

令和 5 年度

# 高等学校 行列

電子教科書



2023 年 3 月 21 日

熊本県立第二高等学校数学科

# 目次

|       |              |    |
|-------|--------------|----|
| 第 1 章 | 行列           | 1  |
| 1.1   | 行列の演算        | 1  |
| 1.1.1 | 行列           | 1  |
| 1.1.2 | 行列の加法・減法と実数倍 | 3  |
| 1.1.3 | 行列の乗法        | 9  |
| 1.1.4 | 行列の乗法の性質     | 12 |
| 1.1.5 | 問題           | 22 |
| 1.2   | 行列の応用        | 24 |
| 1.2.1 | 逆行列          | 24 |
| 1.2.2 | 連立 1 次方程式と行列 | 28 |
| 1.2.3 | 点の移動と行列      | 33 |
| 1.2.4 | 合成変換と逆変換     | 40 |
| 1.2.5 | 回転移動と 1 次変換  | 43 |
| 1.2.6 | 問題           | 47 |
| 1.3   | 章末問題         | 48 |
| 1.3.1 | 章末問題 A       | 48 |
| 1.3.2 | 章末問題 B       | 51 |
| 解答    |              | 55 |
|       | スペクトル分解      | 80 |

# 第 1 章 行列

## 1.1 行列の演算

### 1.1.1 行列

#### A 》 行列

右の表は，2つの店 P, Q における3種類の商品 R, S, T の単価を示したものである．

|     | R    | S    | T    |
|-----|------|------|------|
| P 店 | 80 円 | 50 円 | 60 円 |
| Q 店 | 90 円 | 40 円 | 70 円 |

この表から，数値だけを同じ並びのまま抜き出して，両側をカッコで囲んで，右のよう

$$\begin{pmatrix} 80 & 50 & 60 \\ 90 & 40 & 70 \end{pmatrix}$$

に書くことにする．  
このように，いくつかの数を長方形に書き並べ，両側をカッコで囲んだものを行列といい，カッコの中のそれぞれの数を，この行列の成分という．

行列において，成分の横の並びを行といい，上から順に，第1行，第2行，… という．

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第1行} \\ \leftarrow \text{第2行} \end{matrix}$$

また，成分の縦の並びを列といい，左から順に，第1列，第2列，… という．

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{第1列} & \text{第2列} & \text{第3列} \end{matrix}$$

行数が  $m$ ，列数が  $n$  の行列を， $m$  行  $n$  列の行列または  $m \times n$  行列という．とくに，行数と列数が等しい  $n \times n$  行列を  $n$  次の正方行列という．

例 1.1  $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$  は，2行3列の行列である．

$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$  は， $2 \times 2$  行列，すなわち2次の正方行列である．

練習 1.1 次の行列は何行何列の行列か. また, 正方行列はどれか. 解

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

行列の中でも,  $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$  のように行が1行だけの行列を行ベクトル,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  のように列が1列だけの行列を列ベクトルということがある.

行列は大文字  $A, B$  などで表し, 成分は小文字  $a, b, c$  などと表すことが多い. また, 成分については, 第  $i$  行と第  $j$  列の交点にあたる成分を  $(i, j)$  成分という.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow (1, 2) \text{ 成分} \\ b \end{matrix}$$

練習 1.2 練習 1.1(2) の行列について, 次の成分をいえ. 解

- (1)  $(3, 2)$  成分                      (2)  $(1, 3)$  成分                      (3)  $(3, 3)$  成分

## B 》 行列の相等

行列  $A, B$  が, 行数が等しく, 列数も等しいとき,  $A$  と  $B$  は同じ型であるという. また,  $A$  と  $B$  が同じ型の行列で, しかも対応する  $(i, j)$  成分がすべて一致するとき,  $A$  と  $B$  は等しいといい,  $A = B$  と書く.

たとえば, 2 次の正方行列では, 次のようになる.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$A = B \iff a = p, b = q, c = r, d = s$$

練習 1.3 次の等式が成り立つとき,  $x, y, z, w$  の値を求めよ. 解

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z & w \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## 1.1.2 行列の加法・減法と実数倍

## A 》 行列の和と差

2つの行列  $A, B$  は同じ型であるとする. このとき,  $A, B$  の  $(i, j)$  成分の和を  $(i, j)$  成分とする行列を,  $A$  と  $B$  の和といい,  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  と書く. また,  $A, B$  の  $(i, j)$  成分の差を  $(i, j)$  成分とする行列を,  $A$  と  $B$  の差といい,  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  と書く.

注意 型の異なる2つの行列については, 和, 差を定義しない.

2次の正方行列では, 和と差は次のようになる.

行列の和と差

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix}$$

例 1.2  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  のとき

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+0 \\ -2+2 & 5+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-4 & 3-0 \\ -2-2 & 5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

練習 1.4 次の計算をせよ. 解

$$(1) \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & -7 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

行列  $A$  の各成分の符号を変えた数を成分とする行列を  $-A$  で表す.  
2 次の正方行列では, 次のようになる.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ について } \quad -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

**練習 1.5** 次の行列  $A$  について,  $-A$  および  $A + (-A)$  を求めよ. 解

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

成分がすべて 0 である行列を<sup>れい</sup>零行列という.

たとえば,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$  などは, どれも零行列である. これらは, いずれも文字  $O$  で表すことにする.

### B》加法についての性質

行列の和の定義から, 行列の加法について, 次の性質が成り立つ.

加法についての性質

$$1 \quad A + B = B + A \quad \text{交換法則}$$

$$2 \quad (A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{結合法則}$$

$$3 \quad A + (-A) = O$$

$$4 \quad A + O = A$$

2 が成り立つので, この 3 つの行列の和を  $A + B + C$  と書く.  
また, 次の性質が成り立つ.

$$A + (-B) = A - B \qquad A - A = O$$

練習 1.6 次の計算をせよ. 解

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

### C》行列の実数倍

$k$  を実数とすると、行列  $A$  の各成分の  $k$  倍を成分とする行列を  $kA$  と書く. 2 次の正方行列では、次のようになる.

行列の実数倍

$$k \text{ を実数とすると} \quad k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

練習 1.7  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$  のとき、次の行列を求めよ. 解

$$(1) \quad 3A \qquad (2) \quad \frac{1}{2}A$$

$$(3) \quad (-2)A \qquad (4) \quad (-1)A$$

行列の実数倍の定義から，次の性質が成り立つ．

$$1A = A \quad (-1)A = -A \quad 0A = O \quad kO = O$$

注意  $(-2)A = -(2A)$  が成り立つので，これらを単に  $-2A$  と書く．

また，行列の実数倍について，次の性質が成り立つ．

実数倍についての性質

$k, l$  は実数とする．

$$1 \quad k(lA) = (kl)A \qquad 2 \quad (k+l)A = kA + lA$$

$$3 \quad k(A+B) = kA + kB$$

練習 1.8 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  と  $k = 2$ ,  $l = 3$  について，次の各等式が成り立つことを確かめよ. 解

$$(1) \quad k(lA) = (kl)A$$

$$(2) \quad (k+l)A = kA + lA$$

$$(3) \quad k(A+B) = kA + kB$$

これまで調べた性質により，行列  $A, B$  などを含む加法，減法，実数倍の計算は，文字式の計算と同じように行うことができる．

例 1.3  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  のとき

$$\begin{aligned} 3(A + 2B) - 2A &= 3A + 6B - 2A = A + 6B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -4 \\ -12 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

練習 1.9  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$  のとき, 次の式を計算せよ. 解

(1)  $2(3A + B)$

(2)  $3(A - 2B)$

(3)  $2(2A - B) + 3B$

例題 1.1  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  のとき, 等式  $2(A + X) = A + 3B$  を満たす行列  $X$  を求めよ.

解答  $2(A + X) = A + 3B$  から  $2X = -A + 3B$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad X &= \frac{1}{2}(-A + 3B) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

練習 1.10 行列  $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  のとき, 次の等式を満たす行列  $X$  を求めよ. 解

(1)  $2A + 3X = B$

(2)  $3(A + X) = X + 2B$

## 1.1.3 行列の乗法

## A 》 行列の積

1 ページに示した 2 つの店 P, Q で,  
商品 R を 2 個, 商品 S を 3 個買うとき,  
P 店, Q 店での合計代金は, それぞれ

$$\text{P 店: } 80 \times 2 + 50 \times 3 = 310 \text{ (円)}$$

$$\text{Q 店: } 90 \times 2 + 40 \times 3 = 300 \text{ (円)}$$

|     | R    | S    |
|-----|------|------|
| P 店 | 80 円 | 50 円 |
| Q 店 | 90 円 | 40 円 |

である.

