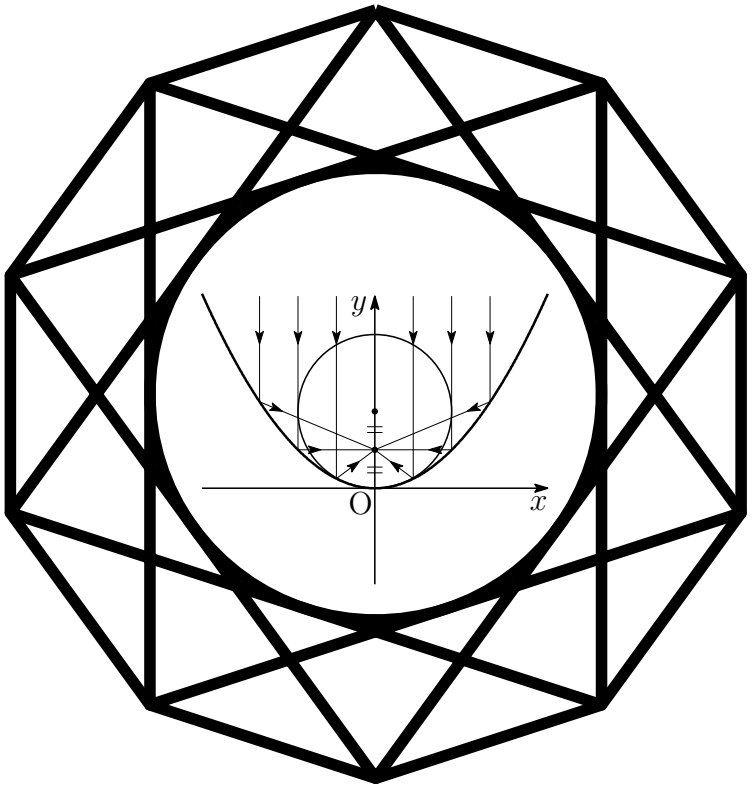
九州地区国立大学

大学受験　数学Ⅲ

2001－2024

過去問



2025 年 1 月 18 日

序

2014 年に開催された第 68 回九州算数・数学教育研究 (熊本) 大会で研究発表者 (熊本県数学部会) より九州地区国立大学の入試問題を分析した大学入試問題集の作成に向けた取り組みが報告されました．この報告に対し多くの先生方からご賛同を頂き

『大学受験　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B』　『大学受験　数学Ⅲ』

が作成されました．

また，情報化に対応するため，本書および解答集の電子文書化 (PDF) を推進し，携帯端末やパソコンでの操作に対応した電子書籍も作成されました．

本書の編集にあたり，以下の点に留意しました．

1. 本書に掲載した問題は，九州大学・九州工業大学・福岡教育大学・佐賀大学・長崎大学・熊本大学・大分大学・宮崎大学・鹿児島大学・琉球大学の全学部全学科過去 24 年分 (2001-2024) の一般前期試験問題から厳選しました．

2. 本書は，系統的な問題配置を行うと共に，難易度を問題ごとに「基本」「標準」「応用」「発展」として明示しました．頻出問題については，□□を付けて繰り返し確認できるように配慮しました．

3. 本書に掲載した問題を含め，上記 10 大学の全学部全学科過去 24 年分 (2001-2024) の一般前期試験問題および解答を次のサイトから入手することもできます．

   https://math4u.site/

   また，本書に関する最新情報は，同サイトに掲載しています．

令和 7 年 1 月　西村　信一

目 次

序 **i**

第 1 章　式と曲線 **1**
1.1　2 次曲線 1
1.2　媒介変数表示と極方程式 6
1.3　問題研究 11
1.3.1　2 次曲線の極方程式 11

第 2 章　複素数平面 **17**
2.1　複素数平面 17
2.2　複素数の極形式と乗法，除法 17
2.3　ド・モアブルの定理 19
2.4　複素数と図形 26
2.5　問題研究 36
2.5.1　トレミーの定理 36

第 3 章　関数 **37**
3.1　関数 37

第 4 章　極限 **39**
4.1　数列の極限 39
4.2　関数の極限 50
4.3　問題研究 53
4.3.1　ネイピア数 53

第 5 章　微分法とその応用 **55**
5.1　導関数 55
5.2　接線と法線 59
5.3　関数のグラフ 62
5.4　最大・最小 66
5.5　方程式・不等式への応用 70
5.6　問題研究 76
5.6.1　相加平均・相乗平均の拡張 76

第 6 章　積分法 **77**
6.1　不定積分 77
6.2　定積分 78
6.3　定積分と最大・最小 90
6.4　漸化式による積分法 90
6.5　積分方程式 (定数型) 94
6.6　積分方程式 (変数型) 95
6.7　等式・不等式への応用 96
6.8　極限値 103
6.9　区分求積法 111
6.10　問題研究 114
6.10.1　テイラー展開 114
6.10.2　多項式のテイラー展開 115
6.10.3　オイラーの公式 116
6.10.4　ギブスの不等式 117

第 7 章　積分法の応用 **119**
7.1　面積 119
7.1.1　有理・無理関数と面積 119
7.1.2　三角関数と面積 125
7.1.3　指数関数と面積 127
7.1.4　対数関数と面積 131
7.1.5　その他の面積 136
7.2　体積 145
7.2.1　非回転体の体積 145
7.2.2　$\boldsymbol{x}$ 軸の周りの回転体の体積 146
7.2.3　$\boldsymbol{y}$ 軸の周りの回転体の体積 158
7.2.4　直線を軸とする回転体 163
7.2.5　容積と水面の速度 164
7.3　曲線の長さ 166
7.4　速度と道のり 168
7.5　微分方程式 170
7.6　問題研究 173
7.6.1　積分公式 173
7.6.2　シンプソンの公式 174
7.6.3　法線群の包絡線 175
7.6.4　等速運動と曲線の曲率 179
7.6.5　バウムクーヘン型求積法 181

7.6.6 パップス・ギュルダンの定理 182
7.6.7 線形微分方程式 187

解答 **191**

第 1 章　式と曲線

1.1　2 次曲線

□□ **1.1** 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ における接線の方程式を求めよ．

(長崎大学 2011) 5

基本 1.2 直線 $l:ax+y-2=0$ $(a \geqq 0)$ について，次の問いに答えよ．

(福岡教育大学 2002) 8

(1) 直線 l と接し，原点を中心とする円の方程式を求めよ．

(2) 上の (1) で求めた円と直線 l の接点を P とする．a が $0 \leqq a$ の範囲で動くとき，P の x 座標の範囲を求めよ．

基本 1.3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ を考える．点 A と楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(u,\ v)$ との距離を d とする．ただし，a は正の定数とする．次の問いに答えよ．

(1) d を u の式で表せ．　(福岡教育大学 2013) 3

(2) d の最小値を求めよ．また，そのときの u の値を求めよ．

基本 1.4 楕円 $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y}{5}\right)^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線と x 軸，y 軸が作る三角形の面積 S とする．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．　(福岡教育大学 2002) 3

(1) S を a，b を用いて表せ．

(2) 点 P が $a>0$，$b>0$ の範囲で動くとき，S の最小値とそのときの a，b の値を求めよ．

基本 1.5 k を定数とする．座標平面上に曲線 $C:2x^2+3y^2-12x-12y+24=0$ がある．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2006) 3

(1) 曲線 C の概形をかけ．

(2) 曲線 C と直線 $y=x+k$ の共有点の個数を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点 P，Q で交わるとき，線分 PQ の中点の軌跡を求めよ．

基本 1.6 曲線 $C : 4x^2 + 9y^2 = 36$ $(x > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ が第 1 象限にある．点 P における曲線 C の接線を ℓ とする．　(大分大学 2015) 4

(1) y_1 の値を求めなさい．

(2) 接線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標を求めなさい．

(4) 曲線 C，接線 ℓ，x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

基本 1.7 $m > 0$ とする．曲線 $C : x^2 + 3y^2 = 3$ $(x \geqq 0)$ と直線 $L_m : y = mx - 1$ の 2 つの共有点を $\mathrm{A}(0, -1)$，$\mathrm{B}_m(p,\ q)$ とおく．次に答えよ．　(九工大 [工]2006) 4

(1) p，q を m を用いて表せ．

(2) 2 点 A，B_m の間の距離を $f(m)$ とする．$f(m)$ の最大値とそのときの m の値 m_0 を求めよ．

(3) (2) で求めた m_0 に対して，曲線 C と線分 AB_m の囲む図形の面積 S を求めよ．

基本 1.8 $p > 1$ のとき，座標平面の点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ から楕円 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ に引いた 2 本の接線が直交する．このとき p の値を求めよ．　(琉球大学 2005) 3

基本 1.9 次の文中にある空欄 $\boxed{}$ に適する数を求め，その結果だけを答えよ．　(鹿児島大学 2002) 10

(1) 点 $(1,\ 1)$ と直線 $y = -2$ からの距離が等しい点の軌跡は放物線であり，その方程式は $y = ax^2 + bx - \dfrac{1}{3}$ である．このとき，$a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$ である．

(2) 2 点 $(3,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ からの距離の和が 12 である点の軌跡は楕円であり，その方程式は $\dfrac{(x-r)^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 1$ である．このとき，$p = \boxed{}$，$q = \boxed{}$，$r = \boxed{}$ である．

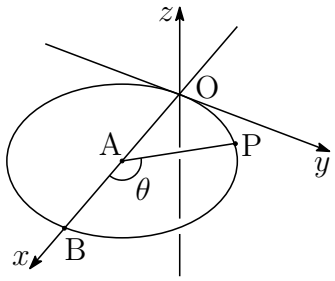
標準 1.10 点 O を原点とし，x 軸，y 軸，z 軸を座標軸とする座標空間において，3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(2,\ 0,\ 0)$，C$(1,\ 0,\ 1)$ がある．点 A を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上に点 P をとり，図のように $\theta = \angle\mathrm{BAP}$ とおく．ただし，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ とする．また，直線 CP と yz 平面の交点を Q とおく．このとき，次の問に答えよ．

(佐賀大学 2015) 3

(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 Q の座標を θ を用いて表せ．

(3) θ の値が $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で変化するとき，yz 平面における点 Q の軌跡の方程式を求め，その概形を図示せよ．



標準 1.11 楕円 $C_1 : 6x^2 + 4y^2 = 3$ と曲線 $C_2 : 8x - 8y^2 = 1$ について，次の問いに答えよ．

(長崎大学 2009) 5

(1) C_1 と C_2 の交点において，C_1 と C_2 の接線は直交することを証明せよ．

(2) $x > 0$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 1.12 次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2003) 10

(1) α，β を $\alpha > 0$，$\beta \neq 0$，$\alpha > \beta$ を満たす定数とし，方程式 $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{\beta} = 1$ で表される平面上の 2 次曲線を C とする．点 P$(x_0,\ y_0)$ (ただし $y_0 \neq 0$) を C 上の点とし，点 P における C の接線の傾きを m とするとき，$m = -\dfrac{\beta x_0}{\alpha y_0}$ であることを示せ．ただし C が双曲線の場合，接線の傾きと漸近線の傾きが一致しないことを証明せずに用いてよい．

(2) t は $1 < t < 4$ を満たすとする．
方程式 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ および $\dfrac{x^2}{4-t} + \dfrac{y^2}{1-t} = 1$ で与えられる 2 次曲線をそれぞれ C_1，C_2 とする．点 P$(x_0,\ y_0)$ (ただし $y_0 \neq 0$) が C_1 と C_2 の交点であるとき，点 P における C_1 および C_2 の接線は互いに直交することを，(1) の結果を用いて示せ．

標準 1.13 $x^2-y^2=2$ で表される曲線を C とし，$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を C 上の点とする．次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2010) 6

(1) 曲線 C の点 P における接線 l の方程式は

$$x_0x-y_0y=2$$

となることを証明せよ．

(2) 原点 O から l に下ろした垂線を OH とする．H の座標を $(x_1,\ y_1)$ とするとき，x_1，y_1 を x_0 と y_0 で表せ．

(3) $\mathrm{F}(1,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-1,\ 0)$ とする．FH·F′H は点 P の取り方によらず一定であることを証明せよ．また，その値を求めよ．

標準 1.14 xy 平面において，点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ と y 軸から等距離にある点の軌跡を C とする．ただし，$p>0$ とする．次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2013) 6

(1) C を表す方程式を求めよ．

(2) C 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における C の接線 l の方程式を求めよ．ただし，$y_0\neq 0$ とする．

(3) (2) の l と x 軸の交点を Q とするとき，FP = FQ であることを証明せよ．

標準 1.15 楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ について，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2006) 6

(1) 0 でない実数 m が与えられたとき，傾きが m であり y 切片が正である C の接線 l_1 の方程式を求めよ．

(2) l_1 に直交し y 切片が正である C の接線 l_2 の方程式を求めよ．

(3) l_1 と l_2 の交点 P の座標を求めよ．

(4) m が 0 でない実数を動くとき，点 P は一つの円周上にあることを示せ．

標準 1.16 xy 平面において，原点 O と直線 $x=2$ からの距離の比が $\sqrt{r}:1$ であるような点 P について，次の問に答えよ．　(鹿児島大学 2001) 10

(1) 点 P の軌跡を C とするとき，曲線 C の方程式を求めよ．

(2) $r=2$ のとき，軌跡 C はどのような図形になるか答え，その軌跡の概形を描け．

(3) 軌跡 C が，長軸の長さが $\sqrt{5}$ であるような楕円になるときの r の値を求めよ．

標準 1.17 次の各問いに答えよ. (鹿児島大学 2009) 6

(1) 平面上の二点 $\mathrm{F}_1(-1,\ 0)$，$\mathrm{F}_2(1,\ 0)$ からの距離の和が $2a$ $(a>1)$ である楕円 C の方程式を求めよ.

(2) 楕円 C が直線 $x+y=2$ と接するとき，a の値と接点 P の座標を求めよ.

(3) 点 P における楕円 C の法線が x 軸と交わる点を Q とするとき

$$\frac{\mathrm{PF}_1}{\mathrm{PF}_2}=\frac{\mathrm{QF}_1}{\mathrm{QF}_2}$$

であることを示せ.

標準 1.18 O を原点とする座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ 1)$ に対して，直線 AP 上の点で原点 O から最も近い点を $\mathrm{Q}(X,\ Y,\ Z)$ とする．$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ として，次に答えよ. (九工大 [工]2010) 2

(1) X，Y，Z を θ を用いて表せ.

(2) θ が 0，π，$\dfrac{3}{2}\pi$ のときの点 Q の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする．$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ をみたす実数 s，t，u を θ を用いて表せ. また，$s+t+u$ の値を求めよ.

(3) 点 Q から xy 平面にひいた垂線と xy 平面の交点を $\mathrm{R}(X,\ Y,\ 0)$ とする．θ が $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，xy 平面における点 R の軌跡を求めよ.

応用 1.19 θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である定数とする．座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q，R とし，接線 PQ，PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく．点 P は $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ を満たしている．点 P の全体が作る図形を G とする. (九大 [理]2003) 8

(1) $m_1<0<m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ.

(2) G を数式で表せ.

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ.

応用 1.20 楕円 $C:x^2+4y^2=4$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える．以下の問いに答えよ. (熊大 [医]2011) 3

(1) 直線 $y=x+b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ.

(2) (1) における 2 つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ.

応用 1.21　$a<0$，b を実数とする．楕円 $C: x^2+4y^2=4$ と直線 $l: y=ax+b$ が異なる 2 個の共有点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$ を持つとし，l に平行な直線 m が第 1 象限の点 A において C と接しているとする．次に答えよ．(九工大 [工]2016) 3

(1) b の値の範囲を a を用いて表せ．

(2) 直線 m の方程式を a を用いて表せ．

(3) x_2-x_1 を a，b を用いて表せ．

(4) 三角形 APQ の面積 S を a，b を用いて表せ．

(5) b が (1) で求めた範囲を動くとき，(4) で求めた S の最大値を求めよ．

発展 1.22　中心の xyz 座標が $(0,\ 0,\ 1)$ で半径が 1 の球 G と点 $\mathrm{P}(0,-2,\ a)$ に関して，点 P を通る直線が球 G と共有点をもつとき，この直線と xy 平面の交点全体が作る図形の外形を表す方程式を求めよ．また，その方程式が表す図形を実数 a に関して分類せよ．(分大 [医]2010) 8

1.2　媒介変数表示と極方程式

基本 1.23　次の問いに答えよ．(福岡教育大学 2012) 3

(1) 実数 a は $0<a<5$ をみたし，$x=a\cos\theta+5$，$y=2a\sin\theta$ とする．実数 θ が $0\leqq\theta<2\pi$ を動くとき，点 $(x,\ y)$ はどのような曲線を表すか．

(2) 原点 $(0,\ 0)$ を通り，(1) で求めた曲線に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ．

(3) 原点 $(0,\ 0)$ と (2) で求めた接点で作られる三角形の外心を C とする．C の座標を a を用いて表せ．(1) の曲線が C を通るように a の値を定めよ．

標準 1.24　放物線 $C: y=\dfrac{1}{4}x^2$ および点 $\mathrm{F}(0,\ 1)$ について考える．以下の問いに答えよ．ただし，O は原点を表す．(熊大 [理]2008) 4

(1) 放物線 C 上の点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ $(x>0$ とする$)$ に対して $\theta=\angle\mathrm{OFA}$，$r=\mathrm{FA}$ とおく．r を θ を用いて表せ．

(2) 放物線 C 上に n 個の点 $\mathrm{A}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{A}_2(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$x_k>0 \quad \text{かつ} \quad \angle\mathrm{OFA}_k=\frac{k\pi}{2n} \qquad (k=1,2,3,\cdots,n)$$

を満たすようにとる．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k$ を求めよ．

標準 1.25 曲線 C は極方程式 $r = 2\cos\theta$ で定義されているとする．このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2011) 6

(1) 曲線 C を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表し，さらに図示せよ．

(2) 点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き k の直線を考える．この直線が曲線 C と 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ．

(3) (2) のもとで，2 交点の中点の軌跡を求めよ．

標準 1.26 極方程式 $r = a\cos\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で与えられる曲線を C_1 とする．ただし，a は正の定数である．このとき，次の各問いに答えよ．(鹿児島大学 2008) 6

(1) 曲線 C_1 上の点 P と極 O を結ぶ直線 OP の点 P の側の延長上に $\mathrm{PQ} = a$ となるように点 Q をとる．点 P が C_1 上を動くときの点 Q の軌跡 C_2 の極方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた曲線 C_2 上の点 $\mathrm{Q}(r_0,\ \theta_0)$ を通り，点 Q と極 O を結ぶ直線に垂直な直線を l とする．直線 l の直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた直線 l は，点 Q に関係なく常に点 $(a,\ 0)$ を中心とし半径が a の円に接することを証明せよ．

標準 1.27 次のように，円 C_1 は直交座標に関する方程式で表され，曲線 C_2 は極方程式で表されている．

$$C_1 : \quad x^2 + y^2 + 6x - 2y + 7 = 0$$
$$C_2 : \quad r = \frac{1}{\sqrt{2} - \sin\theta}$$

このとき，次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2007) 6

(1) 円 C_1 を媒介変数を用いて表せ．

(2) 曲線 C_2 はどんな曲線になるか．また，その概形もかけ．

(3) 円 C_1 の中心を通り曲線 C_2 に接する直線の方程式を求めよ．

標準 1.28 極方程式 $r = \dfrac{a}{2+\cos\theta}$ で与えれる2次曲線がある．ただし，a は正の定数とする．このとき次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2012) 6

(1) この2次曲線を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表せ．

(2) (1) で求めた2次曲線を x 軸方向に $\dfrac{a}{3}$ だけ平行移動した2次曲線を C で表す．C を直交座標 x，y の方程式で表せ．また，この2次曲線 C は x 軸と2点 A，B で交わる．この2点 A，B の座標を求めよ．ただし，B の x 座標は正とする．

(3) (2) で求めた2次曲線 C 上の x 軸上にない点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ から x 軸に下ろした垂線を PH とする．さらに P と x 軸に関して対称な点を Q とするとき，次の値は定数であることを証明せよ．

$$\frac{\mathrm{PH}\cdot\mathrm{QH}}{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}}$$

標準 1.29 xy 平面において，2点 $\mathrm{F}_1(a,\ a)$，$\mathrm{F}_2(-a,\ -a)$ からの距離の積が一定値 $2a^2$ となるような点 P の軌跡を C とする．ただし，$a>0$ である．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) 10

(1) 直交座標 $(x,\ y)$ に関しての C の方程式を求めよ．

(2) 原点を極とし x 軸の正の部分を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ に関しての C の極方程式を求めよ．

(3) C から原点を除いた部分は，平面上の第1象限と第3象限を合わせた範囲に含まれることを示せ．

(4) 点 P が第1象限内にあるとき，P は点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 a の円の周または内部にあることを証明せよ．

標準 1.30 原点 O を中心とし半径 a の円 O と，点 C を中心とし半径 b $(b<a)$ の円 C が座標平面上にある．円 O の内側を円 C が内接しながら滑ることなく転がるときの円 C 上の定点 P の軌跡を考える．円 O 上に定点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとる．点 P が点 A と重なるように円 C を円 O に内接させる．その位置から円 C が回転して $\angle\mathrm{AOC}=\theta$ の位置まで移動したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．ただし，角度は弧度法で考える．このとき次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2004) 11

(1) P の軌跡の方程式を θ を媒介変数として表せ．

(2) $a=4b$ のとき，P の軌跡の方程式を a，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ．

応用 1.31 点 O を原点，点 P を楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$ 上の点とする．x 軸の正の部分を始線として動径 OP の表す角を θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P の y 座標を $\dfrac{a+b\sin\theta}{c+d\sin\theta}$ $(a, b, c, d$ は実数$)$ の形で表せ．(九工大 [情]2010) 3

(2) 点 P における楕円の接線を l とする．直線 l の方程式を求めよ．

(3) 点 A の座標を $(0,\ 6)$ とする．点 A を (2) の直線 l に関して対称移動した点を Q とする．点 Q の座標を θ を用いて表せ．

応用 1.32 座標平面上に与えられた 2 点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$ $(a \geqq 0)$ に対し，点 Q を直線 AP 上に A から見て P と同じ側に $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=a(a+1)$ を満たすようにとる．以下の問いに答えよ．(九工大 [情]2009) 3

(1) $a>0$ のとき x 軸上に点 $\mathrm{B}(b,\ 0)$ $(b \leqq 0)$ を $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\mathrm{AO}\cdot\mathrm{AB}$ を満たすようにとる．ただし，点 O は原点を表す．このとき b の値を求めよ．

(2) 点 A が $a>0$ を満たしながら x 軸上を移動するとき，点 Q は同一の円 C の周上にある．この円の中心の座標と半径を求めよ．

(3) 点 Q の y 座標の値が最大となるときの点 Q の座標を求めよ．またそのときの a の値を求めよ．

応用 1.33 原点 O を中心とし，半径 1 の円を C とする．次の問いに答えよ．(長大 [医]2012) 7

(1) 直線 $y=2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ から円 C に 2 本の接線を引き，その接点を M，N とする．直線 OP と弦 MN の交点を Q とする．点 Q の座標を t を用いて表せ．ただし，t は実数とする．

(2) 点 P が直線 $y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

応用 1.34 c と d を 0 でない実数とする．C と D をそれぞれ s と t を媒介変数として

$$C:\begin{cases} x=\dfrac{c}{s^2+c^2} \\ y=\dfrac{s}{s^2+c^2} \end{cases} \qquad D:\begin{cases} x=\dfrac{t}{t^2+d^2} \\ y=\dfrac{d}{t^2+d^2} \end{cases}$$

で与えられる曲線とする．このとき，次の各問に答えよ．(鹿児島大学 2014) 6

(1) C と D は円から 1 点を除いた曲線になっている．それぞれの円を表す方程式と除かれる点を求めよ．

(2) C と D の交点の座標を求めよ．

(3) C と D の交点における C の接線の方程式を求めよ．

応用 1.35 楕円 E : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ を考える．楕円 E 上の点を $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とし，直線 l : $\dfrac{\cos\theta}{a}x+\dfrac{\sin\theta}{b}y=k$ が異なる 2 点 Q，R において楕円 E と交わるものとする．以下に答えよ．　(九工大 [情]2003) 6

(1) 実数 k のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 P と直線 l の距離を k と θ を用いて表せ．

(3) 点 Q，R の座標を k と θ を用いて表せ．

(4) 三角形 PQR の面積 $S(k)$ は θ によらないことを示せ．

(5) 三角形 PQR の面積 $S(k)$ の最大値を求めよ．

応用 1.36 平面上の点 P の x 座標と y 座標が，変数 θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ を用いて $\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$ と表されている．θ が $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で変化したとき，点 P が描く曲線を C とする．点 P を $\mathrm{P}(\theta)$ で表し，$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}(0)$，$\mathrm{P}_2=\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_3=\mathrm{P}(\pi)$ とおく．次の問いに答えよ．　(九大 [理]2002) 7

(1) 方程式 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする．このとき，点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる (ただし，楕円の上にない) ための必要十分条件を α のみを用いて表せ．

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする．l の方程式を求めよ．

(3) 次の条件 (i)，(ii)，(iii) をみたす楕円 D を考える．

(i) D の軸の一つは x 軸上にある．

(ii) D は点 P_1，P_2 を通る．

(iii) 点 P_2 における D の接線は l である．

このとき，点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ．

応用 1.37 座標空間において，xy 平面上にある双曲線 $x^2-y^2=1$ のうち $x\geqq 1$ を満たす部分を C とする。また，z 軸上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき，直線 AP と平面 $x=d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし，d は正の定数とする。　(九大 [理]2018) 1

1.3 問題研究

1.3.1 2 次曲線の極方程式

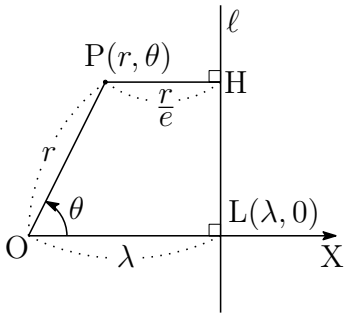
O を通らない直線 ℓ(準線) に，点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ から下ろした垂線を PH とするとき

$$e = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

の値が一定であるような点 P の軌跡は，2 次曲線になる．
点 $\mathrm{L}(\lambda,\ 0)$ を通り，始線 OX に垂直な直線を ℓ とする．
右の図において，L と H は ℓ 上にあるから

$$r\cos\theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

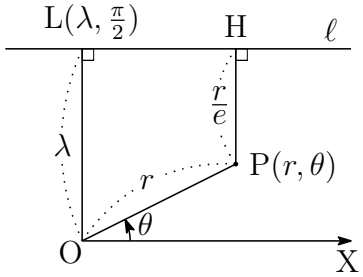
ゆえに $\quad r = \dfrac{e\lambda}{1+e\cos\theta} \quad \cdots ①$



同様に，点 $\mathrm{L}(\lambda,\ \frac{\pi}{2})$ を通り，始線 OX に平行な直線を ℓ とする．
右の図において，L と H は ℓ 上にあるから

$$r\sin\theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

ゆえに $\quad r = \dfrac{e\lambda}{1+e\sin\theta} \quad \cdots ②$



①，② が点 P の軌跡を表す極方程式である．
一般に，極方程式 $r = -f(\theta+\pi)$ と $r = f(\theta)$ は一致する．
したがって，$\lambda < 0$ のとき，$d = -\lambda$ とおくと $(d > 0)$，①，② は，それぞれ次のように表すこともできる．

$$r = \frac{e\lambda}{1+\cos\theta} = -\frac{e(-\lambda)}{1-e\cos(\theta+\pi)} = \frac{ed}{1-e\cos\theta} \qquad \cdots ①'$$

$$r = \frac{e\lambda}{1+\sin\theta} = -\frac{e(-\lambda)}{1-e\sin(\theta+\pi)} = \frac{ed}{1-e\sin\theta} \qquad \cdots ②'$$

極方程式 ① を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表すと

$$(1-e^2)x^2+y^2+2e^2\lambda x-e^2\lambda^2=0 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ は，$e\neq 1$ のとき　$\dfrac{(1-e^2)^2}{e^2\lambda^2}\left(x+\dfrac{e^2\lambda}{1-e^2}\right)^2+\dfrac{1-e^2}{e^2\lambda^2}y^2=1$

i) $0<e<1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1-e^2}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e|\lambda|}$ とおくと　$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

したがって，$(*)$ は λ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき　$\dfrac{(x+ea)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(-ea,\ 0)$，　準線 $x=-ea+\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき　$\dfrac{(x-ea)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(ea,\ 0)$，　準線 $x=ea-\dfrac{a}{e}$

ii) $e=1$ のとき，$(*)$ は　$y^2=-2\lambda\left(x-\dfrac{\lambda}{2}\right)$

iii) $e>1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{e^2-1}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{e|\lambda|}$ とおくと　$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

したがって，$(*)$ は λ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき　$\dfrac{(x-ea)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(ea,\ 0)$，　準線 $x=ea-\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき　$\dfrac{(x+ea)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(-ea,\ 0)$，　準線 $x=-ea+\dfrac{a}{e}$

これらの表す曲線は，e のとる値によって，次のような2次曲線に分類される．この e の値を離心率という．

［1］　$0<e<1$ のとき　　O を焦点の1つとする楕円

［2］　$e=1$ のとき　　O を焦点，ℓ を準線とする放物線

［3］　$e>1$ のとき　　O を焦点の1つとする双曲線

同様に，極方程式 ② を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表すと

$$x^2+(1-e^2)y^2+2e^2\lambda x-e^2\lambda^2=0 \quad \cdots(**)$$

$(**)$ は，$e\neq 1$ のとき $\dfrac{1-e^2}{e^2\lambda^2}x^2+\dfrac{(1-e^2)^2}{e^2\lambda^2}\left(y+\dfrac{e^2\lambda}{1-e^2}\right)^2=1$

i) $0<e<1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1-e^2}{e|\lambda|}$ とおくと $e=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

したがって，$(**)$ は λ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y+ea)^2}{b^2}=1$，
中心 $(0,-ea)$，準線 $y=-ea+\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-ea)^2}{b^2}=1$，
中心 $(0,\ ea)$，準線 $y=ea-\dfrac{a}{e}$

ii) $e=1$ のとき，$(**)$ は $x^2=-2\lambda\left(y-\dfrac{\lambda}{2}\right)$

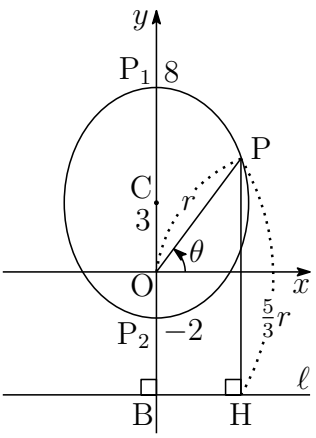
iii) $e>1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{e^2-1}{e|\lambda|}$ とおくと $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

したがって，$(**)$ は λ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-ea)^2}{b^2}=1$，
中心 $(0,\ ea)$，準線 $y=ea-\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y+ea)^2}{b^2}=1$，
中心 $(0,-ea)$，準線 $y=-ea+\dfrac{a}{e}$

補足 9 ページの 1.31 の楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$ の焦点は y 軸上にあるから (準線は y 軸に垂直)，極方程式を次のようにおける．



$$r=\frac{\delta}{1+\varepsilon\sin\theta}$$

2 点 $\mathrm{P}_1\left(8,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_2\left(2,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ を通ることから

$$\delta=\frac{16}{5},\quad \varepsilon=-\frac{3}{5}\quad \text{ゆえに}\quad r=\frac{16}{5-3\sin\theta}$$

よって　　$x=\dfrac{16\cos\theta}{5-3\sin\theta},\quad y=\dfrac{16\sin\theta}{5-3\sin\theta}$

(∗)，(∗∗) で示した楕円と双曲線の中心，放物線の頂点を，原点に平行移動した 2 次曲線は，次のようになる．

［1］楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$a>b$ のとき　$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，焦点 $(\pm ea,\ 0)$，準線 $x=\pm\dfrac{a}{e}$　(複号同順)

$a<b$ のとき　$e=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$，焦点 $(0,\ \pm eb)$，準線 $y=\pm\dfrac{b}{e}$　(複号同順)

［2］放物線 $y^2=-2\lambda x$

$$e=1,\ \text{焦点}\left(-\frac{\lambda}{2},\ 0\right),\ \text{準線}\ x=\frac{\lambda}{2}$$

放物線 $x^2=-2\lambda y$

$$e=1,\ \text{焦点}\left(0,\ -\frac{\lambda}{2}\right),\ \text{準線}\ y=\frac{\lambda}{2}$$

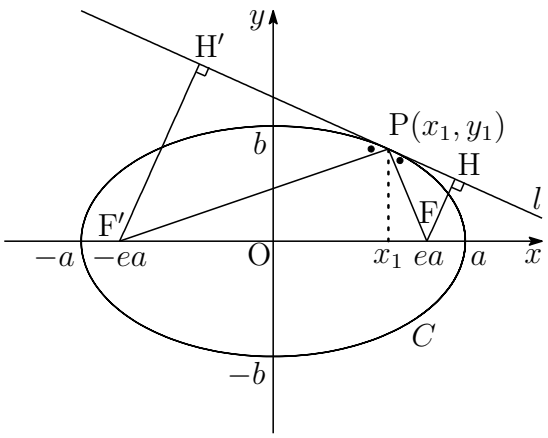
［3］双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},\ \text{焦点}\ (\pm ea,\ 0),\ \text{準線}\ x=\pm\frac{a}{e}\quad (\text{複号同順})$$

双曲線 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b},\ \text{焦点}\ (0,\ \pm eb),\ \text{準線}\ y=\pm\frac{b}{e}\quad (\text{複号同順})$$

楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ について $(a > b)$，C 上の点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，焦点を $\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$，C の P における接線を l とする．F，F′ から l にそれぞれ垂線 FH，F′H′ を引くと，次が成り立つ．



$$\mathrm{FP} = a - ex_1$$
$$\mathrm{F'P} = a + ex_1$$
$$\angle \mathrm{FPH} = \angle \mathrm{F'PH'}$$

証明

$$\begin{aligned}
\mathrm{FP}^2 &= (x_1 - ea)^2 + {y_1}^2 = {x_1}^2 - 2eax_1 + e^2a^2 + {y_1}^2 \\
&= {x_1}^2 - 2eax_1 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) a^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - {x_1}^2) \\
&= a^2 - 2eax_1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}{x_1}^2 \\
&= a^2 - 2eax_1 + e^2{x_1}^2 = (a - ex_1)^2
\end{aligned}$$

$a > ex_1$ であるから　$\mathrm{FP} = a - ex_1$　同様にして　$\mathrm{F'P} = a + ex_1$

$\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$ から $l : \dfrac{x_1}{a^2}x + \dfrac{y_1}{b^2}y - 1 = 0$ までの距離は，それぞれ

$$\mathrm{FH} = \frac{\left|\dfrac{x_1}{a^2}ea - 1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a - ex_1}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{\mathrm{FP}}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

$$\mathrm{F'H'} = \frac{\left|\dfrac{x_1}{a^2}(-ea) - 1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a + ex_1}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{\mathrm{F'P}}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

上の 2 式から　$\dfrac{\mathrm{FH}}{\mathrm{FP}} = \dfrac{\mathrm{F'H'}}{\mathrm{F'P}}$　ゆえに　$\angle \mathrm{FPH} = \angle \mathrm{F'PH'}$　**証終**

第 2 章　複素数平面

2.1　複素数平面

□□ **2.1** 複素数 z_1，z_2 に対して $|z_1||z_2| \geqq \dfrac{\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}}{2}$ が成り立つことを示せ．ただし，複素数 z に対して $\overline{z}$ は z の共役複素数である．　(福岡教育大学 2003) 5

基本 2.2 α，β，γ はいずれも 0 でない複素数として，次の各問いに答えよ．ただし，複素数 z に対して，$\overline{z}$ は z の共役複素数，$|z|$ は z の絶対値を表す．
(鹿児島大学 2002) 7

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が正の実数ならば，$|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$ が成り立つことを示せ．

(2) $\gamma + \overline{\gamma} = 2|\gamma|$ が成り立つならば，γ は正の実数であることを示せ．

(3) $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$ が成り立つならば，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ は正の実数であることを示せ．

標準 2.3 次に答えよ．　(九工大 [工]2004) 2

(1) 等式 $\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$ をみたす複素数 α について，α^3 の値を求めよ．

(2) (1) の α が $\alpha^2 = 3\overline{\alpha} + \dfrac{k}{\alpha}$ をみたすときの実数 k を求めよ．

(3) (2) で求めた実数 k について方程式 $z^2 = 3\overline{z} + \dfrac{k}{z}$ を解け．

応用 2.4 α を複素数とする．等式

$$\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\overline{z} = 0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ．ただし，i は虚数単位である．(九大 [理]2018) 5

2.2　複素数の極形式と乗法，除法

□□ **2.5** $|z+i| + |z-i| = \sqrt{6}$ を満たし，偏角が 45° である複素数 z を求めよ．
(福岡教育大学 2002) 5

基本 2.6　0 でない複素数 z の極形式を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき，次の複素数を極形式で表せ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とし，また z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す．

(1) $-\overline{z}$　　(佐賀大学 2016) 3

(2) $\dfrac{1}{z^2}$

(3) $z - |z|$

基本 2.7　点 O を原点とする複素数平面上で，2 つの複素数 α，β を表す点をそれぞれ A，B とする．α，β が $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \dfrac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$ を満たすとき，次の各問に答えよ．

(1) △OAB は正三角形であることを示せ．　　(宮崎大学 2003) 6

(2) 複素数 $1 + i$ を表す点を C とする．正三角形 OAB の 1 辺の長さが 1 であり，△OAB が直線 OC に関して対称であるとき，複素数 α，β を求めよ．ただし，α の実部は β の実部より大きく，ともに正とする．

基本 2.8　0 でない複素数 z_1，z_2 の絶対値を r_1，r_2 とし，z_1，z_2 の偏角をそれぞれ θ_1，θ_2 とする．ただし，$\theta_2 > \theta_1$ とする．次の問いに答えよ．　　(福岡教育大学 2004) 3

(1) 複素数平面上に 0，z_1，z_2，$z_1 + z_2$ を頂点とする平行四辺形がある．この平行四辺形の面積 S を r_1，r_2，θ_1，θ_2 で表せ．

(2) 等式

$$S^2 = |z_1|^2|z_2|^2 - \frac{(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)^2}{4}$$

が成り立つことを示せ．ただし，複素数 z に対して $\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

標準 2.9　方程式 $4x^3 + (12 - 2a)x^2 + (9 - 6a)x + 27 = 0$ は 1 つの実数解と 2 つの虚数解をもつ．ただし a は実数の定数とする．次の問いに答えよ．(長崎大学 2004) 4

(1) この方程式の左辺は $x + 3$ を因数にもつことを示し，実数解と a の値の範囲を求めよ．

(2) 2 つの虚数解を $r(\cos\theta \pm \sin\theta)$ $(r > 0,\ 0° < \theta < 180°)$ と表す．r を求め，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を a で表せ．

(3) 複素数平面内で 3 つの解の表す点が正三角形をなすとする．θ と a の値を求めよ．

標準 2.10 実数 a $(a>0)$ と実数 t $(t \geqq 0)$ に対して，つぎのように表される複素数 $z(t)$ を考える．

$$z(t)=\frac{1}{2-2t^2-\sqrt{a}\,ti}$$

ただし，i は虚数単位とする．複素数平面上において，原点を O とし，複素数 $z(t)$ と $z(2t)$ が表す点をそれぞれ A，B とする．以下に答えよ． (九工大 [情]2005) 2

(1) $z(t)$ の実部と虚部をそれぞれ a と t を用いて表せ．

(2) $a=2$ のとき，$\angle$AOB が直角となる t を求めよ．

(3) $\angle$AOB が直角となる t が存在する a の範囲を求めよ．

応用 2.11 $s>0$，$t>0$ とする．複素数平面上の $\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$ を表す点をそれぞれ A，B，C とする．さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，$\triangle$ACD が正三角形になるようにする．点 D を表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [医]2017) 2

(1) z を s，t を用いて表せ．

(2) α，β，γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ．

(3) (2) で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle$DFC $=\theta$ とする．このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

2.3 ド・モアブルの定理

□□ **2.12** $z=1+i$ のとき，z^{4n+1} を求めよ．ただし n は自然数とする．
(琉球大学 2005) 5

□□ **2.13** z を $z^2+z+1=0$ を満たす複素数とするとき，$z^3=1$ が成り立つことを示し，さらに $\dfrac{1}{(i-z^n)(i-z^{2n})}$ の値を求めよ．ただし，i は虚数単位，n は自然数とする． (琉球大学 2003) 5

基本 2.14 係数 a，b が実数である 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ は異なる 2 つの虚数解 α，β を持ち，$\alpha=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\beta$ が成立しているとする．このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2004) 7

(1) $b>0$ を示し，α^2 の偏角を求めよ．

(2) n を α^{2n} が実数となる最小の自然数とする．$b=2$ のとき，α^{2n} の値を求めよ．

基本 2.15 方程式 $z^5 = 1$ の解 z について次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2003) 11

(1) z を極形式で表せ．

(2) $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ を用いて $z + \dfrac{1}{z}$ の値を求めよ．

(3) $\cos 144^\circ$ の値を求めよ．

基本 2.16 i を虚数単位とし，$\theta = \dfrac{2}{7}\pi$，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ とする．また，

$$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

とするとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2019) 4

(1) $\alpha^7 = 1$ および $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \alpha^k = 0$ を示せ．

(2) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 2\cos\theta$ を示せ．これと (1) を用いて，$f(\cos\theta) = 0$ を示せ．

(3) $f(\cos 2\theta) = 0$ を示せ．

基本 2.17 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2016) 7

(1) 複素数 z，w について，次の関係が成立することを示せ．ただし複素数 α に対し，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(2) 方程式 $z^2 - z + 1 = 0$ の 2 つの解を α，β とする．次の各問いに答えよ．

(a) α，β を求めよ．さらにそれらを極形式で表せ．

(b) $\alpha^{100} + \beta^{100}$ を求めよ．

基本 2.18 i を虚数単位とし，$z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) z^5 および $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ の値を求めよ．　(琉球大学 2016) 1

(2) $t = z + \dfrac{1}{z}$ とおく．$t^2 + t$ の値を求めよ．

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の 1 辺の長さの 2 乗を求めよ．

基本 2.19 複素数 z は実部が $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，虚部は正で $|z|=1$ である．次の問いに答えよ．

(1) $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ の値を求めよ． (福岡教育大学 2016) 3

(2) $1+z+z^2+z^3+z^4$ の値を求めよ．

(3) z の偏角 θ を求めよ．ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

基本 2.20 複素数 z についての次の方程式を解き，その解を複素数平面上に図示せよ．

$$(z-i)^4=-2-2\sqrt{3}\,i$$

ただし，i は虚数単位とする． (佐賀大学 2002) 9

基本 2.21 0 でない複素数 z について，次の問いに答えよ． (佐賀大学 2001) 10

(1) z の絶対値を r，偏角を θ とするとき，$z+\dfrac{1}{z}$ の実部と虚部を，r と θ を用いて表せ．

(2) n を正の整数とする．$z+\dfrac{1}{z}$ が実数または純虚数ならば，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ も実数または純虚数であることを証明せよ．

基本 2.22 2 つの複素数は α，β は

$$|\alpha|=1,\quad |\beta|=\sqrt{10},\quad \frac{\beta}{\alpha}=3+i$$

を満たしているとする．$\theta=\arg\dfrac{\beta}{\alpha}$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ とおくとき，次の各問に答えよ．
(宮崎大学 2002) 6

(1) 複素数 α^2，β^2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ P，Q とし原点を O とするとき，△POQ の面積を求めよ．

(2) $30^\circ<2\theta<45^\circ$ であることを示せ．

(3) $n\theta>90^\circ$ となる最小の自然数 n を求めよ．

標準 2.23 複素数平面上に複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0^\circ<\theta<180^\circ)$ をとり，$\alpha=z+1$，$\beta=z-1$ とおく．　(九大 [文]2004) 2

(1) $|\beta|=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ を示せ．

(2) $\arg\beta=\dfrac{\theta}{2}+90^\circ$ を示せ．ただし，$0^\circ\leqq\arg\beta<360^\circ$ とする．

(3) $\theta=60^\circ$ とする．9 つの複素数 $\alpha^m\beta^n\ (m,\ n=1,2,3)$ の虚部の最小値を求め，その最小値を与える $(m,\ n)$ のすべてを決定せよ．

標準 2.24 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする．ただし，i は虚数単位である．$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$$

とおく．以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2016) 3

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ．

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$ となる最小の n を求めよ．

(3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ．

標準 2.25 複素数 $z=x+yi\ (x,\ y$ は実数$)$ について，次の問いに答えよ．
(長崎大学 2001) 6

(1) z^4 が 0 でない実数であるとき，z の偏角 α を求めよ．$(0^\circ\leqq\alpha<360^\circ)$

(2) $(z-1)^3$ が純虚数であるとき，$z-1$ の偏角 β を求めよ．$(0^\circ\leqq\beta<360^\circ)$

(3) $x>0$，$y>0$ で z^4 が実数，$(z-1)^3$ が純虚数となるときの z^4 をすべて求めよ．

標準 2.26 z を複素数とする．$z+\dfrac{3}{z}$ が実数であり，$3 \leqq z+\dfrac{3}{z} \leqq 4$ となる z の動く範囲を複素数平面上に図示せよ． (琉球大学 2017) 3

標準 2.27 複素数 $x=1-\sqrt{3}\,i$ について以下の問いに答えなさい．ただし，i は虚数単位とする． (分大 [医]2017) 8

(1) $x=1-\sqrt{3}\,i$ を解とする実数係数の 2 次方程式を作りなさい．

(2) x^n $(n=1,2,\ldots)$ を求めなさい．

(3) 自然数 m に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{3m}(-2)^{-k}x^k$ を求めなさい．

標準 2.28 2 次方程式 $x^2-x+1=0$ の 2 つの解を α, β $(-\pi<\arg\beta<\arg\alpha<\pi)$ とする．数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha^n+\beta^n && (n=1,2,3,\cdots)\\ b_n &= (\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1 && (n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ． (長崎大学 2019) 6

(1) a_1, a_2, b_1, b_2 の値を求めよ．

(2) α, β を極形式で表し，一般項 a_n, b_n を求めよ．

(3) すべての自然数 n に対して，a_n, b_n は整数であることを示せ．

(4) 複素数平面上の異なる 3 点 A(1)，B(α^n)，C(β^n) について，等式

$$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$$

が成り立つとき，△ABC はどのような形になるか．また，このときの a_n と b_n の値を求めよ．

標準 2.29 α，β は定めらた複素数とする．複素数平面上の点 z_1 に対して，z_n $(n=2,3,4,\cdots)$ を以下の規則によって定める．

(規則)　　$z_n=\alpha z_{n-1}+\beta$

点 z_1 として $z_1=3\sqrt{3}-3i$ を選び，この規則を用いて z_2，z_3 を定めたところ，$z_2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$，$z_3=3i$ となった．次に答えよ．　(九州工業大学 2020) 3

(1) z_1 と z_2 を通る直線と，z_2 と z_3 を通る直線を考える．この 2 直線のなす角 $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(2) α と β を求めよ．また，それぞれの絶対値，偏角も求めよ．

(3) 規則に示した z_n と z_{n-1} の関係を $z_n-\gamma=\alpha(z_{n-1}-\gamma)$ と表す．γ を求めよ．

(4) z_n を z_1，α および (3) の γ を用いて表せ．ただし，z_1，α および γ は記号のままで表せ．

(5) 複素数平面上の点 z_1 を選びなおし，規則を用いて z_5 を定めなおす．z_5 が $|z_5|<1$ をみたすために z_1 がみたすべき条件を求めよ．また，その条件をみたす点 z_1 の全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ．

応用 2.30 以下の問いに答えよ．　(九大 [理]2016) 5

(1) θ を $0\leqq\theta<2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z=\cos\theta+i\sin\theta$ で表される複素数とする．このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ．

$$\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right),\quad \sin n\theta=-\frac{i}{2}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数 x $(0\leqq x<2\pi)$ を求めよ．

$$\cos x+\cos 2x-\cos 3x=1$$

(3) 次の式を証明せよ．

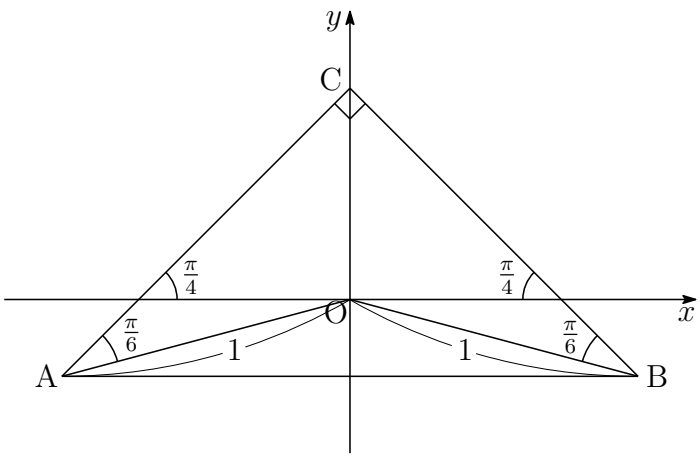
$$\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 80^\circ=\frac{9}{4}$$

応用 2.31 2 つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ により定める．ただし，i は虚数単位を表す．2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ． (九大 [理]2017) 5

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ．

(2) $|z_n| \leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ．

(3) 下図のように，複素数平面上の △ABC は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である．なお A，B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A，B の距離はともに 1 である．点 P_n が △ABC の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ．



応用 2.32 方程式 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ の解で，実部と虚部がともに正のものを x_1，実部が負で虚部が正のものを x_2，実部と虚部がともに負のものを x_3，実部が正で虚部が負のものを x_4 とする． (分大 [医]2015) 7

(1) この方程式を解きなさい．

(2) ${x_1}^k$ $(k = 1, 2, \cdots, 6)$ を計算しなさい．

(3) 与方程式の解 x_i と自然数 n に対して，${x_i}^{4n} + {x_i}^{2n} + 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を求めなさい．

2.4　複素数と図形

□□ **2.33** 複素数平面上の 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が正三角形の頂点で，$\alpha=(1+\sqrt{3}i)^6-(1-\sqrt{3}i)^6$ かつ $\beta=(1+i)^3$ であるとき，γ の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．　(福岡教育大学 2001) 5

基本 2.34 a は $a\neq 0$ をみたす実数である．α，β を方程式 $x^2-2x+a=0$ の 2 つの解とし，複素数平面上の 3 点を A(α)，O(0)，B(β) とする．　(大分大学 2005) 3

(1) $\angle\mathrm{AOB}=180^\circ$ となるような a の範囲を求めなさい．

(2) $\angle\mathrm{AOB}=30^\circ$ となるような a の値を求めなさい．

基本 2.35 整式 $F(x)=x^3-x^2+(k^2-1)x+k^2+1$ について，次の各問に答えよ．ただし，$k>0$ とする．　(宮崎大学 2001) 7

(1) $F(x)$ は $x+1$ で割り切れることを示せ．また，$F(x)=0$ の 2 つの虚数解を求めよ．

(2) 複素数平面において，$F(x)=0$ の 2 つの虚数解を表す点を P，Q とし，実数解を表す点を R とする．このとき，次の (A)，(B) に答えよ．

(A) 3 点 P，Q，R を通る円の方程式を複素数 z を用いて表せ．

(B) $\angle\mathrm{PRQ}=45^\circ$ であるとき，k の値を求めよ．

基本 2.36 複素数 α，β を $\alpha=1+2i$，$\beta=4+4i$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $|\alpha-\overline{\beta}|$ の値を求めよ．ただし，$\overline{\beta}$ は β の共役複素数を表す．(熊大 [文]2004) 3

(2) 次の値を最小にする実数 x を求めよ．

$$|x-\alpha|+|x-\beta|$$

基本 2.37 原点を O とする複素数平面上に，O と異なる点 A(α)，および，2 点 O，A を通る直線 l がある．次に答えよ．　(九工大 [工]2003) 2

(1) 直線 l に関して P(z) と対称な点を P$'$(z') とするとき，$z'=\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{z}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\alpha=3+i$ とする．$\beta=2+4i$，$\gamma=-8+7i$ を表す点をそれぞれ B，C とおく．

(ア) 点 B の直線 l に関して対称な点を B$'$(β') とする．β' を求めよ．

(イ) 線分 OA 上の点 Q(w) について，$\angle\mathrm{AQB}=\angle\mathrm{CQO}$ が成り立つときの w を求めよ．

基本 2.38 複素数平面上の 2 点を A($-1+i$)，B($2+i$) とするとき，次の問いに答えなさい．　(大分大学 2003) 6

(1) 線分 AB を一辺とする正三角形 ABC の頂点 C(γ) を表す複素数 γ を求めなさい．

(2) 点 P(z) が線分 AB 上を A から B まで動く．このとき複素数 iz^2 が表す点は，複素数平面上でどのような図形をえがくか図示しなさい．

基本 2.39 次に答えよ. (九工大 [工]2005) 2

(1) 複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) が

$$(\sqrt{3} - i)z + (\sqrt{3} + i)\overline{z} = 2 \quad \cdots (*)$$

をみたすとき，x と y の間に成り立つ関係式を求めよ.

(2) $|z + i| \geqq |2z - i|$ および $(*)$ をみたす複素数 z の表す点が描く図形 D を，複素数平面上に図示せよ.

(3) 複素数 z の表す点が (2) で求めた D 上を動くとき，$k = |2z - 1 - 2i|$ のとる値の最大値と最小値を求めよ.

基本 2.40 複素数平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周を C とする．C 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ をとり，C 上にない 1 点 $\mathrm{P}_3(z_3)$ をとる．さらに，

$$w_1 = \frac{1}{z_1}, \quad w_2 = \frac{1}{z_2}, \quad w_3 = \frac{1}{z_3}$$

とおき，複素数 w_1, w_2, w_3 と対応する点をそれぞれ Q_1, Q_2, Q_3 とする．また，i を虚数単位とする．このとき，次の各問に答えよ. (宮崎大学 2023) 11

(1) $z_1 = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}$，$z_2 = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2}$，$z_3 = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$ のとき，w_1，w_2，w_3 をそれぞれ $a + bi$ (a, b は実数) の形で求めよ.

(2) $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2$ が直角であるとき，P_3 が線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上にあれば，$\angle \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3\mathrm{Q}_2$ も直角であることを示せ.

基本 2.41 複素数 z と w の間に $w = (1 + \sqrt{3}\,i)z$ という関係があるとき，以下の問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする. (佐賀大学 2005) 2

(1) $z \neq 0$ のとき，複素数平面の原点 O と z，w を頂点とする三角形はどんな形の三角形か.

(2) 複素数平面上の 2 点 $\sqrt{3}\,i$ と -3 を通る直線の上を z が動くとき，w が描く図形の概形と w が満たす方程式を求めよ.

(3) z が $\sqrt{3}\,i$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円周上を動くとき，w が描く図形の概形と w が満たす方程式を求めよ.

基本 2.42 z_1，z_2 は複素数で，$z_1 \neq z_2$，$z_1 \neq 1$，$z_2 \neq 1$ および $\arg(z_1-1) = \arg(z_2-1)$ を満たすものとする．このとき次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2004) 8

(1) 複素数平面上において，2 点 z_1，z_2 を結ぶ直線 l は，点 1 を通ることを示せ．

(2) $\arg(z_1-1) = \arg(z_2-1) = \arg(i-1)$ であるとき，(1) の直線 l の方程式を求め，これを図示せよ．ここで，i は虚数単位である．

(3) 2 点 z_1，z_2 が (2) で求めた直線 l 上にあり，かつ $\dfrac{z_1}{|z_1|}$，$-\dfrac{z_2}{|z_2|}$ が 3 次方程式 $z^3-1=0$ の解であるとき，z_1 を求めよ．

基本 2.43 複素数平面上に原点を中心とし半径 1 の円周 C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ (z の偏角を θ とする) をとる．点 P を点 $\mathrm{A}(1+i)$ を中心として，角 α だけ回転させた点を $\mathrm{Q}(w)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2005) 8

(1) 点 P が C 上を動くとき，点 Q はある点 $\mathrm{B}(a+bi)$ を中心とする円周上を動くことを示し，その半径を求めよ．ただし，a，b は実数とする．

(2) (1) において，$b=1$ のとき，a の値を求めよ．

標準 2.44 α を 0 でない複素数とし，k，m は互いに異なる正の実数とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) 7

(1) 複素数平面上において，複素数 $k^2\alpha$ を表す点を A とし，複素数 $m^2\alpha$ を表す点を B とする．線分 AB を $k:m$ に内分する点を表す複素数を γ，$k:m$ に外分する点を表す複素数を δ とする．このとき，γ と δ それぞれを k，m，α を用いて表せ．

(2) 複素数 z が $m|z-k^2\alpha| = k|z-m^2\alpha|$ を満たすとき，$|z|$ を k，m，$|\alpha|$ を用いて表せ．

(3) z は γ，δ と異なる複素数で，$m|z-k^2\alpha| = k|z-m^2\alpha|$ を満たすものとする．このとき，$\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}$ は純虚数であることを証明せよ．

標準 2.45 複素数 z の方程式 $z^3+i = z^2+iz$ (i は虚数単位) の 3 つの解を，その偏角 θ (ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$) の小さい順に α，β，γ とする．複素数平面上で，α，β，γ の表す点をそれぞれ A，B，C とし，直線 AC に関して B と対称な点を D，直線 AB に関して C と対称な点を E とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) α，β，γ を $x+yi$ (x，y は実数) の形でそれぞれ表せ．　(宮崎大学 2016) 2

(2) △ABC の面積を求めよ．

(3) 複素数平面上で，3 点 A，D，E を通る円周上のどの複素数 z も，
$z\bar{z}+sz+t\bar{z}+u=0$ を満たすような複素数の定数 s，t，u を求めよ．

標準 2.46 複素数平面上に $|\alpha|=2$ を満たす点 $\mathrm{A}(\alpha)$ がある．方程式

$$|z-1|=\sqrt{2} \quad \cdots ①$$
$$|z-\alpha|=\sqrt{5} \quad \cdots ②$$

について，次の問に答えよ． (佐賀大学 2024) 4

(1) 複素数平面上で方程式 ① を満たす点 z の全体が表す図形を描け．また，方程式 ① および ② を満たす複素数 z の個数が 2 個であることを示せ．

(2) 方程式 ① および ② を満たす複素数 z について

$$\overline{z}(\alpha-1)+z(\overline{\alpha}-1)=0$$

が成り立つことを示せ．

(3) 方程式 ① および ② を満たす異なる 2 つの複素数を β，γ とする．2 点 $\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ と原点 O が一直線上にあることを示せ．また，$|\beta|=b$ とおくとき，$|\gamma|$ を b を用いて表せ．

標準 2.47 虚数単位 i とは異なる複素数 z に対し，$\alpha=z\overline{z}-\overline{z}i+zi+1$，$w=i+\dfrac{1}{\overline{z}+i}$ とおくとき，以下に答えよ． (九工大 [情]2002) 2

(1) α が正の実数であることを示せ．

(2) $w\overline{w}-\overline{w}i+wi+1$ を α を用いて表せ．

(3) w が実数となるような z の集合を複素数平面上に図示せよ．

標準 2.48 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする． (宮崎大学 2017) 4

(1) 等式 $z^2=i$ を満たす複素数 z は 2 つある．それらを $x+yi$ (x, y は実数) の形で表せ．

(2) 等式 $w^2-2iw=1+i$ を満たす複素数 w は 2 つあり，それらを α，β とする．ただし，α の実部は β の実部より大きいとする．α，β を $x+yi$ (x, y は実数) の形で表せ．

(3) 複素数平面上で，原点を O とし，(2) で求めた α，β が表す点をそれぞれ A，B とするとき，三角形 OAB の面積を求めよ．

標準 2.49 r を正の数とし，複素数平面において，点 z が原点を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z-i}$ を満たす点 w が描く図形を求めよ．ただし，i は虚数単位とする． (福岡教育大学 2001) 2

標準 2.50 複素数平面上において，3 つの複素数 z，u，w を表す点をそれぞれ $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(u)$，$\mathrm{R}(w)$ とする．以下に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(九工大 [情]2003) 3

(1) 点 $\mathrm{P}(z)$ が，点 $1+i$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$u=\dfrac{z+(1-i)}{2}$ で表される点 $\mathrm{Q}(u)$ が描く図形を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ が，点 $1+i$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$w=\dfrac{4\{z-(1+i)\}}{z-(2+i)}$ で表される点 $\mathrm{R}(w)$ が描く図形を求めよ．ただし $r\neq 1$ とする．

標準 2.51 次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 方程式 $z^4=-1$ を解け．　(鹿児島大学 2015) 7

(2) α を方程式 $z^4=-1$ の解の一つとする．複素数平面に点 β があって $|z-\beta|=\sqrt{2}|z-\alpha|$ を満たす点 z 全体が原点を中心とする円 C を描くとき，複素数 β を α で表せ．

(3) 点 z が (2) の円 C 上を動くとき，点 i と z を結ぶ線分の中点 w はどのような図形を描くか．

標準 2.52 複素数平面上の点 z が $|z+1|=|2z-1|$ を満たして動くとき，次の問いに答えよ．　(長崎大学 2002) 6

(1) 点 z はどのような図形を描くか．

(2) $z-1$ の偏角を θ とするとき，$|z^2-4z|^2$ を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(3) $|z^2-4z|$ が最大となる z の値と最大値を求めよ．

標準 2.53 i を虚数単位とするとき，次の各問に答えよ．　(鹿児島大学 2001) 7

(1) 複素数 z に対して，$\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数となるとき，複素数平面において点 z はどのような図形を描くか．

(2) (1) で与えられる図形上の原点 O，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ が正三角形の頂点をなすとき，複素数 α，β を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \arg\alpha < \arg\beta < 360^\circ$ とし，$\arg z$ は z の偏角を表す．

標準 2.54 t を正の実数とし，複素数平面上に 2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ がある．等式

$$t\left|z+\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{t}\,|z-t| \tag{a}$$

を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の全体が表す図形を F とする．下の小問 (1) から (4) を通して F がどのような図形を表すか調べたい．以下の問いに答えよ．　(長崎大学 2018) 7

(1) A と B はどちらも図形 F の点ではないことを示せ．

(2) $t=1$ ならば，F はどのような図形を表すか．

(3) $t\neq 1$ とする．図形 F の点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 AB 上に位置するような z の値は 2 つある．その値 z_1 と z_2 を求めよ．ただし，$|z_1|<|z_2|$ とする．

(4) $t\neq 1$ とする．2 点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を結ぶ線分の中点を $\mathrm{M}(m)$ として，m の値を求めよ．また，$\mathrm{P}(z)$ が図形 F の点であるとき，$|z-m|$ の値を求めよ．さらに，F はどのような図形を表すか．

標準 2.55 1 の 3 乗根のうち，実数でないものの 1 つを α とするとき，複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\alpha^2)$ を頂点する $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で表される．

(1) 点 B を表す複素数 β を求めなさい．　(大分大学 2002) 3

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の周上の点を表す複素数を z とするとき，z の満たす式を求めなさい．

(3) z が (2) で求めた式を満たすとき，$w=\dfrac{1}{\overline{z}}$ を満たす点 w のえがく図形を求めなさい．

標準 2.56 複素数平面上において，次の各々はどのような図形を表すかを答えよ．　(鹿児島大学 2003) 7

(1) 複素数 z が $|z|=1$ および $z\neq 1$ を満たすとき，$w=\dfrac{1}{1-z}$ が表す点の全体．

(2) 複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき，$w=\dfrac{1}{\sqrt{3}-z}$ が表す点の全体．

(3) 複素数 z が $|z|=1$ および $0^\circ<\arg z<90^\circ$ を満たすとき，$w=\dfrac{1}{\sqrt{3}-z}$ が表す点の全体．

標準 2.57 正の実数 a に対して，複素数平面上で式 $|z-(1+i)a|=a$ を満たす複素数 z の表す点全体からなる図形を C_1 とする．また，複素数 z の表す点が図形 C_1 全体の上を動くとき，式 $w=\dfrac{1}{z}$ を満たす複素数 w の表す点全体からなる図形を C_2 とする．2 つの図形 C_1 と C_2 の共有点の個数を求めよ．　(佐賀大学 2005) 8

標準 2.58 $0<a<1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z=t+ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を ℓ とする．ただし，i は虚数単位である．　(九大 [文]2003) 7

(1) 複素数 z が ℓ 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ．

(2) 直線 ℓ を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする．m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ．

標準 2.59 t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2+tz+t=0$$

について，次の問いに答えよ．　(九大 [理]2005) 3

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ．

(2) (1) の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す．t が (1) で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ．

(3) 複素数平面上で，点 z が (2) の図形 C 上を動くとき，

$$w=\frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が動く図形を求め，図示せよ．

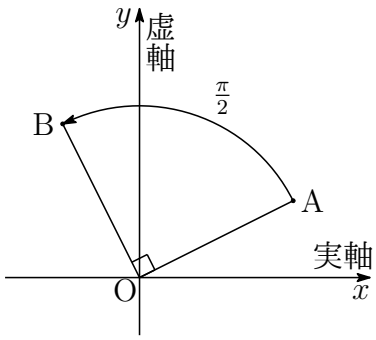
標準 2.60 α，β を複素数とし，複素数平面上の点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(|\alpha|^2)$，$\mathrm{D}(\overline{\alpha}\beta)$ を考える．3 点 O，A，B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。　(熊大 [理]2020) 2

(1) $\triangle$OAB の面積を S_1，$\triangle$OCD の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2) $\triangle$OAB の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

(3) 実数 a，b に対し，複素数 z を $z=a+bi$ で定める。$1\leqq a\leqq 2$，$1\leqq b\leqq 3$ のとき，3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle$OPQ の面積の最大値と最小値を求めよ。

標準 2.61 s，t を正の実数とする．i は虚数単位とする．複素数平面上で，複素数 1 の表す点を P とし，$\alpha = s + ti$ の表す点を A とする．原点 O を中心として点 A を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を B とし，点 P を中心として点 B を $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を C とする．2 点 B，C の表す複素数をそれぞれ β，γ とするとき，次の各問に答えよ．



(宮大 [医]2020) 7

(1) β，γ のそれぞれを，α を用いて表せ．

(2) 点 C が直線 PA 上にあるとき，α を，s を用いて表せ．

(3) △ACB の外接円の中心を表す複素数を w とする．点 C が直線 PA 上にあるとき，w を，s を用いて表せ．

応用 2.62 a，b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする．複素数平面において，点 z が虚軸全体を動くとき

$$w = \frac{az + b}{cz + 1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする．次の 3 条件が満たされているとする．

(ア) $z = i$ のときに $w = i$ となり，$z = -i$ のときに $w = -i$ となる．

(イ) C は単位円の周に含まれる．

(ウ) 点 -1 は C に属さない．

このとき a，b，c の値を求めよ．さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ．

(九大 [理]2016) 5

応用 2.63 複素数 z に関する等式

$$|z|+|z-\sqrt{3}i|=k \quad \cdots(*)$$

がある．$z=\dfrac{1}{4}$ が等式 $(*)$ をみたしているとき，次に答えよ． (九工大 [工]2002) 3

(1) k を求めよ．

(2) 複素数 $z=\alpha$ は等式 $(*)$ をみたし，偏角が 60° である．α を求めよ．

(3) α を (2) で求めた複素数とする．$\beta-\alpha$ が正の実数となるような複素数 $z=\beta$ は等式 $(*)$ をみたさないことを示せ．

(4) 複素数平面において，原点を O，(2) で求めた α の表す点を A，α と異なり等式 $(*)$ をみたす複素数 $z=\beta$ の表す点を B とする．$\angle$BAO は 120° である．β を求めよ．

応用 2.64 複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ をみたす点 z の全体を H とおく．以下の問いに答えよ．ただし，複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．
(熊大 [医]2018) 3

(1) H の点 z に対して，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) H の点 z に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする．w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

応用 2.65 複素数平面上の点 z を考える． (九大 [理]2001) 4

(1) 実数 a，c と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ をみたすとき

$$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$$

をみたす点 z は $a\neq 0$ のとき，どのような図形を描くか．ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す．

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p，q に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか．

応用 2.66 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとる．次の問いに答えよ． (九大 [理]2002) 5

(1) $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく．点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ．ここで三角形の**垂心**とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これら 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている．

(2) $w_2 = -\overline{z}_1 z_2 z_3$ とおく．$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ．ここで $\overline{z}_1$ は z_1 に共役な複素数である．

(3) 2 点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点であることを示せ．ただし，$w_1 = w_2$ のときは，w_1 と w_2 の中点は w_1 と解釈する．

2.5　問題研究

2.5.1　トレミーの定理

複素数平面上に 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) をとる．このとき次式が成り立つ．

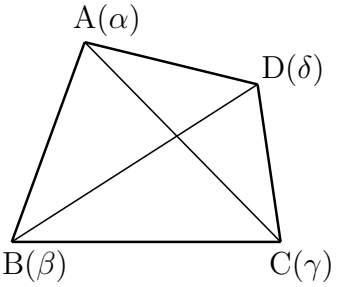
$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$$

したがって

$$|\alpha-\beta||\gamma-\delta|+|\alpha-\delta||\beta-\gamma|\geqq|\alpha-\gamma||\beta-\delta|$$

よって，次の定理 (トレミーの定理) が成り立つ．

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}\geqq\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\quad\cdots(*)$$



とくに，$(*)$ で等号が成立するとき，正の実数 k を用いて

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=k(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)$$

ゆえに　　$\dfrac{\beta-\alpha}{\delta-\alpha}\cdot\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\gamma}=-k$

したがって　　$\arg\dfrac{\beta-\alpha}{\delta-\alpha}+\arg\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\gamma}=\pi$

$$\angle\delta\alpha\beta+\angle\beta\gamma\delta=\pi$$

すなわち　　$\angle\mathrm{DAB}+\angle\mathrm{BCD}=\pi$

よって，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるときに限る．

第 3 章　関数

3.1　関数

□□ 3.1 関数

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

の増減を調べ，y のとり得る値の範囲を求めよ．また，この関数の逆関数を求めよ．

(長崎大学 2016) 5

応用 3.2 すべての正の実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の (a)，(b) を満たすものとする．

(a) すべての正の実数 x，y に対して　$f(xy) = f(x) + f(y)$

(b) すべての自然数 n に対して　$f(n) < f(n+1)$

この関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ．　(長大 [医]2009) 8

(1) x を正の実数とするとき，次の値を求めよ．

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

(2) a を $a > 1$ を満たす有理数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$f(a) > 0$$

(3) a，b を $0 < a < b$ を満たす有理数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$f(a) < f(b)$$

(4) a，b が $0 < a < b$ を満たす実数でも (3) の不等式が成り立つことを用いて，正の実数 x，y に対して，次の不等式を証明せよ．

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

発展 3.3 区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは，

$$a \leqq x \leqq b \text{ ならば，}\quad a \leqq f(x) \leqq b$$

が成り立つこととする．$f(x) = 4x(1-x)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ．　(九大 [理]2006) 5

(2) $0 < a < b < 1$ とする．このとき，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ．

第 4 章　極限

4.1　数列の極限

□□ **4.1** 数列 $\{a_n\}$ において，a_n は小数第 1 位から小数第 n 位までの数字が 0 で小数第 $(n+1)$ 位から小数第 $2n$ 位までの数字が 9 であり，小数第 $(2n+1)$ 以降の数字が 0 である実数とする．ただし，$0 < a_n < 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．また，数列 $\{b_n\}$ を，$b_n = 10^n a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める．　(福岡教育大学 2011) 2

(1) b_1，b_2，b_3 を求め，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく．s_n を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ．

□□ **4.2** 次の関係式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，一般項 a_n と $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．　(長崎大学 2015) 5

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - (\sqrt{2}+1)a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

□□ **4.3** c を $0 < |c| < \dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする．このとき，

$$a_1 = c,\ a_{n+1} = 2ca_n + c^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定められる数列 $\{a_n\}$ について $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{3}$ が成立するような c の値を求めよ．

(福岡教育大学 2006) 1

基本 4.4 $0 < p < 1$ とする．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + pa_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2016) 1

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

基本 4.5 点 $(r,\ 0)$ を中心とする半径 r の円と $y = \dfrac{1}{2}x$ との交点のうち原点でないほうを P_0 とする．原点 O と点 P_0 の中点を P_1 とし，原点 O と点 P_1 を通り y 軸に接する円の面積を S_1 とする．さらに 2 以上の自然数 n について，原点 O と点 P_{n-1} の中点を P_n とし，原点 O と点 P_n を通り y 軸に接する円の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ．　(福岡教育大学 2002) 1

基本 4.6 等差数列 $\{a_n\}$ は，$a_5 = 14$，$a_{10} = 29$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2009) 1

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-a_k}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-a_k}$ および $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を求めよ．

基本 4.7 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が，$a_1 = 1$，$b_1 = 1$ および

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 6b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

で定められているとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2014) 7

(1) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす定数 α，β の組を 2 組求めよ．

(2) a_n を，n を用いて表せ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ を求めよ．

標準 4.8 座標平面上の 3 点 O(0, 0)，A(2, 0)，B(1, $\sqrt{3}$) を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり，A，B とは異なる点とする。
線分 AB 上の点 P_2, P_3, …… を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。
$n \to \infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。 (九大 [理]2019) 4

標準 4.9 $a_n = \dfrac{1}{2^n} \tan \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．このとき，次の問に答えよ．
(佐賀大学 2013) 2

(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき，等式 $\dfrac{1}{2} \tan\theta = \dfrac{1}{2\tan\theta} - \dfrac{1}{\tan 2\theta}$ を示せ．

(2) (1) を用いて，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の和を求めよ．

標準 4.10 a，b を $a > b > 0$ を満たす定数とし，

$$\begin{cases} a_1 = a, & a_{n+1} = {a_n}^2 + {b_n}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_1 = b, & b_{n+1} = 2a_n b_n \quad\quad\quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．次の問いに答えよ． (長崎大学 2010) 5

(1) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_n + b_n$ $(n = 1, 2, 3\cdots)$ により定義するとき，その一般項 c_n を a，b を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項 a_n，b_n を a，b を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$ が存在するかどうか調べ，存在する場合はその値を求めよ．

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$a + b < 1$ が成り立つことを証明せよ．

標準 4.11 $s>0$，$t>0$ とする．正の数からなる 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は初項と第 2 項が $a_1=b_1=s$，$a_2=b_2=t$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2},\quad b_{n+2}=\sqrt{b_{n+1}b_n}$$

をみたすとする．次に答えよ．　(九工大 [工]2016) 2

(1) a_3，b_3，a_4，b_4 を s，t を用いて表せ．

(2) 自然数 n に対して，$c_n=a_{n+1}-a_n$ とおく．数列 $\{c_n\}$ は等比数列であることを示し，一般項を求めよ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$d_n=\log b_n$ とおく．数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．さらに，数列 $\{b_n\}$ の一般項を s の累乗と t の累乗を用いて表せ．ただし，対数は自然対数とする．

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

(5) $t=s$ は $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$ であるための必要十分条件であることを示せ．

標準 4.12 n は自然数とする．A と B の 2 種類の文字のみを用いて，B が連続しないように n 個並べた文字列全体の集合を X_n とする．X_n の 2 つの部分集合

$$S_n = \{x \,|\, x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が A}\},$$
$$T_n = \{x \,|\, x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が B}\}$$

の要素の個数をそれぞれ a_n，b_n とおく．例えば，$n = 1$ のとき，$X_1 = \{\text{A, B}\}$，$S_1 = \{\text{A}\}$，$T_1 = \{\text{B}\}$ より，$a_1 = 1$，$b_1 = 1$ である．また，$n = 2$ のとき，$X_2 = \{\text{AA, AB, BA}\}$，$S_2 = \{\text{AA, BA}\}$，$T_2 = \{\text{AB}\}$ より，$a_2 = 2$，$b_2 = 1$ である．次に答えよ． (九工大 2024) 4

(1) a_3, b_3, a_4, b_4 を求めよ．

(2) a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n と b_n を用いて表せ．

(3) $a_n \geqq 100$ と $b_n \geqq 100$ をともにみたす最小の n を求めよ．

(4) 自然数 a，b と $c = a + b$ に対して，

$$L = \{d \,|\, d \text{ は } a,\ b \text{ の公約数}\}, \quad R = \{d \,|\, d \text{ は } a,\ c \text{ の公約数}\}$$

とする．$L \subset R$ と $L \supset R$ がともに成り立つこと (つまり $L = R$) を示せ．また，すべての自然数 m に対して，a_m と b_m は互いに素であることを数学的帰納法により示せ．

(5) $r_n = \dfrac{a_n}{a_n + b_n}$ とする．ある関数 $f(x)$ により等式 $r_{m+1} = f(r_m)$ がすべての自然数 m について成立する．$f(x)$ をひとつ求めよ．また，極限値 $\lim\limits_{m\to\infty} r_m$ を求めよ．

標準 4.13 r を $r > 1$ である実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定める．

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + r^2}{a_n + 1}$$

以下の問いに答えよ． (熊大 [理]2014) 3

(1) n が奇数のとき $a_n < r$，n が偶数のとき $a_n > r$ であることを示せ．

(2) 任意の自然数 n について，$a_{n+2} - r$ を a_n と r を用いて表せ．

(3) 任意の自然数 n について，次の不等式を示せ．

$$\frac{a_{2n+2} - r}{a_{2n} - r} < \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$ および $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$ を求めよ．

標準 4.14 0 でない実数 r が $|r|<1$ のとき，以下の問いに答えなさい．ただし，自然数 n に対して $\lim_{n\to\infty} nr^n=0$，$\lim_{n\to\infty} n(n-1)r^n=0$ である．　(分大 [医]2016) 6

(1) $R_n=\sum_{k=0}^{n} r^k$ と $S_n=\sum_{k=0}^{n} kr^{k-1}$ を求めなさい．

(2) $T_n=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2}$ を求めなさい．

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2r^k$ を求めなさい．

標準 4.15 自然数 n に対して関数 $y=2nx-x^2$ のグラフと x 軸で囲まれた領域 (境界線を含む)R_n を考える．以下の問いに答えなさい．　(分大 [医]2016) 7

(1) 領域 R_n に含まれる格子点 (x 座標と y 座標がともに整数である点) の数 S_n を求めなさい．

(2) 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2n,\ 0)$，および関数 y の頂点を結ぶ線分で囲まれた領域 (境界を含む) に含まれる格子点の数 T_n を求めなさい．

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{S_n}$ を求めなさい．

標準 4.16 座標平面上の曲線 C_1，C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y=\log x \quad (x>0)$$
$$C_2 : y=(x-1)(x-a)$$

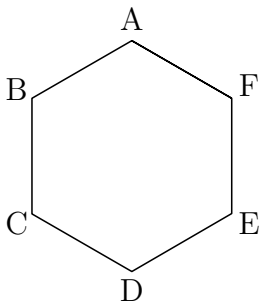
とする．ただし，a は実数である．n を自然数とするとき，曲線 C_1，C_2 が 2 点 P，Q で交わり，P，Q の x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている．また，曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域を T_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．　(九大 [理]2016) 1

(1) a を n の式で表し，$a>1$ を示せ．

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n\log T_n}$ を求めよ．

標準 4.17 右図のように平面上に正六角形 ABCDEF がある．時刻 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ において動点 P は正六角形の 6 つの頂点のいずれかにあり，時刻 1 では頂点 A にあるものとする．時刻 $n+1$ には，時刻 n のときにあった頂点に隣り合う 2 つの頂点のいずれかに移動する．どちらの頂点に移動すかは同様に確からしいものとする．時刻 n において，動点 P が頂点 A，B，C，D，E，F にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n，e_n，f_n とする．以下の問いに答えよ．



(1) a_2，b_2，c_2，d_2，e_2，f_2 を求めよ． (九工大 [情]2010) 4

(2) a_3，b_3，c_3，d_3，e_3，f_3 を求めよ．

(3) n が偶数のとき，$b_n + d_n + f_n$ を求めよ．

(4) すべての時刻 n に対して，$b_n = f_n$ および $c_n = e_n$ が同時に成立することを数学的帰納法を用いて示せ．

(5) m を 1 以上の整数とするとき，d_{2m} を m を用いて表せ．また，$\lim_{n\to\infty} d_{2m}$ を求めよ．

標準 4.18 複素数 z_n を

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_{n+2} = z_{n+1} + \alpha(z_{n+1} - z_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

により定める．ただし，i を虚数単位とし，$\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ とする．また，複数平面上で複素数 z_n を表す点を P_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) z_2，z_3，z_4 を求めよ． (九工大 [情]2016) 3

(2) 点 P_0，P_1，P_2，P_3，P_4 を図示せよ．また，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の長さ，および $\angle\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0$，$\angle\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$，$\angle\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$ の値も図中に示せ．

(3) $z_{n+1} - z_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を α と n を用いて表せ．

(4) z_n の実部，虚部をそれぞれ x_n，y_n とする．このとき，x_n，y_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(5) (4) で求めた x_n，y_n について，$\lim_{n\to\infty} x_n$，$\lim_{n\to\infty} y_n$ をそれぞれ求めよ．

標準 4.19 複素数平面上の点 z に対して

$$w = \frac{3(1-i)z - 2i}{z + 3(1-i)}$$

で表される点 w をとる．このとき，次の問に答えよ．　(佐大 [医]2016) 7

(1) $w = z$ となるような点 z は 2 つある．これらを求めよ．

(2) (1) で求めた異なる 2 点を α，β とする．ただし，$0 \leqq \arg\alpha < \arg\beta < 2\pi$ とする．z が α，β と異なる点であるとき，

$$\frac{w-\beta}{w-\alpha} = k \cdot \frac{z-\beta}{z-\alpha}$$

となるような定数 k の値を求めよ．

(3) 複素数 z_n を

$$z_1 = 0, \quad z_{n+1} = \frac{3(1-i)z_n - 2i}{z_n + 3(1-i)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．また，z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n，y_n とする．このとき，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．さらに，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の極限を求めよ．

応用 4.20 次の問に答えよ．　(琉球大学 2005) 2

(1) 複素数 $z\,(\neq 1)$ に対し，等式

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

がすべての自然数 n について成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

(2) 上記の等式において，z に $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0)$ を代入して

$$1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^n \cos n\theta$$

を計算せよ．ただし $r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 1$ とする．

(3) $0 < r < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^n \cos n\theta)$$

を求めよ．

応用 4.21 実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える．以下の問いに答えよ． (九大 [理]2012) 3

(1) この方程式が実数解を持つような a の範囲を，n を用いて表せ．

(2) この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解を持つような a の範囲を求めよ．

応用 4.22 p と q はともに整数であるとする．2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α，β を持ち，条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ をみたしているとする．
このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=(\alpha^n-1)(\beta^n-1) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

によって定義する．以下の問いに答えよ． (九大 [理]2012) 4

(1) a_1，a_2，a_3 は整数であることを示せ．

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ のとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値をすべて求めよ．ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい．

応用 4.23 $p>0$ とする．各項が正である 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件をみたすものとする．

$$\begin{cases} a_1=3,\ b_1=1 \\ a_n-a_{n-1}=b_n-b_{n-1}+1 \qquad (n=2,3,4,\cdots) \\ (a_{n-1}+b_n)(b_n-b_{n-1})=2pn+3-b_n \qquad (n=2,3,4,\cdots) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ．　(熊大 [医]2009) 2

(1) a_n-b_n を求めよ．

(2) a_nb_n を求めよ．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{a_n}^3+{b_n}^3}{{a_n}^3-{b_n}^3}$ の値を $f(p)$ とおくとき，$\lim\limits_{p\to0}\dfrac{1}{p}\log f(p)$ を求めよ．

応用 4.24 方程式 $\tan x=x$ について，次の各問に答えよ．ただし，必要であれば，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす x について，不等式 $\sin x<x<\tan x$ が成り立つことを用いてもよい．　(宮大 [医]2011) 8

(1) 各自然数 n について，$n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に方程式 $\tan x=x$ の解がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) 各自然数 n について，(1) で存在が示された解を x_n とする．このとき，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n\right)$ を求めよ．

応用 4.25 漸化式 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．次のことは既知としてよい．(長大 [医]2008) 8

> n と無関係な定数 M について，次の A) または B) のうち一方が成立すれば，$n\to\infty$ のとき数列 $\{x_n\}$ は有限な極限値を持つ．
>
> A) $x_n<x_{n+1}<M \quad (n=1,2,\cdots)$
>
> B) $x_n>x_{n+1}>M \quad (n=1,2,\cdots)$

(1) $n\to\infty$ のとき $\{a_n\}$ は有限な極限値をもつことを証明せよ．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

応用 4.26 関数 $y=f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$ に関して，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ と $y=x$ のグラフを描け． (分大 [医]2012) 10

(2) $1<x_0<\dfrac{3}{2}$ に対して，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を定義する．このとき，$x_n>x_{n+1}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が単調減少で，ある実数 L に対して $a_n>L$ $(n=0,1,2,\cdots)$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ が存在する．このことを用いて，数列 $\{x_n\}$ の極限を求めよ．

応用 4.27 $f(x)=x^3-3x-5$ とするとき，次の問いに答えよ． (分大 [医]2004) 10

(1) 方程式 $f(x)=0$ はただ一つの実数解をもつことを示せ．さらに，この実数解を α とするとき，$2<\alpha<3$ をみたすことを示せ．

(2) $\alpha<t\leqq 3$ とし，点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と x 軸との交点を $(s,\ 0)$ とするとき，$0<s-\alpha<\dfrac{1}{3}(t-\alpha)$ が成り立つことを示せ．

(3) $t_1=3$ とする．点 $(t_n,\ f(t_n))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と x 軸との交点を $(t_{n+1},\ 0)$ とする．このように数列 $\{t_n\}$ を定めるとき，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\alpha$ が成り立つことを示せ．

応用 4.28 $f(x)=2^{\frac{x}{2}}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,2,\cdots)$$

によって定める． (分大 [医]2008) 9

(1) $a_n<a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ を示せ．

(2) $a_n<2$ $(n=1,2,\cdots)$ を示せ．

(3) $f(x)=x$ をみたす x を求めよ．

(4) $f(\alpha)=\alpha$ のとき

$$\alpha-a_{n+1}<\frac{\alpha\log 2}{2}(\alpha-a_n)\quad (n=1,2,\cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．
ただし，必要ならば任意の実数 $x\neq 0$ に対して $e^x>1+x$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

応用 4.29 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定義されている．　(分大 [医]2006) 7

(1) $0 < a_n < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $2\cos b_n = a_n$，$0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす b_n の値を求めなさい．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ．

応用 4.30 実数 a_n，b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は次の条件をみたすとする．
(分大 [医]2005) 9

$$\tan(a_n) = \frac{1}{2n^2},\ 0 < a_n < \frac{\pi}{2} \quad \tan(b_n) = \frac{1}{2n+1},\ 0 < b_n < \frac{\pi}{2}$$

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x$ と x との大小を調べよ．

(2) $\tan(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ の値を求めよ．

(3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_n$ の値を求めよ．

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ の値を求めよ．

応用 4.31 関数 $f(x) = \log\dfrac{e^x}{x}$ を用いて，$a_1 = 2$，$a_{n+1} = f(a_n)$ によって数列 $\{a_n\}$ が与えらえている．ただし，対数は自然対数である．以下の問に答えなさい．
(分大 [医]2022) 5

(1) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$0 \leqq f(x) - 1 \leqq \dfrac{1}{2}(x - 1)$ が成立することを示しなさい．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい．

(3) $b_1 = a_1$，$b_{n+1} = a_{n+1}b_n$ によって与えられる数列 $\{b_n\}$ の極限を求めなさい．

4.2　関数の極限

□□ **4.32** 次の極限値を求めよ．　(宮崎大学 2004) 2

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$$

基本 4.33 座標平面上で，t を媒介変数として表される曲線 $C : x = a\cos t,\ y = b\sin t$ $(a > 0,\ b > 0,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi)$ について，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2003) 3

(1) x，y の満たす関係式を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq a\cos\theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，曲線 C，y 軸および直線 $x = a\cos\theta$ によって囲まれる部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{S(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$ を求めよ．ただし，$\theta \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ は，θ が $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい値をとりながら $\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づくことを表す．

基本 4.34 次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2012) 4

(1) 無限級数

$$1 + \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{(1+e^x)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+e^x)^n} + \cdots$$

はすべての実数 x について収束することを示し，その和を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(2) (1) で求めた無限級数の和を $f(x)$ とする．方程式

$$\log f(x) = -|\,x\,| + \log 6$$

を解け．ただし，対数は自然対数とする．

標準 4.35 C_1，C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする．

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leqq x \leqq 2$$
$$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leqq x \leqq 0$$

また，a を実数とし，直線 $y = a(x+4)$ を ℓ とする． (九大 [理]2015) 1

(1) 直線 ℓ と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ．

以下，a が (1) の条件を満たすとする．このとき，ℓ と C_1 で囲まれた部分の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で ℓ の下側にある部分の面積を S_2 とする．

(2) S_1 を a を用いて表せ．

(3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ．

標準 4.36 L を正の定数とする．3 以上の整数 n に対して，辺の長さの和が L である正 n 角形を P_n とし，P_n の面積を $S(n)$ とする．次に答えよ．

(九州工業大学 2018) 2

(1) P_n の外接円の中心から各辺に下ろした垂線の長さを h とする．h を L と n を用いて表せ．

(2) $S(n)$ を L と n を用いて表せ．

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，関数 $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ が単調増加であることを示せ．

(4) $S(n)$ と $S(n+1)$ の大小を比較せよ．

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} S(n)$ を L を用いて表せ．

応用 4.37 n を 3 以上の自然数，α，β を相異なる実数とするとき，以下の問いに答えよ．

(九大 [理]2022) 2

(1) 次をみたす実数 A，B，C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ．

$$x^n = (x-\alpha)(x-\beta)^2 Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) + C$$

(2) (1) の A，B，C を n，α，β を用いて表せ．

(3) (2) の A について，n と α を固定して，β を α に近づけたときの極限 $\lim\limits_{\beta\to\alpha} A$ を求めよ．

4.3 問題研究

4.3.1 ネイピア数

次の極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (e \text{ はネイピア数})$$

について述べる．

n を自然数とする．1 と n 個の $1+\dfrac{1}{n}$ の相加・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+1}\left\{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} > \sqrt[n+1]{1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

両辺を $n+1$ 乗すると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列である．

また，1 と $n+1$ 個の $\dfrac{n}{n+1}$ の相加・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+2}\left\{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\right\} > \sqrt[n+2]{1\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

両辺を $n+2$ 乗すると

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

上式の逆数をとると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ とすると，数列 $\{b_n\}$ は単調減少列である．したがって

$$2 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_2 < b_1 = 4$$

48 ページの 4.25 にあるように，上に有界な単調増加列 $\{a_n\}$ および下に有界な単調減少列 $\{b_n\}$ は収束する．また，$b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ であるから

$$0 < b_n - a_n = \frac{a_n}{n} < \frac{4}{n}$$

はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e$

第 5 章　微分法とその応用

5.1　導関数

□□ **5.1** 関数 $y = x^2 \sin(3x + 5)$ の導関数を求めよ．　(琉球大学 2003) 1

□□ **5.2** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2007) 1

(1)　$y = e^{\cos x}$　　(2)　$y = (\log|x|)^2$

□□ **5.3** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2008) 2

(1)　$y = x \log|x|$　　(2)　$y = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

□□ **5.4** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2009) 4

(1)　$y = \dfrac{\cos x}{e^x}$　　(2)　$y = \sin(\log|x|)$

□□ **5.5** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2010) 1

(1)　$y = e^{\sin x \cos x}$　　(2)　$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

□□ **5.6** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2011) 1

(1)　$y = e^{\sqrt{x}}$　　(2)　$y = \dfrac{\log|\cos x|}{x}$

□□ **5.7** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2012) 1

(1)　$y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$　　(2)　$y = \sin^3(2x + 1)$

□□ **5.8** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2013) 1

(1)　$y = \dfrac{x}{e^x}$　　(2)　$y = \log\left(\dfrac{2 + \sin x}{2 - \sin x}\right)$

□□ **5.9** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2014) 1

(1)　$y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$　　(2)　$y = (x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 5}$

□□ **5.10** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2015) 1

(1)　$y = \sin(\cos x)$　　(2)　$y = \dfrac{e^{2x}}{x+1}$

□□ **5.11** 次の関数を微分せよ．　(宮崎大学 2016) 1

(1)　$y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$　　(2)　$y = \log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$

□□ **5.12** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．　(宮崎大学 2017) 1

(1) 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ の導関数は，$f'(x) = e^{-x^2}($ $\square$ $)$ である．

(2) 関数 $f(x) = \sqrt{1+\sin^2 x}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\square}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ である．

□□ **5.13** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．　(宮崎大学 2018) 1

(1) 関数 $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\square}{\sqrt{1+x^2}}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\square}{\sin^2 x}$ である．

□□ **5.14** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．　(宮崎大学 2019) 1

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+3x^2}}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\square}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \sin x \tan x$ の導関数は，$f'(x) = \square\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ である．

□□ **5.15** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．　(宮崎大学 2020) 1

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\square}{(e^x+e^{-x})^2}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \log\sqrt{x^2+1}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\square}{x^2+1}$ である．

(3) x の関数 y が，t を媒介変数として，

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

で表されているとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表すと，$\dfrac{dy}{dx} = \square$ である．

□□ **5.16** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ. (宮崎大学 2021) 1

(1) 関数 $f(x)=(x+1)\sqrt{2x+3}$ の導関数は，$f'(x)=\dfrac{\boxed{}}{\sqrt{2x+3}}$ である.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin^2 x}$ の導関数は，$f'(x)=\dfrac{\boxed{}}{\sin^3 x}$ である.

□□ **5.17** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ. (宮崎大学 2022) 1

(1) 関数 $f(x)=x(\log x)^2$ の導関数は，$f'(x)=\left(\boxed{\text{あ}}\right)\log x$ である.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x^2}$ の導関数は，$f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{い}}}{x^3\cos^2 x}$ である.

□□ **5.18** 関数 $y=e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x+\cos 2x)$ は，次の等式を満たすことを示せ.

$$4y''-12y'+25y=0$$

(福岡教育大学 2007) 1

標準 5.19 $P(x)$ を整式とし，整式 $Q(x)$ を $Q(x)=\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$ で定める．$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは 2 であった．次の問いに答えよ. (福岡教育大学 2017) 3

(1) $Q'(1)$ の値を求めよ.

(2) $Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ.

(3) $Q(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは 3 であった．$Q(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ.

標準 5.20 次の問いに答えよ．　(長崎大学 2011) 4

(1) 関係式

$$a_1 = 1, \quad na_{n+1} - (n+1)a_n = 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めたい．$b_n = \dfrac{a_n}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおいて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，a_n を求めよ．

(2) $x \neq 1$ のとき，等比数列の和の公式

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

の両辺を x で微分せよ．その結果を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^k$ を求めよ．

(3) $p \neq 1$ のとき，関係式

$$c_1 = 0, \quad \frac{pc_{n+1}}{n} - \frac{c_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定義される数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

標準 5.21 確率 p $(0 < p < 1)$ で「当たり」が出るくじを繰り返して引く．2 回目の「当たり」が出たときにこの試行を終える．$n \geqq 2$ として，n 回目でこの試行を終える確率を p_n とする．次の問いに答えよ．　(琉球大学 2015) 3

(1) p_2，p_3，p_4 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

(3) $N \geqq 2$ として，$\displaystyle\sum_{k=2}^{N} p_k$ を求めよ．

標準 5.22 2 つの関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$ と $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$ について，以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2012) 3

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2) $f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ をそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の第 n 次導関数とする．

(i) $n \geqq 2$ のとき，$f^{(n)}(x)$ および $g^{(n)}(x)$ を，$f^{(n-1)}(x)$ と $g^{(n-1)}(x)$ を用いて表せ．

(ii) $\{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2$ を求めよ．

(iii) 実数 a について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2a}}{\{f^{(n)}(a)\}^2 + \{g^{(n)}(a)\}^2}$ の和を求めよ．

5.2 接線と法線

基本 5.23 楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 5$ について，次の問いに答えよ．
(福岡教育大学 2008) 3

(1) 楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は $ax + 4by = 5$ で表されることを示せ．

(2) 点 $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ から楕円 C に 2 本の接線をひき，その接点を T_1，T_2 とする．このとき，2 点 T_1，T_2 を通る直線の方程式を求めよ．

基本 5.24 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x = \dfrac{1-t}{1+t}$，$y = \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}$ で与えられている．$0 < t < 1$ のとき，点 $(1,\ 0)$ と点 P を結ぶ線分の中点を M とし，点 M が描く曲線を C とする．
(大分大学 2001) 4

(1) 時刻 t における点 M の座標を t を用いて表せ．

(2) 時刻 t における点 M での C の法線の方程式を求めよ．

(3) C の法線は時刻 t にかかわらず，常にある定点を通ることを示し，その点の座標を求めよ．

基本 5.25 曲線 C を $y = e^x$ とする．C 上の点 $\mathrm{A}_0(0,\ 1)$ における接線と x 軸の交点を $\mathrm{B}_1(b_1,\ 0)$ とし，C 上の点 $\mathrm{A}_1(b_1,\ e^{b_1})$ における接線と x 軸の交点を $\mathrm{B}_2(b_2,\ 0)$ とする．これをくりかえし，C 上の点 $\mathrm{A}_n(b_n,\ e^{b_n})$ における接線と x 軸の交点を $\mathrm{B}_{n+1}(b_{n+1},\ 0)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．
(佐賀大学 2010) 3

(1) b_1 を求めよ．

(2) b_{n+1} と b_n の関係式を求め，一般項 b_n を求めよ．

(3) $\triangle \mathrm{B}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}$ の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ を求めよ．ただし，B_0 は原点とする．

基本 5.26 座標平面上において，x 軸上の点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ と曲線 $C : y = \dfrac{1}{x^2}$ 上の点列 $\{\mathrm{Q}_n\}$ を次のように定める．$\mathrm{P}_1(a,\ 0)$ $(a > 0)$ とする．P_n $(n \geqq 1)$ が定まったとき，P_n を通り y 軸に平行な直線と C との交点を Q_n とする．Q_n における C の接線と x 軸との交点を P_{n+1} とする．次の問いに答えよ．
(熊大 [理]2005) 3

(1) $\mathrm{P}_n(a_n,\ 0)$ とするとき，a_n を a で表せ．

(2) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を a で表せ．

標準 5.27　xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ．C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする．次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする．次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする．以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 Q_1 の座標を求めよ．　(九大 [理]2010) 3

(2)　三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ．

(3)　三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の面積 S_n を求めよ．

(4)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ．

標準 5.28　関数 $f(x)=\log(x^2-x+2)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数を表している．　(九工大 [情]2013) 2

(1)　$y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の極値を求めよ．

(2)　x についての方程式 $\log(x^2-x+2)=x$ は $\dfrac{1}{2}<x<1$ の範囲に実数解をただ 1 つもつことを示せ．必要であれば，$\log 2<0.7$，$\log 7>1.9$ であることを用いてよい．

(3)　$y=f'(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値と最小値を求めよ．

(4)　平均値の定理を用いることで，$0\leqq a<b\leqq 1$ となる実数 a，b に対して，$|f(b)-f(a)|<\dfrac{1}{2}|b-a|$ となることを示せ．

標準 5.29　a を定数とする．方程式 $(\log x)^2=ax$ $(x>0)$ について，以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2007) 4

(1)　解の個数を調べよ．必要なら，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x}=0$ を用いよ．

(2)　解がちょうど 2 個のとき，これらの解を p^2，q^2 $(0<p<q)$ とおく．q の値を求めよ．また，p は $\dfrac{e}{e+1}<p<1$ を満たすことを示せ．

標準 5.30 関数 $f(x)=x^3-x^2-x-1$ について，次の各問に答えよ．
(鹿児島大学 2001) 11

(1) 3 次関数 $f(x)=0$ の正の解の個数は 1 個であることを証明せよ．

(2) (1) の解をニュートン法で計算する式は
$$x_{n+1}=\frac{2{x_n}^3-{x_n}^2+1}{3{x_n}^2-2x_n-1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$
となることを証明せよ．

(3) この方程式の正の解の近似値を，ニュートン法を用いて計算する．$f\left(\frac{3}{2}\right)$ と $f(2)$ の絶対値 $\left|f\left(\frac{3}{2}\right)\right|$，$|f(2)|$ の小さい方の x の値 x_1 を求めよ．さらに，x_1 を初期値として，正の解の近似値 x_2 を求めよ．

標準 5.31 方程式 $x^2-2=0$ の解 $\sqrt{2}$ の近似値をニュートン法を用いて求めたい．次の各問いに答えよ．
(鹿児島大学 2003) 11

(1) $\sqrt{2}$ の近似値を求めるためのニュートンの繰り返し公式が
$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right)\quad(k=1,2,3,\cdots)$$
で与えられることを示せ．

(2) $x_1=2$ とするとき，x_2 および x_3 を求めよ (小数第 4 位を四捨五入して，小数第 3 位まで求めること)．

(3) $y_k=\dfrac{x_k-\sqrt{2}}{x_k+\sqrt{2}}$ とおくとき，${y_{k+1}}={y_k}^2$ となることを示せ．

(4) y_k を k と y_1 を用いて表せ．さらに，$x_1=2$ のとき，$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\sqrt{2}$ を示せ．

標準 5.32 $f_1(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$，$f_2(x)=-2x+2$ とする．曲線 $y=f_1(x)$ と曲線 $y=f_2(x)$ の交点をニュートン法を用いて求めたい．このとき，次の各問いに答えよ．
(鹿児島大学 2005) 11

(1) $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ とおく．区間 $[0,\ 2]$ に $f(x)=0$ の解があることを示せ．

(2) $f(x)=0$ の解を，ニュートン法を用いて，適当な初期値 x_1 から始め x_2，x_3，$\cdots$，x_n，$\cdots$ と近似していく．このとき，x_{n+1} を x_n を用いて表す式を求めよ．

(3) $x_1=1$ として，x_2 を求めよ．

応用 5.33 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を
$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$
と定義する．$k=1,2,\cdots,n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ．
(九大 [理]2014) 5

応用 5.34 正の実数 a の 3 乗根 $\sqrt[3]{a}$ を近似することを考える．与えられた 2 以上の整数 p に対して関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x) = x^p - ax^{p-3} \\ g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．次の問いに答えよ．

(九大 [理]2002) 8

(1) $g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{x \text{ の } 2 \text{ 次式}}{x \text{ の } 3 \text{ 次式}}$$

の形で表されることを示せ．

(2) $p = 2$ とする．このとき，$g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^3 \times \frac{x \text{ の } 1 \text{ 次式}}{x \text{ の } 3 \text{ 次式}}$$

の形で表されることを示せ．

(3) $a = 9$，$p = 2$ とする．$2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$ に注意して，不等式

$$0 < \sqrt[3]{9} - g(2) < \frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ．また，$\sqrt[3]{9}$ を小数第 3 位まで求めよ (すなわち，小数第 4 位以下を切り捨てよ)．

5.3　関数のグラフ

基本 5.35 a，b，c，d は実数で，$a > 0$ とする．関数

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

について，次の各問いに答えよ．

(鹿児島大学 2007) 9

(1) $f(x)$ が極値をもつための条件を，a，b，c，d を用いて表せ．

(2) $f(x)$ が常に変曲点を持つことを示し，その変曲点を求めよ．

基本 5.36 $x > 1$ において $f(x) = \sqrt{x} - \log x$，$g(x) = \dfrac{x}{\log x}$ とするとき，次の問いに答えよ．(ただし，対数は自然対数とする．) (佐賀大学 2009) 2

(1) $f(x) > 0$ を示せ．

(2) $g(x) > \sqrt{x}$ を示せ．これを用いて，$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ を示せ．

(3) $g'(x)$，$g''(x)$ を計算し，$g(x)$ の極値，変曲点の座標を求めよ．

(4) 関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ．

標準 5.37 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f(x) = \log x - \sqrt[n]{x}$ を考える．次の問いに答えよ． (長崎大学 2004) 6

(1) $xf'(x)$，$x^2 f''(x)$ を求めよ．

(2) $x > 0$ において，$f'(x) > 0$ なる x の範囲および $f''(x) < 0$ なる x の範囲をそれぞれ求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ，関数 $f(x)$ の極大値と曲線 $y = f(x)$ の変曲点がそれぞれ 1 つずつあることを示せ．

(4) 上問 (3) の極大値を与える x の値を a_n，変曲点の x 座標を b_n とするとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$ を求めよ．なお $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$ (自然対数の底) であることは用いてよい．

標準 5.38 O を原点とする座標平面において，C_1 を曲線 $\dfrac{x^2}{3^2} + y^2 = 1$，$C_2$ を直線 $y = 2$ とする．点 P は第 1 象限にある C_1 上のある点とし，点 P における C_1 の接線を ℓ，この接線 ℓ と C_2 との交点を Q とおく．次の各問いに答えよ．
(鹿児島大学 2017) 6

(1) 点 P の座標を $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表すとき，接線 ℓ の方程式，および点 Q の座標を θ を用いて求めよ．

(2) $\triangle$POQ の面積を最小にする点 P の座標，および接線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) (2) のとき，曲線 C_1 で囲まれた図形と $\triangle$POQ との共通部分の面積を求めよ．

標準 5.39 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \log|x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とするとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2009) 3

(1) $0 < x < 1$ のとき，$0 < -\log x < \dfrac{1}{x}$ が成り立つことを示せ．

(2) 微分係数の定義を用いて $f'(0) = 0$ であることを示せ．

(3) $x \neq 0$ のとき $f'(x)$ を求めよ．

(4) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

標準 5.40 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{|x|}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とするとき，次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(鹿児島大学 2006) 2

(1) $x > 0$ のとき，すべての自然数 n について不等式 $e^x > \dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ．

(2) $x \neq 0$ のとき，すべての自然数 n について不等式 $e^{-\frac{1}{|x|}} < n!|x|^n$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ であることを示せ．

(4) $f'(x) = 0$ となる x の値および $f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ の極値を求めよ．

標準 5.41 a，b，c，d を実数とし，関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & (x \leqq -1) \\ ax^3+bx^2+cx+d & (-1<x<1) \\ -\dfrac{1}{x}+1 & (1 \leqq x) \end{cases}$$

ただし，$f(x)$ は $x=-1$ および $x=1$ で微分可能であるものとする，以下に答えよ．

(1) a，b，c，d を定めよ． (九工大 [情]2002) 1

(2) $f(x)$ の増減および極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) 実数 $p \geqq 0$ に対し，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=px+\dfrac{1}{2}$ との共有点の個数を求めよ．

標準 5.42 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく．ただし，e は自然対数の底とする．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [理]2008) 1

(1) $y=f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ．

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ．

標準 5.43 m は正の定数とする．関数 $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+m^2x$ について，次の問いに答えよ． (長崎大学 2007) 2

(1) 方程式 $f(x)=0$ は 0 以外に相異なる 2 つの実数解をもつことを示せ．

(2) 方程式 $f(x)=0$ の 0 以外の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とする．$\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ を m を用いて表せ．また α，β がともに正であることを示せ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形について，$y \geqq 0$ の範囲にある部分の面積と $y \leqq 0$ の範囲にある部分の面積が等しいものとする．そのとき，m，α，β の値を求めよ．

応用 5.44 x の三次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフはある点に関して対称であることを証明せよ．ここに，a，b，c，d は定数で $a \neq 0$ とする．(分大 [医]2011) 7

発展 5.45 3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフを G とする．(九大 [理]2001) 2

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ．

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ．

(3) 直線 $mx+ny=0$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ．ただし m，n は共には 0 でないとする．

(4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ．

5.4　最大・最小

□□ **5.46** 関数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ の増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．　(福岡教育大学 2010) 1

□□ **5.47** AB = AC = 1 である二等辺三角形 ABC において，BC = $2x$，内接円の半径を r とおく．　(琉球大学 2014) 1

(1) r を x を用いて表せ．

(2) r が最大となる x の値を求めよ (最大値そのものは求める必要はない)．

基本 5.48 曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ $(x\geqq 1)$ 上の点 P$(a,\ b)$ $(a>1)$ での接線と y 軸との交点を Q とする．次の問いに答えよ．　(琉球大学 2012) 1

(1) 点 Q の座標を b で表せ．

(2) PQ^2 の最小値を求めよ．

基本 5.49 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ で表される曲線を C とする．　(琉球大学 2008) 2

(1) 曲線 C の凹凸を調べ，その概形を図示せよ．

(2) 曲線 C 上の点 P$(a,\ b)$ $(0<a<1)$ における接線 l の x 切片，y 切片をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) (2) において点 P が曲線 C 上を動くとき，P における接線 l と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積の最大値を求めよ．

標準 5.50 O を原点とする座標平面上に 4 点 A$(4,\ 0)$，B$(4,\ 4)$，C$(0,\ 4)$，D$(3,\ 2)$ がある．点 R は正方形 OABC の周上では速さ 4 で動き，正方形の内部では速さが 1 で動く．次に答えよ．　(九工大 [工]2008) 4

(1) 点 P$(x,\ 0)$ を線分 OA 上の点とする．点 R が O を出発して，折れ線 OPD に沿って D に到達するまでの時間 $f(x)$ $(0\leqq x\leqq 4)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $f(x)$ に対して，$f'(x)=0$ を満たす x を求めよ．

(3) (1) で求めた $f(x)$ の最小値 T_1 を求めよ．

(4) 点 Q$(4,\ x)$ を線分 AB 上の点とする．点 R が O を出発して，折れ線 OAQD に沿って D に到達するまでの時間を $g(x)$ $(0\leqq x\leqq 4)$ とする．$g(x)$ の最小値 T_2 を求め，(3) で求めた値 T_1 との大小を比較せよ．

標準 5.51 座標平面上に原点を中心とする半径1の円 $C : x^2+y^2 = 1$ と点 $\mathrm{A}(-1, -1)$, $\mathrm{B}(0, -1)$ があり，点 A を通る傾き k の直線 ℓ を考える．直線 ℓ は円 C と異なる2点で交わるものとし，点 A から遠い方の交点を P，近い方の交点を Q とする．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2015) 2

(1) 直線 ℓ の方程式を k を用いて表せ．

(2) 点 P，Q の座標をそれぞれ k を用いて表せ．

(3) 三角形 BPQ の面積を k を用いて表せ．

(4) 三角形 BPQ の面積を最大にする k を求めよ．

標準 5.52 O を原点とする座標平面上に点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ があり，点 A からの距離が4である点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $x > 0$，$y > 1$ をみたすように動く．直線 AP が x 軸の正の向きとなす角を θ，点 P から x 軸に垂線を下ろしたときの交点を Q とする．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2012) 2

(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(2) 四角形 OAPQ の面積 S を θ を用いて表せ．

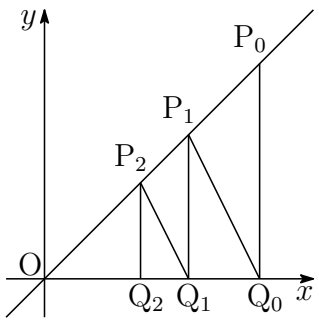
(3) (2) で求めた S が最大となるときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

(4) 四角形 OAPQ を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を θ を用いて表せ．

(5) (4) で求めた V が $\sin\theta = \dfrac{3}{4}$ で最大となることを示せ．

標準 5.53 O を原点とする座標平面上に点 $\mathrm{P}_0(1,\ 1)$，$\mathrm{Q}_0(1,\ 0)$ がある．ある p $(0 < p < 1)$ に対して，点 $\mathrm{P}_1(p,\ p)$，$\mathrm{Q}_1(p,\ 0)$ を定め，さらに，自然数 n について点 P_{n+1}，Q_{n+1} を次のように定める．

- 点 Q_n を通り直線 $\mathrm{Q}_0\mathrm{P}_1$ と平行な直線と，直線 OP_0 の交点を P_{n+1} とする．
- 点 P_{n+1} を通り y 軸と平行な直線と，x 軸の交点を Q_{n+1} とする．



また，$\triangle \mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ の面積を S_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) S_1 を p を用いて表せ．　(九工大 [情]2012) 3

(2) 点 Q_{n-1} の x 座標を q とするとき，点 Q_n の x 座標を p，q を用いて表せ．

(3) S_n を p，n を用いて表せ．

(4) n を定数として，p を $0 < p < 1$ の範囲で動かすとき，S_n を最大にする p とそのときの S_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(5) (4) で求めた S_n に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ．必要であれば，自然対数の底 e について $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ が成り立つことを用いてよい．

標準 5.54 座標平面上の曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ と点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s > 0,\ t > 0,\ st < 1)$ を考える．また，$u = st$ とする．点 P を通る曲線 C の 2 本の接線をそれぞれ l_1，l_2 とし，これらの接線と曲線 C との接点をそれぞれ $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ とする．ただし，$a < b$ とする．以下の問いに答えよ．　(九工大 [情]2016) 1

(1) a，b を s，t を用いて表せ．

(2) 2 点 $\mathrm{E}(a,\ 0)$，$\mathrm{F}(b,\ 0)$ を考える．台形 ABFE の面積を u を用いて表せ．

(3) $\triangle$PAB の面積を u を用いて表せ．

(4) (3) で求めた $\triangle$PAB の面積を $S(u)$ とする．$S(u)$ は区間 $0 < u < 1$ で減少することを示せ．

(5) 点 P が 2 点 $(3,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を結ぶ線分上の端点以外にあるものとする．このとき，$\triangle$PAB の面積が最小となる点 P の座標を求めよ．また，そのときの面積を求めよ．

標準 5.55 xy 平面において，y 軸上の点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ と曲線 $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{X}(x,\ \log x)$ を考える．ただし，対数は自然対数とする． (佐賀大学 2003) 4

(1) 線分 AX の長さが最短になる点 B はただ 1 つ存在し，線分 AB は点 B における曲線 $y=\log x$ の接線 l と直交することを，以下の手順で証明せよ．

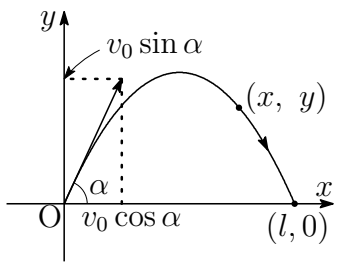
(i) 定数 a に対して，$x^2+\log x-a=0$ を満たす x はただ 1 つ存在することを示せ．

(ii) b を，$b^2+\log b-a=0$ を満たす実数とする．線分 AX の長さが最短となる点は，$\mathrm{B}(b,\ \log b)$ のみであることを示せ．

(iii) 線分 AB は，$\mathrm{B}(b,\ \log b)$ における曲線 $y=\log x$ の接線 l と直交することを示せ．

(2) $\mathrm{B}(b,\ \log b)$ を，(1) で導いた点とする．線分 AB の長さが，$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$ となるときの a の値を求めよ．

標準 5.56 右の図のように，原点 O から物体 P を，水平面と角 α $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ をなす方向に，速さ v_0m/秒 $(v_0>0)$ で投げたとき，投げてから t 秒後の P の位置を $(x,\ y)$ とする．空気抵抗を無視すると，x と y は g を正定数として $x=(v_0\cos\alpha)t$，$y=(v_0\sin\alpha)t-\dfrac{1}{2}gt^2$ と表される． (佐賀大学 2001) 4



(1) P が正の時刻で x 軸に到達する位置を $(l,\ 0)$ とするとき，l を α，v_0，g で表せ．

(2) 正の時刻で x 軸に到達するまでに P が描く曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を α，v_0，g で表せ．

(3) v_0 を固定し，α を動かすとき，S の最大値を v_0，g で表せ．

標準 5.57 楕円 $E:\dfrac{x^2}{8}+y^2=1$ について，次の問いに答えよ． (熊大 [理]2002) 3

(1) E 上の点 $(a,\ b)$ における E の接線の x 切片と y 切片の和を a で表したものを $f(a)$ とするとき，$f(a)$ を求めよ．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

(2) $f(a)$ が最小となる a の値を求めよ．

応用 5.58 実数の定数 (パラメータ) k に対して，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+k$，$x=-1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積の最小値と，そのときの定数 k を求めよ．
(分大 [医]2011) 8

応用 5.59 △ABC の 3 辺の長さを BC $= a$，AC $= b$，AB $= c$ とし，条件

$$a+b+c=1, \quad 9ab=1$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ。　(熊大 [医]2015) 1

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta = \angle \mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。

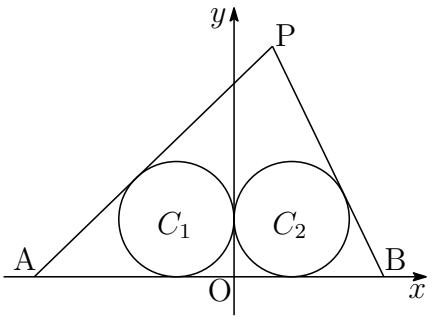
応用 5.60 座標平面上に点 $\mathrm{P}(-l,\ 0)$ をとる．ただし，l は正の定数とする．また，原点を中心とする半径 1 の円周上に 2 点 $\mathrm{Q}(\cos\theta, -\sin\theta)$，$\mathrm{R}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ をとる．△PQR の周の長さを $f(\theta)$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(\theta)$ を，l と θ を用いて表せ．　(宮大 [医]2008) 7

(2) $f(\theta)$ の最大値を，l を用いて表せ．

応用 5.61 座標平面上に 2 つの円

$$C_1 : (x+1)^2+(y-1)^2=1$$
$$C_2 : (x-1)^2+(y-1)^2=1$$



がある．不等式 $y>2$ が表す領域 D 内に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとる．点 P から円 C_1，C_2 にひいた接線と x 軸との交点をそれぞれ A，B とする．ただし，右図のように △PAB は円 C_1，C_2 をともに含むものとする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮大 [医]2010) 7

(1) b を定数とするとき，辺 AB の長さが最小となるのは $a=0$ のときであることを示せ．

(2) 点 P が領域 D 内を動くとき，△PAB の面積の最小値を求めよ．

5.5　方程式・不等式への応用

標準 5.62 a を 0 以上の実数とし，$x>-1$ で定義された関数

$$f(x)=2x^2+(1-a^2)\log(x+1)$$

について，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2010) 4

(1) 方程式 $f'(x)=0$ が $x>-1$ で異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

(2) a が (1) で求めた範囲にあるとき，関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(3) a が (1) で求めた範囲にあるとき，関数 $f(x)$ の極小値は $\dfrac{1-2\log 2}{2}$ より大きいことを証明せよ．

標準 5.63 実数 c $(c>0)$ に対して，$x>0$ で定義された次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x)=\log_e x-c(x-1)$$

ただし，e は自然対数の底である．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2008) 1

(1) $f(x)$ は最大値を持つことを示せ．また，$f(x)$ が最大になるときの x の値とそのときの $f(x)$ の値を c を用いて表せ．

(2) (1) で求めた最大値を m とするとき，c の値によらず $m\geqq 0$ であることを示せ．

(3) すべての x $(x>0)$ に対して，$f(x)\leqq 0$ が成り立つときの c の値を求めよ．

(4) すべての x $(x>0)$ に対して

$$\log_a x-b(x-1)\leqq 0$$

が成り立つときの，実数 a $(a>1)$ と b $(b>0)$ が満たすべき関係式を求めよ．

標準 5.64 a，b を正の実数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ $f(x)=3x-2a\sin x\cos x$，$g(x)=x^2+b\cos^2 x-b$ とする．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2011) 1

(1) $a=3$ のとき，$0\leqq x\leqq \pi$ における $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) $a=1$ のとき，$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

(4) $x\geqq 0$ において $g(x)\geqq 0$ が成り立つような b の範囲を求めよ．

標準 5.65 $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\dfrac{2}{\pi}-\cos x}$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}$ とする．$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき，以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2014) 3

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x)>0$ を示せ．

(3) $\dfrac{\pi}{2}<f(x)<\pi$ を示せ．

(4) $f(x)<g(x)$ を示せ．

標準 5.66 $0 < a < 3$ とする．次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \log(1 + a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を次の手順で求めよ．　(熊大 [理]2009) 2

(1) $0 < x < 3$ のとき，$0 < \log(1 + x) < x - \dfrac{1}{6}x^2$ であることを示せ．必要があれば，$0.69 < \log 2 < 0.70$ を用いてもよい．

(2) $0 < a_n < \dfrac{6}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示し，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

標準 5.67 a を正の定数とする．条件

$$\cos\theta - \sin\theta = a \sin\theta \cos\theta, \qquad 0 < \theta < \pi$$

を満たす θ について，以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2014) 2

(1) 条件を満たす θ は，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ．

(2) 条件を満たす θ の個数を求めよ．

標準 5.68 関数 $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めなさい．　(長崎大学 2003) 3

(2) 関数 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものは 1 本しかないことを示し，その接線の方程式を求めなさい．

応用 5.69 曲線 $C : y = \log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ をとる．ただし，点 P および原点を通る直線と点 P における曲線 C の接線が垂直に交わっているものとする．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2018) 4

(1) $\log t$ を t についての整式で表せ．

(2) $0 < x < 1$ の範囲で不等式

$$2\log x < -x^2 + 4x - 3$$

が成立することを示せ．

(3) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1}$ とおく．$S = \dfrac{f(t)}{g(t)}$ となるような t についての整式 $f(t)$，$g(t)$ を一組求めよ．また，$S > 1.1$ となることを示せ．

応用 5.70 次の問いに答えよ．ただし，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい． (九大 [理]2006) 1

(1) 自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) の 2 つの実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\quad ne<\beta_n$$

が成り立つことを示せ．また，$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ．

応用 5.71 a を正の定数とする．以下の問いに答えよ． (九大 [理]2011) 2

(1) 関数 $f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ．

(2) $x\geqq 3$ のとき，不等式 $x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ．さらに，極限値

$$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$$

を求めよ．

(3) k を定数とする．$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，a と k を用いて表せ．

応用 5.72 以下の問いに答えよ． (熊大 [医]2014) 3

(1) 正の実数 a，b，c について，不等式

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}<\log 4$$

が成立することを示せ．ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい．

(2) 自然数 a，b，c，d の組で

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc},\qquad a\leqq b\leqq c,\qquad d\geqq 3$$

を満たすものすべて求めよ．

応用 5.73 n は 2 以上の自然数とする．関数 $f_n(x) = x^n \log x$ $(x > 0)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\lim_{n\to+0} x^n \log x = 0$ であることを用いてよい．

(1) 関数 $y = f_n(x)$ の増減，凹凸を調べ，グラフをかけ．　(長大 [医]2007) 5

(2) 関数 $y = f_n(x)$ の最小値を L_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n+1}}{n}$ の和を求めよ．

(3) 曲線 $y = f_n(x)$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ．

(4) k を定数とするとき，x に関する方程式 $x^n \log x = x + k$ $(x > 0)$ の解の個数を求めよ．

応用 5.74 xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ．2 以上の整数 n に対し，

$$0 < x < n, \quad 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 $(x,\ y)$ の個数を $P(n)$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) 不等式　(熊大 [医]2020) 4

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

を示せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ．

(3) (2) で求めた極限値を L とする．不等式

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$

を示せ．

応用 5.75 $n \geqq 2$ を自然数とする．　(分大 [医]2007) 8

(1) 関数 $f(x) = nx - 1 + (1 - x)^n$ の極値を求めよ．

(2) 次の不等式を示せ．

(i) $(1 - x^2)e^x \leqq 1 + x \leqq e^x \quad (x \geqq -1)$

(ii) $0 \leqq e^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2}{n} e^x \quad (x \geqq -n)$

応用 5.76 座標平面上で，曲線

$$x=\theta-\sin\theta,\quad y=1+\cos\theta\quad(0<\theta<2\pi)$$

を C とする．次に答えよ． (九州工業大学 2017) 2

(1) 曲線 C 上の点 $(\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C は下に凸であることを示せ．

(3) $0<\theta<\pi$ のとき，点 $\mathrm{P}(\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$ における曲線 C の接線と，点 $\mathrm{Q}(\theta+\pi-\sin(\theta+\pi),\ 1+\cos(\theta+\pi))$ における曲線 C の接線が，垂直に交わることを示せ．

(4) (3) の 2 点を結んだ線分 PQ の長さの最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(5) (4) で求めた θ に対応する点 P，Q の x 座標を，それぞれ α，β とする．曲線 C と x 軸，および 2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

発展 5.77 a，b は $b\geqq a>0$ をみたす定数とする．x，y が $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x^3+y^3=1$ をみたしながら変化するとき，a^2x+b^2y のとり得る値の範囲を求めよ．
(分大 [医]2008) 8

発展 5.78 正の実数 p_i，q_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}q_i=1$ を満たすとき，次の問いに答えなさい． (分大 [医]2015) 8

(1) 不等式 $\log x\leqq x-1$ が成り立つことを証明しなさい．

(2) 不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i\geqq\sum_{i=1}^{n}p_i\log q_i$ が成り立つことを証明しなさい．

(3) $\displaystyle F=\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i$ の最小値を求めなさい．

(4) 正の実数 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$ に対して，$\displaystyle G=\sum_{i=1}^{n}a_i\log a_i$ の最小値を求めなさい．

5.6　問題研究

5.6.1　相加平均・相乗平均の拡張

75 ページの 5.78(分大 [医]2015) の証明で用いた関数 $f(x) = x - 1 - \log x$ を用いて，次の不等式を証明する．

$a_k > 0,\ p_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k \geqq \prod_{k=1}^{n} {a_k}^{p_k}$$

等号が成立するのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限る．

証明　$c = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k a_k$ とおく．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p_k f\left(\frac{a_k}{c}\right) &= \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\frac{a_k}{c} - 1 - \log\frac{a_k}{c}\right)\\ &= \log c - \sum_{k=1}^{n} p_k \log a_k\end{aligned}$$

$f(x) \geqq 0$ であるから

$$\log c \geqq \sum_{k=1}^{n} p_k \log a_k \qquad \text{よって} \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k a_k \geqq \prod_{k=1}^{n} {a_k}^{p_k} \quad \cdots (*)$$

上式において，等号が成立するのは，次の場合である．

$$\frac{a_1}{c} = \frac{a_2}{c} = \cdots = \frac{a_n}{c} = 1 \quad \text{すなわち} \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

証終

とくに，$(*)$ において $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，次の相加平均・相乗平均の関係を得る．

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

第 6 章　積分法

6.1　不定積分

□□ **6.1** 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = -\frac{\square}{x} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．　(宮崎大学 2017) 1

□□ **6.2** 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \square + C$ である．ただし，C は積分定数とする．　(宮崎大学 2018) 1

□□ **6.3** 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \square + C$ である．ただし，C は積分定数とする．　(宮崎大学 2019) 1

□□ **6.4** 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \square + C$ である．ただし，C は積分定数とする．　(宮崎大学 2020) 1

□□ **6.5** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．　(宮崎大学 2022) 1

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3-1}{(x-1)(x-2)}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \square + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(2) 関数 $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \square + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

基本 6.6 次の各問に答えよ．　(琉球大学 2006) 2

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ はすべての実数 x で $f'(x) = |x\cos x|$ を満たし，かつ $f(0) = 0$ となる．$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で $f(x)$ を求めよ．

6.2　定積分

□□ **6.7** 次の定積分の値を求めよ．　(宮崎大学 2004) 2

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

□□ **6.8** 次の定積分の値を求めよ．　(宮崎大学 2007) 1

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$

□□ **6.9** 次の定積分の値を求めよ．　(宮崎大学 2008) 2

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\cos 3x\,dx$

□□ **6.10** 次の定積分の値を求めよ．　(宮崎大学 2009) 4

(1) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$　ただし，$f(x)=\begin{cases}\sin x & (0\leqq x\leqq \pi \text{ のとき})\\ -x+\pi & (\pi\leqq x\leqq 2\pi \text{ のとき})\end{cases}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+1)\,dx$

□□ **6.11** 次の定積分の値を求めよ．　(宮崎大学 2010) 1

(1) $\displaystyle\int_{\log\pi}^{\log(2\pi)} e^x\sin(e^x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}(x+1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\cos(4x)\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}\,dx$

□□ **6.12** 次の定積分の値を求めよ. (宮崎大学 2011) 1

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\tan(x^2)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} xe^{3x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{1}{x\log x}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x(x+1)}\,dx$

□□ **6.13** 次の定積分の値を求めよ. (宮崎大学 2012) 1

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{4x}}{e^{2x}+2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x\log\sqrt{x}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2 x\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 5x\right)dx$

□□ **6.14** 次の定積分の値を求めよ. (宮崎大学 2013) 1

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2-x}{2x+1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx$ (4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |e^{\cos x}\sin x|\,dx$

□□ **6.15** 次の定積分の値を求めよ. (宮崎大学 2014) 1

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\sin(5x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+3x^2}{x^2+3x+2}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_1^2 x^5e^{x^3}\,dx$

□□ **6.16** 次の定積分の値を求めよ. (宮崎大学 2015) 1

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x\cos x|\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3+2x^2-3}{x^2-1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{\frac{3}{4-3x^2}}\right)dx$ (4) $\displaystyle\int_1^2 x^3\log x\,dx$

□□ **6.17** 次の定積分の値を求めよ. (宮崎大学 2016) 1

(1) $\displaystyle\int_0^2 |e^x-2|\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2(2x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2}\,dx$

□□ **6.18** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．　(宮崎大学 2017) 1

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$ の値は□である．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx$ の値は $\dfrac{\square}{12}$ である．

□□ **6.19** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．　(宮崎大学 2018) 1

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{e^x}\,dx$ の値は□である．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\sin x}\,dx$ の値は□である．

□□ **6.20** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．　(宮崎大学 2019) 1

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log(x+1)\,dx$ の値は□である．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(5x)\cos(2x)\,dx$ の値は□である．

□□ **6.21** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．　(宮崎大学 2020) 1

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$ の値は□である．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)\sin x\,dx$ の値は□である．

□□ **6.22** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．　(宮崎大学 2022) 1

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ の値は，□である．

□□ **6.23** 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin|2x|\,dx$ を求めよ．　(福岡教育大学 2012) 5

□□ **6.24** 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x-\frac{1}{2}\right| dx$ の値を求めよ．　(琉球大学 2003) 1

□□ **6.25** 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$ を求めよ．　(琉球大学 2014) 1

□□ **6.26** 定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$

について，I_1，I_2，I_3 を求めよ． (長崎大学 2016) 5

基本 6.27 関数 $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ および 2 次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ．(鹿児島大学 2016) 8

(2) $x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$ および $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $f(x)$ の定積分を利用して $\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$ を示せ．

基本 6.28 関数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ について，以下に答えよ． (九工大 [情]2004) 1

(1) 曲線 $y = f(x)$ の増減，極値および変曲点を調べ，そのグラフの概形を描け．

(2) $a > 0$ として，$S(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ とする．$S(2a) = 2S(a)$ となる a の値を求めよ．

基本 6.29 関数 $f(x) = |x|\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，最大値，最小値を求めよ． (琉球大学 2015) 2

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ を求めよ．

基本 6.30 定積分 $\displaystyle\int_a^{a+1} |e^x - 1|\,dx$ の値を $I(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$I(a)$ を a で表せ．　(琉球大学 2016) 2

(2) a が実数全体を動くとき，$I(a)$ を最小にするような a の値を求めよ．

基本 6.31 a，b を実数とし，$f(x) = (ax + b\cos x)\sin x$ とおく．関数 $f(x)$ が

$$f'(0) = 2, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 4$$

をみたすとき，a，b の値を求めなさい．　(大分大学 2014) 3

基本 6.32 α，β は $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．$\alpha \leqq t \leqq \beta$ となる t に対して，

$$S(t) = \int_\alpha^\beta |\sin x - \sin t|\,dx$$

とおく．$S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．　(琉球大学 2003) 3

基本 6.33 $a > 0$ とするとき，関数 $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x = c$ で $f(x)$ が極大値をとるとき，c を a で表せ．　(熊大 [理]2002) 4

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ を a で表せ．

基本 6.34 区間 $[1,\ e]$ において，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\log x - x$$

とするとき，次の各問いに答えよ．e は自然対数の底である．(鹿児島大学 2009) 10

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ を求めよ．

基本 6.35 a，b を定数として，関数 $f(x) = (ax + b)e^x$ を考える．$f(x)$ は $x = 2$ で極小値 $-\dfrac{1}{3}e^2$ をとるとき，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) a，b の値を求めよ．　(福岡教育大学 2008) 8

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$ を求めよ．

基本 6.36 次の問いに答えなさい. (大分大学 2011) 4

(1) 不定積分 $\displaystyle\int t^2 e^t\,dt$ を求めなさい.

(2) $x \geqq 0$ で定義された関数

$$F(x) = -x + \int_0^x (xt - t^2)e^t\,dt$$

の最小値とそのときの x の値を求めなさい.

標準 6.37 次の問いに答えよ. (長崎大学 2014) 7

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x = t$ とおく．$\cos 2x$ と $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2 - \cos 2x}\,dx$ を求めよ.

(3) 関数 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ.

(4) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ.

標準 6.38 $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ とおく．次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする. (福岡教育大学 2009) 4

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 7} f(x)\,dx$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする.

(2) 等式 $f'(x) = af(x) + b\{f(x)\}^2$ が成り立つように，定数 a，b の値を求めよ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 7} \{f(x)\}^2\,dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 7} \{f(x)\}^3\,dx$ を求めよ.

標準 6.39 次の問いに答えよ．　(熊大 [理]2004) 3

(1) 任意の自然数 n に対して，$x \geqq 0$ ならば，不等式

$$e^x > \frac{x^n}{n!}$$

が成り立つことを示せ．

(2) (1) の不等式を用いて，$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = 0$ であることを示せ．

(3) 曲線 $y = xe^{-x}$ の点 $(a,\ ae^{-a})$ における接線と法線が x 軸と交わる点を，それぞれ P と Q とおく．ただし $a > 1$ とする．線分 PQ の長さを $l(a)$ とするとき，極限値 $\lim_{a\to\infty} l(a)$ を求めよ．

標準 6.40 関数 $f(x) = x\,2^{-x}$ の区間 $t \leqq x \leqq t+1$ における最小値を $g(t)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2010) 3

(1) $g(t)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt$ の値を求めよ．

標準 6.41 関数 $f(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ について考える．$\alpha > 1$ のとき，次の問いに答えよ．　(長崎大学 2002) 4

(1) 方程式 $f(t) = \alpha$ を満たす正の解を T とする．T を α を用いて表せ．

(2) $x = f(t)$，$y = f'(t)$ とするとき，次の定積分 I の値を α を用いて表せ．

$$I = \int_1^\alpha y\,dx$$

標準 6.42 関数

$$f(t)=\int_1^t \frac{\log x}{x+t}\,dx \quad (t>0)$$

を考える．ただし，対数は自然対数とする． (佐賀大学 2011) 3

(1) この定積分を $x=ty$ によって置換することにより

$$f(t)=\log t\int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1}\,dy+\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1}\,dy$$

を示せ．

(2) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1}\,dy=-\frac{\log t}{t(t+1)}$ を示せ．

(3) 導関数 $f'(t)$ を求めよ．

(4) 関数 $f(t)$ の極値を求めよ．

標準 6.43 n を自然数とする．次の問いに答えよ． (熊大 [理]2006) 3

(1) $n\geqq 2$ のとき，関数 $f(x)=(1-x)^3x^n$ の極値を求めよ．

(2) 定積分 $a_n=\displaystyle\int_0^1 (1-x)^3x^n\,dx$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ．

標準 6.44 実数 p に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_{p-x}^{p}(t^6+2t^3-3)dt$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ． (熊大 [理]2009) 1

(1) $f'(x)$ は，$x=p+1$ のとき最小値をとることを示せ．

(2) $f(p+1)$ の $p>0$ における最小値を求めよ．

標準 6.45 半径 1，中心角 θ $(0<\theta<\pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく．以下の問いに答えよ． (熊大 [理]2013) 3

(1) $f(\theta)$ を求めよ．

(2) $0<\theta<\pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ．

(3) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$$

を求めよ．

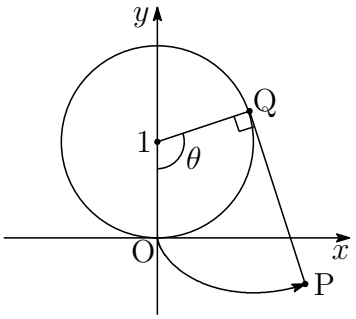
標準 6.46 図のように，固定された半径 1 の円 $x^2+(y-1)^2=1$ のまわりに糸がまきつけられており，この糸をぴんと張りながらほどくものとする．糸の端 P は最初原点 O の位置にあるものとし，ほどいた部分は図の線分 PQ とする．ただし，糸の太さおよび伸縮は無視できるものとする．さらに，角 θ は図のように与えられるものとし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．　(九工大 [情]2001) 1

(1) 点 Q の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(3) (2) で求めた点 P の y 座標を θ の関数とみて $y=f(\theta)$ とおく．$y=f(\theta)$ の増減を調べ，その最大値，最小値を求めよ．

(4) (3) の関数 $y=f(\theta)$ について，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$ を計算せよ．



標準 6.47 関数

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\int_1^{2x}(3t-4x)t\log t\,dt \quad (x>0)$$

について，次の各問に答えよ．　(宮大 [医]2008) 6

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について，$f'(x)=0$ を満たす x の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の極値を求めよ．

標準 6.48 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2013) 4

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\sin 3x\,dx$ を求めよ．

(3) m，n を自然数とする．$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2 dx$ を求めよ．

標準 6.49 次の問いに答えよ．　(熊大 [理]2009) 4

(1) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sqrt{3}\cos x-\sin x>0$ をみたす x の範囲を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left|\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\right| dx$ を求めよ．

応用 6.50 楕円 $E : (x-1)^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ について，次の問いに答えよ．ただし，b は正の定数とする． (熊大 [理]2004) 4

(1) E を表す極方程式を $r = f(\theta)$ とするとき，$f(\theta)$ を求めよ．

(2) 点 P が E 上を動くとする．原点 O と P との距離 OP が点 $(2,\ 0)$ 以外で最大となるための b の条件を求めよ．

(3) b は (2) で求めた条件を満たすとし，OP が最大となる点における θ の値を θ_0 とおく．ただし $0 < \theta_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．このとき (1) で求めた $f(\theta)$ について，定積分

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)\, d\theta$$

の値を b の式で表せ．

応用 6.51 次の条件によって定められる関数の列 $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ を考える．

$$f_0(x) = 1$$
$$f_n(x) = 1 - \int_0^x t\, f_{n-1}(t)\, dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [理]2011) 3

(1) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 1$ のとき，$f_n(x) - f_{n-1}(x)$ は x についての次数が $2n$ の単項式となることを示し，その単項式を求めよ．

(3) $n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{1}{2} \leqq f_n(1) \leqq \frac{5}{8}$$

が成り立つことを示せ．

応用 6.52 自然数 n に対して，

$$a_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\, dx, \quad b_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\, dx$$

とおくとき，次の問に答えよ． (佐賀大学 2020) 4

(1) a_1 および b_1 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_n を n，b_{n-1} を用いて表せ．また，b_n を n，a_{n-1} を用いて表せ．

(3) すべての自然数 n に対して，$0 \leqq a_n \leqq \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ を示せ．また，極限 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ および $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 b_n$ を求めよ．

応用 6.53 関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2010) 3

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(0)$ の値を求めよ．

(3) 条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

応用 6.54 正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t-ax\cos t\right|dt$$

とおく．以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2012) 3

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

応用 6.55 関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x\geqq-3)$ について，以下の問いに答えよ．　(熊大 [医]2018) 4

(1) $f(x)$ の極大値を求めよ．

(2) $-3\leqq x\leqq 0$ とするとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3}f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ．

応用 6.56 積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$0! = 1$ と定める．また，関数 $y = t^0$ は，関数 $y = 1$ を意味する． (長大 [医]2018) 8

(1) 部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ．同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ．

(2) $F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ．その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ．さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ．

(3) $n \geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ．さらに，$n \geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ．

(4) $p(x) = x^n$ とおくとき，k 次導関数

$$p^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

を求めよ．そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\, dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$p^{(0)}(x) = p(x)$ と定める．

6.3　定積分と最大・最小

基本 6.57 すべての実数 x について $f(x)=\displaystyle\int_0^1 e^{|t-x|}\,dt$ とおくとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2005) 4

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を求めよ．

標準 6.58 実数 a，b は $a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$a^2+b^2=1$ を満たしているとする．このとき，次の問に答えよ．　(佐大 [医]2016) 6

(1) 定積分

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\,a\sin x-b\cos x\,|\,dx$$

を a，b を用いて表せ．

(2) S の最大値，最小値とそのときの a，b の値をそれぞれ求めよ．

標準 6.59 次の問いに答えよ．　(琉球大学 2011) 4

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x\,dx$ を求めよ．

(2) m，n が自然数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx$ を求めよ．

(3) a，b を実数とする．a，b の値を変化させたときの定積分

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} (x-a\sin x-b\sin 2x)^2\,dx$$

の最小値，およびそのときの a，b の値を求めよ．

6.4　漸化式による積分法

標準 6.60 n が 0 以上の整数のとき，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx$ について，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2002) 4

(1) I_0 と I_1 を求めよ．

(2) n が 1 以上のとき，I_n を I_{n-1} を用いて表せ．

(3) I_n を求めよ．

標準 6.61 (佐賀大学 2008) 4

(1) 自然数 n と実数 α について，n が偶数のとき，

$$\int_0^{\pi} \sin^n(\alpha+x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\alpha+x)\,dx$$

となることを示せ．

(2) $a \neq 0$，$b \neq 0$ を満たす実数 a，b に対して，

$$\int_0^{\pi} (a\sin x + b\cos x)^6\,dx$$

を求めよ．

標準 6.62 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\theta\,d\theta$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) I_1 および $I_n + I_{n+2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ． (琉球大学 2012) 4

(2) 不等式 $I_n \geqq I_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ．

標準 6.63 次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．
(鹿児島大学 2012) 4

(1) n を自然数とする．x の関数 $f(x) = x^n e^{1-x}$ について，$0 < x < 1$ ならば $0 < f(x) < 1$ であることを示せ．

(2) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$ とおくとき，I_1 を求めよ．さらに，I_{n+1} と I_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) (2) の I_n に対して $a_n = \dfrac{I_n}{n!}$ とおくとき，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = a_1 - a_n$ であることを示せ．

(4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = e-1$ であることを示せ．

標準 6.64 $r > 0$ とするとき，関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$f_1(x) = e^{-rx},$$
$$f_{n+1}(x) = nre^{-(n+1)rx} \int_0^x f_n(t)e^{(n+1)rt}\, dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2016) 9

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f_n(x)$ を推測し，その推測が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $n \geqq 3$，$x > 0$ のとき，関数 $f_n(x)$ の極値を求めよ．

標準 6.65 定積分 $I_n = \displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^n\, dx$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2010) 5

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) 等式

$$I_{n+1} = \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)I_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(3) すべての自然数 n について，等式

$$I_n = (-1)^{n-1}n! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{n!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．ただし，$0! = 1$ とする．

応用 6.66 n を自然数とし，関数 $f_m(x)$ $(m=0,1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$f_m(x)=\begin{cases}1 & (m=0)\\ x^m & (m\geqq 1)\end{cases}$$

さらに，a_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$a_k=\int_{-1}^{1} f_k(1-x)f_{n-k}(1+x)\,dx$$

以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2015) 3

(1) a_0 と a_1 をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $k\geqq 1$ のとき，a_k を n，k，a_{k-1} を用いて表せ．

(3) a_k を n，k を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}$ を n を用いて表せ．

応用 6.67 $n=1,2,\cdots$ に対して

$$I_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx$$

とおく．ただし，$0!=1$ とする． (九大 [理]2004) 1

(1) I_0 の値を求め，$n=1,2,\cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ．また，これらを用いて I_3 の値を求めよ．

(2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ．

6.5　積分方程式 (定数型)

基本 6.68 関数 $f(x)$，$g(x)$ は，次の式を満たすものとする．　(佐賀大学 2002) 2

$$f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x+2}},\quad g(x)=3x^2+\int_{-1}^{1}(x+t)g(t)\,dt$$

(1) $f(x)$ を微分せよ．

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle b=\int_{-1}^{1}g(t)\,dt,\quad c=\int_{-1}^{1}tg(t)\,dt$ とおいて，$g(x)$ を b，c で表せ．さらに，b，c を求めよ．

基本 6.69 a を正の定数とする．関数 $f(x)$ は

$$f(x)=2\cos x-a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin x\,dt$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2014) 4

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(x)\sin x\,dx=-\frac{\pi}{2}$ を満たす定数 a の値を求めよ．

(3) a が (2) で求めた値のとき，次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) $0\leqq x\leqq\pi$ における関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(イ) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}|f(x)|\,dx$ の値を求めよ．

基本 6.70 関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=3x^2+2\displaystyle\int_{0}^{2}xf(t)\,dt+\int_{0}^{2}f(t)\,dt$ を満たす．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2009) 8

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $x\log x-x$ と $\dfrac{x^2}{2}\log x-\dfrac{x^2}{4}$ の導関数をそれぞれ求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{1}^{2}\{3x^2-f(x)\}\log x\,dx$ を求めよ．

標準 6.71 関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \cos x + \int_0^{2\pi} f(y)\sin(x-y)\,dy$$

をみたすものとする．次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2011) 9

(1) $f(x)$ は

$$f(x) = a\sin x + b\cos x$$

の形に表されることを示せ．ただし，a と b は定数である．

(2) $f(x)$ を求めよ．

6.6 積分方程式 (変数型)

基本 6.72 a は正の定数とする．関数 $f(x)$ は $x \geqq a$ で

$$\int_a^x f(t)\,dt = x\log 2x - x$$

を満たす．ただし，対数は自然対数とする． (大分大学 2007) 4

(1) $f(x)$ を求めなさい．

(2) a の値を求めなさい．

基本 6.73 次の問いに答えよ． (琉球大学 2015) 1

(1) $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^t\,dt$ とするとき，$F(1)$ および $F'(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が，

$$\begin{cases} f(x) + \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt = 2\sin x - 3 \\ f'(x)g(x) = \cos^2 x \end{cases}$$

を満たすとき，$f(x)$，$g(x)$ を求めよ．

標準 6.74 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の関係式

$$f(x)=\int_0^x (g(t)+t\cos t)\,dt+\sin x,\quad g(x)=\sin x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f'(t)-\cos t)\,dt$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．　(熊大 [理]2003) 4

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} (f(x)-g(x))^2\,dx$ を求めよ．

標準 6.75 次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2001) 4

(1) $g(x)$ と $h(x)$ を連続な関数とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_0^x h(t)g(x-t)\,dt=\int_0^x h(x-t)g(t)\,dt$$

(2) $g(x)$ を微分可能な関数とし，$f(x)=\dfrac{x}{2}+\displaystyle\int_0^x tg(x-t)\,dt$ とおくとき，次の (ア)，(イ)，(ウ) に答えよ．

(ア) $f''(x)=\cos x$ のとき，$g(x)$ と $f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(イ) (ア) で求めた $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における最大値を M とする．このとき，M の値と $f(\alpha)=M$ を満たす α の値を求めよ．ただし，$0\leqq\alpha\leqq 2\pi$ とする．

(ウ) (ア) で求めた $f(x)$ と (イ) で求めた α の値に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\alpha}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 dx$ を求めよ．

6.7　等式・不等式への応用

基本 6.76 次の問に答えよ．　(琉球大学 2004) 3

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}<\frac{3}{2}+\int_2^{100}\frac{dx}{x}$ を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}$ の小数点以下を四捨五入して得られる整数を求めよ．ただし，必要ならば $\log 2$，$\log 5$ の近似値として，それぞれ 0.693 ，1.609 を用いよ．

標準 6.77 自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$ とおく．次の問に答えよ． (琉球大学 2003) 4

(1) I_1 を求めよ．さらに，すべての自然数 n に対して，$I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) これらの結果を使って，$\log 2 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ が成り立つことを示せ．

標準 6.78 次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2007) 2

(1) 微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ の導関数を定義に従って求めよ．

(2) a を実数とするとき，関数 $y = (1+x^2)^a$ の導関数を求めよ．

(3) 関数 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ．

(4) n が正の整数であるとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sqrt{1+n^2} - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$$

標準 6.79 (九工大 [工]2004) 5

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x$ が成り立つことを示せ．

(2) $x > 0$ のとき，不等式 $\cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ が成り立つことを示せ．

(3) 3 辺の長さが 3，4，5 である三角形の内角のうち最小のものを θ ラジアンとする．次が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{5} < \theta^2 < \frac{30 - 2\sqrt{195}}{5}$$

標準 6.80 e を自然対数の底とする．このとき，次の各問いに答えよ．
(鹿児島大学 2008) 3

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^x (x-t)e^t\,dt$ を計算することにより，次の等式を証明せよ．

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t\,dt$$

(2) すべての自然数 n について，等式

$$e^x = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}x^p + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(3) $x > 0$ のとき，すべての自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$e^x > 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}x^p$$

標準 6.81 0 以上の整数 n に対して，$f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ とおく．ただし，$0! = 1$ とし，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．
(佐賀大学 2012) 2

(1) $n \geqq 1$ のとき，$f_n(x)$ の導関数を $f_n(x)$，$f_{n-1}(x)$ を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ の導関数を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．

(4) $\displaystyle e > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ を示せ．

標準 6.82 次の問いに答えよ．
(琉球大学 2016) 3

(1) 自然数 n に対して $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx$ を求めよ．

(2) $x > 0$ のとき，不等式 $\displaystyle x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x + \log(1+x)}\,dx$ を求めよ．

標準 6.83 関数 $f(x)=\log x$ がある．曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とするとき，次に答えよ．ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする． (九工大 [工]2013) 3

(1) $x>0$ のとき，不等式 $f(x)-g(x)\leqq 0$ を証明せよ．

(2) $t>\dfrac{1}{2}$ のとき，$\displaystyle\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} g(x)\,dx$ をそれぞれ t を用いて表せ．

(3) 自然数 n に対して，$n!$ と $\sqrt{2}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ の大小を比較せよ．

標準 6.84 n を自然数とする．$f(x)$ と S_n を次のように定める．

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$$

次に答えよ． (九州工業大学 2019) 2

(1) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ を計算せよ．

(3) 数列 $\{S_n\}$ は発散することを示せ．ただし，自然数 k に対して，$k\leqq x$ のとき，$\sqrt{k^2+1}\leqq\sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを用いてよい．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)$ を求めよ．ただし，自然数 k に対して，$k-1\leqq x\leqq k$ のとき，$\sqrt{x^2+1}\leqq\sqrt{k^2+1}\leqq\sqrt{(x+1)^2+1}$ が成り立つことを用いてよい．

応用 6.85 以下の問いに答えよ． (九大 [理]2015) 2

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ を求めよ．

(3) n を 3 以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$$

が成り立つことを示せ．

応用 6.86 a，b は定数であり，$0 < a < b$ とする．定積分　　(佐大 [医]2015) 5

$$I = \int_0^1 a^{1-t} b^t \, dt$$

について，次の問に答えよ．

(1) I を求めよ．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，

$$a^{1-t} b^t + a^t b^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab}$$

であることを示せ．また，$I > \sqrt{ab}$ を示せ．

(3) $0 < t < 1$ とする．$x > 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$x^t < 1 + t(x-1)$$

(4) (3) の不等式を利用して，$I < \dfrac{a+b}{2}$ を示せ．

応用 6.87 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式を証明せよ．　　(宮大 [医]2006) 6

$$\log(\cos x) + \frac{x^2}{2} < 0$$

(2) 次の不等式を証明せよ．

$$-\frac{\pi}{3}\log 2 + \frac{\pi^3}{81} < \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log(\cos x) \, dx < -\frac{\pi^3}{162}$$

応用 6.88 整数 m，n は $m \geqq 1$，$n \geqq 2$ をみたすとする．次の問いに答えよ．
(琉球大学 2014) 3

(1) $x > 0$ のとき，$y = \log x$ の第 1 次導関数 y' と第 2 次導関数 y'' を求めよ．答えを記すのみでよい．

(2) 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(m,\ \log m)$，$\mathrm{B}(m+1,\ \log(m+1))$ を頂点とする三角形の面積を S_m とする．S_m を m を用いて表せ．答えを記すのみでよい．

(3) $f(m) = \log m + S_m - \displaystyle\int_m^{m+1} \log x\, dx$ とおく．$f(m) < 0$ が成り立つことを，$y = \log x$ のグラフを用いて説明せよ．

(4) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$ であることを用いて，不等式

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n \log n - n + 1 - \frac{1}{2} \log n$$

を証明せよ．

(5) 不等式 $n! < e\sqrt{n} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ を証明せよ．ただし，e は自然数の底である．

応用 6.89 n を 2 以上の自然数とする．次の問に答えよ．
(琉球大学 2009) 3

(1) 定積分 $\displaystyle\int_1^n x \log x\, dx$ を求めよ．

(2) 次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2-1) < \sum_{k=1}^{n} k \log k < \frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2-1) + n \log n$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{ (1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n)^{\frac{1}{n^2 \log n}} \right\}$ を求めよ．

応用 6.90 曲線 $y=\log x$ の接線は常にこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ．以下，k は自然数とする．　(長大 [医]2011) 8

(1) 点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=\log x$ との交点を A_k' とし，A_k' におけるこの曲線の接線を l_k とする．また，$k \geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点をそれぞれ B_k'，C_k' とする．四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k'\mathrm{B}_k'$ の面積を求めよ．

(2) 次の 2 つの値の大小を比較せよ．

(ア) $\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\,dx$

(イ) $\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \log x\,dx$　(ただし，$k \geqq 1$)

(3) $a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x < a_n < \int_{1}^{n} \log x\,dx$$

(4) 2 以上の自然数 n について

$$\begin{cases} U_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\log n-n+\dfrac{3}{2}\left(1-\log\dfrac{3}{2}\right) \\ V_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\log n-n+1 \end{cases}$$

とおくとき，次の不等式を示せ．

$$U_n < \log(n!) < V_n$$

発展 6.91 次の問いに答えよ. (九大 [理]2002) 3

(1) すべての正の実数 x, y に対して, 不等式

$$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$$

が成り立つことを示せ. ここで log は自然対数を表す.

(2) a, b は実数で $a < b$ とする. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ をみたす. このとき, 不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) a, b は実数で $a < b$ とする. 閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $\displaystyle M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ とする. 不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ.

6.8 極限値

基本 6.92 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = \frac{e}{e-1}, \quad a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\int_0^k a_k e^x\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ. ただし, e は自然対数の底とする. (福岡教育大学 2008) 4

(1) a_2, a_3 の値を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{n^2}$ を求めよ. ただし, 対数は自然対数とする.

