=0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps-qr\neq 0$ とする．
$(*)$ の特性方程式

$$x=\frac{px+q}{rx+s}\quad \text{すなわち}\quad rx^2+(s-p)x-q=0\quad \cdots(**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}=\frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)(ra_n+s)}\quad \cdots(***)$$
$$a_{n+1}-\beta=\frac{(ps-qr)(a_n-\beta)}{(r\beta+s)(ra_n+s)}$$

i) $\alpha\neq\beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{r\alpha+s}{r\beta+s}\cdot\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

したがって　$\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\dfrac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}\left(\dfrac{r\alpha+s}{r\beta+s}\right)^{n-1}$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha=\beta$ のとき，$(*)$ の係数について

$$(s-p)^2+4rq=0\quad \text{ゆえに}\quad (p+s)^2=4(ps-qr)\quad \cdots①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha=\frac{p-s}{2r}\quad \text{ゆえに}\quad r\alpha+s=\frac{1}{2}(p+s)\quad \cdots②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=\frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)\{r(a_n-\alpha)+r\alpha+s\}}\\&=\frac{\frac{1}{4}(p+s)^2(a_n-\alpha)}{\frac{1}{2}(p+s)\{r(a_n-\alpha)+\frac{1}{2}(p+s)\}}\end{aligned}$$

逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+\dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

16.77 (1) $a_1 = 1 > 0$ および $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{(4n+3)a_{n-1}+5}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ より，すべての自然数 n について，$a_n > 0$ である．したがって

$$\frac{1}{a_n} = \frac{5}{a_{n-1}} + 4n + 3 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b_n = 5b_{n-1} + 4n + 3}$$

(2) (1) の結果から $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$，$b_2 = 5b_1 + 4\cdot 2 + 3 = 16$，

ゆえに $c_1 = b_2 - b_1 = 16 - 1 = 15$

また $b_n = 5b_{n-1} + 4n + 3$，$b_{n+1} = 5b_n + 4n + 7$

上の第 2 式から第 1 式の辺々を引くと

$$b_{n+1} - b_n = 5(b_n - b_{n-1}) + 4 \quad \text{ゆえに} \quad c_n = 5c_{n-1} + 4$$

$c_n + 1 = 5(c_{n-1} + 1)$ であるから

$$c_n + 1 = (c_1 + 1)\cdot 5^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c_n = 16\cdot 5^{n-1} - 1}$$

(3) (2) の結果から，$b_{n+1} - b_n = 16\cdot 5^{n-1} - 1$ であるから

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(16\cdot 5^{k-1} - 1)$$

$$b_n - 1 = 16\cdot\frac{5^{n-1} - 1}{5 - 1} - (n - 1)$$

$$b_n = 4\cdot 5^{n-1} - n - 2$$

$b_1 = 1$ であるから，上の b_n は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって $b_n = 4\cdot 5^{n-1} - n - 2$

よって $\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{4\cdot 5^{n-1} - n - 2}}$

16.78 (1) $a_2 = 2a_1 + b_1 + 2 = 5$，$b_2 = a_1 + 2b_1 = 3$，

$a_3 = 2a_2 + b_2 + 2 = \boldsymbol{15}$，$b_3 = a_2 + 2b_2 = \boldsymbol{11}$

(2) $a_{n+1} = 2a_n + b_n + 2$，$b_{n+1} = a_n + 2b_n$ $\cdots (*)$

$(*)$ の辺々を加えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n) + 2 \quad \text{すなわち} \quad c_{n+1} = 3c_n + 2$$

したがって $c_{n+1} + 1 = 3(c_n + 1)$，$c_1 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = 3$

数列 $\{c_n + 1\}$ は，初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$$c_n + 1 = 3\cdot 3^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c_n = 3^n - 1}$$

(3) (∗) の辺々を引くと　$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$

$d_n=a_n-b_n$ とおくと　$d_{n+1}=d_n+2$,　　$d_1=a_1-b_1=0$

数列 $\{d_n\}$ は，初項 0，公差 2 の等差数列であるから

$$d_n=0+2(n-1)\quad \text{よって}\quad d_n=2n-2$$

(2) の結果および上式から

$$a_n+b_n=3^n-1,\quad a_n-b_n=2n-2$$

よって　　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{3^n+2n-3}{2}}$,　$\boldsymbol{b_n=\dfrac{3^n-2n+1}{2}}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^k+2k-3)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1}-3}{2}+n^2-2n\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}(3^{n+1}+2n^2-4n-3)}\end{aligned}$$

16.79　(1)　$x_{n+1}=2x_n+y_n+3n-8$,　$y_{n+1}=2y_n+x_n-3n+8$

の辺々の和と差をとると

$$x_{n+1}+y_{n+1}=3(x_n+y_n)$$
$$x_{n+1}-y_{n+1}=x_n-y_n+6n-16$$

$z_n=x_n+y_n$,　$w_n=x_n-y_n$ であるから

$$z_{n+1}=3z_n,\qquad z_1=x_1+y_1=8+(-5)=3$$
$$w_{n+1}=w_n+6n-16,\quad w_1=x_1-y_1=8-(-5)=13$$

数列 $\{z_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$$\boldsymbol{z_n}=3\cdot3^{n-1}=\boldsymbol{3^n}$$

数列 $\{w_n\}$ は $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}w_n&=w_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-16)\\&=13+6\times\frac{1}{2}(n-1)n-16(n-1)\\&=3n^2-19n+29\end{aligned}$$

$w_1 = 13$ なので，上の w_n は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　　$\boldsymbol{w_n = 3n^2 - 19n + 29}$

(2) 点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y = x$ の距離を d とすると，(1) の結果に注意して

$$d = \frac{|\,x_n - y_n\,|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\,w_n\,|}{\sqrt{2}}$$

w_n の階差数列 b_n は，$b_n = 6n - 16$ であるから

$n \geqq 3$ のとき　　$b_n > 0$

$w_4 = 1$ であるから　　$n \geqq 5$ のとき $w_n > 1$

よって，$d = \dfrac{|w_n|}{\sqrt{2}}$ を最小にする n の値は $n \leqq 4$ について調べればよい．

実際，$w_1 = 13,\ w_2 = 3,\ w_3 = -1,\ w_4 = 1$ であるから

求める n の値は　　$\boldsymbol{n = 3,\ 4}$

16.80 (1)　$\begin{cases} 2a_{2k+1} - 3a_{2k} + a_{2k-1} = 0 \\ 2a_{2k+2} - 3a_{2k+1} + a_{2k} = 1 \end{cases}$　$(k = 1, 2, 3, \cdots)$　　$\cdots (*)$

$(*)$ の第 1 式に $k = 1,\ 2$，漸化式の第 2 式に $k = 1$ を代入すると

$$2a_3 - 3a_2 + a_1 = 0, \quad 2a_4 - 3a_3 + a_2 = 1, \quad 2a_5 - 3a_4 + a_3 = 0$$

$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ より，これを解いて　$\boldsymbol{a_3 = \dfrac{5}{2},\ a_4 = \dfrac{13}{4},\ a_5 = \dfrac{29}{8}}$

(2) $(*)$ より

$$2(a_{2k+1} - a_{2k}) - (a_{2k} - a_{2k-1}) = 0$$
$$2(a_{2k+2} - a_{2k+1}) - (a_{2k+1} - a_{2k}) = 1$$

したがって　$\begin{cases} 2b_{2k} - b_{2k-1} = 0 \\ 2b_{2k+1} - b_{2k} = 1 \end{cases}$　$(k = 1, 2, 3, \cdots)$　　$\cdots (**)$

$(**)$ から b_{2k} を消去すると

$$4b_{2k+1} - b_{2k-1} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad b_{2k+1} = \frac{1}{4}b_{2k-1} + \frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

$(**)$ の第 1 式から　$2b_{2k+2} - b_{2k+1} = 0$

これと $(**)$ の第 2 式から，b_{2k+1} を消去すると

$$4b_{2k+2} - b_{2k} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b_{2k+2} = \frac{1}{4}b_{2k} + \frac{1}{4} \quad \cdots ②$$

①，② から　　$\boldsymbol{n}$ が奇数のとき　$\boldsymbol{b_{n+2} = \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}}$

$\boldsymbol{n}$ が偶数のとき　$\boldsymbol{b_{n+2} = \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{4}}$

(3) ① から　　$b_{2k+1}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{4}\left(b_{2k-1}-\dfrac{2}{3}\right)$

ゆえに　　$b_{2k-1}-\dfrac{2}{3}=\left(b_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$

$b_1=a_2-a_1=2-1=1$ より

$$b_{2k-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\frac{2}{3}\quad\cdots①'$$

② から　　$b_{2k+2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left(b_{2k}-\dfrac{1}{3}\right)$

ゆえに　　$b_{2k}-\dfrac{1}{3}=\left(b_2-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$

$b_2=a_3-a_2=\dfrac{5}{2}-2=\dfrac{1}{2}$ より

$$b_{2k}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}+\frac{1}{3}\quad\cdots②'$$

①′，②′ から　　$\boldsymbol{n}$ **が奇数のとき**　$\boldsymbol{b_n=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{2}{3}}$

$\boldsymbol{n}$ **が偶数のとき**　$\boldsymbol{b_n=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{1}{3}}$

別解　(∗∗) より　　$2b_{n+1}-b_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}\qquad(n=1,2,3\cdots)$

また　　$2\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{(-1)^{n+1}}{6}\right\}-\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{(-1)^n}{6}\right\}=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$

上の 2 式から　$2\left\{b_{n+1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{6}\right\}-\left\{b_n-\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^n}{6}\right\}=0$

したがって，$\left\{b_n-\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^n}{6}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．

よって　　$b_n-\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^n}{6}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

すなわち　　$\boldsymbol{b_n=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{(-1)^n}{6}}$

(4) ①′，②′ より

$$a_{2k}-a_{2k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\frac{2}{3},\quad a_{2k+1}-a_{2k}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}+\frac{1}{3}$$

上の 2 式から

$$a_{2k+1}-a_{2k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+1 \qquad \cdots ③$$

$$a_{2k+2}-a_{2k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}+1 \qquad \cdots ④$$

n が奇数のとき $(n \geqq 3)$，③ より

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(a_{2k+1}-a_{2k-1})=\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+1\right\}$$

$$a_n-1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{n-1}{2}$$

$$a_n=\frac{7}{6}+\frac{n}{2}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \qquad \cdots ③'$$

n が偶数のとき $(n \geqq 4)$，④ より

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(a_{2k+2}-a_{2k})=\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+1\right\}$$

$$a_n-2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{n-2}{2}$$

$$a_n=\frac{4}{3}+\frac{n}{2}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \qquad \cdots ④'$$

③′，④′ は，それぞれ $n=1$，$n=2$ のときも成立する．

よって　$\boldsymbol{n}$ **が奇数のとき**　$\boldsymbol{a_n=\frac{7}{6}+\frac{n}{2}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$

$\boldsymbol{n}$ **が偶数のとき**　$\boldsymbol{a_n=\frac{4}{3}+\frac{n}{2}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$

別解　$\begin{cases} 2a_{2k+1}-3a_{2k}+a_{2k-1}=0 \\ 2a_{2k+2}-3a_{2k+1}+a_{2k}=1 \end{cases}$　$(k=1,2,3,\cdots)$

上式から　$2a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$　$(n=1,2,3,\cdots)$

ここで，$f(n)=\alpha n+\beta(-1)^n$ が

$$2f(n+2)-3f(n+1)+f(n)=\frac{1+(-1)^n}{2}$$

をみたす定数 α，β を求めると　$\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\beta=\dfrac{1}{12}$

したがって　　$f(n)=\dfrac{n}{2}+\dfrac{(-1)^n}{12}$

$x_n=a_n-f(n)$ とおくと　$2x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n=0$

$\{x_n\}$ の特性方程式 $2x^2-3x+1=0$ の解が 1，$\dfrac{1}{2}$ であるから

$$x_n=p+q\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (p,\ q \text{ は定数})$$

とおける．$x_1=\dfrac{7}{12}$，$x_2=\dfrac{11}{12}$ であるから　$p=\dfrac{5}{4}$，$q=-\dfrac{4}{3}$

すなわち　　$x_n=\dfrac{5}{4}-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

よって　　$a_n=x_n+f(n)=\boldsymbol{\dfrac{5}{4}-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{n}{2}+\dfrac{(-1)^n}{12}}$

16.81　(1) $a_{n+1}a_{n-1}={a_n}^2+1>0$ より，すべての自然数 n で，$a_n\neq 0$ であるから[3]

$$a_{n+1}=\frac{{a_n}^2+1}{a_{n-1}} \quad (n\geqq 2)$$

$a_1=1$，$a_2=2$ であるから，$n=2,\ 3,\ 4$ を上式に順次代入すると

$$a_3=\frac{{a_2}^2+1}{a_1}=\frac{2^2+1}{1}=\mathbf{5},$$
$$a_4=\frac{{a_3}^2+1}{a_2}=\frac{5^2+1}{2}=\mathbf{13},$$
$$a_5=\frac{{a_4}^2+1}{a_3}=\frac{13^2+1}{5}=\mathbf{34}$$

(2) $a_{n+1}a_{n-1}={a_n}^2+1$ より $({a_{n-1}}^2=a_na_{n-2}-1)$

$$\begin{aligned}(a_{n+1}+ca_n+a_{n-1})a_{n-1}&=a_{n+1}a_{n-1}+ca_na_{n-1}+{a_{n-1}}^2\\&=({a_n}^2+1)+ca_na_{n-1}+(a_na_{n-2}-1)\\&=a_n(a_n+ca_{n-1}+a_{n-2})\end{aligned}$$

(3) すべての n について，$a_n\neq 0$ であるから，(2) の結果より

$$\frac{a_{n+1}+ca_n+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n+ca_{n-1}+a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2015.pdf [4] を参照.

したがって　　$\dfrac{a_n+ca_{n-1}+a_{n-2}}{a_{n-1}}=\dfrac{a_3+ca_2+a_1}{a_1}$

$c=-3$ のとき，$a_3+ca_2+a_1=5-3\cdot2+1=0$ より

$$a_n-3a_{n-1}+a_{n-2}=0$$

補足　フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ の特性方程式 $x^2-x-1=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$f_n-(\alpha+\beta)f_{n-1}+\alpha\beta f_{n-2}=0$$

$f_1=1,\ f_2=1$ であるから　　$f_n=\dfrac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}$

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$ より，$\alpha^2+\beta^2=3,\ \alpha^2\beta^2=1$ であるから

$$a_n-(\alpha^2+\beta^2)a_{n-1}+\alpha^2\beta^2a_{n-2}=0$$

$a_1=1,\ a_2=2$ より　　$a_n=\dfrac{\beta^{2n-1}-\alpha^{2n-1}}{\beta-\alpha}=f_{2n-1}$

16.82　(1) 漸化式から

$$a_1=1,\quad a_2=1,\quad a_3=2,\quad a_4=3,\quad a_5=5,\quad a_6=8$$

したがって

$$b_1=\cos\pi=\boldsymbol{-1},\qquad b_2=\cos\pi=\boldsymbol{-1},\qquad b_3=\cos2\pi=\boldsymbol{1},$$
$$b_4=\cos3\pi=\boldsymbol{-1},\qquad b_5=\cos5\pi=\boldsymbol{-1},\qquad b_6=\cos8\pi=\boldsymbol{1}$$

(2) 漸化式から

$$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}=(a_{n+1}+a_n)+a_{n+1}=2a_{n+1}+a_n$$

上式および $\{a_n\}$ が整数であることから

$$b_{n+3}=\cos(a_{n+3}\pi)=\cos\{(2a_{n+1}+a_n)\pi\}=\cos(a_n\pi)=b_n$$

したがって　　$\boldsymbol{b_{n+3}=b_n}$

(3) (2) の結果により　$b_{100}=b_1=\boldsymbol{-1}$

(4) (1) と同様にして

$$c_1=\cos\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{0},\qquad c_2=\cos\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{0},\qquad c_3=\cos\frac{2}{2}\pi=\boldsymbol{-1},$$
$$c_4=\cos\frac{3}{2}\pi=\boldsymbol{0},\qquad c_5=\cos\frac{5}{2}\pi=\boldsymbol{0},\qquad c_6=\cos\frac{8}{2}\pi=\boldsymbol{1}$$

(5) 漸化式から

$$\begin{aligned} a_{n+6} &= a_{n+5} + a_{n+4} = (a_{n+4} + a_{n+3}) + a_{n+4} = 2a_{n+4} + a_{n+3} \\ &= 2(a_{n+3} + a_{n+2}) + a_{n+3} = 3a_{n+3} + 2a_{n+2} \\ &= 3(a_{n+2} + a_{n+1}) + 2a_{n+2} = 4(a_{n+2} + a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &= 4(a_{n+2} + a_{n+1}) + a_n \end{aligned}$$

上式および $\{a_n\}$ が整数であることから

$$\begin{aligned} c_{n+6} &= \cos\left(\frac{a_{n+6}}{2}\pi\right) \\ &= \cos\left\{\frac{4(a_{n+2} + a_{n+1}) + a_n}{2}\pi\right\} = \cos\left(\frac{a_n}{2}\pi\right) = c_n \end{aligned}$$

したがって　　$c_{n+6} = c_n$

上式および (4) の結果から　　$c_{2007} = c_3 = \boldsymbol{-1}$

16.83 (1) $\{x_n\}$ は，初項が 2，公比が 2 の等比数列であるから

$$x_n = 2 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^n}$$

したがって，$y_{n+1} = 3x_n + y_n$ より　$y_{n+1} - y_n = 3 \cdot 2^n$

$n > 1$ のとき　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(y_{k+1} - y_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$

$$y_n - y_1 = \frac{6(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

$$y_n = 3 \cdot 2^n - 6$$

$n = 1$ のときも成り立つので　$y_n = \boldsymbol{3 \cdot 2^n - 6}$

(2) $a_{n+1} = ra_n + cs^n + d$ より

$$a_{n+1} - ra_n = cs^n + d \quad \cdots ①$$

$a_{n+1} + f_{n+1} = r(a_n + f_n)$，$f_n = ps^n + q$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - ra_n &= -f_{n+1} + rf_n \\ &= -(ps^{n+1} + q) + r(ps^n + q) \\ &= p(r - s)s^n + q(r - 1) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② より　　$cs^n + d = p(r - s)s^n + q(r - 1)$

これが n についての恒等式であるから

$$c = p(r-s), \quad d = q(r-1)$$

このとき，$r \neq s$，$r \neq 1$ より　　$\boldsymbol{p = \dfrac{c}{r-s}}$, $\boldsymbol{q = \dfrac{d}{r-1}}$

(3) $z_{n+1} = x_n - 2y_n + 3z_n$ に (1) の結果を代入すると

$$z_{n+1} = 2^n - 2(3\cdot 2^n - 6) + 3z_n \quad \text{ゆえに} \quad z_{n+1} = 3z_n - 5\cdot 2^n + 12$$

(2) の a_n に z_n を適用すると　$r = 3$，$c = -5$，$s = 2$，$d = 12$

また　$p = \dfrac{-5}{3-2} = -5$，$q = \dfrac{12}{3-1} = 6$　ゆえに　$f_n = -5\cdot 2^n + 6$　$\cdots$③

このとき，$z_{n+1} + f_{n+1} = 3(z_n + f_n)$ より

$$z_n + f_n = (z_1 + f_1)\cdot 3^{n-1} = (0-4)\cdot 3^{n-1} = -4\cdot 3^{n-1} \quad \cdots ④$$

③，④ より　　$\boldsymbol{z_n = 5\cdot 2^n - 4\cdot 3^{n-1} - 6}$

別解 $z_{n+1} = 3z_n - 5\cdot 2^n + 12$ より　　$\dfrac{z_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{z_n}{3^n} = -\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

したがって，$n > 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{z_{k+1}}{3^{k+1}} - \frac{z_k}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k + 4\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}$$

$$\frac{z_n}{3^n} - \frac{z_1}{3} = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{4}{3}$$

$$z_n = 5\cdot 2^n - 4\cdot 3^{n-1} - 6$$

$n = 1$ のときも，上式は成り立つ．よって　$z_n = 5\cdot 2^n - 4\cdot 3^{n-1} - 6$

16.84 (1) 最初に平面に接していた面を A とする．

i) $n = 1$ のとき，A 以外の面が底面になるから　$\boldsymbol{p_1 = 0}$

ii) $n = 2$ のとき，1 回目の操作で A は側面にあり，2 回目の操作で A が底面になるから　$\boldsymbol{p_2 = \dfrac{1}{3}}$

iii) $n = 3$ のとき，2 回目の操作で A が側面にあり，3 回目の操作で A が底面になるから

$$p_3 = (1 - p_2) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2) n 回目の操作で A が側面にあり，$n+1$ 回目の操作で A が底面になるから

$$p_{n+1}=(1-p_n)\times\frac{1}{3}\quad\text{ゆえに}\quad p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$$

数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $p_1-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$$