これらの計算を, まとめて次のように書くことにする.

$$\begin{pmatrix} 80 & 50 \\ 90 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310 \\ 300 \end{pmatrix}$$

一般に, 行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  と列ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の積を次の式で定める.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{例 1.4} \quad & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-6) \\ 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-6) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

練習 1.11 次の積を計算せよ. 解

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## B 》 2 次の正方行列の積

2 次の正方行列どうしの積を次の式で定める.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

例 1.5  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}$

練習 1.12 次の積を計算せよ. 解

(1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

(2)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

## C 》一般の行列の積

$A$  が  $l \times m$  行列,  $B$  が  $m \times n$  行列のとき, 積  $AB$  を,  $A$  の第  $i$  行と  $B$  の第  $j$  列の成分を順に掛けて加えたものを  $(i, j)$  成分とする  $l \times n$  行列であると定める. 行列  $A$  の列数と行列  $B$  の行数が一致しない場合は,  $A$  と  $B$  の積を定めない.

$$\text{例 1.6} \quad (1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow 3 \times 3 \text{ 行列と} \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad 3 \times 1 \text{ 行列の} \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \text{積は } 3 \times 1 \text{ 行列} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 2 = 7 \quad \begin{array}{l} \leftarrow 1 \times 2 \text{ 行列と} \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad 2 \times 1 \text{ 行列の} \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \text{積は } 1 \times 1 \text{ 行列} \end{array}$$

注意 例 1.6(2) のように,  $1 \times 1$  行列はかっこを省略することが多い.

練習 1.13 次の積を計算せよ. 解

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

## 1.1.4 行列の乗法の性質

## A 》乗法の計算法則

行列の乗法について，次の計算法則が成り立つ．

行列の乗法の計算法則

$$1 \quad (kA)B = A(kB) = k(AB) \quad k \text{ は実数}$$

$$2 \quad (AB)C = A(BC) \quad \text{結合法則}$$

$$3 \quad \begin{aligned} (A+B)C &= AC + BC \\ A(B+C) &= AB + AC \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (A+B)C &= AC + BC \\ A(B+C) &= AB + AC \end{aligned}} \right\} \text{分配法則}$$

1 が成り立つので， $(kA)B$  と  $k(AB)$  を区別せずに  $kAB$  と書く．また，2 が成り立つので，行列  $A, B, C$  の積を  $ABC$  と書く．

練習 1.14  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  について，次の各等式が成り立つことを確かめよ. 解

$$(1) \quad (2A)B = A(2B) = 2(AB)$$

$$(2) \quad (A+B)C = AC + BC$$

練習 1.15 次の計算をせよ. 解

$$(1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

B》積  $AB$  と積  $BA$  の違い

12 ページで述べたように、行列の乗法についても、数の場合と同様に結合法則、分配法則が成り立つ。数の乗法では、交換法則も成り立つが、行列の乗法ではどうだろうか。このことについて調べてみよう。

例 1.7  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  について

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

よって、この行列  $A$ ,  $B$  については、 $AB \neq BA$  である。

上の例 1.7 からわかるように、次のことがいえる。

正方行列の乗法では、交換法則は一般には成り立たない。

同じ次数の正方行列  $A$ ,  $B$  について、 $AB = BA$  となる場合もある。このとき、 $A$  と  $B$  は交換可能であるという。

練習 1.16 次の行列  $A$  と  $B$  が交換可能であるように、 $x$ ,  $y$  の値を定めよ。 解

$$(1) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

## C》単位行列と零行列

2 次の正方行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を, 2 次の単位行列といい,  $E$  で表す.

この単位行列  $E$  と任意の 2 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  について

$$AE = EA = A$$

が成り立つ.

また,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  を 3 次の単位行列といい, これも  $E$  で表す.

練習 1.17  $B$  を任意の 3 次の正方行列とすると, 次のことが成り立つことを確かめよ. 解

$$BE = EB = B$$

一般に, 2 次または 3 次の正方行列において, 次のことがいえる.

$A$  を任意の正方行列とし,  $A$  と同じ次数の単位行列を  $E$ , 零行列を  $O$  とすると

$$AE = EA = A \quad AO = OA = O$$

上の性質から, 行列の  $E$  と  $O$  は, それぞれ数における 1 と 0 に相当すると考えられる.

数の乗法では、「 $a \neq 0, b \neq 0$  ならば  $ab \neq 0$ 」が成り立つ．ところが行列の乗法では、 $A \neq O, B \neq O$ でも、 $AB = O$  となることがある．

例 1.8  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  について

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

練習 1.18  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & b \end{pmatrix}$  のとき、 $AB = O$  であるように、 $a, b$  の値を定めよ．解

## D 》 行列の累乗

正方行列  $A$  の積  $AA$  を  $A^2$  と書き、 $AAA$  を  $A^3$  と書く．

一般に、正方行列  $A$  の  $n$  個の積を  $A^n$  と書き、 $A$  の  $n$  乗という．

例 1.9  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  のとき

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

練習 1.19 例 1.9 の行列  $A$  について、次の行列を求めよ. 解

(1)  $A^4$                       (2)  $A^5$                       (3)  $A^6$

練習 1.20 次の行列  $A$  について、 $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^4$  を、それぞれ求めよ. 解

(1)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3)  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

例題 1.2 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  について,  $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  となるように,  $a, b$  の値を定めよ.

解答

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって 
$$\begin{pmatrix} a^2 & ab+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

成分を比較して 
$$\begin{cases} a^2 = 4 & \cdots \textcircled{1} \\ ab + b = -3 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① から 
$$a = \pm 2$$

② に代入して

$$a = 2 \text{ のとき } b = -1, \quad a = -2 \text{ のとき } b = 3$$

$$(\text{答}) a = 2, b = -1 \text{ または } a = -2, b = 3$$

練習 1.21 行列  $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$  について,  $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$  となるように,  $a, b$  の値を定めよ. 解

練習 1.22 行列  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  について,  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$  となるように,  $a, b$  の値を定めよ. ただし,  $a, b$  は実数とする. 解

応用例題 1.1 行列  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$  について、等式  $A^2 - A + E = O$  が成り立つとき、次の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$  とする。

- (1)  $a$  の値を求めよ。 (2)  $A^3$  を求めよ。

考え方 》 (2)  $A^2 - A + E = O$  より  $A^2 = A - E$  が成り立つ。この等式を利用する。

$$\begin{aligned} \text{解答 (1)} \quad A^2 - A + E &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 1-a^2 & -2a \\ 2a & 1-a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2a \\ 2a & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3-a^2 & 0 \\ 0 & 3-a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^2 - A + E = O \text{ より } 3 - a^2 = 0$$

$$a > 0 \text{ であるから } a = \sqrt{3}$$

$$(2) \quad A^2 - A + E = O \text{ より } A^2 = A - E$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad A^3 &= A^2 A \\ &= (A - E)A \\ &= A^2 - A \\ &= (A - E) - A \\ &= -E \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

練習 1.23 行列  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}$  について, 等式  $A^2 + A + E = O$  が成り立つとき, 次の問いに答えよ. ただし,  $a > 0$  とする. 解

(1)  $a$  の値を求めよ.

(2)  $A^3$  を求めよ.

## E》ハミルトン・ケーリーの定理

任意の2次の正方行列について成り立つ興味深い等式を示そう.

応用例題 1.2 任意の2次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  について, 等式

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

が成り立つ. このことを証明せよ.

考え方》左辺を直接計算してもよいが, ここでは変形した次の等式を証明してみる.

$$A^2 + (ad - bc)E = (a + d)A$$

証明  $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$

$$(ad - bc)E = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} A^2 + (ad - bc)E &= \begin{pmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{pmatrix} \\ &= (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= (a + d)A \end{aligned}$$

よって  $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$

証終

注意 応用例題 1.2 で証明した事柄を, 2次の正方行列に関するハミルトン・ケーリーの定理という.

練習 1.24 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  について、次のことが成り立つことを、応用例題 1.2 の等式を用いて証明せよ. 解

(1)  $a + d = 0, ad - bc = 0$  ならば  $A^2 = O$

(2)  $a + d = 0, ad - bc = -1$  ならば  $A^2 = E$

### 1.1.5 問題

問題 1.1 次の積を計算せよ. 解

(1)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$       (2)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

**問題 1.2** 2 次の正方行列において、次の等式が常に成り立つかどうかを調べよ。ただし、 $E$  は 2 次の単位行列とする。 解

$$(1) (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(2) (A + E)^2 = A^2 + 2A + E$$

$$(3) (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$$(4) (A - E)(A^2 + A + E) = A^3 - E$$

**問題 1.3**  $n$  を自然数とすると、 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ であることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。 解

## 1.2 行列の応用

### 1.2.1 逆行列

#### A 》 逆行列

行列において、数  $a$  の逆数  $a^{-1}$  に相当する行列を考えてみよう.

$A$  を 2 次の正方行列,  $E$  を 2 次の単位行列とするとき,  
 $AX = XA = E$  を満たす正方行列  $X$  が存在するならば, この  $X$  を  $A$  の逆行列といい,  $A^{-1}$  で表す.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

この定義から,  $(A^{-1})^{-1} = A$  である.

行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の逆行列を求めてみよう.