基本 6.93 相異なる正数 a，b に対して

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{(t+a)^2}\,dt,\quad g(x)=\int_0^x \frac{1}{(t+a)(t+b)}\,dt$$

とおくとき，以下の問に答えよ．　(佐賀大学 2005) 4

(1) $x\to+\infty$ のときの $f(x)$ の極限値 A および $g(x)$ の極限値 B を求めよ．

(2) $b\to a$ のときの B の極限値を求めよ．

標準 6.94 放物線 $y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 1-t^2)$ における接線を L とする．ただし，$0<t<1$ とする．接線 L と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A，B とする．次の問いに答えよ．　(琉球大学 2001) 2

(1) 接線 L の方程式と，点 A の x 座標を求めよ．

(2) 放物線 $y=1-x^2$ と線分 PB および y 軸で囲まれる部分の面積を $S(t)$，放物線 $y=1-x^2$ と線分 PA および点 A を通る y 軸に平行な直線で囲まれる部分の面積を $T(t)$ とする．$\lim_{t\to0}\{S(t)\cdot T(t)\}$ を求めよ．

(3) $0<t<1$ の範囲で面積の和 $S(t)+T(t)$ が最小になる t の値を a とする．このとき $S(a)>T(a)$ を示せ．

標準 6.95 平面上に，4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$ を頂点とする正方形と，2 つの放物線 $C_1:y=px^2$ および $C_2:y=-q(x-1)^2+1$ がある．ただし，p，q は定数で，$p>1$，$q>1$ とする．C_1 と C_2 が正方形の内部で接しているとき，次の問いに答えよ．　(長崎大学 2002) 3

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ の値を求めよ．

(2) 放物線 C_1 の上側にある正方形の部分の面積を S_1，放物線 C_2 の下側にある正方形の部分の面積を S_2 とするとき，$S=S_1+S_2$ を p を用いて表せ．

(3) 極限値 $\lim_{p\to\infty} S$ を求めよ．

(4) S が最大となる p の値と最大値を求めよ．

標準 6.96 $x \geqq 0$ で定義された関数

$$f_n(x) = x^2 - \frac{n}{n+1}x^{2+\frac{2}{n}} \quad (n \text{ は自然数})$$

について，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2001) 4

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ の正の解を求めよ．

(2) (1) で求めた正の解を x_n とするとき，$S_n = \displaystyle\int_0^{x_n} f_n(x)\,dx$ を n を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_nS_n$ を求めよ．
ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (自然対数の底) である．

標準 6.97 関数 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ について，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2007) 5

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めよ．また，関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) n を自然数とするとき，直線 $y = 2^{-n}$ と曲線 $y = f(x)$ によって囲まれる部分の面積を S_n とする．このとき，S_n を n を用いて表せ．

(3) (2) の S_n について，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n)$ を求めよ．

標準 6.98 関数 $f(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ． (熊大 [理]2003) 3

(2) 関数 $g(x)$ を各区間 $k \leqq x \leqq k+1$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ において，

$$g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)$$

と定義する．

$$a_n = \int_0^n g(x)\,dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

とするとき，数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

標準 6.99 自然数 n に対して，

$$a_n = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\,x\,|\cos nx\,dx, \quad b_n = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\cos nx\,dx$$

とおく．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2005) 4

(1) a_n と b_n の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n+1}}{b_{2n}}$ は発散することを示せ．

標準 6.100 関数 $f_0(x),\ f_1(x),\ \cdots$ を

$$f_0(x) = \sin x, \quad f_n(x) = \sin x + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_{n-1}(x)\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とする．$g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)\ \ (n = 1, 2, 3\cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $g_1(x)$ を求めよ．　(福岡教育大学 2003) 4

(2) $c = g_1(x)$ とおくとき，$g_n(x)$ を n と c を用いて表せ．

(3) $a_n = f_n(x) - \sin x$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

標準 6.101 次の問いに答えよ．　(琉球大学 2002) 4

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{2}{\pi}x < \sin x$ が成り立つ事を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2\sin x}dx$ を求めよ．

標準 6.102 n を自然数として，曲線 $y = e^{-x}$ 上の点 $\mathrm{P}_n(n,\ e^{-n})$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_n とする．また，x 軸上に点 $\mathrm{Q}_n(n,\ 0)$ と点 $\mathrm{R}_n(a_n,\ 0)$ をとる．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2006) 3

(1) a_n を n を用いて表せ．

(2) $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$ の面積を n を用いて表せ．

(3) 曲線 $y = e^{-x}$，直線 $x = 1$，$x = a_n$ および x 軸で囲まれる部分から，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$，$\triangle \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2$，$\cdots$，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$ を取り除いた部分の面積を S_n とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

標準 6.103 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x-1}}+\dfrac{1}{1+e^{-x-1}}-1$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ が最大となる x の値を求めよ． (宮崎大学 2009) 5

(2) 正の数 a に対し，定積分 $I(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ を a を用いて表せ．

(3) (2) の $I(a)$ について，極限値 $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

標準 6.104 n を 2 以上の自然数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=x^n\log x\ (x>0)$ とする．ただし，対数は自然対数とする．次に答えよ． (九工大 [工]2015) 3

(1) $x>0$ のとき，不等式 $\log x+\dfrac{1}{x}>0$ を証明せよ．

(2) $\lim\limits_{x\to+0} x^n\log x=0$ を示せ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最小値を求めよ．また，曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ．ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい．

(4) $f(x)$ が最小値をとるときの x の値を c_n とし

$$I_n=\int_{c_n}^{1} f(x)\,dx$$

とする．$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 I_n$ を求めよ．

標準 6.105 次の各問に答えよ． (鹿児島大学 2001) 2

(1) 関数 $f(x)=x-e^{x-1}$ について，方程式 $f(x)=0$ は正の解をただ 1 つもつことを示し，その解を求めよ．

(2) $x>0$ で曲線 $y=2x^2\log x$ と曲線 $y=kx^2-k\ (k>0)$ が共有点において，共通の接線をもつように定数 k の値を定めよ．

(3) (2) の k の値とそのときの共有点の x 座標 α に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\alpha}(2x^2\log x-kx^2+k)\,dx$$

を求めよ．ただし，必要があれば $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n}=0$ を用いてよい．

標準 6.106 関数 $f(x)=e^{-x}\left|x-[x]-\dfrac{1}{2}\right|$ に対して，

$$a_n=\int_0^n f(x)\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

とおく．ただし記号 $[x]$ は x を越えない整数を表すものとする．このとき次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2003) 2

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を $0\leqq x\leqq 1$ の範囲でかけ．グラフの凹凸も調べよ．

(2) a_1 を求めよ．

(3) a_n を n と a_1 を用いて表せ．さらに $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

応用 6.107 次の問いに答えよ．　(九大 [理]2001) 8

(1) e を自然対数の底とし，$f(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$ とおく．
$0<x<1$ においては $0<f(x)<x^3$ が成り立つことを示せ．
また，$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$ を示せ．必要であれば $e<3$ を使ってよい．

(2) 関数 $g(x)=e^x$ を考える．区間 $0\leqq x\leqq 1$ を n 個の小区間に等分して，各小区間を底辺，小区間の左端の点における関数 $g(x)$ の値を高さとする長方形の面積の和を K_n とする．$n\to\infty$ のとき

$$n^k\left|\int_0^1 g(x)\,dx-K_n\right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数 k とそのときの極限値を求めよ．

応用 6.108 a を正の実数とし

$$f(x)=ax-\log(x+\sqrt{x^2-1}) \quad (x>1)$$

とおく．ただし，対数は自然対数である．各 a に対して，$f(x)$ が最小となるときの x の値を $h(a)$ とする．　(九工大 [工]2001) 4

(1) $h(a)$ を求めよ．

(2) a の関数 $h(a)$ に対して，$F(a)=ah(a)-\log(h(a)+\log\sqrt{(h(a))^2-1}\,)$ とおく．$F(a)$ が $h(a)$ の原始関数であることを示せ．

(3) $I_n=\displaystyle\int_n^{n+1} h(a)\,da$ $(n=1,2,\cdots)$ とおく．I_n を求めよ．さらに，$\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

応用 6.109 $f(x)$ は数直線上の連続関数で，次の条件 (i) と (ii) をみたすものとする．

(i) $f(x)$ は周期 1 の周期関数，すなわち，すべての x で $f(x+1)=f(x)$ が成り立つ．

(ii) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=0$

次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2011) 4

(1) 条件 (i) と (ii) をみたす恒等的に 0 でない連続関数 $f(x)$ の例を 1 つ挙げよ．

(2) $\displaystyle F(x)=\int_0^x f(y)\,dy$ とおくと，$F(x)$ も周期 1 の周期関数であることを示せ．

(3) $n=1,2,3,\cdots$ に対して，$\dfrac{d}{dx}F(nx)$ を f を用いて表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_0^1 xf(nx)\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と定める．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$ を示せ．

応用 6.110 以下の問いに答えよ． (熊大 [医]2010) 4

(1) p を 0 でない定数とする．関数 $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるように，定数 a，b を定めよ．

(2) $\displaystyle S(t)=\int_0^{t^2} e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx$ $(t\neq 0)$ とおく．このとき，$S(t)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ．

応用 6.111 r を正の実数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [医]2015) 4

(1) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ．

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ．

(4) (3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく．$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ．

応用 6.112 次の問いに答えよ． (熊大 [医]2015) 4

(1) n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ を求めよ．

(2) c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c}|\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ を求めよ．

応用 6.113 次の各問いに答えよ．　(宮大 [医]2007) 6

(1) $x \geqq 1$ のとき，不等式 $\log x < 2\sqrt{x}$ が成り立つことを示せ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(2) n を自然数とするとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

(3) n を自然数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n\right\}^{\frac{1}{n}} = 3$$

であることを示せ．

応用 6.114 n を自然数とするとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ を求めよ．　(宮大 [医]2009) 7

応用 6.115 $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^n}\,dx$ $(n=1,2,\cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) I_1，I_2 の値を求めよ．　(分大 [医]2009) 6

(2) $\lim_{n\to\infty} I_n$ の値を求めよ．

応用 6.116 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\cos k\pi,\quad b_n = \sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}\cos\frac{2k\pi}{3}$$

によって定義する．　(分大 [医]2007) 9

(1) $a_n = -\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ を示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

応用 6.117 連続関数 $f(x)$ に対して

$$v(x) = \int_0^x e^t f(x-t)\,dt$$

とする．このとき，次の問に答えよ． (佐大 [医]2014) 7

(1) $f(x) = x$ のとき，$v(x)$ を求めよ．

(2) $v(x) + f(x) = \sin^4 x$ のとき，$v(x)$ を求めよ．

(3) $v(x) + f(x) = \sin^4 x$ のとき，$\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ を求めよ．

発展 6.118 次の一連の問いに答えなさい． (分大 [医]2014) 9

(1) 自然数 m に対して，$x > 0$ のとき $e^x > \dfrac{x^m}{m!}$ であることを示しなさい．

(2) 自然数 n に対して，$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ を示しなさい．

(3) 自然数 n に対して $\Gamma_K(n) = \displaystyle\int_0^K x^{n-1}e^{-x}\,dx$ とするとき，$\lim_{K\to\infty} \Gamma_K(n)$ を求めなさい．

6.9 区分求積法

□□ **6.119** 極限値 $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}$ の値を求めよ． (琉球大学 2003) 1

□□ **6.120** 次の極限値を求めよ． (長崎大学 2015) 5

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

□□ **6.121** $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2} \right)$ を，ある関数 $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における定積分を用いて表し，この極限値を求めよ． (長崎大学 2011) 5

標準 6.122 $\log x$ の定積分を用いて，次の極限値を求めよ．(福岡教育大学 2002) 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}$$

標準 6.123 n を自然数とする．次の各問に答えよ．　(琉球大学 2006) 1

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$ を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$ を求めよ．

標準 6.124 関数 $f(x)$ の区間 $[a,\ b]$ $(a<b)$ における定積分の近似値として，$[a,\ b]$ を n 等分してえられる，次の A_n，B_n，T_n を考える．

$$A_n=\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)h,\quad B_n=\sum_{j=1}^{n}f(x_j)h,\quad T_n=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}h$$

ただし，$h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_j=a+jh$ $(j=0,1,2,\cdots,n)$ である．
このとき，次の文中にある空欄□に適する数または式を求め，その結果だけを答えよ．　(鹿児島大学 2002) 11

(1) T_n を A_n，B_n を用いて表すと $T_n=$ □ である．

(2) 関数 $f(x)=x^2$ の $[0,\ 1]$ における定積分の近似値 A_n，B_n，T_n を n を用いて表すと $A_n=$ □，$B_n=$ □，$T_n=$ □ である．また，近似値 T_n による相対誤差が 0.01 以下になるような分割の数 n の最小値は □ である．ただし，真の値 S の近似値 s による相対誤差は $\left|\dfrac{s-S}{S}\right|$ である．

標準 6.125 $I=\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$ とおく．区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して台形公式を適用したときの I の近似値を I_n と表す．このとき次の各問いに答えよ． (鹿児島大学 2004) 12

(1) 分点の x 座標を小さい方から $x_0=0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$ としたとき，I_n を n と x_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ を用いて表せ．

(2) $y=x^3$ のグラフの概形を $0\leqq x\leqq 1$ の範囲でかき，I_2 はどのような領域の面積を表しているか図示せよ．

(3) I_n-I を n の式で表せ．必要ならば，公式

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3=\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$$

を用いてもよい．

標準 6.126 次の問いに答えよ． (長崎大学 2012) 6

(1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}$ とする．$x=\tan\theta$ とおくことにより，$I_1=\dfrac{\pi}{3}$ を示せ．

(2) (1) の I_1 を部分積分して，I_1 と $I_2=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ の関係式を導き，I_2 の値を求めよ．

(3) $t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ．

(4) 合成関数の微分法を用いて，関数 $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ．

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$ を求めよ．

標準 6.127 n を 2 以上の自然数とする．区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して，その両端と分点を順に $0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$ とする．関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0,\ b\geqq 0,\ c>0)$ に対して，区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ を底辺とし，高さが $f(x_k)$ である長方形の面積を L_k とする．ただし，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ である．すべての n に対して $L_1+L_n=\dfrac{10}{n}+\dfrac{8}{n^3}$ であるとき，以下の問いに答えよ． (熊大 [理]2018) 3

(1) a，b，c を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kL_k$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2L_k$ を求めよ．

6.10　問題研究

6.10.1　テイラー展開

$f(t)$ を必要な回数だけ微分可能 (C^∞級) な関数とし，$k \geqq 1$ とする．

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt &= -\int_a^x \left\{\frac{(x-t)^k}{k!}\right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\ \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\ \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

上式を $k = 1, 2, 3, \ldots n-1$ について辺々を加えると

$$\int_a^x f'(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \tag{6.1}$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ が最大値，最小値をもつとき，それらをそれぞれ M，m とすると，$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$ は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M\,dt = \frac{M}{n!}(x-a)^n, \quad \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} m\,dt = \frac{m}{n!}(x-a)^n$$

の間の値をとるので，この区間内のある c は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{6.2}$$

を満たす．(6.2) を (6.1) に代入すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{6.3}$$

(6.3) を $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という．
とくに $a = 0$ とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n \tag{6.4}$$

となり，これをマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という．

6.10.2 多項式のテイラー展開

n 次多項式 $f(x)$ の最高次の係数を a とすると $f^{(n)}(x) = a{\cdot}n!$
したがって，$x = p$ を極とする $f(x)$ のテイラー展開は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-p)^k}{k!} f^{(k)}(p) + a(x-p)^n$$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のとき

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$p = -\dfrac{b}{3a}$ とすると，$f''(p) = 0$ であるから

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + a(x-p)^3$$

このとき
$$f(p+k) = f(p) + f'(p)k + ak^3$$
$$f(p-k) = f(p) - f'(p)k - ak^3$$

任意の実数 k について 2 点 $(p+k,\ f(p+k))$，$(p-k,\ f(p-k))$ の中点が変曲点 $(p,\ f(p))$ である．したがって，65 ページの 5.44 にあるように，3 次関数のグラフは，変曲点に関して対称である．

とくに，$f'(x) = 0$，すなわち，$3ax^2 + 2b + c = 0$ が異なる 2 つの実数解 α，β をもつとき $(\alpha < \beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{3a} = 2p, \quad \alpha\beta = \frac{c}{3a}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3a(x-\alpha)(x-\beta), \quad f''(x) = 3a\{2x - (\alpha+\beta)\}$$

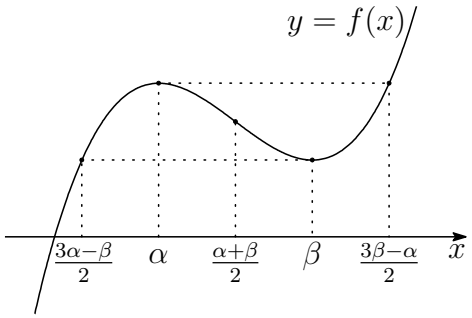
$f(x)$ を $x = \alpha$ を極として，テイラー展開を行うと

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{1}{2!} f''(\alpha)(x-\alpha)^2 + a(x-\alpha)^3$$

したがって
$$f(x) - f(\alpha) = \frac{3a}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2 + a(x-\alpha)^3$$
$$= a(x-\alpha)^2 \left(x - \frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$$

同様にして
$$f(x) - f(\beta) = a(x-\beta)^2 \left(x - \frac{3\alpha-\beta}{2}\right)$$

$a > 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフは次のようになる．



このとき，数列 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2},\ \alpha,\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}(=p),\ \beta,\ \dfrac{3\beta-\alpha}{2}$ は，等差数列をなす．

補足　この結果は，定義域が与えられた 3 次関数の最大値・最小値を求める問題や 3 次方程式の解の存在する範囲をグラフをもとに考えるときなど，様々な問題で活用できる．

6.10.3　オイラーの公式

(6.3) から得られる級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

をテイラー級数 (Taylor series) という．同様に，(6.4) から得られる級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad \cdots (*)$$

をマクローリン級数 (Maclaurin's series) という．

- $f(x) = e^x$ のとき，$f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(0) = 1$
- $f(x) = \cos x$ のとき，$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0) = \cos\dfrac{n\pi}{2}$
- $f(x) = \sin x$ のとき，$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0) = \sin\dfrac{n\pi}{2}$

これらの結果を $(*)$ に代入すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

上の第 1 式から $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

したがって
$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ をオイラーの公式 (Euler's Formula) という.

6.10.4 ギブスの不等式

2 つの確率分布 $P = \{p_1, p_2 \ldots, p_n\}$, $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ に対して，次のギブスの不等式 (Gibbs' inequality) が成立する (情報理論における離散確率分布に関する分野で用いられる).

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \leqq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 q_i$$

上式より，離散型の不等式

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$$

を得る．これを証明させる問題が 75 ページの 5.78(分大 [医]2015) である．これに対し，連続型の不等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x)\, dx \geqq \int_a^b f(x) \log g(x)\, dx$$

を証明させる問題が 103 ページの 6.91(九大 [理]2002) である.

第 7 章　積分法の応用

7.1　面積

7.1.1　有理・無理関数と面積

基本 7.1　$$f(x)=\begin{cases} x(5-x) & (x \geqq 0) \\ x(x^2-1) & (x<0) \end{cases}$$

とおき，関数 $y=f(x)$ のグラフを C とおく．直線 $y=ax$ と C は，原点 O およびそれ以外の 2 点 P，Q で交わっているものとする．ただし，点 P の x 座標は正，点 Q の x 座標は負であるとする．線分 OP と C によって囲まれる図形の面積を $S_1(a)$，線分 OQ と C によって囲まれる図形の面積を $S_2(a)$ とし，$S(a)=S_1(a)+S_2(a)$ とおく．このとき，次の問に答えよ．　(佐賀大学 2015) 1

(1) a の値の範囲を求めよ．

(2) $S_1(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $S_2(a)$ を a を用いて表せ．

(4) (1) で求めた範囲を a が変化するとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

基本 7.2　a，b，c，d を実数とし，x の 4 次関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^4+2ax^3+6bx^2+4cx+d$$

とする．また，曲線 $y=f(x)$ を C とする．さらに，$\alpha=1+\sqrt{\dfrac{5}{6}}$，$\beta=1-\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ とおくとき，$f(x)$ と C は次の 3 つの条件 (い)，(ろ)，(は) を満たすものとする．

(い)　点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ は共に C の変曲点である．

(ろ)　$f(x)$ は $x=1$ で極値をもつ．

(は)　$f(2)=0$

次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2011) 5

(1) a，b，c，d の値を求めよ．

(2) C を x 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線を $y=g(x)$ とおく．$g(x)$ を求めよ．

(3) x 軸と C とで囲まれた図形の面積 S を求めよ．

基本 7.3 曲線 $y=\sqrt{x}$ について，次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2004) 4

(1) この曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a}\,)$ $(a>0)$ における接線と x 軸およびこの曲線で囲まれた図形の面積 $S_1(a)$ を求めよ．

(2) この曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a}\,)$ $(a>0)$ における法線と x 軸およびこの曲線で囲まれた図形の面積 $S_2(a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\frac{S_1(a)}{S_2(a)}$ を求めよ．

基本 7.4 n は自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$\begin{cases} x_1=3 \\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{4}{x_n}\right) & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

によって定まるものとする．このとき，次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2008) 3

(1) すべての n について $x_n \geqq 2$ であることを証明せよ．

(2) すべての n について $x_{n+1}-2 \leqq \dfrac{1}{2}(x_n-2)$ であることを証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

(4) $f(x)=x$，$g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$ とするとき，$g(x)>f(x)$ となる x の範囲を求めよ．

(5) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ および $x=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

基本 7.5 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ について，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2012) 4

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{4}\right)$ における接線 l の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と接線 l との共有点のうち，点 P と異なる点 Q の x 座標を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と接線 l によって囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 7.6 関数 $f(x)=kx^3-3kx$ $(k>0)$ が表す座標平面上の曲線を $C: y=f(x)$ とする．曲線 C 上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(ap,\ f(ap))$ における接線をそれぞれ l_1，l_2 とする．ただし，$p>0$，$a\neq 1$ とする．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2012) 1

(1) 点 P における接線 l_1 の方程式を k，p を用いて表せ．

(2) 点 Q における接線 l_2 が点 P を通るとき，a の値を求めよ．

(3) ある k に対して 2 つの接線 l_1，l_2 が点 P において垂直に交わっているとき，k を p を用いて表せ．また，そのような k が存在する p の値の範囲を求めよ．

(4) ある k に対して 2 つの接線 l_1，l_2 が点 P において垂直に交わっているとき，接線 l_2 と曲線 C によって囲まれた図形の面積 S を p を用いて表せ．

標準 7.7 関数 $f(x)=-x^4+8x^3-18x^2+11$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ の増減と極値を調べ，グラフの概形をかけ． (長崎大学 2009) 3

(2) $y=f(x)$ と異なる 2 点で接する直線の方程式を求めよ．

(3) $y=f(x)$ と (2) で求めた直線とで囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 7.8 a を実数とする．関数

$$f_1(x)=2x^2-ax+\frac{1}{2},\quad f_2(x)=x^2+ax-a,\quad g(x)=\frac{x}{x+1}$$

について，以下に答えよ． (九工大 [情]2005) 1

(1) 極限値 $\lim_{x\to\infty} g(x)$ を求め，$x\geqq 0$ の範囲で $y=g(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) すべての $x\geqq 0$ に対して $f_1(g(x))\geqq f_2(g(x))$ となる a の範囲を求めよ．

(3) $a=1$ のとき，曲線 $y=f_1(g(x))$ と $y=f_2(g(x))$，直線 $x=1$，y 軸によって囲まれる図形の面積 S を求めよ．

標準 7.9 xy-平面において，直角双曲線 $C: y=\dfrac{1}{x}$ と直線 $l: x+y=k$ を考え，C と l の 2 つの交点を A，B とする．ここで k は 2 より大きな定数である．次の問いに答えよ． (長崎大学 2004) 5

(1) 点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする．点 A における曲線 C の法線の方程式を，α を用いて表せ．

(2) 2 点 A，B において，曲線 C に接する円の中心の座標と半径を，k を用いて表せ．

(3) 曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を，k を用いて表せ．

標準 7.10 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする．ただし，$t>1$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．　(九大 [理]2011) 1

(1) H の座標を t を用いて表せ．

(2) $x \geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ．

(3) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ．

標準 7.11 $a>0$ とする．曲線 $C:y=\dfrac{1}{x^2-1}$ $(x>1)$ と C の $x=a$ における接線 $l:y=px+q$ について，次に答えよ．　(九工大 [工]2009) 4

(1) p と q を a を用いて表せ．

(2) 等式 $(px+q)(x^2-1)-1$ を $p(x-a)^2(x-k)$ と因数分解したとき，k を a を用いて表せ．また，$x>1$ のとき $\dfrac{1}{x^2-1} \geqq px+q$ を示せ．

(3) 曲線 C と直線 l および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とするとき，$\lim\limits_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ．

標準 7.12 $f(x)=x\sqrt{|4-x^2|}$ $(x \geqq 0)$ とするとき，曲線 $C:y=f(x)$ について，次に答えよ．　(九工大 [工]2003) 4

(1) $f(x)$ の増減を調べ，曲線 C の概形を描け．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-4}\,dx$ を求めよ．

(3) $0 \leqq m \leqq 2$ とする．曲線 C と直線 $y=mx$ で囲まれた図形の面積 $S(m)$ を求めよ．

(4) (3) で求めた $S(m)$ の最小値を求めよ．

標準 7.13 $a>1$ とし，2 つの曲線

$$y=\sqrt{x} \qquad (x \geqq 0),$$
$$y=\frac{a^3}{x} \qquad (x>0)$$

を順に C_1，C_2 とする．また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を l_1 とする．以下の問いに答えよ．　(九大 [理]2013) 1

(1) 曲線 C_1 と y 軸および直線 l_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

(2) 点 P における C_2 の接線と直線 l_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}\right)$．このとき，$\lim\limits_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ．

応用 7.14 関数 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ の極限を求め，グラフをかけ． (長大 [医]2006) 4

(2) m を実数とするとき，直線 $y=m(x-1)$ と曲線 $y=f(x)$ の交点の x 座標を求めよ．

(3) $m>0$ のとき，(2) で求めた x 座標のうち，最小のものを α，最大のものを β として，$\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ を求めよ．

(4) $m>0$ のとき，$y=m(x-1)$ と $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積 $S(m)$ を求めよ．

応用 7.15 曲線 $C:y=(x-a)(x-4)(x-b)$ について考える．ここで a，b は $a<4<b$ を満たす定数とする． (分大 [医]2006) 6

(1) 曲線 C と x 軸とで囲まれる 2 つの部分の面積が等しいとき，$a+b$ の値を求めなさい．

(2) $a>0$ とする．曲線 C と x 軸，y 軸とで囲まれる 3 つの部分の面積が等しいとき，a，b の値を求めなさい．

応用 7.16 xy 平面上で，点 $(1,\ 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする．以下の問いに答えよ． (熊大 [医]2013) 4

(1) C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) a を正の数とする．円 $x^2+y^2=a$ と C の交点の個数が，a の値によってどのように変わるかを調べよ．

応用 7.17 xy 平面上に $x=2\cos 2\theta,\ y=2\cos 3\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ と媒介変数表示された曲線 C を考える．このとき，次の問に答えよ． (佐大 [医]2014) 5

(1) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，y を x の式で表せ．また，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ において，y を x の式で表せ．

(2) 曲線 C の概形を描け．

(3) 曲線 C が囲む領域の面積を求めよ．

応用 7.18 原点を O とする座標平面上に 2 つの曲線

$$C_1 : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \ (y \geqq 0), \quad C_2 : \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1 \ (x > 0)$$

がある．C_1 と y 軸との交点を E，C_2 と x 軸との交点を F とする．また，C_1 と C_2 は 1 点で交わる．その交点を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 点 G の座標を求めよ．　(宮大 [医]2020) 9

(2) 関数 $f(x) = x\sqrt{x^2-6} - 6\log|x + \sqrt{x^2-6}|$ の導関数を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(3) 2 つの曲線 C_1，C_2 および 2 つの線分 OE，OF で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

応用 7.19 放物線 $y = x^2$ 上に，x 座標が t である点 $\mathrm{P}(t)$ をとる．ただし，$t \geqq 0$ とする．$h \neq 0$ とし，放物線の $\mathrm{P}(t)$ における法線と，$\mathrm{P}(t+h)$ における法線を考える．$h \to 0$ とするとき，この 2 法線の交点の x 座標の極限値を $u(t)$，y 座標の極限値を $v(t)$ とする．さらに $(u(t),\ v(t))$ を $\mathrm{Q}(t)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u(t)$ と $v(t)$ を求めよ．　(長大 [医]2008) 6

(2) $\mathrm{Q}(t)$ が上の放物線上にあるとき，t の値と $\mathrm{Q}(t)$ の座標を求めよ．

(3) 上の放物線，曲線 $x = u(t)$，$y = v(t)$ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

応用 7.20 曲線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする．ただし，$b \neq a$ とする．このとき，次の問いに答えよ．
(九大 [理]2009) 3

(1) b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近づく．A の座標を a で表せ．

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，(1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする．曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ．

(3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

発展 7.21 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ．格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形 (周は含まない) を単位正方形と呼ぶことにする．p，n を自然数とし，領域

$$D_n = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x,\ x^p \leqq y \leqq n\}$$

を考え，その面積を S_n とする．L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする． (九大 [理]2003) 3

(1) グラフ $y = x^p$ $(0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}})$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ．

(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ．また，面積 S_n を求めよ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ．

7.1.2 三角関数と面積

基本 7.22 関数 $f(x) = 2\sin x\cos x - \tan x + 2x$ について，次の問いに答えよ． (佐賀大学 2012) 3

(1) 区間 $-\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ における $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = -\dfrac{\pi}{6}$，$x = \dfrac{\pi}{3}$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．

基本 7.23 2 つの曲線 $C_1 : y = \sin 2x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2 : y = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，次の各問に答えよ． (宮崎大学 2004) 4

(1) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における $\sin 2x = \tan x$ の解をすべて求めよ．

(2) C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ．

(3) C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

基本 7.24 次に答えよ． (九工大 [工]2010) 3

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，$\sin^2 x = \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を解け．

(2) 曲線 $y = \sin^2 x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と曲線 $y = \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

基本 7.25 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2006) 10

(1) $y = \sin x$ の導関数を，定義に従って求めよ．
ただし，三角関数の極限値の性質 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ は用いてよい．

(2) $y = \sin^2 x$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めよ．

(3) 関数 $y = \sin^2 x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の増減，凹凸および変曲点を調べて，そのグラフの概形をかけ．

(4) (3) のグラフを C とし，C の変曲点と原点を通る直線を l とする．l と C で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 7.26 関数 $f(x) = -x + 2\displaystyle\int_0^x (x - t)\sin t\, dt$ と $y = f(x)$ が表す曲線 C について，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2002) 2

(1) $f(x)$ を積分を含まない形で表せ．

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲における極値とそのときの x の値を求めよ．

(3) 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2},\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ における C の法線 L を表す方程式 $y = g(x)$ を求め，
$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲では $f(x) \leqq g(x)$ であることを示せ．

(4) L と C および y 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 7.27 関数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \sin^2 x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の表す曲線 $C : y = f(x)$ がある．次に答えよ．　(九工大 [工]2005) 4

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 直線 $l : y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + a$ $(a > 0)$ は曲線 C に接している．a の値と接点の座標を求めよ．

(3) a を (2) で定めた値とする．曲線 C と直線 l で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

標準 7.28 関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|$

を考える．ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする．さらに，$0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，

$$F(a)=\int_0^a f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\,dx$$

とする．このとき次の問いに答えよ． (九大 [理]2006) 4

(1) $f(x)=0$ となる x を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) $F(a)$ を求めよ．

応用 7.29 原点 O$(0,\ 0)$ と点 A$(0,\ 2)$ を直径の両端とする円 C がある．円 C の周上を動く点 Q と原点 O を通る直線を l とし，点 A における円 C の接線を m として，l と m の交点を R とする．そして，点 R と x 座標が等しく，かつ点 Q と y 座標が等しい点を P とする．ただし，点 Q は原点 O とは異なるとする．このとき以下の問いに答えなさい． (分大 [医]2018) 8

(1) 点 P の軌跡の方程式を求め，$y=f(x)$ の形で表しなさい．

(2) 上の (1) で得られた $y=f(x)$ について増減や凹凸を調べ，概形を描きなさい．

(3) 曲線 $y=f(x)$，x 軸，直線 $x=-2$ および直線 $x=2\sqrt{3}$ で囲まれた図形の面積を求めなさい．

7.1.3 指数関数と面積

基本 7.30 $1 \leqq a \leqq e$ とする．$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=e^x-a$ と x 軸で挟まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき，次の問いに答えよ． (琉球大学 2002) 3

(1) $S(a)$ を求めよ．

(2) $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

基本 7.31 a を正の定数とし，関数

$$f(x) = (x-a)e^{-x}$$

について，次の各問いに答えよ．ただし e は自然対数の底である．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．　(鹿児島大学 2010) 9

(2) 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，そのグラフの概形をかけ．

(4) n を正の整数とする．曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a + n$ とで囲まれた部分の面積 S_n を n と a で表せ．また，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

基本 7.32 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底であり，$x > 0$ とする．　(鹿児島大学 2015) 6

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．また，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ，その概形を描け．ただし，$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい．

(2) $t > 0$ とするとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積 $g(t)$ を求めよ．

(3) $t > 0$ とするとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および二つの直線 $x = t$ と $x = t + 1$ で囲まれる部分の面積 $h(t)$ が最大となるような t の値を求めよ．

基本 7.33 $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$，$g(x) = \sqrt{e}\,x$ とする．次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．　(福岡教育大学 2013) 4

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) k を定数とする．$0 \leqq x \leqq 4$ の範囲で $f(x) = k$ の実数解の個数を求めよ．

(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 7.34 関数 $f(x)=\dfrac{3}{2}e^{-x}+2e^{x}-3$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の $-1 \leqq x \leqq 0$ における最小値を求めよ． (宮崎大学 2001) 3

(2) 曲線 $C : y=f(x)$ の $x=0$ における接線と $x=a$ における接線が直交している．このとき，次の (A)，(B) に答えよ．

(A) a の値を求めよ．

(B) x 軸，y 軸，直線 $x=a$ および曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

基本 7.35 定数 a，b と自然対数の底 e に対して，$f(x)=(ax+b)e^{-x}$ とおく．曲線 $y=f(x)$ は点 $(0,\ 2)$ を通り，その点における接線の傾きは 2 であるとする．このとき，次の問に答えよ． (佐賀大学 2013) 3

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

基本 7.36 関数 $f(x)=ae^{2x}$ (a は定数) について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(b,\ f(b))$ における接線が $y=x$ であるとき，次の各問に答えよ．ただし，e は自然対数の底で，$e=2.718\cdots$ である． (宮崎大学 2003) 4

(1) a と b の値を求めよ．

(2) $g(x)=f(x)-x$ とおくとき，$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) $y=f(x)$ の逆関数を $y=f^{-1}(x)$ と表す．このとき，曲線 $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 7.37 次の問いに答えよ． (熊大 [理]2001) 1

(1) $x<0$ のとき，e^{-x} と x^2+1 の大小関係を調べよ．

(2) 2 つの曲線 $y=xe^{-x}$，$y=x(x^2+1)$ と直線 $x=-1$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 7.38 関数 $f(x) = xe^{-2x}$ に関して次の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底である．　(佐大 [医]2013) 6

(1) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．必要ならば，$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = 0$ を使ってよい．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の接線のうちで傾きが最小となるものを l とする．その接線 l の方程式と接点 $(a,\ f(a))$ を求めよ．

(3) $x < a$ において，接線 l は曲線 $y = f(x)$ より上側にあることを証明せよ．ただし，a は (2) で求めたものとする．

(4) 曲線 $y = f(x)$，接線 l，および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

標準 7.39 関数 $f(x) = xe^x$ で定まる曲線 $C : y = f(x)$ を考える．p を正の数とする．以下の問いに答えよ．　(長崎大学 2016) 7

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，すべての x について

$$\{(ax+b)e^x\}' = f(x)$$

が成り立つような定数 a，b の値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を $\ell : y = c(x-p) + d$ とする．c と d の値を p を用いて表せ．さらに，区間 $x \geqq 0$ において関数 $g(x) = f(x) - \{c(x-p)+d\}$ の増減を調べ，不等式

$$f(x) \geqq c(x-p) + d \quad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $x \geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 ℓ，および y 軸で囲まれた図形を F とする．その面積 $S(p)$ を求めよ．

(4) 2 辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 R を考える．R が図形 F を囲んでいるとき，R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ．さらに，$\lim_{p\to\infty} \dfrac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ．

標準 7.40 a を定数とし，$f(x) = e^{ax}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とする．ただし，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2018) 4

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

(2) $a = \sqrt{3}$ のとき，関数 $y = f(x)$ について第 2 次導関数まで求めて増減を調べ，そのグラフをかけ．

標準 7.41 関数 $f(x) = e^{-x}\cos\sqrt{3}\,x$ について以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする． (九工大 [情]2015) 1

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で $f(x) = 0$ をみたす x の値をすべて求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で $f(x)$ の増減を調べよ．ただし，凹凸は調べなくてよい．

(3) 部分積分を 2 回用いて $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = e^{-x}$ によって囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 7.42 自然対数の底を e とする．区間 $x \geqq 0$ 上で定義される関数

$$f(x) = e^{-x}\sin x$$

を考え，曲線 $y = f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる．それらを，$\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots$ とする．点 P_0 は原点である．

自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ． (長大 [医]2015) 8

(1) 点 P_n の x 座標を求めよ．

(2) 面積 S_n を求めよ．

(3) $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ とする．このとき，I_n と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

応用 7.43 $f(x) = xe^x$ とおく．また p を $p \geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とおく．ただし，e は自然対数の底である．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [理]2007) 1

(1) $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ．

(2) L を正の数とする．曲線 $y = f(x)$，接線 $y = g(x)$，および 2 直線 $x = 0$，$x = L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p \geqq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ．

7.1.4 対数関数と面積

□□ **7.44** 関数

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{x} \quad (x > 0)$$

がある．曲線 $C : y = f(x)$ の変曲点を $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ とする．曲線 C と直線 $x = a$，および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ． (長崎大学 2016) 5

基本 7.45 $\log x$ を x の自然対数とする．このとき，次の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底である．　(佐賀大学 2006) 3

(1) $y = \log x$ を微分せよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\, dx$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{e}x - \log x$ $\left(\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e^2\right)$ の増減を調べよ．

(4) xy 平面において，2 直線 $y = \dfrac{1}{e}x$，$x = \dfrac{1}{e}$ と曲線 $y = \log x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 7.46 直線 $\ell : y = ax + b$ と曲線 $C : y = \log x$ $(x > 0)$ は接するものとする．ただし，a，b は定数であり，$a > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．　(佐賀大学 2015) 2

(2) ℓ と C および x 軸で囲まれた図形の面積を S とする．$0 < a < 1$ のとき，S を a を用いて表せ．

基本 7.47 $k > 0$ とする．2 つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4-k}{2}x + 1, \quad C_2 : y = k\log\frac{x}{2} + k - 1$$

は，ある共有点 P において共通の接線 l をもっている．ただし，対数は自然対数を表す．次に答えよ．　(九工大 [工]2008) 5

(1) 共有点 P の座標と共通の接線 l の方程式を k を用いて表せ．

(2) 接線 l が点 $(1,\ 0)$ を通るとき，曲線 C_2 と x 軸との交点の x 座標を求めよ．

(3) 接線 l が点 $(1,\ 0)$ を通るとき，曲線 C_2 と x 軸および接線 l で囲まれる部分の面積を求めよ．

基本 7.48 e は自然対数の底，a，b，c は実数である．放物線 $y = ax^2 + b$ を C_1 とし，曲線 $y = c\log x$ を C_2 とする．C_1 と C_2 が点 $\mathrm{P}(e,\ e)$ で接しているとき，次の問いに答えよ．ここで，2 つの曲線が点 P で接しているとは，ともに点 P を通り，かつ，その点における接線が一致していることである．　(佐賀大学 2010) 4

(1) a，b，c の値を求めよ．

(2) C_1，C_2 および x 軸，y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

基本 7.49 a を正の定数とし，曲線 $y=\dfrac{\log x}{a}$ を C とする．次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とし，e は自然対数の底とする． (福岡教育大学 2014) 7

(1) 点 $\left(0,\ 1-\dfrac{1}{a}\right)$ から曲線 C に引いた接線の方程式を a を用いて表せ．

(2) (1) で求めた接線と曲線 C と x 軸によって囲まれた部分のうち第 1 象限の部分の面積を a を用いて表せ．

(3) 曲線 C が曲線 $y=\dfrac{x^2}{2e}$ と共有点をもち，その点における 2 つの曲線の接線が一致しているとき，曲線 C と曲線 $y=\dfrac{x^2}{2e}$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 7.50 a を正の定数とする．関数 $f(x)=ax-x\log x$ の最大値が 1 であるとする．次の問いに答えよ． (福岡教育大学 2016) 4

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の接線のうち，傾きが $-\dfrac{1}{2}$ であるものを求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および (2) で求めた接線によって囲まれる部分の面積を求めよ．

基本 7.51 関数 $f(x)=(\log x)^2-\log x\ (x>0)$ を考える．次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)=0$ を満たす x をすべて求めよ． (鹿児島大学 2016) 6

(2) 導関数 $f'(x)$ および 2 次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ．また関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け．ただし関数 $y=f(x)$ の増減，凹凸，極限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ を明示すること．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

基本 7.52 次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2005) 2

(1) $t > 0$ のとき，不等式

$$\log t \leqq 2\sqrt{t} - 2$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 極限 $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{\log t}{t}$ を求めよ．

(3) $f(x) = x \log x$ $(x > 0)$ とする．(2) の結果を用いて $\lim_{x \to +0} f(x)$ を求め，さらに $\lim_{x \to +0} f'(x)$ を求めよ．

(4) 関数 $y = x \log x$ $(x > 0)$ の増減，極値およびグラフの凹凸を調べて，そのグラフの概形をかけ．

(5) 区間 $[e^{-1},\ e]$ において，曲線 $y = x \log x$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

標準 7.53 n を 2 以上の自然数とし，x の関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = x^n \log 2x, \quad g(x) = \log 2x$$

とする．ただし，対数は自然対数とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．　(福岡教育大学 2011) 4

(2) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ．

(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ．

(4) $\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ．

標準 7.54 曲線 $C_1 : y = \sqrt{x}\,|\log x|$ と曲線 $C_2 : y = \sqrt{x}$ がある．ただし，対数は自然数対数とする．次に答えよ．　(九工大 [工]2011) 4

(1) 関数 $f(x) = \sqrt{x} \log x$ の増減，極値を調べ，曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし，$\lim_{x \to +0} \sqrt{x} \log x = 0$ であることを用いてよい．

(2) 曲線 C_1，C_2 は $x > 0$ において 2 つの交点をもつ．それらの座標を求めよ．

(3) (2) で求めた交点の x 座標を a，b $(a < b)$ とする．曲線 C_1，C_2 の $a \leqq x \leqq b$ の部分が囲む図形の面積 S を求めよ．

標準 7.55 a を正の実数とする．また，対数は自然対数，e は自然対数の底を表す．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2010) 1

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \log(ax)\,dx$ を求めよ．

(2) $0 < x < e$ の範囲で曲線 $y = \log(ax)$ と直線 $y = 1$ とが交わるように，a の値の範囲を定めよ．

(3) a の値が (2) で求めた範囲にあるとする．座標平面において，曲線 $y = \log(ax)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = e$ とで囲まれた図形のうち，$y \leqq 1$ の部分の面積を S_1，$y \geqq 1$ の部分の面積を S_2 とする．$S = S_1 - S_2$ を a を用いて表せ．

(4) a の値が (2) で求めた範囲にあるとする．S の最大値とそのときの a の値を求めよ．

標準 7.56 関数 $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$，$g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ がある．次に答えよ．

(1) $f(x)$ の増減をしらべ，極値を求めよ． (九工大 [工]2004) 4

(2) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の交点の座標を求めよ．

(3) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

標準 7.57 $a > 0$ に対して，$f(x) = a + \log x$ $(x > 0)$，$g(x) = \sqrt{x-1}$ $(x \geqq 1)$ とおく．2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l を持つとする．このとき，次の問いに答えよ． (九大 [理]2008) 4

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ．

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ．

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

標準 7.58 次に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．必要ならば，$1.09 < \log 3 < 1.10$ を用いてよい． (九工大 [工]2010) 4

(1) すべての $x > 0$ に対して，不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x)$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x) = x - \dfrac{x^2}{3} - \log(1+x)$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値，最小値を求めよ．

(3) 方程式 $x - \dfrac{x^2}{3} = \log(1+x)$ は $0 < x < 2$ の範囲に解を 1 つだけもつことを示せ．

(4) (3) における解を α $(0 < \alpha < 2)$ とする．
曲線 $y = x - \dfrac{x^2}{3}$ と曲線 $y = \log(1+x)$ で囲まれた図形 $(0 \leqq x \leqq \alpha$の部分$)$ を S とする．また，曲線 $y = x - \dfrac{x^2}{3}$，曲線 $y = \log(1+x)$ と直線 $x = 2$ で囲まれた図形 $(\alpha \leqq x \leqq 2$ の部分$)$ の面積を T とする．S と T の大小を比較せよ．

7.1.5　その他の面積

標準 7.59 方程式 $y^2 = x^6(1-x^2)$ が表す図形で囲まれた面積を求めなさい．
(分大 [医]2015) 6

標準 7.60 $I_1 = \displaystyle\int_0^3 \sqrt{x^2+9}\,dx$，$I_2 = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$ とする．　(大分大学 2012) 4

(1) 次の等式がすべての実数 x について成り立つように，定数 a，b の値を定めなさい．

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} = a\sqrt{x^2+9} + \frac{b}{\sqrt{x^2+9}}$$

(2) I_1 において部分積分をすることにより，I_1 を I_2 で表しなさい．

(3) $\log(x+\sqrt{x^2+9})$ の導関数を利用して，I_2 を求めなさい．

(4) 曲線 $x^2 - y^2 = -9$ と直線 $y = 3\sqrt{2}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

標準 7.61 O を原点とする座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ をとる．ただし，O，A，B は一直線上にないものとする．$0 < t < 1$ として，線分 AO を $t : (1-t)$ に内分する点を P_t，線分 OB を $t : (1-t)$ に内分する点を Q_t，さらに，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点を R_t とし，$\mathrm{R}_0 = \mathrm{A}$，$\mathrm{R}_1 = \mathrm{B}$ とする．また，t が 0 から 1 まで動くときに点 R_t の軌跡として得られる曲線を S とし，点 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とおく．以下に答えよ．　(九工大 [情]2001) 2

(1) 3 点 P_t，Q_t，R_t の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}_t$，$\vec{q}_t$，$\vec{r}_t$ とおく．$\vec{p}_t$，$\vec{q}_t$，$\vec{r}_t$ を t と $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) R_t の座標を t，a_1，a_2，b_1，b_2 を用いて表せ．

(3) $0 < t < 1$ のとき，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ は R_t で曲線 S と接することを示せ．

(4) 2 点 A，B の座標がそれぞれ $\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(2, -1)$ で与えられるとき，線分 AO，OB，および曲線 S で囲まれる部分の面積を求めよ．

標準 7.62 xy 平面上を運動する点 P の描く曲線 C が，時刻関数 t によって

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

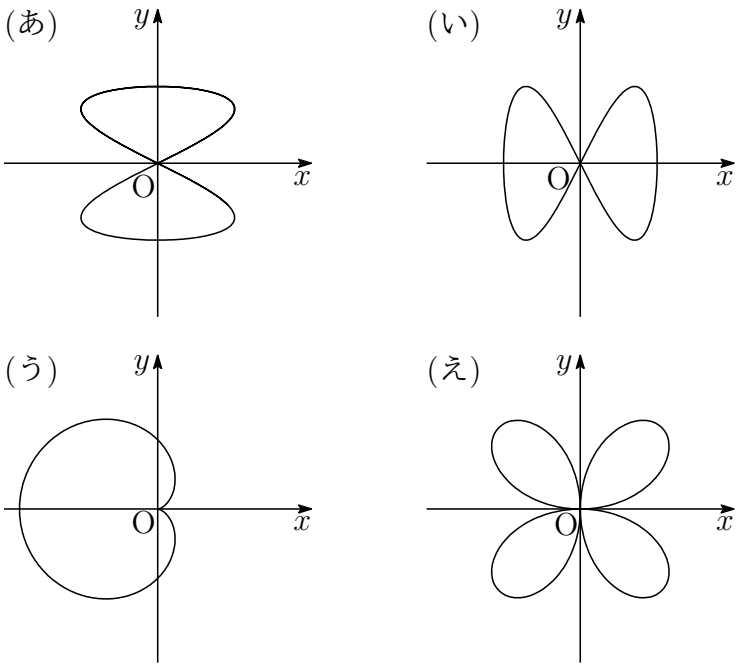
と媒介変数表示されているとする． (鹿児島大学 2020) 7

(1) 点 P の速度ベクトル $\vec{v}$ を，t を用いて表せ．

(2) t が動くとき，点 P の速さ $|\vec{v}|$ の最小値を求めよ．ただし，最小値をとるときの t の値は求めなくてよい．

(3) x，y で表した曲線 C の方程式を求め，そのグラフの概形を下の図 (あ)〜(え) の中からひとつ選べ．

(4) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ．



標準 7.63 実数 t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする．a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．このとき次の問いに答えよ．　(九大 [理]2005) 5

(1) 面積 $S(a)$ を求めよ．

(2) $a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け．ただし，$\lim_{a\to\infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい．

(3) $S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ．ただし，必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい．

応用 7.64 関数 $f(t) = \dfrac{2e}{t} + \dfrac{2t}{e} - 5$，$g(t) = 4\log t$ $\left(\dfrac{e}{2} \leqq t \leqq 2e\right)$ の定める曲線 C : $x = f(t),\ y = g(t)$ について次に答えよ．ただし，対数は自然対数で e は自然対数の底である．　(九工大 [工]2001) 5

(1) 関数 $f(t)$ と $g(t)$ の増減を調べよ．

(2) $f(\alpha) = f(\beta)$ が成り立つような $\alpha,\ \beta$ $(\alpha \neq \beta)$ に対して $\alpha\beta$ の値を求めよ．

(3) 曲線 C は x 軸に平行なある直線に関して対称であることを示せ．

(4) 曲線 C と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

標準 7.65 $a>0,\ b>0,\ 0<t<1$ とする．曲線

$$C:\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

は 3 直線

$$l_1:y=x,\quad l_2:y=-x+2,\quad l_3:y=-t$$

に接しているとし，C と l_1 の接点を P とする．次に答えよ．　(九工大 2024) 2

(1) $a,\ b$ を t を用いて表せ．

(2) 点 P の座標を t を用いて表せ．

(3) l_2 と l_3 の交点を Q とする．直線 PQ が点 $(1,\ 0)$ を通るとき，t の値を求めよ．

(4) 曲線 C の媒介変数表示を $x=1+a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ とし，点 P の座標を $(1+a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ と表す．t が (3) で求めた値のとき，β $(0\leqq\beta<2\pi)$ を求めよ．

(5) t は (3) で求めた値とし，曲線 C の $y\geqq 0$ の部分を C_1 とする．2 直線 l_1，l_2 と曲線 C_1 で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

応用 7.66 $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ を満たす θ について，$r(\theta)=\sqrt{2\cos 2\theta}$ とするとき，座標平面上で円 $x^2+y^2=\{r(\theta)\}^2$ と直線 $y=(\tan\theta)x$ は 2 つの交点をもつ．そのうち，x 座標が正であるものを P とし，P の x 座標を $f(\theta)$，y 座標を $g(\theta)$ とする．θ を $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ の範囲で動かしたときの点 P の軌跡を C とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(\theta)$，$g(\theta)$ を求めよ．　(宮大 [医]2015) 6

(2) $g(\theta)$ の最大値を求めよ．

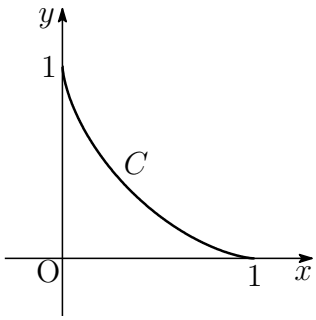
(3) 曲線 C と x 軸，直線 $x=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

応用 7.67 媒介変数 t を用いて

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される曲線を C とする．C の概形は右の図のようになる．このとき，次の各問に答えよ．

(宮大 [医]2017) 7



(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{8},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ における C の法線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C の長さを求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

応用 7.68 平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている．ただし，e は自然対数の底である．原点を O，点 $(0,\ 1)$ を M とする．t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したとき点 P が描く曲線を C とする．時刻 t において，曲線 C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す．次の問いに答えよ．

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 x，y に対して y を x を用いて表せ．　(九大 [理]2002) 1

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ．

(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ．

応用 7.69 a を正の実数とする．曲線 $y=\log x$ の点 $(a,\ \log a)$ における接線を l_1，点 $(2a,\ \log 2a)$ における接線を l_2 とする．次の問いに答えよ． (琉球大学 2024) 1

(1) 接線 l_1 の方程式を求めよ．

(2) l_1 と l_2 の交点の座標を求めよ．

(3) 曲線 $y=\log x$ と直線 l_1，l_2 で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．$\dfrac{S(a)}{a}$ を求めよ．

応用 7.70 xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x=t+2\sin^2 t,\quad y=t+\sin t\quad (0<t<\pi)$$

以下の問いに答えよ。 (九大理系 2023) 5

(1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。

(2) 曲線 C のうち $y\leqq x$ の領域にある部分と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

応用 7.71 座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x(t)=\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ y(t)=\cos(2t) \end{cases} \qquad (0\leqq t<2\pi)$$

で与えられているとし，この点の軌跡を C とする． (九大 [理]2004) 3

(1) P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ．

(2) C が x 軸，y 軸に関して対称であることを示せ．

(3) C の概形を描け．

(4) C が囲む図形の面積を求めよ．

応用 7.72 原点 O を中心とする半径 1 の円を C_1 とする．円 C_1 に外接しながら，半径 1 の円 C_2 がすべることなく回転する．円 C_2 の中心を P とし，円 C_2 上の点 Q は最初，x 軸上の点 A(3, 0) にあるものとする．半直線 PQ 上で点 P からの距離が 2 の点を R とし，OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とする．C_2 が回転して θ が 0 から 2π まで変化するとき，点 R が描く曲線を C とする．曲線 C の概形を図 1 に示す．以下の問いに答えよ．　(九工大 [情]2016) 2

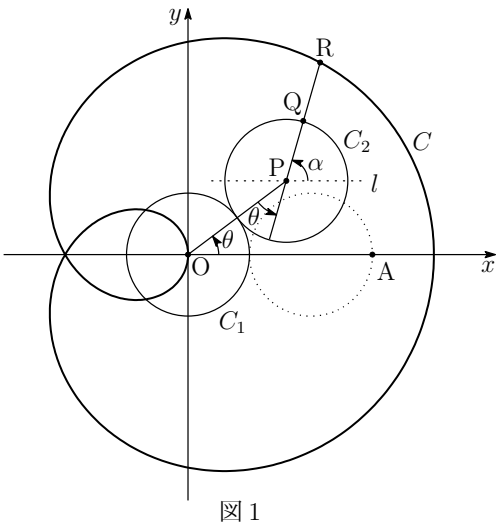


図 1

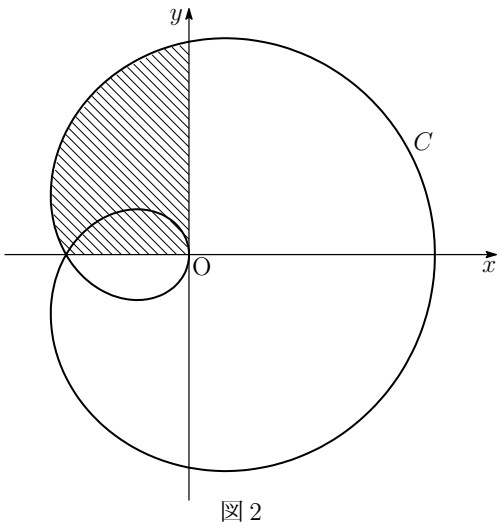


図 2

(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 P を通り x 軸と平行な直線を l とする．直線 l と線分 PR のなす角 α を，θ を用いて表せ．また，R の座標を θ を用いて表せ．

(3) 曲線 C と x 軸の共有点の座標をすべて求めよ．

(4) 曲線 C と y 軸の共有点の座標をすべて求めよ．

(5) 点 R の x 座標が最小となるときの点 R の座標をすべて求めよ．

(6) 曲線 C と x 軸，y 軸に囲まれた図 2 の斜線部分の面積を求めよ．

応用 7.73 半径 1 の円と長さ 2 の線分がある．この線分の一方の端点を，円の中心に合わせて円上に固定した図形を考える．線分の端点で，円の中心とは異なるものを P とする．この図形を下の図 1 のように xy 平面上に置く．すなわち，中心が点 $(0,\ 1)$，P が点 $(0, -1)$ と一致するように置く．

図 1

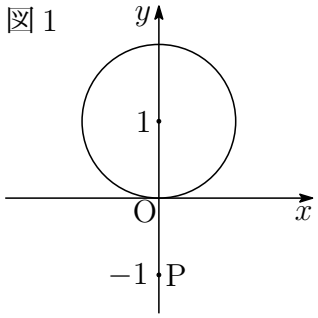
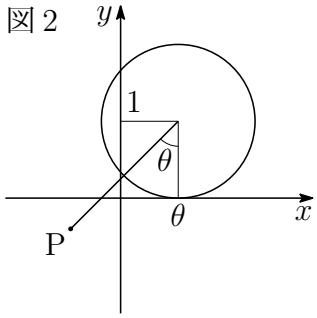


図 2



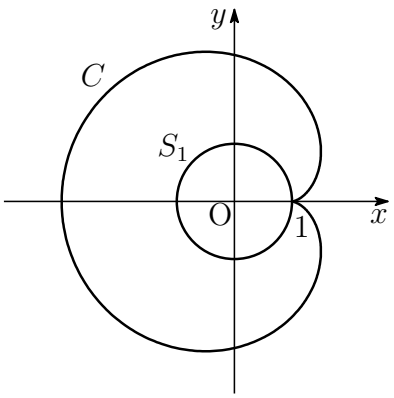
次に，x 軸上で正の方向に，すべらないように円を半回転させる．上の図 2 は円が θ だけ回転したときの状態を表している．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，点 P が描く曲線 C について考察する．次の問いに答えよ．（長大 [医]2013） 7

(1) 図 2 における点 P の x 座標と y 座標を，それぞれ θ を用いて表せ．

(2) 曲線 C 上にあって，x 座標が最小となる点，最大となる点，y 座標が最小となる点，最大となる点について，それぞれの座標を求めよ．

(3) 曲線 C と 2 直線 $y = -1$ および $x = \pi$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ．

応用 7.74 xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 S_1 と，点 A を中心とする半径 1 の円 S_2 がある．円 S_2 は円 S_1 に外接しながら，すべることなく円 S_1 のまわりを反時計回りに一周する．点 A の出発点は $(2,\ 0)$ であり，円 S_2 上の点で，このとき $(1,\ 0)$ に位置している点を P とする．点 A が $(2,\ 0)$ から出発し，$(2,\ 0)$ に戻ってくるとき，点 P の描く曲線を C とすると，図のようになる．また，動径 OA と x 軸の正の部分とのなす角が θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ であるときの点 P の座標を $(x(\theta),\ y(\theta))$ とする．このとき，次の問いに答えよ．



(1) $x(\theta)$，$y(\theta)$ を θ を用いて表せ．（長大 [医]2009） 7

(2) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを証明せよ．

(3) 曲線 C と円 S_1 によって囲まれた部分の面積を求めよ．

応用 7.75　$-1 < x < 1$ で定義される関数 $f(x) = 2x + \sqrt{5 - 5x^2}$ について，座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ を考える．このとき，次の各問に答えよ．(宮大 [医]2013) 8

(1) 曲線 C は上に凸であることを示し，$f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点のうち，原点 O との距離が最大となる点を A，最小となる点を B とするとき，A，B の座標をそれぞれ求めよ．

(3) (2) で求めた点 A，B について，線分 OA，線分 OB，および曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

応用 7.76　$a > 0,\ b > 0,\ a \neq b$ とする．また，2 つの楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ の第 1 象限における交点を通り，y 軸に平行な直線の方程式を $x = c$ とする．領域 $D_1 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$，$0 \leqq x \leqq c$，$0 \leqq y$ の面積を S_1，領域 $D_2 : \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} \leqq 1$，$0 \leqq x \leqq c$，$0 \leqq y$ の面積を S_2 とする．以下の問に答えなさい．(分大 [医]2022) 6

(1) c を $a,\ b$ を用いて表しなさい．

(2) $S_1 + S_2$ を $a,\ b$ を用いて表しなさい．

応用 7.77　xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める．

$$x = 5\cos t + \cos 5t, \quad y = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leqq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ．(九大 [理]2022) 5

(1) 区間 $0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ において，$\dfrac{dx}{dt} < 0$，$\dfrac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ．

(2) 曲線 C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分，x 軸，直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

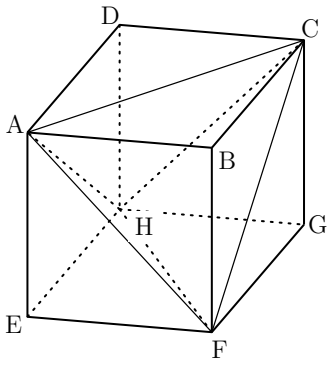
(3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ．また，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ．

(4) 曲線 C の概形を図示せよ．

7.2 体積

7.2.1 非回転体の体積

標準 7.78 次の問いに答えよ．(琉球大学 2013) 1



(1) 直径1の球を球の中心から距離aの平面で切って二つの部分に分けたとき，中心を含まない部分の体積を求めよ．ただし，$0 < a < \dfrac{1}{2}$とする．

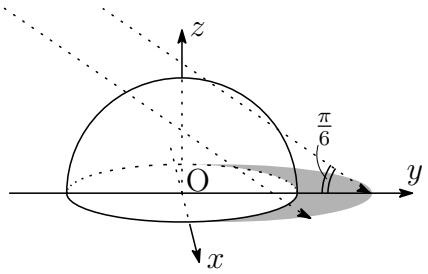
(2) 一辺の長さが1である立方体ABCD-EFGHを考える．この立方体に内接する球と正四面体ACFHとの共通部分の体積を求めよ．

応用 7.79 座標空間内に，原点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径1の球がある．下の概略図のように，y軸の負の方向から仰角$\dfrac{\pi}{6}$で太陽光線が当っている．この太陽光線はベクトル$(0,\ \sqrt{3},\ -1)$に平行である．球は光を通さないものとするとき，以下の問いに答えよ．(九大 [理]2015) 3

(1) 球の$z \geqq 0$の部分がxy平面上につくる影を考える．kを$-1 < k < 1$を満たす実数とするとき，xy平面上の直線$x = k$において，球の外で光が当らない部分のy座標をkを用いて表せ．

(2) xy平面上において，球の外で光が当らない部分の面積を求めよ．

(3) $z \geqq 0$において，球の外で光が当らない部分の体積を求めよ．



応用 7.80 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える．円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である．正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は一辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である．$0 < r \leqq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする．

(九大 [理]2001) 3

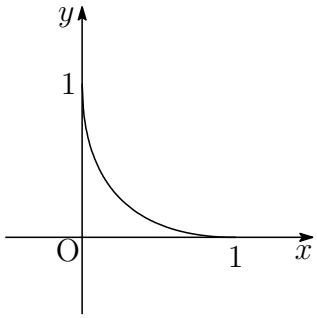
(1) 高さが $z = t$ $(-r \leqq t \leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ．

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ．

(3) $0 < r \leqq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ．

7.2.2　x 軸の周りの回転体の体積

□□ **7.81** 曲線 $C : \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と x 軸および y 軸で囲まれた下図の図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．　(長崎大学 2015) 5



基本 7.82 曲線 $y = \dfrac{1}{x+1}$ と x 軸および 2 直線 $x = k$，$x = 2k$ (ただし $k > 0$) で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を $V(k)$ とする．次の問いに答えよ．　(長崎大学 2001) 4

(1) $V(k)$ を求めよ．

(2) $V(k)$ の最大値とそのときの k の値を求めよ．

基本 7.83 曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$，直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$，および x 軸で囲まれる部分を S とする．このとき，次の各問に答えよ．　(宮崎大学 2006) 4

(1) S の面積を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \tan x - x$ を微分せよ．

(3) S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

基本 7.84 次の問に答えよ. (佐賀大学 2016) 2

(1) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \tan^2 x\, dx$ を求めよ.

(2) 2 つの曲線 $y = \dfrac{3}{2}\tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

基本 7.85 xy 座標平面において，曲線

$$y = \cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi) \qquad \cdots ①$$

と直線

$$y = -\frac{2}{\pi}x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq \pi) \qquad \cdots ②$$

で囲まれた図形を D とする．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) ① および ② のグラフを描き，領域 D を図示せよ. (鹿児島大学 2008) 10

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

基本 7.86 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 $C_1 : y = \sin 2x$ と曲線 $C_2 : y = \cos x$ の交点の x 座標を a，b，c $(a < b < c)$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) a，b，c の値を求めよ. (九工大 [情]2013) 1

(2) 交点 $(b,\ \sin 2b)$ における 2 つの曲線 C_1 と C_2 のそれぞれの接線は垂直ではないことを示せ.

(3) $a \leqq x \leqq b$ の範囲で 2 つの曲線 C_1，C_2 によって囲まれた部分の面積を S_1 とし，$b \leqq x \leqq c$ の範囲で 2 つの曲線 C_1，C_2 によって囲まれた部分の面積を S_2 とするとき，2 つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ.

(4) 曲線 C_1 の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

基本 7.87 a を $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$ を満たす定数とする．2 つの曲線

$$y = \sin x \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq a\right),$$
$$y = \cos x \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と 2 つの直線 $x = a$，$y = 0$ で囲まれる図形を D とする．このとき，次の問に答えよ.

(1) D の面積 S を求めよ. (佐賀大学 2014) 1

(2) D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

基本 7.88　2 つの曲線 $y=x+2\cos x\ \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\pi\right)$ と $y=x-2\cos x\ \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\pi\right)$ をつないでできる曲線を C とする．　(大分大学 2016) 4

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい．

(2) k を実数とする．曲線 C と直線 $y=k$ が異なる 2 点で交わるための k の値の範囲を求めなさい．

(3) 曲線 C で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい．

基本 7.89　次の問いに答えよ．　(佐賀大学 2009) 3

(1) 2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x\ \left(\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5\pi}{4}\right)$ で囲まれた図形 D の面積 S を求めよ．

(2) 区間 $\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5\pi}{4}$ における，$|\sin x|$ と $|\cos x|$ の大小関係を述べよ．

(3) (1) の図形 D を x 軸の回りに一回転してできる立体の体積 V を求めよ．

基本 7.90　直線 $\ell : y=x+a$ が曲線 $C : y=2\sin x\ (-\pi\leqq x\leqq\pi)$ に接しているとき，次の問いに答えよ．ただし，$a\geqq 0$ とする．　(九大 [理]2005) 1

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の $y\geqq 0$ の範囲にある部分を，x 軸のまわりに回転する．この回転体の体積を求めよ．

基本 7.91　関数 $f(x)=x-\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを ℓ とする．　(九大 [理]2014) 1

(1) ℓ の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ．

(2) a は (1) で求めたものとする．曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

基本 7.92　xy 平面において，曲線 $y=e^x$ と 3 直線 $y=x+1$，$x=1$，$x=-1$ で囲まれた部分を D とする．ただし e は自然対数の底である．次の各問いに答えよ．　(鹿児島大学 2013) 9

(1) 関数 $f(x)=e^x-(x+1)$ の増減，極値，凹凸を $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で調べ，増減表にまとめよ．

(2) D を図示せよ．

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

基本 7.93 次の各問に答えよ. (鹿児島大学 2014) 4

(1) θ を媒介変数として,

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

で表される曲線の $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ.

(2) 2 つの曲線 $y = e^{-x} + 1$, $y = 3(e^{-x} - 1)$ の交点の座標を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(3) (2) の曲線と y 軸で囲まれた図形を D とする. D の面積を求めよ.

(4) (3) で与えられた D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

基本 7.94 e を自然数の底とし, $\log x$ を自然対数とする. 次の各問いに答えよ. (鹿児島大学 2012) 9

(1) p, q を $p > 0$, $q > 1$ を満たす定数とする. 曲線 $y = p\log x$ と直線 $x = q$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を p, q を使って表せ.

(2) 2 つの曲線 $y = \log x$, $y = 3\log x$ と 2 つの直線 $x = e$, $x = e^2$ で囲まれた部分を D とする. D の面積を求めよ.

(3) (2) で与えられた D を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ.

基本 7.95 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ $(1 \leqq x \leqq e^3)$ について, 次の問いに答えよ. ただし, $\log x$ は自然対数とし, その底を e とする. (福岡教育大学 2007) 4

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ. また, グラフの凹凸を調べ, 変曲点を求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = e^2$ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = e^3$ によって囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

標準 7.96 実数 a $(a>0)$ に対して曲線 $C_1 : y=x^2+ax$ および曲線 $C_2 : y=-2x^2+ax$ を考える．曲線 $C_3 : y=f(x)$ は

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x<0) \\ -2x^2+ax & (x \geqq 0) \end{cases}$$

で与えられるものとする．
また，実数 k に対して直線 $l : y=-ax+k$ を考える．　(九工大 [情]2007) 2

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 は原点 O で共通の接線をもつことを示せ．

(2) 直線 l が原点を通るとき，曲線 C_3 と直線 l で囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) 曲線 C_3 と直線 l の共有点の個数が 2 となるとき k を a を用いて表せ．

(4) (3) で，共有点の個数が 2 となる $k>0$ に対して，曲線 C_3，直線 l および y 軸によって囲まれる $x \geqq 0$ の部分を，x 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

標準 7.97 座標平面上の曲線 $C_1 : y=x^2+2ax-2a+1$ および $C_2 : y=x^3+1$ を考える．以下の問いに答えよ．　(熊大 [理]2019) 3

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ．ただし，$a \neq 0$ とする．

(2) (1) で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ．

標準 7.98 k を正の実数とする．原点を O，曲線 $C : y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ と直線 $y=kx$ の交点を P，線分 OP の中点を Q とする．さらに，点 Q を通り y 軸と平行な直線と C の交点を R，点 Q を通り x 軸と平行な直線と C の交点を S とする．次に答えよ．

(1) 点 P の座標を k を用いて表せ．　(九州工業大学 2019) 1

(2) 点 P における曲線 C の接線と直線 RS は平行であることを示せ．

(3) 直線 RS と曲線 C で囲まれた図形の面積は k の値によらず一定になることを示せ．

(4) 直線 RS と曲線 C で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を k を用いて表せ．

標準 7.99 曲線 $C : y = x\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と，直線 $l : y = kx$ (k は実数) を考える．以下の問いに答えよ． (九工大 [情]2009) 1

(1) 曲線 C 上の点で y 座標が最大となるものの座標を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 l が原点以外の交点を持つときの k の範囲を求め，その交点の座標を k を用いて表せ．

(3) 実数 k は (2) で求めた範囲を動くものとする．原点を O，(2) で求めた交点を P とし，曲線 C と線分 OP で囲まれる図形 A の面積を S とする．また点 P から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を Q とし，△OPQ の面積を T とする．$k \geqq \dfrac{1}{4}$ のとき，$|S-T|$ の最大値および最小値を，そのときの k の値をそれぞれ求めよ．

(4) (3) の図形 A を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積が，△OPQ を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積と等しくなるときの k の値を求めよ．

標準 7.100 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，2 つの関数 $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$，$g(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ を考える．曲線 $C_1 : y = f(x)$ と曲線 $C_2 : y = g(x)$ で囲まれた図形を D とする．以下の問いに答えよ． (長崎大学 2016) 6

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最大値と最小値を求めよ．

(2) 曲線 C_1 は曲線 C_2 と原点に関して対称であることを示せ．

(3) 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x)$ と $-g(x)$ の値の大小関係を調べよ．また，$g(x) \geqq 0$ が成り立つような x の範囲を求めよ．

(4) 図形 D の $x \geqq 0$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

標準 7.101 次の問いに答えよ． (長崎大学 2013) 6

(1) 関数 $y = -x + 2 - \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の増減およびグラフの凹凸を調べよ．また，y の最大値およびそのときの x の値，y の最小値およびそのときの x の値を求めよ．

(2) 2 つの曲線

$$y = -x + 2 - \sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1) \quad \text{と} \quad y = -x + 2 + \sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1)$$

によって囲まれた図形 D を座標平面上に描け．なお，D の境界が座標軸との共有点をもつならば，その座標も記入せよ．

(3) 上の図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

標準 7.102 曲線 $C : y = \dfrac{4}{x+1} + x \ (x \geqq 0)$ と直線 $L : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{11}{2}$ がある．C と L の交点を P とし，点 P を通り x 軸に平行な直線を l とする．次に答えよ．

(1) 点 P の座標を求めよ．　(九工大 [工]2005) 5

(2) 直線 l に関して直線 L と対称な直線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C，直線 L および y 軸で囲まれた図形を直線 l の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

標準 7.103 n を自然数とする．曲線 $y = 2 + \sin x \left(0 \leqq x \leqq \left(n + \dfrac{1}{3}\right)\pi\right)$，直線 $x = \left(n + \dfrac{1}{3}\right)\pi$，$x$ 軸および y 軸で囲まれる部分を D_n とおくとき，次の各問いに答えよ．　(宮崎大学 2005) 3

(1) D_n の面積 S_n を求めよ．

(2) D_n を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_n を求めよ．

(3) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{V_n}{S_n}$ を求めよ．

標準 7.104 次の問いに答えよ．　(長崎大学 2011) 6

(1) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において次の不等式を解け．

$$\sin x + \cos 2x \geqq 0$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\cos 2x$ および直線 $x = -\dfrac{\pi}{2}$ が囲む図形の面積 S を求めよ．

(3) 上の図形の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

標準 7.105 a を正の定数とし，曲線 $y = a\cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分の面積が $\sqrt{3} - 1$ であるとする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．　(福岡教育大学 2015) 4

(2) 曲線 $y = a\cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の交点を求めよ．

(3) 曲線 $y = a\cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

標準 7.106 次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 関数 $f(x)=x-\log x$ の最小値を求めよ． (福岡教育大学 2015) 8

(2) a を 1 より大きい定数とし，曲線 $y=a\sin x\ \left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y=\tan x\ \left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ によって囲まれる部分 D の面積が $1-\log 2$ であるとする．次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) a の値を求めよ．

(イ) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

標準 7.107 関数 $f(x)=1+\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{1+\tan^2 t}{1+e^{\tan t}}dt\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ について，次の問いに答えよ． (熊大 [理]2006) 4

(1) 関数 $u=e^{\tan t}$ を t で微分せよ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転して得られる図形の体積を求めよ．

標準 7.108 関数 $f(x)=-\tan x=\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$，$g(x)=\sin 2x\ \left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ について，次の問いに答えよ． (九工大 [工]2014) 4

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\,dx$，$\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ を求めよ．

(2) $b>0$ とする．曲線 $y=g(x)$ および 3 直線 $y=-b$，$x=0$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を直線 $y=-b$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_1 を b を用いて表せ．

(3) $0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，不等式 $f(x)+g(x)\geqq 0$ を示せ．

(4) 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を直線 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

標準 7.109 曲線 $C : y = \log x$ の点 $(1,\ 0)$ における接線を l_1 とする．曲線 C と直線 l_1 および直線 $l_2 : x = e$ で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めたい．次の問いに答えよ．　(長崎大学 2007) 6

(1) 直線 l_1 の方程式を求めよ．

(2) x 軸と直線 l_1，l_2 で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(3) 2 次の多項式 $P(x) = ax^2 + bx + c$ が，次の条件 $\{xP(\log x)\}' = (\log x)^2\ (x > 0)$ を満たすような，定数 a，b，c の値を求めよ．

(4) 体積 V を求めよ．

標準 7.110 $x > 0$ で微分可能な関数 $f(x)$ が

$$\int_1^x f(t)\,dt = (x+1)f(x) - 2\log 2 - x + 1$$

をみたしている．ただし，対数は自然対数とする．次に答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．　(九工大 [工]2003) 5

(2) x 軸上に点 $\mathrm{A}(e-1,\ 0)$ をとり，曲線 $C : y = f(x)\ (x > 0)$ 上に 2 点 $\mathrm{P}(1,\ f(1))$，$\mathrm{Q}(e-1, f(e-1))$ をとる．C の弧 PQ，および，線分 AP，線分 AQ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

標準 7.111 a，b を実数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x) = a(e^x + e^{-x})$，$g(x) = 4x + b$ とする．曲線 $C : y = f(x)$ の点 $(\log 3,\ f(\log 3))$ における接線が直線 $l : y = g(x)$ と一致するとき，次に答えよ．ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする．また，$\log 3 < 1.1$ を用いてよい．　(九工大 [工]2012) 4

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 l および直線 $x = -\log 3$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 l および直線 $x = -\log 3$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

標準 7.112 関数 $f(x)=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ について，次に答えよ．
(九工大 [工]2002) 4

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け．また，$y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の $y \geqq 0$ の部分の長さ ℓ を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

標準 7.113 座標空間において，中心 $(0,\ 2,\ 0)$，半径 1 で xy 平面内にある円を D とする．D を底面とし，$z \geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱 (内部を含む) を E とする．点 $(0,\ 2,\ 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，D を含む方を T とする．以下の問いに答えよ．
(九大 [理]2020) 5

(1) $-1 \leqq t \leqq 1$ とする．平面 $x=t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ．また，T の体積を求めよ．

(2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

応用 7.114 $k>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．座標平面上の原点 O，点 A$(0,\ 1)$ に対し，第一象限の点 P を，$\angle \mathrm{AOP}=\theta$ を満たすように円 $D: x^2+y^2=1$ 上にとり，直線 OP と直線 $x=k\theta$ との交点を Q とする．θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすときの点 Q の軌跡を曲線 $y=f(x)$ とし，関数 $y=g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ で定める曲線を C とする．このとき，次の各問に答えよ．
(宮大 [医]2016) 6

(1) $r(\theta)=\mathrm{OQ}$ とするとき，$\lim\limits_{\theta \to +0} r(\theta)$ の値を求めよ．

(2) 点 Q がつねに円 D の内部にあるための k の条件を求めよ．

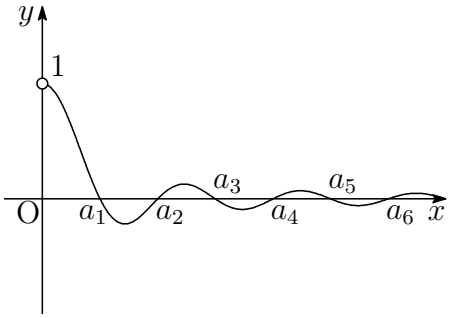
(3) 関数 $g(x)$ の増減と凹凸を調べ，曲線 C の概形をかけ．

(4) 曲線 C と x 軸および 2 直線 $x=\dfrac{\pi}{4}k$，$x=\dfrac{\pi}{3}k$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を，k を用いて表せ．

応用 7.115　右の図は，関数

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (x > 0)$$

のグラフの概形である．このグラフと x 軸との交点の x 座標を左から順に，$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ とおく．
$a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ において，このグラフを x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n とすると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ は収束する．



次の問いに答えよ．　(長大 [医]2003) 4

(1) a_n の値を求め，V_n を $\dfrac{\sin 2x}{x}$ の定積分で表しなさい．

(2) $V_n \leqq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ となることを示しなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n \leqq 1$ となることを示しなさい．

応用 7.116　a を $a > 2$ である実数とする．xy 平面上の曲線 $C : y = \dfrac{1}{\sin x \cos x}\ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ．　(熊大 [医]2014) 4

(2) C と x 軸，および 2 直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれた領域を S とする．S の面積を a を用いて表せ．

(3) S を x 軸の回りに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ．

応用 7.117　xy 平面上で，　$x = r(t)\cos t,\quad y = r(t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$
で表される曲線を C とする．　(九大 [理]2003) 1

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ．

(2) 一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right) dt$$

が成り立つことを示せ．ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である．

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積は $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t\,dt$ と表せることを示せ．

応用 7.118 次の問いに答えよ. (琉球大学 2007) 4

(1) 極方程式 $r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi\right)$ が表す曲線を直交座標平面上にかけ.

(2) (1) で求めた曲線を x 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる曲線を C とする. この曲線 C と x 軸によって囲まれる図形 D の面積を求めよ.

(3) (2) の図形 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

応用 7.119 円 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ. (九大 [理]2012) 1

応用 7.120 原点 O を中心とし, 点 A$(0,\ 1)$ を通る円を S とする. 点 B$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が, 点 C で y 軸に接しているとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ. (九大 [理]2013) 4

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする. 円 S の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, 円 T の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$, および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

応用 7.121 楕円(だえん) $x^2 + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ $(a > 0)$ と y 軸の交点を A$(0,\ a)$, B$(0, -a)$ とする. θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 点 P$(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ はこの楕円上を動く. 以下の問いに答えよ. (長大 [医]2016) 8

(1) 線分 AP の長さを ℓ とする. $X = \sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき, $Y = \ell^2$ となる関数を $Y = f(X)$ とする. $f(X)$ を X の式で表せ.

(2) $0 < a < 1$ の場合.
(1) の関数 $f(X)$ の最大値を a を用いて表し, そのときの X の値を求めよ.

(3) $a = 2$ の場合.
(1) の関数 $f(X)$ の値が最大となるときの点 P を P_1 とする. $f(X)$ の最大値と P_1 の座標を求めよ. また, 点 A$(0,\ 2)$ を中心とし点 P_1 を通る円を, x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

応用 7.122 原点を中心とする半径 3 の半円 $C : x^2 + y^2 = 9\ (y \geqq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点を R とする．以下の問いに答えよ．

(九大 [理]2018) 2

(1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく，かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする．このとき，線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ．

(2) 点 P を $(-3,\ 0)$ に固定する．Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ．

(3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする．U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

7.2.3　y 軸の周りの回転体の体積

基本 7.123 次の問いに答えよ．　(福岡教育大学 2006) 4

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+4} + 4\log(x + \sqrt{x^2+4})\}$ を微分せよ．

(2) 双曲線 $x^2 - 4y^2 = -4$ と直線 $y = \sqrt{2}$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) 双曲線 $x^2 - 4y^2 = -4$ と直線 $y = \sqrt{2}$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

標準 7.124 実数 $a\ (a > 0)$ に対して曲線 $y = ax^2 - a - 1$ を C_1 とし，C_1 と x 軸によって囲まれる部分の面積を S とする．また，$y \geqq ax^2 - a - 1$ を満たす領域にあり，原点を中心とする半径最大の円を C_2 とする．以下に答えよ．　(九工大 [情]2006) 1

(1) S を a を用いて表せ．

(2) S の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a の値に対して，C_1 と C_2 によって囲まれる部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

標準 7.125 $x \geqq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

について，以下の問いに答えよ． (熊大 [理]2016) 4

(1) $x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

(2) (1) で求めた x の値を a とする．曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = a$ で囲まれた図形を D とする．D の面積を求めよ．

(3) (2) の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

標準 7.126 $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，曲線 $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする．以下の問いに答えよ． (熊大 [理]2020) 3

(1) $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq V(b) - V(a) \leqq \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

を示せ．

(2) (1) の不等式を用いて，$\dfrac{d}{dt}V(t) = 2\pi t\dfrac{1}{\cos^2 t}$ を示せ．

(3) $V\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ を求めよ．

標準 7.127 曲線 $C_1 : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ $(x \geqq 0)$ と曲線 $C_2 : x^2 + y^2 = 1$ $(x \geqq 0)$ がある．曲線 C_1 の点 $\mathrm{P}(\sqrt{s},\ \sqrt{t})$ $(s > 0,\ t > 0)$ における法線を l とする．次に答えよ． (九工大 [工]2013) 4

(1) s を t を用いて表せ．また，直線 l の方程式を t を用いて表せ．

(2) 直線 l が曲線 C_2 に接するときの点 P の座標および接点 Q の座標を求めよ．

(3) P，Q は (2) で求めた点とし，点 $(0,\ 1)$ を R とする．曲線 C_1，弧 RQ および線分 PQ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

標準 7.128　点 A$(1,\ 0)$ および点 P$(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ がある．x 軸に関して点 P と対称な点を Q とし，2 点 P，A を通る直線を l，2 点 O，Q を通る直線を m とする．次に答えよ．ただし，O は原点を表す．　(九工大 [工]2016) 4

(1) $\sqrt{3}\cos\theta>1$ を示せ．

(2) 直線 l の方程式と直線 m の方程式を θ を用いて表せ．

(3) 直線 l と直線 m の交点 R の座標を θ を用いて表せ．

(4) 三角形 PAQ の面積を S とする．θ が変化するとき，S の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(5) θ が (4) で求めた値をとるとき，2 直線 l，m および曲線 $x^2+y^2=3$ $(x\geqq\sqrt{3}\cos\theta)$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

標準 7.129　xy 平面上において $y=|x-c|$ と $y=1$，$x=2$ で囲まれた四角形の部分を y 軸に関して回転させてできる回転体の体積を $f(c)$ とする．ただし，$1<c<2$ とする．　(琉球大学 2004) 6

(1) $f(c)$ を求めよ．

(2) $f(c)$ が最大となる c を求めよ．

標準 7.130　次に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．　(九工大 [工]2009) 3

(1) $x>0$ のとき，不等式 $\sqrt{x}\geqq 2+\log\dfrac{x}{4}$ を示せ．また，等号が成り立つときの x の値を求めよ．

(2) 曲線 $y=2+\log\dfrac{x}{4}$ と x 軸との交点の x 座標を求めよ．

(3) 2 曲線 $y=\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$，$y=2+\log\dfrac{x}{4}$ と x 軸で囲まれた図形を D とするとき，D の面積 S を求めよ．

(4) (3) の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

標準 7.131　関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ $(x\geqq 1)$ と曲線 $C:y=f(x)$ について，次に答えよ．　(九工大 [工]2015) 4

(1) 区間 $x>1$ で，$f(x)$ は増加し，曲線 C は上に凸であることを示せ．

(2) 曲線 C の点 $(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた直線 ℓ と曲線 C および x 軸で囲まれた図形を D とする．D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(4) (3) で定めた図形 D の面積 S を求めよ．

標準 7.132 a を正の実数とする．xy 平面上の曲線 $C : y = e^{ax}$ の接線で，原点を通るものを l とし，C と l および y 軸で囲まれた領域を S とする．以下の問いに答えよ．
(熊大 [理]2014) 4

(1) S を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_1 を求めよ．

(2) S を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_2 を求めよ．

(3) $V_1 = V_2$ となるときの a の値を求めよ．

応用 7.133 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x$$
$$g(x) = \cos\frac{x}{2} + c$$

とする．c は定数である．次の問いに答えよ．
(長大 [医]2014) 8

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = 0$ 以外の点で接するように c の値を定め，接点 $(p,\ q)$ を求めよ．また，そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における関数 $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係を調べよ．

(2) 定数 c と接点 $(p,\ q)$ は (1) で求めたものとする．そのとき，$0 \leqq x \leqq p$ において，y 軸および 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ によって囲まれた図形を D とする．D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

応用 7.134　図 1，図 2 のように，原点を O とする xyz 座標空間に扇形 OAB と直円錐(すい)がある．図 1 の扇形 OAB は，線分 OA を半径とし，中心角の大きさを θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする yz 平面上の扇形である．図 2 の直円錐は，線分 OA を母線とし，線分 AC を底面の円の直径とする円錐である．図 1，図 2 の点 A の座標を A$(0,\ 3,\ 0)$，点 C の座標を C$\left(0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ とするとき，以下の問いに答えよ．　(長大 [医]2021) 10

図 1

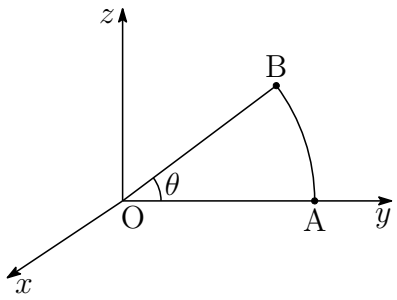
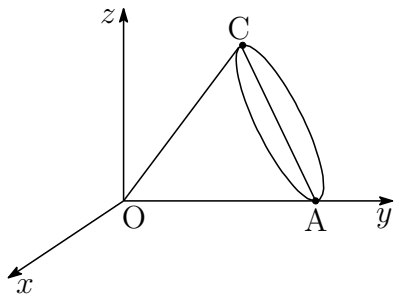


図 2



(1)　図 1 の扇形 OAB を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体を T_1 とする．平面 $y=t$ $(0 \leqq t \leqq 3)$ で T_1 を切ったときの断面積 $S_1(t)$ を t の式で表せ．

(2)　(1) の回転体 T_1 の体積 V_1 を求めよ．

(3)　図 2 の直円錐を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体を T_2 とする．平面 $y=t$ $(0 \leqq t \leqq 3)$ で T_2 を切ったときの断面積 $S_2(t)$ を t の式で表せ．

(4)　(3) の回転体 T_2 の体積 V_2 を求めよ．

(5)　(2) の V_1 と (4) の V_2 の大小を調べよ．

7.2.4 直線を軸とする回転体

応用 7.135 原点を O とする xy 座標平面上において，放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = x$ があり，C と l で囲まれた領域の周および内部を図形 F とする．
また，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を通り，ℓ に垂直な直線を m とし，m と l の交点を Q とする．以下の問いに答えよ． (長崎大学 2024) 7

(1) 図形 F を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 直線 m の方程式および点 Q の座標を，t を用いてそれぞれ表せ．

(3) 線分 PQ の長さの平方 (PQ^2) を t を用いて表せ．

(4) 線分 OQ の長さを s とするとき，s および $\dfrac{ds}{dt}$ を，t を用いてそれぞれ表せ．

(5) 図形 F を直線 l の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．また，(1) で求めた V_1 との比 $\dfrac{V_2}{V_1}$ を求めよ．

応用 7.136 a は正の定数とする．放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = ax$ で囲まれる図形を，直線 $y = ax$ の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．
(分大 [医]2005) 10

7.2.5　容積と水面の速度

基本 7.137 $0 \leqq x \leqq 3$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (1 \leqq x \leqq 3) \\ 0 & (0 \leqq x < 1) \end{cases}$$

がある．曲線 $y = f(x)$ を y 軸のまわりに 1 回転してできる形の容器に毎秒 2π の割合で水を注入する．注入し始めてから t 秒後の水の体積を V，底面から水面までの高さを h とする．このとき，次の問いに答えなさい．　(大分大学 2008) 4

(1) V を h の式で表せ．

(2) 容器が水で満たされるのは何秒後か．

(3) $t = 6$ のときの水面の上昇する速度 $\dfrac{dh}{dt}$ を求めよ．

標準 7.138 底面が半径 2m の円で高さが 2m の円筒形の水槽の中央に，半径 1m の鉄製の球が置かれている．この水槽に毎秒 $a\,\mathrm{m}^3$ の割合で水を注ぎ入れる．以下に答えよ．

(1) この水槽に貯えられる水の最大量を求めよ．　(九工大 [情]2003) 1

(2) 水面の高さが h m $(0 \leqq h \leqq 2)$ になったとき，水槽に貯えられている水量 V を h を用いて表せ．

(3) 水面の高さが h m $(0 < h < 2)$ になったときの水面の上昇速度 $v(h)$ を a と h を用いて表せ．

(4) 水面の上昇速度の最大値を求めよ．

標準 7.139 関数 $f(x)=1+2\sqrt{x}-x$ について，次の各問いに答えよ．
(鹿児島大学 2004) 2

(1) 関数 $f(x)$ の増減や凹凸などを調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形を $0 \leqq x \leqq 5$ の範囲でかけ．

(2) 関数 $f(x)$ において，x の範囲を $0 \leqq x \leqq 5$ とするとき，曲線 $y=f(x)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の容器を考える．容器は横になっている．底面 $(x=0)$ は閉まっているものとする．開口部 (上面) は $x=5$ の位置である．この容器の底面から $x=h$ $(0 \leqq h \leqq 5)$ までの容積 V を h を用いて表せ．

(3) (2) で考えた容器を開口部を上向きにして立て，底面を水平に固定する．開口部以外は密閉されているものとする．そこに毎秒 a $(a>0)$ の割合で水を注ぐ．底面からの水面の高さ h が 4 となるときの時刻 t およびそのときの水面が上昇する速度を求めよ．ただし，水を注ぎ始める時刻を 0 とする．

標準 7.140 a を $a>1$ を満たす定数とする．原点 O と点 P$(1,\ 0)$ を線分で結び，点 P と点 Q$(a,\ \log a)$ を曲線 $y=\log x$ で結ぶ．このようにして得られる曲線 OPQ を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の容器を考える．ただし，OP を含む部分を底面として，水平に置くものとする．次の問いに答えよ．
(長崎大学 2010) 4

(1) この容器の容積 V を a を用いて表せ．

(2) m を正の定数とする．この容器に，単位時間あたり m の水を一定の割合で注ぎ入れる．ただし，最初は水が全く入っていない状態とする．注ぎ始めてから時間 t $\left(0<t<\dfrac{V}{m}\right)$ が経過したとき，底面から水面までの高さを h，水面の上昇する速度を v とする．h および v を m，t を用いて表せ．

標準 7.141 正の実数 a と関数 $f(x)=|x^2-a^2|$ $(-2a \leqq x \leqq 2a)$ がある．$y=f(x)$ のグラフを y 軸のまわりに回転させてできる形の容器に πa^2 (cm^3/秒) の割合で水を静かに注ぐ．水を注ぎ始めてから容器がいっぱいになるまでの時間を T(秒) とする．ただし，長さの単位は cm とする．以下の問いに答えよ．
(九工大 [情]2011) 3

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) 水面の高さが a^2 (cm) になったとき，容器中の水の体積を V (cm^3) とする．V を a を用いて表せ．

(3) T を a を用いて表せ．

(4) 水を注ぎ始めてから t 秒後の水面の高さを h (cm) とする．h を a と t を用いて表せ．ただし，$0<t<T$ とする．

(5) 水を注ぎ始めてから t 秒後の水面の上昇速度を v (cm/秒) とする．v を a と t を用いて表せ．ただし，$0<t<T$ とする．

7.3　曲線の長さ

□□ **7.142** 媒介変数表示された曲線

$$x = \log_e(t + \sqrt{t^2+1}), \quad y = \sqrt{t^2+1}$$

の $t = 0$ から $t = t_0$ に対応する部分の長さを t_0 で表せ．ただし $t_0 > 0$ とする．また e は自然対数の底である．　(福岡教育大学 2004) 1

標準 7.143 平面上の点の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする．極方程式 $r = f(\theta)$ によって表される曲線 C について，次の問いに答えよ．　(熊大 [理]2005) 4

(1) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ について，$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2$ を $f(\theta)$，$f'(\theta)$ を用いて表せ．

(2) $f(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{3}$ のとき，曲線 C の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ．

標準 7.144 中心が原点 O で半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する．円 C_2 上の点 P は最初に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ にあるとする．円 C_2 の中心を B とするとき，以下の問いに答えなさい．　(分大 [医]2016) 8

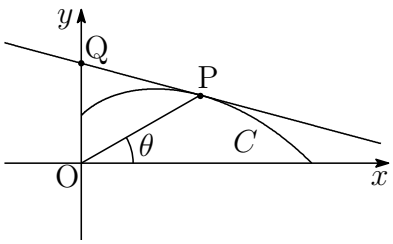
(1) $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表しなさい．

(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めなさい．

応用 7.145 O を原点とする座標平面上の曲線 C は媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = e^{-\theta}\cos\theta \\ y = e^{-\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$



と表されている．以下に答えよ．(九工大 [情]2002) 4

(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．点 $\mathrm{P}(e^{-\theta}\cos\theta,\ e^{-\theta}\sin\theta)$ における曲線 C の接線の傾きを θ を用いて表せ．

(2) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．点 $\mathrm{P}(e^{-\theta}\cos\theta,\ e^{-\theta}\sin\theta)$ における曲線 C の接線が y 軸と交わる点を Q とおくとき，$\angle\mathrm{OPQ}$ は θ の値によらず $\dfrac{\pi}{4}$ であることを示せ．

(3) 曲線 C の長さを求めよ．

応用 7.146 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし，関数 $y=f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする．ただし，$\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<\dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする．また，点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる．

(1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ． (九大 [理]2001) 7

(2) $\alpha(t)$，$\beta(t)$ を求めよ．

(3) t が a から b $(a<b)$ まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1，L_2 とする．L_2-L_1 を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ．

応用 7.147 中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす．このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする．次の問いに答えよ． (九大 [理]2010) 4

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ．

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が 1 回転したときの点 P の描く曲線を C とする．曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ．

7.4　速度と道のり

標準 7.148 関数 $s(t)$ はつねに $s'(t) > 0$ をみたし，$s(0) = 0$ とする．座標平面上を運動する点 P の座標 $(x,\ y)$ は，時刻 t の関数として

$$x = s(t), \quad y = \frac{1}{2}\{s(t)\}^2$$

で与えられ，点 P の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ は

$$|\vec{v}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \{s(t)\}^2}}$$

をみたすとする．また，$\alpha = s\left(-\dfrac{4}{3}\right)$，$\beta = s\left(\dfrac{4}{3}\right)$ とおく．次に答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ が成り立つように関数 $f(x)$ を定めよ．　(九工大 [工]2014) 3

(2) $\dfrac{4}{3} = \displaystyle\int_{-\frac{4}{3}}^{0} \frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt$，$\dfrac{4}{3} = \displaystyle\int_{0}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt$ を用いて，α，β の値を求めよ．

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = g(x)$ が成り立つように関数 $g(x)$ を定めよ．また，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ のとき $g(x)$ が最大となる x の値を求めよ．

応用 7.149 曲線 $y = e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする．すべての時刻 t で $|\vec{v}| = 1$ かつ $\dfrac{dx}{dt} > 0$ であるとして，次の問いに答えよ．　(九大 [理]2009) 5

(1) P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ．

(2) P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ．

(3) P が曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ．

応用 7.150 曲線 $y = x^2$ の上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ がある．この動点の速度ベクトルの大きさが一定 C のとき，次の問いに答えよ．ただし，動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は時刻 t に対して x が増加するように動くとする． (分大 [医]2013) 9

(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ の速度ベクトル $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を x で表せ．

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ の加速度ベクトル $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を x で表せ．

(3) 半径 r の円，$x^2 + (y - r)^2 = r^2$ 上を速度ベクトルの大きさが一定 C で動く点 Q があるとき，この加速度ベクトルの大きさを求めよ．

(4) 動点 P と Q の原点 $(0,\ 0)$ での加速度ベクトルの大きさが等しくなるときの半径 r を求めよ．

7.5　微分方程式

応用 7.151 以下の文章を読んで後の問いに答えよ。　(九大理系 2023) 4

三角関数 $\cos x$，$\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A) すべての x，y について $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$

(B) すべての x，y について $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

(C) $f(0)\neq 0$

(D) $f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$，$g'(0)=1$

①条件 (A), (B), (C) から $f(0)=1$, $g(0)=0$ がわかる。以上のことから
②$f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で, $f'(x)=-g(x)$，$g'(x)=f(x)$ が成立する ことが示される。
③上のことから $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A)，(B)，(C)，(D) を満たす関数は三角関数 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$ であることが示される。

さらに，a，b を実数で $b\neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)′ $f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=a$，$g'(0)=b$

におきかえて，条件 (A)，(B)，(C)，(D)′ を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも，条件 (A)，(B)，(C) から $f(0)=1$，$g(0)=0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right),\quad q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，④条件 (A)，(B)，(C)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x)=$ ア，$g(x)=$ イ が得られる。

(1) 下線部 ① について，$f(0)=1$，$g(0)=0$ となることを示せ。

(2) 下線部 ② について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，$f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。

(3) 下線部 ③ について，下線部 ①，下線部 ② の事実を用いることにより，$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)=1$ となることを示せ。

(4) 下線部 ④ について，条件 (B)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

(B) すべての x, y について $q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$

(D) $p(x)$，$q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0$，$q'(0)=1$

を満たすことを示せ。空欄 ア , イ に入る関数を求めよ。

応用 7.152 微分可能な x の関数 $f(x)$，$g(x)$ について以下の問いに答えなさい．
(分大 [医]2019) 8

(1) $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，$f'(x)-f(x)=0$ が任意の実数 x に対して成り立つとき，関数 $f(x)\cdot e^{-x}$ は定数関数であることを示しなさい．ただし，e は自然対数の底とする．

(2) $g(x)$ とその導関数 $g'(x)$ について，$g'(x)-g(x)=x^2$ が任意の実数 x に対して成り立ち，さらに $g(0)=0$ とする．このとき，$x>0$ においてつねに $g(x)>0$ となることを示しなさい．

発展 7.153 微分可能な関数 $y=f(x)$ が次の方程式を満たすとする．

$$a_nf^{(n)}(x)+a_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1f^{(1)}(x)+a_0f(x)=0 \tag{A}$$

ここに n は自然数，a_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$ は実数の定数で，$a_n\neq 0$ である．また，$y^{(k)}=f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の k 次導関数で $y^{(0)}=f^{(0)}(x)=f(x)$ とする．(A) のような方程式を第 n 階微分方程式といい，(A) に対して t の n 次方程式

$$a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0=0 \tag{B}$$

を (A) の特性方程式という．このとき次の問いに答えよ．　(分大 [医]2010) 9

(1) 特性方程式 (B) の解が実数 r であるとき，関数 $y=e^{rx}$ が方程式 (A) を満たすことを証明せよ．

(2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解(注) にもつとき，次の t に関する方程式は r を $k-1$ 重解にもつことを証明せよ．ただし，$k=2,3,\cdots$ とする．

$$na_nt^{n-1}+(n-1)a_{n-1}t^{n-2}+\cdots+2a_2t+a_1=0$$

(注) t の m 次方程式が適当な多項式 $Q(t)$ を用いて $(t-r)^kQ(t)=0$ となるとき，$t=r$ をこの方程式の k 重解と定義する．ただし，$k=1,2,\cdots$ とする．

(3) 実数の定数 r に対して x の関数を $y_i=x^ie^{rx}$ $(i=0,1,2\cdots)$ とする．
このとき，${y_j}^{(n)}$ を x，${y_{j-1}}^{(n-1)}$ および ${y_{j-1}}^{(n)}$ を用いて表せ．ただし，
$j=1,2,3,\cdots$ とする．

(4) 実数 r が n 次方程式 (B) の k 重解であるとき $y_i=x^ie^{rx}$
$(i=0,1,2,\cdots,k-1)$ が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ．ただし，k は自然数である．

7.6 問題研究

7.6.1 積分公式

m，n を 0 以上の整数とする．

$$I(m,n)=\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

とおくと，部分積分法により

$$\begin{aligned}I(m,n)&=\frac{1}{m+1}\int_0^1 (t^{m+1})'(1-t)^n\,dt\\&=\left[\frac{1}{m+1}t^{m+1}(1-t)^n\right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{n-1}\,dt\\&=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)\\&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}I(m+n,0)\\&=\frac{m!n!}{(m+n)!}\int_0^1 t^{m+n}\,dt=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\end{aligned}$$

この結果を利用すると

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$$

について，$x=\alpha+(\beta-\alpha)t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\beta-\alpha$

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

このとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$

よって $\displaystyle\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

121 ページの 7.6(九工大 [情]2012) について ($m=2$，$n=1$)

$$S=k\int_{-\frac{p}{2}}^{p}\left(x+\frac{p}{2}\right)^2(p-x)\,dx=k\cdot\frac{2!1!}{4!}\left\{p-\left(-\frac{p}{2}\right)\right\}^4=\frac{27}{64}kp^4$$

121 ページの 7.7(長崎大学 2009) について ($m=n=2$)

$$S=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)^2\,dx=\frac{2!2!}{5!}(\beta-\alpha)^5=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

7.6.2　シンプソンの公式

$f(x)$ が 3 次以下の整式のとき，次のシンプソン (Simpson) の公式が成り立つ．

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)}\,\boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{6}}\left\{\boldsymbol{f(a)} + \boldsymbol{4f}\left(\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}}\right) + \boldsymbol{f(b)}\right\}$$

証明　$k = \dfrac{b-a}{2}$，$x = t + \dfrac{a+b}{2}$，$g(t) = f\left(t + \dfrac{a+b}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(t + \frac{a+b}{2}\right)dt \\ &= \int_{-k}^{k} g(t)\,dt = \int_0^k \{g(t) + g(-t)\}dt\end{aligned}$$

$g(t)$，$g(-t)$ をマクローリン展開をすると ($f(x)$ の 3 次の係数を c とする)

$$\begin{aligned}g(t) &= g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \frac{c}{6}t^3 \\ g(-t) &= g(0) - g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 - \frac{c}{6}t^3\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\int_0^k \{g(t) + g(-t)\}dt = \int_0^k \{2g(0) + g''(0)t^2\}dt$

$$= 2g(0)k + \frac{1}{3}g''(0)k^3 = \frac{k}{3}\{6g(0) + g''(0)k^2\}$$

ここで，$g(k) + g(-k) = 2g(0) + g''(0)k^2$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{k}{3}\{6g(0) + g''(0)k^2\} &= \frac{k}{3}\{g(k) + g(-k) + 4g(0)\} \\ &= \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}\end{aligned}$$

証終

とくに，$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \leqq g(x)$ である 3 次以下の 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた図形において，$f(a) = g(a)$，$f(b) = g(b)$ であるとき，シンプソンの公式により，$h = g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ とおくと，その面積 S は

$$S = \frac{2}{3}(b-a)h$$

7.6.3 法線群の包絡線

124 ページの 7.19(長崎 [医]2008) および 7.20(九大 [理]2009) は，曲線の法線群の包絡線に関する出題である．

一般に $C_1 : y = f(x)$ とすると，2 点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$ における法線の方程式は $(u \neq t)$，それぞれ

$$(x-t)+f'(t)(y-f(t))=0, \quad (x-u)+f'(u)(y-f(u))=0$$

であり，これから

$$x+f'(t)y=t+f'(t)f(t) \quad \cdots ①, \quad x+f'(u)y=u+f'(u)f(u) \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$\begin{aligned}\{f'(u)-f'(t)\}y &= u-t+f'(u)f(u)-f'(t)f(t)\\ &= u-t+f'(u)\{f(u)-f(t)\}+f(t)\{f'(u)-f'(t)\}\end{aligned}$$

$u \neq t$ であるから，両辺を $u-t$ で割ると

$$\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}y = 1+f'(u)\cdot\frac{f(u)-f(t)}{u-t}+f(t)\cdot\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}$$

$u \to t$ とすると　　$f''(t)y = 1+\{f'(t)\}^2+f(t)f''(t)$

$f''(t) \neq 0$ のとき　　$y = f(t)+\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを ① に代入すると　$x = t-\dfrac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

よって，t を変数として次の $(x,\ y)$ が描く軌跡が C_2 である．

$$x = t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}, \qquad y = f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

上で求めた $(x,\ y)$ は P における曲率円 (接触円) の中心でもある．P における曲率円とは，曲線上の 3 点 P，Q，R について，Q，R が曲線上を P に限りなく近づくときに占める極限の位置の円である．その中心を**曲率中心**という．

C_1 上の 3 点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$，$\mathrm{R}(v,\ f(v))$ とする $(t<u<v)$．3 点 P，Q，R を通る円を $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2-r^2=0$ とすると

$$\begin{aligned}(t-c_1)^2+\{f(t)-c_2\}^2-r^2&=0\\ (u-c_1)^2+\{f(u)-c_2\}^2-r^2&=0\\ (v-c_1)^2+\{f(v)-c_2\}^2-r^2&=0\end{aligned}$$

ここで，$g(s)=(s-c_1)^2+\{f(s)-c_2\}^2-r^2$ とおくと　　$g(t)=g(u)=g(v)=0$
$g(t)=g(u)$ であるから，ロル (Rolle) の定理により

$$g'(t_1)=0 \quad (t<t_1<u)$$

を満たす t_1 が存在する．同様に，$g(u)=g(v)$ であるから

$$g'(t_2)=0 \quad (u<t_2<v)$$

を満たす t_2 が存在する．$g'(t_1)=g'(t_2)$ であるから，さらにロルの定理を用いると

$$g''(t_3)=0 \quad (t_1<t_3<t_2)$$

を満たす t_3 が存在する．Q，R が P に限りなく近づくとき，$u\to t$，$v\to t$ となるから，上の諸式において

$$g(t)=0, \quad g'(t)=0, \quad g''(t)=0$$

$g'(s)$，$g''(s)$ は

$$g'(s)=2(s-c_1)+2f'(s)\{f(s)-c_2\}$$
$$g''(s)=2+2f''(s)\{f(s)-c_2\}+2\{f'(s)\}^2$$

$g'(t)=0$，$g''(t)=0$ であるから

$$(t-c_1)+f'(t)\{f(t)-c_2\}=0, \quad 1+\{f'(t)\}^2+f''(t)\{f(t)-c_2\}=0$$

上の第 2 式から　　$c_2-f(t)=\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$
これを第 1 式に代入すると　　$c_1-t=-\dfrac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$
上の 2 式を $g(t)=0$ に代入することにより，曲率円の半径 r は

$$r^2=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^3}{\{f''(t)\}^2} \quad \text{ゆえに} \quad r=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}$$

よって，曲線の P における曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は

$$c_1=t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}, \qquad c_2=f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ の描く軌跡を**縮閉線**といい，曲線の法線群の包絡線と一致することがわかる．

曲線の弧長 s に対する接線の向きの変化率を曲率といい，曲率 κ は，次式で定義される．

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における接線が，x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$y' = \tan\theta$$

これを θ について，微分することにより

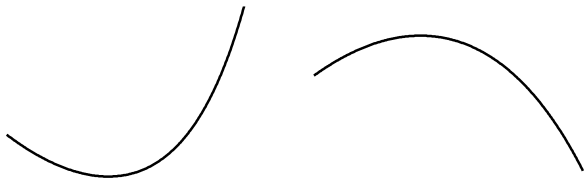
$$y''\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (y')^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1+(y')^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$ であるから，$\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$ より

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = \frac{y''}{1+(y')^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{y''}{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}} \tag{7.1}$$

曲率 κ の逆数 $\dfrac{1}{\kappa}$ を曲率半径という．曲率円の半径は曲率半径の絶対値に等しい．
$\kappa > 0$ すなわち $y'' > 0$ のとき下に凸，$\kappa < 0$ すなわち $y'' <$ のとき上に凸である．
変曲点は曲率の符号が変わる点であり，頂点は曲率が極値をとる点である．

例えば，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ について $y'' = 2a$ であるから，κ が極値をとるのは，$y' = 0$ を満たす点 (頂点) であることがわかる．



$\kappa > 0$ $\kappa < 0$

正則曲線 $C(t) = (x(t),\ y(t))$ の接ベクトルの x 軸の正の向きとなす角を θ とし，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$，$\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ とすると

$$\cos\theta = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \sin\theta = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \tag{7.2}$$

上の 2 式を t で微分すると

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

したがって　　$\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

また，$\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ であるから

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.3}$$

点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ が時刻 t の関数として運動するとき，速度ベクトルを $\vec{v}$，加速度ベクトルを $\vec{\alpha}$ とすると

$$\vec{v} = (\dot{x},\ \dot{y}), \quad \vec{\alpha} = (\ddot{x},\ \ddot{y})$$

とくに，P が $C(t)$ 上を一定の速さ $c > 0$ で運動するとき

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c^2 \quad \text{これを } t \text{ で微分すると} \quad 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} = 0$$

したがって　$(\dot{x},\ \dot{y})\cdot(\ddot{x},\ \ddot{y}) = 0$　すなわち　$\vec{v}\perp\vec{\alpha}$

このとき，(7.2) より，単位接ベクトルを $\vec{e}_1$ とし，$\vec{e}_1$ を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたベクトルを $\vec{e}_2$ とすると

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{c}(\dot{x},\ \dot{y}), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{c}(-\dot{y},\ \dot{x})$$

$\vec{v} = c\vec{e}_1 = c(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であるから，これを t で微分すると

$$\vec{\alpha} = c\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta,\ \cos\theta) = c\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{e}_2 = c^2\kappa\vec{e}_2 = c^2\kappa\left(-\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},\ \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right)$$

補足　$C(t) = (x(t),\ y(t))$ の曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は，曲線 $y = f(x)$ と同様にして求めることができるが，曲率半径 $\dfrac{1}{\kappa}$ および $\vec{e}_2$ から，次のように求めることもできる．

$$(c_1,\ c_2) = (x(t),\ y(t)) + \frac{1}{\kappa}\vec{e}_2 = (x(t),\ y(t)) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}(-\dot{y},\ \dot{x})$$

7.6.4 等速運動と曲線の曲率

前ページ結果から，168 ページ 7.149(九大 [理]2009) や 7.150(分大 [医]2013) は，これらの公式を用いると簡単に求めることができる．

公式 1

正則曲線 $C(t)=(x(t),\ y(t))$ 上を一定の速さ $c>0$ で運動する物体の速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とすると

$$\vec{v}=c\vec{e}_1,\quad \vec{\alpha}=c^2\kappa\vec{e}_2,\quad |\vec{\alpha}|=c^2|\kappa|$$

ただし，$\left(\dot{x}=\dfrac{dx}{dt},\ \dot{y}=\dfrac{dy}{dt},\ \ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \ddot{y}=\dfrac{dy^2}{dt^2}\right)$

$$\vec{e}_1=\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right),\quad \vec{e}_2=\left(-\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\ \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right),$$

$$\kappa=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

補足 $C(t)$ が正則であるとは，$\dot{x}^2+\dot{y}^2\neq 0$ であることをいう．例えば $C_1(t)=(t^3,\ t^6)$ とすると $C_1'(t)=(3t^2,\ 6t^5)$ であるから，$t=0$ のとき，$\dot{x}^2+\dot{y}^2=0$ となり，この点 (特異点) では，上の公式 1 を利用できない．この問題を解消するには，この曲線を $C_2(t)=(t,\ t^2)$ と書き直すことにより特異点を解消することができる．確かに，$C_1(t)$ は一般的 (generic) には正則ではあるが，$C_2(t)$ のように一般 (general) に正則ではない．

同様に，(7.1) から次のことがわかる．

公式 2

曲線 $C:y=f(x)$ 上を一定の速さ $c>0$ で運動する物体の速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とすると

$$\vec{v}=c\vec{e}_1,\quad \vec{\alpha}=c^2\kappa\vec{e}_2,\quad |\vec{\alpha}|=c^2|\kappa|$$

ただし，

$$\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\ \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right),\quad \vec{e}_2=\left(-\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right),$$

$$\kappa=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

168 ページの 7.149(九大 [理]2009) の曲線 $y = e^x$ を公式 2 に適用すると，$y' = e^x$，$y'' = e^x$ より

$$\vec{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right), \quad \vec{e_2} = \left(-\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right),$$

$$\kappa = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

条件により $c = 1$ であるから

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right) \\
\vec{\alpha} &= \kappa \vec{e_2} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right) \\
&= \left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2} \right) \\
|\vec{\alpha}| &= |\kappa| = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

同様に，7.150(分大 [医]2013) の曲線 $y = x^2$ を公式 2 に適用すると，$y' = 2x$，$y'' = 2$ より

$$\vec{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\ \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \right), \quad \vec{e_2} = \left(-\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right),$$

$$\kappa = \frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

条件により $c = C$ であるから

(1) $\vec{v} = C\vec{e_1} = C \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\ \dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \right)$

(2) $\vec{\alpha} = C^2 \kappa \vec{e_2} = \dfrac{2C^2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) = \dfrac{2C^2}{(1+4x^2)^2}(-2x,\ 1)$

(3) 等速円運動をする物体 Q の加速度は (物理学の公式を知っていれば)　$\dfrac{C^2}{r}$

(4) $|\vec{\alpha}| = C^2|\kappa| = \dfrac{2C^2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$ より，P が原点を通過するとき　$|\vec{\alpha}| = 2C^2$

補足　曲線 $y = x^2$ の曲率 $\kappa = \dfrac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$ は，原点 $(0,\ 0)$ で極大となる．曲率が極値をとる点を**頂点**といい，曲線 $y = x^2$ の頂点が原点であることがわかる．

また，7.149(九大 [理]2009) の (4) では，$|\vec{\alpha}| = \kappa$ であるから，$|\vec{\alpha}|$ の最大値，すなわち，曲線 $y = e^x$ の頂点における曲率 κ を求めている．

7.6.5 バウムクーヘン型求積法

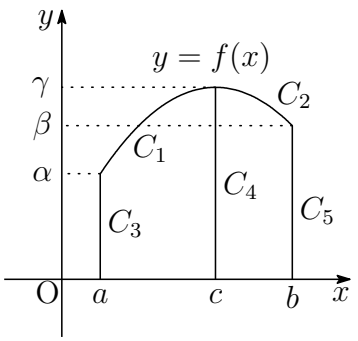
次の回転体の体積について，円筒形に区分して考えると積分の意味が理解できる．

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

証明 $y = f(x)$ のグラフを単調増加または単調減少の区間に分けて証明する．例えば，右の図のように $y = f(x)$ は $a \leqq x \leqq c$ で単調増加，$c \leqq x \leqq b$ では単調減少とする．このとき，それぞれの区間で逆関数が存在することから



$$C_1 : x = g_1(y)\ (\alpha \leqq y \leqq \gamma),$$
$$C_2 : x = g_2(y)\ (\beta \leqq y \leqq \gamma)$$

とおき，さらに次のようにおく．

$$C_3 : x = a\ (0 \leqq y \leqq \alpha),\quad C_4 : x = c\ (0 \leqq y \leqq \gamma),\quad C_5 : x = b\ (0 \leqq y \leqq \beta)$$

x 軸と C_1, C_3, C_4 で囲まれた部分および C_2, C_4, C_5 で囲まれた部分をそれぞれ y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^\gamma c^2\,dy - \int_0^\alpha a^2\,dy - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2\,dy \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \int_a^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \Big[\, x^2 f(x) \,\Big]_a^c + 2\int_a^c xf(x)\,dx = 2\int_a^c xf(x)\,dx \\
\frac{V_2}{\pi} &= \int_0^\beta b^2\,dy + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2\,dy - \int_0^\gamma c^2\,dy \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \int_b^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \Big[\, x^2 f(x) \,\Big]_b^c - 2\int_b^c xf(x)\,dx = 2\int_c^b xf(x)\,dx
\end{aligned}$$

よって $\quad V = V_1 + V_2 = 2\pi \int_a^c xf(x)\,dx + 2\pi \int_c^b xf(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$

一般に，単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る． **証終**

7.6.6　パップス・ギュルダンの定理

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

一般に，$a \leqq x \leqq b$ において $f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq 0$ である 2 曲線 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積を S，その重心の y 座標を h とすると

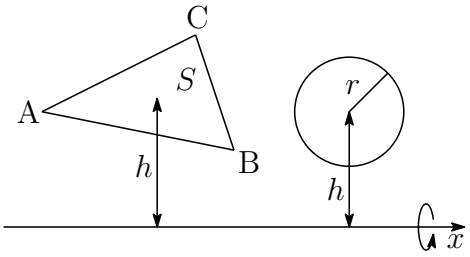
$$hS = \int_a^b \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \times \{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

$\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$ は微小区間の面積，$\dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$ はその重心を表す．
この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

よって，上の 2 式から　　$\boldsymbol{V = 2\pi hS}$
回転体の体積は，(回転による重心の軌跡の長さ) × (面積) である．

例 1 パップス・ギュルダンの定理を用いると，右の図の △ABC の面積が S，x 軸から重心までの距離が h のとき，x 軸のまわりに 1 回転した立体の体積 V は



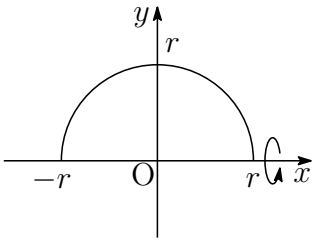
$$V = 2\pi hS$$

半径 r の円の中心と x 軸との距離が h のとき $(r < h)$，x 軸のまわりに 1 回転した立体 (solid torus) の体積 V は (torus は solid torus の表面)

$$V = 2\pi h \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 hr^2$$

図形の面積とその回転体の体積からその図形の重心を求めることができる．

例 2 右の半円は，y 軸に関して対称であるから，重心の x 座標は 0 である．また重心の y 座標 h は，x 軸のまわりに 1 回転すると，その立体 (球) の体積 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ と半円の面積 $S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$ により

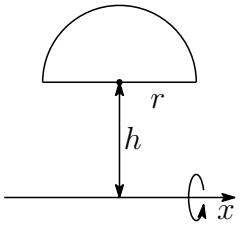


$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi h \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \quad \text{ゆえに} \quad h = \frac{4r}{3\pi}$$

例 3 右の図の半円 $(r < h)$ の重心の高さは，例 2 の結果から

$$h + \frac{4r}{3\pi}$$

この半円を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は



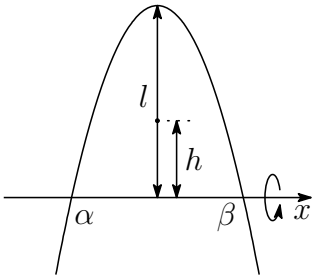
$$V = 2\pi\left(h + \frac{4r}{3\pi}\right)\cdot\frac{1}{2}\pi r^2 = \pi^2 h r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$$

例 4 放物線 $C : y = -a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a > 0)$ と x 軸で囲まれた図形を D とすると，D の面積 S は

$$S = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi a^2 \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)^2\,dx \\ &= \frac{\pi a^2}{30}(\beta-\alpha)^5 \end{aligned}$$

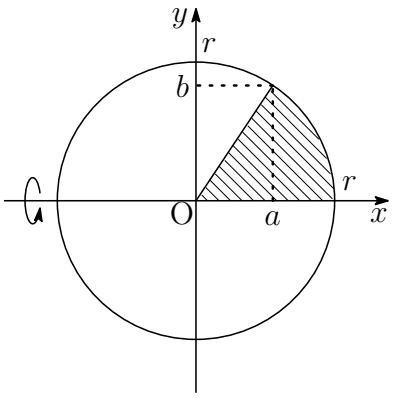


また，頂点の y 座標 l は　$l = \dfrac{a}{4}(\beta-\alpha)^2$

D の重心の y 座標を h とすると，パップス・ギュルダンの定理により

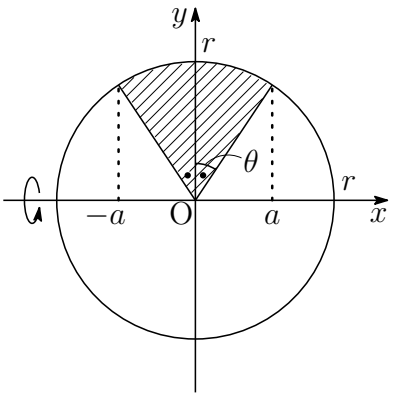
$$h = \frac{V}{2\pi S} = \frac{a}{10}(\beta-\alpha)^2 = \frac{2}{5}l$$

例 5 右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積 V_1 は



$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi b^2 \cdot a + \pi \int_a^r (r^2 - x^2)dx \\ &= \frac{\pi}{3}(r^2 - a^2)a + \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_a^r \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^2 a \end{aligned}$$

したがって，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積 V_2 は $(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2})$



$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2V_1 = \frac{4}{3}\pi r^2 a$$

斜線部分の面積を S，重心の y 座標を h とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2 \cdot 2\theta = r^2\theta \\ h &= \frac{V_2}{2\pi S} = \frac{2a}{3\theta} \end{aligned}$$

また，例 5 の下の図において，$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき，斜線部分の重心の y 座標を h とすると，斜線部以外の扇形の重心の y 座標は

$$-\frac{2a}{3(\pi - \theta)}$$

したがって，斜線部および斜線部以外の図形をあわせた図形 (円) の重心は円の中心 (原点) であるから

$$r^2\theta \times h + r^2(\pi - \theta) \times \left\{ -\frac{2a}{3(\pi - \theta)} \right\} = \pi r^2 \times 0$$

これを解いて　　$h = \dfrac{2a}{3\theta}$　　$\cdots(*)$

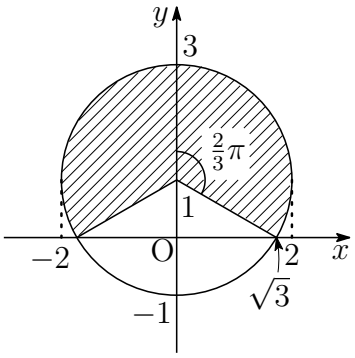
ゆえに，$(*)$ は，$0 < \theta \leqq \pi$ について成立する．

例 6 右の図形の面積 S は

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

$(*)$ から，その重心の座標 h は

$$h = 1 + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \frac{2}{3}\pi} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$



よって，斜線部分を x 軸の回りに 1 回転させた立体の体積は

$$2\pi hS = 2\pi\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) \times \frac{8}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi^2 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\pi$$

また，3 点 $(-\sqrt{3},\ 0)$，$(\sqrt{3},\ 0)$，$(0,\ 1)$ を頂点する三角形を x 軸のまわりに回転させた立体の体積は $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ である．

したがって，157 ページの 7.119(九大 [理]2012) にある円 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ を x 軸のまわりに回転させた立体の体積 V は

$$V = \left(\frac{16}{3}\pi^2 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\pi\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi^2 + 6\sqrt{3}\pi$$

また，7.118(琉球大学 2007) の (2) も上と同様にして求めることができる．

なお，パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外である．入試では使用できないが，便利な検算法である．

例題

曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれ部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V

解 1 (基本的な積分法) 曲線 $y = \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ および $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ の部分をそれぞれ C_1，C_2 とする．C_1 および C_2 を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると，$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ より

$$\begin{aligned}
\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^1 x^2\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx \\
&= \Big[\ (x^2-2)\sin x + 2x\cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \\
\frac{V_2}{\pi} &= \int_0^1 x^2\,dy = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx \\
&= \Big[\ (x^2-2)\sin x + 2x\cos x\ \Big]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} + 2\pi - 2
\end{aligned}$$

よって　　$V = V_2 - V_1 = 2\pi^2$

解 2 (バウムクーヘン型求積法)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\,dx = 2\pi \Big[\ -x\cos x + \sin x\ \Big]_0^{\pi} = 2\pi^2$$

解 3 (パップス・ギュルダンの定理)

$$S = \int_0^{\pi} \sin x = \Big[\ -\cos x\ \Big]_0^{\pi} = 2$$

図形の重心は直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 上にあるから

$$V = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi^2$$

7.6.7 線形微分方程式

172 ページの 7.153(分大 [医]2010) は，第 n 階線形微分方程式の一般解を求める手がかりがある．

t に関する n 次方程式

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0$$

が α_i を m_i 重解にもつとき $(i = 0, 1, \cdots, l)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_n \prod_{i=0}^{l} (t - \alpha_i)^{m_i} \qquad (m_0 + m_1 + \cdots + m_l = n)$$

このとき，第 n 階線形微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad \cdots (*)$$

は，$\pi_m(x)$ を $m-1$ 次の x の多項式とするとすると，本題 (4) の結果で，$(*)$ は

$$y = \pi_{m_i}(x) e^{\alpha_i x}$$

を解にもつことを示している．

また，微分方程式 $(*)$ の線形性により，$(*)$ が $y = u$ および $y = v$ を解にもつとき，

$$y = \lambda u \ (\lambda \text{は定数}), \quad y = u + v$$

も $(*)$ の解である．したがって，$(*)$ の一般解は

$$y = \sum_{i=0}^{l} \pi_{m_i}(x) e^{\alpha_i x}$$

なお，α_i が複素数であっても，オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

により書き直すことができる．

例題 ばね定数 k[N/m] のばねの一端が固定され，他端に質量 m[kg] のおもりが付けられ，なめらかな水平面を運動している．自然長の位置を原点 O とし，ばねが伸びる向きを変位 x[m] の正の向きとし，おもりの加速度を a[m/s^2] とすると，次式が成り立つ．

$$ma = -kx$$

このとき，$a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ より，$a = x''$ とおくと

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

となる，このとき特性方程式の解が $\pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ であるから

$$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \qquad (C_1,\ C_2 \text{は定数})$$

を得る．初期条件を $t = 0$ のとき，$x = A$，$v = \dfrac{dx}{dt} = 0$ とすると

$$C_1 + C_2 = A,\quad C_1 - C_2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

したがって　　$x = \dfrac{A}{2}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)$

オイラーの公式により

$$e^{\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \pm i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \qquad (\text{複号同順})$$

よって　　$x = A\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$

この単振動の周期を T[s] とすると

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

を得る．

57 ページの 5.18(福岡教育大学) の微分方程式

$$4y'' - 12y' + 25y = 0 \tag{7.4}$$

について，その特性方程式 $4t^2 - 12t + 25 = 0$ の解が $\dfrac{3}{2} \pm 2i$ であるから，(7.4) の一般解は，定数 A_1，A_2 を用いて

$$\begin{aligned} y &= A_1 e^{(\frac{3}{2}+2i)x} + A_2 e^{(\frac{3}{2}-2i)x} \\ &= e^{\frac{3}{2}x}(A_1 e^{2xi} + A_2 e^{-2xi}) \end{aligned}$$

オイラーの公式により

$$e^{\pm 2xi} = \cos 2x \pm i \sin 2x \qquad (\text{複号同順})$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= e^{\frac{3}{2}x}\{A_1(\cos 2x + i \sin 2x) + A_2(\cos 2x - i \sin 2x)\} \\ &= e^{\frac{3}{2}x}\{(A_1 + A_2)\cos 2x + (A_1 - A_2)i \sin 2x\} \end{aligned}$$

ここで，$C_1 = A_1 + A_2$，$C_2 = (A_1 - A_2)i$ とおくと

$$y = e^{\frac{3}{2}x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

よって，$y = e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x)$ は，(7.4) の解の 1 つである．

例 1 微分方程式 $y' - \alpha y = 0$ を解け $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y'e^{-\alpha x} + y(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})' = 0$$

これを積分すると　$ye^{-\alpha x} = C$　よって　$y = Ce^{\alpha x}$　(C は定数)

例 2 $\alpha \neq \beta$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とするとき，次の微分方程式を解け.

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

解答 与式から　$(y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) = 0$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(y' - \beta y)'e^{-\alpha x} + (y' - \beta)(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{(y' - \beta y)e^{-\alpha x}\}' = 0$$

これを積分すると

$$(y' - \beta y)e^{-\alpha x} = A_1 \quad \text{ゆえに} \quad y' - \beta y = A_1 e^{\alpha x} \quad (A_1\text{は定数})$$

となる．同様にして　　$y' - \alpha y = A_2 e^{\beta x}$　$(A_2\text{は定数})$

よって，上の 2 式から，y' を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \quad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$

例 3 例 2 において，$\beta = \alpha$ とした，次の微分方程式を解け.

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha})'' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})^{(2)} = 0$$

これを 2 回積分すると

$$ye^{-\alpha x} = C_3 x + C_4 \quad \text{よって} \quad y = (C_3 x + C_4)e^{\alpha x} \quad (C_3,\ C_4\text{は定数})$$

微分方程式 $ay'' + by' + cy = 0$ $(a \neq 0)$ について，その特性方程式 $at^2 + bt + c = 0$ の解により，一般解は，次のようになる．C_i $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ は定数.

i) 異なる 2 つの実数解 α，β をもつとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

ii) 重解 α をもつき

$$y = (C_3 x + C_4)e^{\alpha x}$$

iii) 虚数解 $p \pm qi$ をもつとき

$$y = e^{px}(C_5 \cos qx + C_6 \sin qx)$$

解答

1.1 楕円 $\dfrac{1}{3}x^2+y^2=1$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ における接線の方程式は

$$\frac{1}{3}\cdot 1x+\frac{\sqrt{6}}{3}y=1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x+\sqrt{6}y=3}$$

1.2 (1) 原点から直線 $l: ax+y-2=0$ までの距離を d とすると

$$d=\frac{|-2|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}$$

よって，求める円の方程式は $\quad \boldsymbol{x^2+y^2=\dfrac{4}{a^2+1}}$

(2) 原点を通り，l に垂直な直線の方程式は $\quad x-ay=0$
これと l の方程式から y を消去すると

$$x-a(-ax+2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{2a}{a^2+1}$$

$0\leqq a$ より，$a=\tan\theta\ \left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$$

このとき，$0\leqq 2\theta<\pi$ であるから $\quad \boldsymbol{0\leqq x\leqq 1}$

1.3 (1) 2 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{P}(u,\ v)$ 間の距離 d は $\quad d=\sqrt{(u-a)^2+v^2} \quad \cdots ①$

点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点であるから

$$\frac{u^2}{3}+v^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad v^2=1-\frac{u^2}{3} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$d=\sqrt{(u-a)^2+1-\frac{u^2}{3}}=\sqrt{\boldsymbol{\frac{2}{3}u^2-2au+a^2+1}}$$

(2) (2) の結果から $\quad d=\sqrt{\dfrac{2}{3}\left(u-\dfrac{3}{2}a\right)^2+1-\dfrac{1}{2}a^2} \quad \left(-\sqrt{3}\leqq u\leqq\sqrt{3}\right)$

よって，求める d の最小値は

$0 < \dfrac{3}{2}a \leqq \sqrt{3}$　すなわち　$0 < a \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき

$$u = \frac{3}{2}a \text{ で}\quad \text{最小値}\ \sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{a^2}{2}}}$$

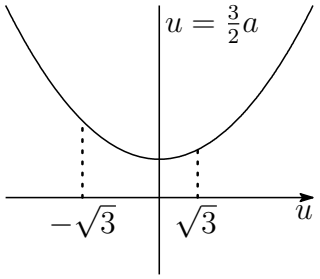
$\sqrt{3} < \dfrac{3}{2}a$　すなわち　$\dfrac{2\sqrt{3}}{3} < a$ のとき

$$u = \sqrt{3}\text{で}\quad \text{最小値}\ \boldsymbol{|\sqrt{3} - a|}$$

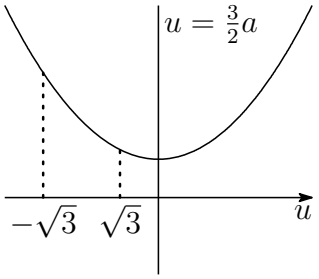
よって
$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}}\text{のとき} & \boldsymbol{\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{2}}} \quad \boldsymbol{\left(u = \dfrac{3}{2}a\right)} \\ \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3} < a}\text{のとき} & \boldsymbol{|\sqrt{3} - a|} \quad \boldsymbol{(u = \sqrt{3})} \end{cases}$$

補足　$f(u) = \dfrac{2}{3}\left(u - \dfrac{3}{2}a\right)^2 + 1 - \dfrac{1}{2}a^2$ のグラフ

$0 < \frac{3}{2}a \leqq \sqrt{3}$ のとき



$\sqrt{3} < \frac{3}{2}a$ のとき



1.4　(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$\frac{ax}{9} + \frac{by}{25} = 1$$

この接線の x 切片および y 切片は，それぞれ　$\dfrac{9}{a}$，$\dfrac{25}{b}$

よって　$S = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{a}\cdot\dfrac{25}{b} = \boldsymbol{\dfrac{225}{2ab}}$

(2)　$\mathrm{P}(a,\ b)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ 上の点であるから　$\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{b^2}{25} = 1$　$\cdots$①

したがって　$\left(\dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{2ab}{15}$　ゆえに　$2ab = 15 - 15\left(\dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{5}\right)^2$

これを (1) の結果に代入すると

$$S=\frac{225}{15-15\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{5}\right)^2}=\frac{15}{1-\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{5}\right)^2}$$

① より，$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{5}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち，$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{5}{\sqrt{2}}}$ のとき，

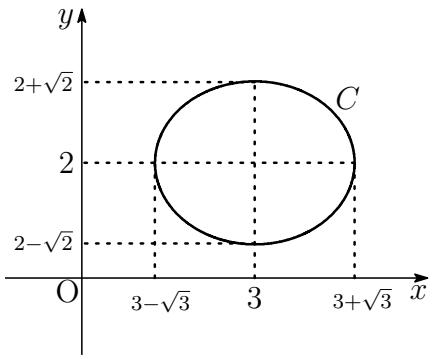
S は最小値 **15** をとる．

1.5 (1) 与えられた方程式から

$$2(x-3)^2+3(y-2)^2=6$$

ゆえに $\dfrac{(x-3)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{2}=1$

よって，C の概形は右のようになる．



(2) $2x^2+3y^2-12x-12y+24=0$ に $y=x+k$ を代入して整理すると

$$5x^2+2(3k-12)x+3k^2-12k+24=0 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4&=(3k-12)^2-5(3k^2-12k+24)\\ &=-6(k^2+2k-4)\end{aligned}$$

よって

$\boldsymbol{-1-\sqrt{5}<k<-1+\sqrt{5}}$**のとき**	**2 個**
$\boldsymbol{k=-1\pm\sqrt{5}}$**のとき**	**1 個**
$\boldsymbol{k<-1-\sqrt{5},\ -1+\sqrt{5}<k}$ **のとき**	**0 個**

(3) (2) より，$-1-\sqrt{5}<k<-1+\sqrt{5}\cdots$① のとき，$(*)$ の 2 つの解を α，β とすると，2 点 P，Q の座標は $(\alpha,\ \alpha+k)$，$(\beta,\ \beta+k)$ である．このとき，線分 PQ の中点を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad y=\frac{(\alpha+k)+(\beta+k)}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}+k$$

$(*)$ の解と係数の関係により $\alpha+\beta=-\dfrac{2(3k-12)}{5}$

したがって $x=\dfrac{-3k+12}{5}$，$y=\dfrac{2k+12}{5}$

上の 2 式から k を消去して　　$2x+3y=12$

① のとき　　$\dfrac{15-3\sqrt{5}}{5}<\dfrac{-3k+12}{5}<\dfrac{15+3\sqrt{5}}{5}$

よって，求める軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{2x+3y=12}\quad\left(\boldsymbol{\frac{15-3\sqrt{5}}{5}<x<\frac{15+3\sqrt{5}}{5}}\right)$$

1.6　(1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ は $C:4x^2+9y^2=36$ 上の点であるから

$$4\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+{y_1}^2=36\quad\text{ゆえに}\quad {y_1}^2=1$$

P は第 1 象限にあるから，$y_1>0$ に注意して　$\boldsymbol{y_1=1}$

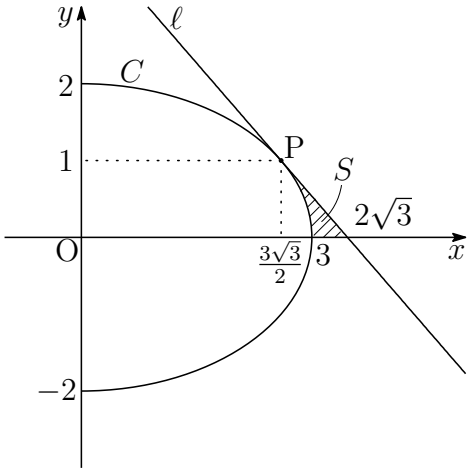
(2) (1) の結果から，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$ における C の接線 ℓ は

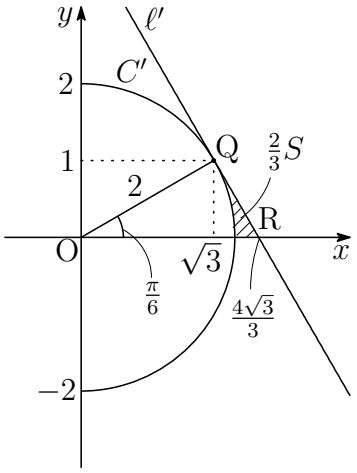
$$4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}x+9\cdot1y=36\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{2\sqrt{3}x+3y=12}$$

(3) (2) で求めた ℓ の方程式に $y=0$ を代入すると

$$2\sqrt{3}x=12\qquad\text{よって，求める } x \text{ 座標は}\qquad\boldsymbol{x=2\sqrt{3}}$$

(4) 曲線 C および接線 ℓ を y 軸をもとに x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ だけ縮小したものを，それぞれ C'，ℓ' とすると，C'，ℓ'，x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{2}{3}S$ である．





したがって，右上の図から

$$\frac{2}{3}S = \triangle \mathrm{OQR} - \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot 1 - \frac{\pi}{3}$$

よって　$\boldsymbol{S = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}}$

1.7　(1)　$x^2 + 3y^2 = 3 \cdots ①$，$y = mx - 1 \cdots ②$ から，y を消去すると

$$x^2 + 3(mx-1)^2 = 3 \quad \text{したがって} \quad x = 0,\ \frac{6m}{m^2+1}$$

ゆえに　$\boldsymbol{p = \dfrac{6m}{3m^2+1}}$　これを ② に代入して　$\boldsymbol{q = \dfrac{3m^2-1}{3m^2+1}}$

(2)　(1) の結果から

$$\{f(m)\}^2 = \left(\frac{6m}{3m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{3m^2-1}{3m^2+1} - 1\right)^2 = \frac{(6m)^2 + (6m^2)^2}{(3m^2+1)^2}$$
$$= \frac{-8 + 4(3m^2+1) + 4(3m^2+1)^2}{(3m^2+1)^2}$$

$t = \dfrac{1}{3m^2+1}$，$g(t) = \{f(m)\}^2$ とおくと $\left(0 < t < \dfrac{1}{3}\right)$

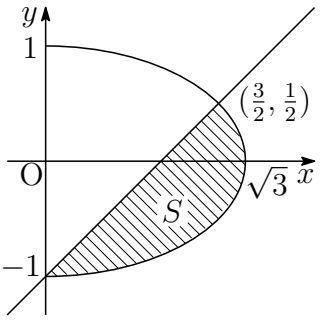
$$g(t) = -8t^2 + 4t + 4 = -8\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

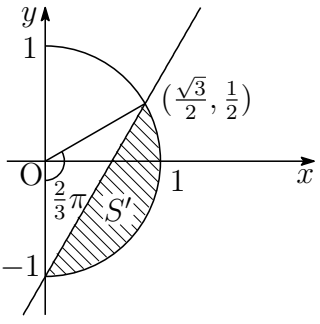
したがって，$g(t)$ は，$t = \dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{2}$ をとるから，$f(m)$ は

$$\frac{1}{3m^2+1} = \frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad m = 1 \text{ のとき最大}$$

よって　$f(m)$ の**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$，$\boldsymbol{m_0 = 1}$

(3)　(1)，(2) の結果から，求める図形の面積を S とし (左下の図)，これを y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍縮小した図形の面積を S' とする (右下の図).