16.85 (1) 初めて連続して 2 回赤玉を取り出す事象を A_2 とする．
また,「$*$」は赤玉または白玉を表すこととする．
2 回目で事象 A_2 が起こるのは「赤赤」の順に取り出す確率

$$P(2,\ 2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

3 回目で事象 A_2 が起こるのは「白赤赤」の順に取り出す確率

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

4 回目で事象 A_2 が起こるのは「$*$白赤赤」の順に取り出す確率

$$1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

$P(3,\ 2)=P(2,\ 2)+\dfrac{2}{27}$，$P(4,\ 2)=P(3,\ 2)+\dfrac{2}{27}$ であるから

$$P(2,\ 2)=\boldsymbol{\frac{1}{9}},\quad P(3,\ 2)=\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\boldsymbol{\frac{5}{27}},\quad P(4,\ 2)=\frac{5}{27}+\frac{2}{27}=\boldsymbol{\frac{7}{27}}$$

(2) 初めて連続して m 回赤玉を取り出す事象を A_m とする．

m 回目で事象 A_m が起こるのは「$\overbrace{赤\cdots赤}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$P(m,\ m)=\left(\frac{1}{3}\right)^m=\frac{1}{3^m}$$

$m+1$ 回目で事象 A_m が起こるのは「白$\overbrace{赤\cdots赤}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^m=\frac{2}{3^{m+1}}$$

$m+2$ 回目で事象 A_m が起こるのは「$*$ 白 $\overbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^m=\frac{2}{3^{m+1}}$$

よって　　$P(m,\ m)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3^m}}$,

$$P(m+1,\ m)=P(m,\ m)+\frac{2}{3^{m+1}}=\boldsymbol{\frac{5}{3^{m+1}}},$$

$$P(m+2,\ m)=P(m+1,\ m)+\frac{2}{3^{m+1}}=\boldsymbol{\frac{7}{3^{m+1}}}$$

(3) n 回目で事象 A_m が起こるのは「$\overbrace{*\cdots*}^{n-m-1\text{ 個}}$ 白 $\overbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$P(n,\ m)-P(n-1,\ m)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^m=\boldsymbol{\frac{2}{3^{m+1}}}$$

(4) (2)，(3) の結果から

$$\sum_{n=m+1}^{2m}\{P(n,\ m)-P(n-1,\ m)\}=\sum_{n=m+1}^{2m}\frac{2}{3^{m+1}}$$

$$P(2m,\ m)-P(m,\ m)=\frac{2m}{3^{m+1}}$$

よって　　$P(2m,\ m)=P(m,\ m)+\dfrac{2m}{3^{m+1}}=\boldsymbol{\dfrac{2m+3}{3^{m+1}}}$

16.86 (1) 1 個体が 1 日目に生存し，2 日目にも生存している確率が p であるから，2 日目に生存していない確率は $1-p$．よって，$X_2=0$ となるのは，2 日目に n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$\boldsymbol{(1-p)^n}$$

(2) 1 個体が 1 日目に生存し，3 日目にも生存している確率が p^2 であるから，3 日目に生存していない確率は $1-p^2$．よって，$X_3=0$ となるのは，3 日目に n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$\boldsymbol{(1-p^2)^n}$$

(3) k 日目に n 個の個体すべてが生存していない確率を $P(X_k=0)$ とすると

$$P(X_k=0)=(1-p^{k-1})^n$$

求める確率は，k 日目に少なくとも 1 個の個体が生存し，$k+1$ 日目には n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$P(X_{k+1}=0)-P(X_k=0)=\boldsymbol{(1-p^k)^n-(1-p^{k-1})^n}$$

16.87 (1) サイコロを n 回投げたとき点Xが，頂点A，B，Cにある確率を，それぞれ P_n，Q_n，R_n とすると

$$P_1 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ Q_1 = \frac{1}{6},\ R_1 = \frac{1}{6},$$
$$P_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n \qquad \cdots ①$$
$$Q_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{2}{3}Q_n + \frac{1}{6}R_n \qquad \cdots ②$$
$$R_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{2}{3}R_n \qquad \cdots ③$$

したがって

$$P_2 = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{6}Q_1 + \frac{1}{6}R_1 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$
$$Q_2 = \frac{1}{6}P_1 + \frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{6}R_1 = \frac{1}{6}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$
$$R_2 = \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{6}Q_1 + \frac{2}{3}R_1 = \frac{1}{6}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$
$$P_3 = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{6}Q_2 + \frac{1}{6}R_2 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$$

(2) ①，②，③ の辺々を加えると，(1) の第1式から

$$P_{n+1} + Q_{n+1} + R_{n+1} = P_n + Q_n + R_n = 1 \qquad \cdots ④$$

②，③ の辺々を加えると

$$Q_{n+1} + R_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{5}{6}(Q_n + R_n)$$

④ より，$Q_{n+1} + R_{n+1} = 1 - P_{n+1}$，$Q_n + R_n = 1 - P_n$ を上式に代入すると

$$1 - P_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{5}{6}(1 - P_n) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{6}}$$

(3) (2) の結果から $\quad P_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}\left(P_n - \dfrac{1}{3}\right)$

したがって $\quad P_n - \dfrac{1}{3} = \left(P_1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

これに $P_1 = \dfrac{2}{3}$ を代入すると $\quad \boldsymbol{P_n = \frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

16.88 (1) p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} をそれぞれ p_n，q_n，r_n を用いて表すと

$$p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{4}{6}r_n \qquad \cdots ①$$
$$q_{n+1} = \frac{4}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n \qquad \cdots ②$$
$$r_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{4}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n \qquad \cdots ③$$

となる．また

$$p_1 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}, \quad q_1 = \frac{4}{6}, \quad r_1 = \frac{1}{6}$$

であるから

$$p_2 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}q_1 + \frac{4}{6}r_1 = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{4}{6} + \frac{4}{6}\times\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(2) (1) と同様に

$$q_2 = \frac{4}{6}p_1 + \frac{1}{6}q_1 + \frac{1}{6}r_1 = \frac{4}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$
$$r_2 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{4}{6}q_1 + \frac{1}{6}r_1 = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\times\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(1) と上の結果から

$$p_3 = \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}q_2 + \frac{4}{6}r_2 = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} + \frac{4}{6}\times\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

(3) ①，②，③ の辺々を加えると

$$p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1} = p_n + q_n + r_n$$

$p_1 + q_1 + r_1 = 1$ であるから　　$p_n + q_n + r_n = 1 \quad \cdots ④$

①，④ により　　$\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{6}}$

(4) (3) と同様に，④ から ②，③ は

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{6}$$

となる．したがって，(3) の結果と上の 2 式から

$$\begin{aligned} p_{n+3} &= \frac{1}{2}r_{n+2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}q_{n+1} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{8}p_n + \frac{7}{24}} \end{aligned}$$

(5) (4) の結果から　$p_{3n+3} = \dfrac{1}{8}p_{3n} + \dfrac{7}{24}$

ゆえに　$p_{3(n+1)} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{8}\left(p_{3n} - \dfrac{1}{3}\right)$

したがって　$p_{3n} - \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}\left(p_3 - \dfrac{1}{3}\right)$

よって　$\boldsymbol{p_{3n} = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}}$

16.89 (1) p_2 は，2 回連続して裏が出る確率であるから

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

p_3 は,「表表裏」の順に出る確率であるから

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

(2) (1) の結果から

$$p_4 = p_2 \times p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{16}}$$
$$p_5 = p_3 \times p_2 + p_2 \times p_3 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{1}{16}}$$

(3) (2) の結果から

$$p_6 = p_4 \times p_2 + p_3 \times p_3 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$
$$p_7 = p_5 \times p_2 + p_4 \times p_3 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{128}$$
$$p_8 = p_6 \times p_2 + p_5 \times p_3 = \frac{1}{32} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$
$$p_9 = p_7 \times p_2 + p_6 \times p_3 = \frac{3}{128} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{32} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{512}$$
$$p_{10} = p_8 \times p_2 + p_7 \times p_3 = \frac{1}{64} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{128} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{1024}$$

よって

$$p_{12} = p_{10} \times p_2 + p_9 \times p_3 = \frac{7}{1024} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{512} \times \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{3}{1024}}$$

別解　$p_{12} = (p_2)^6 + {}_5\mathrm{C}_2(p_2)^3(p_3)^2 + (p_3)^4$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^6 + 10\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{3}{1024}$$

16.90 (1) 試行を n 回繰り返したとき，点 Q が，頂点 A，B，C，D にある確率をそれぞれ，$P_n(\mathrm{A})$，$P_n(\mathrm{B})$，$P_n(\mathrm{C})$，$P_n(\mathrm{D})$ とすると

$$P_1(\mathrm{A}) = P_1(\mathrm{C}) = 0,\ P_1(\mathrm{B}) = P_1(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}$$

また，次式が成り立つ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

$$P_{n+1}(\mathrm{A}) = P_{n+1}(\mathrm{C}) = \frac{1}{2}P_n(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_n(\mathrm{D})$$
$$P_{n+1}(\mathrm{B}) = P_{n+1}(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}P_n(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_n(\mathrm{C})$$

したがって
$$P_2(\mathrm{A}) = P_2(\mathrm{C}) = \frac{1}{2}P_1(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_1(\mathrm{D}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$
$$P_2(\mathrm{B}) = P_2(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}P_1(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_1(\mathrm{C}) = \boldsymbol{0}$$
$$P_3(\mathrm{A}) = P_3(\mathrm{C}) = \frac{1}{2}P_2(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_2(\mathrm{D}) = \boldsymbol{0}$$
$$P_3(\mathrm{B}) = P_3(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}P_2(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_2(\mathrm{C}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$
$$P_4(\mathrm{A}) = P_4(\mathrm{C}) = \frac{1}{2}P_3(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_3(\mathrm{D}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$
$$P_4(\mathrm{B}) = P_4(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}P_3(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_3(\mathrm{C}) = \boldsymbol{0}$$

(2) 試行を n 回繰り返したときの確率を (1) と同様に定めると

$$P_1(\mathrm{A}) = P_1(\mathrm{C}) = 0,\ P_1(\mathrm{B}) = p,\ P_1(\mathrm{D}) = 1 - p$$

また，次式が成り立つ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

$$P_{n+1}(\mathrm{A}) = (1-p)P_n(\mathrm{B}) + pP_n(\mathrm{D})$$
$$P_{n+1}(\mathrm{B}) = pP_n(\mathrm{A}) + (1-p)P_n(\mathrm{C})$$
$$P_{n+1}(\mathrm{C}) = pP_n(\mathrm{B}) + (1-p)P_n(\mathrm{D})$$
$$P_{n+1}(\mathrm{D}) = (1-p)P_n(\mathrm{A}) + pP_n(\mathrm{C})$$

したがって
$$P_2(\mathrm{A}) = (1-p)P_1(\mathrm{B}) + pP_1(\mathrm{D}) = -2p^2 + 2p$$
$$P_2(\mathrm{B}) = pP_1(\mathrm{A}) + (1-p)P_1(\mathrm{C}) = 0$$
$$P_2(\mathrm{C}) = pP_1(\mathrm{B}) + (1-p)P_1(\mathrm{D}) = 2p^2 - 2p + 1$$
$$P_2(\mathrm{D}) = (1-p)P_1(\mathrm{A}) + pP_1(\mathrm{C}) = 0$$

$p > \dfrac{1}{2}$ であるから　$P_2(\mathrm{C}) - P_2(\mathrm{A}) = (2p-1)^2 > 0$

よって，試行を 2 回繰り返すとき，点 Q が頂点 C にある確率が最大となる.

さらに

$$\begin{aligned}
P_3(\mathrm{A}) &= (1-p)P_2(\mathrm{B}) + pP_2(\mathrm{D}) \\
&= 0 \\
P_3(\mathrm{B}) &= pP_2(\mathrm{A}) + (1-p)P_2(\mathrm{C}) \\
&= p(-2p^2+2p) + (1-p)(2p^2-2p+1) \\
&= -4p^3+6p^2-3p+1 \\
P_3(\mathrm{C}) &= pP_2(\mathrm{B}) + (1-p)P_2(\mathrm{D}) \\
&= 0 \\
P_3(\mathrm{D}) &= (1-p)P_2(\mathrm{A}) + pP_2(\mathrm{C}) \\
&= (1-p)(-2p^2+2p) + p(2p^2-2p+1) \\
&= 4p^3-6p^2+3p
\end{aligned}$$

$p > \dfrac{1}{2}$ であるから　$P_3(\mathrm{D}) - P_3(\mathrm{B}) = (2p-1)^3 > 0$

よって，試行を 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となる．

16.91 (1) A，B が赤球で一致する確率は　$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

A，B が白球で一致する確率は　$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$

これらの事象は互いに排反であるから　$\dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = \boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

(2) A，B が取り出す球の色が一致する確率を p，一致しない確率を q とすると

$$p = \frac{5}{9}, \quad q = 1 - p = \frac{4}{9}$$

よって　$P_2 = pq + qp = 2pq$

$$= 2 \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \boldsymbol{\frac{40}{81}}$$

$$P_3 = pqp + pqq + qpq + qqp = pq(p+3q)$$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{4}{9}\left(\frac{5}{9} + 3 \times \frac{4}{9}\right) = \boldsymbol{\frac{340}{729}}$$

(3) A と B が n 回の試行の中で取り出す球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない事象は，次の i)〜iii) の和事象である．このとき，i)，ii)，iii) は互いに排反である．

i) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致せず，2 回目から n 回目にかけて，一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない．

ii) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致し，2 回目に一致せず，3 回目から n 回目にかけて，一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない．

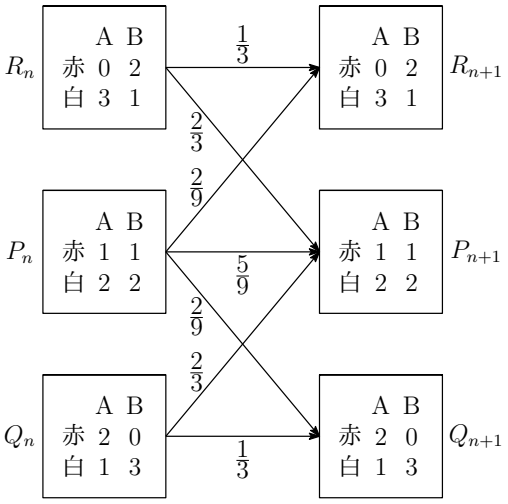
iii) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致し，2 回目から n 回目にかけて一致しない．

よって $\quad P_n = \dfrac{4}{9}P_{n-1} + \dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{9}P_{n-2} + \dfrac{5}{9} \times \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$

$$= \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{20}{81}P_{n-2} + \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

16.92 (1) 確率 P_{n+1}，Q_{n+1}，R_{n+1} は，確率 P_n，Q_n，R_n を用いた次の確率漸化式によって定まる．

$$(*)\begin{cases} P_{n+1} = \dfrac{5}{9}P_n + \dfrac{2}{3}Q_n + \dfrac{2}{3}R_n \\ Q_{n+1} = \dfrac{2}{9}P_n + \dfrac{1}{3}Q_n \\ R_{n+1} = \dfrac{2}{9}P_n + \dfrac{1}{3}R_n \end{cases}$$



初めに 2 つの袋 A，B のそれぞれに，赤玉 1 個と白玉 2 個の合計 3 個が入っているから

$$\boldsymbol{P_1 = \frac{5}{9},\quad Q_1 = \frac{2}{9},\quad R_1 = \frac{2}{9}}$$

(2) (1) の結果および $(*)$ の第 1 式により

$$P_2 = \frac{5}{9}P_1 + \frac{2}{3}Q_1 + \frac{2}{3}R_1 = \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{49}{81}}$$

(3) $P_n + Q_n + R_n = 1$ および $(*)$ の第 1 式から，Q_n，R_n を消去すると

$$P_{n+1} = \frac{5}{9}P_n + \frac{2}{3}(Q_n + R_n) = \frac{5}{9}P_n + \frac{2}{3}(1 - P_n) = \boldsymbol{-\frac{1}{9}P_n + \frac{2}{3}}$$

(4) (3) の結果から $\quad P_{n+1} - \dfrac{3}{5} = -\dfrac{1}{9}\left(P_n - \dfrac{3}{5}\right)$

ゆえに $\quad P_n - \dfrac{3}{5} = \left(P_1 - \dfrac{3}{5}\right)\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$ $\quad$ よって $\quad \boldsymbol{P_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{9}\right)^n}$

補足 $(*)$ の第 2・3 式から　$Q_{n+1}-R_{n+1}=\dfrac{1}{3}(Q_n-R_n)$

$Q_1=R_1=\dfrac{2}{9}$ であるから　　$Q_n=R_n$

よって　　$Q_n=R_n=\dfrac{1}{2}(1-P_n)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n$

16.93　(1) 定められたルールにより，次の確率漸化式が得られる．

$$(*)\quad a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+c_n),\quad b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+b_n),\quad c_{n+1}=\frac{1}{4}(b_n+c_n)$$

$d_n=a_n+b_n+c_n$ $(n=1,2,\cdots)$ とすると

$$d_1=a_1+b_1+c_1=1+0+0=1$$

$(*)$ の辺々を加えることにより

$$d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n\quad\text{ゆえに}\quad d_n=\frac{1}{2^{n-1}}\quad\cdots①$$

したがって，$(*)$ は

$$a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-b_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}b_n$$
$$b_{n+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-c_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}c_n$$
$$c_{n+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-a_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}a_n$$

上の 3 式から，$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4}c_{n-1}\right)=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{16}c_{n-1}\\&=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{4}a_{n-2}\right)=\frac{3}{2^{n+3}}-\frac{1}{64}a_{n-2}\quad\cdots②\end{aligned}$$

② に $n=3,\ 6$ を代入することにより

$$a_4=\frac{3}{2^6}-\frac{1}{64}a_1=\frac{3}{64}-\frac{1}{64}\cdot 1=\frac{1}{32}$$
$$a_7=\frac{3}{2^9}-\frac{1}{64}a_4=\frac{3}{512}-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{32}=\frac{11}{2048}$$

よって　A が 4 回目に勝つ確率は　$a_4\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{32}\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{64}}$

A が 7 回目に勝つ確率は　$a_7\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{11}{2048}\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{11}{4096}}$

(2) ① より　$\boldsymbol{d_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}}$

(3) ② より　$\boldsymbol{a_{n+1} = \dfrac{3}{2^{n+3}} - \dfrac{1}{64}a_{n-2}}$

16.94 (1) 1 回の操作で，偶数，奇数が出る確率は，それぞれ

$$\frac{M}{M+N},\ \frac{N}{M+N}$$

である．したがって　$p_1 = \boldsymbol{\dfrac{M}{M+N}}$

2 回の操作で記録された 2 個の数の和が偶数となるのは，2 回とも偶数のカードまたは 2 回とも奇数のカードを取り出す場合であるから

$$p_2 = \left(\frac{M}{M+N}\right)^2 + \left(\frac{N}{M+n}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}}$$

(2) $n+1$ 回の操作で $n+1$ 個の数の和が偶数となるのは，n 回までのカードの和が偶数で $n+1$ 回目で偶数のカードを取り出すか，n 回までのカードの和が奇数で $n+1$ 回目で奇数のカードを取り出す場合であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times \frac{M}{M+N} + (1-p_n) \times \frac{N}{M+N} \\ &= \boldsymbol{\frac{M-N}{M+N}p_n + \frac{N}{M+N}} \end{aligned}$$

(3) $M+N$ は，1 から k までの自然数の和であるから

$$M+N = 1+2+3+\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

i) k が偶数のとき，M，N の項数はともに $\dfrac{k}{2}$ であるから

$$M = 2+4+6+\cdots+k = \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2}\cdot(2+k) = \frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}$$

$$N = 1+3+5+\cdots+(k-1) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}$$

したがって　$\dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{\left(\frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}\right)-\frac{k^2}{4}}{\frac{1}{2}k(k+1)} = \dfrac{1}{k+1}$

ii) k が奇数のとき，M，N の項数はそれぞれ $\dfrac{k-1}{2}$，$\dfrac{k+1}{2}$ であるから

$$M = 2+4+6+\cdots+(k-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}\cdot\{2+(k-1)\} = \frac{k^2}{4}-\frac{1}{4}$$
$$N = 1+3+5+\cdots+k = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}+\frac{1}{4}$$

したがって $\dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{\frac{k^2}{4}-\frac{1}{4}-\left(\frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}k(k+1)} = -\dfrac{1}{k}$

i)，ii) より $\boldsymbol{\dfrac{M-N}{M+N} = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1} & (k\text{ が偶数のとき}) \\ -\dfrac{1}{k} & (k\text{ が奇数のとき}) \end{cases}}$

(4) (2) の結果から

$$p_{n+1}-\frac{1}{2} = \frac{M-N}{M+N}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，公比 $\dfrac{M-N}{M+N}$ の等比数列であるから，これに (1) の結果を代入すると

$$p_n-\frac{1}{2} = \left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}$$
$$p_n = \left(\frac{M}{M+N}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^n+\frac{1}{2}$$

