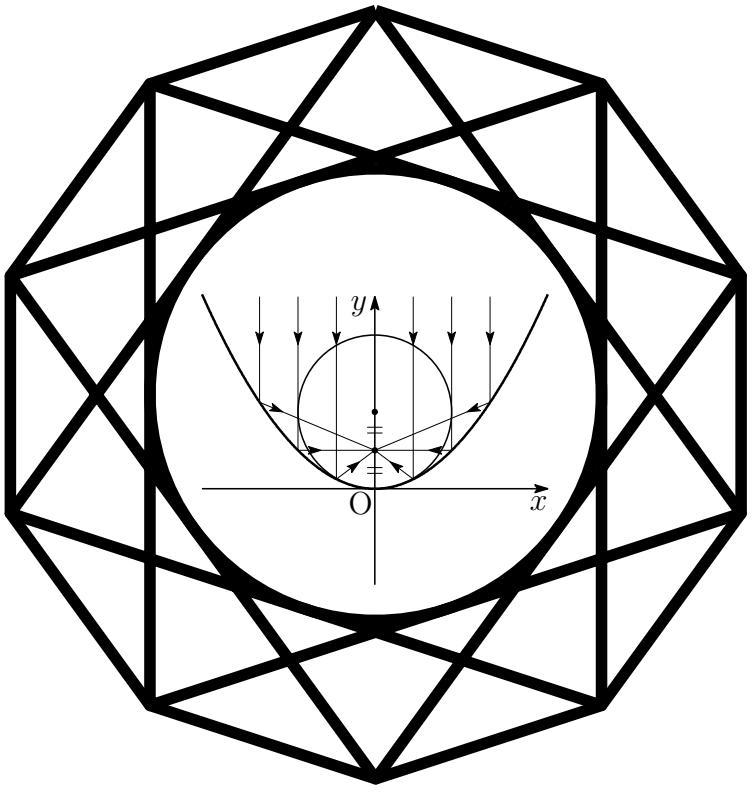
2024年度

大学への数学

二 高 塾



熊本県立第二高等学校数学科

2025 年 9 月 29 日

Typed by LaTeX 2ε

目 次

1 数学 I **9**

1.1 図形と計量 9

1.1.1 パップスの定理 (中線定理) とスチュワートの定理 9

1.1.2 トレミーの定理とブラマーグプタの公式 11

2 数学 II **15**

2.1 式と証明 (数学 II) 15

2.1.1 相加平均・相乗平均・調和平均 15

2.2 微分法と積分法 (数学 II) 19

2.2.1 微分法 19

2.2.2 放物線は相似 23

2.2.3 放物線に関する面積 24

2.2.4 演習問題 30

2.2.5 極展開 31

2.2.6 積分公式 1 34

2.2.7 3 次関数のグラフと接線 35

2.2.8 積分公式 2 38

3 数学 III **39**

3.1 微分法とその応用 (数学 III) 39

3.1.1 接線群の包絡線 39

3.2 積分法 (数学 III) 45

3.2.1 積分公式 (ベータ関数) 45

3.3 積分法の応用 (数学 III) 46

3.3.1 不等式の証明 46

3.3.2 ガウス・グリーンの定理 62

3.3.3 バウムクーヘン型求積法 77

3.3.4 回転体の体積 87

3.3.5 パップス・ギュルダンの定理 96

3.3.6 斜軸回転 104

3.3.7 極方程式の計量 109

3.3.8 弧長 120

3.3.9 内サイクロイド・外サイクロイド 131

3.4 微分方程式 151

3.5 連続する自然数のべき乗和 160

3.6 ベルヌーイ数 164

4 数学 A **169**
4.1 図形の性質 (数学 A) . . . 169
4.1.1 角の二等分線 . . . 169
4.1.2 複比と調和点列 . . . 170
4.2 整数の性質 (数学 A) . . . 173
4.2.1 ユークリッドの互除法 . . . 173

5 数学 B **174**
5.1 数列 (数学 B) . . . 174
5.1.1 隣接 3 項間 . . . 174
5.1.2 フィボナッチ数列 . . . 182
5.1.3 S_n を含む漸化式 . . . 185
5.1.4 分数漸化式 . . . 187
5.1.5 連立漸化式 . . . 191
5.1.6 確率漸化式 . . . 193
5.1.7 数学的帰納法 . . . 200

6 数学 C **207**
6.1 平面上のベクトル (数学 C) . . . 207
6.1.1 三角形の重心・外心・内心 . . . 207
6.1.2 射影ベクトル . . . 210
6.2 空間のベクトル (数学 C) . . . 214
6.2.1 外積 (ベクトル積) . . . 214
6.3 複素数平面 (数学 C) . . . 226
6.3.1 反転 . . . 226
6.3.2 演習問題 . . . 229
6.3.3 応用問題 (重要) . . . 231
6.4 2 次曲線 (数学 C) . . . 232
6.4.1 2 次曲線の性質 . . . 232
6.4.2 2 次曲線の標準形 . . . 241

7 New Global Top **243**
7.1 数と式 . . . 243
7.1.1 Review . . . 243
7.1.2 Exercise . . . 246
7.1.3 Try . . . 252
7.2 2 次関数のグラフ，最大・最小 . . . 259
7.2.1 Review . . . 259
7.2.2 Exercise . . . 262

7.2.3 Try . . . 265
7.3 2 次方程式・不等式 . . . 271
7.3.1 Review . . . 271
7.3.2 Exercise . . . 275
7.3.3 Try . . . 279
7.4 三角比と図形の計量 . . . 286
7.4.1 Review . . . 286
7.4.2 Exercise . . . 288
7.4.3 Try . . . 293
7.5 空間図形の計量 . . . 300
7.5.1 Review . . . 300
7.5.2 Exercise . . . 302
7.5.3 Try . . . 305
7.6 データの整理，分散と標準偏差 . . . 312
7.6.1 Review . . . 312
7.6.2 Exercise . . . 313
7.6.3 Try . . . 315
7.7 データの相関 . . . 321
7.7.1 Review . . . 321
7.7.2 Exercise . . . 323
7.7.3 Try . . . 325
7.8 集合と論証 . . . 330
7.8.1 Review . . . 330
7.8.2 Exercise . . . 331
7.8.3 Try . . . 334
7.9 場合の数と順列 . . . 340
7.9.1 Review . . . 340
7.9.2 Exercise . . . 342
7.9.3 Try . . . 346
7.10 組合せ . . . 353
7.10.1 Review . . . 353
7.10.2 Exercise . . . 354
7.10.3 Try . . . 358
7.11 確率 . . . 364
7.11.1 Review . . . 364
7.11.2 Exercise . . . 366
7.11.3 Try . . . 370
7.12 反復試行の確率，条件付き確率，期待値 . . . 379

7.12.1 Review . . . 379
7.12.2 Exercise . . . 382
7.12.3 Try . . . 386
7.13 三角形と比 . . . 397
7.13.1 Review . . . 397
7.13.2 Exercise . . . 399
7.13.3 Try . . . 402
7.14 円の性質 . . . 412
7.14.1 Review . . . 412
7.14.2 Exercise . . . 415
7.14.3 Try . . . 417
7.15 約数・倍数・剰余類 . . . 424
7.15.1 Review . . . 424
7.15.2 Exercise . . . 425
7.15.3 Try . . . 430
7.16 不定方程式，整数の性質の活用 . . . 436
7.16.1 Review . . . 436
7.16.2 Exercise . . . 438
7.16.3 Try . . . 446
7.17 多項式の除法，恒等式，二項定理 . . . 453
7.17.1 Review . . . 453
7.17.2 Exercise . . . 454
7.17.3 Try . . . 457
7.18 等式，不等式の証明 . . . 463
7.18.1 Review . . . 463
7.18.2 Exercise . . . 465
7.18.3 Try . . . 469
7.19 複素数と 2 次方程式 . . . 476
7.19.1 Review . . . 476
7.19.2 Exercise . . . 479
7.19.3 Try . . . 482
7.20 剰余の定理，高次方程式 . . . 489
7.20.1 Review . . . 489
7.20.2 Exercise . . . 492
7.20.3 Try . . . 496
7.21 点，直線，放物線 . . . 503
7.21.1 Review . . . 503
7.21.2 Exercise . . . 506

7.21.3 Try . . . 511
7.22 円 . . . 520
7.22.1 Review . . . 520
7.22.2 Exercise . . . 522
7.22.3 Try . . . 526
7.23 軌跡 . . . 534
7.23.1 Review . . . 534
7.23.2 Exercise . . . 536
7.23.3 Try . . . 539
7.24 領域 . . . 547
7.24.1 Review . . . 547
7.24.2 Exercise . . . 552
7.24.3 Try . . . 555
7.25 三角関数と加法定理 . . . 571
7.25.1 Review . . . 571
7.25.2 Exercise . . . 573
7.25.3 Try . . . 578
7.26 三角関数の応用 . . . 589
7.26.1 Review . . . 589
7.26.2 Exercise . . . 591
7.26.3 Try . . . 600
7.27 指数関数・対数関数 . . . 608
7.27.1 Review . . . 608
7.27.2 Exercise . . . 610
7.27.3 Try . . . 616
7.28 導関数，接線，関数の増減と極値 . . . 626
7.28.1 Review . . . 626
7.28.2 Exercise . . . 630
7.28.3 Try . . . 634
7.29 導関数の応用 . . . 643
7.29.1 Review . . . 643
7.29.2 Exercise . . . 646
7.29.3 Try . . . 655
7.30 不定積分と定積分，面積の基本 . . . 663
7.30.1 Review . . . 663
7.30.2 Exercise . . . 666
7.30.3 Try . . . 669
7.31 面積の応用 . . . 680

7.31.1 Review . . . 680
7.31.2 Exercise . . . 682
7.31.3 Try . . . 691
7.32 等差数列・等比数列，$\sum$ 記号 . . . 707
7.32.1 Review . . . 707
7.32.2 Exercise . . . 709
7.32.3 Try . . . 713
7.33 いろいろな数列 . . . 721
7.33.1 Review . . . 721
7.33.2 Exercise . . . 724
7.33.3 Try . . . 728
7.34 漸化式 . . . 737
7.34.1 Review . . . 737
7.34.2 Exercise . . . 738
7.34.3 Try . . . 754
7.35 数学的帰納法 . . . 762
7.35.1 Review . . . 762
7.35.2 Exercise . . . 765
7.35.3 Try . . . 771
7.36 確率分布 . . . 782
7.36.1 Review . . . 782
7.36.2 Exercise . . . 784
7.36.3 Try . . . 788
7.37 統計的な推測 . . . 796
7.37.1 Review . . . 796
7.37.2 Exercise . . . 798
7.37.3 Try . . . 800
7.38 ベクトルの基本 . . . 808
7.38.1 Review . . . 808
7.38.2 Exercise . . . 810
7.38.3 Try . . . 814
7.39 ベクトルと平面図形，ベクトル方程式 . . . 822
7.39.1 Review . . . 822
7.39.2 Exercise . . . 824
7.39.3 Try . . . 827
7.40 ベクトルと空間図形 . . . 837
7.40.1 Review . . . 837
7.40.2 Exercise . . . 839

7.40.3 Try . . . 843
7.41 空間のベクトル方程式 . . . 851
7.41.1 Review . . . 851
7.41.2 Exercise . . . 852
7.41.3 Try . . . 856
7.42 2次曲線 . . . 867
7.42.1 Review . . . 867
7.42.2 Exercise . . . 872
7.42.3 Try . . . 882
7.43 曲線の媒介変数表示，極座標 . . . 890
7.43.1 Review . . . 890
7.43.2 Exercise . . . 892
7.43.3 Try . . . 899
7.44 複素数と極形式 . . . 908
7.44.1 Review . . . 908
7.44.2 Exercise . . . 910
7.44.3 Try . . . 920
7.45 複素数と図形 . . . 927
7.45.1 Review . . . 927
7.45.2 Exercise . . . 928
7.45.3 Try . . . 932
7.46 複素数平面上の軌跡と領域 . . . 940
7.46.1 Review . . . 940
7.46.2 Exercise . . . 941
7.46.3 Try . . . 948

8 Link(Approach) 957
8.1 複素数平面 (数学 C) . . . 957
8.2 式と曲線 (数学 C) . . . 967
8.3 関数 (数学 III) . . . 978
8.4 極限 (数学 III) . . . 986
8.5 微分法 (数学 III) . . . 1003
8.6 積分法 (数学 III) . . . 1026
8.7 補充問題 (数学 III) . . . 1061

9 Link(Basic) 1071
9.1 複素数平面 (数学 C) . . . 1071
9.2 式と曲線 (数学 C) . . . 1080
9.3 関数 (数学 III) . . . 1084

9.4 極限 (数学 III) 1086
9.5 微分法 (数学 III) 1097
9.6 積分法 (数学 III) 1116
9.7 補充問題 (数学 III) 1143

10 Link(Challenge) 1156
10.1 複素数平面 (数学 C) 1156
10.2 式と曲線 (数学 C) 1179
10.3 関数 (数学 III) 1197
10.4 極限 (数学 III) 1201
10.5 微分法 (数学 III) 1218
10.6 積分法 (数学 III) 1237
10.7 補充問題 (数学 III) 1283

11 Z 会 1291
11.1 数学 IA 1291
11.1.1 第 1 回 1291
11.1.2 第 2 回 1307
11.1.3 第 3 回 1315
11.1.4 第 4 回 1322
11.1.5 第 5 回 1328
11.1.6 第 6 回 1332
11.1.7 第 7 回 1340
11.1.8 第 8 回 1349
11.2 数学 IIBC 1354
11.2.1 第 1 回 1354
11.2.2 第 2 回 1375
11.2.3 第 3 回 1383
11.2.4 第 4 回 1406
11.2.5 第 5 回 1423
11.2.6 第 6 回 1429
11.2.7 第 7 回 1457
11.2.8 第 8 回 1464

1　数学Ⅰ

1.1　図形と計量

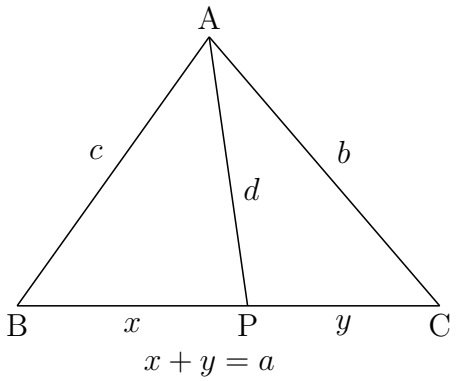
1.1.1　パップスの定理 (中線定理) とスチュワートの定理

パップスの定理はスチュワートの定理に含まれる.

スチュワートの定理

△ABC の 3 辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，辺 BC 上に点 P をとり，AP，BP，PC の長さをそれぞれ d，x，y とおくと，次が成立する.

$$\boldsymbol{b^2x + c^2y = a(d^2 + xy)}$$



$x + y = a$

証明 $\theta = \angle$APB とし，△ABP，△ACP に余弦定理を適用すると

$$c^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos\theta, \tag{A}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= d^2 + y^2 - 2dy\cos(180^\circ - \theta) \\ &= d^2 + y^2 + 2dy\cos\theta \end{aligned} \tag{B}$$

(A) $\times\, y$ + (B) $\times\, x$ より

$$\begin{aligned} b^2x + c^2y &= y(d^2 + x^2) + x(d^2 + y^2) \\ &= (x + y)d^2 + xy(x + y) \\ &= a(d^2 + xy) \end{aligned}$$

証終

補足 特に，$x = y = \dfrac{a}{2}$ のとき，次のパップスの定理 (中線定理) を得る.