したがって　　$S' = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\dfrac{2}{3}\pi - \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

よって　　$S = \sqrt{3}\,S' = \sqrt{3}\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi - \dfrac{3}{4}}$

1.8 P$(p,\ 0)$ から楕円 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ に引いた 2 本の接線は，x 軸に関して対称である．この 2 本の接線が直交するとき，それらの傾きは ± 1 であるから，接線の 1 つは

$$y = x - p$$

である．楕円およびこの直線を x 軸をもとに y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小すると

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 2y = x - p$$

上の円と直線は接するので，原点と直線 $x - 2y - p = 0$ の距離は 1 である．

したがって　　$\dfrac{|-p|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 1$

$p > 0$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{p = \sqrt{5}}$

1.9　(1)　点 $(1,\ 1)$ は放物線の焦点で，直線 $y = -2$ はその準線であるから

放物線の頂点は　　$\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$

また，焦点および頂点の y 座標から　$p = 1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$

したがって，放物線の方程式は

$$(x-1)^2 = 4\cdot\frac{3}{2}\left(y + \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{6},\ b = -\dfrac{1}{3}}$

別解　放物線上の点 $(x,\ y)$ について，次式が成り立つ．

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = |\,y + 2\,|$$

これを平方すると

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (y+2)^2 \quad \text{整理すると} \quad y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

(2) 2 点 $(3,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ は楕円の焦点であるから，楕円の中心は　$(1,\ 0)$
楕円の中心から焦点までの距離が 2 であるから，長軸および短軸の長さをそれぞれ $2a$，$2b$ とすると $(a,\ b>0)$

$$2a=12,\quad \sqrt{a^2-b^2}=2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2=36,\ b^2=32$$

したがって，楕円の方程式は　$\dfrac{(x-1)^2}{36}+\dfrac{y^2}{32}=1$

よって　　$\boldsymbol{p=36,\ q=32,\ r=1}$

別解 楕円上の点 $(x,\ y)$ について，次式が成り立つ．

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=12$$

これから　　$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=12-\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

この両辺を平方して整理すると

$$3\sqrt{(x+1)^2+y^2}=x+17$$

さらに，上式の両辺を平方して整理すると

$$8(x-1)^2+9y^2=288 \quad \text{よって} \quad \frac{(x-1)^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$$

1.10 (1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(1,\ 0,\ 0)+(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\\&=(1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\end{aligned}$$

よって，点 P の座標は　$\boldsymbol{(1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)}$

(2) 直線 CP を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(1-t)(1,\ 0,\ 1)+t(1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\\&=(1+t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1-t)\qquad\cdots(*)\end{aligned}$$

直線 CP と yz 平面との交点 Q の x 座標は 0 であるから

$$1+t\cos\theta=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=-\frac{1}{\cos\theta}$$

これを $(*)$ に代入すると　　$\mathbf{Q}\left(\mathbf{0,\ -\tan\theta,\ 1+\dfrac{1}{\cos\theta}}\right)$

(3) (2) の結果から，点 Q$(0,\ y,\ z)$ は

$$y = -\tan\theta, \quad z = 1 + \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cdots(**)$$

このとき，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ より　　$z \leqq 0$　$\cdots$①

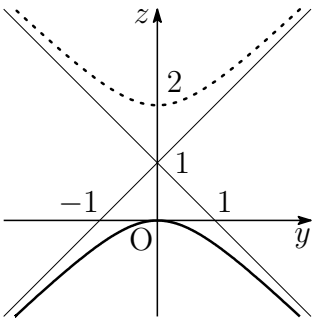
$(**)$ から　　$\tan\theta = -y$，$\dfrac{1}{\cos\theta} = z - 1$

これらを $1 + \tan^2\theta = \left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$ に代入すると　$1 + (-y)^2 = (z-1)^2$

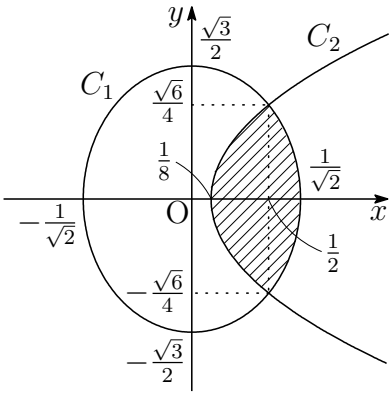
点 Q の軌跡の方程式は，上式および ① から

$$\boldsymbol{x = 0, \quad y^2 - (z-1)^2 = -1, \quad z \leqq 0}$$

yz 平面における点 Q が描く軌跡は，双曲線 $y^2 - z^2 = -1$ を z 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，下の図の実線部分である．



1.11　(1)　$\begin{cases} 6x^2 + 4y^2 = 3 & \cdots① \\ 8x - 8y^2 = 1 & \cdots② \end{cases}$



①，② から y^2 を消去すると

$$12x^2 + 8x - 7 = 0$$
$$(2x-1)(6x+7) = 0$$

② より，$x = y^2 + \dfrac{1}{8} \geqq \dfrac{1}{8}$ であるから

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$$

したがって，C_1 と C_2 の交点は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$

① を x で微分すると　$12x+8yy'=0$　すなわち　$y'=-\dfrac{3x}{2y}$

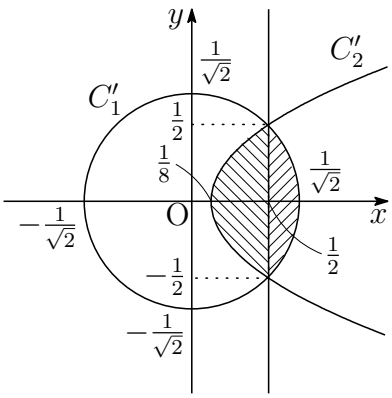
② を x で微分すると　$8-16yy'=0$　すなわち　$y'=\dfrac{1}{2y}$

C_1，C_2 の交点における接線の傾きを，それぞれ m_1，m_2 とすると

$$m_1m_2=-\frac{3\cdot\frac{1}{2}}{2\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}\times\frac{1}{2\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}=-1$$

よって，C_1 と C_2 の交点において，C_1 と C_2 の接線は直交する．

(2) C_1，C_2 を x 軸をもとに y 軸方向に $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 倍に縮小したものを，それぞれ C_1'，C_2' とすると



$$C_1'\colon x^2+y^2=\frac{1}{2},\quad C_2'\colon x=\frac{3}{2}y^2+1$$

C_1' と領域 $x\geqq\dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

C_2' と領域 $x\leqq\dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は　$\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\right\}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{16}\pi}$$

1.12　(1) $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{\alpha}+\frac{2y}{\beta}\cdot\frac{dy}{dx}=0\quad\text{ゆえに}\quad\frac{dy}{dx}=-\frac{\beta x}{\alpha y}$$

C の $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の傾き m は　$m=-\dfrac{\beta x_0}{\alpha y_0}$

(2) $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$C_2:\dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{1-t}=1$ の交点を $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ とすると

$$x_0^2=\frac{4(4-t)}{3},\quad y_0^2=\frac{t-1}{3}\qquad\cdots(*)$$

P における C_1，C_2 の接線の傾きを，それぞれ m_1，m_2 とすると $(y_0 \neq 0)$

$$m_1 = -\frac{x_0}{4y_0}, \quad m_2 = -\frac{(1-t)x_0}{(4-t)y_0} \qquad \cdots (**)$$

$(*)$ より $\quad \dfrac{{x_0}^2}{{y_0}^2} = \dfrac{4(4-t)}{t-1}, \qquad (**)$ より $\quad m_1 m_2 = \dfrac{1-t}{4(4-t)} \cdot \dfrac{{x_0}^2}{{y_0}^2}$

上の 2 式から $\qquad m_1 m_2 = \dfrac{1-t}{4(4-t)} \cdot \dfrac{4(4-t)}{t-1} = -1$

よって，P における C_1，C_2 の接線は，互いに直交する．

1.13 (1) $x^2 - y^2 = 2$ を y について微分すると $\quad 2x\dfrac{dx}{dy} - 2y = 0$

C の $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における $\dfrac{dx}{dy}$ は，$x_0 \neq 0$ であるから $\quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y_0}{x_0}$

よって，P における C の接線の方程式は

$$x - x_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0) \quad \text{ゆえに} \quad x_0 x - y_0 y = {x_0}^2 - {y_0}^2$$

P は C 上の点であるから，${x_0}^2 - {y_0}^2 = 2$ により $\quad x_0 x - y_0 y = 2$

別解 $y_0 \neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x_0}{y_0}$ であるから，P における C の接線の方程式は

$$y - y_0 = \frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \quad \text{ゆえに} \quad x_0 x - y_0 y = 2 \qquad \cdots (*)$$

$(x_0,\ y_0) = (\pm\sqrt{2},\ 0)$ における接線の方程式は $\quad x = \pm\sqrt{2} \quad$ (複号同順)
したがって，C 上のすべての点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ について，$(*)$ が成立する．

(2) (1) で求めた接線 $x_0 x - y_0 y = 2$ に垂直で，原点を通る直線は $\quad y_0 x + x_0 y = 0$
上の 2 直線の交点が $\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ であるから，これを解いて

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{2x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}, \quad y_1 = -\frac{2y_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}}$$

(3) $\mathrm{F}(1,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-1,\ 0)$，$\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ より

$$\mathrm{FH}^2 = (x_1 - 1)^2 + {y_1}^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2x_1 + 1 \quad \cdots ①$$
$$\mathrm{F'H}^2 = (x_1 + 1)^2 + {y_1}^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2x_1 + 1 \quad \cdots ②$$

ここで，(2) の結果および ${x_0}^2 - {y_0}^2 = 2$ より

$$x_1 = \frac{2x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2} = \frac{2x_0}{{x_0}^2 + ({x_0}^2 - 2)} = \frac{x_0}{{x_0}^2 - 1} \quad \cdots ③$$

$${x_1}^2 + {y_1}^2 = \left(\frac{2x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}\right)^2 + \left(-\frac{2y_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}\right)^2 = \frac{4({x_0}^2 + {y_0}^2)}{({x_0}^2 + {y_0}^2)^2}$$

$$= \frac{4}{{x_0}^2 + {y_0}^2} = \frac{4}{{x_0}^2 + ({x_0}^2 - 2)} = \frac{2}{{x_0}^2 - 1} \quad \cdots ④$$

③，④ から，①，② は

$$\mathrm{FH}^2 = \frac{2}{{x_0}^2 - 1} - \frac{2x_0}{{x_0}^2 - 1} + 1 = 1 - \frac{2(x_0 - 1)}{{x_0}^2 - 1}$$

$$= 1 - \frac{2}{x_0 + 1} = \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1}$$

$$\mathrm{F'H}^2 = \frac{2}{{x_0}^2 - 1} + \frac{2x_0}{{x_0}^2 - 1} + 1 = 1 + \frac{2(x_0 + 1)}{{x_0}^2 - 1}$$

$$= 1 + \frac{2}{x_0 - 1} = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$$

上の 2 式から　$\mathrm{FH}^2 \cdot \mathrm{F'H}^2 = 1$　ゆえに　$\mathrm{FH} \cdot \mathrm{F'H} = 1$

よって，FH·F′H は，P の取り方によらず一定である．

解説 設問で $\mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{k}{2}},\ 0\right)$，$\mathrm{F'}\left(-\sqrt{\frac{k}{2}},\ 0\right)$ とし，直角双曲線を $x^2 - y^2 = k$ とすると，次式が成り立つ．

$$\mathrm{FH} \cdot \mathrm{F'H} = \frac{k^2}{4}$$

なお，F，F′ は直角双曲線の準線と x 軸の交点である．

1.14　(1)　C 上の点 $(x,\ y)$ が $\mathrm{F}(p,\ 0)$ と y 軸から等距離にあるので

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |\,x\,| \quad \cdots ①$$

ゆえに　$(x-p)^2 + y^2 = x^2$　整理すると　$\boldsymbol{y^2 = 2px - p^2}$

(2)　$y^2 = 2px - p^2$ の両辺を x で微分すると

$$2y\frac{dy}{dx} = 2p \quad \text{ゆえに} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

C 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線 l の方程式は $(y_0 \neq 0)$

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \quad \text{ゆえに} \quad y_0 y - {y_0}^2 = px - px_0$$

${y_0}^2 = 2px_0 - p^2$ であるから　　$\boldsymbol{y_0 y = p(x + x_0 - p)}$

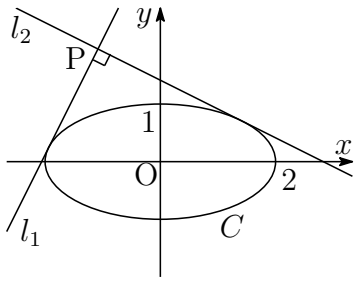
(3) $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ は，C 上の点であるから，① より

$$\mathrm{FP} = \sqrt{(x_0 - p)^2 + {y_0}^2} = |\,x_0\,|$$

(2) の結果から，l の x 軸との交点 Q の座標は　$(p - x_0,\ 0)$

これと $\mathrm{F}(p,\ 0)$ から　$\mathrm{FQ} = |\,x_0\,|$　よって　$\mathrm{FP} = \mathrm{FQ}$

1.15　(1) l_1 を $y = mx + k$ とおく．



これを $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に代入して整理すると

$$(4m^2 + 1)x^2 + 8mkx + 4k^2 - 4 = 0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (4mk)^2 - (4m^2 + 1)(4k^2 - 4) \\ &= 4(4m^2 - k^2 + 1) \end{aligned}$$

C と l_1 は接するので，$D = 0$ より　$k^2 = 4m^2 + 1$

条件により，$k > 0$ であるから　　$k = \sqrt{4m^2 + 1}$

よって，l_1 の方程式は　　$\boldsymbol{y = mx + \sqrt{4m^2 + 1}}$　$\cdots$①

(2) (1) の結果の m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換えればよいので

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{m}x + \sqrt{\frac{m^2 + 4}{m^2}}} \quad \cdots ②$$

(3) ①，② から，y を消去すると

$$\begin{aligned} mx + \sqrt{4m^2 + 1} &= -\frac{1}{m}x + \sqrt{\frac{m^2 + 4}{m^2}} \\ \left(m + \frac{1}{m}\right)x &= \sqrt{\frac{m^2 + 4}{m^2}} - \sqrt{4m^2 + 1} \end{aligned}$$

ここで，$\varepsilon = \dfrac{m}{|\,m\,|}$ $(= \mathrm{sign}\ m)$ とおくと

$$\begin{aligned} (m^2 + 1)x &= \varepsilon\sqrt{m^2 + 4} - m\sqrt{4m^2 + 1} \\ x &= \frac{\sqrt{m^2 + 4} - |m|\sqrt{4m^2 + 1}}{m^2 + 1}\varepsilon \end{aligned}$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned} y &= m\cdot\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\varepsilon+\sqrt{4m^2+1} \\ &= \frac{|m|\sqrt{m^2+4}-m^2\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}+\sqrt{4m^2+1} \\ &= \frac{|m|\sqrt{m^2+4}+\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1} \end{aligned}$$

よって，$\varepsilon=\dfrac{m}{|m|}$ とおくと

$$\boldsymbol{P\left(\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\varepsilon,\ \frac{|m|\sqrt{m^2+4}+\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\right)}$$

(4) $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，(3) の結果から

$$X=\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\varepsilon,\quad Y=\frac{|m|\sqrt{m^2+4}+\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} X^2+Y^2 &= \left(\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{|m|\sqrt{m^2+4}+\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\right)^2 \\ &= \frac{(m^2+4)+(4m^2+1)}{m^2+1}=5 \end{aligned}$$

よって，点 P は円 $x^2+y^2=5$ 上にある．

解説 点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ から楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に引いた 2 本の接線 l_1，l_2 が直交するとき，それぞれの接線の傾きを m_1，m_2 とすると，$m_1m_2=-1$

点 P を通り，傾き m の直線 l の方程式は　　$y-Y=m(x-X)$

ここで，C，l を x 軸を元に，y 軸方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍に拡大した図形をそれぞれ C'，l' とすると

$$C':x^2+y^2=a^2$$

l' は点 $\left(X,\ \dfrac{aY}{b}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{am}{b}$ の直線であるから

$$y-\frac{aY}{b}=\frac{am}{b}(x-X)\quad \text{すなわち}\quad amx-by-amX+aY=0$$

このとき，l' は C' に接するので

$$\frac{|amX+aY|}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}=a\quad \text{ゆえに}\quad (X^2-a^2)m^2+2XYm+Y^2-b^2=0$$

上の m に関する 2 次方程式の解 m_1，m_2 について，$m_1m_2=-1$ のとき，解と係数の関係により

$$\frac{Y^2-b^2}{X^2-a^2}=-1 \quad \text{すなわち} \quad X^2+Y^2=a^2+b^2$$

よって，P は円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上にある．
また，P が $(\pm a,\ \pm b)$ のときも成立する．

1.16 (1) 点 P を $(x,\ y)$ とおくと，条件により

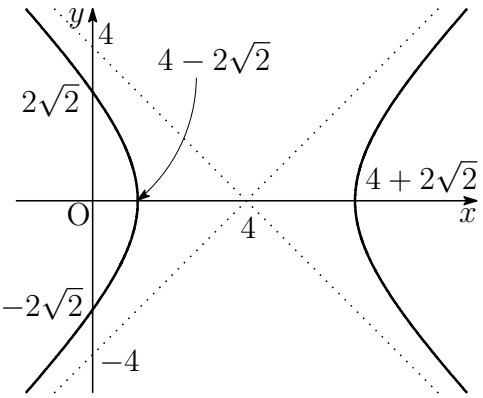
$$\sqrt{x^2+y^2}:|x-2|=\sqrt{r}:1 \quad \text{ゆえに} \quad r(x-2)^2=x^2+y^2$$

整理すると $\quad \boldsymbol{(r-1)x^2-4rx-y^2+4r=0}$

(2) $r=2$ を (1) の結果に代入すると

$$x^2-8x-y^2+8=0$$
$$(x-4)^2-y^2=8$$

ゆえに $\quad \boldsymbol{\dfrac{(x-4)^2}{(2\sqrt{2})^2}-\dfrac{y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1}$



よって，C は右の図のような双曲線．
中心 $(4,\ 0)$，焦点 $(0,\ 0)$，$(8,\ 0)$
漸近線は $\quad y=\pm(x-4)$

(3) (1) の結果から $\quad (1-r)x^2+4rx+y^2-4r=0 \quad \cdots(*)$

この曲線が楕円であるとき $\quad 1-r>0 \quad$ ゆえに $\quad 0<r<1$

$(*)$ を変形すると $\quad (1-r)\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2+y^2=\dfrac{4r}{1-r}$

したがって $\quad \dfrac{\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2}{\dfrac{4r}{(1-r)^2}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{4r}{1-r}}=1$

$0<r<1$ のとき，$\dfrac{4r}{(1-r)^2}>\dfrac{4r}{1-r}$ であるから

$$2\sqrt{\frac{4r}{(1-r)^2}}=\sqrt{5} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{16r}{(1-r)^2}=5$$

整理すると $\quad 5r^2-26r+5=0 \quad$ すなわち $\quad (r-5)(5r-1)=0$

$0<r<1$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{r=\dfrac{1}{5}}$

解説 (2) のとき，C の離心率 $e=\sqrt{2}>1$ から，C は双曲線である．

また，O を極とする極方程式は　　$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\cos\theta}$

(3) のとき，C が楕円であるとき，離心率 $\sqrt{r}<1$ から　$0<r<1$

このとき，楕円の長軸は，O を通り準線 $x=2$ に垂直な直線上 (x 軸上) にあるから，$(*)$ に $y=0$ を代入すると

$$(1-r)x^2+4rx-4r=0$$

この方程式の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{4r}{1-r},\quad \alpha\beta=-\frac{4r}{1-r}$$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$ であるから，$(\alpha-\beta)^2=5$ より

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5 \quad \text{ゆえに} \quad \left(-\frac{4r}{1-r}\right)^2-4\cdot\frac{-4r}{1-r}=5$$

整理すると　$(r-5)(5r-1)=0$　$0<r<1$ であるから　$r=\dfrac{1}{5}$

1.17　(1) 楕円 C の x 軸 (長軸) との交点の x 座標は $x=\pm a$

また，C の y 軸 (短軸) との交点の y 座標を $y=\pm b$ とすると

$$1^2+b^2=a^2 \quad \text{ゆえに} \quad b^2=a^2-1$$

よって，C の方程式は　　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1}$

(2) $x+y=2\cdots$① および C の方程式から y を消去し，整理すると

$$(2a^2-1)x^2-4a^2x+a^2(5-a^2)=0 \quad \cdots(*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4&=(-2a^2)-2-(2a^2-1)a^2(5-a^2)\\ &=a^2(a^2-1)(2a^2-5)\end{aligned}$$

C と直線 ① が接するとき，$D=0$ であるから，$a>1$ に注意して

$$2a^2-5=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$$

これを $(*)$ に代入すると　$4x^2-10x+\dfrac{25}{4}=0$　すなわち　$x=\dfrac{5}{4}$

よって，① から　　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$

(3) (2) の結果から　$\mathrm{PF_1}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}+1\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$

$$\mathrm{PF_2}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}-1\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

したがって　　$\dfrac{\mathrm{PF_1}}{\mathrm{PF_2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{4}\div\dfrac{\sqrt{10}}{4}=3$

P における C の法線の方程式は

$$y-\frac{3}{4}=x-\frac{5}{4}\quad\text{すなわち}\quad y=x-\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$$

したがって　$\mathrm{QF_1}=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$，$\mathrm{QF_2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{QF_1}}{\mathrm{QF_2}}=3$

よって　　$\dfrac{\mathrm{PF_1}}{\mathrm{PF_2}}=\dfrac{\mathrm{QF_1}}{\mathrm{QF_2}}$

1.18　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ -1)$ より，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(0,\ 0,\ 2)+t(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ -1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ より

$$-2+t\{\cos^2\theta+(2+\sin\theta)^2+(-1)^2\}=0\quad\text{ゆえに}\quad t=\frac{1}{3+2\sin\theta}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ 0,\ 2)+\dfrac{1}{3+2\sin\theta}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ -1)$

よって　$\boldsymbol{X=\dfrac{\cos\theta}{3+2\sin\theta}}$，$\boldsymbol{Y=\dfrac{2+\sin\theta}{3+2\sin\theta}}$，$\boldsymbol{Z=\dfrac{5+4\sin\theta}{3+2\sin\theta}}$

(2) (1) の結果にそれぞれ $\theta=0,\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ を代入すると

$$\vec{a}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right),\quad \vec{b}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right),\quad \vec{c}=(0,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ より

$$(X,\ Y,\ Z)=s\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)+t\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)+u(0,\ 1,\ 1)$$

すなわち

$$\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}t=X\cdots①\quad \frac{2}{3}s+\frac{2}{3}t+u=Y\cdots②\quad \frac{5}{3}s+\frac{5}{3}t+u=Z\cdots③$$

③ − ② より　　$s+t=-Y+Z\cdots④$

① × 3 より　　$s-t=3X\qquad\cdots⑤$

④，⑤ より　$s=\dfrac{1}{2}(3X-Y+Z),\quad t=\dfrac{1}{2}(-3X-Y+Z)$

②，④ より　$u=Y-\dfrac{2}{3}(s+t)=Y-\dfrac{2}{3}(-Y+Z)=\dfrac{1}{3}(5Y-2Z)$

したがって

$$s=\frac{3\cos\theta-(2+\sin\theta)+(5+4\sin\theta)}{2(3+2\sin\theta)}=\boldsymbol{\frac{3(1+\sin\theta+\cos\theta)}{2(3+2\sin\theta)}}$$

$$t=\frac{-3\cos\theta-(2+\sin\theta)+(5+4\sin\theta)}{2(3+2\sin\theta)}=\boldsymbol{\frac{3(1+\sin\theta-\cos\theta)}{2(3+2\sin\theta)}}$$

$$u=\frac{5(2+\sin\theta)-2(5+4\sin\theta)}{3(3+2\sin\theta)}=\boldsymbol{-\frac{\sin\theta}{3+2\sin\theta}}$$

よって　　$\boldsymbol{s+t+u=1}$

(3) R(X, Y, 0) は，(1) の結果から

$$X=\frac{\cos\theta}{3+2\sin\theta}\cdots⑥,\quad Y=\frac{2+\sin\theta}{3+2\sin\theta}\cdots⑦$$

⑦ から　$\sin\theta=\dfrac{-3Y+2}{2Y-1}$　　⑥ から　$\cos\theta=X(3+2\sin\theta)$

上の第 1 式を第 2 式に代入すると

$$\cos\theta=X\left(3+2\cdot\frac{-3Y+2}{2Y-1}\right)=\frac{X}{2Y-1}$$

上式および ⑦′ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\left(\frac{-3Y+2}{2Y-1}\right)^2+\left(\frac{X}{2Y-1}\right)^2=1\quad\text{ゆえに}\quad X^2+5Y^2-8Y+3=0$$

よって，求める軌跡の方程式は，次の楕円である．

$$x^2+5y^2-8y+3=0\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{5x^2+25\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=1}$$

1.19　(1) 2 直線 PQ，PR が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると

$$m_1=\tan\theta_1,\quad m_2=\tan\theta_2$$

$m_1<0<m_2$ より，$0<\theta_2<\frac{\pi}{2}<\theta_1<\pi$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\boldsymbol{\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}}$$

(2) $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{2}x$

Q の座標を $(\alpha,\ \frac{1}{4}\alpha^2)$ とすると，Q における接線の傾きは m_1 であるから

$$m_1=\frac{1}{2}\alpha$$

ゆえに　$\alpha=2m_1$　点 Q の座標は　$(2m_1,\ {m_1}^2)$

Q における接線の方程式は

$$y-{m_1}^2=m_1(x-2m_1)\quad すなわち\quad y=m_1x-{m_1}^2\quad \cdots ①$$

同様に，R における接線の方程式は　$y=m_2x-{m_2}^2\cdots ②$

①，② の交点が P であるから，$m_1\neq m_2$ に注意してこれを解くと

$$a=m_1+m_2,\quad b=m_1m_2$$

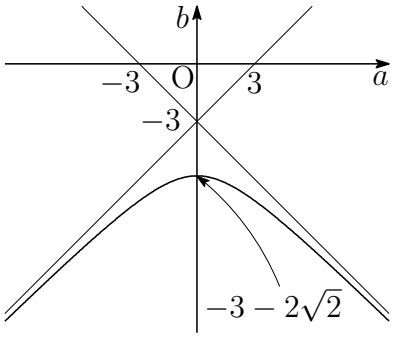
また　$(m_1-m_2)^2=(m_1+m_2)^2-4m_1m_2=a^2-4b>0$

$m_1-m_2<0$ より　$m_1-m_2=-\sqrt{a^2-4b}$

よって，G の表す方程式は (1) の結果から　$\boldsymbol{\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{a^2-4b}}{1+b}}$

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき (2) の結果より

$$1+b=-\sqrt{a^2-4b}\quad \cdots ③$$



③ の両辺を平方して

$$1+2b+b^2=a^2-4b$$

上式および ③ から

$$\boldsymbol{(b+3)^2-a^2=8,\ b<-1}$$

よって，G の表す図形は，右の図のような双曲線の一部である．

1.20　(1) $C:x^2+4y^2=4$ および直線 $l:y=x+b$ を x 軸を元に y 軸方向に 2 倍に拡大した図形を，それぞれ，$C':x^2+y^2=4$，$l':y=2x+2b$ とする．C と l が異なる 2 つの交点をもつとき，C' と l' は異なる 2 つの交点をもつから

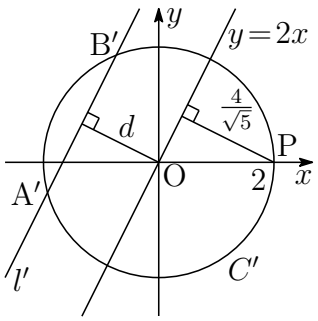
$$\frac{|2b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}<2\quad これを解いて\quad \boldsymbol{-\sqrt{5}<b<\sqrt{5}}$$

(2) C' と l' の交点を A′，B′ とし，△PAB，△PA′B′ の面積を，それぞれ，S，S' とすると，$S'=2S$ が成り立つ．S' が最大となるとき，S は最大となるから，S' を最大にする b の値を求めればよい．

原点 O から l' までの距離を d とすると

$$d=\frac{|2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{A'B'}=2\sqrt{2^2-d^2}=\frac{4\sqrt{5-b^2}}{\sqrt{5}}$$



S' を最大する b は，右の図から

$$0<b<\sqrt{5}$$

の範囲で調べればよい．P から l' に引いた垂線の長さを h とすると

$$h=\frac{2b}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{2b+4}{\sqrt{5}}$$

$$S'=\frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\cdot h=\frac{4}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}$$

$$S=\frac{1}{2}S'=\frac{2}{5}(b+2)\sqrt{5-b^2}=\frac{2}{5}\sqrt{(b+2)^2(5-b^2)}$$

したがって，関数

$$f(b)=(b+2)^2(5-b^2)\quad(0<b<\sqrt{5})$$

を最大にする b の値を求めればよい．

$$f'(b)=-2(b+2)(2b^2+2b-5)$$

$0<b<\sqrt{5}$ に注意して $f'(b)=0$ を解くと　$b=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$

$f(b)$ の増減は，右のようになる．よって，求める b の値は

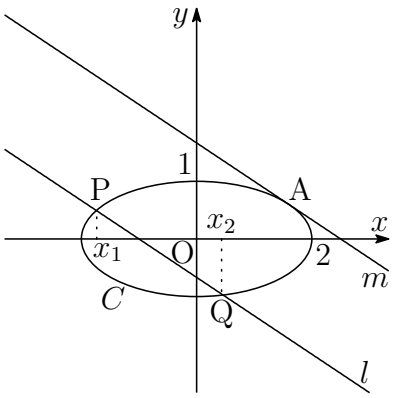
$$\boldsymbol{b=\frac{-1+\sqrt{11}}{2}}$$

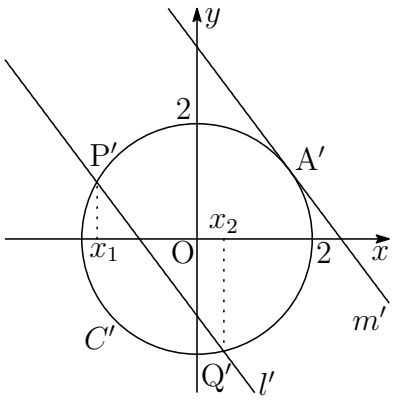
b	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{5}\,)$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		↗	極大	↘	

1.21　(1) C，l を x 軸をもとに y 軸方向に 2 倍に拡大した図形をそれぞれ

$$C':x^2+y^2=4,\quad l':2ax-y+2b=0$$

とする．また，これらの曲線上に 2 点 $\mathrm{P'}(x_1,\ 2y_1)$，$\mathrm{Q'}(x_2,\ 2y_2)$ をとる．





l' と C' が異なる 2 個の共有点を持てばよいので

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}<2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-\sqrt{4a^2+1}<b<\sqrt{4a^2+1}}$$

(2) l' に平行な直線 m' が第 1 象限の点 A′ において C' と接しているとする．
このとき，(1) と同様にして

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}=2 \qquad \text{ゆえに} \quad |b|=\sqrt{4a^2+1}$$

bの符号に注意して $\quad b=\sqrt{4a^2+1} \quad \cdots ① \quad$ よって $\quad \boldsymbol{y=ax+\sqrt{4a^2+1}}$

(3) C' と l' の方程式から y を消去すると $\quad x^2+(2ax+2b)^2=4$

すなわち $\qquad (4a^2+1)x^2+8abx+4b^2-4=0 \quad \cdots (*)$

方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$x_1+x_2=-\frac{8ab}{4a^2+1}, \quad x_1x_2=\frac{4b^2-4}{4a^2+1} \quad \cdots (**)$$

したがって $\qquad (x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$$=\left(-\frac{8ab}{4a^2+1}\right)^2-4\times\frac{4b^2-4}{4a^2+1}$$

$$=\frac{16(4a^2-b^2+1)}{(4a^2+1)^2}$$

$x_1<x_2$ および (1) の結果に注意して $\quad \boldsymbol{x_2-x_1=\dfrac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}}$

(4) (2) の結果から，m' の方程式は　$y = 2ax + 2\sqrt{4a^2+1}$　$\cdots$②

A$'$ の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，x_0 は $(*)$ の重解である．

このとき，① に注意して

$$x_0 = -\frac{8ab}{2(4a^2+1)} = -\frac{8a\sqrt{4a^2+1}}{2(4a^2+1)} = -\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}$$

これを ② に代入することにより

$$y_0 = 2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}\right) + 2\sqrt{4a^2+1} = \frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}$$

よって，$\mathrm{A}'\left(-\dfrac{4a}{\sqrt{4a^2+1}},\ \dfrac{2}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$ から直線 $l' : 2ax - y + 2b = 0$ までの距離を d とすると，(1) の結果に注意して

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}\right) - \frac{2}{\sqrt{4a^2+1}} + 2b\right|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{2|\sqrt{4a^2+1} - b|}{\sqrt{4a^2+1}} = 2\left(1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right) \end{aligned}$$

(3) の結果から

$$\begin{aligned} \mathrm{P'Q'} &= \sqrt{1+(2a)^2}\,|x_2 - x_1| = \sqrt{4a^2+1} \times \frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1} \\ &= \frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}} = 4\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2+1}} \end{aligned}$$

したがって

$$\triangle \mathrm{A'P'Q'} = \frac{1}{2}\mathrm{P'Q'}\cdot d = 4\left(1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2+1}}$$

$S = \dfrac{1}{2}\triangle \mathrm{A'P'Q'}$ であるから

$$\boldsymbol{S = 2\left(1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2+1}}}$$

(5) (1) の結果から，$t=\dfrac{b}{\sqrt{4a^2+1}}$ とすると　$-1<t<1$

$f(t)=S^2$ とおくと　　$f(t)=4(1-t)^2(1-t^2)=-4(t-1)^3(t+1)$

これを微分すると　　$f'(t)=-8(t-1)^2(2t+1)$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大 $\frac{27}{4}$	↘	

よって，求める S の最大値は　$\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

別解 (5) で求めた $f(t)=4(1-t)^3(1+t)$ について，$-1<t<1$ であるから，$1-t>0$，$1+t>0$ より

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\left(\frac{1-t}{3}\right)+\frac{1}{4}(1+t)\geqq\left(\frac{1-t}{3}\right)^{\frac{3}{4}}(1+t)^{\frac{1}{4}}$$

この両辺を 4 乗すると

$$\frac{1}{16}\geqq\frac{(1-t)^3(1+t)}{27}\quad\text{ゆえに}\quad f(t)\leqq\frac{27}{4}$$

上式において，等号が成立するとき

$$\frac{1-t}{3}=1+t\quad\text{すなわち}\quad t=-\frac{1}{2}$$

したがって，$f(t)$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{27}{4}$ をとる．

よって，求める S の最大値は　$\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

補足 S が最大となるとき，△A′P′Q′ は正三角形である．

一般に，円に内接する三角形の面積が最大となる三角形は正三角形である．実際，辺 BC に対し，直線 BC から最も遠くなるように A を取ると面積は最大になる。このとき，△ABC は AB = AC の鋭角二等辺三角形である．円の半径を R とし，$B = C = \theta$ とすると，$A = \pi - 2\theta$．このとき正弦定理により

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2R\sin\theta \quad \cdots ③$$

したがって　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}(2R\sin\theta)^2 \sin(\pi - 2\theta)$

$$= 2R^2 \sin^2\theta \sin 2\theta = 4R^2 \sin^3\theta \cos\theta$$

$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ であるから

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{\sin^2\theta}{3}\right) + \frac{1}{4}\cos^2\theta \geqq \left(\frac{\sin^2\theta}{3}\right)^{\frac{3}{4}} (\cos^2\theta)^{\frac{1}{4}}$$

両辺を平方して　$\dfrac{1}{16} \geqq \dfrac{\sin^3\theta\cos\theta}{3\sqrt{3}}$　ゆえに　$\sin^3\theta\cos\theta \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

上式において，等号が成立するのは

$$\frac{\sin^2\theta}{3} = \cos^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2\theta = 3 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

このとき $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ となる．したがって，円に内接する三角形は面積が最大となるとき正三角形である．このことに注意すると，二等辺三角形 A′P′Q′ は面積が最大のとき正三角形であるから，$R = 2$ より

$$\mathrm{P'Q'} = 2\sqrt{3}$$

(4) で求めた $\mathrm{P'Q'} = 4\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4a^2+1}}$ と上式により

$$\frac{b^2}{4a^2+1} = \frac{1}{4}$$

A′ は第 1 象限の点であるから，$b > 0$ のとき，二等辺三角形 A′P′Q′ は鈍角三角形である．ゆえに $b < 0$ より

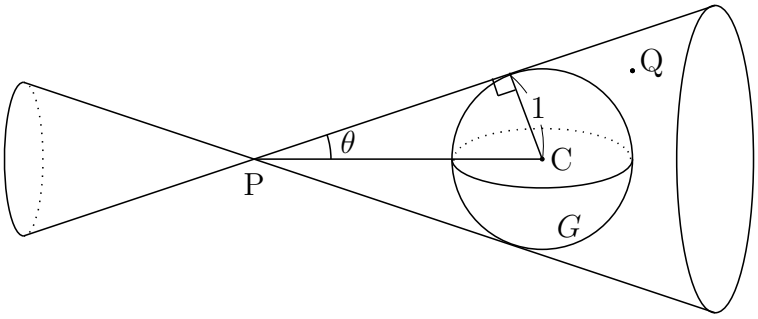
$$\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}} = -\frac{1}{2}$$

1.22 G に接する $\mathrm{P}(0, -2,\ a)$ を頂点とする円錐面上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ とする．

G の中心 $(0,\ 0,\ 1)$ を C とおくと　$\mathrm{PC} = \sqrt{2^2 + (1-a)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 5}$

円錐面と直線 PC のなす角を θ とすると　$\sin\theta = \dfrac{1}{\mathrm{PC}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 5}}$

したがって　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = \dfrac{a^2 - 2a + 4}{a^2 - 2a + 5}$



$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (0,\ 2,\ 1-a)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (x,\ y+2,\ z-a)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 2(y+2) + (1-a)(z-a)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 = 2^2 + (1-a)^2 = a^2 - 2a + 5$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = x^2 + (y+2)^2 + (z-a)^2$$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の角は，θ または $\pi - \theta$ であるから

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\cos^2\theta$$

また，上式に上の諸式および $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\cos^2\theta = a^2 - 2a + 4$ を代入すると

$$\{2(y+2) + (1-a)(z-a)\}^2 = (a^2-2a+4)\{x^2 + (y+2)^2 + (z-a)^2\}$$

これを整理することにより，次の円錐面の方程式を得る．

$$(a^2-2a+4)x^2 + (a^2-2a)(y+2)^2 + 3(z-a)^2 - 4(1-a)(y+2)(z-a) = 0 \quad \cdots(*)$$

xy 平面による円錐面 $(*)$ の切り口を表す図形は，$z = 0$ を代入することにより

$$(a^2-2a+4)x^2 + a(a-2)(y+2)^2 + 4a(1-a)(y+2) + 3a^2 = 0 \quad \cdots(**)$$

$a(a-2) \neq 0$，すなわち，$a \neq 0,\ 2$ のとき，$(**)$ より

$$(a^2-2a+4)x^2 + a(a-2)\left\{y + 2 + \frac{2(1-a)}{a-2}\right\}^2 = \frac{a(a^2-2a+4)}{a-2}$$
$$(a^2-2a+4)x^2 + a(a-2)\left(y - \frac{2}{a-2}\right)^2 = \frac{a(a^2-2a+4)}{a-2} \quad \cdots(***)$$

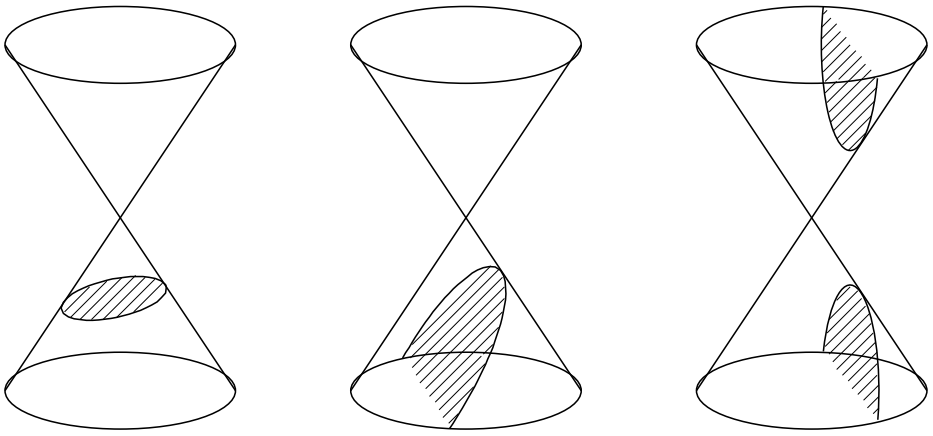
$a^2-2a+4 = (a-1)^2+3 > 0$ であるから，$a(a-2)$ と $\dfrac{a(a^2-2a+4)}{a-2}$ は同符号．

したがって，(∗∗)，(∗ ∗ ∗) から

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=0} \text{ のとき} & \text{直線 } \boldsymbol{(x=0)} \\ \boldsymbol{a=2} \text{ のとき} & \text{放物線 } \boldsymbol{\left(y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)} \\ \boldsymbol{a<0,\ 2<a} \text{ のとき} & \text{楕円} \\ \boldsymbol{0<a<2} \text{ のとき} & \text{双曲線} \end{cases}$$

解説 2 次曲線は，平面 (問題では xy 平面) による円錐面の切り口としても現れる．そのため，これらの曲線を円錐曲線ともいう．

放物線となるのは，平面が母線と平行な場合である．また，直線となるのは，平面が頂点を通り，母線に平行な場合である．とくに，平面が頂点のみを共有するとき，円錐曲線は 1 点に退化するので，本題の (∗ ∗ ∗) では円錐曲線が退化していないことを確認している．



楕円　　放物線　　双曲線

1.23　(1)　$x=a\cos\theta+5$，$y=2a\sin\theta$ より

$$\cos\theta=\frac{x-5}{a},\quad \sin\theta=\frac{y}{2a}$$

$0<a<5$，$0\leqq\theta<2\pi$ より　**楕円** $\boldsymbol{\left(\frac{x-5}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{2a}\right)^2=1}$

(2)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると，P は楕円上の点であるから

$$\left(\frac{x_1-5}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{2a}\right)^2=1 \quad \cdots ①$$

P における楕円の接線の方程式は

$$\frac{(x_1-5)(x-5)}{a^2}+\frac{y_1y}{4a^2}=1$$

これが原点を通るから　　$x_1 = \dfrac{25-a^2}{5}$

これを ① に代入すると　　$\dfrac{a^2}{25} + \left(\dfrac{y_1}{2a}\right)^2 = 1$

$0 < a < 5$ に注意して　　$y_1 = \pm\dfrac{2a\sqrt{25-a^2}}{5}$

この原点を通る直線の傾きは　$\dfrac{y_1}{x_1} = \pm\dfrac{2a}{\sqrt{25-a^2}}$

よって　接線の方程式は　$\boldsymbol{y = \pm\dfrac{2a}{\sqrt{25-a^2}}x}$

接点の座標は　$\left(\dfrac{\boldsymbol{25-a^2}}{\boldsymbol{5}},\ \pm\dfrac{\boldsymbol{2a\sqrt{25-a^2}}}{\boldsymbol{5}}\right)$

(3) (2) で求めた 2 つの接点の垂直二等分線は，x 軸であるから，外心 C は，x 軸上の点である．原点 $(0,\ 0)$ と接点 $\left(\dfrac{25-a^2}{5},\ \dfrac{2a\sqrt{25-a^2}}{5}\right)$ の垂直二等分線は，点 $\left(\dfrac{25-a^2}{10},\ \dfrac{a\sqrt{25-a^2}}{5}\right)$ を通り，傾き $-\dfrac{\sqrt{25-a^2}}{2a}$ の直線

$$y - \frac{a\sqrt{25-a^2}}{5} = -\frac{\sqrt{25-a^2}}{2a}\left(x - \frac{25-a^2}{10}\right)$$

である．$y = 0$ を代入して　$x = \dfrac{3a^2+25}{10}$　　よって　$\mathrm{C}\left(\dfrac{\boldsymbol{3a^2+25}}{\boldsymbol{10}},\ \boldsymbol{0}\right)$

C が楕円上にあるとき (1) で求めた楕円の方程式から

$$\left(\frac{3a^2-25}{10a}\right)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3a^2 - 25 = \pm 10a$$

ゆえに　$(a \mp 5)(3a \pm 5) = 0$　　$0 < a < 5$ より　$\boldsymbol{a = \dfrac{5}{3}}$

1.24　(1) F は放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ の焦点であり，準線の方程式は $y = -1$ である．

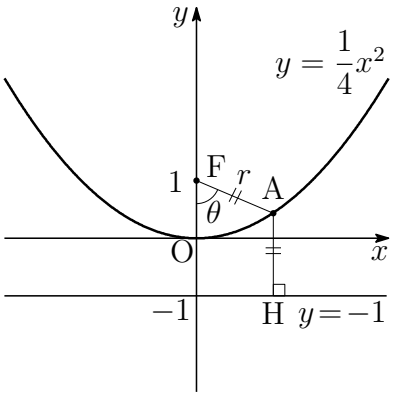
右の図から，放物線上の点 A の y 座標は

$$y = 1 - r\cos\theta$$

A から準線に下ろした垂線 AH の長さは

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &= (1 - r\cos\theta) - (-1)\\ &= 2 - r\cos\theta\end{aligned}$$

放物線上の点 A について，FA = AH であるから



$$r = 2 - r\cos\theta \qquad \text{これを解いて} \qquad \boldsymbol{r = \frac{2}{1+\cos\theta}}$$

(2) (1) の結果から　　$\mathrm{FA}_k = \dfrac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}} = \int_0^1 \frac{2}{1+\cos\frac{\pi x}{2}}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}\,dx = \left[\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi x}{4}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{4}{\pi}}$$

1.25 (1) $r = 2\cos\theta$ の両辺に r をかけると

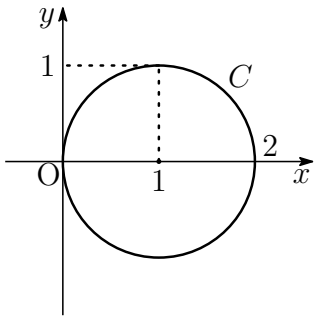
$$r^2 = 2r\cos\theta$$

$r^2 = x^2 + y^2$，$r\cos\theta = x$ であるから

$$x^2 + y^2 = 2x$$

ゆえに　$\boldsymbol{(x-1)^2 + y^2 = 1}$　$\cdots$①

C の表す図形は，中心 $(1,\ 0)$，半径 1 の円で，右の図のようになる．



(2) 点 $(-1,\ 0)$ を通り，傾き k の直線は　$y = k(x+1)$　$\cdots$②

①，② から y を消去すると　$(x-1)^2 + k^2(x+1)^2 = 1$

x について整理すると　$(k^2+1)x^2 + 2(k^2-1)x + k^2 = 0$　$\cdots$③

方程式 ③ の判別式を D とすると

$$D/4 = (k^2-1)^2 - (k^2+1)k^2 = 1 - 3k^2$$

直線 ② が C と 2 点で交わるから

$$1 - 3k^2 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{3}} < k < \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(3) 直線と C の 2 つの交点の x 座標を α，β とすると，2 つの交点の中点の座標は，② により

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ k\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\right)$$

方程式 ③ の解と係数の関係により　　$\alpha + \beta = \dfrac{2(1-k^2)}{k^2+1}$

ゆえに，中点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$x = \dfrac{1-k^2}{k^2+1}$，$y = \dfrac{2k}{k^2+1}$

ここで，$k=\tan\theta$ とすると，(2) の結果から　$-\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{6}$

したがって　　$x=\dfrac{1-\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$

$$y=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$$

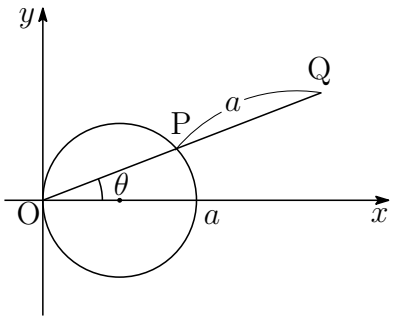
$-\dfrac{\pi}{3}<2\theta<\dfrac{\pi}{3}$ であるから　$\dfrac{1}{2}<x\leqq 1$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<y<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，求める軌跡の方程式は　　$\boldsymbol{x^2+y^2=1}\ \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}<x\leqq 1}\right)$

1.26　(1)　C_2 の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$$\begin{aligned} r&=\mathrm{OP}+\mathrm{PQ}=a\cos\theta+a\\ &=a(\cos\theta+1)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{r=a(\cos\theta+1)}$



(2)　点 $\mathrm{Q}(r_0,\ \theta_0)$ の直交座標は　$(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=r_0(\cos\theta_0,\ \sin\theta_0)$$

点 $\mathrm{Q}(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$ を通り，法線ベクトルの 1 つが $(\cos\theta_0,\ \sin\theta_0)$ である直線が l であるから，その方程式は

$$\cos\theta_0(x-r_0\cos\theta_0)+\sin\theta_0(y-r_0\sin\theta_0)=0$$

整理すると　　$\boldsymbol{x\cos\theta_0+y\sin\theta_0-r_0=0}$

(3)　点 $(a,\ 0)$ から直線 l までの距離を d とすると，$r_0=a(\cos\theta_0+1)$ より

$$d=\frac{|a\cos\theta_0-r_0|}{\sqrt{\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0}}=|a\cos\theta_0-a(\cos\theta_0+1)|=a$$

よって，l は，点 Q に関係なく常に点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 a の接する．

1.27　(1)　$C_1:x^2+y^2+6x-2y+7=0$ より　$(x+3)^2+(y-1)^2=3$

C_1 は，中心 $(-3,\ 1)$，半径 $\sqrt{3}$ の円であるから

$$\boldsymbol{x=-3+\sqrt{3}\cos\theta,\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta}$$

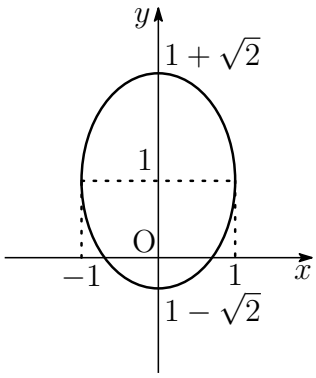
(2) $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}$ より　$\sqrt{2}r=r\sin\theta+1$

このとき，$r\sin\theta=y$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ である
ことに注意して，上式の両辺を平方すると

$$2(x^2+y^2)=(y+1)^2$$

すなわち　$\boldsymbol{x^2+\dfrac{(y-1)^2}{2}=1}$

よって，C_2 の概形は右のようになる．



(3) C_2 上の点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P は C_2 上にあるから

$$p^2+\frac{(q-1)^2}{2}=1 \quad \cdots①$$

C_2 の P における接線の方程式は

$$px+\frac{1}{2}(q-1)(y-1)=1 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ が C_1 の中心 $(-3,\ 1)$ を通るとき

$$-3p=1 \quad \text{ゆえに} \quad p=-\frac{1}{3} \quad \cdots②$$

② を ① に代入することにより　$q=\dfrac{7}{3},-\dfrac{1}{3}$

C_2 上の点 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{7}{3}\right)$ における接線の方程式は，$(*)$ により

$$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}-1\right)(y-1)=0 \quad \text{すなわち} \quad x-2y+5=0$$

また，C_2 上の点 $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ における接線の方程式は，$(*)$ により

$$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}-1\right)(y-1)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+2y+1=0$$

よって，求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{x-2y+5=0,\quad x+2y+1=0}$$

1.28　(1) $r=\dfrac{a}{2+\cos\theta}$ より　$2r+r\cos\theta=a$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$r\cos\theta=x$ を代入すると

$$2\sqrt{x^2+y^2}+x=a$$

$2\sqrt{x^2+y^2}=a-x$ の両辺を平方すると

$$4(x^2+y^2)=(a-x)^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{3x^2+4y^2+2ax-a^2=0}$$

(2) (1) で求めた 2 次曲線を x 軸方向に $\dfrac{a}{3}$ だけ平行移動すると

$$3\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+4y^2+2a\left(x-\frac{a}{3}\right)-a^2=0$$

整理すると $\qquad \boldsymbol{3x^2+4y^2-\frac{4}{3}a^2=0}$

2 次曲線 C と x 軸との交点は，上式に $y=0$ を代入して

$$3x^2-\frac{4}{3}a^2=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\pm\frac{2}{3}a$$

2 つの交点 A，B について，B の x 座標は正であるから

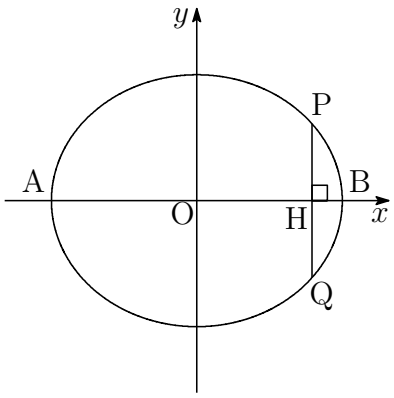
$$\mathbf{A}\left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{a},\ \mathbf{0}\right),\ \mathbf{B}\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a},\ \mathbf{0}\right)$$

(3) $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ は x 軸上にないから $\quad \beta\neq 0$

また，$\mathrm{Q}(\alpha,-\beta)$，$\mathrm{H}(\alpha,\ 0)$ より

$$\mathrm{PH}\cdot\mathrm{QH}=\mathrm{PH}^2=\beta^2$$

$$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}=\left(\alpha+\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}a-\alpha\right)=\frac{4}{9}a^2-\alpha^2$$



P は C 上の点であるから

$$3\alpha^2+4\beta^2-\frac{4}{3}a^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4}{9}a^2-\alpha^2=\frac{4}{3}\beta^2$$

よって $\qquad \dfrac{\mathrm{PH}\cdot\mathrm{QH}}{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}}=\dfrac{\beta^2}{\frac{4}{9}a^2-\alpha^2}=\dfrac{\beta^2}{\frac{4}{3}\beta^2}=\dfrac{3}{4}$

1.29 (1) $\mathrm{F}_1(a,\ a)$，$\mathrm{F}_2(-a,-a)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ より

$$\mathrm{F}_1\mathrm{P}=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}, \qquad \mathrm{F}_2\mathrm{P}=\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}$$

これを $\mathrm{F_1P}\cdot\mathrm{F_2P} = 2a^2$ に代入すると

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2} = 2a^2$$

両辺を平方すると

$$\{(x^2+y^2+2a^2)-2a(x+y)\}\{(x^2+y^2+2a^2)+2a(x+y)\} = 4a^4$$
$$(x^2+y^2+2a^2)^2 - 4a^2(x+y)^2 = 4a^4$$
$$(x^2+y^2)^2 + 4a^2(x^2+y^2) + 4a^4 - 4a^2(x+y)^2 = 4a^4$$

よって　　$\boldsymbol{(x^2+y^2)^2 - 8a^2xy = 0}$

(2) (1) の結果に $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を代入すると

$$(r^2)^2 - 8a^2 r\cos\theta\cdot r\sin\theta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad r^2(r^2 - 4a^2\sin 2\theta) = 0$$

$r = 0$ は，$r^2 = 4a^2\sin 2\theta$ に含まれるから，求める極方程式は

$$\boldsymbol{r^2 = 4a^2\sin 2\theta}$$

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より　　$0 \leqq 2\theta < 4\pi$

$r \neq 0$ より $r^2 > 0$ であるから　　$\sin 2\theta > 0$

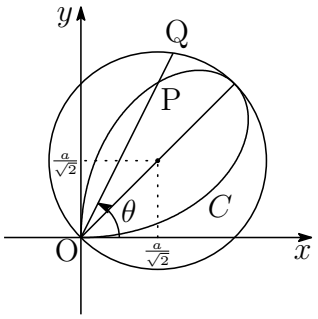
ゆえに　$0 < 2\theta < \pi$，$2\pi < 2\theta < 3\pi$　すなわち　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

よって，C から原点を除いた部分は，平面上の第 1 象限と第 3 象限を合わせた範囲に含まれる．

(4) 点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 a の円を極方程式で表すと

$$r = 2a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

この円周上の点 Q と C 上の点 P を右の図のようにとると

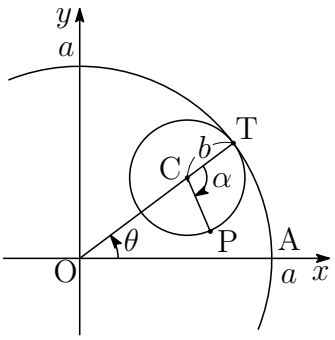


$$\mathrm{OQ} = \sqrt{2}a(\sin\theta + \cos\theta)$$

ゆえに　　$\mathrm{OQ}^2 - \mathrm{OP}^2 = 2a^2(\sin\theta+\cos\theta)^2 - 4a^2\sin 2\theta$
$= a^2(\sin\theta - \cos\theta)^2 \geqq 0$

よって，第 1 象限にある P は，点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 a の周または内部にある．

1.30 (1) O と C の接点を T とし，$\alpha = \angle\mathrm{TCP}$ とすると，



$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから

$$a\theta = b\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{a}{b}\theta$$

$\mathrm{OC} = a - b$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (a-b)(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = b(\cos(\theta-\alpha),\ \sin(\theta-\alpha))$$

$\theta - \alpha = \dfrac{b-a}{b}\theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$$
$$= (a-b)(\cos\theta,\ \sin\theta) + b\left(\cos\frac{b-a}{b}\theta,\ \sin\frac{b-a}{b}\theta\right)$$

よって $\quad \boldsymbol{x = (a-b)\cos\theta + b\cos\dfrac{b-a}{b}\theta},$

$$\boldsymbol{y = (a-b)\sin\theta + b\sin\frac{b-a}{b}\theta}$$

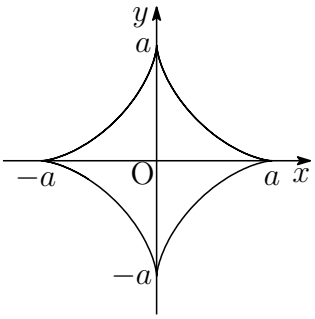
(2) $b = \dfrac{1}{4}a$ であるから，これを (1) の結果に代入すると

$$x = \frac{3}{4}a\cos\theta + \frac{1}{4}a\cos(-3\theta)$$
$$= \frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta) = \boldsymbol{a\cos^3\theta}$$
$$y = \frac{3}{4}a\sin\theta + \frac{1}{4}a\sin(-3\theta)$$
$$= \frac{a}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = \boldsymbol{a\sin^3\theta}$$

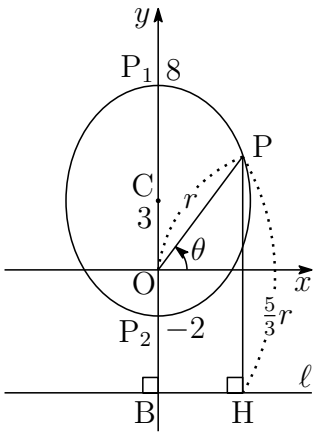
解説 (2) の結果から

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

この曲線をアステロイド (asteroid) または星芒形（せいぼうけい）という．



1.31 (1) O は，楕円の焦点であるから，右の図において，楕円の離心率 e は



$$e=\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CP_2}}=\frac{3}{5}$$

楕円の準線を ℓ とすると，楕円上の点 P から準線 ℓ に下した垂線を PH とすると

$$e=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

が成り立つ (2 次曲線について成り立つ関係式).

O から準線 ℓ までの距離 OB を λ とする．右図から，PH を 2 通りに表すと

$$\mathrm{PH}=\frac{5}{3}r,\quad \mathrm{PH}=\lambda+r\sin\theta\quad \text{ゆえに}\quad r=\frac{3\lambda}{5-3\sin\theta}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき (P が $\mathrm{P_1}$ にある)，$r=8$ であるから，上式より　$3\lambda=16$

したがって　$r=\dfrac{16}{5-3\sin\theta}$　よって　$y=r\sin\theta=\boldsymbol{\dfrac{16\sin\theta}{5-3\sin\theta}}$

補足 2 次曲線の焦点を極とすると，その方程式を極方程式で表すことができる.

楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$ の準線は　$y=-\dfrac{16}{3}$

また，楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y+3)^2}{25}=1$ の準線は　$y=\dfrac{16}{3}$

その極方程式は　$r=\dfrac{16}{5+3\sin\theta}$

(2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{16\cos\theta}{5-3\sin\theta},\ \dfrac{16\sin\theta}{5-3\sin\theta}\right)$ における楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$ の接線は

$$\frac{16\cos\theta}{5-3\sin\theta}\cdot\frac{x}{16}+\left(\frac{16\sin\theta}{5-3\sin\theta}-3\right)\cdot\frac{y-3}{25}=1$$

よって　$\boldsymbol{(5\cos\theta)x+(5\sin\theta-3)y-16=0}$

補足 楕円 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}+\frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$$

(3) 点 $\mathrm{A}(0,\ 6)$ を通り，l に垂直な直線の方程式は

$$-(5\sin\theta-3)x+(5\cos\theta)(y-6)=0$$

ここで，$a=5\cos\theta$，$b=5\sin\theta-3$ とおくと，l および上式は

$$ax+by=16,\quad -bx+ay=30\cos\theta$$

これら 2 直線の交点を $\mathrm{M}(x,\ y)$ とすると

$$(a^2+b^2)x=16a-30b\cos\theta,\quad (a^2+b^2)y=16b+30a\cos\theta$$

このとき

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(5\cos\theta)^2+(5\sin\theta-3)^2\\&=2(17-15\cos\theta)\\16a-30b\cos\theta&=16\cdot5\cos\theta-30(5\sin\theta-3)\cos\theta\\&=10\cos\theta(17-15\sin\theta)\\16b+30a\cos\theta&=16(5\sin\theta-3)+30\cdot5\cos\theta\cdot\cos\theta\\&=-150\sin^2\theta+80\sin\theta+102\\&=2(5\sin\theta+3)(17-15\sin\theta)\end{aligned}$$

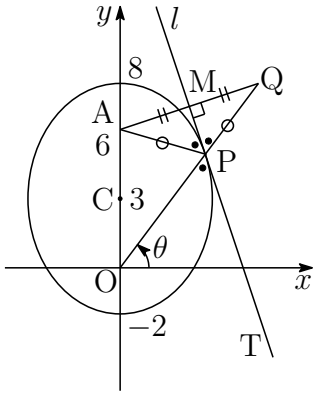
$17-15\sin\theta\neq0$ であるから　$\mathrm{M}(5\cos\theta,\ 5\sin\theta+3)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}5\cos\theta\\5\sin\theta+3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cos\theta\\5\sin\theta-3\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}5\cos\theta\\5\sin\theta-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\cos\theta\\10\sin\theta\end{pmatrix}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{Q}(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)}$

別解　右の図で，$\triangle\mathrm{APM}\equiv\triangle\mathrm{QPM}$ であるから



$$\angle\mathrm{APM}=\angle\mathrm{QPM},\quad \mathrm{AP}=\mathrm{PQ}$$

O，A は楕円の焦点であるから

$$\angle\mathrm{APM}=\angle\mathrm{OPT}$$

ゆえに　　$\angle\mathrm{QPM}=\angle\mathrm{OPT}$

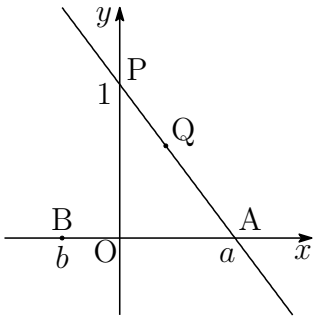
Q は OP の延長線上にあるから

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}+\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}+\mathrm{AP}=2\times5=10$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{Q}(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)}$

解説　(九工大 [情]2010) 3

1.32 (1) 条件から　　$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ} = a(a+1)\cdots①$



$a > 0$，$b \leqq 0$ より　$\mathrm{AO} = a$，$\mathrm{AB} = a - b$

これらを $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ} = \mathrm{AO}\cdot\mathrm{AB}$ に代入すると

$$a(a+1) = a(a-b)$$

$a \neq 0$ であるから　　$a + 1 = a - b$

よって　　$\boldsymbol{b = -1}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (0,\ 1) - (a,\ 0) = (-a,\ 1)$ より　$\mathrm{AP}^2 = a^2 + 1$

上式および ① から　　$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}} = \dfrac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}^2} = \dfrac{a(a+1)}{a^2+1}$

仮定より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は同じ向きであるから

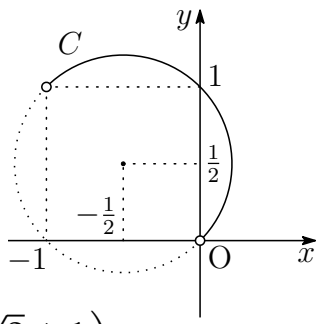
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= (a,\ 0) + \frac{a(a+1)}{a^2+1}(-a,\ 1) = \left(\frac{a(1-a)}{a^2+1},\ \frac{a(1+a)}{a^2+1}\right)\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ は　　$x = \dfrac{a(1-a)}{a^2+1}$，　$y = \dfrac{a(1+a)}{a^2+1}$

$a > 0$ より，$a = \tan\theta\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}x &= \frac{\tan\theta(1-\tan\theta)}{\tan^2\theta+1} = \sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \quad \cdots① \\ y &= \frac{\tan\theta(1+\tan\theta)}{\tan^2\theta+1} = \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \quad \cdots②\end{aligned}$$

ゆえに，点 Q の軌跡は O と点 $(-1,\ 1)$ を直径の両端とする円周上を O から点 $(-1,\ 1)$ まで反時計回りに描いた図形 (O と $(-1,\ 1)$ を含まない).



よって　中心 $\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) Q の y 座標が最大となる点は，①，② より

$$2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\text{のとき}\quad \mathbf{Q}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$$

このとき，$\theta = \dfrac{3\pi}{8}$ であるから，$a = \tan\dfrac{3\pi}{8} > 0$ より

$$\tan^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}+1)^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \sqrt{2}+1}$$

補足 AP·AQ = AO·AB が成り立つから，方べきの定理の逆により，4 点 P，Q，O，B が同一円周上にあり，$\angle\mathrm{POB} = 90^\circ$ であるから，PB を直径とする円であること分かるが，Q の y 座標の最大値は分からない．

1.33 (1) 直線 OP の方程式は $\qquad 2x - ty = 0 \quad \cdots ①$

直線 MN は $\mathrm{P}(t,\ 2)$ を極とする C の極線であるから

$$tx + 2y = 1 \quad \cdots ②$$

Q は，①，② の交点であるから

$$x = \frac{t}{t^2+4},\ \ y = \frac{2}{t^2+4} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\frac{t}{t^2+4},\ \frac{2}{t^2+4}\right)}$$

円 $C : x^2 + y^2 = r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．2 本の接線

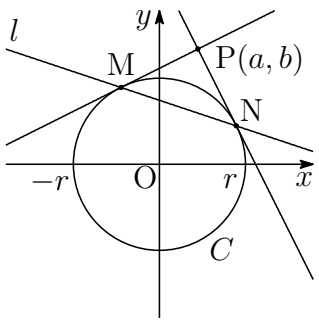
$$x_1x + y_1y = r^2, \quad x_2x + y_2y = r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1 + by_1 = r^2, \quad ax_2 + by_2 = r^2$$

上の 2 式から直線 $l : ax + by = r^2$ は 2 点 M，N を通る．

このとき，l を P を**極**とする C の**極線**という．



(2) (1) の結果から $t = 2\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x = \frac{t}{t^2+4} = \frac{2\tan\theta}{(2\tan\theta)^2+4} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}\sin 2\theta$$
$$y = \frac{2}{t^2+4} = \frac{2}{(2\tan\theta)^2+4} = \frac{1}{2}\cos^2\theta = \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}$$

よって，求める点 Q の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},\ (x,\ y) \neq (0,\ 0)}$$

1.34 (1) C において，$s = c\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x = \frac{c}{(c\tan\theta)^2 + c^2} = \frac{1}{c(\tan^2\theta + 1)} = \frac{1}{c}\cos^2\theta = \frac{1}{2c}(1 + \cos 2\theta)$$
$$y = \frac{c\tan\theta}{(c\tan\theta)^2 + c^2} = \frac{\tan\theta}{c(\tan^2\theta + 1)} = \frac{1}{c}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2c}\sin 2\theta$$

上の 2 式から．C の表す円の方程式は，θ の範囲に注意して

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2} \quad \cdots ① \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{(x,\ y) \neq (0,\ 0)}$$

C の x，y，s，c をそれぞれ y，x，t，d に置き換えたものが D であるから，D の表す円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2 + \left(y - \frac{1}{2d}\right)^2 = \left(\frac{1}{2d}\right)^2} \quad \cdots ② \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{(x,\ y) \neq (0,\ 0)}$$

(2) ①，② の辺々を引いて整理すると　　$y = \dfrac{d}{c}x$　$\cdots ③$

③ を ① に代入して整理すると　$(c^2 + d^2)x^2 = cx$

$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ であるから，上式および ③ から，交点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{c}{c^2 + d^2},\ \frac{d}{c^2 + d^2}\right)}$$

(3) (2) で求めた交点における C の接線の方程式は

$$\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{1}{2c}\right)\left(x - \frac{1}{2c}\right) + \frac{d}{c^2 + d^2}y = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

これを整理すると　　$\boldsymbol{(c^2 - d^2)x + 2cdy - c = 0}$

円上の点における接線の方程式

円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{(p - a)(x - a) + (q - b)(y - b) = r^2}$$

1.35 (1) 点 $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と原点 O に関して対称な点を $\mathrm{P}'(-a\cos\theta, -b\sin\theta)$ とすると，2 点 P，P′ は E 上の点であり，E の P，P′ における接線をそれぞれ l_1，l_2 とすると

$$l_1 : \frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b} = 1, \quad l_2 : \frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b} = -1$$

よって，$l : \dfrac{\cos\theta}{a}x + \dfrac{\sin\theta}{b}y = k$ が E と異なる 2 点で交わる k の値の範囲は

$$\boldsymbol{-1 < k < 1}$$

(2) $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と $l:\dfrac{\cos\theta}{a}x+\dfrac{\sin\theta}{b}y-k=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{\left|\dfrac{\cos\theta}{a}\cdot a\cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{b}\cdot b\sin\theta-k\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\theta}{b}\right)^2}}=\frac{\boldsymbol{ab(1-k)}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}}$$

(3) $$\left(\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{a}x-\frac{\cos\theta}{b}y\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

上式に $\dfrac{\cos\theta}{a}x+\dfrac{\sin\theta}{b}y=k\cdots①$，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を代入すると

$$k^2+\left(\frac{\sin\theta}{a}x-\frac{\cos\theta}{b}y\right)^2=1$$

ゆえに $$\frac{\sin\theta}{a}x-\frac{\cos\theta}{b}y=\pm\sqrt{1-k^2}\quad\cdots②$$

①，② を解いて

$\boldsymbol{\left(a(k\cos\theta\pm\sqrt{1-k^2}\sin\theta),\ b(k\sin\theta\mp\sqrt{1-k^2}\cos\theta)\right)}$ **(複号同順)**

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2&=(2a\sqrt{1-k^2}\sin\theta)^2+(2b\sqrt{1-k^2}\cos\theta)^2\\&=4(1-k^2)(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)\end{aligned}$$

ゆえに $$\mathrm{QR}=2\sqrt{1-k^2}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

したがって

$$\begin{aligned}S(k)&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QR}\cdot d\\&=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{1-k^2}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\cdot\frac{ab(1-k)}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}\\&=ab(1-k)\sqrt{1-k^2}\end{aligned}$$

よって，$S(k)$ は θ によらない．

(5) (4) の結果から　$S(k)=ab\sqrt{(1+k)(1-k)^3}$

$f(k)=(1+k)(1-k)^3$ $(-1<k<1)$ とおくと

$$f'(k)=-2(2k+1)(1-k)^2$$

したがって，$f(k)$ の増減表は

k	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$	(0)	↗	$\frac{27}{16}$	↘	(0)

よって，$S(k)$ は $k=-\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab}$

1.36 (1) $f(0)=1$ より $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$，$f(\pi)=\dfrac{1}{2}$ より $\mathrm{P}_3\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

P_1 は C 上にあるから　$\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}=1$

P_3 は C の内部にあるから　$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<1$

上の 2 式から　$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}$

ゆえに　$\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2<(1-\alpha)^2$　よって　$\boldsymbol{\alpha<\dfrac{1}{4}}$

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{8}$ より $\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$，$f'(\theta)=\dfrac{\theta-\pi}{\pi^2}$ であるから $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2\pi}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$ より

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{dx}{d\theta}=-\dfrac{5}{8}$，$\dfrac{dy}{d\theta}=-\dfrac{1}{2\pi}$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^{-1}=\dfrac{4}{5\pi}$

よって，l の方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{5\pi}x+\dfrac{5}{8}}$

(3) D の軸の一つは x 軸上にあるから，その中心を $(k,\ 0)$ とする．また，D は P_1 を通るから，楕円 D を $\dfrac{(x-k)^2}{(1-k)^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおく．

また，D は P_2 を通るから　$\dfrac{k^2}{(1-k)^2}+\dfrac{25}{64b^2}=1$　$\cdots$①

P_2 における D の接線の方程式は　$\dfrac{(0-k)(x-k)}{(1-k)^2}+\dfrac{5y}{8b^2}=1$

この接線の傾き $\dfrac{8b^2k}{5(1-k)^2}$ が l の傾きと等しいので

$\dfrac{4}{5\pi}=\dfrac{8b^2k}{5(1-k)^2}$　すなわち　$\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{2\pi k}{(1-k)^2}$　$\cdots$②

② を ① に代入し，整理すると

$\dfrac{k^2}{(1-k)^2}+\dfrac{25\pi k}{32(1-k)^2}=1$　すなわち　$(25\pi+64)k=32$

ゆえに　　$k=\dfrac{32}{25\pi+64}<\dfrac{32}{64+64}=\dfrac{1}{4}$

よって，(1) の結果により，P_3 は D の内部にある．

補足　頂点 $(2k-1,\ 0)$ により $2k-1<-\dfrac{1}{2}$ を示してもよい

1.37 C 上の点 P を $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,\ 0\right)$ とおく $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$．直線 AP と平面 $x=d$ との交点を Q とすると，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(0,\ 0,\ 1)+k\left(\frac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,-1\right)\\&=\left(\frac{k}{\cos\theta},\ k\tan\theta,\ 1-k\right)\quad\cdots①\end{aligned}$$

点 Q の x 座標が d であるから

$$\frac{k}{\cos\theta}=d\quad\text{ゆえに}\quad k=d\cos\theta$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(d,\ d\sin\theta,\ 1-d\cos\theta)\\&=(d,\ 0,\ 1)+d(0,\ \sin\theta,-\cos\theta)\end{aligned}$$

ここで　　$\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$-\cos\theta=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(d,\ 0,\ 1)+d\left(0,\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

このとき，$-\pi<\theta-\dfrac{\pi}{2}<0$ であるから，求める軌跡は，

平面 $x=d$ 上の点 $(d,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 d の円周上で $z<1$.

別解　軌跡の方程式を，次のように表してもよい．

$$\begin{cases}x=d\\y^2+(z-1)^2=d^2\\z<1\end{cases}$$

解説　(九大 [理]2018) 1

2.1 $\overline{z_1}z_2 = x + yi$ とおくと

$$|z_1||z_2| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1\overline{z_2}| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\geqq \sqrt{x^2}$$
$$\geqq x = \frac{(x+yi)+(x-yi)}{2} = \frac{\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}}{2}$$

よって　　$|z_1||z_2| \geqq \dfrac{\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}}{2}$

2.2 (1) $k = \dfrac{\alpha}{\beta}$ とおくと (k は正の実数)　$\alpha = k\beta$

ゆえに　$|\alpha+\beta| = |k\beta+\beta| = |(k+1)\beta| = (k+1)|\beta|$

$|\alpha| + |\beta| = |k\beta| + |\beta| = k|\beta| + |\beta| = (k+1)|\beta|$

よって　　$|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$

(2) $\gamma = x + yi$ とおくと，$\gamma + \overline{\gamma} = 2|\gamma|$ より

$$(x+yi)+(x-yi) = 2|\gamma| \quad \text{ゆえに} \quad x = |\gamma|$$

γ は 0 ではないので，$x = \sqrt{x^2+y^2} > 0$　したがって　$x > 0$

$x = \sqrt{x^2+y^2}$ の両辺を平方すると　$x^2 = x^2 + y^2$　ゆえに　$y = 0$

よって，γ は正の実数である．

(3) $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$ の両辺を平方すると

$$|\alpha+\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2 \quad \text{整理すると} \quad \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2|\alpha||\beta|$$

したがって　　$\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha\overline{\beta}} = 2|\alpha\overline{\beta}|$

(2) の結果により，$\alpha\overline{\beta}$ は正の実数であるから

$$\alpha\overline{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\overline{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot|\beta|^2 > 0$$

よって，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ は正の実数である．

2.3 (1) $\alpha^3 - 8 = (\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)$ であるから，$\alpha^2+2\alpha+4 = 0$ より

$$\alpha^3 - 8 = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha^3 = 8}$$

(2) (1) の結果から　$|\alpha|^3 = 8$　ゆえに　$|\alpha| = 2$

$\alpha^2 = 3\overline{\alpha} + \dfrac{k}{\alpha}$ より　　$\alpha^3 = 3|\alpha|^2 + k$

これに $\alpha^3 = 8$，$|\alpha| = 2$ を代入すると

$$8 = 3\cdot 2^2 + k \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k = -4}$$

(3) (2) の結果より $z^2 = 3\overline{z} - \dfrac{4}{z}$ であるから

$$z^3 = 3|z|^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad |z|^3 = \left| 3|z|^2 - 4 \right|$$

i) $3|z|^2 - 4 \geqq 0$ すなわち $|z| \geqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき

$$|z|^3 = 3|z|^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad (|z|+1)(|z|-2)^2 = 0$$

このとき，$|z| = 2$ であるから

$$z^3 = 3\cdot 2^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad (z-2)(z^2+2z+4) = 0$$

これを解いて $z = 2,\ -1 \pm \sqrt{3}\,i$

ii) $3|z|^2 - 4 < 0$ すなわち $0 \leqq |z| < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき

$$|z|^3 = -(3|z|^2 - 4) \quad \text{ゆえに} \quad (|z|-1)(|z|+2)^2 = 0$$

このとき，$|z| = 1$ であるから

$$z^3 = 3\cdot 1^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad (z+1)(z^2 - z + 1) = 0$$

これを解いて $z = -1,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

よって $\boldsymbol{z = -1,\ 2,\ -1 \pm \sqrt{3}i,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}}$

2.4 $\alpha(|z|^2+2) + i(2|\alpha|^2+1)\overline{z} = 0$ より

$$\frac{\alpha}{2|\alpha|^2+1} + \frac{\overline{z}i}{|z|^2+2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\overline{z}}{|z^2|+2} = \frac{\alpha i}{2|\alpha|^2+1}$$

上の第 2 式の共役複素数は $\qquad \dfrac{z}{|z|^2+2} = \dfrac{-\overline{\alpha}i}{2|\alpha|^2+1} \quad \cdots(*)$

(i) $\alpha = 0$ のとき，$(*)$ より $\quad z = 0$

(ii) $\alpha \neq 0$ のとき，$(*)$ より，$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i} = \dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1} = k$ とおくと $(k > 0)$

$|z| = k|\alpha|$ であるから，これを $\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1} = k$ に代入すると

$$\frac{k^2|\alpha|^2+2}{2|\alpha|^2+1} = k \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2k^2 - (2|\alpha|^2+1)k + 2 = 0$$

したがって $\quad (k-2)(|\alpha|^2k - 1) = 0 \quad$ これを解いて $\quad k = 2,\ \dfrac{1}{|\alpha|^2}$

$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i} = k$ であるから $\quad z = -2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}$

(i), (ii) より　$\boldsymbol{\alpha = 0}$ のとき　$\boldsymbol{z = 0}$

$\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ のとき　$\boldsymbol{z = -2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}}$

2.5 z の偏角が $45°$ であるから，$z = x + xi$ とおくと $(x > 0)$

$$|z+i| = |x + (x+1)i| = \sqrt{2x^2+2x+1}$$
$$|z-i| = |x + (x-1)i| = \sqrt{2x^2-2x+1}$$

これらを $|z+i| + |z-i| = \sqrt{6}$ に代入すると

$$\sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-2x+1} = \sqrt{6}$$
$$\sqrt{2x^2+2x+1} = \sqrt{6} - \sqrt{2x^2-2x+1}$$

両辺を 2 乗して整理すると　$\sqrt{6(2x^2-2x+1)} = 3 - 2x$

再び両辺を 2 乗して整理すると　$8x^2 = 3$

$0 < x < \dfrac{3}{2}$ により　$x = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$　よって　$\boldsymbol{z = \dfrac{\sqrt{6}}{4}(1+i)}$

解説 $|z+i| + |z-i| = \sqrt{6}$ の表す図形は，焦点が $-i$，i で，長軸が $\sqrt{6}$ の楕円を表し，短軸上の頂点は実軸上にあり，その座標を a とすると (a は実数)

$$|a+i| + |a-i| = \sqrt{6}　\text{ゆえに}　2\sqrt{a^2+1} = \sqrt{6}$$

これを解いて　$a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　また，長軸上の頂点は　$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

$z = x + yi$ とおくと，楕円の方程式は　$2x^2 + \dfrac{2}{3}y^2 = 1$

これと $y = x$ $(x > 0)$ により　$x = y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

2.6 (1) $-\overline{z} = (\cos\pi + i\sin\pi)\cdot r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$

$$= \boldsymbol{r\{\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)\}}$$

(2) $\dfrac{1}{z^2} = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{-2}$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{r^2}\{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\}}$$

(3) $z - |z| = r(\cos\theta + i\sin\theta) - r = r(\cos\theta - 1 + i\sin\theta)$

$$= r\left(-2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 2r\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \boldsymbol{2r\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right\}}$$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$2r\sin\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$

2.7 (1) $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \dfrac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$ より

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

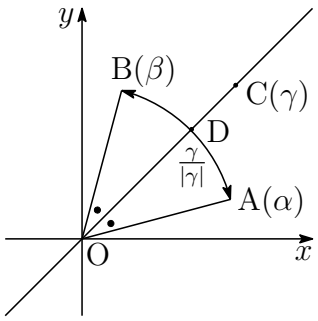
したがって $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = 1$ ゆえに $|\beta| = |\alpha|$, $\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}$

よって，OA = OB，$\angle$AOB $= \dfrac{\pi}{3}$ より，$\triangle$OAB は正三角形である．

(2) 点 D を $\dfrac{\gamma}{|\gamma|}$ とすると

$$\frac{\gamma}{|\gamma|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

右の図から 2 点 A，B は，点 D をそれぞれ原点 O を中心に $-\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させたものであるから



$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i} \\
\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i}
\end{aligned}$$

解説 α，β は

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\frac{1}{12}\pi + i\sin\frac{1}{12}\pi = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \\
\beta &= \cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i
\end{aligned}$$

2.8 (1) $\angle z_1 0 z_2 = \theta_2 - \theta_1$ であるから $S = \boldsymbol{r_1 r_2 |\sin(\theta_2 - \theta_1)|}$

(2) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ であるから

$$\begin{aligned} z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) \\ &\quad + r_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \\ &\quad + r_1r_2\{\cos(\theta_2-\theta_1) + i\sin(\theta_2-\theta_1)\} \\ &= 2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1) \end{aligned}$$

したがって，上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} |z_1|^2|z_2|^2 - \frac{(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)^2}{4} &= {r_1}^2{r_2}^2 - \frac{\{2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)\}^2}{4} \\ &= {r_1}^2{r_2}^2 - {r_1}^2{r_2}^2\cos^2(\theta_2-\theta_1) \\ &= {r_1}^2{r_2}^2\sin^2(\theta_2-\theta_1) \\ &= S^2 \end{aligned}$$

2.9 (1) $P(x) = 4x^3 + (12-2a)x^2 + (9-6a)x + 27$ とおくと

$$P(-3) = 4(-3)^3 + (12-2a)(-3)^2 + (9-6a)(-3) + 27 = 0$$

ゆえに，$P(x) = 0$ は $\boldsymbol{-3}$ を実数解にもち

$$\boldsymbol{P(x) = (x+3)(4x^2 - 2ax + 9)}$$

となる．したがって，$4x^2 - 2ax + 9 = 0 \cdots (*)$ の解が $P(x) = 0$ の虚数解である．2 次方程式 $(*)$ の判別式 D について $D/4 < 0$ であるから

$$(-a)^2 - 4\cdot 9 < 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-6 < a < 6}$$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の 2 つの虚数解が $r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$r(\cos\theta - i\sin\theta)$ であるから ($r > 0$，$0^\circ < \theta < 180^\circ$)，解と係数の関係により

$$\begin{aligned} r(\cos\theta + i\sin\theta) + r(\cos\theta - i\sin\theta) &= -\frac{-2a}{4} \\ r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot r(\cos\theta - i\sin\theta) &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

整理すると　$r\cos\theta = \dfrac{a}{4}$，　$r^2 = \dfrac{9}{4}$　　ゆえに　$\boldsymbol{r = \dfrac{3}{2}}$，$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{a}{6}}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{36-a^2}}{6}}$$

(3) 3つの解を $\alpha=\dfrac{3}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\beta=\dfrac{3}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$，$\gamma=-3$ とおく．
このとき，$-3<\dfrac{3}{2}\cos\theta$ に注意すると

$$(\alpha-\beta)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\gamma-\beta$$
$$3i\sin\theta\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-3-\frac{3}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}i\sin\theta=-3-\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}i\sin\theta$$

しがって　$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta=-3-\dfrac{3}{2}\cos\theta$　整理すると　$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2$

ゆえに　$2\sin(\theta-30^\circ)=2$　$0<\theta<180^\circ$ により　$\boldsymbol{\theta=120^\circ}$

(2) の結果 $\cos\theta=\dfrac{a}{6}$ より　$a=6\cos 120^\circ=\boldsymbol{-3}$

2.10　(1) $z(t)=\dfrac{1}{2-2t^2-\sqrt{a}ti}=\dfrac{2-2t^2+\sqrt{a}ti}{(2-2t^2)^2+at^2}=\dfrac{2-2t^2+\sqrt{a}ti}{4t^4+(a-8)t^2+4}$

よって，$z(t)$ の実部は　$\boldsymbol{\dfrac{2-2t^2}{4t^4+(a-8)t^2+4}}$,

虚部は　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a}\,t}{4t^4+(a-8)t^2+4}}$

(2) $z(t)=\dfrac{1}{2-2t^2-\sqrt{a}ti}$，$z(2t)=\dfrac{1}{2(1-4t^2-\sqrt{a}ti)}$ より

$$\frac{z(2t)}{z(t)}=\frac{2-2t^2-\sqrt{a}ti}{2(1-4t^2-\sqrt{a}ti)}=\frac{(2-2t^2-\sqrt{a}ti)(2-4t^2+\sqrt{a}ti)}{2\{(1-4t^2)^2+at^2\}}$$
$$=\frac{8t^4+(a-10)t^2+2+\sqrt{a}t(2t^2+1)i}{2\{16t^4+(a-8)t^2+1\}}\quad\cdots(*)$$

$a=2$ のとき　$\dfrac{z(2t)}{z(t)}=\dfrac{2(2t^2-1)^2+\sqrt{2}t(2t^2+1)i}{16t^4-6t^2+1}$

∠AOB が直角であるとき，$\dfrac{z(2t)}{z(t)}$ は純虚数であるから

$$2(2t^2-1)^2=0,\quad \sqrt{2}t(t^2+1)\neq 0$$

$t\geqq 0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) ∠AOB が直角であるとき，$\dfrac{z(2t)}{z(t)}$ は純虚数であるから，$(*)$ より次式をみたす $t \geqq 0$ が存在すればよい $(a > 0)$.

$$8t^4 + (a-10)t^2 + 2 = 0, \quad \sqrt{a}t(2t^2+1) \neq 0$$

第 1 式から $t \neq 0$ であるから，このとき第 2 式をみたす．したがって

$$8t^4 + (a-10)t^2 + 2 = 0$$

をみたす t が存在する a の値の範囲を求めればよい．
ここで，$x = t^2$ とおくと $(x > 0)$，2 次方程式

$$8x^2 + (a-10)x + 2 = 0 \quad \cdots (**)$$

が正の解をもつような a の値の範囲を求めればよい．
2 次方程式 $(**)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{2}{8} > 0 \quad \text{このとき} \quad \alpha > 0, \ \beta > 0$$

ゆえに　　$\alpha + \beta = -\dfrac{a-10}{8} > 0$　すなわち　$a < 10$　$\cdots$①

$(**)$ の解は実数解であるから $D \geqq 0$ より

$$(a-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 2 = (a-2)(a-18) \geqq 0$$

ゆえに　　$a \leqq 2, \ 18 \leqq a$　$\cdots$②

よって，①，② および $a > 0$ により　　$\boldsymbol{0 < a \leqq 2}$

2.11 (1) 点 D は直線 AC に関して点 B と反対側にあり，△ACD が正三角形であるから

$$z = \alpha + \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\gamma - \alpha) = -i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\{s + (t+1)i\}$$

$$= \frac{\boldsymbol{s - \sqrt{3}(t+1)}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}s + t - 1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{i}$$

(2) $4(\beta-\alpha)^2 + (\gamma-\alpha)^2 - 2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) = 0$ より

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) + 4 = 0$$

2 点 A，B の位置関係に注意してこれを解くと

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

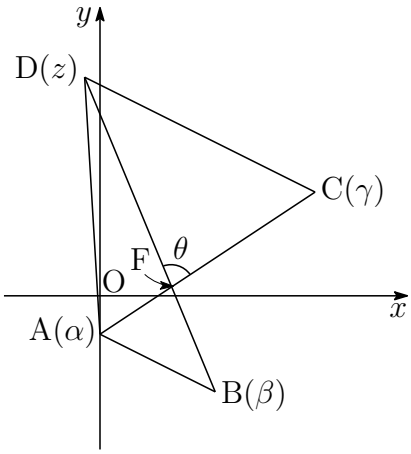
$w=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=2w$，$\dfrac{z-\alpha}{\gamma-\alpha}=w$ より

$$\gamma-\alpha=2w(\beta-\alpha)=(1+\sqrt{3}i)(2-i)=2+\sqrt{3}+(-1+2\sqrt{3})i$$
$$z-\alpha=2w^2(\beta-\alpha)=(-1+\sqrt{3}i)(2-i)=-2+\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i$$

$\alpha=-i$ より　　$\boldsymbol{\gamma=2+\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})i}$
$\boldsymbol{z=-2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{z-\beta}{\gamma-\alpha}&=\frac{z-\alpha-(\beta-\alpha)}{\gamma-\alpha}\\&=\frac{2w^2(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)}{2w(\beta-\alpha)}\\&=\frac{2w^2-1}{2w}=\frac{1}{2}\left(2w-\frac{1}{w}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}(1+3\sqrt{3}i)\end{aligned}$$



上の図から，$\theta=\arg\dfrac{z-\beta}{\gamma-\alpha}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{14}}$$

2.12 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}z^{4n+1}=z^{4n}z&=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{4n}(1+i)\\&=(\sqrt{2})^{4n}\left(\cos n\pi+i\sin n\pi\right)(1+i)\\&=4^n(-1)^n(1+i)=\boldsymbol{(-4)^n(1+i)}\end{aligned}$$

2.13 $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$ に $z^2+z+1=0$ を代入すると

$$z^3-1=0\quad\text{ゆえに}\quad z^3=1$$

$z^2+z+1=0$ を解いて　$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$z^2+z+1=0$ の 2 つの複素数の解 z，$\overline{z}$ について

$$z+\overline{z}=-1 \quad \text{ゆえに} \quad \overline{z}=-z-1$$

また，$z^2+z+1=0$ より，$z^2=-z-1$ であるから　$z^2=\overline{z}$

したがって

$$\begin{aligned}(i-z^n)(i-z^{2n}) &= (i-z^n)(i-\overline{z}^n)\\ &= -i(z^n+\overline{z}^n)\\ &= -i\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n-i\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n\\ &= -i\left(\cos\frac{2n}{3}\pi+i\sin\frac{2n}{3}\pi\right)-i\left(\cos\frac{2n}{3}\pi-i\sin\frac{2n}{3}\pi\right)\\ &= -2i\cos\frac{2n}{3}\end{aligned}$$

ゆえに　$\dfrac{1}{(i-z^n)(i-z^{2n})}=\dfrac{1}{-2i\cos\frac{2n}{3}\pi}=\dfrac{i}{2\cos\frac{2n}{3}\pi}$

よって　**自然数 n が 3 の倍数のとき**　$\boldsymbol{\dfrac{i}{2}}$

自然数 n が 3 の倍数でないとき　$\boldsymbol{-i}$

2.14　(1) 実係数の 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解 α，β は互いに共役であるから

$$\beta=\overline{\alpha}$$

上式と解と係数の関係により　$b=\alpha\beta=\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2 \quad \cdots(*)$

$\alpha\neq 0$ であるから，$|\alpha|>0$ より　$b>0$

(1) の結果と $\alpha=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\beta$ により

$$\alpha^2=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\alpha\beta=b\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \cdots(**)$$

よって　$\boldsymbol{\arg(\alpha^2)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi}$　**(k は整数)**

(2) $b=2$ のとき，$(**)$ より

$$\alpha^2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに $\alpha^{2n}=(\alpha^2)^n$ が実数となる最小の自然数 n は

$$n\cdot\frac{\pi}{6}=\pi \quad \text{すなわち} \quad n=6$$

このとき $\alpha^{2n}=(\alpha^2)^6=2^6\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^6=2^6\cdot(-1)=\boldsymbol{-64}$

2.15 (1) $z^5=1=\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ$

したがって，z を極形式で表すと

$$\begin{aligned} z_k&=\cos\frac{360^\circ\times k}{5}+i\sin\frac{360^\circ\times k}{5}\\ &=\boldsymbol{\cos(72^\circ\times k)+i\sin(72^\circ\times k)} \quad \boldsymbol{(k=0,1,2,3,4)}\end{aligned}$$

(2) $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$ であるから

$$z=1 \quad \text{または} \quad z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

(i) $z=1$ のとき $\quad z+\dfrac{1}{z}=2$

(ii) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ のとき，両辺を $z^2\neq 0$ で割ると

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1=0$$

$t=z+\dfrac{1}{z}$ とおくと $\quad t^2+t-1=0 \quad$ これを解いて $\quad t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(i)，(ii) より $\quad \boldsymbol{z+\dfrac{1}{z}=2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

(3) (1) の結果から $\quad z_2=\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ$

したがって $\quad z_2+\dfrac{1}{z_2}=z_2+\dfrac{\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=z_2+\overline{z_2}=2\cos 144^\circ<0$

上式および (2) の結果から $\quad z_2+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

よって $\quad \boldsymbol{\cos 144^\circ=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}}$

2.16 (1) $\theta=\dfrac{2}{7}\pi$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta\cdots$① より

$$\alpha^7=(\cos\theta+i\sin\theta)^7=\cos 7\theta+i\sin 7\theta=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

$\alpha^7-1=0$ であるから，等式 $\alpha^7-1=(\alpha-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\alpha^k$ により

$$(\alpha-1)\sum_{k=0}^{6}\alpha^k=0 \quad \text{また, } \alpha-1\neq 0 \text{ より} \quad \sum_{k=0}^{6}\alpha^k=0$$

(2) (1) の結果から $\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0 \quad \cdots(*)$

したがって $\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha^3}=0$

$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$, $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2$ により

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-1=0$$

① および $\dfrac{1}{\alpha}=\cos\theta-i\sin\theta$ より, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2\cos\theta$ であるから

$$(2\cos\theta)^3+(2\cos\theta)^2-2(2\cos\theta)-1=0$$
$$8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos\theta-1=0$$

上式より, $f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ について $\quad f(\cos\theta)=0$

(3) $\beta=\alpha^2$ とすると, $\alpha^7=1$ および $(*)$ により

$$\begin{aligned}\beta^6+\beta^5+\beta^4+\beta^3+\beta^2+\beta+1&=\alpha^{12}+\alpha^{10}+\alpha^8+\alpha^6+\alpha^4+\alpha^2+1\\&=\alpha^5+\alpha^3+\alpha+\alpha^6+\alpha^4+\alpha^2+1\\&=0\end{aligned}$$

$\beta=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ であるから $\quad \beta+\dfrac{1}{\beta}=2\cos 2\theta$

したがって, (2) と同様にして $\quad f(\cos 2\theta)=0$

2.17 (1) $z=x_1+y_1i$, $w=x_2+y_2i$ とおくと

(a) $z+w=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$ であるから

$$\begin{aligned}\overline{z+w}&=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i\\&=(x_1-y_1i)+(x_2-y_2i)\\&=\overline{z}+\overline{w}\end{aligned}$$

(b) $zw=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$ より

$$\overline{zw}=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i \quad \cdots①$$

$\overline{z} = x_1 - y_1 i$，$\overline{w} = x_2 - y_2 i$ より

$$\begin{aligned}\overline{z}\,\overline{w} &= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より　　$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(2) $z^2 - z + 1 = 0$ を解いて　　$z = \dfrac{1 \pm \sqrt{3} i}{2}$

(a) よって，求める α，β は

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{1 + \sqrt{3} i}}{\mathbf{2}} &= \mathbf{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}, \\ \frac{\mathbf{1 - \sqrt{3} i}}{\mathbf{2}} &= \mathbf{\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}}\end{aligned}$$

(b) $\cos \dfrac{5\pi}{3} + i \sin \dfrac{5\pi}{3} = \cos \dfrac{\pi}{3} - \sin \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha^{100} + \beta^{100} &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{100} + \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{100} \\ &= \left(\cos \frac{100}{3}\pi + i \sin \frac{100}{3}\pi\right) + \left(\cos \frac{100}{3}\pi - i \sin \frac{100}{3}\pi\right) \\ &= 2 \cos \frac{100}{3}\pi = 2 \cos \left(32\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-1}\end{aligned}$$

2.18 (1) $z = \cos \dfrac{2\pi}{5} + i \sin \dfrac{2\pi}{5}$ より

$$z^5 = \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)^5 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = \mathbf{1}$$

$z^5 - 1 = 0$ より　　$(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$

$z \neq 1$ であるから　　$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \mathbf{0}$

(2) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ を $z^2 \neq 0$ で割ると

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) = 1$$

$t = z + \dfrac{1}{z}$ より　　$t^2 + t = \mathbf{1}$

(3) $z = \cos \dfrac{2\pi}{5} + i \sin \dfrac{2\pi}{5}$，$\dfrac{1}{z} = \cos \dfrac{2\pi}{5} - i \sin \dfrac{2\pi}{5}$ であるから

$$t = z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{2\pi}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} t$$

上式より，$t>0$ であることに注意して，$t^2+t=1$ を解くと

$$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{よって} \quad \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}t=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

(4) 正五角形の一辺の長さを x とすると，中心角 $\dfrac{2\pi}{5}$，等しい 2 辺の長さが 1 の二等辺三角形に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos\frac{2\pi}{5} \\ &= 2-2\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\boldsymbol{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

2.19 (1) z の実部が $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ であるから $\quad \dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \cdots①$

$|z|=1$ より $\quad |z|^2=1 \quad$ ゆえに $\quad z\overline{z}=1 \quad$ すなわち $\quad \overline{z}=\dfrac{1}{z} \quad \cdots②$

①，② から $\quad z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって $\quad \left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$=\boldsymbol{1}$$

(2) (1) の結果を展開して整理すると

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2=0$$

両辺に z^2 を掛けると $\quad \boldsymbol{1+z+z^2+z^3+z^4=0}$

(3) $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$ であるから，(2) の結果から

$$z^5-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad z^5=1$$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$r^5(\cos5\theta+i\sin5\theta)=1$$

したがって $\quad r^5=1,\ 5\theta=2n\pi \ \ (n \text{ は整数})$

すなわち $\quad r=1,\ \theta=\dfrac{2n\pi}{5} \quad \cdots①$

z の実部 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}>0$，条件から虚部は正であるから，$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

上式より，① を満たす整数 n は $\quad n=1 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{\theta=\frac{2}{5}\pi}$

2.20 $-2-2\sqrt{3}\,i=4\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=(\sqrt{2})^4\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$ であるから，

整数 n を用いて

$$(z-i)^4=-2-2\sqrt{3}\,i=(\sqrt{2})^4\left\{\cos\left(2n+\frac{4}{3}\right)\pi+i\sin\left(2n+\frac{4}{3}\right)\pi\right\}$$

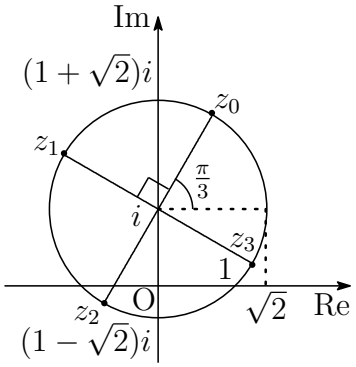
したがって　　$z-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\pi+i\sin\left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\pi\right\}$

ゆえに，これらの解は

$$z_n-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)\pi+i\sin\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)\pi\right\}\quad(n=0,1,2,3)$$

である．よって

$$\boldsymbol{z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2+\sqrt{6}}{2}i,}$$
$$\boldsymbol{z_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}i,}$$
$$\boldsymbol{z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2-\sqrt{6}}{2}i,}$$
$$\boldsymbol{z_3=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}i}$$



2.21　(1)　$r=|z|\neq 0$，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$\frac{1}{z}=z^{-1}=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{-1}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

ゆえに　　$z+\dfrac{1}{z}=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$

よって，$z+\dfrac{1}{z}$ の実部は $\boldsymbol{\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta}$，虚部は $\boldsymbol{\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta}$

(2)　n を自然数とする．

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2,$$
$$z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)-\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$$

上の 2 式から，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数ならば，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は実数である．

また，$z+\dfrac{1}{z}$ が純虚数ならば，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は，n が奇数のとき純虚数，n が偶数のとき実数である．

2.22 (1) $\dfrac{\beta}{\alpha}=3+i$，$\theta=\arg\dfrac{\beta}{\alpha}$ より

$$|3+i|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},\quad 3+i=\sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}i\right)$$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$　$(0^\circ<\theta<90^\circ)$　$\cdots(*)$

また　$\arg\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2=2\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=2\theta$

3 点 O(0)，P(α^2)，Q(β^2) を頂点とする △POQ の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|\alpha|^2|\beta|^2\sin 2\theta\\&=|\alpha|^2|\beta|^2\sin\theta\cos\theta\\&=1^2\cdot(\sqrt{10})^2\times\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\mathbf{3}\end{aligned}$$

(2) $(*)$ より

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2=\frac{4}{5}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\dfrac{4}{5}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\cos 45^\circ<\cos 2\theta<\cos 30^\circ$

よって　$30^\circ<2\theta<45^\circ$

(3) (2) の結果より　$4\theta<90^\circ<6\theta$ であるから，$n=5$ について

$$\begin{aligned}(3+i)^5&=(3+i)\{(3+i)^2\}^2=(3+i)(8+6i)^2\\&=(3+i)\{2(4+3i)\}^2\\&=4(3+i)(7+24i)=4(-3+79i)\end{aligned}$$

$\cos 5\theta<0$ であるから，$n\theta>90^\circ$ となる最小の自然数 n は

$$\boldsymbol{n=5}$$

2.23 (1) $\beta=z-1=\cos\theta-1+i\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}|\beta|&=\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2(1-\cos\theta)}\\&=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから　$|\beta|=2\sin\dfrac{\theta}{2}$

(2) $\beta = \cos\theta - 1 + i\sin\theta = -2\sin^2\dfrac{\theta}{2} + 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$= 2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(-\sin\dfrac{\theta}{2} + i\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$

$= 2\sin\dfrac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+90^\circ\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+90^\circ\right)\right\}$

(1) の結果より $2\sin\dfrac{\theta}{2} = |\beta|$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$90^\circ < \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ < 180^\circ$ であるから　$\arg\beta = \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ$

(3) $\alpha = \cos\theta + 1 + i\sin\theta$

$= 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} + 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$= 2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

上式および (1) の結果から，$\theta = 60^\circ$ のとき

$$\alpha = \sqrt{3}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ), \quad \beta = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

ゆえに　$|\alpha^m\beta^n| = (\sqrt{3})^m$，$\arg(\alpha^m\beta^n) = 30^\circ \times m + 120^\circ \times n$

$\alpha^m\beta^n$ の虚部を I とすると　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 120^\circ \times n)$

$n = 1$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 120^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$n = 2$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 240^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$n = 3$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 360^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$I < 0$ となるのは，次の 4 通りで，そのときの I の値は

$(m,\ n) = (1,\ 2)$ のとき　$I = -\sqrt{3}$,

$(m,\ n) = (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$ のとき　$I = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{(m,\ n) = (2, 2),\ (3, 1),\ (3, 2)}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}}$ をとる．

2.24　(1) $\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ より

$$\begin{aligned} z_n &= \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n - 2\{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{n-1} \\ &= 2^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) - 2^n\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta\} \\ &= 2^n\{\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\} + 2^n i\{\sin n\theta - \sin(n-1)\theta\} \\ &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} z_n &= -2^{n+1} \sin \frac{2n-1}{6}\pi \sin \frac{\pi}{6} + 2^{n+1} i \cos \frac{2n-1}{6}\pi \sin \frac{\pi}{6} \\ &= -2^n \sin\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2^n i \cos\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{2^n \left(\cos \frac{n+1}{3}\pi + i \sin \frac{n+1}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より，$|z_k| = 2^k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$ のとき　$2(2^n - 1) > 500$　ゆえに　$2^n > 251$

これを満たす最小の整数 n は　　**8**

(3) $(*)$ より　$z_{1000} = -2^{1001} \sin \dfrac{1999}{2}\theta \sin \dfrac{\theta}{2} + 2^{1001} \cos \dfrac{1999}{2}\theta \sin \dfrac{\theta}{2}$

z_{1000} が実数であるとき，自然数 j を用いて

$$\frac{1999}{2}\theta = \frac{2j-1}{2}\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{2j-1}{1999}\pi$$

このとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$1 \leqq j \leqq 500$

よって，求める θ の個数は　　**500** (個)

2.25 (1) $\arg z^4 = 4 \arg z = 4\alpha$

z^4 が実数であるから，$\arg z^4 = 180^\circ \times m$　(m は整数)

したがって　$4\alpha = 180^\circ \times m$　ゆえに　$\alpha = 45^\circ \times m$

$0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ であるから

$$\boldsymbol{\alpha = 0^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ,\ 135^\circ,\ 180^\circ,\ 225^\circ,\ 270^\circ,\ 315^\circ}$$

(2) $\arg(z-1)^3 = 3 \arg(z-1) = 3\beta$

$(z-1)^3$ が純虚数であるから　$\arg(z-1)^3 = 90^\circ \times (2n-1)$　(n は整数)

したがって　$3\beta = 90^\circ \times (2n-1)$　ゆえに　$\beta = 30^\circ \times (2n-1)$

$0^\circ \leqq \beta < 360^\circ$ であるから

$$\boldsymbol{\beta = 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ,\ 210^\circ,\ 270^\circ,\ 330^\circ}$$

(3) $z=x+yi$ は $x>0$，$y>0$ であるから，(1) の結果より　$\arg z=45^\circ$

ゆえに，$z=x+xi$ $(x>0)$ とおける．$z-1=(x-1)+xi$ であるから

$$\begin{aligned}(z-1)^3&=\{(x-1)+xi\}^3\\&=(x-1)^3-3(x-1)x^2+\{3(x-1)^2x-x^3\}i\\&=(-2x^3+3x-1)+(2x^3-6x^2+3x)i\\&=-(x-1)(2x^2+2x-1)+x(2x^2-6x+3)i\end{aligned}$$

$(z-1)^3$ が純虚数であるから　$(x-1)(2x^2+2x-1)=0$

$x>0$ に注意して，これを解くと　$x=1,\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$x=1$ のとき $z=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$ であるから

$$z^4=(\sqrt{2}\,)^4(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=\boldsymbol{-4}$$

$x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき $z=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$ であるから

$$z^4=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^4(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=\boldsymbol{4\sqrt{3}-7}$$

2.26　(1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$

$$\begin{aligned}z+\frac{3}{z}&=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{3}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\\&=\left(r+\frac{3}{r}\right)\cos\theta+\left(r-\frac{3}{r}\right)i\sin\theta\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$ が実数のとき，$\left(r-\dfrac{3}{r}\right)\sin\theta=0$ である．

(i) $r-\dfrac{3}{r}=0$ のとき，$r=\sqrt{3}$ より，$z+\dfrac{3}{z}=2\sqrt{3}\cos\theta$ であるから

$$3\leqq 2\sqrt{3}\cos\theta\leqq 4\quad\text{すなわち}\quad\cos\theta\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

また，$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\theta\leqq\dfrac{1}{2}$ であるから，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ より

$$x^2+y^2=3,\quad x\geqq\frac{3}{2},\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\cdots(*)$$

(ii) $\sin\theta = 0$ のとき，z は実数であるから，$z = x$ より (x は実数)，

$$3 \leqq x + \frac{3}{x} \leqq 4$$

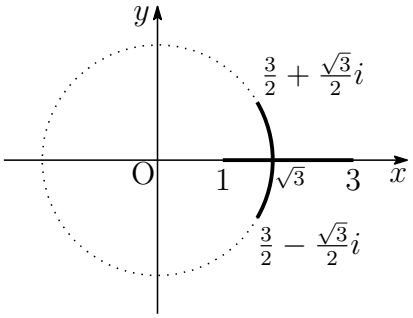
上式より，$x > 0$ であることに注意して

$$x^2 - 3x + 3 \geqq 0, \quad x^2 - 4x + 3 \leqq 0$$

したがって $\quad \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geqq 0, \quad (x-1)(x-3) \leqq 0$

よって $\quad 1 \leqq x \leqq 3, \quad y = 0 \quad \cdots (**)$

$(*)$，$(**)$ より，z の動く範囲は



2.27 (1) $1 + \sqrt{3}\,i$ と $1 - \sqrt{3}\,i$ を解にもつ 2 次方程式は

$$x^2 - \{(1 + \sqrt{3}\,i) + (1 - \sqrt{3}\,i)\}x + (1 + \sqrt{3}\,i)(1 - \sqrt{3}\,i) = 0$$

よって $\quad \boldsymbol{x^2 - 2x + 4 = 0}$

(2) $x = 1 - \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$$x^n = 2^n\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n = \boldsymbol{2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)}$$

(3) $t = (-2)^{-1}x$ とおくと，(1) の結果から，$t^2 + t + 1 = 0$ であるから

$$\sum_{k=1}^{3m}(-2)^{-k}x^k = \sum_{k=1}^{3m} t^k = \sum_{j=0}^{m-1}(t^{3j+1} + t^{3j+2} + t^{3j+3})$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1} t^{3j+1}(1 + t + t^2) = \boldsymbol{0}$$

別解 $t=(-2)^{-1}x$ とおくと　$t=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

したがって　　$t^{3m}=\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi=1$

よって　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{3m}(-2)^{-k}x^k=\sum_{k=1}^{3m}t^k=\frac{t(t^{3m}-1)}{t-1}=\mathbf{0}$

2.28　(1) 2 次方程式

$$x^2-x+1=0 \quad \cdots(*)$$

の解が $\alpha,\ \beta$ であるから，解と係数の関係により

$$a_1=\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=1$$

ゆえに　　$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot 1=-1$

$a_n=\alpha^n+\beta^n$,

$b_n=(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1=1^n-a_n+1=2-a_n$

よって　　$a_1=\mathbf{1},\ a_2=\mathbf{-1}$

$b_1=2-a_1=2-1=\mathbf{1},\ b_2=2-a_2=2-(-1)=\mathbf{3}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ を解くと　　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

この方程式の解 $\alpha,\ \beta$ について，$-\pi<\arg\beta<\arg\alpha<\pi$ であるから

$$\boldsymbol{\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}},\quad \boldsymbol{\beta=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

したがって

$$\begin{aligned}a_n=\alpha^n+\beta^n&=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\\&=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}=\boldsymbol{2\cos\frac{n\pi}{3}}\end{aligned}$$

$$b_n=2-a_n=\boldsymbol{2-2\cos\frac{n\pi}{3}}$$

(3) (2) の結果から，法 6 に関して

$n\equiv 0 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n)=(2,\ 0)$

$n\equiv \pm 1 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n)=(1,\ 1)$

$n\equiv \pm 2 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n)=(-1,\ 3)$

$n\equiv 3 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n)=(-2,\ 4)$

よって，すべての自然数 n に対して，$a_n,\ b_n$ は整数である．

別解 $\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$, $\alpha+\beta=\alpha\beta=1$ より

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n \quad \cdots ①$$

$a_1=1$, $a_2=-1$ および ① より，すべての自然数 n に対して，a_n は整数.
また，$b_n=2-a_n$ より，すべての自然数 n に対して，b_n は整数.

(4) (2) の計算により

$$\alpha^n-\beta^n=\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)=2i\sin\frac{n\pi}{3}$$

したがって

$$|\alpha^n-\beta^n|^2=4\sin^2\frac{n\pi}{3}=\begin{cases}0 & (n\equiv 0,\ 3)\\ 3 & (n\equiv\pm1,\ \pm2)\end{cases} \pmod 6$$

$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$ が成り立つのは，上式および (3) の結果から，$n\equiv\pm2 \pmod 6$ のときである．このとき，(2) で示した極形式により

$$\alpha^n=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\quad \beta^n=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

ゆえに　$|\alpha^n-1|=|\beta^n-1|=|\alpha^n-\beta^n|$　すなわち　AB = AC = BC
このとき　　$\boldsymbol{(a_n,\ b_n)=(-1,\ 3)}$

別解 (2) で示したように，b_n は 0 以上の整数 (実数) であるから，$b_n=|b_n|$ より

$$\begin{aligned}b_n&=|(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1|=|(\alpha^n-1)(\beta^n-1)|\\&=|\alpha^n-1||\beta^n-1|\end{aligned}$$

ここで　　$|\beta^n-1|=|\beta^n-\alpha^n\beta^n|=|\beta|^n|1-\alpha^n|=|\alpha^n-1|$

したがって　　$b_n=|\alpha^n-1|^2=|\beta^n-1|^2$

$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$ が成り立つとき

$$|\alpha^n-1|=|\beta^n-1|=|\alpha^n-\beta^n| \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$$

△ABC が正三角形になるための条件であるから，$\arg\beta=-\arg\alpha$ より

$$\arg\alpha^n=n\arg\alpha=\frac{n}{3}\pi\equiv\pm\frac{2}{3}\pi \pmod 6 \quad \text{よって} \quad n\equiv\pm2 \pmod 6$$

このとき，(2) の結果により　　$\boldsymbol{(a_n,\ b_n)=(-1,\ 3)}$

2.29 (1) $z_2 - z_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i - (3\sqrt{3} - 3i) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{2}i$

$$= 3\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_3 - z_2 = 3i - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

ゆえに $\dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \dfrac{3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって $\theta = \arg\left(\dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

(2) 与えられた規則により $z_2 = \alpha z_1 + \beta, \quad z_3 = \alpha z_2 + \beta$

$z_1 \neq z_2$ に注意してこれを解くと $\alpha = \dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}, \quad \beta = \dfrac{{z_2}^2 - z_1 z_3}{z_2 - z_1}$

$${z_2}^2 - z_1 z_3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)^2 - (3\sqrt{3} - 3i)\cdot 3i$$

$$= -\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i = 9\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 9\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$\frac{{z_2}^2 - z_1 z_3}{z_2 - z_1} = \frac{9\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

上の諸式および (1) の結果から

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),\ |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \arg\alpha = \frac{\pi}{6},}$$

$$\boldsymbol{\beta = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ |\beta| = \sqrt{3},\ \arg\beta = \frac{2\pi}{3}}$$

(3) $\gamma = \alpha\gamma + \beta \cdots$① とおくと，(規則) と ① との辺々の差をとると，関係式

$$z_n - \gamma = \alpha(z_{n-1} - \gamma) \quad \cdots(*)$$

が得られるから，① を満たす γ を求めればよい．

$$\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ より

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} \end{aligned}$$

よって $\quad \gamma = \dfrac{\beta}{1-\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}}$

$$\begin{aligned} &= 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= \mathbf{3}\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}\right) \end{aligned}$$

(4) $(*)$ より，$\{z_n - \gamma\}$ は初項 $z_1 - \gamma$，公比 α の等比数列であるから

$$z_n - \gamma = \alpha^{n-1}(z_1 - \gamma) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{z_n = \gamma + \alpha^{n-1}(z_1 - \gamma)}$$

(5) $w=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$ とおくと，(2)，(3) の結果から

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}w,\quad \beta=\sqrt{3}w^4,\quad \gamma=3w^5$$

(4) の結果から

$$\begin{aligned} z_5&=\gamma+\alpha^4(z_1-\gamma)=3w^5+\frac{1}{9}w^4(z_1-3w^5)\\ &=\frac{1}{9}w^4(z_1+27w-3w^5)\end{aligned}$$

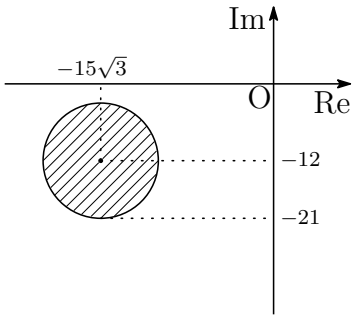
ここで

$$27w-3w^5=27\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=15\sqrt{3}+12i$$

$|z_5|<1$ より

$$\frac{1}{9}|w^4||z_1+27w-3w^5|<1$$

ゆえに　$|z_1+15\sqrt{3}+12i|<9$



よって，点 z_1 は，$\boldsymbol{-15\sqrt{3}-12i}$ を中心とする半径 **9** の円の内部にある．ただし，境界線は含まない．

2.30 (1) ド・モアブルの定理により

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,\quad \frac{1}{z^n}=\cos n\theta-i\sin n\theta\quad\cdots(*)$$

$(*)$ の辺々を加えると

$$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta\quad\text{ゆえに}\quad \cos n\theta=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$$

$(*)$ の辺々を引くと

$$z^n-\frac{1}{z^n}=2i\sin n\theta\quad\text{ゆえに}\quad \sin n\theta=-\frac{i}{2}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\cos x&=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\\ \cos 2x&=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-1\\ \cos 3x&=\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\end{aligned}$$

$t = z + \dfrac{1}{z}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1}{2}t, \quad \cos 2x = \frac{1}{2}t^2 - 1, \quad \cos 3x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

これらを $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ に代入すると

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) = 1$$

整理すると　$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$　ゆえに　$(t-1)(t+2)(t-2) = 0$

これを解いて　$t = 1, -2,\ 2$　したがって　$\cos x = \dfrac{1}{2},\ -1,\ 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$\boldsymbol{x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi}$

(3) (1) の結果から

$$\sin^2 n\theta = \left\{-\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\right\}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$$

$\theta = 20^\circ$ とすると，$z^{18} = 1$ であるから

$$(z^2 - 1)(z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1) = 0$$

$z^2 \neq 1$ であるから　$z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1 = 0$

また，$z \neq 0$ であるから　　$\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) = -1$

したがって　　$\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\sin^2 n\theta = \sum_{n=1}^{4}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)\right\}$

$$= 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{9}{4}$$

よって　　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

参考　(九大 [理]2016) 5

2.31　(1)　　$\alpha = 10000 + 10000i = 10000\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに　$z_n = \alpha w^n = \dfrac{10000\sqrt{2}}{2^n}\left\{\cos\left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{1}{4}\right)\pi + i\sin\left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{1}{4}\right)\pi\right\}$

よって　$\boldsymbol{|z_n| = \dfrac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}},\quad \arg z_n = \left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{1}{4}\right)\pi}$

(2) (1) の結果から，$|z_n| \leqq 1$ のとき

$$\frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-\frac{1}{2}} \geqq 10^4$$

両辺の常用対数をとると

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\log_{10}2 \geqq 4 \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{4}{\log_{10}2}+\frac{1}{2}$$

ここで　$\dfrac{4}{\log_{10}2}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{0.301}+0.5 = 13.7\cdots$

よって，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 14}$

(3) (1),(2) の結果から

$$|z_{14}| = \frac{10000}{2^{14-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4\cdot5^4}{2^{13}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^9}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{512}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg z_{14} = \left(\frac{14}{6}+\frac{1}{4}\right)\pi = \frac{7}{12}\pi + 2\pi$$

$$|z_{15}| = \frac{10000}{2^{15-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4\cdot5^4}{2^{14}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{1024}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{125}{128}\cdot\frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{125}{128}\sqrt{\frac{25}{32}} < \frac{1}{2}$$

$$\arg z_{15} = \left(\frac{15}{6}+\frac{1}{4}\right)\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi$$

したがって，P_{14} は $\triangle ABC$ の外部にあり，P_{15} は $\triangle ABC$ の内部にある．

よって，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 15}$

2.32　(1) 方程式 $x^6 = 1\cdots$① の解は

$$x = \cos\frac{j}{3}\pi + i\sin\frac{j}{3}\pi \quad (j = 0,1,2,3,4,5)$$

方程式 ① から

$$(x^2-1)(x^4+x^2+1) = 0$$

方程式 $x^4+x^2+1=0$ の解は $x \neq \pm 1$ であるから，この方程式の解は

$$x=\cos\frac{j}{3}\pi+i\sin\frac{j}{3}\pi \quad (j=1,2,4,5) \qquad \cdots(*)$$

条件から $\quad x_1=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$x_2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$x_3=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=\boldsymbol{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$x_4=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

(2) (1) の結果から

$${x_1}^k=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^k=\cos\frac{k}{3}\pi+i\sin\frac{k}{3}\pi$$

よって $\quad x_1=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

$${x_1}^2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$${x_1}^3=\cos\pi+i\sin\pi=\boldsymbol{-1}$$

$${x_1}^4=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=\boldsymbol{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$${x_1}^5=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$${x_1}^6=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=\boldsymbol{1}$$

(3) $(*)$ から，方程式 $x^4+x^2+1=0$ の解について，$x^6=1$ に注意して

$$x^{4n}=(x^6)^n x^{-2n}=\left(\cos\frac{j}{3}\pi+i\sin\frac{j}{3}\pi\right)^{-2n}=\cos\frac{2nj}{3}\pi-i\sin\frac{2nj}{3}\pi$$

$$x^{2n}=\left(\cos\frac{j}{3}\pi+i\sin\frac{j}{3}\pi\right)^{2n}=\cos\frac{2nj}{3}\pi+i\sin\frac{2nj}{3}\pi$$

したがって $\quad x^{4n}+x^{2n}+1=2\cos\dfrac{2nj}{3}\pi+1$

このとき，$j=1,\ 2,\ 4,\ 5$ であるから $(2=3-1,\ 4=3+1,\ 5=6-1)$

$$x^{4n}+x^{2n}+1=2\cos\frac{2n}{3}\pi+1$$

すなわち　　${x_i}^{4n} + {x_i}^{2n} + 1 = 2\cos\dfrac{2n}{3}\pi + 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

よって　${x_i}^{4n}+{x_i}^{2n}+1 = \begin{cases} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{(n \equiv 0 \pmod 3 \text{ のとき})} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(n \not\equiv 0 \pmod 3 \text{ のとき})} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

2.33

$$\begin{aligned}\alpha &= (1+\sqrt{3})^6 - (1-\sqrt{3})^6 \\ &= \{2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})\}^6 - \{2(\cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3})\}^6 \\ &= 2^6(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) - 2^6(\cos 2\pi - i\sin 2\pi) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= (1+i)^3 \\ &= \{\sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4})\}^3 \\ &= 2\sqrt{2}(\cos\tfrac{3}{4}\pi + i\sin\tfrac{3}{4}\pi) = -2 + 2i\end{aligned}$$

γ は α(原点) を中心に β を $\pm\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$$\begin{aligned}\gamma &= \left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\beta \\ &= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2+2i) \\ &= \boldsymbol{-1 \mp \sqrt{3} + (1 \mp \sqrt{3})i} \quad \textbf{(複号同順)}\end{aligned}$$

2.34　(1)　$x^2 - 2x + a = 0$ の解は　$x = 1 \pm \sqrt{1-a} \quad \cdots(*)$

したがって，この方程式が実数以外の解をもつとき　$\angle\mathrm{AOB} \neq 180^\circ$

$\angle\mathrm{AOB} = 180^\circ$ となるとき，$\alpha\beta < 0$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha\beta = a \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a < 0}$$

(2)　$\angle\mathrm{AOB} = 30^\circ$ となるとき，$(*)$ は虚数であるから $(a > 1)$

ここで，$\alpha = 1 + \sqrt{a-1}\,i$，$\beta = 1 - \sqrt{a-1}\,i$ とすると，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \sqrt{a}, \quad \mathrm{AB} = 2\sqrt{a-1}$$

余弦定理 $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}$ により

$$(2\sqrt{a-1})^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{a}\cos 30^\circ$$

$$4(a-1) = a + a - 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{a = 4(2 - \sqrt{3})}$

2.35 (1) $F(x)=x^3-x^2+(k^2-1)x+k^2+1$ について，$F(-1)=0$ であるから，$F(x)$ は $x+1$ で割り切れる．したがって

$$F(x)=(x+1)(x^2-2x+k^2+1)$$

$F(x)=0$ の 2 つの虚数解は，$x+1\neq 0$ であるから

$$x^2-2x+k^2+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2+k^2=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=1\pm ki}$

(2) (A) R は $F(x)=0$ の実数解を表す点であるから　R(-1)

P，Q は $F(x)=0$ の虚数解を表す点であるから，$\alpha=1+ki$，$\beta=1-ki$ とおき，P(α)，Q(β) とする．求める円の中心を C(γ) とすると，C は PQ の垂直二等分線上にあるから，γ は実数である．RC = PC より

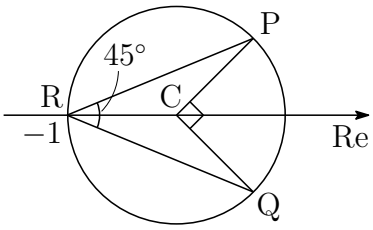
$$|\gamma-(-1)|^2=|\gamma-\alpha|^2 \quad \text{ゆえに} \quad |\gamma+1|^2=|(\gamma-1)-ki\,|^2$$

したがって　$(\gamma+1)^2=(\gamma-1)^2+k^2$　　これを解いて　$\gamma=\dfrac{k^2}{4}$

半径は　　$\mathrm{RC}=|\gamma-(-1)|=\dfrac{k^2}{4}+1$

よって，求める円の方程式は　　$\boldsymbol{\left|z-\dfrac{k^2}{4}\right|=\dfrac{k^2}{4}+1}$

(B) $\angle\mathrm{PRQ}=45^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{PCQ}=90^\circ$ である．CP は C を中心に CQ を 90° 回転させたものであるから



$$\alpha-\gamma=i(\beta-\gamma)$$
$$(1+ki)-\frac{k^2}{4}=i\left\{(1-ki)-\frac{k^2}{4}\right\}$$
$$1-\frac{k^2}{4}+ki=k+\left(1-\frac{k^2}{4}\right)i$$

したがって　$1-\dfrac{k^2}{4}=k$　　すなわち　$k^2+4k-4=0$

$k>0$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{k=2\sqrt{2}-2}$

2.36 (1) $\beta=4+4i$ より，$\overline{\beta}=4-4i$ であるから

$$\begin{aligned}|\alpha-\overline{\beta}|&=|(1+2i)-(4-4i)|\\&=|-3+6i|\\&=\sqrt{(-3)^2+6^2}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(2) $|x-\beta|=|\overline{x-\beta}|$ であり，x は実数であるから　$|x-\beta|=|x-\overline{\beta}|$

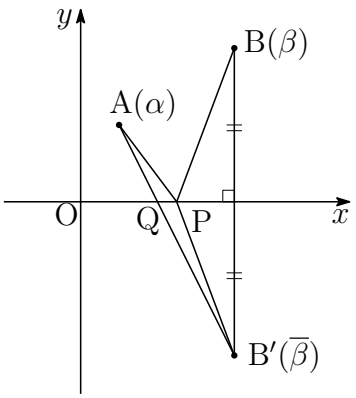
よって　　$|x-\alpha|+|x-\beta|=|x-\alpha|+|x-\overline{\beta}|$

$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{B}'(\overline{\beta})$，$\mathrm{P}(x)$ とすると

$$|x-\alpha|+|x-\overline{\beta}|=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'$$

AB' と x 軸との交点を Q とするとき，
P が Q と異なるときは，$\triangle \mathrm{APB}'$ の辺の長さの関係から

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'>\mathrm{AB}'$$



また，P が Q と一致するときは，次が成り立つ．

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'=\mathrm{AB}'$$

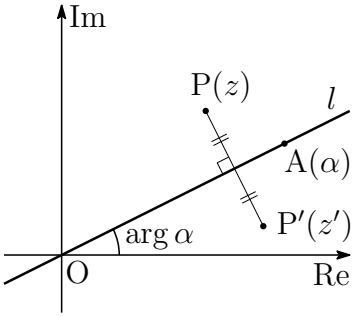
したがって，$|x-\alpha|+|x-\beta|$ を最小にするには，直線 AB' と x 軸の交点を P にとればよいので，t を実数とすると

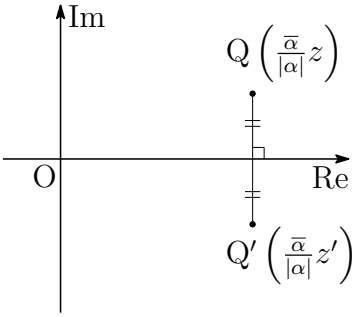
$$\begin{aligned} x&=(1-t)\alpha+t\overline{\beta}\\ &=(1-t)(1+2i)+t(4-4i)\\ &=(1+3t)+(2-6t)i \end{aligned}$$

このとき，x は実数であるから　$2-6t=0$　ゆえに　$t=\dfrac{1}{3}$

よって　　$\boldsymbol{x=2}$

2.37　(1) $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{P}'(z')$ を O を中心に $-\arg\alpha$ だけ回転させた点を，それぞれ Q，Q′ とする．





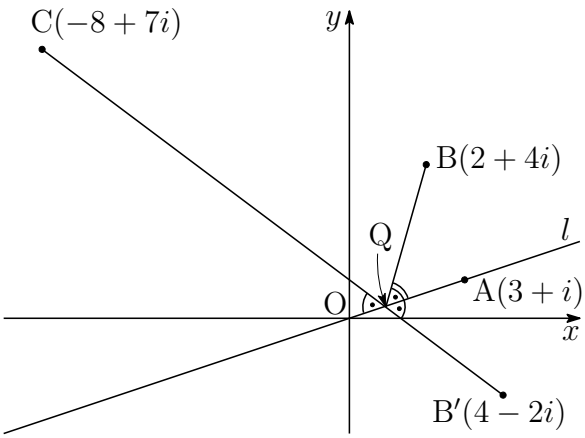
$\mathrm{Q}\left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}z\right)$，$\mathrm{Q}'\left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}z'\right)$ は互いに共役な複素数であるから

$$\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}z'=\overline{\left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}z\right)}\qquad\text{ゆえに}\qquad z'=\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{z}$$

(2)(ア) (1) の結果を利用して

$$\beta' = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{\beta} = \frac{3+i}{3-i}(2-4i) = \boldsymbol{4-2i}$$

(イ) $\angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{CQO}$ のとき，3 点 C，Q，B′ は一直線上にある．



l 上の点 z は，実数 s を用いて

$$z = s\alpha = s(3+i) = 3s + si \quad \cdots ①$$

また，直線 B′C 上の点 z は，t を用いて

$$\begin{aligned} z &= (1-t)\beta' + t\gamma \\ &= (1-t)(4-2t) + t(-8+7i) \\ &= (4-12t) + (9t-2)i \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$\mathrm{Q}(w)$ は l と直線 B′C の交点であるから，①，② より

$$3s + si = (4-12t) + (9t-2)i \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{4}{13},\ t = \frac{10}{39}$$

よって $\qquad \boldsymbol{w = \dfrac{4}{13}(3+i)}$

2.38 (1) $\alpha = -1+i$，$\beta = 2+i$ とすると

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\gamma - (-1+i) = \{(2+i) - (-1+i)\}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\gamma = \boldsymbol{\frac{1}{2} + \left(1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i}$$

(2) 線分 AB 上の点 P(z) は

$$z = t + i \qquad (-1 \leqq t \leqq 2)$$

とおけるから

$$iz^2 = i(t+i)^2 = i(t^2 - 1 + 2ti) = -2t + (t^2-1)i$$

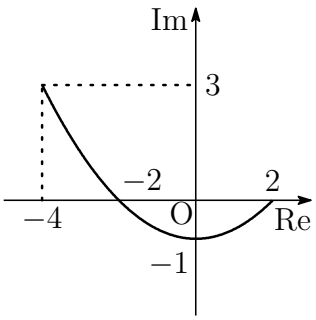
$iz^2 = x + yi$ とおくと

$$x = -2t, \quad y = t^2 - 1 \qquad (-1 \leqq t \leqq 2)$$

上の 2 式から t を消去すると

$$y = \frac{x^2}{4} - 1 \quad (-4 \leqq x \leqq 2)$$

よって，iz^2 を複素数平面上にえがくと



2.39 (1) $(\sqrt{3}-i)z + (\sqrt{3}+i)\overline{z} = 2$ に $z = x + yi$ (x, y は実数) を代入すると

$$(\sqrt{3}-i)(x+yi) + (\sqrt{3}+i)(x-yi) = 2 \quad \text{整理すると} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}x + y = 1}$$

(2) $|z+i| \geqq |2z-i|$ に $z = x + yi$ (x, y は実数) を代入すると

$$|x + (y+1)i| \geqq |2x + (2y-1)i|$$

したがって

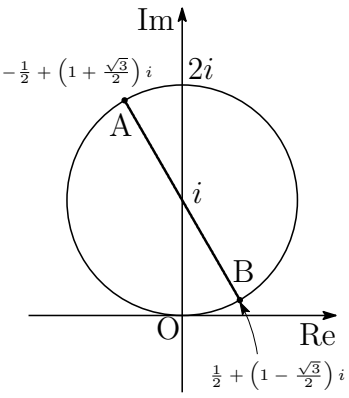
$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \geqq \sqrt{(2x)^2 + (2y-1)^2}$$

両辺を平方して整理すると

$$x^2 + y^2 - 2y \leqq 0$$

ゆえに $\qquad x^2 + (y-1)^2 \leqq 1$

D は右の図のように 2 点 A$(-\frac{1}{2} + (1+\frac{\sqrt{3}}{2})i)$，
B$(\frac{1}{2} + (1-\frac{\sqrt{3}}{2})i)$ を結ぶ線分．



(3) D 上の点 z は (2) の結果から，$z = x+(1-\sqrt{3}x)i$ であるから $\left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} k &= |2z-1-2i| = |2\{x+(1-\sqrt{3}x)i\}-1-2i| \\ &= |(2x-1)-2\sqrt{3}xi| \\ &= \sqrt{(2x-1)^2+12x^2} = \sqrt{16x^2-4x+1} \\ &= \sqrt{16\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

よって，$x = -\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\sqrt{7}}$，$x = \dfrac{1}{8}$ のとき最小値 $\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}$ をとる．

2.40 (1) $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$

$z_2 = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2} = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}$

$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$，$z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$ のとき

$$z_3 = \frac{z_1+z_2}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

したがって　$z_3 = \dfrac{z_1+z_2}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$

$w_1 = \dfrac{1}{z_1}$，$w_2 = \dfrac{1}{z_2}$，$w_3 = \dfrac{1}{z_3}$ より

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$$

$$w_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i}$$

(2) $\angle \mathrm{P_1OP_2}$ が直角であるから，$\dfrac{z_2}{z_1}$ は純虚数

$\mathrm{P_3}$ が線分 $\mathrm{P_1P_2}$ 上にあるから，$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ は実数

$$\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3} = \frac{\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}} = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{z_2}{z_1}$$

したがって，$\dfrac{w_1-w_3}{w_2-w_3}$ は純虚数．よって，$\angle \mathrm{Q_1Q_3Q_2}$ は直角である．

別解 P_1, P_2 の中点を $\mathrm{M}(c)$ とし ($|c| = \frac{1}{\sqrt{2}}$)，$\mathrm{P}_1(c+ci)$，$\mathrm{P}_2(c-ci)$ とする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上の点 P_3 を $z(\theta) = c + ci\tan\theta$ とし ($-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$)，$w(\theta) = \dfrac{1}{z(\theta)}$ と対応する点を Q_3 とする．

$$\begin{aligned} w(\theta) &= \frac{1}{c+ci\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{c(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= \frac{1}{c}\cos\theta(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2c}(\cos 2\theta - \sin 2\theta) \end{aligned}$$

Q_3 は $\mathrm{Q}_1(w(\frac{\pi}{4}))$，$\mathrm{Q}_2(w(-\frac{\pi}{4}))$ を直径の両端とする半円上にある．
よって，$\angle \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3\mathrm{Q}_2$ は直角である．

2.41 (1) $w = (1+\sqrt{3}i)z$ より $\quad \dfrac{w}{z} = 1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

ゆえに $\quad \arg\dfrac{w}{z} = \dfrac{\pi}{3}$，$\left|\dfrac{w}{z}\right| = 2$

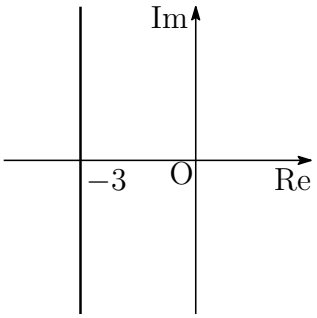
$\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(w)$ とおくと，
$\triangle$OAB は $\angle$AOB $= \dfrac{\pi}{3}$，OB : OA $= 2:1$ の直角三角形

(2) 2 点 $\sqrt{3}i$ と -3 を通る直線上の点 z は，実数 t を用いて

$$z = (1-t)\sqrt{3}i + t(-3)$$

と表されるから

$$\begin{aligned} w &= (1+\sqrt{3}i)z \\ &= (1+\sqrt{3}i)\{(1-t)\sqrt{3}i + t(-3)\} \\ &= -3 + (1-4t)\sqrt{3}i \end{aligned}$$



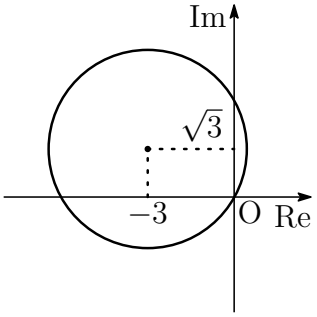
よって $\quad \boldsymbol{w + \overline{w} = -6}$

(3) z は $\sqrt{3}\,i$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円周上にあるから

$$|z - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$$

$w = (1+\sqrt{3}i)z$ より

$$\begin{aligned} \left|1+\sqrt{3}\,i\right|\left|z-\sqrt{3}i\right| &= \left|1+\sqrt{3}\,i\right|\sqrt{3} \\ \left|(1+\sqrt{3}\,i)z - (1+\sqrt{3}\,i)\sqrt{3}\,i\right| &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



よって $\quad \boldsymbol{\left|w + 3 - \sqrt{3}\,i\right| = 2\sqrt{3}}$

2.42 (1) $$\arg\frac{z_1-1}{z_2-1}=\arg(z_1-1)-\arg(z_2-1)=0$$

ゆえに，3 点 1，z_1，z_2 は同一直線上にある．

よって，2 点 z_1，z_2 を結ぶ直線 l は，点 1 を通る．

(2) $\arg(i-1)=\dfrac{3}{4}\pi$ より，l の傾きは　-1

l は点 1 を通り，傾き -1 の直線であるから

$$y-0=-1(x-1)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=-x+1}$$

(3) z_1，z_2 は l 上の点で，$z_1\neq 1$，$z_2\neq 1$ であるから，z_1，z_2 は実数ではない．

したがって，$\dfrac{z_1}{|z_1|}$，$-\dfrac{z_2}{|z_2|}$ は，方程式

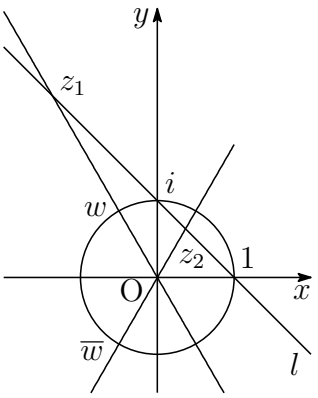
$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=0$$

の虚数解である．それらを

$$w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$\overline{w}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$$

とおく．w，$\overline{w}$ の偏角はそれぞれ第 2 象限，第 3 象限の角で，(2) で求めた直線は第 3 象限を通らないことから

$$w=\frac{z_1}{|z_1|},\ \overline{w}=-\frac{z_2}{|z_2|}$$



原点 O と w の 2 点を通る直線は，

$\tan(\arg w)=-\sqrt{3}$ より

$$y=-\sqrt{3}x$$

z_1 はこの直線と l の交点であるから

$$\boldsymbol{z_1=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}i}$$

2.43 (1) $w-(1+i)=\{z-(1+i)\}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ であるから

$$w-(1+i)(1-\cos\alpha-i\sin\alpha)=z(\cos\alpha+i\sin\alpha)\quad\cdots(*)$$

ここで，$a+bi=(1+i)(1-\cos\alpha-i\sin\alpha)$ とおくと

$$a+bi=1-\cos\alpha+\sin\alpha+(1-\cos\alpha-\sin\alpha)i$$

ゆえに　　$a = 1 - \cos\alpha + \sin\alpha$，$b = 1 - \cos\alpha - \sin\alpha$

したがって，$(*)$ および $|z| = 1$ から

$$|w - (a + bi)| = |z||\cos\alpha + i\sin\alpha| = 1$$

よって，点 $\mathrm{Q}(w)$ は $a + bi$ を中心とし，**半径 1** の円周上を動く．

(2) $b = 1$ より　$1 = 1 - \cos\alpha - \sin\alpha$　すなわち　$\cos\alpha = -\sin\alpha$

ゆえに　$\sin\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$\cos\alpha = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$a = 1 \pm \sqrt{2}$　(複号同順)

よって　　$\boldsymbol{a = 1 \pm \sqrt{2}}$

2.44　(1) 2 点 $\mathrm{A}(k^2\alpha)$，$\mathrm{B}(m^2\alpha)$ について，線分 AB を $k : m$ に内分する点 γ，線分 AB を $k : m$ に外分する点 δ は $(k \neq m)$

$$\gamma = \frac{m\cdot k^2\alpha + k\cdot m^2\alpha}{k + m} = \frac{km(k+m)\alpha}{k+m} = \boldsymbol{km\alpha}$$
$$\delta = \frac{-m\cdot k^2\alpha + k\cdot m^2\alpha}{k - m} = \frac{-km(k-m)\alpha}{k-m} = \boldsymbol{-km\alpha}$$

(2) $m|z - k^2\alpha| = k|z - m^2\alpha| \cdots (*)$ より　$m^2|z - k^2\alpha|^2 = k^2|z - m^2\alpha|^2$

ゆえに　　$m^2(z - k^2\alpha)(\overline{z} - k^2\overline{\alpha}) = k^2(z - m^2\alpha)(\overline{z} - m^2\overline{\alpha})$

整理すると　　$(m^2 - k^2)(|z|^2 - k^2m^2|\alpha|^2) = 0$

k，m は互いに異なる正の実数であるから

$$|z|^2 = k^2m^2|\alpha|^2 \cdots (**)　\text{よって}　\boldsymbol{|z| = km|\alpha|}$$

(3) z は γ，δ と異なる複素数であるから　　$\dfrac{\gamma - z}{\delta - z} \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma - z}{\delta - z} + \overline{\left(\frac{\gamma - z}{\delta - z}\right)} &= \frac{\gamma - z}{\delta - z} + \frac{\overline{\gamma} - \overline{z}}{\overline{\delta} - \overline{z}} \\ &= \frac{(\gamma - z)(\overline{\delta} - \overline{z}) + (\overline{\gamma} - \overline{z})(\delta - z)}{|\delta - z|^2} \\ &= \frac{\gamma\overline{\delta} + \overline{\gamma}\delta - (\overline{\gamma + \delta})z - (\gamma + \delta)\overline{z} + 2|z|^2}{|\delta - z|^2}\end{aligned}$$

(1) の結果から

$$\gamma + \delta = km\alpha + (-km\alpha) = 0,$$
$$\gamma\overline{\delta} + \overline{\gamma}\delta = km\alpha(-km\overline{\alpha}) + km\overline{\alpha}(-km\alpha) = -2k^2m^2|\alpha|^2$$

上の 2 式および (**) から　　$\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}+\overline{\left(\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}\right)}=0$

よって，$\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}$ は純虚数である．

解説　複素数 $z=x+yi$ に対して ($x,\ y$ は実数)

$$\overline{z}=x-yi,\quad \mathrm{Re}\,z=x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}),\quad \mathrm{Im}\,z=y=-\frac{i}{2}(z-\overline{z})$$

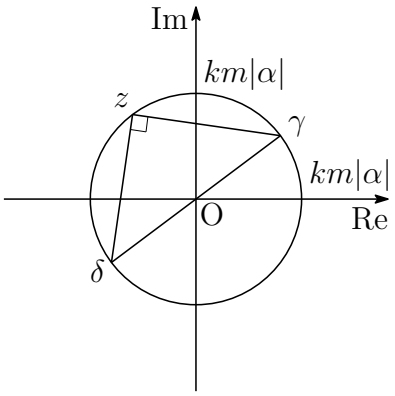
をそれぞれ z の共役，実部，虚部という．したがって

$$\begin{aligned} z\text{ は実数}\quad &\Longleftrightarrow\quad z-\overline{z}=0\\ z\text{ は純虚数}\quad &\Longleftrightarrow\quad z+\overline{z}=0\quad (z\neq 0)\end{aligned}$$

別解　(1)，(2) の結果から，z は γ と δ を直径の両端とする円周上の点である．

したがって　　$\arg\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}=\pm\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}$ は，純虚数である．



2.45　(1)　$z^3+i=z^2+iz$ より　$(z-1)(z^2-i)=0$　ゆえに　$z=1,\ z^2=i$

$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ であるから，$z^2=i$ について $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると

$$2\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi\ (n\text{ は整数})\quad\text{ゆえに}\quad \theta=\frac{\pi}{4}+n\pi$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

よって，偏角に注意すると

$$\begin{aligned}\alpha&=\cos 0+i\sin 0=\mathbf{1}\\ \beta&=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}+\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\boldsymbol{i}\\ \gamma&=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

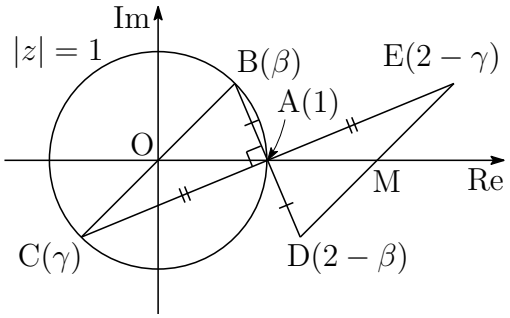
(2) (1) の結果から

$$\angle \mathrm{AOB} = \frac{\pi}{4},\quad \angle \mathrm{COA} = \frac{3}{4}\pi$$

$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ であるから

$$\triangle \mathrm{AOB} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\triangle \mathrm{COA} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



よって　　$\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{AOB} + \triangle \mathrm{COA} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) 3 点 A，B，C を通る円は，BC を直径とする円であるから　AB⊥AC
したがって，A に関して D，E はそれぞれ B，C と対称であるから

$$\mathrm{D}(2-\beta),\quad \mathrm{E}(2-\gamma)$$

このとき，$\angle \mathrm{DAE} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから，3 点 A，D，E を通る円は，DE を直径とする円である．DE の中点 (中心) を M とすると，$\beta + \gamma = 0$ であるから，M(2)．また，円の半径 AM は $2 - 1 = 1$.
したがって，この円の方程式は $|z-2| = 1$ となり，$|z-2|^2 = 1$ より

$$(z-2)(\overline{z}-2) = 1 \quad \text{整理すると} \quad z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 3 = 0$$

よって　　$\boldsymbol{s = -2,\ t = -2,\ u = 3}$

2.46　(1) $|\alpha| = 2$，$|z-1| = \sqrt{2}\cdots$①，$|z-\alpha| = \sqrt{5}\cdots$②
2 円 ①，② の中心間の距離 $|\alpha - 1|$ は

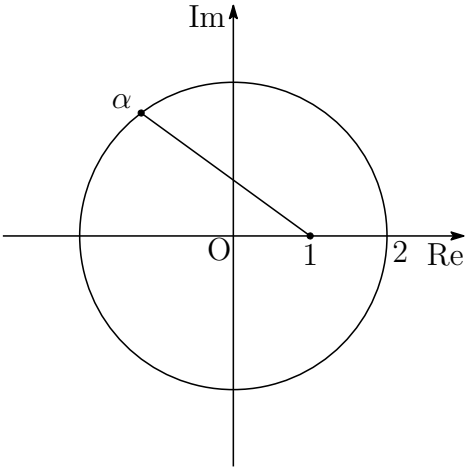
$$|\alpha| - 1 \leqq |\alpha - 1| \leqq |\alpha| + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq |\alpha - 1| \leqq 3 \quad \cdots ③$$

$|z-\alpha| - |z-1| < |\alpha - 1| < |z-\alpha| + |z-1|$，すなわち，次式を示せばよい．

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} < |\alpha - 1| < \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$\sqrt{5} - \sqrt{2} < 1$，$3 < \sqrt{5} + \sqrt{2}$ であるから，③ より上式が成立する．2 円 ①，② の共有点の個数は 2 個であるから，① および ② を満たす点 z の個数は 2 個である．

補足　$1 \leqq |\alpha - 1| \leqq 3$ は下の図からも分かる．



(2) ①，② より ($|\alpha| = 2$)　　$|z-1|^2 = 2,\ \ |z-\alpha|^2 = 5$

$$z\overline{z} - \overline{z} - z - 1 = 0, \quad z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z - 1 = 0$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々の差をとると

$$\overline{z}(\alpha - 1) + z(\overline{\alpha} - 1) = 0$$

(3) ①，② および $|\alpha|=2$ から，$z\neq 0,\ \overline{\alpha}-1\neq 0$ に注意すると，(2) の結果から，$z(\overline{\alpha}-1)$ は純虚数であるから，実数 s，t を用いて $(s\neq 0,\ t\neq 0)$

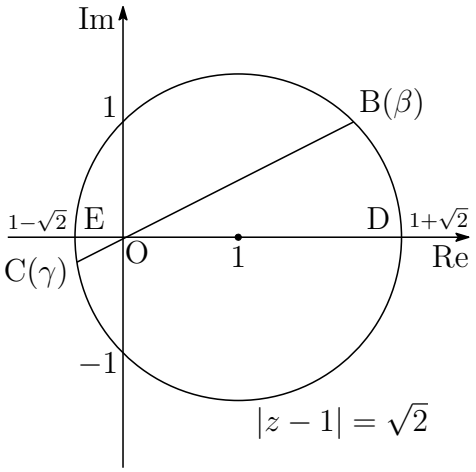
$$\beta(\overline{\alpha}-1)=si,\quad \gamma(\overline{\alpha}-1)=ti \quad \text{ゆえに} \quad \gamma=\frac{t}{s}\beta$$

よって，2 点 $\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ と原点 O は一直線上にある．

円 ① 上の 2 点を $\mathrm{D}(1+\sqrt{2})$，$\mathrm{E}(1-\sqrt{2})$ とすると，方べきの定理により

$$\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}=\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE} \quad \text{ゆえに} \quad |\beta||\gamma|=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$$

$|\beta|=b$ より　$b|\gamma|=1$　よって　$\boldsymbol{|\gamma|=\frac{1}{b}}$



2.47 (1)
$$\begin{aligned}\alpha&=z\overline{z}-\overline{z}i+zi+1\\&=|z|^2+(-i)\overline{z}+\overline{(-i)}z+|-i|^2\\&=|z-i|^2\end{aligned}$$

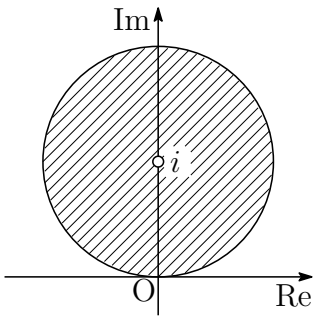
$z\neq i$ であるから，$|z-i|>0$ より　α は正の実数である．

(2) $w=i+\dfrac{1}{\overline{z}+i}$ より　$|w-i|=\left|\dfrac{1}{\overline{z}+i}\right|=\dfrac{|1|}{|\overline{z}+i|}=\dfrac{1}{|z-i|}$

よって，上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}w\overline{w}-\overline{w}i+wi+1&=|w|^2+(-i)\overline{w}+\overline{(-i)}w+|-i|^2\\&=|w-i|^2=\frac{1}{|z-i|^2}=\boldsymbol{\frac{1}{\alpha}}\end{aligned}$$

(3) $|z-i|=\dfrac{1}{|w-i|}$ であるから，w が実数 x であるとすると



$$|z-i|=\frac{1}{|x-i|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\leqq 1$$

したがって，上式および $z\neq i$ から，点 z は点 i を中心とする半径 1 の円の周，および内部から，点 i を除いた領域.

2.48 (1) 方程式の解 z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$\cdots$①

とすると　　$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

i を極形式で表すと　$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって　　$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2=1,\quad 2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad (k\text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　$r=1$　$\cdots$②　また　$\theta=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると，$k=0,1$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$　$\cdots$③

②，③ を ① に代入すると　$\boldsymbol{z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}i}$　**(複号同順)**

(2) $w^2-2iw=1+i$ より　　$(w-i)^2=i$

(1) の結果を利用して　　$w-i=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

したがって　　$w=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)i,\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)i$

α の実部は β の実部より大きいから

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i,\ \ \beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i}$$

(3) (1) の解の 1 つを $z_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ とおくと　$\alpha=i+z_1,\ \ \beta=i-z_1$

△OAB の面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

$$\overline{\alpha}\beta=(-i+\overline{z}_1)(i-z_1)=1-|z_1|^2+(z_1+\overline{z}_1)i=\sqrt{2}\,i$$

$\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)=\sqrt{2}$ より　　$S=\dfrac{1}{2}|\sqrt{2}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

解説　$\theta=\angle\alpha 0\beta$ とすると　$\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{\dfrac{\beta}{|\beta|}}{\dfrac{\alpha}{|\alpha|}}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}}=\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから　$S=\dfrac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

2.49　$w=\dfrac{1}{z-i}$ より，$zw=i(w-i)$ であるから

$|zw|=|i(w-i)|$　ゆえに，$|z|=r$ より　$r|w|=|w-i|$　$\cdots$①

$r\neq 1$ のとき，① の両辺を平方すると

$$r^2|w|^2=|w|^2+iw-i\overline{w}+1$$

$$(r^2-1)|w|^2-iw+i\overline{w}=1$$

$$|w|^2+\overline{\left(\frac{i}{r^2-1}\right)}w+\frac{i}{r^2-1}\overline{w}+\left|\frac{i}{r^2-1}\right|^2=\frac{1}{r^2-1}+\left|\frac{i}{r^2-1}\right|^2$$

$$\left|w+\frac{i}{r^2-1}\right|^2=\frac{r^2}{(r^2-1)^2}$$

よって　　点 $\boldsymbol{\dfrac{i}{1-r^2}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\dfrac{r}{|r^2-1|}}$ の円周

$r=1$ のとき，① より　$|w|=|w-i|$

よって　　**点 0 と点 i を結ぶ線分の垂直二等分線**

解説　① より，$\dfrac{|w-i|}{|w|}=r$ であるから，$r\neq 1$ のとき，w は 2 点 0，i を $1:r$ に内分する点 $\dfrac{i}{1+r}$ および外分する点 $\dfrac{i}{1-r}$ を直径の両端とする円であるから

中心は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{i}{1+r}+\dfrac{i}{1-r}\right)=\dfrac{i}{1-r^2}$

半径は　$\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{i}{1+r}-\dfrac{i}{1-r}\right|=\dfrac{r}{|r^2-1|}$

2.50　(1)　P(z) が，点 $1+i$ を中心とする半径 r の円周上にあるから

$$|z-(1+i)|=r$$

$u=\dfrac{z+(1-i)}{2}$ より，$z=2u-1+i$ であるから

$|(2u-1+i)-(1+i)|=r$　ゆえに　$\boldsymbol{|u-1|=\dfrac{r}{2}}$

よって，Q(u) は，**点 1 を中心とする半径 $\boldsymbol{\frac{r}{2}}$ の円周上を動く．**

(2) $w=\dfrac{4\{z-(1+i)\}}{z-(2+i)}=4+\dfrac{4}{z-(2+i)}$ より，$w-4=\dfrac{4}{z-(2+i)}$

したがって　$z-(2+i)=\dfrac{4}{w-4}$　　ゆえに　$z-(1+i)=\dfrac{w}{w-4}$

$|z-(1+i)|=r$ より，$\left|\dfrac{w}{w-4}\right|=r$ であるから，$r^2|w-4|^2=|w|^2$ より

$$r^2(w-4)(\overline{w}-4)=w\overline{w}$$
$$(r^2-1)w\overline{w}-4r^2(w+\overline{w})+16r^2=0$$

$r\neq 1$ より　$w\overline{w}-\dfrac{4r^2}{r^2-1}(w+\overline{w})+\left(\dfrac{4r^2}{r^2-1}\right)^2=\left(\dfrac{4r^2}{r^2-1}\right)^2-\dfrac{16r^2}{r^2-1}$

ゆえに　$\left|w-\dfrac{4r^2}{r^2-1}\right|^2=\left(\dfrac{4r}{r^2-1}\right)^2$　すなわち　$\boldsymbol{\left|w-\dfrac{4r^2}{r^2-1}\right|=\dfrac{4r}{|r^2-1|}}$

よって，R(w) は，**点 $\boldsymbol{\frac{4r^2}{r^2-1}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\frac{4r}{|r^2-1|}}$ の円周上を動く．**

解説 $\left|\dfrac{w}{w-4}\right|=r\neq 1$ より，w は 2 点 0，4 を $r:1$ に内分する点 $\dfrac{4r}{r+1}$ と外分する点 $\dfrac{4r}{r-1}$ を直径の両端とする円周上を動く．

中心は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4r}{r+1}+\dfrac{4r}{r-1}\right)=\dfrac{4r^2}{r^2-1}$

半径は　$\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{4r}{r-1}-\dfrac{4r}{r+1}\right|=\dfrac{4r}{|r^2-1|}$

2.51　(1) 方程式の解 z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$\cdots$①

とすると　　$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

-1 を極形式で表すと　$-1=\cos\pi+i\sin\pi$

よって　　$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=\cos\pi+i\sin\pi$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4=1,\quad 4\theta=\pi+2k\pi\quad (k\text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　　$r=1$　$\cdots$②

また　　$\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると，$k = 0, 1, 2, 3$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi \quad \cdots ③$$

②，③ を ① に代入すると，求める解は

$$\boldsymbol{z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i}$$

(2) $|z - \beta| = \sqrt{2}|z - \alpha|$ の両辺を 2 乗することにより

$$|z - \beta|^2 = 2|z - \alpha|^2$$
$$(z - \beta)(\overline{z} - \overline{\beta}) = 2(z - \alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha})$$

両辺を展開して整理すると

$$z\overline{z} - (2\overline{\alpha} - \overline{\beta})z - (2\alpha - \beta)\overline{z} = -2\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta}$$
$$\{z - (2\alpha - \beta)\}\{\overline{z} - (2\overline{\alpha} - \overline{\beta})\} = 2(\alpha - \beta)(\overline{\alpha} - \overline{\beta})$$
$$|z - (2\alpha - \beta)|^2 = 2|\alpha - \beta|^2$$

したがって　　$|z - (2\alpha - \beta)| = \sqrt{2}|\alpha - \beta| \quad \cdots (*)$

このとき，点 z 全体が原点を中心とする円であるから

$$2\alpha - \beta = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\beta = 2\alpha}$$

(3) $\beta = 2\alpha$ を $(*)$ に代入すると　　$|z| = \sqrt{2}|\alpha| \quad \cdots ④$

また，α は $z^4 = -1$ の解であるから

$$\alpha^4 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha^4| = |-1|$$

したがって　$|\alpha|^4 = 1$　すなわち　$|\alpha| = 1$

これを ④ に代入すると　　$|z| = \sqrt{2} \quad \cdots ⑤$

w は i と z の中点であるから

$$w = \frac{i + z}{2} \quad \text{ゆえに} \quad z = 2w - i$$

これを ⑤ に代入すると

$$|2w - i| = \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad \left|w - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，点 w は，**点 $\dfrac{i}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円を描く．**

2.52 (1) $|z+1|=|2z-1|$ の両辺を平方すると　$|z+1|^2=|2z-1|^2$

ゆえに　$(z+1)(\overline{z}+1)=(2z-1)(2\overline{z}-1)$

整理すると　$z\overline{z}-z-\overline{z}+1=1$

したがって　$|z-1|^2=1$　すなわち　$|z-1|=1$

よって，**1 を中心とする半径 1 の円**である．

解説 $|z+1|=2|z-\frac{1}{2}|$ であるから　$|z+1|:|z-\frac{1}{2}|=2:1$

ゆえに，z は -1，$\frac{1}{2}$ を $2:1$ に内分および外分する 2 点を直径の両端とする円である (アポロニウスの円)．

(2) (1) の結果から，$w=z-1=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと $(w\overline{w}=1)$

$$\begin{aligned}|z^2-4z|^2&=|(w+1)^2-4(w+1)|^2=|w^2-2w-3|^2\\&=(w^2-2w-3)(\overline{w}^2-2\overline{w}-3)\\&=-3(w^2+\overline{w}^2)+4(w+\overline{w})+14\\&=-3(w+\overline{w})^2+4(w+\overline{w})+20\end{aligned}$$

ここで，$w+\overline{w}=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)=2\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}|z^2-4z|^2&=-3(2\cos\theta)^2+4\cdot2\cos\theta+20\\&=\boldsymbol{-12\cos^2\theta+8\cos\theta+20}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$|z^2-4z|^2=-12\left(\cos\theta-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{64}{3}$

ゆえに，$|z^2-4z|$ は $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき最大となる．

このとき，$\sin\theta=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$z=(1+\cos\theta)+i\sin\theta$ であるから，

$|z^2-4z|$ は，$\boldsymbol{z=\dfrac{4}{3}\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{3}}{3}}$ をとる．

2.53 (1) $\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数であるから

$$\frac{z-2i}{i(z-2)}=\overline{\left(\frac{z-2i}{i(z-2)}\right)}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{z-2i}{i(z-2)}=\frac{\overline{z}+2i}{-i(\overline{z}-2)}$$

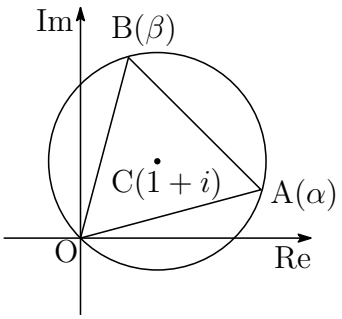
したがって

$$\begin{aligned}(z-2i)(\overline{z}-2)+(z-2)(\overline{z}+2i)&=0\\z\overline{z}+(-1+i)z+(-1-i)\overline{z}&=0\\|z|^2+\overline{(-1-i)}z+(-1-i)\overline{z}+|-1-i|^2&=|-1-i|^2\\|z-1-i|^2&=2\end{aligned}$$

よって，**中心 $1+i$，半径 $\sqrt{2}$ の円を描く．(ただし，$z \neq 2$)**

補足 $\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数であるから，$\dfrac{z-2i}{z-2}$ は純虚数．ゆえに，$z-2$ と $z-2i$ は垂直である．よって，z は 2 点 2，$2i$ を直径の両端とする円周上の点である．

(2) A，B は C を中心に O をそれぞれ $120°$，$-120°$ だけ回転させたものであるから



$$\begin{aligned}&(1+i)+(-1-i)(\cos 120° \pm i\sin 120°)\\ =&(1+i)+(-1-i)\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ =&\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}+\frac{3\mp\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}i,\ \beta=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}i}$

2.54 (1)　　$F : t\left|z+\dfrac{1}{t}\right| = \dfrac{1}{t}|z-t| \quad \cdots(\mathrm{a})$

(a) に $z=t$ を代入すると，$t>0$ より

$$(\text{左辺}) = t\left|t+\frac{1}{t}\right| = t\left(t+\frac{1}{t}\right) > 0, \quad (\text{右辺}) = 0$$

(a) に $z=-\dfrac{1}{t}$ を代入すると，$t>0$ より

$$(\text{左辺}) = 0, \quad (\text{右辺}) = \frac{1}{t}\left|-\frac{1}{t}-t\right| = t\left(\frac{1}{t}+t\right) > 0$$

よって，$\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ は，図形 F の点ではない．

(2) $t=1$ のとき　$F : |z+1| = |z-1|$

F の点 z は 2 点 (1)，(-1) から等距離にあるから，F は虚軸にある直線．

(3) (a) より，$t^2\left|z+\dfrac{1}{t}\right|^2=\dfrac{1}{t^2}|z-t|^2$ であるから $(t\neq 1)$

$$t^2\left(z+\frac{1}{t}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}(z-t)(\overline{z}-t)$$

$$\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)z\overline{z}+\left(t+\frac{1}{t}\right)(z+\overline{z})=0$$

$$z\overline{z}+\frac{t}{t^2-1}(z+\overline{z})=0$$

$$\left|z+\frac{t}{t^2-1}\right|^2=\frac{t^2}{(t^2-1)^2}$$

$$\left|z-\frac{t}{1-t^2}\right|=\frac{t}{|1-t^2|}\quad\cdots(*)$$

したがって，F は中心が $\dfrac{t}{1-t^2}$ で，半径 $\dfrac{t}{|1-t^2|}$ の円である．

よって，条件から　$\boldsymbol{z_1=0,\ z_2=\dfrac{2t}{1-t^2}}$

(4) (3) の結果から　$m=\dfrac{z_1+z_2}{2}=\boldsymbol{\dfrac{t}{1-t^2}}$　$(*)$ より　$\boldsymbol{|z-m|=\dfrac{t}{|1-t^2|}}$

よって，$\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{m}$ を中心とする半径 $|\boldsymbol{m}|$ の円である．

2.55　(1) 1 の 3 乗根は方程式

$$x^3=1\quad\text{すなわち}\quad(x-1)(x^2+x+1)=0$$

の解で，このうち，実数でない解の 1 つが α であるから

$$\alpha^2+\alpha+1=0\quad\text{ゆえに}\quad\alpha^2=-\alpha-1$$

$\overline{\alpha}$ も 2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\overline{\alpha}=-1\quad\text{ゆえに}\quad\overline{\alpha}=-\alpha-1$$

したがって，$\alpha^2=\overline{\alpha}$．3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\overline{\alpha})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であるから

$$\frac{\alpha+\overline{\alpha}+\beta}{3}=\frac{-1+\beta}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{\beta=\sqrt{3}+1}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を γ とする．$|\alpha-\gamma|=|\overline{\alpha}-\gamma|$ より

$$|\alpha-\gamma|^2=|\overline{\alpha}-\gamma|^2\quad\text{すなわち}\quad(\alpha-\overline{\alpha})(\gamma-\overline{\gamma})=0$$

α は実数ではないので，$\alpha \neq \overline{\alpha}$．ゆえに $\gamma = \overline{\gamma}$ より，γ は実数である．
また，$|\alpha - \gamma| = |\beta - \gamma|$ より

$$\begin{aligned} |\alpha - \gamma|^2 &= |\beta - \gamma|^2 \\ \alpha\overline{\alpha} - (\alpha + \overline{\alpha})\gamma &= \beta^2 - 2\beta\gamma \\ 1 - (-1)\gamma &= (\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)\gamma \\ (3 + 2\sqrt{3})\gamma &= 3 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

ゆえに，$\gamma = 1$ となり，円の半径は $|\beta - \gamma| = \sqrt{3}$
よって，求める外接円は　　$\boldsymbol{|z - 1| = \sqrt{3}}$

(3) $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ より $z = \dfrac{1}{\overline{w}}$ を (2) の結果に代入すると　　$\left|\dfrac{1}{\overline{w}} - 1\right| = \sqrt{3}$

これを平方すると　$\left|\dfrac{1}{\overline{w}} - 1\right|^2 = 3$　ゆえに　$2w\overline{w} + w + \overline{w} = 1$

したがって　　$\left(w + \dfrac{1}{2}\right)\left(\overline{w} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$　すなわち　$\left|w + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，w は**中心 $-\dfrac{1}{2}$，半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の円**である．

2.56　(1) $w = \dfrac{1}{1 - z}$ より　$z = \dfrac{w - 1}{w}$

$|z| = 1$ であるから　$\left|\dfrac{w - 1}{w}\right| = 1$　ゆえに　$|w - 1| = w$

よって，**0 と 1 を結ぶ線分の垂直二等分線**

(2) $w = \dfrac{1}{\sqrt{3} - z}$ より　$z = \dfrac{\sqrt{3}w - 1}{w}$　$\cdots(*)$

$|z| = 1$ であるから　$\left|\dfrac{\sqrt{3}w - 1}{w}\right| = 1$　ゆえに　$|\sqrt{3}w - 1|^2 = |w|^2$ より

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}w - 1)(\sqrt{3}\overline{w} - 1) &= w\overline{w} \\ 2w\overline{w} - \sqrt{3}(w + \overline{w}) + 1 &= 0 \\ w\overline{w} - \frac{\sqrt{3}}{2}(w + \overline{w}) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= -\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

したがって　$\left|w - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \dfrac{1}{4}$　すなわち　$\left|w - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

よって，**点 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円**

(3) (2) の結果から，$w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく．

$w=\dfrac{1}{2}(\alpha+\sqrt{3})$ を $(*)$ に代入すると $(\alpha\overline{\alpha}=1)$

$$z=\frac{\sqrt{3}w-1}{w}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\alpha+\sqrt{3}\right)-1}{\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}\alpha+1}{\alpha+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}\alpha+1)(\overline{\alpha}+\sqrt{3})}{(\alpha+\sqrt{3})(\overline{\alpha}+\sqrt{3})}=\frac{3\alpha+\overline{\alpha}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\alpha+\overline{\alpha})+4}$$

$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$\overline{\alpha}=\cos\theta-i\sin\theta$ より

$$z=\frac{3(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\{(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)\}+4}$$
$$=\frac{4\cos\theta+2i\sin\theta+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cos\theta+4}=\frac{(2\cos\theta+\sqrt{3})+i\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+2}$$

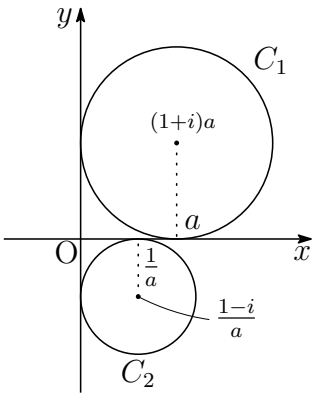
$0^\circ<\arg z<90^\circ$ より　$2\cos\theta+\sqrt{3}>0$，$\sin\theta>0$

よって　$\boldsymbol{\left|w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{0^\circ<\arg\left(w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)<150^\circ}$

2.57 $|z-(1+i)a|=a$ より

$$\left|\,(1+i)a\left(\frac{z}{(1+i)a}-1\right)\,\right|=a$$
$$\sqrt{2}\left|\,\frac{(1-i)z}{2a}-1\,\right|=1$$

$\omega=\dfrac{1}{z}$ より　　$\sqrt{2}\left|\omega-\dfrac{1-i}{2a}\right|=|\omega|$



両辺を平方すると

$$2\left(\omega-\frac{1-i}{2a}\right)\left(\overline{\omega}-\frac{1+i}{2a}\right)=\omega\overline{\omega}$$

整理すると　$\omega\overline{\omega}-\dfrac{1+i}{a}\omega-\dfrac{1-i}{a}\overline{\omega}+\dfrac{1}{a^2}=0$　すなわち　$\left|\omega-\dfrac{1-i}{a}\right|=\dfrac{1}{a}$

したがって，C_1，C_2 の位置関係は，上の図のようになる．

よって　　$\boldsymbol{a=1}$ のとき　**1** 個，　$\boldsymbol{a\neq1}$ のとき　**0** 個

2.58 (1) $z = t + ai$ より

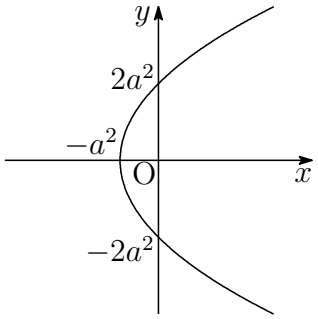
$$z^2 = (t + ai)^2 = (t^2 - a^2) + 2ati$$

$x = t^2 - a^2$，$y = 2at$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x = \frac{y^2}{4a^2} - a^2$$

ゆえに　$\boldsymbol{4a^2(x + a^2) = y^2}$　$\cdots$①

よって，求める軌跡は右の図のようになる．



(2) m は ℓ を原点を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned} z(\cos\theta + i\sin\theta) &= (t + ai)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (t\cos\theta - a\sin\theta) + i(t\sin\theta + a\cos\theta) \end{aligned}$$

$x = t\cos\theta - a\sin\theta$，$y = t\sin\theta + a\cos\theta$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x\sin\theta - y\cos\theta + a = 0 \quad \cdots ②$$

i) $\sin\theta = 0$ のとき
② は $y = \pm a$ の直線であり，①，② の共有点は 1 個

ii) $\sin\theta \neq 0$ のとき
①，② から x を消去して整理すると

$$(\sin\theta)y^2 - (4a^2\cos\theta)y - 4a^3(a\sin\theta - 1) = 0 \quad \cdots (*)$$

これは y に関する 2 次方程式であるから，その係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= 4a^4\cos^2\theta + 4a^3\sin\theta(a\sin\theta - 1) \\ &= 4a^3(a - \sin\theta) \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ に注意して

$-1 \leqq \sin\theta < a$ のとき　$(*)$ の実数解は 2 個
$\sin\theta = a$ のとき　$(*)$ の実数解は 1 個
$a < \sin\theta \leqq 1$ のとき　$(*)$ の実数解は 0 個

i)，ii) より，①，② の共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta < 0,\ 0 < \sin\theta < a} \text{ のとき} & \boldsymbol{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{\sin\theta = 0,\ a} \text{ のとき} & \boldsymbol{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a < \sin\theta \leqq 1} & \boldsymbol{0} \text{ 個} \end{cases}$$

2.59 (1) 2 次方程式 $z^2+tz+t=0\cdots$① が異なる 2 つの虚数解をもつとき，$D<0$ であるから

$$t^2-4\cdot1\cdot t<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{0<t<4}$$

このとき，方程式 ① の解は $\quad \boldsymbol{z=\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}}$

(2) $z=z(t)$ とおくと，解と係数の関係により $\quad z+\overline{z}=-t,\ z\overline{z}=t$

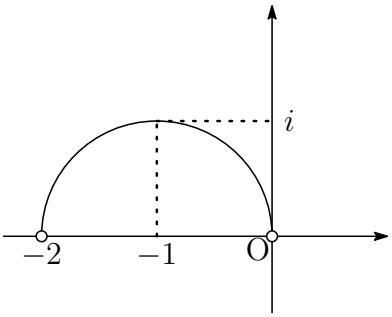
上の 2 式から t を消去すると

$$z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$
$$(z+1)(\overline{z}+1)=1$$

したがって $\quad |z+1|^2=1$

よって $\quad |z+1|=1$

ゆえに，$z(t)$ は，-1 を中心とする半径 1 の円周上で，虚部が正である点である．

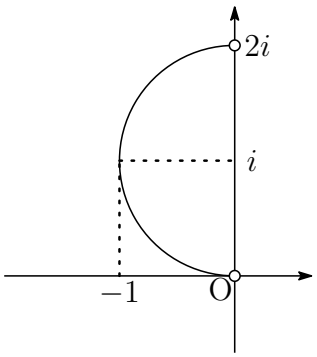


よって，$z(t)$ が描く図形 C は，右の図のようになる．

(3) (2) の結果から，$z=-1+(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(0^\circ<\theta<180^\circ)$

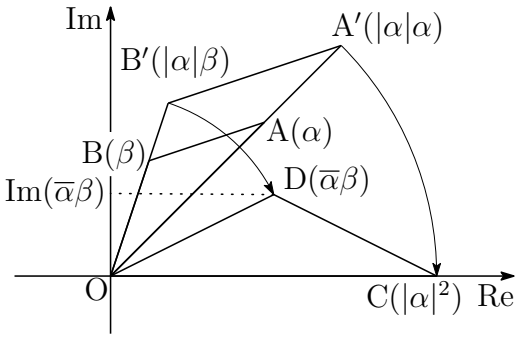
$$\begin{aligned}
w&=\frac{iz}{z+1}=\frac{i\{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)\}}{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)+1}\\
&=\frac{-i+i(\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta}\\
&=-i\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\
&=(\cos270^\circ+i\sin270^\circ)\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\
&=i+\cos(270^\circ-\theta)+i\sin(270^\circ-\theta)\qquad(90^\circ<270^\circ-\theta<270^\circ)
\end{aligned}$$

よって，w が描く図形は，下の図のようになる．



2.60 (1) 2点C($|\alpha|^2$)，D($\overline{\alpha}\beta$)は，それぞれ2点A(α)，B(β)を原点を中心に$|\alpha|$倍の相似拡大，さらに原点を中心に$\arg\overline{\alpha}$だけ回転$\left(\times\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\right)$したものであるから

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\triangle \mathrm{OCD}}{\triangle \mathrm{OAB}}=\boldsymbol{|\alpha|^2}$$



(2) △OCDの底辺を$|\alpha|^2$，高さを$|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$とみると　$S_2=\frac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(1)の結果から　$S_1=\frac{1}{|\alpha|^2}S_2$　よって　$S_1=\frac{1}{|\alpha|^2}\cdot\frac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|=\frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

別解 $\theta=\angle\alpha 0\beta$とすると　$\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{\frac{\beta}{|\beta|}}{\frac{\alpha}{|\alpha|}}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\frac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}}=\frac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin\theta=\frac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$であるから　$S_1=\frac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta|=\frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(3) (2)の結果から，3点O(0)，P(z)，Q$\left(\frac{1}{z}\right)$を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle \mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{z}\cdot\frac{1}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|$$

$z=a+bi$ $(1\leqq a\leqq 2,\ 1\leqq b\leqq 3)$であるから

$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i,$$
$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right|=\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$\frac{b}{a}=u$，$\triangle \mathrm{OPQ}=S(u)$とおくと　$S(u)=\dfrac{u}{1+u^2}$　$\left(\frac{1}{2}\leqq u\leqq 3\right)$

ゆえに　$S'(u)=\dfrac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$

u	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(u)$		+	0	−	
$S(u)$	$\frac{2}{5}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{3}{10}$

よって　最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{\frac{3}{10}}$

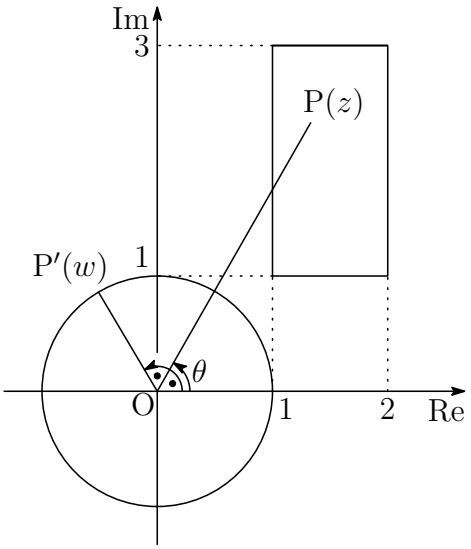
別解 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right) = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)$ であるから

$$\triangle \mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)\right|$$

$\theta = \arg(z)$，$w = \dfrac{z}{\overline{z}}$ とすると

$$w = \left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \frac{|z|}{|\overline{z}|} = 1,$$

$$\begin{aligned}\arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)\\ &= \arg(z) - \arg(\overline{z})\\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta\end{aligned}$$



点 $\mathrm{P}'(w)$ は，点 $\mathrm{P}(z)$ から単位円周上の点 P' への写像で，その偏角について

$$\arg(w) = 2\arg(z)$$

が成立する．$z = a + bi$ $(1 \leqq a \leqq 2,\ 1 \leqq b \leqq 3)$ より，$\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ とすると，上の図から

$$\tan\theta_1 = \frac{1}{2},\quad \tan\theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

したがって　　$\triangle \mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots(*)$

このとき　　$\sin 2\theta_1 = \dfrac{2\tan\theta_1}{1+\tan^2\theta_1} = \dfrac{4}{5},\quad \sin 2\theta_2 = \dfrac{2\tan\theta_2}{1+\tan^2\theta_2} = \dfrac{3}{5}$

$(*)$ より，$\triangle \mathrm{OPQ}$ は，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，

$\theta = \theta_2$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

2.61　(1) 点 $\mathrm{B}(\beta)$ は点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を原点を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたものであるから

$$\beta = \alpha\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\alpha i}$$

点 $\mathrm{C}(\gamma)$ は点 $\mathrm{P}(1)$ を中心に点 $\mathrm{B}(\alpha i)$ を $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたものであるから

$$\frac{\gamma - 1}{\alpha i - 1} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

よって　　$\gamma = 1 - i(\alpha i - 1) = \boldsymbol{1 + \alpha + i}$

(2) $\alpha = s + ti$ (s, t は正の実数) であるから　$\alpha \neq 1$

C(γ) が直線 PA 上にあるとき，次の値は実数である．

$$\frac{\gamma - 1}{\alpha - 1} = \frac{(1 + \alpha + i) - 1}{\alpha - 1} = \frac{(\alpha + i)(\overline{\alpha} - 1)}{(\alpha - 1)(\overline{\alpha} - 1)}$$
$$= \frac{|\alpha|^2 - \alpha + \overline{\alpha}i - i}{|\alpha - 1|^2}$$

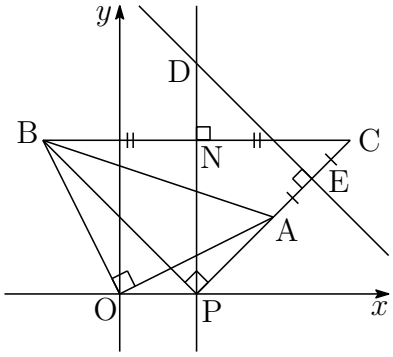
このとき　$-\alpha + \overline{\alpha}i - i = -(s + ti) + (s - ti)i - i$
$$= (-s + t) + (s - t - 1)i \quad \cdots ①$$

上の 2 式から，① は実数であるから

$$s - t - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = s - 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha = s + (s - 1)i}$$

(3) (1) の結果から，$\alpha = s + (s - 1)i$ より

$$\beta = \alpha i = \{s + (s - 1)i\}i = 1 - s + si,$$
$$\gamma = 1 + \alpha + i = 1 + \{s + (s - 1)i\} + i$$
$$= s + 1 + si$$



線分 BC の中点を N とすると　N$(1 + si)$

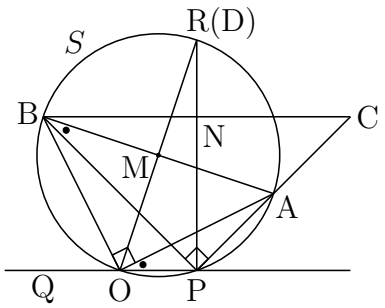
$\gamma - \beta = 2s$ より，BC は x 軸と平行である．

線分 AC の中点を E とすると　　E$\left(s + \dfrac{1}{2},\ \left(s - \dfrac{1}{2}\right)i\right)$

$\gamma - \alpha = 1 + i$ より，AC の偏角は　$\dfrac{\pi}{4}$

△PDE は直角二等辺三角形であるから，D は P の実部に等しく，E の虚部の 2 倍に等しい．よって　$\boldsymbol{\mathrm{D}(1 + (2s - 1)i)}$

別解 $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ より，2 点 O，P は AB を直径の両端する円 S 上にある．S の中心を M とし，直線 OM と S の交点で O でない点を R とする．円周角の定理により，$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{ABP}=\theta$ とし，直線 OP の O に関して P と反対側に点 Q をとる．△OAB，△PCB は直角二等辺三角形であるから



$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BOQ}&=\pi-(\angle\mathrm{AOB}+\angle\mathrm{AOP})\\&=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta,\\\angle\mathrm{OBC}&=\angle\mathrm{ABO}+\angle\mathrm{CBP}-\angle\mathrm{ABP}\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\theta=\frac{\pi}{2}-\theta\end{aligned}$$

上の 2 式から　OP//BC,　　OR は S の直径であるから　$\angle\mathrm{OPR}=\dfrac{\pi}{2}$

PR と BC の交点を N とすると　PN⊥BC

ゆえに　△PNB ≡ △PNC　また　△OMA ≡ △OMB

したがって，直線 OR は線分 AB の垂直二等分線，直線 PR は線分 BC の垂直二等分線である．これから，点 R は △ABC の外心，すなわち，求める点 D である．$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ であるから，$\mathrm{D}(\alpha+\beta)$.