したがって，(3) の結果により

$$\boldsymbol{p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^n+\dfrac{1}{2} & (k\text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n+\dfrac{1}{2} & (k\text{ が奇数のとき}) \end{cases}}$$

16.95 (1) p_1 は，A，B それぞれの袋から「白，白」または「赤，赤」の順に取り出す確率であるから

$$p_1 = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

q_1 は，A，B それぞれの袋から「白，赤」の順に取り出す確率であるから

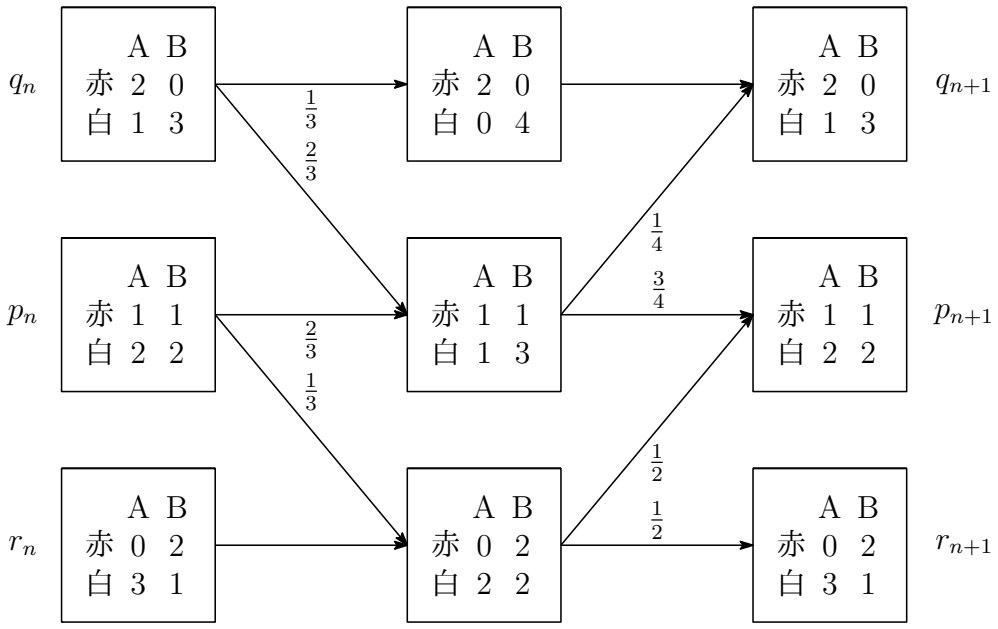
$$q_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

r_1 は，A，B それぞれの袋から「赤，白」の順に取り出す確率であるから

$$r_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) 下の図の確率過程により

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \left(\frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n\right) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{3}p_n + r_n\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n} \qquad \cdots ① \\ q_{n+1} &= \left(\frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n\right) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3}q_n = \boldsymbol{\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}q_n} \qquad \cdots ② \\ r_{n+1} &= \left(\frac{1}{3}p_n + r_n\right) \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}r_n} \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$



(3) ② − ③ より　　$q_{n+1} - r_{n+1} = \dfrac{1}{2}(q_n - r_n)$

ゆえに　　$q_n - r_n = (q_1 - r_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(1) の結果から，$q_1 - r_1 = 0$ であるから　$q_n = r_n$

(4) ①＋②＋③ より　$p_{n+1}+q_{n+1}+r_{n+1}=p_n+q_n+r_n$

ゆえに　$p_n+q_n+r_n=p_1+q_1+r_1=1$

これに (2) の結果を代入すると　$p_n=1-2q_n$　$\cdots$④

上式と ② から　$q_{n+1}=\dfrac{1}{6}q_n+\dfrac{1}{6}$　ゆえに　$q_{n+1}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{6}\left(q_n-\dfrac{1}{5}\right)$

したがって　$q_n-\dfrac{1}{5}=\left(q_1-\dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

すなわち　$\boldsymbol{q_n=r_n=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$

上式を ④ に代入すると　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$

16.96 (1) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると，箱 B には黒玉 2 個と白玉 2 個が入っている．

箱 A に黒玉が 1 個入っている (箱 B から白玉 2 個を取り出す) 確率 p_1 は

$$p_1=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

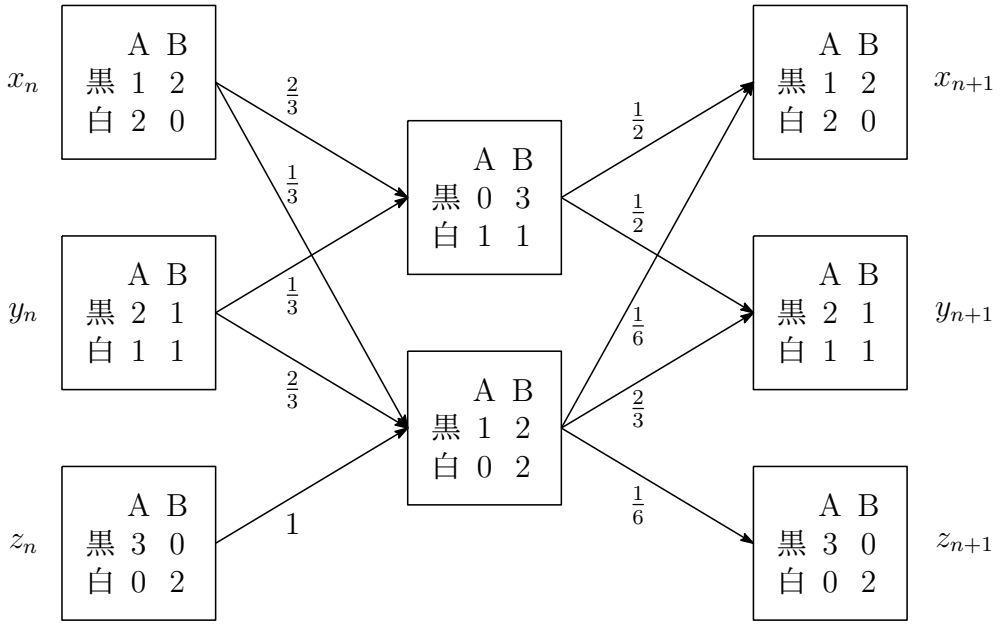
箱 A に黒玉が 2 個入っている (箱 B から黒玉 1 個と白玉 1 個を取り出す) 確率 p_2 は

$$p_2=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

箱 A に黒玉が 3 個入っている (箱 B から黒玉 2 個を取り出す) 確率 p_3 は

$$p_3=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) 試行 T を n 回行ったとき，箱 A に黒玉が 1 個，2 個，3 個ある確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると



$$x_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)x_n + \left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)y_n + 1\times\frac{1}{6}z_n$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)x_n + \left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)y_n + 1\times\frac{2}{3}z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}\times\frac{1}{6}y_n + 1\times\frac{1}{6}z_n$$

$x_1 = p_1$，$y_1 = p_2$，$z_1 = p_3$ であるから　$x_1 = \dfrac{1}{6}$，　$y_1 = \dfrac{2}{3}$，　$z_1 = \dfrac{1}{6}$

$$x_{n+1} = \frac{7}{18}x_n + \frac{5}{18}y_n + \frac{1}{6}z_n$$

$$y_{n+1} = \frac{5}{9}x_n + \frac{11}{18}y_n + \frac{2}{3}z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{18}x_n + \frac{1}{9}y_n + \frac{1}{6}z_n$$

したがって

$$x_2 = \frac{7}{18}x_1 + \frac{5}{18}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{7}{18}\times\frac{1}{6} + \frac{5}{18}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

$$y_2 = \frac{5}{9}x_1 + \frac{11}{18}y_1 + \frac{2}{3}z_1 = \frac{5}{9}\times\frac{1}{6} + \frac{11}{18}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{6} = \frac{11}{18}$$

$$z_2 = \frac{1}{18}x_1 + \frac{1}{9}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{1}{18}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

$q_1 = x_2$，$q_2 = y_2$，$q_3 = z_2$ であるから

$$\boldsymbol{q_1 = \frac{5}{18}},\quad \boldsymbol{q_2 = \frac{11}{18}},\quad \boldsymbol{q_3 = \frac{1}{9}}$$

(3) 求める確率は z_3 であるから，(2) の結果より

$$z_3 = \frac{1}{18}x_2 + \frac{1}{9}y_2 + \frac{1}{6}z_2 = \frac{1}{18} \times \frac{5}{18} + \frac{1}{9} \times \frac{11}{18} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \boldsymbol{\frac{11}{108}}$$

補足 $x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1}$ が $x_n,\ y_n,\ z_n$ によって定まる (1 つ前の時点だけを考慮する)．このような確率過程をマルコフ連鎖 (Markov chain) という．

16.97 (1) 時刻と位置の変化は次のようになる．

時刻	0	1	2	3
位置	2	1	0	0

よって，求める確率は　　$(1-p)^2 \cdot 1 = \boldsymbol{(1-p)^2}$

(2) 時刻と位置の変化は次のようになる．

時刻	0	1	2	3
位置	1	0	0	0

または

時刻	0	1	2	3
位置	1	2	1	0

よって，求める確率は

$$(1-p) \cdot 1^2 + p \cdot (1-p)^2 = \boldsymbol{(1-p)(1+p-p^2)}$$

(3) $q_i = pq_{i+1} + (1-p)q_{i-1}$ より

$$pq_{i+1} - q_i + (1-p)q_{i-1} = 0$$

この確率漸化式の特性方程式は

$$pt^2 - t + 1 - p = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 1,\ \frac{1-p}{p}$$

したがって，次の 2 式が成り立つ．

$$q_{i+1} - \frac{1-p}{p}q_i = q_i - \frac{1-p}{p}q_{i-1} \qquad \cdots ①$$

$$q_{i+1} - q_i = \frac{1-p}{p}(q_i - q_{i-1}) \qquad \cdots ②$$

よって，求める空欄 (a) は　　$\boldsymbol{\dfrac{1-p}{p}}$

補足 確率漸化式 $q_{i+1} - (\alpha+\beta)q_i + \alpha\beta q_{i-1} = 0$ から，次の 2 式が成り立つ．

$$q_{i+1} - \beta q_i = \alpha(q_i - \beta q_i), \quad q_{i+1} - \alpha q_i = \beta(q_i - \alpha q_i)$$

(4) $\alpha = \dfrac{1-p}{p}$ とおくと，①，② より

$$q_{i+1} - \alpha q_i = q_1 - \alpha q_0, \quad q_{i+1} - q_i = \alpha^i (q_1 - q_0)$$

$q_0 = 1$ をこれに代入すると

$$q_{i+1} - \alpha q_i = q_1 - \alpha, \quad q_{i+1} - q_i = \alpha^i (q_1 - 1)$$

上の 2 式の辺々を引いて

$$(\alpha - 1) q_i = q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - \alpha)$$

ここで，$0 < p < \dfrac{1}{2}$ より

$$\alpha - 1 = \frac{1-p}{p} - 1 = \frac{1-2p}{p} > 0$$

したがって $\qquad q_i = \dfrac{q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - \alpha)}{\alpha - 1}$

よって $\qquad \boldsymbol{q_i = \dfrac{p}{1-2p}\left[q_1\left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^i - 1\right\} - \left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^i - \frac{1-p}{p}\right\}\right]}$

(5) $q_{10} = 0$ を (4) の結果に代入すると

$$q_1\left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1\right\} - \left\{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \frac{1-p}{p}\right\} = 0$$

ゆえに $\qquad \boldsymbol{q_1 = \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \frac{1-p}{p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1}}$

上式および (4) の結果から

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{(q_1 - 1)\alpha^i - q_1 + \alpha}{\alpha - 1} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1}\left\{\left(\frac{\alpha^{10} - \alpha}{\alpha^{10} - 1} - 1\right)\alpha^i - \frac{\alpha^{10} - \alpha}{\alpha^{10} - 1} + \alpha\right\} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1}\left\{\frac{(1-\alpha)\alpha^i}{\alpha^{10} - 1} + \frac{\alpha^{10}(\alpha - 1)}{\alpha^{10} - 1}\right\} \\ &= \frac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{10} - 1} \end{aligned}$$

補足 (九工大 [情]2014) 4

16.98 $a_n > 0$ であるから，$\sqrt[3]{3}{a_{n+2}}^3 = {a_n}^4$ の両辺を 3 を底とする対数をとると

$$\frac{1}{3} + 3\log_3 a_{n+2} = 4\log_3 a_n$$

$n = 2k-1$ (k は自然数) とおくと

$$\frac{1}{3} + 3\log_3 a_{2k+1} = 4\log_3 a_{2k-1}$$

さらに，$b_k = \log_3 a_{2k-1} \cdots ①$ とおくと (k は自然数)

$$b_1 = \log_3 a_1 = 0, \quad \frac{1}{3} + 3b_{k+1} = 4b_k$$

したがって $\quad b_{k+1} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\left(b_k - \frac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{b_k - \frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $-\frac{1}{3}$，公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列であるから

$$b_k - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_k = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

① から $\quad \log_3 a_{2k-1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\} \quad$ よって $\quad \boldsymbol{a_{2k-1} = 3^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}}}$

16.99 (1) ${a_{n+1}} = {a_n}^2 - a_n + 1 \cdots ①$ より

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} \geqq a_n$$

$a_1 = 2$ であるから，すべての自然数 n に対して $\quad a_n \geqq 2 \cdots ②$

よって，すべての自然数 n に対して $\quad a_n > 0$

(2) ① から $\quad a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) \quad \cdots ③$

②，③ から，$\frac{a_{n+1}-1}{a_n - 1} = a_n$ が成り立つから

$$\frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} = a_1, \ \frac{a_3 - 1}{a_2 - 1} = a_2, \ \cdots, \ \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = a_n$$

これらの式の辺々を掛けて

$$\frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} \times \frac{a_3 - 1}{a_2 - 1} \times \cdots \times \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_1 - 1} = P_n$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_{n+1} = P_n + 1$ が成り立つ．

(3) $a_1 = 2$，$a_2 = {a_1}^2 - a_1 + 1 = 2^2 - 2 + 1 = 3$

$a_3 = {a_2}^2 - a_2 + 1 = 3^2 - 3 + 1 = 7$

$a_4 = {a_3}^2 - a_3 + 1 = 7^2 - 7 + 1 = 43$

$$S_1 = \frac{1}{a_1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{a_3} = \frac{5}{6} + \frac{1}{7} = \boldsymbol{\frac{41}{42}}$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{a_4} = \frac{41}{42} + \frac{1}{43} = \boldsymbol{\frac{1805}{1806}}$$

(4) ②，③ より　$\dfrac{1}{a_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_n}$

(2) の結果から　$\dfrac{1}{P_n} = \dfrac{1}{P_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}$　ゆえに　$\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{P_{n-1}} - \dfrac{1}{P_n}$

したがって　$\dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{P_1} - \dfrac{1}{P_n}$

上式の両辺に $\dfrac{1}{a_1}$ を加えると

$$S_n = \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_n} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{P_n} + \frac{1}{2} = \boldsymbol{1 - \frac{1}{P_n}}$$

16.100　(1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線の方程式は

$$y - ({a_1}^2 - 1) = 2a_1(x - a_1) \quad \text{すなわち} \quad y = 2a_1x - {a_1}^2 - 1$$

この直線上に $(a_2,\ 0)$ があるから

$$0 = 2a_1a_2 - {a_1}^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2a_1a_2 = {a_1}^2 + 1 \quad \cdots ①$$

$a_1 \neq 0$ より　$\boldsymbol{a_2 = \dfrac{{a_1}^2 + 1}{2a_1}}$

(2) (1) と同様にして　$2a_na_{n+1} = {a_n}^2 + 1 \quad \cdots ②$

上式において，$a_n > 0$ のとき　$a_{n+1} > 0$

$a_1 > 0$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n > 0$

② から，$a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2 + 1}{2a_n}$ が成り立つので

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} - 1 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n} \quad \cdots ③$$

③ から $a_n > 1$ のとき，$a_{n+1} > 1$ が成り立つ．
$a_1 > 1$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n > 1$

(3) ③ および (2) の結果から

$$a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n} < \frac{(a_n - 1)^2}{2}$$

したがって　$\dfrac{1}{2}(a_{n+1} - 1) < \left\{\dfrac{1}{2}(a_n - 1)\right\}^2$

よって，すべての自然数 n について　${b_{n+1} < b_n}^2$

(4) (2) の結果から $b_n > 0$ であるから，$c_n = \log_{10} b_n$ とおくと，$a_1 = 2$ より

$$c_1 = \log_{10} b_1 = \log_{10} \frac{1}{2}(a_1 - 1) = \log_{10} \frac{1}{2}(2 - 1) = -\log_{10} 2$$

(3) の結果から　$c_{n+1} < 2c_n$　ゆえに　$c_n < 2^{n-1} c_1 = -2^{n-1} \log_{10} 2$
$b_n < 10^{-12}$ のとき　$c_n < -12$ であるから

$$-2^{n-1} \log_{10} 2 < -12 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-1} > \frac{12}{\log_{10} 2}$$

$\dfrac{12}{\log_{10} 2} = 39.8\cdots$，$2^5 = 32$，$2^6 = 64$ であるから，
求める n の値の一つは，$n - 1 = 6$，すなわち　$\boldsymbol{n = 7}$

16.101　(1) $a_k = \displaystyle\prod_{j=1}^{k}(2j - 1)$ であるから

$$\begin{aligned}(2k)! &= \prod_{j=1}^{k} 2j(2j - 1) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k} 2\right)\left(\prod_{j=1}^{k} j\right)\left\{\prod_{j=1}^{k}(2j - 1)\right\} \\ &= 2^k k! a_k\end{aligned}$$

(2) 「自然数 n に対して，$2^n!$ は $2^{(2^n - 1)}$ で割り切れる」を $(*)$ とする．

［1］$n = 1$ のとき，$2^1! = 2$ は $2^{(2^1 - 1)} = 2$ で割り切れる．
　　よって，$n = 1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，整数 l を用いて

$$2^k = l\cdot 2^{(2^k-1)}$$

とおける．(1) の結果を利用して

$$\begin{aligned} 2^{k+1}! &= (2\cdot 2^k)! \\ &= 2^{2^k}(2^k!)a_{2^k} \\ &= 2^{2^k} l 2^{(2^k-1)} a_{2^k} \\ &= 2^{(2^k+2^k-1)} l a_{2^k} = 2^{(2\cdot 2^k-1)} l a_{2^k} = 2^{(2^{k+1}-1)} l a_{2^k} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

16.102 (1) $a_1=\sin^2\theta$，$a_2=4a_1(1-a_1)$ より

$$\begin{aligned} a_2 &= 4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) \\ &= 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \boldsymbol{\sin^2 2\theta} \end{aligned}$$

$a_2=\sin^2 2\theta$，$a_3=4a_2(1-a_2)$ より

$$\begin{aligned} a_3 &= 4\sin^2 2\theta(1-\sin^2 2\theta) \\ &= 4\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta = (2\sin 2\theta\cos 2\theta)^2 = \boldsymbol{\sin^2 4\theta} \end{aligned}$$

(2) 自然数 n について，$a_n=\sin^2(2^{n-1}\theta)\cdots(*)$ とする．

［1］$n=1$ のとき，$a_1=\sin^2(2^0\theta)=\sin^2\theta$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，$a_k=\sin^2(2^{k-1}\theta)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4a_k(1-a_k) = 4\sin^2(2^{k-1}\theta)\{1-\sin^2(2^{k-1}\theta)\} \\ &= 4\sin^2(2^{k-1}\theta)\cos^2(2^{k-1}\theta) \\ &= \{2\sin(2^{k-1}\theta)\sin(2^{k-1}\theta)\}^2 = \sin^2 2^k\theta \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．

16.103 $2^n > \dfrac{1}{2}n^2+n \quad \cdots$(A) とする．

［1］$n=3$ のとき

$$(\text{左辺}) = 2^3 = 8, \qquad (\text{右辺}) = \frac{1}{2}\cdot 3^2+3 = \frac{15}{2}$$

よって，$n=3$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］$k \geqq 3$ として，$n = k$ のとき，(A) が成り立つ，すなわち

$$2^k > \frac{1}{2}k^2 + k$$

が成り立つと仮定する．

$n = k+1$ のとき，(A) の差を考えると

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - \left\{\frac{1}{2}(k+1)^2 + (k+1)\right\} &= 2 \cdot 2^k - \left(\frac{1}{2}k^2 + 2k + \frac{3}{2}\right) \\ &> 2\left(\frac{1}{2}k^2 + k\right) - \left(\frac{1}{2}k^2 + 2k + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(k^2 - 3) > 0 \end{aligned}$$

すなわち　　$2^{k+1} > \dfrac{1}{2}(k+1)^2 + (k+1)$

したがって，$n = k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］から，3 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ．

16.104　　$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 \cdots (*)$ とする．

［1］$n = 1$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = 1^3 = 1, \quad (*) \text{ の右辺} = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\right)^2 = 1$$