ハミルトン・ケーリーの定理によると, 次の等式が成り立つ.

$$(a+d)A - A^2 = (ad-bc)E$$

よって,  $B = (a+d)E - A$  すなわち  $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  とおくと  
 $AB = BA = (ad-bc)E \quad \cdots \textcircled{1}$

[1]  $ad-bc \neq 0$  のとき  $\frac{1}{ad-bc}B$  が  $A$  の逆行列である.

[2]  $ad-bc = 0$  のとき  $\textcircled{1}$  より  $AB = O$  となる.

$A$  が逆行列をもつとすると,  $AB = O$  の両辺に  $A^{-1}$  を左から掛けて

$$A^{-1}AB = A^{-1}O$$

← 右辺は  $A^{-1}O=O$

左辺は  $A^{-1}AB = EB = B$  となるから  $B = O$

よって,  $a=b=c=d=0$  となり,  $A=O$  である.

すると, 任意の正方行列  $X$  に対して  $AX \neq E$  となり,  $A$  が逆行列をもつことに矛盾する. したがって, このとき  $A$  は逆行列をもたない.

#### 2 次の正方行列の逆行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  について,  $\Delta = ad-bc$  とおく.

$\Delta \neq 0$  のとき,  $A$  は逆行列をもち  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\Delta = 0$  のとき,  $A$  は逆行列をもたない.

注意 以下では、 $\Delta$  を行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  における  $ad - bc$  の値として用いる.

例 1.10 (1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  について  $\Delta = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2 \neq 0$

よって、 $A$  は逆行列をもち  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(2)  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$  について  $\Delta = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 0$

よって、 $B$  は逆行列をもたない.

練習 1.25 次の行列は逆行列をもつか. もつ場合は, その逆行列を求めよ. 解

(1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(2)  $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3)  $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

例題 1.3 行列  $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix}$  が逆行列をもたないように、 $a$  の値を定めよ.

解答 行列が逆行列をもたないのは、 $\Delta = 0$  のときである.

$$\Delta = a(a-2) - 3 \cdot 1 = a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3)$$

$$\text{よって} \quad (a+1)(a-3) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad a = -1, 3$$

練習 1.26 次の行列が逆行列をもたないように、 $a$  の値を定めよ. 解

$$(1) \begin{pmatrix} a & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} a & 4 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$$

**B》等式  $AX = B$  を満たす  $X$**

2 次の正方行列  $A, B$  に対して、等式  $AX = B$  を満たす正方行列  $X$  を求めてみよう.

$A$  が逆行列をもつとき、 $AX = B$  の両辺に  $A^{-1}$  を左から掛けると

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

が成り立つ. 左辺は

$$A^{-1}AX = EX = X$$

となるから、次のことがいえる.

$A$  が逆行列をもつとき、等式  $AX = B$  を満たす行列  $X$  は

$$X = A^{-1}B$$

注意  $A$  が逆行列をもつとき、等式  $YA = B$  を満たす行列  $Y$  は、等式の両辺に  $A^{-1}$  を右から掛けて、 $Y = BA^{-1}$  となる.

**例題 1.4** 2つの行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$  について, 等式  $AX = B$  を満たす行列  $X$  を求めよ.

**解答**  $A$  について  $\Delta = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 7 = -1 \neq 0$

よって,  $A$  は逆行列をもち

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

したがって, 等式  $AX = B$  を満たす行列  $X$  は

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}$$

**練習 1.27** 2つの行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$  について, 等式  $AX = B$  を満たす行列  $X$  を求めよ. また, 等式  $YA = B$  を満たす行列  $Y$  を求めよ. 解

## 1.2.2 連立1次方程式と行列

## A 》連立1次方程式と行列

$$\text{連立1次方程式} \quad \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

は、行列を用いると、次の式で表される.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

さらに、②で、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  とおくと、②は

$$AX = P \quad \dots \textcircled{3}$$

と表される. この行列  $A$  を、連立1次方程式①の係数行列という.

練習 1.28 次の連立1次方程式を行列を用いて表せ. 解

$$(1) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 4y = 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 4x - 7y = 6 \end{cases}$$

$A$  が逆行列をもつとき、③の両辺に左から  $A^{-1}$  を掛けると、前ページと同様にし  
て、 $X = A^{-1}P$  が得られる.

したがって、次のことが成り立つ.

連立1次方程式の解

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ とする. } A \text{ が逆行列をもつとき,}$$

方程式  $AX = P$  の解  $X$  は  $X = A^{-1}P$

一般に、 $x, y$  の連立1次方程式①がただ1組の解をもつのは、③の係数行列  $A$  が逆行列をもつときに限られる.

例題 1.5 行列を用いて，次の連立1次方程式を解け．

$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

解答 行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

係数行列  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  について  $\Delta = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1 \neq 0$

ゆえに，係数行列は逆行列をもち

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

①より  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

したがって  $x = 4, y = -6$

練習 1.29 行列を用いて，次の連立1次方程式を解け. 解

$$(1) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 7y = 10 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$$

### B 》係数行列が逆行列をもたない場合

28 ページにおいて, ③ の係数行列  $A$  が逆行列をもたないときは, 連立 1 次方程式 ① は解を無数にもつか解をもたないかのいずれかである.

#### 例 1.11 解を無数にもつ連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases} \quad \leftarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

係数行列  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$  について,  $\Delta = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0$  である.

よって, 係数行列は逆行列をもたない.

解は  $2x + 3y = 1$  を満たす  $x, y$  の組すべてで, 無数にある.

#### 例 1.12 解をもたない連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$$

係数行列  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$  について,  $\Delta = 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 4 = 0$  である.

よって, 係数行列は逆行列をもたない.

$2x - y = 1$  のとき  $4x - 2y = 2 \neq 3$  となるので, 解はない.

応用例題 1.3 連立 1 次方程式  $\begin{cases} 3x + y = kx \\ 2x + 4y = ky \end{cases}$  が  $x = 0, y = 0$  以外の解をもつように、定数  $k$  の値を定めよ.

考え方 》 解を無数にもつことになる.  $x, y$  の項をすべて左辺に移項して、係数行列が逆行列をもたない条件を求める.

解答 与えられた連立 1 次方程式は、次のように表される.

$$\begin{cases} (3-k)x + y = 0 \\ 2x + (4-k)y = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 3-k & 1 \\ 2 & 4-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この方程式が、 $x = 0, y = 0$  以外の解をもつのは、係数行列が逆行列をもたないときである.

$$\text{よって, } \Delta = 0 \text{ より} \quad (3-k)(4-k) - 1 \cdot 2 = 0$$

$$\text{整理すると} \quad k^2 - 7k + 10 = 0 \quad \leftarrow (k-2)(k-5)=0$$

$$\text{これを解いて} \quad k = 2, 5$$

補足 上の連立 1 次方程式の解は、 $k = 2$  のとき  $x + y = 0$  を満たす  $x, y$  の組すべて、 $k = 5$  のとき  $2x - y = 0$  を満たす  $x, y$  の組すべてである.

練習 1.30 連立 1 次方程式  $\begin{cases} 2x + 2y = kx \\ 5x - y = ky \end{cases}$  が、 $x = 0, y = 0$  以外の解をもつように、定数  $k$  の値を定めよ. 解

## 研究

## 行列の対角化

2 次の正方行列  $A$  に対して、逆行列をもつ適当な行列  $P$  によって積  $P^{-1}AP$  が  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  の形に変形できる場合がある. この変形を行列の対角化という.

たとえば, 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  に対して, 行列  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  を考える

と, 行列  $P$  は逆行列  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  をもち

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

このような行列  $P$  と行列  $A$  には, 次のような関係がある.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  とするとき, 方程式  $AX = kX$  が  $X = O$  以外の解をもつような定数  $k$  は,  $k = 2, 5$  である.

$k = 2$  のとき, 解の1つは  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  であり

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

$k = 5$  のとき, 解の1つは  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  であり

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

① と ② をまとめて  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

この等式に現れる行列  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  が  $P$  の1つとして得られる.