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = 2(d^2 + x^2)}$$

関連 前頁の AP が ∠A の二等分線であるとき，$x : y = c : b$ であるから，スチュワートの定理の左辺に

$$x = \frac{c}{b+c}a, \quad y = \frac{b}{b+c}a$$

を代入すると

$$b^2x + c^2y = b^2 \cdot \frac{c}{b+c}a + c^2 \cdot \frac{b}{b+c}a = \frac{bc(b+c)}{b+c}a = abc$$

したがって　$abc = a(d^2 + xy)$　すなわち　$\boldsymbol{d^2 = ab - xy}$

別証 上の角の二等分線に関する公式は，数学 A でも扱っている．

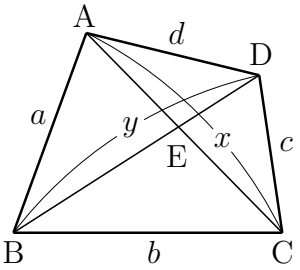
1.1.2　トレミーの定理とブラマーグプタの公式

トレミーの定理とブラマーグプタの公式に関連する周辺公式を解説します.

円に内接する四角形 ABCD において，

$$\mathrm{AB}=a,\quad \mathrm{BC}=b,\quad \mathrm{CD}=c,\quad \mathrm{DA}=d,$$
$$\mathrm{AC}=x,\quad \mathrm{BD}=y$$

とすると，次が成り立つ.



(1)　$\cos A=\dfrac{d^2+a^2-b^2-c^2}{2(da+bc)}$,　$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$

(2)　$x^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$,　$y^2=\dfrac{(bd+ca)(ba+cd)}{bc+da}$

(3)　$xy=ac+bd$　(トレミーの定理)

(4) $2s=a+b+c+d$ とすると，四角形 ABCD の面積を S，外接円の半径を R とすると (ブラマーグプタの公式)

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

(5) AC と BD の交点を E とするとき

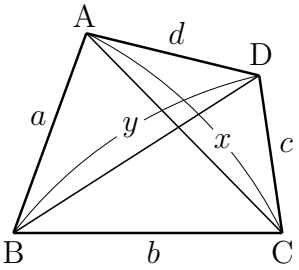
$$\mathrm{EA}:\mathrm{EB}:\mathrm{EC}:\mathrm{ED}=da:ab:bc:cd$$

(6) $\theta=\angle\mathrm{AED}$ とするとき

$$\cos\theta=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$$

証明 (1) 余弦定理により

$$y^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos A$$
$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$



このとき，$\cos C = -\cos A$ であるから

$$d^2 + a^2 - 2da\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

よって　　$\cos A = \dfrac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2(da + bc)}$

上式から　　$\cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$

補足 $\cos B$ は $\cos A$ の結果を $a \to b,\ b \to c,\ c \to d,\ d \to a$ とすればよい.

(2) 余弦定理により　　$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B$

これに (1) の結果を代入すると

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

上式から　　$y^2 = \dfrac{(bd + ca)(ba + cd)}{bc + da}$

(3) (2) の結果から　　$x^2y^2 = (ac + bd)^2$　よって　$xy = ac + bd$

(4) (1) の結果から

$$1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b - c + d)(a - b + c + d)}{2(ad + bc)}$$
$$1 - \cos A = \frac{-(a - d)^2 + (b + c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b + c - d)(-a + b + c + d)}{2(ad + bc)}$$

したがって　　$\sin^2 A = (1 + \cos A)(1 - \cos A)$

$$= \frac{(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2d)}{4(ad + bc)^2}$$
$$= \frac{4(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}{(ad + bc)^2}$$

$\sin A = \sin C$ より　$S = \dfrac{1}{2}ad\sin A + \dfrac{1}{2}bc\sin C = \dfrac{1}{2}(ad + bc)\sin A$

$$= \frac{1}{2}(ad + bc) \times \frac{2\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}{ad + bc}$$
$$= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

$y=\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$，$\sin A=\dfrac{2S}{ad+bc}$ であるから，正弦定理により

$$R=\frac{y}{2\sin A}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

(5) $\triangle\mathrm{EDA}\backsim\triangle\mathrm{ECB}$ より　$\mathrm{EA}:\mathrm{EB}=\mathrm{ED}:\mathrm{EC}=d:b$

$\triangle\mathrm{EAB}\backsim\triangle\mathrm{EDC}$ より　$\mathrm{EA}:\mathrm{ED}=\mathrm{EB}:\mathrm{EC}=a:c$

よって　　$\mathrm{EA}:\mathrm{EB}:\mathrm{EC}:\mathrm{ED}=da:ab:bc:cd$

(6) (2)，(3)，(5) の結果から

$$\mathrm{AE}^2=\left(\frac{ad}{ad+bc}x\right)^2=\frac{a^2d^2}{(ad+bc)^2}\times\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}=\frac{a^2d^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$\mathrm{ED}^2=\left(\frac{cd}{ab+cd}y\right)^2=\frac{c^2d^2}{(ab+cd)^2}\times\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}=\frac{c^2d^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)},$$

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED}=\frac{ad}{ad+bc}x\times\frac{cd}{ab+cd}y=\frac{acd^2xy}{(ad+bc)(ab+cd)}=\frac{acd^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)}$$

これらを $2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED}\cos\theta=\mathrm{AE}^2+\mathrm{ED}^2-d^2$ に代入して整理すると

$$\frac{2acd^2(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+cd)}\cos\theta=\frac{acd^2}{(ad+bc)(ab+cd)}(a^2+c^2-b^2-d^2)$$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$

(4) の別解　(6) の結果から

$$1+\cos\theta=\frac{(a+c)^2-(b-d)^2}{2(ac+bd)}=\frac{(a-b+c+d)(a+b+c-d)}{2(ac+bd)}$$

$$1-\cos\theta=\frac{(b+d)^2-(a-c)^2}{2(ac+bd)}=\frac{(-a+b+c+d)(a+b-c+d)}{2(ac+bd)}$$

$2s=a+b+c+d$ であるから

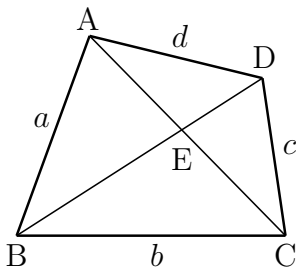
$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\\&=\frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}{4(ac+bd)^2}\\&=\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ac+bd)^2}\end{aligned}$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{1}{2}(ac+bd)\times\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ac+bd}\\&=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\end{aligned}$$

補足　たとえば，(1)，(6) から得られた

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$
$$\cos\angle\mathrm{BEC} = \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}$$



の符号から，これらの角の大きさに関する次の性質が分かる．

$$\text{i)}\ \begin{cases} \angle\mathrm{ABC}\text{ が鋭角} & \Longleftrightarrow & a^2+b^2 > c^2+d^2 \\ \angle\mathrm{ABC}\text{ が直角} & \Longleftrightarrow & a^2+b^2 = c^2+d^2 \\ \angle\mathrm{ABC}\text{ が鈍角} & \Longleftrightarrow & a^2+b^2 < c^2+d^2 \end{cases}$$

$$\text{ii)}\ \begin{cases} \angle\mathrm{BEC}\text{ が鋭角} & \Longleftrightarrow & a^2+c^2 > b^2+d^2 \\ \angle\mathrm{BEC}\text{ が直角} & \Longleftrightarrow & a^2+c^2 = b^2+d^2 \\ \angle\mathrm{BEC}\text{ が鈍角} & \Longleftrightarrow & a^2+c^2 < b^2+d^2 \end{cases}$$

$d=0$ とすると，四角形 ABCD は三角形 ABC に退化し，$\angle\mathrm{ABC}=B$，$\angle\mathrm{BEC}=A$ となり，$\cos B$，$\cos A$ は余弦定理に一致する．

また，i)，ii) から，三角形 ABC における関係式を得る．

同様に，ブラマーグプタの公式

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \qquad (2s=a+b+c+d)$$

において，$d=0$ とすると，次のヘロンの公式を得る．

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (2s=a+b+c)$$

2　数学 II

2.1　式と証明 (数学 II)

2.1.1　相加平均・相乗平均・調和平均

$a > 0,\ b > 0$ のとき　$a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$
よって

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad \cdots (*)$$

が成立する (等号は $a = b$ のとき成立する).

$a_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ のとき

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad \cdots (**)$$
(等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき成立する)

が成り立つことを示す. $(*)$ より

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &\geqq 2(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}) \\ &\geqq 4\sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} = 4\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \end{aligned}$$

同様のことを繰り返すと，$n = 2^k$ のときに $(**)$ が成立することが示される.

$n \neq 2^k$ のときは $2^{k-1} < n < 2^k$ となる k に対して，$n + m = 2^k$ となるように m を定め，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = np$ とおくと

$$\frac{1}{n+m}(\overbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}^{n\text{ 個}} + \overbrace{p + \cdots + p}^{m\text{ 個}}) \geqq \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \cdots a_n p^m}$$

左辺は $\dfrac{1}{n+m}(np + mp) = p$ であるから

$$\begin{aligned} p &\geqq \sqrt[n+m]{a_1 a_2 \cdots a_n p^m} \\ p^{n+m} &\geqq a_1 a_2 \cdots a_n p^m \\ p^n &\geqq a_1 a_2 \cdots a_n \end{aligned}$$

よって，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する.

n 個の正の実数 $a_1,\ a_2, \cdots, a_n$ の相加平均 A，相乗平均 G，調和平均 H は

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

相加平均 $\geqq$ 相乗平均 の大小関係を $\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2}, \cdots, \dfrac{1}{a_n}$ に適用すると

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H} \geqq \frac{1}{G}$$

よって　$A \geqq G \geqq H$　(等号が成立する条件は，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$)

神戸大文系 2012 年 3

以下の問に答えよ．

(1) 正の実数 x，y に対して

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geqq 2$$

が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ．

(2) n を自然数とする．n 個の正の実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2$$

が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ．

解答 (1) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}-2=\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2\geqq 0$　ゆえに　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqq 2$

なお，等号が成立するための条件は

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{\frac{x}{y}}\quad \text{すなわち}\quad x=y$$

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_j$，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_j}{a_k}=\sum_{\substack{1\leqq j\leqq n\\ 1\leqq k\leqq n}}\frac{a_j}{a_k}\\ &=\sum_{1\leqq j<k\leqq n}\frac{a_j}{a_k}+\sum_{1\leqq k<j\leqq n}\frac{a_j}{a_k}+\sum_{1\leqq j=k\leqq n}\frac{a_j}{a_k}\\ &=\sum_{1\leqq j<k\leqq n}\frac{a_j}{a_k}+\sum_{1\leqq j<k\leqq n}\frac{a_k}{a_j}+n=\sum_{1\leqq j<k\leqq n}\left(\frac{a_j}{a_k}+\frac{a_k}{a_j}\right)+n\\ &\geqq\sum_{1\leqq j<k\leqq n}2+n={}_n\mathrm{C}_2\cdot 2+n=n^2\end{aligned}$$

よって　　$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqq n^2$

なお，等号が成立するための条件は，$1\leqq j<k\leqq n$ について　$a_j=a_k$

すなわち　　$a_1=a_2=\cdots=a_n$

別解 n 個の正の実数 $a_1,\ a_2,\cdots,a_n$ の相加平均 A，調和平均 H は

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\quad \frac{1}{H}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

相加平均・調和平均の大小関係から，次式が成立する．

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)=nA\cdot\frac{n}{H}=n^2\cdot\frac{A}{H}\geqq n^2$$

等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限る．

名大文系 2002 年 1

n を自然数とするとき，3 つの数 $a=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}-1$，$b=1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$，$c=\dfrac{1}{5n}$ の大きさを比較せよ．

解答 5 つの正数 $1+\dfrac{1}{n},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}+1+1+1+1\right) > \sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{n}\right)1^4}$$

$$\frac{1}{5n} > \sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1 \qquad (*)$$

$n>1$ のとき，5 つの正数 $1-\dfrac{1}{n},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{n}+1+1+1+1\right) > \sqrt[5]{\left(1-\frac{1}{n}\right)1^4}$$

$$1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}} > \frac{1}{5n} \qquad (**)$$

$(**)$ は $n=1$ のときも成立するから，$(*)$, $(**)$ より，自然数 n について

$$1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}} > \frac{1}{5n} > \sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}-1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b>c>a}$$

2.2　微分法と積分法 (数学 II)

2.2.1　微分法

九大文系 2000 年 4

複素数 $z=\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$ と，それに共役な複素数 $\overline{z}$ に対し

$$\alpha = z+\overline{z}$$

とする。

(1) α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3) 有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

解答　(1) $z=\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$，$\alpha = z+\overline{z}$ より

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= (z+\overline{z})^3 = z^3+\overline{z}^3+3(z+\overline{z})\\ &= (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)+(\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ)+3\alpha\\ &= 1+3\alpha\end{aligned}$$

したがって　　$\alpha^3-3\alpha-1=0$

よって，α は整数を係数とする 3 次方程式 $x^3-3x-1=0$ の解である．

別解　$\alpha = 2\cos 20^\circ$ であるから，3 倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

において $\theta = 20^\circ$ とし，上式に $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$，$\cos\theta = \dfrac{\alpha}{2}$ を代入すると

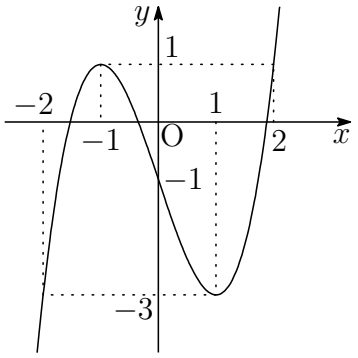
$$\frac{1}{2} = 4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 3\cdot\frac{\alpha}{2}$$　　整理すると　　$\alpha^3-3\alpha-1=0$

(2) $f(x)=x^3-3x-1$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 1	↘	極小 -3	↗



$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．

極大値 $f(-1)=1>0$，極小値 $f(1)=-3<0$ であるから，

3 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつ．

次に，有理数 $\dfrac{p}{q}$(p は整数，q は自然数，p と q は互いに素) が 3 次方程式

$$x^3-3x-1=0 \quad \cdots(*)$$

の解であるとすると

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3-3\cdot\frac{p}{q}-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad p^3=q^2(3p+q)$$

p と q は互いに素であるから，$q=1$ となり，このとき

$$p^3-3p-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p^2-3)=1$$

これを満たす整数 p は存在しないから，$(*)$ は，有理数の解をもたない．

補足 グラフから，$(*)$ の解は $-2<x<-1$，$-1<x<0$，$1<x<2$ にあり，$p^3-3p-1=0$ を満たす整数 p は存在しない．

(3) α を解にもつ有理数を係数とする 2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ が存在すると仮定する．このとき，$f(x)$ を x^2+bx+c で割った商を $x+s$，余りを $tx+u$ とおくと (s，t，u は有理数)．

$$f(x)=(x^2+bx+c)(x+s)+tx+u \quad \cdots ①$$

① に $x=\alpha$ を代入すると　$t\alpha+u=0$　$\cdots ②$

$t\neq 0$ のとき　　$\alpha=-\dfrac{u}{t}$

このとき，左辺は無理数，右辺は有理数となり，矛盾．

ゆえに，$t=0$ を ② に代入すると，$u=0$．これらを ① に代入すると

$$f(x)=(x^2+bx+c)(x+s)$$

上式より，有理数 $-s$ が方程式 $f(x)=0$ が解となり，(2) の結論に反する．
よって，α を解にもつ有理数を係数とする 2 次方程式は存在しない．