よって，$n = 1$ のとき $(*)$ が成り立つ．

［2］$n = k$ のとき

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2 + 4(k+1)\} \\ &= \left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}^2 \end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

16.105 (1) $a_{k+1}-a_k=16k+8$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(16k+8)$$

$$a_n-a_1=16\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+8(n-1)$$

$$a_n-6=8n^2-8$$

よって　　$\boldsymbol{a_n=8n^2-2}$

(2)　　$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

上の等式を $(*)$ とする．

［1］$n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1^3=1,\quad \text{右辺}=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$$

［2］$n=k$ のとき $(*)$ が成り立つ，すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの $(*)$ の左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^3&=\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)^3\\&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3\\&=\frac{1}{4}(n+1)^2\{n^2+4(n+1)\}\\&=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

(3) 求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(8k^2-2)&=\sum_{k=1}^{n}(8k^3-2k)\\&=8\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-2\times\frac{n(n+1)}{2}\\&=\boldsymbol{n(n+1)(2n^2+2n-1)}\end{aligned}$$

16.106 (1) 証明する不等式を $(*)$ とする．

［1］$a_1 = \dfrac{3}{2}$ より，$n = 1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，$a_{k+1} = 3 - \dfrac{2}{a_k}$ より

$$a_{k+1} - 1 = 2 - \frac{2}{a_k} = \frac{2(a_k - 1)}{a_k} > 0$$
$$2 - a_{k+1} = \frac{2}{a_k} - 1 = \frac{2 - a_k}{a_k} > 0$$

よって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(2) $a_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{a_n}$ より　$2 - a_{n+1} = \dfrac{2 - a_n}{a_n}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2 - a_{n+1}} = \dfrac{a_n}{2 - a_n} = \dfrac{2}{2 - a_n} - 1$　よって　$\boldsymbol{x_{n+1} = 2x_n - 1}$

(3) $x_1 = \dfrac{1}{2 - a_1} = \dfrac{1}{2 - \frac{3}{2}} = 2$

(2) の結果から　$x_{n+1} - 1 = 2(x_n - 1)$

$\{x_n - 1\}$ は，初項が $x_2 - 1 = 1$，公比が 2 の等比数列であるから

$$x_n - 1 = 1 \cdot 2^{n-1}　\text{よって}　\boldsymbol{x_n = 2^{n-1} + 1}$$

(4) $x_n = \dfrac{1}{2 - a_n}$ より　$a_n = \dfrac{2x_n - 1}{x_n}$　これに (3) の結果を代入すると

$$a_n = \frac{2(2^{n-1} + 1) - 1}{2^{n-1} + 1} = \frac{\boldsymbol{2^n + 1}}{\boldsymbol{2^{n-1} + 1}}$$

16.107 (1) 漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ より

$$a_2 = \frac{1}{2 - a_1} = \frac{1}{2 - \frac{q}{p}} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2p - q}},$$
$$a_3 = \frac{1}{2 - a_2} = \frac{1}{2 - \frac{p}{2p - q}} = \frac{\boldsymbol{2p - q}}{\boldsymbol{3p - 2q}},$$
$$a_4 = \frac{1}{2 - a_3} = \frac{1}{2 - \frac{2p - q}{3p - 2q}} = \frac{\boldsymbol{3p - 2q}}{\boldsymbol{4p - 3q}}$$

(2) (1) の結果から

$$a_n = \frac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q} \quad \cdots(*)$$

と推定される.

[1] $n=1$ のとき，$a_1 = \dfrac{q}{p}$ となり，$(*)$ は成り立つ.

[2] $n=k$ のとき

$$a_k = \frac{(k-1)p-(k-2)q}{kp-(k-1)q}$$

が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1} = \frac{1}{2-a_k} = \frac{1}{2-\dfrac{(k-1)p-(k-2)q}{kp-(k-1)q}} = \frac{kp-(k-1)q}{(k+1)p-kq}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ.

[1]，[2] より，すべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ.

補足 与えられた漸化式の特性方程式 $x = \dfrac{1}{2-x}$ を解くと　$x=1$

$$a_{n+1}-1 = \frac{1}{2-a_n}-1 = \frac{a_n-1}{2-a_n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_{n+1}-1} = \frac{1}{a_n-1}-1$$

したがって，$\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1-1}$，公差 -1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-1} = \frac{1}{a_1-1}-(n-1) = \frac{1}{\frac{q}{p}-1}-n+1 = \frac{np-(n-1)q}{q-p}$$

ゆえに　$a_n-1 = \dfrac{q-p}{np-(n-1)q}$　よって　$a_n = \dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$

16.108 (1) $a_2 = \dfrac{1}{3-2a_1} = \dfrac{1}{3-2\cdot\frac{1}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{7}}$

$a_3 = \dfrac{1}{3-2a_2} = \dfrac{1}{3-2\cdot\frac{3}{7}} = \boldsymbol{\dfrac{7}{15}}$

$a_4 = \dfrac{1}{3-2a_3} = \dfrac{1}{3-2\cdot\frac{7}{15}} = \boldsymbol{\dfrac{15}{31}}$

(2) (1) の結果から，$a_n = \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1} \cdots(*)$ と予想する.

[1] $n=1$ のとき　$a_1 = \dfrac{2^1-1}{2^2-1} = \dfrac{1}{3}$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ.

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1}=\frac{1}{3-2a_k}=\frac{1}{3-2\cdot\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}}$$
$$=\frac{2^{k+1}-1}{3(2^{k+1}-1)-2(2^k-1)}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+2}-1}$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

解説 $a_{n+1}=\dfrac{1}{3-2a_n}$ より，$c=\dfrac{1}{3-2c}$ を解くと　$c=1,\ \dfrac{1}{2}$

したがって　$a_{n+1}-1=\dfrac{2(a_n-1)}{3-2a_n}$，　$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{a_n-\frac{1}{2}}{3-2a_n}$

上の 2 式から　$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}}=2\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}}$

ゆえに　$\dfrac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}}=2^{n-1}\times\dfrac{a_1-1}{a_1-\frac{1}{2}}=2^{n-1}\cdot 4=2^{n+1}$

よって　$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$

16.109　(1)　$a_1=0$，$a_{n+1}=(1-r)r^{n-1}+r^2a_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$

上の漸化式に順次，$n=1,\ 2,\ 3$ を代入すると

$$a_2=(1-r)1+r^2a_1=1-r+r^2\cdot 0=\boldsymbol{1-r}$$
$$a_3=(1-r)r+r^2a_2=r-r^2+r^2(1-r)=\boldsymbol{r-r^3}$$
$$a_4=(1-r)r^2+r^2a_3=r^2-r^3+r^2(r-r^3)=\boldsymbol{r^2-r^5}$$

(2)　(1) の結果から，第 n 項 a_n を

$$a_n=r^{n-2}-r^{2n-3}\quad\cdots(*)$$

と推測する．

［1］$n=1$ のとき，$a_1=r^{-1}-r^{-1}=0$ であり，$(*)$ が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$a_k=r^{k-2}-r^{2k-3}$$

であると仮定すると

$$a_{k+1}=(1-r)r^{k-1}+r^2(r^{k-2}-r^{2k-3})=r^{k-1}-r^{2k-1}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］, ［2］から，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(3) (2) の結果から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\{r^{k-1} - (r^2)^{k-1}\}$

i) $r \neq -1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\{r^{k-1} - (r^2)^{k-1}\}$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{r^n-1}{r-1} - \frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right) = \frac{1}{r}\left\{\frac{r^n-1}{r-1} - \frac{(r^n+1)(r^n-1)}{(r+1)(r-1)}\right\}$$
$$= \frac{r^n-1}{r(r+1)(r-1)}\{(r+1) - (r^n+1)\} = \boldsymbol{-\frac{(r^n-1)(r^{n-1}-1)}{(r+1)(r-1)}}$$

ii) $r = -1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n}\{(-1)^{k-1} - 1\}$$
$$= -\left\{\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} - n\right\} = \boldsymbol{\frac{(-1)^n-1}{2} + n}$$

補足 与えられた漸化式から

$$a_{n+1} - r^2 a_n = (1-r)r^{n-1}$$
$$\frac{a_{n+1}}{r^{2n+2}} - \frac{a_n}{r^{2n}} = \frac{1-r}{r^4}\left(r^{-1}\right)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{r^{2k+2}} - \frac{a_k}{r^{2k}}\right) = \frac{1-r}{r^4}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}$$
$$\frac{a_n}{r^{2n}} = \frac{1-r}{r^4} \times \frac{1-(r^{-1})^{n-1}}{1-r^{-1}} = -\frac{1-r^{-n+1}}{r^3}$$

よって　$a_n = r^{n-2} - r^{2n-3}$

$a_1 = 0$ であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって，一般項 a_n は　$a_n = r^{n-2} - r^{2n-3}$

16.110 (1) 条件式から

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + \frac{2}{n}, \quad b_{n+1} = \frac{n+1}{b}b_n + n + 1 \quad \cdots(*)$$

上式から　$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 6,$

$b_1 = 1,\ b_2 = 4,\ b_3 = 9,\ b_4 = 16$

これから，$a_n = 2n - 2$，$b_n = n^2$ と推定する．

［1］$n=1$ のとき　$a_1=2\cdot1-2=0$，$b_1=1^2=1$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1}=\frac{k+1}{k}(2k-2)+\frac{2}{k}=2(k+1)-2$$
$$b_{k+1}=\frac{k+1}{k}\cdot k^2+k+1=(k+1)^2$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(2) $\{a_n\}$ は 0 以上の偶数列であり，$\{b_n\}$ は平方数の列であるから，
$\{c_n\}$ は偶数の平方数の列である．

よって　　$c_n=(2n)^2=\boldsymbol{4n^2}$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}4k^2=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\boldsymbol{\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)}$$

補足 漸化式から　$\dfrac{a_{n+1}+2}{n+1}=\dfrac{a_n+2}{n}$，　$\dfrac{b_{n+1}}{n+1}=\dfrac{b_n}{n}+1$

第 1 式から　$\dfrac{a_n+2}{n}=\dfrac{a_1+2}{1}$　ゆえに　$a_n=2n-2$

第 2 式から，$\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{b_1}{1}=1$，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{b_n}{n}=1+(n-1)\cdot1\quad\text{よって}\quad b_n=n^2$$

16.111　(1) 与えられた漸化式から

$$a_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_1+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(-1)+\sqrt{3}i=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$$
$$a_3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_2+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\sqrt{3}i=\boldsymbol{-1+\sqrt{3}i}$$
$$a_4=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_3+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(-1+\sqrt{3}i)+\sqrt{3}i=\boldsymbol{-1}$$

(2) すべての自然数 m について，

$$a_{3m+1} = a_1,\ a_{3m+2} = a_2,\ a_{3m+3} = a_3 \quad \cdots (\mathrm{A})$$

が成立する．

［1］(1) の結果より，$a_4 = a_1$．さらに，与えられた漸化式より

$$a_5 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_4 + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_1 + \sqrt{3}i = a_2$$
$$a_6 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_5 + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_2 + \sqrt{3}i = a_3$$

したがって，$m = 1$ のとき，(A) が成立する．

［2］$n = k$ のとき，(A) が成立する，すなわち

$$a_{3k+1} = a_1,\ a_{3k+2} = a_2,\ a_{3k+3} = a_3$$

が成立すると仮定すると，漸化式および (1) の結果により

$$a_{3k+4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_{3k+3} + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_3 + \sqrt{3}i = a_4 = a_1,$$
$$a_{3k+5} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_{3k+4} + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_1 + \sqrt{3}i = a_2,$$
$$a_{3k+6} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_{3k+5} + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_2 + \sqrt{3}i = a_3$$

したがって，$m = k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］, ［2］より，すべての自然数 m について，(A) が成立する．

(A) が成立することから，すべての正の整数 n について，次が成立する．

$$a_{n+3} = a_n \quad (n \text{ は正の整数})$$

(3) (1) の結果から

$$a_1a_2a_3=(-1)\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1+\sqrt{3}i)=2$$

$b_{n+1}=a_nb_n$ より，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=a_n$ であるから，これと (2) の結果より

$$\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_4}{b_3}=\frac{b_5}{b_4}\cdot\frac{b_6}{b_5}\cdot\frac{b_7}{b_6}=\cdots=\frac{b_{3m-1}}{b_{3m-2}}\cdot\frac{b_{3m}}{b_{3m-1}}\cdot\frac{b_{3m+1}}{b_{3m}}=a_1a_2a_3=2$$

これらの積をとると

$$\left(\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_4}{b_3}\right)\left(\frac{b_5}{b_4}\cdot\frac{b_6}{b_5}\cdot\frac{b_7}{b_6}\right)\cdots\left(\frac{b_{3m-1}}{b_{3m-2}}\cdot\frac{b_{3m}}{b_{3m-1}}\cdot\frac{b_{3m+1}}{b_{3m}}\right)=2^m$$

したがって　$\dfrac{b_{3m+1}}{b_1}=2^m$　$b_1=1$ より　$b_{3m+1}=2^m$　$\cdots$①

① は，$m=0$ のときも成立するから，次が成立する．

$$(*)\quad b_{3m-2}=2^{m-1}\quad (m\text{ は自然数})$$

$(*)$ および漸化式 $b_{n+1}=a_nb_n$ により

$$\begin{aligned}b_{3m-1}&=a_{3m-2}b_{3m-2}=a_1b_{3m-2}\\&=-1\cdot2^{m-1}=-2^{m-1},\\b_{3m}&=a_{3m-1}b_{3m-1}=a_2b_{3m-1}\\&=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-2^{m-1})=-(1+\sqrt{3}i)2^{m-2}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{b_n=\begin{cases}2^{m-1} & (n=3m-2)\\ -2^{m-1} & (n=3m-1)\\ -(1+\sqrt{3}i)2^{m-2} & (n=3m)\end{cases}}$

16.112　(1)　$m!>2^m>m^2$　$\cdots(*)$

［1］$m=5$ のとき

$$5!=120,\quad 2^5=32,\quad 5^2=25$$

よって，$(*)$ が成り立つ．

［2］$m=k$ $(k\geqq5)$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}(k+1)!&=(k+1)\cdot k!>2\cdot2^k=2^{k+1}\\2^{k+1}&=2\cdot2^k\\&>2k^2=(k+1)^2+k^2-2k-1\\&>(k+1)^2+k^2-3k=(k+1)^2+k(k-3)\\&>(k+1)^2\end{aligned}$$

よって，$m=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，5 以上の自然数 m について，$(*)$ が成り立つ．

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{3}{4} - \dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}}$

(3) (2) の結果から

$$S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} < \frac{3}{4}$$

(4) (2) の結果から

$$\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} > \frac{2}{3} \quad \text{整理すると} \quad n(n-9) > 11 \quad \cdots (*)$$

自然数 n について，$n(n-9)$ が正となるのは　$n > 9$

$n = 10$ のとき　$n(n-9) = 10 \cdot 1 = 10$

$n = 11$ のとき　$n(n-9) = 11 \cdot 2 = 22$

よって，$(*)$ を満たす最小の自然数 n は　$\boldsymbol{11}$

16.113 (1)　$\dfrac{a_n + 3}{2} = \sqrt{3S_n} \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $n = 1$ を代入すると　$\dfrac{a_1 + 3}{2} = \sqrt{3S_1}$

$S_1 = a_1$ であるから　$\dfrac{a_1 + 3}{2} = \sqrt{3a_1}$

$a_1 + 3 = 2\sqrt{3a_1}$ の両辺を平方すると　${a_1}^2 + 6a_1 + 9 = 12a_1$

ゆえに　$(a_1 - 3)^2 = 0$　よって　$\boldsymbol{a_1 = 3}$

(2) $(*)$ より　$\dfrac{a_{n+1} + 3}{2} = \sqrt{3S_{n+1}}$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ であるから　$a_{n+1} + 3 = 2\sqrt{3(S_n + a_{n+1})}$

両辺を平方すると　${a_{n+1}}^2 + 6a_{n+1} + 9 = 12(S_n + a_{n+1})$

したがって　$(a_{n+1} - 3)^2 = 12S_n \quad \cdots ①$

$\{a_n\}$ は正の数からなる数列であるから　$S_n \geqq S_1 = 3$

$(*)$ より　$\dfrac{a_n + 3}{2} = \sqrt{3S_n} \geqq \sqrt{3S_1} = 3$　ゆえに　$a_n \geqq 3$

上式および ① から　$a_{n+1} - 3 = 2\sqrt{3S_n}$　よって　$\boldsymbol{a_{n+1} = 3 + 2\sqrt{3S_n}}$

(3) $S_n = 3n^2 \quad \cdots (\mathrm{A})$

(i) $n=1$ のとき　$S_1 = 3\cdot 1^2 = 3$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると，(2) の結果を用いて

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} = S_k + (3 + 2\sqrt{3S_k}) \\ &= 3k^2 + 3 + 2\sqrt{3\cdot 3k^2} \\ &= 3k^2 + 3 + 6k = 3(k+1)^2 \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，(A) が成り立つ．

(i)，(ii) により，すべての自然数について，(A) が成り立つ．

補足 $(*)$ により，$(a_{n+1}+3)^2 = 12S_{n+1}$，　$(a_n+3)^2 = 12S_n$ の辺々を引くと

$$a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 + 6a_{n+1} - 6a_n = 12(S_{n+1} - S_n) = 12a_{n+1}$$

ゆえに　$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-6) = 0$　$a_n > 0$ より　$a_{n+1} = a_n + 6$

$\{a_n\}$ は初項 3，公差 6 の等差数列であるから，$a_n = 6n-3$，$S_n = 3n^2$

16.114 (1) $a_n < \dfrac{1}{2} \quad \cdots (*)$

［1］$n=1$ のとき，$a_1 = \beta < \dfrac{1}{2}$ であるから，$(*)$ が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，漸化式により

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k(1-a_k) \\ &= -2\left(a_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］から，$(*)$ が成り立つ．

(2) 与えられた漸化式から　$\dfrac{1}{2} - a_{n+1} = 2\left(\dfrac{1}{2} - a_n\right)^2$

(1) の結果から，$\dfrac{1}{2} - a_n > 0$ であるから

$$\log_2\left(\frac{1}{2} - a_{n+1}\right) = 2\log_2\left(\frac{1}{2} - a_n\right) + 1$$

$b_n = \log_2\left(\dfrac{1}{2} - a_n\right)$ であるから　$b_{n+1} = 2b_n + 1$

(3) (2) の結果から　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

ゆえに　　$b_n+1=2^{n-1}(b_1+1)=2^{n-1}\left\{\log_2\left(\dfrac{1}{2}-\beta\right)+1\right\}$

$=\log_2(1-2\beta)^{2^{n-1}}$　　$\cdots$①

また　　$b_n+1=\log_2\left(\dfrac{1}{2}-a_n\right)+1=\log_2(1-2a_n)$　　$\cdots$②

①，② から　　$1-2a_n=(1-2\beta)^{2^{n-1}}$

よって　　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-(1-2\beta)^{2^{n-1}}\right\}}$

16.115　(1) $f_n(x)=a_nx+b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\int_1^x 6tf_n(t)\,dt=\int_1^x 6t(a_nt+b_n)\,dt\\&=\int_1^x(6a_nt^2+6b_nt)\,dt=\Big[\,2a_nt^3+3b_nt^2\,\Big]_1^x\\&=2a_nx^3+3b_nx^2-2a_n-3b_n\end{aligned}$$

$P_n(x)$ を x^2+x で割ることにより

$$P_n(x)=(x^2+x)\{2a_nx+(3b_n-2a_n)\}+(2a_n-3b_n)x-2a_n-3b_n$$

$P_n(x)$ を x^2+x で割った余り $(2a_n-3b_n)x-2a_n-3b_n$ が $a_{n+1}x+b_{n+1}$ に等しいので，同じ次数の係数を比較して

$$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n-3b_n,\qquad b_{n+1}=-2a_n-3b_n}$$

(2) $f_1(x)=x$ より　$a_1=1$，$b_1=0$

これと (1) の結果により，a_n と b_n は整数である．

［1］$n=2$ のとき　$a_2=2a_1-3b_1=2$，$b_2=-2a_1-3b_1=-2$

よって，a_2 と b_2 は偶数である．

［2］$n=k$ のとき，a_k と b_k が偶数であると仮定すると

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=2a_k-3b_k,&\qquad b_{k+1}&=-2a_k-3b_k\\&=2(a_k-b_k)-b_k&&=-2(a_k+b_k)-b_k\end{aligned}$$

したがって，a_{k+1} と b_{k+1} も偶数である．

［1］，［2］から，$n\geqq 2$ のとき，a_n と b_n は偶数である．

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数である．

(3) [1] $a_2 = 2$，$b_2 = -2$ より，a_2 と b_2 は 3 の倍数でない．

[2] $n = k$ のとき，a_k と b_k が 3 の倍数でないと仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k - 3b_k, & b_{k+1} &= -2a_k - 3b_k \\ &= 3(a_k - b_k) - a_k & &= -3(a_k + b_k) + a_k \end{aligned}$$