## 1.2.3 点の移動と行列

## A 》点の対称移動と行列

座標平面上の点は、2つの実数の組  $(x, y)$  で表される．ここでは、座標平面上の点の移動を行列で表現する方法を調べよう．

点  $(x, y)$  を、 $x$  軸に関して対称移動し、移動後の座標を  $(x', y')$  で表すとき、

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

すなわち

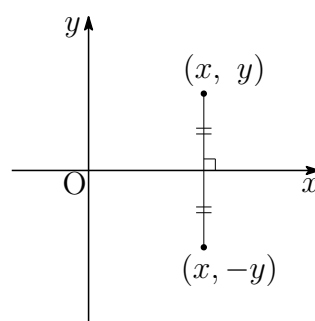
$$\begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{cases}$$

が成り立つ．

この式を行列を用いて表すと、次のようになる．

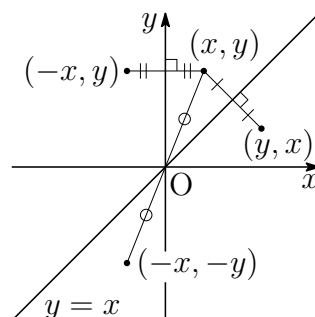
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

**練習 1.31** 点  $(3, 2)$  を、 $x$  軸に関して対称移動する．移動後の点の座標を  $(x', y')$  で表すとき、上の  $\textcircled{1}$  の等式を用いて  $x', y'$  の値を求めよ． 解



**練習 1.32** 点  $(x, y)$  を次のように対称移動する．移動後の点の座標を  $(x', y')$  で表すとき、点の座標の関係を上の  $\textcircled{1}$  のように行列を用いて表せ． 解

- (1)  $y$  軸に関して対称移動する．  
移動後の点の座標は  $(-x, y)$
- (2) 原点に関して対称移動する．  
移動後の点の座標は  $(-x, -y)$
- (3) 直線  $y = x$  に関して対称移動する．  
移動後の点の座標は  $(y, x)$



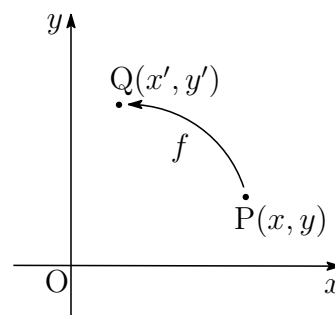
## B 》1 次変換

座標平面上の各点に対応して、同じ平面上の点がただ1つ定まるとき、この対応を座標平面上の変換といい、点Pに対して点Qが定まるとき、点Qをこの変換による点Pの像という。変換は記号  $f$ ,  $g$  などを用いて表すことにする。

座標平面上の変換  $f$  によって、点  $P(x, y)$  が点  $Q(x', y')$  に移されるとする。これらの点の座標の関係が、 $a, b, c, d$  を定数として

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

という式で表されるとき、この変換  $f$  を1次変換という。



① を行列で表すと、 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  である。そこで、この1次変換  $f$  を、行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の表す1次変換という。

$x$  軸,  $y$  軸, 原点, 直線  $y = x$  に関する対称移動は、どれも1次変換である。これらを表す行列は、それぞれ次のようになる。

| $x$ 軸                                           | $y$ 軸                                           | 原 点                                              | 直線 $y = x$                                     |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |

例 1.13 行列  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$  の表す1次変換による点  $(5, 1)$  の像は、

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ より, 点 } (17, 15) \text{ である.}$$

練習 1.33 次の行列の表す 1 次変換による与えられた点の像を求めよ. 解

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 点 } (1, 2) \qquad (2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \text{ 点 } (4, 1)$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \text{ 点 } (-3, 5) \qquad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 点 } (3, -4)$$

### C 》 1 次変換の性質

単位行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  の表す 1 次変換を, とくに恒等変換という.

恒等変換では, 任意の点 P の像は, 点 P 自身である.

また, 任意の行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  について

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. よって, 1 次変換による原点 (0, 0) の像は常に原点である.

例 1.14 点  $(1, 0)$  の像が点  $(2, 4)$ ，点  $(0, 1)$  の像が点  $(1, 5)$  であるような 1 次変換を表す行列  $A$  を求める．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とすると，条件から

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

よって  $a = 2, c = 4, b = 1, d = 5$

したがって  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

一般に，1 次変換について次のことが成り立つ．

点  $(1, 0)$  を点  $(a, c)$  に，点  $(0, 1)$  を点  $(b, d)$  に移す 1 次変換を表す行列は，  
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  である．

練習 1.34 点  $(1, 0)$  を点  $(-2, 3)$  に，点  $(0, 1)$  を点  $(1, -4)$  に移す 1 次変換を表す行列を求めよ。 解

一般に，点  $(p, r)$  を点  $(a, c)$  に，点  $(q, s)$  を点  $(b, d)$  に移す 1 次変換を表す行列を  $A$  とすると， $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ， $A \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  が成り立つ．このことは，  
 $A \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が成り立つことと同じである．

**例題 1.6** 点  $(2, 1)$  を点  $(4, -2)$  に, 点  $(5, 3)$  を点  $(7, 1)$  に移す 1 次変換を表す行列  $A$  を求めよ.

解答 条件から, 次の等式が成り立つ.

$$A \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

行列  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  について  $\Delta = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0$

よって, 逆行列は  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

したがって, ① より

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}$$

**練習 1.35** 点  $(2, 1)$  を点  $(8, 5)$  に, 点  $(-6, 7)$  を点  $(-4, -5)$  に移す 1 次変換を表す行列  $A$  を求めよ. 解

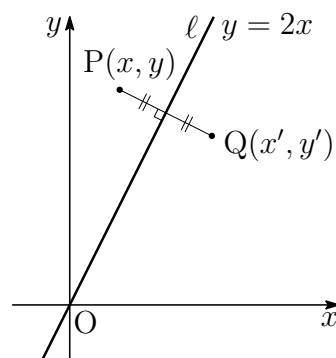
応用例題 1.4 直線  $y = 2x$  に関する対称移動  $f$  は 1 次変換である．このことを示し， $f$  を表す行列を求めよ．

考え方 》 2 点  $P, Q$  が直線  $\ell$  に関して対称なとき， $\ell$  は線分  $PQ$  の垂直二等分線である．このことを用いる．

解答 直線  $y = 2x$  を  $\ell$ ， $\ell$  に関して点  $P(x, y)$  と対称な点を  $Q(x', y')$  とする．

直線  $PQ$  は  $\ell$  に垂直で，線分  $PQ$  の中点が  $\ell$  上にあるから

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{y' - y}{x' - x} = -1 \\ \frac{y + y'}{2} = 2 \cdot \frac{x + x'}{2} \end{cases}$$



よって 
$$\begin{cases} x' + 2y' = x + 2y \\ -2x' + y' = 2x - y \end{cases}$$

すなわち 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって， $f$  は 1 次変換で，求める行列は 
$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

**練習 1.36** 直線  $y = 3x$  に関する対称移動  $f$  は 1 次変換である．このことを示し， $f$  を表す行列を求めよ． 解

## 1.2.4 合成変換と逆変換

## A 》 合成変換

1次変換  $f, g$  を表す行列を, それぞれ  $A, B$  とする.

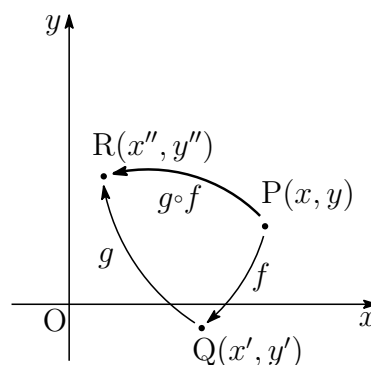
$f$  によって点  $P(x, y)$  が点  $Q(x', y')$  に移され, さらに  $g$  によって点  $Q(x', y')$  が点  $R(x'', y'')$  に移されるとすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

であるから, 次のことが成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって, 行列  $BA$  は, 点  $P(x, y)$  に点  $R(x'', y'')$  を対応させる1次変換を表す. この変換を,  $f$  と  $g$  の合成変換といい,  $g \circ f$  で表す.



1次変換  $f, g$  を表す行列を, それぞれ  $A, B$  とするとき, 合成変換  $g \circ f$  も1次変換で,  $g \circ f$  を表す行列は  $BA$  である.

例 1.15 1次変換  $f, g$  を表す行列を, それぞれ  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とするとき, 合成変換  $g \circ f$  を表す行列は

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**練習 1.37** 1次変換  $f, g$  を表す行列を、それぞれ  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  とするとき、次の合成変換を表す行列を求めよ。 解

(1)  $g \circ f$

(2)  $f \circ g$

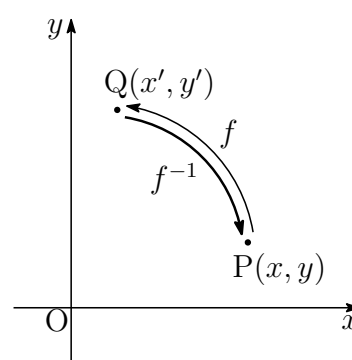
(3)  $f \circ f$

### B》逆変換

1次変換  $f$  によって、点  $P(x, y)$  が点  $Q(x', y')$  に移されたとする。  $f$  を表す行列  $A$  が逆行列  $A^{-1}$  をもてば、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

が得られる。よって、行列  $A^{-1}$  は、点  $Q(x', y')$  に点  $P(x, y)$  を対応させる1次変換を表す。この変換を  $f$  の逆変換といい、 $f^{-1}$  で表す。



1次変換  $f$  を表す行列を  $A$  とするとき、 $A$  が逆行列をもてば、 $f$  の逆変換  $f^{-1}$  が存在する。 $f^{-1}$  を表す行列は  $A^{-1}$  である。

例題 1.7 1次変換  $f$  を表す行列を  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  とするとき,  $f$  によって点  $Q(2, 4)$  に移されるもとの点  $P$  の座標を求めよ.

解答 行列  $A$  について  $\Delta = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1 \neq 0$

よって,  $A$  は逆行列をもち  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

これが  $f$  の逆変換  $f^{-1}$  を表す行列である.