解説 $f(x)=x^3-3x-1$ に $x=2\cos\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(2\cos\theta) &= (2\cos\theta)^3-3\cdot 2\cos\theta-1 \\ &= 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-1 \\ &= 2\cos 3\theta-1 \end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で $f(2\cos\theta)=0$ を満たす θ は

$$3\theta=60^\circ,\ 300^\circ,\ 420^\circ \quad \text{すなわち} \quad \theta=20^\circ,\ 100^\circ,\ 140^\circ$$

よって，$x^3-3x-1=0$ の解は　$x=2\cos 20^\circ,\ 2\cos 100^\circ,\ 2\cos 140^\circ$

神戸大理系 2009 年 2

$f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ とし，方程式 $f(x)=0$ について考える．このとき，以下のことを示せ．

(1) $f(x)=0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ．

(2) α が $f(x)=0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる．

(3) $f(x)=0$ の解を小さい順に $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ とすれば

$$g(\alpha_1)=\alpha_3, \quad g(\alpha_2)=\alpha_1, \quad g(\alpha_3)=\alpha_2$$

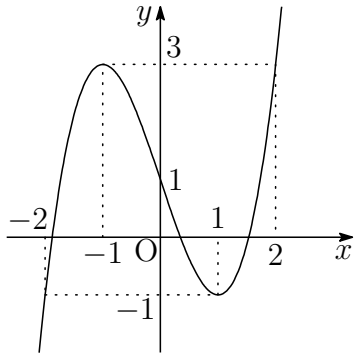
となる．

解答　(1)　$f(x)=x^3-3x+1$ より

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗



$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．

$f(-2)=-1$，$f(2)=3$，極大値 $f(-1)=3>0$，極小値 $f(1)=-1<0$ であるから，$f(x)=0$ は絶対値が2より小さい3つの相異なる実数解をもつ．

(2)　α が $f(x)=0$ の解であるとき

$$\begin{aligned}f(g(\alpha))&=g(\alpha)^3-3g(\alpha)+1=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1\\&=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1=(\alpha^3-3\alpha)^2-1\\&=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)=f(\alpha)(\alpha^3-3\alpha-1)=0\end{aligned}$$

よって，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解である．

(3)　$f(\sqrt{3})=f(-\sqrt{3})=1$ であるから，(1) のグラフから

$$-2<\alpha_1<-\sqrt{3},\quad 0<\alpha_2<1,\quad 1<\alpha_3<\sqrt{3}$$

ゆえに　${\alpha_2}^2-2<{\alpha_3}^2-2<{\alpha_1}^2-2$　すなわち　$g(\alpha_2)<g(\alpha_3)<g(\alpha_1)$

$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ であるから，(2) の結果より

$$g(\alpha_2)=\alpha_1,\quad g(\alpha_3)=\alpha_2,\quad g(\alpha_1)=\alpha_3$$

解説　$f(2\cos\theta)=(2\cos\theta)^3-3\cdot2\cos\theta+1=2\cos3\theta+1$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $2\cos3\theta+1=0$ の解は　$\theta=\dfrac{2}{9}\pi,\ \dfrac{4}{9}\pi,\ \dfrac{8}{9}\pi$

条件により　$\alpha_1=2\cos\dfrac{8}{9}\pi,\ \ \alpha_2=2\cos\dfrac{4}{9}\pi,\ \ \alpha_3=2\cos\dfrac{2}{9}\pi$

$g(2\cos\theta)=(2\cos\theta)^2-2=2\cos2\theta$ であるから

$$g(\alpha_1)=g\left(2\cos\frac{8}{9}\pi\right)=2\cos\frac{16}{9}\pi=2\cos\frac{2}{9}\pi=\alpha_3$$

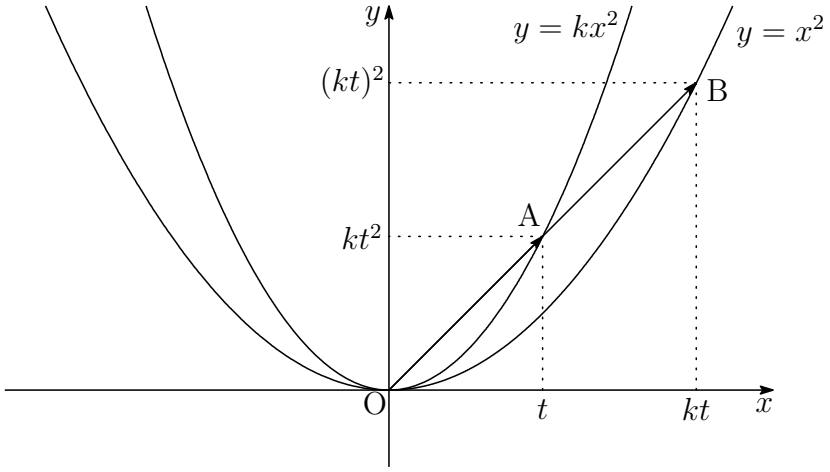
$$g(\alpha_2)=g\left(2\cos\frac{4}{9}\pi\right)=2\cos\frac{8}{9}\pi=\alpha_1$$

$$g(\alpha_3)=g\left(2\cos\frac{2}{9}\pi\right)=2\cos\frac{4}{9}\pi=\alpha_2$$

2.2.2　放物線は相似

放物線 $y = kx^2$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ kt^2)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たす点 B をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = k(t,\ kt^2) = (kt,\ (kt)^2)$$



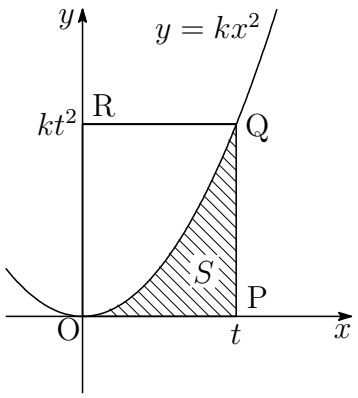
このとき，点 $\mathrm{B}(kt,\ (kt)^2)$ は放物線 $y = x^2$ 上の点である．これから，放物線 $y = kx^2$ を頂点を中心に k 倍拡大したものが，放物線 $y = x^2$ であることがわかる．たとえば，放物線 $y = 3x^2$ を頂点を中心に 3 倍拡大したものが $y = x^2$ であり，$y = 3x^2$ と $y = x^2$ の相似比は $1 : 3$ である．

一般に，放物線は相似であり，$y = ax^2 + bx + c$ と $y = a'x^2 + b'x + c'$ の相似比は $|a'| : |a|$ である．

2.2.3　放物線に関する面積

右の図の斜線部分の面積 S は

$$S = \int_0^t kx^2\,dx = \left[\ \frac{kx^3}{3}\ \right]_0^t = \frac{kt^3}{3}$$



また，右の図の長方形 OPQR の面積は

$$t \cdot kt^2 = kt^3$$

したがって，S は長方形 OPQR の面積の 1/3 であるから，長方形 OPQR はこの放物線によって区切られた 2 つの図形の面積比は 2 : 1 である．

fig-2 の放物線は fig-1 の放物線を平行移動したものとする．fig-2 の放物線の軸に関する対称性により，斜線部の面積は長方形の面積の 2/3 であることがわかる．

さらに，fig-2 の面積比を利用すると，fig-3 における斜線部分の面積も長方形の面積の 2/3 であることもわかる．

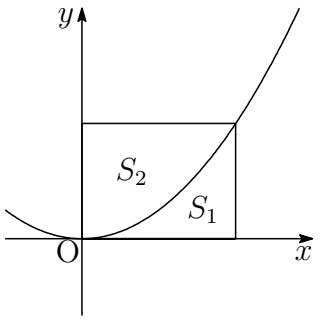


fig-1

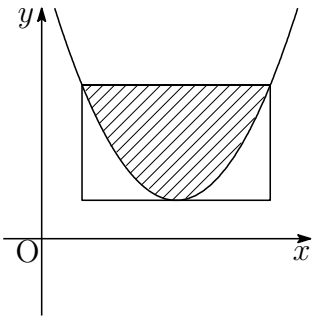


fig-2

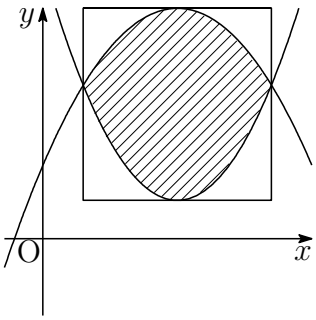


fig-3

例 1 次の放物線と直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(1) $y = x^2$, $y = 2x + 3$

(2) $y = x^2$, $y = 2x - 1$, $x = 3$

解説

(1) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ の共有点の x 座標は　$x = -1,\ 3$

$$S = \int_{-1}^{3} \{(2x + 3) - x^2\}\, dx$$
$$= \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, dx \quad \cdots ①$$

① は放物線 $y = -x^2 + 2x + 3$ と x 軸で囲まれた部分の面積である.

-1 と 3 の中央 $x = 1$(放物線の軸) における y の値 4(または $5 - 1$) を利用して

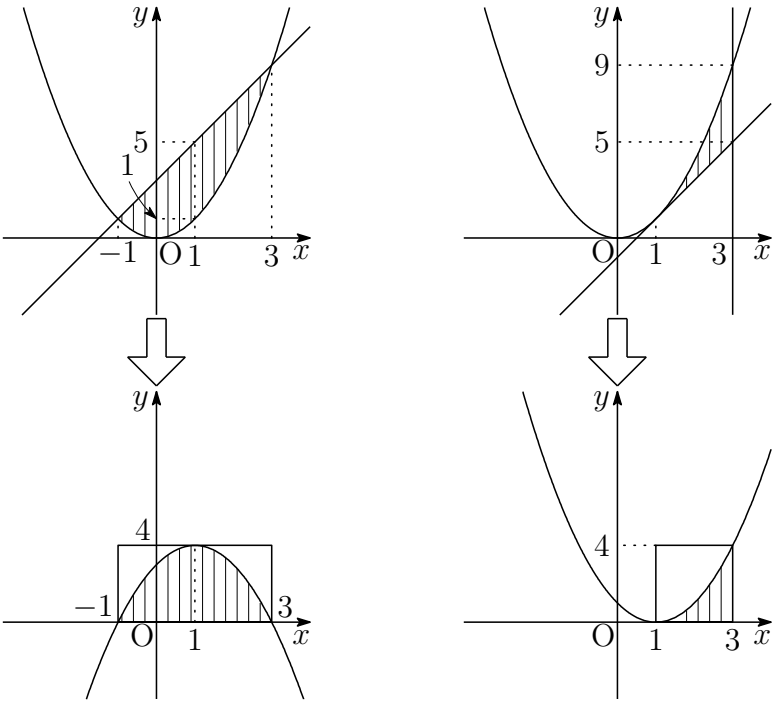
$$S = \frac{2}{3}\{3 - (-1)\}\cdot 4 = \boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

(2) $S = \displaystyle\int_{1}^{3} \{x^2 - (2x - 1)\}\, dx = \int_{1}^{3} (x - 1)^2\, dx \quad \cdots ②$

② は放物線 $y = (x - 1)^2$ と x 軸, 直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積である.

$x = 3$ のときの y の値 $(3 - 1)^2$ または $9 - 5$ を利用して

$$S = \frac{1}{3}(3 - 1)\cdot 4 = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$



$f(x),\ g(x)$ を 2 次以下の整式とし，左下の図のように，$a \leqq x \leqq b$ において

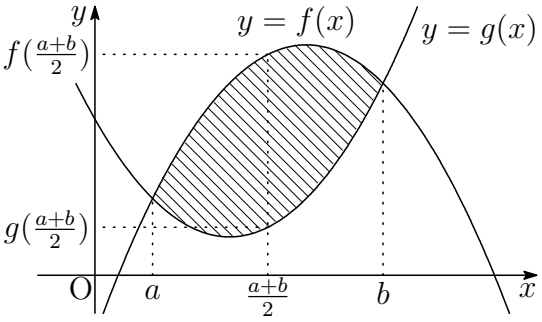
$$f(x) \geqq g(x), \quad f(a) = g(a), \quad f(b) = g(b) \tag{$*$}$$

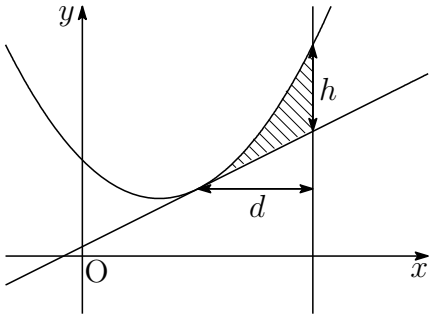
を満たすとき，2 曲線 $y = f(x),\ y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \frac{2}{3}(b-a)\left\{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} \tag{$**$}$$

右下の図のように，放物線とその接線で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \frac{1}{3}dh$$





補足 $f(x) - g(x)$ が 3 次以下の整式についても，条件 $(*)$ を満たすとき，その面積は $(**)$ で表される．このとき，$f(x) - g(x)$ は $(x-a)(x-b)$ を因数にもつから

$$f(x) - g(x) = \{p(x-a) + q\}(x-a)(x-b)$$

とおくと ($p,\ q$ は定数)

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - g\left(\frac{a+b}{2}\right) = -\frac{p}{8}(b-a)^3 - \frac{q}{4}(b-a)^2$$

よって，2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= p\int_a^b (x-a)^2(x-b)\,dx + q\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx \\ &= -\frac{p}{12}(b-a)^4 - \frac{q}{6}(b-a)^3 \\ &= \frac{2}{3}(b-a)\left\{-\frac{p}{8}(b-a)^3 - \frac{q}{4}(b-a)^2\right\} \\ &= \frac{2}{3}(b-a)\left\{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

九大文系 2017 年 1

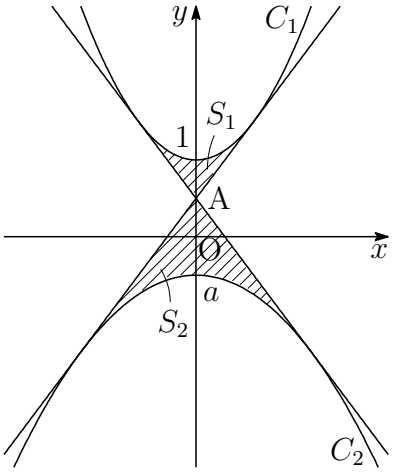
定数 $a<1$ に対し，放物線 $C_1 : y=2x^2+1$，$C_2 : y=-x^2+a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) C_1 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

解説 $C_1 : y=2x^2+1$ と $C_2 : y=-x^2+a$ の相似比は　$1:2$

- 2 接線の交点は，C_1 の頂点 $(0,\ 1)$ と C_2 の頂点 $(0,\ a)$ を $1:2$ に内分する点.
- S_1 と S_2 の面積比は　$1^2:2^2$



2 接線の交点を A とすると　$\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{a+2}{3}\right)$

C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2t^2+1)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(t,\ 2t^2+\frac{1-a}{3}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(-2t,\ -4t^2+\frac{2a-1}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(0,\ \frac{a+2}{3}\right)+\left(-2t,-4t^2+\frac{2a-1}{3}\right)$$

$$=(-2t,-(-2t)^2+a)$$

よって，Q は $C_2 : y=-x^2+a$ 上の点である.