したがって，a_{k+1} と b_{k+1} も 3 の倍数でない．

[1]，[2] から，$n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は 3 の倍数でない．

ゆえに，$n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数でない．

16.116 (1) $P_4 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$

$= {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)$

$= \boldsymbol{Q_4 + 2R_4}$

(2) $S_n = (n-1)Q_n - 2R_n \cdots (*)$ とする．

[1] $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_2 = (a_1 - a_2)^2 &= {a_1}^2 + {a_2}^2 - 2a_1a_2 \\ &= (2-1)Q_2 - 2R_2 \end{aligned}$$

よって，$n = 2$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

[2] $n = k$ のとき

$$S_k = (k-1)Q_k - 2R_k$$

が成り立つと仮定し，両辺に $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(a_j - a_{k+1})^2$ を加えると

$$S_k + \sum_{j=1}^{k}(a_j - a_{k+1})^2 = (k-1)Q_k - 2R_k + \sum_{j=1}^{k}(a_j - a_{k+1})^2$$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k-1)Q_k - 2R_k + \sum_{j=1}^{k}({a_j}^2 + {a_{k+1}}^2 - 2a_ja_{k+1}) \\ &= (k-1)Q_k - 2R_k + Q_k + k{a_{k+1}}^2 - 2\sum_{j=1}^{k} a_ja_{k+1} \\ &= k(Q_k + {a_{k+1}}^2) - 2\left(R_k + \sum_{j=1}^{k} a_ja_{k+1}\right) \\ &= kQ_{k+1} - 2R_{k+1} \end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［1］, ［2］より，$n \geqq 2$ に対して，$(*)$ が成り立つ．

(3) (2) の結果から　$S_4 = 3Q_4 - 2R_4$

上式と (1) の結果から R_4 を消去すると　$\boldsymbol{Q_4 = \dfrac{1}{4}(P_4 + S_4)}$

(4) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ より　$P_4 = 1$

これを (3) の結果に代入すると　$Q_4 = \dfrac{1}{4}(1 + S_4)$

S_4 が最小となるとき，Q_4 は最小となる．

$$\begin{aligned} S_4 = {} & (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_1 - a_4)^2 \\ & + (a_2 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_3 - a_4)^2 \end{aligned}$$

したがって，$a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ のとき，S_4 は最小値 0 をとる．

よって，$\boldsymbol{a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dfrac{1}{4}}$ のとき，Q_4 は最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる．

補足 2 次方程式

$$\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad nx^2 - 2x\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = 0$$

の判別式 D は，$D \leqq 0$ であるから

$$D/4 = \left(-\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \geqq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

上式で等号が成り立つのは，$D = 0$，すなわち

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$$

のときである．

16.117　(1) 数学的帰納法により示す．

「a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れない」を (A) とする．

［1］$n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_2 &= 2{\cdot}1{\cdot}1 = 2, & b_2 &= 2{\cdot}1^2 + 1^2 = 3 \\ a_3 &= 2{\cdot}2{\cdot}3 = 12, & b_3 &= 2{\cdot}2^2 + 3^2 = 17 \end{aligned}$$

よって，$n = 3$ のとき，(A) は成り立つ．

［2］$n=k$ のとき $(k \geqq 3)$，(A) が成り立つと仮定すると，
$a_k=3M$，$b_k=3N\pm 1$ とおけるから (M, N は整数)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_kb_k = 2\cdot 3M\cdot(3N\pm 1) \\ &= 3\cdot 2M(3N\pm 1) \\ b_{k+1} &= 2{a_k}^2+{b_k}^2 \\ &= 2(3M)^2+(3N\pm 1)^2 \\ &= 18M^2+(9N^2\pm 6N+1) \\ &= 3(6M^2+3N^2\pm 2N)+1 \end{aligned}$$

［1］，［2］から，$n \geqq 3$ について (A) が成り立つ．

(2) $b_1=1$，${b_{n+1}}=2{a_n}^2+{b_n}^2$ より，b_n は奇数．以下を背理法により示す．
$a_2=2$，$b_2=3$ より，$2 \leqq n \leqq m$ のとき，a_n と b_n は互いに素であるが，
a_{m+1} と b_{m+1} は素数 p を約数にもつと仮定する $(p \geqq 3)$．
$a_{m+1}=2a_mb_m$ より，次の 2 つに場合分けをする．

i) a_m が p で割り切れるとき，${b_{m+1}}-2{a_m}^2={b_m}^2$ であるから，
b_m も p で割り切れる．

ii) b_m が p で割り切れるとき，${b_{m+1}}-{b_m}^2=2{a_m}^2$ であるから，
a_m も p で割り切れる．

i)，ii) より，a_m，b_m がともに p で割り切れて，仮定に反する．
よって，$n \geqq 2$ のとき，a_n，b_n は互いに素である．

16.118 (1) $a_1=\cos 2\cos 1$

2 倍角の公式により $\sin 4=2\sin 2\cos 2=2\cdot 2\sin 1\cos 1\cdot\cos 2$

したがって $\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}=\cos 2\cos 1$

よって $a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$

(2) a_n の定義式から $a_{n+1}=a_n\cos 2^{n+1}$ $\cdots$①

自然数 n に対して $a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}\cdots$(A) が成り立つことを数学的帰納法により証明する．

［1］$n=1$ のとき，(1) の結果より成り立つ．

［2］$n=k$ のとき

$$a_k=\frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}$$

が成り立つと仮定すると，① から

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \cos 2^{k+1} \\ &= \frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1} \times \cos 2^{k+1} \\ &= \frac{2\sin 2^{k+1}\cos 2^{k+1}}{2^{k+2}\sin 1} = \frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+2}\sin 1} \end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n に対して，(A) が成り立つ．

(3)　$\sin 2^{n+1} \leqq 1$

$\sin 1 > \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　ゆえに　$\dfrac{1}{\sin 1} < \sqrt{2}$

上の 2 式を (A) に適用すると

$$a_n = \frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1} = \sin 2^{n+1} \times \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{\sin 1} < 1 \times \frac{1}{2^{n+1}} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

よって　$a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$

16.119　(1)　$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ であるから

これに，$A = n\theta$，$B = (n-2)\theta$ を代入すると

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos(n-1)\theta\cos\theta$$

よって　$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \quad \cdots(*)$

$\cos n\theta$ がある n 次式 $p_n(x)$ で表せることを数学的帰納法により示す．

［1］$n = 1,\ 2$ のとき

$\cos\theta = x$ とすると，$\cos 2\theta = 2x^2 - 1$ であるから

$$p_1(x) = x,\quad p_2(x) = 2x^2 - 1$$

と定めると，$p_1(x)$ は 1 次式，$p_2(x)$ は 2 次式である．

［2］$n = k,\ k+1$ のとき

$\cos k\theta = p_k(\cos\theta)$，$\cos(k+1)\theta = p_{k+1}(\cos\theta)$ をみたす k 次式 $p_k(x)$，$k+1$ 次式 $p_{k+1}(x)$ が存在すると仮定すると，$(*)$ により

$$\cos(k+2)\theta = 2\cos\theta\cos(k+1)\theta - \cos k\theta$$

したがって，$p_{k+2}(x) = 2x\,p_{k+1}(x) - p_k(x)$ と定めると，$p_{k+2}(x)$ は，$k+2$ 次式で，次式が成り立つ．

$$\cos(k+2)\theta = p_{k+2}(\cos\theta)$$

［1］,［2］より，すべての自然数 n に対して

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

をみたす n 次式 $p_n(x)$ が存在する．

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数であることを数学的帰納法により示す．

［1］$n = 1,\ 2$ のとき

$p_1(x) = x$ は奇関数，$p_2(x) = 2x^2 - 1$ は偶関数である．

［2］$n = 2k-1,\ 2k$ のとき

$p_{2k-1}(x)$ は奇関数，$p_{2k}(x)$ は偶関数であると仮定すると，(1) の結果から $p_{2k+1}(x) = 2x\,p_{2k}(x) - p_{2k-1}(x)$ であるから

$$\begin{aligned} p_{2k+1}(-x) &= 2(-x)\,p_{2k}(-x) - p_{2k-1}(-x) \\ &= -2x\,p_{2k}(x) + p_{2k-1}(x) = -p_{2k+1}(x) \end{aligned}$$

よって，p_{2k+1} は奇関数である．

同様に，$p_{2k+2}(x) = 2x\,p_{2k+1}(x) - p_{2k}(x)$ であるから

$$\begin{aligned} p_{2k+2}(-x) &= 2(-x)\,p_{2k+1}(-x) - p_{2k}(-x) \\ &= 2x\,p_{2k+1}(x) - p_{2k}(x) = p_{2k+2}(x) \end{aligned}$$

よって，p_{2k+2} は偶関数である．

［1］,［2］より，n が奇数ならば，$p_n(x)$ は奇関数．n が偶数ならば，$p_n(x)$ は偶関数である．

(3) n が奇数ならば，$p_n(x)$ は奇関数であるから，定数項は　0

n が偶数ならば，$p_n(x)$ は偶関数であるから，1 次の係数は　0

$p_{2m}(x)$ の定数項を a_m とし，$p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数を b_m とすると

$$p_1(x) = x,\ \ p_2(x) = 2x^2 - 1 \quad \text{これから} \quad a_1 = -1,\ \ b_1 = 1$$

$p_{n+2}(x) = 2x\,p_{n+1}(x) - p_n(x)$ に $n = 2m-1,\ 2m$ を代入すると

$$\begin{aligned} p_{2m+1}(x) &= 2x\,p_{2m}(x) - p_{2m-1}(x) \\ p_{2m+2}(x) &= 2x\,p_{2m+1}(x) - p_{2m}(x) \end{aligned}$$

上式の第 2 式から　　$a_{m+1} = -a_m$　　$\cdots$①

上式の第 1 式から　　$b_{m+1} = 2a_m - b_m$　$\cdots$②

① から　　$a_m = a_1(-1)^{m-1} = -1\cdot(-1)^{m-1} = (-1)^m$

これを ② に代入すると

$$b_{m+1} = 2(-1)^m - b_m \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_{m+1}}{(-1)^{m+1}} - \frac{b_m}{(-1)^m} = -2$$

したがって $\dfrac{b_m}{(-1)^m} = \dfrac{b_1}{(-1)^1} - 2(m-1)$ ゆえに $b_m = -(2m-1)\cdot(-1)^m$

よって $p_{2m}(x)$ の定数項は $(-1)^m$,

$p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数は $(2m-1)\cdot(-1)^{m-1}$

以上のことから，$p_n(x)$ の定数項 a_n および 1 次の係数 b_n は

$$a_n = \begin{cases} \mathbf{0} & (\boldsymbol{n}\text{：奇数}) \\ \mathbf{(-1)^{\frac{n}{2}}} & (\boldsymbol{n}\text{：偶数}) \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \mathbf{n\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}} & (\boldsymbol{n}\text{：奇数}) \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{n}\text{：偶数}) \end{cases}$$

17.1 (1) 1 個のさいころをなげて 1 または 2 の目が出る確率は $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

確率変数 X は，二項分布 $B\left(10,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従うから

$$E(X) = 10\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{10}{3}}, \quad \sigma(X) = \sqrt{10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$$

(2) $E(X) = \displaystyle\int_0^5 x f(x)\,dx = \int_0^5 \frac{2}{25}x^2\,dx = \left[\ \frac{2}{75}x^3\ \right]_0^5 = \mathbf{\frac{10}{3}}$

$$V(X) = \int_0^5 x^2 f(x)\,dx - \{E(X)\}^2 = \int_0^5 \frac{2}{25}x^3\,dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2$$
$$= \left[\ \frac{1}{50}x^4\ \right]_0^5 - \frac{100}{9} = \mathbf{\frac{25}{18}}$$

(3) A と B が独立であるとき

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

が成立するから

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\cap B) &= P(B) - P(A\cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}P(B) = P(\overline{A})P(B) \end{aligned}$$

よって，$\overline{A}$ と B は独立である．

補足 条件付き確率

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\quad P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

について，A と B が独立であるとは

$$P_A(B)=P(B)\quad \text{および}\quad P_B(A)=P(A)$$

が成り立つことである．また，A と B が独立であるとき

$$\begin{aligned}P_B(\overline{A})&=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}\\&=\frac{P(B)-P(A)P(B)}{P(B)}=1-P(A)=P(\overline{A})\\P_{\overline{A}}(B)&=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}\\&=\frac{P(B)-P(A)P(B)}{1-P(A)}=P(B)\end{aligned}$$

したがって，A と B が独立のとき，$\overline{A}$ と B は独立である．
同様に，　A と B が独立のとき，A と $\overline{B}$ は独立である．
　　A と B が独立のとき，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は独立である．

最後の定理は，次のように示してもよい．

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})\\&=1-P(A\cup B)\\&=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}\\&=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\\&=\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}\\&=P(\overline{A})P(\overline{B})\end{aligned}$$

17.2　(1) 確率変数 X の平均 $E(X)$，分散 $V(X)$ は

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}\\V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}(n+1)^2\\&=\frac{1}{12}(n^2-1)\end{aligned}$$

よって，標準偏差は　　$\sqrt{V(X)} = \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{n^2-1}}}{\boldsymbol{2\sqrt{3}}}$

(2) (1) の結果により

$$m = E(Y) = E(2X-1) = 2E(X) - 1 = 2\cdot\frac{n+1}{2} - 1 = \boldsymbol{n}$$
$$V(Y) = V(2X-1) = 2^2 V(X)$$

よって　　$\sigma = \sqrt{V(Y)} = 2\sqrt{V(X)} = 2\cdot\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{n^2-1}}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$

(3) Y は $1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-1$ をとるので，$2Y-m$ は $1-n,\ 3-n,\ 5-n,\cdots,\ n-1$ をとる．ゆえに，$|Y-m|$ の最大値は $n-1$ である．
したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$(\sqrt{3}\sigma)^2 - (n-1)^2 = \left(\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{3}}\right)^2 - (n-1)^2$$
$$= 2(n-1) > 0$$

よって　　$|Y-m| < \sqrt{3}\sigma$

17.3 (1) カードの取り出し方の総数は　${}_n\mathrm{C}_2$ (通り)

(a) $X=t$，$Y=s$ となるのは 1 通りであるから

$$P(X=t,\ Y=s) = \frac{1}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{n(n-1)}}$$

(b) $X=t$ となるのは，$Y=1,2,\cdots,t-1$ の $t-1$ 通りであるから

$$P(X=t) = \frac{t-1}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{\boldsymbol{2(t-1)}}{\boldsymbol{n(n-1)}}$$

(c) $Y=s$ となるのは，$X=s+1,\ s+2,\cdots,\ n$ の $n-s$ 通りであるから

$$P(Y=s) = \frac{n-s}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{\boldsymbol{2(n-s)}}{\boldsymbol{n(n-1)}}$$

(d) $[x]$ を x を超えない最大の整数とする．
$X=3Y$ をみたす場合の数は $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ であるから

$$P(X=3Y) = \frac{\left[\frac{n}{3}\right]}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{2\left[\frac{n}{3}\right]}{n(n-1)}$$

$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき，$\left[\dfrac{n}{3}\right] = \dfrac{n}{3}$ であるから

$$P(X=3Y) = \frac{2\left[\dfrac{n}{3}\right]}{n(n-1)} = \boldsymbol{\frac{2}{3(n-1)}}$$

$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，$\left[\dfrac{n}{3}\right] = \dfrac{n-1}{3}$ であるから

$$P(X=3Y) = \frac{2\left[\dfrac{n}{3}\right]}{n(n-1)} = \boldsymbol{\frac{2}{3n}}$$

$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，$\left[\dfrac{n}{3}\right] = \dfrac{n-2}{3}$ であるから

$$P(X=3Y) = \frac{2\left[\dfrac{n}{3}\right]}{n(n-1)} = \boldsymbol{\frac{2(n-2)}{3n(n-1)}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{t=2}^{n} t\,P(X=t) = \sum_{t=2}^{n} t\cdot\frac{2(t-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{t=2}^{n} t(t-1) = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \\ E(Y) &= \sum_{s=1}^{n-1} s\,P(Y=s) = \sum_{s=1}^{n-1} s\cdot\frac{n-s}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{s=1}^{n-1} s(n-s) = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k(n-k) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} E(X)+E(Y) &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\{k(k-1)+k(n-k)\} \\ &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = \boldsymbol{n+1} \end{aligned}$$

17.4 (1) $P(X=1) = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

下の表により $P(X=2) = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5}\cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{12}{25}}$

1回目	2回目
1	3，4，5
2	2，3，4，5
3	1，2，3，4，5

(2) 3回目で試行が終了するのは，次の場合である．

1回目	2回目	3回目
1	1	2，3，4，5
1	2	1，2，3，4，5
2	1	1，2，3，4，5

よって　$P(X=3)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1=\dfrac{14}{125}$

4回目で試行が終了するのは，次の場合である．

1回目	2回目	3回目	4回目
1	1	1	1，2，3，4，5

よって　$P(X=4)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1=\dfrac{1}{125}$

以上の結果から，確率分布表は次のようになる．

X	1	2	3	4	計
$P(X)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{14}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

したがって　$E(X)=1\cdot\dfrac{2}{5}+2\cdot\dfrac{12}{25}+3\cdot\dfrac{14}{125}+4\cdot\dfrac{1}{125}=\boldsymbol{\dfrac{216}{125}}$

(3) カードの番号の和が8となるのは，次の場合である．

1回目	2回目	3回目	4回目
3	5	＊	＊
1	2	5	＊
2	1	5	＊
1	1	1	5

カードの番号の和が8である確率は　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{5}\right)^3+\left(\dfrac{1}{5}\right)^4=\boldsymbol{\dfrac{36}{625}}$

カードの番号の和が8であるときに，カードを取り出した回数が2回である条件つき確率は　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\div\dfrac{36}{625}=\boldsymbol{\dfrac{25}{36}}$

17.5 (1) A チームが B，C，D，E の 4 チームすべてに負ける確率は

$$\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{40}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\dfrac{3}{40}=\boldsymbol{\dfrac{37}{40}}$

(2) A チームが B チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{120}$

A チームが C チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{120}$

A チームが D チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{18}{120}$

A チームが E チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{120}$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{120}+\dfrac{3}{120}+\dfrac{18}{120}+\dfrac{9}{120}=\dfrac{36}{120}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

(3) (1)，(2) の結果から，$P(X=0)=\dfrac{9}{120}$，$P(X=1)=\dfrac{36}{120}$

$$P(X=4)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{120}$$

$$P(X=3)=\left(1-\frac{2}{5}\right)\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{24}{120}$$

$$P(X=2)=1-\{P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)+P(X=4)\}$$
$$=1-\left(\frac{9}{120}+\frac{36}{120}+\frac{24}{120}+\frac{4}{120}\right)=\frac{47}{120}$$

したがって，確率分布表は次のようになる．

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{9}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{47}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

よって　$E(X)=0\times\dfrac{9}{120}+1\times\dfrac{36}{120}+2\times\dfrac{47}{120}$

$$+3\times\frac{24}{120}+4\times\frac{4}{120}=\frac{218}{120}=\boldsymbol{\frac{109}{60}}$$

17.6 (1) $P(X_j=1)$ は，番号 j の玉まですべて 1 つの箱に入る確率であるから

$$P(X_2=1)=1-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$
$$P(X_3=1)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$
$$P(X_4=1)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(2) $P(X_j=j)$ は，番号 j の玉まで順次空箱に入る確率であるから

$$P(X_2=2)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$
$$P(X_3=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$
$$P(X_4=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{24}}$$

(3) $X_j=i$ は，$X_{j-1}=i$ および $X_{j-1}=i-1$ の後に現れる確率過程である．

(i) $X_{j-1}=i$ から $X_j=i$ となるのは，番号 j の玉が番号 1 の玉の入った箱に入る場合．

(ii) $X_{j-1}=i-1$ から $X_j=i$ となるのは，番号 j の玉が空箱に入る場合．

上の (i)，(ii) から，求める関係式は次のようになる．

$$\boldsymbol{P(X_j=i)=P(X_{j-1}=i)\times\left(1-\frac{1}{j}\right)+P(X_{j-1}=i-1)\times\frac{1}{j}}$$

(4) (1)〜(3) の結果から

$$P(X_3=2)=P(X_2=2)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+P(X_2=1)\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$
$$P(X_4=2)=P(X_3=2)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+P(X_3=1)\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$$
$$P(X_4=3)=P(X_3=3)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+P(X_3=2)\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

よって，X_4 の確率分表は，次のようになる．

X_4	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	1

17.7 (1) $A \cap B$ となるのは，$(1,\ 5),\ (5,\ 1)$ の 2 通りであるから

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

事象 B は，次の 9 通り

$$(1,\ 5),\ (2,\ 5),\ (3,\ 5),\ (4,\ 5),\ (5,\ 5)$$
$$(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4)$$