点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \leftarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

したがって, もとの点  $P$  の座標は  $(-2, 8)$

練習 1.38 練習 1.37 における 1次変換  $f, g$  について, 次の問いに答えよ. 解

(1)  $f^{-1}, g^{-1}$  を表す行列を, それぞれ求めよ.

(2)  $f$  によって点  $Q(4, -1)$  に移されるもとの点  $P$  の座標を求めよ.

## 1.2.5 回転移動と1次変換

## A 》 回転移動

座標平面上で、原点  $O$  を中心として一定の角  $\theta$ <sup>1</sup> だけ回転移動する変換について考えよう。

点  $P(x, y)$  の像を点  $Q(x', y')$  とする。

$OP = r$  とし、動径  $OP$  と  $x$  軸の正の向きをなす角を  $\alpha$  とすると

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。点  $Q$  の座標は

$$x' = r \cos(\alpha + \theta), \quad y' = r \sin(\alpha + \theta)$$

である。ここで、三角関数の加法定理により

$$x' = r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta)$$

$$y' = r(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta)$$

① を代入すると、次の式が成り立つ。

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

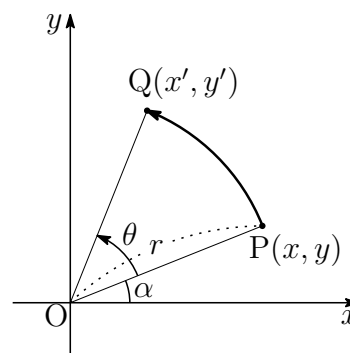
すなわち 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

したがって、次のことが成り立つ。

原点  $O$  の周りに角  $\theta$  だけ回転する移動

原点  $O$  を中心とし、回転角が  $\theta$  の回転移動は1次変換であり、

それを表す行列は  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  である。



<sup>1</sup>角  $\theta$  は数学 II で扱われている一般角とする。

**例題 1.8** 原点の周りに  $30^\circ$  だけ回転する 1 次変換を表す行列  $A$  を求めよ. また, この回転によって点  $P(2, 4)$  が移る点  $Q$  の座標を求めよ.

解答 
$$A = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

また 
$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 \\ 1 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

よって, 点  $Q$  の座標は  $(\sqrt{3} - 2, 1 + 2\sqrt{3})$

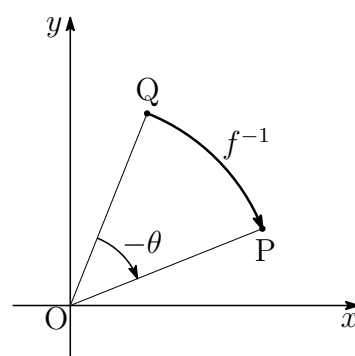
**練習 1.39** 原点の周りに  $45^\circ$  だけ回転する 1 次変換を表す行列  $A$  を求めよ. また, この回転によって点  $P(0, 2)$  が移る点  $Q$  の座標を求めよ. 解

## B 》回転移動と逆変換

原点の周りに角  $\theta$  だけ回転する 1 次変換  $f$  に対して、逆変換  $f^{-1}$  は、原点の周りに角  $-\theta$  だけ回転する 1 次変換である。

よって、 $f^{-1}$  を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



である。

補足  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  が成り立つ。

練習 1.40 原点の周りに  $60^\circ$  だけ回転する 1 次変換を  $f$  とするとき、逆変換  $f^{-1}$  を表す行列を求めよ。 解

## 研究

## 変換の合成の応用

原点を通り、 $x$  軸の正の向きとなす角が  $\theta$  である直線  $\ell$  に関する対称移動を表す変換  $h$  を考えてみよう.

右の図のように、直線  $\ell$  に関して点  $P$  と対称な点を  $Q$  とする. また、点  $P, Q$  を原点の周りに  $-\theta$  だけ回転した点を、それぞれ  $P', Q'$  とする. このとき、 $P'$  と  $Q'$  は  $x$  軸に関して対称である.

よって、原点の周りに  $-\theta$  だけ回転する変換を  $f$ ,  $x$  軸に関して対称移動する変換を  $g$  とすると、原点の周りに  $\theta$  だけ回転する変換は  $f^{-1}$  であるから、変換  $h$  は

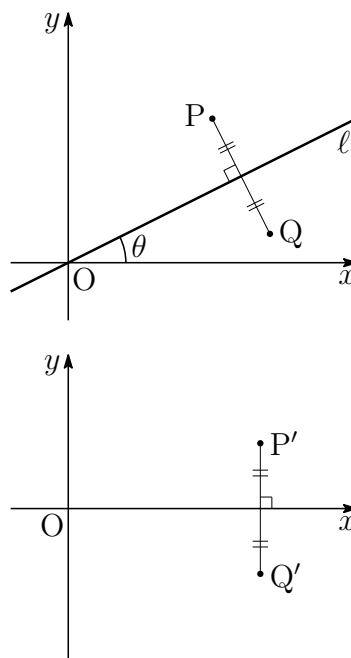
$$f^{-1} \circ (g \circ f)$$

で表される.

ゆえに、この変換  $h$  は 1 次変換であり、それを表す行列は

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち、 $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$  である.



### 1.2.6 問題

**問題 1.4** 2次の正方行列  $A, B$  がともに逆行列をもつとき、積  $AB$  も逆行列をもち、次の等式が成り立つことを証明せよ。 解

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**問題 1.5** 1次変換  $f, g$  を表す行列を、それぞれ  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  とするとき、合成変換  $f \circ g$  による点  $(2, -3)$  の像を求めよ。 解

**問題 1.6** 原点の周りに  $30^\circ$  だけ回転する1次変換を表す行列を  $A$  とするとき、 $A^4$  を求めよ。 解

**問題 1.7** 点  $P(3, 1)$  と  $x$  軸に関して対称な点を  $Q$  とし、 $Q$  を原点の周りに  $150^\circ$  だけ回転した位置にある点を  $R$  とする。  $R$  の座標を求めよ。 解

## 1.3 章末問題

### 1.3.1 章末問題 A

章末 1.1 次の計算をせよ. 解

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4$$

章末 1.2 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  が等式  $A^2 + xA + yE = O$  を満たすとき,  $x, y$  の値を求めよ. ただし,  $E$  は 2 次の単位行列,  $O$  は 2 次の零行列とする. 解

章末 1.3 2 次の正方行列  $A, B$  はともに逆行列をもち,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$  であるという. 行列  $A^{-1}B^{-1}$  および  $AB$  を求めよ. 解

章末 1.4  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  のとき, 行列  $A - kE$  が逆行列をもたないように, 実数  $k$  の値を定めよ. 解

章末 1.5 点  $(1, 2)$  を点  $(7, 4)$  に, 点  $(2, -1)$  を点  $(4, 3)$  に移す 1 次変換を表す行列  $A$  を求めよ. 解

章末 1.6  $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & -a \end{pmatrix}$  で表される 1 次変換を  $f$  とする. 合成変換  $f \circ f$  を表す行列が  $A$  自身であるとき,  $a, b$  の値を求めよ. 解

章末 1.7 原点の周りに  $30^\circ$  だけ回転して点  $(2, 4)$  に移されるもとの点の座標を求めよ. 解

**1.3.2 章末問題 B**

章末 1.8 2次の正方行列  $A, B$  について,  $A+B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A-B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  であるとき,  $A^2 - B^2$  を求めよ. 解

章末 1.9 行列  $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$  が等式  $A^2 - 7A + 12E = O$  を満たすとき,  $x, y$  の値を求めよ. ただし,  $E$  は 2 次の単位行列で,  $O$  は 2 次の零行列とする. 解

章末 1.10 行列  $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & y-4 \end{pmatrix}$  の逆行列が  $A$  自身であるように,  $x, y$  の値を定めよ. また,  $A^3$  を求めよ. 解

章末 1.11 2次の正方行列において、次の命題は真であるか。真であるときは証明し、真でないときは反例をあげよ。ただし、 $E$  は2次の単位行列で、 $O$  は2次の零行列とする。 解

(1)  $A$  が逆行列をもつとき、 $XA = YA$  ならば、 $X = Y$  である。

(2)  $A^2 - 2A + E = O$  ならば  $A = E$  である。

章末 1.12 行列  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$  の表す1次変換を  $f$  とする。 解

(1)  $f$  はどのような1次変換を表すか。

(2) 逆変換  $f^{-1}$  はどのような1次変換を表すか。

(3) 合成変換  $f \circ (f \circ f)$  はどのような1次変換を表すか。また、 $A^3$  を求めよ。

ヒント

8 関係式から、 $A$  と  $B$  を求める。 10  $A^{-1} = A$  から  $A^2 = E$

12  $f$  は原点の周りの回転移動を表す。43 ページの行列を参照する。

**発展** 1 次変換と直線 (1)

これまでは、1 次変換による座標平面上の点の移動を述べてきたが、ここでは直線の移動を考えてみよう。直線は点の集合であるから、与えられた直線  $\ell$  上に任意の点をとって、まずその点の移動後の座標を求めると考えやすい。