(1) C_1 の頂点 $(0,\ 1)$ と C_2 の頂点 $(0,\ a)$ を $1:2$ に内分する点は

$$\left(0,\ \frac{2\cdot 1+1\cdot a}{1+2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(0,\ \frac{a+2}{3}\right)$$

接線の方程式を $y=kx+\dfrac{a+2}{3}$ とおき，これと C_1 の方程式から y を消去すると

$$2x^2+1=kx+\frac{a+2}{3} \quad \text{整理すると} \quad 2x^2-kx+\frac{1-a}{3}=0 \quad \cdots ①$$

このとき，係数について (判別式 $=0$)

$$(-k)^2-4\cdot 2\cdot\frac{1-a}{3}=0 \quad \text{ゆえに} \quad k=\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}$$

よって，求める接線の方程式は $\quad \boldsymbol{y=\pm 2\sqrt{\dfrac{2}{3}(1-a)}\,x+\dfrac{a+2}{3}}$

補足 ① から，接点の x 座標は $\quad x=-\dfrac{-k}{2\cdot 2}=\dfrac{k}{4}$

C_1 の頂点を B とすると $\quad \mathrm{AB}=1-\dfrac{a+2}{3}=\dfrac{1-a}{3}$

$$\frac{S_1}{2}=\frac{1}{3}\left|\frac{k}{4}\right|\mathrm{AB}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}}{4}\cdot\frac{1-a}{3}=\frac{1}{54}(1-a)\sqrt{6(1-a)}$$

別解 $C_1: y=2x^2+1$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2t^2+1)$ における接線の方程式は $(y'=4x)$

$$y=4t(x-t)+2t^2+1 \quad \text{ゆえに} \quad y=4tx-2t^2+1$$

この直線の y 切片は $\dfrac{a+2}{3}$ であるから

$$-2t^2+1=\frac{a+2}{3} \quad \text{ゆえに} \quad t=\pm\sqrt{\frac{1-a}{6}}$$

よって，求める接線の方程式は $\quad \boldsymbol{y=\pm 4\sqrt{\dfrac{1-a}{6}}\,x+\dfrac{a+2}{3}}$

(2) $C_1: y=2x^2+1$ と $C_2: y=-x^2+a$ の相似比は $1:2$ であるから

$$S_1{}^2 : S_2{}^2 = 1^2 : 2^2 \quad \text{よって} \quad \frac{S_2{}^2}{S_1{}^2}=\frac{2^2}{1^2}=\boldsymbol{4}$$

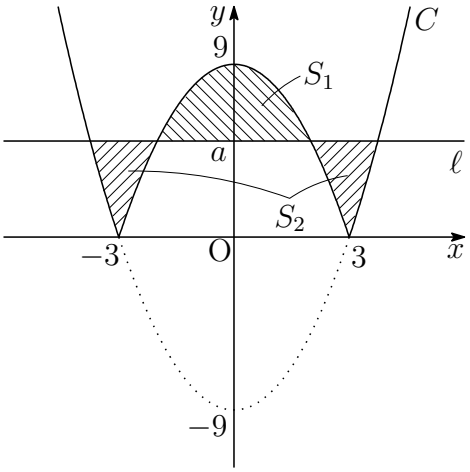
九大文系 2023 年 1

a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を，次のように定める。

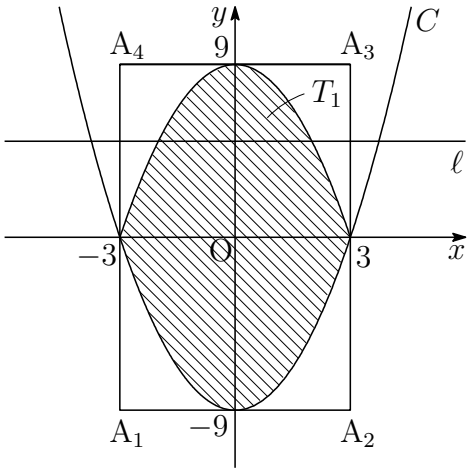
$$C : y = |(x-3)(x+3)|, \quad \ell : y = a$$

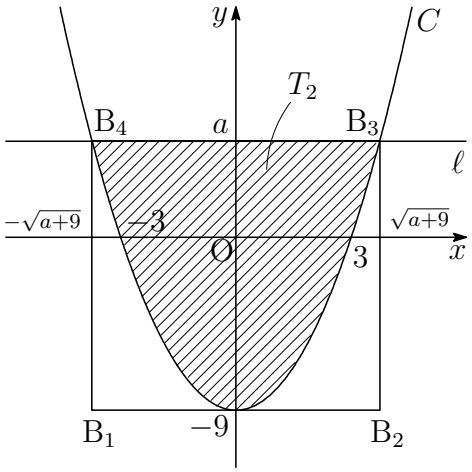
曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち，$y \geqq a$ の領域にある部分の面積を S_1，$y \leqq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。$S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

解説 $S_1,\ S_2$ は下の図の斜線部分の面積である．



$S_1 = S_2$ のとき，下の 2 つ図の斜線部分の面積 $T_1,\ T_2$ について，$T_1 = T_2$ である．





$T_1,\ T_2$ は，それぞれ図の長方形 $\mathrm{A_1A_2A_3A_4}$，$\mathrm{B_1B_2B_3B_4}$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ であるから，このとき，これら 2 つの長方形の面積は等しい．

$$6 \times 18 = 2\sqrt{a+9} \times (a+9) \quad \text{ゆえに} \quad (a+9)^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 3^3$$

したがって　$a + 9 = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^2$　よって　$\boldsymbol{a = 9(\sqrt[3]{4} - 1)}$

2.2.4　演習問題

- 千葉大 2022 年 3 (放物線に関する面積 [1/6 公式])
- 九大文系 2009 年 4
  放物線と放物線の 2 本の接線で囲まれた図形の面積 S_1 と，その 2 つの接点を結ぶ直線と放物線で囲まれた図形の面積 S_2 の比は，$S_1 : S_2 = 1 : 2$ である．また，2 本の接線の交点の x 座標は，2 つの接点の中点の x 座標と等しい．

2.2.5　極展開

定理 1　2 次関数 $f(x)$ の x^2 の係数が a であるとき，$x=k$ を極として展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^2 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明　$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$ より

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^2+bk+c+(2ak+b)(x-k)+a(x-k)^2 \\ &= ax^2+bx+c=f(x) \end{aligned}$$

［証終］

例えば，定理 1 において，$f'(k)=0$ のとき，$k=-\dfrac{b}{2a}$ であるから

$$f(k)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

このとき，$f(x)$ は平方完成の式となる．

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

定理 2　3 次関数 $f(x)$ の x^3 の係数が a であるとき，$x=k$ を極として展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2}f''(k)(x-k)^2+a(x-k)^3 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c, \quad f''(x)=6ax+2b$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^3+bk^2+ck+d+(3ak^2+2bk+c)(x-k) \\ &\qquad +\frac{1}{2}(6ak+2b)(x-k)^2+a(x-k)^3 \\ &= ax^3+bx^2+cx+d=f(x) \end{aligned}$$

［証終］

n 次多項式についても数学 III で学習する部分積分法を使って証明できる [1] ．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

定理 3 3 次関数 $C : y = f(x)$ のグラフは変曲点 $\mathrm{M}(k,\ f(k))$ に関して対称である．

証明 変曲点を $\mathrm{M}(k,\ f(k))$ とすると，$f''(k) = 0$ であるから

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x-k) + a(x-k)^3 \quad (a \text{ は } f(x) \text{ の } x^3 \text{の係数}) \tag{1}$$

C 上の 2 点 $\mathrm{A}(k+t,\ f(k+t))$，$\mathrm{B}(k-t,\ f(k-t))$ について (t は任意の定数)

$$\begin{aligned}(k+t) + (k-t) &= 2k,\\ f(k+t) + f(k-t) &= \{f(k) + f'(k)t + at^3\} + \{f(k) - f'(k)t - at^3\}\\ &= 2f(k)\end{aligned}$$

したがって，A，B の中点は変曲点 M である．よって，C は変曲点 M に関して対称である． **証終**

補足 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のとき，$f''(x) = 6ax + 2b$ より $\quad k = -\dfrac{b}{3a}$ $\quad$ 終

次に，3 次関数 $f(x)$ の増減を (1) を利用して調べてみる．$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = f'(k) + 3a(x-k)^2 \tag{2}$$

(i) $f'(k) = 0$ または $f'(k)$ が a と同符号，すなわち，$af'(k) \geqq 0$ であるとき ($f(x)$ は極値をもたない)，$f(x)$ は単調増加または単調減少であるから，このとき，3 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解は 1 個である．

(ii) $f'(k)$ が a と異符号であるとき ($f(x)$ は極大値と極小値をもつ)

$$f'(k) = -3as^2 \tag{3}$$

とおくと ($s > 0$)，(1)，(2) は

$$\begin{aligned}f(x) &= f(k) - 3as^2(x-k) + a(x-k)^3 \qquad (4)\\ f'(x) &= -3as^2 + 3a(x-k)^2 = 3a(x-k+s)(x-k-s)\end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると，$x = k \pm s$ であるから，$f(x)$ の極値は

$$f(k+s) = f(k) - 2as^3, \quad f(k-s) = f(k) + 2as^3 \tag{5}$$

上の 2 式および (3) より

$$\begin{aligned}f(k+s)f(k-s) &= f(k)^2 - 4a^2s^6 = f(k)^2 - 4a^2\left\{-\frac{f'(k)}{3a}\right\}^3\\ &= f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a}\end{aligned}$$

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数について

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}>0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 1 個}$$

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}=0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 2 個}$$

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}<0 \text{ のとき}\quad \text{実数解は 3 個}$$

(i)，(ii) より，3 次方程式の実数解の個数について，次の定理が成立する．

3 次方程式の実数解の個数

定理 4 3 次方程式 $f(x)=0$ の x^3 の係数を a，$f''(x)=0$ の解を k とすると

$$af'(k)\geqq 0 \quad \text{または} \quad f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}>0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 1 個}$$

$$af'(k)<0,\ f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}=0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 2 個}$$

$$f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}<0 \iff f(x)=0 \text{ の実数解は 3 個}$$

注意 $f(k)^2+\dfrac{4f'(k)^3}{27a}<0 \implies af'(k)<0$

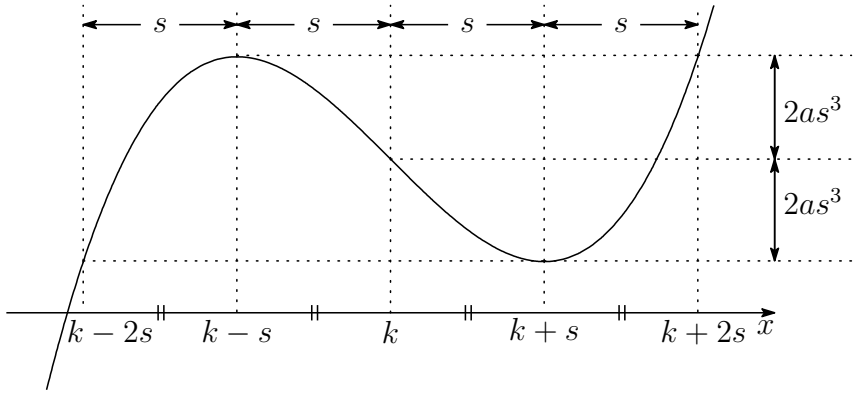
また，(4) に $x=k-2s,\ k+2s$ を代入すると

$$f(k-2s)=f(k)-2as^3,\quad f(k+2s)=f(k)+2as^3$$

したがって，上の 2 式と (5) より，次が成立する．

$$f(k-2s)=f(k+s),\quad f(k+2s)=f(k-s)$$

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ について，グラフの概形は次のようになる．
$(k,\ f(k))$ は変曲点，$f(k-s)$ は極大値，$f(k+s)$ は極小値である．



s は (3) より　　$s=\sqrt{-\dfrac{f'(k)}{3a}}$

2.2.6　積分公式 1

31 ページの定理 2 の関数 $f(x)$ について，次の定積分を考える．$k,\ t$ は任意の定数とする．

$$\begin{aligned}\int_k^{k+t} f(x)\,dx &= \int_k^{k+t} \{f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2}f''(k)(x-k)^2+a(x-k)^3\}\,dx \\ &= \left[\, f(k)(x-k)+\frac{f'(k)}{2}(x-k)^2+\frac{f''(k)}{6}(x-k)^3+\frac{a}{4}(x-k)^4 \,\right]_k^{k+t} \\ &= f(k)t+\frac{f'(k)}{2}t^2+\frac{f''(k)}{6}t^3+\frac{a}{4}t^4 \qquad (6)\end{aligned}$$

(6) の t を $-t$ に置き換えると

$$\int_k^{k-t} f(x)\,dx = -f(k)t+\frac{f'(k)}{2}t^2-\frac{f''(k)}{6}t^3+\frac{a}{4}t^4 \qquad (7)$$

(6)−(7) より

$$\int_{k-t}^{k+t} f(x)\,dx = 2t\left\{f(k)+\frac{f''(k)t^2}{6}\right\} \qquad (8)$$

また，定理 2 の等式に $x=k+t,\ k-t$ をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}f(k+t) &= f(k)+f'(k)t+\frac{f''(k)}{2}t^2+at^3 \\ f(k-t) &= f(k)-f'(k)t+\frac{f''(k)}{2}t^2-at^3\end{aligned}$$

上の 2 式の辺々をそれぞれ加えると

$$f(k+t)+f(k-t) = 2f(k)+f''(k)t^2 \qquad (9)$$

(8) と (9) から $f''(k)t^2$ を消去すると

$$\int_{k-t}^{k+t} f(x)\,dx = \frac{1}{3}t\{f(k-t)+4f(k)+f(k+t)\}$$

$k=\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ t=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ とおくと，次の積分公式が成立する．

定理 5　$f(x)$ を 3 次以下の多項式とするとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\left\{f(\alpha)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\beta)\right\}$$

とくに，$f(\alpha)=f(\beta)=0$ のとき　$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{2}{3}(\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

2.2.7　3 次関数のグラフと接線

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ の表す曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 ℓ の方程式を $y=g(x)$ とすると

$$g(x)=f(p)+f'(p)(x-p)$$

定理 2 にしたがって，$x=p$ を極として，$f(x)$ を展開すると

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+a(x-p)^3$$

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，C と ℓ の共有点の x 座標は，3 次関数 $y=h(x)$ の x 軸との共有点の x 座標と等しい．

$$h(x)=\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+a(x-p)^3$$

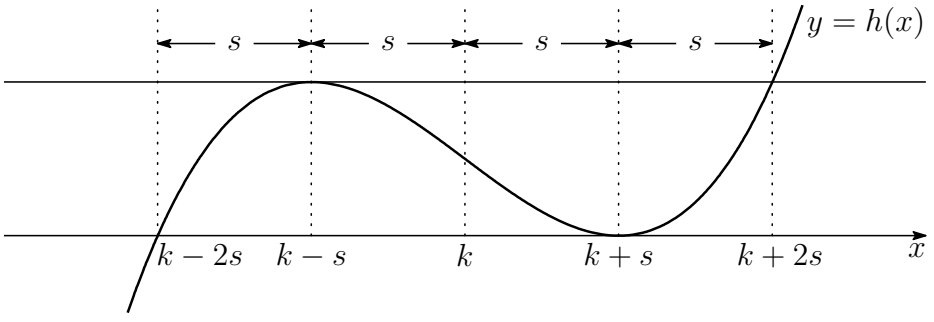
$f''(x)=6ax+2b$ より，変曲点の x 座標を k とすると，$f''(k)=0$ より

$$6ak+2b=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=-3ak, \quad f''(x)=6a(x-k)$$