したがって　　$P(B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

よって　　$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{18} \div \dfrac{1}{4} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

補足 $P(B) = P(2\text{ 個とも }5\text{ 以下}) - P(2\text{ 個とも }4\text{ 以下}) = \dfrac{5^2}{6^2} - \dfrac{4^2}{6^2} = \dfrac{1}{4}$

(2) $P(X = k) = P(2\text{ 個とも }k\text{ 以上}) - P(2\text{ 個とも }k+1\text{ 以上})$

$$= \frac{(6-k+1)^2}{6^2} - \frac{\{6-(k+1)+1\}^2}{6^2}$$
$$= \frac{(7-k)^2 - (6-k)^2}{36} = \boldsymbol{\frac{13-2k}{36}}$$

$P(Y = k) = P(2\text{ 個とも }k\text{ 以下}) - P(2\text{ 個とも }k-1\text{ 以下})$

$$= \frac{k^2}{6^2} - \frac{(k-1)^2}{6^2} = \boldsymbol{\frac{2k-1}{36}}$$

(3) (2) の結果から

$$E(3X^2 + 3Y^2) = 3E(X^2) + 3(Y^2)$$
$$= 3\sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{13-2k}{36} + 3\sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{2k-1}{36}$$
$$= \sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 6(6+1)(2 \cdot 6+1) = \boldsymbol{91}$$

17.8 (1) $X = 1$ となるのは，最初に取り出したカードが 3 のときであるから

$$\boldsymbol{P(X=1) = \frac{1}{4}}$$

$X = 2$ となるのは，1 回目，2 回目のカードがそれぞれ

$$(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$$

のときであり，それぞれの確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}$ であるから，求める確率は

$$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 4=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) $X=3$ となるのは，1 回目，2 回目，3 回目のカードがそれぞれ

$$(1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (4,\ 3,\ 2)$$

のときであり，それぞれの確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}$ であるから

$$P(X=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4=\frac{1}{6}$$

よって，この試行が成功する確率は

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

また　　$E(X)=1\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{17}{12}}$

(3) 番号の和が 6 となるのは，(1) で示した $(2,\ 4)$，$(4,\ 2)$ と (2) で示した $(1,\ 3,\ 2)$，$(2,\ 3,\ 1)$ のときであるから，その確率は

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

したがって，番号の和が 6 であるとき，$X=3$ である条件つき確率は

$$\frac{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2}{\dfrac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

17.9 (1) X_1 の確率分布の表は，次のようになる．

X_1	1	2	5	計
P	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

平均 $E(X_1)$ は

$$E(X_1)=1\cdot\frac{5}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+5\cdot\frac{2}{10}=\boldsymbol{\frac{21}{10}}$$

分散 $V(X_1)$ は

$$E({X_1}^2)=1^2\cdot\frac{5}{10}+2^2\cdot\frac{3}{10}+5^2\cdot\frac{2}{10}=\frac{67}{10}$$

$$\begin{aligned}V(X_1)&=E({X_1}^2)-\{E(X_1)\}^2\\&=\frac{67}{10}-\left(\frac{21}{10}\right)^2=\frac{670}{100}-\frac{441}{100}=\boldsymbol{\frac{229}{100}}\end{aligned}$$

(2) $Z = X_1 + X_2$ より

$$P(Z=2) = \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{25}{100}$$
$$P(Z=3) = {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{30}{100}$$
$$P(Z=4) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100}$$
$$P(Z=6) = {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{20}{100}$$
$$P(Z=7) = {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{12}{100}$$
$$P(Z=10) = \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{4}{100}$$

$Z = X_1 + X_2$ の確率分布の表は，次のようになる．

Z	2	3	4	6	7	10	計
P	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{4}{100}$	1

よって　$P(Z \leqq 4) = \dfrac{25}{100} + \dfrac{30}{100} + \dfrac{9}{100} = \dfrac{64}{100} = \boldsymbol{\dfrac{16}{25}}$

(3) $W = X_1 - X_2$ より

$$P(W=-4) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{10}{100}$$
$$P(W=-3) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{100}$$
$$P(W=-1) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{15}{100}$$
$$P(W=0) = \left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{38}{100}$$
$$P(W=1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{15}{100}$$
$$P(W=3) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$$
$$P(W=4) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{10}{100}$$

$W = X_1 - X_2$ の確率分布の表は，次のようになる．

W	-4	-3	-1	0	1	3	4	計
P	$\frac{10}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{38}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{10}{100}$	1

$$P(W \leqq -1) = \frac{10}{100} + \frac{6}{100} + \frac{15}{100} = \frac{31}{100}$$
$$P(W \leqq 0) = \frac{10}{100} + \frac{6}{100} + \frac{15}{100} + \frac{38}{100} = \frac{69}{100}$$

(2) の結果から，$P(Z \leqq 4) = \dfrac{64}{100}$ であるから，$P(W \leqq a) \leqq P(Z \leqq 4)$ を満たす整数 a の最大値は　$\boldsymbol{a = -1}$

(4) $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ が $n+1$ となるのは，数字 1 を $n-1$ 回，数字 2 を 1 回取り出すときであるから，その確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_1 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{10} = n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{3}{10} = \frac{\boldsymbol{3n}}{\boldsymbol{5 \cdot 2^n}}$$

17.10 (1) $T = 6$ となるのは，次の 3 通り

$$(X,\ Y) = (4,\ 2),\ (5,\ 4),\ (6,\ 6)$$

したがって　　$P(T = 6) = \dfrac{3}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

また，$T < 0$ となるは，次の 6 通り

$$(X,\ Y) = (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)$$

したがって　　$P(T < 0) = \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6}$

よって　　$P(T \geqq 0) = 1 - P(T < 0) = 1 - \dfrac{1}{6} = \boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

(2)　　$E(X) = \dfrac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \dfrac{21}{6} = \dfrac{7}{2}$

$$E(X^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}$$

よって　$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \dfrac{91}{6} - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{35}{12}}$

また，$E(Y) = E(X)$ であるから

$$E(T) = E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y) = E(X) = \boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

(3)　　$E(T^2) = E((2X - Y)^2) = E(4X^2 - 4XY + Y^2)$
$$= 4E(X^2) - 4E(XY) + E(Y^2)$$

X と Y は独立であるから　$E(XY) = E(X)E(Y)$

また，$E(Y^2) = E(X^2)$ であるから

$$E(T^2) = 5E(X^2) - 4\{E(X)\}^2 = 5 \times \frac{91}{6} - 4\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{161}{6}$$

ゆえに　$V(T) = E(T^2) - \{E(T)\}^2 = \dfrac{161}{6} - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{175}{12}$

したがって　$V(aT) = a^2V(T) = \dfrac{175}{12}a^2$

よって　$\dfrac{175}{12}a^2 = 25$　これを解いて　$\boldsymbol{a = \pm\dfrac{2\sqrt{21}}{7}}$

補足 独立な確率変数 X，Y について，$\mu = E(X)$, $\nu = E(Y)$ とすると

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - \{E(X+Y)\}^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - \{E(X) + E(Y)\}^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (\mu + \nu)^2 \\
&= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - \mu^2 - 2\mu\nu - \nu^2 \\
&= E(X^2) + 2\mu\nu + E(Y^2) - \mu^2 - 2\mu\nu - \nu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2 + E(Y^2) - \nu^2 \\
&= V(X) + V(Y)
\end{aligned}$$

確率変数 X，Y について，次の線形性が成り立つ．

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad E(aX) = aE(X)$$

とくに，X と Y が独立であるとき

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \qquad V(aX) = a^2V(X)$$

別解 分散の線形性を用いると

$$\begin{aligned}
V(T) &= V(2X - Y) = V(2X + (-Y)) \\
&= V(2X) + V(-Y) \\
&= 2^2V(X) + (-1)^2V(Y) \\
&= 4V(X) + V(X) \qquad (\text{本題では}, V(Y) = V(X)) \\
&= 5V(X) = 5 \times \frac{35}{12} = \frac{175}{12}
\end{aligned}$$

したがって　　$V(aT) = a^2V(T) = \dfrac{175}{12}a^2$

17.11　(1)　$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対する確率 $P(X \geqq k)$ は，3 回とも k 以上のカードである確率であるから

$$P(X \geqq k) = \left(\frac{4-k+1}{5}\right)^3 = \left(\frac{\boldsymbol{5-k}}{\boldsymbol{5}}\right)^{\boldsymbol{3}}$$

(2)　(1) の結果から

i)　$k = 0, 1, 2, 3$ のとき

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \geqq k) - P(X \geqq k+1) \\ &= \left(\frac{5-k}{5}\right)^3 - \left(\frac{4-k}{5}\right)^3 \end{aligned}$$

ii)　$k = 4$ のとき

$$P(X = 4) = P(X \geqq 4) = \left(\frac{5-4}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

i)，ii) より，X の確率分布は次のようになる．

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{61}{125}$	$\frac{37}{125}$	$\frac{19}{125}$	$\frac{7}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

(3)　(2) の結果から

$$E(X) = 0 \times \frac{61}{125} + 1 \times \frac{37}{125} + 2 \times \frac{19}{125} + 3 \times \frac{7}{125} + 4 \times \frac{1}{125} = \frac{100}{125} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

(4)　$E(X^2) = 0^2 \times \dfrac{61}{125} + 1^2 \times \dfrac{37}{125} + 2^2 \times \dfrac{19}{125} + 3^2 \times \dfrac{7}{125} + 4^2 \times \dfrac{1}{125} = \dfrac{192}{125}$

よって　　$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \dfrac{192}{125} - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{112}{125}}$

17.12　(1)　X，Y は，互いに独立であるから

X \ Y	2	4	計
1	ab	$a(1-b)$	a
2	$(1-a)b$	$(1-a)(1-b)$	$1-a$
計	b	$1-b$	1

(2) $W = X - Y$ より

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X) - E(Y) \\ &= \{1{\cdot}a + 2(1-a)\} - \{2{\cdot}b + 4(1-b)\} \\ &= \boldsymbol{-a + 2b - 2} \end{aligned}$$

(3) $Z = \dfrac{2}{2} = 1$，$Z = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2} = 2$，$Z = \dfrac{4}{1} = 4$ より

Z	1	2	4	計
$P(Z)$	$(1-a)b$	$(1-a)(1-b)+ab$	$a(1-b)$	1

$$\begin{aligned} E(Z) &= 1{\cdot}(1-a)b + 2\{(1-a)(1-b)+ab\} + 4{\cdot}a(1-b) \\ &= \boldsymbol{2 + 2a - b - ab} \end{aligned}$$

(4) $E(Z) = \dfrac{9}{4}$，$E(W) = -\dfrac{3}{2}$ を (2)，(3) の結果に代入すると

$$2 + 2a - b - ab = \frac{9}{4}, \quad -a + 2b - 2 = -\frac{3}{2}$$

ゆえに　　$a(2-b) - b = \dfrac{1}{4}$，$a = 2b - \dfrac{1}{2}$

$0 < a < 1$，$0 < b < 1$ に注意してこれを解くと　$a = \dfrac{1}{2}$，$b = \dfrac{1}{2}$

このとき，(3) の表は

Z	1	2	4	計
$P(Z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

よって　　$V(Z) = E(Z^2) - \{E(Z)\}^2$

$$= 1^2{\cdot}\frac{1}{4} + 2^2{\cdot}\frac{1}{2} + 4^2{\cdot}\frac{1}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{19}{16}}$$

17.13　(1) $k \leqq n-1$ のとき，

$P(X_n = k)$ は，k 回目で初めて 2 枚とも表が出る確率であるから

$$P(X_n = k) = \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$$

また，$P(X_n > 3)$ は，上式により

$$\begin{aligned} P(X_n > 3) &= 1 - P(X_n \leqq 3) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{3} P(X_n = k) = 1 - \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3}{1 - \frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{27}{64}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= 1 - P(X_n \leqq n-1) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}} = \boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k) + nP(X_n = n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

上式の n を $n+1$ に置き換えると

$$E_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= \frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n} - n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left\{\frac{n}{4} + \frac{3}{4}(n+1) - n\right\} = \boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{n}} \end{aligned}$$

17.14 (1) (i) $1 < k < N$ のとき，$k-1$ 回まで 1 以外の目，k 回目に 1 の目が出る確率であるから

$$P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

1 回目に 1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるから，$k = 1$ のときも成立する．

よって，$k < N$ のとき　$\boldsymbol{P(X = k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}}$

(ii) $k = N$ のとき，$N-1$ 回目まで 1 以外の目が出る確率であるから

$$\boldsymbol{P(X = N) = \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}}$$

(2) $r=\dfrac{5}{6}$ とし，求める期待値を $E(X)$ とおくと

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{N-1}k\cdot P(X=k)+N\cdot P(X=N)\\&=\sum_{k=1}^{N-1}k\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+N\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+N\left(\frac{5}{6}\right)^{N}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N}kr^{k-1}+Nr^N\end{aligned}$$

ここで，$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}kr^{k-1}$ とおくと　$E(X)=\dfrac{1}{6}S+Nr^N$　$\cdots(*)$

$$\begin{aligned}S-rS&=\sum_{k=1}^{N}kr^{k-1}-\sum_{k=1}^{N}kr^k=\sum_{k=1}^{N}kr^{k-1}-\sum_{k=2}^{N+1}(k-1)r^{k-1}\\(1-r)S&=\sum_{k=1}^{N}r^{k-1}-Nr^N=\frac{1-r^N}{1-r}-Nr^N\\\frac{1}{6}S&=6(1-r^N)-Nr^N\end{aligned}$$

これを $(*)$ に代入すると　$E(X)=6(1-r^N)=\boldsymbol{6\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{N}\right\}}$

17.15　(1) $P(A)=\left(\dfrac{3}{6}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，$P(B)=\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{6}=\dfrac{5}{9}$，$P(A\cap B)=\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

したがって　$P(A)P(B)=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{5}{72}$　ゆえに　$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

よって，事象 A，B は独立ではない．

補足 事象 A，B が独立であるとは，A が起きたときの B が起きる確率，すなわち，条件付き確率 $P_A(B)$ (大学等では $P(B|A)$ と表記することが多い) が，A に関係なく $P(B)$ に等しいことである．

$$B\text{ が }A\text{ と独立}\quad\Longleftrightarrow\quad P_A(B)=P(B)$$

また，A が B と独立であるとは，$P_B(A)=P(A)$ が成立することであるが，これら 2 式の成立については，同値関係にある．実際，

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=P(A)$$

このとき，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ が成立する．したがって，A，B が独立であることを示すには，次のどれか 1 つを示せばよい．

$$P_A(B)=P(B) \iff P_B(A)=P(A) \iff P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

本題では，$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ により，事象 A，B は独立ではない．

(2) k 回目に出た目を X_k とすると $(k=1,2,3)$

X_k	1	2	3	4	5	6	計
${X_k}^2$	1	4	9	16	25	36	
$P(X_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X_k)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$
$$E({X_k}^2)=1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+25\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$
$$V(X_k)=E({X_k}^2)-E(X_k)^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

$X=X_1+X_2+X_3$ より

$$\begin{aligned}E(X)&=E(X_1+X_2+X_3)\\&=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=\frac{7}{2}\times 3=\frac{21}{2}\\V(X)&=V(X_1+X_2+X_3)\\&=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)=\frac{35}{12}\times 3=\frac{35}{4}\end{aligned}$$

$Y=2X$ より

$$E(Y)=E(2X)=2E(X)=2\times\frac{21}{2}=\mathbf{21}$$
$$V(Y)=V(2X)=2^2V(X)=4\times\frac{35}{4}=\mathbf{35}$$

(3) $Z_1=5$ かつ $Z_2=2$ となる目の組合せは

$$\{2,2,5\},\ \{2,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 5,\ 5\}$$

である．

(i) $\{2,2,5\}$，$\{2,\ 5,\ 5\}$ である確率は，ともに

$$\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{72}$$

(ii) $\{2,3,5\}$，$\{2,\ 4,\ 5\}$ である確率は，ともに

$$\frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{72}\times 2+\dfrac{1}{36}\times 2=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

17.16　(1) $P(X=k)=\dfrac{k-1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{k-1}{15}$ $(1\leqq k\leqq 6)$ より，求める期待値は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{6}kP(X=k)=\frac{1}{15}\sum_{k=1}^{6}k(k-1)$$
$$=\frac{1}{45}\sum_{k=1}^{6}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}=\frac{5\cdot 6\cdot 7}{45}=\boldsymbol{\frac{14}{3}}$$

(2) $P(Y=j)=\dfrac{6-j}{15}$，$P(X=k,\ Y=j)=\begin{cases}\frac{1}{15} & (k>j)\\ 0 & (k\leqq j)\end{cases}$　$(1\leqq j,k\leqq 6)$

$1<k\leqq j<6$ とすると

$$P(X=k)P(Y=j)>0,\quad P(X=k,\ Y=j)=0$$

ゆえに　$P(X=k)P(Y=j)\neq P(X=k,\ Y=j)$

よって　確率変数 X と Y は互いに**独立ではない**.

(3) 確率変数 XY の期待値は

$$E(XY)=\sum_{1\leqq j,k\leqq 6}P(X=k,Y=j)jk=\sum_{1\leqq j<k\leqq 6}\frac{1}{15}jk$$
$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{2}\{(1+2+\cdots+6)^2-(1^2+2^2+\cdots+6^2)\}$$
$$=\frac{1}{30}(21^2-91)=\boldsymbol{\frac{35}{3}}$$

17.17　(1) 大きいサイコロ，小さいサイコロの目をそれぞれ，$A,\ B$ とすると

$$X=10A+B,\quad Y=10B+A\quad (A,B=1,2,3,4,5,6)$$

$X-Y=9(A-B)$ より，$X-Y=0$ のとき，$A=B$ であるから

$$P(X-Y=0)=P(A=B)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$$

$P(X-Y>0)+P(X-Y=0)+P(X-Y<0)=1$,

$P(X-Y>0)=P(X-Y<0)$ であるから

$$P(X-Y>0)=\frac{1}{2}\{1-P(X-Y=0)\}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6}\right)=\boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

(2) $E(A)=E(B)$，$V(A)=V(B)$ により (A, B は独立変数)

$$E(X)=E(10A+B)=10E(A)+E(B)=11E(A),$$
$$V(X)=V(10A+B)=10^2V(A)+V(B)=101V(A)$$

このとき　$E(A)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 7=\dfrac{7}{2}$,

$$V(A)=E(A^2)-E(A)^2=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

よって　$E(X)=11\cdot\dfrac{7}{2}=\boldsymbol{\dfrac{77}{2}}$,　$V(X)=101\cdot\dfrac{35}{12}=\boldsymbol{\dfrac{3535}{12}}$

(3) (2) の $V(A)$, $V(B)$ を用いると

$$V(A-B)=V(A+(-B))=V(A)+V(-B)$$
$$=V(A)+(-1)^2V(B)=2V(A)=2\cdot\frac{35}{12}=\frac{35}{6},$$
$$V(X-Y)=V(9(A-B))=9^2V(A-B)=9^2\cdot\frac{35}{6}$$

よって　$\sigma(X-Y)=\sqrt{V(X-Y)}=9\sqrt{\dfrac{35}{6}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt{210}}$

補足　A, B は独立変数であるから　　$V(A-B)=V(A)+V(B)$
X, Y は独立変数ではないから　$V(X-Y)\neq V(X)+V(Y)$

17.18　(1) q_1 は，1 回目に裏が出る確率であるから　　$\boldsymbol{q_1=1-p}$
操作により，次の確率漸化式が成立する．

$$q_{n+1}=(1-p)q_n+p(1-q_n)\quad\text{すなわち}\quad q_{n+1}=(1-2p)q_n+p\qquad(*)$$

これを変形すると

$$q_{n+1}-\frac{1}{2}=(1-2p)\left(q_n-\frac{1}{2}\right)$$

数列 $\left\{q_n-\dfrac{2}{2}\right\}$ は初項 $q_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(1-2p)$，公比 $1-2p$ の等比数列より

$$q_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-2p)\cdot(1-2p)^{n-1}\quad\text{よって}\quad q_n=\frac{1}{2}\{1+(1-2p)^n\}\quad(**)$$

$n=2$, 3 を $(**)$ に代入すると

$$\boldsymbol{q_2=1-2p+2p^2},\quad\boldsymbol{q_3=1-3p+6p^2-4p^3}$$

(2) (∗) より　$\boldsymbol{q_{n+1} = (1-2p)q_n + p}$

(3) (∗∗) より　$\boldsymbol{q_n = \dfrac{1}{2}\{1 + (1-2p)^n\}}$

(4)