**例 1** 直線  $y = 2x - 1$  を  $\ell$  とする。行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  で表される 1 次変換  $f$  によって、 $\ell$  はどのような図形に移されるだろうか。

直線  $\ell$  上の任意の点  $P$  の  $x$  座標を  $t$  とすると、 $y$  座標は  $2t - 1$  であるから、 $P(t, 2t - 1)$  となる。

点  $P$  が  $f$  によって移される点を  $Q(x, y)$  とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix}$$

すなわち 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 1 \\ 4t - 1 \end{pmatrix}$$

よって 
$$\begin{cases} x = t + 1 & \cdots \text{①} \\ y = 4t - 1 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

① より 
$$t = x - 1$$

これを ② に代入すると 
$$y = 4(x - 1) - 1$$

すなわち 
$$y = 4x - 5$$

したがって、直線  $y = 4x - 5$  に移される。

**演習 1.1** 直線  $y = -2x + 1$  を  $\ell$  とする。次の行列で表される 1 次変換によって、 $\ell$  はどのような図形に移されるか。 **解**

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (2) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**発展** 1次変換と直線 (2)

前ページの例1では、1次変換によって座標平面上の直線が直線に移ることが示された。しかし、いつでも直線が直線に移るとは限らない。次にその例をみてみよう。

**例2** 直線  $y = -2x + 1$  を  $\ell$  とする。行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  で表される1次変換  $f$  によって、 $\ell$  はどのような図形に移されるだろうか。

直線  $\ell$  上の任意の点  $P$  の  $x$  座標を  $t$  とすると、 $y$  座標は  $-2t + 1$  であるから、 $P(t, -2t + 1)$  となる。

点  $P$  が  $f$  によって移される点を  $Q(x, y)$  とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -2t + 1 \end{pmatrix}$$

すなわち 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

例2では、直線  $\ell$  上のどの点も点  $(1, 2)$  に移される。例2は、1次変換によって座標平面上の直線がただ1点に移される例である。

一般に、次のことが知られている。

1次変換  $f$  によって異なる2点  $A, B$  が同じ点  $A'$  に移るとき、直線  $AB$  は点  $A'$  に移る。

たとえば、異なる2点  $A(1, -1), B(2, -3)$  は、例2の1次変換  $f$  によって同じ点  $A'(1, 2)$  に移るから、直線  $AB$  は  $A'(1, 2)$  に移る。この直線  $AB$  が例2の直線  $\ell$  である。

**演習 1.2** 直線  $y = 3x - 1$  を  $\ell$  とする。行列  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$  で表される1次変換  $f$  によって、 $\ell$  はどのような図形に移されるか。 解

# 解答

練習 1.1 (1) 3 行 2 列の行列 (2) 3 行 3 列の行列 (3 次の正方行列)  
(3) 1 行 3 列の行列 (4) 2 行 1 列の行列

練習 1.2 (1) 6 (2) -7 (3) 9

練習 1.3 (1)  $4 = 2z$ ,  $-3 = w$ ,  $x = -5$ ,  $3y = -6$  であるから

$$x = -5, y = -2, z = 2, w = -3$$

(2)  $2x + y = 1$ ,  $x - 3y = 4$  であるから

$$x = 1, y = -1$$

練習 1.4 (1) 
$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+(-2) & 4+5 \\ -3+8 & 1+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 
$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 & 9-6 \\ -6-4 & 7-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$$

(3) 
$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & -7 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+(-4) & -5+3 & 2+(-7) \\ 0+1 & 4+8 & -3+6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

練習 1.5 (1)  $-A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A + (-A) = \begin{pmatrix} 2+(-2) & -5+5 \\ 4+(-4) & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2)  $-A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $A + (-A) = \begin{pmatrix} 2+(-2) \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

練習 1.6 (1) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 + (-3) + 5 & 3 + 4 + (-2) \\ 2 + 0 + (-4) & 4 + (-2) + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) 
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 + 4 - 3 & 0 + (-2) - (-1) \\ 1 + 5 - (-6) & -3 + (-1) - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

練習 1.7 (1)  $\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$  (3)  $\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$  (4)  $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

練習 1.8 (1)  $2(3A) = 2 \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 6b \\ 6c & 6d \end{pmatrix}$

$(2 \cdot 3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 6b \\ 6c & 6d \end{pmatrix}$

(2)  $(2 + 3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{pmatrix}$

$2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{pmatrix}$

(3)  $2 \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right\} = 2 \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix}$ 
$$= \begin{pmatrix} 2a + 2p & 2b + 2q \\ 2c + 2r & 2d + 2s \end{pmatrix}$$

$2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2p & 2q \\ 2r & 2s \end{pmatrix}$ 
$$= \begin{pmatrix} 2a + 2p & 2b + 2q \\ 2c + 2r & 2d + 2s \end{pmatrix}$$

練習 1.9 (1)  $2(3A + B) = 6A + 2B$

$$= 6 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{22} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{-36} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

(2)  $3(A - 2B) = 3A - 6B$

$$= 3 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-24} & \mathbf{-15} \\ \mathbf{24} & \mathbf{-12} \end{pmatrix}$$

(3)  $2(2A - B) + 3B = 4A + B$

$$= 4 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{-22} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

練習 1.10 (1)  $2A + 3X = B$  から  $3X = B - 2A$

$$\begin{aligned} \text{よって } X &= \frac{1}{3}(B - 2A) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)  $3A + 3X = X + 2B$  から  $2X = -3A + 2B$

$$\begin{aligned} \text{よって } X &= \frac{1}{2}(-3A + 2B) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} -21 & 3 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{-11} & \mathbf{11} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

練習 1.11 (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{17} \\ \mathbf{26} \end{pmatrix}$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

練習 1.12 (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 + 0 \cdot 7 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{33} & \mathbf{22} \end{pmatrix}$

(2)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ -3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & -3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

(3)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{12} & \mathbf{-15} \end{pmatrix}$

練習 1.13 (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-6) + 0 \cdot 7 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 \\ 3 \cdot (-6) + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-6) + 5 \cdot 7 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{10} & \mathbf{29} \\ \mathbf{23} & \mathbf{31} \end{pmatrix}$

(2)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2x} + \mathbf{3y} + \mathbf{5z}$

練習 1.14 (1)  $2A = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ ,  $2B = 2 \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p & 2q \\ 2r & 2s \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

よって  $(2A)B = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ap + 2br & 2aq + 2bs \\ 2cp + 2dr & 2cq + 2ds \end{pmatrix}$

$$A(2B) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2p & 2q \\ 2r & 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ap + 2br & 2aq + 2bs \\ 2cp + 2dr & 2cq + 2ds \end{pmatrix}$$

$$2(AB) = 2 \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2ap + 2br} & \mathbf{2aq + 2bs} \\ \mathbf{2cp + 2dr} & \mathbf{2cq + 2ds} \end{pmatrix}$$

(2)  $A + B = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix}$

よって  $(A + B)C = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$   

$$= \begin{pmatrix} ax + px + bz + qz & ay + py + bw + qw \\ cx + rx + dz + sz & cy + ry + dw + sw \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} px + qz & py + qw \\ rx + sz & ry + sw \end{pmatrix}$$

よって  $AC + BC = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} px + qz & py + qw \\ rx + sz & ry + sw \end{pmatrix}$   

$$= \begin{pmatrix} ax + bz + px + qz & ay + bw + py + qw \\ cx + dz + rx + sz & cy + dw + ry + sw \end{pmatrix}$$

練習 1.15 (1)  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \\ 5 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(3)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \right\}$   
 $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

練習 1.16 (1)  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2x \\ 6 & 6+x \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3x & 6+x \end{pmatrix}$$

よって  $2x = 4, 3x = 6$

これを解いて  $\mathbf{x} = \mathbf{2}$

(2)  $AB = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3x \\ 2y+4 & 3y+5 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y & 3 \\ 4x+5y & 5 \end{pmatrix}$$

よって  $2x = 2x + 3y, 3x = 3, 2y + 4 = 4x + 5y, 3y + 5 = 5$

これを解いて  $\mathbf{x} = \mathbf{1}, \mathbf{y} = \mathbf{0}$

練習 1.17  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$  とすると

$$BE = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

よって  $BE = EB = B$

証終

練習 1.18  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+4a & 2a+4b \\ 4+2a & a+2b \end{pmatrix}$

よって  $8+4a=0, 2a+4b=0, 4+2a=0, a+2b=0$

これを解いて  $\mathbf{a} = -\mathbf{2}, \mathbf{b} = \mathbf{1}$

練習 1.19 (1)  $A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) (1) より,  $A^4 = E$  であるから

$$A^5 = A^4A = EA = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) (2) より,  $A^5 = A$  であるから

$$A^6 = A^5A = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

練習 1.20 (1)  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

(2)  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

(3)  $A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}$$

練習 1.21  $A^2 = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 6 & 3(a+b) \\ 2(a+b) & b^2 + 6 \end{pmatrix}$

よって  $\begin{pmatrix} a^2 + 6 & 3(a+b) \\ 2(a+b) & b^2 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