$f''(p)=6a(p-k)$ であるから，$h(x)$ は

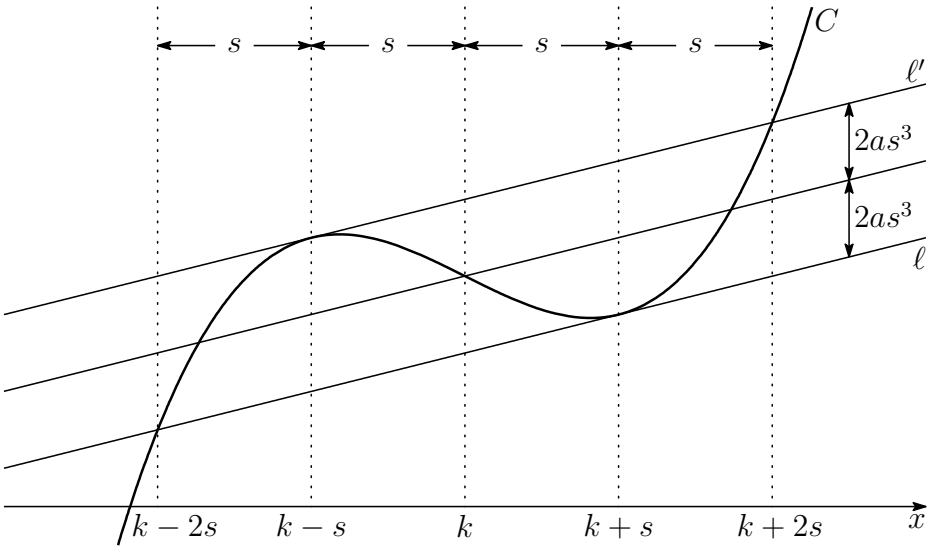
$$\begin{aligned} h(x)&=\frac{1}{2}\cdot 6a(p-k)(x-p)^2+a(x-p)^3 \\ &=a(x-p)^2\{3(p-k)+(x-p)\}=a(x-p)^2\{x-(3k-2p)\} \end{aligned}$$

$y=h(x)$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標は　$x=p,\ 3k-2p$
$p=k+s$ とおくと，これらの共有点の x 座標は，それぞれ　$x=k+s,\ k-2s$
$s>0$ のとき，$y=h(x)$ のグラフの概形は，次のようになる (p.33 を参照)．



変曲点の x 座標を基準に考えると分かりやすい．接点の x 座標が変曲点の x 座標より s だけ大きければ，もう一方の共有点の x 座標は変曲点の x 座標より $2s$ だけ小さい．逆に，接点の x 座標が変曲点の x 座標より s だけ小さければ，もう一方の共有点の x 座標は変曲点の x 座標より $2s$ だけ大きい．

ℓ と平行な C の接線を ℓ' とすると，これらのグラフの概形は，次のようになる．
なお，C と 2 接線 $\ell,\ \ell'$ との位置関係は C が極値をもたいない場合にも成立する．



定理 3 で述べたように，3 次関数 $y=f(x)$ のグラフは変曲点に関して対称である．このことからも変曲点に関して対称な 2 点における接線が平行であることを証明できる．変曲点の x 座標 k を極として $f(x)$ を展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^3$$

これを微分すると　　$f'(x)=f'(k)+3a(x-k)^2$

変曲点に関して対称な 2 点 $(k+s,\ f(k+s)),\ (k-s,\ f(k-s))$ における接線の傾きは

$$f'(k+s)=f'(k-s)=f'(k)+3as^2$$

よって，ℓ と ℓ' は平行である．

ℓ は，点 $(k+s,\ f(k)+f'(k)s+as^3)$ を通り，傾き $f'(k)+3as^2$ の直線

$$\begin{aligned} y&=(f'(k)+3as^2)(x-k-s)+f(k)+f'(k)s+as^3\\ &=f(k)-2as^3+(f'(k)+3as^2)(x-k)\end{aligned}$$

C と ℓ の方程式　　$C:y=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^3$

$\ell:y=f(k)-2as^3+(f'(k)+3as^2)(x-k)$

上の 2 式から y を消去して整理すると

$$2as^3-3as^2(x-k)+a(x-k)^3=0\quad\text{ゆえに}\quad a(x-k-s)^2(x-k+2s)=0$$

したがって，C と ℓ は $x=k-2s$ で交わる．

s を $-s$ に置き換えたものが ℓ' であるから，C と ℓ' は $x=k+2s$ で交わる．
$s>0$ のとき，C と ℓ，C と ℓ' で囲まれた図形の面積をそれぞれ $S,\ S'$ とすると

$$\begin{aligned} S &= |a|\int_{k-2s}^{k+s}(x-k-s)^2(x-k+2s)\,dx \\ &= |a|\int_{k-2s}^{k+s}(x-k+2s)(k+s-x)^2\,dx \\ &= \frac{|a|}{12}\{(k+s)-(k-2x)\}^4 = \frac{27}{4}|a|s^4 \end{aligned}$$

上式の s を $-s$ に置き換えると

$$\begin{aligned} \frac{27}{4}|a|(-s)^4 &= |a|\int_{k+2s}^{k-s}(x-k+s)^2(x-k-2s)\,dx \\ &= |a|\int_{k-s}^{k+2s}(x-k+s)^2(k+2s-x)\,dx \\ &= S' \end{aligned}$$

したがって

$$S=S'=\frac{27}{4}|a|s^4$$

3 次関数のグラフとその接線で囲まれた図形の面積

定理 6 3 次関数 $f(x)$ の x^3 の係数が a で，変曲点，接点の x 座標をそれぞれ k，$k+s$ とすると，接線と $C:y=f(x)$ のグラフの接点以外の共有点の x 座標は

$$\boldsymbol{x=k-2s}$$

C 上の $x=k+s,\ k-s$ における接線は平行で，その傾きは

$$\boldsymbol{f'(k)+3as^2}$$

C 上の $x=k+s,\ k-s$ における接線をそれぞれ $\ell,\ \ell'$ とすると，C と ℓ，C と ℓ' で囲まれた図形の面積をそれぞれ $S,\ S'$ とすると

$$\boldsymbol{S=S'=\frac{27}{4}|a|s^4}$$

2.2.8　積分公式 2

次の定積分を求める.

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx &= \int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\beta)-(\alpha-\beta)\}(x-\beta)^2\,dx\\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\beta)^3-(\alpha-\beta)(x-\beta)^2\}\,dx\\ &= \left[\,\frac{1}{4}(x-\beta)^4-\frac{1}{3}(\alpha-\beta)(x-\beta)^3\,\right]_{\alpha}^{\beta}\\ &= 0-\left\{\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^4-\frac{1}{3}(\alpha-\beta)^4\right\}\\ &= \frac{1}{12}(\alpha-\beta)^4=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \qquad (10)\end{aligned}$$

(10) の α と β を入れ替えると

$$\int_{\beta}^{\alpha}(x-\beta)(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

上式の左辺の上端と下端を入れ替えて書き替えると

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \qquad (11)$$

(10) は，次のように書くこともできる.

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \qquad (12)$$

(11) および (12) より，次式を得る.

定理 7　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

例えば，定理 7 により

$$S=\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)\,dx=\int_{-2}^{1}(x+2)(1-x)^2\,dx=\frac{1}{12}\{1-(-2)\}^4=\frac{27}{4}$$

数学 III の部分積分法を利用すると，次を証明できる [2].

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

3　数学 III

3.1　微分法とその応用 (数学 III)

3.1.1　接線群の包絡線

接線群の包絡線に関連して 2011 年阪大理系 2 番，2014 年名大理系 2 番，2014 年東大文系 3 番，2014 年東大理系 6 番を取り上げます．

2011 年 阪大理系 2 番

実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$ を考える．θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする．D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解答　2 点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$ を通る直線の方程式は $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{x}{8\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \sin\theta - \frac{x}{8}\tan\theta \quad \cdots ①$$

この直線上の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \frac{x}{8\cos^2\theta} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 8\cos^3\theta \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$y = \sin\theta - \frac{8\cos^3\theta}{8}\tan\theta \quad \text{ゆえに} \quad y = \sin^3\theta \quad \cdots ③$$

②，③ より，直線 PQ の包絡線は，$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のときも成立することに注意して

$$(*)\begin{cases} x = 8\cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$(*)$ から，θ を消去すると

$$y = \left\{1 - \left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leqq x \leqq 8)$$

$x = 8t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt} = 8$

x	$0 \longrightarrow 8$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^8 y^2\,dx = \int_0^8 \left\{1 - \left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3 dx = 8\int_0^1 (1 - t^{\frac{2}{3}})^3\,dt \\
&= 8\int_0^1 (1 - 3t^{\frac{2}{3}} + 3t^{\frac{4}{3}} - t^2)\,dt \\
&= 8\left[\, t - \frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}t^3 \,\right]_0^1 = \frac{128}{105} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{V = \frac{128}{105}\pi}
\end{aligned}$$

別解 $(*)$ より　$\dfrac{dx}{d\theta} = -24\cos^2\theta\sin\theta$

x	$0 \longrightarrow 8$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^8 y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6\theta(-24\cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta)^3\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - 3\cos^4\theta + 3\cos^6\theta - \cos^8\theta)\sin\theta\,d\theta \\
&= 24\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{3}{5}\cos^5\theta - \frac{3}{7}\cos^7\theta + \frac{1}{9}\cos^9\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{105}
\end{aligned}$$

2014 年 名大理系

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える．t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ．

解答 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線は

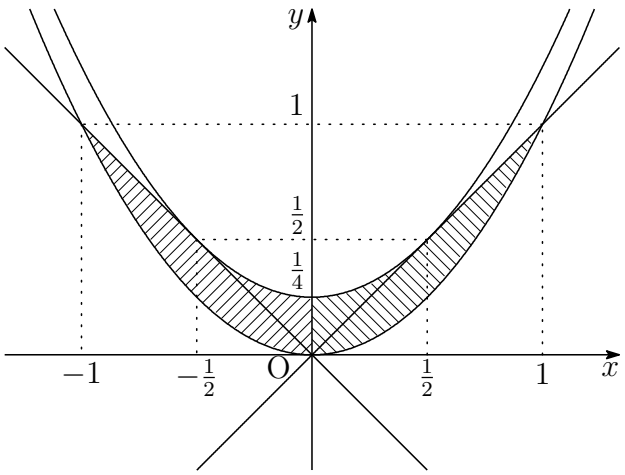
$$y - t^2 = \frac{(t+1)^2 - t^2}{(t+1) - t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (2t+1)x - t^2 - t \quad \cdots ①$$

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2t - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = t + \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

①，② から t を消去すると　　$y = x^2 + \dfrac{1}{4}$　$\cdots (*)$

$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき，線分 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ が通過してできる図形は，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む．



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_0^1 (x-x^2)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(x^2+\frac{1}{4}\right) - x \right\} dx \\ &= \int_0^1 x(1-x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} + \left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S = \dfrac{5}{12}}$

2014 年 東大文系

座標平面の原点を O で表す．
線分 $y = \sqrt{3}\,x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}\,x$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする．

(1) s を $-3 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2) D を図示せよ．

解答　(1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leqq p \leqq 2, -2 \leqq q \leqq 0)$，

$$\mathrm{OP} = 2p, \quad \mathrm{OQ} = -2q$$

$\mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = 6$ であるから　$2p + (-2q) = 6$　ゆえに　$q = p - 3$

したがって　$0 \leqq p \leqq 2,\ -3 \leqq p - 3 \leqq 0$　すなわち　$0 \leqq p \leqq 2$

2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y - \sqrt{3}p = \frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x - p)$$

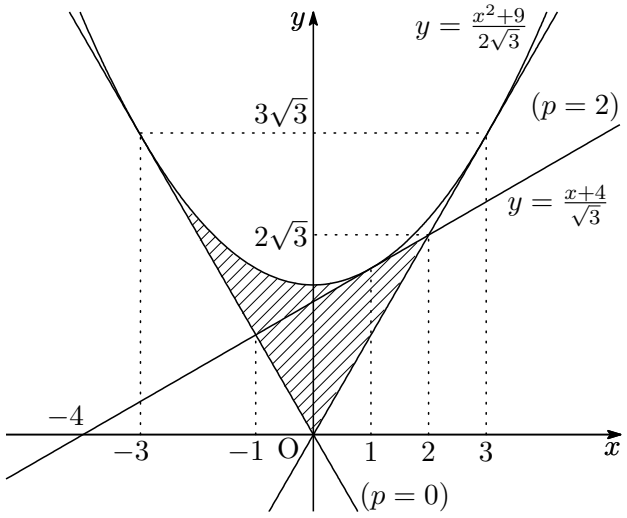
すなわち　$y = \dfrac{(2p-3)x - 2p^2 + 6p}{\sqrt{3}}$　$\cdots$①

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dp} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dp} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x - 4p + 6) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 2p - 3 \quad \cdots ②$$

①，② から p を消去すると　$y = \dfrac{x^2 + 9}{2\sqrt{3}}$　$\cdots (*)$

D は，$0 \leqq p \leqq 2$ のとき，2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分 PQ(直線 ①) が通過する領域であるから，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む.



よって，$0 \leqq s \leqq 2$ をみたす点 $(s,\ t)$ が D にあるとき

$$\boldsymbol{-3 \leqq s \leqq 0 \text{ のとき}} \quad \boldsymbol{-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s^2 + 9}{2\sqrt{3}}}$$

$$\boldsymbol{0 \leqq s \leqq 1 \text{ のとき}} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s^2 + 9}{2\sqrt{3}}}$$

$$\boldsymbol{1 \leqq s \leqq 2 \text{ のとき}} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s + 4}{\sqrt{3}}}$$

(2) 領域 D は (1) で示した領域.

2014 年 東大理系

座標平面の原点を O で表す.
線分 $y=\sqrt{3}\,x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}\,x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする.

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ.

(2) D を図示せよ.

解答　(1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leqq p \leqq 2, -2 \leqq q \leqq 0)$,

$$\mathrm{OP}=2p, \quad \mathrm{OQ}=-2q$$

$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ であるから　$2p+(-2q)=6$　ゆえに　$q=p-3$

したがって　$0 \leqq p \leqq 2,\ -2 \leqq p-3 \leqq 0$　すなわち　$1 \leqq p \leqq 2$

2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y-\sqrt{3}p=\frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x-p)$$

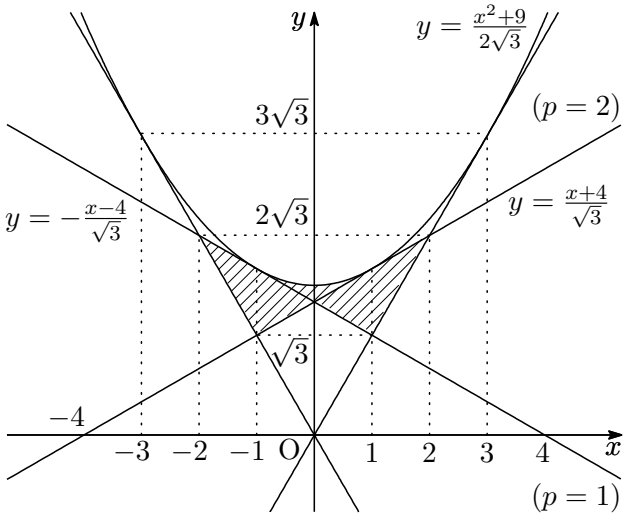
すなわち　$y=\dfrac{(2p-3)x-2p^2+6p}{\sqrt{3}}$　$\cdots$①

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dp}=0$ であるから

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-4p+6)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=2p-3 \quad \cdots②$$

①，② から p を消去すると　$y=\dfrac{x^2+9}{2\sqrt{3}}$　$\cdots(*)$

D は，$1 \leqq p \leqq 2$ のとき，2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分 PQ(直線 ①) が通過する領域であるから，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む.