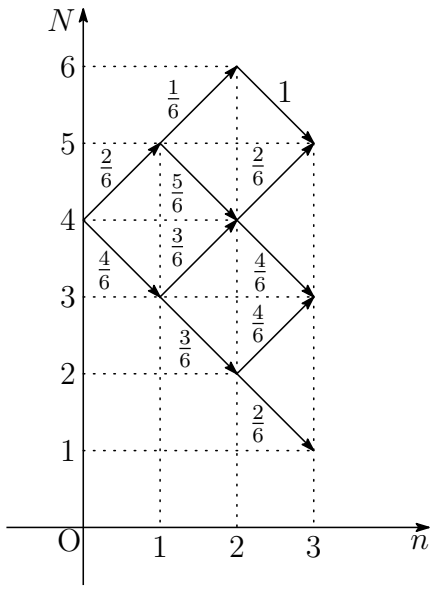
X_n	1	-1	合計
$P(X_n)$	q_n	$1-q_n$	1

$$E(X_n) = 1q_n + (-1)(1-q_n) = 2q_n - 1 = \boldsymbol{(1-2p)^n}$$
$$E({X_n}^2) = 1^2 q_n + (-1)^2(1-q_n) = 1$$

したがって

$$V(X_n) = E({X_n}^2) - E(X_n)^2 = \boldsymbol{1-(1-2p)^{2n}}$$
$$\sigma(X_n) = \sqrt{V(X_n)} = \boldsymbol{\sqrt{1-(1-2p)^{2n}}}$$

17.19　(1) n 回繰り返した後の袋の中にある赤玉の個数が N である確率を $p_n(N)$ とすると



$$p_1(3) = \frac{4}{6},\ p_1(5) = \frac{2}{6}$$
$$p_2(2) = p_1(3)\cdot\frac{3}{6} = \frac{12}{36}$$
$$p_2(4) = p_1(3)\cdot\frac{3}{6} + p_1(5)\cdot\frac{5}{6} = \frac{22}{36}$$
$$p_2(6) = p_1(5)\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$
$$p_3(1) = p_2(2)\cdot\frac{2}{6} = \frac{24}{216}$$
$$p_3(3) = p_2(2)\cdot\frac{4}{6} + p_2(4)\cdot\frac{4}{6} = \frac{136}{216}$$
$$p_3(5) = p_2(4)\cdot\frac{2}{6} + p_2(6)\cdot 1 = \frac{56}{216}$$

$P(X=4) = p_2(4)$ であるから　$P(X=4) = \dfrac{22}{36} = \boldsymbol{\dfrac{11}{18}}$

(2) $P(X=N) = p_2(N)$ であるから $(N = 2, 4, 6)$

X	2	4	6	計
P	$\frac{6}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{18}$	1

したがって　$E(X) = 2\cdot\dfrac{6}{18} + 4\cdot\dfrac{11}{18} + 6\cdot\dfrac{1}{18} = \boldsymbol{\dfrac{31}{9}}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= 2^2\cdot\frac{6}{18} + 4^2\cdot\frac{11}{18} + 6^2\cdot\frac{1}{18} - \left(\frac{31}{9}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{101}{81}}$$

(3) $E(Y=N)=p_3(6-N)$ であるから $(N=1,3,5)$

Y	1	3	5	計
P	$\frac{7}{27}$	$\frac{17}{27}$	$\frac{3}{27}$	1

したがって　　$E(Y)=1\cdot\dfrac{7}{27}+3\cdot\dfrac{17}{27}+5\cdot\dfrac{3}{27}=\boldsymbol{\dfrac{73}{27}}$

17.20 (1) $m=2$ より，$-1,\ 0,\ 1,\ 1$ の 4 枚のカードから 2 枚取り出すとき，$X\geqq 0$ となるのは，$0,\ 1,\ 1$ の 3 枚のうち 2 枚を取り出す確率であるから

$$P(X\geqq 0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{3}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) $m=9$ より，$-1,\ 0,\ \overbrace{1,\ \cdots,\ 1}^{9\text{ 枚}}$ の 11 枚のカードから 2 枚取り出すとき，$Y=0$ となるのは，$-1,\ 0$ の 2 枚のうち 2 枚を取り出す確率で

$$P(Y=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{55}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$P(Y=1)=1-P(Y=0)=1-\frac{1}{55}=\boldsymbol{\frac{54}{55}}$$

(3) $-1,\ 0,\ \overbrace{1,\ \cdots,\ 1}^{m\text{ 枚}}$ の $m+2$ 枚のカードから 2 枚取り出すとき，XY が正となるのは，$m\geqq 2$ であることが必要であるから

$$P(X=Y=1)=\frac{{}_m\mathrm{C}_2}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2}=\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$$
$$P(X=0,\ Y=1)=\frac{1\cdot{}_m\mathrm{C}_1}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2}=\frac{2m}{(m+2)(m+1)}$$
$$P(X=-1,\ Y=1)=\frac{1\cdot{}_m\mathrm{C}_1}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2}=\frac{2m}{(m+2)(m+1)}$$
$$P(X=-1,\ Y=0)=\frac{1\cdot 1}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{(m+2)(m+1)}$$

上の結果から，XY の確率分布表は次のようになる．

XY	-1	0	1	計
確率	$\frac{2m}{(m+2)(m+1)}$	$\frac{2m+2}{(m+2)(m+1)}$	$\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$	1

したがって

$$E(XY)=-1\cdot\frac{2m}{(m+2)(m+1)}+1\cdot\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$$
$$=\frac{m(m-3)}{(m+2)(m+1)}$$

よって，$E(XY)>0$ となる最小の整数 m は　　$\boldsymbol{m=4}$

17.21 (1) $$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k{}^2 - 2\overline{x}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k + \overline{x}^2$$
$$= E(x^2) - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = E(x^2) - \overline{x}^2$$

よって $\quad \boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{E(x^2) - \overline{x}^2}}$

(2) $$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_ky_k - \overline{y}x_k - \overline{x}y_k + \overline{x}\,\overline{y})$$
$$= E(xy) - \overline{y}\,\overline{x} - \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} = \boldsymbol{E(xy) - \overline{x}\,\overline{y}}$$

(3) 相関係数の定義により $\quad \boldsymbol{r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}}$

補足 相関係数 r は，2 つの変量 x，y 間の相関すなわち類似性を示す指標であり，$-1 \leqq r \leqq 1$ の値をとる．シュワルツ (Schwartz) の不等式により

$$\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})\right\}^2 \leqq \left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2\right\}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k-\overline{y})^2\right\}$$

すなわち $\quad \sigma_{xy}{}^2 \leqq \sigma_x{}^2\sigma_y{}^2$ $\quad$ よって $\quad -1 \leqq \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \leqq 1$

$r > 0$ のとき「正の相関」，$r < 0$ のとき「負の相関」があるという．相関係数が 0 に近いときは 2 つの変量間の相関は弱い．

(4) 与えらえた等式を t について整理すると

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - tx_k - 1)^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\{x_k{}^2t^2 - 2(x_ky_k - x_k)t + (y_k-1)^2\}$$
$$= E(x^2)t^2 - 2\{E(xy) - \overline{x}\}t + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}(y_k-1)^2$$

これは t の 2 次関数で，$E(x^2) > 0$ であるから，上式を最小にする t の値は

$$\boldsymbol{t = \frac{E(xy) - \overline{x}}{E(x^2)}}$$

解説 $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b)^2$ を最小にする a，b の値を求める．

$$F(a,\ b) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b)^2$$

とおいて，F を a，b について偏微分すると

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b)x_k = -2\{E(xy) - aE(x^2) - b\overline{x}\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b) = -2(\overline{y} - a\overline{x} - b)$$

F が最小となるとき，$\dfrac{\partial F}{\partial a} = \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$ であるから

$$aE(x^2) + b\overline{x} = E(xy), \quad a\overline{x} + b = \overline{y}$$

したがって　$a = \dfrac{E(xy) - \overline{x}\,\overline{y}}{E(x^2) - \overline{x}^2} = \dfrac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2}$,　$b = -a\overline{x} + \overline{y}$

このとき，直線 $y = ax + b$，すなわち

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2}(x - \overline{x})$$

を回帰直線といい，ある値 x_i に対する y の予測値を計算できる．
また，相関係数 r と回帰直線の傾き a の符号が一致する．

17.22　(1) 確率変数 X が $N(40,\ 20^2)$ に従うとき，$Z = \dfrac{X - 40}{20}$ とおくと，
確率変数 Z は $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned} P(X \leqq 10) &= P(Z \leqq -1.5) = P(Z \geqq 1.5) \\ &= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = \mathbf{0.0668} \end{aligned}$$

(2) n が十分大きいとき，$\overline{X}$ は近似的に**正規分布** $\boldsymbol{N\left(40,\ \dfrac{20^2}{n}\right)}$ に従うから，
$Z = \dfrac{\overline{X} - 40}{\dfrac{20}{\sqrt{n}}}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned} P(39 \leqq \overline{X} \leqq 41) &= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{20} \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{n}}{20}\right) \\ &= 2P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{n}}{20}\right) \geqq 0.8664 \end{aligned}$$

したがって　$P\left(0 \leqq Z \leqq \dfrac{\sqrt{n}}{20}\right) \geqq 0.4332$

$P(0 \leqq Z \leqq 1.5) = 0.4332$ であるから，上式をみたすとき

$$\frac{\sqrt{n}}{20} \geqq 1.5 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{n \geqq 900}$$

17.23 (1) $Z = \dfrac{\overline{X} - a}{b}$ に対して

$$E(Z) = \frac{1}{b}(E(\overline{X}) - a) = \frac{1}{b}(m - a), \quad V(Z) = \frac{1}{b^2}V(\overline{X}) = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

$E(Z) = 0$，$V(Z) = 1$ のとき

$$\frac{1}{b}(m - a) = 0, \quad \frac{1}{b^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n} = 1$$

よって　　$\boldsymbol{a = m,\ b = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(2) $P(|Z| \leqq 1.96) = 1 - 2P(Z > 1.96)$

$= 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$

したがって，信頼度 95% の信頼区間は　　$|Z| \leqq 1.96$

(1) の結果から，$Z = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ であるから　$\left|\dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leqq 1.96$

よって　　$\boldsymbol{\overline{X} - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(3) (2) の結果から，$\sigma = 5$ のとき，信頼区間の幅は

$$1.96\frac{5}{\sqrt{n}} \times 2 = \frac{19.6}{\sqrt{n}}$$

これが 2 以下であるから

$$\frac{19.6}{\sqrt{n}} \leqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{n} \geqq 9.8$$

したがって　$n \geqq 96.04$　　よって，n の最小値は　**97**

17.24 (1) X は **2 項分布 $\boldsymbol{B(n,\ p)}$** に従う.

n が大きいとき，X は**正規分布 $\boldsymbol{N(np,\ np(1-p))}$** に従う.

(2) 標本の大きさ n の場合の信頼度 95%の信頼区間の幅は

$$2 \times 1.96\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}$$

信頼区間の幅が半分になる標本の大きさを n' とすると

$$2 \times 1.96\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n'}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1.96\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}$$

ゆえに　　$\sqrt{\dfrac{1}{n'}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{n}}$　　すなわち　$n'=4n$

よって，標本の大きさを **4** 倍にすればよい．

補足 信頼区間は

$$p_0-1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}<p<p_0+1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

(3) $p=0.05$，$n=1900$ より

$$np=1900\times0.05=95,\quad np(1-p)=1900\times0.05\times(1-0.05)=9.5^2$$

X は，正規分布 $N(95,\ 9.5^2)$ に従うので，$Z=\dfrac{X-95}{9.5}$ は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．よって

$$\begin{aligned}P(76\leqq X\leqq 114)=&P\left(\frac{76-95}{9.5}\leqq Z\leqq\frac{114-95}{9.5}\right)\\=&P(-2\leqq Z\leqq 2)\\=&2P(0\leqq Z\leqq 2)\\=&2\times0.4772=\mathbf{0.9544}\end{aligned}$$

17.25　(1)　(i) **2 項分布 $\boldsymbol{B\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)}$ に従う．**

$$P(X=k)={}_{100}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{100-k}=\mathbf{{}_{100}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}$$

(ii) $m=100\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{50}$，$\sigma=\sqrt{100\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}=\mathbf{5}$

(iii) X は $N(50,\ 5^2)$ に従うので，$Z=\dfrac{X-50}{5}$ は $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned}P(50\leqq X\leqq 60)&=P\left(\frac{50-50}{5}\leqq Z\leqq\frac{60-50}{5}\right)\\&=P(0\leqq Z\leqq 2)=0.5-P(Z>2)\\&=0.5-0.0228=\mathbf{0.4772}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(|X-50|<a)&=P\left(\left|\frac{X-50}{5}\right|<\frac{a}{5}\right)\\&=P\left(|Z|<\frac{a}{5}\right)=2\left\{0.5-P\left(Z\geqq\frac{a}{5}\right)\right\}=0.95\end{aligned}$$

したがって　　$P\left(Z\geqq\dfrac{a}{5}\right)=0.025$

$P\left(Z>1.96\right)=0.025$ であるから　$\dfrac{a}{5}=1.96$　　よって　$\boldsymbol{a=9.8}$

(2) $P(|Z| < 2.58) = 1 - 2 \times 0.0049 = 0.09902 \fallingdotseq 0.99$

標本比率 $\overline{P}$ は　$\overline{P} = \dfrac{100}{400} = \dfrac{1}{4}$

母比率 P に対する信頼度 99%の信頼区間の幅は

$$2 \times 2.58 \times \sqrt{\frac{\overline{P}\left(1-\overline{P}\right)}{n}} = 2 \times 2.58 \times \sqrt{\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)}{400}}$$
$$= 2 \times 2.58 \times \frac{1}{20} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\fallingdotseq \mathbf{0.112}$$

17.26 (1) $\boldsymbol{a = m,\ b = \sigma,\ c = np,\ d = \sqrt{np(1-p)}}$

(2) (a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (k - |\,x-1\,|)\,dx$

$$= 2k + \int_0^1 (x-1)\,dx - \int_1^2 (x-1)\,dx$$
$$= 2k + \left[\ \frac{1}{2}(x-1)^2\ \right]_0^1 - \left[\ \frac{1}{2}(x-1)^2\ \right]_1^2 = 2k - 1$$

$f(x)$ は確率密度関数であるから，$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 1$ より

$2k - 1 = 1$　これを解いて　$\boldsymbol{k = 1}$

(b) (a) の結果から　$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 2 - x & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$

平均 $E(X)$ および分散 $V(X)$ は

$$E(X) = \int_0^2 x f(x)\,dx = \int_0^1 x{\cdot}x\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx$$
$$= \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 + \left[\ x^2 - \frac{x^3}{3}\ \right]_1^2 = 1,$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$
$$= \int_0^2 x^2 f(x)\,dx - 1^2$$
$$= \int_0^1 x^2{\cdot}x\,dx - \int_1^2 x^2(2-x)\,dx - 1^2$$
$$= \left[\ \frac{x^4}{4}\ \right]_0^1 - \left[\ \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\ \right]_1^2 - 1 = \frac{1}{6}$$

よって　平均 $E(X) = \mathbf{1}$，標準偏差 $\sqrt{V(X)} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{6}}$

(3) 製品の重さ X(g) は，正規分布 $(1000,\ 50^2)$ に従うので，$Z = \dfrac{X - 1000}{50}$ は，正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$$P(X \leqq 902) = P\left(Z \leqq \frac{902 - 1000}{50}\right)$$
$$= P(Z \leqq -1.96) = P(Z \geqq 1.96) = 0.025$$

よって，902g 以下の製品の個数は

$$1000 \times 0.025 = \mathbf{25}\ (\text{個})$$

17.27 (1) X が正規分布 $N(65,\ 20^2)$ に従うとき，$Z = \dfrac{X - 65}{20}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$$P(X > c) = P\left(Z > \frac{c - 65}{20}\right) = 0.05$$

であるとき，$P(Z > 1.65) = 0.05$ により

$$\frac{c - 65}{20} = 1.65 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{c = 98}$$

(2) 標本の大きさ 100 を十分大きいとみなしてよいから，$\overline{X}$ は

$$\textbf{正規分布 } \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{m},\ \frac{\mathbf{20^2}}{\mathbf{100}}\right)$$

に従う．$\dfrac{20^2}{100} = 2^2$ より，$Z = \dfrac{\overline{X} - m}{2}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから，$P(Z > 1.96) = 0.025$ より

$$P\left(-1.96 \leqq \frac{\overline{X} - m}{2} \leqq 1.96\right) = 1 - 0.025 \times 2 = 0.95$$

したがって　　$-1.96 \leqq \dfrac{\overline{X} - m}{2} \leqq 1.96$

よって，母平均 m の信頼度 95%の信頼区間は

$$\boldsymbol{\overline{X} - 3.92 \leqq m \leqq \overline{X} + 3.92}$$

17.28 (1) (a) 与えられた確率密度関数から

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+k)\,dx + \int_{0}^{1} (-x+k)\,dx$$
$$= \left[\ \frac{x^2}{2} + kx\ \right]_{-1}^{0} + \left[\ -\frac{x^2}{2} + kx\ \right]_{0}^{1} = 2k - 1$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ より　$2k-1=1$　これを解いて　$\boldsymbol{k=1}$

したがって　$E(X) = \displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx$

$$= \int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x(-x+1)\,dx$$
$$= \left[\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\ \right]_{-1}^{0} + \left[\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\ \right]_{0}^{1} = \mathbf{0}$$

(b) $P(-0.5 \leqq X \leqq 0.5) = \displaystyle\int_{-0.5}^{0.5} f(x)\,dx$

$$= \int_{-0.5}^{0} (x+1)\,dx + \int_{0}^{0.5} (-x+1)\,dx$$
$$= \left[\ \frac{x^2}{2} + x\ \right]_{-0.5}^{0} + \left[\ -\frac{x^2}{2} + x\ \right]_{0}^{0.5} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

(2) (a) $\boldsymbol{x = m,\ y = \dfrac{\sigma^2}{n}}$

(b) 標本の大きさ 100 は十分大きいとみなせるので，標本平均 $\overline{X}$ は，$N\left(50,\ \dfrac{20^2}{100}\right) = N(50,\ 2^2)$ に従うので，$Z = \dfrac{\overline{X} - 50}{2}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う．

$$P(46 \leqq \overline{X} \leqq 52) = P(-2 \leqq Z \leqq 1)$$
$$= 1 - \{P(Z \leqq -2) + P(Z \geqq 1)\}$$
$$= 1 - \{P(Z \geqq 2) + P(Z \geqq 1)\}$$
$$= 1 - (0.0228 + 0.1587)$$
$$= \mathbf{0.8185}$$

17.29 (1) 母平均 m，標準偏差 σ は

$$m = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{2}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} = \mathbf{2}$$
$$\sigma^2 = 1^2\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot\frac{2}{4} + 3^2\cdot\frac{1}{4} - 2^2 = \frac{2}{4}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

別解 標本の数が少ないので，次のように計算してもよい．

$$m = \frac{1+2+2+3}{4} = 2$$
$$\sigma^2 = \frac{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^3}{4} = \frac{2}{4}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\overline{Y} = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}$ より

$$P\left(\overline{Y} = \frac{3}{2}\right) = \frac{1\cdot2 + 2\cdot1}{4\cdot3} = \frac{1}{3} \qquad \leftarrow (Y_1,\ Y_2) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$$
$$P\left(\overline{Y} = 2\right) = \frac{1\cdot1 + 2\cdot1 + 1\cdot1}{4\cdot3} = \frac{1}{3} \qquad \leftarrow (Y_1,\ Y_2) = (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$
$$P\left(\overline{Y} = \frac{5}{2}\right) = \frac{2\cdot1 + 1\cdot2}{4\cdot3} = \frac{1}{3} \qquad \leftarrow (Y_1,\ Y_2) = (2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

$\overline{Y} = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}$ の確率分布の表は

$\overline{Y}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

平均 $E(\overline{Y})$ は

$$E(\overline{Y}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{2}$$

標準偏差 $\sigma(\overline{Y})$ は

$$V(\overline{Y}) = \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2\cdot\frac{1}{3} + (2-2)^2\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$\sigma(\overline{Y}) = \sqrt{V(\overline{Y})} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{6}}}{\mathbf{6}}$$

(3) (1) で求めた母平均 2，母分散 $\dfrac{1}{2}$ の母集団から抽出された大きさ 200 の標本平均 $\overline{X}$ の分布は，正規分布

$$N\left(2,\ \frac{\frac{1}{2}}{200}\right) = N\left(2,\ \frac{1}{400}\right)$$

に従う．ゆえに

$$Z = \frac{\overline{X} - 2}{\frac{1}{20}} = 20(\overline{X} - 2)$$

は，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$P(Z > 1.65) = 0.05$ より，$P(Z < -1.65) = 0.05$ であるから

$$P(20(\overline{X} - 2) < -1.65) = 0.05 \quad \text{ゆえに} \quad P\left(\overline{X} < 2 - \frac{1.65}{20}\right) = 0.05$$

よって　　$a = 2 - \dfrac{1.65}{20} = 2 - \dfrac{33}{400} = \boldsymbol{\dfrac{767}{400}}$

17.30　(1) $f(x)$ は確率密度関数であるから，$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 1$ より