$\alpha=s+(s-1)i$，$\beta=1-s+si$ より

$$\mathbf{D(1+(2s-1)i)}$$

2.62　　$C:w=\dfrac{az+b}{cz+1}\quad\cdots(*)$

条件 (ア) により　　$i=\dfrac{ai+b}{ci+1},\quad -i=\dfrac{a(-i)+b}{c(-i)+1}$

ゆえに　　$b+c+(a-1)i=0,\quad b+c-(a-1)i=0$

上の 2 式から　　$a=1,\quad b=-c$

これを $(*)$ に代入すると　$w=\dfrac{z-c}{cz+1}\cdots①$　　ゆえに　$z=-\dfrac{w+c}{cw-1}$

点 z は虚軸全体を動くから，$z+\overline{z}=0$ より　$-\dfrac{w+c}{cw-1}-\dfrac{\overline{w}-\overline{c}}{\overline{c}\,\overline{w}-1}=0$

整理すると　　$(c+\overline{c})|w|^2+(|c|^2-1)(w+\overline{w})-(c+\overline{c})=0\quad\cdots②$

条件 (イ) に注意すると，① により　$c \neq 0$

さらに，c は純虚数ではないから　$c + \overline{c} \neq 0$

$k = \dfrac{|c|^2 - 1}{c + \overline{c}} \cdots ③$ とおいて (k は実数)，② に適用すると

$$|w|^2 + k(w + \overline{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w + k|^2 = k^2 + 1$$

条件 (イ) により　$k^2 + 1 = 1$　ゆえに　$k = 0$　よって　$|w| = 1 \quad \cdots (**)$

また，③ により　$|c|^2 - 1 = 0$　ゆえに　$c = \pm 1$

(i) $c = 1$ のとき，① により

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{ゆえに} \quad w + 1 = \frac{2z}{z + 1}$$

$z = 0$ のとき，$w = -1$ となり，条件 (ウ) に反する．

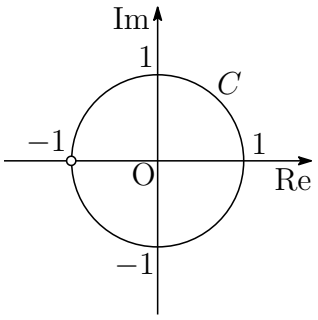
(ii) $c = -1$ のとき，① により

$$w = \frac{z + 1}{-z + 1} \quad \text{ゆえに} \quad w + 1 = \frac{2}{-z + 1} \neq 0$$

これは，条件 (ウ) を満たす．

よって　　$\boldsymbol{a = 1,\ b = 1,\ c = -1}$

$(**)$ および $w \neq -1$ により，C の概形は右の図のようになる．



補足 $z = i\tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $w = \dfrac{z+1}{-z+1}$ に代入すると

$$w = \frac{i\tan\theta + 1}{-i\tan\theta + 1} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ より，w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある．

解説 一般に，1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は複素数},\ ad - bc \neq 0)$$

は，拡縮 (回転)kz，平行移動 $z + \alpha$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成変換である．
特に反転に関して，次の性質がある [1]．

- 原点を通らない円は，原点を通らない円に移る．
- 原点を通る円は，原点を通らない直線に移る．
- 原点を通らない直線は，原点を通る円から原点を除いた図形に移る．
- 原点を通る直線は，原点を通る直線から原点を除いた図形に移る．

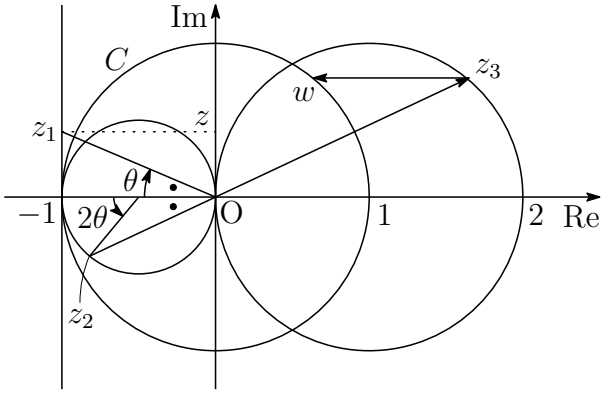
次の変換 (平行移動，反転，拡縮，平行移動)

$$f_1(z) = z - 1, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = -2z, \quad f_4(z) = z - 1$$

について，合成変換 $f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ は $\quad f(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$

$z = i\tan\theta$，$z_1 = f_1(z)$，$z_2 = f_2(z_1)$，$z_3 = f_3(z_2)$，$w = f_4(z_3)$ とすると

$$z_2 = f_2 \circ f_1(z) = \frac{1}{i\tan\theta - 1} = \frac{-\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$
$$= -\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$



[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf 3 の解説を参照．

2.63 (1) $z=\dfrac{1}{4}$ が $(*)$ をみたしているから　$\dfrac{1}{4}+\left|\dfrac{1}{4}-\sqrt{3}i\right|=k$

よって　　$k=\dfrac{1}{4}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{1}{4}+\sqrt{\dfrac{49}{16}}=\mathbf{2}$

(2) α の偏角が 60° であるから，$\alpha=r(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\dfrac{r}{2}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)$ とおいて $(r>0)$，$(*)$ に代入すると

$$r+\left|\frac{r}{2}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)-\sqrt{3}\,i\right|=2$$

$$\left|\frac{r}{2}+\sqrt{3}\left(\frac{r}{2}-1\right)i\right|=2-r \quad \cdots ②$$

両辺を平方すると　　$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{r}{2}-1\right)^2=(2-r)^2$

② より，$0<r\leqq 2$ に注意して　$r=1$　よって　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}}$

(3) $\beta-\alpha$ が正の実数であるとすると，$\beta=x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおける $\left(x>\dfrac{1}{2}\right)$.

これを $(*)$ に代入すると

$$\left|x+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\left|\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\sqrt{3}\,i\right|=2$$

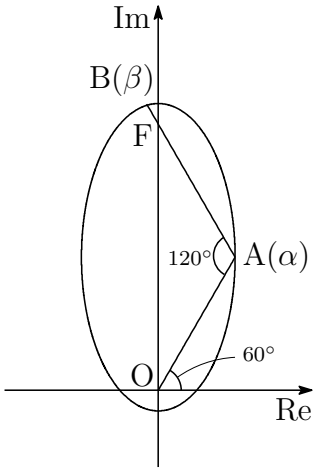
$$\left|x+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\left|x-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=2$$

$$\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}=2$$

$$\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}=1$$

$x>\dfrac{1}{2}$ は上式をみたさない．よって複素数 $z=\beta$ は $(*)$ をみたさない．

(4) AB と虚軸との交点を F とする．$\arg\alpha=60^\circ$ および $\angle\mathrm{BAO}=120^\circ$ より，$\triangle\mathrm{OAF}$ は $\angle\mathrm{AOF}=\mathrm{AFO}=30^\circ$ の二等辺三角形で，$\mathrm{F}(\sqrt{3}i)$ である．$\mathrm{B}(\beta)$ は直線 AF 上の点であるから，実数 t を用いて $(t>1)$



$$\begin{aligned}\beta&=\alpha+t(\sqrt{3}\,i-\alpha)\\&=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+t\left\{\sqrt{3}\,i-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\end{aligned}$$

β は $(*)$ をみたすから，$t>1$ に注意しながら

$$\left|\frac{1}{2}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\right|+\left|\left\{\frac{1}{2}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\right\}-\sqrt{3}\,i\right|=2$$

$$\left|\frac{1}{2}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)i\right|+\left|\frac{1}{2}(1-t)+\frac{\sqrt{3}}{2}(-1+t)i\right|=2$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1-t)^2+\frac{3}{4}(1+t)^2}+\sqrt{\frac{1}{4}(1-t)^2+\frac{3}{4}(-1+t)^2}=2$$

$$\sqrt{t^2+t+1}+t-1=2$$

$$\sqrt{t^2+t+1}=3-t$$

$1<t\leqq 3$ に注意して　$t^2+t+1=9-6t+t^2$　ゆえに　$t=\dfrac{8}{7}$

よって　　$\beta=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{8}{7}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{8}{7}\right)i=\boldsymbol{\dfrac{-1+15\sqrt{3}i}{14}}$

解説 $|z|+|z-\sqrt{3}i|=2$ より，長軸の長さが 2，焦点が 0 と $\sqrt{3}i$ である楕円である．実際，$|z|+|z-\sqrt{3}\,i|=2$ に $z=x+yi$ を代入して整理すると

$$4x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$$

α は，上式と $y=\sqrt{3}x$ の連立方程式を解くと

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{14},-\frac{\sqrt{3}}{14}\right)$$

よって，$\arg\alpha=60^\circ$ より　$\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

また，楕円の離心率 e は

$$e=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\left(e=\frac{\text{2 つの焦点間の距離}}{\text{長軸の長さ}}\right)$$

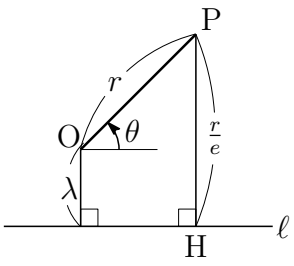
楕円の準線を ℓ とすると，楕円上の点 P から準線 ℓ に下した垂線 PH とすると

$$e=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

が成り立つ (2 次曲線について成り立つ関係式)．

O から準線 ℓ までの距離を λ とする．

右図から，PH を 2 通りに表すと



$$\mathrm{PH}=\frac{r}{e},\quad \mathrm{PH}=\lambda+r\sin\theta$$

上の 2 式から　　$r = \dfrac{e\lambda}{1 - e\sin\theta}$

問題において，$z = \dfrac{1}{4}$ をみたすとあるので，$\theta = 0$ のとき，$r = |z| = \dfrac{1}{4}$，すなわち，$\theta = 0$ のとき，$r = \dfrac{1}{4}$ である．したがって，$e\lambda = \dfrac{1}{4}$ を得る．また，$e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，楕円の極形式は

$$r = \frac{1}{4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)} \quad \text{ゆえに} \quad z = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)}$$

これに $\theta = 60^\circ$ を代入することにより，α が求まる．

さらに，$\theta = 240^\circ$ のときの $z = -\dfrac{1}{14} - \dfrac{\sqrt{3}}{14}i$ は，$\mathrm{A}(\alpha)$ を通り，実軸に平行な直線に関して $\mathrm{B}(\beta)$ と対称であることにも注意したい．

2.64　(1)　$z = x + yi$ とおき (x, y は実数)，これを $|z+i| - |z-i| = 1$ に代入すると

$$|x + (y+1)i| - |x + (y-1)i| = 1$$
$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 1$$

両辺を 2 乗すると

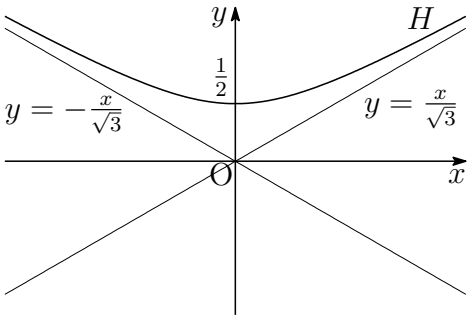
$$x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 + 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 1$$
$$4y - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

上式から $4y - 1 \geqq 0$ であり，再び両辺を 2 乗すると

$$(4y-1)^2 = 4\{x^2 + (y-1)^2\}$$
$$-4x^2 + 12y^2 = 3$$

ゆえに　　$-\dfrac{x^2}{\frac{3}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \left(y \geqq \dfrac{1}{2}\right)$

したがって，H の概形は次のようになる．



上の概形から，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} < \theta_1 < \dfrac{5}{6}\pi}$

補足　(熊大 [医]2018) 3

2.65　(1)　$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$ (a，c は実数) より

$$a^2 z\overline{z} + a(\overline{b}z + b\overline{z}) + b\overline{b} = b\overline{b} - ac$$

ゆえに　$(az + b)(a\overline{z} + \overline{b}) = |b|^2 - ac$

したがって　$|az + b|^2 = |b|^2 - ac$

$|b|^2 - ac > 0$ より　$\left| z + \dfrac{b}{a} \right| = \dfrac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$

よって，z は中心 $\boldsymbol{-\dfrac{b}{a}}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}}$ の円を描く．

(2)　$d(z - p)(\overline{z} - \overline{q}) = \overline{d}(z - q)(\overline{z} - \overline{p})$ より

$$i(d - \overline{d})z\overline{z} + i(\overline{d}\,\overline{p} - d\overline{q})z + i(\overline{d}q - dp)\overline{z} + i(dp\overline{q} - \overline{d}\,\overline{p}q) = 0 \quad \cdots ①$$

i)　$d \neq \overline{d}$ のとき (d は虚数)

$$a = i(d - \overline{d}), \quad b = i(\overline{d}q - dp), \quad c = i(dp\overline{q} - \overline{d}\,\overline{p}q)$$

とおくと，a，c は実数であり，① から　$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$

したがって，(1) の結果により

$$\begin{aligned} |b|^2 - ac &= b\overline{b} - ac \\ &= i(\overline{d}q - dp)\cdot(-i)(d\overline{q} - \overline{d}\,\overline{p}) - i(d - \overline{d})\cdot i(dp\overline{q} - \overline{d}\,\overline{p}q) \\ &= |d|^2(|p|^2 - p\overline{q} - \overline{p}q + |q|^2) \\ &= |d(p - q)|^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|} = \left| \frac{d(p - q)}{d - \overline{d}} \right|, \quad -\frac{b}{a} = -\frac{i(\overline{d}q - dp)}{i(d - \overline{d})} = \frac{dp - \overline{d}q}{d - \overline{d}}$$

よって，z は中心 $\boldsymbol{\dfrac{dp - \overline{d}q}{d - \overline{d}}}$，半径 $\boldsymbol{\left| \dfrac{d(p - q)}{d - \overline{d}} \right|}$ の円を描く．

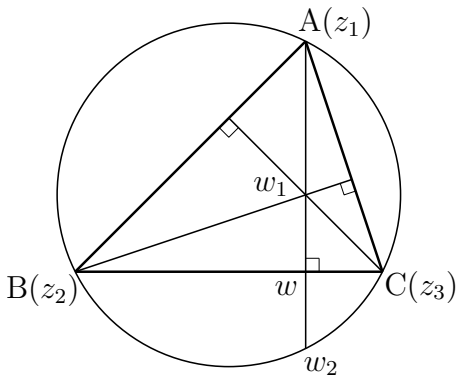
ii)　$d = \overline{d}$ のとき (d は実数)

$d = \overline{d} \neq 0$ より　$(z - p)(\overline{z} - \overline{q}) = (z - q)(\overline{z} - \overline{p})$

したがって　$\dfrac{z - p}{z - q} = \overline{\left(\dfrac{z - p}{z - q} \right)}$　ゆえに，$\dfrac{z - p}{z - q}$ は実数である．

よって，z は **2 点 p，q を通る直線**を描く．

2.66 (1) A(z_1)，B(z_2)，C(z_3) とおく．



点 A を通り，BC に垂直な直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)}=0 \quad \cdots ①$$

$w_1=z_1+z_2+z_3$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ であることから，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}\right)}&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}\right)}\\&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

したがって，w_1 は直線 ① 上にある．

同様にして，w_1 が点 B を通り直線 CA に垂直な直線な直線上の点，および点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点であることを示すことができる．

よって，w_1 は △ABC の垂心である．

(2) 円 C の方程式は　　$|z|=1$

$w_2=-\overline{z}_1z_2z_3$ より，$|w_2|=|\overline{z}_1||z_2||z_3|=1$

したがって，w_2 は円 C 上の点である．また，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}\right)}&=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3-\overline{z}_1}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\&=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}-\overline{z}_1}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

よって，w_2 は，直線 ① と円 C の交点である．

(3) 2 点 B，C を通る直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_2}{z_3-z_2}$ は実数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_2}{z_3-z_2}-\overline{\left(\frac{z-z_2}{z_3-z_2}\right)}=0$$

w_1 と w_2 の中点を w とすると　$w=\dfrac{z_1+z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2}$

このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{w-z_2}{z_3-z_2}-\overline{\left(\frac{w-z_2}{z_3-z_2}\right)}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\overline{\left\{\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}\right\}}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2+\overline{z}_3-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3}{2(\overline{z}_3-\overline{z}_2)}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\frac{\overline{z}_1-\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}}{2\left(\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}\right)}=0
\end{aligned}$$

よって，w_1 と w_2 の中点 w は，直線 BC 上の点である．

解説　3 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ について，△ABC の外心 O，垂心 $z_1+z_2+z_3$，重心 $\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$ が同一直線上にあることがわかる．この直線を**オイラー線**という．

w_1 と z_1 の中点，z_2 と z_3 の中点，z_1 から BC に下ろした垂線の足 w の 3 点を通る円は，$\dfrac{w_1+z_1}{2}$ と $\dfrac{z_2+z_3}{2}$ を直径の両端とする円で，中心は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w_1+z_1}{2}+\frac{z_2+z_3}{2}\right)=\frac{z_1+z_2+z_3}{2}$$

同時に，$\dfrac{w_1+z_2}{2}$ と $\dfrac{z_3+z_1}{2}$，および $\dfrac{w_1+z_3}{2}$ と $\dfrac{z_1+z_2}{2}$ を直径の両端とする円でもある．この方程式は

$$\left|z-\frac{z_1+z_2+z_3}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

であり，この円を**9 点円**という．その中心もオイラー線上にあり，外心と垂心の中点である．また，その半径は外接円の半径の $\frac{1}{2}$ である．

3.1　$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\dfrac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より　$y'=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}>0$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right)=1$$

y は単調増加　ゆえに　$\boldsymbol{-1 < y < 1}$

$y = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より　$e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$　ゆえに　$x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}\ \ (-1 < x < 1)}$

3.2　(1)　$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $x = y = 1$ を代入すると

$$f(1) = f(1) + f(1) \quad \text{ゆえに} \quad f(1) = 0 \quad \cdots①$$

$(*)$，① から　$f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f\left(x\cdot\dfrac{1}{x}\right) = f(1) = \boldsymbol{0}$

(2)　(1) の結果から　$f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{y}\right)$

また，$f\left(\dfrac{1}{y}\right) = -f(y)$ であるから

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \quad \cdots(**)$$

$a = \dfrac{m}{n}$ (m, n は自然数) とおくと，$a > 1$ より　$m > n$

仮定より，すべての自然数 k に対して，$f(k+1) - f(k) > 0$ が成り立つので，このとき

$$\sum_{k=n}^{m-1}\{f(k+1) - f(k)\} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad f(m) - f(n) > 0$$

$(**)$ より　$f(a) = f\left(\dfrac{m}{n}\right) = f(m) - f(n) > 0$

(3)　$0 < a < b$ から $\dfrac{b}{a} > 1$ であるから，$(**)$ および (2) の結果から

$$f(b) - f(a) = f\left(\frac{b}{a}\right) > 0 \quad \text{よって} \quad f(a) < f(b)$$

(4)　$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x)+f(y)}{2} &= \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x)\right\} + \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(y)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x+y}{2x}\right) + f\left(\frac{x+y}{2y}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}f\left(\frac{(x+y)^2}{4xy}\right) \end{aligned}$$

ここで　$\dfrac{(x+y)^2}{4xy}-1=\dfrac{(x-y)^2}{4xy}\geqq 0$　ゆえに　$\dfrac{(x+y)^2}{4xy}\geqq 1$

① および (2) の結果から　　$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\geqq\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

3.3　(1)　　$f(x)=-4x^2+4x=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$

区間 $[0,\ 1]$ において，$0\leqq f(x)\leqq 1$ であるから，

区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変である．

(2) 区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとき

$$a\leqq f(a),\quad f(b)\leqq b\quad\text{ゆえに}\quad a\leqq 4a(1-a),\quad 4b(1-b)\leqq b$$

$0<a<b<1$ に注意して，これを解くと　$0<a\leqq\dfrac{3}{4}\leqq b<1$　$\cdots$①

① に注意して，次の 2 つの場合分けを行う．

i) $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\frac{1}{2}\in[a,\ b],\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=1\notin[a,\ b]$$

ii) $\dfrac{1}{2}<a\leqq\dfrac{3}{4}$ のとき

区間 $[a,\ b]$ において，関数 $f(x)$ は単調減少であるから

$$f(a)\leqq b,\quad f(b)\geqq a\quad\text{ゆえに}\quad -4a^2\leqq -4a+b,\quad 4b^2\leqq -a+4b$$

上の 2 式の辺々を加えると　　$4(b+a)(b-a)\leqq 5(b-a)$

$0<a<b<1$ より，$b-a>0$ であるから　$a+b\leqq\dfrac{5}{4}$

これは，$\dfrac{1}{2}<a$，$\dfrac{3}{4}\leqq b$ に反する．

i)，ii) より，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではない．

解説　区間 $[a,\ b]$ が出題された関数について不変であれば

$$x_{n+1}=f(x_n),\ a\leqq x_0\leqq b$$

とおくと，$a\leqq x_n\leqq b$ $(n=0,1,2,\ldots)$ となる．$\{x_n\}$ の収束・発散などを調べて反例を示すことは，この関数の特殊性から不可能である．写像

$$x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n):0\leqq\lambda\leqq 4,\ 0\leqq x_0\leqq 1$$

をロジスティック写像 (Logistic map) といい，極めて複雑な振舞いをすることで知られている．

4.1 (1) 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $9{\cdot}10^{-n-1}$，公比 10^{-1}，末項 $9{\cdot}10^{-2n}$ の等比数列の和であるから

$$a_n = \frac{9{\cdot}10^{-n-1} - 10^{-1} \times 9{\cdot}10^{-2n}}{1 - 10^{-1}} = 10^{-n} - 10^{-2n}$$

ゆえに　$b_n = 10^n a_n = 10^n(10^{-n} - 10^{-2n}) = \mathbf{1 - \dfrac{1}{10^n}}$

また　$\boldsymbol{b_1 = 0.9}$，$\boldsymbol{b_2 = 0.99}$，$\boldsymbol{b_3 = 0.999}$

等比数列の和

初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和 S は　$\boldsymbol{S = \dfrac{a - rl}{1 - r}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}(10^{-k} - 10^{-2k}) \\ &= \frac{10^{-1} - 10^{-1}{\cdot}10^{-n}}{1 - 10^{-1}} - \frac{10^{-2} - 10^{-2}{\cdot}10^{-2n}}{1 - 10^{-2}} \\ &= \frac{1 - 10^{-n}}{9} - \frac{1 - 10^{-2n}}{99} = \mathbf{\frac{10}{99} - \frac{1}{9{\cdot}10^n} + \frac{1}{99{\cdot}10^{2n}}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{10}{99}}$

4.2

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - (\sqrt{2}+1)a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

上の漸化式およびその補助方程式は

$$\begin{cases} a_{n+1} = (\sqrt{2}+1)a_n + 1 & \cdots ① \\ c = (\sqrt{2}+1)c + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② から　$a_{n+1} - c = (\sqrt{2}+1)(a_n - c)$

② を解いて　$c = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$a_{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)\left(a_n + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

数列 $\left\{a_n + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ は，初項 $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，公比 $\sqrt{2}+1$ の等比数列であるから

$$a_n + \frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

よって　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^n - 1}{\sqrt{2}}}$

$\sqrt{2}+1 > 1$ であるから　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$

4.3 与えられた漸化式から　　$\dfrac{a_{n+1}}{(2c)^{n+1}} - \dfrac{a_n}{(2c)^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

$n \geqq 2$ のとき　　$\dfrac{a_n}{(2c)^n} = \dfrac{a_1}{2c} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

したがって　　$a_n = (2c)^n - c^n$

$n = 1$ のときも，上式は成り立つので　　$a_n = (2c)^n - c^n$

$0 < |c| < \dfrac{1}{2}$ より，$0 < |2c| < 1$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2c}{1-2c} - \frac{c}{1-c} = \frac{c}{(1-2c)(1-c)}$$

これが $\dfrac{2}{3}$ に等しいので　　$\dfrac{c}{(1-2c)(1-c)} = \dfrac{2}{3}$

ゆえに　$2(1-2c)(1-c) = 3c$　整理すると　$(c-2)(4c-1) = 0$

$|c| < \dfrac{1}{2}$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{c = \dfrac{1}{4}}$

4.4　(1) 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -p(a_{n+1} - a_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = -pb_n$$

$\{b_n\}$ は，初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$，公比 $-p$ の等比数列であるから

$$b_n = 1\cdot(-p)^{n-1} = \boldsymbol{(-p)^{n-1}}$$

(2) (1) の結果から　$a_{n+1} - a_n = (-p)^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき　　$a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-p)^{k-1} = 1 + \frac{1-(-p)^{n-1}}{1+p}$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = 1 + \dfrac{1-(-p)^{n-1}}{1+p}}$

(3) $0<p<1$ より　$-1<-p<0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(-p)^{n-1}=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}a_n=1+\dfrac{1}{1+p}=\boldsymbol{\dfrac{2+p}{1+p}}$

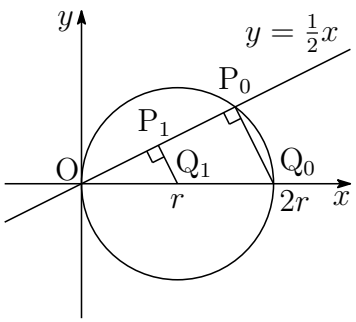
別解　与えられた漸化式から

$$a_{n+2}+pa_{n+1}=a_{n+1}+pa_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}+pa_n=a_2+pa_1=2+p$$

上式と $a_{n+1}-a_n=(-p)^{n-1}$ の差をとると

$$(1+p)a_n=2+p-(-p)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n=\frac{2+p-(-p)^{n-1}}{1+p}$$

4.5　$\mathrm{Q}_0(2r,\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(r,\ 0)$ とし，2 以上の自然数 n の自然数 n に対して，原点 O と点 Q_{n-1} の中点を Q_n とする．このとき，原点 O と点 P_n を通り，y 軸に接する円を C_n とすると，C_n は OQ_n を直径とする円であるから，その面積 S_n は



$$S_n=\pi\left(\frac{1}{2}\mathrm{OQ}_n\right)^2=\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2^{n-1}}\right)^2=\frac{\pi r^2}{4^n}$$

$\{S_n\}$ は初項が $S_1=\dfrac{\pi r^2}{4}$，公比が $\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi r^2}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi r^2}{3}}$$

4.6　(1) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，$a_5=14$，$a_{10}=29$ より

$$a+4d=14,\quad a+9d=29 \quad \text{これを解いて} \quad a=2,\quad d=3$$

したがって　$a_n=2+(n-1)\cdot 3$　すなわち　$\boldsymbol{a_n=3n-1}$

(2) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}2^{-a_k}=\sum_{k=1}^{n}2^{-3k+1}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}}=\boldsymbol{\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}}$$

(3) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{2(3n+2)}}$$

(4) (2)，(3) の結果から

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-a_k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-a_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\} = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right) = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

4.7 (1) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 6b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \quad \cdots (*)$

上式の第 1 式から

$$b_n = \frac{1}{6}(a_{n+1} - 2a_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}(a_{n+2} - 2a_{n+1}) \quad \cdots (**)$$

これらを第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{6}(a_{n+2} - 2a_{n+1}) = 2a_n + 3 \times \frac{1}{6}(a_{n+1} - 2a_n)$$

整理すると　　$a_{n+2} - 5a_{n+1} - 6a_n = 0 \quad \cdots ①$

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots ②$ より

$$a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0 \quad \cdots ③$$

①，③ より　　$\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = -6$

ゆえに，α，β を解とする 2 次方程式は　$x^2 - 5x - 6 = 0$

よって，α，β は，これを解いて　　$\mathbf{-1,\ 6}$

(2) (*) の第 1 式から　$a_2 = 2a_1 + 6b_1 = 2\cdot 1 + 6\cdot 1 = 8$

(1) の結果を ② に代入すると

$$\begin{cases} a_{n+2} + a_{n+1} = 6(a_{n+1} + a_n) \\ a_{n+2} - 6a_{n+1} = -(a_{n+1} - 6a_n) \end{cases}$$

したがって　　$a_{n+1} + a_n = 6^{n-1}(a_2 + a_1) = 9\cdot 6^{n-1}$

$a_{n+1} - 6a_n = (-1)^{n-1}(a_2 - 6a_1) = 2\cdot(-1)^{n-1}$

上の 2 式から　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{9\cdot 6^{n-1} - 2\cdot(-1)^{n-1}}{7}}$

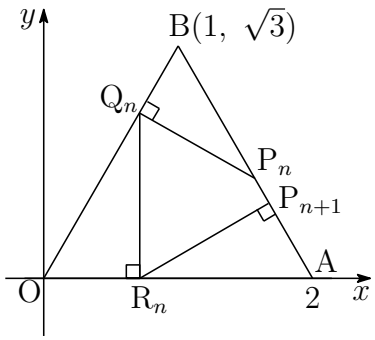
(3) (**) の第 1 式に (2) の結果を代入すると

$$b_n = \frac{1}{6}\left(\frac{9\cdot 6^n - 2\cdot(-1)^n}{7} - 2 \times \frac{9\cdot 6^{n-1} - 2\cdot(-1)^{n-1}}{7}\right) = \frac{6^n + (-1)^{n-1}}{7}$$

上式および (2) の結果から　$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{9\cdot 6^{n-1}-2\cdot(-1)^{n-1}}{6^n+(-1)^{n-1}}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9-2\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{6+\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}=\frac{9}{6}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

4.8 点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を通り，直線 OB に垂直な直線は



$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_n)+y_n$$

これと直線 OB : $y=\sqrt{3}x$ の交点の x 座標は

$$\sqrt{3}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_n)+y_n$$

これを解くことにより，点 Q_n の x 座標は　$x=\dfrac{x_n+\sqrt{3}y_n}{4}$

次に，点 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を通り，直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_{n+1})+y_{n+1}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$0=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_{n+1})+y_{n+1}$$

これを解くことにより，点 R_n の x 座標は　$x=x_{n+1}-\sqrt{3}y_{n+1}$

点 Q_n と点 R_n の x 座標は等しいから

$$x_{n+1}-\sqrt{3}y_{n+1}=\frac{x_n+\sqrt{3}y_n}{4}$$

2 点 P_n，P_{n+1} は直線 AB : $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 上の点であるから

$$x_{n+1}-\sqrt{3}(-\sqrt{3}x_{n+1}+2\sqrt{3})=\frac{x_n+\sqrt{3}(-\sqrt{3}x_n+2\sqrt{3})}{4}$$

整理すると　$x_{n+1}=-\dfrac{1}{8}x_n+\dfrac{15}{8}$　ゆえに　$x_{n+1}-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{1}{8}\left(x_n-\dfrac{5}{3}\right)$

数列 $\left\{x_n-\dfrac{5}{3}\right\}$ は初項 $x_1-\dfrac{5}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$x_n-\frac{5}{3}=\left(x_1-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\quad\text{ゆえに}\quad\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{5}{3}$$

また　$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}\cdot\frac{5}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

よって，求める点の座標は　$\left(\boldsymbol{\frac{5}{3}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)$

4.9　(1)　$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より，$\tan\theta \neq 0$，$\tan 2\theta \neq 0$．2 倍角の公式により

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1}{2\tan\theta} - \frac{1}{2}\tan\theta$$

よって　$\frac{1}{2}\tan\theta = \frac{1}{2\tan\theta} - \frac{1}{\tan 2\theta}$

(2)　(1) の結果から，k を自然数とすると

$$\frac{1}{2^k}\tan\theta = \frac{1}{2^k\tan\theta} - \frac{1}{2^{k-1}\tan 2\theta}$$

$0 < \frac{1}{2^k} < \frac{\pi}{4}$ であるから，$\theta = \frac{1}{2^k}$ とおくと

$$a_k = \frac{1}{2^k}\tan\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k\tan\frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{1}{2^{k-1}}}$$

よって　$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k\tan\frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{1}{2^{k-1}}}\right)$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2^n\tan\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1}}$$

(3)　(2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2^n}}{\tan\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1}\right) = \boldsymbol{1 - \frac{1}{\tan 1}}$$

4.10　(1)　$a_{n+1} = {a_n}^2 + {b_n}^2 \quad \cdots ①$

$b_{n+1} = 2a_nb_n \quad \cdots ②$

① と ② の辺々を加えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} = ({a_n}^2 + {b_n}^2) + 2a_nb_n = (a_n + b_n)^2$$

$c_n = a_n + b_n$ より　$c_{n+1} = {c_n}^2$

よって　$c_n = {c_1}^{2^{n-1}} = (a_1 + b_1)^{2^{n-1}} = \boldsymbol{(a+b)^{2^{n-1}}}$

解説 $c_{n+1} = {c_n}^2$ より　$\log c_{n+1} = 2\log c_n$

したがって　$\log c_n = 2^{n-1}\log c_1 = \log {c_1}^{2^{n-1}}$

よって　$c_n = {c_1}^{2^{n-1}} = (a+b)^{2^{n-1}}$

(2) (1) の結果から　$a_n + b_n = (a+b)^{2^{n-1}}$　$\cdots$③

①，② から

$$a_{n+1} - b_{n+1} = ({a_n}^2 + {b_n}^2) - 2a_nb_n = (a_n - b_n)^2$$

したがって　$a_n - b_n = (a-b)^{2^{n-1}}$　$\cdots$④

③，④ から　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}\{(a+b)^{2^{n-1}} + (a-b)^{2^{n-1}}\}}$

$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{2}\{(a+b)^{2^{n-1}} - (a-b)^{2^{n-1}}\}}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(a+b)^{2^{n-1}} - (a-b)^{2^{n-1}}}{(a+b)^{2^{n-1}} + (a-b)^{2^{n-1}}} = \frac{1 - \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}{1 + \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}$$

$a > b > 0$ より　$0 < \dfrac{a-b}{a+b} < 1$　ゆえに　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}} = 0$　$\cdots$⑤

したがって，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$ は存在して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}{1 + \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}} = \boldsymbol{1}$$

(4) (2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a+b)^{2^{n-1}}\left\{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}\right\}$$

⑤ に注意すると

$a + b > 1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

$a + b = 1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$

$a + b < 1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要条件であるから，

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$a + b < 1$ が成り立つ．

解説 (長崎大学 2010) 5

4.11 (1) 与えられた漸化式から

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{\boldsymbol{s+t}}{\boldsymbol{2}}, \qquad a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{t + \frac{s+t}{2}}{2} = \frac{\boldsymbol{s+3t}}{\boldsymbol{4}}$$

$$b_3 = \sqrt{b_1 b_2} = \boldsymbol{\sqrt{st}}, \qquad b_4 = \sqrt{b_2 b_3} = \sqrt{t\sqrt{st}} = \boldsymbol{\sqrt[4]{st^3}}$$

(2) 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \quad \text{ゆえに} \quad c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n$$

$\{c_n\}$ は初項が $c_1 = a_2 - a_1 = t - s$，公比が $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$c_n = c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{(t-s)}\left(-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{n-1}}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = s + (t-s)\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= s + (t-s) \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}s + \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}t \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}s + \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}t}$$

(3) $b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1}b_n}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log b_{n+2} = \frac{\log b_{n+1} + \log b_n}{2} \quad \text{ゆえに} \quad d_n = \frac{d_{n+1} + d_n}{2}$$

$d_1 = \log b_1 = \log s$，$d_2 = \log b_2 = \log t$ より，(2) の結果を利用して

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\log s + \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log t \\ &= \log s^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}} t^{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}} \end{aligned}$$

よって $\qquad \boldsymbol{b_n = s^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}} t^{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}}$

(4) (2),(3) の結果から　$\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\boldsymbol{s+2t}}{\boldsymbol{3}}$,　$\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt[3]{\boldsymbol{st^2}}$

(5) $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$，$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすると，$s>0$，$t>0$ より，$\alpha>0$，$\beta>0$

(4) の結果から　$\alpha^3 - \beta^3 = \dfrac{1}{27}(s-t)^2(s+8t)$

よって，$t=s$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であるための必要十分条件である．

別解 $s>0$，$t>0$ であるから，3 数 s，t，t の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{s+t+t}{3} \geqq \sqrt[3]{stt} \quad \text{すなわち} \quad \frac{s+2t}{3} \geqq \sqrt[3]{st^2}$$

上式において，等号が成立するのは，$s=t$ のときに限る．

したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \implies s=t$

また，(4) の結果から，この逆は自明．

よって，$t=s$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であるための必要十分条件である．

補足 $s>0$，$t>0$ に対して，$p>0$，$q>0$，$p+q=1$ とすると

$$ps+qt \geqq s^p t^q$$

が成り立つ (等号が成立するのは $s=t$) ので，$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$ とおくと

$$\frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t \geqq s^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{s+2t}{3} \geqq \sqrt[3]{st^2}$$

一般に，$a_k>0$，$p_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ のとき

$$\boldsymbol{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n \geqq a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき) [2]．

とくに，$p_1=p_2=\cdots=p_n=\dfrac{1}{n}$ とすると，次式が成り立つ．

$$\frac{\boldsymbol{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{\boldsymbol{n}} \geqq \sqrt[n]{\boldsymbol{a_1a_2\cdots a_n}}$$

4.12　(1) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，次の漸化式が成立する．

$$a_1=b_1=1, \quad a_{n+1}=a_n+b_n, \quad b_{n+1}=a_n \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (*)$$

$a_2=2$，$b_2=1$ であるから，順次，$n=2,\ 3$ を代入すると

$$\boldsymbol{a_3=3,\ \ b_3=2,\ \ a_4=5,\ \ b_4=3}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf 3 を参照

(2) (**) より　　$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + b_n,\ b_{n+1} = a_n}$

(3) (**) より，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は自然数の数列で

$$a_{n+1} - a_n = b_n > 0, \quad b_{n+1} = a_n$$

であるから，これらは単増加列である．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
b_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

よって，条件をともにみたす最小の n は　$\boldsymbol{n = 12}$

(4) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m \,|\, n$ と表記する．

(A) $d \in L$ について，$d \,|\, a$，$d \,|\, b$ であるから

$$a = pd, \quad b = qd$$

となる整数 $p,\ q$ が存在するから

$$c = a + b = pd + qd = (p + q)d \quad \text{ゆえに} \quad d \,|\, c$$

$d \,|\, a$，$d \,|\, c$ であるから，$d \in R$　したがって　$L \subset R$

(B) $d \in R$ について，$d \,|\, a$，$d \,|\, c$ であるから

$$a = rd, \quad c = sd$$

となる整数 $r,\ s$ が存在するから

$$b = c - a = sd - rd = (s - r)d \quad \text{ゆえに} \quad d \,|\, b$$

$d \,|\, a$，$d \,|\, b$ であるから，$d \in L$　したがって　$R \subset L$

(A)，(B) から　$L = R$

$L_n = \{d \,|\, d \text{ は } a_n,\ b_n \text{の公約数}\}$ とすると，前の結論により

$$\begin{aligned} L_n &= \{d \,|\, d \text{ は } a_n,\ a_n + b_n \text{の公約数}\} \\ &= \{d \,|\, d \text{ は } b_{n+1},\ a_{n+1} \text{の公約数}\} = L_{n+1} \end{aligned}$$

$L_1 = \{1\}$ であるから，すべての自然数 n について　$L_n = \{1\}$
よって，すべての自然数 m に対して，a_m と b_m は互いに素である．

(5) $r_n = \dfrac{a_n}{a_n + b_n}$ より　$\dfrac{1}{r_n} = 1 + \dfrac{b_n}{a_n}$

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{(a_n + b_n) + a_n} \\ &= \frac{1 + \frac{b_n}{a_n}}{1 + \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)} = \frac{\frac{1}{r_n}}{1 + \frac{1}{r_n}} = \frac{1}{r_n + 1} \end{aligned}$$

したがって　　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x+1}}$

$f(x) = x$ とすると　　$\dfrac{1}{x+1} = x$　$\cdots$①

$x(x+1) = 1$　整理すると　$x^2 + x - 1 = 0$

この 2 次方程式の解を

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

とおくと，① に注意して

$$r_{n+1} - \alpha = \frac{1}{r_n + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} = -\frac{r_n - \alpha}{(\alpha + 1)(r_n + 1)} = -\frac{\alpha(r_n - \alpha)}{r_n + 1}$$

同様に　　$r_{n+1} - \beta = -\dfrac{\beta(r_n - \beta)}{r_n + 1}$

$\{r_n\}$ について，明らかに $r_n > 0$ であるから，$r_n - \beta \neq 0$ より

$$\frac{r_{n+1} - \alpha}{r_{n+1} - \beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} \cdot \frac{r_1 - \alpha}{r_1 - \beta}$$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ より　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} = 0$　よって　$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha = \boldsymbol{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$

4.13 (1) $$a_{n+1}=\frac{a_n+r^2}{a_n+1} \quad \cdots(*)$$

$a_1=1$ および上式より，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ $\cdots$①

$(*)$ から $$a_{n+1}-r=(1-r)\times\frac{a_n-r}{a_n+1} \quad \cdots(**)$$

$$a_{n+1}+r=(1+r)\times\frac{a_n+r}{a_n+1}$$

上の 2 式より $$\frac{a_{n+1}-r}{a_{n+1}+r}=\frac{1-r}{1+r}\times\frac{a_n-r}{a_n+r}$$

ゆえに $$\frac{a_n-r}{a_n+r}=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n-1}\times\frac{a_1-r}{a_1+r}=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n} \quad \cdots②$$

$r>1$ より $$\frac{1-r}{1+r}<0 \quad \cdots③$$

①，②，③ から

n が偶数のとき $a_n-r>0$ すなわち $a_n>r$

n が奇数のとき $a_n-r<0$ すなわち $a_n<r$

(2) $(*)$，$(**)$ より

$$a_{n+2}-r=(1-r)\times\frac{a_{n+1}-r}{a_{n+1}+1}$$

$$=(1-r)\times\frac{(1-r)\times\dfrac{a_n-r}{a_n+1}}{\dfrac{a_n+r^2}{a_n+1}+1}=\boldsymbol{\frac{(1-r)^2(a_n-r)}{2a_n+r^2+1}}$$

(3) (1) の結果から，$a_{2n}>r$．これと (2) の結果から

$$a_{2n+2}-r=\frac{(1-r)^2(a_{2n}-r)}{2a_{2n}+r^2+1}<\frac{(1-r)^2(a_{2n}-r)}{2r+r^2+1}=\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2\times(a_{2n}-r)$$

よって $$\frac{a_{2n+2}-r}{a_{2n}-r}<\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$$

(4) (3) の結果から，$\lambda=\left(\dfrac{r-1}{r+1}\right)^2$ とおくと

$$0<\frac{a_4-r}{a_2-r}<\lambda,\quad 0<\frac{a_6-r}{a_4-r}<\lambda,\quad \cdots,\quad 0<\frac{a_{2n}-r}{a_{2n-2}-r}<\lambda$$

これらの辺々をかけると

$$0 < \frac{a_{2n} - r}{a_2 - r} < \lambda^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a_{2n} - r < (a_2 - r)\lambda^{n-1}$$

$r > 1$ より，$0 < \lambda < 1$ であるから $\lim_{n\to\infty} (a_2 - r)\lambda^{n-1} = 0$
はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} (a_{2n} - r) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_{2n} = r}$$

これと $(*)$ により $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n + r^2}{a_n + 1} = \dfrac{r + r^2}{r + 1} = \boldsymbol{r}$

解説 $r > 1$ であるから，② より

$$\left|\frac{a_n - r}{a_n + r}\right| = \left|\left(\frac{1 - r}{1 + r}\right)^n\right| = \left(\frac{r - 1}{r + 1}\right)^n$$

$0 < \dfrac{r - 1}{r + 1} < 1$ であるから $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{r - 1}{r + 1}\right)^n = 0$

はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n - r}{a_n + r} = 0$ よって $\lim_{n\to\infty} a_n = r$
また，② より，一般項は

$$a_n = \frac{r\left\{1 + \left(\dfrac{1 - r}{1 + r}\right)^n\right\}}{1 - \left(\dfrac{1 - r}{1 + r}\right)^n}$$

であるから，$-1 < \dfrac{1 - r}{1 + r} < 0$ より，直接 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めることもできる．

また，一般項から $\quad a_n - r = \dfrac{2r\left(\dfrac{1 - r}{1 + r}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{1 - r}{1 + r}\right)^n}$

ゆえに $\quad n$ が偶数のとき $\quad a_n - r > 0 \quad$ すなわち $\quad a_n > r$
$\quad\quad\quad n$ が奇数のとき $\quad a_n - r < 0 \quad$ すなわち $\quad a_n < r$

4.14 (1) $(1 - r)\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 - r^{n+1}$ より，$|r| < 1$ のとき

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{\boldsymbol{1 - r^{n+1}}}{\boldsymbol{1 - r}}$$

次に，S_n について

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} kr^{k-1} \quad \cdots ①, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)r^{k-2} \quad \cdots ②$$

とおくと，① $-$ ② $\times r$ より $(r \neq 1)$

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= \sum_{k=0}^{n} kr^{k-1} - r\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2} \\ (1-r)S_n &= -nr^n + \sum_{k=1}^{n}\{kr^{k-1} - r(k-1)r^{k-2}\} \\ &= -nr^n + \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = -nr^n + \frac{1-r^n}{1-r} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S_n = -\dfrac{nr^n}{1-r} + \dfrac{1-r^n}{(1-r)^2}}$

(2) T_n について

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2} \quad \cdots ③, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)(k-2)r^{k-3} \quad \cdots ④$$

とおくと，③ $-$ ④ $\times r$ より，② に注意して $(r \neq 1)$

$$\begin{aligned} T_n - rT_n &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2} - r\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(k-2)r^{k-3} \\ (1-r)T_n &= -n(n-1)r^{n-1} + 2\sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-2} \\ &= -n(n-1)r^{n-1} - 2nr^{n-1} + 2\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2} \\ &= -n(n+1)r^{n-1} + 2S_n \\ &= -n(n+1)r^{n-1} - \frac{2nr^n}{1-r} + \frac{2(1-r^n)}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{T_n = -\dfrac{n(n+1)r^{n-1}}{1-r} - \dfrac{2nr^n}{(1-r)^2} + \dfrac{2(1-r^n)}{(1-r)^3}}$

(3) $|r| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$，$\lim_{n\to\infty} n(n-1)r^n = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n(n+1)r^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)r^n + 2nr^n}{r} = 0$$

上の諸式により

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{nr^n}{1-r}+\frac{1-r^n}{(1-r)^2}\right\} = \frac{1}{(1-r)^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n(n+1)r^{n-1}}{1-r}-\frac{2nr^n}{(1-r)^2}+\frac{2(1-r^n)}{(1-r)^3}\right\} = \frac{2}{(1-r)^3}$$

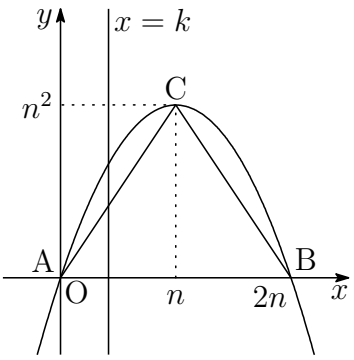
よって
$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2r^k = r^2\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)r^{k-2} + r\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}$$
$$= r^2\times\frac{2}{(1-r)^3} + r\times\frac{1}{(1-r)^2} = \boldsymbol{\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}}$$

4.15 (1) 関数 $y = 2nx - x^2 = -(x-n)^2 + n^2$ のグラフの頂点を C とすると　　C$(n,\ n^2)$

R_n に含まれる直線 $x = k$ (k は整数) 上の格子点の個数は,

$$-(k-n)^2 + n^2 + 1$$

グラフは直線 $x = n$ に関して対称であるから



$$S_n = 2\sum_{k=0}^{n-1}\{-(k-n)^2+n^2+1\} + n^2 + 1$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}(-k^2+n^2+1) + n^2 + 1$$
$$= 2\left\{-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n(n^2+1)\right\} + n^2 + 1$$
$$= \boldsymbol{\frac{4}{3}n^3 + \frac{5}{3}n + 1}$$

(2) 直線 AC の傾きは n であるから，(1) と同様に直線 $x = k$ (k は整数) 上の

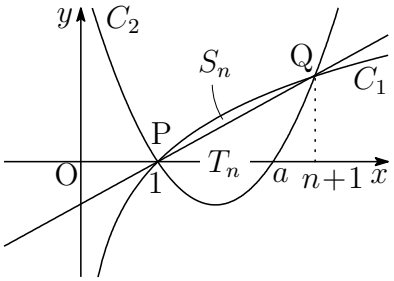
格子点の個数は，$nk+1$ であるから

$$\begin{aligned} T_n &= 2\sum_{k=0}^{n-1}(nk+1)+n^2+1 \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\{n(k-1)+1\}+n^2+1 \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}(nk-n+1)+n^2+1 \\ &= 2\left\{n\times\frac{1}{2}n(n+1)+(-n+1)n\right\}+n^2+1 \\ &= \boldsymbol{n^3+2n+1} \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n+1}{\frac{4}{3}n^3+\frac{5}{3}n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{4}{3}+\frac{5}{3n^2}+\frac{1}{n^3}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

4.16 (1) C_1 と C_2 の交点 Q の x 座標が $n+1$ であるから



$$\log(n+1)=(n+1-1)(n+1-a)$$

$n\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{a=n+1-\frac{\log(n+1)}{n}}$$

上式より　$a-1=\dfrac{n^2-\log(n+1)}{n}$

ここで　$\displaystyle\int_0^n\frac{t}{t+1}\,dt=\Big[\,t-\log(t+1)\,\Big]_0^n=n-\log(n+1)>0$

上の 2 式から　$\displaystyle a-1=\frac{n^2-\log(n+1)}{n}>\frac{n^2-n}{n}=n-1\geqq 0$

よって　$\boldsymbol{a>1}$

(2) $\displaystyle S_n=\int_1^{n+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}\{(n+1)-1\}\log(n+1)$

$\displaystyle=\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^{n+1}-\frac{n}{2}\log(n+1)=\boldsymbol{\frac{n+2}{2}\log(n+1)-n}$

C_2 の x^2 の係数および 2 点 P，Q の x 座標に注意して

$$T_n=\frac{1}{6}\{(n+1)-1\}^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}n^3}$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{S_n}{n\log T_n}=\frac{\frac{n+2}{2}\log(n+1)-n}{n\log\frac{n^3}{6}}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\log(n+1)-1}{3\log n-\log 6}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left\{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}-1}{3\log n-\log 6}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}-\dfrac{1}{\log n}}{3-\dfrac{\log 6}{\log n}}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n}=\frac{\left(\frac{1}{2}+0\right)(1+0)-0}{3-0}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

4.17 (1) $a_1=1$, $b_1=c_1=d_1=e_1=f_1=0$ であるから

$$a_2=f_1\cdot\frac{1}{2}+b_1\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}$$
$$b_2=a_1\cdot\frac{1}{2}+c_1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+0=\mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$c_2=b_1\cdot\frac{1}{2}+d_1\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}$$
$$d_2=c_1\cdot\frac{1}{2}+e_1\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}$$
$$e_2=d_1\cdot\frac{1}{2}+f_1\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}$$
$$f_2=d_1\cdot\frac{1}{2}+a_1\cdot\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) (1) の結果から

$$a_3=f_2\cdot\frac{1}{2}+b_2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$b_3=a_2\cdot\frac{1}{2}+c_2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}$$
$$c_3=b_2\cdot\frac{1}{2}+d_2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+0=\mathbf{\frac{1}{4}}$$
$$d_3=c_2\cdot\frac{1}{2}+e_2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}$$
$$e_3=d_2\cdot\frac{1}{2}+f_2\cdot\frac{1}{2}=0+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$
$$f_3=d_2\cdot\frac{1}{2}+a_2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{0}$$

(3) $$\begin{aligned} b_{n+1}+d_{n+1}+f_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n+c_n)+\frac{1}{2}(c_n+e_n)+\frac{1}{2}(e_n+a_n) \\ &= a_n+c_n+e_n \\ a_{n+1}+c_{n+1}+e_{n+1} &= \frac{1}{2}(f_n+b_n)+\frac{1}{2}(b_n+d_n)+\frac{1}{2}(d_n+f_n) \\ &= b_n+d_n+f_n \end{aligned}$$

上の 2 式から $$\begin{aligned} b_{n+2}+d_{n+2}+f_{n+2} &= a_{n+1}+c_{n+1}+e_{n+1} \\ &= b_n+d_n+f_n \end{aligned}$$

また $b_2+d_2+f_2=\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{1}{2}=1$

よって　n が偶数のとき　$\boldsymbol{b_n+d_n+f_n=1}$

(4) $b_1=0$，$f_1=0$，$c_1=0$，$e_1=0$

ゆえに，$n=1$ のとき，$b_n=f_n$，$c_n=e_n$ が成立する．

$n=k$ のとき，$b_k=f_k$，$c_k=e_k$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} b_{k+1}-f_{k+1} &= \frac{1}{2}(a_k+c_k)-\frac{1}{2}(e_k+a_k) \\ &= \frac{1}{2}(c_k-e_k)=0 \\ c_{k+1}-e_{k+1} &= \frac{1}{2}(b_k+d_k)-\frac{1}{2}(d_k+f_k) \\ &= \frac{1}{2}(b_k-f_k)=0 \end{aligned}$$

上の 2 式から，$n=k+1$ のときも，$b_{k+1}=f_{k+1}$，$c_{k+1}=e_{k+1}$ が成立する．

よって，すべての時刻 n に対して，$b_n=f_n$ および $c_n=e_n$ が成立する．

(5) (3) の結果から　$b_{2m}+d_{2m}+f_{2m}=1$　(4) の結果から　$f_{2m}=b_{2m}$

上の 2 式から　$2b_{2m}+d_{2m}=1$　$\cdots$①

また，(4) の結果により

$$\begin{aligned} b_{n+1}-d_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n+c_n)-\frac{1}{2}(c_n+e_n) \\ &= \frac{1}{2}(a_n-e_n)=\frac{1}{2}(a_n-c_n) \\ a_{n+1}-c_{n+1} &= \frac{1}{2}(f_n+b_n)-\frac{1}{2}(b_n+d_n) \\ &= \frac{1}{2}(f_n-d_n)=\frac{1}{2}(b_n-d_n) \end{aligned}$$

上の 2 式から　$b_{n+2}-d_{n+2}=\dfrac{1}{4}(b_n-d_n)$

ゆえに　$b_{2m+2}-d_{2m+2}=\dfrac{1}{4}(b_{2m}-d_{2m})$

したがって　$b_{2m}-d_{2m}=(b_2-d_2)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{m-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{m-1}$　$\cdots$②

①，② から　$d_{2m}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{m-1}$　よって　$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} d_{2m}=\dfrac{1}{3}}$

4.18　(1) 与えられた漸化式より

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\ (n=0,1,2,\cdots)\quad\cdots(*)$$

であるから

$$z_2-z_1=\alpha(z_1-z_0)=\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\quad\cdots①$$
$$z_3-z_2=\alpha(z_2-z_1)=\alpha^2=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i$$
$$z_4-z_3=\alpha(z_3-z_2)=\alpha^3=\frac{1}{8}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{1}{8}$$

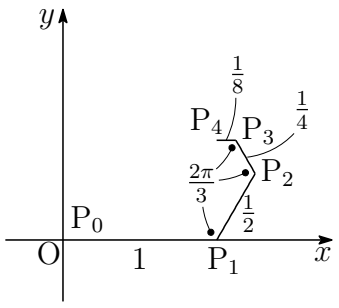
上の第 1 式と第 2 式，および上の 3 式の辺々を加えると

$$z_3-z_1=\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i,\quad z_4-z_1=\frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

$z_1=1$ であるから，① および上の 2 式から

$$\boldsymbol{z_2=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i,\quad z_3=\frac{9}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i,\quad z_4=1+\frac{3\sqrt{3}}{8}i}$$

(2) α は大きさが $\frac{1}{2}$，偏角が $\frac{\pi}{3}$ であるから，$(*)$ より，$P_{n+1}P_{n+2}$ は P_nP_{n+1} を $\frac{1}{2}$ に縮小し，$\frac{\pi}{3}$ だけ回転させたものである．$P_0(0)$，$P_1(1)$ であるから，P_2，P_3，P_4 を複素数平面上にとると，右の図のようになる．



(3) $z_0=0$，$z_1=1$，および $(*)$ より

$$z_{n+1}-z_n=\alpha^n(z_1-z_0)=\boldsymbol{\alpha^n}$$

(4) (3) の結果から，$n \geqq 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k \quad \text{ゆえに} \quad z_n=\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} \quad \cdots(**)$$

$(**)$ は $n=0$ についても成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}\alpha^n &= \frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\\ \alpha-1 &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)-1=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}z_n &= \frac{\dfrac{1}{2^n}\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)-1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)}\\ &= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2n-5}{6}\pi+i\sin\frac{2n-5}{6}i\right)\\ &\qquad -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5}{6}\pi-i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\\ &= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2n-5}{6}\pi+i\sin\frac{2n-5}{6}i\right)+1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\\ &= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\cos\frac{2n-5}{6}\pi+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2n-5}{6}\pi+1\right)i\end{aligned}$$

$z_n=x_n+y_ni$ であるから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x_n} &= \boldsymbol{\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\cos\frac{2n-5}{6}\pi+1}\\ \boldsymbol{y_n} &= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2n-5}{6}\pi+1\right)}\end{aligned}$$

(5) (4) の結果から　　$|x_n-1| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}$, $\left|y_n-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}x_n=1, \quad \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

4.19 (1) $w=z$ のとき　$z=\dfrac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)}$　整理すると　$z^2=-2i$

$-2i=2\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$ であるから

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくと

$$r^2=2,\quad 2\theta=\frac{3}{2}\pi+2n\pi\ (n\text{ は整数})$$

したがって　$r=\sqrt{2},\ \theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

すなわち　$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)=\boldsymbol{-1+i}$

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)=\boldsymbol{1-i}$$

(2) (1) の結果から，$\alpha=-1+i$，$\beta=1-i$ であるから

$$w-\alpha=\frac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)}-(-1+i)$$
$$=\frac{3(1-i)z-2i+(1-i)\{z+3(1-i)\}}{z+3(1-i)}=\frac{4(1-i)(z-\alpha)}{z+3(1-i)}$$
$$w-\beta=\frac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)}-(1-i)$$
$$=\frac{3(1-i)z-2i-(1-i)\{z+3(1-i)\}}{z+3(1-i)}=\frac{2(1-i)(z-\beta)}{z+3(1-i)}$$

上の 2 式から　$\dfrac{w-\beta}{w-\alpha}=\dfrac{2(1-i)}{4(1-i)}\cdot\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$　ゆえに　$k=\dfrac{2(1-i)}{4(1-i)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{z_{n+1}-\beta}{z_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z_n-\beta}{z_n-\alpha}$　ゆえに　$\dfrac{z_n-\beta}{z_n-\alpha}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{z_1-\beta}{z_1-\alpha}$

$z_1=0$，$-\alpha=\beta$ であるから

$$\frac{z_n-\beta}{z_n+\beta}=-\frac{1}{2^{n-1}}\quad\text{ゆえに}\quad z_n=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}\beta=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}(1-i)$$

よって　$\boldsymbol{x_n=\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1},\quad y_n=-\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}}$

また　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}=\boldsymbol{1},\quad\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}=\boldsymbol{-1}$

4.20 (1) $$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad (z\neq 1) \quad \cdots(*)$$

とする．

i) $n=1$ のとき

$(*)$ の左辺 $=1+z$，　$(*)$ の右辺 $=\dfrac{1-z^2}{1-z}=\dfrac{(1+z)(1-z)}{1-z}=1+z$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $n=k$ のとき

$$1+z+z^2+\cdots+z^k=\frac{1-z^{k+1}}{1-z}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}1+z+z^2+\cdots+z^k+z^{k+1}&=\frac{1-z^{k+1}}{1-z}+z^{k+1}\\&=\frac{1-z^{k+1}+z^{k+1}(1-z)}{1-z}\\&=\frac{1-z^{k+2}}{1-z}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) から，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

(2) ド・モアブルの定理を利用して

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}z^k&=\sum_{k=0}^{n}\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^k\\&=\sum_{k=0}^{n}r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)=\sum_{k=0}^{n}r^k\cos k\theta+i\sum_{k=0}^{n}r^k\sin k\theta\end{aligned}$$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z\neq 1$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1-z^{n+1}}{1-z}&=\frac{(1-z^{n+1})(1-\overline{z})}{(1-z)(1-\overline{z})}=\frac{1-\overline{z}-z^{n+1}+|z|^2z^n}{1-(z+\overline{z})+|z|^2}\\&=\frac{1-r(\cos\theta-i\sin\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}\\&\qquad-\frac{r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\}}{1-2r\cos\theta+r^2}\\&\qquad+\frac{r^{n+2}(\cos n\theta+i\sin n\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}\\&=\frac{1-r\cos\theta-r^{n+1}\cos(n+1)\theta+r^{n+2}\cos n\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\\&\qquad+\frac{i\{r\sin\theta-r^{n+1}-r^{n+1}\sin(n+1)\theta+r^{n+2}\sin n\theta\}}{1-2r\cos\theta+r^2}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ であるから，この両辺の実部を比較して

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r\cos\theta - r^{n+1}\cos(n+1)\theta + r^{n+2}\cos n\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

(3) $0 < r < 1$ より

$$|r^{n+1}\cos(n+1)\theta| \leqq r^{n+1}, \quad |r^{n+2}\cos n\theta| \leqq r^{n+2}, \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

上の諸式および (2) の結果により

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

4.21 (1) $a(x^2 + |x+1| + n - 1) = \sqrt{n}(x+1) \quad \cdots(*)$

$a = 0$ の場合，方程式 $(*)$ は実数解 $x = -1$ をもつ．

$a \neq 0$ の場合，方程式 $(*)$ が実数解をもつとき，関数

$$y = x^2 + |x+1| + n - 1 \cdots ①$$

のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{n}}{a}(x+1)$ が共有点をもつ．

関数 ① は

$x \geqq -1$ のとき $\quad y = x^2 + x + n = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + n - \dfrac{1}{4}$

$x < -1$ のとき $\quad y = x^2 - x + n - 2 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + n - \dfrac{9}{4}$

$k = \dfrac{\sqrt{n}}{a}$ とし，$y = k(x+1) \cdots ②$ とおく．

① のグラフと直線 ② が接するときの k の値は

i) $x \geqq -1$ のとき，2 式から y を消去して

$$x^2 + x + n = k(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + (1-k)x + n - k = 0$$

このとき，係数について

$$-\frac{1-k}{2\cdot 1} \geqq -1, \quad (1-k)^2 - 4\cdot(n-k) = 0$$

これを解いて $\quad k = 2\sqrt{n} - 1$

ii) $x<-1$ のとき，2 式から y を消去して

$$x^2-x+n-2=k(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad x^2-(k+1)x+n-k-2=0$$

このとき，係数について

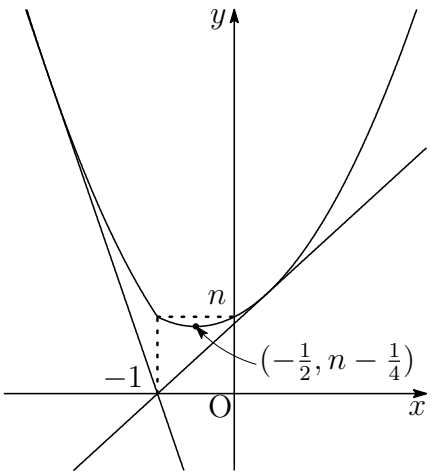
$$-\frac{-(k+1)}{2\cdot 1}<-1, \quad \{-(k+1)\}^2-4\cdot 1(n-k-2)=0$$

これを解いて　$k=-2\sqrt{n}-3$

関数 ① のグラフと直線 ② は，

$$k=-2\sqrt{n}-3,\ 2\sqrt{n}-1$$

のとき，右の図のように接する．
したがって，これらが共有点をもつための k の値の範囲は



$$k \leqq -2\sqrt{n}-3, \quad 2\sqrt{n}-1 \leqq k$$

ゆえに，方程式 $(*)$ が実数解をもつとき

$$\frac{\sqrt{n}}{a} \leqq -2\sqrt{n}-3, \quad 2\sqrt{n}-1 \leqq \frac{\sqrt{n}}{a}$$

したがって　$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a<0, \quad 0<a \leqq \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$

$a=0$ のとき，方程式 $(*)$ は実数解をもつので，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}}$$

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n=-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}, \quad c_n=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$$

とおくと

$$b_n=-\frac{1}{2+\frac{3}{\sqrt{n}}}, \quad c_n=\frac{1}{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

したがって，$\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ はともに単調減少である．このとき，すべての自然数に対して (1) の結果を満たす a の値の範囲は

$$b_1 \leqq a \leqq \lim_{n\to\infty} c_n \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{5} \leqq a \leqq \frac{1}{2}}$$

4.22 (1) 2 次方程式 $x^2+px+q=0\cdots(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=q$$

ここで $\quad a_n=(\alpha^n-1)(\beta^n-1)=(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1$
$$=q^n+1-(\alpha^n+\beta^n)$$

q は整数であるから，$\alpha^n+\beta^n$ が整数のとき，a_n は整数である．

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=-p,\\ \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-p)^2-2q=p^2-2q,\\ \alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-p)^3-3q\cdot(-p)=-p^3+3pq\end{aligned}$$

p，q は整数であるから，上の 3 式は整数である．
よって，a_1，a_2，a_3 は整数である．

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ より，次の 2 つに場合分けをする．

i) $|\alpha|-1>0$，$|\beta|-1>0$　すなわち　$|\alpha|>1$，$|\beta|>1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha^n}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^n}\right)}\right|=|\alpha\beta|=|q|$$

ii) $|\alpha|-1<0$，$|\beta|-1<0$　すなわち　$|\alpha|<1$，$|\beta|<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|=1$$

i)，ii) より，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数である．

(3) 条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ および (2) の結果から，$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)<0$ が $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるための必要条件である．このとき，α と β の互換性により，一般性を失うことなく

$$|\alpha|-1>0,\quad |\beta|-1<0\quad \text{すなわち}\quad |\alpha|>1,\quad |\beta|<1\quad \cdots(**)$$

とおける．したがって

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha^n}\right)(\beta^{n+1}-1)}{\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)(\beta^n-1)}\right|=|\alpha|$$

$|\alpha|>1$ に注意して　$|\alpha|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

i) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，α は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + q = 0$$

整理すると　　$(p+2q+3)+(p+1)\sqrt{5}=0$

$p+2q+3$，$p+1$ は有理数であるから

$$p+2q+3=0,\quad p+1=0 \quad \text{すなわち} \quad p=-1,\quad q=-1$$

このとき方程式 $(*)$ の解は，$(**)$ に注意して　$x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

ii) $\alpha = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，α は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + p\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + q = 0$$

整理すると　　$(-p+2q+3)+(-p+1)\sqrt{5}=0$

$-p+2q+3$，$-p+1$ は有理数であるから

$$-p+2q+3=0,\quad -p+1=0 \quad \text{すなわち} \quad p=1,\quad q=-1$$

このとき方程式 $(*)$ の解は，$(**)$ に注意して　$x = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

i)，ii) より　　$\boldsymbol{(p,\ q)=(\pm 1,-1)}$

4.23　(1)　$a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} + 1$ より

$$a_n - b_n = a_{n-1} - b_{n-1} + 1, \qquad a_1 - b_1 = 3 - 1 = 2$$

よって，$\{a_n - b_n\}$ は初項 2，公差 1 の等差数列であるから

$$a_n - b_n = 2 + (n-1)\cdot 1 = \boldsymbol{n+1} \quad \cdots ①$$

(2)　(1) の結果から　$a_n = b_n + n + 1$　$\cdots ①'$

これを $(a_{n-1}+b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n$ に代入すると

$$(b_{n-1} + n + b_n)(b_n - b_{n-1}) = 2pn + 3 - b_n$$
$$\{b_n + (n+1)\}b_n - (b_{n-1}+n)b_{n-1} = 2pn + 3$$

①′ から　　$a_nb_n - a_{n-1}b_{n-1} = 2pn + 3$

ゆえに　　$a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n = 2p(n+1) + 3$

$= 2pn + (2p+3)$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_nb_n &= a_1b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\{2pk + (2p+3)\} \\ &= 3\cdot 1 + 2p \times \frac{1}{2}n(n-1) + (2p+3)(n-1) \\ &= pn^2 + (p+3)n - 2p \end{aligned}$$

$3\cdot 1 = p\cdot 1^2 + (p+3)\cdot 1 - 2p$ なので，上式は $n = 1$ のときにも成り立つ．

したがって　　$\boldsymbol{a_nb_n = pn^2 + (p+3)n - 2p}$　$\cdots$②

(3) ①′ を ② に代入して，整理すると

$${b_n}^2 + (n+1)b_n - pn^2 - (p+3)n + 2p = 0$$

$p > 0$，$b_n > 0$ に注意して，b_n について解くと

$$b_n = \frac{-(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 4p(n-1)(n+2) + 12n}}{2}$$

これを ①′ に代入して

$$a_n = \frac{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 4p(n-1)(n+2) + 12n}}{2}$$

上の 2 式から

$$a_n + b_n = \sqrt{(n+1)^2 + 4p(n-1)(n+2) + 12n} \quad \cdots ③$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^3 + {b_n}^3}{{a_n}^3 - {b_n}^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n+b_n)\{(a_n-b_n)^2 + a_nb_n\}}{(a_n-b_n)\{(a_n-b_n)^2 + 3a_nb_n\}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{a_n+b_n}{n}\left\{\left(\dfrac{a_n-b_n}{n}\right)^2 + \dfrac{a_nb_n}{n^2}\right\}}{\dfrac{a_n-b_n}{n}\left\{\left(\dfrac{a_n-b_n}{n}\right)^2 + 3\dfrac{a_nb_n}{n^2}\right\}} \end{aligned}$$

ここで，①，②，③ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^2}=p,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{n}=\sqrt{1+4p}$$

であるから

$$f(p)=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^3+{b_n}^3}{{a_n}^3-{b_n}^3}=\frac{(1+p)\sqrt{1+4p}}{1+3p}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{p\to0}\frac{1}{p}\log f(p)&=\lim_{p\to0}\frac{1}{p}\log\frac{(1+p)\sqrt{1+4p}}{1+3p}\\&=\lim_{p\to0}\log\frac{(1+p)^{\frac{1}{p}}(1+4p)^{\frac{1}{2p}}}{(1+3p)^{\frac{1}{p}}}\\&=\lim_{p\to0}\log\frac{(1+p)^{\frac{1}{p}}\left\{(1+4p)^{\frac{1}{4p}}\right\}^2}{\left\{(1+3p)^{\frac{1}{3p}}\right\}^3}\\&=\log\frac{e\cdot e^2}{e^3}=\log1=\mathbf{0}\end{aligned}$$

4.24 (1) $f(x)=\tan x-x$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}-1=\tan^2x\geqq0$$

が成り立つ (等号が成立のは，$x=n\pi$ のとき)．また

$$\lim_{x\to n\pi-\frac{\pi}{2}+0}f(x)=-\infty,\qquad\qquad \lim_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}-0}f(x)=\infty$$

であるから，$f(x)$ は，$n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ において，単調増加である．したがって，$n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)=0$，すなわち $\tan x=x$ をみたす解はただ 1 つ存在する．

(2) $f(n\pi)=-n\pi<0$ から，$f(x_n)=0$，すなわち $\tan x_n=x_n$ をみたす x_n は

$$n\pi<x_n<n\pi+\frac{\pi}{2}\cdots①\quad\text{ゆえに}\quad 0<n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n<\frac{\pi}{2}$$

$\theta_n=n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n$ とおくと，$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\sin\theta_n<\theta_n<\tan\theta_n\cdots②$

また　$\tan\theta_n=\tan\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x_n\right)=\dfrac{1}{\tan x_n}=\dfrac{1}{x_n}$

さらに，$\tan\theta_n=\dfrac{1}{x_n}\cdots③$ の両辺を平方すると

$$\frac{\sin^2\theta_n}{1-\sin^2\theta_n}=\frac{1}{{x_n}^2}\quad\text{ゆえに}\quad\sin\theta_n=\frac{1}{\sqrt{{x_n}^2+1}}\cdots④$$

③，④ を ② に代入すると

$$\frac{1}{\sqrt{{x_n}^2+1}}<\theta_n<\frac{1}{x_n}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}}<n\theta_n<\frac{1}{\frac{x_n}{n}}\cdots⑤$$

① より，$\pi<\dfrac{x_n}{n}<\pi\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$　ゆえに　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=\pi\cdots⑥$

⑤，⑥ より　$\lim\limits_{n\to\infty}n\theta_n=\dfrac{1}{\pi}$　よって　$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n\right)=\dfrac{1}{\pi}}$

4.25　(1)　i) 漸化式から，明らかに　$a_n>0$

$a_1=1$，$a_2=\sqrt{2}$ より，$a_2-a_1=\sqrt{2}-1>0$ であるから，

$a_{n+1}-a_n>0$ であると仮定すると

$${a_{n+2}}^2-{a_{n+1}}^2=(\sqrt{1+a_{n+1}})^2-(\sqrt{1+a_n})^2=a_{n+1}-a_n>0$$

したがって　$a_{n+2}-a_{n+1}>0$

よって，$\{a_n\}$ は単調増加列である．

ii) 漸化式の補助方程式 $c=\sqrt{c+1}$ から

$$c^2-c-1=0\quad c>0\text{ に注意してこれを解くと}\quad c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$a_1-c<0$ であるから，$a_n-c<0$ であると仮定すると

$$a_{n+1}-c=\sqrt{1+a_n}-c=\frac{1+a_n-c^2}{\sqrt{1+a_n}+c}=\frac{a_n-c}{\sqrt{1+a_n}+c}<0$$

したがって　$a_{n+1}-c<0$

よって，すべての自然数 n に対して　$a_n<c$

i)，ii) より　$a_n<a_{n+1}<c\quad(n=1,2,\cdots)$

よって，$\{a_n\}$ は有限な極限値をもつ．

(2)　(1) の結果から　$|a_{n+1}-c|=\dfrac{|a_n-c|}{\sqrt{1+a_n}+c}<\dfrac{1}{c}|a_n-c|$

したがって　$|a_n-c|<\dfrac{1}{c^{n-1}}|a_1-c|$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{c^{n-1}}=0$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c=\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

別解 (1) の結果から，$\{a_n\}$ は収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$$

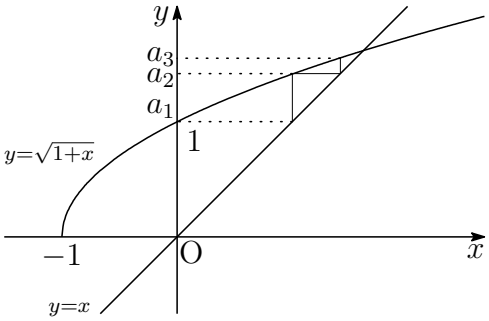
とおくと，$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \sqrt{1+\alpha}$$

α は (1) で求めた補助方程式の解であるから

$$\lim_{n\to\infty} = \alpha = c = \frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$$

補足 幾何学的には，極限値 α は，$y = \sqrt{1+x}$ と $y = x$ の交点の y 座標である．

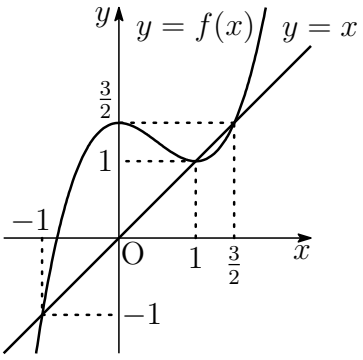


4.26 (1) $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3x \\ &= 3x(x-1) \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗



$y = f(x)$ と $y = x$ から y を消去すると

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} = x \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

したがって，$y = f(x)$ と $y = x$ の共有点は $(-1,-1),\ (1,\ 1),\ \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

よって，$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフは，右上の図のようになる．

(2) (1) の結果から，$1 < x < \dfrac{3}{2}$ のとき $x > f(x)$

(i) 条件により　$1 < x_0 < \dfrac{3}{2}$

(ii) $n = k$ のとき，$1 < x_k < \dfrac{3}{2}$ であると仮定すると

$$x_k > f(x_k) \qquad \text{すなわち} \qquad x_k > x_{k+1}$$

また
$$\begin{aligned} x_{k+1} - 1 &= f(x_k) - 1 \\ &= \left({x_k}^3 - \frac{3}{2}{x_k}^2 + \frac{3}{2} \right) - 1 \\ &= (x_k - 1)^2 \left(x_k + \frac{1}{2} \right) > 0 \end{aligned}$$

したがって　$1 < x_{k+1} < x_k < \dfrac{3}{2}$　すなわち　$1 < x_{k+1} < \dfrac{3}{2}$

よって，$1 < x_n < \dfrac{3}{2}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ となるから，次式が成り立つ．

$$x_n > f(x_n) \qquad \text{すなわち} \qquad x_n > x_{n+1}$$

(3) (2) の結果から，$\{x_n\}$ は単調減少で，$x_n > 1$ であるから，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ が存在し，極限値を α $(1 \leqq \alpha \leqq x_0 < \frac{3}{2})$ とすると，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ より

$$f(\alpha) = \alpha \quad \text{すなわち} \quad \alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{3}{2} = \alpha$$

これを解いて　$\alpha = 1$　よって　$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1}$

4.27　(1) $f(x) = x^3 - 3x - 5$ より　$f'(x) = 3(x+1)(x-1)$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-3	↘	-7	↗

よって，$f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ．

$$f(2) = -3 < 0, \quad f(3) = 13 > 0$$

$f(x)$ は連続であるから，$f(\alpha) = 0$ となる $2 < \alpha < 3$ が存在する．

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

この直線と x 軸との交点が $(s,\ 0)$ であるから

$$-f(t)=f'(t)(s-t) \quad \text{ゆえに} \quad s=t-\frac{f(t)}{f'(t)}$$

$s=t-\dfrac{t^3-3t-5}{3t^2-3}=\dfrac{2t^3+5}{3t^2-3}$ であるから

$$s-\alpha=\frac{2t^3+5}{3t^2-3}-\alpha=\frac{2t^3-3\alpha t^2+3\alpha+5}{3t^2-3}$$

$\alpha^3-3\alpha-5=0$ であるから，$3\alpha+5=\alpha^3$ より

$$s-\alpha=\frac{2t^3-3\alpha t^2+\alpha^3}{3t^2-3}=\frac{(t-\alpha)^2(2t+\alpha)}{3(t+1)(t-1)} \qquad \cdots(*)$$

$$\frac{s-\alpha}{t-\alpha}-\frac{1}{3}=\frac{(t-\alpha)(2t+\alpha)}{3(t+1)(t-1)}-\frac{1}{3}=\frac{t^2-\alpha t-\alpha^2+1}{3(t+1)(t-1)} \qquad \cdots(**)$$

ここで，$g(t)=t^2-\alpha t-\alpha^2+1$ とすると $(\alpha<t\leqq 3)$

$$g(t)=\left(t-\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\alpha^2+1$$

$2<\alpha<3$ より　$g(t)\leqq g(3)=-\alpha^2-3\alpha+10=-(\alpha+5)(\alpha-2)<0$

$2<\alpha<t\leqq 3$ より，$(*)$，$(**)$ および上式から

$$s-\alpha>0, \quad \frac{s-\alpha}{t-\alpha}-\frac{1}{3}<0 \quad \text{よって} \quad 0<s-\alpha<\frac{1}{3}(t-\alpha)$$

(3) (2) の結果に $t=t_n$ とすると，$s=t_{n+1}$ であるから

$$0<t_{n+1}-\alpha<\frac{1}{3}(t_n-\alpha)$$

$t_1=3$ より　　$0<t_n-\alpha<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(3-\alpha)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(3-\alpha)=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(t_n-\alpha)=0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty}t_n=\alpha$$

4.28　(1) 漸化式から，明らかに　$a_n>0$

$a_1=1$，$a_2=f(a_1)=f(1)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ より，

$a_2>a_1$ であるから，$a_{n+1}>a_n$ と仮定すると

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{2^{\frac{a_{n+1}}{2}}}{2^{\frac{a_n}{2}}}=2^{\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)}>1$$

したがって　$a_{n+2}>a_{n+1}$

よって，$\{a_n\}$ は単調増加列である．

(2) $a_1 < 2$ であるから，$a_n < 2$ と仮定すると

$$\frac{a_{n+1}}{2} = \frac{2^{\frac{a_n}{2}}}{2} = 2^{\frac{1}{2}(a_n-2)} < 1$$

したがって　$a_{n+1} < 2$

よって，すべての自然数 n に対して　$a_n < 2$

(3) $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ は凸関数であるから，$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフの交点は高々2個である．$f(x) = x$ より

$$2^{\frac{x}{2}} = x \quad \cdots ①$$

この方程式の両辺を2乗および4乗すると

$$2^x = x^2, \quad 4^x = x^4$$

よって，方程式 ① の解は　　$\boldsymbol{x = 2,\ 4}$

(4) (2)，(3) の結果から　$a_n < \alpha$

平均値の定理により

$$\frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} = f'(c) \quad (a_n < c < \alpha) \quad \cdots ②$$

をみたす c が存在する．

$f'(x) = \dfrac{2^{\frac{x}{2}} \log 2}{2}$ であるから，$f'(x)$ は単調増加関数である．ゆえに

$$f'(c) < f(\alpha) = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}} \log 2}{2} = \frac{\alpha \log 2}{2} \quad \cdots ③$$

②，③ より

$$\frac{f(\alpha) - f(a_n)}{\alpha - a_n} < \frac{\alpha \log 2}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha - a_{n+1} < \frac{\alpha \log 2}{2}(\alpha - a_n)$$

(5) $\alpha = 2$ を (4) の結果に代入すると

$$2 - a_{n+1} < \log 2 \cdot (2 - a_n)$$

$2 - a_n > 0$ であるから　$|2 - a_{n+1}| < \log 2 \cdot |2 - a_n|$

したがって　$|2 - a_n| < (\log 2)^{n-1} |2 - a_1|$

$0 < \log 2 < 1$ であるから，$\lim_{n\to\infty} (\log 2)^{n-1} = 0$

よって　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$

解説 上に有界な単調増加列は収束するから，その極限値を α とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$$

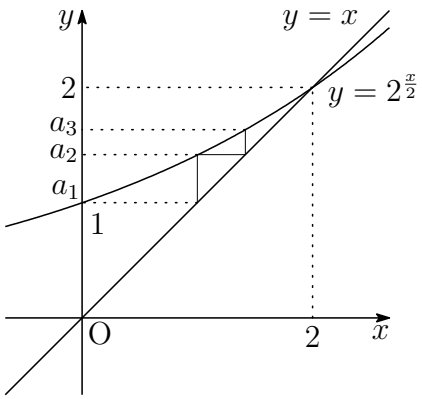
とおくと，$a_{n+1} = 2^{\frac{a_n}{2}}$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{a_n}{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 2^{\frac{\alpha}{2}}$$

これを解いて　$\alpha = 2,\ 4$

また，$a_n < 2$ であるから　$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

幾何学的には，極限値 α は，$y = 2^{\frac{x}{2}}$ と $y = x$ の交点の y 座標である．



4.29　(1)　$0 < a_n < 2 \quad (n = 1, 2, \cdots) \qquad \cdots (*)$

［1］$n = 1$ のとき　$a_1 = \sqrt{2}$ であるから，$(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，漸化式より

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} > 0$$

また　$2 - a_{k+1} = 2 - \sqrt{a_k + 2} = \dfrac{2 - a_k}{2 + \sqrt{a_k + 2}} > 0$

よって，$n = k + 1$ のときも，$(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

(2)　(1) の結果から，a_n に対して，$2\cos b_n = a_n$ を満たす b_n $\left(0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が唯一存在する．$a_n = 2\cos b_n$ を $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ に代入すると

$$2\cos b_{n+1} = \sqrt{2\cos b_n + 2} = \sqrt{4\cos^2 \frac{b_n}{2}} = 2\cos \frac{b_n}{2}$$

したがって　$\cos b_{n+1} = \cos \dfrac{b_n}{2}$　ゆえに　$b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2}$

$a_1=\sqrt{2}$ より　$\cos b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$b_1=\dfrac{\pi}{4}$

数列 $\{b_n\}$ は，初項が $\dfrac{\pi}{4}$ で，公比が $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{b_n=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad (n=1,2,3,\cdots)}$$

(3) (2) の結果から　$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} 2\cos b_n=2\cos 0=\boldsymbol{2}$

解説 1　漸化式から　$|a_{n+1}-2|=\dfrac{|a_n-2|}{2+\sqrt{a_n+2}}<\dfrac{1}{2}|a_n-2|$

ゆえに　$|a_n-2|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-2|$　よって　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$

解説 2　$a_n<2$，$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n+2}-a_n=\dfrac{(2-a_n)(1+a_n)}{\sqrt{a_n+2}+a_n}>0$ より

$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列であるから収束し，極限値を α とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n+2}\quad \text{ゆえに}\quad \alpha=\sqrt{\alpha+2}\quad \text{よって}\quad \alpha=2$$

4.30　(1)　$f(x)=\tan x-x$ とおくと，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x>0$$

ゆえに，$f(x)$ は単調増加で，$f(0)=0$ であるから

$$0<x<\frac{\pi}{2}\ \text{のとき},\quad f(x)>0\quad \text{よって}\quad \tan x>x$$

(2)　$\tan a_n=\dfrac{1}{2n^2}$ より，$\tan a_1=\dfrac{1}{2}$，$\tan a_2=\dfrac{1}{8}$，$\tan a_3=\dfrac{1}{18}$ であるから

$$\tan(a_1+a_2)=\frac{\tan a_1+\tan a_2}{1-\tan a_1\tan a_2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{2}{3}$$

$$\tan(a_1+a_2+a_3)=\frac{\tan(a_1+a_2)+\tan a_3}{1-\tan(a_1+a_2)\tan a_3}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\frac{3}{4}$$

上の結果から

$$\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{n}{n+1}\quad \cdots(*)$$

と推定する．

(i) $n=1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき

$$\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k)=\frac{k}{k+1}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})\\
=&\frac{\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k)+\tan a_{k+1}}{1-\tan(a_1+a_2+\cdots+a_k)\tan a_{k+1}}\\
=&\frac{\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{1}{2(k+1)^2}}{1-\dfrac{k}{k+1}\cdot\dfrac{1}{2(k+1)^2}}=\frac{2k(k+1)^2+(k+1)}{2(k+1)^3-k}\\
=&\frac{(2k^2+2k+1)(k+1)}{(2k^2+2k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成り立つ．

よって　　$\boldsymbol{\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\dfrac{n}{n+1}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}
\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n+b_n)&=\frac{\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\tan b_n}{1-\tan(a_1+a_2+\cdots+a_n)\tan b_n}\\
&=\frac{\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{2n+1}}\\
&=\frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2n+1}=1\quad\cdots①
\end{aligned}$$

$0 < a_n < \tan a_n$，$0 < b_n < \tan b_n$ であるから，$n > 1$ のとき

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{k=1}^{n} a_k + b_n &< \sum_{k=1}^{n} \tan a_k + \tan b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2n+1} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} < 1 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$n = 1$ のときも，② が成立する．

したがって　$0 < a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_n < 1 < \dfrac{\pi}{2}$

①，② から　　$\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_n = \dfrac{\pi}{4}}$

(4) (3) の結果から　$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{\pi}{4} - b_n$

$0 < b_n < \tan b_n = \dfrac{1}{2n+1}$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

よって　　$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \dfrac{\pi}{4}}$

4.31　(1) $f(x) = \log \dfrac{e^x}{x} = x - \log x$ より　$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$，$f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$，$f'(x)$ は単調増加である．平均値の定理により

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c) \quad (1 < c < x)$$

を満たす c が存在する．$f(1) = 1$ および $f'(c) \leqq f'(2) = \dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} \leqq \frac{1}{2} \tag{A}$$

$f(1) = 1$ で，$1 \leqq x \leqq 2$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(1) \leqq f(x) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq f(x) - 1 \tag{B}$$

(A)，(B) より，$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，次式が成立する．

$$0 \leqq f(x) - 1 \leqq \frac{1}{2}(x - 1) \tag{$*$}$$

(2) すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$1 < a_{n+1} < a_n \qquad (**)$$

［1］$n = 1$ のとき，$a_1 = 2$，$a_2 = 2 - \log 2$

$$1 < 1 + (1 - \log 2) = a_2 < 2 \quad \text{ゆえに} \quad 1 < a_2 < a_1$$

よって，$n = 1$ のとき，$(**)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(**)$ が成立する，すなわち，$1 < a_{k+1} < a_k$ であると仮定すると，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(1) < f(a_{k+1}) < f(a_k) \quad \text{ゆえに} \quad 1 < a_{k+2} < a_{k+1}$$

［1］, ［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．(証終)

$(**)$ より，すべての自然数 n について $1 < a_n \leqq 2$ が成立するから，これを $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq a_{n+1} - 1 \leqq \frac{1}{2}(a_n - 1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

別解 すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$1 \leqq a_n \leqq 2 \qquad (\#)$$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=2$ より，明らかに $(\#)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(\#)$ が成立する，すなわち，$1 \leqq a_k \leqq 2$ であると仮定すると，$(*)$ から

$$0 \leqq a_{k+1}-1 \leqq \frac{1}{2}(a_k-1) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq a_{k+1} \leqq \frac{3}{2} \leqq 2$$

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(\#)$ が成立する． (証終)

再度，$(\#)$ を $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq a_{n+1}-1 \leqq \frac{1}{2}(a_n-1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n-1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

(3) 漸化式より $\displaystyle\frac{b_{n+1}}{b_n}=a_{n+1}$ ゆえに $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{b_k}=\prod_{k=1}^{n-1}a_{k+1} \quad (n \geqq 2)$

$$\frac{b_n}{b_1}=\prod_{k=1}^{n-1}a_{k+1} \quad b_1=a_1 \text{より} \quad b_n=\prod_{k=1}^{n}a_k \qquad (***)$$

漸化式より $a_{n+1}=f(a_n)=a_n-\log a_n$

$$\log a_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = e^{a_n-a_{n+1}}$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{n}a_k=\prod_{k=1}^{n}e^{a_k-a_{k+1}}=e^{2-a_{n+1}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ であるから，上式および $(***)$ から

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}a_k=e^{2-1}=\boldsymbol{e}$$

4.32 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+1})$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-x+1)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

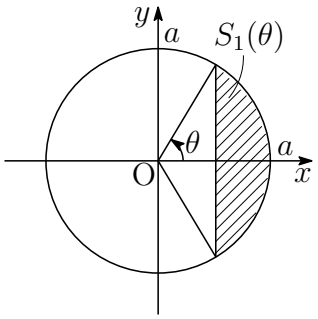
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

4.33 (1) $x = a\cos t$，$y = b\sin t$ より　　$\cos t = \dfrac{x}{a}$，$\sin t = \dfrac{y}{b}$

これを $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入して　　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

(2) $a>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．$a\cos\theta \leqq x \leqq a$ において，円 $x^2+y^2=a^2$，直線 $x=a\cos\theta$ によって囲まれる部分の面積を $S_1(\theta)$ とすると



$$S_1(\theta) = \frac{1}{2}a^2\cdot 2\theta - \frac{1}{2}a^2\sin 2\theta$$

$$= a^2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$0 \leqq x \leqq a\cos\theta$ において，円 $x^2+y^2=a^2$，y 軸および $x=a\cos\theta$ によって，囲まれる部分の面積を $S_2(\theta)$ とすると

$$S_2(\theta) = \frac{1}{2}\pi a^2 - S_1(\theta) = a^2\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right\}$$

C は円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸をもとに y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍だけ拡大したものであるから

$$S(\theta) = S_2(\theta)\times\frac{b}{a} = \boldsymbol{ab\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right\}}$$

(3) (2) の結果から　　$\dfrac{S(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta} = ab\left\{1+\dfrac{\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\}$

よって　　$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{S(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta} = \boldsymbol{2ab}$

4.34 (1) 無限級数は，初項 1，公比 $\dfrac{1}{1+e^x}$，$0<\dfrac{1}{1+e^x}<1$ より，収束して

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+e^x}}=\frac{\boldsymbol{1+e^x}}{\boldsymbol{e^x}}$$

(2) (1) の結果から　$f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x}$　ゆえに　$\log f(x)=\log(e^x+1)-x$

$\log f(x)=-|x|+\log 6$ より　　$\log(e^x+1)-x=-|x|+\log 6$

(i) $x\geqq 0$ のとき，$|x|=x$ より

$$\log(e^x+1)=\log 6 \quad \text{ゆえに} \quad e^x+1=6 \quad \text{すなわち} \quad e^x=5$$

$x\geqq 0$ に注意して　　$x=\log 5$

(ii) $x<0$ のとき，$|x|=-x$ より

$$\log(e^x+1)=2x+\log 6 \quad \text{ゆえに} \quad \log(e^x+1)=\log 6e^{2x}$$

$e^x+1=6e^{2x}$ であるから　$(2e^x-1)(3e^x+1)=0$

$x<0$ に注意して　　$x=\log\dfrac{1}{2}=-\log 2$

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{x=\log 5,\ -\log 2}$

4.35 (1) $y=-x^2+2x$ と $y=a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2+2x=a(x+4) \quad \text{すなわち} \quad x^2+(a-2)x+4a=0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と ℓ が接するとき，$(*)$ より

$$(a-2)^2-4\cdot 1\cdot 4a=0, \quad 0<-\frac{a-2}{2\cdot 1}<2$$

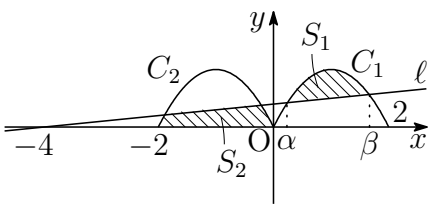
上の第 1 式および第 2 式から

$$a=10\pm 4\sqrt{6}, \quad -2<a<2 \quad \text{すなわち} \quad a=10-4\sqrt{6}$$

よって，求める a の値の範囲は　　$\boldsymbol{0\leqq a<10-4\sqrt{6}}$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=-(a-2), \quad \alpha\beta=4a,$$
$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{a^2-20a+4}$$



したがって　　$S_1 = \displaystyle\int_\alpha^\beta \{(-x^2+2x) - a(x+4)\}\,dx$

$= \displaystyle -\int_\alpha^\beta \{x^2 + (a-2)x + 4a\}\,dx$

$= \displaystyle -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$= \dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}}}$

(3) $y = -x^2 - 2x$ と $y = a(x+4)$ から y を消去すると

$-x^2 - 2x = a(x+4)$　すなわち　$x^2 + (a+2)x + 4a = 0$　$\cdots(**)$

方程式 $(**)$ の解を γ，δ とすると $(\gamma < \delta)$

$\gamma + \delta = -(a+2), \quad \gamma\delta = 4a,$

$\delta - \gamma = \sqrt{(\gamma+\delta)^2 - 4\gamma\delta} = \sqrt{a^2-12a+4}$

したがって

$S_2 = \displaystyle\int_{-2}^0 \{-x^2-2x\}\,dx + \int_\gamma^\delta \{-x^2-2x-a(x+4)\}\,dx$

$= \displaystyle -\int_{-2}^0 x(x+2)\,dx - \int_\gamma^\delta (x-\gamma)(x-\delta)\,dx$

$= \dfrac{1}{6}\cdot 2^3 - \dfrac{1}{6}(\delta-\gamma)^3 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}}$

$S_1 = S_2$ より　　$\dfrac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}}$

整理すると　　$(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$

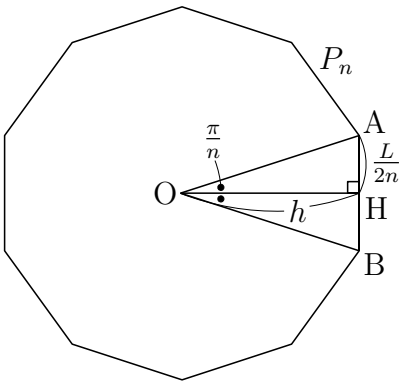
ここで，$f(a) = (a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8$ とおくと

$f(0) = 8 > 0, \quad f\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{41\sqrt{41}-999}{125} < \dfrac{41\cdot 7 - 999}{125} < 0,$

$10 - 4\sqrt{6} = 2(5-2\sqrt{6}) = \dfrac{2}{5+2\sqrt{6}} > \dfrac{2}{5+5} = \dfrac{1}{5}$

$f(a)$ は連続であるから，中間値の定理により，$f(a) = 0$，すなわち $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する．

4.36 (1) 正 n 角形 P_n の 1 つの辺 AB に P_n の外心 O から垂線 OH を引くと



$$\angle \mathrm{AOH} = \frac{\pi}{n},\quad \mathrm{OH} = h,\quad \mathrm{AH} = \frac{L}{2n}$$

したがって　　$h\tan\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{L}{2n}$

よって　　$\boldsymbol{h = \dfrac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}}$

(2) △OAB の面積について，(1) の結果を利用すると

$$\frac{S(n)}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{n}\cdot\frac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{S(n) = \dfrac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}}$$

(3) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ を微分すると $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x - \tan x}{x^2} = \frac{2x - 2\sin x\cos x}{2x^2\cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x}$$

ここで，$g(x) = 2x - \sin 2x$ とおくと $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$g(0) = 0,\quad g'(x) = 2(1 - \cos 2x) > 0$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$g(x) > 0$，すなわち，$f'(x) > 0$

よって，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)$ は単調増加である．

(4) (2) の結果から　$S(n) = \dfrac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}} = \dfrac{L^2}{4\pi}\cdot\dfrac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}} = \dfrac{L^2}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{f\left(\frac{\pi}{n}\right)}$　$\cdots(*)$

$\dfrac{\pi}{n+1} < \dfrac{\pi}{n}$ であるから，(3) の結果より

$$f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n}\right)} < \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

よって，$(*)$ より　　$\boldsymbol{S(n) < S(n+1)}$

(5) $x = \dfrac{\pi}{n}$ とおくと，$(*)$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{x\to+0}\frac{L^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{f(x)}$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\tan x}{x} = 1$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \boldsymbol{\frac{L^2}{4\pi}}$

補足 $\lim_{n\to\infty} P_n$ は円 (半径 R) に収束するから　$\lim_{n\to\infty} S(n) = \pi R^2 = \dfrac{(2\pi R)^2}{4\pi} = \dfrac{L^2}{4\pi}$

4.37　(1)　x^n を $x-\alpha$ で割った商を $Q_1(x)$，余りを C とすると

$$x^n = (x-\alpha)Q_1(x) + C$$

$Q_1(x)$ を $x-\beta$ で割った商を $Q_2(x)$，余りを B とすると

$$Q_1(x) = (x-\beta)Q_2(x) + B$$

$Q_2(x)$ を $x-\beta$ で割った商を $Q(x)$，余りを A とすると

$$Q_2(x) = (x-\beta)Q(x) + A$$

したがって

$$\begin{aligned} x^n &= (x-\alpha)Q_1(x) + C \\ &= (x-\alpha)\{(x-\beta)Q_2(x) + B\} + C \\ &= (x-\alpha)(x-\beta)Q_2(x) + B(x-\alpha) + C \\ &= (x-\alpha)(x-\beta)\{(x-\beta)Q(x) + A\} + B(x-\alpha) + C \\ &= (x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) + C \qquad (*) \end{aligned}$$

(2)　$x=\alpha$ を $(*)$ に代入すると　$\boldsymbol{C = \alpha^n}$

$$\begin{aligned} x^n - \alpha^n &= (x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) \\ \frac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha} &= (x-\beta)^2Q(x) + A(x-\beta) + B \end{aligned}$$

$f(x) = \dfrac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha}$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{nx^{n-1}(x-\alpha) - (x^n-\alpha^n)}{(x-\alpha)^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\beta)^2Q(x) + A(x-\beta) + B, \\ f'(x) &= 2(x-\beta)Q(x) + (x-\beta)^2Q'(x) + A \end{aligned}$$

これから，$B = f(\beta)$，$A = f'(\beta)$ より

$$\boldsymbol{B = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}}, \quad \boldsymbol{A = \frac{n\beta^{n-1}(\beta-\alpha) - (\beta^n-\alpha^n)}{(\beta-\alpha)^2}}$$

(3)　$g(\beta) = n\beta^{n-1}(\beta-\alpha) - (\beta^n-\alpha^n)$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(\beta) &= n(n-1)\beta^{n-2}(\beta-\alpha) \\ g''(\beta) &= n(n-1)\{(n-2)\beta^{n-3}(\beta-\alpha) + \beta^{n-2}\} \end{aligned}$$

$g(\alpha)=0$，$g'(\alpha)=0$，$g''(\alpha)=n(n-1)\alpha^{n-2}$ より，$g(\beta)$ は $(\beta-\alpha)^2$ を因数にもつから，$g(\beta)=(\beta-\alpha)^2H(\beta)$ とおくと $(A=H(\beta))$

$$g'(\beta)=2(\beta-\alpha)H(\beta)+(\beta-\alpha)^2H'(\beta)$$
$$g''(\beta)=2H(\beta)+4(\beta-\alpha)H'(\beta)+(\beta-\alpha)^2H''(\beta)$$

$g''(\alpha)=2H(\alpha)=n(n-1)\alpha^{n-2}$，　$A=H(\beta)$ より

$$\lim_{\beta\to\alpha}A=\lim_{\beta\to\alpha}H(\beta)=H(\alpha)=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}}$$

補足　n 次式 $g(\beta)$ を α を極としてテイラー展開すると [3]

$$g(\beta)=g(\alpha)+g'(\alpha)(\beta-\alpha)+\frac{g''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2+\sum_{k=3}^{n}\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^k$$

このとき　$A=\dfrac{g(\beta)}{(\beta-\alpha)^2}=\dfrac{g''(\alpha)}{2!}+\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^{k-2}$

よって　$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}A=\frac{g''(\alpha)}{2!}=\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$

5.1 $\boldsymbol{y'=2x\sin(3x+5)+3x^2\cos(3x+5)}$

5.2 (1) $y'=e^{\cos x}(\cos x)'=\boldsymbol{-e^{\cos x}\sin x}$

(2) $y'=2(\log|x|)(\log|x|)'=\boldsymbol{\frac{2}{x}\log|x|}$

5.3 (1) $y=x\log|x|$ より

$$y'=(x)'\log|x|+x(\log|x|)'=\boldsymbol{\log|x|+1}$$

(2) $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より

$$y'=-2\cdot\frac{-(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2}=\boldsymbol{\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}}$$

5.4 (1) $y=e^{-x}\cos x$ であるから

$$y'=-e^{-x}\cos x+e^{-x}(-\sin x)=\boldsymbol{-e^{-x}(\sin x+\cos x)}$$

(2) $\boldsymbol{y'=\frac{1}{x}\cos(\log|x|)}$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2001.pdf (p.7)

5.5 (1) $y' = e^{\sin x \cos x}(\sin x \cos x)' = e^{\sin x \cos x}(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= \boldsymbol{e^{\sin x \cos x} \cos 2x}$

別解 $y = e^{\frac{1}{2}\sin 2x}$ より $\quad y' = e^{\frac{1}{2}\sin x}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)' = e^{\frac{1}{2}\sin 2x}\cos 2x$

(2) $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+3} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{(\sqrt{x^2+3}\,)^2} = \dfrac{\boldsymbol{3}}{\sqrt{\boldsymbol{(x^2+3)^3}}}$

5.6 (1) $y' = (\sqrt{x}\,)' e^{\sqrt{x}} = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\sqrt{x}}}\boldsymbol{e^{\sqrt{x}}}$

(2) $y' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' \log|\cos x| + \dfrac{1}{x}(\log|\cos x|)'$

$= -\dfrac{1}{x^2}\log|\cos x| + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\dfrac{\boldsymbol{\log|\cos x|}}{\boldsymbol{x^2}} - \dfrac{\boldsymbol{\tan x}}{\boldsymbol{x}}$

5.7 (1) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2}{1+x^2} - 1$ より $\quad y' = -\dfrac{2(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{\boldsymbol{4x}}{\boldsymbol{(1+x^2)^2}}$

(2) $y' = 3\{\sin(2x+1)\}^2\{\sin(2x+1)\}'$

$= 3\sin^2(2x+1)\cdot 2\cos(2x+1) = \boldsymbol{6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)}$

5.8 (1) $y = \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$ より $\quad y' = e^{-x} - xe^{-x} = \boldsymbol{(1-x)e^{-x}}$

(2) $y = \log\left(\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}\right) = \log(2+\sin x) - \log(2-\sin x)$ より

$$y' = \frac{\cos x}{2+\sin x} - \frac{-\cos x}{2-\sin x}$$
$$= \frac{\cos x(2-\sin x) + \cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)(2-\sin x)} = \frac{\boldsymbol{4\cos x}}{\boldsymbol{4-\sin^2 x}}$$

5.9 (1) $y' = \dfrac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$

$= \dfrac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \dfrac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1-\sin x}}$

(2) $y' = (x+2)'\sqrt{x^2+2x+5} + (x+2)(\sqrt{x^2+2x+5}\,)'$

$= \sqrt{x^2+2x+5} + (x+2) \times \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

$= \dfrac{(x^2+2x+5)+(x+2)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \dfrac{\boldsymbol{2x^2+5x+7}}{\boldsymbol{\sqrt{x^2+2x+5}}}$

5.10 (1) $t=\cos x$ とおくと，$y=\sin t$ より $\dfrac{dy}{dt}=\cos t,\quad \dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\cos t\cdot(-\sin x)=\boldsymbol{-\cos(\cos x)\cdot\sin x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^{2x}(x+1)-e^{2x}\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{\boldsymbol{(2x+1)e^{2x}}}{\boldsymbol{(x+1)^2}}$

5.11 (1) $y'=\dfrac{(x)'\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)-x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\dfrac{1\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)-x\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

$=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\dfrac{\boldsymbol{x+(x+1)e^{\frac{1}{x}}}}{\boldsymbol{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}}$

(2) $y=\log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}=\log(\sqrt{1+x^2}+x)$ より

$$y'=\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)'}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

5.12 (1) $f(x)=xe^{-x^2}$ より $\quad f'(x)=e^{-x^2}+x\cdot(-2x)e^{-x^2}=(1-2x^2)e^{-x}$

(答) $\boldsymbol{1-2x^2}$

(2) $f(x)=\sqrt{1+\sin^2 x}=(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\sin x\cos x=\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

(答) $\boldsymbol{\sin x\cos x}$

5.13 (1) $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$ より $\quad f'(x)=\sqrt{1+x^2}+x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(答) $\boldsymbol{1+2x^2}$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}=x\cot x$ より

$$f'(x)=\cot x+x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\frac{\sin x\cos x-x}{\sin^2 x}$$

(答) $\boldsymbol{\sin x\cos x-x}$

5.14 (1) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4+3x^2}}$ より

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{4+3x^2}-x\cdot\dfrac{3x}{\sqrt{4+3x^2}}}{4+3x^2}=\frac{(4+3x^2)-3x^2}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(答) **4**

(2) $f(x)=\sin x\tan x$ より

$$f'(x)=\cos x\tan x+\sin x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sin x\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

(答) $\boldsymbol{\sin x}$

5.15 (1) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}\\&=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\end{aligned}$$

(答) **4**

(2) $f(x)=\log\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}$$

(答) $\boldsymbol{x}$

(3) $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ ゆえに $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

(答) $\boldsymbol{\dfrac{\sin t}{1-\cos t}}$

5.16 (1) $f(x)=(x+1)\sqrt{2x+3}$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sqrt{2x+3}+(x+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\\&=\frac{2x+3+(x+1)}{\sqrt{2x+3}}=\frac{3x+4}{\sqrt{2x+3}}\end{aligned}$$

(答) $\boldsymbol{3x+4}$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sin^2 x}=x(\sin x)^{-2}$ より

$$f'(x)=(\sin x)^{-2}+x\cdot(-2)(\sin x)^{-3}\cos x=\frac{\sin x-2x\cos x}{\sin^3 x}$$

(答) $\boldsymbol{\sin x-2x\cos x}$

5.17 (1) $f(x)=x(\log x)^2$ を微分すると

$$f'(x)=(\log x)^2+x\cdot 2(\log x)\frac{1}{x}=(\log x+2)\log x$$

(あ) $\boldsymbol{\log x+2}$

(2) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x^2}=x^{-2}\tan x$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=-2x^{-3}\tan x+x^{-2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\\&=\frac{-2\sin x\cos x+x}{x^3\cos^2 x}=\frac{x-\sin 2x}{x^3\cos^2 x}\end{aligned}$$

(い) $\boldsymbol{x-\sin 2x}$

5.18 $y=e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x+\cos 2x)$ より

$$\begin{aligned}y'&=\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x+\cos 2x)+e^{\frac{3}{2}x}(2\cos 2x-2\sin 2x)\\&=e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{7}{2}\cos 2x\right),\\y''&=\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{7}{2}\cos 2x\right)+e^{\frac{3}{2}x}\left(-\cos 2x-7\sin 2x\right)\\&=e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{31}{4}\sin 2x+\frac{17}{4}\cos 2x\right)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}4y''-12y'+25y=&\,4e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{31}{4}\sin 2x+\frac{17}{4}\cos 2x\right)\\&-12e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{7}{2}\cos 2x\right)\\&+25e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x+\cos 2x)\\=&\,0\end{aligned}$$

補足 (福岡教育大学 2007) 1

5.19 (1) $$Q(x)=\int_1^x P(t)\,dt\quad\cdots(*)$$

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 2 であるから，剰余の定理により　$P(1)=2$

$(*)$ を微分すると　$Q'(t)=P(x)$　よって　$Q'(1)=P(1)=\boldsymbol{2}$

(2) $(*)$ より　$Q(1)=0$

$Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $R(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$Q(x)=(x-1)^2R(x)+ax+b$$

微分すると　$Q'(x)=2(x-1)R(x)+(x-1)^2R'(x)+a$

上の 2 式に $x=1$ を代入すると，$Q(1)=0$，$Q'(1)=2$ により

$$a+b=0,\quad a=2\quad \text{これから}\quad b=-2$$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{2x-2}$

(3) (2) の結果から　$Q(x)=(x-1)^2R(x)+2x-2$

$R(x)$ を $x-2$ で割ったときの商を $S(x)$，余りを c とすると

$$R(x)=(x-2)S(x)+c$$

したがって　$Q(x)=(x-1)^2\{(x-2)S(x)+c\}+2x-2$
$=(x-1)^2(x-2)S(x)+c(x-1)^2+2x-2$

$Q(x)$ を $x-2$ で割った余りが 3 であるから，剰余の定理により　$Q(2)=3$

したがって　$c+2=3$　すなわち　$c=1$

ゆえに　$Q(x)=(x-1)^2(x-2)S(x)+(x-1)^2+2x-2$
$=(x-1)^2(x-2)S(x)+x^2-1$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{x^2-1}$

別解 (福岡教育大学 2017 年) 3

5.20　(1) $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$ より　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

ゆえに　$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$$b_{n+1}+\frac{1}{n+1}=b_n+\frac{1}{n}$$

$b_1=\dfrac{a_1}{1}=1$ であるから　$b_n+\dfrac{1}{n}=b_1+\dfrac{1}{1}=2$

したがって　$\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n}=2$　よって　$\boldsymbol{a_n=2n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ の両辺を微分すると

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{nx^{n-1}(x-1) - (x^n - 1)}{(x-1)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}$$

両辺に x をかけて

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2}}$$

(3) $\dfrac{pc_{n+1}}{n} - \dfrac{c_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ の両辺に $n(n+1)p^n$ を掛けると

$$p^{n+1}(n+1)c_{n+1} - p^n n c_n = np^n$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{p^{k+1}(k+1)c_{k+1} - p^k k c_k\} = \sum_{k=1}^{n-1} kp^k$

$c_1 = 0$ および (2) の結果を上式に適用すると $(p \neq 1)$

$$p^n n c_n = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p}{(p-1)^2}$$

$p \neq 0$ のとき $\quad \boldsymbol{c_n = \dfrac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(p-1)^2 p^{n-1} n}}$

$p = 0$ のとき，漸化式より，$c_n = -1$ となり，$c_1 = 0$ に反するので，このとき，$\{c_n\}$ は存在しない．

5.21 (1) $q = 1 - p$ とおくと

$$p_2 = pp = \boldsymbol{p^2}$$
$$p_3 = (pq + qp)p = 2p^2 q = \boldsymbol{2p^2(1-p)}$$
$$p_4 = (pqq + qpq + qqp)p = 3p^2 q^2 = \boldsymbol{3p^2(1-p)^2}$$

(2) (1) と同様にして

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_1 pq^{n-2} \times p = (n-1)p^2 q^{n-2} = \boldsymbol{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

(3) $1+\sum_{k=2}^{N} x^{k-1}=\dfrac{1-x^N}{1-x}$ の両辺を x で微分すると

$$\sum_{k=2}^{N}(k-1)x^{k-2}=\frac{-Nx^{N-1}(1-x)-(1-x^N)(-1)}{(1-x)^2}$$

ゆえに $$\sum_{k=2}^{N}(k-1)(1-x)^2x^{k-2}=1-x^{N-1}\{N(1-x)+x\}$$

上式に $x=1-p$ を代入すると

$$\sum_{k=2}^{N}(k-1)p^2(1-p)^{k-2}=1-(1-p)^{N-1}(Np+1-p)$$

(2) の結果から

$$\sum_{k=2}^{N}p_k=\boldsymbol{1-(1-p)^{N-1}(Np+1-p)}$$

5.22 (1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt=\left[\ e^t\sin t\ \right]_0^x=\boldsymbol{e^x\sin x}$

$g(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\cos t-\sin t)dt=\left[\ e^t\cos t\ \right]_0^x=\boldsymbol{e^x\cos x-1}$

(2) (i) $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt$ と $g(x)=\displaystyle\int_0^x e^t(\cos t-\sin t)dt$ をそれぞれ x で微分すると

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$$
$$g'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$$

(1) の結果から $e^x\sin x=f(x)$，$e^x\cos x=g(x)+1$ を代入すると

$$f'(x)=f(x)+\{g(x)+1\}$$
$$g'(x)=\{g(x)+1\}-f(x)$$

これらを $(n-1)$ 回微分すると $(n\geqq 2)$

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x)=f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)}$$
$$\boldsymbol{g^{(n)}(x)=-f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)}$$

(ii) (i) の結果から

$$\begin{aligned}&\{f^{(n)}(x)\}^2+\{g^{(n)}(x)\}^2\\=&\{f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)\}^2+\{-f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)\}^2\\=&2\left[\{f^{(n-1)}(x)\}^2+\{g^{(n-1)}(x)\}^2\right]\end{aligned}$$

したがって

$$\{f^{(n)}(x)\}^2+\{g^{(n)}(x)\}^2=2^{n-1}\left[\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2\right]$$

さらに

$$\begin{aligned}\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2&=(e^x\sin x+e^x\cos x)^2+(e^x\cos x-e^x\sin x)\\&=2e^{2x}\end{aligned}$$

よって，上の 2 式より　$\{f^{(n)}(x)\}^2+\{g^{(n)}(x)\}^2=2^{n-1}\cdot 2e^{2x}=\boldsymbol{2^ne^{2x}}$

(iii) (ii) の結果から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2a}}{\{f^{(n)}(a)\}^2+\{g^{(n)}(a)\}^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2a}}{2^ne^{2a}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\mathbf{1}$$

補足 数学的帰納法により，$n\geqq 1$ のとき，次式が成り立つ．

$$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^ne^x\sin\left(x+\frac{n}{4}\pi\right),\quad g^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^ne^x\cos\left(x+\frac{n}{4}\pi\right)$$

5.23　(1) $x^2+4y^2=5$ を x で微分すると　$2x+8yy'=0$　ゆえに　$y'=-\dfrac{x}{4y}$

$b\neq 0$ のとき，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の傾きは　$-\dfrac{a}{4b}$

したがって，接線の方程式は

$$y-b=-\frac{a}{4b}(x-a)\quad\text{ゆえに}\quad ax+4by=a^2+4b^2$$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ は楕円 C 上の点であるから　$a^2+4b^2=5$

よって，$\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は　$ax+4by=5\quad\cdots(*)$

$b=0$，すなわち，点 $(\pm\sqrt{5},\ 0)$ における接線の方程式は　$x=\pm\sqrt{5}$

これは，$(*)$ をみたす．

別解 $(x,y)=(x(t),y(t))$ を C 上の正則な曲線で，$(a,b)=(x(t_0),y(t_0))$ とする．

$f(t)=\{x(t)\}^2+4\{y(t)\}^2-5$ とおくと

$$f'(t)=2x(t)x'(t)+8y(t)y'(t)$$

$f(t)=0$ であるから，$f'(t)=0$ より　$x(t)x'(t)+4y(t)y'(t)=0$

これに $t=t_0$ を代入すると　　$ax'(t_0)+4by'(t_0)=0$

ベクトル $(x'(t_0),\ y'(t_0))$ は曲線の P における接ベクトルで，ベクトル $(a,\ 4b)$ は C の P における法ベクトルである．よって，C の P における接線の方程式は

$$a(x-a)+4b(y-b)=0 \quad \text{整理すると} \quad ax+4by=a^2+4b^2$$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ は楕円 C 上の点であるから　　$a^2+4b^2=5$

よって，$\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は　　$ax+4by=5$

(2) $\mathrm{T}_1(a_1,\ b_1)$，$\mathrm{T}_2(a_2,\ b_2)$ とおくと，C の T_1，T_2 における接線の方程式は，それぞれ

$$a_1x+4b_1y=5, \quad a_2x+4b_2y=5$$

これらは，点 $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通るから

$$a_1+6b_1=5, \quad a_2+6b_2=5$$

これから，2 点 T_1，T_2 を通る直線の方程式は　　$\boldsymbol{x+6y=5}$

解説 $x+6y=5$ を $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を**極**とする C の**極線**という．

5.24 (1) 求める点 M の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{1+t}+1\right)=\frac{1}{1+t}, \quad y=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{t}}{1+t}=\frac{\sqrt{t}}{1+t}$$

よって　　$\mathbf{M}\left(\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+t}},\ \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{t}}}{\boldsymbol{1+t}}\right)$

(2) $x=\dfrac{1}{1+t}$，$y=\dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$ より

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{(1+t)^2}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(1+t)-\sqrt{t}}{(1+t)^2}=\frac{1-t}{2\sqrt{t}\,(1+t)^2}$$

したがって　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{1-t}{2\sqrt{t}\,(1+t)^2}}{-\dfrac{1}{(1+t)^2}}=-\dfrac{1-t}{2\sqrt{t}}$

よって，求める接線の方程式は

$$y-\frac{\sqrt{t}}{1+t}=\frac{2\sqrt{t}}{1-t}\left(x-\frac{1}{1+t}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{2\sqrt{t}}{1-t}x-\frac{\sqrt{t}}{1-t}} \quad \cdots(*)$$

(3) (2) の結果から

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{2\sqrt{t}}{1-t}-y=0$$

これが t の値にかかわらず常に成り立つとき

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad x=\frac{1}{2},\ y=0$$

この点は，常に法線の方程式 $(*)$ を満たす．

よって，定点は $\quad \boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ 0\right)}$

5.25 (1) $y=e^x$ より $\quad y'=e^x$

C の点 $\mathrm{A}_0(0,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=e^0(x-0) \quad \text{すなわち} \quad y=x+1$$

この直線と x 軸との交点の x 座標が b_1 であるから $\quad \boldsymbol{b_1=-1}$

(2) C の点 $\mathrm{A}_n(b_n,\ e^{b_n})$ にこにおける接線の方程式は

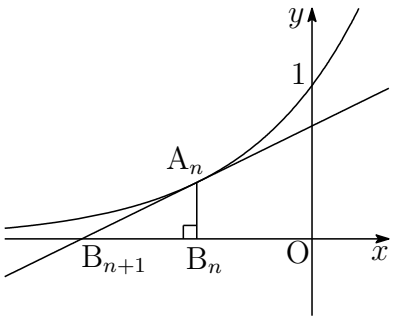
$$y-e^{b_n}=e^{b_n}(x-b_n)$$

ゆえに $\quad y=e^{b_n}(x-b_n+1)$

この直線と x 軸との交点の x 座標が b_{n+1} であるから

$$b_{n+1}-b_n+1=0$$

ゆえに $\quad \boldsymbol{b_{n+1}=b_n-1}$



上式および $b_1=-1$ から $\{b_n\}$ は

$$b_n=-1+(n-1)\cdot(-1)=\boldsymbol{-n}$$

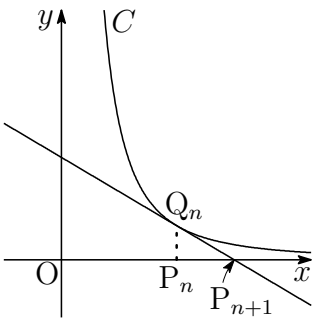
(3) B_0 は原点であるから，(2) の結果は，$n \geqq 0$ について成り立つ．

したがって $\quad S_n=\frac{1}{2}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\cdot\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-n}=\frac{1}{2}e^{-n} \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$0<e^{-1}<1$ であるから

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-1})^n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{2(e-1)}}$$

5.26 (1) $\mathrm{P}_n(a_n,\ 0)$ より　$\mathrm{Q}_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$



$y=\dfrac{1}{x^2}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{2}{x^3}$

Q_n における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{{a_n}^2}=-\frac{2}{{a_n}^3}(x-a_n)$$

ゆえに　$y=-\dfrac{2x}{{a_n}^3}+\dfrac{3}{{a_n}^2}$

この接線の x 軸との交点の x 座標は $y=0$ を代入して　$x=\dfrac{3}{2}a_n$

これが P_{n+1} の x 座標であるから　$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n$

また，$\mathrm{P}_1(a,\ 0)$ であるから　$\boldsymbol{a_n=a\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$

(2) $a>0$ および (1) の結果から

$$S_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)\times\frac{1}{{a_n}^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a_n-a_n\right)\times\frac{1}{{a_n}^2}=\frac{1}{4a_n}=\frac{1}{4a}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，初項が $\dfrac{1}{4a}$，公比が $\dfrac{2}{3}$ の無限等比級数である．

公比について $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ であるから，収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{4a}\times\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=\boldsymbol{\frac{3}{4a}}$$

5.27 (1) $y=\dfrac{1}{x^2}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{2}{x^3}$

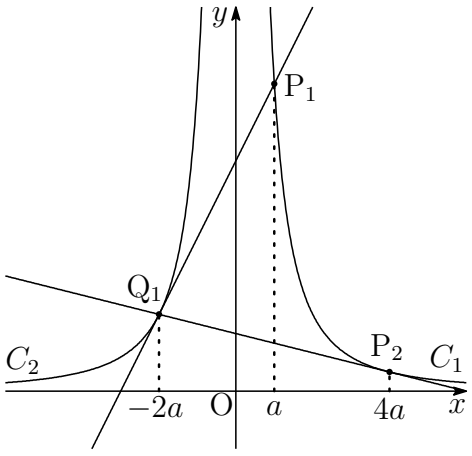
点 Q_1 の座標を $\left(\dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{b^2}\right)$ とすると，

点 Q_1 における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{b^2}=-\frac{2}{b^3}(x-b)$$

すなわち　$y=-\dfrac{2x}{b^3}+\dfrac{3}{b^2}$

この直線が点 $\mathrm{P}_1\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ を通るから



$$\frac{1}{a^2} = -\frac{2a}{b^3} + \frac{3}{b^2} \quad \text{ゆえに} \quad (b-a)^2(b+2a) = 0$$

$b \neq a$ であるから　$b = -2a$　よって，点 Q_1 の座標は　$\left(\boldsymbol{-2a},\ \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4a^2}}\right)$

(2) (1) の計算結果から Q_1 の x 座標 b に対し，P_2 の x 座標は $-2b$ であるから，P_2 の x 座標は $4a$ となる．

したがって　$\mathrm{P}_2\left(4a,\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{Q_1P_1}} = \left(a, \dfrac{1}{a^2}\right) - \left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right) = \left(3a, \dfrac{3}{4a^2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{Q_1P_2}} = \left(4a, \dfrac{1}{16a^2}\right) - \left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right) = \left(6a, -\dfrac{3}{16a^2}\right)$

よって，$\triangle \mathrm{P_1Q_1P_2}$ の面積 S_1 は，$a > 0$ に注意して

$$S_1 = \frac{1}{2}\left|3a \times \left(-\frac{3}{16a^2}\right) - 6a \times \frac{3}{4a^2}\right| = \boldsymbol{\frac{81}{32a}}$$

(3) P_n の x 座標を a_n とすると $(n = 1, 2, 3, \cdots)$，$\triangle \mathrm{P_nQ_nP_{n+1}}$ の面積 S_n は

$$S_n = \frac{81}{32a_n}$$

$\{a_n\}$ は，初項が a，公比 4 の等比数列であるから　$a_n = 4^{n-1}a$

よって　$S_n = \dfrac{81}{32 \cdot 4^{n-1}a} = \boldsymbol{\dfrac{81}{32a}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は，初項 $\dfrac{1}{32a}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\dfrac{81}{32a}}{1 - \dfrac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{27}{8a}}$$

5.28 (1) $f(x) = \log(x^2 - x + 2)$
$(0 \leqq x \leqq 1)$ より

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+2} \quad \cdots ①$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\log 2$	↘	極小 $\log\frac{7}{4}$	↗	$\log 2$

$f(x)$ の増減表は右のようになる．

よって　$x = \dfrac{1}{2}$ で**極小値 $\log \dfrac{7}{4}$**

(2) $g(x)=\log(x^2-x+2)-x$ とおくと

$$g'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+2}-1=\frac{-x^2+3x-1}{x^2-x+2}=\frac{-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}<0$$

ゆえに，$g(x)$ は単調に減少する．

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\log\frac{7}{4}-\frac{1}{2}=\log 7-2\log 2-\frac{1}{2},\qquad g(1)=\log 2-1<0$$
$$>1.9-2\times 0.7-0.5=0$$

したがって，$g(x)=0$ となる $\dfrac{1}{2}<x<1$ がただ 1 つ存在する．すなわち，方程式 $\log(x^2-x+2)=x$ は $\dfrac{1}{2}<x<1$ の範囲に実数解をただ 1 つもつ．

(3) ① を微分して

$$f''(x)=\frac{(2x-1)'(x^2-x+2)-(2x-1)(x^2-x+2)'}{(x^2-x+2)^2}$$
$$=\frac{-2x^2+2x+3}{(x^2-x+2)^2}=\frac{2x(1-x)+3}{(x^2-x+2)^2}$$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 1$ において　　$f''(x)>0$

したがって，$f'(x)$ はこの区間で単調増加である．

よって，最大値は $\boldsymbol{f'(1)=\dfrac{1}{2}}$，最小値は $\boldsymbol{f'(0)=-\dfrac{1}{2}}$ である．

(4) 平均値の定理により

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となる c が $a<c<b$ に存在する．また，(3) の結果から

$$-\frac{1}{2}<f'(c)<\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad|f'(c)|<\frac{1}{2}$$

したがって　$\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=f'(c)<\dfrac{1}{2}$　よって　$|f(b)-f(a)|=\dfrac{1}{2}|b-a|$

5.29 (1) $x\neq 0$ であるから $f(x)=\dfrac{(\log x)^2}{x}$ とすると

$$f'(x)=\frac{2\log x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)^2\cdot 1}{x^2}=\frac{\log x(2-\log x)}{x^2}$$

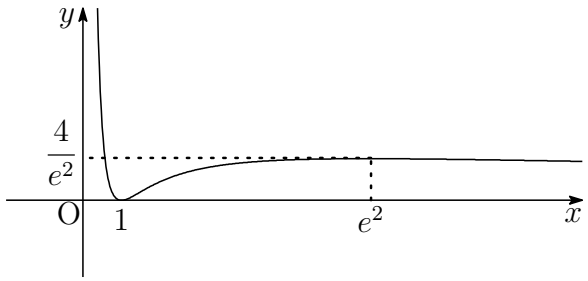
よって，$f(x)$ の増減表は次のようなる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{4}{e^2}$	↘

また　$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \dfrac{(\log x)^2}{x} = \infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^2}{x} = 0$

したがって，$y = f(x)$ のグラフは下の図のようになる．



このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．したがって

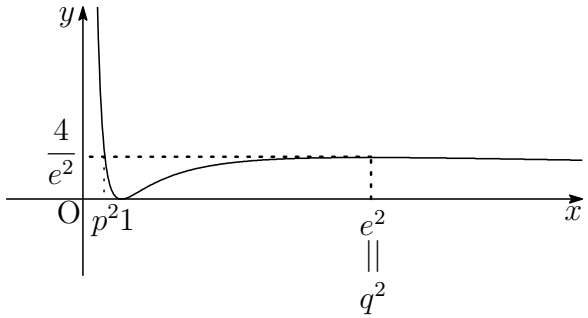
$\boldsymbol{a < 0}$ のとき　　**0 個**

$\boldsymbol{a > \dfrac{4}{e^2}}$, $\boldsymbol{a = 0}$ のとき　**1 個**

$\boldsymbol{a = \dfrac{4}{e^2}}$ のとき　　**2 個**

$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{4}{e^2}}$ のとき　　**3 個**

(2) 解が 2 個となるのは $a = \dfrac{4}{e^2}$ のときで，$0 < p < q$ であるから p^2，q^2 は下の図ような位置関係になる．



$k=\dfrac{e}{e+1}$ とおくと

$$f(k^2)=\frac{(\log k^2)^2}{k^2}=\left(\frac{2\log k}{k}\right)^2=\left\{\frac{2(e+1)}{e}\log\frac{e}{e+1}\right\}^2$$
$$=\frac{4}{e^2}\left\{(e+1)\log\frac{e+1}{e}\right\}^2 \quad \cdots ①$$

ここで関数 $g(x)=\log x$ を考え，この関数は区間 $(e,\ e+1)$ で微分可能で，

$$g'(x)=\frac{1}{x}$$

区間 $[e,\ e+1]$ において，平均値の定理を適用すると

$$\frac{\log(e+1)-\log e}{(e+1)-e}=\frac{1}{c},\quad e<c<e+1$$

を同時に満たす c が存在する．よって

$$\frac{1}{e+1}<\log\frac{e+1}{e}<\frac{1}{e}$$

ゆえに $\qquad (e+1)\log\dfrac{e+1}{e}>1 \quad \cdots ②$

$f(p^2)=\dfrac{4}{e^2}$ であるから，①，② より $\qquad f(k^2)>f(p^2)$

グラフから $\qquad k^2<p^2<1,\ q^2=e^2$

$0<p<q$ より $\qquad \boldsymbol{\dfrac{e}{e+1}<p<1,\ q=e}$

5.30 (1) $f(x)=x^3-x^2-x-1$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-\frac{22}{27}$	↘	-2	↗

よって，$f(x)=0$ の正の解は $x>1$ の範囲に 1 個存在する．

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

この直線と x 軸の交点が $(x_{n+1},\ 0)$ であるから

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad \text{ゆえに} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

よって $\qquad x_{n+1} = x_n - \dfrac{{x_n}^3 - {x_n}^2 - x_n - 1}{3{x_n}^2 - 2x_n - 1} = \dfrac{2{x_n}^3 - {x_n}^2 + 1}{3{x_n}^2 - 2x_n - 1}$

(3) $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{8}$，$f(2) = 1$ より $\quad \left|f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right| > |f(2)|$ であるから

$$\boldsymbol{x_1 = 2}$$

よって，(2) の結果から

$$x_2 = \frac{2{x_1}^3 - {x_1}^2 + 1}{3{x_1}^2 - 2x_1 - 1} = \mathbf{\frac{13}{7}}$$

5.31 (1) $f(x) = x^2 - 2$ とおくと $\quad f'(x) = 2x$

$y = f(x)$ 上の点 $(x_k,\ f(x_k))$ における接線の方程式は

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

この直線と x 軸との共有点の x 座標を x_{k+1} とすると

$$-f(x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \quad \text{ゆえに} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

これに，$f(x_k) = {x_k}^2 - 2$，$f'(x_k) = 2x_k$ を代入すると

$$x_{k+1} = x_k - \frac{{x_k}^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$$

(2) $x_1 = 2$ および (1) の結果から

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2} = \mathbf{1.500}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \fallingdotseq \mathbf{1.417}$$

(3) $y_k = \dfrac{x_k - \sqrt{2}}{x_k + \sqrt{2}} \cdots (*)$ および (1) の結果から

$$y_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \sqrt{2}}{x_{k+1} + \sqrt{2}} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(x_k + \dfrac{2}{x_k}\right) - \sqrt{2}}{\dfrac{1}{2}\left(x_k + \dfrac{2}{x_k}\right) + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{{x_k}^2 - 2\sqrt{2}x_k + 2}{{x_k}^2 + 2\sqrt{2}x_k + 2} = \left(\frac{x_k - \sqrt{2}}{x_k + \sqrt{2}}\right)^2 = {y_k}^2$$

(4) $y_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ より，$0 < y_1 < 1$ であるから，$y_k > 0$

$z_k = \log y_k$ とおくと，(3) の結果から

$$z_{k+1} = 2z_k \quad \text{ゆえに} \quad z_k = 2^{k-1} z_1$$

したがって　$\log y_k = 2^{k-1} \log y_1 = \log {y_1}^{2^{k-1}}$　すなわち　$\boldsymbol{y_k = {y_1}^{2^{k-1}}}$

$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} y_1^{2^{k-1}} = 0$ であるから，$(*)$ より

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{2}$$

5.32 (1) $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - (-2x+2)$ より

$$f(0) = -2 < 0, \quad f(2) = \left(2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!}\right) - (-2) = \frac{44}{15} > 0$$

$f(x)$ は区間 $[0,\ 2]$ において連続であるから，中間値の定理により，区間 $[0,\ 2]$ に $f(x) = 0$ の解が存在する．

(2) $y = f(x)$ 上の点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

この直線と x 軸との交点の x 座標が x_{n+1} であるから

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad \text{ゆえに} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ より，$f'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ であるから

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \dfrac{{x_n}^3}{3!} + \dfrac{{x_n}^5}{5!}}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}} = \frac{\boldsymbol{240 - 40{x_n}^3 + 4{x_n}^5}}{\boldsymbol{360 - 60{x_n}^2 + 5{x_n}^4}}$$

(3) (2) の結果に $x_1 = 1$ を代入すると　$\boldsymbol{x_2 = \dfrac{204}{305}}$

5.33 n 次関数 $f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ は，$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して

$$f_n\left(\frac{1}{k+1}\right) = f_n\left(\frac{1}{k}\right) = 0$$

が成り立つので，ロルの定理により

$$f_n'(c_k)=0,\quad \frac{1}{k+1}<c_k<\frac{1}{k}$$

をみたす c_k が存在する．このとき，c_k は $n-1$ 次方程式

$$f_n'(x)=0$$

の解であるから，その解の個数は高々 $n-1$ 個である．

したがって，$n-1$ 個の開区間

$$\left(\frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right),\ \cdots\ \left(\frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n}\right)$$

にそれぞれ 1 個づつ $f_n'(x)=0$ をみたす重解でない x が存在する．

$f_n(x)$ の最高次の係数に注意すると

$$f_n'(x)=n\cdot n!(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1})$$

$x=c_k$ の前後で $f_n'(x)$ の符号が変化するので，$f_n(c_k)$ は極値である．

よって，$k=1,2,\cdots,n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとる．

5.34 (1) $\alpha=\sqrt[3]{a}$ とおくと，$f(x)=x^p-\alpha^3x^{p-3}$ より

$$\begin{aligned}
g(x)-\alpha&=x-\frac{x^p-\alpha^3x^{p-3}}{px^{p-1}-(p-3)\alpha^3x^{p-4}}-\alpha\\
&=x-\alpha-\frac{x(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{px^3-(p-3)\alpha^3}\\
&=(x-\alpha)\times\frac{px^3-(p-3)\alpha^3-x(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{px^3-(p-3)\alpha^3}\\
&=(x-\alpha)^2\times\frac{(p-1)x^2+(p-2)\alpha x+(p-3)\alpha^2}{px^3-(p-3)\alpha^3}
\end{aligned}$$

よって，次式が成り立ち，$p\geqq 2$，$p-1\geqq 1$ より，題意をみたす．

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^2\times\frac{(p-1)x^2+(p-2)\sqrt[3]{a}\,x+(p-3)\sqrt[3]{a^2}}{px^3-(p-3)a}$$

(2) (1) の結果に $p=2$ を代入すると，次式が成り立ち，題意をみたす．

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^2\times\frac{x^2-\sqrt[3]{a^2}}{2x^3+a}=(x-\sqrt[3]{a})^3\times\frac{x+\sqrt[3]{a}}{2x^3+a}$$

(3) (2) の結果から　$\sqrt[3]{a}-g(x)=(\sqrt[3]{a}-x)^3\times\dfrac{x+\sqrt[3]{a}}{2x^3+a}$

これに $x=2$，$a=9$ を代入すると

$$\sqrt[3]{9}-g(2)=(\sqrt[3]{9}-2)^3\times\frac{2^2+\sqrt[3]{2}}{2\cdot2^3+9}$$

$2<\sqrt[3]{9}<2.1$ より

$$0<(\sqrt[3]{9}-2)^3\times\frac{2^2+\sqrt[3]{2}}{2\cdot2^3+9}<(2.1-2)^3\times\frac{2^2+2.1}{2\cdot2^3+9}<\frac{1}{1000}$$

したがって　$0<\sqrt[3]{9}-g(2)<\dfrac{1}{1000}$　ゆえに　$g(2)<\sqrt[3]{9}<g(2)+0.001$

このとき，$f(x)=x^2-\dfrac{9}{x}$，$f'(x)=2x+\dfrac{9}{x^2}$ より

$$f(2)=2^2-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2},\quad f'(2)=2\cdot2+\frac{9}{2^2}=\frac{25}{4}$$

ゆえに　$g(2)=2-\dfrac{f(2)}{f'(2)}=2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\div\dfrac{25}{4}=2.08$

したがって　　$2.08<\sqrt[3]{9}<2.081$

よって，$\sqrt[3]{9}$ の小数第 4 位を切り捨てると　**2.080**

解説　(九大 [理]2002) 8

5.35　(1) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を微分すると　　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいので　$\boldsymbol{b^2-3ac>0}$

(2) $f''(x)=6ax+2b$

$x<-\dfrac{b}{3a}$ のとき　$f''(x)<0$

$x>-\dfrac{b}{3a}$ のとき　$f''(x)>0$

ゆえに，$f(x)$ は変曲点をもつ．

$$f\left(-\frac{b}{3a}\right)=a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(-\frac{b}{3a}\right)+d$$
$$=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a}+d$$

よって　　変曲点 $\left(\boldsymbol{-\dfrac{b}{3a}},\ \boldsymbol{\dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d}\right)$

5.36 (1) $f(x)=\sqrt{x}-\log x$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

x	(1)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

したがって　$f(x)\geqq f(4)=2(1-\log 2)>0$　よって　$f(x)>0$

(2)　$g(x)-\sqrt{x}=\dfrac{x}{\log x}-\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}(\sqrt{x}-\log x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}f(x)$

$x>1$ のとき $\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}>0$，$f(x)>0$ であるから

$$g(x)-\sqrt{x}>0 \qquad \text{すなわち} \qquad g(x)>\sqrt{x}$$

また　$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$　よって　$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty}$

(3) $g(x)=x(\log x)^{-1}$ であるから，この両辺を微分すると

$$\begin{aligned}g'(x)&=(\log x)^{-1}+x\cdot(-1)(\log x)^{-2}\frac{1}{x}\\&=(\log x)^{-1}-(\log x)^{-2}\\g''(x)&=-(\log x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}+2(\log x)^{-3}\cdot\frac{1}{x}\end{aligned}$$

すなわち　$\boldsymbol{g'(x)=\dfrac{\log x-1}{(\log x)^2}}$，　$\boldsymbol{g''(x)=\dfrac{2-\log x}{x(\log x)^3}}$

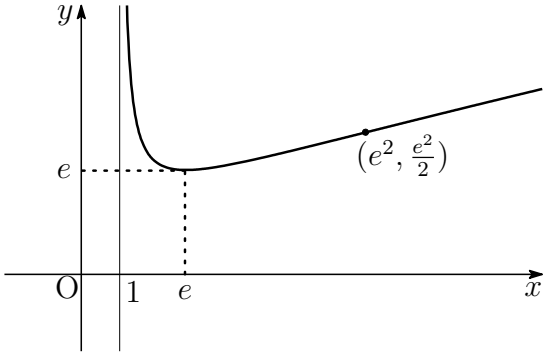
したがって，$g(x)$ の増減および凹凸は次のようなる．

x	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$		$\searrow$	e	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\curvearrowright$

$x=e$ のとき極小値 $\boldsymbol{e}$，変曲点 $\left(\boldsymbol{e^2},\ \dfrac{\boldsymbol{e^2}}{\boldsymbol{2}}\right)$

(4) $\lim_{x\to 1+0}g(x)=\infty$ であるから，直線 $x=1$ は漸近線．

よって，$y=g(x)$ のグラフは次のようになる．



5.37 (1) $f(x) = \log x - \sqrt[n]{x} = \log x - x^{\frac{1}{n}}$ より

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)x^{\frac{1}{n}-2}$$

よって　　$\boldsymbol{xf'(x) = 1 - \dfrac{\sqrt[n]{x}}{n}}$,

$$\boldsymbol{x^2f''(x) = -1 + \frac{n-1}{n^2}\sqrt[n]{x}}$$

(2) $x > 0$ において $f'(x) > 0$ となる x の範囲は，(1) の結果から

$$1 - \frac{\sqrt[n]{x}}{n} > 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0 < x < n^n}$$

$x > 0$ において $f''(x) < 0$ となる x の範囲は，(1) の結果から

$$-1 + \frac{n-1}{n^2}\sqrt[n]{x} < 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0 < x < \left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n}$$

(3) $n = \dfrac{n^2}{n} < \dfrac{n^2}{n-1}$ より　$n^n < \left(\dfrac{n^2}{n-1}\right)^n$

したがって，増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	n^n	$\cdots$	$\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		↗	極大	↘	$f\left(\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n\right)$	↳

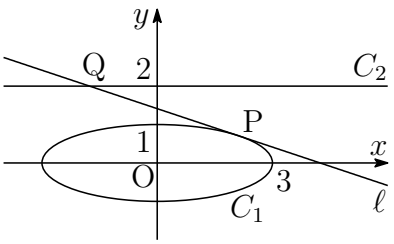
よって　　$\boldsymbol{x = n^n}$ のとき極大値 $\boldsymbol{n(\log n - 1)}$

変曲点 $\boldsymbol{\left(\left(\dfrac{n^2}{n-1}\right)^n,\ n\log\dfrac{n^2}{n-1} - \dfrac{n^2}{n-1}\right)}$

(4) (3) の結果から，$a_n = n^n$，$b_n = \left(\dfrac{n^2}{n-1}\right)^n$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^n\frac{1}{n^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\\ &= e\cdot 1 = \boldsymbol{e}\end{aligned}$$

5.38 (1) $C_1 : \dfrac{x^2}{3^2} + y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線 ℓ の方程式は



$$\frac{(3\cos\theta)x}{3^2} + (\sin\theta)y = 1$$

すなわち $\quad \dfrac{\boldsymbol{x\cos\theta}}{\boldsymbol{3}} + \boldsymbol{y\sin\theta = 1}$

上式に $y = 2$ を代入すると

$$\frac{x\cos\theta}{3} + 2\sin\theta = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta}$$

よって，点 Q の座標は $\quad \left(\dfrac{\boldsymbol{3(1-2\sin\theta)}}{\boldsymbol{\cos\theta}},\ \boldsymbol{2}\right)$

(2) 3 点 O，$\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta},\ 2\right)$ を頂点とする三角形の面積を $f(\theta)$ とすると $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \frac{1}{2}\left|3\cos\theta\cdot 2 - \sin\theta\cdot\frac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta}\right|\\ &= \frac{3}{2\cos\theta}(2-\sin\theta) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\cos\theta} - \tan\theta\right)\end{aligned}$$

したがって $\quad f'(\theta) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} - \dfrac{1}{\cos^2\theta}\right) = \dfrac{3(2\sin\theta-1)}{2\cos^2\theta}$

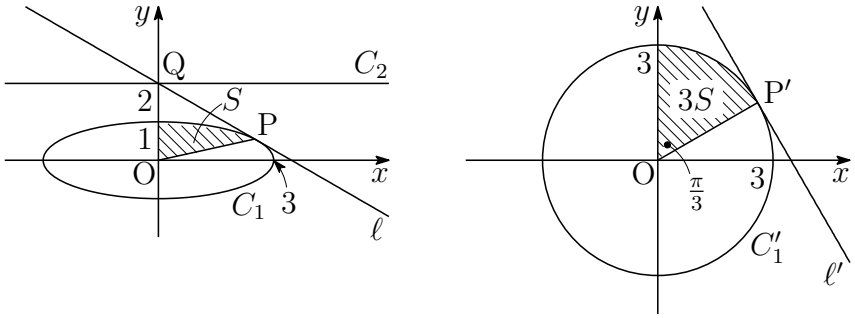
θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	極小	↗	

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$f(\theta)$ は最小となるから，このとき　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\boldsymbol{3\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}},\ \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right)$

また，ℓ は (1) の結果から　$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2\sqrt{3}}} + \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{1}$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\mathrm{P}\left(3\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2)$.

求める面積を S とし，C_1 および OP を x 軸を元に y 軸方向に 3 倍に拡大したものをそれぞれ C_1'，OP′ とすると，$\mathrm{P}'\left(3\cos\dfrac{\pi}{6},\ 3\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.



OP′ と y 軸の正の向きのなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$3S = \frac{1}{2}\cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{S = \frac{\pi}{2}}$$

5.39 (1) $0 < x < 1$ のとき，$\log x < 0$ より　$0 < -\log x$　$\cdots$①

$g(x) = \dfrac{1}{x} + \log x$ とすると

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

$0 < x < 1$ において，$g'(x) < 0$ であるから，$g(x)$ は単調減少である.