よって，$0 \leqq s \leqq 2$ をみたす点 $(s,\ t)$ が D にあるとき

$$\boldsymbol{0 \leqq s \leqq 1} \text{ のとき } \quad \boldsymbol{-\frac{s-4}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}}$$

$$\boldsymbol{1 \leqq s \leqq 2} \text{ のとき } \quad \boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s+4}{\sqrt{3}}}$$

(2) 領域 D は (1) で示した領域.

3.2　積分法 (数学 III)

3.2.1　積分公式 (ベータ関数)

m，n を 0 以上の整数とする．

$$I(m,n)=\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

とおくと，部分積分法により

$$\begin{aligned}
I(m,n)&=\frac{1}{m+1}\int_0^1 (t^{m+1})'(1-t)^n\,dt\\
&=\left[\ \frac{1}{m+1}t^{m+1}(1-t)^n\ \right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{n-1}\,dt\\
&=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)\\
&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}I(m+n,0)\\
&=\frac{m!n!}{(m+n)!}\int_0^1 t^{m+n}\,dt=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}
\end{aligned}$$

この結果を利用すると

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$$

について，$x=\alpha+(\beta-\alpha)t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\beta-\alpha$

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

このとき　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$

よって　$\boldsymbol{\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

3.3 積分法の応用 (数学 III)

3.3.1 不等式の証明

九大理系 2002 年 3

次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数 x，y に対して，不等式

$$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2) a，b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) a，b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $\displaystyle M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。

解答　(1) y を固定して，$h(x) = x\log x - (\log y + 1)x + y$ とおくと

$$\begin{aligned} h'(x) &= \log x + 1 - (\log y + 1) \\ &= \log x - \log y \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	y	$\cdots$
$h'(x)$	／	$-$	0	$+$
$h(x)$	／	↘	0	↗

$h'(x) = 0$ とすると　$x = y$

$h(x)$ の増減表は，右のようになる．

$h(x) \geqq 0$ であるから　$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$

また，等号が成り立つのは，$x = y$ のときに限る．

(2) 閉区間 $[a,\ b]$ で $f(x) > 0$，$g(x) > 0$ であるから，(1) の結果より

$$f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x) \geqq 0$$

したがって

$$\int_a^b \{f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x)\}\,dx \geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b \{-f(x) + g(x)\}\,dx = 0$ を上式に代入すると

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つ．

(3) $\displaystyle M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ より　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b M\,dx$

したがって，(2) の結果に $g(x) = M$ を代入して成り立ち，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log M\,dx = \log M\int_a^b f(x)\,dx$$

上式の両辺を $b - a > 0$ で割ると

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \log M \times \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = M\log M$$

が成り立つ．

解説

(1) の結果 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ について，x と y を入れ換えた

$$y\log y - y\log x - y + x \geqq 0$$

の両辺を y で割ると

$$\log y - \log x - 1 + \frac{x}{y} \geqq 0$$

ここで，$a_k > 0,\ p_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ に対し，

$$M = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n$$
$$f(x) = \log M - \log x - 1 + \frac{x}{M}$$

とおくと，$x > 0$ について $f(x) \geqq 0$ が成り立つ．また，等号が成り立つのは，$x = M$ のときに限る．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p_k f(a_k) &= \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\log M - \log a_k - 1 + \frac{a_k}{M}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \log M - p_k \log a_k - p_k + \frac{p_k a_k}{M}\right) \\ &= \log M - \sum_{k=1}^{n} \log {a_k}^{p_k} - 1 + \frac{M}{M} \\ &= \log M - \log \left({a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}\right)\end{aligned}$$

$p_k f(a_k) \geqq 0\ (k = 1, 2, \cdots n)$ であるから (等号が成り立つのは，$a_k = M$ のとき)

$$\log M - \log \left({a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}\right) \geqq 0$$

したがって

$$\boldsymbol{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n \geqq {a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき)．

とくに，$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$$

大分大学 2015 年 8

正の実数 $p_i,\ q_i\ (i=1,2,\cdots,\ n)$ が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ を満たすとき，次の問いに答えなさい．

(1) 不等式 $\log x \leqq x-1$ が成り立つことを証明しなさい．

(2) 不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$ が成り立つことを証明しなさい．

(3) $\displaystyle F = \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ の最小値を求めなさい．

(4) 正の実数 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ に対して，$\displaystyle G = \sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i$ の最小値を求めなさい．

解答 (1) $f(x) = x - 1 - \log x$ とおくと　$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

したがって　$f(x) \geqq 0$　すなわち　$x - 1 - \log x \geqq 0$

よって　　$\log x \leqq x - 1$

(2) (ギブスの不等式 (Gibbs' inequality))

(1) の結果から

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{p_i} \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i) = 0$$

よって　　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i \quad \cdots ①$

また，① の等号が成立するのは，

$$\frac{q_i}{p_i} = 1 \quad \text{すなわち} \quad p_i = q_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(3) $c=\sum_{i=1}^{n} p_i q_i$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i - \log c = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{c} \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{c} - 1\right) = 0$$

したがって　　$\log c \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i \quad \cdots ②$

また，② の等号が成立するのは

$$\frac{q_i}{c} = 1 \quad \text{すなわち} \quad q_i = c = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

①，② から　　$\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{n} = \log \frac{1}{n} \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$

よって，F は，$p_i = \frac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\log \frac{1}{n}}$ をとる．

(4) $A=\sum_{i=1}^{n} a_i$，$p_i = \frac{a_i}{A}$ とおくと，(3) の結果から

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i = \sum_{i=1}^{n} A p_i \log A p_i \\ &= A \sum_{i=1}^{n} p_i (\log A + \log p_i) \\ &= A \log A + A \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \\ &\geqq A \log A + A \log \frac{1}{n} = A \log \frac{A}{n} \end{aligned}$$

よって　　$G \geqq A \log \frac{A}{n} \quad \cdots (*)$

(3) の結果から，$(*)$ で等号が成立するのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき．

ここで，$g(x) = x \log x$ とおくと　$g'(x) = 1 + \log x$

$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

したがって

$$A\log\frac{A}{n} = n\times\frac{A}{n}\log\frac{A}{n}$$
$$= n\times g\left(\frac{A}{n}\right) \geqq n\times g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{n}{e}$$

よって $$A\log\frac{A}{n} \geqq -\frac{n}{e} \quad \cdots(**)$$

$(**)$ で等号が成立するのは，$\dfrac{A}{n} = \dfrac{1}{e}$ のとき．

$(*)$，$(**)$ から $$G \geqq A\log\frac{A}{n} \geqq -\frac{n}{e}$$

とくに，$G = -\dfrac{n}{e}$ となるのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，$\dfrac{A}{n} = \dfrac{1}{e}$ より

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{e}$$

のときである．よって，求める G の最小値は $\quad \boldsymbol{-\dfrac{n}{e}}$

別解 (4) で用いた $g(x)$ により

$$G = \sum_{i=1}^{n} a_i\log a_i = \sum_{i=1}^{n} g(a_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{n}{e}$$

よって $$G \geqq -\frac{n}{e}$$

上式において，等号が成立するのは

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{e}$$

のときである．よって，求める G の最小値は $\quad \boldsymbol{-\dfrac{n}{e}}$

東大理系 2016 年 1

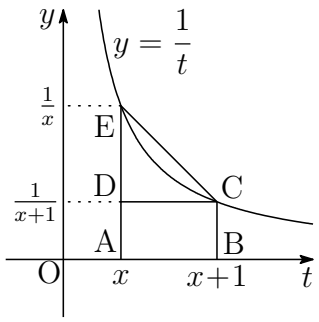
e を自然対数の底，すなわち $e = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ とする．すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

解答 $f(x)=x\{\log(x+1)-\log x\}$，$g(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x)&=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\\ &=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{x+1},\\ g'(x)&=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\\ &=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\end{aligned}$$

区間 $x\leqq t\leqq x+1$ における $y=\dfrac{1}{t}$ のグラフと t 軸で囲まれた部分の面積，右の図の長方形 ABCD および台形 ABCE の面積の大小関係から



$$\frac{1}{x+1}<\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$$

したがって　　$f'(x)>0$，$g'(x)<0$

$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x)<\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$$

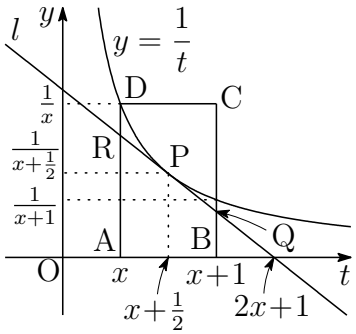
また　　$\lim\limits_{x\to\infty}\{g(x)-f(x)\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$

すなわち　　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$

$g(x)$ は単調減少であるから　　$g(x)>\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$

したがって　$f(x)<1<g(x)$　　よって　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

別解 曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ の点 $\mathrm{P}\left(x+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$ における接線を l とし $(x>0)$，l と直線 $t=x$，$t=x+1$ との交点をそれぞれ R，Q とする．右の図のように $x \leqq t \leqq x+1$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ および t 軸で囲まれた図形の面積と 2 つの四角形 ABCD および ABQR の面積との大小関係により



$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}}<\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x+\frac{1}{2}}<\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$$

したがって $\quad \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<1<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

よって $\quad \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

補足 上の図から，$x>0$ のとき $\quad \dfrac{1}{x+1}<\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{x}$

別解と同様にして[3] $\quad \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

$h(x)=(x+1)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと，上の図に注意して

$$h'(x)=\log(x+1)-\log x+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{x}<0$$

$f(x)$ は単調増加，$h(x)$ は単調減少であるから，前ページと同様の議論により

$$f(x)<1<h(x), \quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}h(x)=1$$

$F(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，$H(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}H(x)=e$$

$F(x)=H(-x-1)$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}H(-x-1)=\lim_{x\to\infty}H(x-1)=e$$

$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=e$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=e$ であるから $\quad \lim\limits_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

[3]数列の証明は，http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf の p.9 を参照．

東大理系 2010 年 2

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$$

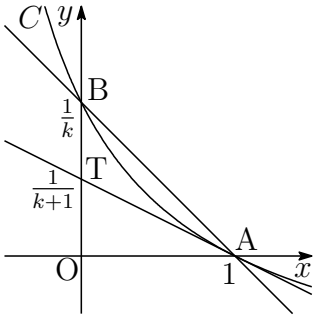
(2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ．

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

解答 (1) $y = \dfrac{1-x}{k+x}$ のグラフを C とすると $(k>0)$

$$y' = -\frac{k+1}{(k+x)^2}, \quad y'' = \frac{2(k+1)}{(k+x)^3}$$

$x=1$ のとき　　$y' = -\dfrac{1}{k+1}$



C 上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right)$ をとる．C の点 A における接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{k+1}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{x}{k+1} + \frac{1}{k+1}$$

この接線と y 軸との交点を T とすると　T$\left(0,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$

$0 < x < 1$ のとき，$y'' < 0$ であるから，△OAB および △OAT と C のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積を比較すると

$$\triangle\mathrm{OAT} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \triangle\mathrm{OAB}$$

すなわち　　$\dfrac{1}{2(k+1)} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$

別解 自然数 k に対して，$0 < x < 1$ のとき

$$\frac{1-x}{k+1} < \frac{1-x}{k+x} < \frac{1-x}{k}$$

よって　　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k+1}dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k}dx$

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$$

(2) $$\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{1+k}{k+x} - 1\right) dx = \Big[\ (1+k)\log(k+x) - x\ \Big]_0^1$$
$$= (k+1)\log\frac{k+1}{k} - 1$$

上式および (1) の結果から

$$\frac{1}{2(k+1)} < (k+1)\log\frac{k+1}{k} - 1 < \frac{1}{2k}$$
$$\frac{1}{2(k+1)^2} < \log\frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)}$$

また，$\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)} < \dfrac{1}{2(k+1)^2}$ であるから

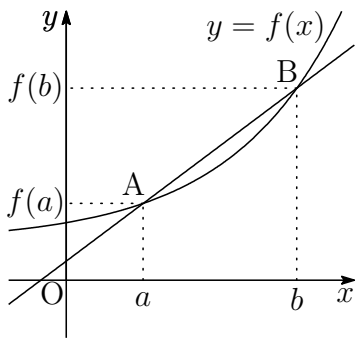
$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)} < \log\frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)}$$

したがって，$m > n$ である自然数 m と n に対して

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2k(k+1)} < \sum_{k=n+1}^{m} \left(\log\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\right) < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2(k-1)k}$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) < \sum_{k=n+1}^{m} \log\frac{k}{k-1} - \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} < \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) < \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)$$

よって $\quad \dfrac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\dfrac{m}{n} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$

解説 $f''(x) > 0$，$a < b$ とする．曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を結ぶ直線の方程式は



$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

このとき

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) - f(x)$$

とおくと

$$g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x), \quad g''(x) = -f''(x) < 0$$

$g(a) = g(b) = 0$ であるから，ロルの定理により

$$g'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する．
$g''(x) < 0$ より $g'(x)$ は単調減少であるから，c は唯一存在する．
したがって，$a \leqq x \leqq b$ における $g(x)$ の増減表は

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	極大	↘	0

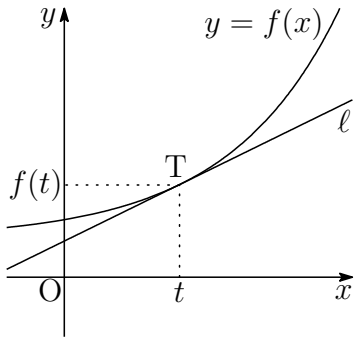
$a < x < b$ において，$g(x) > 0$ であるから，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) > f(x)$$

よって，この区間において，直線 AB は曲線 $y = f(x)$ の上側にある．

$f''(x) > 0$，t は定数とする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$



$h(x) = f(x) - f'(t)(x - t) - f(t)$ とおくと

$$h'(x) = f'(x) - f'(t), \quad h''(x) = f''(x) > 0$$

$h''(x) > 0$ より $h'(x)$ は単調増加であるから，$h(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	t	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

したがって，$h(x)$ は，最小値 $h(t) = 0$ をとるから，$h(x) \geqq 0$ より

$$f(x) \geqq f'(t)(x - t) + f(t) \quad \cdots(*)$$

よって，接線 ℓ は曲線 $y = f(x)$ の上側にはない．

補足 部分積分法を用いて $(*)$ を証明することができる．

$$\begin{aligned} f(x) - f(t) &= \int_t^x f'(u)\,du = -\int_t^x (x-u)' f'(u)\,du \\ &= -\Big[\ (x-u)f'(u)\ \Big]_t^x + \int_t^x (x-u)f''(u)\,du \\ &= f'(t)(x-t) + \int_t^x (x-u)f''(u)\,du \end{aligned}$$