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{4}x + k\right) dx \\ &= \left[\ \frac{1}{2}x\ \right]_0^1 + \left[\ -\frac{1}{8}x^2 + kx\ \right]_1^3 \\ &= -\frac{1}{2} + 2k\end{aligned}$$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2} + 2k = 1$　これを解いて　$\boldsymbol{k = \dfrac{3}{4}}$

したがって　　$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^3 xf(x)\,dx \\ &= \int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}\,dx + \int_1^3 x\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right) dx \\ &= \left[\ \frac{1}{4}x^2\ \right]_0^1 + \left[\ -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{8}x^2\ \right]_1^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{13}{12}}\end{aligned}$

(2) (a) (i) $0 \leqq a$ のとき

$$\begin{aligned}P(a \leqq Z \leqq b) &= P(0 \leqq Z \leqq b) - P(0 \leqq Z \leqq a) \\ &= \boldsymbol{g(b) - g(a)}\end{aligned}$$

(ii) $a \leqq 0 \leqq b$ のとき

$$\begin{aligned} P(a \leqq Z \leqq b) &= P(a \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq b) \\ &= P(0 \leqq Z \leqq -a) + P(0 \leqq Z \leqq b) \\ &= \boldsymbol{g(-a) + g(b)} \end{aligned}$$

(iii) $b \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} P(a \leqq Z \leqq b) &= P(-b \leqq Z \leqq -a) \\ &= P(0 \leqq Z \leqq -a) - P(0 \leqq Z \leqq -b) \\ &= \boldsymbol{g(-a) - g(-b)} \end{aligned}$$

(b) 標本平均は，正規分布 $N\left(50,\ \dfrac{(3\sqrt{10})^2}{10}\right) = N(50,\ 3^2)$ に従う．

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P\left(\frac{41.0-50}{3} \leqq Z \leqq \frac{48.5-50}{3}\right) &= P(-3 \leqq Z \leqq -0.5) \\ &= P(0.5 \leqq Z \leqq 3) \\ &= \boldsymbol{g(3) - g(0.5)} \end{aligned}$$

(c) 標本平均 $\overline{X}$ を標準化した

$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{5}{\sqrt{20}}}$$

は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので

$$\begin{aligned} P(|Z| \leqq l_p) &= P(-l_p \leqq Z \leqq l_p) \\ &= 2P(0 \leqq Z \leqq l_p) \\ &= 2g(l_p) = 2 \times \frac{p}{2} = p \end{aligned}$$

したがって，母平均 m に対する信頼度 $100p\%$ の信頼区間は

$$-l_p \leqq \frac{\overline{X} - m}{\frac{5}{\sqrt{20}}} \leqq l_p \quad \text{すなわち} \quad \overline{X} - \frac{5}{\sqrt{20}} l_p \leqq m \leqq \overline{X} + \frac{5}{\sqrt{20}} l_p$$

よって，求める信頼区間の区間幅は $\quad 2 \times \dfrac{5}{\sqrt{20}} l_p = \boldsymbol{\sqrt{5}\, l_p}$

17.31 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ より

$$\int_{-1}^{1} k(1-x^2)\,dx = 2k\left[\, x - \frac{x^3}{3} \,\right]_0^1 = \frac{4}{3}k = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k = \frac{3}{4}}$$

また $\displaystyle E(X) = \int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} (x - x^3)\,dx = \mathbf{0}$

(2) (a) 標本平均 $\overline{X}$ は，100 を大きい数とみなせるので，近似的に次の標準正規分布に従う．

$$N\left(m,\ \frac{10^2}{100}\right) \quad \text{すなわち} \quad N(m,\ 1)$$

ゆえに，$\displaystyle Z = \frac{\overline{X} - m}{1}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$P(Z > 1.96) = 0.025$ から

$$P(|Z| \leqq 1.96) = 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$$

したがって $\quad P(|\overline{X} - m| \leqq 1.96) = 0.95$

ゆえに $\quad P(\overline{X} - 1.96 \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96) = 0.95$

よって，求める信頼区間は $\quad \boldsymbol{[\overline{X} - 1.96,\ \overline{X} + 1.96]}$

(b) 標本平均 $\overline{X}$ は，正規分布 $\displaystyle N\left(m,\ \frac{10^2}{n}\right)$ に従う．

$P(Z > 2.58) = 0.005$ から

$$P(|Z| \leqq 2.58) = 1 - 2 \times 0.005 = 0.99$$

したがって $\quad \displaystyle P\left(\left|\frac{\overline{X} - m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right| \leqq 2.58\right) = 0.99$

ゆえに $\quad \displaystyle P\left(\overline{X} - 2.58\frac{10}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 2.58\frac{10}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$

信頼区間 $\displaystyle \left[\overline{X} - 2.58\frac{10}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 2.58\frac{10}{\sqrt{n}}\right]$ が，(a) で求めた信頼区間より小さくするには

$$2.58\frac{10}{\sqrt{n}} < 1.96 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{n} > \frac{2.58}{1.96} \times 10 \fallingdotseq 1.32 \times 10 = 13.2$$

したがって $\quad n > 13.2^2 = 174.24$

よって，n を **175** 以上にとればよい．

17.32 (1)
$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^a \frac{k}{a}x\,dx + \int_a^2 \frac{k}{2-a}(2-x)\,dx$$
$$= k\left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a + k\left[-\frac{(2-x)^2}{2(2-a)}\right]_a^2 = \frac{a}{2}k + \frac{2-a}{2}k = k$$

$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 1$ であるから　　$\boldsymbol{k = 1}$

解説 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ は，3 点 $(0,\ 0)$，$(a,\ k)$，$(2,\ 0)$ を頂点する三角形の面積.

(2) $k = 1$ より

$$E(X) = \int_0^2 xf(x)\,dx$$
$$= \int_0^a \frac{x^2}{a}\,dx + \int_a^2 \frac{x(2-x)}{2-a}\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3a}\right]_0^a + \int_a^2 \left\{\frac{2(2-x)}{2-a} - \frac{(2-x)^2}{2-a}\right\} dx$$
$$= \frac{a^2}{3} + \left[-\frac{(2-x)^2}{2-a} + \frac{(2-x)^3}{3(2-a)}\right]_a^2$$
$$= \frac{a^2}{3} + (2-a) - \frac{1}{3}(2-a)^2$$
$$= \boldsymbol{\frac{a+2}{3}}$$

(3)
$$\int_0^a \frac{x}{a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a = \frac{a}{2} < \frac{1}{2} = 0.5$$

上式および $P(X \leqq u) = 0.5$ より　$u > a$

$$P(X \leqq u) = \int_0^a \frac{x}{a}\,dx + \int_a^u \frac{2-x}{2-a}\,dx$$
$$= \frac{a}{2} + \left[-\frac{(2-x)^2}{2(2-a)}\right]_a^u$$
$$= \frac{a}{2} - \frac{(2-u)^2}{2(2-a)} + \frac{2-a}{2} = 1 - \frac{(2-u)^2}{2(2-a)}$$

したがって　$1 - \dfrac{(2-u)^2}{2(2-a)} = 0.5$　ゆえに　$(2-u)^2 = 2-a$

$a < u < 2$ であるから，$2-u > 0$，$2-a > 0$ より

$2 - u = \sqrt{2-a}$　よって　$\boldsymbol{u = 2 - \sqrt{2-a}}$

17.33 (1) 数字 1 が書かれた玉 a 個 $(a \geqq 1)$ と数字 2 が書かれた玉 1 個の計 $a+1$ 個の玉から 1 個取り出した玉の数字を X とすると

X	1	2	計
$P(X)$	$\frac{a}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{a}{a+1} + 2 \times \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{a+1}$$
$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$
$$= 1^2 \times \frac{a}{a+1} + 2^2 \times \frac{1}{a+1} - \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^2 = \frac{a}{(a+1)^2}$$

$E(\overline{X}) = E(X)$ であるから

$$\frac{a+2}{a+1} = \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a = 1 \quad \text{ゆえに} \quad V(X) = \frac{1}{4}$$

$V(\overline{X}) = \frac{1}{3}V(X)$ であるから $\qquad V(\overline{X}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$

復元抽出による大きさ 3 の無作為標本のうち，数字 2 が書かれた玉が出た回数を k とすると $(0 \leqq k \leqq 3)$

$$\overline{X} = \frac{1 \cdot (3-k) + 2 \cdot k}{3} = \frac{3+k}{3}, \quad P(\overline{X}) = {}_3\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{{}_3\mathrm{C}_k}{8}$$

したがって，$\overline{X}$ の確率分布表は，次のようになる．

$\overline{X}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	計
$P(\overline{X})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

補足 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ のとき，$V(\overline{X}) = \dfrac{1}{n}V(X)$

(2) $\dfrac{300}{500} = 0.6$，$P(Z > 0.25) = 0.4$ より

$$P(Z < -0.25) = 0.4 \quad \text{ゆえに} \quad P(Z \geqq -0.25) = 0.6$$

得点を X，$Z = \dfrac{X - 245}{50}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従うので，合格最低点を x とすると

$$\frac{x - 245}{50} = -0.25 \quad \text{ゆえに} \quad x = 245 + (-0.25) \times 50 = 232.5$$

ここでは，小数点以下は切り上げるので　**233** (点)

17.34 (1) コインの表と裏の出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$

確率変数 X は二項分布 $B\left(2n,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う.

よって，期待値 $E(X)$ と標準偏差 σ は

$$E(X)=2n\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{n},\quad \sigma=\sqrt{2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}}$$

(2) $P(X=k)={}_{2n}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$，$P(X=k+1)={}_{2n}\mathrm{C}_{k+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$ より

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{2n}\mathrm{C}_k}=\frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}\cdot\frac{k!(2n-k)!}{(2n)!}$$
$$=\frac{\boldsymbol{2n-k}}{\boldsymbol{k+1}}$$

(3) (2) の結果から $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)}-1=\dfrac{2n-2k-1}{k+1}$

したがって $0\leqq k\leqq n-1$ のとき $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)}>1$

$n\leqq k\leqq 2n$ のとき $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)}<1$

よって，$P(X=k)$ を最大にする k の値は $\boldsymbol{n}$

(4) $n=200$ のとき，確率変数 X は二項分布 $B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う.

$B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ は，正規分布 $N(200,\ 100)$ で近似されるから

$$Z=\frac{X-200}{\sqrt{100}}$$

とおくと，確率変数 Z は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う.

$$P(-190\leqq X\leqq 210)=P\left(-1\leqq\frac{X-200}{10}\leqq 1\right)$$
$$=P(-1\leqq Z\leqq 1)$$
$$=2P(0\leqq Z\leqq 1)$$
$$=2\{0.5-P(Z>1)\}$$
$$=2(0.5-0.159)=\boldsymbol{0.682}$$

17.35 (1) $\boldsymbol{P(x=k) = {}_{100}\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{100-k}}$

(2) 100 人中 1 人だけ賛成である確率は　$P(X=1)$

100 人中 2 人だけ賛成である確率は　$P(X=2)$

「100 人中 1 人だけが賛成者」でない確率が,「100 人中 2 人だけが賛成者」でない確率よりも大きいから

$$1-P(X=1) > 1-P(X=2) \quad \text{ゆえに} \quad P(X=2) > P(X=1)$$

したがって　　${}_{100}\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^{98} > {}_{100}\mathrm{C}_1 p(1-p)^{99}$

$$\frac{100\cdot 99}{2} p^2(1-p)^{98} > 100p(1-p)^{99}$$

$$99p > 2(1-p)$$

$0 < p < 1$ であることに注意して　$\boldsymbol{\dfrac{2}{101} < p < 1}$

(3) 正規分布表から　$P(0 \leqq z \leqq 1.96) = 0.4750$

ゆえに　$P(-1.96 \leqq z \leqq 1.96) = 0.4750 \times 2 = 0.9500$

標本比率 $p_0 = \dfrac{80}{100} = 0.8$，標本の大きさ $n = 100$ のとき，母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\ p_0 - 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}},\ p_0 + 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\ \right]$$

$1.96\sqrt{\dfrac{0.8(1-0.8)}{100}} = 1.96 \times 0.04 = 0.0784$ より

$$[0.8 - 0.0784,\ 0.8 + 0.0784] \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{[0.7216,\ 0.8784]}$$

(4) $P(X=k)={}_{100}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{100-k}$ の自然対数をとると

$$\log P(X=k)=\log {}_{100}\mathrm{C}_k+k\log p+(100-k)\log(1-p)$$

これを p について微分すると

$$\frac{d}{dp}\log P(X=k)=\frac{k}{p}-\frac{100-k}{1-p}=\frac{k-100p}{p(1-p)}$$

p	(0)	$\cdots$	$\frac{k}{100}$	$\cdots$	(1)
$\frac{d}{dp}P(X=k)$		$+$	0	$-$	
$P(X=k)$		↗	極大	↘	

よって，求める p の値は　$\boldsymbol{p=\dfrac{k}{100}}$

17.36　(1) X_4 の確率分布は

X_4	-4	-2	0	2	4	計
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

X_4 の平均は　$E(X_4)=-4\cdot\dfrac{1}{16}+(-2)\cdot\dfrac{4}{16}+0\cdot\dfrac{6}{16}+2\cdot\dfrac{4}{16}+4\cdot\dfrac{1}{16}=\mathbf{0}$

$E({X_4}^2)=(-4)^2\cdot\dfrac{1}{16}+(-2)^2\cdot\dfrac{4}{16}+0^2\cdot\dfrac{6}{16}+2^2\cdot\dfrac{4}{16}+4^2\cdot\dfrac{1}{16}=4$

X_4 の分散は　$V(X_4)=E({X_4}^2)-E(X_4)^2=4-0^2=\mathbf{4}$

X_5 の確率分布は

X_5	-5	-3	-1	1	3	5	計
確率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

X_5 の平均は

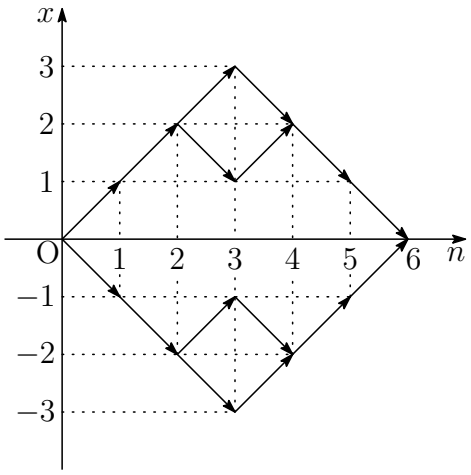
$$E(X_5)=-5\cdot\frac{1}{32}+(-3)\cdot\frac{5}{32}+(-1)\cdot\frac{10}{32}+1\cdot\frac{10}{32}+3\cdot\frac{5}{32}+5\cdot\frac{1}{32}=\mathbf{0}$$

$E({X_5}^2)=(-5)^2\cdot\dfrac{1}{32}+(-3)^2\cdot\dfrac{5}{32}+(-1)^2\cdot\dfrac{10}{32}+1^2\cdot\dfrac{10}{32}+3^2\cdot\dfrac{5}{32}+5^2\cdot\dfrac{1}{32}=5$

X_5 の分散は　$V(X_5)=E({X_5}^2)-E(X_5)^2=5-0^2=\mathbf{5}$

(2) 6回目で初めて原点に戻るとき，その推移をグラフに示すと，4通りある．よって，求める確率は

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}$$



(3) X_1 の平均は　$E(X_1) = -1\cdot(1-p) + 1\cdot p = \mathbf{2p-1}$

$E(X_1{}^2) = (-1)^2\cdot(1-p) + 1^2\cdot p = 1$

X_1 の分散は　$V(X_1) = E(X_1{}^2) - E(X_1)^2 = 1-(2p-1)^2 = \mathbf{4p(1-p)}$

$E(X_n) = E(X_{n-1}+X_1)$, $V(X_n) = V(X_{n-1}+X_1)$ で，X_{n-1} と X_1 は独立であるから

$$E(X_n) = nE(X_1) = \boldsymbol{n(2p-1)}$$
$$V(X_n) = nV(X_1) = \boldsymbol{4np(1-p)}$$

(4) 100回のうち表が x 回出たとすると，裏が $100-x$ 回であるから

$$x\cdot 1 + (100-x)\cdot(-1) = 28 \quad \text{これを解いて} \quad x = 64$$

標本の大きさ $n=100$，標本比率 $R = \dfrac{64}{100}$ とすると，p に対する信頼度95%の信頼区間は

$$\left[\ R - 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}},\ R + 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\ \right]$$

ゆえに　$\left[\ 0.64 - 1.96\cdot\dfrac{48}{1000},\ 0.64 + 1.96\cdot\dfrac{48}{1000}\ \right]$

よって　$[\ \mathbf{0.54592,\ 0.73408}\ ]$

17.37　(1) 標本平均を $\overline{x}$ とすると

$$\overline{x} = \frac{1}{9}(58+61+56+59+52+62+65+59+68) = \mathbf{60}$$

別解　$\overline{x} = 60 + \dfrac{1}{9}\{(-2)+1+(-4)+(-1)+(-8)+2+5+(-1)+8\} = 60$

(2) 標本分散を S^2，標本標準偏差を S とすると

$$S^2 = \frac{1}{9}\{(-2)^2 + 1^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + (-8)^2 + 2^2 + 5^2 + (-1)^2 + 8^2\}$$
$$= \mathbf{20}$$

よって　　$\boldsymbol{S = 2\sqrt{5}}$

(3) 標本の大きさ $n = 9$，標本平均 $\overline{x} = 60$，母分散 $\sigma^2 = 25$ より，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\ 60 - 1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{9}},\ 60 + 1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{9}}\ \right]$$　すなわち　[**56.73, 63.27**]

(4)　$\boldsymbol{m_1 = \dfrac{m - 10}{50},\ \ {\sigma_1}^2 = \dfrac{\sigma^2}{50^2}}$

すべての卵の重さからそれぞれ 10g を引いて，50g で割った数値の標本平均を $\overline{X}$ とすると

$$\overline{X} = \frac{60 - 10}{50} = 1, \quad \sigma_1 = \frac{5}{50} = 0.1$$

m_1 に対する信頼度 95% の母平均 m の信頼区間は

$$\left[\ 1 - 1.96\cdot\frac{0.1}{3},\ 1 + 1.96\cdot\frac{0.1}{3}\ \right]$$　すなわち　[**0.93, 1.07**]

(5) 抽出した n 個の卵の重さの平均を m' とする．信頼度 95% の母平均 m の信頼区間は

$$m' - 1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{n}} \leqq m < m' + 1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}$$

この信頼区間の幅が 5 以下であるとき

$$2\cdot 1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{n}} \leqq 5 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{n} \geqq 3.92$$

$n \geqq 15.3664$ であるから，n の最小値は　**16**

17.38　(1) 標本平均 m_1 は

$$m_1 = \frac{1}{9}(9.0 + 9.0 + 8.0 + 8.0 + 9.0 + 9.0 + 10.0 + 9.0 + 10.0) = \mathbf{9.0}$$

分散 ${S_1}^2$ は

$${S_1}^2 = \frac{1}{9}\{0^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2\} = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

別解 $m_1 = 9.0 + \dfrac{1}{9}\{0 + 0 + (-1.0) + (-1.0) + 0 + 0 + 1.0 + 0 + 1.0\} = \mathbf{9.0}$

(2) 母分散 $\sigma^2 = 1$，標本の大きさ 9，標本平均 9 より，母平均 m に対する 95% の信頼区間は，

$$9.0 - 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} \leqq m \leqq 9.0 + 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}$$

$8.346 \leqq m \leqq 9.653$ より　$\mathbf{8.35 \leqq m \leqq 9.65}$

(3) $m_2 = \dfrac{9.0 + 9.0 + 8.0 + 8.0 + 9.0 + 9.0 + 10.0 + 9.0 + 10.0 + x}{10} = \dfrac{x + 81}{10}$

分散 ${S_2}^2$ は

$$\begin{aligned} {S_2}^2 &= \frac{9.0^2 + 9.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2 + 9.0^2 + 9.0^2 + 10.0^2 + 9.0^2 + 10.0^2 + x^2}{10} \\ &\qquad - \left(\frac{x + 81}{10}\right)^2 \\ &= \frac{9x^2 - 162x + 769}{100} = \frac{9(x - 9)^2 + 40}{100} \end{aligned}$$

$8 \leqq x \leqq 10$ より

$$\mathbf{8.9 \leqq m_2 \leqq 9.1}, \quad \mathbf{\frac{2}{5} \leqq {S_2}^2 \leqq \frac{49}{100}} \quad (0.4 \leqq {S_2}^2 \leqq 0.49 \text{ も可})$$

(4) 母集団は　母平均 $m = 8$，母分散 $\sigma^2 = 1$

大きさ 4 の標本平均 $\overline{X}$ は，正規分布 $N\left(8,\ \dfrac{1^2}{4}\right)$ に従う．

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \geqq 9) &= P\left(\frac{\overline{X} - 8}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \geqq \frac{9 - 8}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) = P(Z \geqq 2) \\ &= 0.5 - u(2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \end{aligned}$$

よって，求める確率は　$\mathbf{0.02}$