また，$g(1) = 1 > 0$ より，この区間において，$g(x) > 0$ であるから

$$\frac{1}{x} + \log x > 0 \quad \text{すなわち} \quad -\log x < \frac{1}{x} \quad \cdots ②$$

①，② より　$0 < -\log x < \dfrac{1}{x}$

(2) 微分係数の定義により

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3\log|h|}{h} = \lim_{h\to 0}|h|^2\log|h|$$

(1) の結果から，$0 < |h| < 1$ のとき

$$0 < -\log|h| < \frac{1}{|h|} \quad \text{ゆえに} \quad -|h| < |h|^2\log|h| < 0$$

$\lim_{h\to 0}(-|h|)=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{h\to 0}|h|^2\log|h|=0 \quad \text{すなわち} \quad f'(0)=0$$

(3) $f'(x)=(x^3)'\log|x|+x^3(\log|x|)'$

$$=3x^2\log|x|+x^3\cdot\frac{1}{x}=\boldsymbol{x^2(3\log|x|+1)}$$

(4) (2)，(3) の結果から，$f'(x)=0$ となる x の値は

$$x=-e^{-\frac{1}{3}},\ 0,\ e^{-\frac{1}{3}}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-e^{-\frac{1}{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{3e}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{3e}$	↗

よって　　$x=-e^{-\frac{1}{3}}$ のとき，**極大値** $\boldsymbol{\frac{1}{3e}}$

$x=e^{-\frac{1}{3}}$ のとき，**極小値** $\boldsymbol{-\frac{1}{3e}}$

5.40 (1) 証明する不等式を $(*)$ とする．

［1］$x>0$ のとき，$e^x>1$ であるから

$$\int_0^x e^t\,dt>\int_0^x dt \quad \text{ゆえに} \quad e^x-1>x$$

したがって　　$e^x>x+1>x$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\int_0^x e^t\,dt>\int_0^x \frac{t^k}{k!}\,dt \quad \text{ゆえに} \quad e^x-1>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

したがって　　$e^x>\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+1>\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成立する．

(2) (1) の結果から，$t>0$ のとき　$e^t > \dfrac{t^n}{n!}$　これに $t=\dfrac{1}{|x|}$ を代入すると

$$e^{\frac{1}{|x|}} > \frac{1}{n!|x|^n} \qquad \text{よって} \qquad e^{-\frac{1}{|x|}} < n!|x|^n$$

(3) (2) の結果から，$x\neq 0$ のとき，$0<e^{-\frac{1}{|x|}}<n!|x|^n$ であるから

$$\left|\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{|x|}}\right| < n!|x|^{n-3} \quad \text{ゆえに} \quad \left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| < n!|x|^{n-3}$$

上式において，$n\geqq 4$ とすると，$\lim\limits_{x\to 0} n!|x|^{n-3}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$$

(4) (3) の結果から，$f'(0)=0$．$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減をを調べる．

$x>0$ のとき，$f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ より

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1-2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$$

このとき，$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

また，$f(x)$ は偶関数であるから

極小値 0　($x=0$ のとき)

極大値 $\dfrac{4}{e^2}$　$\left(x=\pm\dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

5.41　(1) $f(x)$ は $x=-1$，$x=1$ で微分可能であるから，$f(x)$ は $x=-1$，$x=1$ で連続である．したがって

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=f(-1), \quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=f(1)$$

すなわち　$-a+b-c+d=1, \quad a+b+c+d=0 \quad \cdots(*)$

また　$(ax^3+bx^2+cx+d)'=3ax^2+2bx+c,$

$$\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}, \quad \left(-\frac{1}{x}+1\right)'=\frac{1}{x^2}$$

$f(x)$ が $x=-1$ および $x=1$ で微分可能であるから

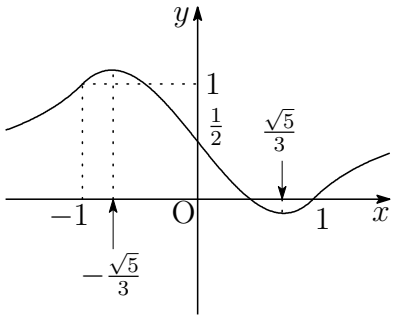
$$\lim_{x\to -1+0}(3ax^2+2bx+c)=\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{x^2},$$
$$\lim_{x\to 1-0}(3ax^2+2bx+c)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^2}$$

すなわち　　$3a-2b+c=1,\quad 3a+2b+c=1 \quad \cdots(**)$

$(*)$，$(**)$ を解いて　$\boldsymbol{a=\frac{3}{4},\ b=0,\ c=-\frac{5}{4},\ d=\frac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{9}{4}x^2-\dfrac{5}{4} & (|\,x\,|\leqq 1)\\[2ex] \dfrac{1}{x^2} & (|\,x\,|\geqq 1)\end{cases}$$



したがって，増減表およびグラフの概形は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↗	1	↗	$\frac{9+5\sqrt{5}}{18}$	↘	$\frac{9-5\sqrt{5}}{18}$	↗	0	↗

よって，極大値 $f\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{9+5\sqrt{5}}{18}}$，極小値 $f\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{9-5\sqrt{5}}{18}}$

(3) $y=f(x)$ および直線 $y=px+\dfrac{1}{2}$ $(p\geqq 0)$ は，それぞれ点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に関して対称である．$x>0$ における $y=f(x)$ と $y=px+\dfrac{1}{2}$ の共有点は

$$y=px+\frac{1}{2},\quad y=-\frac{1}{x}+1$$

の解である．y を消去すると

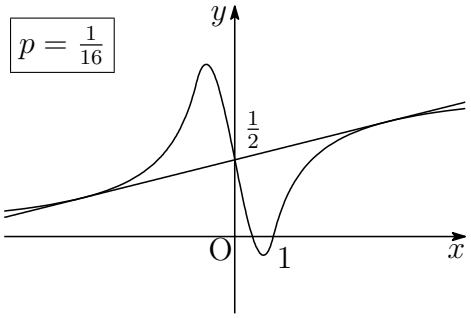
$$px+\frac{1}{2}=-\frac{1}{x}+1 \quad \text{整理すると} \quad 2px^2-x+2=0$$

とくに，これらが接するとき，

$$(-1)^2-4\cdot 2p\cdot 2=0$$

すなわち　　$p=\dfrac{1}{16}$

よって，グラフの概形に注意して



$\boldsymbol{p=0}$ のとき　**3 個**
$\boldsymbol{0<p<\frac{1}{16}}$ のとき　**5 個**
$\boldsymbol{p=\frac{1}{16}}$ のとき　**3 個**
$\boldsymbol{\frac{1}{16}<p}$ のとき　**1 個**

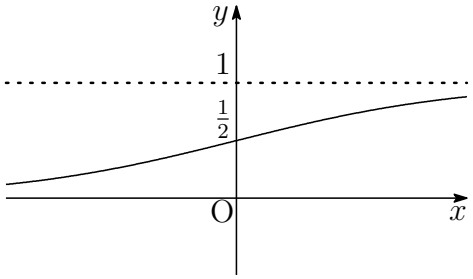
5.42 (1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}=1-\dfrac{1}{e^x+1}$ より　$f'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{(e^x+1)^2}$ であるから

$$f''(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}+\frac{2e^x}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

よって，増減やグラフの凹凸は左下の表のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	変曲点 $\frac{1}{2}$	↱



また，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ であるから，漸近線は $y=0$，$y=1$

以上から，この関数のグラフの概形は，右上の図のようになる．

(2) $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおいて $(0<y<1)$，x について解くと

$$e^x=\frac{y}{1-y}\quad\text{ゆえに}\quad x=\log\frac{y}{1-y}$$

よって　　$\boldsymbol{f^{-1}(x)=\log\dfrac{x}{1-x}\ \ (0<x<1)}$

(3) $0<\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{n+1}<1$ であるから，$f^{-1}(x)=-\log\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$ により

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)=-\log(n+2-1)=-\log(n+1)$$
$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)=-\log(n+1-1)=-\log n$$

$$n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}=-n\{\log(n+1)-\log n\}=-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

よって　$\lim_{n\to\infty}n\left\{f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$

$$=-\log e=\boldsymbol{-1}$$

5.43 (1) $f(x) = x\{x^2 - (2m+1)x + m^2\}$

2 次方程式 $x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0 \cdots ①$ は，$m^2 \neq 0$ であるから，① の解は $x \neq 0$．① の判別式を D とすると，$m > 0$ より

$$D = \{-(2m+1)\}^2 - 4 \cdot 1 m^2 = 4m + 1 > 0$$

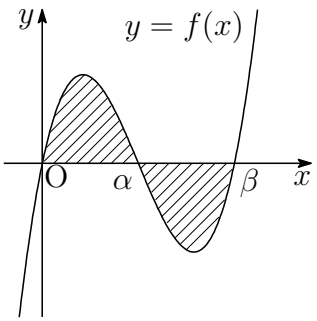
よって，$f(x) = 0$ は，0 以外に相異なる 2 つの実数解をもつ．

(2) α，β は ① の解であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 2m + 1, \quad \alpha\beta = m^2}$$

$m > 0$ より，$\alpha + \beta > 0$，$\alpha\beta > 0$ であるから，α，β はともに正である．

(3) 3 次関数のグラフは変曲点に関して対称であるから，3 次関数のグラフと変曲点を通る直線によって囲まれた 2 つの部分の面積は等しい．このことから，右の図の 2 つの斜線部分の面積が等しいとき，点 $(\alpha,\ 0)$ は変曲点であるから



$$f''(\alpha) = 0, \quad \beta = 2\alpha \quad \cdots (*)$$

が成り立つ．

$f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + m^2 x$ より $\quad f''(x) = 6x - 2(2m+1)$

$(*)$ により $\quad \alpha = \dfrac{2m+1}{3}$，$\beta = \dfrac{2(2m+1)}{3} \quad \cdots (**)$

$(**)$ を $\alpha\beta = m^2$ に代入すると $\quad \dfrac{2(2m+1)^2}{9} = m^2$

$m > 0$ より $\quad \dfrac{\sqrt{2}(2m+1)}{3} = m$ $\quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{m = 4 + 3\sqrt{2}}$

これを $(**)$ に代入して $\quad \boldsymbol{\alpha = 3 + 2\sqrt{2},\ \beta = 6 + 4\sqrt{2}}$

解説 3 次関数 $C : y = f(x)$ と直線によって囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき，その直線は C の変曲点を通る．なぜなら，変曲点を通らない直線 l と C によって囲まれた 2 つの部分の面積が等しいと仮定すると，変曲点を通り l に平行な直線 l' によってもその 2 つの部分の面積が等しくなり，矛盾を生じる．

5.44 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおくと

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b, \quad f'''(x) = 6a$$

$f''(p)=0$，すなわち $p=-\dfrac{b}{3a}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+a(x-p)^3 \\ &= f(p)+f'(p)(x-p)+a(x-p)^3 \end{aligned}$$

このとき　$f(p+k)=f(p)+f'(p)k+ak^3$
$f(p-k)=f(p)-f'(p)k-ak^3$

任意の実数 k について2点 $(p+k,\ f(p+k))$，$(p-k,\ f(p-k))$ の中点が $(p,\ f(p))$ であるから，3次関数 $y=f(x)$ は，グラフ上の点 $(p,\ f(p))$ に関して対称である．

補足　(分大 [医]2011) 7

5.45　(1)　求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$\dfrac{x+X}{2}=p$，$\dfrac{y+Y}{2}=q$

よって，求める点の座標は　$\boldsymbol{(2p-X,\ 2q-Y)}$

(2)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと，任意の定数 p に対して

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+(x-p)^3 \quad \cdots ①$$

が成り立つ．G の点 $(p,\ f(p))$ に関して $y=f(x)$ と対称なグラフは

$$2f(p)-y=f(2p-x) \quad \text{ゆえに} \quad y=2f(p)-f(2p-x) \quad \cdots ②$$

② のグラフは ① より

$$\begin{aligned} y &= 2f(p)-\{f(p)+f'(p)(2p-x-p) \\ &\qquad +\frac{1}{2}f''(p)(2p-x-p)^2+(2p-x-p)^3\} \\ &= f(p)+f'(p)(x-p)-\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+(x-p)^3 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

$f''(p)=0$，すなわち $p=-\dfrac{a}{3}$ とすると，①，③ は一致する．
したがって，G は変曲点に関して対称である．

(3)　直線 $mx+ny=0$ の方向ベクトル $\vec{d}$，法線ベクトル $\vec{n}$ を

$$\vec{d}=\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix},\quad \vec{n}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

とする．実数 s，t を用いて

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=s\vec{d}+t\vec{n}=s\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ns+mt \\ -ms+nt \end{pmatrix}$$

とすると　　$s=\dfrac{nX-mY}{m^2+n^2}$，$t=\dfrac{mX+nY}{m^2+n^2}$

したがって，直線 $mx+ny=0$ に関して点 $(X,\ Y)$ と対称な点は

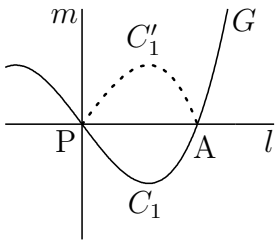
$$\begin{aligned}s\vec{d}-t\vec{n}&=\frac{nX-mY}{m^2+n^2}\begin{pmatrix}n\\-m\end{pmatrix}-\frac{mX+nY}{m^2+n^2}\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{m^2+n^2}\begin{pmatrix}-(m^2-n^2)X-2mnY\\-2mnX+(m^2-n^2)Y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって　$\left(\dfrac{\boldsymbol{-(m^2-n^2)X-2mnY}}{\boldsymbol{m^2+n^2}},\ \dfrac{\boldsymbol{-2mnX+(m^2-n^2)Y}}{\boldsymbol{m^2+n^2}}\right)$

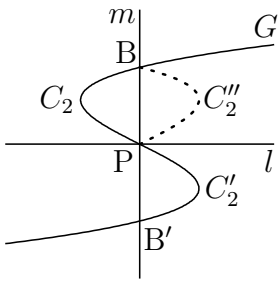
(4) G がある直線 l に関して対称であるとき，G の変曲点 P が l 上にないと仮定すると，P と l に関して対称な変曲点 P' が G にあり，G に 2 個の変曲点が存在することなる．このことは G が 3 次関数のグラフであることに反する．したがって，P は l 上にある．

P を通り，l に垂直な直線を m とする．G は P に関して対称であるから，G と l，m の位置関係について次のようになる．

i) G が P 以外に l と共有点 A をもつと仮定すると，P から A までの G の曲線部分を C_1 とすると，C_1 と l に関して対称な曲線部分 C_1' があり，C_1 および C_1' によるループ (loop) ができ，これは G が 3 次関数であることに反する．



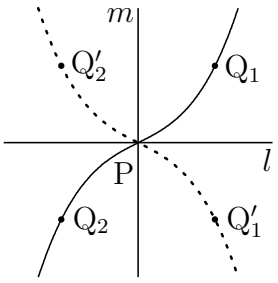
ii) G が P 以外に m と共有点 B をもつと仮定すると，P から B までの G の曲線部分を C_2 とすると，C_2 と P に関して対称な曲線部分 C_2' があり，さらに C_2' と l に関して対称な C_2'' がある．C_2 および C_2'' によるループができ，これは G が 3 次関数であることに反する．



したがって，i)，ii) により，G と l，m との共有点は P に限る．

G 上に P と異なる点 Q_1 をとり，Q_1 と P に関して対称な点を Q_2 とし，2 点 Q_1，Q_2 と l に関して対称な点をそれぞれ Q_1'，Q_2' とする．このとき，これらの 4 点を結ぶ曲線部分は，P において自己交差 (Self-Intersection) し，G が 3 次関数であることに反する．

よって，題意は成立する．



補足 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を $x=p$ でテイラー展開を行うと

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+a(x-p)^3$$

であり，$f''(p)=0$，すなわち $p=-\dfrac{b}{3a}$ とすると，曲線 $y=f(x)$ は

$$y=f(p)+f'(p)(x-p)+a(x-p)^3$$

となり，変曲点 $(p,\ f(p))$ に関して対称である．よって，(4) の結果から，3 次関数のグラフは，どんな直線に関しても線対称ではない．

5.46 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{-\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x\times\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\cos x(-\sin x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}}}{1+\cos^2 x}\\&=\frac{-\sin x(1+\cos^2 x)+\sin x\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗	0

よって　$x=0$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$，$x=\pi$ のとき最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

5.47　(1)　$s=\dfrac{1}{2}(1+1+2x)=1+x$ とおくと，ヘロンの公式により

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\sqrt{s(s-1)(s-1)(s-2x)}\\&=\sqrt{(1+x)x\cdot x(1-x)}=x\sqrt{(1+x)(1-x)}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{ABC}=rs$ に上の諸式を代入すると

$$x\sqrt{(1+x)(1-x)}=r(1+x)\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{r=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

(2)　(1) の結果から，$f(x)=r^2$ とおくと $(0<x<1)$

$$f(x)=\frac{x^2(1-x)}{1+x}=-x^2+2x-2+\frac{2}{x+1}$$

ゆえに　　$f'(x) = -2x + 2 - \dfrac{2}{(x+1)^2} = -\dfrac{2x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

したがって，$0 < x < 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	最大	↘	

$f(x)$ が最大となるとき，r は最大となる．

よって，求める x の値は　$\boldsymbol{x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

5.48　(1)　$y = \sqrt{x^2-1}$ を微分すると　$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$y - b = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}(x-a) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}x - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}} + b$$

この直線と y 軸との交点 Q の y 座標は，$x = 0$ を代入して

$$y = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}} + b$$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ は曲線 $y = \sqrt{x^2-1}$ 上の点であるから

$$b = \sqrt{a^2-1} \qquad \text{ゆえに} \qquad a^2 = b^2 + 1$$

したがって，Q の y 座標は　$y = -\dfrac{b^2+1}{b} + b = -\dfrac{1}{b}$

よって，点 Q の座標は　$\boldsymbol{\left(0, -\dfrac{1}{b}\right)}$

別解　$y = \sqrt{x^2-1}$ より，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点 P における接線の方程式は

$$ax - by = 1 \quad \text{この直線と } y \text{ 軸の交点 Q の座標は} \quad \left(0, -\frac{1}{b}\right)$$

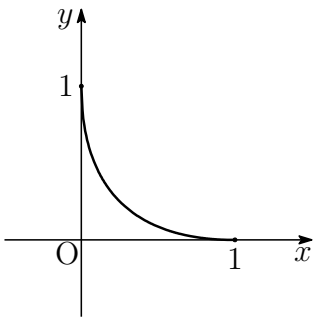
(2)　$\mathrm{P}(\sqrt{b^2+1},\ b)$，$\mathrm{Q}\left(0, -\dfrac{1}{b}\right)$ より

$$\mathrm{PQ}^2 = b^2 + 1 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = 2b^2 + \frac{1}{b^2} + 3$$

相加平均・相乗平均の関係により　$2b^2 + \dfrac{1}{b^2} \geqq 2\sqrt{2b^2 \cdot \dfrac{1}{b^2}} = 2\sqrt{2}$

したがって　$\mathrm{PQ}^2 \geqq 3 + 2\sqrt{2}$　よって，求める最小値は　$\boldsymbol{3 + 2\sqrt{2}}$

5.49 (1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より　$y=x-2\sqrt{x}+1$



ゆえに　$y'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,　$y''=\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

$0<x<1$ において，

$$y'<0,\quad y''>0$$

よって，C は下に凸のグラフで，右のようになる．

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ を x で微分すると

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'=0 \quad \text{ゆえに} \quad y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は $(0<a<1)$

$$y-b=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x-a) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{y}{\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$(a,\ b)$ は C 上の点であるから，接線 l の方程式は

$$\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{y}{1-\sqrt{a}}=1$$

よって　x 切片 $\boldsymbol{\sqrt{a}}$，y 切片 $\boldsymbol{1-\sqrt{a}}$

(3) 立体の体積を V とすると　$V=\dfrac{1}{3}\pi(1-\sqrt{a})^2\sqrt{a}$

ここで，$t=\sqrt{a}$ とおくと $(0<t<1)$

$$V=\frac{\pi}{3}(1-t)^2t=\frac{\pi}{3}(t^3-2t^2+t)$$

ゆえに　$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi}{3}(3t^2-4t+1)=\dfrac{\pi}{3}(t-1)(3t-1)$

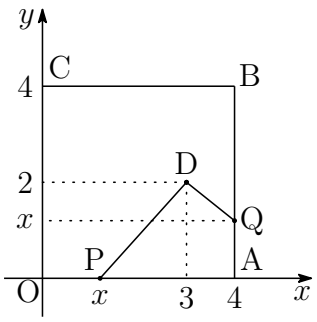
したがって，V の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{dt}$		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

よって　$t=\dfrac{1}{3}$　すなわち　$a=\dfrac{1}{9}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{81}\pi}$ をとる．

5.50 (1) $f(x)=\dfrac{\mathrm{OP}}{4}+\dfrac{\mathrm{PD}}{1}$

$$=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{4}}+\boldsymbol{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$



(2) (1) の結果を微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+4}} \quad \cdots ①$$

$f'(x)=0$ となるのは $\quad \dfrac{3-x}{\sqrt{(x-3)^2+4}}=\dfrac{1}{4} \quad \cdots ②$

② の両辺を平方して整理すると

$$16(3-x)^2=(x-3)^2+4 \quad \text{ゆえに} \quad 15(3-x)^2=4$$

② より，$3-x>0$ であるから

$$3-x=\frac{2}{\sqrt{15}} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{x=3-\frac{2}{\sqrt{15}}}$$

(3) ① を微分すると

$$f''(x)=\frac{\sqrt{(x-3)^2+4}-(x-3)\cdot\dfrac{(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+4}}}{(x-3)^2+4}$$

$$=\frac{4}{\{(x-3)^2+4\}^{\frac{3}{2}}}>0$$

(2) で求めた値を α とすると $\quad \alpha=3-\dfrac{2}{\sqrt{15}} \quad \cdots ③$

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{13}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$1+\sqrt{5}$

したがって $\qquad T_1=f(\alpha)$

② より $\qquad \sqrt{(\alpha-3)^2+4}=4(3-\alpha) \quad \cdots ④$

③，④ より $\qquad T_1=f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{4}+\sqrt{(\alpha-3)^2+4}$

$$=\frac{\alpha}{4}+4(3-\alpha)=12-\frac{15}{4}\alpha$$

$$=12-\frac{15}{4}\left(3-\frac{2}{\sqrt{15}}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

(4) (1) の図から

$$g(x)=\frac{\mathrm{OA}+\mathrm{AQ}}{4}+\frac{\mathrm{QD}}{1}=\frac{4+x}{4}+\sqrt{(x-2)^2+1}$$

このとき，$g'(x)$，$g''(x)$ は，(2)，(3) と同様に

$$g'(x)=\frac{1}{4}+\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}},\quad g''(x)=\frac{1}{\{(x-2)^2+1\}^{\frac{3}{2}}}$$

$g'(\beta)=0$ をみたす β $(0<\beta<4)$ は　$\dfrac{2-\beta}{\sqrt{(\beta-2)^2+1}}=\dfrac{1}{4}$　$\cdots$④

④ の両辺を平方して整理すると

$$16(2-\beta)^2=(\beta-2)^2+1\quad 15(2-\beta)^2=1$$

④ より，$2-\beta>0$ であるから

$$2-\beta=\frac{1}{\sqrt{15}}\quad \text{よって}\quad \beta=2-\frac{1}{\sqrt{15}}\quad \cdots⑤$$

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$g(x)$	$1+\sqrt{5}$	↘	極小	↗	$2+\sqrt{5}$

したがって　$T_2=g(\beta)$

④ より　$\sqrt{(\beta-2)^2+1}=4(2-\beta)$　$\cdots⑥$

⑤，⑥ より

$$\begin{aligned}T_2=g(\beta)&=\frac{4+\beta}{4}+\sqrt{(\beta-2)^2+1}\\&=\frac{4+\beta}{4}+4(2-\beta)=9-\frac{15}{4}\beta\\&=9-\frac{15}{4}\left(2-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{15}}{4}}\end{aligned}$$

ゆえに　$T_1-T_2=\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)-\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{15}-3}{4}>0$

よって　$\boldsymbol{T_1>T_2}$

5.51　(1) ℓ は，点 $\mathrm{A}(-1,-1)$ を通り，傾き k の直線であるから

$$y+1=k(x+1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=kx+k-1}$$

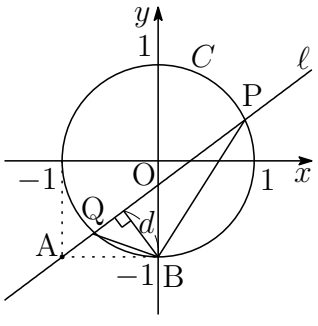
(2) (1) の結果から，P，Q は連立方程式

$$\begin{cases}kx-y=1-k & \cdots① \\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

の解である．上の 2 式を等式

$$(kx-y)^2+(x+ky)^2=(k^2+1)(x^2+y^2)$$

に代入すると



$$(1-k)^2+(x+ky)^2=k^2+1 \quad \text{ゆえに} \quad (x+ky)^2=2k$$

ℓ と C が異なる 2 点で交わるとき，右上の図より $k>0$ であるから

$$x+ky=\pm\sqrt{2k} \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$x=\dfrac{k(1-k)\pm\sqrt{2k}}{k^2+1}$，$y=\dfrac{k-1\pm k\sqrt{2k}}{k^2+1}$　(複号同順)

P，Q の位置関係に注意して

$$\mathbf{P}\left(\frac{\boldsymbol{k(1-k)+\sqrt{2k}}}{\boldsymbol{k^2+1}},\ \frac{\boldsymbol{k-1+k\sqrt{2k}}}{\boldsymbol{k^2+1}}\right),$$

$$\mathbf{Q}\left(\frac{\boldsymbol{k(1-k)-\sqrt{2k}}}{\boldsymbol{k^2+1}},\ \frac{\boldsymbol{k-1-k\sqrt{2k}}}{\boldsymbol{k^2+1}}\right)$$

(3) (2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{2\sqrt{2k}}{k^2+1}(1,\ k)$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{2\sqrt{2k}}{k^2+1}\sqrt{1+k^2}=\dfrac{2\sqrt{2k}}{\sqrt{k^2+1}}$

点 $\mathrm{B}(0,-1)$ と直線 $\ell: kx-y+k-1=0$ の距離 d は，$k>0$ に注意して

$$d=\frac{|k\cdot 0-1+k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$$

△BPQ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|\times d=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2k}}{\sqrt{k^2+1}}\times\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}k^{\frac{3}{2}}}}{\boldsymbol{k^2+1}}$$

(4) (3) の結果から　$\dfrac{dS}{dk}=-\dfrac{\sqrt{k}(k^2-3)}{\sqrt{2}(k^2+1)^2}$

したがって，$k>0$ における S の増減表は，次のようになる．

k	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$\frac{dS}{dk}$		$+$	0	$-$
S		↗	極大	↘

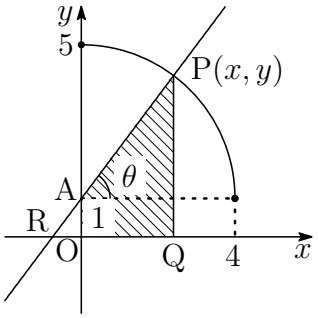
よって，求める k の値は　$\boldsymbol{k=\sqrt{3}}$

5.52　(1) $\mathbf{P(4\cos\theta,\ 4\sin\theta+1)}$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

(2) $S = \dfrac{1}{2}(\mathrm{OA} + \mathrm{PQ}) \times \mathrm{OQ}$

$= \dfrac{1}{2}\{1 + (4\sin\theta + 1)\} \times 4\cos\theta$

$= \boldsymbol{4\cos\theta(2\sin\theta + 1)}$



(3) $\dfrac{dS}{d\theta} = -4\sin\theta(2\sin\theta + 1) + 4\cos\theta \cdot 2\cos\theta$

$= -8\sin^2\theta - 4\sin\theta + 8(1 - \sin^2\theta)$

$= -4(4\sin^2\theta + \sin\theta - 2)$

$\dfrac{d^2S}{d\theta^2} = -4(4\sin 2\theta + \cos\theta)$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{d^2S}{d\theta^2} < 0$ であるから

$$\frac{dS}{d\theta} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\sin\theta = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}}$$

をみたす θ のとき S は最大となる．

(4) 直線 AP と x 軸との交点を R とすると　$\mathrm{OR} = \dfrac{1}{\tan\theta}$

△RAO を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積は

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \times \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\pi\cos\theta}{3\sin\theta}$$

△RAO と △RPQ の相似比は $1 : (4\sin\theta + 1)$ であるから

$$V = \frac{\pi\cos\theta}{3\sin\theta}\{(4\sin\theta + 1)^3 - 1^3\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{4\pi}{3}\cos\theta(16\sin^2\theta + 12\sin\theta + 3)}$$

(5) (4) の結果から

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{4\pi}{3}\left\{-\sin\theta(16\sin^2\theta + 12\sin\theta + 3) + \cos\theta(32\sin\theta\cos\theta + 12\cos\theta)\right\}$$
$$= \frac{4\pi}{3}\left\{-\sin\theta(16\sin^2\theta + 12\sin\theta + 3) + (1 - \sin^2\theta)(32\sin\theta + 12)\right\}$$
$$= -\frac{4\pi}{3}(4\sin\theta - 3)(12\sin^2\theta + 15\sin\theta + 4)$$

ここで，$\sin\alpha = \dfrac{3}{4}\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$0<\theta<\alpha$ のとき $\dfrac{dV}{d\theta}>0$，　$\alpha<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dV}{d\theta}<0$

よって　V は $\sin\theta=\dfrac{3}{4}$ で最大となる．

5.53　(1) $\mathrm{Q}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_1(p,\ p)$，$\mathrm{Q}_1(p,\ 0)$ より　$\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1=1-p$，$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1=p$ であるから

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1\times\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1-p)p}$$

(2) 2 点 $\mathrm{Q}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_1(p,\ p)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{p}{p-1}$

点 $\mathrm{Q}_{n-1}(q,\ 0)$ を通り，これに平行な直線は　$y=\dfrac{p}{p-1}(x-q)$

この直線と直線 $y=x$ との交点 $(pq,\ pq)$ が P_n であるから，

Q_n の x 座標は　　$\boldsymbol{pq}$

(3) (2) の結果から，$\mathrm{Q}_{n-1}(p^{n-1},\ 0)$，$\mathrm{Q}_n(p^n,\ 0)$，また，$\mathrm{Q}_n$ の座標から，$\mathrm{P}_n(p^n,\ p^n)$

$\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n=p^{n-1}-p^n$，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=p^n$ であるから

$$S_n=\frac{1}{2}\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n\times\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\frac{1}{2}(p^{n-1}-p^n)p^n=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1-p)p^{2n-1}}$$

(4) (3) の結果から

$$\frac{dS_n}{dp}=\frac{1}{2}\{(2n-1)p^{2n-2}-2np^{2n-1}\}=\frac{1}{2}(2n-1-2np)p^{2n-2}$$

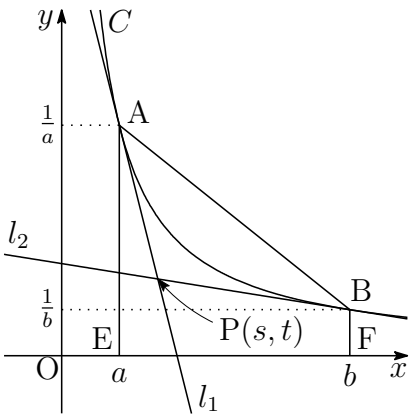
ゆえに，$0<p<\dfrac{2n-1}{2n}$ のとき $\dfrac{dS_n}{dp}>0$，$\dfrac{2n-1}{2n}$ のとき $\dfrac{dS_n}{dp}<0$

よって，　$\boldsymbol{p=\dfrac{2n-1}{2n}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4n}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}}$ をとる．

(5) (4) で求めた S_n より $nS_n=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nS_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{2n-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}}=\boldsymbol{\frac{1}{4e}}\end{aligned}$$

5.54 (1) $y=\dfrac{1}{x}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$



$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$$

ゆえに　$y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a}$

これが，$\mathrm{P}(s,\ t)$ を通るから

$$t=-\frac{1}{a^2}s+\frac{2}{a}$$

上式を a について，整理すると　$ta^2-2a+s=0$

$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ についても同様にして　$tb^2-2b+s=0$

上の 2 式から，a，b は λ に関する 2 次方程式

$$t\lambda^2-2\lambda+s=0 \quad \cdots(*)$$

の解であるから $(a<b)$，$t>0$，$st<1$ に注意して

$$\boldsymbol{a=\frac{1-\sqrt{1-st}}{t},\quad b=\frac{1+\sqrt{1-st}}{t}}$$

(2) 方程式 $(*)$ の解と係数の関係および (1) の結果から

$$a+b=\frac{2}{t},\quad ab=\frac{s}{t},\quad b-a=\frac{2\sqrt{1-st}}{t} \quad \cdots(**)$$

台形 ABFE の面積は，上式により

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\mathrm{AF}+\mathrm{BE})\cdot\mathrm{EF}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(b-a)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}(b-a)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{t}\cdot\frac{t}{s}\cdot\frac{2\sqrt{1-st}}{t}\\&=\frac{2\sqrt{1-st}}{st}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{1-u}}{u}}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\left(a-s,\ \dfrac{1}{a}-t\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(b-s,\ \dfrac{1}{b}-t\right)$ であるから $(a<b)$，

(∗∗) および $u = st < 1$ により

$$\begin{aligned}
\triangle \mathrm{PAB} &= \frac{1}{2}\left|(a-s)\left(\frac{1}{b}-t\right)-(b-s)\left(\frac{1}{a}-t\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|s\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+t(b-a)-\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}(b-a)\left|\frac{s}{ab}+t-\frac{a+b}{ab}\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1-st}}{t}\left|s\cdot\frac{t}{s}+t-\frac{2}{t}\cdot\frac{t}{s}\right| \\
&= 2\sqrt{1-st}\left|1-\frac{1}{st}\right| = 2\sqrt{1-u}\left|1-\frac{1}{u}\right| \\
&= 2\sqrt{1-u}\cdot\frac{|u-1|}{u} = \boldsymbol{\frac{2(1-u)^{\frac{3}{2}}}{u}}
\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から　　$S(u) = \dfrac{2(1-u)^{\frac{3}{2}}}{u}$

これを微分すると　$S'(u) = -\dfrac{(u+2)\sqrt{1-u}}{u^2}$

したがって，$0 < u < 1$ において　$S'(u) < 0$

よって，$S(u)$ は区間 $0 < u < 1$ で減少する．

(5) 条件から，$\mathrm{P}(s,\ t)$ について　$\dfrac{s}{3}+t=1\ \ (0<t<1)$

すなわち　　$s = 3-3t\ (0<t<1)$

ゆえに　$u = st = (3-3t)t = -3\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

したがって，u は，$s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる．

(3)，(4) の結果から，$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{3}{2}},\ \boldsymbol{\frac{1}{2}}\right)$ で △PAB は最小となり，最小値は

$$S\left(\frac{3}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

補足 $s > 0$，$t > 0$ であるから相加平均・相乗平均の関係により

$$1 = \frac{s}{3}+t \geqq 2\sqrt{\frac{s}{3}\cdot t} = 2\sqrt{\frac{u}{3}} \quad \text{よって} \quad u \leqq \frac{3}{4}$$

等号が成立するのは　$\dfrac{s}{3}=t$　すなわち　$s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$

5.55 (1) (i) $f(x)=x^2+\log x-a\ (x>0)$ とおくと　$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$

ゆえに，$f(x)$ は単調増加.

また　$\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$,　　$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

よって，$f(x)=0$ を満たす x がただ 1 つ存在する.

(ii) (i) の結果から，$f(x)=0$ を満たすただ 1 つの x を b とすると

$$f(b)=0 \qquad \cdots ①$$

$g(x)=\log x$，$d(x)=\mathrm{AX}^2=x^2+\{g(x)-a\}^2$ とおくと

$$\frac{1}{2}d'(x)=x+\{g(x)-a\}g'(x) \qquad \cdots ②$$
$$=x+(\log x-a)\frac{1}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

AX の長さが最短になる点で $d(x)$ は極小となるから，このとき

$$d'(x)=0 \quad \text{すなわち} \quad f(x)=0$$

よって，上式を満たす点は $\mathrm{B}(b,\ \log b)$ のみである.

(iii) (ii) の結果から，$d'(b)=0$ であるから，② より

$$b+\{g(b)-a\}g'(b)=0$$

$y=g(x)$ の B における接ベクトルを $\vec{v}=(1,\ g'(b))$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}=b+\{g(b)-a\}g'(b)$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}=0$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{v}$

よって，線分 AB は，B における曲線の接線 l と直交する.

(2) ① から　　$b^2+\log b-a=0 \quad \cdots ③$

$\mathrm{AB}^2=6$ であるから　$b^2+(\log b-a)^2=6 \quad \cdots ④$

③，④ から　$b^2+b^4=6$　ゆえに　$(b^2+3)(b^2-2)=0$

すなわち　$b=\sqrt{2}$　　これを ③ に代入して　$\boldsymbol{a=2+\dfrac{1}{2}\log 2}$

5.56 (1) $x=(v_0\cos\alpha)t$，$y=(v_0\sin\alpha)t-\dfrac{1}{2}gt^2$ から t を消去すると

$$\begin{aligned} y&=(\tan\alpha)x-\frac{gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}\\ &=(\tan\alpha)x\left(1-\frac{gx}{2{v_0}^2\sin\alpha\cos\alpha}\right)\\ &=(\tan\alpha)x\left(1-\frac{gx}{{v_0}^2\sin 2\alpha}\right)\end{aligned}$$

$x=l$ のとき $y=0$ であるから

$$1-\frac{gl}{{v_0}^2\sin 2\alpha}=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{l=\frac{{v_0}^2\sin 2\alpha}{g}}$$

(2) (1) の結果から

$$y=(\tan\alpha)x\left(1-\frac{x}{l}\right)=-\frac{(\tan\alpha)}{l}x(x-l)$$

よって $\qquad S=\dfrac{\tan\alpha}{6l}(l-0)^3=\dfrac{\tan\alpha}{6}l^2$

これに (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned} S&=\frac{\tan\alpha}{6}\left(\frac{{v_0}^2\sin 2\alpha}{g}\right)^2=\frac{\tan\alpha}{6}\times\frac{{v_0}^4\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}\\ &=\boldsymbol{\frac{2{v_0}^4}{3g^2}\sin^3\alpha\cos\alpha}\end{aligned}$$

(3) $f(\alpha)=\sin^3\alpha\cos\alpha$ $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(\alpha)&=3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^4\alpha\\ &=\sin^2\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha(4\cos^2\alpha-1)\end{aligned}$$

したがって，$f(\alpha)$ の増減表は次のようになる．

α	(0°)	$\cdots$	60°	$\cdots$	(90°)
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↘	

よって，S の最大値は $\qquad \dfrac{2{v_0}^4}{3g^2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{16}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}{v_0}^4}{8g^2}}$

5.57 (1) $E : \dfrac{x^2}{8} + y^2 = 1$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は　$\dfrac{ax}{8} + by = 1$

この接線の x 切片，y 切片はそれぞれ，$\dfrac{8}{a}$，$\dfrac{1}{b}$ であるから

$$f(a) = \frac{8}{a} + \frac{1}{b} \quad \cdots ①$$

点 $(a,\ b)$ は E 上の点であるから，$a > 0$，$b > 0$ に注意して

$$\frac{a^2}{8} + b^2 = 1 \quad \cdots ② \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{\sqrt{8 - a^2}}{2\sqrt{2}} \quad (0 < a < 2\sqrt{2})$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{f(a) = \dfrac{8}{a} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8 - a^2}}}$

(2) ① は，a の関数であるから，その第 1 次，第 2 次導関数を求めると

$$f'(a) = -\frac{8}{a^2} - \frac{b'}{b^2} \quad \cdots ③$$

$$f''(a) = \frac{16}{a^3} + \frac{2(b')^2}{b^3} - \frac{b''}{b^2} \quad \cdots ④$$

② を a で微分すると　$\dfrac{a}{4} + 2bb' = 0 \quad \cdots ⑤$　ゆえに　$b' = -\dfrac{a}{8b} \quad \cdots ⑤'$

⑤′ を ③ に代入すると

$$f'(a) = -\frac{8}{a^2} + \frac{a}{8b^3} = \frac{(a - 4b)(a^2 + 4ab + 16b^2)}{8a^2b^3} \quad \cdots ③'$$

⑤ を a について微分すると　$\dfrac{1}{4} + 2(b')^2 + 2bb'' = 0$

⑤′ をこれに代入し，b'' について解くと　$b'' = -\dfrac{1}{8b} - \dfrac{a^2}{64b^3} \quad \cdots ⑥$

⑤′，⑥ を ④ に代入して整理すると

$$f''(a) = \frac{16}{a^3} + \frac{1}{8b^3} + \frac{3a^2}{64b^5} \quad \cdots ④'$$

$a > 0$，$b > 0$ であるから，常に　$f''(a) > 0$

ゆえに，$f'(a) = 0$ となるとき，$f(a)$ は極小かつ最小である．

③′ より，$f'(a) = 0$ となるとき　$a = 4b \quad \cdots ⑦$

②，⑦ を $a > 0$ に注意して解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$

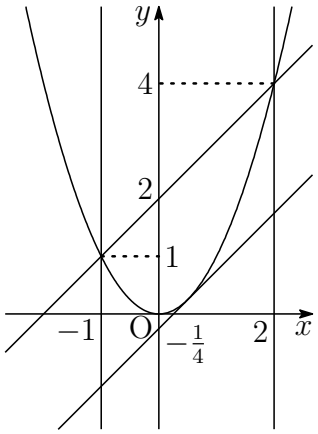
5.58 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+k$，$x=-1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積を $S(k)$ とする．放物線 $y=x^2$ と，直線 $x=-1$，$x=2$ は，それぞれ $(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ で交わり，直線 $y=x+k$ は，$k=2$ のとき，これらの 2 点を通る．また，放物線 $y=x^2\cdots$① と直線 $y=x+k\cdots$② の方程式から y を消去して

$$x^2=x+k \quad \text{ゆえに} \quad x^2-x-k=0 \quad \cdots(*)$$

放物線 ① と直線 ② が接するとき

$$D=(-1)^2-4\cdot1(-k)=0 \quad \text{すなわち} \quad k=-\frac{1}{4}$$

右の図から

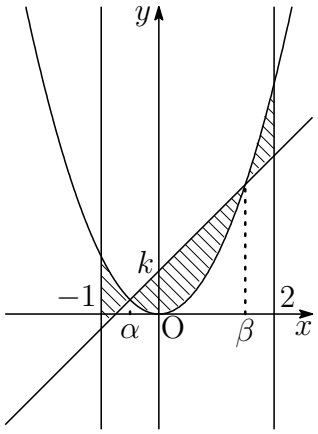


$$S(2)=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$
$$S\left(-\frac{1}{4}\right)=3\left\{2-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}-S(2)=\frac{9}{4}$$

$k>2$ のとき　　$S(k)=S(2)+3(k-2)$

$k<-\dfrac{1}{4}$ のとき　$S(k)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)+3\left(-\dfrac{1}{4}-k\right)$

したがって，$S(k)$ の最小値は，$-\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq 2$ において調べればよい．このとき，放物線 ① と直線 ② の共有点の x 座標を α，β $(-1\leqq\alpha\leqq\beta\leqq 2)$ とすると，方程式 $(*)$ の解と係数の関係により



$$\alpha+\beta=1, \quad \alpha\beta=-k \quad \cdots(**)$$

右の図から

$$S(k)=\int_{-1}^{2}|x^2-(x+k)|dx$$

ここで，関数 x^2-x-k の原始関数の 1 つを $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-kx$ とおくと

$$S(k)=\Big[\,F(x)\,\Big]_{-1}^{\alpha}-\Big[\,F(x)\,\Big]_{\alpha}^{\beta}+\Big[\,F(x)\,\Big]_{\beta}^{2}$$
$$=-2\{F(\beta)-F(\alpha)\}+F(2)-F(-1)$$

$$F(2)-F(-1)=\left(\frac{2}{3}-2k\right)-\left(-\frac{5}{6}+k\right)=\frac{3}{2}-3k$$

(**) より　$x^2-x-k=(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{1+4k}$$

また　$F(\beta)-F(\alpha)=\Big[\,F(x)\,\Big]_{\alpha}^{\beta}=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)dx$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(1+4k)^{\frac{3}{2}}$$

ゆえに　$S(k)=\dfrac{1}{3}(1+4k)^{\frac{3}{2}}+\dfrac{3}{2}-3k\quad\left(-\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq 2\right)$

$$S'(k)=2\sqrt{1+4k}-3$$

したがって，$S(k)$ の増減表は，次のようになる．

k	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{16}$	$\cdots$	2
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$	$\frac{9}{4}$	↘	$\frac{27}{16}$	↗	$\frac{9}{2}$

よって　$\boldsymbol{k=\dfrac{5}{16}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{27}{16}}$

5.59　(1) 三角形の成立条件により

$$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b$$

$a+b+c=1$ より，$c=1-a-b$ を上の 3 式に代入すると

$$a+b>1-a-b,\quad b+(1-a-b)>a,\quad (1-a-b)+a>b$$

したがって　$a+b>\dfrac{1}{2},\quad a<\dfrac{1}{2},\quad b<\dfrac{1}{2}$

$9ab=1$ より，$b=\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$a+\frac{1}{9a}>\frac{1}{2}\quad\cdots①,\quad a<\frac{1}{2}\quad\cdots②,\quad \frac{1}{9a}<\frac{1}{2}\quad\cdots③$$

ここで，$a>0$ であるから，相加・相乗平均の関係により

$$a+\frac{1}{9a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{9a}}=\frac{2}{3}$$

ゆえに，$a>0$ について，① は成立する．

③ を解くと　$a>\dfrac{2}{9}$　よって，これと ② から　$\boldsymbol{\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}}$

(2) 余弦定理により　$\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$c=1-a-b$，$ab=\dfrac{1}{9}$，$b=\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2ab}=\frac{2a+2b-2ab-1}{2ab}$$
$$=\frac{2a+2b-2\cdot\frac{1}{9}-1}{2\cdot\frac{1}{9}}=9(a+b)-\frac{11}{2}$$
$$=9\left(a+\frac{1}{9a}\right)-\frac{11}{2}=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$$

ここで，$f(a)=9a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{11}{2}$ $\left(\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$f'(a)=9-\frac{1}{a^2}=\frac{(3a+1)(3a-1)}{a^2}$$

a	$\left(\frac{2}{9}\right)$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	(1)	↘	$\frac{1}{2}$	↗	(1)

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1}$

5.60 (1) $\mathrm{RQ}=2\sin\theta$，$\mathrm{PR}=\mathrm{PQ}=\sqrt{(\cos\theta+l)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2l\cos\theta+l^2+1}$

よって　$\boldsymbol{f(\theta)=2\sin\theta+2\sqrt{2l\cos\theta+l^2+1}}$

(2) $g(\theta)=\sqrt{2l\cos\theta+l^2+1}$ とおくと　$g'(\theta)=-\dfrac{l\sin\theta}{g(\theta)}$

$f(\theta)=2\sin\theta+2g(\theta)$ を微分すると

$$f'(\theta)=2\cos\theta-\frac{2l\sin\theta}{g(\theta)}=\frac{2}{g(\theta)}\{g(\theta)\cos\theta-l\sin\theta\}$$
$$=\frac{2\{(2l\cos\theta+l^2+1)\cos^2\theta-l^2\sin^2\theta\}}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta+l\sin\theta\}}$$
$$=\frac{2\{l^2(2\cos^2\theta-1)+2l\cos^3\theta+\cos^2\theta\}}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta+l\sin\theta\}}$$
$$=\frac{2(l+\cos\theta)\{l(2\cos^2\theta-1)+\cos\theta\}}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta+l\sin\theta\}}$$

$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$\dfrac{l+\cos\theta}{g(\theta)\{g(\theta)\cos\theta+l\sin\theta\}}>0$

ここで，$h(\theta)=l(2\cos^2\theta-1)+\cos\theta$ とおくと

$$h'(\theta)=-\sin\theta(4l\cos\theta+1)<0$$

ゆえに，$h(\theta)$ は単調減少で，$h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-l$ であるから

$$h(\alpha)=0 \quad \left(\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

をみたす α が唯一存在する．

$$l(2\cos^2\alpha-1)+\cos\alpha=0 \quad \text{すなわち} \quad \cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{8l^2+1}}{4l}$$

$f'(\theta)$ と $h(\theta)$ の符号は一致するから，$f(\theta)$ の増減表は次のようになる．

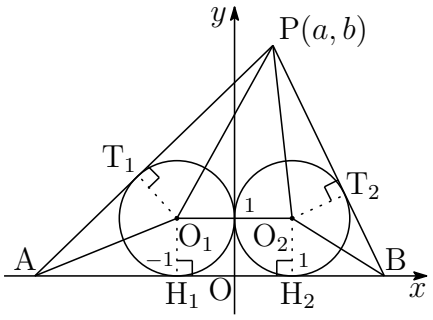
θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	極大	↘	

よって，$f(\theta)$ の最大値は

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=2\sin\alpha+2\sqrt{2l\cos\alpha+l^2+1}\\&=2\sqrt{1-\cos^2\alpha}+2\sqrt{2l\cos\alpha+l^2+1}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2l}\sqrt{8l^2-2+2\sqrt{8l^2+1}}+\sqrt{4l^2+2+2\sqrt{8l^2+1}}}\end{aligned}$$

5.61 (1) C_1，C_2 の中心をそれぞれ O_1，O_2 とおく．O_1 から PA，AB にそれぞれ垂線 O_1T_1，O_1H_1 を引く．また，O_2 から PB，AB にそれぞれ垂線 O_2T_2，O_2H_2 を引く．右の図形の面積について

$$\begin{aligned}\triangle PAB&=\frac{1}{2}AB\cdot b\\ \triangle PO_1O_2&=b-1\\ \text{台形 }O_1ABO_2&=\frac{1}{2}(2+AB)\\ \triangle O_1PA&=\frac{1}{2}PA\\ \triangle O_1PB&=\frac{1}{2}PB\end{aligned}$$



$\triangle PAB=\triangle PO_1O_2+$ 台形 $O_1ABO_2+\triangle O_1PA+\triangle O_1PB$ であるから

$$\frac{1}{2}AB\cdot b=b-1+\frac{1}{2}(2+AB)+\frac{1}{2}PA+\frac{1}{2}PB$$

整理すると　　$(b-1)\mathrm{AB}=\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+2b$　$\cdots$①

また　　$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}=(\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2})+(\mathrm{AT_1}+\mathrm{BT_2})$　$\cdots$②

$\mathrm{AT_1}+\mathrm{BT_2}=\mathrm{AH_1}+\mathrm{BH_2}=\mathrm{AB}-2$　$\cdots$③

①，②，③ より

$$(b-2)\mathrm{AB}=\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2}+2(b-1)\quad\cdots(*)$$

$b>2$ であるから，$\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2}$ が最小のとき，AB は最小となる．

$$\begin{aligned}\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2}&=\sqrt{\mathrm{O_1P^2}-\mathrm{O_1T_1}^2}+\sqrt{\mathrm{O_2P^2}-\mathrm{O_2T_2}^2}\\&=\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2-1^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2-1^2}\\&=\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}+\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}\end{aligned}$$

b は $a>2$ の定数であるから，$f(a)=\mathrm{PT_1}+\mathrm{PT_2}$ とおくと

$$\begin{aligned}f(a)&=\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}+\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}\\f'(a)&=\frac{a+1}{\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}}+\frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}}\\f''(a)&=\frac{b(b-2)}{\{(a+1)^2+b(b-2)\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{b(b-2)}{\{(a-1)^2+b(b-2)\}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$f''(a)>0$ であるから，$f'(a)$ は単調増加である．また $f'(0)=0$ より

$$a<0\text{ のとき }f'(a)<0,\quad a>0\text{ のとき }f'(a)>0$$

したがって，$f(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	↘	$2(b-1)$	↗

$(*)$ より，$a=0$ のとき，AB は最小値 $\dfrac{4(b-1)}{b-2}$ をとる．

(2) △PAB が最小となるのは，AB が最小のときである．
したがって，(1) の結果から

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot b&=\frac{1}{2}\cdot\frac{4(b-1)}{b-2}\cdot b=\frac{2b(b-1)}{b-2}\\&=2\left(b-2+\frac{2}{b-2}+3\right)\quad\cdots④\end{aligned}$$

$b-2>0$，$\dfrac{2}{b-2}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$b-2+\frac{2}{b-2}\geqq 2\sqrt{(b-2)\times\frac{2}{b-2}}=2\sqrt{2}\quad\cdots⑤$$

④，⑤ より　　$\triangle \mathrm{PAB}\geqq 2(2\sqrt{2}+3)$

(等号が成り立つのは　$b-2=\dfrac{2}{b-2}$　すなわち　$b=2+\sqrt{2}$ のとき)

よって，求める最小値は　$\boldsymbol{2(2\sqrt{2}+3)}$

5.62　(1)　$f(x)=2x^2+(1-a^2)\log(x+1)$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=4x+\frac{1-a^2}{x+1}=\frac{4x(x+1)+1-a^2}{x+1}\\&=\frac{(2x+1)^2-a^2}{x+1}=\frac{(2x+1+a)(2x+1-a)}{x+1}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{a-1}{2}$

$a>0$ であるから　　$-\dfrac{a+1}{2}<\dfrac{a-1}{2}$

$x>-1$ で $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，$a>0$ に注意して

$$-\frac{a+1}{2}>-1\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{0<a<1}$$

(2)　(1) の結果から，$0<a<1$ のときの $f(x)$ の増減表は，次ようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{a+1}{2}$	$\cdots$	$\frac{a-1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	極大値	↘	極小値	↗

極大値は　$f\left(-\dfrac{a+1}{2}\right)=2\left(-\dfrac{a+1}{2}\right)^2+(1-a^2)\log\left(-\dfrac{a+1}{2}+1\right)$

$$=\frac{\boldsymbol{(a+1)^2}}{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{(1-a^2)\log\frac{1-a}{2}}$$

極小値は　$f\left(\dfrac{a-1}{2}\right)=2\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2+(1-a^2)\log\left(\dfrac{a-1}{2}+1\right)$

$$=\frac{\boldsymbol{(a-1)^2}}{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{(1-a^2)\log\frac{1+a}{2}}$$

(3) $g(a)=f\left(\dfrac{a-1}{2}\right)$ とおくと

$$g'(a)=a-1-2a\log\log\frac{1+a}{2}+(1-a^2)\times\frac{1}{1+a}=-2a\log\frac{1+a}{2}$$

$0<a<1$ より $g'(a)>0$ であるから，$g(a)$ は単調増加.

$0<a<1$ において　$g(a)>g(0)=\dfrac{1}{2}+\log\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-2\log 2}{2}$

よって，極小値 $f\left(\dfrac{a-1}{2}\right)$ は，$\dfrac{1-2\log 2}{2}$ より大きい.

5.63 (1) $f(x)=\log_e x-c(x-1)$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{x}-c=\frac{1-cx}{x}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{c}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

右の増減表により　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{c}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{-\log_e c-1+c}$

(2) (1) の結果から　$m=-\log_e c-1+c\ \ (c>0)$

これを微分すると

$$\frac{dm}{dc}=-\frac{1}{c}+1=\frac{c-1}{c}$$

c	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dm}{dc}$		$-$	0	$+$
m		↘	0	↗

右の増減表から　$m\geqq 0$

(3) すべての x に対して，$f(x)\leqq 0$ が成り立つとき，
$f(x)$ の最大値 m が $m\leqq 0$ であるから，(2) の結果から

$$m=0\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{c=1}$$

(4) $a>1$ のとき，すべての x $(x>0)$ に対して

$$\log_a x-b(x-1)\leqq 0$$

が成り立つとき

$$\frac{\log_e x}{\log_e a}-b(x-1)\leqq 0\quad \text{ゆえに}\quad \log_e x-(b\log_e a)\cdot(x-1)\leqq 0$$

$c=b\log_e a$ とおくと，上の第 2 式は　　$f(x)\leqq 0$

これがすべての x に対して成り立つとき，(3) の結果から

$$\boldsymbol{b\log a=1}$$

5.64 (1) $a=3$ のとき　$f(x)=3x-2\cdot 3\sin x\cos x=3x-3\sin 2x$

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=3-6\cos 2x$

ゆえに，$0\leqq x\leqq \pi$ における $f(x)$ の増減表および極値は次のようなる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{\pi-3\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{2}$	↘	3π

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき**極小値** $\boldsymbol{\dfrac{\pi-3\sqrt{3}}{2}}$，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{5\pi+3\sqrt{3}}{2}}$

(2) $a=1$ のと　$f(x)=3x-\sin 2x$

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=3-2\cos 2x$

$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調増加．$f(0)=0$ であるから

$x\geqq 0$ において　$f(x)\geqq f(0)$　すなわち　$f(x)\geqq 0$

(3) $f(x)=3x-a\sin 2x$ を微分すると　$f'(x)=3-2a\cos 2x$

(i) $0<\dfrac{2a}{3}\leqq 1$　すなわち　$0<a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

$$f'(x)=3\left(1-\frac{2a}{3}\cos 2x\right)\text{ より}\quad f'(x)\geqq 0$$

$f(0)=0$ であるから　$x\geqq 0$ において　$f(x)\geqq 0$

(ii) $0<\dfrac{3}{2a}<1$　すなわち　$a>\dfrac{3}{2}$ のとき

$$f'(x)=2a\left(\frac{3}{2a}-\cos 2x\right)\text{ より}\quad \cos 2\alpha=\frac{3}{2a}\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$$

をみたす α が存在する．このとき，$0<x<\alpha$ で $f(x)$ は単調減少であり，$f(0)=0$ であるから　$f(\alpha)<0$

よって，$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$ が成り立つ a の値の範囲は　$\boldsymbol{0<a\leqq\dfrac{3}{2}}$

(4) $g(x)=2x-b\sin 2x$，$g(0)=0$ であるから

$$\frac{3}{2}g'(x)\geqq 0\quad\text{すなわち}\quad 3x-\frac{3b}{2}\sin 2x\geqq 0$$

を満たせばよいので，(3) の結果から

$$0<\frac{3b}{2}\leqq\frac{3}{2}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{0<b\leqq 1}$$

5.65 (1) $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\dfrac{2}{\pi}-x}$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{(\sin x-x\cos x)'\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)-(\sin x-x\cos x)\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)'}{\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)^2}$$

$$=\frac{x\sin x\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)-(\sin x-x\cos x)\sin x}{\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)^2}=\frac{\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{\pi}x-\sin x}\right)\boldsymbol{\sin x}}{\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{\pi}-\cos x}\right)^{\boldsymbol{2}}}$$

(2) $\alpha(x)=\dfrac{2}{\pi}x-\sin x$ とおくと　　$\alpha\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

$\alpha'(x)=\dfrac{2}{\pi}-\cos x$ であるから，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき　$\alpha'(x)>0$

したがって，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき　$\alpha(x)>0$

上式および (1) の結果から，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき　$f'(x)>0$

(3) (2) の結果から，$f'(x)$ は，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ において，単調増加であるから

$$\frac{\pi}{2}<x<\pi \text{ のとき}\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(x)<f(\pi)$$

ここで　　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2},\quad f(\pi)=\dfrac{\pi}{\dfrac{\pi}{2}+1}<\dfrac{\pi}{1}=\pi$

よって　　$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{2}<f(x)<\pi$

(4) $\beta(x)=\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos x\right)\{g(x)-f(x)\}$ とおくと

$$\beta(x)=\left(\frac{2}{\pi}-\cos x\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)-(\sin x-x\cos x)$$

$$=\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x-\sin x+\frac{1}{2}$$

$$\beta'(x)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{\pi}$$

$$\beta''(x)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x$$

また　　$\beta\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\ \beta'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\pi},\ \beta''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

上の結果から，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ において

$\beta''(x) > 0$ により　　$\beta'(x) > \beta'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\pi} > 0$

$\beta'(x) > 0$ により　　$\beta(x) > \beta\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

したがって，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき，$\beta(x) > 0$ より

$$\left(\frac{2}{\pi} - \cos x\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) - (\sin x - x\cos x) > 0$$

このとき，$\dfrac{2}{\pi} - \cos x > 0$ であるから

$$\frac{\sin x - x\cos x}{\dfrac{2}{\pi} - \cos x} < \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$$

よって，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき　$f(x) < g(x)$

5.66　(1)　$x > 0$ のとき $1 + x > 1$ であるから　$\log(1+x) > 0$　$\cdots$①

$f(x) = \left(x - \dfrac{1}{6}x^2\right) - \log(1+x)$ とすると

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{1+x} = \frac{x(2-x)}{3(1+x)}$$

$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大 0	↘	$\frac{3-4\log 2}{2}$

$\log_2 < 0.70$ より $\dfrac{3 - 4\log 2}{2} > 0$ であるから，$0 < x \leqq 3$ において

$$f(x) > 0 \quad \text{すなわち} \quad \log(1+x) < x - \frac{1}{6}x^2 \quad \cdots ②$$

①，② より　$0 < x \leqq 3$ のとき　$0 < \log(1+x) < x - \dfrac{1}{6}x^2$　$\cdots ③$

したがって　$0 < x < 3$ のとき　$0 < \log(1+x) < x - \dfrac{1}{6}x^2$

(2)　$0 < a_n < \dfrac{6}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を (A) とする．

［1］$n=1$ のとき，$0<a_1=a<3$ より

$$0<a_1<\frac{6}{1+1}$$

であるから (A) が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成り立つ，すなわち

$$0<a_k<\frac{6}{k+1}$$

が成り立つと仮定すると

$$1<1+a_k<1+\frac{6}{k+1}$$

対数をとると　$\log 1<\log(1+a_k)<\log\left(1+\dfrac{6}{k+1}\right)$

ゆえに　　$0<a_{k+1}<\log\left(1+\dfrac{6}{k+1}\right)$　$\cdots$④

$0<\dfrac{6}{k+1}\leqq 3$ であるから，③ より

$$\log\left(1+\frac{6}{k+1}\right)<\frac{6}{k+1}-\frac{1}{6}\left(\frac{6}{k+1}\right)^2=\frac{6k}{(k+1)^2}$$
$$<\frac{6k}{k^2+2k}=\frac{6}{(k+1)+1}\quad\cdots⑤$$

④，⑤ より

$$0<a_{k+1}<\frac{6}{(k+1)+1}$$

したがって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］からすべての自然数 n について (A) が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1}=0$$

であるから，はさみうちの原理を (A) に適用して

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

5.67　(1)　$\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta\quad(0<\theta<\pi)\qquad\cdots(*)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta\neq 0$ であるから　$a=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}$

$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと

$$f'(\theta)=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(\theta)<0$ であるから，$f(\theta)$ は単調減少．

$$\lim_{\theta\to+0}f(\theta)=\infty,\quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}f(\theta)=-\infty$$

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$f(\theta)=a$ をみたす θ はただ 1 つ存在する．

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ は，$(*)$ の解ではない．$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

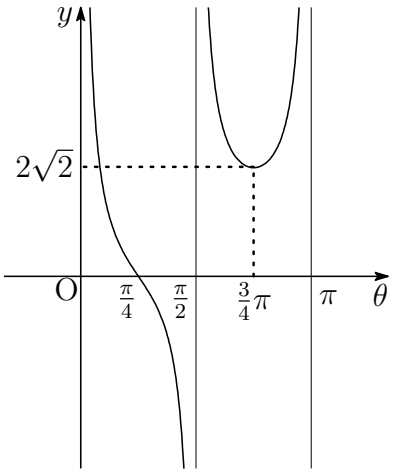
$$f'(\theta)=-\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=-\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\sin2\theta\right)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$f(\theta)$ の増減表は次のようなる．

θ	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0}f(\theta)=\infty,\quad \lim_{\theta\to\pi-0}f(\theta)=\infty$$

(1) および上の結果から，$y=f(\theta)$ のグラフは右のようになる．
$y=f(\theta)$ と $y=a$ の共有点の個数が，$(*)$ の解の個数であるから



$$\begin{cases}\boldsymbol{0<a<2\sqrt{2}}\text{のとき} & \textbf{1 個}\\ \boldsymbol{a=2\sqrt{2}}\text{のとき} & \textbf{2 個}\\ \boldsymbol{2\sqrt{2}<a}\text{のとき} & \textbf{3 個}\end{cases}$$

5.68 (1) $f(x)=x^x$ の両辺の対数をとると

$$\log f(x)=\log x^x=x\log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\log x+1\quad\text{ゆえに}\quad f'(x)=x^x(\log x+1)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$

よって　$x = e^{-1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{e^{-\frac{1}{e}}}$ をとる．

(2) $y = x^x$ 上の点 $(t,\ t^t)$ における接線の方程式は $(t > 0)$

$$y - t^t = t^t(\log t + 1)(x - t) \quad \cdots(*)$$

これが原点を通るから

$$-t^t = t^t(\log t + 1)(-t) \quad \text{ゆえに} \quad \log t - \frac{1}{t} + 1 = 0 \quad \cdots(**)$$

ここで，$g(t) = \log t + 1 - \dfrac{1}{t}$ とおくと　$g'(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} > 0$

$g(t)$ は単調増加であるから，$g(t) = 0$ をみたす t は，ただ 1 つ存在する．

また，$g(1) = 0$ であるから，$(**)$ をみたすのは　　$t = 1$

これを $(*)$ に代入して　　$\boldsymbol{y = x}$

補足 $(*)$ が原点を通ることから，$h(t) = t\log t + t - 1$ とすると　$h'(t) = \log t + 2$

したがって，$h(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	(-1)	$\searrow$	$-e^{-2} - 1$	$\nearrow$

また　$\lim\limits_{t \to +0} h(t) = -1$，$\lim\limits_{t \to \infty} h(t) = \infty$

したがって，$h(t) = 0$ をみたすのは $t = 1$ ただ 1 つである．

しかし，$\lim\limits_{t \to +0} t\log t = 0$ を示す必要がある．(長崎大学 2007) 5

5.69　(1) 点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ および原点を通る直線の傾きは　$\dfrac{\log t}{t}$

$y = \log x$ より　$y' = \dfrac{1}{x}$　ゆえに点 P における接線の傾きは　$\dfrac{1}{t}$

直線 OP と C 上の点 P における接線が垂直であるから

$$\frac{\log t}{t} \cdot \frac{1}{t} = -1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\log t = -t^2}$$

(2) $h(x) = -x^2 + 4x - 3 - 2\log x$ とおくと

$$h'(x) = -2x + 4 - \frac{2}{x} = -\frac{2x^2 - 4x + 2}{x} = -\frac{2(x-1)^2}{x}$$

$0 < x < 1$ において $h'(x) < 0$ であるから，$h(x)$ は単調減少.

$h(1) = 0$ であるあるから，$0 < x < 1$ において $h(x) > 0$，すなわち

$$-x^2 + 4x - 3 - 2\log x > 0$$

よって，$0 < x < 1$ において　　$2\log x < -x^2 + 4x - 3$

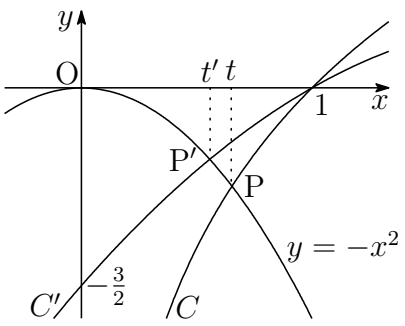
(3) (1) の結果から　$\log t = -t^2 < 0$　すなわち　$0 < t < 1$

ゆえに　$S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1} = \frac{t}{1-t^2}$　　よって　$\boldsymbol{f(t) = t,\ \ g(t) = 1 - t^2}$

(2) の結果から，$0 < x < 1$ において　$-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2} > \log x$

$C' : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$ とすると，$0 < x < 1$ において C' は C の上側にある．C，C' と $y = -x^2$ のグラフの交点の x 座標をそれぞれ t，t' とおくと，$t' < t$ である．ここで

$$S(x) = \frac{x}{1-x^2}\ (0 < x < 1)$$



とおくと　　$S'(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0$

$S(x)$ は単調増加であるから

$$S(t) > S(t') \quad \text{すなわち} \quad S > S(t') \quad \cdots ①$$

$C' : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$ と $y = -x^2$ のグラフの交点 P′ の x 座標は

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} = -x^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 4x - 3 = 0$$

$0 < x < 1$ に注意して　$x = \sqrt{7} - 2$　　すなわち　$t' = \sqrt{7} - 2$

$$S(t') = \frac{t'}{1-t'^2} = \frac{\sqrt{7}-2}{1-(\sqrt{7}-2)^2} = \frac{\sqrt{7}-2}{4\sqrt{7}-10} = \frac{4+\sqrt{7}}{6} \quad \cdots ②$$

ここで　　$\dfrac{4+\sqrt{7}}{6} - 1.1 = \dfrac{5\sqrt{7}-13}{30} = \dfrac{1}{5(5\sqrt{7}+13)} > 0 \quad \cdots ③$

①,②,③ から　　$S > 1.1$

別解 (1),(2) の結果から

$$-2t^2 < -t^2 + 4t - 3 \iff \sqrt{7} - 2 < t < 1$$

$S(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ $(0 < x < 1)$ の単調増加性により

$$S(t) > S(\sqrt{7} - 2) = \frac{\sqrt{7} - 2}{4\sqrt{7} - 10}$$

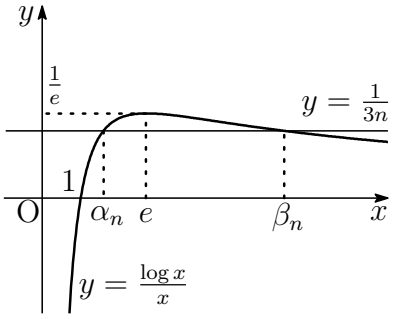
以下，②，③ より　$S = S(t) > 1.1$

5.70　(1)　$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

$f'(x) = 0$ のとき　$x = e$
よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\frac{1}{e}$	↘

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$



$\dfrac{1}{3n} \leqq \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{e}$ であるから，上のグラフより，方程式 $\dfrac{\log x}{x} = \dfrac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つ実数解をもつ．

(2)　$n \geqq 1$ より　　$e^{\frac{1}{n}} \leqq e \leqq ne$　$\cdots$①

$f(e^{\frac{1}{n}}) = \dfrac{1}{ne^{\frac{1}{n}}} \geqq \dfrac{1}{ne} > \dfrac{1}{3n} > 0$ であるから

$$0 < \frac{1}{3n} < f(e^{\frac{1}{n}}) \quad \text{ゆえに} \quad f(1) < f(\alpha_n) < f(e^{\frac{1}{n}}) \quad \cdots ②$$

$f(ne) = \dfrac{\log ne}{ne} > \dfrac{\log e}{3n} = \dfrac{1}{3n}$ であるから

$$f(ne) > \frac{1}{3n} \quad \text{ゆえに} \quad f(ne) > f(\beta_n) \quad \cdots ③$$

$f(x)$ は，$0 < x < e$ において単調増加であり，$e < x$ において単調減少であるから，①，②，③ により

$$1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}, \quad ne < \beta_n$$

また，$\lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \mathbf{1}$$

5.71 (1) $f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ を微分すると　$f'(x)=-(x+a)(x-a)e^{-x}$

$a>0$ より，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 $-2(a-1)e^{a}$	$\nearrow$	極大 $2(a+1)e^{-a}$	$\searrow$

よって，**極大値 $\boldsymbol{2(a+1)e^{-a}}$，極小値 $\boldsymbol{2(a-1)e^{a}}$ をとる．**

(2) $g(x)=x^3e^{-x}$ とおいて，これを微分すると　$g'(x)=x^2(3-x)e^{-x}$

$x>3$ において，$g'(x)<0$ であるから，$x\geqq 3$ において $g(x)$ は単調減少．

したがって，$x\geqq 3$ のとき，$g(x)\leqq g(3)$ であるから

$$x\geqq 3 \text{ のとき}\quad x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$$

が成り立つ．このとき　$0<x^2e^{-x}\leqq \dfrac{27e^{-3}}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{27e^{-3}}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0}$$

(3) $y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ の共有点の個数は，方程式

$$x^2+2x+2=ke^2+a^2\quad \text{すなわち}\quad (x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=k$$

の解の個数であり，これは，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフの共有点の個数である．ここで，(2) の結果により

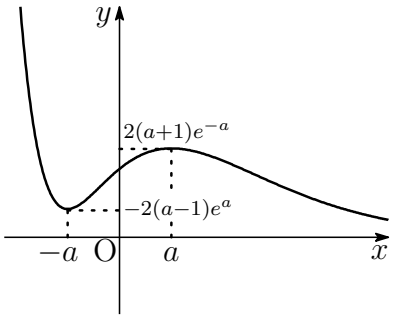
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2-a^2}{x^2}\right)x^2e^{-x}=0$$

よって，上式および (1)，(2) の結果より，求める k の値の範囲は

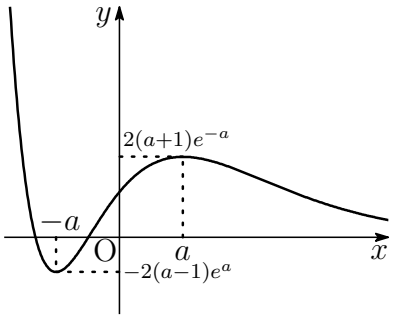
i) $\boldsymbol{0<a\leqq 1}$ のとき　$\boldsymbol{-2(a-1)e^{a}<k<2(a+1)e^{-a}}$

ii) $\boldsymbol{1<a}$ のとき　$\boldsymbol{0<k<2(a+1)e^{-a}}$

i) $0<a\leqq 1$ のとき



ii) $1<a$ のとき



5.72 (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと　　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

正の実数 a，b，c について

$$f(a)+f(b)+f(c)\leqq 3f(e)=\frac{3}{e}<\frac{3}{2.7}<2\times 0.6<2\log 2=\log 4$$

したがって　　$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(2) a，b，c，d は自然数であるから

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}\quad\cdots(*)$$

の両辺の自然対数をとると

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d$$

ゆえに　　$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}=\log d$

$d\geqq 3$ であるから，上式および (1) の結果から　$\boldsymbol{d=3}$

(1) の増減表から $f(1)<f(2)$，　$f(3)>f(4)>f(5)>\cdots$

また　　$f(2)=\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{3\log 2}{6}=\dfrac{\log 8}{6}$,

$$f(3)=\frac{\log 3}{3}=\frac{2\log 3}{6}=\frac{\log 9}{6}$$

ゆえに　　$f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots$

$$\frac{\log a}{a}\leqq\frac{\log 3}{3},\quad\frac{\log b}{b}\leqq\frac{\log 3}{3},\quad\frac{\log c}{c}\leqq\frac{\log 3}{3}$$

したがって　　$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}\leqq\log 3$

上式において，等号が成り立つ a，b，c を求めればよい．

よって　　$\boldsymbol{a=b=c=3}$

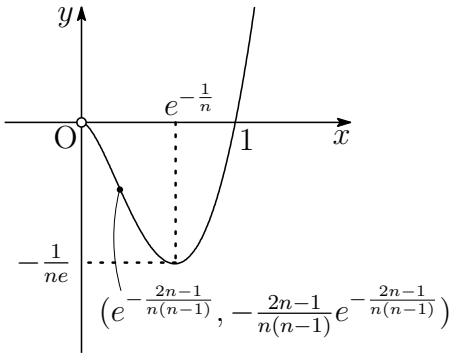
5.73 (1)
$$f'(x) = nx^{n-1}\log x + x^n\cdot\frac{1}{x} = x^{n-1}(n\log x + 1)$$
$$f''(x) = (n-1)x^{n-2}(n\log x+1) + x^{n-1}\cdot\frac{n}{x}$$
$$= x^{n-2}\{n(n-1)\log x + (2n-1)\}$$

したがって，関数 $y = f_n(x)$ の増減，凹凸，グラフは次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	変曲点	↘	極小	↗

ここで

$$\lim_{x\to+0} f_n(x) = \lim_{x\to+0} x^n\log x = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} x^n\log x = \infty$$



補足 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す．

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき} \quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1) = 2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

よって　　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\lim\limits_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim\limits_{x\to+0} x\log x = 0$

よって，$n \geqq 1$ のとき　$\lim\limits_{x\to+0} x^n\log x = \lim\limits_{x\to+0} x^{n-1}\cdot x\log x = 0$

(2) (1) の結果から　$L_n = f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \log e^{-\frac{1}{n}} = -\dfrac{1}{ne}$

よって　$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)e}$$
$$= -\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{e}}$$

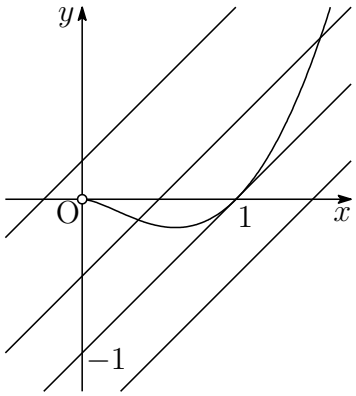
(3) (1) の結果から　$f_n(1) = 0$，$f_n'(1) = 1$

求める直線は，点 $(1,\ 0)$ を通り，傾き 1 の直線であるから

$$y - 0 = 1(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x - 1}$$

(4) $x^n \log x = x + k$ $(x > 0)$ の解の個数は，$y = f_n(x)$ と $y = x + k$ の共有点の個数であるから，(3) の結果に注意して

$$\begin{cases} \boldsymbol{k < -1} \text{ のとき} & \text{なし} \\ \boldsymbol{k = -1,\ 0 \leqq k} \text{ のとき} & \boldsymbol{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{-1 < k < 0} \text{ のとき} & \boldsymbol{2} \text{ 個} \end{cases}$$



5.74　(1) $1 < 2^y < \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ より　$0 < y < n\log_2\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$

$U = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$ とし，U の部分集合 A，B を

$$A = \left\{ k \,\middle|\, n\log_2\left(1 + \frac{k}{n}\right) \text{ は整数である}, \ k \in U \right\}$$
$$B = \left\{ k \,\middle|\, n\log_2\left(1 + \frac{k}{n}\right) \text{ は整数でない}, \ k \in U \right\}$$

とすると ([a] は a を超えない最大の整数)

$$P(n) = \sum_{k \in A}\left\{ n\log_2\left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} + \sum_{k \in B}\left[n\log_2\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right]$$

したがって

$$
\begin{aligned}
P(n) &< \sum_{k\in A} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) + \sum_{k\in B} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right), \\
P(n) &\geqq \sum_{k\in A}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} + \sum_{k\in B}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} \cdots ① \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}
\end{aligned}
$$

が成立する (① は $B=\phi$ のとき等号)．上の 2 式から

$$
\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)
$$

(2) (1) の結果から

$$
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{n-1}{n^2} \leqq \frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \cdots (*)
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2} = 0,
$$

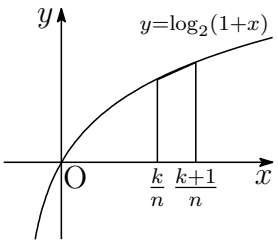
$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 \log_2(1+x)\,dx \\
&= \frac{1}{\log 2}\Big[\,(1+x)\log(1+x)-x\,\Big]_0^1 = 2-\frac{1}{\log 2}
\end{aligned}
$$

$(*)$ にはさみうちの原理を適用すると　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2} = \mathbf{2-\frac{1}{\log 2}}$

(3) (1) の結果から　$P(n) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$$\frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \cdots ②$$

(2) の結果および $y=\log_2(1+x)$ が上に凸であるから



$$L = \int_0^1 \log_2(1+x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log_2(1+x)\,dx$$
$$> \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right\}$$

上式および ② から

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right\} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)-\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2n}(\log_2 2 - \log_2 1) = \frac{1}{2n}$$

解説　$a \leqq x \leqq b$ において，関数 $f(x)$ が $f''(x) < 0$ であるとき

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

とおくと，$g(a) = g(b) = 0$ であるから，平均値の定理 (ロルの定理) により

$$g'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する．このとき，$g''(x) = f''(x) < 0$ であるから，$g'(x)$ は単調減少により，c は唯一存在する．したがって，$g(x)$ の増減表は

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	極大	↘	0

$a \leqq x \leqq b$ において，$g(x) \geqq 0$ が成立する．なお，等号は，$x = a,\ b$ のときに限る．

よって，$a<x<b$ において，関数 $f(x)$ が $f''(x)<0$ のとき

$$f(x) \geqq f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

が成立する．なお，等号は，$x=a,\ b$ のときに限る．

$f(x)=\log_2(1+x)$ とおくと，$f''(x)<0$ より，$\dfrac{k}{n}<x<\dfrac{k+1}{n}$ において

$$f(x)>f\left(\frac{k}{n}\right)+n\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\left(x-\frac{k}{n}\right)$$

これから

$$\begin{aligned}
L&=\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\\
&>\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx\\
&\qquad +n\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)dx\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+n\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\left[\ \frac{1}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\ \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{f(1)-f(0)}{2n}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

② より　$L>\dfrac{P(n)}{n^2}+\dfrac{1}{2n}$　　よって　$L-\dfrac{P(n)}{n^2}>\dfrac{1}{2n}$

5.75　(1)　$f(x)=nx-1+(1-x)^n$ より　　$f'(x)=n\{1-(1-x)^{n-1}\}$

(i)　n が偶数のとき

$f'(x)=0$ とすると　$x=0$

増減表は右のようになる．

$x=0$ で**極小値 0**

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

(ii) n が奇数のとき

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2$

増減表は右のようになる．

$x=0$ で**極小値 0**，

$x=2$ で**極大値 $2n-2$**

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$2n-2$	↘

(2) (i) 曲線 $y=e^x$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線の方程式は　$y=x+1$

曲線 $y=e^x$ は下に凸であるから　$e^x \geqq x+1$　$\cdots$①

① の x を $-x$ に置き換えると　$e^{-x} \geqq -x+1$　$\cdots$②

$x \geqq -1$ のとき，$(1+x)e^x > 0$ を ② の両辺に掛けると

$$1+x \geqq (1-x^2)e^x \quad (x \geqq -1) \quad \cdots③$$

① および ③ から　$(1-x^2)e^x \leqq 1+x \leqq e^x \quad (x \geqq -1)$

(ii) ① の x を $\dfrac{x}{n}$ に置き換えると

$$e^{\frac{x}{n}} \geqq \frac{x}{n}+1 \quad \text{ゆえに} \quad e^x \geqq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \cdots④$$

次に　$\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)e^x \leqq \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \quad (x \geqq -n) \quad \cdots(*)$

を示せばよいが，$x \geqq n$ のときは自明であるから，$-n \leqq x < n$ の場合について $(*)$ を示す．

$-n \leqq x < n$ のとき $-1 \leqq \dfrac{x}{n} < 1$ であるから，③ より

$$1+\frac{x}{n} \geqq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)e^{\frac{x}{n}} \quad \text{ゆえに} \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n e^x \quad \cdots⑤$$

ここで，(1) の結果から，$f\left(\dfrac{x^2}{n^2}\right) \geqq 0$ であるから

$$n\cdot\frac{x^2}{n^2}-1+\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geqq 1-\frac{x^2}{n} \quad \cdots⑥$$

したがって，⑤，⑥ より $(*)$ が成り立つ．よって，④，$(*)$ より，次式が成り立つ．

$$0 \leqq e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq \frac{x^2}{n}e^x \quad (x \geqq -n)$$

5.76　(1) $x=\theta-\sin\theta$，$y=1+\cos\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$$

C 上の点 $(\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$ における接線の方程式は

$$-\frac{dy}{d\theta}\{x-(\theta-\sin\theta)\}+\frac{dx}{d\theta}\{y-(1+\cos\theta)\}=0$$

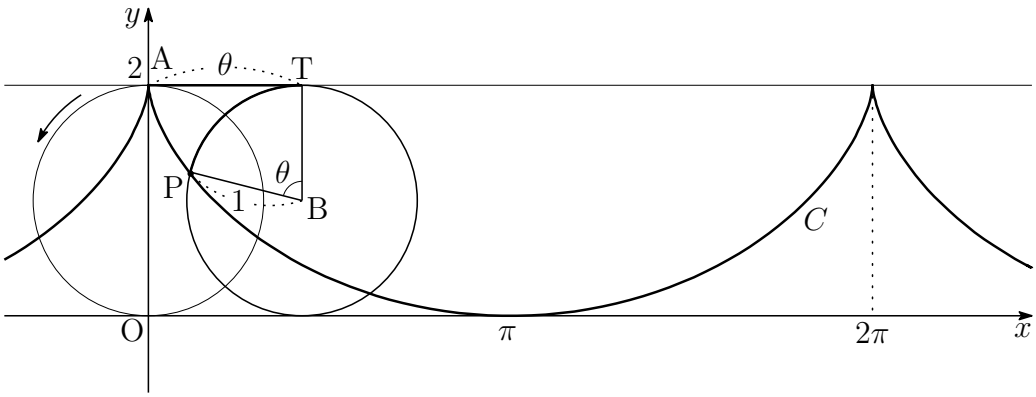
$$\sin\theta\cdot(x-\theta+\sin\theta)+(1-\cos\theta)(y-1-\cos\theta)=0$$

$$\boldsymbol{(\sin\theta)x+(1-\cos\theta)y-\theta\sin\theta=0}$$

補足 下の図の半径 1 の円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，円が角 θ だけ回転したとき，円の中心を B，直線 $y=2$ との接点を T とする．このとき，$\mathrm{AT}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}=\theta$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ を θ だけ回転させたものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}\theta\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}\theta\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta-\sin\theta\\ 1+\cos\theta\end{pmatrix}$



(2) $x=f(\theta)=\theta-\sin\theta$，$y=g(\theta)=1+\cos\theta$ とおくと $(0<\theta<2\pi)$

さらに，$\theta=f^{-1}(x)=h(x)$ とおくと　$y=g(h(x))$

したがって　$(*)\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=g'(h(x))h'(x),\\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=g''(h(x))\{h'(x)\}^2+g'(h(x))h''(x)\end{cases}$

ここで，$x=f(h(x))$ であるから

$$\begin{cases}1=f'(h(x))h'(x)\\ 0=f''(h(x))\{h'(x)\}^2+f'(h(x))h''(x)\end{cases}$$

ゆえに　$(**)\begin{cases}1=f'(\theta)h'(x)\\ 0=f''(\theta)\{h'(x)\}^2+f'(\theta)h''(x)\end{cases}$

$(**)$ の第 1 式から　$h'(x)=\dfrac{1}{f'(\theta)}\quad\cdots①$

① を $(**)$ の第 2 式に代入することにより　$h''(x)=-\dfrac{f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}\quad\cdots②$

$h(x)=\theta$ および ①，② を $(*)$ の第 2 式に代入して整理すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$$

このとき　$f'(\theta)=1-\cos\theta \quad g'(\theta)=-\sin\theta$

$f''(\theta)=\sin\theta \qquad g''(\theta)=-\cos\theta$

$g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)=1-\cos\theta$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1-\cos\theta}{(1-\cos\theta)^3}=\dfrac{1}{(1-\cos\theta)^2}>0$

よって，曲線 C は下に凸である．

別解　C 上の点 $(x,\ y)=(f(\theta),\ g(\theta))$ における接ベクトルは $(f'(\theta),\ g'(\theta))$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}\right\}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

逆関数定理により，$\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1}{f'(\theta)}$ であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(\theta)}=\frac{g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$$

(3)　C 上の 2 点 $\mathrm{P}(f(\theta),\ g(\theta))$，$\mathrm{Q}(f(\theta+\pi),\ g(\theta+\pi))$ における接ベクトルをそれぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とすると

$$\vec{u}=(f'(\theta),\ g'(\theta))=(1-\cos\theta,-\sin\theta)$$
$$\vec{v}=(f'(\theta+\pi),\ g'(\theta))=(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$$

このとき　$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)+(-\sin\theta)\sin\theta=0$

よって，C 上の 2 点 P，Q におけるそれぞれの接線は垂直に交わる．

(4)　$\mathrm{P}(\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$，$\mathrm{Q}(\theta+\pi+\sin\theta,1-\cos\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(\pi+2\sin\theta)^2+(-2\cos\theta)^2\\&=4\pi\sin\theta+\pi^2+4\end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$ において，PQ は $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2}}$ のとき，最大値 $\sqrt{\pi^2+4\pi+4}=\boldsymbol{\pi+2}$

(5)　(4) の結果から，$\alpha=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta=f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$．求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}y\,\frac{dx}{d\theta}d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sin^2\theta\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta=\left[\ \frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta\ \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

5.77 $x^3+y^3=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ より，$(x,\ y)$ を θ の正則な関数として表すことができる．$x^3+y^3=1 \cdots$① の両辺を θ で微分すると

$$3x^2\frac{dx}{d\theta}+3y^2\frac{dy}{d\theta}=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x^2,\ y^2)\cdot\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)=0 \quad \cdots(*)$$

$\left(\dfrac{dx}{d\theta},\ \dfrac{dy}{d\theta}\right)$ は曲線 ① の接ベクトルであるから

$$(x^2,\ y^2)$$

は曲線 ① の法ベクトルである．

また，a^2x+b^2y は θ の関数であるから，$f(\theta)=a^2x+b^2y$ とおくと

$$f'(\theta)=a^2\frac{dx}{d\theta}+b^2\frac{dy}{d\theta}=(a^2,\ b^2)\cdot\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)$$

$f(\theta)$ が極値をとるとき，$f'(\theta)=0$ であるから

$$(a^2,\ b^2)\cdot\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)=0 \quad \cdots(**)$$

このとき，$(*)$，$(**)$ より，$(x^2,\ y^2)//(a^2,\ b^2)$ であるから，$\lambda>0$ を用いて

$$(x^2,\ y^2)=\lambda^2(a^2,\ b^2) \quad \text{ゆえに} \quad x=\lambda a,\ y=\lambda b$$

とおける．これを ① に代入すると

$$(\lambda a)^3+(\lambda b)^3=1 \quad \text{ゆえに} \quad \lambda=(a^3+b^3)^{-\frac{1}{3}}$$

このとき $\quad a^2x+b^2y=a^2(\lambda a)+b^2(\lambda b)=\lambda(a^3+b^3)=(a^3+b^3)^{\frac{2}{3}}$

$(x,\ y)=(1,\ 0)$ のとき $\quad a^2x+b^2y=a^2$

$(x,\ y)=(0,\ 1)$ のとき $\quad a^2x+b^2y=b^2$

ここで，$b \geqq a>0$ により $\quad a^2 \leqq b^2=(b^3)^{\frac{2}{3}}<(a^3+b^3)^{\frac{2}{3}}$

よって $\qquad \boldsymbol{a^2 \leqq a^2x+b^2y \leqq \sqrt[3]{(a^3+b^3)^2}}$

補足 $(x,\ y)$ を θ の関数として，例えば $x=\cos^{\frac{2}{3}}\theta$，$y=\sin^{\frac{2}{3}}\theta$ とすればよい．

5.78 (1) $f(x)=x-1-\log x$ とおくと $\quad f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって　$f(x) \geqq 0$　すなわち　$x - 1 - \log x \geqq 0$

よって　　$\log x \leqq x - 1$

(2) (ギブスの不等式 (Gibbs' inequality))

(1) の結果から

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{p_i} \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i) = 0$$

よって　　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i \quad \cdots ①$

また，① の等号が成立するのは，

$$\frac{q_i}{p_i} = 1 \quad \text{すなわち} \quad p_i = q_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(3) $c = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i q_i$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i - \log c = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{c} \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{c} - 1 \right) = 0$$

したがって　　$\displaystyle\log c \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i \quad \cdots ②$

また，② の等号が成立するのは

$$\frac{q_i}{c} = 1 \quad \text{すなわち} \quad q_i = c = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

このとき，①，② から　　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \log \frac{1}{n} \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$

よって，F は，$p_i = \dfrac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\log \dfrac{1}{n}}$ をとる．

(4) $g(x) = x \log x$ とおくと　$g'(x) = 1 + \log x$

$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

したがって

$$G=\sum_{i=1}^{n}a_i\log a_i=\sum_{i=1}^{n}g(a_i)\geqq\sum_{i=1}^{n}g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{n}{e}$$

よって $\qquad G\geqq-\dfrac{n}{e}$

上式において，等号が成立するのは

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{e}$$

のときである．よって，求める G の最小値は $\quad \boldsymbol{-\dfrac{n}{e}}$

6.1 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ より

$$\int f(x)\,dx=-\int\left(\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx=-\frac{1}{x}\cdot\log x+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=-\frac{\log x}{x}-\frac{1}{x}+C=-\frac{\log x+1}{x}+C$$

(答) $\boldsymbol{\log x+1}$

6.2 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}=x+\dfrac{4x}{x^2-4}$ より

$$\int f(x)\,dx=\int\left(x+\frac{4x}{x^2-4}\right)dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+2\log|x^2-4|+C$$

(答) $\boldsymbol{2\log|x^2-4|}$

6.3 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$ より

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\{\log|x+1|-\log|x+3|\}+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$$

(答) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|}$

6.4 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\dfrac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})}$

$=\sqrt{x+2}+\sqrt{2}$

よって $\displaystyle\int f(x)\,dx=\int(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})\,dx=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{2}x+C$

(答) $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{2}x}$

6.5 (1) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}=x+3+\dfrac{7}{x-2}$ より

$$\int f(x)\,dx=\frac{x^2}{2}+3x+7\log|x-2|+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(答) $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{2}+3x+7\log|x-2|}$

(2) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ について，$u=\sqrt{x}$ とおくと，$x=u^2$ より $\dfrac{dx}{du}=2u$

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx&=\int e^u\frac{dx}{du}\,du=2\int e^u u\,du\\&=2e^u(u-1)+C=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C\end{aligned}$$

(答) $\boldsymbol{2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}$

6.6 (1) $\displaystyle\int x\cos x\,dx=\int x(\sin x)'\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=\boldsymbol{x\sin x+\cos x+C}\quad(\boldsymbol{C}\text{ は積分定数})$

(2) $x\cos x$ の原始関数の 1 つを $F(x)=x\sin x+\cos x$ とおくと

(i) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x t\cos t\,dt\\&=\Big[\,F(t)\,\Big]_0^x=F(x)-F(0)=x\sin x+\cos x-1\end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^x (-t\cos t)\,dt \\ &= \Big[\, F(t) \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\, -F(t) \,\Big]_{\frac{\pi}{2}}^x = -F(x) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \\ &= -(x\sin x + \cos x) + 2\cdot\frac{\pi}{2} - 1 \\ &= -x\sin x - \cos x + \pi - 1 \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x\sin x + \cos x - 1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -x\sin x - \cos x + \pi - 1 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}}$

6.7 (1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \Big[\,(x-1)e^x\,\Big]_0^1 = \mathbf{1}$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx = \Big[\,\sin x - x\cos x\,\Big]_0^\pi = \boldsymbol{\pi}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \Big[\,\frac{1}{2}\log(1+x^2)\,\Big]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}\log 2}$

(4) $x = \tan\theta$ とおくと $\quad \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

6.8 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}\Big[\,\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \mathbf{-\frac{1}{2}\log 3}$$

(2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx = \int_1^e (\log x)(\log x)'\,dx = \Big[\,\frac{1}{2}(\log x)^2\,\Big]_1^e = \mathbf{\frac{1}{2}}$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 x\,dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \Big[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\Big]_0^\pi = \mathbf{\frac{4}{3}}$

6.9 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'\,dx$

$$= \left[\, x\sin x \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left[\, \cos x \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1}$$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$$= \left[\, \log\frac{x}{x+1} \,\right]_1^2 = \boldsymbol{\log\frac{4}{3}}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$

$$= \left[\, x - \log(1+e^x) \,\right]_0^1$$

$$= 1 - \log\frac{1+e}{2} = \boldsymbol{\log\frac{2e}{1+e}}$$

別解 $t = e^x$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx} = e^x = t$,

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow e$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{1+t}\cdot\frac{dt}{t} = \left[\, \log\frac{t}{t+1} \,\right]_1^e = \log\frac{2e}{e+1}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 5x + \cos x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\, \frac{1}{5}\sin 5x + \sin x \,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{5}}$$

6.10 (1) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2)'e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\, e^{x^2} \,\right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(e^4 - 1)}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\, \log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| \,\right]_0^1 = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\log 3}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-x+\pi)\,dx$

$$= \left[\, -\cos x \,\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\, (x-\pi)^2 \,\right]_{\pi}^{2\pi} = \boldsymbol{2 - \frac{1}{2}\pi^2}$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)'\log(x^2+1)\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\Big[\,(x^2+1)\log(x^2+1)\,\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 2x\,dx$

$\displaystyle = \log 2 - \frac{1}{2}\Big[\,x^2\,\Big]_0^1 = \boldsymbol{\log 2 - \frac{1}{2}}$

6.11 (1) $\displaystyle\int_{\log\pi}^{\log(2\pi)} e^x\sin(e^x)\,dx = \int_{\log\pi}^{\log(2\pi)} (e^x)'\sin(e^x)\,dx$

$\displaystyle = \Big[-\cos(e^x)\Big]_{\log\pi}^{\log(2\pi)} = \boldsymbol{-2}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}(x+1)\,dx = \left[\,e^{2x}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\,\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}}$

解説 $\displaystyle\int e^{kx}f(x)\,dx = \frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\} + C$

(3) $\sin x\cos 4x = \dfrac{1}{2}(\sin 5x - \sin 3x)$ より

$\displaystyle\int_0^\pi \sin x\cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin 5x - \sin 3x)\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{3}\cos 3x\,\right]_0^\pi = \boldsymbol{-\frac{2}{15}}$

(4) $\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{1}{x+1}$ より

$\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}\,dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$\displaystyle = \Big[\,2\log(x+3) - \log(x+2)\,\Big]_{-1}^0$

$\displaystyle = 2\log 3 - 3\log 2 = \boldsymbol{\log\frac{9}{8}}$

6.12 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\tan(x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{(\cos x^2)'}{\cos x^2}\,dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\Big[\,\log\cos x^2\,\Big]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}\log 2}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} xe^{3x}\,dx = \left[\ \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)e^{3x}\ \right]_0^{\frac{1}{3}} = \mathbf{\frac{1}{9}}$

(3) $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_e^{e^e} \frac{(\log x)'}{\log x} = \left[\ \log(\log x)\ \right]_e^{e^e} = \mathbf{1}$

(4) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x(x+1)}\,dx = \int_2^3 \left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}\right)dx$

$$= \left[\ x+\log x-2\log(x+1)\ \right]_2^3$$
$$= 1+\log 3-\log 2-2\log 4+2\log 3$$
$$= \mathbf{1+3\log 3-5\log 2}$$

6.13 (1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}$

$$= \frac{1}{2}\left[\ \log(x^2-2x+2)\ \right]_1^2 = \mathbf{\frac{1}{2}\log 2}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{4x}}{e^{2x}+2}dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}(e^{2x}+2)-2e^{2x}}{e^{2x}+2}dx$

$$= \int_0^1 \left\{e^{2x}-\frac{(e^{2x}+2)'}{e^{2x}+2}\right\}dx = \left[\ \frac{1}{2}e^{2x}-\log(e^{2x}+2)\ \right]_0^1$$
$$= \mathbf{\frac{1}{2}(e^2-1)-\log(e^2+2)+\log 3}$$

(3) $\displaystyle\int_1^e x\log\sqrt{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{2}x\log x\,dx = \int_1^e \left(\frac{1}{4}x^2\right)'\log x\,dx$

$$= \left[\ \frac{1}{4}x^2\log x\ \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^2(\log x)'\,dx$$
$$= \frac{1}{4}e^2 - \int_1^e \frac{1}{4}x\,dx = \frac{1}{4}e^2 - \left[\ \frac{1}{8}x^2\ \right]_1^e = \mathbf{\frac{1}{8}(e^2+1)}$$

(4) $\cos^2 x\sin 3x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\sin 3x$

$$= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 3x\cos 2x$$
$$= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin 5x+\sin x)$$

したがって　$\cos^2 x\sin 3x - \dfrac{1}{4}\sin 5x = \dfrac{1}{2}\sin 3x + \dfrac{1}{4}\sin x$

よって　　(与式) $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin x\right) dx$

$= \left[-\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{11}{24}}$

6.14 (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2 - x}{2x+1}\, dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{2x+1}\right) dx$

$= \left[\ \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\log(2x+1)\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\log 3 - 1)}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\, dx = \left[\ \frac{1}{2}\sin(x^2)\ \right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

(3) $t = x^2 + 1$ とおくと

x	0	$\to$	1
t	1	$\to$	2

$\dfrac{dt}{dx} = 2x$

$\displaystyle\int_0^1 x^3\log(x^2+1)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\log(x^2+1)\, 2x dx$

$\displaystyle= \int_1^2 \frac{1}{2}(t-1)\log t\, dt = \int_1^2 \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right)' \log t\, dt$

$\displaystyle= \left[\ \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right)\log t\ \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right)\frac{1}{t}\, dt$

$\displaystyle= 0 - \left[\ \frac{t^2}{8} - \frac{t}{2}\ \right]_1^2 = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$

(4) $|e^{\cos x}\sin x|$ は偶関数であるから

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |e^{\cos x}\sin x|\, dx = 2\int_0^{\pi} |e^{\cos x}\sin x|\, dx = 2\int_0^{\pi} e^{\cos x}\sin x\, dx$

$\displaystyle= -2\int_0^{\pi} e^{\cos x}(\cos x)'\, dx = -2\left[\ e^{\cos x}\ \right]_0^{\pi} = \boldsymbol{2(e - e^{-1})}$

6.15 (1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\, dx = \int_1^2 \frac{(e^x - e^{-x})'}{e^x - e^{-x}}\, dx = \left[\ \log\left|e^x - e^{-x}\right|\ \right]_1^2$

$\displaystyle= \log\left|\frac{e^2 - e^{-2}}{e - e^{-1}}\right| = \log\left|\frac{(e + e^{-1})(e - e^{-1})}{e - e^{-1}}\right|$

$= \boldsymbol{\log\left(e + \frac{1}{e}\right)}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\sin(5x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \cos 8x)\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\ \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 8x\ \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{32}}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+3x^2}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^1 \left(x + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x+2}\right) dx$

$\displaystyle = \left[\ \frac{x^2}{2} + 2\log|x+1| - 4\log|x+2|\ \right]_0^1$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{2} + \log\frac{64}{81}}$

(4) $t = x^3$ とおくと $\quad \dfrac{dt}{dx} = 3x^2$

x	$1 \to 2$
t	$1 \to 8$

x と t の対応は右のようになる.

したがって $\displaystyle\int_1^2 x^5 e^{x^3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{3}x^3 e^{x^3}\cdot 3x^2 dx$

$\displaystyle = \int_1^8 \frac{1}{3}te^t\,dx = \left[\ \frac{1}{3}(t-1)e^t\ \right]_1^8 = \boldsymbol{\frac{7}{3}e^8}$

6.16 (1) $\displaystyle\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

$\displaystyle\left|\frac{1}{2}\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\sin 2x\right|$ であるから, $\displaystyle\left|\frac{1}{2}\sin 2x\right|$ の周期は $\dfrac{\pi}{2}$

よって $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x\cos x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[\ -\frac{1}{2}\cos 2x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{1}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3+2x^2-3}{x^2-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x+2+\frac{1}{x+1}\right) dx$

$\displaystyle = \left[\ \frac{1}{2}x^2 + 2x + \log(x+1)\ \right]_0^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{9}{8} + \log\frac{3}{2}}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ で $x = 2\sin\theta$ とおくと

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$\dfrac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$

したがって $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \left[\ \theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{3}{4-3x^2}}\,dx$ で $\displaystyle x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$ とおくと

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$

したがって $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{3}{4-3x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{3}{4-4\sin^2\theta}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$

よって $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{\frac{3}{4-3x^2}}\right) dx = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(4) $\displaystyle\int_1^2 x^3\log x\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x^4}{4}\right)'\log x\,dx = \Big[\ \frac{x^4}{4}\log x\ \Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle = 4\log 2 - \Big[\ \frac{x^4}{16}\ \Big]_1^2 = \boldsymbol{4\log 2 - \frac{15}{16}}$

6.17 (1) $\displaystyle\int_0^2 |\,e^x - 2\,|\,dx = -\int_0^{\log 2}(e^x-2)\,dx + \int_{\log 2}^2 (e^x-2)\,dx$

$\displaystyle = -\Big[\ e^x - 2x\ \Big]_0^{\log 2} + \Big[\ e^x - 2x\ \Big]_{\log 2}^2$

$= (e^0 - 2\cdot 0) + (e^2 - 2\cdot 2) - 2(e^{\log 2} - 2\log 2)$

$= \boldsymbol{e^2 + 4\log 2 - 7}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\cos 4x\right) dx$

$\displaystyle = \Big[\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x\sin 4x - \frac{1}{32}\cos 4x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{36}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{48}\pi + \frac{3}{64}}$

(3) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx = \int_1^e (1+\log x)^{\frac{1}{2}}(1+\log x)'\,dx$

$\displaystyle = \Big[\ \frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}}\ \Big]_1^e = \boldsymbol{\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}$

(4) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2}\,dx = \int_2^4 \frac{2x(x^2-1)+(x^2+2)}{(x^2-1)(x^2+2)}\,dx$

$$= \int_2^4 \left(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$= \left[\ \log(x^2+2)+\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}\ \right]_2^4$$

$$= \mathbf{2\log 3-\frac{1}{2}\log 5}$$

6.18 (1) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx = \int_0^2 \{2-(2-x)\}\sqrt{2-x}\,dx$

$$= \int_0^2 \{2(2-x)^{\frac{1}{2}}-(2-x)^{\frac{3}{2}}\}\,dx$$

$$= \left[-\frac{4}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}\ \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{8}{5}\sqrt{2}=\frac{16}{15}\sqrt{2}$$

(答) $\mathbf{\frac{16}{15}\sqrt{2}}$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1}{2}\cos\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\right\}dx$

$$= \left[\ \frac{1}{12}\sin\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}x\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{12}$$

(答) $\boldsymbol{\pi-\sqrt{3}}$

6.19 (1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{e^x}\,dx = \int_{-1}^1 xe^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}(x+1)\ \right]_{-1}^1 = -\frac{2}{e}$

(答) $\boldsymbol{-\frac{2}{e}}$

(2) $1+\sin x = 1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\sin x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \left[-2\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 3 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

(答) $\mathbf{3 - \sqrt{3}}$

6.20 (1) $$\begin{aligned}\int_0^1 \log(x+1)\,dx &= \int_0^1 (x+1)'\log(x+1)\,dx \\ &= \left[(x+1)\log(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx \\ &= 2\log 2 - 1\end{aligned}$$

(答) $\mathbf{2\log 2 - 1}$

(2) $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 7x + \sin 3x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}\cos 7x - \frac{1}{3}\cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{21}\end{aligned}$$

(答) $\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{21}}$

6.21 (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$ について，$x = \sqrt{2}\sin\theta$ とおくと

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\cos\theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$$

よって $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$

(答) $\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$

(2) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)\sin x\,dx = \left[-(3x+2)\cos x + 3\sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6$$

(答) $\mathbf{6}$

6.22 $\sin^2 x\cos^2 x = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x = \dfrac{1}{8}(1-\cos 4x)$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{12}}(1-\cos 4x) = \frac{1}{8}\left[\, x - \frac{1}{4}\sin 4x \,\right]_0^{\frac{\pi}{12}}$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{96} - \frac{\sqrt{3}}{64}$$

(答) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{96} - \dfrac{\sqrt{3}}{64}}$

6.23 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin|2x|\,dx = \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} \sin(-2x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$

$$= \left[\, \frac{1}{2}\cos 2x \,\right]_{-\frac{3}{2}\pi}^{0} + \left[\, -\frac{1}{2}\cos 2x \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{2}$$

6.24 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx$

$$= \left[\, \sin x - \frac{x}{2} \,\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\, \frac{x}{2} - \sin x \,\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}}$$

6.25 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx = \left[\, \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$

6.26 $\displaystyle I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \left[\, -\log\cos x \,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

$\displaystyle I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \left[\, \tan x - x \,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{1 - \frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\tan x\,dx$

$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)'\tan x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \left[\, \frac{1}{2}\tan^2 x \,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_1 = \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2}$

6.27 (1) $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ より

$$\boldsymbol{f'(x) = -\sin x + x, \quad f''(x) = -\cos x + 1}$$

(2) $x \geqq 0$ のとき，$f''(x) \geqq 0$，$f'(0) = 0$ であるから

$x \geqq 0$ のとき　$f'(x) \geqq f'(0)$　すなわち　$f'(x) \geqq 0$

ゆえに，$x \geqq 0$ のとき，$f'(x) \geqq 0$，$f(0) = 0$ であるから

$$x \geqq 0 \text{ のとき} \quad f(x) \geqq f(0) \quad \text{すなわち} \quad f(x) \geqq 0$$

(3) $$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{x}\right) dx$$

$$= \left[\ \sin x - x + \frac{x^3}{6}\ \right]_0^1 = \sin 1 - \frac{5}{6}$$

(2) の結果から，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geqq 0$$

したがって $\sin 1 - \dfrac{5}{6} \geqq 0$ よって $\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$

6.28 (1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ より

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

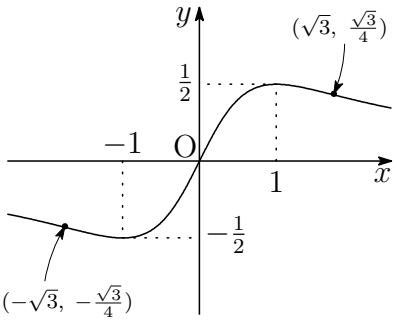
したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	極小 $-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	極大 $\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘

極大値 $f(1) = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$，極小値 $f(-1) = \mathbf{-\dfrac{1}{2}}$，

変曲点は $\left(\mathbf{\pm\sqrt{3}},\ \mathbf{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}}\right)$ **(複号同順)**

グラフの概形は，右のようになる．



(2) $$S(a) = \int_0^a f(x)\,dx = \left[\ \frac{1}{2}\log(x^2+1)\ \right]_0^a = \frac{1}{2}\log(a^2+1)$$

$S(2a)=2S(a)$ より　　$\dfrac{1}{2}\log(1+4a^2)=2\cdot\dfrac{1}{2}\log(1+a^2)$

ゆえに　$\log(1+4a^2)=\log(1+a^2)^2$　　したがって　$1+4a^2=(1+a^2)^2$

整理すると　$a^2(a^2-2)=0$　　$a>0$ であるから　$\boldsymbol{a=\sqrt{2}}$

6.29　(1)　$f(x)=|\,x\,|\sqrt{1-x^2}$ について

$$f(-x)=|-x|\sqrt{1-(-x)^2}=|\,x\,|\sqrt{1-x^2}=f(x)$$

したがって，$f(x)$ は偶関数である．

$x\geqq 0$ において，$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ であるから

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\times\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x)$ の増減は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

よって　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$x=0,\ \pm 1$ のとき　**最小値** $\boldsymbol{0}$

(2)　$f(x)$ は偶関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx&=2\int_{0}^{1}f(x)\,dx\\&=2\int_{0}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=\left[\,-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

6.30　(1)　$f(x)=|e^x-1|$ とおくと

$$f(x)=\begin{cases}e^x-1 & (x\geqq 0)\\ -(e^x-1) & (x<0)\end{cases}$$

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$a \leqq 0 \leqq a+1$ であるから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{a+1} f(x)\,dx = -\int_a^0 (e^x - 1)\,dx + \int_0^{a+1} (e^x - 1)\,dx \\ &= -\Big[\, e^x - x \,\Big]_a^0 + \Big[\, e^x - x \,\Big]_0^{a+1} \\ &= (e^a - a) + (e^{a+1} - a - 1) - 2\cdot 1 \\ &= \boldsymbol{e^a + e^{a+1} - 2a - 3} \end{aligned}$$

(2) $a < -1$ のとき，$a < a+1 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{a+1} f(x)\,dx = -\int_a^{a+1} (e^x - 1)\,dx \\ &= -\Big[\, e^x - x \,\Big]_a^{a+1} = e^a - e^{a+1} + 1 \end{aligned}$$

$0 < a$ のとき，$0 < a < a+1$ であるから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{a+1} f(x)\,dx = \int_a^{a+1} (e^x - 1)\,dx \\ &= \Big[\, e^x - x \,\Big]_a^{a+1} = -e^a + e^{a+1} - 1 \end{aligned}$$

$a < -1$ のとき　$I'(a) = e^a - e^{a+1} = e^a(1-e) < 0$

$0 < a$ のとき　$I'(a) = -e^a + e^{a+1} = e^a(e-1) > 0$

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき　$I'(a) = e^a + e^{a+1} - 2 = (e+1)\left(e^a - \frac{2}{e+1}\right)$

ここで　$\dfrac{2}{e+1} - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e-1}{e(e+1)} > 0, \quad 1 - \dfrac{2}{e+1} = \dfrac{e-1}{e+1} > 0$

ゆえに　$\dfrac{1}{e} < \dfrac{2}{e+1} < 1$　すなわち　$-1 < \log \dfrac{2}{e+1} < 0$

したがって　$-1 < a < \log \dfrac{2}{e+1}$ のとき　$I'(a) < 0$

$\log \dfrac{2}{e+1} < a < 0$ のとき　$I'(a) > 0$

よって，$I(a)$ を最小にする a の値は　$\boldsymbol{a = \log \dfrac{2}{e+1}}$

6.31 $f(x) = (ax + b\cos x)\sin x = ax\sin x + \dfrac{b}{2}\sin 2x$ を微分すると

$$f'(x) = a\sin x + ax\cos x + b\cos 2x$$

$f'(0)=2$ より　　$\boldsymbol{b=2}$

このとき，$f(x)=ax\sin x+\sin 2x$ となるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax\sin x+\sin 2x)\,dx\\ &= \left[-ax\cos x+a\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= a+1\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=4$ であるから

$a+1=4$　これを解いて　$\boldsymbol{a=3}$

6.32 $0\leqq\alpha\leqq t\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}S(t) &= \int_\alpha^\beta |\sin x-\sin t|\,dx\\ &= \int_\alpha^t (\sin t-\sin x)\,dx+\int_t^\beta (\sin x-\sin t)\,dx\\ &= \Big[x\sin t+\cos x\Big]_\alpha^t+\Big[-\cos x-x\sin t\Big]_t^\beta\\ &= 2(t\sin t+\cos t)-(\alpha+\beta)\sin t-\cos\alpha-\cos\beta\end{aligned}$$

これを微分すると　$S'(t)=(2t-\alpha-\beta)\cos t$

したがって，$S(t)$ の増減表は次のようになる．

t	α	$\cdots$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\cdots$	β
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘	極小	↗	

よって，$S(t)$ を最小にする t の値は　$\boldsymbol{t=\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

6.33　(1)　$f(x)=x^2e^{-\frac{x}{a}}$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2xe^{-\frac{x}{a}}+x^2\left(-\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right)\\ &= -\frac{x}{a}(x-2a)e^{-\frac{x}{a}}\end{aligned}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$a>0$ であるから，増減表は，右のようになる．

よって　　$\boldsymbol{c=2a}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\int_0^c f(x)\,dx &= \int_0^{2a} x^2 e^{-\frac{x}{a}}\,dx \\ &= -a\left[\ (x^2+2ax+2a^2)e^{-\frac{x}{a}}\ \right]_0^{2a} \\ &= \boldsymbol{2a^3\left(1-\frac{5}{e^2}\right)}\end{aligned}$$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{kx}f(x)\,dx = \frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}+C$$

上式において $k=-\dfrac{1}{a}$，$f(x)=x^2$ とすると

$$\int x^2 e^{-\frac{x}{a}}\,dx = -ae^{-x}(x^2+2ax+2a^2)+C$$

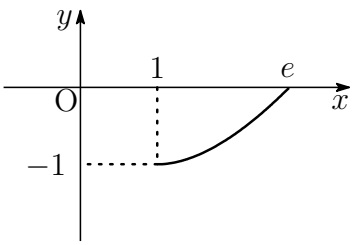
6.34 (1) $f(x)=x\log x-x$ を微分すると

$$f'(x)=\log x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\boldsymbol{\log x}$$

(2) (1) の結果から　　$f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		$+$	
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	0



よって，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようなる．

(3)
$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)\,dx &= \int_1^e (x\log x-x)\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{2}x^2\log x-\frac{3}{4}x^2\ \right]_1^e = \boldsymbol{\frac{1}{4}(3-e^2)}\end{aligned}$$

6.35 (1) $f(x)=(ax+b)e^x$ より　$f'(x)=(ax+a+b)e^x$

$f(x)$ は $x=2$ で極小値 $-\dfrac{1}{3}e^2$ をとるから，$f(2)=-\dfrac{1}{3}e^2$，$f'(2)=0$ より

$$(2a+b)e^2=-\frac{1}{3}e^2,\quad (3a+b)e^2=0$$

したがって　$2a+b=-\dfrac{1}{3}$，$3a+b=0$　これを解いて　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-1$

このとき　　$f(x)=\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)e^x$，$f'(x)=\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}\right)e^x$

$f(x)$ の増減表は右のようになり，
条件をみたす．

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

よって　　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{3},\ b=-1}$

(2)　$f(x)=\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)e^x$ より

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\,dx&=\int_0^4\left(\frac{1}{3}x-1\right)e^x\,dx\\&=\left[\ \left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)e^x\ \right]_0^4=\boldsymbol{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

6.36　(1)　$\displaystyle\int t^2e^t\,dt=\boldsymbol{(t^2-2t+2)e^t+C}$　**(C は積分定数)**

解説　k を定数とすると

$$\int f(t)e^{kt}dt=\frac{1}{k}\left\{f(t)-\frac{f'(t)}{k}+\frac{f''(t)}{k^2}-\cdots\right\}e^{kt}+C$$

(2)　(1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}F(x)&=-x+\int_0^x(xt-t^2)e^t\,dt\\&=-x+x\int_0^x te^t\,dx-\int_0^x t^2e^t\,dt\\&=-x+x\Big[\ (t-1)e^t\ \Big]_0^x-\Big[\ (t^2-2t+2)e^t\ \Big]_0^x\\&=-x+x\{(x-1)e^x+1\}-\{(x^2-2x+2)e^x-2\}\\&=(x-2)e^x+2\end{aligned}$$

$F(x)$ を微分すると，$F'(x)=(x-1)e^x$
ゆえに，$F(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$	0	↘	$-e+2$	↗

よって，$\boldsymbol{x=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-e+2}$

6.37 (1) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ であるから

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{1}{1+\tan^2 x} - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$t = \tan x$ を x について微分すると　$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

よって　$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\frac{dt}{dx}} = \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \boldsymbol{\frac{1}{1+t^2}}$

(2) $t = \tan x$ とおくと，(1) の結果により

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\cos 2x}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{t}{1+3t^2}\,dt$$

$$= \left[\, \frac{1}{6}\log(1+3t^2) \,\right]_0^1 = \frac{1}{6}\log 4 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\log 2}$$

(3) 与えられた関数の x と y を入れ替えると

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

$e^y > 0$ に注意してこれを解くと　$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y = \log(x + \sqrt{x^2+1})}$

(4) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ より　$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1} = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sqrt{x^2+1}$$

上式および (3) の結果により

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int dt = t + C$$

$$= \boldsymbol{\log(x + \sqrt{x^2+1}) + C} \quad (\boldsymbol{C} \text{ は積分定数})$$

6.38 (1) $\displaystyle\int_0^{\log 7} f(x)\,dx = \int_0^{\log 7} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

$$= \left[\, \log(1+e^x) \,\right]_0^{\log 7} = \log 8 - \log 2 = \boldsymbol{2\log 2}$$

(2) $(1+e^x)f(x)=e^x$ であるから，この両辺を微分すると

$$e^x f(x)+(1+e^x)f'(x)=e^x$$

上式の両辺を $1+e^x$ で割ると

$$\frac{e^x}{1+e^x}f(x)+f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{ゆえに} \quad \{f(x)\}^2+f'(x)=f(x)$$

$f'(x)=f(x)-\{f(x)\}^2$ であるから　　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1}$

(3)　　$f(0)=\dfrac{1}{2},\ f(\log 7)=\dfrac{7}{8}$

(1)，(2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 7}\{f(x)\}^2\,dx&=\int_0^{\log 7}f(x)\,dx-\int_0^{\log 7}f'(x)\,dx\\&=2\log 2-\Big[\ f(x)\ \Big]_0^{\log 7}\\&=2\log 2-\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{2\log 2-\frac{3}{8}}\end{aligned}$$

(4) (2) の結果から，$\{f(x)\}^3=\{f(x)\}^2-f(x)f'(x)$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 7}\{f(x)\}^3\,dx&=\int_0^{\log 7}\{f(x)\}^2\,dx-\int_0^{\log 7}f(x)f'(x)\,dx\\&=2\log 2-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\Big[\ \{f(x)\}^2\ \Big]_0^{\log 7}\\&=2\log 2-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\\&=\boldsymbol{2\log 2-\frac{81}{128}}\end{aligned}$$

6.39　(1) 証明する不等式を (A) とする．

$x=0$ のとき，(A) は自明であるので，$x>0$ について，(A) が成り立つことを示す．

［1］$0\leqq t\leqq x$ とすると，$e^t\geqq 1$ であるから

$$\int_0^x e^t\,dt>\int_0^x dt \quad \text{ゆえに} \quad e^x-1>x$$

したがって　　$e^x>x$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると

$$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x \frac{t^k}{k!}\,dt \quad \text{ゆえに} \quad e^x - 1 > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

したがって　　$e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

よって，$n=k+1$ のときも (A) は成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n に対して，(A) が成り立つ．

補足 上の証明において，実際は，$n=1$ のとき，$e^x > 1+x$ が成り立つ．

$x>0$ のとき，次式が成り立つことが，上と同様にして導かれる．

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

(2) (1) の結果より，$x>0$ のとき　$e^x > \dfrac{x^3}{3!}$

ゆえに　　$0 < x^2e^{-x} < \dfrac{6}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0$$

(3) $y = xe^{-x}$ を微分すると　$y' = (1-x)e^{-x}$

曲線 $y=xe^{-x}$ の点 $(a,\ ae^{-a})$ における接線の方程式は

$$y - ae^{-a} = (1-a)e^{-a}(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = e^{-a}\{(1-a)x + a^2\}$$

P の座標は，これに $y=0$ を代入して　　$\left(\dfrac{a^2}{a-1},\ 0\right)$

曲線 $y=xe^{-x}$ の点 $(a,\ ae^{-a})$ における法線の方程式は

$$y - ae^{-a} = \frac{e^a}{a-1}(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{e^a}{a-1}(x-a) + ae^{-a}$$

Q の座標は，これに $y=0$ を代入して　　$(a - a(a-1)e^{-2a},\ 0)$

P，Q の x 座標を，それぞれ x_p，x_q とすると

$$\begin{aligned} x_p - x_q &= \frac{a^2}{a-1} - \{a - a(a-1)e^{-2a}\} \\ &= 1 + \frac{1}{a-1} + a(a-1)e^{-2a} \\ &= 1 + \frac{1}{a-1} + \left(1 - \frac{1}{a}\right)\cdot a^2e^{-a}\cdot e^{-a} \end{aligned}$$

$l(a)=|x_p-x_q|$ であることと，(2) の結果から $\lim_{a\to\infty} a^2e^{-a}=0$ であること に注意して

$$\lim_{a\to\infty} \boldsymbol{l(a)=1}$$

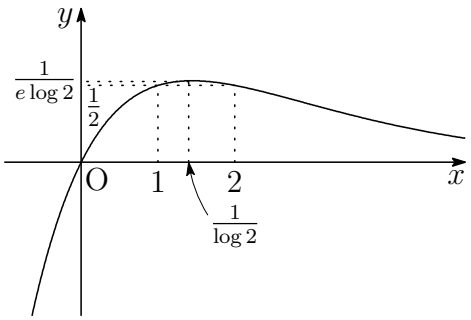
6.40 (1) $f(x)=x\,2^{-x}$ を微分すると

$$f'(x)=2^{-x}-x\,2^{-x}\log 2=2^{-x}(1-x\log 2)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{\log 2}$

$f(x)$ の増減は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{1}{e\log 2}$	↘



また　$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$f(t)=f(t+1)$ を解くと　$t\,2^{-t}=(t+1)2^{-(t+1)}$　ゆえに　$t=1$

$t<1$ のとき　$g(t)=f(t)$　　すなわち　$g(t)=t\,2^{-t}$

$t\geqq 1$ のとき　$g(t)=f(t+1)$　すなわち　$g(t)=(t+1)\,2^{-(t+1)}$

よって　$\boldsymbol{g(t)=\begin{cases} t\,2^{-t} & (t<1) \\ (t+1)\,2^{-(t+1)} & (t\geqq 1) \end{cases}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\int_0^2 g(t)\,dt &= \int_0^1 t\,2^{-t}\,dt+\int_1^2 (t+1)\,2^{-(t+1)}\,dt \\
&= \int_0^1 t\,2^{-t}\,dt+\int_2^3 t\,2^{-t}\,dt \\
&= \left[-\frac{t\,2^{-t}}{\log 2}-\frac{2^{-t}}{(\log 2)^2}\right]_0^1+\left[-\frac{t\,2^{-t}}{\log 2}-\frac{2^{-t}}{(\log 2)^2}\right]_2^3 \\
&= \left\{-\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{2(\log 2)^2}\right\}+\left\{\frac{1}{8\log 2}+\frac{1}{8(\log 2)^2}\right\} \\
&= \boldsymbol{-\frac{3}{8\log 2}+\frac{5}{8(\log 2)^2}}
\end{aligned}$$

6.41 (1) $f(t)=\alpha$ より，$\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}=\alpha$ であるから，$e^{2t}-2\alpha e^t+1=0$ を解いて

$$e^t=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}\quad すなわち\quad t=\log(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1})$$

条件により，$\alpha > 1$ であるから

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} > 1$$
$$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} < 1$$

よって，$f(t) = \alpha$ を満たす正の解 T は　$\boldsymbol{T = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\,)}$

(2) $x = f(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ より　$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

x	$1 \longrightarrow \alpha$
t	$0 \longrightarrow T$

また，$y = f'(t)$ より　$y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ であるから

$$I = \int_1^\alpha y\,dx = \int_0^T \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) dt$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^T (e^{2t} + e^{-2t} - 2)dt$$
$$= \frac{1}{4}\left[\ \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - 2t\ \right]_0^T = \frac{1}{8}(e^{2T} - e^{-2T}) - \frac{1}{2}T$$

ここで，(1) の結果から

$$e^T = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad e^{-T} = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$$
$$e^{2T} - e^{-2T} = (e^T + e^{-T})(e^T - e^{-T})$$
$$= 2\alpha \cdot 2\sqrt{\alpha^2 - 1} = 4\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

よって　　$\boldsymbol{I = \frac{1}{2}\{\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1} - \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\,)\}}$

別解 (1) の結果から，$0 \leqq t \leqq T$ のとき，$y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} > 0$

また　$x^2 - y^2 = \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 1$　　ゆえに　$y = \sqrt{x^2 - 1}$

ここで　　$\{\log(x + \sqrt{x^2 - 1}\,)\}' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$$(x\sqrt{x^2 - 1}\,)' = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

したがって　$\{x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1}\,)\}' = 2\sqrt{x^2 - 1}$

よって　　$I = \displaystyle\int_1^{\alpha} y\,dx = \int_1^{\alpha} \sqrt{x^2-1}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\Big[\, x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1}) \,\Big]_1^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\{\alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \log(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\,)\}$$

6.42　(1)　$x = ty$ とおくと　$dx = tdy$

x と y の対応は右のようになる．

x	$1 \longrightarrow t$
y	$t^{-1} \longrightarrow 1$

よって　$f(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{\log x}{x+t}dx = \int_{t^{-1}}^1 \frac{\log ty}{ty+t}tdy = \int_{t^{-1}}^1 \frac{\log ty}{y+1}dy$

$$= \log t \int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1}dy + \int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1}dy$$

(2)　$\dfrac{\log y}{y+1}$ の原始関数を $F(y)$ とすると

$$\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1}dy = F(1) - F(t^{-1})$$

$F'(y) = \dfrac{\log y}{y+1}$ であるから

$$\frac{d}{dt}\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1}dy = \frac{d}{dt}\{F(1) - F(t^{-1})\} = -F'(t^{-1})\cdot(t^{-1})'$$

$$= -\frac{\log t^{-1}}{t^{-1}+1}\cdot(-t^{-2}) = -\frac{\log t}{t(t+1)}$$

(3)　$\displaystyle\int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1}dy = \Big[\, \log(y+1) \,\Big]_{t^{-1}}^1 = \log\frac{2}{t^{-1}+1} = \log\frac{2t}{t+1}$

また　$\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1}dy = \frac{d}{dt}\Big[\, \log(y+1) \,\Big]_{t^{-1}}^1$

$$= \frac{d}{dt}\log\frac{2}{t^{-1}+1} = \frac{d}{dt}\{\log 2 - \log(t^{-1}+1)\}$$

$$= -\frac{1}{t^{-1}+1}(t^{-1})' = -\frac{1}{t^{-1}+1}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t(t+1)}$$

(2) および上の結果を利用して微分すると

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{t}\int_{t^{-1}}^{1}\frac{1}{y+1}dy + \log t\left\{\frac{d}{dt}\int_{t^{-1}}^{1}\frac{1}{y+1}dy\right\} + \frac{d}{dt}\int_{t^{-1}}^{1}\frac{\log y}{y+1}dy \\ &= \frac{1}{t}\log\frac{2t}{t+1} + \log t \times \frac{1}{t(t+1)} - \frac{\log t}{t(t+1)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{t}\log\frac{2t}{t+1}} \end{aligned}$$

(4) $t>0$ より (3) の結果から

$$\frac{2t}{t+1}<1 \quad \text{すなわち} \quad 0<t<1 \text{ のとき} \quad f'(t)<0$$

$$\frac{2t}{t+1}>1 \quad \text{すなわち} \quad 1<t \text{ のとき} \quad f'(t)>0$$

したがって，$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	0	↗

よって　$t=1$ のとき**極小値 0**

6.43　(1) $n \geqq 2$，$f(x)=(1-x)^3x^n$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1-x)^2(-1)\cdot x^n + (1-x)^3\cdot nx^{n-1} \\ &= (1-x)^2x^{n-1}\{n-(n+3)x\} \end{aligned}$$

n が奇数のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↗	極大 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$	↘	0	↘

n が偶数のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}$	↘	0	↘

n が奇数のとき　$x=\dfrac{n}{n+3}$ で**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}}$

n が偶数のとき　$x=0$ で**極小値 0**，

$x=\dfrac{n}{n+3}$ で**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{27n^n}{(n+3)^{n+3}}}$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 (1-x)^3 x^n \, dx \\ &= \int_0^1 (x^n - 3x^{n+1} + 3x^{n+2} - x^{n+3}) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{3}{n+2}x^{n+2} + \frac{3}{n+3}x^{n+3} - \frac{1}{n+4}x^{n+4} \right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+4}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+4} \\ =& \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - 2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

よって $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$

6.44 (1) $g(t) = t^6 + 2t^3 - 3$ とし，この関数の原始関数を $G(t)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{p-x}^{p} g(t)dt = \left[\, G(t) \, \right]_{p-x}^{p} \\ &= G(p) - G(p-x) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

① を x について微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 - G'(p-x) \cdot (p-x)' \\ &= -g(p-x) \cdot (-1) \\ &= g(p-x) \\ &= (p-x)^6 + 2(p-x)^3 - 3 \\ &= \{(p-x)^3 + 1\}^2 - 4 \end{aligned}$$

よって $f'(x)$ が最小となるのは

$$(p-x)^3+1=0 \quad \text{すなわち} \quad x=p+1$$

のときである．

(2) ① に $x=p+1$ を代入すると　　$f(p+1)=G(p)-G(-1)$　$\cdots$②

② より $f(p+1)$ が最小となるのは $G(p)$ が最小となるときであるから

$$\begin{aligned} G'(p)=g(p)&=p^6+2p^3-3\\ &=(p^3-1)(p^3+3)\\ &=(p-1)(p^2+p+1)(p^3+3)\end{aligned}$$

$G(p)$ の $p>0$ における増減表は，次のようになる．

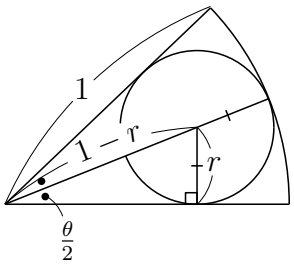
p	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$G'(p)$		$-$	0	$+$
$G(p)$		↘	極小	↗

よって $p=1$ のとき最小となり，求める最小値は ② から

$$\begin{aligned} G(1)-G(-1)=\int_{-1}^{1} g(t)\,dt&=\int_{-1}^{1}(t^6+2t^3-3)\,dt\\ &=2\int_0^1(t^6-3)\,dt\\ &=2\left[\frac{t^7}{7}-3t\right]_0^1=\boldsymbol{-\frac{40}{7}}\end{aligned}$$

6.45　(1) $r=f(\theta)$ とおくと，右の図から

$$(1-r)\sin\frac{\theta}{2}=r \quad \cdots①$$



ゆえに　　$r=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

よって　　$\boldsymbol{f(\theta)=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}}$

(2) $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

また，$r>0$ であるから，① より　$1-r>0$

① の両辺を θ で微分すると

$$-r'\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}(1-r)\cos\frac{\theta}{2}=r'$$

ゆえに　　$\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)r'=\dfrac{1}{2}(1-r)\cos\dfrac{\theta}{2}$　$\cdots$②

② において，$1+\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$1-r>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから　$r'>0$

さらに，② の両辺を θ で微分すると

$$\frac{1}{2}r'\cos\frac{\theta}{2}+\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)r''=-\frac{1}{2}r'\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}(1-r)\sin\frac{\theta}{2}$$

ゆえに　　$\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)r''=-\left\{r'\cos\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{4}(1-r)\sin\dfrac{\theta}{2}\right\}$

上式において $r'>0$，$1-r>0$，$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから　$r''<0$

したがって　　$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ において　　$r'>0$，$r''<0$

よって　　$0<\theta<\pi$ の範囲で，$f(\theta)$ は単調増加，$f'(\theta)$ は単調減少．

補足　$f'(\theta)=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}>0$，　$f''(\theta)=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}-2}{4\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}<0$

(3)　$x=\dfrac{\theta}{2}$ とおくと　$\dfrac{d\theta}{dx}=2$

θ	$\frac{\pi}{3}\to\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)\,d\theta&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx\\&=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx\\&=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x+\sin x-1}{\cos^2x}\,dx\\&=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{\sin x}{\cos^2x}-\frac{1}{\cos^2x}\right)dx\\&=2\left[\,x+\frac{1}{\cos x}-\tan x\,\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}-2+2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

6.46　(1)　円 $x^2+(y-1)^2=1$ の中心 $(1,\ 0)$ を C とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)=(\sin\theta,-\cos\theta)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(0,\ 1)+(\sin\theta,-\cos\theta)=(\sin\theta,\ 1-\cos\theta)$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{Q}(\sin\theta,\ 1-\cos\theta)}$

(2) $\mathrm{QP} = \overset{\frown}{\mathrm{OQ}} = \theta$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の向きは，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ を $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \mathrm{QP}\left(\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),\ -\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \theta(-\cos\theta, -\sin\theta)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}}$

$$= (\sin\theta,\ 1-\cos\theta) + \theta(-\cos\theta, -\sin\theta)$$
$$= (\sin\theta - \theta\cos\theta,\ 1 - \cos\theta - \theta\sin\theta)$$

よって　　$\mathbf{P(\sin\theta - \theta\cos\theta,\ 1 - \cos\theta - \theta\sin\theta)}$

(3) (2) の結果から，$f(\theta) = 1 - \cos\theta - \theta\sin\theta$ であるから

$$f'(\theta) = \sin\theta - \sin\theta - \theta\cos\theta = -\theta\cos\theta$$

したがって，$f(\theta)$ の増減表は

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	0	↘	$1-\frac{\pi}{2}$	↗	2

よって，$\theta = \pi$ のとき**最大値 2**，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$のとき **最小値 $\mathbf{1 - \frac{\pi}{2}}$**

(4) (2) の結果により

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\theta - \theta\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \left[\ \theta - \sin\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(\cos\theta)'\,d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2} - 1 + \left[\ \theta\cos\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2} - 1 - \left[\ \sin\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{\pi}{2} - 2}$$

6.47　(1)

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \int_1^{2x} (3t - 4x)t\log t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}x + 3\int_1^{2x} t^2\log t\,dt - 4x\int_1^{2x} t\log t\,dt \quad \cdots ①$$

これを微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 3\cdot 2\cdot(2x)^2\log 2x - 4\int_1^{2x} t\log t\,dt - 4x\cdot 2\cdot 2x\log 2x$$
$$= \frac{1}{2} + 8x^2\log 2x - 4\int_1^{2x} t\log t\,dt \quad \cdots ②$$

ここで　$\displaystyle\int_1^{2x} t\log t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{2x} (t^2)'\log t\,dt$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ t^2\log t\ \Big]_1^{2x} - \frac{1}{2}\int_1^{2x} t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(2x)^2\log 2x - \frac{1}{4}\Big[\ t^2\ \Big]_1^{2x}$$

$$= 2x^2\log 2x - x^2 + \frac{1}{4} \quad \cdots ③$$

③ を ② に代入すると

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 8x^2\log 2x - 4\left(2x^2\log 2x - x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 4x^2 - \frac{1}{2} \quad \cdots ④$$

$f'(x) = 0$ のとき　$4x^2 - \dfrac{1}{2} = 0$　$x > 0$ に注意して　$\boldsymbol{x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

(2) ④ を積分すると　$f(x) = \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{x}{2} + C$　(C は積分定数)

① より，$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ であるから，上式に $x = \dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + C = \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad C = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad f(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$$

増減表は右のようになるから

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき**極小値** $\boldsymbol{\dfrac{4-\sqrt{2}}{12}}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

解説 関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_a^{g(x)} = F(g(x)) - F(a)$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

本題では

$$\frac{d}{dx}\int_1^{2x} f(t)\,dt = f(2x)\cdot(2x)' = 2f(2x)$$

6.48 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx = 2\int_{0}^{\pi} x\sin x\,dx = 2\int_{0}^{\pi} x(-\cos x)'\,dx$

$$= 2\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx$$

$$= 2\pi + 2\Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{2\pi}$$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\sin 3x\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \sin 2x\sin 3x\,dx$

$$= \int_0^{\pi}(-\cos 5x + \cos x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{0}$$

(3) $m = n$ のとき

$$(\text{与式}) = 2\int_0^{\pi} \sin^2 mx\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}(1-\cos 2mx)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

$m \neq n$ のとき

$$(\text{与式}) = 2\int_0^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\{-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{0}$$

(4) (3) の結果を利用すると

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=1}^{2013}\sin mx\right)\left(\sum_{n=1}^{2013}\sin nx\right)dx$$

$$= \sum_{m=1}^{2013}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx$$

$$= \sum_{m=1}^{2013}\pi = \boldsymbol{2013\pi}$$

6.49 (1) 与式から　$\sin x - \sqrt{3}\cos x < 0$

左辺の三角関数を合成すると

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<0$$

よって　　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)<0 \quad \cdots ①$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$-\frac{4}{3}\pi \leqq x-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{2}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$-\pi < x-\frac{\pi}{3} < 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{-\frac{2}{3}\pi < x < \frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} \text{ において} \quad \sqrt{3}\cos x-\sin x>0$$

ゆえに

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left|\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\right| dx$$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\,dx \quad \cdots ②$$

ここで

$$4\sin x = a(\sqrt{3}\cos x-\sin x)+b(\sqrt{3}\cos x-\sin x)'$$

をみたす定数 a，b を求める．上式の右辺は

$$\begin{aligned} 4\sin x &= a(\sqrt{3}\cos x-\sin x)+b(-\sqrt{3}\sin x-\cos x) \\ &= (-a-\sqrt{3}\,b)\sin x+(\sqrt{3}\,a-b)\cos x \end{aligned}$$

係数を比較して　$4=-a-\sqrt{3}\,b$，$0=\sqrt{3}\,a-b$

これを解いて　　$a=-1,\ b=-\sqrt{3}$

ゆえに　　$\dfrac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x} = -1-\sqrt{3}\times\dfrac{(\sqrt{3}\cos x-\sin x)'}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}$

したがって

$$-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\,dx$$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left\{-1-\sqrt{3}\times\frac{(\sqrt{3}\cos x-\sin x)'}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\right\} dx$$

$$=-\Big[-x-\sqrt{3}\,\log\left|\sqrt{3}\cos x-\sin x\right|\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0}=\frac{\pi}{3} \quad \cdots ③$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{ -1 - \sqrt{3} \times \frac{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)'}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right\} dx$$
$$= \left[-x - \sqrt{3}\,\log\left|\sqrt{3}\cos x - \sin x\right| \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3 \quad \cdots ④$$

③，④ を ② に代入して $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3}$

別解 (1) の結果から

$$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} \text{ において} \quad \sqrt{3}\cos x - \sin x > 0$$

ゆえに

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x} \right| dx$$
$$= -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x - \sin x}\,dx$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{2\sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}\,dx$$

ここで，$t = x - \dfrac{\pi}{3}$ とおくと $\quad \dfrac{dt}{dx} = 1$

x	$-\frac{\pi}{3}$	$\to$	0	$\to$	$\frac{\pi}{6}$
t	$-\frac{2}{3}\pi$	$\to$	$-\frac{\pi}{3}$	$\to$	$-\frac{\pi}{6}$

$$2\sin x = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin t + \sqrt{3}\cos t$$

したがって

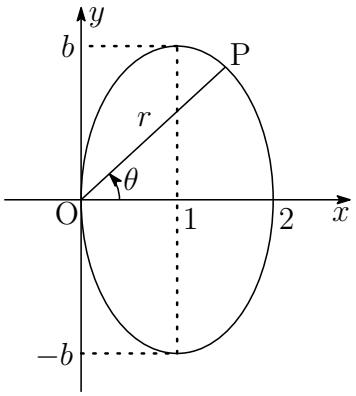
$$I = \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \left(1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \left(1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt$$
$$= \left[\, t + \sqrt{3}\log|\sin t| \,\right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{3}} - \left[\, t + \sqrt{3}\log|\sin t| \,\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\log\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3}$$

6.50 (1) $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入して整理すると

$$(r\cos\theta-1)^2+\frac{(r\sin\theta)^2}{b^2}=1$$

$$r^2\cos^2\theta-2r\cos\theta+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=0$$

$$r\left\{r\left(b^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-2b^2\cos\theta\right\}=0$$



したがって

$$r=0 \quad \text{または} \quad r=\frac{2b^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

上式の第 2 式は，$\cos\theta=0$ のとき $r=0$ であるから，E を表す極方程式を次のように定めてよい．

$$\boldsymbol{f(\theta)=\dfrac{2b^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta+\sin^2\theta}}$$

(2) (1) より，E は，一般性を失うことなく，次のように定めることができる．

$$f(\theta)=\frac{2b^2\cos\theta}{(b^2-1)\cos^2\theta+1} \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

$f(\theta)$ の最大値について，次の 3 つに場合分けする．

i) $b^2-1<0$ のとき

$$b^2\leqq(b^2-1)\cos^2\theta+1\leqq 1, \quad 0\leqq 2b^2\cos\theta\leqq 2b^2$$

$\theta=0$ で $(b^2-1)\cos^2\theta+1=b^2$，$2b^2\cos\theta=2b^2$ であるから，$f(\theta)$ は，点 $(2,\,0)$ で最大値をとり，これは条件に反する

ii) $b^2-1=0$ のとき　$f(\theta)=2\cos\theta$

$\theta=0$ すなわち点 $(2,\,0)$ で $f(\theta)$ は最大となり，これも条件に反する．

iii) $b^2-1>0$ のとき，$f(\theta)$ は，$\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ で最小値をとる．$u=\cos\theta$ とおくと，点 $(2,\,0)$ 以外で最大値をもつので，$0<u<1$ の範囲で，次式が最大値をもつための条件を求めればよい．

$$f(\theta)=\frac{2b^2\cos\theta}{(b^2-1)\cos^2\theta+1}=\frac{2b^2u}{(b^2-1)u^2+1}=\frac{2b^2}{(b^2-1)u+\dfrac{1}{u}}$$

$g(u) = (b^2-1)u + \dfrac{1}{u}$ とおくと，$g(u)$ が $0 < u < 1$ で最小値もつための条件を求めればよい．

$$g'(u) = b^2 - 1 - \frac{1}{u^2} = \frac{b^2-1}{u^2}\left(u + \frac{1}{\sqrt{b^2-1}}\right)\left(u - \frac{1}{\sqrt{b^2-1}}\right)$$

$g(u)$ の増減は，右のように，b は次式を満たせばよい．

u	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{b^2-1}}$	$\cdots$	1
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$		↘	極小	↗	

$$0 < \frac{1}{\sqrt{b^2-1}} < 1$$

$b > 0$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{b > \sqrt{2}}$

(3) (2) の結果より　$\cos\theta_0 = \dfrac{1}{\sqrt{b^2-1}}$

また，$0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\sin\theta_0 = \sqrt{\dfrac{b^2-2}{b^2-1}}$

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)\,d\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{2b^2\cos\theta}{b^2-(b^2-1)\sin^2\theta}\,d\theta$$

$t = \sqrt{b^2-1}\sin\theta$ とすると　$\dfrac{dt}{d\theta} = \sqrt{b^2-1}\cos\theta$

θ と t の対応は，右のようになる．よって

θ	$0 \longrightarrow \quad \theta_0$
t	$0 \longrightarrow \sqrt{b^2-2}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta_0} f(\theta)d\theta &= \frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\int_0^{\sqrt{b^2-2}} \frac{2b}{b^2-t^2}\,dt \\
&= \frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\int_0^{\sqrt{b^2-2}} \left(\frac{1}{b+t} + \frac{1}{b-t}\right)dt \\
&= \frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\left[\ \log\left|\frac{b+t}{b-t}\right|\ \right]_0^{\sqrt{b^2-2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\log\frac{b+\sqrt{b^2-2}}{b-\sqrt{b^2-2}}}
\end{aligned}$$

6.51 (1) 漸化式により

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - \int_0^x t f_0(t)\,dt = 1 - \int_0^x t\,dt \\ &= \mathbf{1 - \frac{1}{2}x^2} \\ f_2(x) &= 1 - \int_0^x t f_1(t)\,dt = 1 - \int_0^x t\left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)dt \\ &= \mathbf{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4} \\ f_3(x) &= 1 - \int_0^x t f_2(t)\,dt = 1 - \int_0^x t\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4\right)dt \\ &= \mathbf{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$f_n(x) - f_{n-1}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!} \qquad \cdots (*)$$

と推測し，これを数学的帰納法により証明する．

［1］$n = 1$ のとき，(1) の結果から $(*)$ が成り立つ．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$f_k(x) - f_{k-1}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{x^{2k}}{k!}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) - f_k(x) &= 1 - \int_0^x t f_k(t)\,dt - \left(1 - \int_0^x t f_{k-1}(t)\,dt\right) \\ &= -\int_0^x t(f_k(t) - f_{k-1}(t))dt \\ &= -\int_0^x t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{t^{2k}}{k!}\,dt \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \frac{x^{2(k+1)}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］から，$n \geqq 1$ のすべて自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(3) (1) の結果より

$$f_1(1)=\frac{1}{2},\ f_2(1)=\frac{5}{8},\ f_3(1)=\frac{29}{48}$$

したがって，$n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$$\frac{1}{2}\leqq f_n(1)\leqq\frac{5}{8}\qquad\cdots(**)$$

が成り立つ．

$(*)$ より，$n\geqq 4$ のとき

$$|f_n(1)-f_{n-1}(1)|=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\leqq\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

上式より

$$\sum_{k=4}^{n}|f_k(1)-f_{k-1}(1)|\leqq\frac{1}{4!}\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{4!}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$<\frac{1}{192}$$

ここで

$$\sum_{k=4}^{n}|f_k(1)-f_{k-1}(1)|\geqq\left|\sum_{k=4}^{n}(f_k(1)-f_{k-1}(1))\right|=|f_n(1)-f_3(1)|$$

上の 2 式から　　$|f_n(1)-f_3(1)|<\dfrac{1}{192}$

したがって，$n\geqq 4$ のとき

$$f_3(1)-\frac{1}{192}<f_n(1)<f_3(1)+\frac{1}{192}$$
$$\frac{29}{48}-\frac{1}{192}<f_n(1)<\frac{29}{48}+\frac{1}{192}$$
$$\frac{1}{2}<\frac{115}{192}<f_n(1)<\frac{117}{192}<\frac{5}{8}$$

よって，$n\geqq 1$ のとき，$(**)$ が成り立つ．

6.52　(1)　$a_n=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\sin x\,dx,\quad b_n=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\cos x\,dx$　(n は自然数)

上の 2 式について，$x=\dfrac{\pi}{2}t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\pi}{2}$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$0\longrightarrow 1$

$$(*)\quad a_n=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\sin\frac{\pi}{2}t\,dt,\quad b_n=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\cos\frac{\pi}{2}t\,dt\quad(n\text{ は自然数})$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると

$$a_1=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t\sin\frac{\pi}{2}t\,dt=\left[-t\cos\frac{\pi}{2}t+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

$$b_1=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t\cos\frac{\pi}{2}t\,dt=\left[\,t\sin\frac{\pi}{2}t+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\,\right]_0^1=\boldsymbol{1-\frac{2}{\pi}}$$

(2) $(*)$ より，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\sin\frac{\pi}{2}t\,dt=-\int_0^1 t^n\left(\cos\frac{\pi}{2}t\right)'dt\\&=-\left[\,t^n\cos\frac{\pi}{2}t\,\right]_0^1+n\int_0^1 t^{n-1}\cos\frac{\pi}{2}t\,dt\\&=\frac{2n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^{n-1}\cos\frac{\pi}{2}t\,dt=\boldsymbol{\frac{2n}{\pi}b_{n-1}},\\b_n&=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\cos\frac{\pi}{2}t\,dt=\int_0^1 t^n\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)'dt\\&=\left[\,t^n\sin\frac{\pi}{2}t\,\right]_0^1-n\int_0^1 t^{n-1}\sin\frac{\pi}{2}t\,dt\\&=1-\frac{2n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^{n-1}\sin\frac{\pi}{2}t\,dt=\boldsymbol{1-\frac{2n}{\pi}a_{n-1}}\end{aligned}$$

(3) $0\leqq t\leqq 1$ において，$0\leqq t^n\sin\dfrac{\pi}{2}\leqq t^n$ であるから

$$0\leqq\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\sin\frac{\pi}{2}t\,dt\leqq\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\,dt\quad\text{ゆえに}\quad 0\leqq a_n\leqq\frac{\pi}{2(n+1)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2(n+1)}=0$ であるから，上式にはさみうちの原理を適用すると

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

$0 \leqq t \leqq 1$ において，$0 \leqq t^n \cos\dfrac{\pi}{2} \leqq t^n$ であるから

$$0 \leqq \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n \cos\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq b_n \leqq \frac{\pi}{2(n+1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(n+1)} = 0$ であるから，上式にはさみうちの原理を適用すると

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

(2) の結果より，$b_n = 1 - \dfrac{2n}{\pi}a_{n-1}$ であるから $(n \geqq 2)$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2n}{\pi}a_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - na_{n-1}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n = \lim_{n\to\infty} na_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ より

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot(n+1)a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot(n+1)a_n = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

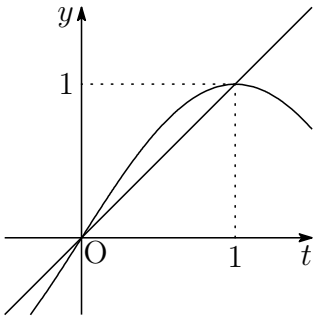
(2) の結果より，$a_n = \dfrac{2n}{\pi}b_{n-1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n^2 b_{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}na_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 b_n = \frac{\pi^2}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^2 b_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot(n+1)^2 b_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\cdot(n+1)^2 b_n = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}\end{aligned}$$

別解 $0 \leqq t \leqq 1$ において，$t \leqq \sin\dfrac{\pi}{2}t \leqq 1$ より



$$\int_0^1 t^{n+1}\,dt \leqq \int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \int_0^1 t^n\,dt$$

$$\frac{1}{n+2} \leqq \int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \frac{1}{n+1}$$

したがって

$$\frac{n\pi}{2(n+2)} \leqq na_n \leqq \frac{n\pi}{2(n+1)} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty} na_n = \frac{\pi}{2}$$

6.53 (1) $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{8}\right)$ を x について微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=\log_4\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)'-\log_4(1+\tan x)\cdot(x)'\\&=-\log_4\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}-\log_4(1+\tan x)\\&=-\log_4\left\{1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right\}-\log_4(1+\tan x)\\&=-\log_4\frac{2}{1+\tan x}-\log_4(1+\tan x)\\&=-\log_4 2=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(2) $$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}}\log_4(1+\tan t)\,dt=0$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(\frac{\pi}{8}\right)+\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}f'(t)\,dt\\&=0+\int_{\frac{\pi}{8}}^{x}\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

よって $$f(0)=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{\pi}{8}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$$

(3) (2) の結果から $a_1=f(0)=\dfrac{\pi}{16}$, $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\pi}{16}$

ゆえに $$a_{n+1}-\frac{\pi}{24}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{\pi}{24}\right)$$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{\pi}{24}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{\pi}{24}$, 公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{\pi}{24}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{\pi}{24}\right)$$

よって $$a_n=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\frac{\pi}{24}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$$

6.54 (1) x の値に対して，次式を満たす θ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ をとる．

$$\sin\theta=\frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}}$$

このとき，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}$ であるから

$$\sin t - ax\cos t = \sqrt{1+a^2x^2}\sin(t-\theta)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\, \sin t - ax\cos t \,\right| dt \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\, \sin(t-\theta) \right| dt \end{aligned}$$

i) $x \geqq 0$ のとき，$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+a^2x^2}\left\{ \int_0^{\theta} \{-\sin(t-\theta)\}\, dt + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t-\theta)\, dt \right\} \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\left\{ \Big[\ \cos(t-\theta)\ \Big]_0^{\theta} + \Big[\ -\cos(t-\theta)\ \Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}(2-\sin\theta-\cos\theta) \\ &= 2\sqrt{1+a^2x^2} - ax - 1 \end{aligned}$$

ii) $x < 0$ のとき，$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+a^2x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t-\theta)\, dt \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\Big[-\cos(t-\theta)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{1+a^2x^2}\,(-\sin\theta+\cos\theta) \\ &= -ax+1 \end{aligned}$$

i)，ii) より　$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1+a^2x^2} - ax - 1 & (x \geqq 0) \\ -ax+1 & (x < 0) \end{cases}}$

(2) $x < 0$ で $f(x)$ は単調減少.