したがって　　$f(x) - f'(t)(x-t) - f(t) = \displaystyle\int_t^x (x-u)f''(u)\,du \quad \cdots(**)$

(i) $t \leqq u \leqq x$ のとき，$(x-u)f''(u) \geqq 0$ であるから

$$\int_t^x (x-u)f''(u)\,du \geqq 0 \quad \cdots①$$

(ii) $x \leqq u \leqq t$ のとき，$(u-x)f''(u) \geqq 0$ であるから

$$\int_t^x (x-u)f''(u)\,du = \int_x^t (u-x)f''(u)\,du \geqq 0 \quad \cdots②$$

$(**)$，①，② より，$(*)$ が成立する．

東北大理系 2021 年 6

以下の問いに答えよ．

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ．

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ．必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい．

解答　(1)　$I_k(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!}e^x\,dx$ とすると (k は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned} I_k(a) &= -\int_0^a \left\{\frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}\right\}' e^x\,dx \\ &= -\left[\ \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}e^x\ \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!}(e^x)'\,dx \\ &= \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} + I_{k+1}(a) \end{aligned}$$

$I_k(a)-I_{k+1}(a)=\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}$ より，正の整数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1}\{I_k(a)-I_{k+1}(a)\}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$I_0(a)-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}$$

$I_0(a)=\displaystyle\int_0^a e^x\,dx=e^a-1$ であるから

$$e^a-1-I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\quad\text{ゆえに}\quad e^a=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}+I_n(a)\qquad(*)$$

よって　$e^a=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}+\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$

(2)　$0\leqq x\leqq a$ において，$1\leqq e^x\leqq e^a$ であるから

$$\frac{(a-x)^n}{n!}\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\frac{(a-x)^n}{n!}e^a$$

したがって

$$\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq e^a\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}\,dx$$

$$-\left[\ \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\ \right]_0^a\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq-e^a\left[\ \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\ \right]_0^a$$

よって　$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

(3) (2) の結果から　　$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq I_n(a) \leqq \dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

$(*)$ から　　$I_n(a) = e^a - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$

上の 2 式に $a = 1$ を代入すると

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqq I_n(1) \leqq \frac{e}{(n+1)!}, \quad I_n(1) = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (**)$$

$(**)$ の第 1 式から，$I_n(1) > 0$

$(**)$ の第 2 式から，$I_n(1)$ は単調減少列である．

$(**)$ の第 1 式に $n = 5,\ 6$ を代入すると

$$10^{-3} < \frac{1}{720} = \frac{1}{6!} < I_5(1) < \frac{e}{6!},$$
$$\frac{1}{7!} < I_6(1) < \frac{e}{7!} = \frac{3}{5040} < 10^{-3}$$

上の 2 式から　　$I_6(1) < 10^{-3} < I_5(1)$

したがって，不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n は　　$\boldsymbol{n = 6}$

解説 a を定数，n を自然数とする．$f(x)$ を n 回微分可能な関数とし

$$J_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt$$

とおくと

$$\begin{aligned} J_k(x) &= -\int_a^x \left\{ \frac{(x-t)^k}{k!} \right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$J_k(x) - J_{k+1}(x) = \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ であるから，$n \geqq 2$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n-1} \{J_k(x) - J_{k+1}(x)\} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$$J_1(x) - J_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$J_1(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ であるから

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + J_n(x)$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると，$J_n(x)$ は

$$\frac{(x-a)^n}{n!} M \text{ と } \frac{(x-a)^n}{n!} m$$

の間の値をとるから，この積分区間を I とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c), \qquad c \in I$$

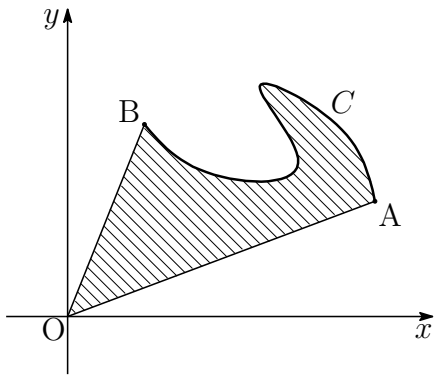
を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．$n = 1$ のとき，平均値の定理により，上式は成立する．したがって，すべての自然数について上式は成立する．

3.3.2　ガウス・グリーンの定理

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



証明 O を原点とする．C 上の 2 点 $\mathrm{P}(f(t),\ g(t))$，$\mathrm{Q}(f(t+\Delta t),\ g(t+\Delta t))$ をとり (OQ の偏角 > OP の偏角)，△OPQ の面積を ΔS とすると

$$\begin{aligned} 2\Delta S &= f(t)g(t+\Delta t) - f(t+\Delta t)g(t) \\ &= f(t)\{g(t+\Delta t) - g(t)\} - \{f(t+\Delta t) - f(t)\}g(t) \\ \frac{2\Delta S}{\Delta t} &= f(t)\cdot\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} - \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\cdot g(t) \end{aligned}$$

$\Delta t \to 0$ とすると　　$2\dfrac{dS}{dt} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$

$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$

証終

阪大理系 2022 年 5

座標平面において，t を媒介変数として

$$x = e^t\cos t + e^{\pi},\quad y = e^t\sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

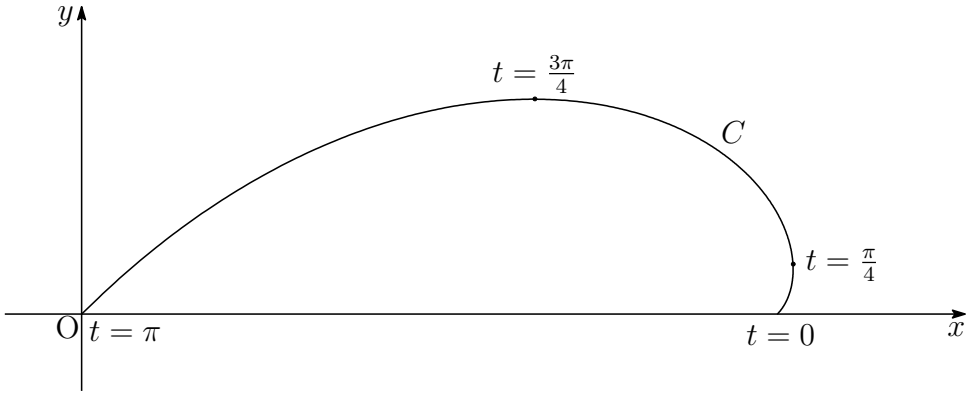
解答 $C : x = e^t \cos t + e^{\pi},\ y = e^t \sin t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t) = \sqrt{2}e^t \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) = \sqrt{2}e^t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	(x_0, y_0)	$\cdots$	$(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}})$	$\cdots$	$(x_{\frac{3\pi}{4}}, y_{\frac{3\pi}{4}})$	$\cdots$	$(0, 0)$

ただし　$(x_0, y_0) = (1 + e^{\pi},\ 0)$，$(x_{\frac{\pi}{4}}, y_{\frac{\pi}{4}}) = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^{\pi},\ \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$，

$(x_{\frac{3\pi}{4}},\ y_{\frac{3\pi}{4}}) = \left(-\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^{\pi},\ \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$



$x = f(t),\ y = g(t)$ とし，求める面積を S とすると

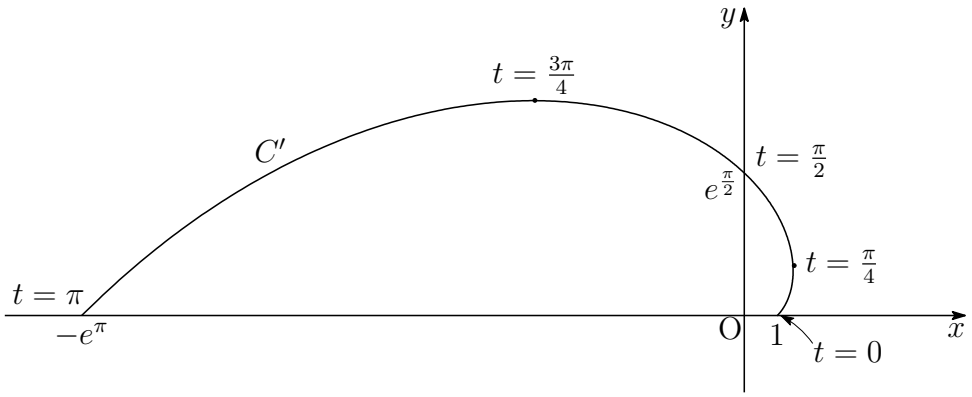
$$\begin{aligned} S &= \int_{f(\pi)}^{f(\frac{\pi}{4})} y\,dx - \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{4})} y\,dx = -\int_{f(0)}^{f(\pi)} y\,dx \\ &= -\int_0^{\pi} g(t)f'(t)\,dt = -\int_0^{\pi} e^t \sin t \cdot e^t(\cos t - \sin t)\,dt \\ &= -\int_0^{\pi} e^{2t}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1 - \cos 2t}{2}\right)dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}(\sin 2t + \cos 2t - 1)\,dt \\ &= -\frac{1}{4}\Big[\, e^{2t}(\sin 2t - 1) \,\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)} \end{aligned}$$

別解 1 (極方程式による求積法)

C を x 軸方向に $-e^{\pi}$ だけ平行移動させた曲線

$$C' : x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積を求めてもよい.



C' は O を極とする極方程式 $r = e^t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表されるから，その面積は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}\, dt = \frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)}$$

別解 2 (ガウス・グリーンの定理)

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= e^t \cos t \cdot e^t(\sin t + \cos t) - e^t(\cos t - \sin t)\cdot e^t \sin t \\ &= e^{2t} \end{aligned}$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t}\, dt = \frac{1}{4}\Big[\ e^{2t}\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)} \end{aligned}$$

補足 極座標 $x = r\cos t,\ y = r\sin t$ について

$$\begin{aligned} xy' - x'y &= r\cos t(r'\sin t + r\cos t) - (r'\cos t - r\sin t)r\sin t \\ &= r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2 \end{aligned}$$

よって，ガウス･グリーンの定理により，極方程式における面積公式が導かれる.

東工大 2016 年 5

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ．

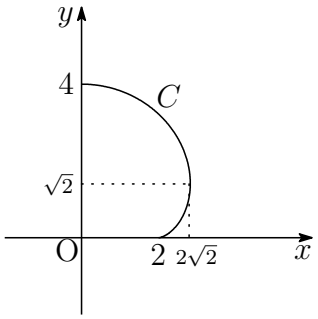
(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答 (1) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

上式を t について微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 6\cos 2t \sin t$$
$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = 6\sin 2t \sin t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$		↗	↑	↖	
(x, y)	(2,0)	$\cdots$	$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\cdots$	$(0, 4)$



C の概形は右の図のようになる．

(2) 求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^4 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)(3\cos t - 3\cos 3t)\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t - 4\cos 3t\cos t + \cos^2 3t)\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3}{2}(1+\cos 2t) - 2(\cos 4t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\right\} dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{2}\cos 2t - 2\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t\right) dt \\
&= 3\left[\, 2t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{1}{12}\sin 6t \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boldsymbol{3\pi}
\end{aligned}
$$

別解 (ガウス・グリーンの定理)

$$f(t)=3\cos t-\cos 3t,\quad g(t)=3\sin t-\sin 3t\quad \left(0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$$f'(t)=-3(\sin t-\sin 3t),\quad g'(t)=3(\cos t-\cos 3t)$$

したがって

$$\begin{aligned} f(t)g'(t)-f'(t)g(t)&=(3\cos t-\cos 3t)\cdot 3(\cos t-\cos 3t)\\ &\qquad -(-3)(\sin t-\sin 3t)(3\sin t-\sin 3t)\\ &=12(1-\cos 3t\cos t-\sin 3t\sin t)\\ &=12(1-\cos 2t)\end{aligned}$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\,dt\\ &=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt\\ &=6\left[\,t-\frac{1}{2}\sin 2t\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{3\pi}\end{aligned}$$

千葉大 2015 年 12

平面上に 2 つの円

$$C_1:x^2+y^2=1,\quad C_2:\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している．点 P_1 は C_1 上を反時計周りに一定の速さで動き，点 P_2 は C_2 上を反時計周りに一定の速さで動く．二点 P_1，P_2 はそれぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する．P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,\ 0)$ に戻り，P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする．P_1 と P_2 の中点を M とおく．P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ．

解答 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ における P_1，P_2 の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}_1(\cos t,\ \sin t), \quad \mathrm{P}_2\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t,\ \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

であり，2 点 P_1，P_2 の中点 M の座標 $(x,\ y)$ は

$$x=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t, \quad y=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

$$f(2\pi-t)=f(t), \quad g(2\pi-t)=-g(t)$$

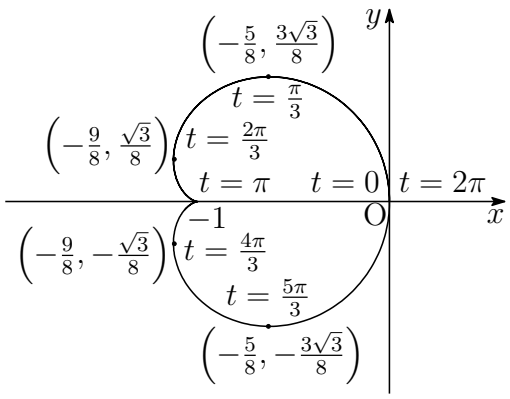
であるから，点 M が描く軌跡は x 軸に関して対称である．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\frac{1}{2}(\sin t+\sin 2t)=-\frac{1}{2}(\sin t+2\sin t\cos t)\\&=-\frac{1}{2}\sin t(1+2\cos t)\\\frac{dy}{dt}&=\frac{1}{2}(\cos t+\cos 2t)=\frac{1}{2}(\cos t+2\cos^2 t-1)\\&=\frac{1}{2}(\cos t+1)(2\cos t-1)\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq \pi$ における x，y の増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$		↖	←	↙	↓	↘	
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\cdots$	$\left(-\frac{5}{8},\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$	$\cdots$	$\left(-\frac{9}{8},\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$	$\cdots$	$(-1,0)$

点 M の軌跡は x 軸に関して対称であるから，その概形は次のようになる．



求める面積を S とすると，その図形の x 軸に関する対称性に注意して

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_{f(\frac{2\pi}{3})}^{f(0)} y\,dx - \int_{f(\frac{2\pi}{3})}^{f(\pi)} y\,dx = -\int_{f(0)}^{f(\pi)} y\,dx \\ &= -\int_0^{\pi} g(t)f'(t)\,dt \\ &= -\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\left(-\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) dt \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (2\sin^2 t + \sin^2 2t + 3\sin t \sin 2t)\,dt \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2}\cos 4t + 6\sin^2 t\cos t\right) dt \\ &= \frac{1}{8}\left[\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{8}\sin 4t + 2\sin^3 t\ \right]_0^{\pi} = \frac{3}{16}\pi\end{aligned}$$

よって，求める面積は　$S = \boldsymbol{\frac{3}{8}\pi}$

別解 M を x 軸方向に $\dfrac{3}{4}$ だけ平行移動した点 N の座標 $(x,\ y)$ は

$$x = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos 2t, \quad y = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

求める面積は，点 N の描く描く軌跡によって囲まれた図形の面積と等しい．

$$x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t, \quad y' = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t$$