成分を比較して  $a^2 + 6 = 7, a + b = 0, b^2 + 6 = 7$

これを解いて  $a = 1, b = -1$  または  $a = -1, b = 1$

練習 1.22  $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$

よって  $\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

成分を比較して  $a^3 = 1, b^3 = 8$

$a, b$  が実数であるから  $\mathbf{a} = 1, \mathbf{b} = 2$

練習 1.23 (1)  $A^2 + A + E$   

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 1 - a^2 & 2a \\ -2a & 1 - a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2a \\ 2a & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 - a^2 & 0 \\ 0 & 3 - a^2 \end{pmatrix}$$

$A^2 + A + E = O$  より  $3 - a^2 = 0$

$a > 0$  であるから  $\mathbf{a} = \sqrt{3}$

(2)  $A^2 + A + E = O$  より  $A^2 = -A - E$

よって  $A^3 = A^2 A$   

$$= (-A - E)A$$

$$= -A^2 - A$$

$$= -(-A - E) - A$$

$$= E$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

練習 1.24 (1) 証明 応用例題 1.2 の等式において  $a + d = 0, ad - bc = 0$  とすると

$A^2 - 0 \cdot A + 0 \cdot E = O$  すなわち  $A^2 = O$  証終

(2) 証明 応用例題 1.2 の等式において  $a + d = 0, ad - bc = -1$  とすると

$A^2 - 0 \cdot A + (-1) \cdot E = O$  すなわち  $A^2 = E$  証終

問題 1.1 (1)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

(2)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 6 & -8 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \end{pmatrix}$

問題 1.2 (1) 成り立たない.

一般には  $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

(2) 成り立つ.

(3) 成り立たない.

一般には  $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

(4) 成り立つ.

問題 1.3 この等式を (A) とする.

[1]  $n = 1$  のとき, (A) が成り立つ.

[2]  $n = k$  のとき, (A) が成り立つ, すなわち

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & 0 \\ 0 & \beta^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって,  $n = k + 1$  のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ.

練習 1.25 (1)  $\Delta = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 2 \neq 0$

よって,  $A$  は逆行列をもち 
$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)  $\Delta = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -1 \neq 0$

よって,  $B$  は逆行列をもち 
$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

(3)  $\Delta = (-1) \cdot 4 - 2 \cdot (-2) = 0$

よって,  $C$  は逆行列をもたない.

練習 1.26 行列が逆行列をもたないのは,  $\Delta = 0$  のときである.

(1)  $\Delta = a \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 2a - 12$

よって  $2a - 12 = 0$

これを解いて  $a = 6$

(2)  $\Delta = a(a + 2) - 4 \cdot 2 = a^2 + 2a - 8 = (a + 4)(a - 2)$

よって  $(a + 4)(a - 2) = 0$

これを解いて  $a = -4, 2$

練習 1.27  $A$  について  $\Delta = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0$

よって,  $A$  は逆行列をもち 
$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって, 等式  $AX = B$  を満たす行列  $X$  は

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

また, 等式  $YA = B$  を満たす行列  $Y$  は

$$Y = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$$

練習 1.28 (1)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

練習 1.29 (1) 行列を用いて表すと 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

係数行列  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  について  $\Delta = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1 \neq 0$

ゆえに、係数行列は逆行列をもち

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

よって 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって  $\mathbf{x} = \mathbf{2}, \mathbf{y} = -1$

(2) 行列を用いて表すと 
$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

係数行列  $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  について  $\Delta = 3 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 5 \neq 0$

ゆえに、係数行列は逆行列をもち

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

よって 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって  $\mathbf{x} = \mathbf{1}, \mathbf{y} = \mathbf{1}$

練習 1.30 与えられた連立 1 次方程式は、次のように表される。

$$\begin{cases} (2-k)x + 2y = 0 \\ 5x - (1+k)y = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 2-k & 2 \\ 5 & -(1+k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この方程式が、 $x = 0, y = 0$  以外の解をもつのは、係数行列が逆行列をもたないときである。

$$\text{よって、} \Delta = 0 \text{ より} \quad -(2-k)(1+k) - 2 \cdot 5 = 0$$

$$\text{整理すると} \quad k^2 - k - 12 = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad \mathbf{k = -3, 4}$$

$$\text{練習 1.31} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{練習 1.32 (1)} \quad \begin{cases} x' = (-1) \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x' = (-1) \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ y' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{練習 1.33 (1)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \text{点} (10, 5)$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \text{点} (-2, 8)$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -38 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \text{点} (-19, -38)$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \text{点} (3, -4)$$

$$\text{練習 1.34} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

練習 1.35 条件から，次の等式が成り立つ．

$$A \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

行列  $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$  について  $\Delta = 2 \cdot 7 - (-6) \cdot 1 = 20 \neq 0$

よって，逆行列は  $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

したがって， $\textcircled{1}$  より

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 60 & 40 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**練習 1.36** 直線  $y = 3x$  を  $\ell$  とし,  $\ell$  に関して点  $P(x, y)$  と対称な点を  $Q(x', y')$  とする. 直線  $PQ$  は  $\ell$  に垂直であり, また線分  $PQ$  の中点が  $\ell$  上にあるから

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{y' - y}{x' - x} = -1 \\ \frac{y + y'}{2} = 3 \cdot \frac{x + x'}{2} \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x' + 3y' = x + 3y \\ -3x' + y' = 3x - y \end{cases}$$

$$\text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって,  $f$  は 1 次変換で, 求める行列は  $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\text{練習 1.37 (1) } BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(2) AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(3) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

練習 1.38 (1)  $f^{-1}$  を表す行列は  $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$g^{-1} \text{ を表す行列は } B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, もとの点 } P \text{ の座標は } \left( \frac{14}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

練習 1.39  $A = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{また } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

よって, この回転によって点  $P$  が移る点  $Q$  の座標は  $Q(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

練習 1.40 変換  $f^{-1}$  を表す行列は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{問題 1.4 } (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} \\ &= AA^{-1} = E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB \\ &= B^{-1}B = E \end{aligned}$$

$$\text{よって } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

問題 1.5  $f \circ g$  を表す行列は

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{また} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

よって、求める像は 点  $(-5, 17)$

問題 1.6  $A^4$  は原点の周りに  $30^\circ \times 4$  だけ回転する 1 次変換であるから

$$A^4 = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{問題 1.7} \quad & \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} + 1 \\ 3 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{よって、R の座標は} \quad \left( \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right)$$

章末 1.1 (1) 
$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{16} \\ \mathbf{20} & \mathbf{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 
$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{12} \\ -\mathbf{4} & -\mathbf{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) 
$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

章末 1.2  $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -16 \\ 8 & 23 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A^2 + xA + yE &= \begin{pmatrix} 7 & -16 \\ 8 & 23 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7+3x+y & -16-2x \\ 8+x & 23+5x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、 $A^2 + xA + yE = O$  から

$$7+3x+y=0, \quad -16-2x=0, \quad 8+x=0, \quad 23+5x+y=0$$

これを解いて  $x = -8, y = 17$

別解 ハミルトン・ケーリーの定理から

$$A^2 - 8A + 17E = O \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{仮定から } A^2 + xA + yE = O \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ から } (x+8)A + (y-17)E = O$$

(i)  $x+8=0$  のとき

$$(y-17)E = O, \quad E \neq O \text{ より } y-17=0$$

$$\text{よって } x = -8, y = 17$$

(ii)  $x+8 \neq 0$  のとき

$$k = -\frac{y-17}{x+8} \text{ とおくと } A = kE$$

これは与えられた  $A$  と一致しない.

したがって  $x = -8, y = 17$

章末 1.3  $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 12 & -41 \end{pmatrix}$

$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = (B^{-1})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 18 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$$

章末 1.4  $A - kE = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 2 \\ -2 & 4-k \end{pmatrix}$

$$\Delta = -k(4-k) - 2(-2) = (k-2)^2$$

$$\Delta = 0 \text{ より } \mathbf{k = 2}$$

章末 1.5 条件から  $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$

行列  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  について  $\Delta = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -5 \neq 0$

$$\text{よって } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

章末 1.6 合成変換  $f \circ f$  を表す行列は

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+ab & 3a-a^2 \\ 3b-ab & ab+a^2 \end{pmatrix}$$

$f \circ f$  を表す行列が,  $A$  自身であるから

$$\begin{pmatrix} 9+ab & 3a-a^2 \\ 3b-ab & ab+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & -a \end{pmatrix}$$

よって

$$9+ab=3 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad 3a-a^2=a \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$3b-ab=b \quad \cdots \textcircled{3}, \quad ab+a^2=-a \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } a=0, 2$$

$a=0$  は  $\textcircled{1}$  を満たさない. よって  $a=2$

$a=2$  を  $\textcircled{1}$  に代入すると  $b=-3$

$a=2, b=-3$  は,  $\textcircled{3}, \textcircled{4}$  を満たす.