$x \geqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2a^2x}{\sqrt{1+a^2x^2}} - a = \frac{a(2ax - \sqrt{1+a^2x^2})}{\sqrt{1+a^2x^2}} \\ &= \frac{a(3a^2x^2-1)}{\sqrt{1+a^2x^2}(2ax+\sqrt{1+a^2x^2})} \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{\sqrt{3}a}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$ をとる．

別解 $x<0$ において，$f(x)$ は単調減少であるから，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の最小値を調べればよい．(1) により

$$\sqrt{1+a^2x^2}=\frac{1}{\cos\theta},\quad ax=\tan\theta$$

ここで，$g(\theta)=f(x)$ とおくと

$$g(\theta)=\frac{2}{\cos\theta}-\tan\theta-1\quad\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$g'(\theta)=\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$$

したがって，$g(\theta)$ の増減表は，次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$	1	$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$	

また，$ax=\tan\theta$ により，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}a}$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{\sqrt{3}a}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$ をとる．

6.55 (1) $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x\geqq -3)$ より $\quad f'(x)=\dfrac{3x(x+2)}{2\sqrt{3x^2+x^3}}$

したがって $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

増減表から，求める極大値は $\quad \boldsymbol{f(-2)=2}$

(2) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ より $(-3 \leqq x \leqq 0)$

$$F'(x)=f(x+3)-f(x)=\frac{\{f(x+3)\}^2-\{f(x)\}^2}{f(x+3)+f(x)}$$
$$=\frac{3(x+3)^2+(x+3)^3-(3x^2+x^3)}{f(x+3)+f(x)}=\frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3)+f(x)}$$

$f(x)=|x|\sqrt{x+3}$ であるから，$F(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	極小	↗	

$-3 \leqq x \leqq 0$ に注意して，$F(x)$ を求める．

$$F(x)=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_0^{x+3} f(t)\,dt$$
$$=\int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt+\int_0^{x+3} t\sqrt{t+3}\,dt \quad \cdots ①$$

まず $\displaystyle\int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt=\int_0^x \{(t+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{t+3}\}\,dt$

$$=\left[\ \frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}}-2(t+3)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^x$$
$$=\left[\ \frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^x$$
$$=\frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+\frac{12}{5}\sqrt{3} \quad \cdots ②$$

①，② より

$$F(x)=\frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\}+\frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表の x の値から

$$F(-3)=\frac{2}{5}(-2\cdot 3^{\frac{3}{2}})+\frac{24}{5}\sqrt{3}=\frac{12}{5}\sqrt{3}$$
$$F(-2)=\frac{2}{5}(-4-4^{\frac{3}{2}})+\frac{24}{5}\sqrt{3}=\frac{24}{5}(\sqrt{3}-1)$$
$$F(0)=\frac{2}{5}(-2\cdot 3^{\frac{3}{2}+6^{\frac{3}{2}}})+\frac{24}{5}\sqrt{3}=\frac{12}{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6})$$

よって　**最大値 $\boldsymbol{F(0)=\dfrac{12}{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6})}$,**

最小値 $\boldsymbol{F(-2)=\dfrac{24}{5}(\sqrt{3}-1)}$

6.56 (1) 部分積分法により

$$F_2(x) = \int_0^x \frac{t^2}{2!}e^{-t}\,dt = -\int_0^x \frac{t^2}{2!}(e^{-t})'\,dt$$
$$= -\left[\ \frac{t^2}{2!}e^{-t}\ \right]_0^x + \int_0^x \frac{t}{1!}e^{-t}\,dt = \boldsymbol{-\frac{x^2}{2!}e^{-x} + F_1(x)},$$
$$F_1(x) = \int_0^x te^{-t}\,dt = -\int_0^x t(e^{-t})'\,dt$$
$$= -\left[\ te^{-t}\ \right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt = \boldsymbol{-xe^{-x} + F_0(x)}$$

(2) $F_0(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[\ -e^{-t}\ \right]_0^x = \boldsymbol{1 - e^{-x}}$

上式および (1) の結果により

$$F_1(x) = -xe^{-x} + (1 - e^{-x}) = \boldsymbol{1 - e^{-x}(x+1)}$$
$$F_2(x) = -\frac{x^2}{2}e^{-x} + \{1 - e^{-x}(x+1)\} = \boldsymbol{1 - e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)}$$

(3) (1) と同様に，部分積分法を用いると

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt = -\int_0^x \frac{t^n}{n!}(e^{-t})'\,dt$$
$$= -\left[\ \frac{t^n}{n!}e^{-t}\ \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt = \boldsymbol{-\frac{x^n}{n!}e^{-x} + F_{n-1}(x)}$$

$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{x^k}{k!}e^{-x}$ であるから $(k = 1, 2, \cdots, n)$

$$\sum_{k=1}^{n}\{F_k(x) - F_{k-1}(x)\} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}$$
$$F_n(x) - F_0(x) = -e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} \quad \cdots(*)$$

$F_0(x) = 1 - e^{-x}$ を $(*)$ の辺々に加えると

$$\boldsymbol{F_n(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}$$

(4) $p(x) = x^n$ より $\qquad \boldsymbol{p^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}}$

(3) の結果から　$\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n! - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k$$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$

よって　$\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n! - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$

解説　(長大 [医]2018) 8

6.57　(1)　$\displaystyle f(x) = \int_0^1 e^{|t-x|}dt$

i)　$x \leqq 0$ のとき

$$f(x) = \int_0^1 e^{t-x}\,dt = \Big[\ e^{t-x}\ \Big]_0^1 = e^{1-x} - e^{-x}$$

ii)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$f(x) = \int_0^x e^{-t+x}\,dt + \int_x^1 e^{t-x}\,dx = \Big[\ -e^{-t+x}\ \Big]_0^x + \Big[\ e^{t-x}\ \Big]_x^1$$
$$= e^x + e^{1-x} - 2$$

iii)　$1 \leqq x$ のとき

$$f(x) = \int_0^1 e^{-t+x}\,dt = \Big[\ -e^{-t+x}\ \Big]_0^1 = e^x - e^{x-1}$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} e^{1-x} - e^{-x} & (x \leqq 0) \\ e^x + e^{1-x} - 2 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ e^x - e^{x-1} & (1 \leqq x) \end{cases}}$

(2)　$0 < x < 1$ のとき　$f'(x) = e^x - e^{1-x} = e^{1-x}(e^{2x-1} - 1)$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

よって　$x = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{2(e^{\frac{1}{2}} - 1)}$

6.58 (1) a，b の条件から

$$a=\cos\theta,\quad b=\sin\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\,a\sin x-b\cos x\,|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos\theta\sin x-\sin\theta\cos x|\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin(x-\theta)|\,dx\\&=-\int_0^{\theta}\sin(x-\theta)+\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\sin(x-\theta)\,dx\\&=\Big[\,\cos(x-\theta)\,\Big]_0^{\theta}-\Big[\,\cos(x-\theta)\,\Big]_\theta^{\frac{\pi}{2}}\\&=2-\cos\theta-\sin\theta\quad\cdots①\\&=\boldsymbol{2-a-b}\end{aligned}$$

(2) ① から

$$S=2-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,0),(0,1)}$ のとき，最大値 $\mathbf{1}$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\boldsymbol{a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$

6.59 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\sin2x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}x\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)'dx$

$$\begin{aligned}&=\left[\,-\frac{1}{2}x\cos2x\,\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)dx\\&=-\pi+\left[\,\frac{1}{4}\sin2x\,\right]_{-\pi}^{\pi}=\boldsymbol{-\pi}\end{aligned}$$

(2) $m\neq n$ のとき

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)\}dx\\&=\frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\,\right]_{-\pi}^{\pi}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

$m=n$ のとき

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2mx\,dx&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos2mx)dx\\&=\frac{1}{2}\left[\,x-\frac{1}{2m}\sin2mx\,\right]_{-\pi}^{\pi}=\boldsymbol{\pi}\end{aligned}$$

(3) $$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\,(-\cos x)'\,dx$$
$$= \Big[\,-x\cos x\,\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(-\cos x)\,dx$$
$$= 2\pi + \Big[\,\sin x\,\Big]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

上式および，(1)，(2) の結果を用いて

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}(x - a\sin x - b\sin 2x)^2 dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx + a^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx + b^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 2x\,dx$$
$$- 2a\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx - 2b\int_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x\,dx + 2ab\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin 2x\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\pi^3 + a^2\pi + b^2\pi - 2a\cdot 2\pi - 2b\cdot(-\pi) + 2ab\cdot 0$$
$$= \pi a^2 - 4\pi a + \pi b^2 + 2\pi b + \frac{2}{3}\pi^3$$
$$= \pi(a-2)^2 + \pi(b+1)^2 + \frac{2}{3}\pi^3 - 5\pi$$

よって　$\boldsymbol{a=2,\ b=-1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi^3 - 5\pi}$

解説 (琉球大学 2011) 4

6.60 (1) $$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\,x - \frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

(2) n が 1 以上の整数のとき

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1} x(\cos x)'$$
$$= -\Big[\,\sin^{2n-1} x\cos x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2} x\cos^2 x\,dx$$
$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx$$
$$= (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n$$

したがって　$2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$　よって　$\boldsymbol{I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 \\ &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(2n)^2(2n-2)^2\cdots 4^2\cdot 2^2}I_0 \\ &= \boldsymbol{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

6.61 (1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n(\alpha+x)\,dx$ とおくと

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi} \sin^{n-1}(\alpha+x)\{-\cos(\alpha+x)\}'\,dx \\ &= \Big[\ \sin^{n-1}(\alpha+x)\{-\cos(\alpha+x)\}\ \Big]_0^{\pi} \\ &\qquad - \int_0^{\pi} (n-1)\sin^{n-2}(\alpha+x)\cos(\alpha+x)\{-\cos(\alpha+x)\}\,dx \\ &= -(-1)^n \sin\alpha^{n-1}\cos\alpha + \sin^{n-1}\alpha\cos\alpha \\ &\qquad + (n-1)\int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\alpha+x)\{1-\sin^2(\alpha+x)\}\,dx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

したがって $\qquad I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

よって $\qquad \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n(\alpha+x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\alpha+x)\,dx$

(2) $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおくと

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+x)$$

したがって $\qquad \displaystyle\int_0^{\pi} (a\sin x + b\cos x)^6\,dx = (a^2+b^2)^3 I_6$

(1) の結果から

$$\frac{I_6}{I_4} = \frac{5}{6}, \quad \frac{I_4}{I_2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad I_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0$$

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi}(a\sin x+b\cos x)^6\,dx=(a^2+b^2)^3I_6$

$\displaystyle=(a^2+b^2)^3\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0$

$\displaystyle=\frac{5}{16}(a^2+b^2)^3\int_0^{\pi}dx$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{5}{16}(a^2+b^2)^3\pi}$

6.62　(1)　$\displaystyle I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\,d\theta=\Big[-\log\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

$\displaystyle I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}\theta\,d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta(\tan\theta)'\,d\theta$

$\displaystyle=\Big[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}}$

(2)　$\displaystyle 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$0\leqq\tan\theta\leqq 1$ であるから

$\tan^n\theta\geqq\tan^{n+1}\theta$　ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta\geqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}\theta\,d\theta$

よって　$I_n\geqq I_{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(3)　先ず，$\displaystyle I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$，$I_n\geqq I_{n+1}\geqq I_{n+2}$ より

$\displaystyle 2I_n\geqq I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$　ゆえに　$\displaystyle I_n\geqq\frac{1}{2(n+1)}$

次に，$\displaystyle I_{n-2}+I_n=\frac{1}{n-1}$，$I_{n-2}\geqq I_{n-1}\geqq I_n$ より

$\displaystyle 2I_n\leqq I_{n-2}+I_n=\frac{1}{n-1}$　ゆえに　$\displaystyle I_n\leqq\frac{1}{2(n-1)}$

したがって　$\displaystyle\frac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\frac{1}{2(n-1)}$

$\displaystyle\frac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n\leqq\frac{n}{2(n-1)}$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2(n-1)}=\dfrac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2}$$

別解 $I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$ より　$nI_n+\dfrac{n}{n+2}\cdot(n+2)I_{n+2}=\dfrac{n}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} nI_n=\lim_{n\to\infty}(n+2)I_{n+2}=\alpha$ とおくと，$n\longrightarrow\infty$ のとき

$$\alpha+1\cdot\alpha=1 \quad \text{よって} \quad \alpha=\frac{1}{2}$$

6.63 (1) $f(x)=x^ne^{1-x}$ を微分すると　$f'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{1-x}$

$0<x<1$ において，$f'(x)>0$ であるから

$$f(0)<f(x)<f(1) \qquad \text{よって} \qquad 0<f(x)<1$$

(2)
$$\begin{aligned} I_1&=\int_0^1 xe^{1-x}\,dx=-\int_0^1 x(e^{1-x})'\,dx\\ &=-\Big[\,xe^{1-x}\,\Big]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}\,dx\\ &=-1+\Big[\,-e^{1-x}\,\Big]_0^1=\boldsymbol{e-2}\end{aligned}$$

また
$$\begin{aligned} I_{n+1}&=\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx=-\int_0^1 x^{n+1}(e^{1-x})'\,dx\\ &=-\Big[\,x^{n+1}e^{1-x}\,\Big]_0^1+\int_0^1 (n+1)x^ne^{1-x}\,dx\\ &=-1+(n+1)I_n\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{I_{n+1}=(n+1)I_n-1}$

(3) $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$ の両辺を $(n+1)!$ で割ると

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{I_n}{n!}-\frac{1}{(n+1)!} \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}=a_n-\frac{1}{(n+1)!}$$

$n\geqq 2$ のとき $a_{n-1}-a_n=\dfrac{1}{n!}$ であるから

$$\sum_{k=2}^{n}(a_{k-1}-a_k)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{よって} \quad a_1-a_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

(4) (3) の結果から　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + a_1 - a_n$

また　$a_1 = \dfrac{I_1}{1!} = e - 2$

$0 < f(x) < 1$ および $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ から　$0 < I_n < 1$

ゆえに　$0 < a_n < \dfrac{1}{n!}$　したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

よって　$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + (e-2) - 0 = e - 1$

6.64　(1) 与えられた関数列により

$$\begin{aligned} f_2(x) &= re^{-2rx}\int_0^x f_1(t)e^{2rt}\,dt = re^{-2rx}\int_0^x e^{rt}\,dt \\ &= e^{-2rx}\Big[\ e^{rt}\ \Big]_0^x = \boldsymbol{e^{-2rx}(e^{rx}-1)} \\ f_3(x) &= 2re^{-3rx}\int_0^x f_2(t)e^{3rt}\,dt = 2re^{-3rx}\int_0^x (e^{2rt} - e^{rt})\,dt \\ &= e^{-3rx}\Big[\ e^{2rt} - 2e^{rt}\ \Big]_0^x = e^{-3rx}(e^{2rx} - 2e^{rx} + 1) \\ &= \boldsymbol{e^{-3rx}(e^{rx}-1)^2} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$f_n(x) = e^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1} \quad \cdots(\mathrm{A})$$

と推測する.

［1］$n = 1$ のとき　$f_1(x) = e^{-rx}(e^{rx}-1)^0 = e^{-rx}$

よって，$n = 1$ のとき，(A) が成り立つ.

［2］$n = k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$f_k(x) = e^{-krx}(e^{rx}-1)^{k-1}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= kre^{-(k+1)rx}\int_0^x f_k(t)e^{(k+1)rt}\,dt \\ &= kre^{-(k+1)rx}\int_0^x (e^{rx}-1)^{k-1}e^{rt}\,dt \\ &= e^{-(k+1)rx}\int_0^x k(e^{rt}-1)^{k-1}(e^{rt}-1)'\,dt \\ &= e^{-(k+1)rx}\Big[\ (e^{rt}-1)^k\ \Big]_0^x = e^{-(k+1)rx}(e^{rx}-1)^k \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．

(3) $f_n(x)=e^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1}$ $(n \geqq 3)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -nre^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1}+e^{-nrx}\cdot(n-1)(e^{rx}-1)^{n-2}\cdot re^{rx} \\ &= re^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-2}\{-n(e^{rx}-1)+(n-1)e^{rx}\} \\ &= re^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-2}(n-e^{rx}) \end{aligned}$$

$x>0$ のとき，$f_n'(x)=0$ とすると

$$n-e^{rx}=0 \quad \text{すなわち} \quad x=\frac{1}{r}\log n$$

したがって，$f_n(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{r}\log n$	$\cdots$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$
$f_n(x)$		↗	極大	↘

よって，$\boldsymbol{x=\frac{1}{r}\log n}$ で極大値 $\boldsymbol{\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}}$ をとる．

6.65 (1) $I_1=\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx=\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_1^{\sqrt{e}}=\boldsymbol{1-\frac{\sqrt{e}}{2}}$

(2) $I_{n+1}=\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)^{n+1}\,dx$

$$\begin{aligned} &= \Big[\,x(\log x)^{n+1}\,\Big]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}x\{(\log x)^{n+1}\}'\,dx \\ &= \sqrt{e}\,(\log\sqrt{e}\,)^{n+1}-(n+1)\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)^n\,dx=\sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-(n+1)I_n \end{aligned}$$

(3) 与えられた命題を

$$I_n=(-1)^{n-1}n!+\sqrt{e}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{n!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m \quad \cdots(*)$$

とおく．

［1］$n=1$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} I_1 &= (-1)^{1-1}1! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{1}(-1)^{1-m}\frac{1!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m \\ &= 1 + \sqrt{e}\left\{(-1)^{1-0}\frac{1!}{0!}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + (-1)^{1-1}\frac{1!}{1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\} \\ &= 1 + \sqrt{e}\left(-1+\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{e}}{2} \end{aligned}$$

よって，(1) の結果から，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，(2) の結果から

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - (k+1)I_k \\ &= \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - (k+1)\left\{(-1)^{k-1}k! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\frac{k!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m\right\} \\ &= \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k(k+1)! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k+1-m}\frac{(k+1)!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m \\ &= (-1)^k(k+1)! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{k+1}(-1)^{k+1-m}\frac{(k+1)!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

解説 (2) で得られた漸化式から

$$I_{m+1} + (m+1)I_m = \sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

両辺に $\dfrac{1}{(-1)^{m+1}(m+1)!}$ を掛けると

$$\frac{I_{m+1}}{(-1)^{m+1}(m+1)!} - \frac{I_m}{(-1)^m m!} = \frac{\sqrt{e}}{(-1)^{m+1}(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

したがって

$$\sum_{m=1}^{n-1}\left\{\frac{I_{m+1}}{(-1)^{m+1}(m+1)!} - \frac{I_m}{(-1)^m m!}\right\} = \sqrt{e}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(-1)^{m+1}(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$\frac{I_n}{(-1)^n n!} - \frac{I_1}{(-1)^1 1!} = \sqrt{e}\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{(-1)^m m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

(1) の結果から，$I_1 = 1 - \dfrac{\sqrt{e}}{2} = 1 - \sqrt{e}\displaystyle\sum_{m=0}^{1} \frac{1}{(-1)^m m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$ であるから

$$\frac{I_n}{(-1)^n n!} = -1 + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(-1)^m m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

両辺に $(-1)^n n!$ を掛けると

$$I_n = (-1)^{n-1} n! + \sqrt{e}\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m}\frac{n!}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

6.66 (1) $f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ x^m & (m \geqq 1) \end{cases}$ より $(m = 0, 1, 2, \cdots, n)$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f_0(1-x) f_n(1+x)\, dx = \int_{-1}^{1} 1\cdot(1+x)^n\, dx$$
$$= \left[\ \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\ \right]_{-1}^{1} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n+1}}$$
$$a_1 = \int_{-1}^{1} f_1(1-x) f_{n-1}(1+x)\, dx = \int_{-1}^{1} (1-x)(1+x)^{n-1}\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \{2-(1+x)\}(1+x)^{n-1}\, dx = \int_{-1}^{1} \{2(1+x)^{n-1} - (1+x)^n\}\, dx$$
$$= \left[\ \frac{2}{n}(1+x)^n - \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\ \right]_{-1}^{1} = \frac{2^{n+1}}{n} - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n(n+1)}}$$

(2) $f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ x^m & (m \geqq 1) \end{cases}$ より $(m = 0, 1, 2, \cdots, n)$

(i) $1 \leqq k < n$ のとき

$$a_k = \int_{-1}^{1} f_k(1-x) f_{n-k}(1+x)\, dx = \int_{-1}^{1} (1-x)^k (1+x)^{n-k}$$
$$= \int_{-1}^{1} (1-x)^k \left\{\frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right\}' dx$$
$$= \left[(1-x)^k \frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \{(1-x)^k\}' \frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1} dx$$
$$= \frac{k}{n-k+1}\int_{-1}^{1} (1-x)^{k-1}(1+x)^{n-(k-1)} dx$$
$$= \frac{k}{n-k+1}\int_{-1}^{1} f_{k-1}(1-x) f_{n-(k-1)}(1+x)\, dx$$
$$= \frac{k}{n-k+1} a_{k-1} \quad \cdots(*)$$

(ii) $k=n$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} f_n(1-x)f_0(1+x) = \int_{-1}^{1} (1-x)^n \cdot 1\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)'\, dx \\
&= \left[(1-x)^n(1+x) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \{(1-x)^n\}'(1+x)\, dx \\
&= n\int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1}(1+x)\, dx \\
&= n\int_{-1}^{1} f_{n-1}(1-x)f_1(1+x)\, dx \\
&= na_{n-1}
\end{aligned}$$

上式より，$(*)$ は，$k=n$ のときも成り立つ．

よって，$k \geqq 1$ のとき

$$\boldsymbol{a_k = \frac{k}{n-k+1} a_{k-1}}$$

(3) (1)，(2) の結果から，$k \geqq 0$ のとき $a_k > 0$ であるから

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k}{n-k+1}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{a_k}{a_{k-1}} &= \frac{k}{n-k+1} \\
\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} &= \frac{k-1}{n-k+2} \\
&\vdots \\
\frac{a_2}{a_1} &= \frac{2}{n-1} \\
\frac{a_1}{a_0} &= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

上の諸式の辺々を掛け合わせると　$\dfrac{a_k}{a_0} = \dfrac{k!}{{}_n\mathrm{P}_k}$

ここで，${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_k}{k!}$ であるから　$\dfrac{a_k}{a_0} = \dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}$

上式に (1) の結果を代入すると　$a_k = \dfrac{a_0}{{}_n\mathrm{C}_k} = \dfrac{\boldsymbol{2^{n+1}}}{\boldsymbol{(n+1)_n\mathrm{C}_k}}$

(4) (3) の結果より，$\dfrac{1}{a_k}=\dfrac{(n+1)_n\mathrm{C}_k}{2^{n+1}}$ であるから

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=\frac{n+1}{2^{n+1}}\times 2^n=\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$

6.67 (1) $I_0=\dfrac{(-1)^0}{0!}\displaystyle\int_0^2 x^0e^x\,dx=\int_0^2 e^x\,dx=\Big[\ e^x\ \Big]_0^2=\boldsymbol{e^2-1}$

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^ne^x\,dx=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n(e^x)'\,dx\\&=\frac{(-1)^n}{n!}\Big[\ x^ne^x\ \Big]_0^2-\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2(x^n)'e^x\,dx\\&=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot 2^ne^2+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^2 x^{n-1}e^x\,dx=\frac{(-1)^n2^ne^2}{n!}+I_{n-1}\end{aligned}$$

ゆえに　$\boldsymbol{I_n-I_{n-1}=\dfrac{(-1)^n2^ne^2}{n!}}\quad\cdots(*)$

したがって　$\begin{aligned}I_3&=I_0+\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n2^ne^2}{n!}\\&=(e^2-1)+\frac{-2e^2}{1!}+\frac{4e^2}{2!}+\frac{-8e^2}{3!}=\boldsymbol{-\frac{1}{3}e^2-1}\end{aligned}$

(2) $0\leqq x\leqq 2$ において，$x^ne^x\leqq x^ne^2$ であるから $(n=1,2,\cdots)$

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^x\,dx\leqq\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^2\,dx=\frac{e^2}{(n+1)!}\Big[\ x^{n+1}\ \Big]_0^2=\frac{e^22^{n+1}}{(n+1)!}\quad\cdots①$$

$n\geqq 2$ のとき　$\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{2\cdot 2}{1\cdot 2}\times\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdots\dfrac{2}{n+1}\leqq 2\times\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{2}{3}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\cdots②$

$n=1$ のとき ② は等号が成り立つので，② は $n\geqq 1$ について成り立つ．

①，② より　$\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x\,dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad(n=1,2,\cdots)$

(3) $(*)$ より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(I_k-I_{k-1})=e^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}$　ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{I_n-I_0}{e^2}$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=1+\frac{I_n-I_0}{e^2}=\frac{I_n}{e^2}+\frac{1}{e^2}\quad\cdots③$

(2) の結果から　$|I_n|\leqq 2e^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\quad(n=1,2,\cdots)$

よって，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$　$\cdots$④

③，④ により　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2}$

6.68　(1)　$f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x+2}}$ より

$$f'(x) = \frac{(3x)'\sqrt{x+2} - 3x(\sqrt{x+2}\,)'}{(\sqrt{x+2})^2} = \frac{3\sqrt{x+2} - \dfrac{3x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$
$$= \frac{6(x+2) - 3x}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = \frac{\boldsymbol{3(x+4)}}{\boldsymbol{2(x+2)\sqrt{x+2}}}$$

(2)　$f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{3(x+2)-6}{\sqrt{x+2}} = 3\sqrt{x+2} - \dfrac{6}{\sqrt{x+2}}$ より

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \left[\, 2(x+2)^{\frac{3}{2}} - 12(x+2)^{\frac{1}{2}} \,\right]_{-1}^{2} = \boldsymbol{2}$$

(3)　$g(x) = 3x^2 + \displaystyle\int_{-1}^{1} (x+t)g(t)\,dt = 3x^2 + x\int_{-1}^{1} g(t)\,dt + \int_{-1}^{1} tg(t)\,dt$

よって　$\boldsymbol{g(x) = 3x^2 + bx + c}$

したがって　$\displaystyle b = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (3t^2 + bt + c)\,dt$

$$= \left[\, t^3 + \frac{1}{2}bt^2 + ct \,\right]_{-1}^{1} = 2c + 2,$$

$$c = \int_{-1}^{1} tg(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (3t^3 + bt^2 + ct)\,dt$$

$$= \left[\, \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{3}bt^3 + \frac{1}{2}ct^2 \,\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}b$$

ゆえに　$b = 2c + 2$，$c = \dfrac{2}{3}b$　これを解いて　$\boldsymbol{b = -6}$，$\boldsymbol{c = -4}$

6.69　(1)　与えられた関数は　$f(x) = 2\cos x - a\sin x \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dx$

$k=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ とおくと，$f(x)=2\cos x-ak\sin x$ より

$$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x-ak\sin x)\,dx$$
$$=\left[\,2\sin x+ak\cos x\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2-ak$$

$a>0$ に注意して，$k=2-ak$ を k について解くと　$k=\dfrac{2}{a+1}$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=2\cos x-\dfrac{2a}{a+1}\sin x}$

(2) (1) の結果から

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi}\left(2\sin x\cos x-\frac{2a}{a+1}\sin^2 x\right)dx$$
$$=\int_0^{\pi}\left\{\sin 2x-\frac{a}{a+1}(1-\cos 2x)\right\}dx=-\frac{\pi a}{a+1}$$

条件により　　$-\dfrac{\pi a}{a+1}=-\dfrac{\pi}{2}$　　これを解いて　　$\boldsymbol{a=1}$

(3)(ア) (1)，(2) の結果から　　$f(x)=-\sin x+2\cos x$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ を用いると

$$f(x)=-\sqrt{5}\sin(x-\alpha)$$

よって，最大値 $f(0)=\boldsymbol{2}$，最小値 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{-\sqrt{5}}$

(イ) (ア) の結果を用いて

$$\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx=-\sqrt{5}\int_0^{\alpha}\sin(x-\alpha)dx+\sqrt{5}\int_{\alpha}^{\pi}\sin(x-\alpha)dx$$
$$=\sqrt{5}\left[\,\cos(x-\alpha)\,\right]_0^{\alpha}-\sqrt{5}\left[\,\cos(x-\alpha)\,\right]_{\alpha}^{\pi}$$
$$=\sqrt{5}\,(1-\cos\alpha)-\sqrt{5}\,(-\cos\alpha-1)$$
$$=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

6.70　(1)　$k=\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと，$f(x)=3x^2+2kx+k$ であるから

$$k=\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2(3t^2+2kt+k)\,dt$$
$$=\left[\,t^3+kt^2+kt\,\right]_0^2=6k+8$$

これを解いて　$k=-\dfrac{8}{5}$　　よって　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-\dfrac{16}{5}x-\dfrac{8}{5}}$

(2)　　$(x\log x-x)'=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\boldsymbol{\log x}$

$$\left(\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right)'=x\log x+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{x}{2}=\boldsymbol{x\log x}$$

(3)　(1) の結果から，$3x^2-f(x)=\dfrac{16}{5}x+\dfrac{8}{5}$ であるから，(2) の結果より

$$\begin{aligned}\int_1^2\{3x^2-f(x)\}\log x\,dx&=\frac{16}{5}\int_1^2 x\log x\,dx+\frac{8}{5}\int_1^2\log x\,dx\\&=\frac{16}{5}\left[\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right]_1^2+\frac{8}{5}\left[x\log x-x\right]_1^2\\&=\frac{16}{5}\left(2\log 2-\frac{3}{4}\right)+\frac{8}{5}(2\log 2-1)\\&=\boldsymbol{\frac{48}{5}\log 2-4}\end{aligned}$$

6.71　(1)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(y)\sin(x-y)\,dy=\int_0^{2\pi}f(y)(\sin x\cos y-\cos x\sin y)\,dy$

$$=\sin x\int_0^{2\pi}f(y)\cos y\,dy-\cos x\int_0^{2\pi}f(y)\sin y\,dy$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(y)\cos y\,dy$，$\displaystyle-\int_0^{2\pi}f(y)\sin y\,dy$ は定数であるから

$$a=\int_0^{2\pi}f(y)\cos y\,dy,\qquad b-1=-\int_0^{2\pi}f(y)\sin y\,dy$$

とおくと，$f(x)$ は

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos x+a\sin x+(b-1)\cos x\\&=a\sin x+b\cos x\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{2\pi} (a\sin y + b\cos y)\cos y\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} (a\sin y\cos y + b\cos^2 y)\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2}\sin 2y + b\cdot\frac{1+\cos 2y}{2}\right) dy \\ &= \left[-\frac{a}{4}\cos 2y + \frac{b}{2}\left(y + \frac{1}{2}\sin 2y\right) \right]_0^{2\pi} = \pi b \\ b-1 &= -\int_0^{2\pi} (a\sin y + b\cos y)\sin y\, dy \\ &= -\int_0^{2\pi} (a\sin^2 y + b\sin y\cos y)\, dy \\ &= -\int_0^{2\pi} \left(a\cdot\frac{1-\cos 2y}{2} + \frac{b}{2}\sin 2y\right) dy \\ &= -\left[\frac{a}{2}\left(y - \frac{1}{2}\sin 2y\right) - \frac{b}{4}\cos 2y \right]_0^{2\pi} = -\pi a \end{aligned}$$

したがって　$a = \pi b,\ b-1 = \pi a$　これを解いて　$a = \dfrac{\pi}{\pi^2+1},\ b = \dfrac{1}{\pi^2+1}$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\pi}{\pi^2+1}\sin x + \dfrac{1}{\pi^2+1}\cos x}$

6.72 (1)　$$\int_a^x f(t)\, dt = x\log 2x - x \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の両辺を微分すると

$$f(x) = \log 2x + x\cdot\frac{2}{2x} - 1 = \boldsymbol{\log 2x}$$

(2) $(*)$ に $x = a$ を代入すると　$0 = a\log 2a - a = a(\log 2a - 1)$

$a > 0$ であるから　$\log 2a = 1$　よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{e}{2}}$

6.73 (1) $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^t\, dt = \left[e^t \right]_x^{2x} = e^{2x} - e^x$

ゆえに　　$\boldsymbol{F(1) = e^2 - e}$　　また　　$\boldsymbol{F'(x) = 2e^{2x} - e^x}$

(2)　$$\begin{cases} f(x) + \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt = 2\sin x - 3 & \cdots ① \\ f'(x)g(x) = \cos^2 x & \cdots ② \end{cases}$$

① の両辺を微分すると

$$f'(x)+g(x)=2\cos x \quad \text{ゆえに} \quad f'(x)=2\cos x-g(x)$$

上の第 2 式を ② に代入すると

$$\{2\cos x-g(x)\}g(x)=\cos^2 x \quad \text{整理すると} \quad \{g(x)-\cos x\}^2=0$$

よって　　$\boldsymbol{g(x)=\cos x}$　　これを ① に代入すると

$$f(x)+\int_0^x \cos t\,dt=2\sin x-3$$
$$f(x)+\Big[\ \sin t\ \Big]_0^x=2\sin x-3$$

したがって　　$\boldsymbol{f(x)=\sin x-3}$

6.74　(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f'(t)-\cos t)\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f'(t)-\cos t)\,dt=k$ とおくと

$$g(x)=\sin x+k \quad \cdots ①$$
$$\begin{aligned} f(x)&=\int_0^x (g(t)+t\cos t)\,dt+\sin x\\ &=\int_0^x (\sin t+k+t\cos t)\,dt+\sin x\\ &=\Big[\ t\sin t+kt\ \Big]_0^x+\sin x\\ &=(x+1)\sin x+kx \quad \cdots ② \end{aligned}$$

したがって，② より

$$\begin{aligned} k&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f'(t)-\cos t)\,dt=\Big[\ f(t)-\sin t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &=\Big[\ \{(t+1)\sin t+kt\}-\sin t\ \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &=\Big[\ t\sin t+kt\ \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=k\pi \end{aligned}$$

ゆえに　　$k=0$

よって，①，② より

$$\boldsymbol{f(x)=(x+1)\sin x,\quad g(x)=\sin x}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx &= \int_0^{\pi} x^2\sin^2 x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(1-\cos 2x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\,\right]_0^{\pi}\\ &= \boldsymbol{\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

6.75 (1) $t=x-u$ とおくと

$dt=-du$

t	$0 \longrightarrow x$
u	$x \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\int_0^x h(t)g(x-t)\,dt &= \int_x^0 h(x-u)g(u)\,(-du)\\ &= \int_0^x h(x-u)g(u)\,du\\ &= \int_0^x h(x-t)g(t)\,dt\end{aligned}$$

(2)(ア) (1) の結果により

$$\int_0^x tg(x-t) = \int_0^x (x-t)g(t)\,dt$$

したがって

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{2}+\int_0^x (x-t)g(t)\,dt\\ &= \frac{x}{2}+x\int_0^x g(t)\,dt-\int_0^x tg(t)\,dt &\cdots①\\ f'(x) &= \frac{1}{2}+\int_0^x g(t)\,dt+xg(x)-xg(x)\\ &= \frac{1}{2}+\int_0^x g(t)\,dt &\cdots②\\ f''(x) &= g(x) &\cdots③\end{aligned}$$

$f''(x)=\cos x$ より，③ から　$\boldsymbol{g(x)=\cos x}$

また，①，② より，$f(0)=0$，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(0)+\int_0^x f''(t)\,dt = \frac{1}{2}+\int_0^x \cos t\,dt \\ &= \frac{1}{2}+\sin x \\ f(x) &= f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2}+\sin t\right)dt \\ &= \left[\ \frac{t}{2}-\cos t\ \right]_0^x = \boldsymbol{\frac{x}{2}-\cos x+1} \end{aligned}$$

(イ) (ア) の結果から，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	π

ここで

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7}{6}\pi\right)-f(2\pi) &= \left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)-\pi \\ &= \frac{6\sqrt{3}+12-5\pi}{6} \\ &> \frac{6\times 1.7+12-5\times 3.2}{6} = \frac{6.2}{6} > 0 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{M=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{7\pi}{12}+1}$，$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{7\pi}{6}}$

(ウ) (ア) の結果より，$f(x)-\dfrac{x}{2}=1-\cos x$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{7}{6}\pi}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 dx &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi}(1-\cos x)^2\,dx \\ &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi}(1-2\cos x+\cos^2 x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx \\ &= \left[\ \frac{3}{2}x-2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x\ \right]_0^{\frac{7}{6}\pi} \\ &= \boldsymbol{\frac{7\pi}{4}+1+\frac{\sqrt{3}}{8}} \end{aligned}$$

6.76 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{100}\frac{1}{n}$

$$<\frac{3}{2}+\sum_{n=3}^{100}\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x}=\frac{3}{2}+\int_{2}^{100}\frac{dx}{x}$$

(2) (1) の結果および $\log 2=0.693$，$\log 5=1.609$ から

$$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}<\frac{3}{2}+\Big[\ \log x\ \Big]_2^{100}=\frac{3}{2}+\log\frac{100}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\log 2+2\log 5=5.411,$$

$$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}>\sum_{n=1}^{100}\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x}$$

$$=\int_{1}^{101}\frac{dx}{x}=\log 101$$

$$>\log 100=2(\log 2+\log 5)=4.604$$

よって，求める整数は　　**5**

補足 $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{100}+\sum_{n=4}^{99}\frac{1}{n}$

$$>\frac{553}{300}+\sum_{n=4}^{99}\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x}=\frac{553}{300}+\int_{4}^{100}\frac{dx}{x}=\frac{553}{300}+2\log 5>5$$

6.77 (1)　$\displaystyle I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$

$$=\Big[\ x-\log(1+x)\ \Big]_0^1=\mathbf{1-\log 2},$$

$$I_n+I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx+\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^n\,dx=\Big[\ \frac{x^{n+1}}{n+1}\ \Big]_0^1=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n+1}}$$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，$\dfrac{x^n}{2}\leqq\dfrac{x^n}{1+x}\leqq x^n$ であるから

$$\int_0^1\frac{x^n}{2}\,dx\leqq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx\leqq\int_0^1 x^n\,dx\quad\text{よって}\quad\frac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\frac{1}{n+1}$$

(3) $I_k + I_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$ より，$-(-1)^{k-1}I_k + (-1)^k I_{k+1} = \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{-(-1)^{k-1}I_k + (-1)^k I_{k+1}\} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$-I_1 + (-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

上式に (1) の結果を代入すると

$$-(1-\log 2) + (-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

したがって $\qquad \log 2 - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^n I_n$

(2) の結果から，$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ であるから

$$\log 2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

6.78 (1) 導関数の定義により

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\end{aligned}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから $\qquad \lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

よって $\qquad \boldsymbol{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

(2) $\boldsymbol{y' = 2ax(1+x^2)^{a-1}}$

(3) $y = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ であるから，(1)，(2) の結果から

$$y' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + x\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'' = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} = -3x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

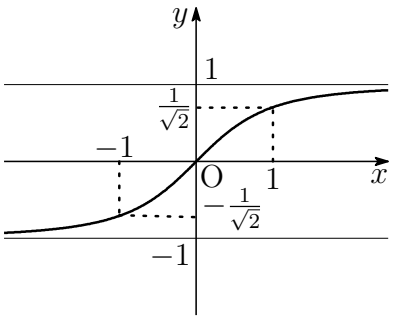
また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{1+(-t)^2}} = \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -1$$

よって，関数 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線およびグラフは概形は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	+	+	+
y''	+	0	−
y	↗	0	↱

漸近線 $y = 1$，$y = -1$



(4) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，(3) の結果から，$f(x)$ は単調増加であるから，k を自然数とすると

$$\int_{k-1}^{k}\{f(k)-f(x)\}\,dx > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx < f(k)$$

上式の k について，1 から n まで加えると

$$\int_0^n f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

このとき $\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^n = \sqrt{1+n^2}-1$

よって $\displaystyle\sqrt{1+n^2}-1 < \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{10}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

6.79 (1) $x > 0$ のとき $\displaystyle\int_0^x(1-\cos t)\,dt > 0$ ゆえに $x - \sin x > 0$

さらに $\displaystyle\int_0^x(t-\sin t)\,dt > 0$ ゆえに $\dfrac{x^2}{2!}+\cos x - 1 > 0$

よって　　$1-\dfrac{x^2}{2}<\cos x$

(2) (1) の結果から，$x>0$ のとき

$$\int_0^x\left(\cos t+\frac{t^2}{2!}-1\right)dt>0 \quad \text{ゆえに} \quad \sin x+\frac{x^3}{3!}-x>0$$

さらに　$\displaystyle\int_0^x\left(\sin t+\frac{t^3}{3!}-t\right)dt>0$　ゆえに　$-\cos x+1+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^2}{2!}>0$

よって　　$\cos x<1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$

(3) (1)，(2) の結果から，$x>0$ のとき

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

このとき，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ であるから，上式により

$$1-\frac{\theta^2}{2}<\frac{4}{5}<1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{24}$$

したがって　$\begin{cases}\theta^2>\dfrac{2}{5} & \cdots①\\ 5\theta^4-60\theta^2+24>0 & \cdots②\end{cases}$

$\theta<\dfrac{\pi}{4}<1$ であるから，$\theta^2<1$ に注意して ② を解くと

$$\theta^2<\frac{30-2\sqrt{195}}{5} \quad \cdots②'$$

$2=30-2\sqrt{196}<30-2\sqrt{195}$ に注意して，①，②′ により

$$\frac{2}{5}<\theta^2<\frac{30-2\sqrt{195}}{5}$$

6.80　(1) $\displaystyle\int_0^x(x-t)e^t\,dt=\int_0^x(x-t)(e^t)'\,dt=\Big[\,(x-t)e^t\,\Big]_0^x-\int_0^x(x-t)'e^t\,dt$

$$=-x+\int_0^x e^t\,dt=-x+\Big[\,e^t\,\Big]_0^x=-x+e^x-1$$

よって　　$\displaystyle e^x=1+x+\int_0^x(x-t)e^t\,dt$

(2) すべての自然数 n について，等式

$$e^x=1+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}x^p+\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^ne^t\,dt \quad \cdots(*)$$

とおく．

(i) $n=1$ のとき，(1) の結果から，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt &= -\frac{1}{(n+1)!}\int_0^x \{(x-t)^{n+1}\}' e^t\,dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!}\Big[\,(x-t)^{n+1}e^t\,\Big]_0^x \\ &\qquad + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-t)^{n+1}(e^t)'\,dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt \quad \cdots (**)\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}e^x &= 1+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}x^p + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt \\ &= 1+\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p!}x^p + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt\end{aligned}$$

上式から，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．

(3) $0 \leqq t < x$ において，$(x-t)e^t > 0$ であるから $\displaystyle\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt > 0$

よって，$(*)$ より，すべての自然数 n に対して，次式が成り立つ．

$$e^x > 1+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}x^p$$

6.81 (1) $\displaystyle f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x})}{n!}$

$$= \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} - \frac{x^n e^{-x}}{n!} = \boldsymbol{f_{n-1}(x) - f_n(x)}$$

(2) $f_0(x) = e^{-x}$ より　$f_0'(x) = -e^{-x} = -f_0(x)$

上式と (1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f_k'(x) &= f_0'(x) + \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \\ &= -f_0(x) + \sum_{k=1}^{n}\{f_{k-1}(x) - f_k(x)\} \\ &= -f_0(x) + \{f_0(x) - f_n(x)\} \\ &= -f_n(x) = -\frac{\boldsymbol{x^n e^{-x}}}{\boldsymbol{n!}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果より $f_n(x) = -\sum_{k=0}^{n} f_k'(x)$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= -\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 f_k'(x)\,dx \\ &= -\sum_{k=0}^{n}\Big[\ f_k(x)\ \Big]_0^1 \\ &= -\sum_{k=0}^{n} f_k(1) + \sum_{k=0}^{n} f_k(0)\end{aligned}$$

$f_n(1) = \dfrac{e^{-1}}{n!}$，$f_n(0) = 0$ $(n \geqq 1)$，$f_0(0) = 1$ であるから

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = -\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!} + 1 = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{e}}\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k!}} + \boldsymbol{1}$$

(4) $0 < x \leqq 1$ において $f_n(x) > 0$ であるから　　$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx > 0$

上式および (3) の結果から　$\displaystyle -\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + 1 > 0$　ゆえに　$\displaystyle e > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

6.82 (1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \boldsymbol{\log 2}$

(2) $t > 0$ のとき

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} > 0 \qquad \text{ゆえに} \qquad \frac{1}{1+t} < 1$$

$$(1+t)(1-t) = 1 - t^2 < 1 \qquad \text{ゆえに} \qquad 1 - t < \frac{1}{1+t}$$

したがって，$t>0$ のとき　　$1-t<\dfrac{1}{1+t}<1$

$x>0$ のとき　　$\displaystyle\int_0^x (1-t)\,dt<\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt<\int_0^x dt$

よって，$x>0$ のとき　　$\displaystyle x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$

(3) (2) の結果から，$x>0$ のとき　$\dfrac{x(4-x)}{2}<x+\log(1+x)<2x$

とくに，$0<x<4$ のとき　$\dfrac{1}{2x}<\dfrac{1}{x+\log(1+x)}<\dfrac{2}{x(4-x)}$

自然数 n について，$0<\dfrac{1}{n}<\dfrac{2}{n}<4$ であるから

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx<\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx<\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{2}{x(4-x)}\,dx \quad \cdots(*)$$

(1) の結果に注意して

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}\log 2$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{2}{x(4-x)}\,dx&=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x-4}\,dx\\&=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\Big[\ \log(4-x)\ \Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\\&=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{4-\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\frac{4-\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}}=0$　であるから，$(*)$ についてはさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\log(1+x)}=\mathbf{\frac{1}{2}\log 2}$$

6.83　(1)　$f(x)=\log x$ より　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)\quad \text{ゆえに}\quad y=\frac{x}{t}\log t-1$$

したがって　$g(x)=\dfrac{x}{t}+\log t-1$　$\cdots$①

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと $(x>0)$

$$h(x)=\log x-\left(\frac{x}{t}+\log t-1\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}=\frac{t-x}{tx}$$

x	(0)	$\cdots$	t	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$
$h(x)$		↗	0	↘

$h(x)$ の増減は，右のようになる．ゆえに　$h(x)\leqq 0$　$(x>0)$

よって，$x>0$ のとき，$f(x)-g(x)\leqq 0$ が成り立つ．

(2) $f(x)=\log x$ および ① から，$t>\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \log x\,dx=\left[x\log x-x\right]_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}$$
$$=\boldsymbol{\left(t+\frac{1}{2}\right)\log\left(t+\frac{1}{2}\right)-\left(t-\frac{1}{2}\right)\log\left(t-\frac{1}{2}\right)-1}$$

$$\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} g(x)\,dx=\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{t}+\log t-1\right)dx=\left[\frac{x^2}{2t}+(\log t-1)x\right]_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\log t}$$

(3) (1) の結果から，$f(x)\leqq g(x)$ において等号が成り立つのは $x=t$ のときに限る．ゆえに，自然数 k に対して

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,dx<\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} g(x)\,dx$$

が成り立つ．また，(2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-n$$
$$=\log\sqrt{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} g(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\log k=\log n!$$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}<n!}$

6.84 (1) $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ を微分すると

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

(2) (1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int_1^{n+1} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \Big[\ \log f(x)\ \Big]_1^{n+1} \\ &= \log f(n+1) - \log f(1) \\ &= \boldsymbol{\log(n+1+\sqrt{n^2+2n+2}) - \log(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

(3) $k \leqq x \leqq k+1$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\,dx \geqq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geqq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

上式および (2) の結果から

$$S_n \geqq \log(n+1+\sqrt{n^2+2n+2}) - \log(1+\sqrt{2})$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \log(n+1+\sqrt{n^2+2n+2}) = \infty$ よって $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty}$

(4) $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &\geqq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\ &= \Big[\ \log f(x)\ \Big]_{n+1}^{2n+1} = \log \frac{f(2n+1)}{f(n+1)}, \\ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &\leqq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_n^{2n} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\ &= \Big[\ \log f(x)\ \Big]_n^{2n} = \log \frac{f(2n)}{f(n)}\end{aligned}$$

したがって　　$\log\dfrac{f(2n+1)}{f(n+1)} \leqq S_{2n}-S_n \leqq \log\dfrac{f(2n)}{f(n)}$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2n+1)}{f(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1+\sqrt{4n^2+4n+2}}{n+1+\sqrt{n^2+2n+2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}+\sqrt{4+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{1+\dfrac{1}{n}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^2}}} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = 2$$

はさみうちの原理により　　$\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n) = \log 2$

別解　$S_{2n}-S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

自然数 k について　$\dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}} < \dfrac{1}{k}$

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} < \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \leqq \sum_{k=n+1}^{2n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \int_n^{2n}\frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_n^{2n} = \log 2,$$
$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} > \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k+1} \geqq \sum_{k=n+1}^{2n}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \int_{n+2}^{2n+2}\frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_{n+2}^{2n+2} = \log\frac{2n+2}{n+2}$$

したがって　$\lim\limits_{n\to\infty}\log\dfrac{2n+2}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\log\dfrac{2+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = \log 2$

上の諸式から，はさみうちの原理により　$\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n) = \log 2$

6.85　(1)　$y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ を微分すると　$y' = -\dfrac{\log x + 2x}{x^2(\log x)^3}$

したがって，$x > 1$ において　　$y' < 0$

よって，$y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において，単調減少.

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx=\int \frac{(\log x)'}{(\log x)^2}\,dx=\boldsymbol{-\frac{1}{\log x}+C}$ **(C は積分定数)**

別解 $t=\log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$ であるから

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx=\int \frac{1}{t^2}\,dt=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\log x}+C$$

(3) (1)，(2) の結果から，n が 3 以上の整数であるとき

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}=\sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k(\log k)^2}\,dx$$

$$<\sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x(\log x)^2}\,dx=\int_{2}^{n}\frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^n=-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{\log 2}<\frac{1}{\log 2}$$

6.86 (1) $\displaystyle I=\int_0^1 a^{1-t}b^t\,dt=a\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^t dt$

$$=\frac{a}{\log\frac{b}{a}}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^t\right]_0^1=\frac{a}{\log\frac{b}{a}}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\boldsymbol{\frac{b-a}{\log b-\log a}}$$

(2) $\left(a^{\frac{1-t}{2}}b^{\frac{t}{2}}-a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{1-t}{2}}\right)^2\geqq 0\cdots(*)$ であるから

$$a^{1-t}b^t-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^tb^{1-t}\geqq 0$$

すなわち　　$a^{1-t}b^t+a^tb^{1-t}\geqq 2\sqrt{ab}\quad\cdots(**)$

$0<a<b$ より，$(*)$ において，等号が成立するとき

$$a^{\frac{1-t}{2}}b^{\frac{t}{2}}=a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{1-t}{2}}$$

したがって　　$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}-t}=1$　　すなわち　　$t=\dfrac{1}{2}$

$I=\displaystyle\int_0^1 a^{1-t}b^t\,dt$ で $u=1-t$ とおくと　$\dfrac{dt}{du}=-1$,

t	0	$\longrightarrow$	1
u	1	$\longrightarrow$	0

したがって　$\displaystyle I=\int_1^0 a^ub^{1-u}(-du)=\int_0^1 a^ub^{1-u}\,du=\int_0^1 a^tb^{1-t}\,dt$

$(**)$ において，等号が成立するのは，$t=\dfrac{1}{2}$ のときに限るので

$$\int_0^1 (a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t})\,dt > \int_0^1 2\sqrt{ab}\,dt$$

したがって　　$I+I > 2\sqrt{ab}\Big[\ t\ \Big]_0^1$　　よって　　$I > \sqrt{ab}$

(3) $f(u)=u^t$ とおくと，$f'(u)=tu^{t-1}$．平均値の定理により

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(c) \quad (1<c<x)$$

を満たす c が存在する．$0<t<1$ より　　$f'(c)=tc^{t-1} < t\cdot 1^{t-1} = t$

したがって　　$\dfrac{x^t-1}{x-1} < t$　　よって　　$x^t < 1+t(x-1)$

(4) $0<a<b$ より，$x=\dfrac{b}{a}>1$ とおくと，$\left(\dfrac{b}{a}\right)^t < 1+t\left(\dfrac{b}{a}-1\right)$ であるから

$$I = a\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt < a\int_0^1 \left\{1+t\left(\frac{b}{a}-1\right)\right\} dt = \frac{a+b}{2}$$

6.87　(1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan^2 x>0$ であるから

$$\int_0^x \tan^2 t\,dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \tan x - x > 0 \quad \cdots ①$$

① より

$$\int_0^x (\tan t - t)\,dx > 0 \quad \text{ゆえに} \quad -\log(\cos x) - \frac{1}{2}x^2 > 0$$

したがって　　$\log(\cos x) + \dfrac{1}{2}x^2 < 0$

(2) (1) の結果から，$\log(\cos x) < -\dfrac{1}{2}x^2$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \log(\cos x)\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi^3}{162}$$

また　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \log(\cos x)\,dx = \Big[\ x\log(\cos x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\{\log(\cos x)\}'\,dx$

$$= -\frac{\pi}{3}\log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\tan x\,dx$$

① より，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x > x$ であるから

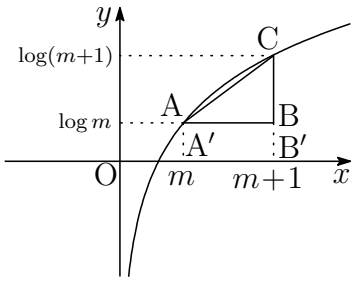
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\tan x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\,dx = \left[\ \frac{1}{3}x^3\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^3}{81}$$

上の諸式から　$-\dfrac{\pi}{3}\log 2 + \dfrac{\pi^3}{81} < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \log(\cos x)\,dx < -\frac{\pi^3}{162}$

6.88　(1)　$\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{x},\ y'' = -\dfrac{1}{x^2}}$

(2)　(右図により)

$$\boldsymbol{S_m = \frac{1}{2}\{\log(m+1) - \log m\}}$$



(3)　右の図のように，2 点 A，B から x 軸にそれぞれ垂線 AA′，BB′ を引くと，台形 AA′B′C の面積が $\log m + S_m$ であるから，グラフから

$$\log m + S_m < \int_m^{m+1} \log x\,dx$$

ゆえに　$\log m + S_m - \displaystyle\int_m^{m+1} \log x\,dx < 0$

よって　$f(m) < 0$

(4)　(2) の結果から　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} S_m = \frac{1}{2}\log n$

$\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} f(m) < 0$ であるから，上式および (3) の結果から

$$\sum_{m=1}^{n-1}\left(\log m + S_m - \int_m^{m+1} \log x\,dx\right) < 0$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} \log m + \frac{1}{2}\log n - \int_1^n \log x\,dx < 0$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} \log m < \left[\ x\log -x\ \right]_1^n - \frac{1}{2}\log n$$

よって　$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n\log n - n + 1 - \dfrac{1}{2}\log n$

(5) (4) の結果から

$$\log 1+\log 2+\cdots+\log(n-1)+\log n<1+\frac{1}{2}\log n+n(\log n-1)$$

ゆえに　　$\log n!<\log e+\log\sqrt{n}+\log\left(\frac{n}{e}\right)^n$

したがって　　$\log n!<\log e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$　　よって　$n!<e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

6.89 (1)　$\displaystyle\int_1^n x\log x\,dx=\int_1^n\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^n-\int_1^n\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$$=\frac{1}{2}n^2\log n-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^n=\boldsymbol{\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)}$$

(2) $f(x)=x\log x$ とおくと　$f'(x)=\log x+1$

$x\geqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$\begin{aligned}\int_1^n x\log x\,dx&=\sum_{k=2}^n\int_{k-1}^k x\log x\,dx\\&<\sum_{k=2}^n k\log k=\sum_{k=1}^n k\log k,\\\sum_{k=1}^n k\log k&=\sum_{k=1}^{n-1}k\log k+n\log n\\&<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}x\log x\,dx+n\log n\\&=\int_1^n x\log x\,dx+n\log n\end{aligned}$$

上の 2 式から　　$\displaystyle\int_1^n x\log x\,dx<\sum_{k=1}^n k\log k<\int_1^n x\log x\,dx+n\log n$

これに (1) の結果を代入すると

$$\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)<\sum_{k=1}^n k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)+n\log n$$

(3) (2) の結果から

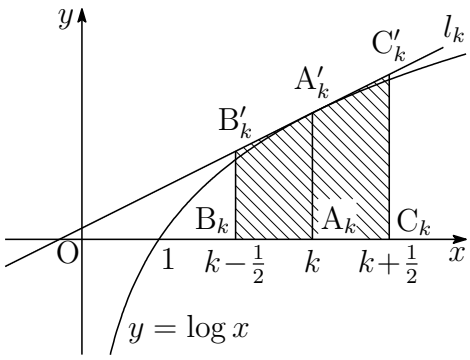
$$\frac{1}{2}-\frac{n^2-1}{4n^2\log n}<\frac{1}{n^2\log n}\sum_{k=1}^n\log k^k<\frac{1}{2}-\frac{n^2-1}{4n^2\log n}+\frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n^2-1}{4n^2\log n}\right)=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n^2-1}{4n^2\log n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$ であるから，

はさみうちの原理より　　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\log n}\sum_{k=1}^{n}\log k^k=\frac{1}{2}$

よって　　$\lim_{n\to\infty}\left\{(1^2\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n)^{\frac{1}{n^2\log n}}\right\}=\sqrt{e}$

6.90　(1) $y=\log x$ を微分すると　$y'=\frac{1}{x}$



$A'_k(k,\ \log k)$ における接線 l は

$$y=\frac{1}{k}(x-k)+\log k$$

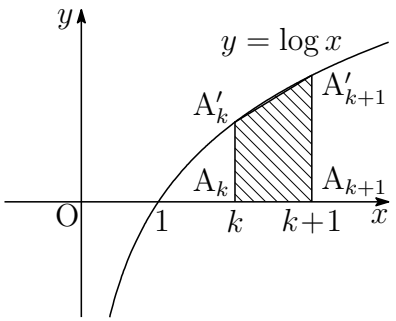
l_k 上の 2 点 B'_k，C'_k における y 座標は，それぞれ $\log k-\frac{1}{2k}$，$\log k+\frac{1}{2k}$ であるから，四角形 $B_kC_kC'_kB'_k$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\left\{\left(\log k-\frac{1}{2k}\right)+\left(\log k+\frac{1}{2k}\right)\right\}=\boldsymbol{\log k}$$

(2)(ア) $k\geqq 2$ のとき，x 軸と 2 直線 $x=k-\frac{1}{2}$，$x=k+\frac{1}{2}$ および曲線 $y=\log x$ で囲まれた部分の面積は，(1) で求めた四角形の面積より小さいから

$$\boldsymbol{\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx<\log k}$$

(イ) $k\geqq 1$ のとき，右の図の 4 点 A_k，A_{k+1}，A'_{k+1}，A'_k を頂点とする台形の面積



$$\frac{\log k+\log(k+1)}{2}$$

は，x 軸と 2 直線 $x=k$，$x=k+1$ および曲線 $y=\log x$ で囲まれた部分の面積より小さいから

$$\boldsymbol{\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\int_{k}^{k+1}\log x\,dx}$$

(3) (2)(ア) から，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx<\sum_{k=2}^{n}\log k$ であるから

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx<\log(n!)$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\int_{n}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx<\log(n!)$$

$\displaystyle\int_{n}^{n+\frac{1}{2}}\log n\,dx<\int_{n}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ であるから，$\displaystyle\frac{1}{2}\log n<\int_{n}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ より

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n<\log(n!)$$

したがって $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<\log(n!)-\frac{1}{2}\log n\quad\cdots①$

(2)(イ) から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\log x\,dx$ であるから

$$\log(n!)-\frac{1}{2}\log n<\int_{1}^{n}\log x\,dx\quad\cdots②$$

①，② より $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<\log(n!)-\frac{1}{2}\log n<\int_{1}^{n}\log x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx=\Big[\,x\log x-x\,\Big]_{\frac{3}{2}}^{n}=n\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right)$

$\displaystyle\int_{1}^{n}\log x\,dx=\Big[\,x\log x-x\,\Big]_{1}^{n}=n\log n-n+1$

上の 2 式を (3) の結果に代入すると

$$n\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right)<\log(n!)-\frac{1}{2}\log n<n\log n-n+1$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right)<\log(n!)<\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1$$

よって $U_n<\log(n!)<V_n$

6.91 (1) $h(t)=t-1-\log t$ とおくと

$$h'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$$

$h'(t)=0$ とすると $t=1$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(t)$	／	$-$	0	$+$
$h(t)$	／	↘	0	↗

$h(t)$ の増減表は，右のようになるから，$h(t) \geqq 0$．$t = \dfrac{y}{x}$ のとき

$$\frac{y}{x} - 1 - \log\frac{y}{x} \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$$

また，等号が成り立つのは，$\dfrac{y}{x} = 1$，すなわち，$x = y$ のときに限る．

(2) 閉区間 $[a,\ b]$ で $f(x) > 0$，$g(x) > 0$ であるから，(1) の結果より

$$f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x) \geqq 0$$

したがって

$$\int_a^b \{f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x)\}\,dx \geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b \{-f(x) + g(x)\}\,dx = 0$ を上式に代入すると

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つ．

別解 閉区間 $[a,\ b]$ で $f(x) > 0$，$g(x) > 0$ であるから，$t = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ とおくと，$h(t) \geqq 0$ より

$$\frac{g(x)}{f(x)} - 1 - \log\frac{g(x)}{f(x)} \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad f(x)\log\frac{g(x)}{f(x)} \leqq g(x) - f(x)$$

したがって $\displaystyle\int_a^b f(x)\log\frac{g(x)}{f(x)}\,dx \leqq \int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx = 0$

よって $\displaystyle\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$

(3) $g(x) = M$ とおくと，条件から

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b M\,dx = M(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

したがって，$g(x) = M$ を (2) の結果に適用すると

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx &\geqq \int_a^b f(x)\log M \\ &= \log M\int_a^b f(x)\,dx = M(b-a)\log M\end{aligned}$$

上式の両辺を $b-a>0$ で割ると

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つ．

解説 (九大 [理]2002) 3

6.92 (1) $$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^k a_k e^x\,dx=\sum_{k=1}^{n}a_k\Big[\,e^x\,\Big]_0^k=\sum_{k=1}^{n}a_k(e^k-1)\qquad\cdots(*)$$

ゆえに $$a_2=a_1(e-1)=\frac{e}{e-1}(e-1)=\boldsymbol{e}$$

$$a_3=a_1(e-1)+a_2(e^2-1)=e+e(e^2-1)=\boldsymbol{e^3}$$

(2) $(*)$ より，$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=\sum_{k=1}^{n-1}a_k(e^k-1)-\sum_{k=1}^{n-2}a_k(e^k-1)\\&=a_{n-1}(e^{n-1}-1)\end{aligned}$$

整理すると $a_n=e^{n-1}a_{n-1}$ ゆえに $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=e^{n-1}$

$n\geqq 3$ のとき $$\begin{aligned}a_n&=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_3}{a_2}\cdot a_2\\&=e^{n-1}\cdot e^{n-2}\cdots e^2\cdot e\\&=e^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}=e^{\frac{1}{2}n(n-1)}\end{aligned}$$

上式は，$n=2$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{a_1=\frac{e}{e-1},\quad a_n=e^{\frac{1}{2}n(n-1)}\quad(n\geqq 2)}$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{\log a_n}{n^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

よって $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

6.93 (1) $$f(x)=\int_0^x\frac{1}{(t+a)^2}\,dt=\left[-\frac{1}{t+a}\right]_0^x=\frac{1}{a}-\frac{1}{x+a}$$

よって $$A=\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{a}$$

$a \neq b$ より　　$g(x) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{t+a} - \frac{1}{t+b}\right) dt$

$= \dfrac{1}{b-a}\Big[\ \log|t+a| - \log|t+b|\ \Big]_0^x$

$= \dfrac{1}{b-a}\left(\log\left|\dfrac{x+a}{x+b}\right| - \log\dfrac{a}{b}\right)$

ゆえに　　$B = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{b-a}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log\dfrac{1+\dfrac{a}{x}}{1+\dfrac{b}{x}} + \log\dfrac{b}{a}\right)$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}}$

(2)　(1) の結果から　　$\lim\limits_{b\to a} B = \lim\limits_{b\to a}\dfrac{\log b - \log a}{b-a}$

ここで，$h(x) = \log x$ とおくと　$\lim\limits_{b\to a} B = h'(a)$

$h'(x) = \dfrac{1}{x}$ であるから　$\lim\limits_{b\to a} B = \boldsymbol{\dfrac{1}{a}}$

6.94　(1)　$y = 1 - x^2$ を微分すると　$y' = -2x$

したがって，L は点 $(t,\ 1-t^2)$ を通り傾き $-2t$ の直線であるから

$y - (1-t^2) = -2t(x-t)$　すなわち　$\boldsymbol{y = -2tx + t^2 + 1}$

L と x 軸との接点の x 座標は $(0 < t < 1)$

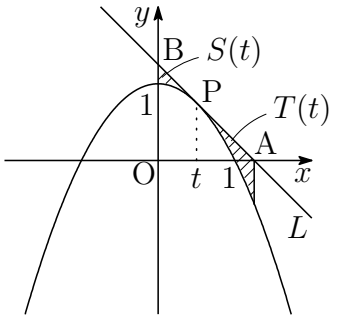
$-2tx + t^2 + 1 = 0$　よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{t^2+1}{2t}}$

(2)　(1) の結果から

$S(t) = \displaystyle\int_0^t \{(-2tx + t^2 + 1) - (1 - x^2)\}dx$

$= \displaystyle\int_0^t (x-t)^2\, dt$

$= \Big[\ \frac{1}{3}(x-t)^3\ \Big]_0^t = \frac{1}{3}t^3$



$T(t) = \displaystyle\int_t^{\frac{t^2+1}{2t}} (x-t)^2\, dx = \Big[\ \frac{1}{3}(x-t)^3\ \Big]_t^{\frac{t^2+1}{2t}} = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{t} - t\right)^3$

したがって　　$S(t)T(t)=\dfrac{1}{3}t^3\cdot\dfrac{1}{24}\left(\dfrac{1}{t}-t\right)^3=\dfrac{1}{72}(1-t^2)^3$

よって　　$\lim\limits_{t\to0}\{S(t)\cdot T(t)\}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{72}(1-t^2)^3=\boldsymbol{\dfrac{1}{72}}$

(3) (2) の結果から　$S'(t)=t^2$，$T'(t)=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{t}-t\right)^2\left(-\dfrac{1}{t^2}-1\right)$

$S(t)+T(t)$ は $t=a$ で最小となるので，$S'(a)+T'(a)=0$ より

$$a^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2\left(-\frac{1}{a^2}-1\right)=0$$

$$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2\left(\frac{1}{a}+a\right)=0$$

$$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{a}-a\right)^3=\frac{a}{12}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2$$

$0<a<1$ であるから　$S(a)-T(a)=\dfrac{a}{12}\left(\dfrac{1}{a}-a\right)^2>0$

よって　　$S(a)>T(a)$

6.95　(1) $f(x)=px^2$，$g(x)=-q(x-1)^2+1$ とおくと

$$f'(x)=2px,\quad g'(x)=-2q(x-1)$$

C_1 と C_2 の接点の x 座標を t とすると　　$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$

したがって　　$pt^2=-q(t-1)^2+1$，$2pt=-2q(t-1)$

第 1 式から　　$(p+q)t^2-2qt=1-q$　$\cdots$①

第 2 式から　　$(p+q)t=q$　$\cdots$②

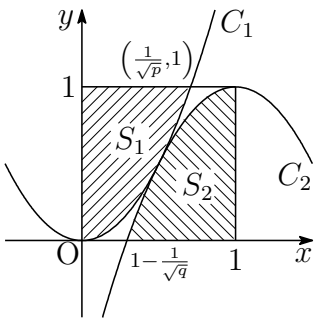
① $\times(p+q)$ より　　$\{(p+q)t\}^2-2q\cdot(p+q)t=(p+q)(1-q)$

② をこれに代入して　　$q^2-2q\cdot q=(p+q)(1-q)$

整理すると　　$p+q=pq$　よって　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1}$

(2) C_1 と正方形の交点の x 座標は　$x=0,\ \dfrac{1}{\sqrt{p}}$

C_2 と正方形の交点の x 座標は　$x=1-\dfrac{1}{\sqrt{q}},\ 1$



したがって　$S_1=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}}(1-px^2)\,dx$

$$=\left[\,x-\frac{1}{3}px^3\,\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{p}}}=\frac{2}{3\sqrt{p}}$$

$$S_2=\int_{1-\frac{1}{\sqrt{q}}}^{1}\{-q(x-1)^2+1\}\,dx$$

$$=\left[\,-\frac{q}{3}(x-1)^3+x\,\right]_{1-\frac{1}{\sqrt{q}}}^{1}=\frac{2}{3\sqrt{q}}$$

$$S=S_1+S_2=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\quad\cdots(*)$$

上式および (1) の結果から

$$S=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\sqrt{\frac{1}{q}}\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right)}$$

(3) (2) の結果から　$\displaystyle\lim_{p\to\infty}S=\lim_{p\to\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(4) (1) の結果から

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^2=2$$

$\dfrac{1}{\sqrt{p}}+\dfrac{1}{\sqrt{q}}$ は，上式より，$p=q=2$ のとき，最大値 $\sqrt{2}$ をとる．

$(*)$ より，S は，$\boldsymbol{p=2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ をとる．

6.96　(1) $f_n(x)=x^2-\dfrac{n}{n+1}x^{2+\frac{2}{n}}$，$f_n(x)=0$ より　$x^2\left(1-\dfrac{n}{n+1}x^{\frac{2}{n}}\right)=0$

$x>0$ のとき　$x^{\frac{2}{n}}=\dfrac{n+1}{n}$　すなわち　$\boldsymbol{x=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$

(2) $x_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{x_n} f_n(x)\,dx = \int_0^{x_n} \left(x^2 - \frac{n}{n+1}x^{2+\frac{2}{n}}\right) dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{3n+2}x^{3+\frac{2}{n}}\ \right]_0^{x_n} \\ &= \frac{1}{3}{x_n}^3\left\{1 - \frac{3n^2}{(n+1)(3n+2)}{x_n}^{\frac{2}{n}}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}n}\left\{1 - \frac{3n^2}{(n+1)(3n+2)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3(3n+2)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}n}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} n{x_{x_n}}S_n &= n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{2}{3(3n+2)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}n} \\ &= \frac{2n}{3(3n+2)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \\ &= \frac{2}{3\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2 \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right) = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} nx_nS_n = \boldsymbol{\frac{2}{9}e^2}$$

6.97 (1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}} = \mathbf{0}$, 同様に $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{0}$

$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ を微分すると $f'(x) = -\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$

よって　$x=1$ のとき　**極大値 1**

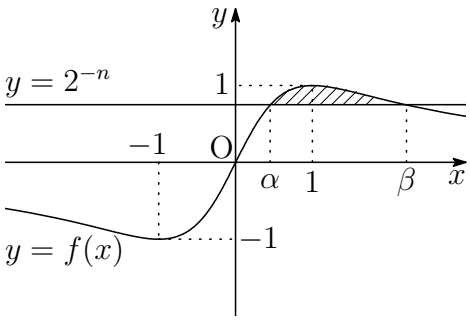
　　$x=-1$ のとき　**極小値 -1**

(2) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ と $y = 2^{-n}$ の共有点の x 座標は

$$\frac{2x}{x^2+1} = 2^{-n} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2\cdot 2^n x + 1 = 0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\begin{aligned} S_n &= \int_\alpha^\beta \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2^{-n}(\beta-\alpha) \\ &= \Big[\ \log(x^2+1)\ \Big]_\alpha^\beta - 2^{-n}(\beta-\alpha) \\ &= \log\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1} - 2^{-n}(\beta-\alpha) \end{aligned}$$



$(*)$ を解いて　$\alpha = 2^n - \sqrt{4^n-1}$,　$\beta = 2^n + \sqrt{4^n-1}$,　$\beta-\alpha = 2\sqrt{4^n-1}$

また，α，β は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\alpha^2+1 = 2^{n+1}\alpha,\quad \beta^2+1 = 2^{n+1}\beta,\quad \alpha\beta = 1$$

したがって　$\dfrac{\beta^2+1}{\alpha^2+1} = \dfrac{2^{n+1}\beta}{2^{n+1}\alpha} = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\beta^2}{\alpha\beta} = \beta^2$

上の諸式から　$S_n = \log\beta^2 - 2^{-n}\cdot 2\sqrt{4^n-1}$

$$= \mathbf{2\log(2^n + \sqrt{4^n-1}) - 2^{1-n}\sqrt{4^n-1}}$$

(3)　(2) の結果から

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 2\log\frac{2^{n+1}+\sqrt{4^{n+1}-1}}{2^n+\sqrt{4^n-1}} - 2^{-n}\sqrt{4^{n+1}-1} + 2^{1-n}\sqrt{4^n-1} \\ &= 2\log\frac{2+\sqrt{4-4^{-n}}}{1+\sqrt{1-4^{-n}}} - \sqrt{4-4^{-n}} + 2\sqrt{1-4^{-n}} \end{aligned}$$

このとき，$\lim\limits_{n\to\infty} 4^{-n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n) = 2\log\frac{2+\sqrt{4}}{1+\sqrt{1}} - \sqrt{4} + 2\sqrt{1} = \mathbf{2\log 2}$$

6.98　(1)　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{10-x^2}}\right)dx = \Big[\ x + \sqrt{10-x^2}\ \Big]_0^1 = \mathbf{4-\sqrt{10}}$

(2)　$\displaystyle a_n = \int_0^n g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)\,dx$

$x-k=t$ とおくと，(1) の結果から

$$\int_k^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k f(x-k)\,dx = \left(\frac{2}{3}\right)^k\int_0^1 f(t)\,dt = (4-\sqrt{10})\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

したがって

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1}(4-\sqrt{10})\left(\frac{2}{3}\right)^k$$
$$= (4-\sqrt{10}) \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3(4-\sqrt{10})\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

よって　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 3(4-\sqrt{10})}$

6.99　(1)　$|x|\cos nx$，$|\sin x|\cos nx$ は，偶関数であるから

$$a_n = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$
$$= -\frac{1}{2n}\int_0^{\pi} x(\sin nx)'\,dx$$
$$= -\frac{1}{2n}\Big[\, x\sin nx \,\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$
$$= -\frac{1}{2n^2}\Big[\, \cos nx \,\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1-(-1)^n}{2n^2}}$$
$$b_1 = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx$$
$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = \frac{1}{8}\Big[\, \cos 2x \,\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{0}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\cos nx\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx$$
$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\}dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\, \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \,\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}-1}{4(n+1)} - \frac{(-1)^{n-1}-1}{4(n-1)}$$
$$= \frac{1+(-1)^n}{4}\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right) = \boldsymbol{\frac{1+(-1)^n}{2(n^2-1)}}$$

(2)　(1) の結果から

$$\frac{a_{2n+1}}{b_{2n}} = \frac{1-(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)^2}\cdot\frac{2\{(2n)^2-1\}}{1+(-1)^{2n}} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

ここで　$\dfrac{2n+1}{2n+3}-\dfrac{2n-1}{2n+1}=\dfrac{4}{(2n+1)(2n+3)}>0$

$\left\{\dfrac{a_{2n+1}}{b_{2n}}\right\}$ は単調増加列であるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n+1}}{b_{2n}}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n+1}}{b_{2n}}$ は発散する．

6.100　(1)　$f_1(x)=\sin x+2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}xf_0(x)\,dx$，　$f_0(x)=\sin x$ より

$$\begin{aligned}g_1(x)=f_1(x)-f_0(x)&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}xf_0(x)\,dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin x\,dx\\&=2\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}\end{aligned}$$

(2)　$f_{n+1}(x)=\sin x+2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}xf_n(x)\,dx$

$f_n(x)=\sin x+2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}xf_{n-1}(x)\,dx$

上の 2 式の辺々を引くと

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\{f_n(x)-f_{n-1}(x)\}\,dx$$

したがって　$g_{n+1}(x)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}xg_n(x)\,dx$

上式および (1) の結果から，$g_n(x)$ は定数関数であるから

$$g_{n+1}(x)=g_n(x)\int_0^{\frac{\pi}{4}}2x\,dx=g_n(x)\Big[x^2\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}g_n(x)$$

よって　$g_n(x)=g_1(x)\left(\dfrac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}=\boldsymbol{c\left(\dfrac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}}$

(3) $a_n = f_n(x) - \sin x = f_n(x) - f_0(x)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\{f_k(x) - f_{k-1}(x)\} = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) = c\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{c}{1-\frac{\pi^2}{16}}\left\{1-\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n\right\} = \frac{\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\frac{\pi^2}{16}}\left\{1-\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n\right\}$$

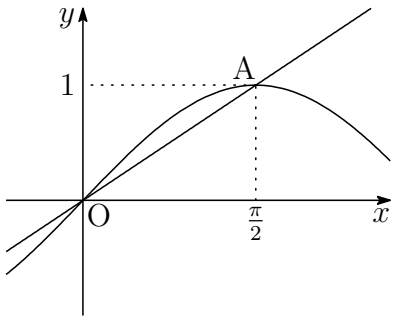
$$= \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{\pi}{4}}\left\{1-\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n\right\}$$

このとき，$0 < \dfrac{\pi^2}{16} = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2 < 1$ であるから　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{4\sqrt{2}}{\pi+4}}$

6.101 (1) $f(x) = \sin x$ とすると　　$f''(x) = -\sin x$

ゆえに，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において　$f''(x) < 0$

曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ を通る直線を $y = g(x)$ とすると



$$g(x) = \frac{2}{\pi}x$$

曲線 $y = f(x)$ は，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において上に凸であるから

$$g(x) < f(x) \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{2}{\pi}x < \sin x$$

(2) (1) の結果から，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$-r^2\sin x < -\frac{2r^2}{\pi}x \quad \text{ゆえに} \quad 0 < e^{-r^2\sin x} < e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}$$

したがって　　$0 < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2\sin x}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}\,dx$

ここで　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}\,dx = \left[-\frac{\pi}{2r^2}e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2r^2}\left(1-e^{-r^2}\right)$

上の 2 式から，$r > 0$ のとき

$$0 < r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2\sin x}\,dx < \frac{\pi}{2r}(1-e^{-r^2})$$

$\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\pi}{2r}(1-e^{-r^2}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{r\to\infty} r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2\sin x}\,dx = \mathbf{0}$$

6.102 (1) $y = e^{-x}$ より　$y' = -e^{-x}$

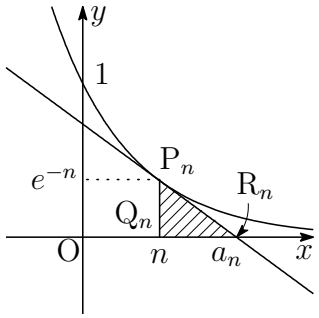
曲線 $y = e^{-x}$ の $\mathrm{P}_n(n,\ e^{-n})$ における接線は

$$y - e^{-n} = -e^{-n}(x - n)$$

ゆえに　　$y = -e^{-n}(x - n - 1)$

この直線と x 軸の交点の x 座標 a_n は

$$\boldsymbol{a_n = n + 1}$$



(2) (1) の結果から　$\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n = a_n - n = 1$，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = e^{-n}$

よって　　$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n = \dfrac{1}{2}\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n \cdot \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{-n} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}e^{-n}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} S_n &= \int_1^{n+1} e^{-x}\,dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}e^{-k} \\ &= \left[-e^{-x} \right]_1^{n+1} - \frac{1}{2}e^{-1} \times \frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}} \\ &= -e^{-n-1} + \frac{1}{e} - \frac{1 - e^{-n}}{2(e-1)} \end{aligned}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{e} - \frac{1}{2(e-1)} = \boldsymbol{\frac{e-2}{2e(e-1)}}$

6.103 (1) $t = e^x$，$g(t) = f(x)$ とおくと

$$g(t) = \frac{1}{1 + \frac{t}{e}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{et}} - 1 = \frac{e}{t+e} + \left(\frac{et}{et+1} - 1 \right) = \frac{e}{t+e} - \frac{1}{et+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{e}{(t+e)^2} + \frac{e}{(et+1)^2} = \frac{e\{(t+e)^2 - (et+1)^2\}}{(t+e)^2(et+1)^2} \\ &= \frac{e(t+e+et+1)(t+e-et-1)}{(t+e)^2(et+1)^2} \\ &= \frac{e(1+e)(1-e)(t+1)(t-1)}{(t+e)^2(et+1)^2} \end{aligned}$$

$t > 0$ であるから，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		↗	最大	↘

よって，$t=1$，すなわち，$\boldsymbol{x=0}$ で $f(x)$ は最大となる．

(2) $$f(x)=\left(\frac{1}{1+e^{x-1}}-1\right)+\frac{1}{1+e^{-x-1}}$$
$$=-\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1}+\frac{e^{x+1}}{e^{x+1}+1}=\left\{\log\left(\frac{e^{x+1}+1}{e^{x-1}+1}\right)\right\}'$$

上式および $f(x)$ が偶関数であることから

$$I(a)=\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\left[\ \log\left(\frac{e^{x+1}+1}{e^{x-1}+1}\right)\ \right]_0^a$$
$$=2\log\frac{e^{a+1}+1}{e^{a-1}+1}-2\log\frac{e+1}{e^{-1}+1}=\boldsymbol{2\log\frac{e^{a+1}+1}{e^{a-1}+1}-2}$$

(3) $$\lim_{a\to\infty}\frac{e^{a+1}+1}{e^{a-1}+1}=\lim_{a\to\infty}\frac{e^2+e^{1-a}}{1+e^{1-a}}=e^2$$

よって，上式および (2) の結果から $\displaystyle\lim_{a\to\infty}I(a)=2\log e^2-2=\boldsymbol{2}$

6.104 (1) $g(x)=\log x+\dfrac{1}{x}$ とおくと $\quad g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$

したがって，$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	1	↗

ゆえに $\quad g(x)\geqq 1>0\quad$ よって $\quad\log x+\dfrac{1}{x}>0$

(2) (1) の結果から $\quad -\dfrac{1}{x}<\log x$

また，$0<x<1$ のとき $\quad -\dfrac{1}{x}<\log x<0\quad$ ゆえに $\quad -x^{n-1}<x^n\log x<0$

n は 2 以上の自然数であるから $\quad\displaystyle\lim_{x\to+0}(-x^{n-1})=0$

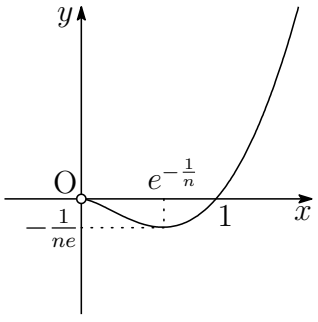
よって，はさみうちの原理により $\quad\displaystyle\lim_{x\to+0}x^n\log x=0$

(3) $f(x)=x^n\log x$ を微分すると

$$f'(x)=x^{n-1}(n\log x+1)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{ne}$	↗



よって，グラフの概形は右の図のようになる．最小値 $\boldsymbol{f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)=-\dfrac{1}{ne}}$

(4) (3) の結果から，$c_n=e^{-\frac{1}{n}}$ であるから

$$\begin{aligned}I_n&=\int_{c_n}^{1}x^n\log x\,dx=\frac{1}{n+1}\int_{e^{-\frac{1}{n}}}^{1}(x^{n+1})'\log x\,dx\\&=\left[\frac{x^{n+1}\log x}{n+1}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_{e^{-\frac{1}{n}}}^{1}\\&=\frac{1}{n(n+1)}e^{-\frac{n+1}{n}}-\frac{1}{(n+1)^2}(1-e^{-\frac{n+1}{n}})\end{aligned}$$

ゆえに　$n^2I_n=\dfrac{n}{n+1}e^{-\frac{n+1}{n}}-\dfrac{n^2}{(n+1)^2}(1-e^{-\frac{n+1}{n}})$

ここで　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{n+1}{n}}=e^{-1}$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty}n^2I_n=e^{-1}-(1-e^{-1})=\boldsymbol{2e^{-1}-1}$

6.105　(1) $f(x)=x-e^{x-1}$ を微分すると　$f'(x)=1-e^{x-1}$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↘

よって，方程式 $f(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=1}$

(2) 曲線 $y=2x^2\log x$ と曲線 $y=kx^2-k$ $(k>0)$ の接点の座標を $\alpha>0$ とする．$g(x)=2x^2\log x-k(x^2-1)$ とおくと

$$g'(x)=4x\log x+2x-2kx=2x(2\log x+1-k)$$

このとき，$g(\alpha)=0$，$g'(\alpha)=0$ であるから

$$2\alpha^2\log\alpha-k(\alpha^2-1)=0,\quad 2\log\alpha+1-k=0\quad\cdots(*)$$

上の 2 式から k を消去すると

$$2\alpha^2\log\alpha-(2\log\alpha+1)(\alpha^2-1)=0$$

整理すると　$2\log\alpha-\alpha^2+1=0$　ゆえに　$\log\alpha^2=\alpha^2-1$

したがって　$\alpha^2=e^{\alpha^2-1}$　(1) の結果から　$\alpha^2=1$

$\alpha>0$ であるから　$\alpha=1$　これを $(*)$ に代入すると　$\boldsymbol{k=1}$

(3) (2) の結果により

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}(2x^2\log x-x^2+1)\,dx=\left[\ \frac{2}{3}x^3\log x-\frac{5}{9}x^3+x\ \right]_{\frac{1}{n}}^{1}$$
$$=\frac{4}{9}+\frac{2}{3n^2}\cdot\frac{\log n}{n}+\frac{5}{9n^3}-\frac{1}{n}$$

このとき，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}(2x^2\log x-x^2+1)\,dx=\boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

6.106 (1) $0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x)=e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$ であるから

$$f'(x)=e^{-x}\left(x-\frac{3}{2}\right)<0,\quad f''(x)=\left(\frac{5}{2}-x\right)>0$$

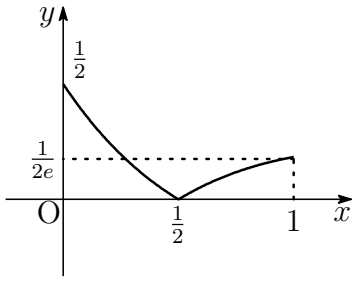
$\dfrac{1}{2}<x<1$ のとき，$f(x)=e^{-x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ であるから

$$f'(x)=e^{-x}\left(\frac{3}{2}-x\right)>0,\quad f''(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)<0$$

$$f(0)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ f(1)=\frac{1}{2e}$$

したがって，$f(x)$ の増減表およびグラフの概形は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	極小 0	↗	$\frac{1}{2e}$



(2) $$a_1=\int_0^1 e^{-x}\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|dx=\int_0^1 e^{-x}\left|x-\frac{1}{2}\right|dx$$

ここで，$e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=e^{-x}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}a_1&=\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{-x}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx\\&=\Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}\\&=2F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)-F(1)\\&=2e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-1}=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{e}-e-3}{2e}}\end{aligned}$$

(3) $a_{n+1}=a_n+\displaystyle\int_n^{n+1}f(x)\,dx$ であるから

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}f(x)\,dx&=\int_n^{n+1}e^{-x}\left|\,x-[\,x\,]-\frac{1}{2}\right|dx\\&=\int_0^1 e^{-(t+n)}\left|\,(t+n)-[\,t+n\,]-\frac{1}{2}\right|dt\\&=e^{-n}\int_0^1 e^{-t}\left|\,t-\frac{1}{2}\right|dt=e^{-n}a_1\end{aligned}$$

$a_{n+1}=a_n+a_1e^{-n}$ より，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+a_1e^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}(e^{-1})^{k-1}\\&=a_1+a_1e^{-1}\times\frac{1-(e^{-1})^{n-1}}{1-e^{-1}}=\frac{a_1(1-e^{-n})}{1-e^{-1}}\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{a_1(1-e^{-n})}{1-e^{-1}}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{-n}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=a_1\times\frac{1}{1-e^{-1}}\\&=\frac{4\sqrt{e}-e-3}{2e}\times\frac{1}{1-e^{-1}}\\&=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{e}-e-3}{2(e-1)}}\end{aligned}$$

6.107 (1) $0<x<1$ のとき

$$0<\int_0^x e^t\,dt<\int_0^x 6\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0<e^x-1<6x$$

これから

$$0<\int_0^x (e^t-1)dt<\int_0^x 6t\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0<e^x-1-x<3x^2$$

さらに

$$0<\int_0^x (e^t-1-t)dt<\int_0^x 3t^2\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0<e^x-1-x-\frac{x^2}{2}<x^3$$

よって，$0<x<1$ において，$0<f(x)<x^3$ が成り立つ．

$n>1$ のとき，$0<\dfrac{1}{n}<1$ であるから，上式により

$$0<f\left(\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{1}{n}\right)^3 \quad \text{ゆえに} \quad 0<n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$

(2) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 e^x\,dx=\Big[\ e^x\ \Big]_0^1=e-1$，$\displaystyle K_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\times\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,dx-K_n&=(e-1)\left\{1-\frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}\right\}\\&=(e-1)\times\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\left\{n(e^{\frac{1}{n}}-1)-1\right\}\end{aligned}$$

$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=e^{\frac{1}{n}}-1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}$ より，$n(e^{\frac{1}{n}}-1)-1=nf\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{2n}$ から

$$n\left\{\int_0^1 g(x)\,dx-K_n\right\}=(e-1)\times\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\times\left\{n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\right\}$$

よって，求める最大の自然数 k は $\boldsymbol{k=1}$ であり，そのときの極限値は

$$\lim_{n\to\infty} n\left|\int_0^1 g(x)\,dx-K_n\right|=(e-1)\times 1\times\left(0+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{e-1}{2}}$$

6.108 (1) $f(x)=ax-\log(x+\sqrt{x^2-1})$ を微分すると

$$f'(x)=a-\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=a-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{a\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\frac{a^2x^2-(a^2+1)}{\sqrt{x^2-1}(a\sqrt{x^2-1}+1)}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(1)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

よって　　$\boldsymbol{h(a)=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}}$

(2)　　$\dfrac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2-1})=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

$$\sqrt{(h(a))^2-1}=\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}-1}=\frac{1}{a}$$

$F(a)=ah(a)-\log\{h(a)+\sqrt{(h(a))^2-1}\}$ を微分すると

$$F'(a)=h(a)+ah'(a)-\frac{1}{\sqrt{(h(a))^2-1}}\cdot h'(a)$$
$$=h(a)+ah'(a)-ah'(a)=h(a)$$

よって，$F(a)$ は $h(a)$ の原始関数である．

(3) (2) の結果から

$$I_n=\int_n^{n+1}h(a)\,da=\Big[\,F(a)\,\Big]_n^{n+1}=F(n+1)-F(n)$$
$$=(n+1)h(n+1)-\log(h(n+1)+\sqrt{(h(n+1))^2-1})$$
$$-nh(n)+\log(h(n)+\sqrt{(h(n))^2-1})$$
$$=(n+1)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{n+1}-\log\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$-n\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}+\log\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}}$$
$$\boldsymbol{-\log\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}+1}{n+1}+\log\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{n}}$$

ここで

$$\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}=\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\frac{2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}$$

したがって

$$I_n=\frac{2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}$$
$$-\log\left(\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}}+\frac{1}{n+1}\right)+\log\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n=\frac{2}{1+1}-\log 1+\log 1=\mathbf{1}$

6.109　(1)　$\boldsymbol{f(x)=\sin 2\pi x}$，$\boldsymbol{f(x)=\cos 2\pi x}$ など

(2)　$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(y)\,dy$ および $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=0$ より

$$F(x+1)=\int_0^{x+1} f(y)\,dy$$
$$=\int_0^1 f(y)dy+\int_1^{x+1} f(y)\,dy=\int_1^{x+1} f(y)\,dy$$

$y=t+1$ とおくと　$dy=dt$

y	$1\longrightarrow x+1$
t	$0\longrightarrow\quad x$

したがって

$$F(x+1)=\int_1^{x+1} f(y)\,dy=\int_0^x f(t+1)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt=F(x)$$

よって，$F(x)$ は周期 1 の周期関数である．

(3)　$F(t)=\displaystyle\int_0^t f(y)\,dy$ であるから　$\dfrac{d}{dt}F(t)=f(t)$

$t=nx$ とすると，$\dfrac{dt}{dx}=n$ より

$$\frac{d}{dx}F(t)=\left\{\frac{d}{dt}F(t)\right\}\frac{dt}{dx}=f(t)n\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{\frac{d}{dx}F(nx)=nf(nx)}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 xf(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 x\{F(nx)\}'\,dx \\ &= \frac{1}{n}\Big[\, xF(nx) \,\Big]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 F(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{n}F(n) - \frac{1}{n}\int_0^1 F(nx)\,dx \quad \cdots ① \end{aligned}$$

(2) の結果から　$F(n) = F(1) = \displaystyle\int_0^1 f(y)\,dy = 0$　$\cdots ②$

$t = nx$ とおくと　$dx = \dfrac{dt}{n}$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$0 \longrightarrow n$

したがって

$$\frac{1}{n}\int_0^1 F(nx)\,dx = \frac{1}{n^2}\int_0^n F(t)\,dt = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} F(t)\,dt \quad \cdots ③$$

さらに，$t = u + k - 1$ とおくと　$dt = du$

t	$k-1 \longrightarrow k$
u	$0 \quad \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} F(t)\,dt &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 F(u+k-1)\,du \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 F(u)\,du = \frac{1}{n}\int_0^1 F(u)\,du \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

③，④ より　$\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 F(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 F(u)\,du$

上式および ② を ① に代入すると　$a_n = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 F(u)\,du$

このとき，$\displaystyle\int_0^1 F(u)\,du$ は定数であるから　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

別解　$a_n = \displaystyle\int_0^1 xf(nx)\,dx$

上式について，$y = nx$ とおくと　$dx = \dfrac{dy}{n}$

x	$0 \longrightarrow 1$
y	$0 \longrightarrow n$

$$a_n = \frac{1}{n^2}\int_0^n yf(y)\,dy = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} yf(y)\,dy$$

さらに，$y=u+k-1$ とおくと　$dy=du$

y	$k-1 \longrightarrow k$
u	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (u+k-1)f(u+k-1)\,dy \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (u+k-1)f(u)\,du \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_0^1 uf(u)\,du+(k-1)\int_0^1 f(u)\,du\right\} \\
&= \frac{1}{n^2}\left\{n\int_0^1 uf(u)\,du+\frac{1}{2}n(n-1)\int_0^1 f(u)\,du\right\} \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 uf(u)\,du
\end{aligned}$$

このとき，$\displaystyle\int_0^1 uf(u)\,du$ は定数であるから　$\lim_{n\to\infty} a_n=0$

6.110　(1)　$f(x)=e^{-x}(a\sin px+b\cos px)$ であるから

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -e^{-x}(a\sin px+b\cos px)+e^{-x}(ap\cos px-bp\sin px) \\
&= e^{-x}\{-(a+bp)\sin px+(ap-b)\cos px\}
\end{aligned}$$

これが $f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるので

$$e^{-x}\{-(a+bp)\sin px+(ap-b)\cos px\}=e^{-x}\sin px$$

ゆえに　$e^{-x}\{-(a+bp+1)\sin px+(ap-b)\cos px\}=0$

すべての x に対して，上式は成立するので，$x=0,\ \dfrac{\pi}{2p}$ を代入すると

$$ap-b=0,\quad a+bp+1=0$$

よって　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{1+p^2},\quad b=-\dfrac{p}{1+p^2}}$

別解　$e^{-x}\sin px$，$e^{-x}\cos px$ を微分すると

$$\begin{aligned}
(e^{-x}\sin px)' &= -e^{-x}\sin px+e^{-x}\cdot p\cos px \\
&= -e^{-x}\sin px+pe^{-x}\cos px
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e^{-x}\cos px)' &= -e^{-x}\cos px+e^{-x}(-p\sin px) \\
&= -pe^{-x}\sin px-e^{-x}\cos px
\end{aligned}$$

上の 2 式から

$$\begin{pmatrix} (e^{-x}\sin px)' \\ (e^{-x}\cos px)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x}\sin px \\ e^{-x}\cos px \end{pmatrix}$$

2 次の正方行列 $\begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix}$ は正則であるから，$\begin{pmatrix} -1 & p \\ -p & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ を上式の両辺に左からかけると

$$\frac{1}{1+p^2}\begin{pmatrix} -1 & -p \\ p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^{-x}\sin px)' \\ (e^{-x}\cos px)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x}\sin px \\ e^{-x}\cos px \end{pmatrix}$$

上式の (1,1) 成分から

$$\left(-\frac{1}{1+p^2}e^{-x}\sin px - \frac{p}{1+p^2}e^{-x}\cos px\right)' = e^{-x}\sin px$$

よって $\qquad \boldsymbol{a = -\dfrac{1}{1+p^2}},\ \ \boldsymbol{b = -\dfrac{p}{1+p^2}}$

(2) $p = \dfrac{1}{t}$ とおくと $(t \neq 0)$，(1) の結果から

$$\left(-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-x}\sin\frac{x}{t} - \frac{t}{t^2+1}e^{-x}\cos\frac{x}{t}\right)' = e^{-x}\sin\frac{x}{t}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{t^2} e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx \\ &= \left[-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-x}\sin\frac{x}{t} - \frac{t}{t^2+1}e^{-x}\cos\frac{x}{t}\right]_0^{t^2} \\ &= \boldsymbol{-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-t^2}\sin t + \frac{t}{t^2+1}\left(1 - e^{-t^2}\cos t\right)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{S(t)}{t^3} &= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1}\times\frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1}\times\frac{1-e^{-t^2}\cos t}{t^2} \\ &= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1}\times\frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1}\left\{\frac{1-e^{-t^2}}{t^2} + \frac{e^{-t^2}(1-\cos t)}{t^2}\right\} \\ &= -\frac{e^{-t^2}}{t^2+1}\times\frac{\sin t}{t} + \frac{1}{t^2+1}\left\{\frac{e^{-t^2}-1}{-t^2} + e^{-t^2}\times\frac{1-\cos t}{t^2}\right\} \end{aligned}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1,\quad \lim_{t\to0}\frac{e^{-t^2}-1}{-t^2}=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$

$$\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+\cos t}\times\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}$$

よって　$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{S(t)}{t^3}=-1\times1+1\left(1+1\times\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

6.111　(1)　$\displaystyle a_{n+1}-a_n=\int_0^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx-\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx$

$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx$$

$t=x-n\pi$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=1,$

x	$n\pi\longrightarrow(n+1)\pi$
t	$0\longrightarrow\pi$

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{\pi}e^{-r(n\pi+t)}|\sin(t+n\pi)|\,dt$$

$$=e^{-rn\pi}\int_0^{\pi}e^{-rt}\sin t\,dt=e^{-rn\pi}a_1$$

$$=e^{-rn\pi}\left[-\frac{e^{-rt}}{r^2+1}(r\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}e^{-nr\pi}}$$

(2)　$a_{n+1}-a_n=e^{-rn\pi}a_1$，$a_1=\dfrac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1\sum_{k=1}^{n-1}e^{-rk\pi}$$

$$a_n=a_1\sum_{k=0}^{n-1}e^{-rk\pi}=a_1\times\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}$$

$$=\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}\times\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}=\frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$a_n=\boldsymbol{\frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(3)　$r>0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{-rn\pi}=0$ であるから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(4) $rf(r)=\dfrac{r(1+e^{-r\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}=\dfrac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)\pi}\times\dfrac{-r\pi}{e^{-r\pi}-1}$ であるから

$$\lim_{r\to+0} rf(r)=\frac{1+1}{\pi}\times 1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

6.112 (1) $I_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ とおく.

$t=nx$ とすると $\dfrac{dt}{dx}=n$

x	$0\longrightarrow 2\pi$
t	$0\longrightarrow 2n\pi$

$$I_n=\int_0^{2n\pi}|\sin t-\sin 2t|\,\frac{1}{n}dt=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx \qquad (*)$$

ここで，$f(x)=\sin x-\sin 2x$ とし，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=-\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$ とおく.

$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)-\sin 2(x+2\pi)=f(x)$,

$f(2\pi-x)=\sin(2\pi-x)-\sin 2(2\pi-x)=-\sin x+\sin 2x=-f(x)$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数で，$|f(2\pi-x)|=|f(x)|$ であるから

$$I_n=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}|f(x)|\,dx=\frac{1}{n}\cdot n\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx=\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|\,dx$$

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|\,dx$ について，$x=2\pi-u$ とおくと $\dfrac{dx}{du}=-1$

x	$\pi\longrightarrow 2\pi$
u	$\pi\longrightarrow 0$

$$\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|\,dx=\int_{\pi}^{0}|f(2\pi-u)|\,(-1)du=\int_0^{\pi}|f(u)|\,du=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$$

したがって $\qquad I_n=2\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$

$f(x)=\sin x(1-2\cos x)$ より $\quad |f(x)|=\begin{cases}-f(x) & (0\leqq x\leqq \frac{\pi}{3})\\ f(x) & (\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq \pi)\end{cases}$

$$\frac{I_n}{2}=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}f(x)\,dx=-\Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=F(0)-2F\left(\frac{\pi}{3}\right)+F(\pi)=-\frac{1}{2}-2\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

よって $\qquad I_n=2\times\dfrac{5}{2}=\boldsymbol{5}$

(2) $J_n = \displaystyle\int_0^c |\sin nx - \sin 2nx|$ とおく．

$t = nx$ とすると　$\dfrac{dt}{dx} = n$

x	$0 \longrightarrow c$
t	$0 \longrightarrow nc$

$$J_n = \int_0^{nc} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(t)|\, dt = \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)|\, dx$$

$\dfrac{nc}{2\pi}$ 以下の最大の整数を N とすると

$$(**) \quad N \leqq \frac{nc}{2\pi} < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2N\pi \leqq nc < 2(N+1)\pi$$

$(*)$ および (1) の結果により，$I_N = \dfrac{1}{N} \displaystyle\int_0^{2N\pi} |f(x)|\, dx = 5$ であるから

$$\int_0^{2N\pi} |f(x)|\, dx = 5N$$

したがって

$$\frac{1}{n} \int_0^{2N\pi} |f(x)|\, dx \leqq \frac{1}{n} \int_0^{nc} |f(x)|\, dx < \frac{1}{n} \int_0^{2(N+1)} |f(x)|\, dx$$

$$\frac{1}{n} \cdot 5N \leqq J_n < \frac{1}{n} \cdot 5(N+1)$$

$(**)$ より　$\dfrac{nc}{2\pi} - 1 < N$，$N + 1 \leqq \dfrac{nc}{2\pi} + 1$ であるから

$$\frac{5}{n}\left(\frac{nc}{2\pi} - 1\right) < J_n < \frac{5}{n}\left(\frac{nc}{2\pi} + 1\right)$$

$$\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} < J_n < \frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}$$

このとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n}\right) = \frac{5c}{2\pi}$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}\right) = \frac{5c}{2\pi}$

よって，はさみうちの原理により　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{5c}{2\pi}}$

6.113　(1) $f(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ とおくと　　$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x}$

したがって　$x \geqq 1$ のとき，$f'(x) \geqq 0$

$x > 1$ で $f(x)$ は単調増加で，$f(1) = 2 > 0$ であるから

$$x \geqq 1 \text{ のとき} \quad f(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x < 2\sqrt{x}$$

(2) (1) の結果から，自然数 n に対して

$$0<\log(n+1)<2\sqrt{n+1}\quad\text{ゆえに}\quad 0<\log(n+1)^{\frac{1}{n}}<2\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$\lim_{n\to\infty}2\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\log(n+1)^{\frac{1}{n}}=0\quad\text{よって}\quad\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=\mathbf{1}$$

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$2+\dfrac{2}{\pi}x<2+\sin x<3$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}3^n dx$$

ゆえに
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n dx=\left[\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{3^n}{n+1}\cdot\frac{3\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}3^n dx=3^n\cdot\frac{\pi}{2}$$

したがって

$$\frac{3}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}^{\frac{1}{n}}<\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}<3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(2) の結果により
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}^{\frac{1}{n}}=3$$
$$\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=3$$

よって，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}=3$$

6.114 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおくと，$f(x)<1$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$$

$f(x)$ は単調増加であるから，区間 $k-1 \leqq x \leqq k$ において $(1 \leqq k \leqq n)$

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx < \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx < \int_{k-1}^{k} dx$$

したがって $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx < f(k) < 1$

上式を k について，1 から n まで加えると

$$\int_{0}^{n} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) < n$$

このとき $\displaystyle\int_{0}^{n} f(x)\,dx = \left[\ \sqrt{x^2+1}\ \right]_{0}^{n} = \sqrt{n^2+1} - 1$

したがって $\displaystyle\sqrt{n^2+1} - 1 < \sum_{k=1}^{n} f(k) < n$

ゆえに $\displaystyle\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) < 1$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n}\right) = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) = 1 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right) = \mathbf{1}$$

解説 $\displaystyle a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 1$

> $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \alpha$

6.115 (1) $\displaystyle I_1 = \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ \log(1+x)\ \right]_{0}^{\sqrt{3}} = \mathbf{\log(1+\sqrt{3})}$

(2) $\displaystyle I_2 = \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ において，$x = \tan\theta$ とおくと

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$\displaystyle\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ であるから $\displaystyle I_2 = \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \mathbf{\frac{\pi}{3}}$

(3) まず，$0 \leqq k \leqq 1$ のとき

$$\frac{1}{1+k} - (1-k) = \frac{k^2}{1+k} \geqq 0, \quad 1 - \frac{1}{1+k} = \frac{k}{1+k} \geqq 0$$

よって　$1-k \leqq \dfrac{1}{1+k} \leqq 1$　(等号が成り立つのは，$k=0$ のとき)

したがって　$\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx < \int_0^1 dx$

$$\frac{n}{n+1} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx < 1 \quad \cdots ①$$

次に，$1 \leqq k$ のとき　$0 < \dfrac{1}{1+k} < \dfrac{1}{k}$

したがって　$\displaystyle 0 < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^n}\,dx < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n}dx$

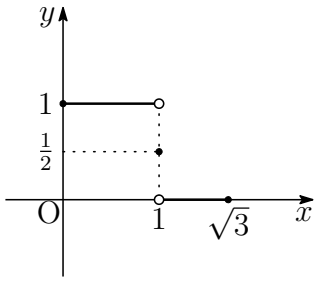
$$0 < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^n}\,dx < \frac{1}{n-1}\left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\right\} \quad \cdots ②$$

①，② より，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx + \lim_{n\to\infty} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^n}\,dx = 1 + 0 = \mathbf{1}$$

解説　$f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ $(0 \leqq x \leqq \sqrt{3})$ に対して，

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ とすると，$y = f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．



これから，明らかに　$\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$

また，次の 2 式を示せばよいことが分かる．

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^n}\,dx = 0$$

(以上の説明でも部分点は貰える)

6.116 (1)

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \cos k\pi \\ &= -\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\frac{k}{n}} \\ &= -\int_1^2 \frac{dx}{x} = -\Big[\ \log x\ \Big]_1^2 = \boldsymbol{-\log 2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} \cos \frac{2k\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{\frac{k}{n}} \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\Big[\ \log x\ \Big]_1^3 = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\log 3} \end{aligned}$$

6.117 (1) $f(x) = x$ より

$$v(x) = \int_0^x e^t(x-t)\,dt = \Big[\ e^t(x-t+1)\ \Big]_0^x = \boldsymbol{e^x - x - 1}$$

(2) $v(x)=\displaystyle\int_0^x e^t f(x-t)\,dt$ において，$u=x-t$ とおくと

t	$0 \longrightarrow x$
u	$x \longrightarrow 0$

$dt=-du$

$v(x)=\displaystyle\int_x^0 e^{x-u}f(u)\,(-du)=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)\,du$ を微分すると

$$v'(x)=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)+e^x\cdot e^{-x}f(x)=v(x)+f(x)$$

$v(x)+f(x)=\sin^4 x$ より，$v'(x)=\sin^4 x$ であるから

$$\begin{aligned}v(x)=\int \sin^4 x\,dx&=-\int \sin^3 x(\cos x)'\,dx\\&=-\sin^3 x\cos x+\int 3\sin^2 x\cos x\cdot\cos x\,dx\\&=-\sin^3 x\cos x+3\int \sin^2 x\,dx-3\int \sin^4 x\,dx\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}v(x)=\sin^4 x\,dx&=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx\\&=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{4}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\\&=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{8}x-\frac{3}{16}\sin 2x+C\end{aligned}$$

$v(0)=0$ であるから　$\boldsymbol{v(x)=-\dfrac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\dfrac{3}{8}x-\dfrac{3}{16}\sin 2x}$

(3) (2) の結果から

$$f(x)=\sin^4 x-v(x)=\sin^4 x+\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x-\frac{3}{8}x+\frac{3}{16}\sin 2x$$

ゆえに　$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sin x}{x}\left(\sin^3 x+\dfrac{1}{4}\sin^2 x\cos x\right)-\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1(0+0)-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot 1=\mathbf{0}$

6.118　(1) $t>0$ のとき，$e^t-1>0$ であるから，$x>0$ より

$$\int_0^x (e^t-1)\,dt>0 \quad \text{ゆえに} \quad e^x-1-x>0$$

上式から　$e^x>1+x$　ゆえに　$e^x>x$　$\cdots$①

「自然数 m に対して，$x>0$ のとき $e^x>\dfrac{x^m}{m!}$ である」を $(*)$ とする．

i) $m=1$ のとき，① より $(*)$ が成り立つ．

ii) $m=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，$t>0$ に対して

$$e^t - \frac{t^k}{k!} > 0$$

$x>0$ より $\displaystyle\int_0^x \left(e^t - \frac{t^k}{k!}\right) dt > 0$ ゆえに $\displaystyle e^x - 1 - \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} > 0$

上式から $\displaystyle e^x > 1 + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ ゆえに $\displaystyle e^x > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

よって，$m=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，$(*)$ が成り立つ．

補足 $x>0$ に対して，$\displaystyle e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}$ が成り立つ．

(2) (1) の結果から，$m=n+1$ とすると，$x>0$ のとき

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \frac{x^n}{e^x} < \frac{(n+1)!}{x}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)!}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

(3) $f(x) = x^{n-1}$ とおくと

$$f^{(j)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!} x^{n-j-1} \quad (1 \leqq j \leqq n-2)$$
$$f^{(n-1)}(x) = (n-1)!$$

したがって，$1 \leqq j \leqq n-2$ のとき $f^{(j)}(0) = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
\Gamma_K(n) &= \int_0^K x^{n-1} e^{-x}\, dx \\
&= \left[-e^{-x} \sum_{j=0}^{n-2} f^{(j)}(x) - (n-1)! e^{-x} \right]_0^K \\
&= e^{-K} \sum_{j=0}^{n-2} f^{(j)}(K) - (n-1)! e^{-K} + (n-1)! \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!} \cdot \frac{K^{n-j-1}}{e^K} - \frac{(n-1)!}{e^K} + (n-1)!
\end{aligned}$$

(2) の結果から，$\lim_{K\to\infty}\dfrac{K^{n-j-1}}{e^K}=0$．また，$\lim_{K\to\infty}\dfrac{(n-1)!}{e^K}=0$ であるから

$$\lim_{K\to\infty}\Gamma_K(n)=\boldsymbol{(n-1)!}$$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{kx}f(x)\,dx=\frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}+C$$

本題は，上式において $k=-1$ であるから，次の結果を利用する．

$$\int e^{-x}f(x)\,dx=-e^{-x}\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\}+C$$

6.119 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=\int_0^1(1+x)^{\frac{1}{3}}\,dx=\left[\ \frac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}}\ \right]_0^1=\boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}-\frac{3}{4}}$$

6.120 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\left[\ \frac{1}{2}\log(1+x^2)\ \right]_0^1=\boldsymbol{\frac{\log 2}{2}}$$

6.121 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+x^2}}\boldsymbol{dx}$$

$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる．

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって　　$(与式)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\ \theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

6.122 $\displaystyle\log\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$$=\int_0^1\log(1+x)\,dx$$

$$=\Big[\,(1+x)\log(1+x)-x\,\Big]_0^1$$

$$=\mathbf{2\log 2-1}$$

6.123　(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)=\int_0^1\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx$

$$=\int_0^1 3\left(1+\frac{x}{3}\right)'\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx$$

$$=\left[\,3\left(1+\frac{x}{3}\right)\log\left(1+\frac{x}{3}\right)\,\right]_0^1-\int_0^1 dx$$

$$=\mathbf{4\log\frac{4}{3}-1}$$

(2) $a_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$ とおくと

$$\frac{a_n}{3}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{2}{3n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{3n}\right)}$$

(1) の結果から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\frac{a_n}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$

$$=4\log\frac{4}{3}-1=\log\frac{256}{81e}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3\times\frac{256}{81e}=\frac{256}{27e}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}=\mathbf{\frac{256}{27e}}$

6.124　(1) $\displaystyle T_n=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}h=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)h+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_{j+1})h$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)h+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}f(x_j)h=\mathbf{\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{2}B_n}$$

(2) $f(x)=x^2,\ h=\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n},\ x_j=0+j\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{j}{n}$ より

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)h = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) = \boldsymbol{\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1)}, \\
B_n &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)h = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \boldsymbol{\frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1)}, \\
T_n &= A_n + B_n \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6n^2}(2n^2+1)}
\end{aligned}$$

(3) 真の値 S は $\quad S=\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx=\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1=\frac{1}{3}$

近似値 T_n による相対誤差は

$$\left|\frac{T_n-S}{S}\right| = |3T_n-1| = \left|3\cdot\frac{1}{6n^2}(2n^2+1)-1\right| = \frac{1}{2n^2}$$

この相対誤差が 0.01 以下であるから

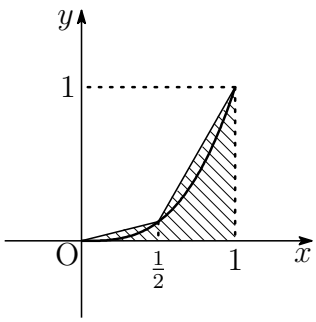
$$\frac{1}{2n^2}\leqq 0.01 \quad \text{ゆえに} \quad n^2\geqq 50$$

これをみたす n の最小値は $\quad \boldsymbol{n=8}$

6.125 (1) $y_k = {x_k}^3$ とすると

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(y_{k-1}+y_k) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}y_{k-1} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}y_k \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}y_k \\ &= \frac{1}{2n}y_0 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}y_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}y_k + \frac{1}{2n}y_n \\ &= \frac{1}{2n}y_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}y_k + \frac{1}{2n}y_n \\ &= \frac{1}{2n}{x_0}^3 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}{x_k}^3 + \frac{1}{2n}{x_n}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}{x_k}^3 + \frac{1}{2n}} \end{aligned}$$

(2) I_2 は右の図の斜線部分の面積を表す.



(3) $x_k = \dfrac{k}{n}$ であるから，これを (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^3 + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n-1)^2 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2} \end{aligned}$$

また $\quad I = \displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

よって $\quad \boldsymbol{I_n - I = \dfrac{1}{4n^2}}$

6.126 (1) $x = \tan\theta$ とおくと $\quad dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる.

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　　$I_1 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\ \theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$

(2) I_1 に部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\sqrt{3}} (x)' \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \left[\ \frac{x}{x^2+1}\ \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x\left\{-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right\}dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^2}dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\left\{\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+1)^2}\right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2(I_1 - I_2) \end{aligned}$$

よって　　$I_2 = \dfrac{1}{2}I_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{8} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}}$

(3) $t = x + \sqrt{x^2+1} \cdots ①$ より

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{x^2+1}} \quad \cdots ②$$

したがって　$\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{dt}{t}$

よって　　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C$

$= \boldsymbol{\log(x + \sqrt{x^2+1}) + C}$　(C は積分定数)

(4) ① より　$y = \log t$　ゆえに　$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t}$

上式および ② により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{\sqrt{x^2+1}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

(5) 求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\left[\ \log(x+\sqrt{x^2+1})\ \right]_0^1=\mathbf{\log(1+\sqrt{2})}$$

6.127 (1) $f(x)=ax^2+bx+c$, $x_k=\dfrac{k}{n}$, $L_k=\dfrac{1}{n}f(x_k)$ より

$$L_1=\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left\{a\left(\frac{1}{n}\right)^2+b\left(\frac{1}{n}\right)+c\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{a}{n^2}+\frac{b}{n}+c\right),$$
$$L_n=\frac{1}{n}f(1)=\frac{1}{n}(a+b+c)$$

したがって　$L_1+L_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a}{n^2}+\dfrac{b}{n}+a+b+2c\right)$

条件式から　$L_1+L_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{8}{n^2}+10\right)$

上の 2 式から　$\boldsymbol{a=8}$, $\boldsymbol{b=0}$, $a+b+2c=10$　ゆえに　$\boldsymbol{c=1}$

(2) $kL_k=k\cdot\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\dfrac{k}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\quad\cdots(*)$

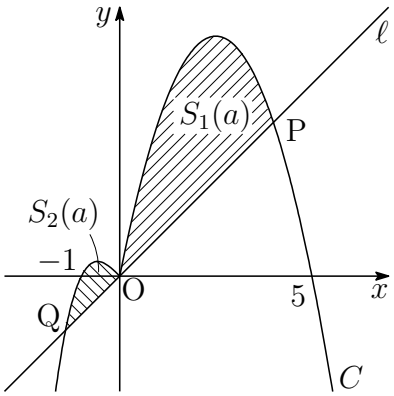
(1) の結果より，$f(x)=8x^2+1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kL_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 xf(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 x(8x^2+1)\,dx=\left[\ 2x^4+\frac{x^2}{2}\ \right]_0^1=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

(3) $(*)$ に $\dfrac{k}{n}$ を掛けると　$\dfrac{k^2}{n}L_k = \left(\dfrac{k}{n}\right)^2 f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2L_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}L_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$= \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2(8x^2+1)\,dx$$
$$= \left[\ \frac{8}{5}x^5 + \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{29}{15}}$$

7.1 (1) 直線 $y = ax$ を ℓ とする．



$x > 0$ のとき，C と ℓ の共有点の x 座標は

$x(5-x) = ax$　ゆえに　$x(x-5+a) = 0$

よって，点 P の x 座標は　$x = 5-a$

$x < 0$ のとき，C と ℓ の共有点の x 座標は

$x(x^2-1) = ax$　ゆえに　$x(x^2-a-1) = 0$

よって，点 Q の x 座標は　$x = -\sqrt{a+1}$

P，Q それぞれの x 座標の符号から　　$5-a > 0$，$-\sqrt{a+1} < 0$

これを解いて　　$\boldsymbol{-1 < a < 5}$

(2) $S_1(a) = \displaystyle\int_0^{5-a}\{x(5-x) - ax\}\,dx$

$$= -\int_0^{5-a} x(x-5+a)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{6}(5-a)^3}$$

(3) $S_2(a) = \displaystyle\int_{-\sqrt{a+1}}^{0}\{(x^3-x) - ax\}\,dx = \int_{-\sqrt{a+1}}^{0}\{x^3 - (a+1)x\}\,dx$

$$= \left[\ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(a+1)x^2\ \right]_{-\sqrt{a+1}}^{0} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(a+1)^2}$$

(4) $S(a) = S_1(a) + S_2(a)$ より，(2)，(3) の結果から

$$S(a) = \frac{1}{6}(5-a)^3 + \frac{1}{4}(a+1)^2$$
$$S'(a) = -\frac{1}{2}(5-a)^2 + \frac{1}{2}(a+1) = -\frac{1}{2}(a-3)(a-8)$$

$-1 < a < 5$ における $S(a)$ の増減表は次のようになる．

a	(-1)	$\cdots$	3	$\cdots$	(5)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$	

よって，$S(a)$ の最小値は　$S(3)=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$

7.2　(1)　$(x)=x^4+2ax^3+6bx^2+4cx+d$ より

$$f'(x)=4x^3+6ax^2+12bx+4c$$
$$f''(x)=12x^2+12ax+12b$$

(い) より $x=\alpha,\ \beta$ は $f''(x)=0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\left(1+\sqrt{\frac{5}{6}}\right)+\left(1-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)=-\frac{12a}{12},\quad \left(1+\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)=\frac{12b}{12}$$

ゆえに　$a=-2,\ b=\dfrac{1}{6}$　また，$f'(1)=0$ であるから

$$4-12+2+4c=0\quad \text{これを解いて}\quad c=\frac{3}{2}$$

したがって　$f(x)=x^4-4x^3+x^2+6x+d$　さらに $f(2)=0$ であるから

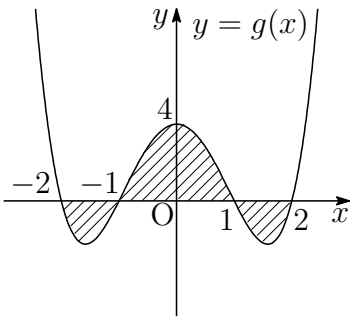
$$16-32+4+12+d=0\quad \text{これを解いて}\quad d=0$$

以上の結果から　$\boldsymbol{a=-2,\ b=\frac{1}{6},\ c=\frac{3}{2},\ d=0}$

(2)　$y=g(x)$ は $y=f(x)$ を x 軸方向に -1 だけ平行移動したものであるから

$$\begin{aligned}g(x)&=f(x+1)\\&=(x+1)^4-4(x+1)^3+(x+1)^2+6(x+1)\\&=\boldsymbol{x^4-5x^2+4}\end{aligned}$$

(3)　x 軸と C で囲まれた図形の面積は，x 軸と $y=g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積に等しい．



$$\begin{aligned}g(x)&=x^4-5x^2+4\\&=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

であるから，求める面積 S は

$$\frac{S}{2}=\int_0^2 |g(x)|\,dx=\int_0^1 (x^4-5x^2+4)dx-\int_1^2 (x^4-5x^2+4)dx$$

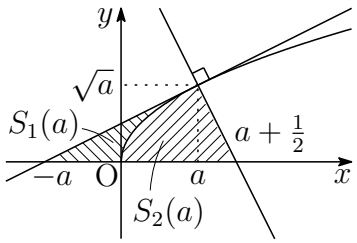
x^4-5x^2+4 の原始関数の 1 つを $G(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{5}{3}x^3+4x$ とおくと

$$\frac{S}{2}=2G(1)-G(0)-G(2)$$

このとき　$G(1)=\dfrac{38}{15}$,　$G(0)=0$,　$G(2)=\dfrac{16}{15}$

したがって　　$\dfrac{S}{2}=4$　　よって　　$\boldsymbol{S=8}$

7.3　(1)　$y=\sqrt{x}$ より　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$



曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ における接線の方程式は

$$y-\sqrt{a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$$

すなわち　　$y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x+\dfrac{\sqrt{a}}{2}$

この接線と x 軸との共有点の x 座標は

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{2}=0 \qquad \text{これを解いて} \qquad x=-a$$

よって　　$S_1(a)=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\sqrt{a}-\displaystyle\int_0^a \sqrt{x}\,dx$

$$=a\sqrt{a}-\left[\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ \right]_0^a=\boldsymbol{\frac{1}{3}a\sqrt{a}}$$

(2)　曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ における法線の方程式は

$$y-\sqrt{a}=-2\sqrt{a}\,(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=-2\sqrt{a}\left(x-a-\frac{1}{2}\right)$$

この法線と x 軸との共有点の x 座標は　$x=a+\dfrac{1}{2}$

よって　　$S_2(a)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{a}+\displaystyle\int_0^a \sqrt{x}\,dx$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{a}+\left[\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ \right]_0^a=\boldsymbol{\frac{1}{4}\sqrt{a}+\frac{2}{3}a\sqrt{a}}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{S_1(a)}{S_2(a)}=\lim_{a\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{3}a\sqrt{a}}{\dfrac{1}{4}\sqrt{a}+\dfrac{2}{3}a\sqrt{a}}=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{3}{4a}+2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

7.4 (1) $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{4}{x_n}\right)$ より　　$x_{n+1}-2=\dfrac{1}{2x_n}(x_n-2)^2$　$\cdots$①

$x_1=3\geqq 2$．$x_n\geqq 2$ のとき，$x_{n+1}\geqq 2$．

数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して　$x_n\geqq 2$

(2) ① および $x_n\geqq 2$ から

$$\begin{aligned}x_{n+1}-2&=\frac{x_n-2}{x_n}\times\frac{1}{2}(x_n-2)\\&=\left(1-\frac{2}{x_n}\right)\times\frac{1}{2}(x_n-2)\leqq\frac{1}{2}(x_n-2)\end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$0\leqq x_n-2\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}x_n=2}$$

(4) $g(x)>f(x)$ より

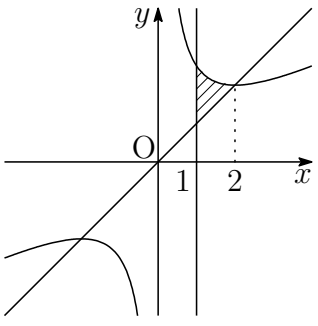
$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)>x\quad\text{整理すると}\quad x-\frac{4}{x}<0$$

両辺に $x^2>0$ を掛けると　　$x(x+2)(x-2)<0$

よって　　$\boldsymbol{x<-2,\ 0<x<2}$

(5) (4) の結果から，求める面積を S とすると

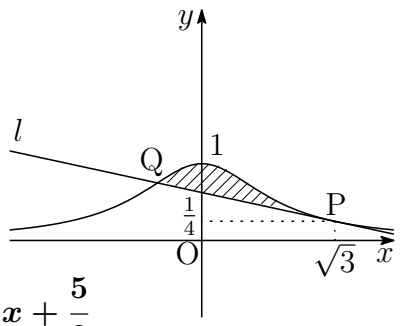
$$\begin{aligned}S&=\int_1^2\{g(x)-f(x)\}\,dx\\&=\int_1^2\left\{\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)-x\right\}dx\\&=\left[\,2\log x-\frac{x^2}{4}\,\right]_1^2=\boldsymbol{2\log 2-\frac{3}{4}}\end{aligned}$$



7.5 (1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ より　$y'=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

$x=\sqrt{3}$ のとき　$y'=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

よって，点 $\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{4}\right)$ における接線 l は



$y-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\left(x-\sqrt{3}\right)$　よって　$\boldsymbol{y=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}x+\dfrac{5}{8}}$

(2) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ と $y=\dfrac{\sqrt{3}}{8}x+\dfrac{5}{8}$ から y を消去すると

$$\frac{1}{1+x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{8}x+\frac{5}{8}\quad\text{ゆえに}\quad \sqrt{3}x^3-5x^2+\sqrt{3}x+3=0$$

したがって　$(x-\sqrt{3})^2(\sqrt{3}x+1)=0$

P と異なる Q の x 座標は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ のとき

$$\frac{1}{1+x^2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}x+\frac{5}{8}\right)=\frac{(x-\sqrt{3})^2(\sqrt{3}x+1)}{8(1+x^2)}\geqq 0$$

求める面積を S とすると

$$S=\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx-\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}x+\frac{5}{8}\right)dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$ について，

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\longrightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

x と θ の対応は右のようになる．

ゆえに　$\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{2}$

また　$\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{5}{8}\right)dx=\left[-\frac{\sqrt{3}}{16}x^2+\frac{5}{8}x\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

よって　$\boldsymbol{S=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

7.6 (1) $f(x)=kx^3-3kx$ より　$f'(x)=3kx^2-3k$

P$(p,\ f(p))$ における接線 l_1 の方程式は

$$y-(kp^3-3kp)=(3kp^2-3k)(x-p)$$

ゆえに　$\boldsymbol{y=(3kp^2-3k)x-2kp^3}$

(2) Q$(ap,\ f(ap))$ における接線 l_2 の方程式は，(1) の結果から $(p\to ap)$

$$y=(3ka^2p^2-3k)x-2ka^3p^3$$

これが P を通るから　$kp^3-3kp=(3ka^2p^2-3k)p-2ka^3p^3$

整理すると　$kp^3(a-1)^2(2a+1)=0$

$k>0$，$p>0$，$a\neq 1$ であるから　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$

(3) l_2 が P を通るから，(2) の結果から　$a=-\dfrac{1}{2}$

また $l_1\perp l_2$ より，$f'(p)f'\left(-\dfrac{1}{2}p\right)=-1$ であるから

$$(3kp^2-3k)\cdot\left\{3k\left(-\frac{1}{2}p\right)^2-3k\right\}=-1$$

ゆえに　$\dfrac{9}{4}k^2(p^2-1)(p^2-4)=-1$　$\cdots$①

① をみたす $k>0$ が存在するとき

$$(p^2-1)(p^2-4)<0\quad\text{ゆえに}\quad 1<p^2<4$$

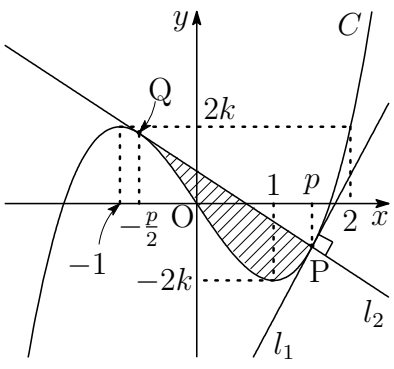
$p>0$ であるから　$\boldsymbol{1<p<2}$

① より　$\boldsymbol{k=\dfrac{2}{3\sqrt{(p^2-1)(4-p^2)}}}$

(4) (2) の結果から，l_2 の方程式は　$y=3k\left(\dfrac{p^2}{4}-1\right)x+\dfrac{k}{4}p^3$

$g(x)=3k\left(\dfrac{p^2}{4}-1\right)x+\dfrac{k}{4}p^3$ とおくと

$$\begin{aligned}g(x)-f(x)&=3k\left(\frac{p^2}{4}-1\right)x+\frac{k}{4}p^3\\&\qquad-(kx^3-3kx)\\&=-kx^3+\frac{3}{4}kp^2x+\frac{k}{4}p^3\\&=-k(x-p)\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\end{aligned}$$



$-\dfrac{p}{2} \leqq x \leqq p$ において，$k > 0$ より，$g(x) - f(x) \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{p}{2}}^{p} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= -k \int_{-\frac{p}{2}}^{p} (x-p)\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 dx \\ &= -k \int_{-\frac{p}{2}}^{p} \left\{\left(x+\frac{p}{2}\right) - \frac{3}{2}p\right\}\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 dx \\ &= -k \int_{-\frac{p}{2}}^{p} \left\{\left(x+\frac{p}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}p\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\right\} dx \\ &= -k \left[\frac{1}{4}\left(x+\frac{p}{2}\right)^4 - \frac{p}{2}\left(x+\frac{p}{2}\right)^3 \right]_{-\frac{p}{2}}^{p} = \frac{27}{64}p^4 k \end{aligned}$$

このとき，(3) の結果から

$$S = \frac{27}{64}p^4 \times \frac{2}{3\sqrt{(p^2-1)(4-p^2)}} = \frac{\boldsymbol{9p^4}}{\boldsymbol{32\sqrt{(p^2-1)(4-p^2)}}}$$

7.7 (1) $f(x)$ を微分すると

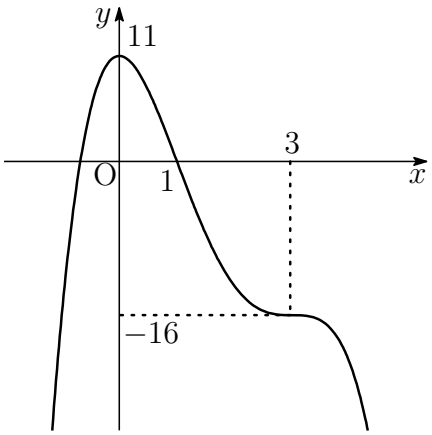
$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x^3 + 24x^2 - 36x \\ &= -4x(x-3)^2 \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減は，次のようなる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	11	↘	-16	↘

よって　$x = 0$ のとき**極大値 11**

また，グラフの概形は右のようになる．



(2) 求める直線の方程式を $y = mx + n$ とおくと，方程式

$-x^4+8x^3-18x^2+11 = mx+n$　すなわち　$x^4-8x^3+18x^2+mx+n-11 = 0$

は，異なる 2 重解をもつので，その解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$x^4 - 8x^3 + 18x^2 + mx + n - 11 = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \quad \cdots ①$$

このとき，右辺を展開すると

$$\begin{aligned} (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 &= \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}^2 \\ &= x^4 - 2(\alpha+\beta)x^3 + \{(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 \\ &\quad - 2\alpha\beta(\alpha+\beta)x + (\alpha\beta)^2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② の係数を比較すると　$\begin{cases} -8=-2(\alpha+\beta) \\ 18=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta \\ m=-2\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ n-11=(\alpha\beta)^2 \end{cases}$

上の第 1，2 式から　$\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=1$

これらを第 3，4 式に代入すると　$m=-8$，$n=12$

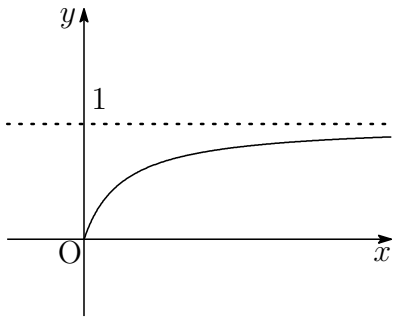
よって　$\boldsymbol{y=-8x+12}$

(3) 求める面積 S は，(2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} S&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(mx+n)-(-x^4+8x^3-18x^2+11)\}\,dx \\ &=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx \\ &=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}^2\,dx \\ &=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}\,dx \\ &=\left[\frac{1}{5}(x-\alpha)^5-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^4+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta} \\ &=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5=\frac{1}{30}\left\{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\right\}^5 \\ &=\frac{1}{30}(\sqrt{4^2-4\cdot1}\,)^5=\boldsymbol{\frac{48}{5}\sqrt{3}} \end{aligned}$$

7.8 (1)　$g(x)=\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$

$y=g(x)$ $(x\geqq 0)$ のグラフの概形は右のようになる．



また　$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} g(x)=1}$

(2) $t=g(x)$ とおくと，(1) の結果から，$x\geqq 0$ のとき　$0\leqq t\leqq 1$

ここで，$h(t)=f_1(t)-f_2(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} h(t)&=2t^2-at+\frac{1}{2}a-(t^2+at-a) \\ &=t^2-2at+\frac{3}{2}a=(t-a)^2+\frac{3}{2}a-a^2 \end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq 1$ における $h(t)$ の最小値が 0 以上であればよい．

(i) $a<0$ のとき，最小値 $h(0)=\dfrac{3}{2}a<0$ となり，不適.

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき，最小値 $h(a)=\dfrac{3}{2}a-a^2$

ゆえに　$\dfrac{3}{2}a-a^2 \geqq 0$　すなわち　$a\left(a-\dfrac{3}{2}\right) \leqq 0$

a の値の範囲に注意して，これを解くと　$0 \leqq a \leqq 1$

(iii) $1<a$ のとき，最小値 $h(1)=1-\dfrac{a}{2}$　ゆえに　$1-\dfrac{a}{2} \geqq 0$

a の値の範囲に注意して，これを解くと　$1<a \leqq 2$

(i)〜(iii) から，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{0 \leqq a \leqq 2}$

(3) (2) の結果から，$a=1$ のとき，$f_1(t)-f_2(t)=(t-1)^2+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$f_1(g(x))-f_2(g(x))=\{g(x)-1\}^2+\frac{1}{2}$$
$$=\left(\frac{x}{x+1}-1\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}$$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1\left\{\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\right\}dx=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{x}{2}\right]_0^1=\boldsymbol{1}$$

7.9 (1) $y=\dfrac{1}{x}$ より，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ であるから，$x=\alpha$ のとき　$-\dfrac{1}{y'}=\alpha^2$

したがって，C 上の点 $\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$ における法線の方程式は

$$y-\frac{1}{\alpha}=\alpha^2(x-\alpha)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\alpha^2x-\alpha^3+\frac{1}{\alpha}}$$

(2) $y=\dfrac{1}{x}$ と $x+y=k$ から，y を消去すると

$$\frac{1}{x}=k-x\quad \text{すなわち}\quad x^2-kx+1=0$$

上の方程式の解が $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=k,\quad \alpha\beta=1,\quad \beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{k^2-4}$$

(1) の結果から C の 2 点 A，B におけるそれぞれの法線の方程式は

$$y=\alpha^2x-\alpha^3+\beta\cdots①,\quad y=\beta^2x-\beta^3+\alpha\cdots②$$

① − ② より　$(\alpha^2-\beta^2)x-(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha-\beta)=0$

したがって　$(\alpha+\beta)x=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1$

$$kx=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+1$$
$$kx=k^2-1+1$$
$$x=k$$

これを ①，② に代入して，辺々を加えると

$$\begin{aligned}2y&=(\alpha^2+\beta^2)k-(\alpha^3+\beta^3)+\alpha+\beta\\&=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}k-(\alpha+\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+k\\&=(k^2-2)k-k^3+3\cdot1\cdot k+k=2k\end{aligned}$$

したがって，求める円の中心は　$\boldsymbol{(k,\ k)}$

また，点 $(k,\ k)$ と点 $(\alpha,\ \beta)$ の距離を r とすると $\left(\beta=\dfrac{1}{\alpha}\right)$

$$\begin{aligned}r^2&=(\alpha-k)^2+(\beta-k)^2\\&=\alpha^2+\beta^2-2k(\alpha+\beta)+2k^2\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2k\cdot k+2k^2\\&=k^2-2\end{aligned}$$

よって，求める円の半径は　$\boldsymbol{\sqrt{k^2-2}}$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\left(-x+k-\frac{1}{x}\right)dx\\&=\left[-\frac{1}{2}x^2+kx-\log x\right]_\alpha^\beta\\&=-\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+k(\beta-\alpha)-\log\frac{\beta}{\alpha}\\&=\left\{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+k\right\}(\beta-\alpha)-\log\frac{\beta^2}{\alpha\beta}\\&=\frac{k}{2}\sqrt{k^2-4}-2\log\beta\end{aligned}$$

ここで　$\beta=\dfrac{(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)}{2}=\dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$

よって　$S=\boldsymbol{\dfrac{k}{2}\sqrt{k^2-4}-2\log\dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}}$

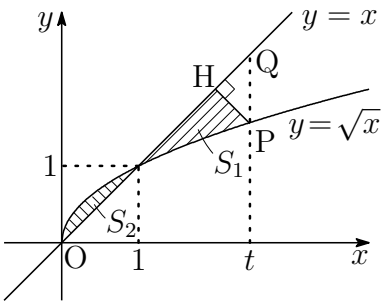
7.10 (1) 直線 PH は，点 $P(t,\ \sqrt{t})$ を通り，直線 $y=x\cdots①$ に垂直な直線であるから

$$y-\sqrt{t}=-1(x-t)$$

すなわち　$y=-x+t+\sqrt{t}\quad\cdots②$

H の座標は ①，② を解いて

$$\left(\frac{\boldsymbol{t+\sqrt{t}}}{\boldsymbol{2}},\ \frac{\boldsymbol{t+\sqrt{t}}}{\boldsymbol{2}}\right)$$



(2) $Q(t,\ t)$ をとると

$$\triangle PQH=\frac{1}{2}PH^2=\frac{1}{2}\left(\frac{PQ}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}(t^2-2t\sqrt{t}+t)$$

よって，求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1&=\int_1^t(x-\sqrt{x})\,dx-\triangle PQH\\&=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^t-\frac{1}{4}(t^2-2t\sqrt{t}+t)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{6}t\sqrt{t}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

(3)　$$S_2=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

$S_1=S_2$ のとき，上式および (2) の結果より

$$\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{6}t\sqrt{t}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\quad\text{ゆえに}\quad t\{3(\sqrt{t}\,)^2-2\sqrt{t}-3\}=0$$

$t>1$ に注意して　　$\sqrt{t}=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

よって　　$t=\left(\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}}$

7.11 (1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ を微分すると　$y'=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

C の $x=a$ における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{a^2-1}=\frac{2a}{(a^2-1)^2}(x-a)$$

すなわち　　$y=-\dfrac{2a}{(a^2-1)^2}x+\dfrac{3a^2-1}{(a^2-1)^2}$

これが $y=px+q$ を表すので

$$\boldsymbol{p=-\frac{2a}{(a^2-1)^2},\ q=\frac{3a^2-1}{(a^2-1)^2}}$$

(2) $(px+q)(x^2-1)-1=0$ とすると，3 次方程式 $px^3+qx^2-px-q-1=0$ の解が a，a，k であるから，解と係数の関係により

$$a+a+k=-\frac{q}{p},\quad aa+ak+ka=\frac{-p}{p},\quad aak=-\frac{-q-1}{p}\quad \cdots(*)$$

$a>0$ であるから，$(*)$ の第 2 式により　　$\boldsymbol{k=-\frac{a^2+1}{2a}}$

k は，(1) の結果から，$(*)$ の第 1 式および第 3 式を満たしている．

したがって　　$(px+q)(x^2-1)-1=p(x-a)^2\left(x+\dfrac{a^2+1}{2a}\right)$

$x\neq 1$ のとき　　$px+q-\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{p(x-a)^2}{x^2-1}\left(x+\dfrac{a^2+1}{2a}\right)$

$a>0$ より，(1) の結果から $p<0$ であるから，$x>1$ のとき，上式より

$$px+q-\frac{1}{x^2-1}\leqq 0\quad \text{ゆえに}\quad \frac{1}{x^2-1}\geqq px+q$$

補足 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ とすると，l の方程式から　$px+q=f'(a)(x-a)+f(a)$

また，$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)-f(x)$，$h(x)=(x^2-1)g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}&h(x)=(px+q)(x^2-1)-1,\\&g'(x)=f'(a)-f'(x),\quad h'(x)=2xg(x)+(x^2-1)g'(x)\end{aligned}$$

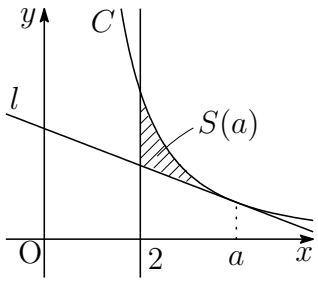
$g(a)=0$，$g'(a)=0$ であるから　　$h(a)=0$，$h'(a)=0$

3 次式 $h(x)$ は $(x-a)^2$ を因数にもつから，最高次の係数に注意して

$$h(x)=(px+q)(x^2-1)-1=p(x-a)^2(x-k)\quad (k\text{ は定数})$$

の形に因数分解できる．

(3) $S(a)$ は，右の図から



$$\begin{aligned} S(a) &= \int_2^a \left\{ \frac{1}{x^2-1} - (px+q) \right\} dx \\ &= \int_2^a \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) - (px+q) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1} - \frac{p}{2}x^2 - qx \right]_2^a \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{3(a-1)}{a+1} + p\left(2 - \frac{a^2}{2}\right) + q(2-a) \end{aligned}$$

ここで，(1) の結果から

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}\log\frac{3(a-1)}{a+1} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}\log\frac{3\left(1-\frac{1}{a}\right)}{1+\frac{1}{a}} = \frac{1}{2}\log 3,$$

$$\lim_{a\to\infty} p\left(2-\frac{a^2}{2}\right) = \lim_{a\to\infty} \frac{-2a\left(2-\frac{a^2}{2}\right)}{(a^2-1)^2} = 0,$$

$$\lim_{a\to\infty} q(2-a) = \lim_{a\to\infty} \frac{(2-a)(3a^2-1)}{(a^2-1)^2} = 0$$

よって　　$\boldsymbol{\lim_{a\to\infty} S(a) = \frac{1}{2}\log 3}$

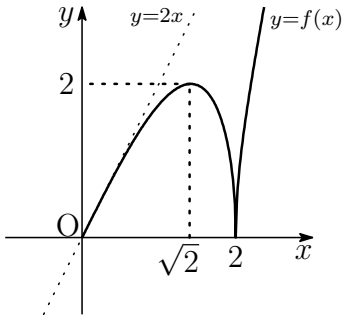
7.12　(1)　$f(x) = x\sqrt{|4-x^2|}$　$(x \geqq 0)$

$$= \begin{cases} x\sqrt{4-x^2} & (0 \leqq x \leqq 2) \\ x\sqrt{x^2-4} & (x \geqq 2) \end{cases}$$

(i)　$0 < x < 2$ のとき　$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

(ii)　$x > 2$ のとき　$f'(x) = \sqrt{x^2-4} + x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{2(x^2-2)}{\sqrt{x^2-4}}$

(i)，(ii) より，$f(x)$ の増減表およびグラフの概形は次のようになる．



x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−		+
$f(x)$	0	↗	2	↘	0	↗

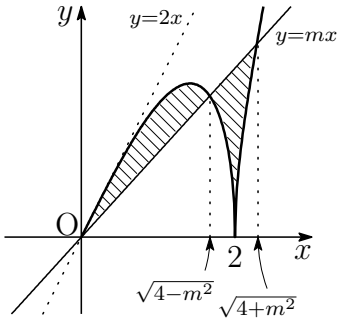
また　$\lim_{x\to+0} f'(x) = 2$

$\lim_{x\to2-0} f'(x) = -\infty$，　$\lim_{x\to2+0} f'(x) = \infty$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-4)^{\frac{1}{2}}(x^2-4)'\,dx$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{2}} + C} \quad (\boldsymbol{C} \text{ は積分定数})$$

(3) C と直線 $y=mx$ の共有点の x 座標は



(i) $0 \leqq x \leqq 2$ のとき　$x\sqrt{4-x^2} = mx$

これを解いて　$x = 0,\ \sqrt{4-m^2}$

(ii) $x \geqq 2$ のとき　$x\sqrt{x^2-4} = mx$

これを解いて　$x = \sqrt{4+m^2}$

したがって，$mx - x\sqrt{4-x^2}$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

とおくと，求める面積 $S(m)$ は

$$S(m) = -\Big[\ F(x)\ \Big]_0^{\sqrt{4-m^2}} + \Big[\ F(x)\ \Big]_{\sqrt{4-m^2}}^{2} + \int_2^{\sqrt{4+m^2}} (mx - x\sqrt{x^2-4})\,dx$$

$$= F(0) + F(2) - 2F(\sqrt{4-m^2}) + \left[\ \frac{m}{2}x^2 - \frac{1}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{2}}\ \right]_2^{\sqrt{4+m^2}}$$

$$= \frac{8}{3} + 2m - 2\left(-\frac{1}{6}m^2 + 2m\right) + \frac{1}{6}m^3 = \boldsymbol{\frac{1}{2}m^3 - 2m + \frac{8}{3}}$$

(4) $S(m)$ を微分すると　$S'(m) = \dfrac{3}{2}m^2 - 2$

したがって，$S(m)$ の増減表は $(0 \leqq m \leqq 2)$

m	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$S'(m)$		$-$	0	$+$	
$S(m)$		↘	極小	↗	

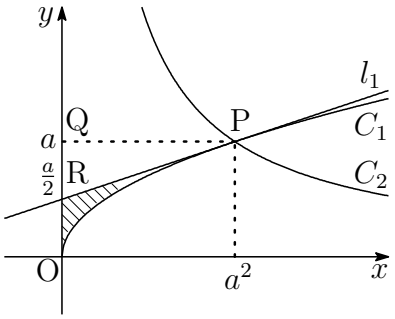
よって　最小値 $S\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{8(3-\sqrt{3})}{9}}$

7.13 (1) C_1 と C_2 の交点 P の x 座標は

$$\sqrt{x} = \frac{a^3}{x} \quad \text{これを解いて} \quad x = a^2$$

ゆえに，点 P の座標は　　$(a^2,\ a)$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より，l_1 の方程式は



$$y - a = \frac{1}{2a}(x - a^2) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{2a} + \frac{a}{2}$$

求める斜線部分の面積は，$C_1 : x = y^2\ (y \geqq 0)$ であることを用いて

$$\int_0^a x\,dy - \triangle \mathrm{PQR} = \int_0^a y^2\,dy - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^2 = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^a - \frac{a^3}{4} = \boldsymbol{\frac{a^3}{12}}$$

(2) C_2 の P における接線を l_2 とする．$\left(\dfrac{a^3}{x}\right)' = -\dfrac{a^3}{x^2}$ より，l_2 の傾きは　$-\dfrac{1}{a}$

$a > 1$ より，$-1 < -\dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{2a} < 1$ であるから，l_1，l_2 の傾きについて

$$\tan\alpha = \frac{1}{2a}, \quad \tan\beta = -\frac{1}{a} \quad \left(-\frac{\pi}{4} < \beta < 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 < \alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta(a) = \alpha - \beta$

$$\tan\theta(a) = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2a} - \left(-\frac{1}{a}\right)}{1 + \frac{1}{2a}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)} = \frac{\frac{3}{2a}}{1 - \frac{1}{2a^2}}$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\tan\theta(a) = \lim_{a\to\infty}\frac{\frac{3}{2a}}{1 - \frac{1}{2a^2}} = 0$　すなわち　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\theta(a) = 0$

したがって，上の諸式により

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a) &= \lim_{a\to\infty} a\tan\theta(a)\cos\theta(a) \\ &= \lim_{a\to\infty}\frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2a^2}}\cos\theta(a) = \frac{3}{2}\cos 0 = \boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

7.14 (1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ を微分すると　$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$f'(x) = 0$ の解を $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{7}}{3}$，$x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3}$ とおく．

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで，$f(x)$ を $f'(x)$ で割ることにより

$$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}\right)-\frac{14}{9}x+\frac{16}{9}$$

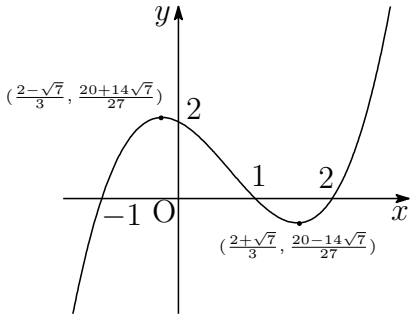
したがって

$$f(x_1)=-\frac{14}{9}x_1+\frac{16}{9}=-\frac{14}{9}\times\frac{2-\sqrt{7}}{3}+\frac{16}{9}=\frac{20+14\sqrt{7}}{27}$$
$$f(x_2)=-\frac{14}{9}x_2+\frac{16}{9}=-\frac{14}{9}\times\frac{2+\sqrt{7}}{3}+\frac{16}{9}=\frac{20-14\sqrt{7}}{27}$$

極値およびグラフの概形は次のようになる．

極大値 $f\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}}$

極小値 $f\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{20-14\sqrt{7}}{27}}$



(2) $y=f(x)$ と $y=m(x-1)$ の共有点の x 座標は

$$x^3-2x^2-x+2=m(x-1)\quad\text{ゆえに}\quad(x-1)\{x^2-x-(m+2)\}=0$$

2 次方程式 $x^2-x-(m+2)=0\cdots$① の判別式を D とすると

$$D=1+4(m+2)=4m+9$$

よって　$\boldsymbol{m>-\dfrac{9}{4}}$**のとき**　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{4m+9}}{2}}$

$\boldsymbol{m=-\dfrac{9}{4}}$**のとき**　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{1}{2}}$

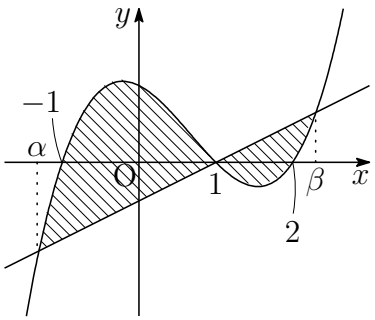
$\boldsymbol{m<-\dfrac{9}{4}}$**のとき**　$\boldsymbol{x=1}$

(3) $m>0$ のとき，(2) の結果から，α，β は 2 次方程式 ① の解である．
したがって，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-(m+2)}$$

(4) $g(x)=f(x)-m(x-1)$ とおくと

$$g(x)=x^3-2x^2-(m+1)x+m+2$$



また，$g(x)$ の原始関数の 1 つを

$$G(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+(m+2)x$$

とおくと

$$\begin{aligned}S(m)&=\int_{\alpha}^{1}g(x)\,dx-\int_{1}^{\beta}g(x)\,dx=\Big[\,G(x)\,\Big]_{\alpha}^{1}-\Big[\,G(x)\,\Big]_{1}^{\beta}\\&=2G(1)-\{G(\alpha)+G(\beta)\}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

このとき　$G(1)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}(m+1)+m+2=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{13}{12}\quad\cdots②$

$$\begin{aligned}G(\alpha)+G(\beta)=&\frac{1}{4}(\alpha^4+\beta^4)-\frac{2}{3}(\alpha^3+\beta^3)-\frac{1}{2}(m+1)(\alpha^2+\beta^2)\\&+(m+2)(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

ここで，(3) の結果より

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1+2(m+2)=2m+5,\\\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=1(2m+5)+(m+2)\cdot1=3m+7,\\\alpha^4+\beta^4&=(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)\\&=1(3m+7)+(m+2)(2m+5)=2m^2+12m+17\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}G(\alpha)+G(\beta)=&\frac{1}{4}(2m^2+12m+17)-\frac{2}{3}(3m+7)\\&-\frac{1}{2}(m+1)(2m+5)+(m+2)\cdot1\\=&-\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-\frac{11}{12}\quad\cdots③\end{aligned}$$

②，③ を $(*)$ に代入すると　　$\boldsymbol{S(m)=\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{5}{2}m+\dfrac{37}{12}}$

7.15　(1) 3 次関数のグラフは，変曲点に関して対称であるから，C と C の変曲点を通る直線で囲まれる 2 つの部分の面積は等しい．

C の変曲点を P とすると，P を通り x 軸に平行な直線で囲まれる部分の面積は等しいから，条件より P の座標は $(4,\ 0)$ である．

$y=(x-a)(x-4)(x-b)$ より

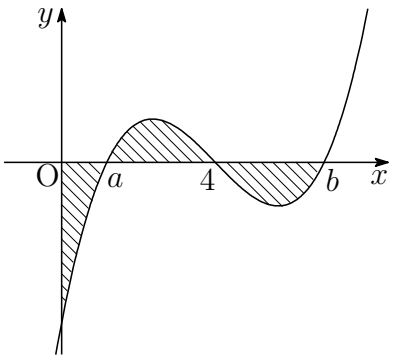
$$y''=6x-2(a+b+4)$$

$x=4$ のとき，$y''=0$ であるから

$$6\cdot 4-2(a+b+4)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a+b=8}$$

(2) (1) の結果より

$$\begin{aligned}&(x-a)(x-4)(x-b)\\ =&x^3-(a+b+4)x^2+(ab+4a+4b)x-4ab\\ =&x^3-12x^2+(ab+32)x-4ab\end{aligned}$$



条件から $\displaystyle\int_0^4 (x-a)(x-4)(x-b)\,dx=0$

上式の左辺は

$$\begin{aligned}\int_0^4 (x-a)(x-4)(x-b)\,dx&=\int_0^4 \{x^3-12x^2+(ab+32)x-4ab\}\,dx\\ &=\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+\frac{1}{2}(ab+32)x^2-4abx\right]_0^4\\ &=4^3-4^4+8(ab+32)-16ab\\ &=-8ab+64\end{aligned}$$

したがって $-8ab+64=0$ ゆえに $ab=8$

これと (1) の結果から，a，b は 2 次方程式 $t^2-8t+8=0$ の解である．

$a<b$ に注意して $\boldsymbol{a=4-2\sqrt{2},\ b=4+2\sqrt{2}}$

7.16 (1) C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，条件により

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x|=2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2-|x| \quad \cdots ①$$

① の両辺を平方して整理すると

$$y^2=2x-4|x|+3$$

上の方程式で x のとりうる値の範囲は

$$2x-4|x|+3\geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 4|x|\leqq 2x+3$$

ゆえに　　$-(2x+3) \leqq 4x \leqq 2x+3$

① の $2-|x| \geqq 0$ に注意して　$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$

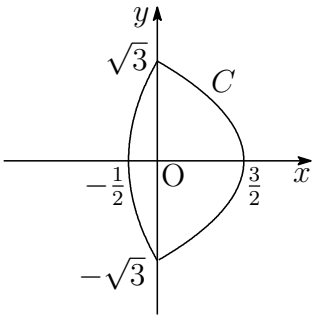
したがって　　$C : y^2 = 2x - 4|x| + 3$

C は　$x \geqq 0$ のとき　$y^2 = -2x+3$　すなわち　$x = -\dfrac{1}{2}(y^2-3)$,

　　$x < 0$ のとき　$y^2 = 6x+3$　　すなわち　$x = \dfrac{1}{6}(y^2-3)$

C の表す図形は右の図の曲線 (閉曲線) で，求める面積を S とすると

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{ -\frac{1}{2}(y^2-3) - \frac{1}{6}(y^2-3) \right\} dy$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{3}} (3-y^2)\, dy$$
$$= \frac{4}{3}\left[3y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{8}{3}\sqrt{3}}$$



(2) 円 $x^2+y^2 = a$ と $C : y^2 = 2x - 4|x| + 3$ の交点は $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ の範囲にあり，2 式から y^2 を消去すると

$$x^2 + 2x - 4|x| + 3 = a \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right) \quad \cdots (*)$$

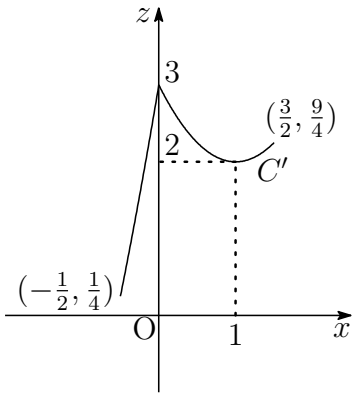
方程式 $(*)$ の実数解は，xz 平面上の曲線

$$C' : z = x^2 + 2x - 4|x| + 3 \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right)$$

と直線 $z = a$ の交点の x 座標である．

C' は　$-\frac{1}{2} \leqq x < 0$ のとき　$z = (x+3)^2 - 6$

　　$0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ のとき　　$z = (x-1)^2 + 2$



円と C はともに x 軸に関して対称であるから，方程式 $(*)$ の実数解について，$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ にある解 1 個に対して交点は 2 個あり，$x = -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$ に対

して交点は 1 個である．よって，求める交点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < \frac{1}{4}} \text{ のとき} & \boldsymbol{0} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a = \frac{1}{4}} \text{ のとき} & \boldsymbol{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{\frac{1}{4} < a < 2} \text{ のとき} & \boldsymbol{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a = 2} \text{ のとき} & \boldsymbol{4} \text{ 個} \\ \boldsymbol{2 < a < \frac{9}{4}} \text{ のとき} & \boldsymbol{6} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a = \frac{9}{4}} \text{ のとき} & \boldsymbol{5} \text{ 個} \\ \boldsymbol{\frac{9}{4} < a < 3} \text{ のとき} & \boldsymbol{4} \text{ 個} \\ \boldsymbol{a = 3} \text{ のとき} & \boldsymbol{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{3 < a} \text{ のとき} & \boldsymbol{0} \text{ 個} \end{cases}$$

7.17 (1) 加法定理により $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \end{aligned}$$

$t = \cos\theta$ とおくと $x = 2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1) = 4t^2 - 2$

$y = 2\cos 3\theta = 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = 8t^3 - 6t$

したがって $t^2 = \dfrac{x+2}{4}$

(i) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$t \geqq 0$ より $t = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

$$y = 2t(4t^2 - 3) = 2 \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{2}\left(4 \cdot \frac{x+2}{4} - 3\right) = \boldsymbol{(x-1)\sqrt{x+2}}$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$t \leqq 0$ より $t = -\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

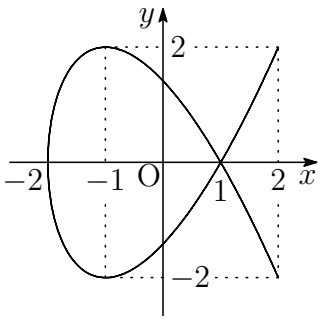
$$y = 2t(4t^2 - 3) = 2\left(-\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right)\left(4 \cdot \frac{x+2}{4} - 3\right) = \boldsymbol{-(x-1)\sqrt{x+2}}$$

(2) $f(x) = (x-1)\sqrt{x+2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ とおくと

$$f'(x) = \sqrt{x+2} + (x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2



$y=f(x)$ と $y=-f(x)$ を合わせたものが C の表す図形であり，これらは，x 軸に関して対称であるから，その概形は右の図のようになる．

(3) 求める面積を S とすると，(2) の結果から

$$\frac{S}{2}=\int_{-2}^{1}\{-(x-1)\sqrt{x+2}\}\,dx=\int_{-2}^{1}\{-(x+2)^{\frac{3}{2}}+3(x+2)^{\frac{1}{2}}\}\,dx$$
$$\left[-\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}+2(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{1}=\frac{12\sqrt{3}}{5}$$

よって　　$S=\boldsymbol{\dfrac{24\sqrt{3}}{5}}$

7.18 (1) $C_1:\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\ (y\geqq 0)$，$C_2:\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1\ (x>0)$

上の 2 式を連立して解くと　$x^2=\dfrac{27}{4}$，$y^2=\dfrac{1}{4}$

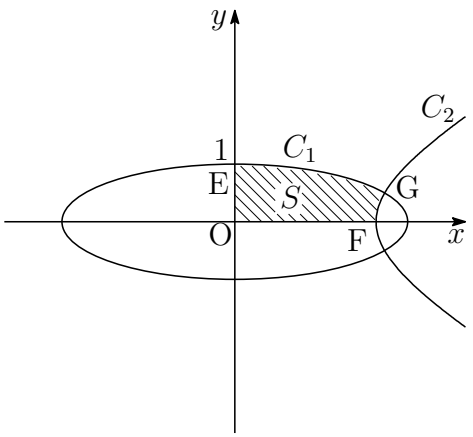
$x>0,\ y\geqq 0$ に注意して　$\mathrm{G}\left(\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}\right)$

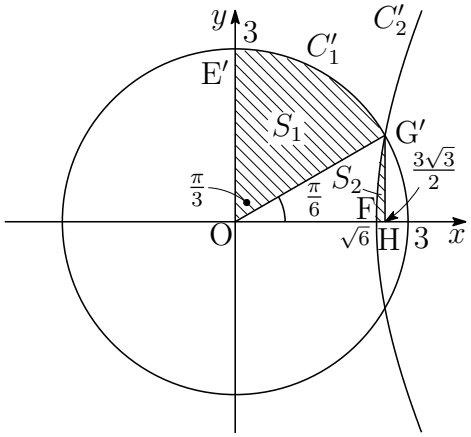
(2) $f(x)=x\sqrt{x^2-6}-6\log|x+\sqrt{x^2-6}|$ より

$$f'(x)=\sqrt{x^2-6}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-6}}-6\cdot\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-6}}}{x+\sqrt{x^2-6}}$$
$$=\sqrt{x^2-6}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-6}}-\frac{6}{\sqrt{x^2-6}}=\boldsymbol{2\sqrt{x^2-6}}$$

(3) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ において C_1，C_2 を x 軸を元に y 軸方向に 3 倍に拡大したものをそれぞれ C_1'，C_2' とすると

$$C_1':\frac{x^2}{9}+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1\quad\text{すなわち}\quad x^2+y^2=9\ (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$$
$$C_2':\frac{x^2}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2=1\quad\text{すなわち}\quad y=\sqrt{3}\sqrt{x^2-6}\ (x\geqq 0)$$





このとき，G の移る点を $\mathrm{G}'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ とすると，OG′ の偏角は $\dfrac{\pi}{6}$

上の図の斜線部分の面積を S_1，S_2 とすると　$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}\pi$

$$S_2 = \sqrt{3}\int_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \sqrt{x^2-6}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} f'(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\ f(x)\ \Big]_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\ x\sqrt{x^2-6} - 6\log|x+\sqrt{x^2-6}|\ \Big]_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} - 3\log 2\right)$$

G′ から x 軸に垂線 G′H を引くと　$\triangle \mathrm{OG'H} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

したがって　$3S = S_1 + \triangle \mathrm{OG'H} - S_2$

$$= \frac{3}{2}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} - 3\log 2\right)$$

$$= 3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 2\right)$$

よって　$\boldsymbol{S = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\log 2}$

7.19　(1)　$y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

放物線上の点 $(t,\ t^2)$ における法線の方程式は

$$1(x-t) + 2t(y-t^2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x + 2ty = t + 2t^3 \quad \cdots ①$$

$s \neq t$ とする．放物線上の点 $(s,\ s^2)$ における法線の方程式は

$$x + 2sy = s + 2s^3 \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$2(s-t)y = s - t + 2(s^3 - t^3) \quad \text{ゆえに} \quad y = s^2 + st + t^2 + \frac{1}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x + 2t\left(s^2 + st + t^2 + \frac{1}{2}\right) = t + 2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad x = -2st(s+t)$$

2 直線 ①，② の交点の座標は $\left(-2st(s+t),\ s^2 + st + t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$

この点を $s \longrightarrow t$ とした極限の点が $(u(t),\ v(t))$ であるから

$$u(t) = \lim_{s \to t}\{-2st(s+t)\} = \boldsymbol{-4t^3}$$
$$v(t) = \lim_{s \to t}\left(s^2 + st + t^2 + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{3t^2 + \frac{1}{2}}$$

(2) $\mathrm{Q}(t)$ が放物線 $y = x^2$ 上にあるから

$$3t^2 + \frac{1}{2} = (-4t^3)^2 \quad \text{整理すると} \quad 32t^6 - 6t^2 - 1 = 0$$

ゆえに $(2t^2 - 1)(4t^2 + 1)^2 = 0$ $t \geqq 0$ に注意して $\boldsymbol{t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

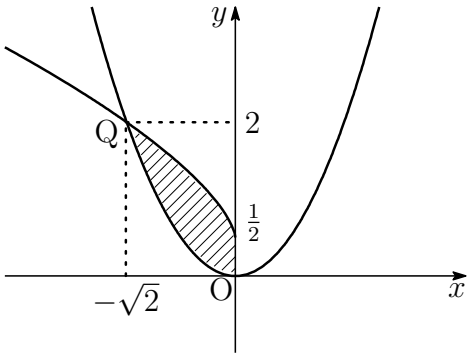
よって $\mathbf{Q(-\sqrt{2},\ 2)}$

(3) (1) の結果から $x = -4t^3$，$y = 3t^2 + \dfrac{1}{2}$

ゆえに $2x = (-2t)^3$，$y = \dfrac{3}{4}(-2t)^2 + \dfrac{1}{2}$

上の 2 式から t を消去すると $y = \dfrac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{1}{2}$

求める面積は，下の図の斜線部分である．



この面積を S とすると

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \left(\frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} - x^2 \right) dx$$
$$= \left[\frac{9x(2x)^{\frac{2}{3}}}{20} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{0} = \boldsymbol{\frac{11}{15}\sqrt{2}}$$

解説 曲線 $y = \dfrac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{1}{2}$ を放物線 $y = x^2$ の法線群の包絡線という.

7.20 (1) $y = \dfrac{x^2}{2}$ を微分すると　$y' = x$

点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線の方向ベクトルは $(1,\ a)$ であるから，A における法線の方程式は

$$1(x-a) + a\left(y - \frac{a^2}{2}\right) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x + ay = a + \frac{a^3}{2} \qquad \cdots ①$$

同様にして $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の方程式は　$x + by = b + \dfrac{b^3}{2}$　$\cdots ②$

①，② から x を消去すると

$$(b-a)y = b - a + \frac{b^3 - a^3}{2} \quad b \neq a \text{ より} \quad y = 1 + \frac{a^2 + ab + b^2}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x + a\left(1 + \frac{a^2 + ab + b^2}{2}\right) = a + \frac{a^3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x = -\frac{ab(a+b)}{2}$$

したがって，R の座標は　$\left(-\dfrac{ab(a+b)}{2},\ 1 + \dfrac{a^2 + ab + b^2}{2}\right)$

よって，$b \to a$ による R の極限の点 A の座標は　$\boldsymbol{\left(-a^3,\ 1 + \frac{3}{2}a^2\right)}$

(2) (1) の結果から

$$x = -a^3,\ \ y = 1 + \frac{3}{2}a^2$$

とおくと，第 1 式から　$a = -x^{\frac{1}{3}}$

これを第 2 式に代入すると　$y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

上式が C_2 の方程式であり，C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{2} = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 3x^{\frac{2}{3}} - 2 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}} = t \cdots ③$ とおくと　$x = t^3 \cdots ③'$

$$t^6 - 3t^2 - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t^2+1)^2(t^2-2) = 0$$

したがって　$t = \pm\sqrt{2}$　　③′ より　$x = \pm 2\sqrt{2}$

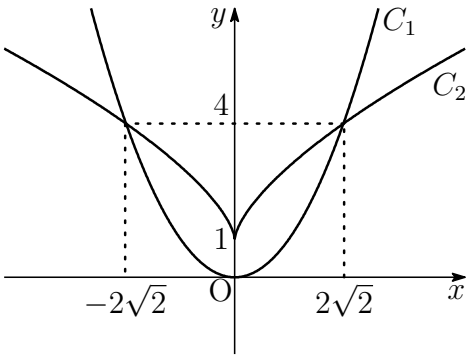
これを C_1 の方程式に代入して　$y = 4$

よって，C_1 と C_2 の交点の座標は　　$\mathbf{(\pm 2\sqrt{2},\ 4)}$

$C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ について　$y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，$y'' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

ゆえに　$y'' < 0$　したがって　C_2 は上に凸の曲線である．

したがって，C_1，C_2 の概形は，次のようになる．



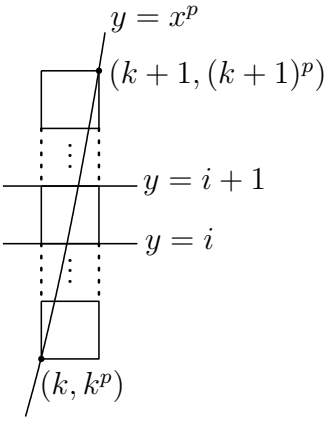
(3) C_1，C_2 は y 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left\{ \left(1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{x^2}{2} \right\} dx$$

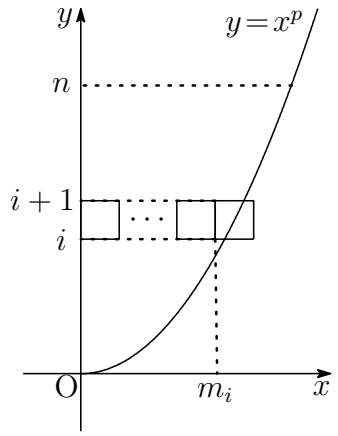
$$= 2\left[x + \frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{6} \right]_0^{2\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{88\sqrt{2}}{15}}$$

7.21　(1) 右の図は，$k \leqq x \leqq k+1$ において，$y = x^p$ と交わる単位正方形を図示したものである．$y = x^p$ は単調増加であり，$x = k$ および $x = k+1$ において格子点を通る．
ゆえに，$i \leqq y \leqq i+1$ で $y = x^p$ と交わる単位正方形は 1 個である $(k^p \leqq i < (k+1)^p)$．
したがって，$0 \leqq y \leqq n$ で $y = x^p$ と交わる単位正方形の個数は

$$n \text{ (個)}$$



(2) 右の図のように $y=x^p$ と y 軸，直線 $y=i$，$y=i+1$ で囲まれた領域の面積を S_i，この領域内の単位正方形の個数を m_i とすると $(0 \leqq i \leqq n-1)$



$$m_i < S_i < m_i + 1$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} m_i < \sum_{i=0}^{n-1} S_i < \sum_{i=0}^{n-1} (m_i+1)$

よって $\quad M_n < S_n < M_n + n \quad \cdots ①$

また $\quad \displaystyle S_n = \int_0^n x\,dy = \int_0^n y^{\frac{1}{p}}\,dy = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p+1}} \boldsymbol{n}^{\frac{\boldsymbol{p+1}}{\boldsymbol{p}}}$

(3) 直線 $y=i$ $(i=0,1,\cdots n-1)$ 上にある格子点は，次の m_i+1 個である．

$$(0,\ i),\ (1,\ i),\ (2,\ i),\ \cdots,\ (m_i,\ i)$$

また，直線 $y=n$ 上にある格子点は，次の $[n^{\frac{1}{p}}]+1$ 個である．

$$(0,\ n),\ (1,\ n),\ (2,\ n),\ \cdots,\ ([n^{\frac{1}{p}}],\ n)$$

したがって，D_n 内にある格子点の個数 L_n は

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} (m_i+1) + ([n^{\frac{1}{p}}]+1) = M_n + n + [n^{\frac{1}{p}}] + 1$$

$n^{\frac{1}{p}} - 1 < [n^{\frac{1}{p}}] \leqq n^{\frac{1}{p}}$ であるから

$$M_n + n + n^{\frac{1}{p}} < L_n \leqq M_n + n + n^{\frac{1}{p}} + 1 \quad \cdots ②$$

①，② より $\quad S_n + n^{\frac{1}{p}} < L_n < S_n + n + n^{\frac{1}{p}} + 1$

これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} < L_n < \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n + n^{\frac{1}{p}} + 1$$

したがって

$$\frac{p}{p+1} + n^{-1} < n^{-\frac{p+1}{p}} L_n < \frac{p}{p+1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-1} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{p+1} + n^{-1} \right) = \frac{p}{p+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{p+1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-1} + n^{-\frac{p+1}{p}} \right) = \frac{p}{p+1}$$

よって，はさみうちの原理により　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}}$

別解　領域 D_n の直線 $y=i$ $(0 \leqq i \leqq n)$ 上にある格子点の個数は　$[i^{\frac{1}{p}}]+1$ (個)

したがって　　$L_n = \sum_{i=0}^{n}([i^{\frac{1}{p}}]+1)$

$i^{\frac{1}{p}} - 1 < [i^{\frac{1}{p}}] \leqq i^{\frac{1}{p}}$ であるから

$$\sum_{i=0}^{n} i^{\frac{1}{p}} < L_n \leqq \sum_{i=0}^{n}(i^{\frac{1}{p}}+1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{p}} < n^{-\frac{p+1}{p}} L_n \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{p}} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

ここで　　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = \int_0^1 x^{\frac{1}{p}}\,dx = \frac{p}{p+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}\right) = 0$$

よって，はさみうちの原理により　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}}$

7.22　(1)　$f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \\ &= 4\cos^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4\cos^4 x - 1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(2\cos^2 x + 1)(2\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3}$	↗	極大 $\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi$

よって　　$x = \frac{\pi}{4}$ のとき**最大値** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

$x = -\frac{\pi}{6}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3}}$

(2) $f(0)=0$ および $f(x)$ の増減から

$$-\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq 0 \text{ のとき } f(x) \leqq 0, \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3} \text{のとき } f(x) \geqq 0$$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \sin^2 x + \log|\cos x| + x^2$$

とし，求める面積の和を S とすると

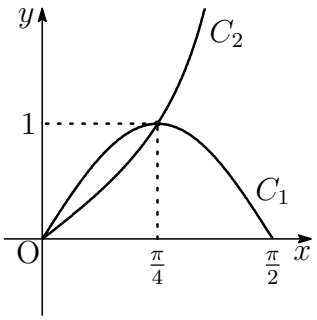
$$\begin{aligned} S &= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx \\ &= -\Big[\, F(x) \,\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} + \Big[\, F(x) \,\Big]_{0}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= F\left(-\frac{\pi}{6}\right) + F\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2F(0) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \log\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{36}\right) + \left(\frac{3}{4} + \log\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{9}\right) - 2\times 0 \\ &= \mathbf{1 + \frac{5}{36}\pi^2 + \log\frac{\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

7.23 (1) $\sin 2x = \tan x$ より

$$2\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より　$\sin x = 0$，$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$\boldsymbol{x = 0,\ \frac{\pi}{4}}$



(2) C_1 と C_2 の概形は右の図のようになる．

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \tan x)\,dx \\ &= \left[\, -\frac{1}{2}\cos 2x + \log\cos x \,\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2} \end{aligned}$$

7.24 (1) $\sin^2 x - \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x) - \dfrac{1}{2}\left\{1-2\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x\right\}$$

$$= -\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots(*)$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $\quad \dfrac{\pi}{3} \leqq 2x+\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{7}{3}\pi$

したがって，方程式 $\sin^2 x = \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ の解は，$(*)$ より

$$2x+\frac{\pi}{3} = \pi,\ 2\pi \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}}$$

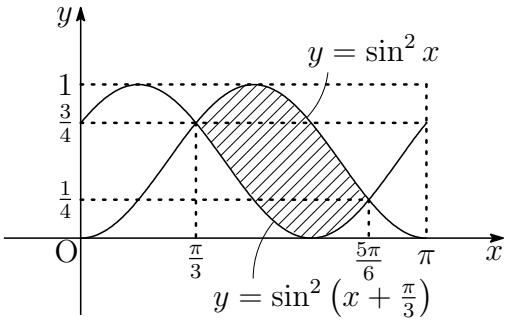
(2) (1) の結果から，$\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ において，

$(*)$ により $\quad \sin^2 x \geqq \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

したがって，求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx$$

$$= \left[\ \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



補足 2 曲線 $y = \sin^2 x$，$y = \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ および 2 直線 $x = 0$，$x = \pi$ で囲まれた部分の面積を T とし，$(*)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

とすると

$$T = -\left[\ F(x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\ F(x)\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi} - \left[\ F(x)\ \right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}$$

$$= 2F\left(\frac{5}{6}\pi\right) - 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) + F(0) - F(\pi)$$

ここで，$F\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = -F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，$F(0) = F(\pi)$ であるから

$$T = 4F\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 4\times\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

7.25 (1) $y = f(x) = \sin x$ とおくと

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2} \\ &= 1\cdot\cos x = \boldsymbol{\cos x} \end{aligned}$$

(2) $y = \sin^2 x$ より

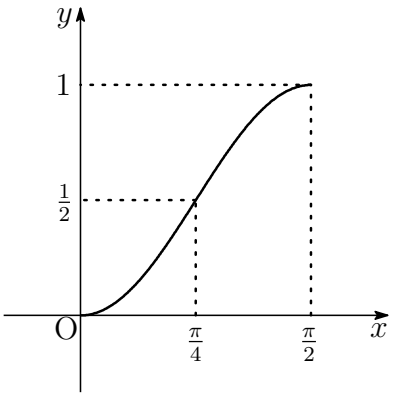
$$y' = 2\sin x\cos x = \boldsymbol{\sin 2x}, \quad y'' = \boldsymbol{2\cos 2x}$$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における増減・凹凸は次のようなる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'	0	$+$	$+$	$+$	0
y''		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{1}{2}$	↱	1

よって，変曲点は $\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}, \boldsymbol{\frac{1}{2}}\right)$

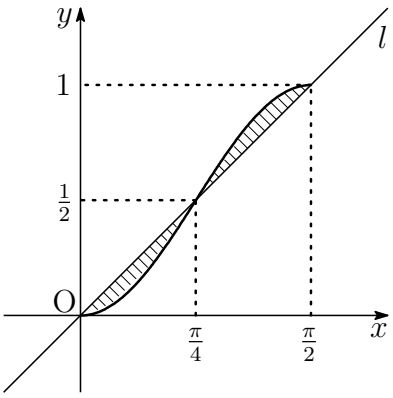
グラフの概形は，右のようになる．



(4) l の傾きは $\dfrac{1}{2} \div \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2}{\pi}$

ゆえに，l の方程式は $y = \dfrac{2}{\pi}x$

求める面積は，右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2}{\pi}x - \sin^2 x\right)dx \\ &\qquad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x - \frac{2}{\pi}x\right)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{\pi} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &\qquad \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x^2}{\pi}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{4-\pi}{8}} \end{aligned}$$

7.26 (1) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\,dt = \int_0^x (t-x)(\cos t)'\,dt$

$$= \Big[\,(t-x)\cos t\,\Big]_0^x - \int_0^x \cos t\,dt$$

$$= x - \Big[\,\sin t\,\Big]_0^x = x - \sin x$$

上式を $f(x) = -x + 2\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$ に代入すると

$$f(x) = -x + 2(x - \sin x) = \boldsymbol{x - 2\sin x}$$

(2) (1) の結果から　$f'(x) = 1 - 2\cos x$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	極小	↗	極大	↘	2π

よって　$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$**のとき**　**極小値** $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}}$

$\boldsymbol{x = \frac{5}{3}\pi}$**のとき**　**極大値** $\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}}$

(3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ より，法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$

したがって，P における C の法線の方程式は

$$y - \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -x + \pi - 2}$$

$h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと

$$h(x) = -x + \pi - 2 - (x - 2\sin x)$$

$$= 2\sin x - 2x + \pi - 2$$

$$h'(x) = 2\cos x - 2 = -2(1 - \cos x)$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$h'(x) \leqq 0$ であるから，$h(x)$ は単調減少.

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \pi + \pi - 2 = 0$$

したがって　$h(x) \geqq h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$　よって　$f(x) \leqq g(x)$

(4) (3) の結果から，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 2x + \pi - 2)\,dx$$
$$= \left[-2\cos x - x^2 + (\pi - 2)x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4} - \pi + 2}$$

7.27 (1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ より　$f'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2x$

したがって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	$\sqrt{3}\pi$

よって　極大値 $f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} + \dfrac{3}{4}}$，$f\left(\dfrac{5}{3}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\pi + \dfrac{3}{4}}$

極小値 $f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\pi + \dfrac{1}{4}}$，$f\left(\dfrac{11}{6}\pi\right) = \boldsymbol{\dfrac{11\sqrt{3}}{12}\pi + \dfrac{1}{4}}$

(2) $g(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + a\right) - f(x)$ とおくと

$$g(x) = a - \sin^2 x, \quad g'(x) = -2\sin x \cos x$$

l と C の接点の x 座標を t とすると，$g(t) = 0$，$g'(t) = 0$ であるから

$$a - \sin^2 t = 0, \quad -2\sin t \cos t = 0$$

$a > 0$ より，$\sin t \neq 0$ であるから　$\cos t = 0$

したがって　$t = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$　ゆえに　$\boldsymbol{a = 1}$

接点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} + 1\right)}$，$\boldsymbol{\left(\dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\pi + 1\right)}$

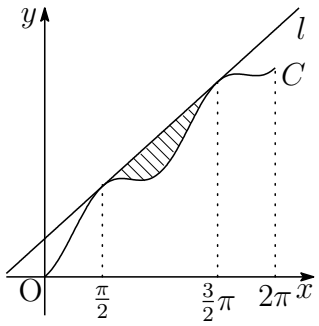
(3) (2) の結果から　$g(x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ において　$g(x) \geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

$$= \left[\, \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \,\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$



7.28　(1)　$f(x) = 0$ より，$\left|\sin x - \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{2} = 0$ であるから

$$\sin x - \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin x = 0,\ 1$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ より　　$\boldsymbol{x = -\pi,\ 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$

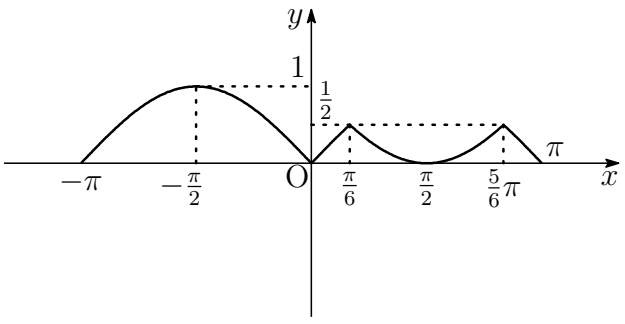
(2)　i)　$\sin x - \dfrac{1}{2} \geqq 0$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$f(x) = \left|\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| = |\sin x - 1| = 1 - \sin x$$

ii)　$\sin x - \dfrac{1}{2} \leqq 0$　すなわち　$-\pi \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$f(x) = \left|\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) - \frac{1}{2}\right| = |\sin x|$$

i)，ii) から，グラフの概形は，次のようになる．



(3)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x - \dfrac{\pi}{2} \leqq 0$ より，(2) の結果から

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right| = |-\cos x| = \cos x$$

上式および (2) の結果から

$$f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\sin x\cos x & \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}\right)\\ (1-\sin x)\cos x & \left(\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

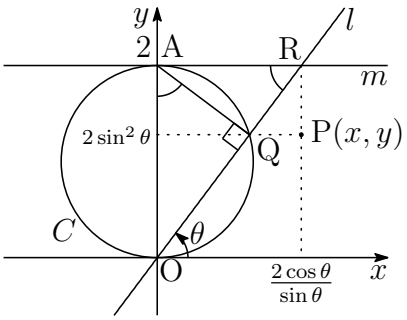
したがって

$0\leqq a\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき　$F(a)=\displaystyle\int_0^a \sin x\cos x\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{4}(1-\cos 2a)}$

$\frac{\pi}{6}\leqq a\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき　$F(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^a (1-\sin x)\cos\,dx$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\cos 2a+\sin a-\frac{1}{2}}$$

7.29　(1) l と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $(0<\theta<\pi)$，右の図から



$$\mathrm{OQ}=2\sin\theta,\quad \mathrm{OR}=\frac{2}{\sin\theta}$$

したがって，$\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標は

$$x=\mathrm{OR}\cos\theta=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta},$$
$$y=\mathrm{OQ}\sin\theta=2\sin^2\theta$$

上の 2 式から

$$2\sin^2\theta=\frac{2\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{8}{4+\left(\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{y=\frac{8}{4+x^2}}$$

(2)　$f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$ より

$$f'(x)=\frac{-16x}{(4+x^2)^2}$$
$$f''(x)=\frac{-16(4+x^2)^2-(-16x)\cdot 2(4+x^2)\cdot 2x}{(4+x^2)^4}=\frac{16(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$$

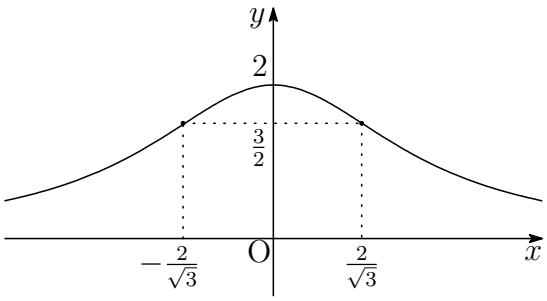
$y=f(x)$ の増減・凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{3}{2}$	↱	2	↘	$\frac{3}{2}$	↳

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\quad\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

よって　極大値 $f(0)=\mathbf{2}$，変曲点 $\left(\pm\dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$

また，グラフの概形は次のようになる．



(3) (1) の結果から，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-2}^{2\sqrt{3}}\frac{8}{4+x^2}\,dx$$

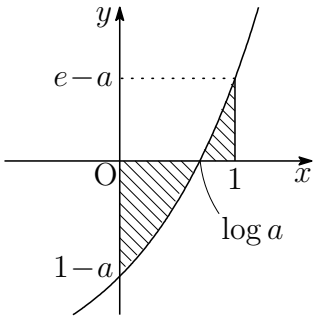
$x=2\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

x	$-2 \longrightarrow 2\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　$S=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{8}{4+(2\tan\theta)^2}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}4\,d\theta=\Big[\,4\theta\,\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\mathbf{\frac{7}{3}\pi}$

7.30　(1) $y=e^x-a$ と x 軸との交点の x 座標は

$$e^x-a=0 \quad \text{すなわち} \quad x=\log a$$



e^x-a の原始関数の 1 つを

$$F(x)=e^x-ax$$

とおくと

$$\begin{aligned}S(a)&=-\int_0^{\log a}(e^x-a)\,dx+\int_{\log a}^{1}(e^x-a)\,dx\\&=-\Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\log a}+\Big[\,F(x)\,\Big]_{\log a}^{1}\\&=F(0)+F(1)-2F(\log a)\\&=1+(e-a)-2(a-a\log a)\\&=\mathbf{2a\log a-3a+e+1}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$S'(a)=2\log a-1$

したがって，$S(a)$ の増減表は $(1 \leqq a \leqq e)$

a	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

よって　$\boldsymbol{a = \sqrt{e}}$ のとき最小値 $S(\sqrt{e}) = \boldsymbol{e - 2\sqrt{e} + 1}$

7.31　(1)　$f(x) = (x-a)e^{-x}$ を微分すると

$$f'(x) = e^{-x} - (x-a)e^{-x} = \boldsymbol{\{(a+1) - x\}e^{-x}}$$

(2)　(1) の結果をさらに微分すると

$$f''(x) = -e^{-x} - \{(a+1) - x\}e^{-x} = \boldsymbol{\{x - (a+2)\}e^{-x}}$$

(3)　(1)，(2) の結果から，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$	$a+2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$e^{-(a+1)}$	↘	$2e^{-(a+2)}$	↘

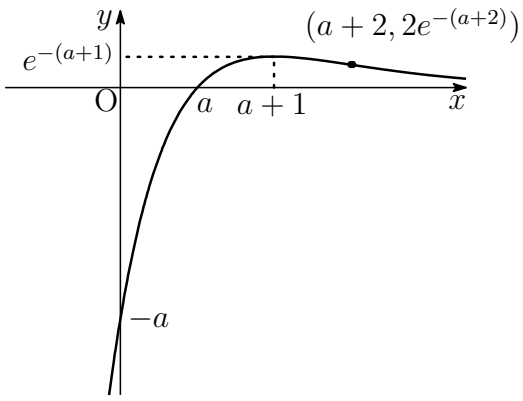
極大値 $f(a+1) = \boldsymbol{e^{-(a+1)}}$

また，変曲点は $\boldsymbol{(a+2,\ 2e^{-(a+2)})}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

よって，グラフは右のようになる．



(4)　(3) の結果から，求める面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_a^{a+n} (x-a)e^{-x}\,dx \\ &= \left[-(x-a+1)e^{-x} \right]_a^{a+n} \\ &= \boldsymbol{-(n+1)e^{-(a+n)} + e^{-a}} \end{aligned}$$

ここで　$\lim_{n \to \infty} (n+1)e^{-(a+n)} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{n+1}{e^{a+n}} = 0$

よって　$\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} S_n = e^{-a}}$

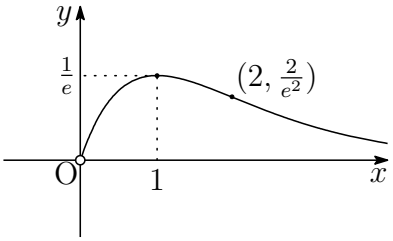
解説 $\displaystyle\int e^{kx}f(x)\,dx = \frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\} + C$

$$\int e^{-x}f(x)\,dx = -e^{-x}\left\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\right\} + C$$

7.32 (1) $f(x) = xe^{-x}$ より　$f'(x) = (1-x)e^{-x}$,　$f''(x) = (x-2)e^{-x}$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	(0)	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘



また，$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ より，グラフの概形は右上の図のようになる．

よって，極大値は　　$f(1) = \boldsymbol{\frac{1}{e}}$

(2) (1) のグラフから

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t xe^{-x}\,dx$$
$$= \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^t = \boldsymbol{1 - (t+1)e^{-t}}$$

(3) (2) の結果から　$h(t) = g(t+1) - g(t)$

$g'(t) = f(t)$ に注意して，$h(t)$ を微分すると

$$h'(t) = g'(t+1) - g'(t) = f(t+1) - f(t)$$
$$= (t+1)e^{-t-1} - te^{-t} = e^{-t-1}\{(t+1) - et\}$$
$$= e^{-t-1}\{1 - (e-1)t\}$$

$t > 0$ における $h(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e-1}$	$\cdots$
$h'(t)$		$+$	0	$-$
$h(t)$		↗	極大	↘

よって，$h(t)$ が最大となる t の値は　　$\boldsymbol{t = \frac{1}{e-1}}$

7.33 (1) $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$ を微分すると

$$f'(x)=\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

右の増減表より，極大値 $f(2)=\boldsymbol{2e^{-1}}$ をとる．

(2) (1) の結果から $0 \leqq x \leqq 4$ における増減は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$2e^{-1}$	↘	$4e^{-2}$

よって，求める解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{k<0} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{0 \leqq k<4e^{-2}} \text{のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{4e^{-2} \leqq k<2e^{-1}} \text{のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k=2e^{-1}} \text{のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{2e^{-1}<k} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

(3) $\quad f(x)-g(x)=xe^{-\frac{x}{2}}-\sqrt{e}\,x=x(e^{-\frac{x}{2}}-e^{\frac{1}{2}})$

ゆえに，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は $\quad x=-1,\ 0$

また，$-1 \leqq x \leqq 0$ において $\qquad f(x) \geqq g(x)$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S&=\int_{-1}^{0}(xe^{-\frac{x}{2}}-\sqrt{e}\,x)dx \\ &=\left[(-2x-4)e^{-\frac{x}{2}}-\frac{\sqrt{e}}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=\boldsymbol{\frac{5}{2}\sqrt{e}-4} \end{aligned}$$

7.34 (1) $f(x)=\dfrac{3}{2}e^{-x}+2e^{x}-3$ を微分すると

$$f'(x)=-\frac{3}{2}e^{-x}+2e^{x}=\frac{4(e^x)^2-3}{2e^x}$$

$f'(x)=0$ とすると $\quad e^x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad$ すなわち $\quad x=\log\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$e^{-1}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$ であるから $\qquad -1<\log\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\log\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

よって，求める最小値は

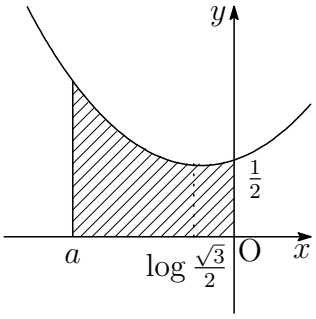
$$f\left(\log\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3=\boldsymbol{2\sqrt{3}-3}$$

(2) (A) C の $x=0$ における接線と $x=a$ における接線が直交するから，
$f'(0)f'(a)=-1$ より

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}e^{-a}+2e^{a}\right)=-1 \quad \text{すなわち} \quad (2e^{a}-1)(2e^{a}+3)=0$$

$2e^{a}+3\neq 0$ であるから　$e^{a}=\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{a=-\log 2}$

(B) 求める面積を S とすると



$$\begin{aligned}S&=\int_{a}^{0}\left(\frac{3}{2}e^{-x}+2e^{x}-3\right)dx\\&=\left[-\frac{3}{2}e^{-x}+2e^{x}-3x\right]_{a}^{0}\\&=\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}e^{-a}+2e^{a}-3a\right)\\&=\frac{1}{2}-\left\{-\frac{3}{2}\cdot 2+2\cdot\frac{1}{2}-3(-\log 2)\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{5}{2}-3\log 2}\end{aligned}$$

7.35 (1) $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ より　$f'(x)=(-ax+a-b)e^{-x}$

点 $(0,\ 2)$ を通るから，$f(0)=2$ より

$$b=2 \quad \cdots①$$

点 $(0,\ 2)$ における接線の傾きが 2 であるから，$f'(0)=2$ より

$$a-b=2 \quad \cdots②$$

①，② より　$\boldsymbol{a=4}$，$\boldsymbol{b=2}$

(2) (1) の結果から

$$f(x)=(4x+2)e^{-x}$$
$$f'(x)=2(1-2x)e^{-x}$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$4e^{-\frac{1}{2}}$	↘

したがって，$f(x)$ の増減は右のようになる．

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$ のとき**極大値** $\boldsymbol{4e^{-\frac{1}{2}}}$ をとる．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において，$f(x) > 0$ であるから，求める面積 S は

$$S = \int_0^1 (4x+2)e^{-x}\,dx = \Big[-(4x+6)e^{-x}\Big]_0^1 = \mathbf{-10e^{-1}+6}$$

7.36 (1) $f(x) = ae^{2x}$，$f'(x) = 2ae^{2x}$

曲線 $y = f(x)$ の点 $(b,\ f(b))$ における接線の方程式が $y = x$ であるから

$$f(b) = b, \quad f'(b) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad ae^{2b} = b, \quad 2ae^{2b} = 1$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{a = \dfrac{1}{2e},\ b = \dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から $\quad g(x) = f(x) - x = \dfrac{1}{2}e^{2x-1} - x$

これを微分すると $\quad g'(x) = e^{2x-1} - 1$

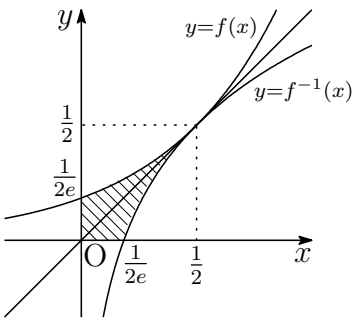
したがって，$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{2e}$	↘	0	↗	$\frac{e}{2}-1$

ここで $\quad g(1) - g(0) = \dfrac{e}{2} - 1 - \dfrac{1}{2e} = \dfrac{1}{2}\left(e - \dfrac{5}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e}\right) > 0$

よって $\quad x = 1$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{e}{2} - 1}$，$x = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{0}$

(3) 求める面積を S とすると，図の斜線部分であるから



$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \{f(x) - x\}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}e^{2x-1} - x\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}e^{2x-1} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4e}$$

よって $\quad S = \boldsymbol{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2e}}$

7.37 (1) $f(t)=e^t-\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}\right)$ とすると

$$f'(t)=e^t-\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)$$
$$f''(t)=e^t-(1+t)$$
$$f'''(t)=e^t-1$$

$t>0$ のとき $f'''(t)>0$，$f''(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき $f''(t)>0$
これから
$t>0$ のとき $f''(t)>0$，$f'(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき $f'(t)>0$
さらに
$t>0$ のとき　$f'(t)>0$，　$f(0)=0$ であるから　$t>0$ のとき　$f(t)>0$

したがって，$t>0$ のとき

$$e^t>1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\quad\cdots①$$

このとき

$$\begin{aligned}1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}&=1+t^2+\frac{t}{6}(t^2-3t+6)\\&=1+t^2+\frac{t}{6}\left\{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right\}\\&>1+t^2\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② から，$t>0$ のとき

$$e^t>1+t^2$$

上式において $t=-x$ とすると

$$x<0\text{ のとき}\qquad \boldsymbol{e^{-x}>1+x^2}$$

解説 $e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^3}{3!}+\cdots$ であるから，$t>0$ において，

$$e^t>1+t+\frac{t^2}{2},\quad e^t>1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}$$

などを活用すればよい．

別解 $x^2+1-e^{-x}=e^{-x}\{(x^2+1)e^x-1\}\quad\cdots①$
$g(x)=(x^2+1)e^x-1$ とおくと

$$g'(x)=2xe^x+(x^2+1)e^x=(x+1)^2e^x$$

$g'(x)=0$ とすると　$x=-1$

$g(x)$ の増減表は，下のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$g'(x)$	$+$	0	$+$	
$g(x)$	↗	$2e^{-1}-1$	↗	0

したがって，$x<0$ のとき　　$g(x)<0$

よって，① より　　$x<0$ のとき　$\boldsymbol{x^2+1<e^{-x}}$

(2) $x<0$ のとき　$e^{-x}>x^2+1$　ゆえに　$xe^{-x}<x(x^2+1)$

$x=0$ のとき　$xe^{-x}=x(x^2+1)$

$x>0$ のとき　$e^{-x}<1<x^2+1$　ゆえに　$xe^{-x}<x(x^2+1)$

ゆえに，2 つの曲線 $y=xe^{-x}$，$y=x(x^2+1)$ の共有点の x 座標は　$x=0$

よって，求める面積 S は

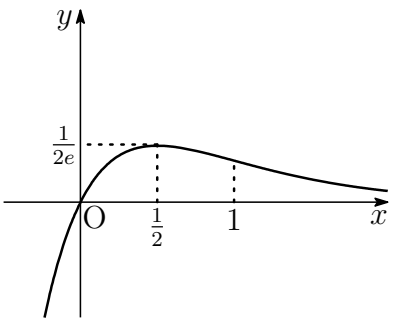
$$S=\int_{-1}^{0}\{x(x^2+1)-xe^{-x}\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

7.38　(1) $f(x)=xe^{-2x}$ より

$$f'(x)=(1-2x)e^{-2x}\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$f''(x)=4(x-1)e^{-2x}\qquad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

よって，$f(x)$ の増減，凹凸は下の表のようになる．したがって，グラフの概形は右の図のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↱	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{1}{e^2}$	↳



(2) $f'(x)$ は (1) の表から，$x=1$ で最小となり，最小値 $f'(1)=-\dfrac{1}{e^2}$ をとる．

したがって，曲線 $y=f(x)$ の接線のうちで傾きが最小となる直線 l は，点 $(a,\ f(a))=\left(\boldsymbol{1},\ \boldsymbol{\frac{1}{e^2}}\right)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{e^2}$ の直線である．

$$y-\frac{1}{e^2}=-\frac{1}{e^2}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{2}{e^2}}$$

(3) $g(x)=\left(-\dfrac{1}{e^2}x+\dfrac{2}{e^2}\right)-f(x)$ とおくと

$$g'(x)=-f'(x)-\frac{1}{e^2}$$

(2) で述べたように $x<1$ において

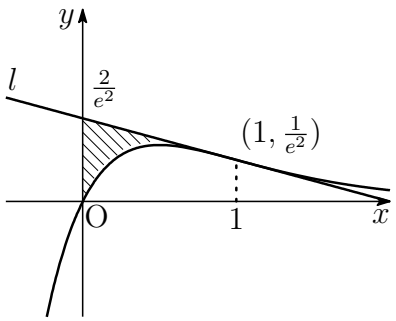
$$f'(x)>-\frac{1}{e^2}\quad \text{ゆえに } g'(x)=-f'(x)-\frac{1}{e^2}<0$$

したがって，$g(x)$ は $x<1$ において単調減少である．また

$$g(1)=-\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^2}-f(1)=-\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^2}-\frac{1}{e^2}=0$$

よって，$x<1$ において $g(x)>0$ となり，題意は示された．

(4) 求める面積 S は，右の図の斜線部分である．



$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\left\{\left(-e^{-2}x+2e^{-2}\right)-xe^{-2x}\right\}dx\\&=\left[-\frac{e^{-2}}{2}x^2+2e^{-2}x+\frac{xe^{-2x}}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{9}{4e^2}-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

別解 直線 l と x 軸，y 軸，直線 $x=1$ で囲まれた台形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\left(\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^2}\right)=\frac{3}{2e^2}$$

よって　　$S=\dfrac{3}{2e^2}-\displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}\,dx=\frac{9}{4e^2}-\frac{1}{4}$

7.39 (1) $f(x)=xe^x$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=\boldsymbol{(x+1)e^x}\\f''(x)&=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'=e^x+(x+1)e^x=\boldsymbol{(x+2)e^x}\end{aligned}$$

また　　$\{(ax+b)e^x\}'=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

$\{(ax+b)e^x\}'=f(x)$ であるとき　　$(ax+a+b)e^x=xe^x$

したがって　$a=1,\ a+b=0$　よって　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1}$

(2) C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-f(p)=f'(p)(x-p)\quad \text{ゆえに}\quad y=f'(p)(x-p)+f(p)$$

上式および (1) の結果から　$c = f'(p) = \boldsymbol{(p+1)e^p}$，$d = f(p) = \boldsymbol{pe^p}$

$g(x) = f(x) - \{c(x-p) + d\}$ より

$$g(x) = f(x) - \{(p+1)e^p(x-p) + pe^p\} = f(x) - (p+1)e^p x + p^2 e^p$$
$$g'(x) = f'(x) - (p+1)e^p = f'(x) - f'(p)$$

(1) の結果から，$x \geqq 0$ において，$f''(x) > 0$ であるから，$f'(x)$ は単調増加.
したがって，$g(x)$ の増減表は，次のようになる.

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	極小 0	↗

$x \geqq 0$ において $g(x) \geqq 0$ であるから　$f(x) - \{c(x-p) + d\} \geqq 0$

よって　　$f(x) \geqq c(x-p) + d \quad (x \geqq 0)$

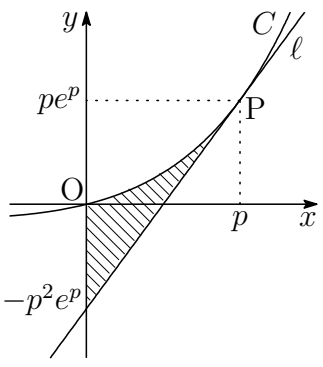
補足 $f''(x) > 0$ である曲線 $y = f(x)$ とその曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を $y = h(x)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) - h(x) &= f(x) - \{f'(p)(x-p) + f(p)\} = \int_p^x f'(t)\,dt - f'(p)(x-p) \\ &= -\int_p^x (x-t)' f'(t)\,dt - f'(p)(x-p) \\ &= -\Big[\,(x-t)f'(t)\,\Big]_p^x + \int_p^x (x-t)f''(t)\,dx - f'(p)(x-p) \\ &= \int_p^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_x^p (t-x)f''(t)\,dt \end{aligned}$$

$x \geqq p$ のとき $\displaystyle\int_p^x (x-t)f''(t)\,dt \geqq 0$,　$x \leqq p$ のとき $\displaystyle\int_x^p (t-x)f''(t)\,dt \geqq 0$

したがって　$f(x) - h(x) \geqq 0$　よって　$f(x) \geqq h(x)$

(3) 図形 F は，下の図の斜線部分である.



よって，F の面積 $S(p)$ は，(1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^p g(x)\,dx = \int_0^p \{f(x) - (p+1)e^p x + p^2 e^p\}\,dx \\ &= \left[\ (x-1)e^x - \frac{1}{2}(p+1)e^p x^2 + p^2 e^p x\ \right]_0^p \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^p(p-1)(p^2+2)+1} \end{aligned}$$

(4) R は，P および点 $(0, -p^2e^p)$ を含む x 軸および y 軸に平行な長方形であるから，その面積の最小値 $T(p)$ は

$$T(p) = p\{pe^p - (-p^2e^p)\} = \boldsymbol{p^2(p+1)e^p}$$

よって
$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)} &= \lim_{p\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^p(p-1)(p^2+2)+1}{p^2(p+1)e^p} \\ &= \lim_{p\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{2}{p^2}\right)+\frac{2}{p^3e^p}}{2\left(1+\frac{1}{p}\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

7.40 (1)
$$(e^{ax}\sin x)' = e^{ax}(a\sin x + \cos x) \quad \cdots ①$$
$$(e^{ax}\cos x)' = e^{ax}(-\sin x + a\cos x) \quad \cdots ②$$

① $\times a -$ ② より

$$(ae^{ax}\sin x - e^{ax}\cos x)' = (a^2+1)e^{ax}\sin x$$

ゆえに $\displaystyle\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{1}{a^2+1}e^{ax}(a\sin x - \cos x) + C$ (C は積分定数)

よって $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{a^2+1}\left[\ e^{ax}(a\sin x - \cos x)\ \right]_0^\pi = \boldsymbol{\frac{e^{a\pi}+1}{a^2+1}}$

(2) ① より，$a = \sqrt{3}$ のとき

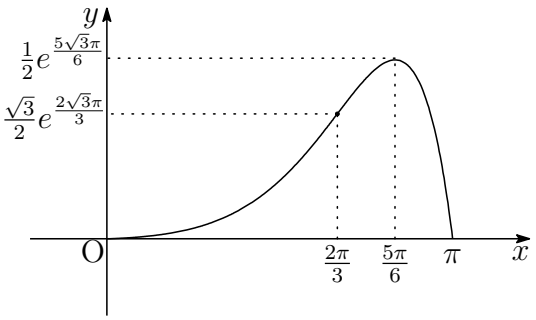
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sqrt{3}x}(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 2e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right), \\ f''(x) &= 2e^{\sqrt{3}x}\left\{\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= 4e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

増減および凹凸は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	+	+	0	−	
$f''(x)$		+	0	−	−	−	
$f(x)$	0	↗	変曲点	↱	極大	↘	0

よって　極大値 $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}}$　　変曲点 $\left(\dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}}\right)$

グラフの概形は，次のようになる．



補足　(福岡教育大学 2018)　4

7.41　(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ より　$0 \leqq \sqrt{3}x \leqq 2\pi$

したがって，$f(x)=0$ をみたす x の値は

$$\sqrt{3}x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x=\frac{\pi}{2\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$$

(2)　$f(x)=e^{-x}\cos\sqrt{3}x$ を微分すると

$$f'(x)=-e^{-x}(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x+\cos\sqrt{3}x)=-2e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \sqrt{3}x+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{13}{6}\pi$ であるから，$f'(x)=0$ をみたす x の値は

$$\sqrt{3}x+\frac{\pi}{6}=\pi,\ 2\pi \quad \text{すなわち} \quad x=\frac{5\pi}{6\sqrt{3}},\ \frac{11\pi}{6\sqrt{3}}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ における $f(x)$ の増減は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{11\pi}{6\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

(3) $e^{-x}=-(e^{-x})'$ であることに注意して，部分積分を行うと

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx &= -\int (e^{-x})'\cos\sqrt{3}x\,dx\\ &= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x+\int e^{-x}(-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)\,dx\\ &= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x+\sqrt{3}\int (e^{-x})'\sin\sqrt{3}x\,dx\\ &= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x+\sqrt{3}e^{-x}\sin\sqrt{3}x-3\int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx\end{aligned}$$

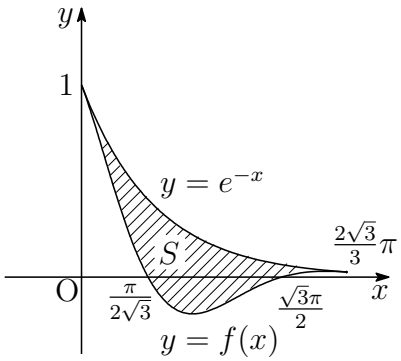
したがって

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx\\ &= \frac{1}{4}e^{-x}(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x-\cos\sqrt{3}x)+C\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x-\frac{\pi}{6}\right)+C}\quad (\boldsymbol{C}\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

(4) $e^{-x}-f(x)=e^{-x}-e^{-x}\cos\sqrt{3}x$
$=e^{-x}(1-\cos\sqrt{3}x)\geqq 0$

したがって，求める面積を S とすると，

(3) の結果を用いると



$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\{e^{-x}-f(x)\}\,dx\\ &= \left[-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x-\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}\\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4}\left(1-e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}\right)}\end{aligned}$$

7.42 (1) $f(x)=e^{-x}\sin x$ $(x\geqq 0)$ について，$f(x)=0$ となる x の値であるから

$$\sin x=0\quad \text{これを解いて}\quad x=n\pi\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

よって，求める点 P_n の x 座標は　　$\boldsymbol{x=n\pi}$

(2) (1) の結果から　　$S_n=\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|e^{-x}\sin x|\,dx$

ここで，$x=t+(n-1)\pi$ とおくと

x	$(n-1)\pi \longrightarrow n\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$\dfrac{dx}{dt}=1$

よって　　$S_n = \displaystyle\int_0^{\pi} |e^{-t-(n-1)\pi}\sin\{t+(n-1)\pi\}|\,dt$

$= e^{-(n-1)\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$

$= e^{-(n-1)\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi}$

$= e^{-(n-1)\pi}\times\frac{e^{-\pi}+1}{2} = \boldsymbol{\frac{(e^{-\pi}+1)e^{-(n-1)\pi}}{2}}$

(3) (2) の結果から

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{e^{-\pi}+1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{(k-1)\pi}$$
$$= \frac{e^{-\pi}+1}{2}\times\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} = \boldsymbol{\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}}$$

また，$0<e^{-\pi}<1$ より，$\lim_{n\to\infty} e^{-n\pi}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})} = \boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}$$

7.43　(1) $f(x)=xe^x$ を微分すると　$f'(x)=(x+1)e^x$

P$(p,\ pe^p)$ における接線の方程式は

$$y-pe^p=(p+1)e^p(x-p)\quad\text{ゆえに}\quad y=(p+1)e^px-p^2e^p$$

よって　　$g(x)=(p+1)e^px-p^2e^p$

ここで，$h(x)=f(x)-g(x)$ $(x\geqq 0)$ とおくと

$$h(x)=xe^x-(p+1)e^px+p^2e^p$$
$$h'(x)=(x+1)e^x-(p+1)e^p$$
$$h''(x)=(x+2)e^x$$

$x\geqq 0$ において $h''(x)>0$ より，$h'(x)$ は単調増加であるから，$h(x)$ の増減は，右の表のようになる．

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	0	↗

したがって，$x\geqq 0$ において　$h(x)\geqq 0$

よって　　$x\geqq 0$ において　$f(x)\geqq g(x)$

(2) (1) の結論から

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^L \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \int_0^L xe^x\,dx - (p+1)e^p \int_0^L x\,dx + p^2e^p \int_0^L dx \\ &= \int_0^L xe^x\,dx - \frac{L^2}{2}(p+1)e^p + Lp^2e^p \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S'(p) &= -\frac{L^2}{2}(p+2)e^p + L(p^2+2p)e^p \\ &= \frac{L}{2}e^p(p+2)(2p-L) \end{aligned}$$

よって，$S(p)$ の増減は右の表のようになり，$S(p)$ は，$\boldsymbol{p = \frac{L}{2}}$ で最小値をとる．

p	0	$\cdots$	$\frac{L}{2}$	$\cdots$
$S'(p)$		$-$	0	$+$
$S(p)$		↘	極小	↗

7.44 $f(x) = \dfrac{1+\log x}{x} = x^{-1} + x^{-1}\log x$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^{-2} - x^{-2}\log x + x^{-1}x^{-1} = x^{-2}\log x \\ f''(x) &= -2x^{-3}\log x + x^{-2}x^{-1} = \frac{1-2\log x}{x^3} \end{aligned}$$

$f(x) = 0$ とすると　$1 + \log x = 0$　すなわち　$x = \dfrac{1}{e}$,

$f''(x) = 0$ とすると　$1 - 2\log x = 0$　すなわち　$x = \sqrt{e}$

よって　$S = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} \frac{1+\log x}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} (1+\log x)(\log x)'\,dx$

$$= \left[\ \log x + \frac{1}{2}(\log x)^2\ \right]_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{9}{8}}$$

7.45 (1) $\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{x}}$

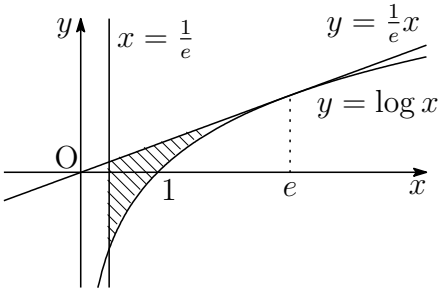
(2) $\displaystyle\int \boldsymbol{\log x\,dx = x\log x - x + C}$ **(C は積分定数)**

(3) $f(x)$ を微分すると　$f'(x) = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-e}{ex}$

よって，$f(x) = \dfrac{1}{e}x - \log x$ $\left(\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e^2\right)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e^2}+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$e-2$

(4) $y=\dfrac{1}{e}x$ は，曲線 $y=\log x$ の点 $(e,\ 1)$ における接線．求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S&=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{1}{e}x-\log x\right)dx \\ &=\left[\ \frac{x^2}{2e}-x\log x+x\ \right]_{\frac{1}{e}}^{e} \\ &=\boldsymbol{\frac{e}{2}-\frac{1}{2e^3}-\frac{2}{e}} \end{aligned}$$

7.46 (1) $f(x)=ax+b$，$g(x)=\log x$ とおくと

$$f'(x)=a,\quad g'(x)=\frac{1}{x}$$

ℓ と C の接点の x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ であるから

$$at+b=\log t,\quad a=\frac{1}{t}$$

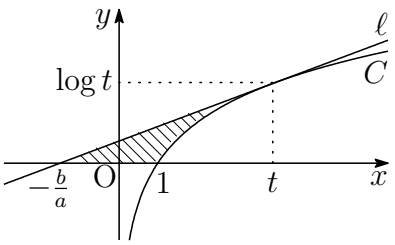
上の第 2 式より，$t=\dfrac{1}{a}$ であるから，これを第 1 式に代入すると

$$a\cdot\frac{1}{a}+b=\log\frac{1}{a}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{b=-\log a-1}$$

(2) $0<a<1$ より　$t=\dfrac{1}{a}>1$

ℓ と x 軸との交点の x 座標は

$$ax+b=0\quad \text{ゆえに}\quad x=-\frac{b}{a}$$



求める面積は，右の図の斜線部分であるから，(1) の結果により

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left\{t-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}\log t - \int_1^t \log x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{a}\right)\log t - \Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_1^t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{\log a+1}{a}\right)\log t - t(\log t-1)-1 \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{\log a}{a}\right)(-\log a) - \frac{1}{a}(-\log a-1)-1 \\
&= \frac{(\log a)^2}{2a}+\frac{\log a+1}{a}-1 \\
&= \boldsymbol{\frac{(\log a)^2+2\log a-2a+2}{2a}}
\end{aligned}$$

7.47 (1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{4-k}{2}x+1$，$g(x)=k\log\dfrac{x}{2}+k-1$ とおくと

$$f'(x)=x-\frac{4-k}{2},\quad g'(x)=\frac{k}{x}$$

点 P の x 座標を p とおくと，$f'(p)=g'(p)$ であるから

$$p-\frac{4-k}{2}=\frac{k}{p}\quad \text{ゆえに}\quad (p-2)(2p+k)=0$$

$k>0$，$p>0$ であるから　　$p=2$

このとき　$f(2)=k-1$，$g(2)=k-1$　ゆえに　$\boldsymbol{\mathrm{P}(2,\ k-1)}$

したがって，P における接線の傾きは　　$f'(2)=g'(2)=\dfrac{k}{2}$

よって，接線 l の方程式は

$$y-(k-1)=\frac{k}{2}(x-2)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{k}{2}x-1}$$

(2) l が点 $(1,\ 0)$ を通るから

$$0=\frac{k}{2}\cdot 1-1\quad \text{これを解いて}\quad k=2$$

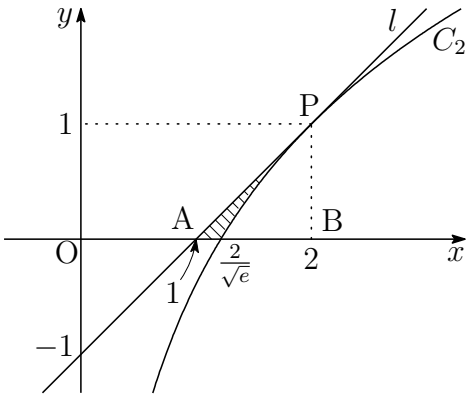
よって　　$C_2: y=2\log\dfrac{x}{2}+1$

これに $y=0$ を代入すると

$$0=2\log\frac{x}{2}+1\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{x=\frac{2}{\sqrt{e}}}$$

(3) 求める面積は，図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle \mathrm{ABP} - \int_{\frac{2}{\sqrt{e}}}^{2} \left(2\log\frac{x}{2}+1\right) dx \\ &= \frac{1}{2} - \left[\, 2\log\frac{x}{2} - x \,\right]_{\frac{2}{\sqrt{e}}}^{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{2} - \frac{4}{\sqrt{e}}} \end{aligned}$$



7.48 (1) $f(x) = ax^2 + b$，$g(x) = c\log x$ とおくと　$f'(x) = 2ax$，$g'(x) = \dfrac{c}{x}$

$C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ が点 $\mathrm{P}(e,\ e)$ で接するから

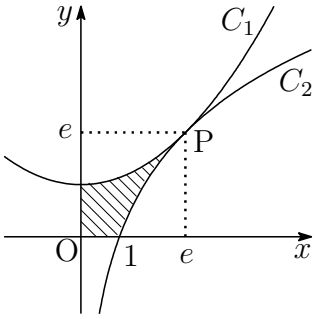
$$f(e) = g(e) = e, \quad f'(e) = g'(e)$$

したがって　　$ae^2 + b = c = e, \quad 2ae = \dfrac{c}{e}$

これを解くと　　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2e},\ b = \dfrac{e}{2},\ c = e}$

(2) 求める面積を S とすると，右の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_0^e \left(\frac{x^2}{2e} + \frac{e}{2}\right) dx - \int_1^e e\log x\, dx \\ &= \left[\, \frac{x^3}{6e} - \frac{ex}{2e} \,\right]_0^e - e\left[\, x(\log x - 1) \,\right]_1^e \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}e^2 - e} \end{aligned}$$



7.49 (1) $y = \dfrac{\log x}{a}$ を微分すると　$y' = \dfrac{1}{ax}$

接点の座標を $\left(t,\ \dfrac{\log t}{a}\right)$ とすると，接線の傾きは $\dfrac{1}{at}$ であるから，

その方程式は

$$y - \frac{\log t}{a} = \frac{1}{at}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{at} + \frac{\log t - 1}{a} \quad \cdots ①$$

これが，点 $\left(0,\ 1 - \dfrac{1}{a}\right)$ を通るから

$$\frac{\log t - 1}{a} = 1 - \frac{1}{a} \quad \text{ゆえに} \quad t = e^a$$

① より，接線の方程式は　　$\boldsymbol{y = \dfrac{x}{ae^a} + 1 - \dfrac{1}{a}}$

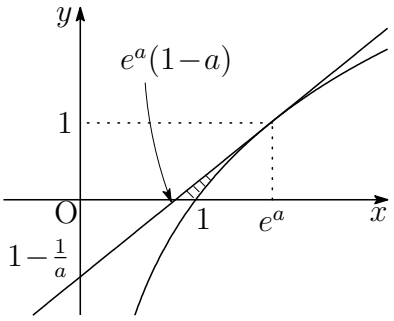
(2) 曲線 $y=\dfrac{\log x}{a}$，2 直線 $x=1$，$x=e^a$ および x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\int_1^{e^a}\frac{\log x}{a}=\frac{1}{a}\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_1^{e^a}=\frac{1}{a}(ae^a-e^a+1)$$

i) $0<a<1$ のとき

右の図の斜線部分の面積は

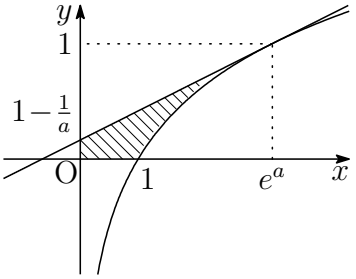
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{e^a-e^a(1-a)\}\cdot 1-S\\ =&\frac{1}{2}ae^a-\frac{1}{a}(ae^a-e^a+1)\\ =&\boldsymbol{e^a\left(\frac{a}{2}-1+\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a}}\end{aligned}$$



ii) $a\geqq 1$ のとき

右の図の斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}e^a\left\{1+\left(1-\frac{1}{a}\right)\right\}\cdot 1-S\\ =&e^a\left(1-\frac{1}{2a}\right)-\frac{1}{a}(ae^a-e^a+1)\\ =&\boldsymbol{\frac{e^a}{2a}-\frac{1}{a}}\end{aligned}$$



(3) 曲線 C と $y=\dfrac{x^2}{2e}$ の接点の x 座標を u とすると

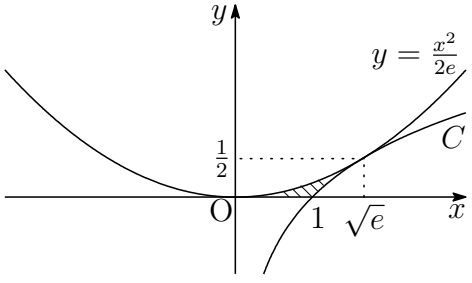
$$\frac{\log u}{a}=\frac{u^2}{2e}\quad\cdots②$$

$y=\dfrac{x^2}{2e}$ を微分すると，$y'=\dfrac{x}{e}$．接点における接線の傾きが等しいので

$$\frac{1}{au}=\frac{u}{e}\quad\cdots③$$

②，③ を解いて　$u=\sqrt{e}$，$a=1$

求める面積は，次の図の斜線部分の面積である．



この面積を S とすると

$$S = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2e}\,dx - \int_1^{\sqrt{e}} \log x\,dx$$
$$= \left[\ \frac{x^3}{6e}\ \right]_0^{\sqrt{e}} - \left[\ x(\log x - 1)\ \right]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{e} - 1}$$

7.50 (1) $f(x) = ax - x\log x$ を微分すると　$f'(x) = a - 1 - \log x$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = e^{a-1}$

$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	e^{a-1}	↘

このとき，$f(x)$ の最大値が 1 であるから

$$e^{a-1} = 1 \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{a = 1}$$

(2) (1) の結果から，$f(x) = x(1 - \log x)$，$f'(x) = -\log x$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ とすると

$$-\log x = -\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad x = \sqrt{e}$$

$f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2}\sqrt{e}$ より，求める接線は，点 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\sqrt{e}\right)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

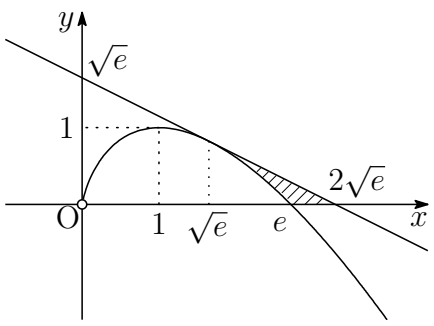
$$y - \frac{1}{2}\sqrt{e} = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{e}) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{e}}$$

(3) 曲線 $y = x(1 - \log x)$ の x 軸との交点の x 座標は

$$1 - \log = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = e$$

直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + \sqrt{e}$ の x 軸との交点の x 座標は

$$-\frac{1}{2}x + \sqrt{e} = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = 2\sqrt{e}$$



よって，求める部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2\sqrt{e}-\sqrt{e})f(\sqrt{e}) - \int_{\sqrt{e}}^{e} x(1-\log x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{e}\times\frac{1}{2}\sqrt{e} - \left[\, x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log x\right)\,\right]_{\sqrt{e}}^{e} \\ &= \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}e = \boldsymbol{\frac{1}{4}e(3-e)} \end{aligned}$$

7.51 (1) $f(x)=(\log x)^2-\log x$ より，$f(x)=0$ のとき

$$\log x(\log x-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=1,\ e}$$

(2) $$f'(x)=2(\log x)\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=\frac{2\log x-1}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\log x-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{3-2\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ のとき $x=e^{\frac{1}{2}}$，　$f''(x)=0$ のとき $x=e^{\frac{3}{2}}$

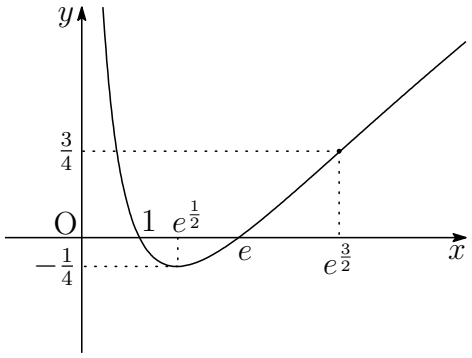
よって，$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	極小 $-\frac{1}{4}$	↗	変曲点 $\frac{3}{4}$	↗

また $$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\left\{\left(\log x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\boldsymbol{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\log x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\boldsymbol{\infty}$$

以上から，この関数のグラフの概形は，下の図のようになる．



(3) 求める面積を S とすると，グラフの概形から

$$S = -\int_1^e \{(\log x)^2 - \log x\}\,dx$$
$$= -\Big[\, x(\log x)^2 - 3x\log x + 3x \,\Big]_1^e = \mathbf{3-e}$$

7.52 (1) $g(t) = 2\sqrt{t} - 2 - \log t$ とおくと

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{t}-1}{t}$$

したがって，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	0	↗

したがって　$g(t) \geqq 0$　よって　$\log t \leqq 2\sqrt{t} - 2$

(2) (1) の結果から，$t > 1$ のとき

$$0 < \log t < 2\sqrt{t} - 2 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \frac{\log t}{t} < \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{t}$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{t}} - \dfrac{2}{t}\right) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = \mathbf{0}$$

(3) $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \lim\limits_{x\to+0} x\log x$

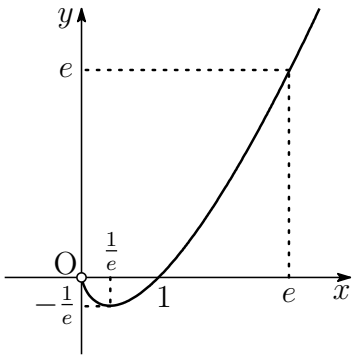
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\log t}{t}\right) = \mathbf{0}$$

$\lim\limits_{x\to+0} f'(x) = \lim\limits_{x\to+0}(\log x + 1) = \mathbf{-\infty}$

(4) $f'(x) = \log x + 1$ より　$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

グラフの概形は右のようになる．



(5) $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=\dfrac{x^2}{4}(2\log x-1)$ とすると，面積 S は

$$S=-\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{e} f(x)\,dx=-\Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+\Big[\ F(x)\ \Big]_{1}^{e}$$
$$=F(e)+F\left(\frac{1}{e}\right)-2F(1)=\boldsymbol{\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4e^2}+\frac{1}{2}}$$

7.53 (1) $f(x)=x^n\log 2x$ を微分すると (n は 2 以上の自然数)

$$f'(x)=nx^{n-1}\log 2x+x^n\cdot\frac{1}{x}=x^{n-1}(n\log 2x+1)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

よって　$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}}}$ のとき極小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{en\cdot 2^n}}$

(2) $f'(x)=x^{n-1}(n\log 2x+1)$ を微分すると

$$f''(x)=(n-1)x^{n-2}(n\log 2x+1)+x^{n-1}\cdot\frac{n}{x}$$
$$=x^{n-2}\{n(n-1)\log 2x+(2n-1)\}$$

したがって　$x<\dfrac{1}{2}e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$ のとき　$f''(x)<0$,
$x>\dfrac{1}{2}e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$ のとき　$f''(x)>0$

よって，変曲点は　$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}},\ \frac{1-2n}{n(n-1)2^n}e^{\frac{1-2n}{n-1}}\right)}$

補足 関数 $y=f(x)$ が $f'(a)=0$ であっても $x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変化しないと，$f(a)$ を極値と呼ばない．同様に，$f''(a)=0$ であっても $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化しないと，点 $(a,\ f(a))$ を変曲点と呼ばない．

(3) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は

$$x^n\log 2x=\log 2x \text{ より}\quad (x^n-1)\log 2x=0\quad \text{ゆえに}\quad x=\frac{1}{2},\ 1$$

$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のとき $\log 2x \geqq x^n \log 2x$ であるから求める面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\log 2x - x^n \log 2x)dx \\ &= \left[x(\log 2x - 1) - \frac{x^{n+1}}{n+1}\log 2x + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \boldsymbol{\frac{n}{n+1}\log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)^2}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} S_n = \log 2 - \frac{1}{2}}$

7.54 (1) $f(x) = \sqrt{x}\log x$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$

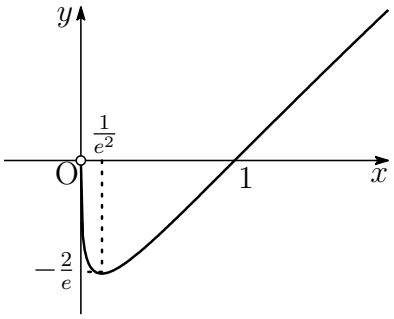
$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$

$x = \dfrac{1}{e^2}$ のとき**極小値** $-\dfrac{2}{e}$ をとる.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

グラフの概形は右の図のようになる.



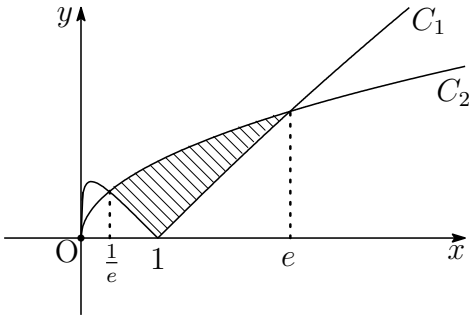
(2) $y = \sqrt{x}|\log x|$ と $y = \sqrt{x}$ から y を消去すると

$$\sqrt{x}\log x = \sqrt{x} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{x}\,(|\log x| - 1) = 0$$

$x > 0$ より $\quad |\log x| = 1 \quad$ これを解いて $\quad x = \dfrac{1}{e},\ e$

よって，求める交点の座標は $\quad \boldsymbol{\left(\frac{1}{e},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right),\ (e,\ \sqrt{e})}$

(3) 求める面積は下の図の斜線部分である.



したがって，求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{x}\,dx-\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{x}\,|\log x|\,dx$$

ここで，$\sqrt{x}\,\log x$ の原始関数の 1 つを

$$F(x)=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\log x-2)$$

とおくと

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{x}\,dx-\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{x}\,|\log x|\,dx\\&=\left[\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ \right]_{\frac{1}{e}}^{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\sqrt{x}\,\log x\,dx-\int_{1}^{e}\sqrt{x}\,\log x\,dx\\&=\frac{2}{3}\left(e\sqrt{e}-\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)+\left[\ F(x)\ \right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\left[\ F(x)\ \right]_{1}^{e}\\&=\frac{2}{3}\left(e\sqrt{e}-\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)+2F(1)-F\left(\frac{1}{e}\right)-F(e)\end{aligned}$$

このとき，$F(1)=-\dfrac{4}{9}$，$F\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{10}{9e\sqrt{e}}$，$F(e)=\dfrac{2}{9}e\sqrt{e}$ であるから

$$\begin{aligned}S&=\frac{2}{3}\left(e\sqrt{e}-\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)+2\left(-\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{10}{9e\sqrt{e}}\right)-\frac{2}{9}e\sqrt{e}\\&=\boldsymbol{\frac{4}{9}\left(e\sqrt{e}+\frac{1}{e\sqrt{e}}-2\right)}\end{aligned}$$

補足 まず，$0<x\leqq 1$ のとき，$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}<\log x$ を示す.

$g(x)=\log x+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ $(0<x\leqq 1)$ とおくと

$$0<x<1 \text{ のとき}\quad g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x\sqrt[3]{x}}<0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1)=3$ であるから

$$g(x)>0\quad \text{ゆえに}\quad \log x+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}>0$$

よって　　$0<x<1$ のとき　$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}<\log x<0$

したがって　$0<x<1$ のとき　$-3\sqrt[6]{x}<\sqrt{x}\log x<0$

$\lim_{x\to+0}(-3\sqrt[6]{x})=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log x=0$$

7.55　(1)　$\displaystyle\int\log(ax)\,dx=\int(x)'\log(ax)\,dx$

$$=x\log(ax)-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

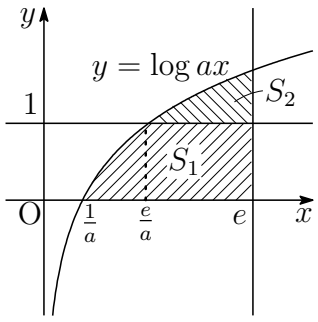
$$=\boldsymbol{x\log(ax)-x+C}\quad(C:\text{積分定数})$$

(2)　曲線 $y=\log(ax)$ と直線 $y=1$ の共有点の x 座標は

$$\log(ax)=1\quad\text{これを解いて}\quad x=\frac{e}{a}$$

このとき，正数 a が $0<\dfrac{e}{a}<e$ を満たせばよいので　$\boldsymbol{a>1}$

(3)　右の図から



$$S_1=\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}\log(ax)\,dx+\left(e-\frac{e}{a}\right)\cdot1$$

$$=\left[\,x\log(ax)-x\,\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}+e-\frac{e}{a}$$

$$=e+\frac{1}{a}-\frac{e}{a}$$

$$S_1+S_2=\int_{\frac{1}{a}}^{e}\log(ax)\,dx=\left[\,x\log(ax)-x\,\right]_{\frac{1}{a}}^{e}=e\log a+\frac{1}{a}$$

よって　　$S=S_1-S_2$

$$=2S_1-(S_1+S_2)$$

$$=2\left(e+\frac{1}{a}-\frac{e}{a}\right)-\left(e\log a+\frac{1}{a}\right)$$

$$=\boldsymbol{2e-\frac{2e-1}{a}-e\log a}$$

(4)　(3) の結果から　　$\dfrac{dS}{da}=\dfrac{2e-1}{a^2}-\dfrac{e}{a}=\dfrac{2e-1-ea}{a^2}$

したがって，S の増減表は，次にようになる．

a	(1)	$\cdots$	$\frac{2e-1}{e}$	$\cdots$
$\frac{dS}{da}$		$+$	0	$-$
S		↗	極大	↘

よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{2e-1}{e}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{2e-e\log(2e-1)}$ をとる．

7.56 (1) $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\sqrt{x+1}-\log(x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right\}$$
$$=\frac{2-\log(x+1)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	e^2-1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘

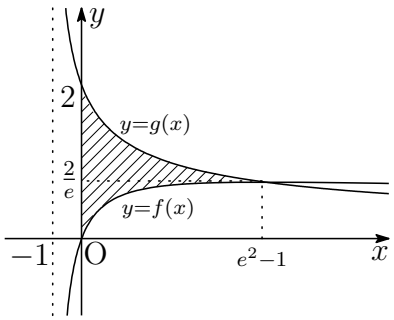
よって，$x=e^2-1$ のとき　極大値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{e}}$

(2) $f(x)=g(x)$ より　$\log(x+1)=2$

これを解いて　$x=e^2-1$　よって　$\boldsymbol{\left(e^2-1,\ \dfrac{2}{e}\right)}$

(3) $0\leqq x\leqq e^2-1$ において，$g(x)\geqq f(x)$ であるから

$$S=\int_0^{e^2-1}\frac{2-\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$$



ここで，$t=\sqrt{x+1}$ とおくと

x	$0\longrightarrow e^2-1$
t	$1\longrightarrow\ \ e$

$x=t^2-1$,　$\dfrac{dx}{dt}=2t$

よって　$S=\displaystyle\int_1^e\frac{2-\log t^2}{t}\,2t\,dt=4\int_1^e(1-\log t)\,dt$

$$=4\Big[\,t\,(2-\log t)\,\Big]_1^e=\boldsymbol{4(e-2)}$$

7.57 (1) $f'(x)=\dfrac{1}{x}$,　$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

点 P の x 座標を p とすると　$f(p)=g(p)$,　$f'(p)=g'(p)$

したがって　$a+\log p=\sqrt{p-1}$　$\cdots$①,　$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2\sqrt{p-1}}$　$\cdots$②

② から　$p=2\sqrt{p-1}\quad(p>1)$

この式の両辺を平方すると　$p^2=4(p-1)$　ゆえに　$(p-2)^2=0$

$p>1$ に注意して　　$p=2$

$a>0$ に注意しながら，① に代入して　　$\boldsymbol{a=1-\log 2}$

よって，P の座標は　　$\mathbf{P(2,\ 1)}$

点 P における接線の傾きは $\dfrac{1}{2}$ であるから，接線 l の方程式は

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2)\quad\text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと $(x\geqq 1)$

$$h(x)=a+\log x-\sqrt{x-1}$$

$$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2\sqrt{x-1}-x}{2x\sqrt{x-1}}$$

$$=-\frac{(x-2)^2}{2x\sqrt{x-1}(2\sqrt{x-1}+x)}$$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$-$
$h(x)$	a	↘	0	↘

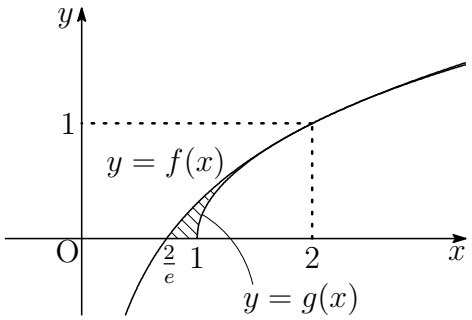
$h(x)=0$ の解は $x=2$ のみであり，2 曲線は点 P 以外に共有点を持たない．

(3) 求める面積を S とすると，下の図から

$$S=\int_{\frac{2}{e}}^{2}(1-\log 2+\log x)\,dx-\int_{1}^{2}\sqrt{x-1}\,dx$$

$$=\left[\ (1-\log 2)x+x\log x-x\ \right]_{\frac{2}{e}}^{2}-\frac{2}{3}\left[(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{2}$$

$$=\left[\ x\log x-x\log 2\ \right]_{\frac{2}{e}}^{2}-\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{e}-\frac{2}{3}}$$



7.58　(1) $g(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと $(x\geqq 0)$

$x>0$ において　$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0$

$g(0)=0$ であるから，$x>0$ において　　$g(x)>0$

よって，すべての $x>0$ に対して　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)$

(2) $f(x)=x-\dfrac{x^3}{3}-\log(1+x)$ を微分すると

$$f'(x)=1-\frac{2}{3}x-\frac{1}{1+x}=\frac{x(1-2x)}{3(1+x)}$$

したがって，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2$ における増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{5}{12}-\log\frac{3}{2}$	↘	$\frac{2}{3}-\log 3$

$1.09<\log 3$ より，$\dfrac{2}{3}<1.09<\log 3$ であるから　$\dfrac{2}{3}-\log 3<0$

よって　$x=\dfrac{1}{2}$ のとき **最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{12}-\log\dfrac{3}{2}}$

$x=2$ のとき **最小値** $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}-\log 3}$

(3) (2) の増減表により，$0<x<\dfrac{1}{2}$ において　$f(x)>0$

$\dfrac{1}{2}<x<2$ において，$f(x)$ は単調減少で，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，$f(2)<0$

したがって，$\dfrac{1}{2}<x<2$ において，$f(x)=0$ となる x が唯一存在する．

よって，方程式 $x-\dfrac{x^3}{3}=\log(1+x)$ は $0<x<2$ に解を 1 つだけもつ．

(4) (3) の結果から

$0<x<\alpha$ において　　$x-\dfrac{x^2}{3}>\log(1+x)$

$\alpha<x<2$ において　　$x-\dfrac{x^2}{3}<\log(1+x)$

したがって

$$S=\int_0^{\alpha}\left\{\left(x-\frac{x^2}{3}\right)-\log(1+x)\right\}dx=\int_0^{\alpha}f(x)\,dx$$

$$T=\int_{\alpha}^{2}\left\{\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{3}\right)\right\}dx=-\int_{\alpha}^{2}f(x)\,dx$$

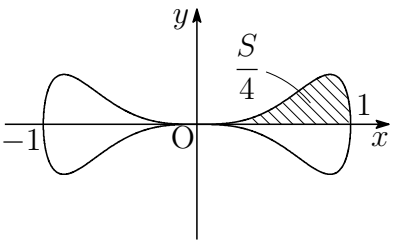
上の 2 式から

$$\begin{aligned} S-T &= \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{2} f(x)\,dx = \int_0^{2} f(x)\,dx \\ &= \int_0^{2} \left\{ x - \frac{x^2}{3} - \log(1+x) \right\} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9} - (1+x)\log(1+x) + x \right]_0^{2} \\ &= \frac{28}{9} - 3\log 3 = \frac{1}{9} - 3(\log 3 - 1) = \frac{1}{9}\{1 - 27(\log 3 - 1)\} \end{aligned}$$

$\log 3 - 1 > 0.09$ であるから　$-27(\log 3 - 1) < -27 \times 0.09 = -2.43$

ゆえに　$1 - 27(\log 3 - 1) < -1.43 < 0$　よって　$\boldsymbol{S < T}$

7.59 曲線 $y^2 = x^6(1-x^2)$ は，x 軸および y 軸に関して対称である．$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において



$$y = x^3\sqrt{1-x^2}$$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \int_0^{1} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \int_0^{1} \{-x(1-x^2) + x\}\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \int_0^{1} \{-x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{1} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

よって　　$S = \dfrac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{15}}$

7.60　(1)　　$\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} = a\sqrt{x^2+9} + \dfrac{b}{\sqrt{x^2+9}}$

上式の両辺に $\sqrt{x^2+9}$ を掛けると

$$\begin{aligned} x^2 &= a(x^2+9) + b \\ &= ax^2 + 9a + b \end{aligned}$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$1 = a,\quad 0 = 9a + b \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = 1,\ b = -9}$$

(2)
$$I_1 = \int_0^3 (x)'\sqrt{x^2+9}\,dx$$
$$= \left[x\sqrt{x^2+9}\right]_0^3 - \int_0^3 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$
$$= 9\sqrt{2} - \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$
$$= 9\sqrt{2} - \int_0^3 \left(\sqrt{x^2+9} - \frac{9}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx$$
$$= 9\sqrt{2} - I_1 + 9I_2$$

よって　　$\boldsymbol{I_1 = \frac{9}{2}I_2 + \frac{9\sqrt{2}}{2}}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+9}) = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{x+\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ であるから

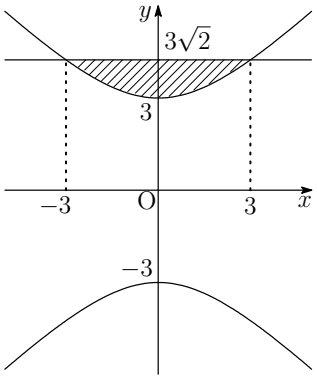
$$I_2 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$$
$$= \left[\ \log(x+\sqrt{x^2+9})\ \right]_0^3$$
$$= \log(3+3\sqrt{2}) - \log 3 = \boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})}$$

(4) $x^2 - y^2 = -9$ から

$$y = \pm\sqrt{x^2+9}$$

ゆえに，$y = \sqrt{x^2+9}$ と $y = 3\sqrt{2}$ で囲まれた部分が求める面積である．
この 2 つの関数のグラフの共有点の x 座標は

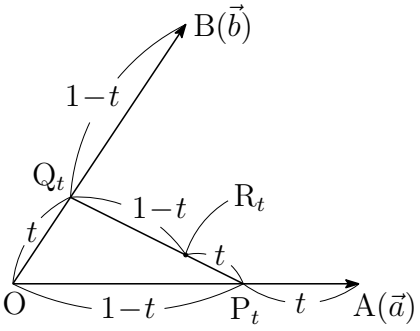
$\sqrt{x^2+9} = 3\sqrt{2}$　これを解いて　$x = \pm 3$



求める面積 S は，(2)，(3) を用いて

$$S = \int_{-3}^3 (3\sqrt{2} - \sqrt{x^2+9})dx = 2\int_0^3 (3\sqrt{2} - \sqrt{x^2+9})dx$$
$$= 2\left[\ 3\sqrt{2}x\ \right]_0^3 - 2I_1 = 18\sqrt{2} - 2\left(\frac{9}{2}I_2 + \frac{9\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= 9\sqrt{2} - 9I_2 = \boldsymbol{9\sqrt{2} - 9\log(1+\sqrt{2})}$$

7.61 (1) $\quad \boldsymbol{\vec{p}_t = (1-t)\vec{a},\ \vec{q}_t = t\vec{b}}$



したがって

$$\begin{aligned}\vec{r}_t &= (1-t)\vec{p}_t + t\vec{q}_t \\ &= (1-t)\cdot(1-t)\vec{a} + t\cdot t\vec{b} \\ &= \boldsymbol{(1-t)^2\vec{a} + t^2\vec{b}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\vec{r}_t = (1-t)^2\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)^2a_1 + t^2b_1 \\ (1-t)^2a_2 + t^2b_2 \end{pmatrix}$$

よって $\quad \boldsymbol{R_t((1-t)^2a_1 + t^2b_1,\ (1-t)^2a_2 + t^2b_2)}$

(3) (1) の結果から

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_t = -2(1-t)\vec{a} + 2t\vec{b} = -2\vec{p}_t + 2\vec{q}_t = 2(\vec{q}_t - \vec{p}_t) = 2\overrightarrow{P_tQ_t}$$

よって，線分 P_tQ_t は点 R_t で曲線 S と接する．

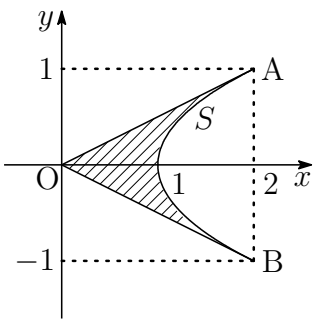
(4) A$(2,\ 1)$，B$(2, -1)$ のとき，(2) の結果から

$$\vec{r}_t = (1-t)^2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4t+4t^2 \\ 1-2t \end{pmatrix}$$

R_t の座標を $(x,\ y)$ とすると $\quad x = 2-4t+4t^2,\ y = 1-2t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

したがって，S の方程式は $\quad x = y^2+1 \quad (-1 \leqq y \leqq 1)$

求める面積は，右の図の斜線部分で



$$\begin{aligned}&2\int_0^1 \{(y^2+1) - 2y\}\,dy \\ =&2\int_0^1 (y-1)^2\,dy \\ =&2\left[\frac{1}{3}(y-1)^3\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

7.62 (1) $x = \sin t,\ \ y = \sin 2t \ \ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ より

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \boldsymbol{(\cos t,\ 2\cos 2t)}$$

(2) $\vec{v}=(\cos t,\ 2(2\cos^2 t-1))$ であるから，$u=\cos^2 t$ とおくと $(0\leqq u\leqq 1)$

$$|\vec{v}|^2=\cos^2 t+4(2\cos^2 t-1)^2=u+4(2u-1)^2$$
$$=16u^2-15u+4=16\left(u-\frac{15}{32}\right)^2+\frac{31}{64}$$

よって，$u=\dfrac{15}{32}$ のとき，$|v|$ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{31}}{8}}$ をとる．

(3) $f(t)=\sin t$，$g(t)=\sin 2t$ とおくと $(0\leqq t\leqq 2\pi)$

$$f(2\pi-t)=-f(t),\quad g(2\pi-t)=-g(t)$$

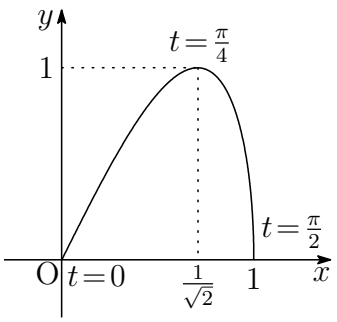
上式から，点 P が $0\leqq t\leqq \pi$ で描く曲線と $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ で描く曲線は原点対称である．さらに

$$f(\pi-t)=f(t),\quad g(\pi-t)=-g(t)$$

であるから，点 P の $0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}$ で描く曲線と $\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq \pi$ で描く曲線は y 軸対称である．これから，点 P の描く曲線 C は x 軸に関しても対称である．そこで，$0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}$ における C の概形を調べる．

$$\frac{dx}{dt}=f'(t)=\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=g'(t)=2\cos 2t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\vec{v}$		↗	→	↘	
(x,y)	$(0,0)$		$(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$		$(1,0)$



したがって，C の描く図形は，(い) である．

C は，x 軸および y 軸に関して対称であるから，

$$y^2=(\sin 2t)^2=(2\sin t\cos t)^2=4\sin^2 t(1-\sin^2 t)=4x^2(1-x^2)$$

よって，C の方程式は　　$\boldsymbol{y^2=4x^2(1-x^2)}$

補足 第 1 象限において $f'(t)>0$ より，x は単調増加であることや，点 $(1,\ 0)$ を通ることから，(い) であることは明らか．

解説 必要があれば，曲線 C の凹凸なども調べることもできる．

本問では，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dx}{dt} = f'(t) \neq 0$ であるから，$\dfrac{dy}{dx}$ や $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ も求めることができる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{2\cos 2t}{\cos t}$$

これをさらに x について微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right) = \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)\right\}\frac{dt}{dx} \\
&= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}} \\
&= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^3} \\
&= \frac{-4\sin 2t\cos t - 2\cos 2t(-\sin t)}{\cos^3 t} \\
&= -\frac{2\sin t(2\cos^2 t + 1)}{\cos^3 t}
\end{aligned}$$

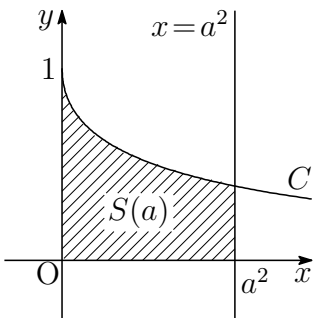
曲線 C は，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，第 1 象限において，上に凸である．

(4) (1) で求めた対称性により，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
\frac{S}{4} &= \int_{f(0)}^{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)f'(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos^2 t\,dt \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

よって　　$S = \boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$

7.63 (1) $C:\begin{cases} x=t^2 \\ y=e^{-t} \end{cases}$ $(t \geqq 0)$ より，$y \geqq 0$ であるから



$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{a^2} y\,dx = \int_0^a e^{-t}\frac{dx}{dt}dt \\ &= \int_0^a e^{-t}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^a te^{-t}\,dt \\ &= -2\Big[\,(t+1)e^{-t}\,\Big]_0^a \\ &= \boldsymbol{-2(a+1)e^{-a}+2} \end{aligned}$$

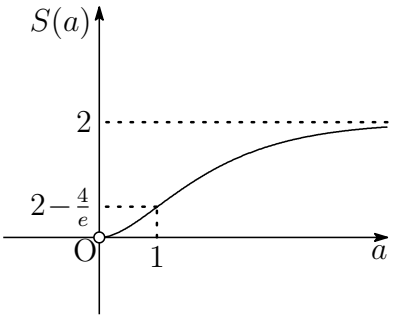
(2) $S'(a)=2ae^{-a}$，$S''(a)=2(1-a)e^{-a}$

$S(a)$ の増減，凹凸は下の表のようなる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	$+$	$+$
$S''(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$	0	↗	変曲点	↗

また，$\lim_{a\to\infty}(a+1)e^{-a}=0$ であるから

$$\lim_{a\to\infty} S(a)=2$$



よって，$S(a)$ のグラフは，右の図のようになる。

(3) $\dfrac{5}{2}<e<3$ であるから

$$S(2)=2(1-3e^{-2})=2\left(1-\frac{3}{e^2}\right)<2\left(1-\frac{3}{3^2}\right)=\frac{4}{3}<1.35$$

$$S(3)=2(1-4e^{-3})=2\left(1-\frac{4}{e^3}\right)>2\left\{1-4\left(\frac{2}{5}\right)^3\right\}=\frac{186}{125}>1.35$$

したがって　　$S(2)<1.35<S(3)$

よって，中間値の定理により，$S(a)=1.35$ を満たす a が $2<a<3$ の範囲に存在する．

7.64 (1) $f(t)=\dfrac{2e}{t}+\dfrac{2t}{e}-5$ を微分すると $\left(\dfrac{e}{2}\leqq t\leqq 2e\right)$

$$f'(t)=-\frac{2e}{t^2}+\frac{2}{e}=\frac{2(t^2-e^2)}{et^2}=\frac{2(t+e)(t-e)}{et^2}$$

したがって，$f(t)$ の増減は次のようになる．

t	$\frac{e}{2}$	$\cdots$	e	$\cdots$	$2e$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

$g(t)=4\log t$ は単調増加.

(2) $f(\alpha)=f(\beta)$ より

$$\frac{2e}{\alpha}+\frac{2\alpha}{e}-5=\frac{2e}{\beta}+\frac{2\beta}{e}-5 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha-\beta)(\alpha\beta-e^2)=0$$

$\alpha\neq\beta$ より　　$\boldsymbol{\alpha\beta=e^2}$

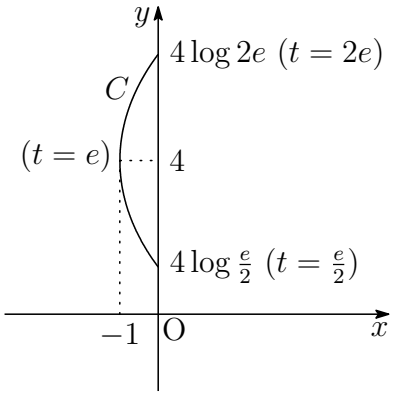
(3) (2) の α, β について

$$\frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}=\frac{4\log\alpha+4\log\beta}{2}=2\log\alpha\beta=2\log e^2=4$$

また, $f(\alpha)=f(\beta)$ より　曲線 $\boldsymbol{C}$ は直線 $\boldsymbol{y=4}$ に関して対称.

(4) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_{-1}^{0}(y-4)\,dx=\int_{e}^{2e}\{g(t)-4\}f'(t)\,dt\\&=\Big[\,\{g(t)-4\}f(t)\,\Big]_e^{2e}-\int_e^{2e}g'(t)f(t)\,dt\\&=-\int_e^{2e}\frac{4}{t}\left(\frac{2e}{t}+\frac{2t}{e}-5\right)dt\\&=-4\int_e^{2e}\left(\frac{2e}{t^2}+\frac{2}{e}-\frac{5}{t}\right)dt\\&=-4\Big[-\frac{2e}{t}+\frac{2t}{e}-5\log t\,\Big]_e^{2e}=20\log2-12\end{aligned}$$



よって　　$\boldsymbol{S=40\log2-24}$

補足 $\dfrac{S}{2}=-\displaystyle\int_4^{4\log2e}x\,dy=-\int_e^{2e}f(t)g'(t)\,dt$ としてもよい.

7.65 (1) C と l_1 から y を消去すると　$\dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$

$$(a^2+b^2)x^2-2b^2x+b^2(1-a^2)=0 \qquad (*)$$

上式は, 係数について　　$(-b^2)^2-(a^2+b^2)\cdot b^2(1-a^2)=0$

$a>0,\ b>0$ に注意して整理すると　　$a^2+b^2=1 \quad \cdots$①

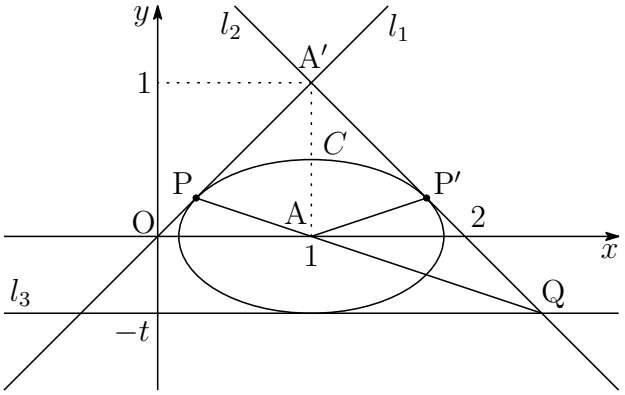
C と l_3 が接するから　$-b=-t$　$\cdots$②

$a>0,\ b>0$ であるから，①，② より　$\boldsymbol{a=\sqrt{1-t^2},\ b=t}$

(2) (1) の結果を $(*)$ に代入すると　$x^2-2t^2x+t^4=0$

$$(x-t^2)^2=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=t^2$$

P は l_1 上の点であるから　　$\boldsymbol{P(t^2,\ t^2)}$



(3) $l_2: y=-x+2$ 上の点 Q の y 座標が $-t$ であるから

$$-t=-x+2 \quad \text{ゆえに} \quad x=t+2$$

$\mathrm{P}(t^2,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+2,-t)$ より，直線 PQ の傾きは $(0<t<1)$

$$\frac{-t-t^2}{(t+2)-t^2}=\frac{t(t+1)}{(t+1)(t-2)}=\frac{t}{t-2}$$

点 $\mathrm{Q}(t+2,-t)$ を通り，傾き $\dfrac{t}{t-2}$ の直線は

$$y+t=\frac{t}{t-2}(x-t-2)$$

点 $(1,\ 0)$ はこの直線上の点であるから

$$t=\frac{t}{t-2}(-t-1) \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$$

(4) (3) の結果を (1) の結果に代入すると　$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

したがって　　$x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$　　(**)

(3) の結果を (2) の結果に代入すると　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$

条件から　　$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}\sin\beta=\dfrac{1}{4}$

すなわち　　$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\beta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\beta<2\pi$ より　$\boldsymbol{\beta=\dfrac{5}{6}\pi}$

(5) $C,\ l_1,\ l_2$ が直線 $x=1$ に関して対称であるから，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ すると，

C と l_2 の接点を P' とすると　$\mathrm{P}'\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha,\ \dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)$

4 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{P}'\left(\dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{A}'(1,\ 1)$ を頂点とする四角形の面積を S_1 とすると (A' は $l_1,\ l_2$ の交点)

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{AA}'\cdot\mathrm{PP}'=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

(**) より (ガウス・グリーン定理[4])

$$\begin{aligned}x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y&=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\theta-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\cdot\frac{1}{2}\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

AP'，AP，C_1 で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)d\theta\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi\end{aligned}$$

よって，求める面積は　$S_1-S_2=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi}$

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf 5

7.66 (1) $f(\theta) = x = r(\theta)\cos\theta = \boldsymbol{\sqrt{2\cos 2\theta}\,\cos\theta}$

$g(\theta) = y = r(\theta)\sin\theta = \boldsymbol{\sqrt{2\cos 2\theta}\,\sin\theta}$

(2) (1) の結果から

$$\{g(\theta)\}^2 = 2\cos 2\theta \sin^2\theta = 2(1-2\sin^2\theta)\sin^2\theta$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ より，$t = \sin^2\theta$，$h(t) = \{g(\theta)\}^2$ とおくと

$$h(t) = 2(1-2t)t = -4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}\right)$$

したがって，$h(t)$ の最大値は　$h\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$

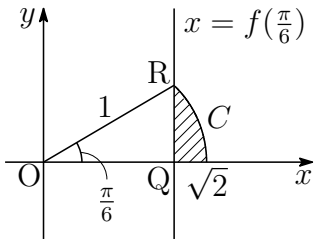
$g(\theta) \geqq 0$ であるから，$h(t)$ が最大のとき，$g(\theta)$ は最大となる．

よって，$g(\theta)$ の最大値は

$$t = \frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき，最大値 } \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき　$r\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{3}} = 1$

右の図において



$$\mathrm{OR} = r\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{RQ} = \mathrm{OR}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

求める面積を S とすると，図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{r(\theta)\}^2\,d\theta - \triangle\mathrm{ORQ} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 2\theta\,d\theta - \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{RQ} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \sin 2\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}} \end{aligned}$$

7.67 (1) 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{8},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ は，C の $t = \dfrac{\pi}{3}$ における点である．

$$\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t\cos t \quad \cdots(*)$$

したがって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=-\tan t$　ゆえに　$t=\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{3}$

よって，点 A における C の法線の方程式は

$$1\left(x-\frac{1}{8}\right)-\sqrt{3}\left(y-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x-\sqrt{3}y+1=0}$$

(2) 曲線 C の弧長を s とすると，$(*)$ により

$$\begin{aligned} s&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin t\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\sin 2t\,dt=\left[-\frac{3}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(3) $x=\cos^3 t$ より

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

求める立体の体積を V とすると，$(*)$ により

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi}&=\int_0^1 y^2\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(\sin^3 t)^2(-3\cos^2 t\sin t)\,dt \\ &=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t-\sin^9 t)\,dt \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ここで，n を自然数とし，$J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$ とおくと

$$\begin{aligned} J_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}t(\cos t)'\,dt \\ &=-\left[\ \sin^{n-1}t\cos t\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-1}t)'\cos t\,dt \\ &=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t\cos^2 t\,dt=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t(1-\sin^2 t)\,dt \\ &=(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n \end{aligned}$$

したがって[5]　$J_n=\dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$　$\cdots ②$

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2016_kouki.pdf 2 を参照

①，② より　$\dfrac{V}{\pi}=3(J_7-J_9)=3\left(J_7-\dfrac{8}{9}J_7\right)=\dfrac{1}{3}J_7=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}J_1$

$=\dfrac{16}{105}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\dfrac{16}{105}\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{16}{105}$

よって　$V=\boldsymbol{\dfrac{16}{105}\pi}$

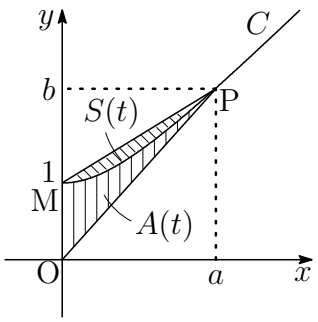
別解　(宮大 [医]2017) 7

7.68　(1)　$x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$，$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ より　$y+x=e^t$，$y-x=e^{-t}$

ゆえに　$(y+x)(y-x)=e^t\cdot e^{-t}$　したがって　$y^2-x^2=1$

$y>0$ であるから　$\boldsymbol{y=\sqrt{x^2+1}}$

(2)　P$(a,\ b)$ とすると，区間 $[0,\ a]$ における曲線 C および直線 OP : $y=\dfrac{b}{a}x$ について，(1) の結果から，$b=\sqrt{a^2+1}$ であるから



$$\sqrt{x^2+1}-\frac{b}{a}x=\frac{a\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{a^2+1}}{a}$$
$$=\frac{(a^2-x^2)}{a(a\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{a^2+1})}\geqq 0$$

したがって

$$A(t)=\int_0^a\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{b}{a}x\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\,x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{b}{a}x^2\,\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}\left\{a\sqrt{a^2+1}+\log(a+\sqrt{a^2+1})-ab\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{ab+\log(a+b)-ab\right\}=\frac{1}{2}\log(a+b)$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{t}{2}}$$

$A(t)+S(t)=\dfrac{1}{2}a$ であるから　$S(t)=\dfrac{1}{2}a-A(t)=\boldsymbol{\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}-\dfrac{t}{2}}$

(3)　$f(t)=A(t)-S(t)$ とおくと　$f(t)=t-\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}$

ゆえに　$f'(t)=1-\dfrac{e^t+e^{-t}}{4}=-\dfrac{e^{-t}}{4}(e^{2t}-4e^t+1)$

$f'(t)=0$ を解くと $(t \geqq 0)$

$$t=\log(2+\sqrt{3})$$

よって，右の増減表により

t	0	$\cdots$	$\log(2+\sqrt{3})$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	極大	↘

$$\boldsymbol{t=\log(2+\sqrt{3})} \text{ で最大}$$

7.69 (1) $y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$

曲線 $y=\log x$ 上の点 $(a,\ \log a)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y=\frac{1}{a}(x-a)+\log a \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{x}{a}-1+\log a}$$

(2) (1) の結果から，$y=\log x$ 上の点 $(2a,\ \log 2a)$ における接線 l_2 の方程式は

$$y=\frac{x}{2a}-1+\log 2a$$

l_1 と l_2 の 2 式から y を消去すると

$$\frac{x}{a}-1+\log a=\frac{x}{2a}-1+\log 2a \quad \text{ゆえに} \quad x=2a\log 2$$

これを l_2 の方程式に代入すると　$y=2\log 2+\log a-1$

よって，交点の座標は　$\boldsymbol{(2a\log 2,\ 2\log 2+\log a-1)}$

(3) $x_0=2a\log 2,\ y_0=2\log 2+\log a-1$ とおき，l_1 と l_2 の交点を $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$，曲線 $y=\log x$ 上の点を $\mathrm{Q}(t,\ \log t)$ とおく $(a \leqq t \leqq 2a)$．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(f(t),\ g(t))$$

とすると　$f(t)=t-x_0,\quad g(t)=\log t-y_0$

$$\begin{aligned} f(t)g'(t)-f'(t)g(t) &= (t-x_0)\frac{1}{t}-(\log t-y_0) \\ &= 1+y_0-\frac{x_0}{t}-\log t \end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理により [6]

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2}\int_a^{2a}\left(1+y_0-\frac{x_0}{t}-\log t\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ (1+y_0)t-x_0\log t-t(\log t-1)\ \Big]_a^{2a} \\ &= \frac{1}{2}\{(1+y_0)a-x_0\log 2+a(1-2\log 2-\log a)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(2\log 2+\log a)a-2a(\log 2)^2+a(1-2\log 2-\log a)\} \\ &= a\left\{\frac{1}{2}-(\log 2)^2\right\} \end{aligned}$$

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf 5

よって　　$\dfrac{\boldsymbol{S(a)}}{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \mathbf{(\log 2)^2}$

7.70　(1) $C : (x,\ y) = (f(t),\ g(t)) = (t + 2\sin^2 t,\ t + \sin t)$ とおくと $(0 < t < \pi)$

$f'(t) = 0$ とすると　$1 + 4\sin t\cos t = 0$

$$1 + 2\sin 2t = 0\ (0 < t < \pi) \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

このとき　$f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{7\pi}{12} + 1 - \cos\dfrac{7\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{12} + 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

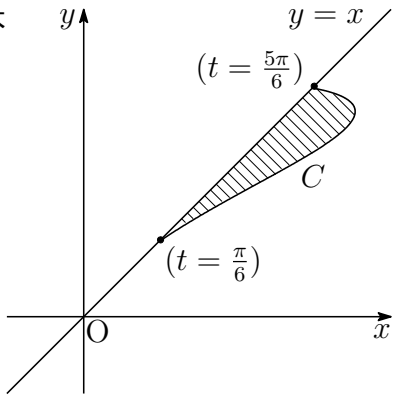
$$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{11\pi}{12} + 1 - \cos\frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{12} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，C の $t = \dfrac{7\pi}{12},\ \dfrac{11\pi}{12}$ における 2 接線

$$x = f\left(\frac{7\pi}{12}\right), \quad x = f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

が異なるから，求める接線の本数は　**2 本**

(2) 求める面積を右の図の斜線部分である．
この面積を S とすると，ガウス・グリーンの定理により



$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt$$

このとき

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (t + 2\sin^2 t)(1 + \cos t) - (1 + 4\sin t\cos t)(t + \sin t) \\ &= t(\cos t - 4\sin t\cos t) + 2\sin^2 t - \sin t - 2\sin^2 t\cos t \\ &= t(\sin t - 2\sin^2 t)' + 2\sin^2 t - \sin t - 2\sin^2 t\cos t \\ &= \{t(\sin t - 2\sin^2 t)\}' + 2(2\sin^2 t - \sin t) - \frac{2}{3}(\sin^3 t)' \end{aligned}$$

よって [7]

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left[\ t(\sin t - 2\sin^2 t)\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin^2 t - \sin t)\,dt - \frac{1}{3}\left[\ \sin^3 t\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - \cos 2t - \sin t)\,dt = \left[\ t - \frac{1}{2}\sin 2t + \cos t\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf 5

別解 $\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{5\pi}{6}$ で $y = g(t)$ は単調増加であることに注意して

$$S = \int_{g\left(\frac{\pi}{6}\right)}^{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)} (x-y)\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)g'(t)\,dt - \left[\ \frac{y^2}{2}\ \right]_{g\left(\frac{\pi}{6}\right)}^{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)g'(t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\} \quad \cdots ①$$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = g\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$ に注意して変形すると

$$S = \left[\ f(t)g(t)\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(t)g(t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\}$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(t)g(t)\,dt + \frac{1}{2}\left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\} \quad \cdots ②$$

①，② の辺々を加えることにより，次式を得る．

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt$$

$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}$，$g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{1}{2}$ であるから，① より

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (t + 2\sin^2 t)(1+\cos t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{ g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \right\}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (t + t\cos t + 2\sin^2 t + 2\sin^2 t\cos t)\,dt - \frac{\pi}{3}(\pi+1)$$

$$= \left[\ \frac{t^2}{2} + t\sin t + \cos t + t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\sin^3 t\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{\pi}{3}(\pi+1)$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

7.71 (1) P が原点を通るとき，$x(t) = 0$，$y(t) = 0$ より

$$\begin{cases} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos(2t) = 0 \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi) \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

$x'(t) = -\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$，$y'(t) = -2\sin(2t)$ より

$$\begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} x'\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 1 \\ y'\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -2 \end{cases}$$

求める速度ベクトルは　$\boldsymbol{t = \frac{\pi}{4}}$ のとき $\boldsymbol{(-1,-2)}$，$\boldsymbol{t = \frac{5}{4}\pi}$ のとき $\boldsymbol{(1,-2)}$

(2) $t=t_1$ $(0 \leqq t_1 < 2\pi)$ における C 上の点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ と x 軸および y 軸に関して対称な点をそれぞれ $\mathrm{Q}(x_1, -y_1)$，$\mathrm{R}(-x_1,\ y_1)$ とすると

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\left(t_1+\tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left\{\left(\tfrac{3}{2}\pi - t_1\right)+\tfrac{\pi}{4}\right\} \\ -y_1 &= -\cos 2t_1 = \cos 2\left(\tfrac{3}{2}\pi - t_1\right) \\ -x_1 &= -\cos\left(t_1+\tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left\{(t_1+\pi)+\tfrac{\pi}{4}\right\} \\ y_1 &= \cos 2t_1 = \cos 2(t_1+\pi) \end{aligned}$$

したがって，Q は $0 \leqq t_1 \leqq \frac{3}{2}\pi$ のとき，$t=\frac{3}{2}\pi - t_1$ における C 上の点であり，$\frac{3}{2}\pi < t_1 < 2\pi$ のとき $t=\frac{7}{2}\pi - t_1$ における C 上の点である．

また，R は $0 \leqq t_1 < \pi$ のとき，$t=t_1+\pi$ における C 上の点であり，$\pi \leqq t_1 < 2\pi$ のとき $t=t_1-\pi$ における C 上の点である．

(3) $x=\cos(t+\frac{\pi}{4})$，$y=\cos(2t)$ とおくと

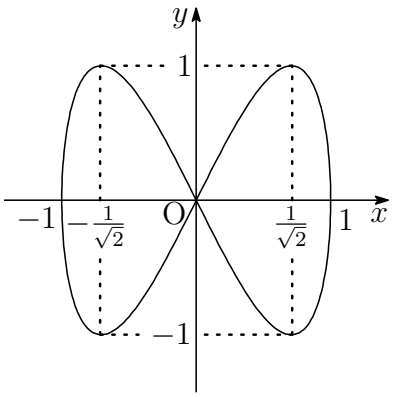
$$y=\cos 2t = \sin 2\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right) = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$$

$y=2x\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ のとき

$$y' = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0



(2) の結果から，C の概形は右の図のようになる．

(4) 求める面積 S は $\quad S=4\displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{8}{3}}$

補足 (2) は，$\frac{\pi}{4}$ ごとに動点 P の位置を調べると，動点 Q，R の取り方がわかる．

7.72 (1) $\mathrm{OP}=2$，OP と x 軸の正の向きとなす角が θ であるから

$$\mathbf{P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)}$$

(2) 線分 OP の P の延長と C_2 の交点を Q′ とすると，直線 l と PQ′ のなす角は θ であり，$\angle \mathrm{Q'OQ}=\theta$ であるから

$$\alpha = \theta + \angle \mathrm{Q'OQ} = \theta+\theta = \mathbf{2\theta}$$

$\mathrm{PR}=2$ であるから $\qquad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = (2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}}$

$= (2\cos\theta,\ 2\sin\theta) + (2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$

$= (2\cos\theta + 2\cos 2\theta,\ 2\sin\theta + 2\sin 2\theta)$

よって　　$\mathbf{R(2\cos\theta + 2\cos 2\theta,\ 2\sin\theta + 2\sin 2\theta)}$

(3) $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると，(2) の結果から

$$y = 2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 4\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，$y = 0$ を解くと　$\theta = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$

これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

$$(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (4,\ 0)$$

よって，求める x 軸との共有点の座標は

$$\mathbf{(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0)}$$

(4) (3) と同様に，(2) の結果から

$$x = 2\cos\theta + 2\cos 2\theta = 4\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，$y = 0$ を解くと　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

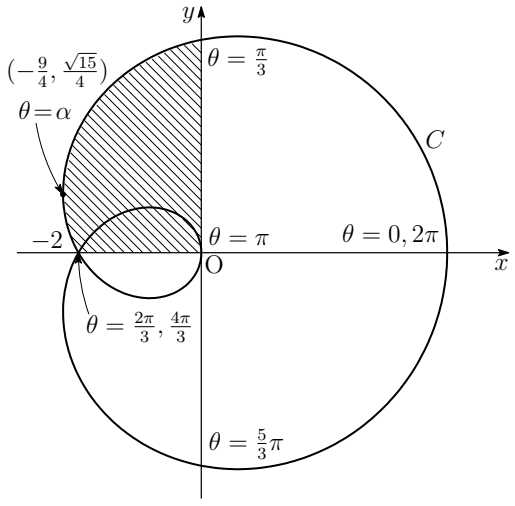
$$\mathbf{(0,\ 2\sqrt{3}),\ (0,\ 0),\ (0,\ -2\sqrt{3})}$$

(5) (2) の結果から

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\theta + 2\cos 2\theta \\ &= 2\cos\theta + 2(2\cos^2\theta - 1) \\ &= 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 \\ &= 4\left(\cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

点 R の x 座標が最小となるとき

$$\cos\theta = -\frac{1}{4}$$



このとき　$\sin\theta = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos 2\theta = -\dfrac{7}{8}$，$\sin 2\theta = \mp\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　(複号同順)

よって，求める座標は　$\left(-\dfrac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{4}},\ \pm\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{15}}}{\boldsymbol{4}}\right)$

(6) よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^{0} y\,dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta + 2\sin 2\theta)(2\cos\theta + 2\cos 2\theta)'\,d\theta \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin\theta + \sin 2\theta)(\sin\theta + 2\sin 2\theta)\,d\theta \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2\theta + 3\sin\theta\sin 2\theta + 2\sin^2 2\theta)\,d\theta \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 3\times\frac{\cos\theta - \cos 3\theta}{2} + 2\times\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (6 + 6\cos\theta - 2\cos 2\theta - 6\cos 3\theta - 4\cos 4\theta)\,d\theta \\
&= \left[\,6\theta + 6\sin\theta - \sin 2\theta - 2\sin 3\theta - \sin 4\theta\,\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \boldsymbol{2\pi}
\end{aligned}$$

補足　$S = \displaystyle\int_{-\frac{9}{4}}^{0} y\,dx - \int_{-\frac{9}{4}}^{-2} y\,dx = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta - \int_{\alpha}^{\frac{2\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$

類題　長崎大学 (2009 年 7)[8]

7.73　(1) 動径 CP の x 軸の正の向きとなす角は，$\dfrac{3}{2}\pi - \theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = 2\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\theta \\ -2\cos\theta \end{pmatrix}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\sin\theta \\ -2\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - 2\sin\theta \\ 1 - 2\cos\theta \end{pmatrix}$

よって　　$\boldsymbol{x = \theta - 2\sin\theta,\ y = 1 - 2\cos\theta}$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{dx}{d\theta} = 1 - 2\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta} = 2\sin\theta$

[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2009.pdf

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x	0	$\searrow$	極小 $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	$\nearrow$	π

θ	0	$\cdots$	π
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	3

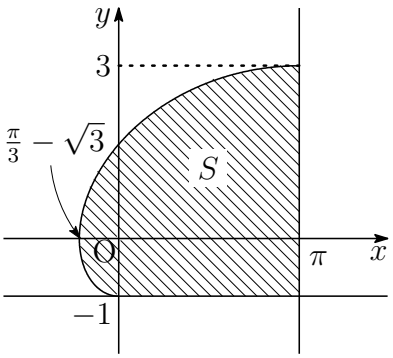
x 座標が最小となる点は $\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{3}-\sqrt{3},\ 0}\right)$ $(\theta=\frac{\pi}{3})$

x 座標が最大となる点は $\boldsymbol{(\pi,\ 3)}$ $(\theta=\pi)$

y 座標が最小となる点は $\boldsymbol{(0,-1)}$ $(\theta=0)$

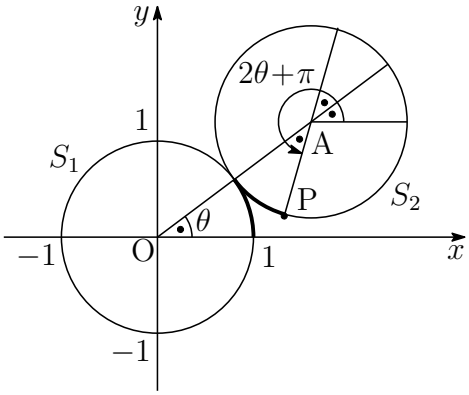
y 座標が最大となる点は $\boldsymbol{(\pi,\ 3)}$ $(\theta=\pi)$

(3) 求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{3}(\pi - x)dy \\
&= \int_{0}^{\pi}\{\pi-(\theta-2\sin\theta)\}\cdot 2\sin\theta\, d\theta \\
&= 2\int_{0}^{\pi}(\pi\sin\theta-\theta\sin\theta+2\sin^2\theta)\, d\theta \\
&= 2\int_{0}^{\pi}(\pi\sin\theta-\theta\sin\theta+1-\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= 2\left[-\pi\cos\theta+\theta\cos\theta-\sin\theta+\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} \\
&= 2\times 2\pi = \boldsymbol{4\pi}
\end{aligned}
$$

7.74 (1) 右の図において



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= (2\cos\theta,\ 2\sin\theta) \\
\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (\cos(2\theta+\pi),\ \sin(2\theta+\pi)) \\
&= (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\
&= (2\cos\theta-\cos 2\theta,\ 2\sin\theta-\sin 2\theta)
\end{aligned}
$$

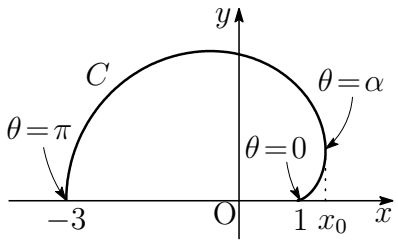
よって $\quad \boldsymbol{x(\theta)=2\cos\theta-\cos 2\theta,\ \ y(\theta)=2\sin\theta-\sin 2\theta}$

(2) $\quad x(2\pi-\theta)=2\cos(2\pi-\theta)-\cos 2(2\pi-\theta)=2\cos\theta-\cos 2\theta=x(\theta)$

$\quad y(2\pi-\theta)=2\sin(2\pi-\theta)-\sin 2(2\pi-\theta)=-2\sin\theta+\sin 2\theta=-y(\theta)$

よって，C は x 軸関して対称である．

(3) C の x 軸の上側の部分の面積を T とすると



$$\begin{aligned}
T &= \int_{-3}^{1} y\,dx = \int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{0} (2\sin\theta - \sin 2\theta)(2\cos\theta - \cos 2\theta)'\,d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi} (2\sin\theta - \sin 2\theta)(2\sin\theta - 2\sin 2\theta)\,d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi} (4\sin^2\theta - 6\sin 2\theta\sin\theta + 2\sin^2 2\theta)\,d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi} \{2(1-\cos 2\theta) + 3(\cos 3\theta - \cos\theta) + (1-\cos 4\theta)\}\,d\theta \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

よって，求める面積を S とすると　$S = 2T - \pi = 2\cdot 3\pi - \pi = \mathbf{5\pi}$

補足 C の x が，$\theta = \alpha$ で最大値 x_0 とすると

$$\begin{aligned}
T &= \int_{-3}^{x_0} y\,dx - \int_{1}^{x_0} y\,dx \\
&= \int_{\pi}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta - \int_{0}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta + \int_{\alpha}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta
\end{aligned}$$

7.75　(1) $g(x) = \sqrt{5-5x^2}$ $(-1 < x < 1)$ とおくと　$g(x) > 0$

$\{g(x)\}^2 = 5 - 5x^2$ を微分すると

$$2g(x)g'(x) = -10x \quad \text{ゆえに} \quad g(x)g'(x) = -5x \quad \cdots ①$$

さらに，① を微分すると

$$\{g'(x)\}^2 + g(x)g''(x) = -5 \quad \text{ゆえに} \quad g''(x) = -\frac{5 + \{g'(x)\}^2}{g(x)} < 0$$

$f(x) = 2x + g(x)$ であるから　　$f''(x) = g''(x) < 0$

したがって，曲線 $C : y = f(x)$ は上に凸である．

① より $g'(x) = -\dfrac{5x}{g(x)}$ であるから　$f'(x) = 2 - \dfrac{5x}{g(x)} = \dfrac{2g(x) - 5x}{g(x)}$

$f'(x) = 0$ のとき　　$2g(x) = 5x > 0$

両辺を平方すると　$\{2\sqrt{5-5x^2}\}^2 = 25x^2$　　$x > 0$ より　$x = \dfrac{2}{3}$

$f''(x) < 0$ であるから　最大値 $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 2 \times \dfrac{2}{3} + \sqrt{5 - 5\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \mathbf{3}$

(2) C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ 2x + g(x))$，$h(x) = \mathrm{OP}^2$ とすると $(-1 < x < 1)$

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 + \{2x + g(x)\}^2 \\ &= x^2 + 4x^2 + 4xg(x) + \{g(x)\}^2 = 5 + 4xg(x) \end{aligned}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4g(x) + 4xg'(x) = 4g(x) + 4x \cdot \frac{-5x}{g(x)} \\ &= 4 \cdot \frac{\{g(x)\}^2 - 5x^2}{g(x)} = 4 \cdot \frac{5 - 5x^2 - 5x^2}{g(x)} = \frac{20(1 - 2x^2)}{g(x)} \end{aligned}$$

$h(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	(5)	↘	$5 - 2\sqrt{5}$	↗	$5 + 2\sqrt{5}$	↘	(5)

P が $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，原点 O との距離が最大となり，

$x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，原点 O との距離が最小となる．

$g\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ であるから

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$

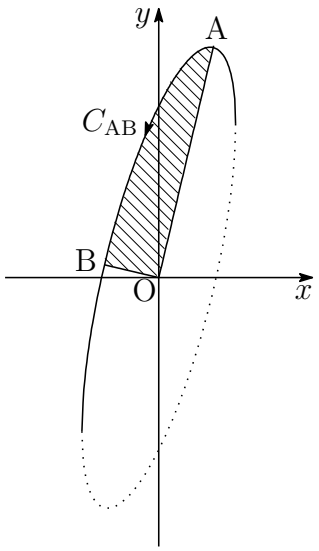
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$

よって　$\mathbf{A}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10} + 2\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathbf{B}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{2}\right)$

(3) $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2x + g(x)}{x}$ とおいて，これを x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} &= \frac{g'(x)}{x} - \frac{g(x)}{x^2} \\ \left(1 + \tan^2\theta\right)\frac{d\theta}{dx} &= -\frac{5}{g(x)} - \frac{g(x)}{x^2} \\ \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{d\theta}{dx} &= -\frac{5x^2 + (5 - 5x^2)}{x^2 g(x)} \\ r^2\frac{d\theta}{dx} &= -\frac{5}{g(x)} \qquad (r^2 = x^2 + y^2) \end{aligned}$$

C 上の A から B への経路を C_{AB}，求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{C_{\mathrm{AB}}} r^2\,d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{5}{g(x)}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{5}{\sqrt{5-5x^2}}\,dx \\ &= \sqrt{5}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

x	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
φ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$x = \sin\varphi$ とおくと　$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi$

よって　$S = \sqrt{5}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{4}\pi}$

7.76　(1)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ より

$$\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2=b^2,\quad \frac{a^2x^2}{b^2}+y^2=a^2 \qquad (*)$$

上の 2 式の辺々の差をとると　$\left(\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{a^2}{b^2}\right)x^2 = b^2-a^2$

$$\frac{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}{a^2b^2}x^2 = b^2-a^2$$

$b^2-a^2\neq 0$ であるから　$x^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$　これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$\frac{b^4}{a^2+b^2}+y^2=b^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

第 1 象限における交点 $\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ から　$\boldsymbol{c=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

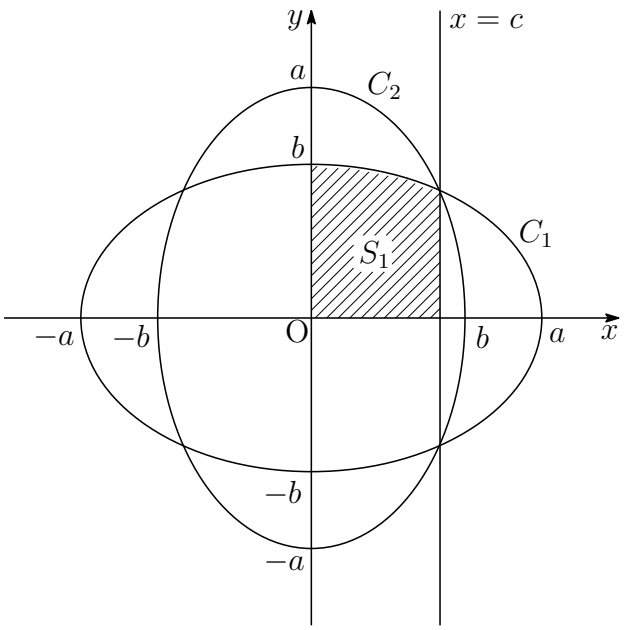
(2)　2 つの楕円を

$$C_1(\theta)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta),\quad C_2(\theta)=(b\cos\theta,\ a\sin\theta)$$

とおく．(1) で求めた交点 $(c,\ c)$ が，$C_1(\alpha)$ および $C_2(\beta)$ であるとき

$$c = a\cos\alpha = b\sin\alpha = b\cos\beta = a\sin\beta \quad \left(0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

ゆえに　$\sin\alpha = \cos\beta$,　$\cos\alpha = \sin\beta$　すなわち　$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$　$\cdots$①



したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{a\cos\frac{\pi}{2}}^{a\cos\alpha} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} b\sin\theta(-a\sin\theta)\,d\theta = ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}ab\left[\ \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\ \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \frac{1}{4}ab\sin 2\alpha \end{aligned}$$

ここで　$\dfrac{1}{4}ab\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}(a\cos\alpha)(b\sin\alpha) = \dfrac{1}{2}c^2$

$$S_1 = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \frac{1}{2}c^2$$

同様にして

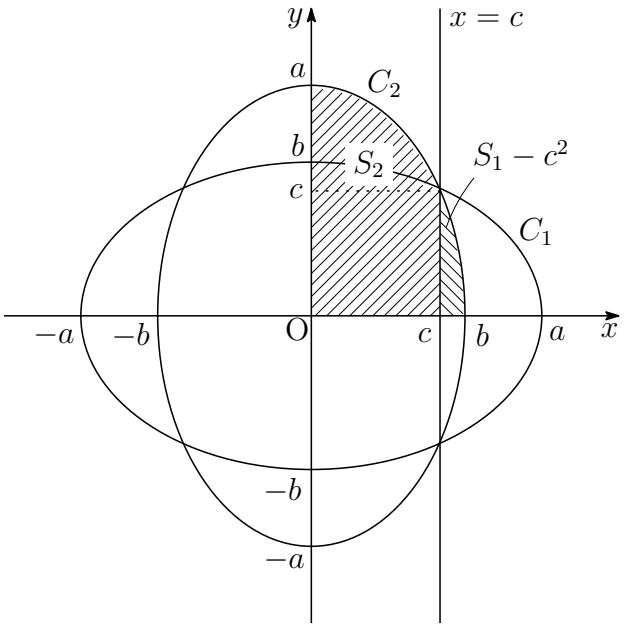
$$S_2 = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) + \frac{1}{2}c^2$$

① および (1) の結果により

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ab\{\pi - (\alpha+\beta)\} + c^2 = \boldsymbol{\frac{\pi ab}{4} + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

補足 C_1 と C_2 は直線 $y=x$ に関して対称であるから，前頁の S_1 から下の図の面積 $S_1 - c^2$ と S_2 の面積の和を利用すると

$$(S_1 - c^2) + S_2 = \frac{\pi ab}{4} \quad \text{ゆえに} \quad S_1 + S_2 = \frac{\pi ab}{4} + c^2$$



別解 原点 O と交点 $(c,\ c)$ を結ぶ線分と y 軸および C_1 で囲まれた部分の面積を T_1 とすると，ガウス・グリーンの定理[9] により

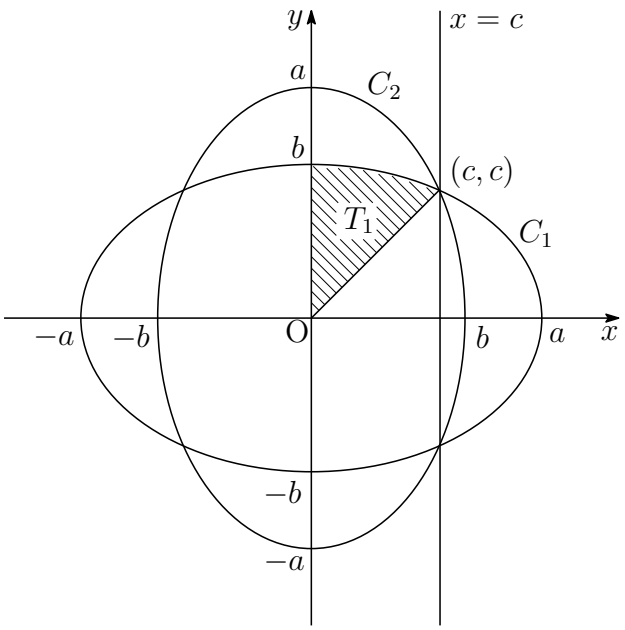
$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \{a\cos\theta(b\sin\theta)' - (a\cos\theta)'b\sin\theta\}d\theta \\ &= \frac{1}{2}ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \end{aligned}$$

同様に，原点 O と交点 $(c,\ c)$ を結ぶ線分と y 軸および C_2 で囲まれた部分の面積を T_2 とすると

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \{b\cos\theta(a\sin\theta)' - (b\cos\theta)'a\sin\theta\}d\theta \\ &= \frac{1}{2}ab\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \end{aligned}$$

$S_1 = T_1 + \dfrac{1}{2}c^2$，$S_2 = T_2 + \dfrac{1}{2}c^2$ であるから，① および (1) の結果により

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ab\{\pi - (\alpha+\beta)\} + c^2 = \boldsymbol{\frac{\pi ab}{4} + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$$



[9] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2021.pdf (p.11 を参照).

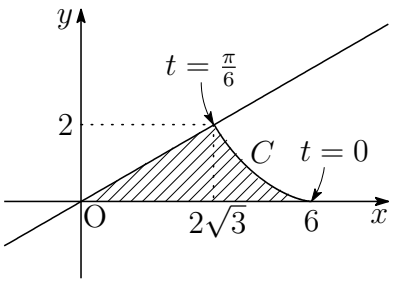
7.77 (1) $x = 5\cos t + \cos 5t, \quad y = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leqq t < \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt} = -5(\sin t + \sin 5t) = -10\sin 3t\cos 2t,$$
$$\frac{dy}{dt} = 5(\cos 5t - \cos t) = 10\sin 3t\sin 2t,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = -\tan 2t$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$0 < 2t < 3t < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\quad \boldsymbol{\dfrac{dx}{dt} < 0, \quad \dfrac{dy}{dx} < 0}$

(2) (1) の結果および $\dfrac{dy}{dt} > 0$ より

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nwarrow$	
$(x,\ y)$	$(6,\ 0)$	$\cdots$	$(2\sqrt{3},\ 2)$



右上の図の斜線部分が求める面積で，その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 + \int_{2\sqrt{3}}^{6} y\,dx = 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} y\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} (5\sin t - \sin 5t)(-5\sin t - 5\sin 5t)\,dt$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (5\sin^2 t - \sin^2 5t + 4\sin 5t\sin t)\,dt$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left\{5\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} - \frac{1-\cos 10t}{2} - 2(\cos 6t - \cos 4t)\right\} dt$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\left[\, 2t - \frac{5}{4}\sin 2t + \frac{1}{20}\sin 10t - \frac{1}{3}\sin 6t + \frac{1}{2}\sin 4t \,\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= 2\sqrt{3} + 5\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}$$

(3) $f(t)=5\cos t+\cos 5t,\quad g(t)=5\sin t-\sin 5t$ とおくと

$$f(-t)=f(t),\quad g(-t)=-g(t)$$

よって，C 上の 2 点 $(f(t),\ g(t))$ と $(f(-t),\ g(-t))$ は x 軸に関して対称.

xy 直交座標系の原点 O を中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた直交座標系を XY 系とすると

$$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix}-\sin\frac{\pi}{3}\\ \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$$

$X=f(t)$，$Y=g(t)$ とすると

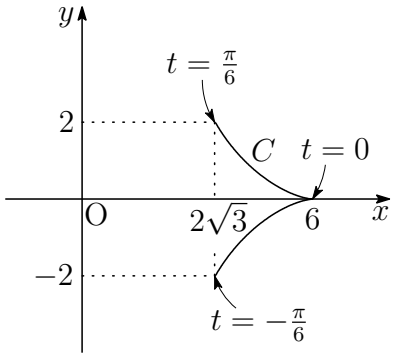
$$\begin{aligned}
x&=(5\cos t+\cos 5t)\cos\frac{\pi}{3}-(5\sin t-\sin 5t)\sin\frac{\pi}{3}\\
&=5\left(\cos t\cos\frac{\pi}{3}-\sin t\sin\frac{\pi}{3}\right)+\cos 5t\cos\frac{\pi}{3}+\sin 5t\sin\frac{\pi}{3}\\
&=5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(5t-\frac{\pi}{3}\right)\\
&=5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(t+\frac{\pi}{3}\right),\\
y&=(5\cos t+\cos 5t)\sin\frac{\pi}{3}+(5\sin t-\sin 5t)\cos\frac{\pi}{3}\\
&=5\left(\cos t\sin\frac{\pi}{3}+\sin t\cos\frac{\pi}{3}\right)+\cos 5t\sin\frac{\pi}{3}-\sin 5t\cos\frac{\pi}{3}\\
&=5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(5t-\frac{\pi}{3}\right)\\
&=5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\sin 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=g\left(t+\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

XY 系における点 $(f(t),\ g(t))$ は，xy 系における点 $\left(f\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right),\ g\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ であるから，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にある.

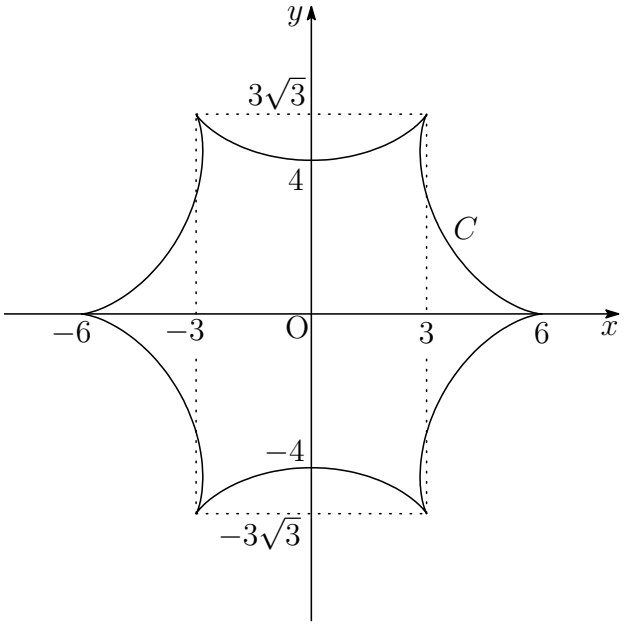
(4) $\dfrac{dy}{dx} = -\tan 2t$ および $\dfrac{dx}{dt} < 0$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{6}\right)$ により，$0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ において

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-\tan 2t)\Big/\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{\cos^2 2t}\Big/\frac{dx}{dt} > 0$$

(3) の結果から，C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分と $-\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq 0$ の部分は x 軸に関して対称であるから，C の $-\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の概形は次のようになる．



さらに，これを原点を中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた部分も C 上にある．よって，C の $-\pi \leqq t < \pi$ の概形は，次のようになる．



解説 C 上の点 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$ における接ベクトルは $(f'(t),\ g'(t))$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\}\cdot\frac{dt}{dx}$$

逆関数定理により，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{f'(t)}$ であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^2}\cdot\frac{1}{f'(t)}=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}$$

本題において

$$f(t)=5\cos t+\cos 5t, \quad g(t)=5\sin t-\sin 5t \quad (-\pi\leqq t<\pi)$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(t)&=-5(\sin t+\sin 5t), & g'(t)&=5(\cos t-\cos 5t)\\ f''(t)&=-5(\cos t+5\cos 5t), & g''(t)&=-5(\sin t-5\sin 5t)\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)&=25(\sin t-5\sin 5t)(\sin t+\sin 5t)\\ &\quad +25(\cos t-\cos 5t)(\cos t+5\cos 5t)\\ &=-100+100(\cos 5t\cos t-\sin 4t\sin t)\\ &=-100(1-\cos 6t)\end{aligned}$$

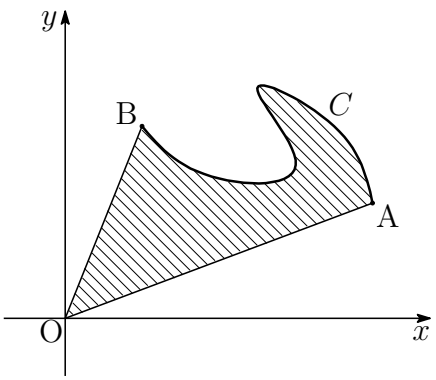
$0<t<\dfrac{\pi}{6}$ において $\quad f'(t)<0, \quad g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)<0$

したがって $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}>0$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



本題 (2) は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる．

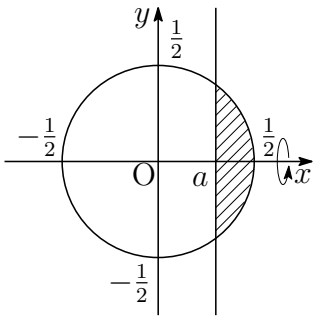
$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (5\cos t + \cos 5t)\cdot 5(\cos t - \cos 5t) \\ &\quad + 5(\sin t + \sin 5t)\cdot(5\sin t - \sin 5t) \\ &= 20 - 20(\cos 5t\cos t - \sin 5t \sin t) \\ &= 20(1 - \cos 6t) \end{aligned}$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt \\ &= 10\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 6t)\,dt = 10\left[\, t - \frac{1}{6}\sin 6t \,\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi} \end{aligned}$$

7.78 (1) 原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$



の $a \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ を x 軸のまわりに回転させた図形の体積であるから，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_a^{\frac{1}{2}} y^2\,dx = \pi\int_a^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right)dx \\ &= \pi\left[\, \frac{1}{4}x - \frac{x^3}{3} \,\right]_a^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{12}\right)\pi} \end{aligned}$$

(2) 立方体 ABCD-EFGH を空間の立体として，H(0, 0, 0)，E(1, 0, 0)，G(0, 1, 0)，D(0, 0, 1) とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}} = (0,\ 1, -1),\quad \overrightarrow{\mathrm{HB}} = (1,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ は，平面 ACF に垂直である．この立方体の内接円の中心を O とし，$\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ から平面 ACF 引いた垂線を OT とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=k\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

であるから (k，s，t は実数)

$$k(1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)+s(-1,\ 1,\ 0)+t(0,\ 1,-1)$$

したがって　$k=\dfrac{1}{2}-s=-\dfrac{1}{2}+s+t=\dfrac{1}{2}-t$　ゆえに　$k=\dfrac{1}{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OT}}|=\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

三角錐 ABCF と内接円の共通部分の体積を V_1 とすると，

(1) の結果に $a=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ を代入して

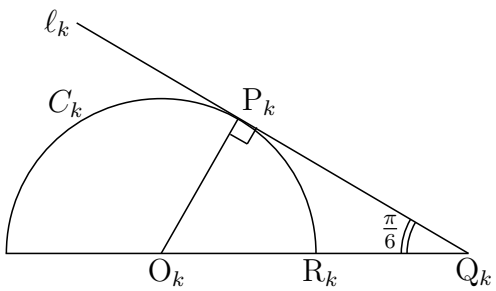
$$V_1=\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+\frac{1}{12}\right\}\pi=\left(\frac{1}{12}-\frac{\sqrt{3}}{27}\right)\pi$$

よって，求める体積 V は　$V=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-4V_1=\left(\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{27}-\dfrac{1}{6}}\right)\boldsymbol{\pi}$

7.79　(1) 球 $x^2+y^2+z^2=1$ の $z\geqq 0$ の部分の平面 $x=k$ $(-1<k<1)$ による断面の表す図形は，中心 $\mathrm{O}_k(k,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{1-k^2}$ の半円

$$y^2+z^2=1-k^2\ (-1<k<1),\quad z\geqq 0$$

この半円を C_k とし，C_k 上の点を $\mathrm{R}_k(k,\sqrt{1-k^2})$ とする．方向ベクトルが $(0,\ \sqrt{3},-1)$ で C_k に接する直線を ℓ_k とし，ℓ_k と C_k の接点を P_k，ℓ_k と xy 平面との共有点を Q_k とすると



$$\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=\sqrt{1-k^2}$$
$$\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k=2\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=2\sqrt{1-k^2}$$

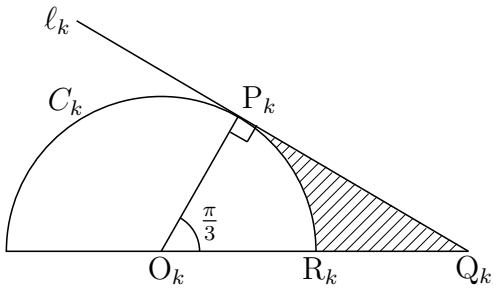
よって　　$\boldsymbol{\sqrt{1-k^2}\leqq y\leqq 2\sqrt{1-k^2}}$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{R}_k\mathrm{Q}_k = \mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k - \mathrm{O}_k\mathrm{R}_k = \sqrt{1-k^2}$

よって　　$\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-k^2}\,dk = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(3) 右の図の斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k\cdot\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k - \frac{1}{2}\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k{}^2\cdot\frac{\pi}{3}\\ =&\frac{\sqrt{3}}{2}(1-k^2) - \frac{\pi}{6}(1-k^2)\\ =&\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}(1-k^2)\end{aligned}$$



よって，求める体積を V とすると

$$V = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\int_{-1}^{1}(1-k^2)\,dk = \boldsymbol{\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}}$$

7.80　(1) 平面 $z=t$ $(-r \leqq t \leqq r)$，円柱 $y^2+z^2 \leqq r^2$，正四角柱 $|x|+|y| \leqq \dfrac{2}{r}$ で囲まれた領域は

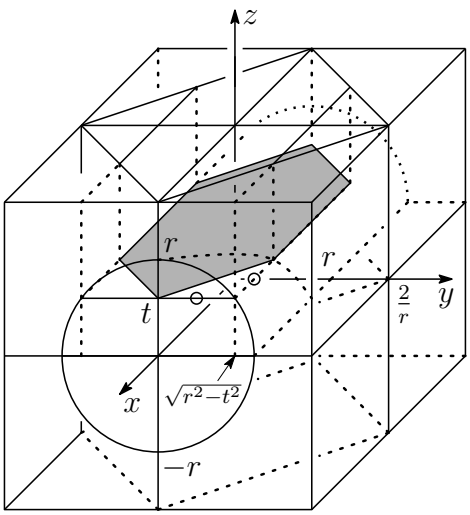
$$z=t,\quad -\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2},\quad -\left(\frac{2}{r}-|y|\right) \leqq x \leqq \frac{2}{r}-|y|$$

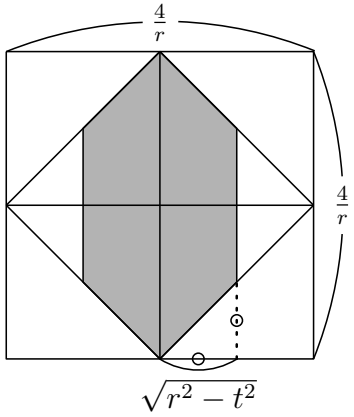
よって，求める面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{aligned}S(t) &= \int_{-\sqrt{r^2-t^2}}^{\sqrt{r^2-t^2}} 2\left(\frac{2}{r}-|y|\right)dy = 4\int_{0}^{\sqrt{r^2-t^2}}\left(\frac{2}{r}-|y|\right)dy\\ &= 4\int_{0}^{\sqrt{r^2-t^2}}\left(\frac{2}{r}-y\right)dy = 4\left[\,\frac{2y}{r}-\frac{y^2}{2}\,\right]_0^{\sqrt{r^2-t^2}}\\ &= \boldsymbol{\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}-2(r^2-t^2)}\end{aligned}$$

別解　K を $z=t$ で切った断面は下の図のようになる．

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{4}{r}\times 2\sqrt{r^2-t^2} - 4\times\frac{1}{2}(\sqrt{r^2-t^2})^2\\ &= \frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}-2(r^2-t^2)\end{aligned}$$





(2) (1) の結果から，$V(r)$ は

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_{-r}^{r} S(t)\,dt \\ &= \int_{-r}^{r} \left\{ \frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2} - 2(r^2-t^2) \right\} dt \\ &= \frac{16}{r}\int_{0}^{r} \sqrt{r^2-t^2}\,dt - 4\int_{0}^{r} (r^2-t^2)\,dt \\ &= \frac{16}{r}\cdot\frac{\pi r^2}{4} - 4\left[\, r^2 t - \frac{t^3}{3} \,\right]_0^r \\ &= \boldsymbol{4\pi r - \frac{8}{3}r^3} \end{aligned}$$

(3) $V(r) = 4\pi r - \dfrac{8}{3}r^3$ $(0 < r \leqq \sqrt{2})$ より

$$V'(r) = 4\pi - 8r^2 = -8\left(r + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left(r - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

増減表は，次のようなる．

r	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	極大	↘	

よって，求める最大値は

$$V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi^{\frac{3}{2}}}$$

7.81 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より　$S=\pi\displaystyle\int_0^1 y^2\,dx=\pi\int_0^1(1-\sqrt{x})^4\,dx$

$t=1-\sqrt{x}$ とおくと

x	0	$\to$	1
t	1	$\to$	0

$x=(1-t)^2$ より　$\dfrac{dx}{dt}=2(t-1)$

よって　$S=\pi\displaystyle\int_1^0 t^4\cdot 2(t-1)\,dt$

$=\pi\displaystyle\int_0^1(-2t^5+2t^4)\,dt=\pi\left[-\frac{1}{3}t^6+\frac{2}{5}t^5\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{\pi}{15}}$

7.82 (1) $k>0$ より，求める体積 $V(k)$ は

$$V(k)=\pi\int_k^{2k}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2dx=\pi\left[-\frac{1}{x+1}\right]_k^{2k}$$
$$=\pi\left(-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{k+1}\right)=\boldsymbol{\frac{k\pi}{(k+1)(2k+1)}}$$

(2) $V(k)=\pi\left(-\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{k+1}\right)$ を微分すると

$$V'(k)=\pi\left\{\frac{2}{(2k+1)^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$
$$=\pi\frac{-2k^2+1}{(k+1)^2(2k+1)^2}=\frac{-\pi(\sqrt{2}k+1)(\sqrt{2}k-1)}{(k+1)^2(2k+1)^2}$$

$V(k)$ の増減表は，次のようになる．

k	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$V'(k)$		$+$	0	$-$
$V(k)$	(0)	$\nearrow$	$(3-2\sqrt{2}\,)\pi$	$\searrow$

よって　$\boldsymbol{k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{(3-2\sqrt{2}\,)\pi}$

7.83 (1) $S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x=\left[-\log\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

(2) $f'(x)=(\tan x-x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\boldsymbol{\tan^2 x}$

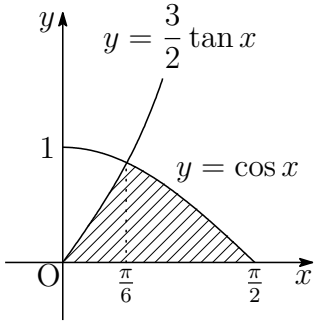
(3) (2) の結果から

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\left[\ \tan x-x\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}$$

7.84 (1) $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ より，$\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$ であるから

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,dx &= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\ &= \boldsymbol{\tan x - x + C}\quad (\boldsymbol{C}\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

(2) $y=\dfrac{3}{2}\tan x\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の共有点の x 座標は



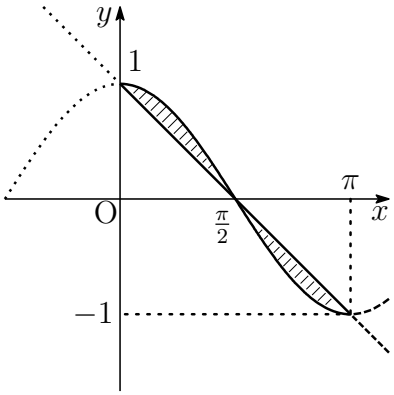
$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\tan x &= \cos x\\ 3\sin x &= 2\cos^2 x\\ 2\sin^2 x+3\sin x-2 &= 0\\ (\sin x+2)(2\sin x-1) &= 0\end{aligned}$$

$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ より　　$x=\dfrac{\pi}{6}$

したがって，求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{3}{2}\tan x\right)^2 dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx\\ &= \frac{9}{4}\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tan^2 x\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx\\ &= \frac{9}{4}\pi\Big[\ \tan x-x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi}{2}\Big[\ x+\frac{1}{2}\sin 2x\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{8}\pi-\frac{5}{24}\pi^2}\end{aligned}$$

7.85 (1) 領域 D の表す領域は図の斜線部分で，境界線を含む．



(2) D は点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ に関して対称であるから，求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{2} &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx - \frac{1}{3}\times\pi\cdot 1^2\times\frac{\pi}{2}\\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx - \frac{\pi^2}{6}\\ &= \pi\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{6}\\ &= \frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

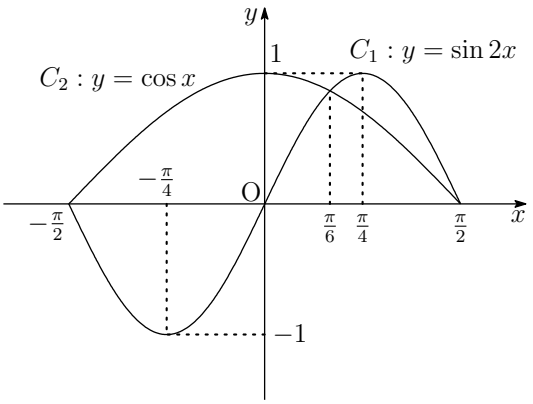
よって　　$\boldsymbol{V=\dfrac{\pi^2}{6}}$

7.86 (1) C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}\sin 2x &= \cos x\\ 2\sin x\cos x &= \cos x\\ \cos x(2\sin x-1) &= 0\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$x=-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$$



$a<b<c$ より　$\boldsymbol{a=-\dfrac{\pi}{2},\ b=\dfrac{\pi}{6},\ c=\dfrac{\pi}{2}}$

(2) $f(x)=\sin 2x$，$g(x)=\cos x$ とおくと　$f'(x)=2\cos 2x$，　$g'(x)=-\sin x$

ゆえに，$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，$g'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$ より　$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)g'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}\neq -1$

よって，この点における C_1 と C_2 のそれぞれの接線は垂直ではない．

(3) 上のグラフから

$$S_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sin 2x)dx=\left[\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{9}{4}$$

$$S_2=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$$

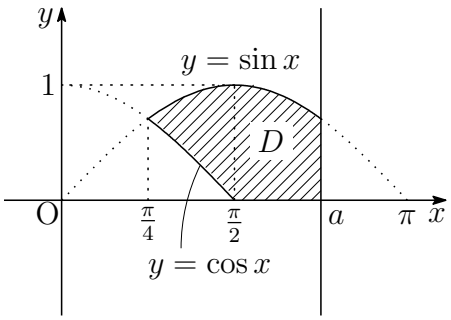
よって　　$S_1:S_2=\dfrac{9}{4}:\dfrac{1}{4}=\boldsymbol{9:1}$

(4) 上のグラフから

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \, dx$$
$$= \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x) \, dx = \pi \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}$$

7.87 (1) 求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \sin x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$
$$= \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{a} - \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \boldsymbol{-\cos a + \sqrt{2} - 1}$$



(2) 求める回転体の体積 V は

$$\frac{V}{\pi} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \sin^2 x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{a} - \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} \sin 2a + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

よって $\quad \boldsymbol{V = \frac{\pi}{4} (2a - \sin 2a + 2 - \pi)}$

7.88 (1) 2 つの曲線を次のようにおく.

$$C_1 : y = x + 2\cos x \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi \right)$$
$$C_2 : y = x - 2\cos x \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi \right)$$

C_1 について $\quad y' = 1 - 2\sin x, \quad y'' = -2\cos x \geqq 0$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$

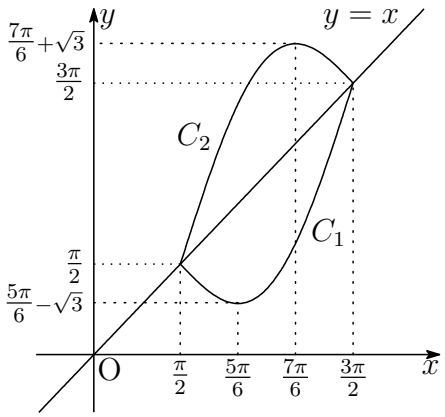
$x = \frac{5\pi}{6}$ で極小値 $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$ をとる. 下に凸.