したがって  $\mathbf{a = 2, b = -3}$

章末 1.7 点  $(2, 4)$  を原点の周りに  $-30^\circ$  だけ回転して移る点がもとの点である。  
よって

$$\begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ -1 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

したがって、もとの点の座標は  $(\sqrt{3} + 2, -1 + 2\sqrt{3})$

章末 1.8  $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \dots \textcircled{2}$

とすると、 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$  から

$$2A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

よって  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$  から

$$2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

よって  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

したがって

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

章末 1.9

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6 & 3(x+y) \\ -2(x+y) & y^2 - 6 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} A^2 - 7A + 12E &= \begin{pmatrix} x^2 - 6 & 3(x+y) \\ -2(x+y) & y^2 - 6 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 - 7x + 6 & 3(x+y-7) \\ -2(x+y-7) & y^2 - 7y + 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって,  $A^2 - 7A + 12E = O$  から

$$x^2 - 7x + 6 = 0, \quad x + y - 7 = 0, \quad y^2 - 7y + 6 = 0$$

これを解いて  $x = 1, y = 6$  または  $x = 6, y = 1$

別解 ハミルトン・ケーリーの定理から

$$A^2 - (x+y)A + (xy+6)E = O \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{仮定から } A^2 - 7A + 12E = O \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$  から

$$(x+y-7)A + (6-xy)E = O \quad \cdots \textcircled{3}$$

(i)  $x+y-7=0$  のとき

$$\textcircled{3} \text{ から } (6-xy)E = O$$

$$E \neq O \text{ から } 6-xy = 0$$

$$\text{よって } x+y = 7, \quad xy = 6$$

$$\text{これを解いて } x = 1, y = 6 \text{ または } x = 6, y = 1$$

(ii)  $x+y-7 \neq 0$  のとき

$$k = \frac{xy-6}{x+y-7} \text{ とおくと } A = kE$$

これは与えられた  $A$  と一致しない.

したがって  $x = 1, y = 6$  または  $x = 6, y = 1$

章末 1.10  $A^{-1} = A$  より  $A^2 = E$

$$\text{よって } \begin{pmatrix} x^2 - 3 & -x - y + 4 \\ 3x + 3y - 12 & -3 + (y - 4)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$x^2 - 3 = 1 \quad \cdots \textcircled{1} \quad -x - y + 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$3x + 3y - 12 = 0 \quad \cdots \textcircled{3} \quad -3 + (y - 4)^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } x = \pm 2$$

$$\textcircled{2} \text{ から, } x = 2 \text{ のとき } y = 2, \quad x = -2 \text{ のとき } y = 6$$

いずれの場合にも,  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{4}$  を満たす.

$$\text{したがって } x = 2, y = 2 \text{ または } x = -2, y = 6$$

また,  $A^2 = E$  より,  $A^3 = A$  であるから

$$x = 2, y = 2 \text{ のとき } A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x = -2, y = 6 \text{ のとき } A^3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

章末 1.11 (1) 真

証明  $XA = YA$  の両辺に右から  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を掛けると

$$X = Y$$

証終

(2) 真でない

(反例) ハミルトン・ケーリーの定理から, 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が,  $a + d = 2$ ,  $ad - bc = 1$  を満たしていれば,  $A^2 - 2A + E = O$  が成り立つ.

たとえば,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  とすると,  $A^2 - 2A + E = O$  であるが,  $A \neq E$  となる.

章末 1.12 (i)  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$

したがって、 $f$  は、原点の周りに  $60^\circ$  だけ回転する 1 次変換を表す。

(ii)  $f^{-1}$  は、原点の周りに  $-60^\circ$  だけ回転する 1 次変換を表す。

(iii)  $f \circ (f \circ f)$  は、原点の周りに  $60^\circ$  だけ回転する移動を 3 回繰り返す。

よって、原点の周りに  $60^\circ \times 3 = 180^\circ$  だけ回転するから、

原点に関して対称移動する 1 次変換を表す。

また、 $A^3$  は点  $(x, y)$  を  $(-x, -y)$  に移す 1 次変換を表すから

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

演習 1.1 直線  $\ell$  上の任意の点を  $P(t, -2t + 1)$  とする。

(1)  $A$  で表される 1 次変換によって、 $P$  が移される点を  $Q(x, y)$  とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -2t + 1 \end{pmatrix}$$

すなわち  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 1 \\ 3t - 2 \end{pmatrix}$

よって  $x = t + 1 \quad \dots \text{①}$

$y = 3t - 2 \quad \dots \text{②}$

① より  $t = x - 1$

これを ② に代入すると  $y = 3(x - 1) - 2$

すなわち  $y = 3x - 5$

したがって、直線  $y = 3x - 5$  に移される。

(2)  $A$  で表される 1 次変換によって、 $P$  が移される点を  $R(x, y)$  とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -2t + 1 \end{pmatrix}$$

すなわち  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって  $x = -t + 1$

$y = 1$

したがって、直線  $y = 1$  に移される。

演習 1.2 直線  $\ell$  上の任意の点を  $P(t, 3t - 1)$  とする.

$A$  で表される 1 次変換によって,  $P$  が移される点を  $Q(x, y)$  とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 3t - 1 \end{pmatrix}$$

すなわち 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって 
$$x = -1$$

$$y = 3$$

したがって, 点  $(-1, 3)$  に移される.

## スペクトル分解

固有値と固有ベクトルの考え方が本質にあるので、このことについて簡単にまとめておく。

行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して

$$A\vec{p} = \lambda\vec{p} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たすベクトル  $\vec{p}$  ( $\vec{p} \neq \vec{0}$ ), スカラー  $\lambda$  が存在するとき,  $\vec{p}$  を  $A$  の固有ベクトル,  $\lambda$  を  $A$  の固有値という。

① より  $(A - \lambda E)\vec{p} = \vec{0}$  となり,  $\vec{p} \neq \vec{0}$  であるから

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

は逆行列をもたないので

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

すなわち  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

が成り立つ。② を  $A$  の固有方程式という。② の解を  $\alpha, \beta$  とし,  $\lambda = \alpha$  に対する固有ベクトルを  $\vec{u}$ ,  $\lambda = \beta$  に対する固有ベクトルを  $\vec{v}$  とすると

$$A\vec{u} = \alpha\vec{u} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$A\vec{v} = \beta\vec{v} \quad \cdots \textcircled{4}$$

このとき, 次が成り立つ。

$$\alpha \neq \beta \implies \vec{u} \nparallel \vec{v} \quad \cdots (*)$$

証明  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  と仮定すると, 零でないスカラー  $k$  を用いて  $\vec{v} = k\vec{u}$  と表すことができるので, これを④に代入すると

$$A(k\vec{u}) = \beta(k\vec{u})$$

$$k \neq 0 \text{ より } A\vec{u} = \beta\vec{u} \quad \cdots \textcircled{5}$$

③, ⑤ から,  $(\alpha - \beta)\vec{u} = \vec{0}$  を得る。これは,  $\alpha \neq \beta$ ,  $\vec{u} \neq \vec{0}$  に反するので, (\*) が成り立つ。 証終

行列  $A$  が異なる 2 つの固有値  $\alpha, \beta$  をもつとき、固有値  $\alpha$  に対する固有ベクトルを  $\vec{u}$  ( $\vec{u} \neq \vec{0}$ )、固有値  $\beta$  に対する固有ベクトルを  $\vec{v}$  ( $\vec{v} \neq \vec{0}$ ) とする。

このとき、2 つの 1 次変換を表す行列  $F, G$  を

$$F\vec{u} = \vec{u}, \quad F\vec{v} = \vec{0}, \quad G\vec{u} = \vec{0}, \quad G\vec{v} = \vec{v}$$

で定義すると、次が成り立つ。

$$F^2 = F, \quad G^2 = G, \quad FG = GF = O, \quad F + G = E, \quad A = \alpha F + \beta G$$

証明  $P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$  とおくと、 $\vec{u} \nparallel \vec{v}$  であるから、行列  $P$  は正則である。

$$FP = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}, \quad F^2P = F(FP) = F \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}$$

よって、 $F^2P = FP$  であり、 $P$  は正則であるから  $F^2 = F$  ■

$$FGP = F(GP) = F \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}$$

よって、 $FGP = O$  であり、 $P$  は正則であるから  $FG = O$  ■

同様にして  $G^2 = G, GF = O$  ■

$$(F + G)P = FP + GP = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$$

よって、 $(F + G)P = P$  であり、 $P$  は正則であるから  $F + G = E$  ■

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} \alpha\vec{u} & \beta\vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \alpha FP + \beta GP \\ &= (\alpha F + \beta G)P \end{aligned}$$

上式から、 $P$  は正則であるから、 $A = \alpha F + \beta G$  ■

証終

$A = \alpha F + \beta G$  を  $A$  のスペクトル分解といい、この式の両辺を  $n$  乗すると

$$A^n = \alpha^n F + \beta^n G$$

なお、 $F, G$  は、 $\alpha F + \beta G = A, F + G = E$  により

$$F = \frac{A - \beta E}{\alpha - \beta}, \quad G = \frac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$$

となり、 $A = \alpha F + \beta G$  ( $\alpha, \beta$  は  $A$  の固有値) をみたとす  $F, G$  は一意的に定まる。