また，C_2 について　$y' = 1 + 2\sin x$，$y'' = 2\cos x \leqq 0$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\frac{\pi}{2}$	↗	極大	↘	$\frac{3\pi}{2}$

$x = \dfrac{7\pi}{6}$ で極大値 $\dfrac{7\pi}{6} + \sqrt{3}$ をとる．上に凸．

以上の結果から，グラフの概形は次のようになる．



(2) C の概形から，$y = k$ が異なる 2 点で交わるための k の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} < k < \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3}}$$

(3) $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3} > 0$ であるから，求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \{(x - 2\cos x)^2 - (x + 2\cos x)^2\}\, dx \\ &= 8\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (-x\cos x)\, dx \\ &= 8\pi \left[-x\sin x - \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \boldsymbol{16\pi^2} \end{aligned}$$

補足　C_1 と C_2 で囲まれ部分の面積 S は　　$S = 8$

C_1 と C_2 は点 $(\pi,\ \pi)$ に関して対称で，この図形の重心である．

したがって，x 軸から重心までの距離 h は　　$h = \pi$

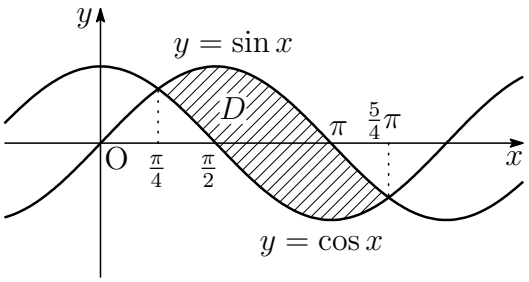
よって，求める回転体の体積 V は，パップス・ギュルダンの定理[10] により

$$V = 2\pi hS = 2\pi \cdot \pi \cdot 8 = 16\pi^2$$

[10] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf の 1 を参照．

7.89 (1) 図形 D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - \cos x)dx \\ &= \Big[-\cos x - \sin x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \\ &= \boldsymbol{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$



(2) $$\begin{aligned} (|\cos x| + |\sin x|)(|\cos x| - |\sin x|) &= |\cos x|^2 - |\sin x|^2 \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{aligned}$$

$|\cos x| + |\sin x| > 0$ であるから，$|\cos x| - |\sin x|$ と $\cos 2x$ は同符号.

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ より $\dfrac{\pi}{2} \leqq 2x \leqq \dfrac{5}{2}\pi$ において

$2x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi$ のとき　$|\cos x| - |\sin x| = 0$

$\dfrac{\pi}{2} < 2x < \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$|\cos x| - |\sin x| < 0$

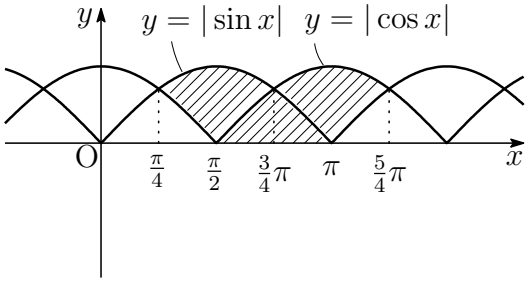
$\dfrac{3}{2}\pi < 2x < \dfrac{5}{2}\pi$ のとき　$|\cos x| - |\sin x| > 0$

よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi}$ のとき　$\boldsymbol{|\sin x| = |\cos x|}$

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3}{4}\pi}$ のとき　$\boldsymbol{|\sin x| > |\cos x|}$

$\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi < x < \dfrac{5}{4}\pi}$ のとき　$\boldsymbol{|\sin x| < |\cos x|}$

(3) (1) の x 軸の求める回転体の体積を V とすると，V は右の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積である．このとき，図の斜線部分は，直線 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ に関して対称であるから



$$\frac{V}{2\pi}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^2 x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}-\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}+\frac{3}{4}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\pi\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{2}\right)}$

7.90　(1) $y=2\sin x$ を微分すると　　$y'=2\cos x$

$y'=1$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$ を解くと　　$x=\pm\dfrac{\pi}{3}$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ における C の接線の方程式は

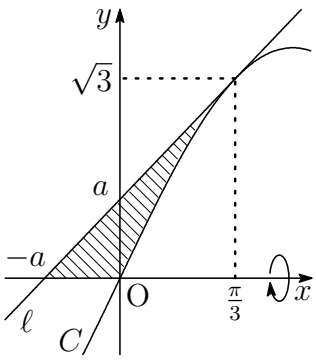
$$y-2\sin\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{3}\quad\text{すなわち}\quad y=x+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$x=-\dfrac{\pi}{3}$ における C の接線の方程式は

$$y-2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=x+\frac{\pi}{3}\quad\text{すなわち}\quad y=x-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$$

$a>0$ であるから　　$\boldsymbol{a=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}}$

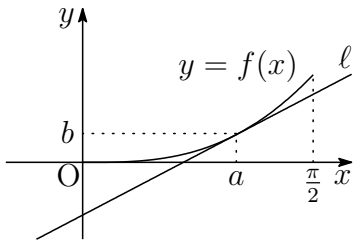
(2) 求める立体の体積を V とすると



$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi(\sqrt{3})^2\cdot\left(\frac{\pi}{3}+a\right)-\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)^2\,dx$$
$$=\sqrt{3}\pi-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)\,dx$$
$$=\sqrt{3}\pi-2\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi-\frac{2}{3}\pi^2}$$

7.91 (1) $f(x)=x-\sin x$ より　$f'(x)=1-\cos x$

点 $(a,\ b)$ における接線の傾きが $\dfrac{1}{2}$ であるから



$$1-\cos a=\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad a=\frac{\pi}{3}$$

また　　$b=f(a)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，接点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

よって，この点における接線 ℓ の方程式は

$$y-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $a=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x-\sin x)^2\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x^2-2x\sin x+\sin^2 x)\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\cos x-2\sin x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=\frac{\pi^3}{81}+\frac{\pi}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\pi\left(\dfrac{\pi^3}{81}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{9\sqrt{3}}{8}\right)}$

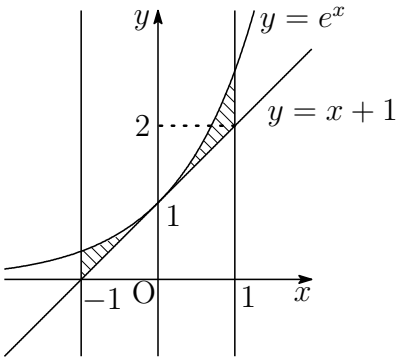
7.92 (1) $f(x)=e^x-(x+1)$ より　$f'(x)=e^x-1$，$f''(x)=e^x$

したがって，$f(x)$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$e-2$

$x=0$ で**極小値 0**

(2) D は図の斜線部分



(3) 求める体積 V は

$$V = \pi \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx - \frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2$$
$$= \pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1} - \frac{8}{3}\pi = \boldsymbol{\pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{8}{3}\right)}$$

7.93 (1) $\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$ より $\dfrac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = \sin\theta$

したがって，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ において

$$x = \frac{\pi}{2} - 1, \quad y = 1, \quad \frac{dx}{d\theta} = 1, \quad \frac{dy}{d\theta} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = 1$$

よって，求める接線の方程式は

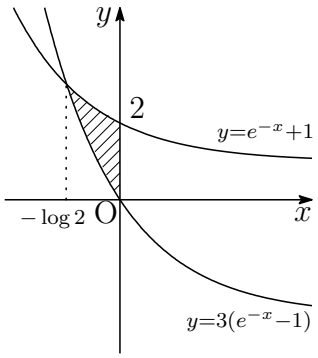
$$y - 1 = 1\left\{x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right\} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x - \frac{\pi}{2} + 2}$$

(2) $y = e^{-x} + 1$，$y = 3(e^{-x} - 1)$ から y を消去すると

$$e^{-x} + 1 = 3(e^{-x} - 1) \quad \text{ゆえに} \quad e^{-x} = 2 \quad \text{したがって} \quad x = -\log 2$$

よって，求める交点の座標は $\boldsymbol{(-\log 2,\ 3)}$

(3) 右の図から求める面積を S とすると



$$S = \int_{-\log 2}^{0} \{(e^{-x} + 1) - 3(e^{-x} - 1)\}dx$$
$$= \int_{-\log 2}^{0} (-2e^{-x} + 4)\,dx$$
$$= \Big[\,2e^{-x} + 4x\,\Big]_{-\log 2}^{0}$$
$$= \boldsymbol{4\log 2 - 2}$$

(4) 求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{-\log 2}^{0} \{(e^{-x}+1)^2 - 3^2(e^{-x}-1)^2\}\,dx \\ &= \int_{-\log 2}^{0} (-8e^{-2x} + 20e^{-x} - 8)\,dx \\ &= \Big[\, 4e^{-2x} - 20e^{-x} - 8x \,\Big]_{-\log 2}^{0} \\ &= 8 - 8\log 2\end{aligned}$$

よって　　$V = \boldsymbol{8\pi(1 - \log 2)}$

7.94 (1) 求める面積を S_1 とすると

$$S_1 = \int_1^q p\log x\,dx = p\Big[\, x\log x - x \,\Big]_1^q = \boldsymbol{p(q\log q - q + 1)}$$

(2) 求める面積を S_2 とすると

$$S_2 = \int_e^{e^2} (3\log x - \log x)dx = 2\Big[\, x(\log x - 1) \,\Big]_e^{e^2} = \boldsymbol{2e^2}$$

(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_e^{e^2} \left\{(3\log x)^2 - (\log x)^2\right\} dx \\ &= 8\pi\int_e^{e^2} (\log x)^2 dx \\ &= 8\pi\Big[\, x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x \,\Big]_e^{e^2} \\ &= \boldsymbol{8\pi(2e^2 - e)}\end{aligned}$$

7.95 (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}\log x$ より

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\log x + x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\log x + x^{-\frac{3}{2}} = \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}, \\ f''(x) &= \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\log x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x} - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \\ &= \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\log x - 2x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3\log x - 8}{4x^2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	$e^{\frac{8}{3}}$	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}$	↘	$3e^{-\frac{3}{2}}$

よって　　極大値 $f(e^2)=\boldsymbol{\frac{2}{e}}$，変曲点 $\left(\boldsymbol{e^{\frac{8}{3}}},\ \boldsymbol{\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}}\right)$

(2) $S=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx=\left[\,2\sqrt{x}(\log x-2)\,\right]_1^{e^2}=\boldsymbol{4}$

解説 $\displaystyle\int\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx=\int(2\sqrt{x})'\log x\,dx=2\sqrt{x}\log x-\int\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$

$=2\sqrt{x}\log x-4\sqrt{x}+C$

(3) $\displaystyle\frac{V}{\pi}=\int_1^{e^3}\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\int_1^{e^3}(\log x)^2(\log x)'\,dx=\left[\,\frac{1}{3}(\log x)^3\,\right]_1^{e^3}=9$

よって　　$\boldsymbol{V=9\pi}$

7.96 (1) $g(x)=x^2+ax$，$h(x)=-2x^2+ax$ とおくと

$$g'(x)=2x+a,\quad h'(x)=-4x+a$$

したがって　　$g(0)=h(0)=0$，$g'(0)=h'(0)=a$

よって，C_1 と C_2 は原点 O で共通の接線 $y=ax$ をもつ．

(2) l が原点を通るとき　$y=-ax$

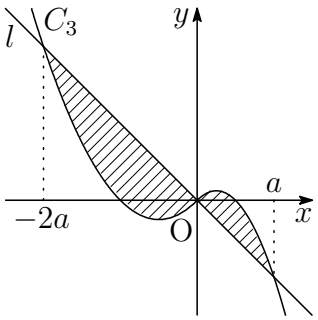
l と C_3 の原点以外の共有点の x 座標は

i) $x<0$ のとき　$x^2+ax=-ax$

これを解いて　　$x=-2a$

ii) $x>0$ のとき　$-2x^2+ax=-ax$

これを解いて　　$x=a$



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2a}^{0} \{-ax-(x^2+ax)\}dx + \int_{0}^{a} \{(-2x^2+ax)-(-ax)\}dx \\ &= -\int_{-2a}^{0} x(x+2a)dx - 2\int_{0}^{a} x(x-a)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{0-(-2a)\}^3 - 2\left(-\frac{1}{6}\right)(a-0)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{3}a^3} \end{aligned}$$

(3) C_3 と l の共有点が 2 個となるとき，C_3 と l は接する．

このとき，接線の傾きが $-a$ であるから，$f'(x)=-a$ とすると

i) $x<0$ のとき　$2x+a=-a$　ゆえに　$x=-a$，$f(-a)=0$

接点 $(-a,\ 0)$ は $l: y=-ax+k$ 上の点であるから

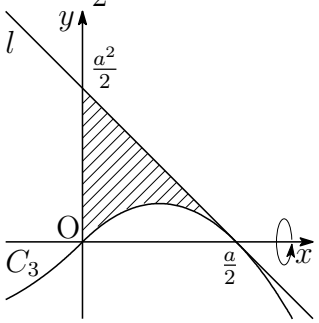
$$0=-a(-a)+k \quad \text{これを解いて} \quad k=-a^2$$

ii) $x \geqq 0$ のとき　$-4x+a=-a$　ゆえに　$x=\dfrac{a}{2}$，$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=0$

接点 $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ は $l: y=-ax+k$ 上の点であるから

$$0=-a\cdot\frac{a}{2}+k \quad \text{これを解いて} \quad k=\frac{a^2}{2}$$

i)，ii) より　　$\boldsymbol{k=-a^2,\ \dfrac{a^2}{2}}$



(4) (3) の結果から，求める体積は，右の図の斜線部分を x 軸の回りに回転させたものであるから，その体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{a^2}{2}\right)^2\frac{a}{2} - \pi\int_{0}^{\frac{a}{2}}(-2x^2+ax)^2dx \\ &= \frac{\pi}{24}a^5 - \pi\int_{0}^{\frac{a}{2}}(4x^4-4ax^3+a^2x^2)dx \\ &= \frac{\pi}{24}a^5 - \pi\left[\frac{4}{5}x^5-ax^4+\frac{a^2}{3}x^3\right]_0^{\frac{a}{2}} = \boldsymbol{\frac{3\pi}{80}a^5} \end{aligned}$$

7.97　(1) $C_1: y=x^2+2ax-2a+1$ と $C_2: y=x^3+1$ から y を消去すると

$$x^3+1=x^2+2ax-2a+1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2-2a)=0 \quad \cdots(*)$$

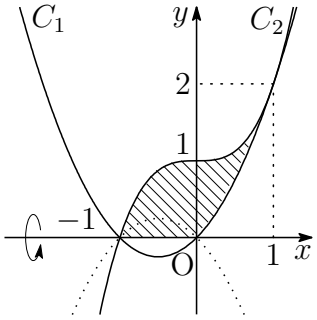
C_1 と C_2 の共有点がちょうど 2 個のとき，方程式 $(*)$ の実数解は 2 個ある．
$a \neq 0$ より，$x^2 - 2a = 0$ は重解をもたないから，方程式 $x^2 - 2a = 0$ は $x = 1$ を解にもつ．したがって

$$1^2 - 2a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2}$$

これを $(*)$ に代入すると　　$(x-1)^2(x+1) = 0$

これは，条件を満たすから　　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から　$C_1 : y = x^2 + x$



$$\begin{aligned}
&|x^3+1|^2 - |x^2+x|^2 \\
=&(x^3+1)^2 - (x^2+x)^2 \\
=&(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2-x+1) \\
=&(x+1)^2(x-1)^2(x^2+1) \geqq 0
\end{aligned}$$

したがって　　$|x^3+1| \geqq |x^2+x|$

求める回転体の体積は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させたものであるから，その体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^{1} (x^3+1)^2\,dx - \int_{0}^{1} (x^2+x)^2\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x^6+2x^3+1)\,dx - \int_{0}^{1} (x^4+2x^3+x^2)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{1} (x^6+1)\,dx - \int_{0}^{1} (x^4+2x^3+x^2)\,dx \\
&= \int_{0}^{1} (2x^6-x^4-2x^3-x^2+2)\,dx \\
&= \left[\frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = \frac{263}{210}
\end{aligned}$$

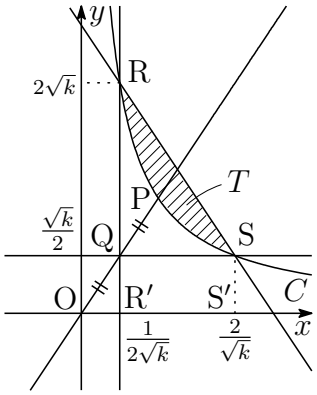
よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{263}{210}\pi}$

7.98　(1) $C : y = \dfrac{1}{x}$ と $y = kx$ から y を消去すると

$$\frac{1}{x} = kx \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = \frac{1}{k} \quad x > 0 \text{ に注意して} \quad x = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

これを C の方程式に代入して　$y = \sqrt{k}$　よって　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{k}}},\ \sqrt{\boldsymbol{k}}\right)$

(2) $y=\dfrac{1}{x}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$



点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}},\ \sqrt{k}\right)$ における C の接線の傾きは

$$y'=-\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}=-k \quad \cdots ①$$

線分 OP の中点 Q は　$\left(\dfrac{1}{2\sqrt{k}},\ \dfrac{\sqrt{k}}{2}\right)$

C 上の点 R の x 座標が $\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$，点 S の y 座標が $\dfrac{\sqrt{k}}{2}$ であるから

$$\mathrm{R}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}},\ 2\sqrt{k}\right),\quad \mathrm{S}\left(\frac{2}{\sqrt{k}},\ \frac{\sqrt{k}}{2}\right)$$

直線 RS の傾きは　$\dfrac{\frac{\sqrt{k}}{2}-2\sqrt{k}}{\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2\sqrt{k}}}=-k \quad \cdots ②$

①，② より，点 P における曲線 C の接線と直線 RS は平行である．

(3) 直線 RS と曲線 C で囲まれた図形の面積を T とする．2 点 R，S から x 軸にそれぞれ垂線 RR′，SS′ を下ろし，台形 RR′S′S の面積を利用すると

$$T=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{k}+\frac{\sqrt{k}}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)-\int_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{k}}{2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{k}}-\Big[\ \log x\ \Big]_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}=\frac{15}{8}-2\log 2$$

したがって，T は，k の値によらず一定である．

(4) 直線 RS は点 $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{k}},\ 2\sqrt{k}\right)$ を通り，傾き $-k$ の方程式であるから

$$y-2\sqrt{k}=-k\left(x-\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)\quad \text{すなわち}\quad y=-k\left(x-\frac{5}{2\sqrt{k}}\right)$$

台形 RR′S′S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi}&=k^2\int_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\left(x-\frac{5}{2\sqrt{k}}\right)^2dx\\&=\frac{k^2}{3}\left[\ \left(x-\frac{5}{2\sqrt{k}}\right)^3\ \right]_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}=\frac{21}{8}\sqrt{k}\end{aligned}$$

曲線 C，2 直線 RR′，SS′ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると

$$\frac{V_2}{\pi}=\int_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\left[\ -\frac{1}{x}\ \right]_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}=\frac{3}{2}\sqrt{k}$$

したがって，求める立体の体積を V とすると

$$V=V_1-V_2=\left(\frac{21}{8}\sqrt{k}-\frac{3}{2}\sqrt{k}\right)\pi=\boldsymbol{\frac{9}{8}\sqrt{k}\pi}$$

補足 台形 RR′S′S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は円錐台である．円錐台の上底を a，下底 b，高さを h とすると，その体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^h\left(\frac{b-a}{h}x+a\right)^2dx=\int_0^h\left\{\left(\frac{b-a}{h}\right)^2x^2+\frac{2a(b-a)}{h}x+a^2\right\}dx\\&=\left[\ \left(\frac{b-a}{h}\right)^2\frac{x^3}{3}+\frac{a(b-a)}{h}x^2+a^2x\ \right]_0^h\\&=h\left\{\frac{1}{3}(b-a)^2+a(b-a)+a^2\right\}=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

上の円錐台の体積の公式に

$$a=\mathrm{RR'}=2\sqrt{k},\ \ b=\frac{\sqrt{k}}{2},\ \ h=\mathrm{R'S'}=\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2\sqrt{k}}=\frac{3}{2\sqrt{k}}$$

を代入すると

$$\frac{V_1}{\pi}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{k}}\left\{(2\sqrt{k})^2+2\sqrt{k}\cdot\frac{\sqrt{k}}{2}+\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2\right\}=\frac{21}{8}\sqrt{k}$$

7.99 (1) $0 \leqq x \leqq 1$ より

$$y = x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2 - x^4} = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

したがって，$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる．

よって，求める座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}\right)$

(2) $x\sqrt{1-x^2} = kx$ より，C と l の原点以外の交点であるから

$$k = \sqrt{1-x^2} \quad \cdots ①$$

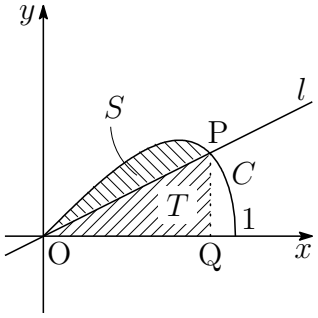
このとき，$0 <\leqq x \leqq 1$ であるから　$\boldsymbol{0 \leqq k < 1}$

① より，$x = \sqrt{1-k^2}$．これを $y = kx$ に代入すると

$$y = k\sqrt{1-k^2}$$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{(\sqrt{1-k^2},\ k\sqrt{1-k^2})}$

(3) 右の図から



$$T = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-k^2}\cdot k\sqrt{1-k^2} = \frac{1}{2}k(1-k^2),$$

$$S + T = \int_0^{\sqrt{1-k^2}} x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{3}(1-k^3)$$

したがって　$|S-T| = |(S+T) - 2T|$

$$= \left|\frac{1}{3}(1-k^3) - 2\cdot\frac{1}{2}k(1-k^2)\right|$$

$$= \frac{1}{3}|2k^3 - 3k + 1|$$

$f(k) = 2k^3 - 3k + 1$ とおくと　$f'(k) = 3(2k^2 - 1)$

(1) の結果から，k の値の範囲は　$\dfrac{1}{4} \leqq k < 1 \quad \cdots ②$

このとき，$f(k)$ の増減表は次のようになる．

k	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$f'(k)$		$-$	0	$+$	
$f(k)$	$\frac{9}{32}$	↘	$1-\sqrt{2}$	↗	(0)

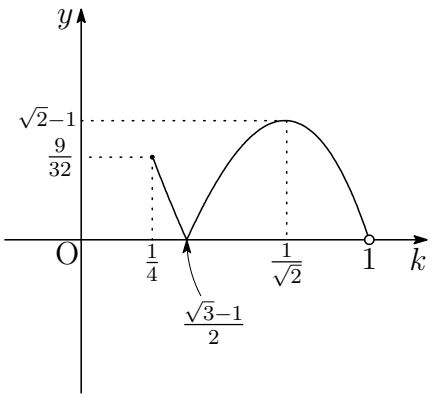
$f(k)=0$ とすると

$$(k-1)(2k^2+2k-1)=0 \quad \text{このとき，②に注意して} \quad k=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$y=|f(k)|$ のグラフは，右の図のようになる．よって，$|S-T|$ は

$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ **のとき　　最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}}$

$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$ **のとき　最小値 0**



(4) 図形 A を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1，△OPQ を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると

$$\begin{aligned}V_1+V_2&=\pi\int_0^{\sqrt{1-k^2}}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)^2dx\\&=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{1-k^2}}=\frac{\pi(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{15}\{5-3(1-k^2)\}\\&=\frac{\pi(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{15}(2+3k^2),\\V_2&=\frac{1}{3}\cdot\pi(k\sqrt{1-k^2})^2\cdot\sqrt{1-k^2}=\frac{1}{3}\pi k^2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$V_1=V_2$ のとき，$V_1+V_2=2V_2$ であるから

$$\frac{\pi(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{15}(2+3k^2)=2\times\frac{1}{3}\pi k^2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}$$

ゆえに　$2+3k^2=10k^2$　このとき，$0\leqq k<1$ に注意して　$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{14}}{7}}$

7.100　(1) $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ を微分すると

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+x)}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	極大 $\sqrt{2}$	↘	1

よって，最大値 $\boldsymbol{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}}$，最小値 $\boldsymbol{f(-1)=-1}$

(2) $f(-x)=-x+\sqrt{1-(-x)^2}=-(x-\sqrt{1-x^2})=-g(x)$

よって，$C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=g(x)$ は原点に関して対称である．

(3) $f(x)-\{-g(x)\}=f(x)+g(x)=2x$ であるから

$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 0}$ のとき $\boldsymbol{f(x) \leqq -g(x)}$，

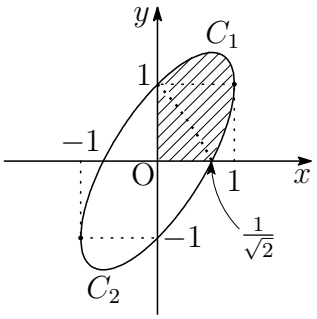
$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 1}$ のとき $\boldsymbol{f(x) \geqq -g(x)}$

$g(x) \geqq 0$ のとき

$x-\sqrt{1-x^2} \geqq 0$　ゆえに　$x \geqq \sqrt{1-x^2} \geqq 0$

両辺を平方して　　$x^2 \geqq 1-x^2$

$0 \leqq x \leqq 1$ に注意して解くと　　$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1}$

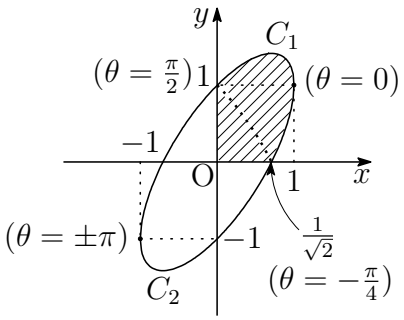


(4) (3) の結果から，求める体積は，上の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転したものであるから

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^1(x+\sqrt{1-x^2}\,)^2dx-\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(x-\sqrt{1-x^2}\,)^2dx\\&=\int_0^1(2x\sqrt{1-x^2}+1)dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(2x\sqrt{1-x^2}-1)dx\\&=\left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1+\left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-x\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\\&=\frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\pi}$

別解 $C(\theta) = (\cos\theta,\ \cos\theta + \sin\theta)$ とおくと，C_1，C_2 は，それぞれ $C(\theta)$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ および $\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分である．



$x = \cos\theta$，$y = \cos\theta + \sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned} y^2\,dx = y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta &= (\cos\theta + \sin\theta)^2(-\sin\theta)\,d\theta \\ &= (-\sin\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \{g(x)\}^2\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta - \int_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi} (-\sin\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta \\ &= \left[\ \cos\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta\ \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 - \left[\ \cos\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta\ \right]_{\frac{7}{4}\pi}^0 \\ &= \left[\ \cos\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta\ \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7}{4}\pi} = \frac{2}{3}(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{2}{3}(1+\sqrt{2})\pi}$

7.101　(1)　$y = -x + 2 - \sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1) \cdots ①$ より

$$y' = -1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0$$

$y' = 0$ とすると　$x - \sqrt{1-x^2} = 0$　これを解いて　$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，関数 ① の増減および凹凸は次のようなる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y''		$+$	$+$	$+$	
y	3	$\searrow$	極小 $2-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

よって　　$\boldsymbol{x=-1}$ のとき**最大値 3**,

$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき**最小値 $\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$**

(2) $y=-x+2+\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqq x\leqq 1)\cdots$② より

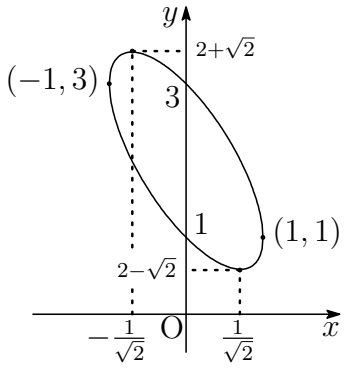
$$y'=-1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y''=-\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=-\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}<0$$

$y'=0$ とすると　$x+\sqrt{1-x^2}=0$　これを解いて　$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，関数 ② の増減および凹凸は次のようなる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	3	$\nearrow$	極大 $2+\sqrt{2}$	$\searrow$	1



① と ② によって囲まれた図形 D は右の図のようになる．また，

① より $x=0$ のとき　$y=1$

② より $x=0$ のとき　$y=3$

よって，D は，y 軸と **(0, 1)**, **(0, 3)** で交わる．

(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-1}^{1}\{(-x+2+\sqrt{1-x^2})^2-(-x+2-\sqrt{1-x^2})^2\}dx\\&=4\pi\int_{-1}^{1}(-x+2)\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=-4\pi\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx+8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=8\pi\times\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{4\pi^2}\end{aligned}$$

7.102 (1) $C:y=\dfrac{4}{x+1}+x$，$L:y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{2}$ から y を消去すると

$$\frac{4}{x+1}+x=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}\quad\text{整理すると}\quad(x-3)(3x+1)=0$$

$x\geqq 0$ に注意してこれを解くと　$x=3$　よって　$\mathbf{P(3,\ 4)}$

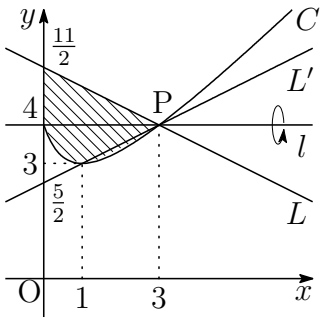
(2) 求める直線を L' とすると，L' は点 P を通り，傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y-4=\frac{1}{2}(x-3)\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}$$

(3) $f(x)=\dfrac{4}{x+1}+x$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ とおくと

$$4-f(x)=4-\left(\frac{4}{x+1}+x\right)=\frac{x(3-x)}{x+1},$$

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\frac{4}{x+1}+x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\\&=\frac{(x-1)(x-3)}{2(x+1)}\end{aligned}$$



ゆえに　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$g(x)\leqq f(x)\leqq 4$,

$1\leqq x\leqq 3$ のとき　$f(x)\leqq g(x)\leqq 4$

したがって，求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{4-g(x)\}^2\,dx + \int_1^3 \{4-f(x)\}^2\,dx \\ &= \int_0^1 \left\{4-\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\right\}^2 dx + \int_1^3 \left\{(4-x)-\frac{4}{x+1}\right\}^2 dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4}(x-3)^2\,dx + \int_1^3 \left\{(x-4)^2+\frac{8(x-4)}{x+1}+\frac{16}{(x+1)^2}\right\} dx \\ &= \left[\ \frac{1}{12}(x-3)^3\ \right]_0^1 + \left[\ \frac{(x-4)^3}{3}+8\{x-5\log(x+1)\}-\frac{16}{x+1}\ \right]_1^3 \\ &= \frac{121}{4}-40\log 2\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\left(\dfrac{121}{4}-40\log 2\right)\pi}$

7.103　(1)　$2+\sin x>0$ であるから

$$\begin{aligned}S_n &= \int_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi} (2+\sin x)\,dx = \left[\ 2x-\cos x\ \right]_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi} \\ &= 2\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-\cos\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi+1 = \boldsymbol{2\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-\frac{(-1)^n}{2}+1}\end{aligned}$$

(2)　求める回転体の体積 V_n は

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\pi} &= \int_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi} (2+\sin x)^2\,dx = \int_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi} (4+4\sin x+\sin^2 x)\,dx \\ &= \int_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi} \left(4+4\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx \\ &= \left[\ \frac{9}{2}x-4\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\ \right]_0^{\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi} \\ &= \frac{9}{2}\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-4\cos\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi+4-\frac{1}{4}\sin 2\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi \\ &= \frac{9}{2}\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-2(-1)^n+4-\frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_n=\pi\left\{\dfrac{9}{2}\left(n+\dfrac{1}{3}\right)\pi-2(-1)^n+4-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right\}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\left\{\dfrac{9}{2}\left(n+\dfrac{1}{3}\right)\pi-2(-1)^n+4-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right\}}{2\left(n+\dfrac{1}{3}\right)\pi-\dfrac{(-1)^n}{2}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\left\{\dfrac{9}{2}\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)\pi-\dfrac{2(-1)^n}{n}+\dfrac{4}{n}-\dfrac{\sqrt{3}}{8n}\right\}}{2\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)\pi-\dfrac{(-1)^n}{2n}+\dfrac{1}{n}}=\boldsymbol{\frac{9}{4}\pi}$$

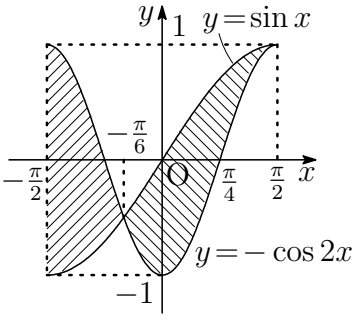
7.104 (1) $\sin x+\cos 2x\geqq 0$ より　$\sin x+(1-2\sin^2 x)\geqq 0$

$(\sin x-1)(2\sin x+1)\leqq 0$

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ に注意して　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin x\leqq 1$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}}$

(2) 求める面積 S は右の図の斜線部分であるから



$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-(-\cos 2x)|dx$$

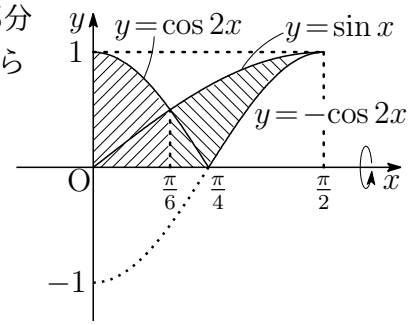
$$=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(\sin x+\cos 2x)dx+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos 2x)dx$$

関数 $\sin x+\cos 2x$ の原始関数の 1 つを $F(x)=-\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ とおくと

$$F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4},\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

よって　$S=F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-2F\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(3) 求める回転体の体積 V は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転させたものであるから



$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2x)^2\,dx$$

このとき

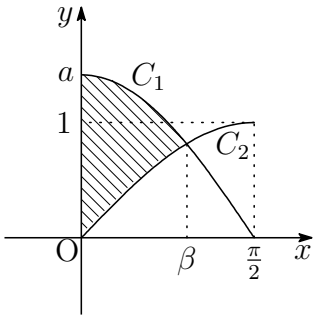
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2x)^2\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)\pi}$

7.105　(1) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における 2 つの曲線を



$$C_1:y=a\cos x,\quad C_2:y=\sin x$$

とし，これらの交点の x 座標を β とすると

$$a\cos\beta=\sin\beta$$

ゆえに　　$\sin\beta-a\cos\beta=0$　　$\cdots$①

右の図の斜線部分の面積は

$$\int_0^{\beta}(a\cos x-\sin x)\,dx=\left[a\sin x+\cos x\right]_0^{\beta}$$
$$=a\sin\beta+\cos\beta-1$$

条件により，これが $\sqrt{3}-1$ に等しいから

$$a\sin\beta+\cos\beta-1=\sqrt{3}-1\quad\text{ゆえに}\quad a\sin\beta+\cos\beta=\sqrt{3}\quad\cdots②$$

次の等式

$$(\sin\beta-a\cos\beta)^2+(a\sin\beta+\cos\beta)^2=a^2+1$$

に ①，② を代入すると

$$3=a^2+1\quad\text{このとき，}a>0\text{ により}\quad\boldsymbol{a=\sqrt{2}}$$

(2) $\begin{cases} y=\sqrt{2}\cos x & \cdots ① \\ y=\tan x & \cdots ② \end{cases}$ とおく．①，② から y を消去すると

$$\sqrt{2}\cos x=\tan x \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{2}\cos^2 x=\sin x$$

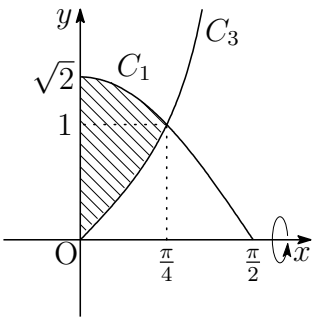
整理すると　$\sqrt{2}\sin^2 x+\sin x-\sqrt{2}=0$

したがって　$(\sin x+\sqrt{2})(\sqrt{2}\sin x-1)=0$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意して，これを解くと　$x=\dfrac{\pi}{4}$

これを ② に代入して　$y=1$　よって，求める交点は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)}$

(3) $C_3 : y=\tan x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．右の図から求める回転体の体積を V とすると



$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2 x-\tan^2 x)\,dx \\ &=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2x-\frac{1}{\cos^2 x}+2\right)dx \\ &=\pi\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\tan x+2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(\pi-1)} \end{aligned}$$

7.106　(1) $f(x)=x-\log x$ を微分すると

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	1	↗

よって，最小値は　$\boldsymbol{f(1)=1}$

(2)(ア) $\begin{cases} y=a\sin x & \cdots ① \\ y=\tan x & \cdots ② \end{cases}$ とおく．①，② から y を消去すると

$$a\sin x=\tan x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x\left(a-\frac{1}{\cos x}\right)=0$$

したがって，①，② の交点の x 座標は

$$x=0,\ \beta \quad \left(0<\beta<\frac{\pi}{2},\ \cos\beta=\frac{1}{a}\right)$$

また，$0 \leqq x \leqq \beta$ において

$$a\sin x - \tan x = \sin x\left(a - \frac{1}{\cos x}\right) \geqq 0$$

$0 \leqq x \leqq \beta$ において，$y = a\sin x$ と $y = \tan x$ で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\beta}(a\sin x - \tan x) &= \Big[-a\cos x + \log\cos x\Big]_0^{\beta}\\ &= a(1-\cos\beta) + \log\cos\beta\\ &= a\left(1 - \frac{1}{a}\right) + \log\frac{1}{a} = a - \log a - 1\end{aligned}$$

これが $1 - \log 2$ に等しいから

$$a - \log a - 1 = 1 - \log 2 \quad \text{ゆえに} \quad a - \log a = 2 - \log 2$$

上の第 2 式から　　$f(a) = f(2)$

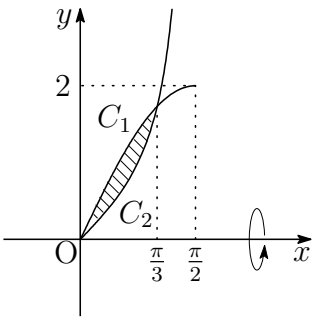
(1) の増減表により，$x > 1$ において，$f(x)$ は単調増加であるから，上式をみたす a $(a > 1)$ の値は

$$\boldsymbol{a = 2}$$

(イ) $a = 2$ より，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$$\cos\beta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \frac{\pi}{4}$$

$C_1 : y = 2\sin x$，$C_2 : y = \tan x$ とする．
C_1，C_2 によって囲まれた図形 D は，右の図の斜線部分である．



よって，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{(2\sin x)^2 - \tan^2 x\right\}dx\\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(3 - 2\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx\\ &= \pi\Big[\,3x - \sin 2x - \tan x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \boldsymbol{\pi\left(\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)}\end{aligned}$$

7.107　(1)　$u' = e^{\tan t}(\tan t)' = \dfrac{\boldsymbol{e^{\tan t}}}{\boldsymbol{\cos^2 t}}$

(2) $u = e^{\tan t}$ とおくと，(1) の結果および $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ に注意して

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_{-x}^{x} \frac{1}{e^{\tan t}(1 + e^{\tan t})} \cdot \frac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}\, dt \\ &= 1 + \int_{e^{\tan(-x)}}^{e^{\tan x}} \frac{1}{u(1+u)}\, du \\ &= 1 + \left[\log \left| \frac{u}{1+u} \right| \right]_{e^{-\tan x}}^{e^{\tan x}} \\ &= 1 + \log \frac{e^{\tan x}}{1 + e^{\tan x}} - \log \frac{e^{-\tan x}}{1 + e^{-\tan x}} \\ &= 1 + \log e^{\tan x} \\ &= \boldsymbol{1 + \tan x} \end{aligned}$$

別解 $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\, dt = \int_{-x}^{0} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\, dt \quad \cdots ①$

$\displaystyle\int_{-x}^{0} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\, dt$ において $t = -s$ とおくと　　$\dfrac{dt}{ds} = -1$

また，t と s の対応は右のようになる．

t	$-x \longrightarrow 0$
s	$x \longrightarrow 0$

よって

$$\begin{aligned} \int_{-x}^{0} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\, dt &= \int_{x}^{0} \frac{1 + \tan^2(-s)}{1 + e^{\tan(-s)}} \cdot (-1)\, ds \\ &= \int_{0}^{x} \frac{1 + \tan^2 s}{1 + e^{-\tan s}}\, ds \\ &= \int_{0}^{x} \frac{e^{\tan s}(1 + \tan^2 s)}{e^{\tan s} + 1}\, ds \\ &= \int_{0}^{x} \frac{e^{\tan t}(1 + \tan^2 t)}{1 + e^{\tan t}}\, dt \end{aligned}$$

ゆえに，① から次の等式が得られる．

$$\begin{aligned} \int_{-x}^{x} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\, dt &= \int_{0}^{x} \frac{e^{\tan t}(1 + \tan^2 t)}{1 + e^{\tan t}}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + e^{\tan t}}\, dt \\ &= \int_{0}^{x} (1 + \tan^2 t)\, dt \\ &= \int_{0}^{x} \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \left[\tan t \right]_{0}^{x} = \tan x \end{aligned}$$

したがって　　$\boldsymbol{f(x) = 1 + \tan x}$

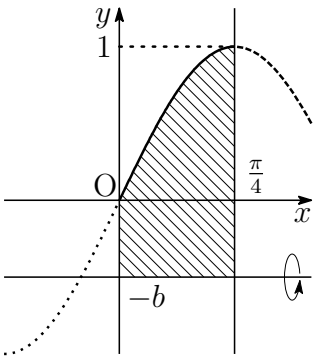
(3) 求める回転体の体積を V とすると，(2) の結果より

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan x)^2\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+2\tan x+\tan^2 x)\, dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\tan x\right) dx = \pi \Big[\ \tan x - 2\log|\cos x|\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi\left(1-2\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{\pi(1+\log 2)} \end{aligned}$$

7.108 (1) $\displaystyle\int \tan x\, dx = \boldsymbol{-\log|\cos x| + C}$ **(C は積分定数)**

$$\int \tan^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right) dx = \boldsymbol{\tan x - x + C}$$ **(C は積分定数)**

(2) V_1 は右の図の斜線部分を $y=-b$ のまわりに 1 回転したものであるから



$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x+b)^2\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(b^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x+2b\sin 2x\right) dx \\ &= \left[\ \left(b^2+\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{8}\sin 4x-b\cos 2x\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8}(2b^2+1)+b \end{aligned}$$

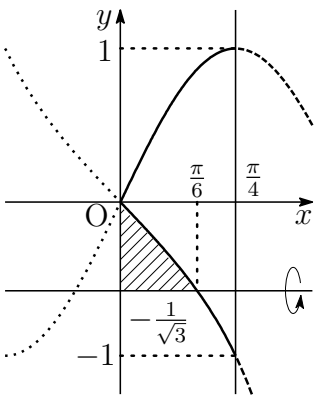
よって $\quad \boldsymbol{V_1 = \dfrac{\pi^2}{8}(2b^2+1)+b\pi}$

(3) $$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= -\tan x+\sin 2x \\ &= -\tan x+2\sin x\cos x \\ &= -\tan x+2\tan x\cos^2 x \\ &= \tan x(-1+2\cos^2 x) = \tan x\cos 2x \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において $\quad \tan x \geqq 0$，$\cos 2x \geqq 0$

よって $\quad f(x)+g(x) \geqq 0$

(4) 右の図の斜線部分を $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のまわりに 1 回転させた立体の体積を V とすると



$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-\tan x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\tan^2x-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x+\frac{1}{3}\right)dx\\&=\left[-\frac{2}{3}x+\tan x+\frac{2}{\sqrt{3}}\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\&=-\frac{\pi}{9}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\log\frac{3}{4}\right)\end{aligned}$$

ゆえに　　$V=-\dfrac{\pi^2}{9}+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\left(1+\log\dfrac{3}{4}\right)$

$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときの V_1 を V_0 とおくと　$V_0=\dfrac{5}{24}\pi^2+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$

よって，求める面積 V_2 は

$$\begin{aligned}V_2&=V_0-V\\&=\left(\frac{5}{24}\pi^2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)-\left\{-\frac{\pi^2}{9}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(1+\log\frac{3}{4}\right)\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{23}{72}\pi^2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\log\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

7.109　(1) $y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$

$x=1$ のとき，$y'=1$ であるから，l_1 は点 $(1,\ 0)$ を通り，傾き 1 の直線.

したがって　　$y-0=1(x-1)$　すなわち　$\boldsymbol{y=x-1}$

(2) V_1 は底面の半径および高さがともに $e-1$ の直円錐の体積であるから

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\pi(e-1)^2\cdot(e-1)=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}(e-1)^3}$$

(3) $xP(\log x)$ を微分すると

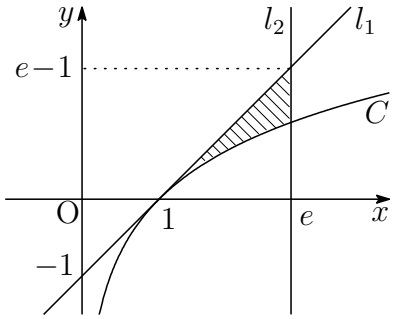
$$\{xP(\log x)\}'=P(\log x)+x\cdot P'(\log x)\frac{1}{x}=P(\log x)+P'(\log x)$$

上式が $(\log x)^2$ に等しいので，$P(x)+P'(x)=x^2$ が成り立つ．これに $P(x)=ax^2+bx+c$，$P'(x)=2ax+b$ を代入すると

$(ax^2+bx+c)+(2ax+b)=x^2$　すなわち　$(a-1)x^2+(b+2)x+(b+c)=0$

上式は x に関する恒等式であるから　　$\boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=2}$

(4) $y=\log x\ (1\leqq x\leqq e)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_2 とすると，(3) の結果から



$$\frac{V_2}{\pi}=\int_1^e(\log x)^2\,dx$$
$$=\Big[\ xP(\log x)\ \Big]_1^e=eP(1)-P(0)$$

$P(x)=x^2-2x+2$ より，$P(1)=1$，$P(0)=2$ であるから

$$\frac{V_2}{\pi}=e\cdot1-2\quad\text{ゆえに}\quad V_2=\pi(e-2)$$

よって　　$V=V_1-V_2=\dfrac{\pi}{3}(e-1)^3-\pi(e-2)$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}(e^3-3e^2+5)}$$

7.110 (1)　　$\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=(x+1)f(x)-2\log2-x+1\quad\cdots(*)$

$(*)$ に $x=1$ を代入すると

$$0=2f(1)-2\log2\quad\text{すなわち}\quad f(1)=\log2\quad\cdots①$$

$(*)$ の両辺を微分すると $(x>0)$

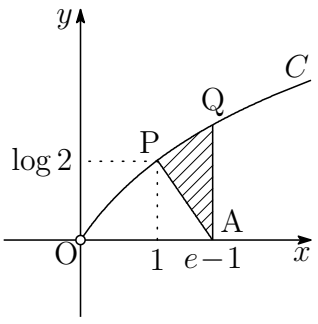
$$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-1\quad\text{ゆえに}\quad f'(x)=\frac{1}{x+1}$$

これを積分すると　$f(x)=\log(x+1)+C$　(C は積分定数)

① より　$f(1)=\log2+C=\log2$　ゆえに　$C=0$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=\log(x+1)}$

(2) 図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積である．



求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_1^{e-1}\{\log(x+1)\}^2dx-\frac{\pi}{3}(\log 2)^2(e-2)\\&=\pi\Big[\ (x+1)\{(\log(x+1))^2-2\log(x+1)+2\}\ \Big]_1^{e-1}\\&\qquad\qquad-\frac{\pi}{3}(\log 2)^2(e-2)\\&=\pi\left\{e-2(\log 2)^2+4\log 2-4\right\}-\frac{\pi}{3}(\log 2)^2(e-2)\\&=\boldsymbol{\pi\left\{e-\frac{e+4}{3}(\log 2)^2+4\log 2-4\right\}}\end{aligned}$$

7.111 (1) $f(x)=a(e^x+e^{-x})$ より　$f'(x)=a(e^x-e^{-x})$

$$f(\log 3)=a(e^{\log 3}+e^{-\log 3})=a\left(3+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}a$$
$$f'(\log 3)=a(e^{\log 3}-e^{-\log 3})=a\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}a$$

ゆえに $C:y=f(x)$ の点 $(\log 3,\ f(\log 3))$ における接線は

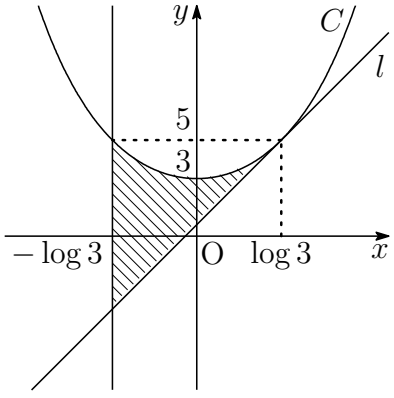
$$y-\frac{10}{3}a=\frac{8}{3}a(x-\log 3)\quad\text{すなわち}\quad y=\frac{8}{3}ax+\left(\frac{10}{3}-\frac{8}{3}\log 3\right)a$$

これが $y=4x+b$ と一致するから　$\dfrac{8}{3}a=4,\quad\left(\dfrac{10}{3}-\dfrac{8}{3}\log 3\right)a=b$

よって　　$\boldsymbol{a=\frac{3}{2},\ b=5-4\log 3}$

(2) 求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\log 3}^{\log 3}\left\{\frac{3}{2}(e^x+e^{-x})-(4x+b)\right\}dx\\&=2\int_0^{\log 3}\left\{\frac{3}{2}(e^x+e^{-x})-b\right\}dx\\&=\Big[\ 3(e^x-e^{-x})-2bx\ \Big]_0^{\log 3}\\&=8-2b\log 3=8-2(5-4\log 3)\log 3\\&=\boldsymbol{8-10\log 3+8(\log 3)^2}\end{aligned}$$



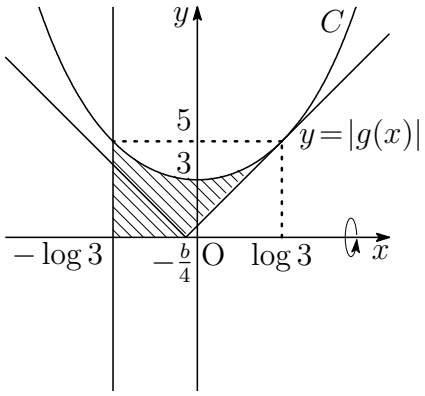
(3) (1) の結果から　$b=4\left(\dfrac{5}{4}-\log 3\right)=4\left(\dfrac{5}{4}-1.1\right)>0$

$f(x) \geqq 4x+b$ および C は y 軸に関して対称であるから　$f(x) \geqq 4|\,x\,|+b$

このとき，$|4x+b| \leqq |4x|+|\,b\,| = 4|\,x\,|+b$ であるから　$f(x) \geqq |4x+b|$

$y=|4x+b|$ の x 軸との交点の x 座標は　$-\dfrac{b}{4} = \log 3 - \dfrac{5}{4}$

求める体積 V は，図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた体積である．



したがって

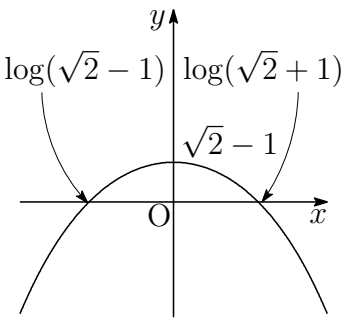
$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\log_3}^{\log 3} \left\{\frac{3}{2}(e^x+e^{-x})\right\}^2 dx - \frac{1}{3}\left\{\log 3 - \left(-\frac{b}{4}\right)\right\}\cdot\pi\cdot 5^2 \\
&= \frac{9}{4}\pi \int_0^{\log 3} (2e^{2x}+4+2e^{-2x})dx - \frac{1}{3}\left\{\log 3 - \left(\log 3 - \frac{5}{4}\right)\right\}\cdot\pi\cdot 5^2 \\
&= \frac{9}{4}\pi \Big[\, e^{2x}+4x-e^{-2x} \,\Big]_0^{\log 3} - \frac{125}{12}\pi \\
&= \frac{9}{4}\pi\left(9+4\log 3-\frac{1}{9}\right) - \frac{125}{12}\pi \\
&= \boldsymbol{\left(\frac{115}{12}+9\log 3\right)\pi}
\end{aligned}$$

7.112　(1)　$f(x) = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ を微分すると

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = -\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{2e^x}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\sqrt{2}-1$	↘



したがって，グラフの概形は右のようになる．

$f(x)=0$ とすると，$e^x+e^{-x}-2\sqrt{2}=0$ となるから

$$(e^x)^2-2\sqrt{2}e^x+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad e^x=\sqrt{2}\pm 1$$

$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は　　$\boldsymbol{x=\log(\sqrt{2}\pm 1)}$

(2) $1+\{f'(x)\}^2=1+\dfrac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2=\dfrac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$

$y=f(x)$ は y 軸に関して対称であるから，$\alpha=\log(1+\sqrt{2})$ とおくと

$$\ell=2\int_0^{\alpha}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^{\alpha}(e^x+e^{-x})\,dx$$
$$=\Big[\ e^x-e^{-x}\ \Big]_0^{\alpha}=e^{\alpha}-e^{-\alpha}=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)=\mathbf{2}$$

(3) 求める立体の体積 V は

$$\frac{V}{\pi}=2\int_0^{\alpha}\{f(x)\}^2\,dx=2\int_0^{\alpha}\left\{2-\sqrt{2}(e^x+e^{-x})+\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2\right\}dx$$
$$=\int_0^{\alpha}\left\{\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})-2\sqrt{2}(e^x+e^{-x})+5\right\}dx$$
$$=\left[\ \frac{1}{4}(e^{2x}-e^{2x})-2\sqrt{2}(e^x-e^{-x})+5x\ \right]_0^{\alpha}$$
$$=\frac{1}{4}(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})-2\sqrt{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})+5\alpha$$
$$=\frac{1}{4}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\alpha}-e^{-\alpha})-2\sqrt{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})+5\alpha$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2-2\sqrt{2}\cdot 2+5\log(\sqrt{2}+1)=5\log(\sqrt{2}+1)-3\sqrt{2}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\{5\log(\sqrt{2}+1)-3\sqrt{2}\}\pi}$

7.113 (1) T の表す領域は

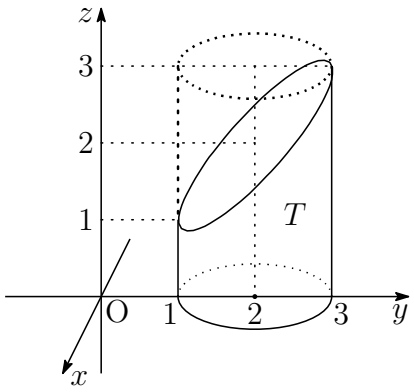
$$x^2+(y-2)^2\leqq 1,\quad 0\leqq z\leqq y$$

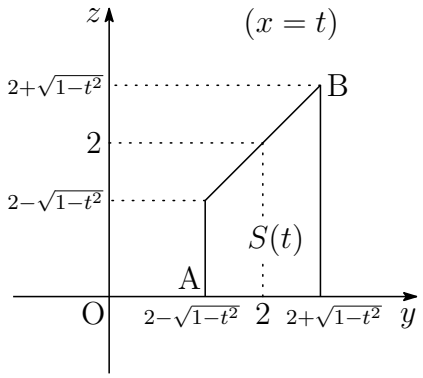
T を平面 $x=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの断面を表す領域は

$$x=t,\quad 2-\sqrt{1-t^2}\leqq y\leqq 2+\sqrt{1-t^2},\quad 0\leqq z\leqq y$$

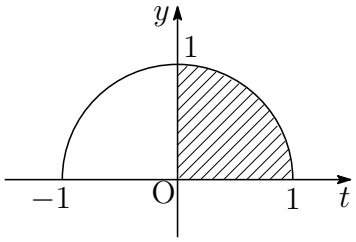
右下の図で中央の z 座標が 2 であることに注意して

$$S(t)=2\{(2+\sqrt{1-t^2})-(2-\sqrt{1-t^2})\}=\boldsymbol{4\sqrt{1-t^2}}$$





右の図の斜線部分の面積は



$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

よって，求める T の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \int_{-1}^{1} S(t)\,dt = \int_{-1}^{1} 4\sqrt{1-t^2}\,dt = 8\int_0^1 \sqrt{1-t^2} = 8\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{2\pi}$$

(2) 2 点 A，B を (1) の図のようにとると

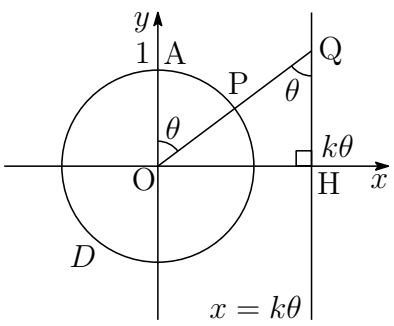
$$\mathrm{OA} = 2-\sqrt{1-t^2}, \quad \mathrm{OB} = \sqrt{2}(2+\sqrt{1-t^2})$$

求める立体の体積を V_2 とすると，T が yz 平面に関して対称であるから

$$\frac{V_2}{2\pi} = \int_0^1 (\mathrm{OB}^2 - \mathrm{OA}^2)\,dt = \int_0^1 \{2(2+\sqrt{1-t^2})^2 - (2-\sqrt{1-t^2})^2\}\,dt$$
$$= \int_0^1 (5-t^2)\,dt + 12\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \left[\,5t - \frac{t^3}{3}\,\right]_0^1 + 12\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{14}{3} + 3\pi$$

よって　　$V_2 = \boldsymbol{2\pi}\left(\dfrac{\boldsymbol{14}}{\boldsymbol{3}} + \boldsymbol{3\pi}\right)$

7.114 (1) 直線 $x = k\theta$ と x 軸との交点を H とすると，△OQH について，$\mathrm{OQ}\sin\theta = \mathrm{OH}$ であるから



$$r(\theta)\sin\theta = k\theta \quad \text{ゆえに} \quad r(\theta) = \frac{k\theta}{\sin\theta}$$

よって　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0} r(\theta) = \lim_{\theta\to+0} k\cdot\frac{\theta}{\sin\theta} = \boldsymbol{k}$

(2) $r(\theta)=\dfrac{k\theta}{\sin\theta}$ を微分すると

$$r'(\theta)=\frac{k(\sin\theta-\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta}=\frac{k\cos\theta(\tan\theta-\theta)}{\sin^2\theta}$$

ここで，$h(\theta)=\tan\theta-\theta$ とすると

$$h'(\theta)=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\tan^2\theta$$

上式から，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，$h'(\theta)>0$ であるから

$$h(\theta)>h(0)\quad \text{すなわち}\quad h(\theta)>0$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき　　$r'(\theta)=\dfrac{k\cos\theta h(\theta)}{\sin^2\theta}>0$

$r(\theta)=\dfrac{k\theta}{\sin\theta}$ は単調増加であるから，点 Q がつねに D の内部にあるとき

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}r(\theta)<1\quad \text{ゆえに}\quad \frac{\pi}{2}k<1$$

このとき，$k>0$ に注意して　　$\boldsymbol{0<k<\dfrac{2}{\pi}}$

(3) (1) の図から，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は

$$x=k\theta,\quad y=r(\theta)\cos\theta=\frac{k\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=\frac{k\theta}{\tan\theta}$$

上の 2 式から θ を消去すると　$y=\dfrac{x}{\tan\frac{x}{k}}$　　ゆえに　$f(x)=\dfrac{x}{\tan\frac{x}{k}}$

したがって　　$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{k}}$

$g(x)=\left(\tan\dfrac{x}{k}\right)^{-1}$ を微分すると

$$g'(x)=-\left(\tan\frac{x}{k}\right)^{-2}\left(\tan\frac{x}{k}\right)'=-\frac{\cos^2\frac{x}{k}}{\sin^2\frac{x}{k}}\cdot\frac{\frac{1}{k}}{\cos^2\frac{x}{k}}=-\frac{1}{k\sin^2\frac{x}{k}}$$

$g'(x)=-\dfrac{1}{k}\left(\sin\dfrac{x}{k}\right)^{-2}$ を微分すると

$$g''(x)=\frac{2}{k}\left(\sin\frac{x}{k}\right)^{-3}\left(\sin\frac{x}{k}\right)'=\frac{2}{k}\cdot\frac{1}{\sin^3\frac{x}{k}}\cdot\frac{1}{k}\cos\frac{x}{k}=\frac{2}{k^2}\cdot\frac{\cos\frac{x}{k}}{\sin^3\frac{x}{k}}$$

このとき，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ および $x=k\theta$ から

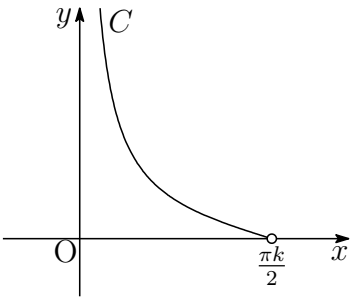
$$0<x<\frac{\pi}{2}k$$

この範囲において　$g'(x)<0$，$g''(x)>0$

ゆえに，$g(x)$ は単調減少で，下に凸である．

また　$\lim_{x\to+0} g(x)=\infty$，$\lim_{x\to\frac{\pi k}{2}-0} g(x)=0$

よって，曲線 C のグラフの概形は右の図のようになる．



(4) 求める立体の体積を V とすると　$V=\pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}k}^{\frac{\pi}{3}k}\frac{1}{\tan^2\frac{x}{k}}\,dx$

$x=k\theta$ より　$\dfrac{dx}{d\theta}=k$

x	$\frac{\pi}{4}k \longrightarrow \frac{\pi}{3}k$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{k}{\tan^2\theta}\,d\theta=\pi k\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)d\theta$

$=\pi k\left[-\dfrac{1}{\tan\theta}-\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\pi k\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{\pi}{12}\right)}$

7.115　(1) $\dfrac{\sin x}{x}=0$ より　$x=n\pi$ (n は整数)　したがって　$\boldsymbol{a_n=n\pi}$

$$\frac{V_n}{\pi}=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left(\frac{1}{x}\right)'\sin^2x\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{x}\sin^2x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{x}(\sin^2x)'\,dx$$

$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x}\,dx=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin 2x}{x}\,dx$$

よって　$\boldsymbol{V_n=\pi\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin 2x}{x}\,dx}$

(2) $n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ において，$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\leqq\dfrac{1}{x^2}$ であるから

$$V_n=\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$$

$$\leqq\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{x^2}\,dx=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

別解　$n\pi \leqq x \leqq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ のとき　$\dfrac{\sin 2x}{x} \geqq \dfrac{\sin 2x}{n\pi}$

$\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi$ のとき　$\dfrac{\sin 2x}{x} \geqq \dfrac{\sin 2x}{(n+1)\pi}$

(1) の結果を用いると

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin 2x}{x}\,dx + \pi \int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin 2x}{x}\,dx \\ &\leqq \pi \int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin 2x}{n\pi}\,dx + \pi \int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin 2x}{(n+1)\pi}\,dx \\ &= \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} V_k \leqq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

よって　$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

7.116　(1)　$\dfrac{1}{\sin x \cos x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \tan x + \dfrac{1}{\tan x}$ より

$$y = \tan x + \frac{1}{\tan x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

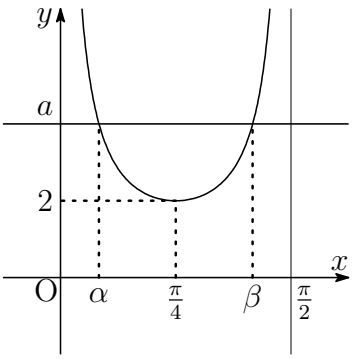
とおく．上式と $y = a$ から y を消去すると

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = a \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2 x - a\tan x + 1 = 0 \quad \cdots(*)$$

この方程式の解が α，β であるから $(\alpha < \beta)$，$a > 2$ に注意して

$$\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2}, \quad \tan\beta = \frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}}$$

(2) $(*)$ の解と係数の関係により，$\tan\alpha\tan\beta=1$ に注意すると，求める面積 S は，



$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sin x\cos x}dx=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx\\&=\int_\alpha^\beta\frac{(\tan x)'}{\tan x}dx=\Big[\ \log\tan x\ \Big]_\alpha^\beta\\&=\log\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\log\tan^2\beta\\&=\boldsymbol{2\log\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}\end{aligned}$$

(3) $\tan\alpha\tan\beta=1$，$\tan\beta-\tan\alpha=\sqrt{a^2-4}$ より，求める体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int_\alpha^\beta\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx\\&=\int_\alpha^\beta\left(1+\frac{1}{\tan^2 x}\right)(\tan x)'dx=\int_\alpha^\beta\left\{(\tan x)'+\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}\right\}dx\\&=\left[\ \tan x-\frac{1}{\tan x}\ \right]_\alpha^\beta=\left(\tan\beta-\frac{1}{\tan\beta}\right)-\left(\tan\alpha-\frac{1}{\tan\alpha}\right)\\&=(\tan\beta-\tan\alpha)-(\tan\alpha-\tan\beta)=2(\tan\beta-\tan\alpha)=2\sqrt{a^2-4}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=2\pi\sqrt{a^2-4}}$

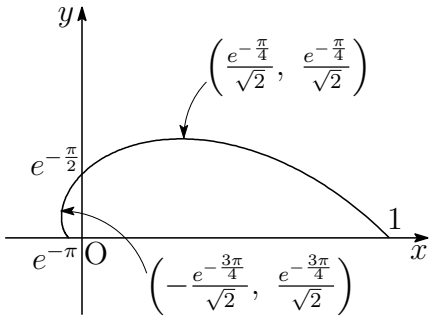
7.117　(1) $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$ を t で微分すると

$$\begin{aligned}x'&=-e^{-t}(\sin t+\cos t)=-\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\\y'&=-e^{-t}(\sin t-\cos t)=-\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

x，y の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
x'		$-$	0	$+$	
x	1	↘	$-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↗	$-e^{-\pi}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↘	0



x は $t=\dfrac{3\pi}{4}$ で最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ をとり，y は $t=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ をとる．

したがって，C の概形は右の図のようになる．

(2) $$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{(r(t))^3\}' \sin^2 t \cos t \, dt$$
$$= \frac{1}{3} \Big[\{r(t)\}^3 \sin^2 t \cos t \Big]_0^{\pi} - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 (\sin^2 t \cos t)' \, dt$$
$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t) \, dt$$
$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \{2 \sin t (1 - \sin^2 t) - \sin^3 t\} \, dt$$
$$= \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

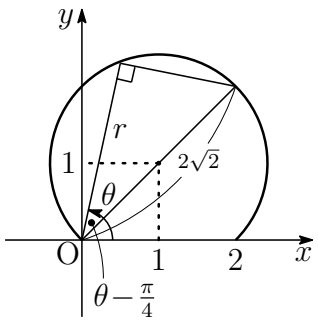
(3) $y_1 = e^{-t} \sin t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{3\pi}{4} \right)$, $y_2 = e^{-t} \sin t \quad \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq t \leqq \pi \right)$,
$\alpha = -\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$, $\beta = e^{-\pi}$ とおくと

$$V = \pi \int_{\alpha}^{1} {y_1}^2 \, dx - \pi \int_{\alpha}^{\beta} {y_2}^2 \, dx$$
$$= \pi \int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} y^2 \frac{dx}{dt} \cdot dt - \pi \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} y^2 \frac{dx}{dt} \cdot dt$$
$$= -\pi \int_0^{\pi} y^2 \frac{dx}{dt} dt = -\int_0^{\pi} (r(t) \sin t)^2 \{r(t) \cos t\}' dt$$
$$= -\pi \int_0^{\pi} (r(t))^2 \sin^2 t \cdot \{r'(t) \cos t - r(t) \sin t\} \, dt$$
$$= -\pi \int_0^{\pi} (r(t))^2 r'(t) \sin^2 t \cos t \, dt + \pi \int_0^{\pi} (r(t))^3 \sin^3 t \, dt$$

これに (2) の等式を適用すると

$$V = -\pi \int_0^{\pi} (r(t))^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt + \pi \int_0^{\pi} (r(t))^3 \sin^3 t \, dt$$
$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} (r(t))^3 \sin t \, dt = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} e^{-3t} \sin t \, dt$$

7.118 (1) $r = 2(\cos\theta + \sin\theta) = 2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$



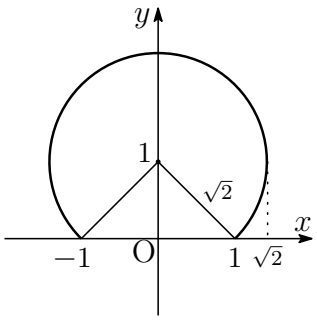
したがって，描く曲線は，点 $(1,\ 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の一部であり，

$\theta = 0$ のとき　$r = 2$　すなわち　$(2,\ 0)$

$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$r = 0$　すなわち　$(0,\ 0)$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ であるから，右の図のようになる．

(2) 半径 $\sqrt{2}$，中心角が $\dfrac{3}{2}\pi$ の扇形の面積と底辺が 2 で高さが 1 の三角形の面積の和であるから



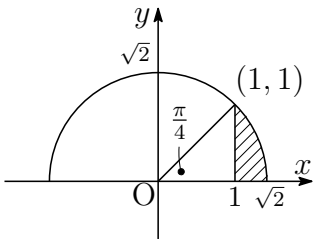
$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{3}{2}\pi + 1}$$

(3) 図形 D は y 軸に関して対称であるから，求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_0^{\sqrt{2}} (1+\sqrt{2-x^2}\,)^2 dx - \int_1^{\sqrt{2}} (1-\sqrt{2-x^2}\,)^2 \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (3-x^2+2\sqrt{2-x^2}\,) dx - \int_1^{\sqrt{2}} (3-x^2-2\sqrt{2-x^2}\,) dx \\ &= \int_0^1 (3-x^2)\,dx + 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx + 2\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx\end{aligned}$$

ここで，$S_1 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}$，$S_2 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}$ とおくと

S_1 は半径 $\sqrt{2}$ の $\dfrac{1}{4}$ 円の面積で，S_2 は右の図の斜線部分の面積であるから



$$S_1 = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2}\,)^2 = \frac{1}{2}\pi$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,)^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

ゆえに　$\dfrac{V}{2\pi} = \left[\, 3x - \dfrac{x^3}{3} \,\right]_0^1 + 2S_1 + 2S_2 = \dfrac{8}{3} + 2\cdot\dfrac{\pi}{2} + 2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$

したがって　$\dfrac{V}{2\pi} = \dfrac{3}{2}\pi + \dfrac{5}{3}$　よって　$V = \boldsymbol{3\pi^2 + \dfrac{10}{3}\pi}$

別解 求める立体の体積を V とすると

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{3}{4}\pi} r^3\sin\theta\,d\theta=\frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta+\sin\theta)^3\sin\theta\,d\theta \quad \cdots(*)$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta+\sin\theta)^4\,d\theta&=4\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin^4 t\,dt\\&=\left[\,\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}\sin t\cos t-\sin^3 t\cos t\,\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\\&=\frac{9}{8}\pi+1\end{aligned}$$

また $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta+\sin\theta)^3(-\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta=\left[\,\frac{1}{4}(\cos\theta+\sin\theta)^4\,\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}$

$$=-\frac{1}{4}$$

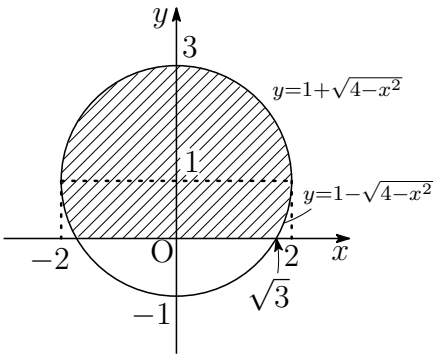
上の 2 式から $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta+\sin\theta)^3\sin\theta\,d\theta=\frac{9}{16}\pi+\frac{5}{8}$

これを $(*)$ に代入すると

$$V=\frac{16}{3}\pi\times\left(\frac{9}{16}\pi+\frac{5}{8}\right)=\mathbf{3\pi^2+\frac{10}{3}\pi}$$

7.119 立体は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体である．円の方程式 $x^2+(y-1)^2=4$ を y について解くと

$$y=1\pm\sqrt{4-x^2}$$



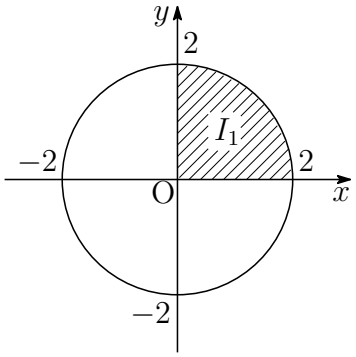
斜線部分は，y 軸に関して対称であるから，求める回転体の体積を V とすると

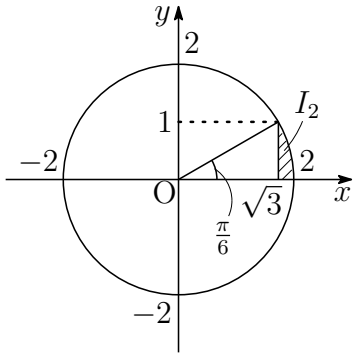
$$\begin{aligned}V&=2\left\{\pi\int_0^2(1+\sqrt{4-x^2})^2dx-\pi\int_{\sqrt{3}}^2(1-\sqrt{4-x^2})^2dx\right\}\\&=2\pi\left\{\int_0^2(5-x^2+2\sqrt{4-x^2})dx-\int_{\sqrt{3}}^2(5-x^2-2\sqrt{4-x^2}dx)\right\}\\&=2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx+2\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}dx\right\}\end{aligned}$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$，$I_2=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}dx$ とおくと，これらはそれぞれ下の図の斜線部分の面積であるから

$$I_1=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\pi$$

$$I_2=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1$$
$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$





よって

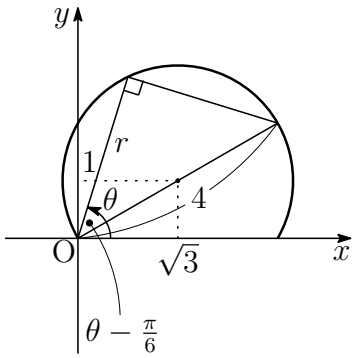
$$V=2\pi\left\{\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+2\cdot\pi+2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{16}{3}\pi^2+6\sqrt{3}\pi}$$

別解 円 $x^2+(y-1)^2=4$ を x 軸方向に $\sqrt{3}$ だけ平行移動した円

$$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$$

の x 軸の上側の部分を極方程式で表すと

$$r=4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$$



求める立体の体積を V とすると

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}r^3\sin\theta\,d\theta=\frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta\quad\cdots(*)$$

であるから

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^4\,d\theta=16\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\,d\theta=16\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin^4 t\,dt$$
$$=\left[\,6t-6\sin t\cos t-4\sin^3 t\cos t\,\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=4\pi+\frac{9}{4}\sqrt{3}\quad\cdots①$$

また

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3(-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta=\left[\ \frac{1}{4}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^4\ \right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=-\frac{9}{4}\quad\cdots②$$

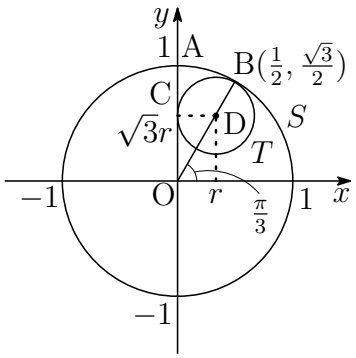
①$-$②$\times\sqrt{3}$ により　　$4\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta=4\pi+\frac{9}{2}\sqrt{3}$

したがって　　$\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta=\pi+\frac{9}{8}\sqrt{3}$

上式を $(*)$ に代入すると

$$V=\frac{16}{3}\pi\left(\pi+\frac{9}{8}\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{16}{3}\pi^2+6\sqrt{3}\pi}$$

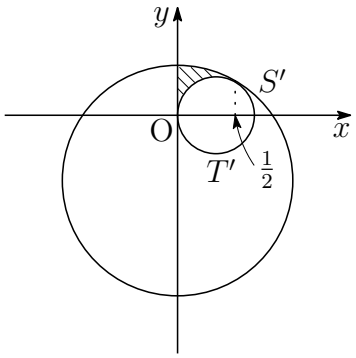
7.120　(1) OB の x 軸の正の方向となす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから，T の半径を r とすると，D の座標は $(r,\ \sqrt{3}r)$，$\mathrm{OD}=2r$ である．
右の図より，$\mathrm{OD}+\mathrm{DB}=1$ であるから



$$2r+r=1\quad\text{ゆえに}\quad r=\frac{1}{3}$$

よって　　$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

(2) S，T のグラフを y 軸方向に $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ だけ平行移動した図形をそれぞれ，S'，T' とすると



$$S':x^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1$$
$$T':\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{1}{9}$$

右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めればよい．
S' および T' の上半分の曲線の方程式は，それぞれ

$$y=\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad y=\sqrt{-x^2+\frac{2}{3}x}$$

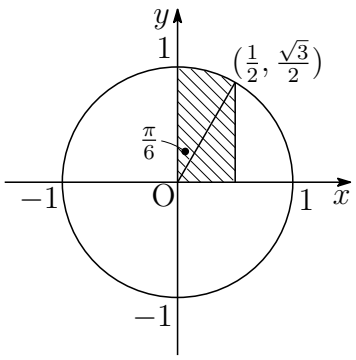
求める回転体の体積を V とすると

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - \left(\sqrt{-x^2 + \frac{2}{3}x} \right)^2 \right\} dx$$

$$= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (2-x)\, dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

ここで，$I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$ とおくと，

I は右の図の斜線部分の面積であるから



$$I = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

よって

$$V = \frac{2}{3}\pi \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \times I$$

$$= \frac{2}{3}\pi \times \frac{7}{8} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2}$$

7.121 (1) A$(0,\ a)$，P$(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}^2 &= \cos^2\theta + (a\sin\theta - a)^2 \\ &= 1 - \sin^2\theta + a^2(\sin\theta - 1)^2 \\ &= 1 - X^2 + a^2(X-1)^2 \\ &= (a^2-1)X^2 - 2a^2X + a^2 + 1 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{f(X) = (a^2-1)X^2 - 2a^2X + a^2 + 1}$

(2) (1) の結果から　$f(X) = (a^2-1)\left(X - \dfrac{a^2}{a^2-1} \right)^2 + \dfrac{1}{1-a^2}$

$0 < a < 1$ より，$a^2 - 1 < -\dfrac{a^2}{a^2-1} < 0$ であることに注意すると

$\dfrac{a^2}{a^2-1} < -1$　すなわち　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a < 1$ のとき　最大値 $\boldsymbol{f(-1) = 4a^2}$

$\dfrac{a^2}{a^2-1} \geqq -1$　すなわち　$0 < a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{f\left(\dfrac{a^2}{a^2-1} \right) = \dfrac{1}{1-a^2}}$

(3) $a=2$ のとき

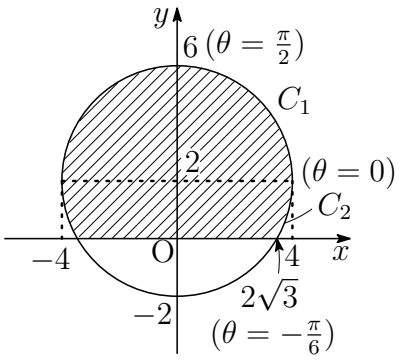
$$f(X)=3X^2-8X+5=3\left(X-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\quad(-1\leqq X\leqq 1)$$

したがって，$f(X)$ は $X=-1$，すなわち，$\mathbf{P_1(0,-2)}$ で最大値 $\mathbf{16}$ をとる．

A を中心とし，P_1 を通る円を

$$C(\theta)=(4\cos\theta,\ 4\sin\theta+2)$$

とおく．この円の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ および $\dfrac{11}{6}\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分をそれぞれ C_1，C_2 とすると，求める回転体の体積 V は



$$\frac{V}{2\pi}=\int_{C_1}y^2\,dx-\int_{C_2}y^2\,dx$$

このとき

$$\begin{aligned}y^2\,dx=y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta&=(4\sin\theta+2)^2(4\cos\theta)'d\theta\\&=-16(4\sin^3\theta+4\sin^2\theta+\sin\theta)\,d\theta\\&=16(\sin 3\theta+2\cos 2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi}&=16\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin 3\theta+2\cos 2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\\&\qquad-16\int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi}(\sin 3\theta+2\cos 2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\\&=\frac{64}{3}\pi+16\left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta+\sin 2\theta+4\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}\\&\qquad-16\left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta+\sin 2\theta+4\cos\theta\right]_{\frac{11}{6}\pi}^{0}\\&=\frac{64}{3}\pi+16\left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta+\sin 2\theta+4\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{11}{6}\pi}=\frac{64}{3}\pi+24\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって　　$V=\dfrac{\mathbf{128}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi^2}+\mathbf{48}\boldsymbol{\sqrt{3}\pi}$

参照 九大 2012 年一般前期理系数学 **1** の解答[11] を参照．

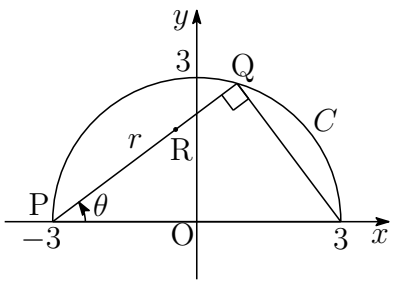
[11] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

7.122 (1) $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{1}{2}\pi\cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$ であるから，$\mathrm{PR} = \frac{2}{3}\mathrm{PQ}$ より

$$S = \int_0^3 \mathrm{PR}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\pi = \boldsymbol{3\pi}$$

(2) $\theta = \angle\mathrm{OPQ}$，$r = \mathrm{PQ}$ とおくと $(r = 6\cos\theta)$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{9}{2}\pi$$



$\mathrm{PR} = \frac{2}{3}r$ より

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}r\right)^2 d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2}\pi = \boldsymbol{2\pi}$$

(3) $C : x^2 + y^2 = 9$ $(y \geqq 0)$ の第 1 象限と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積は，半径 3 の半球の体積であるから

$$\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 18\pi$$

$\mathrm{P}(-x,\ y)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ を $2:1$ に内分する点は $\left(\frac{x}{3},\ y\right)$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

この点の軌跡は C の第 1 象限の部分を y 軸を元に x 軸方向に $\frac{1}{3}$ だけ縮小したものであるから，図形 S と第 1 象限の共通部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi\int_0^3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 dy = \frac{1}{9}\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{9}\cdot 18\pi = 2\pi$$

$\mathrm{P}(-3,\ 0)$，$\mathrm{Q}(s,\ t)$ を $2:1$ に内分する点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{2s-3}{3},\quad y = \frac{2t}{3} \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{3}{2}(x+1),\quad t = \frac{3}{2}y$$

Q は C 上の点であるから $\quad s^2 + t^2 = 9 \ \ (t \geqq 0)$

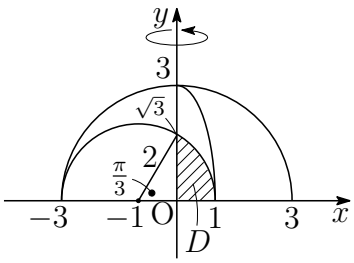
これに上の結果を代入することにより，R の軌跡の方程式は

$$\frac{9}{4}(x+1)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)^2 + y^2 = 4 \ \ (y \geqq 0) \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の y 軸との交点の y 座標は，$(*)$ に $x=0$ を代入して

$$y=\sqrt{3}$$

右の図の領域 D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると



$$V_2=\pi\int_0^{\sqrt{3}}x^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy-2\pi\int_0^{\sqrt{3}}x\,dy \qquad \cdots(**)$$

ここで $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy=\int_0^{\sqrt{3}}(3-y^2)\,dy$

$$=\left[\,3y-\frac{1}{3}y^3\,\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

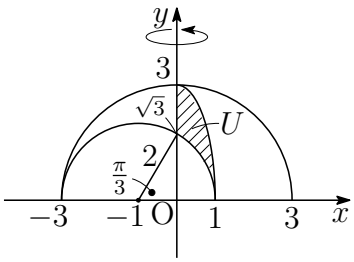
また，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}x\,dy$ は，D の面積であるから

$$\int_0^{\sqrt{3}}x\,dy=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これらを $(**)$ に代入すると

$$V_2=2\sqrt{3}\pi-2\pi\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

U の表す領域は右の図の斜線部分で，これを y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は



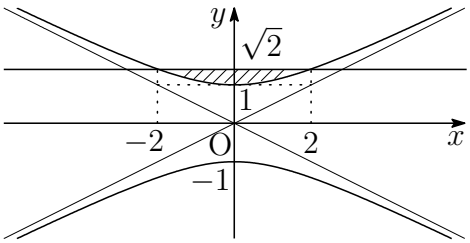
$$V_1-V_2=2\pi-\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi$$
$$=\left(\boldsymbol{2-3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}\right)\boldsymbol{\pi}$$

解説 (九大 [理]2018) 2

7.123 (1) $y=\dfrac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+4}+4\log(x+\sqrt{x^2+4})\}$ より

$$y'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}+4\cdot\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\right)=\boldsymbol{\sqrt{x^2+4}}$$

(2) 求める面積は，曲線 $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+4}\cdots①$ と直線 $y=\sqrt{2}\cdots②$ で囲まれた部分の面積である．① と ② の共有点の x 座標は



$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}=\sqrt{2}$$

これを解いて　$x=\pm 2$

上の図の斜線部分の面積を S とすると，(1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}S&=4\sqrt{2}-\int_0^2\sqrt{x^2+4}\,dx\\&=4\sqrt{2}-\frac{1}{2}\left[\,x\sqrt{x^2+4}+4\log(x+\sqrt{x^2+4})\,\right]_0^2\\&=4\sqrt{2}-\frac{1}{2}\{4\sqrt{2}+4\log(2+2\sqrt{2})-4\log 2\}\\&=\boldsymbol{2\sqrt{2}-2\log(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_1^{\sqrt{2}}x^2\,dy=4\pi\int_1^{\sqrt{2}}(y^2-1)\,dy\\&=4\pi\left[\,\frac{y^3}{3}-y\,\right]_1^{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})\pi}\end{aligned}$$

7.124　(1) C_1 の x 軸との共有点の x 座標は

$$ax^2-a-1=0\quad\text{これを解いて}\quad x=\pm\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

$\alpha=-\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}$，$\beta=\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}$ とおくと，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=-\int_\alpha^\beta(ax^2-a-1)\,dx=-a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\,dx=\frac{a}{6}\left(2\sqrt{\frac{a+1}{a}}\right)^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{(a+1)^3}{a}}}\end{aligned}$$

(2) $f(a)=\dfrac{(a+1)^3}{a}$ とおくと $(a>0)$

$$f'(a)=\frac{3(a+1)^2a-(a+1)^3}{a^2}=\frac{(2a-1)(a+1)^2}{a^2}$$

したがって，$f(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗

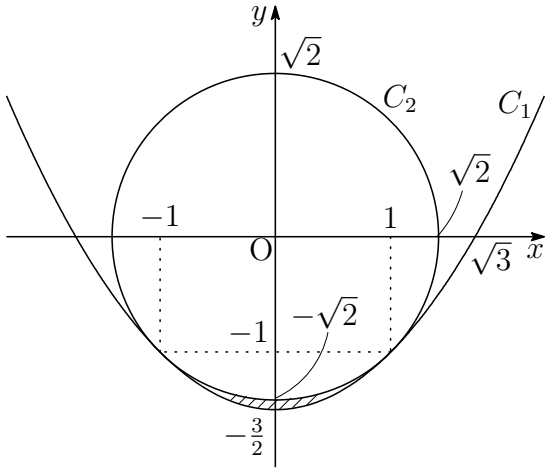
よって，S は $\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$ をとる．

解説 $f(a)$ は原点と曲線 $y = (x+1)^3$ 上の点 $(a,\ (a+1)^3)$ を結ぶ直線の傾きであるから $(a > 0)$，原点からこの曲線に引いた接線の傾きを求めると $\dfrac{27}{4}$．
したがって，$f(a) \geqq \dfrac{27}{4}$．

(3) $a = \dfrac{1}{2}$ より，原点 O から C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{3}{2}\right)$ との距離について

$$\mathrm{OP}^2 = t^2 + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}(t^2-1)^2 + 2$$

したがって，OP は $t = \pm 1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ をとる．
ゆえに，C_1 と C_2 の接点の座標は，$(\pm 1, -1)$



$C_1 : x^2 = 2y + 3$，$C_2 : x^2 = 2 - y^2$ であるから，求める体積を V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} (2y+3)\,dy - \int_{-\sqrt{2}}^{-1} (2-y^2)\,dy \\ &= \left[\ y^2 + 3y\ \right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} - \left[\ 2y - \frac{y^3}{3}\ \right]_{-\sqrt{2}}^{-1} = \frac{23}{12} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \left(\dfrac{23}{12} - \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)\pi}$

7.125 (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ を微分すると

$$f'(x)=(\log x)'\frac{1}{x^2}+\log x\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}+\log x\left(-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\sqrt{e}$

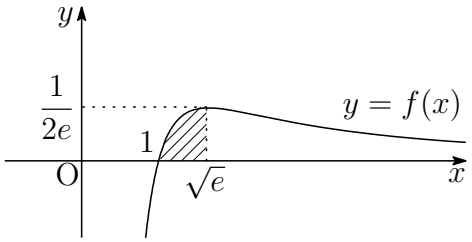
$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ $(x\geqq 1)$ の増減表は，次のようになる．

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	極大	↘

よって，求める最大値は　　$\boldsymbol{f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}}$

(2) 求める面積を S とすると，(1) の結果から

$$S=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}\,dx=-\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{x}\log x\right]_1^{\sqrt{e}}+\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{x}(\log x+1)\right]_1^{\sqrt{e}}=\boldsymbol{1-\frac{3}{2\sqrt{e}}}$$



(3) 求める立体の体積を V とすると

$$V=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)(\log x)'\,dx=\pi\left[(\log x)^2\right]_1^{\sqrt{e}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

バウムクーヘン型求積法

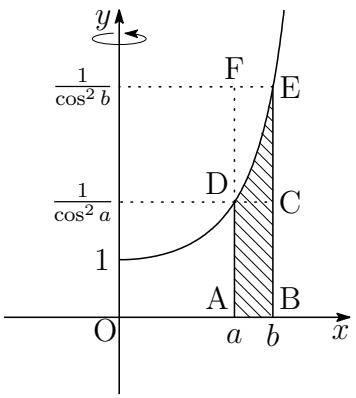
$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

7.126 (1) 曲線 $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が x 軸と区間 $a \leqq x \leqq b$ において囲まれた斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は

$$\int_0^b \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^a \frac{dx}{\cos^2 x} = V(b) - V(a)$$

右の図の長方形 ABCD，長方形 ABEF を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると



$$V_1 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \pi(b^2-a^2)\frac{1}{\cos^2 a}$$
$$V_2 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} = \pi(b^2-a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

$V_1 \leqq V(b) - V(a) \leqq V_2$ であるから

$$\pi(b^2-a^2)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq V(b) - V(a) \leqq \pi(b^2-a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

(2) (1) の結果から，$0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$$\pi(b+a)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq \frac{V(b)-V(a)}{b-a} \leqq \pi(b+a)\frac{1}{\cos^2 b} \quad \cdots (*)$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ に対して，$(*)$ より

$0 < t < u < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 t} \leqq \frac{V(u)-V(t)}{u-t} \leqq \pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 u} \quad \cdots ①$$

$0 < u < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 u} \leqq \frac{V(u)-V(t)}{u-t} \leqq \pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 t} \quad \cdots ②$$

$\lim\limits_{u\to t} \pi(u+t)\dfrac{1}{\cos^2 u} = 2\pi t\dfrac{1}{\cos^2 t} \cdots ③$，$\lim\limits_{u\to t} \pi(u+t)\dfrac{1}{\cos^2 t} = 2\pi t\dfrac{1}{\cos^2 t} \cdots ④$

①〜④ から，$\dfrac{d}{dt}V(t) = \lim\limits_{u\to t}\dfrac{f(u)-f(t)}{u-t}$ は，はさみうちの原理により

$$\frac{d}{dt}V(t) = 2\pi t\frac{1}{\cos^2 t}$$

(3) (2) の結果を利用すると

$$V\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)'\,dx$$
$$= 2\pi \left[\, x\tan x + \log\cos x \,\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \boldsymbol{2\pi\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2\right)}$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

7.127 (1) $\mathrm{P}(\sqrt{s},\ \sqrt{t})$ は曲線 C_1 上の点であるから $(s > 0,\ t > 0)$

$$\frac{(\sqrt{s})^2}{4} + (\sqrt{t})^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{s = -4t + 4}$$

$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を x について微分すると

$$\frac{x}{2} + 2yy' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{y'} = \frac{4y}{x}$$

C_1 上の点 $\mathrm{P}(\sqrt{s},\ \sqrt{t})$ における法線 l の傾きは $\quad -\dfrac{1}{y'} = \dfrac{4\sqrt{t}}{\sqrt{s}}$

したがって，l の方程式は

$$y - \sqrt{t} = \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{s}}(x - \sqrt{s}) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{s}}x - 3\sqrt{t}$$

$\sqrt{s} = 2\sqrt{1-t}$ であるから $\qquad \boldsymbol{y = \dfrac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}x - 3\sqrt{t}} \quad \cdots ①$

(2) ① を $x^2 + y^2 = 1$ に代入すると $\quad x^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}x - 3\sqrt{t}\right)^2 = 1$

したがって $\qquad \dfrac{1+3t}{1-t}x^2 - \dfrac{12t}{\sqrt{1-t}}x + 9t - 1 = 0 \quad \cdots ②$

このとき，$D=0$ であるから

$$D/4=\left(-\frac{6t}{\sqrt{1-t}}\right)^2-\frac{1+3t}{1-t}\times(9t-1)=\frac{(3t-1)^2}{1-t}=0$$

上式より $t=\dfrac{1}{3}$　ゆえに　$\sqrt{t}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{s}=2\sqrt{1-t}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

したがって　　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\boldsymbol{2\sqrt{6}}}{\boldsymbol{3}},\ \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{3}}\right)$

$t=\dfrac{1}{3}$ を ①，② に代入すると

$$y=\sqrt{2}x-\sqrt{3}\cdots①',\quad 3x^2-2\sqrt{6}x+2=0\cdots②'$$

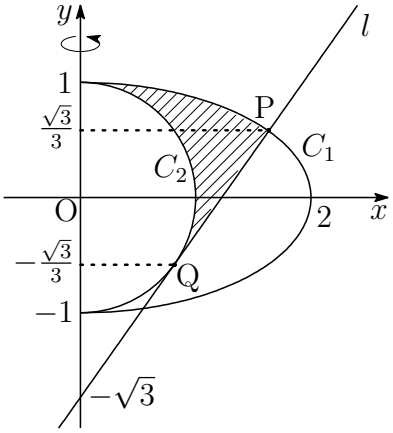
②′ から　$x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　これを ①′ に代入して　$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

したがって　　$\mathbf{Q}\left(\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{6}}}{\boldsymbol{3}},-\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{3}}\right)$

(3) ①′ より　$x=\dfrac{y+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{y+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2dy+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}(4-4y^2)dy-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}(1-y^2)dy\\&=\frac{1}{6}\left[(y+\sqrt{3})^3\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}+4\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}+\left[\frac{y^3}{3}-y\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\\&=\frac{1}{6}\times\frac{56}{9}\sqrt{3}+4\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{27}\sqrt{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}-\frac{8}{27}\sqrt{3}\right)\\&=2-\frac{4\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\dfrac{18-4\sqrt{3}}{9}\pi}$



7.128 (1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<1$ であるから

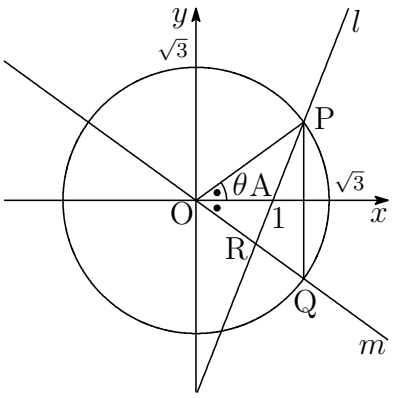
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}<\sqrt{3}\cos\theta<\sqrt{3}\quad\text{よって}\quad\sqrt{3}\cos\theta>\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>1$$

(2) 2 点 P，A を通る直線 l の方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta-1}(x-1)}$$

2 点 O，Q を通る直線 m の方程式は

$$\boldsymbol{y=-(\tan\theta)x}$$



(3) (2) で求めた 2 直線 l，m の方程式から y を消去すると

$$\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta-1}(x-1)=-(\tan\theta)x\quad\text{ゆえに}\quad\frac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{3}\cos\theta-1}=-\frac{x}{\cos\theta}$$

(1) の結果に注意して　$x=\dfrac{\sqrt{3}\cos\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta-1}$

これを m の方程式に代入して　$y=-\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta-1}$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{R}\left(\dfrac{\sqrt{3}\cos\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta-1},-\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta-1}\right)}$

(4) $\mathrm{PQ}=2\sqrt{3}\sin\theta$ であり，A と直線 PQ との距離は　$\sqrt{3}\cos\theta-1$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta-1)=\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin\theta)$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta}&=\sqrt{3}\{\sqrt{3}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-\cos\theta\}\\&=\sqrt{3}(2\sqrt{3}\cos^2\theta-\cos\theta-\sqrt{3})\\&=\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos\theta)(2\cos\theta-\sqrt{3})\end{aligned}$$

S の増減表は

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{4})$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		↗	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	

よって　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

(5) (4) の結果から，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

また，このとき，(2),(3) の結果から

$$\mathrm{R}\left(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\quad l:y=\sqrt{3}(x-1),\quad m:y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

2 つの領域 $x\geqq\dfrac{3}{2}$，$x^2+y^2\leqq 3$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{2\pi}&=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}dy=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{(3-y^2)-\frac{9}{4}\right\}dy\\&=\left[\ \frac{3}{4}y-\frac{1}{3}y^3\ \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

△PQR で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{2\pi}&=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}x\left\{\sqrt{3}(x-1)-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)\right\}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}(4x^2-3x)\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ \frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\ \right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}=\frac{15\sqrt{3}}{32}\end{aligned}$$

よって　　$V=V_1+V_2=2\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{15\sqrt{3}}{32}\right)=\boldsymbol{\dfrac{23\sqrt{3}}{16}\pi}$

補足 以下の検算法がある (高校数学の範囲外のため答案には書かないこと).

$\angle$POQ を中心角とする扇形の半径を r，P の y 座標を a とすると，この扇形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_3 とすると [12]

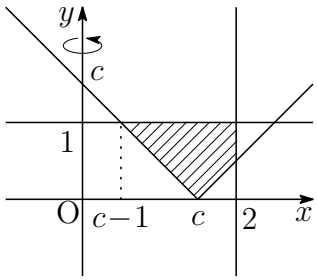
$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r^2 a = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\pi$$

$\triangle$OPQ の面積を T，重心の x 座標を h とし，これを y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_4 とすると

$$T = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad h = \frac{3}{4}, \quad V_4 = 2\pi Th = 2\pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi$$

よって　　$V = V_3 - V_4 = 2\sqrt{3}\pi - \dfrac{9\sqrt{3}}{16}\pi = \dfrac{23\sqrt{3}}{16}\pi$

7.129　(1)　$y = |\,x-c\,|$ と $y = 1$，$x = 2$ で囲まれた部分は，次の図の斜線部分である．



したがって

$$\begin{aligned}
\frac{f(c)}{2\pi} &= \int_{c-1}^{2} x(1-|\,x-c\,|)\,dx \\
&= \int_{c-1}^{c} x(x-c+1)\,dx + \int_{c}^{2} x(-x+c+1)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(c-1)x^2\right]_{c-1}^{c} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(c+1)x^2\right]_{c}^{2} \\
&= -\frac{1}{6}c^3 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{5}{2}c - \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{f(c) = \dfrac{\pi}{3}(-c^3 - 3c^2 + 15c - 5)}$

(2)　(1) の結果から　$f'(c) = \pi(-c^2 - 2c + 5)$

$1 < c < 2$ に注意して，$f'(c) = 0$ を解くと　$c = \sqrt{6} - 1$

したがって，$f(c)$ の増減表は，次のようになる．

[12] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf の 1 を参照.

c	(1)	$\cdots$	$\sqrt{6}-1$	$\cdots$	(2)
$f'(c)$		$+$	0	$-$	
$f(c)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$f(c)$ が最大となる c の値は　$\boldsymbol{c=\sqrt{6}-1}$

7.130　(1)　$f(x)=\sqrt{x}-2-\log x+\log 4$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

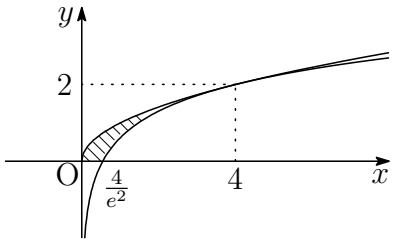
右の増減表により，$f(x)\geqq f(4)=0$ であるから

$$\sqrt{x}-2-\log x+\log 4\geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{x}\geqq 2+\log\frac{x}{4}$$

上式の等号は，$\boldsymbol{x=4}$ のとき成り立つ．

(2)　$2+\log\dfrac{x}{4}=0$ より　　$\boldsymbol{x=\dfrac{4}{e^2}}$

(3)　D は右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると



$$S=\int_0^4\sqrt{x}\,dx-\int_{\frac{4}{e^2}}^4(2+\log x-\log 4)\,dx$$
$$=\left[\frac{2x}{3}\sqrt{x}\right]_0^4-\left[x(\log x-\log 4+1)\right]_{\frac{4}{e^2}}^4$$
$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}-\frac{4}{e^2}}$$

(4)　$y=2+\log\dfrac{x}{4}$ を x について解くと　$x=4e^{y-2}$

$y=\sqrt{x}$ を x について解くと　$x=y^2$

よって　$\dfrac{V}{\pi}=\displaystyle\int_0^2\left\{(4e^{y-2})^2-(y^2)^2\right\}dy=\int_0^2(16e^{2y-4}-y^4)\,dy$

$$=\left[8e^{2y-4}-\frac{y^5}{5}\right]_0^2=8\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{e^4}\right)$$

よって　$\boldsymbol{V=8\pi\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{e^4}\right)}$

別解　$\dfrac{V}{2\pi}=\displaystyle\int_0^4 x\cdot\sqrt{x}\,dx-\int_{\frac{4}{e^2}}^4 x\left(2+\log\frac{x}{4}\right)dx$

$$=\left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_0^4-\left[\frac{x^2}{4}\left(2\log\frac{x}{4}+3\right)\right]_{\frac{4}{e^2}}^4=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{e^4}\right)$$

7.131 (1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ $(x \geqq 1)$ より　　$\{f(x)\}^2=1-\dfrac{1}{x^2}$

上の第 2 式の両辺を微分すると

$$2f(x)f'(x)=\frac{2}{x^3} \quad \text{ゆえに} \quad f(x)f'(x)=\frac{1}{x^3} \quad \cdots ①$$

$x>1$ のとき，$f(x)>0$ であるから，① より　$f'(x)>0$

よって，区間 $x>1$ で $f(x)$ は増加する．

① の両辺を微分すると　　$\{f'(x)\}^2+f(x)f''(x)=-\dfrac{3}{x^4}$

したがって　　$f(x)f''(x)=-\{f'(x)\}^2-\dfrac{3}{x^4}$

$x>1$ のとき，$f(x)>0$ であるから，上式から　$f''(x)<0$

よって，区間 $x>1$ で，曲線 C は上に凸である．

(2) ① より　　$f(\sqrt{2}\,)f'(\sqrt{2}\,)=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^3}$

$f(\sqrt{2}\,)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　　$f'(\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}$

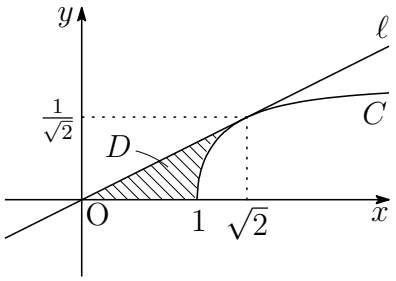
ℓ は点 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(x-\sqrt{2}\,) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$$

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ より　$x^2=\dfrac{1}{1-y^2}$,　　$y=\dfrac{1}{2}x$ より　$x^2=4y^2$

よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1-y^2}-4y^2\right)dy\\&=\left[\ \frac{1}{2}\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right|-\frac{4}{3}y^3\ \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\&=\log(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$



よって　　$\boldsymbol{V=\pi\left\{\log(\sqrt{2}+1)-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right\}}$

別解 (バウムクーヘン型求積法)

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_0^{\sqrt{2}} x\cdot\frac{1}{2}x\,dx - \int_1^{\sqrt{2}} x\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{6}x^3\ \right]_0^{\sqrt{2}} - \left[\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1})\ \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

よって　　$V = \pi\left\{\log(\sqrt{2}+1) - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right\}$

(4) $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とすると　$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

曲線 C の方程式を x について解くと　$x = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$　$(y \geqq 0)$

また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$ について，$y = \sin\theta$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\cos\theta},\qquad \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$$

y	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

よって　　$S = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy - \triangle\mathrm{OAB} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

別解 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$，$\mathrm{Q}(\sqrt{2},\ 0)$ とすると　$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

また，定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ について，$x = \dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \sin\theta,\qquad \frac{dx}{d\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

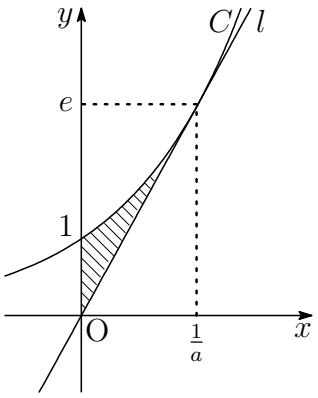
x	$1 \longrightarrow \sqrt{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

したがって

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) d\theta \\ &= \left[\ \tan\theta - \theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

よって　　$S = \triangle \mathrm{OPQ} - \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

7.132　(1)　$y = e^{ax}$ より　$y' = ae^{ax}$



C 上の点 $(t,\ e^{at})$ における接線の方程式は

$$y - e^{at} = ae^{at}(x - t)$$

ゆえに　　$y = ae^{at}x + (1 - at)e^{at}$

これが原点を通るから

$$1 - at = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{a}$$

l の方程式は　　$y = aex$

よって　　$V_1 = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} (e^{ax})^2\,dx - \frac{1}{3}\cdot\pi e^2\cdot\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2a}\left[\ e^{2ex}\ \right]_0^{\frac{1}{a}} - \frac{\pi e^2}{3a}$

$$= \frac{\pi(e^2-1)}{2a} - \frac{\pi e^2}{3a} = \boldsymbol{\frac{\pi(e^2-3)}{6a}}$$

(2)　$y = e^{ax}$ より　$x = \dfrac{1}{a}\log y$

よって　　$V_2 = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 e - \dfrac{\pi}{a^2}\displaystyle\int_1^e (\log y)^2\,dy$

$$= \frac{\pi e}{3a^2} - \frac{\pi}{a^2}\left[\ y\{(\log y)^2 - 2\log y + 2\}\ \right]_1^e$$

$$= \frac{\pi e}{3a^2} - \frac{\pi(e-2)}{a^2} = \boldsymbol{\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}}$$

別解　$V_2 = 2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} x(e^{ax} - aex)\,dx = 2\pi\left[\ e^{ax}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) - \frac{ae}{3}x^3\ \right]_0^{\frac{1}{a}} = \frac{2\pi(3-e)}{3a^2}$

(3)　(1)，(2) の結果を $V_1 = V_2$ に代入して

$$\frac{\pi(e^2-3)}{6a} = \frac{2\pi(3-e)}{3a^2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \frac{4(3-e)}{e^2-3}}$$

7.133　(1)　$f(x)$，$g(x)$ を微分すると

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin x, \quad g'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の接点が $(p,\ q)$ であるから，$q = f(p) = g(p)$，$f'(p) = g'(p)$ より

$$q = \frac{1}{2}\cos p = \cos\frac{p}{2} + c \qquad \cdots ①$$

$$-\frac{1}{2}\sin p = -\frac{1}{2}\sin\frac{p}{2} \qquad \cdots ②$$

② より　$\sin\dfrac{p}{2}\left(\cos\dfrac{p}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = 0$　$p \neq 0$ であるから　$p = \dfrac{2}{3}\pi$

これを ① に代入すると　$q = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{3}\pi = \cos\dfrac{\pi}{3} + c$

ゆえに　$q = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + c$　よって　$\boldsymbol{(p,\ q) = \left(\dfrac{2}{3}\pi, -\dfrac{1}{4}\right)}$，　$\boldsymbol{c = -\dfrac{3}{4}}$

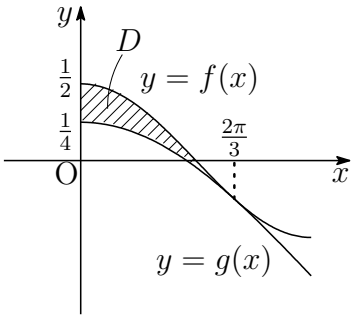
したがって　$f(x) - g(x) = \dfrac{1}{2}\cos x - \left(\cos\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}\right) \qquad \cdots (*)$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) - \cos\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= \left(\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$$

よって　$\boldsymbol{f(x) \geqq g(x)}$　$\left(\boldsymbol{x = \dfrac{2\pi}{3}}\text{のとき等号が成り立つ}\right)$

(2) (1) の結果から，図形 D は，下の図の斜線部分である．



したがって，求める回転体の体積 V は，$(*)$ により

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} x\{f(x) - g(x)\}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}x\cos x - x\cos\frac{x}{2} + \frac{3}{4}x\right)dx$$

$$= \left[\ \frac{1}{2}(x\sin x + \cos x) - 2\left(x\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{8}x^2\ \right]_0^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{5}{4}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\pi\left(\frac{\pi^2}{3}-\sqrt{3}\pi+\frac{5}{2}\right)}$

7.134　(1) 回転体 T_1 を平面 $y=t$ で切った断面積 $S_1(t)$ について次の場合分けを行う.

(i) $0 \leqq t \leqq 3\cos\theta$ のとき，$S_1(t)$ は半径 $t\tan\theta$ の円の面積であるから

$$S_1(t)=\pi(t\tan\theta)^2=\pi t^2\tan^2\theta$$

(ii) $3\cos\theta \leqq t \leqq 3$ のとき，$S_1(t)$ は半径 $\sqrt{9-t^2}$ の円の面積であるから

$$S_1(t)=\pi(\sqrt{9-t^2})^2=\pi(9-t^2)$$

(i)，(ii) から　$\boldsymbol{S_1(t)=\begin{cases}\pi t^2\tan^2\theta & (0 \leqq t \leqq 3\cos\theta)\\ \pi(9-t^2) & (3\cos\theta \leqq t \leqq 3)\end{cases}}$

図 1

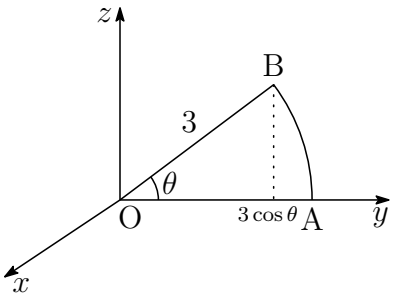
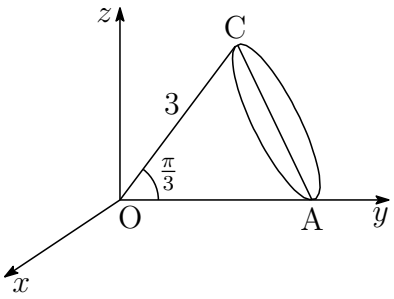


図 2



(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}V_1&=\int_0^3 S_1(t)\,dt=\pi\int_0^{3\cos\theta}t^2\tan^2\theta\,dt+\pi\int_{3\cos\theta}^3(9-t^2)\,dt\\&=\pi\left[\frac{t^3\tan^2\theta}{3}\right]_0^{3\cos\theta}+\pi\left[9t-\frac{t^3}{3}\right]_{3\cos\theta}^3\\&=9\pi\sin^2\theta\cos\theta+\pi(18-27\cos\theta+9\cos^3\theta)\\&=\boldsymbol{18\pi(1-\cos\theta)}\end{aligned}$$

別解　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ を O を極とする極方程式を用いて求めると [13]

$$V_1=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\theta}3^3\sin\varphi\,d\varphi=18\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\theta}=\boldsymbol{18\pi(1-\cos\theta)}$$

[13] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_bun_2016.pdf (p.12 を参照)

(3) 回転体 T_2 を平面 $y=t$ で切った断面積 $S_2(t)$ について次の場合分けを行う.

(i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，$S_2(t)$ は半径 $\sqrt{3}t$ の円の面積であるから

$$S_2(t) = \pi(\sqrt{3}t)^2 = 3\pi t^2$$

(ii) $\dfrac{3}{2} \leqq t \leqq 3$ のとき，円錐の底面を xy 平面に正射影した図形は楕円

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{\left(y-\frac{9}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$$

yz 平面上の直線 AC は $\dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{3\sqrt{3}} = 1$

$y=t$ を上の 2 式にそれぞれ代入して整理すると

$$x^2 = -4t^2 + 18t - 18, \quad z = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}t$$

このとき，$S_2(t)$ の面積は

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \pi(x^2+z^2) \\ &= \pi\{(-4t^2+18t-18) + (3\sqrt{3}-\sqrt{3}t)^2\} = \pi(9-t^2) \end{aligned}$$

(i)，(ii) から $\boldsymbol{S_2(t) = \begin{cases} 3\pi t^2 & \left(0 \leqq t \leqq \frac{3}{2}\right) \\ \pi(9-t^2) & \left(\frac{3}{2} \leqq t \leqq 3\right) \end{cases}}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^3 S_2(t)\,dt = \pi\int_0^{\frac{3}{2}} 3t^2\,dt + \pi\int_{\frac{3}{2}}^2 (9-t^2)\,dt \\ &= \pi\Big[\ t^3\ \Big]_0^{\frac{3}{2}} + \pi\Big[\ 9t - \frac{t^3}{3}\ \Big]_{\frac{3}{2}}^3 = \boldsymbol{9\pi} \end{aligned}$$

別解 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ を O を極とする極方程式を用いて求めると

$$V_2 = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3^3 \sin\varphi\,d\varphi = 18\pi\Big[-\cos\varphi\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{9\pi}$$

(5) (2)，(4) の結果から $V_2 - V_1 = 18\pi\left(\cos\theta - \cos\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって $\boldsymbol{0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}}$ のとき $\boldsymbol{V_2 > V_1}$，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ のとき $\boldsymbol{V_1 = V_2}$，

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}}$ のとき $\boldsymbol{V_1 > V_2}$

7.135 (1) 求める体積 V_1 は

$$\frac{V_1}{\pi}=\int_0^1\{x^2-(x^2)^2\}\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{2}{15}$$

よって　　$\boldsymbol{V_1=\dfrac{2}{15}\pi}$

(2) 直線 m は点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，傾き -1 であるから

$$y=-(x-t)+t^2\quad\text{すなわち}\quad m:y=-x+t+t^2$$

これと $l:y=x$ の共有点 Q の座標は　　$\boldsymbol{\left(\dfrac{t+t^2}{2},\ \dfrac{t+t^2}{2}\right)}$

(3) $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{t+t^2}{2},\ \dfrac{t+t^2}{2}\right)$ より

$$\mathrm{PQ}^2=\left(t-\frac{t+t^2}{2}\right)^2+\left(t^2-\frac{t+t^2}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}(t-t^2)^2}$$

(4) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t+t^2}{2},\ \dfrac{t+t^2}{2}\right)$ より $(0\leqq t\leqq 1)$，$\mathrm{OQ}=\dfrac{t+t^2}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\boldsymbol{s=\frac{t+t^2}{\sqrt{2}},\quad \frac{ds}{dt}=\frac{1+2t}{\sqrt{2}}}$$

(5) s と t について

t	$0\longrightarrow 1$
s	$0\longrightarrow \sqrt{2}$

体積 V_2 は，(3)，(4) の結果を利用して [14]

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{\pi}&=\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2\,ds=\int_0^1\mathrm{PQ}^2\frac{ds}{dt}\cdot dt\\&=\int_0^1\frac{(t-t^2)^2}{2}\cdot\frac{1+2t}{\sqrt{2}}\,dt\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 t^3(1-t)^2\,dt\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2!2!}{5!}(1-0)^5+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3!2!}{6!}(1-0)^6=\frac{1}{30\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{60}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_2=\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi}$,　　$\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi\Big/\dfrac{2}{15}\pi=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{8}}$

[14] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

別解 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，l 上の点 $\mathrm{R}(t,\ t)$ をとる $(0 \leqq t \leqq 1)$.

線分 PR の中点を M とすると　　$\mathrm{M}\left(t,\ \dfrac{t^2+t}{2}\right)$

M から直線 $l : x-y=0$ までの距離を d とすると

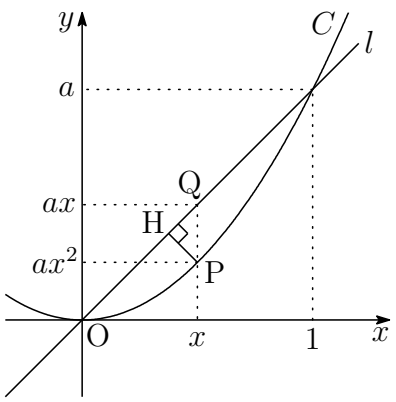
$$d = \frac{|t - \frac{t^2+t}{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{t-t^2}{2\sqrt{2}}$$

$\Delta S = \mathrm{PR}\Delta t = (t-t^2)\Delta t$ を l の周りに 1 回転させた体積 ΔV_2 は，パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem) により [15]

$$\Delta V_2 = 2\pi d\Delta S = 2\pi\cdot\frac{t-t^2}{2\sqrt{2}}\cdot(t-t^2)\Delta t = \frac{\pi t^2(1-t)^2}{\sqrt{2}}\Delta t$$

よって　$V_2 = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2!2!}{5!}(1-0)^5 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{60}\pi}$

7.136 $C : y = ax^2$，$l : y = ax$ とする．C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ ax^2)$，l 上の点を $\mathrm{Q}(x,\ ax)$ とし，P から l に垂線 PH を引くと



$$\mathrm{PH} : \mathrm{HQ} : \mathrm{PQ} = 1 : a : \sqrt{1+a^2}$$

$t = \mathrm{OH}$，$h = \mathrm{PH}$ とすると

$$\mathrm{PQ} = ax - ax^2 = ax(1-x)$$

であるから

$$h = \frac{ax(1-x)}{\sqrt{1+a^2}},\quad \mathrm{HQ} = \frac{a^2x(1-x)}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$t = \mathrm{OQ} - \mathrm{HQ} = \sqrt{1+a^2}\,x - \frac{a^2x(1-x)}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{x+a^2x^2}{\sqrt{1+a^2}}$$

ゆえに　$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1+2a^2x}{\sqrt{1+a^2}}$

t	0	$\longrightarrow$	$\sqrt{1+a^2}$
x	0	$\longrightarrow$	1

求める回転体の体積を V とすると

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{1+a^2}} h^2\,dt = \pi\int_0^1 \frac{a^2x^2(1-x)^2}{1+a^2}\cdot\frac{1+2a^2x}{\sqrt{1+a^2}}dx$$
$$= \frac{\pi a^2}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 \{x^2(1-x)^2 + 2a^2x^3(1-x)^2\}dx$$

[15] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

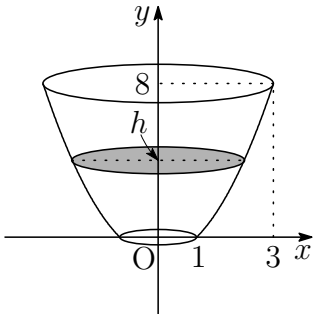
ここで　$\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx=\frac{1}{30},\quad \int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx=\frac{1}{60}$

よって　$\displaystyle V=\frac{\pi a^2}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{30}+2a^2\cdot\frac{1}{60}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi a^2}{30\sqrt{1+a^2}}}$

解説　(分大 [医]2005) 10

7.137　(1)　$x^2=y+1$ であるから

$$V=\pi\int_0^h (y+1)\,dy$$
$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}+y\right]_0^h=\boldsymbol{\pi\left(\frac{h^2}{2}+h\right)}$$



(2)　容器に水が満たされたときの水の体積は，(1) の結果に $h=8$ を代入して

$$V=\pi\left(\frac{8^2}{2}+8\right)=40\pi$$

毎秒 2π の割合で注入するので　$\dfrac{40\pi}{2\pi}=\boldsymbol{20}$ (秒後)

(3)　$t=6$ のときの水の体積は　$2\pi\times 6=12\pi$

このときの水面の高さ h は，(1) の結果から

$$2\pi\left(\frac{h^2}{2}+h\right)=12\pi\quad h>0 \text{ に注意してこれを解くと}\quad h=4$$

(1) の結果を t で微分すると　$\dfrac{dV}{dt}=\pi(h+1)\dfrac{dh}{dt}$

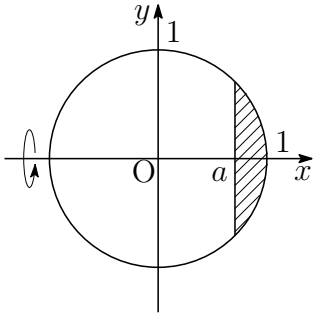
上式に $\dfrac{dV}{dt}=2\pi$，$h=4$ を代入すると

$$2\pi=\pi(4+1)\frac{dh}{dt}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{dh}{dt}=\frac{2}{5}\quad \text{よって}\quad \text{毎秒}\ \boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

7.138　(1)　$\pi\cdot 2^2\cdot 2-\dfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\boldsymbol{\frac{20\pi}{3}}$ (m^3)

(2)　右の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転させた立体の体積を $V(a)$ とすると

$$V(a)=\pi\int_a^1 (1-x^2)\,dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_a^1=\frac{\pi}{3}(1-a)^2(2+a)$$



よって，求める体積を V とすると

$$V = \pi\cdot 2^2\cdot h - V(1-h) = 4\pi h - \frac{\pi}{3}h^2(3-h)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{3}(h^3 - 3h^2 + 12h)} \ (\mathrm{m}^3)$$

(3) 条件から $\dfrac{dV}{dt} = a$　(2) の結果から $\dfrac{dV}{dh} = \pi(h^2 - 2h + 4)$

よって $v(h) = \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{dh}{dV}\cdot\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\dfrac{dV}{dt}}{\dfrac{dV}{dh}} = \boldsymbol{\dfrac{a}{\pi(h^2 - 2h + 4)}}$ (m/s)

(4) (3) の結果から $v(h) = \dfrac{a}{\pi\{(h-1)^2 + 3\}}$

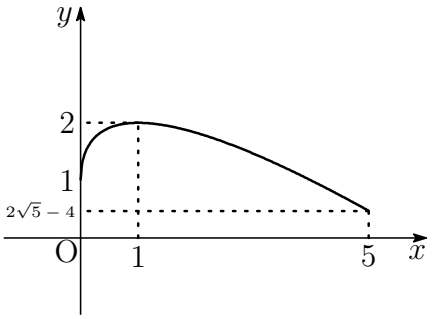
$0 < h < 2$ より，$v(h)$ は $h = 1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{a}{3\pi}}$ (m/s) をとる．

7.139 (1) $f(x) = 1 + 2\sqrt{x} - x$ より

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \qquad f''(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

したがって，グラフの増減・凹凸およびグラフの概形は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	1	↗	2	↘	$2\sqrt{5} - 4$



(2) $V = \pi\displaystyle\int_0^h (1 + 2\sqrt{x} - x)^2\,dx = \pi\int_0^h (x^2 - 4x\sqrt{x} + 2x + 4\sqrt{x} + 1)\,dx$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + x^2 + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + x\right]_0^h$$
$$= \boldsymbol{\pi\left(\frac{1}{3}h^3 - \frac{8}{5}h^2\sqrt{h} + h^2 + \frac{8}{3}h\sqrt{h} + h\right)}$$

(3) (2) の結果に $h = 4$ を代入すると　$V = \dfrac{172\pi}{15}$　よって　$t = \boldsymbol{\dfrac{172\pi}{15a}}$

$V = \pi\displaystyle\int_0^h (1 + 2\sqrt{x} - x)^2\,dx$ より　$\dfrac{dV}{dh} = \pi(1 + 2\sqrt{h} - h)^2$

$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dh}\dfrac{dh}{dt}$ に上式および $\dfrac{dV}{dt} = a$ を代入すると

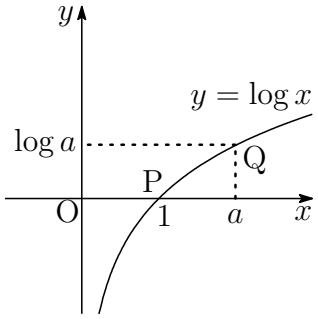
$$a = \pi(1 + 2\sqrt{h} - h)^2 \frac{dh}{dt}$$

したがって　　$\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{a}{\pi(1 + 2\sqrt{h} - h)^2}$

よって，$h = 4$ のとき　　$\boldsymbol{\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{a}{\pi}}$

7.140　(1)　$y = \log x$ より $x = e^y$ であるから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\log a} x^2 dy \\ &= \pi \int_0^{\log a} e^{2y} dy \\ &= \frac{\pi}{2}\left[e^{2y} \right]_0^{\log a} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}(a^2 - 1)} \end{aligned}$$



(2)　条件および (1) の結果から

$$mt = \frac{\pi}{2}(a^2 - 1) \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = \frac{2mt}{\pi} + 1$$

また，$h = \log a$ であるから，上式から

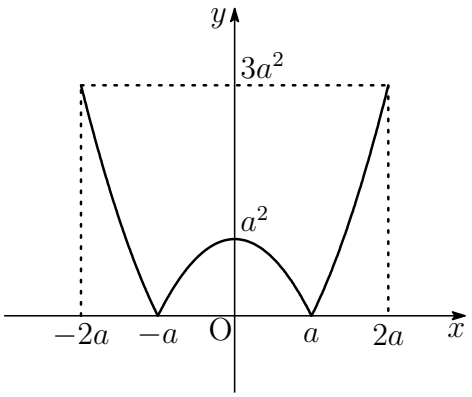
$$h = \log a = \frac{1}{2}\log a^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left(\frac{2mt}{\pi} + 1\right)}$$

これを t で微分すると

$$\begin{aligned} v = \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\log\left(\frac{2mt}{\pi} + 1\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{2m}{\pi}}{\frac{2mt}{\pi} + 1} = \boldsymbol{\frac{m}{2mt + \pi}} \end{aligned}$$

7.141　(1)　$f(x) = |x^2 - a^2| = \begin{cases} x^2 - a^2 & (-2a \leqq x \leqq -a,\ a \leqq x \leqq 2a) \\ a^2 - x^2 & (-a < x < a) \end{cases}$

よって，$y = f(x)$ のグラフは，次のようになる．



(2) $0 \leqq x \leqq a$ のとき　$y = a^2 - x^2$ より　$x^2 = a^2 - y$

$a \leqq x \leqq 2a$ のとき　$y = x^2 - a^2$ より　$x^2 = a^2 + y$

よって，求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^{a^2} (a^2 + y)\, dy - \pi \int_0^{a^2} (a^2 - y)\, dy$$
$$= \pi \int_0^{a^2} 2y\, dy = \pi \Big[\ y^2\ \Big]_0^{a^2} = \boldsymbol{\pi a^4}$$

(3) 容器が一杯になったときの水の体積は

$$V + \pi \int_{a^2}^{3a^2} (a^2 + y) dy = \pi a^4 + \pi \Big[\ a^2 y + \frac{y^2}{2}\ \Big]_{a^2}^{3a^2} = 7\pi a^4$$

よって　$T = \dfrac{7\pi a^4}{\pi a^2} = \boldsymbol{7a^2}$

(4) 水面の高さが a^2 になる時間は，(2) の結果から　$\dfrac{\pi a^4}{\pi a^2} = a^2$

i) $0 < t \leqq a^2$ のとき

$$\pi a^2 t = \pi \int_0^h (a^2 + y) dy - \pi \int_0^h (a^2 - y) dy$$
$$= \pi \int_0^h 2y\, dy = \pi \Big[\ y^2\ \Big]_0^h = \pi h^2$$

ゆえに　$a^2 t = h^2$　すなわち　$h = a\sqrt{t}$

ii) $a^2 < t < T$ のとき

$$\pi a^2 t = V + \pi \int_{a^2}^h (a^2 + y) dy$$
$$= \pi a^4 + \pi \Big[\ a^2 y + \frac{y^2}{2}\ \Big]_{a^2}^h = \pi \left(-\frac{a^4}{2} + a^2 h + \frac{h^2}{2} \right)$$

ゆえに　$a^2t = -\dfrac{a^4}{2} + a^2h + \dfrac{h^2}{2}$

$2a^2t + 2a^4 = h^2 + 2a^2h + a^4$

$(h + a^2)^2 = a^2(2t + 2a^2)$

$h > a^2$ に注意して　$h = a\sqrt{2t + 2a^2} - a^2$

よって　$\boldsymbol{h = \begin{cases} a\sqrt{t} & (0 < t \leqq a^2) \\ a\sqrt{2t + 2a^2} - a^2 & (a^2 < t < T) \end{cases}}$

(5)　$v = \dfrac{dh}{dt}$ であるから　$\boldsymbol{v = \begin{cases} \dfrac{a}{2\sqrt{t}} & (0 < t \leqq a^2) \\ \dfrac{a}{\sqrt{2t + 2a^2}} & (a^2 < t < T) \end{cases}}$

解説　たとえば，$0 \leqq x \leqq 2a$ の範囲で $y = |x^2 - a^2|$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_1 は

$$\frac{V_1}{2\pi} = \int_0^{2a} x\,|x^2 - a^2|\,dx$$
$$= -\int_0^a (x^3 - a^2x)dx + \int_a^{2a} (x^3 - a^2x)\,dx$$

ここで $x^3 - a^2x$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{a^2}{2}x^2$ とおくと

$$\frac{V_1}{2\pi} = F(0) + F(2a) - 2F(a)$$
$$= 0 + 2a^4 - 2\cdot\left(-\frac{a^4}{2}\right) = \frac{5}{2}a^4$$

ゆえに　$V_1 = 5\pi a^4$

本題の容器の容積は　$\pi(2a)^2\cdot 3a^2 - V_1 = 12\pi a^4 - 5\pi a^4 = 7\pi a^4$

7.142　$x = \log_e(t + \sqrt{t^2+1})$，$y = \sqrt{t^2+1}$ より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t + \sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

ゆえに　$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2 + \left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2} = 1$

よって，求める弧長は

$$\int_0^{t_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{t_0} dt = \boldsymbol{t_0}$$

7.143 (1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を θ について微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

したがって

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \\ &= \boldsymbol{\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2}\end{aligned}$$

(2) $f(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{3}$ を微分すると

$$f'(\theta) = 3\sin^2\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos\frac{\theta}{3} = \sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$$

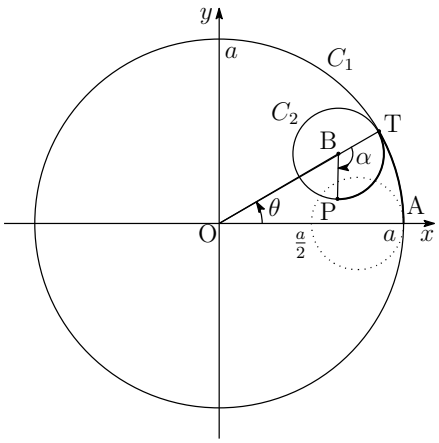
したがって

$$\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2 = \left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2 + \left(\sin^3\frac{\theta}{3}\right)^2 = \sin^4\frac{\theta}{3}$$

求める長さを l とすると

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\{f'(\theta)\}^2 + \{f(\theta)\}^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{\theta}{3}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos\frac{2}{3}\theta\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\,\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{3}{8}\sqrt{3}}\end{aligned}$$

7.144 (1) C_1 と C_2 の接点を T，$\alpha = \angle\mathrm{PBT}$ とする．C_1 および C_2 上の弧について，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから



$$a\theta = \frac{a}{4}\times\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 4\theta$$

BT の x 軸のなす角が θ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \frac{a}{4}(\cos(\theta-\alpha),\sin(\theta-\alpha))\\ &= \frac{a}{4}(\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta))\\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{OB} = \mathrm{OT} - \mathrm{BT} = a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{3}{4}a$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}\\ &= \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)\\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta - \sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{3}{4}a(\sin\theta + \sin 3\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{4}a(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

したがって
$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \frac{9}{8}a^2(1 - \cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta)\\ &= \frac{9}{8}a^2(1-\cos 4\theta) = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta\end{aligned}$$

求める距離を s とすると，$\dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$ の周期が $\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}a|\sin 2\theta|\,d\theta\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2\theta\,d\theta = \Big[-3a\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{6a}\end{aligned}$$

7.145 (1) $x = e^{-\theta}\cos\theta$, $y = e^{-\theta}\sin\theta$ を θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = -e^{-\theta}\cos\theta - e^{-\theta}\sin\theta = -e^{-\theta}(\cos\theta + \sin\theta)$$
$$\frac{dy}{d\theta} = -e^{-\theta}\sin\theta + e^{-\theta}\cos\theta = -e^{-\theta}(\sin\theta - \cos\theta)$$

よって $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{-e^{-\theta}(\sin\theta - \cos\theta)}{-e^{-\theta}(\cos\theta + \sin\theta)} = \boldsymbol{\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}}$$

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から $$\frac{y}{x} = \frac{e^{-\theta}\sin\theta}{e^{-\theta}\cos\theta} = \tan\theta$$

ゆえに，線分 OP の向きは x 軸の正の向きから θ だけ回転したもの．

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \quad \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

上の 2 式を (1) の結果に代入すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

ゆえに，P のおける C の接線の向きは x 軸の正の向きから $\theta - \dfrac{\pi}{4}$ だけ回転したもの．したがって，OP と P のおける C の接線のなす角は

$$\theta - \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{よって} \quad \angle\mathrm{OPQ} = \frac{\pi}{4}$$

(3) (1) の結果から

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = e^{-2\theta}(\cos\theta + \sin\theta)^2 + e^{-2\theta}(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2e^{-2\theta}$$

したがって，求める曲線 C の長さは

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}e^{-\theta}\, d\theta$$
$$= \sqrt{2}\Big[-e^{-\theta}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}(1 - e^{-\frac{\pi}{2}})}$$

別解 $r = e^{-\theta}$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より [16]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(e^{-\theta})^2 + (-e^{-\theta})^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}e^{-\theta}\, d\theta$$

[16] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf (p.12 を参照)

7.146 (1) $\theta=\theta(t)$ とすると　　$f'(t)=\tan\theta$

これを t で微分すると　　$f''(t)=\dfrac{\theta'}{\cos^2\theta}$

$f''(t)>0$ であるから　$\theta'>0$　よって，$\theta(t)$ は増加関数である．

(2) P における G の下側の向きの単位法ベクトルは　$\vec{n}=(\sin\theta,-\cos\theta)$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}},\quad \sin\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

したがって　　$\vec{n}=\left(\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},-\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\vec{n}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t+\frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},\ f(t)-\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha(t)=t+\frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},\ \beta(t)=f(t)-\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}}$$

(3) $L_1=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\tan^2\theta}\,dt=\int_a^b\frac{dt}{\cos\theta}$

$\alpha(t)=t+\sin\theta$，$\beta(t)=f(t)-\cos\theta$ であるから，これを微分して

$$\alpha'(t)=1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta'(t)=f'(t)+\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\tan\theta+\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\tan\theta\left(1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\{\alpha'(t)\}^2+\{\beta'(t)\}^2=(1+\tan^2\theta)\left(1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$L_2=\int_a^b\sqrt{\{\alpha'(t)\}^2+\{\beta'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b\frac{dt}{\cos\theta}+\int_{\theta(a)}^{\theta(b)}d\theta$$

よって　　$L_2-L_1=\displaystyle\int_{\theta(a)}^{\theta(b)}d\theta=\Big[\ \theta\ \Big]_{\theta(a)}^{\theta(b)}=\boldsymbol{\theta(b)-\theta(a)}$

7.147 (1) 円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，円が角 t だけ回転したとき，円の中心を C，x 軸との接点を T とする．このとき，$\mathrm{OT}=\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=at$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}at\\ a\end{pmatrix}$$

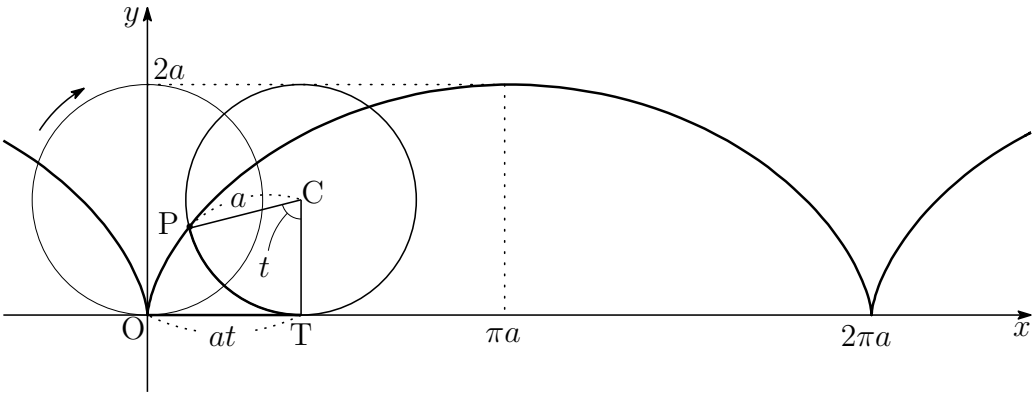
また $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{CT}}$ を $-t$ だけ回転したものであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{CT}} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

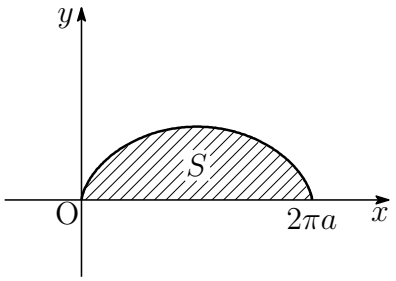
したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} \\ &= \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，P の座標は　　$\boldsymbol{(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))}$



(2) 求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x = a(t-\sin t)$ より

$$dx = a(1-\cos t)dt \qquad \leftarrow \frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$$

で，x と t の対応は右のようになる．

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
t	$0 \longrightarrow 2\pi$

よって，置換積分法により

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$
$$= a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{3\pi a^2}$$

(3) 求める曲線 C の長さを L とすると，$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$ より

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{\{a(1-\cos t)\}^2+(a\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt$$
$$= 2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{8a}$$

7.148 (1) $x=s(t)$，$y=\dfrac{1}{2}\{s(t)\}^2$ をそれぞれ t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=s'(t),\quad \frac{dy}{dt}=s(t)s'(t)$$

ゆえに，点 P の速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=s'(t)(1,\ s(t))$$

$s'(t)>0$ に注意して　　$|\vec{v}|=s'(t)\sqrt{1+\{s(t)\}^2}$

与えられた $|\vec{v}|$ の条件により

$$s'(t)\sqrt{1+\{s(t)\}^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\{s(t)\}^2}}$$

ゆえに　$s'(t)=\dfrac{1}{1+\{s(t)\}^2}$　　よって　$f(x)=\dfrac{dx}{dt}=\boldsymbol{\dfrac{1}{1+x^2}}$

(2) $s'(t)>0$ より，$s(t)$ は単調増加関数であるから

$$s\left(-\frac{4}{3}\right)<s(0)<s\left(\frac{4}{3}\right)\quad \text{ゆえに}\quad \alpha<0<\beta\quad \cdots①$$

上式および (1) の結果を与えられた等式に適用すると

$$\frac{4}{3}=\int_{-\frac{4}{3}}^{0}\frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt=\int_{\alpha}^{0}(x^2+1)\,dx=\left[\ \frac{x^3}{3}+x\ \right]_{\alpha}^{0}=-\frac{\alpha^3}{3}-\alpha$$

$$\frac{4}{3}=\int_{0}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}\,dt=\int_{0}^{\beta}(x^2+1)\,dx=\left[\ \frac{x^3}{3}+x\ \right]_{0}^{\beta}=\frac{\beta^3}{3}+\beta$$

ゆえに　$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+4)=0,\quad (\beta-1)(\beta^2+\beta+4)=0$

① に注意して　$\boldsymbol{\alpha=-1,\ \beta=1}$

(3) (1) の結果から　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=f'(x)\dfrac{dx}{dt}$

ゆえに　$g(x)=\dfrac{d^2x}{dt^2}=f'(x)f(x)$

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ を微分すると　$f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

したがって　$g(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\times\dfrac{1}{1+x^2}=\boldsymbol{-\dfrac{2x}{(1+x^2)^3}}$

$g(x)=-2x(1+x^2)^{-3}$ を微分すると

$$\begin{aligned}g'(x)&=-2(1+x^2)^{-3}-2x\cdot(-3)(1+x^2)^{-4}\cdot 2x\\&=\frac{-2(1+x^2)+12x^2}{(1+x^2)^4}=\frac{2(5x^2-1)}{(1+x^2)^4}\end{aligned}$$

(2) の結果から，$-1\leqq x\leqq 1$ における $g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{25\sqrt{5}}{108}$	↘	$-\frac{25\sqrt{5}}{108}$	↗	$-\frac{1}{4}$

よって，$-1\leqq x\leqq 1$ において，$g(x)$ が最大となる x の値は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

7.149　(1)　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$ であるから

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt},\ e^x\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dx}{dt}(1,\ e^x)\quad\cdots①$$

$|\vec{v}|=1$，$\dfrac{dx}{dt}>0$ に注意して，① の大きさをとると

$$1=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+e^{2x}}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\quad\cdots②$$

② を ① に代入して

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}(1,\ e^x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right) \quad \cdots ③$$

よって，点 $(s,\ e^s)$ における速度ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}},\ \frac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}}\right)}$$

(2) ③ を t について微分し，② を代入すると

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \frac{dx}{dt}\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right)\\ &= \left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\right) \quad \cdots ④\end{aligned}$$

よって，点 $(s,\ e^s)$ における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は

$$\boldsymbol{\vec{\alpha} = \left(-\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2},\ \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2}\right)}$$

(3) ④ より　$\vec{\alpha} = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^2}(-e^x,\ 1)$ であるから

$$|\vec{\alpha}| = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\sqrt{(-e^x)^2+1^2} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

$f(x) = |\vec{\alpha}|$ とおいて，$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}}$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

$f'(x) = 0$ を解くと　$e^{2x} = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{2}$

$f(x)$ の増減は右のようになる．

よって，$x = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ $(e^{2x} = \frac{1}{2})$ で極大かつ最大となり，求める最大値は

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

7.150 (1) $y=x^2$ より $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=2x\dfrac{dx}{dt}$ $\cdots$①

$|\vec{v}|=C$ より $|\vec{v}|^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=C^2$ $\cdots$②

① を ② に代入すると

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(2x\frac{dx}{dt}\right)^2=C^2 \quad \text{ゆえに} \quad (1+4x^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=C^2$$

$\dfrac{dx}{dt}>0$ であるから $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{C}{\sqrt{1+4x^2}}$ $\cdots$③

①, ③ から $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\dfrac{dx}{dt}(1,\ 2x)=\boldsymbol{\dfrac{C}{\sqrt{1+4x^2}}(1,\ 2x)}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}\right)\\&=\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}\right)\cdot\frac{dx}{dt}\\&=\frac{-4Cx}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{-4C^2x}{(1+4x^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(2x\frac{dx}{dt}\right)\\&=2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}+2x\frac{d^2x}{dt^2}\\&=2\left(\frac{C}{\sqrt{1+4x^2}}\right)^2+2x\cdot\frac{-4C^2x}{(1+4x^2)^2}=\frac{2C^2}{(1+4x^2)^2}\end{aligned}$$

よって $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2C^2}{(1+4x^2)^2}(-2x,\ 1)}$

解説 関数 $y=f(x)$ について, $y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とおくと

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y'\frac{dx}{dt}$$

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=C^2$ より $(1+y'^2)\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=C^2$

$\dfrac{dx}{dt}>0$ であるから $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{C}{\sqrt{1+y'^2}}$

ゆえに　$\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right) = \dfrac{dx}{dt}(1,\ y') = \dfrac{\boldsymbol{C}}{\sqrt{\boldsymbol{1+y'^2}}}\boldsymbol{(1,\ y')}$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\cdot\frac{dx}{dt} \\
&= \frac{-Cy'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{-C^2y'y''}{(1+y'^2)^2} \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(y'\frac{dx}{dt}\right) \\
&= y''\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + y'\frac{d^2x}{dt^2} \\
&= y''\left(\frac{C}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^2 + y'\cdot\frac{-C^2y'y''}{(1+y'^2)^2} = \frac{C^2y''}{(1+y'^2)^2}
\end{aligned}$$

よって　　$\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = \dfrac{\boldsymbol{C^2y''}}{\boldsymbol{(1+y'^2)^2}}\boldsymbol{(-y',\ 1)}$

したがって，一定の速度で曲線 $y = f(x)$ 上を運動する動点の速度ベクトル $\vec{v}$ と加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は垂直である．

また，時刻 t を変数とする動点 $(x(t),\ y(t))$ の速度ベクトル $\vec{v}$ の大きさが一定であるとき

$$|\vec{v}|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

は定数であるから，これを t で微分すると

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$$

よって，速度ベクトル $\vec{v}$ と加速度ベクトル $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ は垂直である．

(3) 円周上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ を $x = r\cos\theta$，$y = r + r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \cdots(*)$$

$|\vec{v}| = C$ より，$|\vec{v}|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = C^2$ であるから

$$\left(-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C^2 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{r^2}$$

上の結果に注意して $(*)$ を t で微分すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{C^2}{r}\cos\theta \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{C^2}{r}\sin\theta$$

ゆえに $\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{C^2}{r}(-\cos\theta, -\sin\theta)$ よって $|\vec{\alpha}| = \boldsymbol{\frac{C^2}{r}}$

(4) (2) の結果から，原点における P の加速度は $\vec{\alpha} = (0,\ 2C^2)$
この点における P の加速度の大きさは $|\vec{\alpha}| = 2C^2$
これと (3) で求めた加速度の大きさが等しいので

$$\frac{C^2}{r} = 2C^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r = \frac{1}{2}}$$

解説 (4) で求めた円の半径は，放物線 $y = x^2$ の原点における曲率円 (接触円) の半径である．

7.151 (1) 条件式 (A)，(B) に $x = y = 0$ を代入すると

$$f(0) = f(0)^2 - g(0)^2, \quad g(0) = 2f(0)g(0) \qquad (*)$$

上の第 2 式から $\{2f(0) - 1\}g(0) = 0$

したがって $f(0) = \frac{1}{2}$ または $g(0) = 0$

- $f(0) = \frac{1}{2}$ のとき，$(*)$ の第 1 式に代入して整理すると $g(0)^2 = -\frac{1}{4}$
  $g(0)$ は実数値であるから，$f(0) = \frac{1}{2}$ は不適．
- $g(0) = 0$ のとき，これを $(*)$ の第 1 式に代入して整理すると

$$f(0)\{f(0) - 1\} = 0 \quad f(0) \neq 0 \text{ に注意して} \quad f(0) = 1$$

よって，題意は成立する．

(2) (1) の結論および条件 (A)，(D) より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h} - g(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}\right\} \\ &= f(x)f'(0)-g(x)g'(0) \qquad (**) \\ &= f(x)\cdot 0 - g(x)\cdot 1 = -g(x) \end{aligned}$$

(3) (2) と同様に，(1) の結論および条件 (B)，(D) より

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+g(x)f(h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h} + g(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\} \\ &= f(x)g'(0)+g(x)f'(0) \qquad (***) \\ &= f(x)\cdot 1 + g(x)\cdot 0 = f(x) \end{aligned}$$

$\pi(x) = \{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)$ とおくと，(2) および上式から

$$\begin{aligned} \pi'(x) &= \{f(x)+ig(x)\}'(\cos x - i\sin x) + \{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)' \\ &= \{f'(x)+ig'(x)\}(\cos x - i\sin x) + \{f(x)+ig(x)\}(-\sin x - i\cos x) \\ &= \{-g(x)+if(x)\}(\cos x - i\sin x) - i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x) \\ &= i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x) - i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 0 \end{aligned}$$

$\pi(x)$ は定数関数であるから　$\pi(x) = \pi(0) = \{f(0)+ig(0)\}\cdot 1 = 1$

よって　　$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 1$

(4) (3) の結論から　$f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$

$f(x),\ g(x)$ は実関数 (実数値関数) であるから

$$f(x)=\cos x,\quad g(x)=\sin x$$

ここで，$\varphi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\varphi'(x)=f'(x)+ig'(x)=-g(x)+if(x)=i\{f(x)+ig(x)\}=i\varphi(x)$$

$\varphi(0)=\cos 0+i\sin 0=1$ および上式を満たす $\varphi(x)$ を求める．

$$\varphi'(x)e^{-ix}-i\varphi(x)e^{-ix}=0\quad\text{ゆえに}\quad\{\varphi(x)e^{-ix}\}'=0$$

したがって　$\varphi(x)e^{-ix}=C$　(C は積分定数)　ゆえに　$\varphi(x)=Ce^{ix}$

$\varphi(0)=1$ より　$C=1$　すなわち　$\varphi(x)=e^{ix}$

$\varphi(x)=f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$ であるから

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad (\#)$$

(#) により，条件 (A)，(B)，(C)，(D′) を満たす関数 $f(x),\ g(x)$ を求める．

(D′) を $(**)$，$(***)$ に代入すると

$$f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)$$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=f'(x)+ig'(x)=\{af(x)-bg(x)\}+i\{bf(x)+ag(x)\}\\&=(a+bi)\{f(x)+ig(x)\}=(a+bi)\phi(x)\end{aligned}$$

$\phi(0)=f(0)+ig(0)=1+i\cdot 0=1$ および上式を満たす $\phi(x)$ を求める．

$$\phi'(x)e^{-(a+bi)x}-(a+bi)e^{-(a+bi)x}=0\quad\text{ゆえに}\quad\{\phi(x)e^{-(a+bi)x}\}'=0$$

したがって

$$\phi(x)e^{-(a+bi)x}=C_0\ \ (C_0\text{は積分定数})\quad\text{ゆえに}\quad\phi(x)=C_0e^{(a+bi)x}$$

$\phi(0)=1$ より　$C_0=1$　すなわち　$\phi(x)=e^{(a+bi)x}$

(#) より　　$\phi(x)=e^{ax}e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ であるから ($f(x),\ g(x)$ は実関数)

$$\boldsymbol{f(x)=e^{ax}\cos bx,\quad g(x)=e^{ax}\sin bx}$$

これから　$f\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\cos x,\quad g\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\sin x$

これらを $p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\dfrac{x}{b}\right),\ \ q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\dfrac{x}{b}\right)$ に代入すると

$$p(x)=\cos x,\quad q(x)=\sin x$$

［**B の証明**］ このとき，加法定理を用いて

$$\begin{aligned}q(x+y)&=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\&=q(x)p(y)+p(x)q(y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)\end{aligned}$$

［**D の証明**］ $p'(x)=-\sin x,\ \ q'(x)=\cos x$ より

$$p'(0)=0,\ \ q'(0)=1$$

［証終］

補足 本題の線形の連立微分方程式

$$\begin{aligned}&f(0)=1,\ g(0)=0,\ f'(0)=a,\ g'(0)=b,\\&f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)\end{aligned}$$

から $g(x),\ g'(x)$ を消去して，2 階の微分方程式

$$f(0)=1,\ f'(0)=a,\ f''(x)-2af'(x)+(a^2+b^2)f(x)=0$$

を解いてもよい．特性方程式 $X^2-2aX+a^2+b^2=0$ の解を

$$\alpha=a+bi,\quad \beta=a-bi$$

とおくと　$f(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}\quad (C_1,\ C_2$ は積分定数$)$[17]

このとき，$f(0)=1,\ f'(0)=a$ より

$$C_1+C_2=1,\quad \alpha C_1+\beta C_2=a$$

上の第 2 式について　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}(C_1+C_2)+\dfrac{\alpha-\beta}{2}(C_1-C_2)=a$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=a,\ \dfrac{\alpha-\beta}{2}=bi$ を代入すると　$a(C_1+C_2)+bi(C_1-C_2)=a$

$C_1+C_2=1,\ b\neq0$ より　$C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$　よって　$f(x)=e^{ax}\cos bx$

同様に，2 階の微分方程式

$$g(0)=0,\ g'(0)=b,\ g''(x)-2ag'(x)+(a^2+b^2)g(x)=0$$

を解くと，$g(x)=e^{ax}\sin bx$ を得る．

[17] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2010.pdf (p.17 例 2)

7.152 (1) $f'(x)-f(x)=0$ より，$f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)\cdot e^{-x}=0$ であるから

$$f'(x)\cdot e^{-x}+f(x)(e^{-x})'=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left\{f(x)\cdot e^{-x}\right\}'=0$$

上の第 2 式を積分すると

$$f(x)\cdot e^{-x}=C \quad (C \text{ は定数})$$

(2) $g'(x)-g(x)=x^2$ より，$g'(x)\cdot e^{-x}-g(x)\cdot e^{-x}=x^2e^{-x}$ であるから

$$g'(x)\cdot e^{-x}+g(x)(e^{-x})'=x^2e^{-x} \quad \text{ゆえに} \quad \left\{g(x)\cdot e^{-x}\right\}'=x^2e^{-x}$$

上の第 2 式を積分すると

$$\begin{aligned} g(x)\cdot e^{-x} &= \int x^2\cdot e^{-x}\,dx \\ &= -(x^2+2x+2)e^{-x}+C_1 \quad (C_1\text{は積分定数}) \end{aligned}$$

$g(0)=0$ より　$-2+C_1=0$　ゆえに　$C_1=2$

したがって　　$g(x)=2e^x-2-2x-x^2,$

$$g'(x)=2e^x-2-2x,$$

$$g''(x)=2(e^x-1)$$

上式より，$x>0$ において，$g''(x)>0$ であるから，$g'(x)$ は単調増加で

$$x>0 \text{ において} \quad g'(x)>g'(0)=0$$

さらに，$x>0$ において，$g'(x)>0$ であるから，$g(x)$ は単調増加で

$$x>0 \text{ において} \quad g(x)>g(0)=0$$

7.153 (1) 実数 r は特性方程式 (B) の解であるから

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_1r+a_0=0$$

両辺に e^{rx} を掛けると

$$\begin{aligned} a_nr^ne^{rx}+a_{n-1}r^{n-1}e^{rx}+\cdots+a_1re^{rx}+a_0e^{rx}&=0 \\ a_n(e^{rx})^{(n)}+a_{n-1}(e^{rx})^{(n-1)}+\cdots+a_1(e^{rx})^{(1)}+a_0e^{rx}&=0 \end{aligned}$$

よって，関数 $y=e^{rx}$ は方程式 (A) を満たす．

(2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解にもつから，$n-k$ 次多項式 $Q(t)$ を用いて

$$a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = (t-r)^k Q(t) \quad \cdots (*)$$

とおける．この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 & \\ = k(t-r)^{k-1}Q(t) + (t-r)^k Q'(t) & \\ = (t-r)^{k-1}\{kQ(t) + (t-r)Q'(t)\} & \end{aligned}$$

よって，次の方程式は，r を $k-1$ 重解にもつ．

$$na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(3) $y_j = x^j e^{rx}$ より，$y_j = xy_{j-1}$ であるから，ライプニッツの公式を用いて微分すると

$$\begin{aligned} y_j^{(n)} = (xy_j)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{(n-k)} {y_{j-1}}^{(k)} \\ &= \sum_{k=n-1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{(n-k)} {y_{j-1}}^{(k)} = \boldsymbol{n{y_{j-1}}^{(n-1)} + x{y_{j-1}}^{(n)}} \end{aligned}$$

解説 ライプニッツの公式

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

証明は，数学的帰納法により示すことができる．

(4) $(*)$ の $Q(t)$ を，定数 $b_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-k)$ を用いて $(b_{n-k} = a_n)$

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i$$

とおくと，$(*)$ から

$$\begin{aligned} a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 &= (t-r)^k Q(t) \\ &= \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j t^{k-j}(-r)^j \sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j t^{k+i-j} \end{aligned}$$

上式から

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k+i-j)}$$

ここで $z = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k-j)}$ とおくと

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i z^{(i)}$$

このとき，微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \cdots (**)$$

は，次のようになる．

$$b_0 z + b_1 z' + b_2 z'' + \cdots + b_{n-k} z^{(n-k)} = 0$$

したがって，$z = 0$ は微分方程式 $(**)$ の解の 1 つであるから

$$\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k-j)} = 0$$

$$e^{-rx} \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k-j)} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j y^{(k-j)} (e^{-rx})^{(j)} = 0$$

ゆえに，ライプニッツの公式により

$$(ye^{-rx})^{(k)} = 0$$

上式の両辺を k 回積分すると，右辺は x の $k-1$ 次式になるので

$$ye^{-rx} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{k-1} x^{k-1}$$

となる (c_jは定数 $(j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$)．
したがって，次式は微分方程式 $(**)$ の解の 1 つである．

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$$

よって，$x^j e^{rx}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$ は，$(**)$ をみたす．

解説 (分大 [医]2010) 9