上の諸式から

$$\begin{aligned}xy' - x'y &= \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos 2t\right)\left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) \\ &\qquad - \left(-\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) \\ &= \frac{1}{4}(\cos^2 t + \sin^2 t) + \frac{1}{8}(\cos^2 2t + \sin^2 2t) \\ &\qquad + \frac{3}{8}(\cos 2t\cos t + \sin 2t \sin t) = \frac{3}{8}(1 + \cos t)\end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理により

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - x'y)\,dt = \frac{3}{16}\int_0^{2\pi} (1 + \cos t)\,dt \\ &= \frac{3}{16}\left[\ t + \sin t\ \right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{\frac{3}{8}\pi}\end{aligned}$$

東大理系 2004 年 3

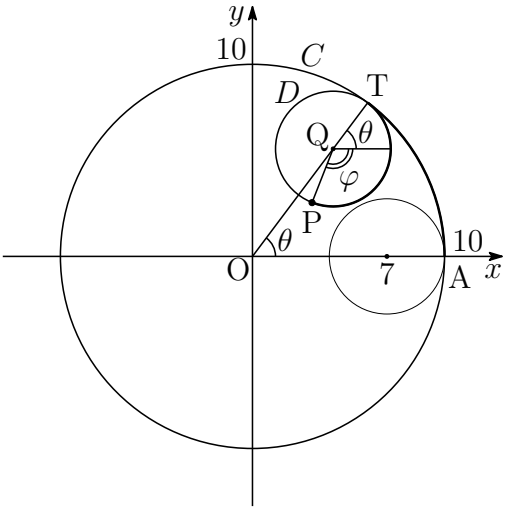
半径 10 の円 C がある．半径 3 の円板 D を，円 C に内接させながら，円 C の円周に沿って滑ることなく転がす．円板 D の周上の一点を P とする．点 P が，円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は，円 C を 2 つの部分に分ける．それぞれの面積を求めよ．

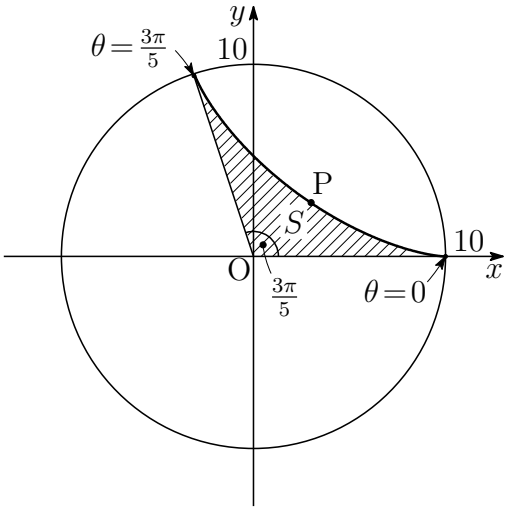
解答 左下の図のように D の中心を Q，C と D の接点を T とし，点 P が点 A$(10,\ 0)$ から D 上を φ だけ回転したとき，$\theta = \angle\mathrm{AOQ}$ とすると，C 上の $\overset{\frown}{\mathrm{AT}}$ と D 上の $\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ が等しいから

$$10\theta = 3(\theta + \varphi) \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = \frac{7}{3}\theta$$

再び点 P が C に接するとき，$\theta + \varphi = 2\pi$ であるから

$$\theta + \frac{7}{3}\theta = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{3\pi}{5}$$





このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = 7\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}\cos(-\varphi)\\ \sin(-\varphi)\end{pmatrix}$

P$(x,\ y)$ とすると　$x = 7\cos\theta + 3\cos\dfrac{7}{3}\theta, \quad y = 7\sin\theta - 3\sin\dfrac{7}{3}\theta$

右上の図の斜線部分の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{5}} \left(x\frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}y\right) d\theta$$

このとき

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y &= \left(7\cos\theta+3\cos\frac{7}{3}\theta\right)\cdot 7\left(\cos\theta-\cos\frac{7}{3}\theta\right) \\ &\qquad +7\left(\sin\theta+\sin\frac{7}{3}\theta\right)\cdot\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right) \\ &= 49(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-21\left(\sin^2\frac{7}{3}\theta+\cos^2\frac{7}{3}\theta\right) \\ &\qquad 21\left(\cos\frac{7}{3}\theta\cos\theta-\sin\frac{7}{3}\theta\sin\theta\right) \\ &= 28+21\cos\frac{10}{3}\theta \end{aligned}$$

したがって　　$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{5}}\left(28+21\cos\frac{10}{3}\theta\right)d\theta$

$$= \frac{1}{2}\left[\ 28\theta+\frac{63}{10}\sin\frac{10}{3}\theta\ \right]_0^{\frac{3\pi}{5}}=\frac{42}{5}\pi$$

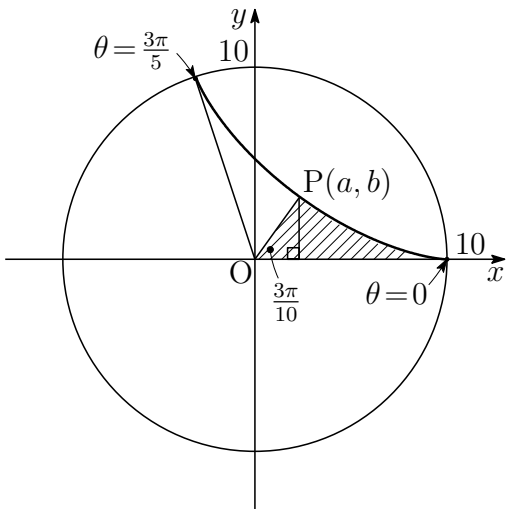
小さい部分の面積を S_1，大きい部分の面積を S_2 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{3\pi}{5}-S=30\pi-\frac{42}{5}\pi=\boldsymbol{\frac{108}{5}\pi}$$

$$S_2=\pi\cdot 10^2-S_1=100\pi-\frac{108}{5}\pi=\boldsymbol{\frac{392}{5}\pi}$$

別解 媒介変数曲線 $x=7\cos\theta+3\cos\dfrac{7}{3}\theta,\ \ y=7\sin\theta-3\sin\dfrac{7}{3}\theta$ の対称性に着目する.

$\theta=\dfrac{3}{10}\pi$ のとき，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると



$$a=7\cos\frac{3}{10}\pi+3\cos\frac{7}{10}\pi=4\cos\frac{3}{10}\pi$$

$$b=7\sin\frac{3}{10}\pi-3\sin\frac{7}{10}\pi=4\sin\frac{3}{10}\pi$$

$$\frac{1}{2}ab=8\sin\frac{3}{10}\pi\cos\frac{3}{10}\pi=4\sin\frac{3}{5}\pi$$

x	$a \longrightarrow 10$
θ	$\frac{3\pi}{10} \longrightarrow 0$

$\dfrac{dx}{d\theta}=-7\left(\sin\theta+\sin\dfrac{7}{3}\theta\right)$ より

$$\begin{aligned}
\int_a^{10} y\,dx &= \int_{\frac{3}{10}\pi}^{0}\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\cdot(-7)\left(\sin\theta+\sin\frac{7}{3}\right)\,d\theta \\
&= 7\int_0^{\frac{3}{10}\pi}\left(7\sin^2\theta-3\sin^2\frac{7}{3}\theta+4\sin\frac{7}{3}\theta\sin\theta\right)d\theta \\
&= \frac{49}{2}\int_0^{\frac{3}{10}\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta-\frac{21}{2}\int_0^{\frac{3}{10}\pi}\left(1-\cos\frac{14}{3}\theta\right)d\theta \\
&\qquad +14\int_0^{\frac{3}{10}\pi}\left(\cos\frac{4}{3}\theta-\cos\frac{10}{3}\theta\right)d\theta \\
&= \frac{49}{2}\left[\ \theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\ \right]_0^{\frac{3}{10}\pi}-\frac{21}{2}\left[\ \theta-\frac{3}{14}\sin\frac{14}{3}\theta\ \right]_0^{\frac{3}{10}\pi} \\
&\qquad +14\left[\ \frac{3}{4}\sin\frac{4}{3}\theta-\frac{3}{10}\sin\frac{10}{3}\theta\ \right]_0^{\frac{3}{10}\pi} \\
&= \frac{21}{5}\pi-4\sin\frac{3}{5}\pi
\end{aligned}$$

したがって $\qquad \dfrac{S}{2}=\dfrac{1}{2}ab+\displaystyle\int_a^{10} y\,dx=\frac{21}{5}\pi$

以下，前ページと同様.

琉球大 2024 年 [1]

a を正の実数とする．曲線 $y = \log x$ の点 $(a,\ \log a)$ における接線を l_1，点 $(2a,\ \log 2a)$ における接線を l_2 とする．次の問いに答えよ．

(1) 接線 l_1 の方程式を求めよ．

(2) l_1 と l_2 の交点の座標を求めよ．

(3) 曲線 $y = \log x$ と直線 l_1，l_2 で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．$\dfrac{S(a)}{a}$ を求めよ．

解答　(1) $y = \log x$ を微分すると　$y' = \dfrac{1}{x}$

曲線 $y = \log x$ 上の点 $(a,\ \log a)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y = \frac{1}{a}(x - a) + \log z \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{x}{a} - 1 + \log a}$$

(2) (1) の結果から，$y = \log x$ 上の点 $(2a,\ \log 2a)$ における接線 l_2 の方程式は

$$y = \frac{x}{2a} - 1 + \log 2a$$

l_1 と l_2 の 2 式から y を消去すると

$$\frac{x}{a} - 1 + \log a = \frac{x}{2a} - 1 + \log 2a \quad \text{ゆえに} \quad x = 2a \log 2$$

これを l_2 の方程式に代入すると　$y = 2\log 2 + \log a - 1$

よって，交点の座標は　$\boldsymbol{(2a \log 2,\ 2\log 2 + \log a - 1)}$

(3) $x_0 = 2a\log 2,\ y_0 = 2\log 2 + \log a - 1$ とおき，l_1 と l_2 の交点を $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$，曲線 $y = \log x$ 上の点を $\mathrm{Q}(t,\ \log t)$ とおく $(a \leqq t \leqq 2a)$．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (f(t),\ g(t))$$

とすると　$f(t) = t - x_0,\ \ g(t) = \log t - y_0$

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (t - x_0)\frac{1}{t} - (\log t - y_0) \\ &= 1 + y_0 - \frac{x_0}{t} - \log t \end{aligned}$$

よって，求める面積を S とすると，ガウス・グリーンの定理により

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_a^{2a} \left(1 + y_0 - \frac{x_0}{t} - \log t\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ (1 + y_0)t - x_0\log t - t(\log t - 1)\ \Big]_a^{2a} \\ &= \frac{1}{2}\{(1 + y_0)a - x_0\log 2 + a(1 - 2\log 2 - \log a)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(2\log 2 + \log a)a - 2a(\log 2)^2 + a(1 - 2\log 2 - \log a)\} \\ &= a\left\{\frac{1}{2} - (\log 2)^2\right\} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{S(a)}{a} = \dfrac{1}{2} - (\log 2)^2}$

東北大理系 2024 年 1

a を正の実数とし，$f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする．O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = f(x)$ の頂点を A とする．直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする．ただし，$q > 0$ とする．

(1) p，q の値を a を用いて表せ．また，$p > q$ であることを示せ．

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく．S を a を用いて表せ．

(3) (2) の S に対し，$S = \dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ．

解答　(1) $C : y = (x)$ について，$f(x) = (x-a)^2 + 3a^2$ より，頂点 A は　$(a,\ 3a^2)$

直線 OA の傾きは $3a$ であるから，その方程式は　$y = 3ax$

これと $C : y = x^2 - 2ax + 4a^2$ から y を消去すると

$$x^2 - 2ax + 4a^2 = 3ax \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)(x-4a) = 0$$

点 P は点 A と異なるから，点 P の x 座標 p は　$\boldsymbol{p = 4a}$

$f'(x) = 2x - 2a$ より C 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線は

$$y = (2q - 2a)(x - q) + q^2 - 2aq + 4a^2$$

すなわち　　$y = 2(q-a)x - q^2 + 4a^2$

これが原点を通るから $(q > 0,\ a > 0)$

$$-q^2 + 4a^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q = 2a}$$

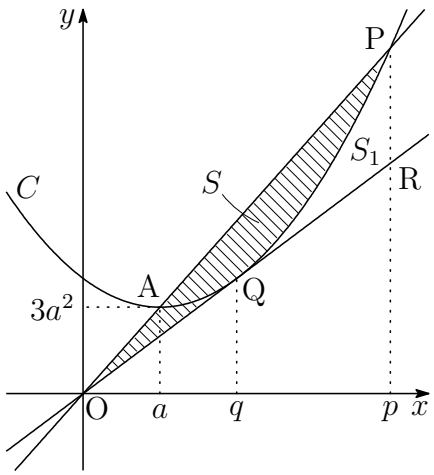
$p = 4a,\ q = 2a$ であるから $(a > 0)$　　$p > q$

(2) 曲線 $C : y = f(x)$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線 $y = 2ax$ および直線 $x = p$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする．このとき

$$f(x) = f(q) + f'(q)(x-q) + (x-q)^2$$

であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_q^p \{f(x) - f(q) - f'(q)(x-q)\}\,dx \\ &= \int_q^p (x-q)^2\,dx = \frac{1}{3}(p-q)^3 \\ &= \frac{1}{3}(4a-2a)^3 = \frac{8}{3}a^3 \end{aligned}$$



接線 OQ と直線 $x = p$ の交点を R とすると $\mathrm{P}(4a,\ 12a^2)$，$\mathrm{R}(4a,\ 8a^2)$ より

$$\begin{aligned} S &= \triangle \mathrm{OPR} - S_1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4a(12a^2 - 8a^2) - \frac{8}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{16}{3}a^3} \end{aligned}$$

(3) $S = \dfrac{2}{3}$ を (2) の結果に代入すると　$\dfrac{16}{3}a^3 = \dfrac{2}{3}$　これを解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

別解 直線 $x=2a$ と直線 OP の交点を Q′ とすると　$\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$，$\mathrm{Q}'(2a,\ 6a^2)$

$$\triangle \mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}p\cdot \mathrm{QQ}' = \frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 2a^2 = 4a^3$$

C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は，1/6 公式により

$$\frac{1}{6}(p-q)^3 = \frac{1}{6}(4a-2a)^3 = \frac{4}{3}a^3$$

よって，求める面積は　$S = 4a^2 + \dfrac{4}{3}a^3 = \boldsymbol{\dfrac{16}{3}a^3}$

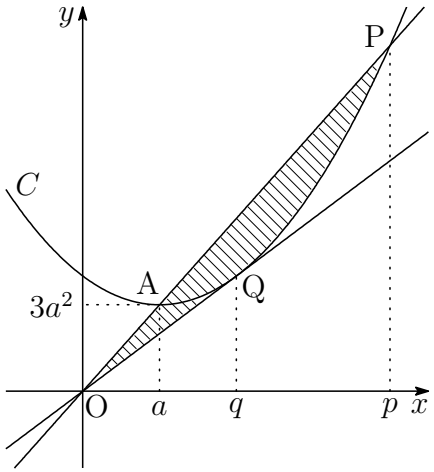
解説　　$xy' - y = x(2x-2a) - (x^2 - 2ax + 4a^2)$

$$= (x-2a)^2 + 4a(x-2a)$$

求める面積 S は (ガウス・グリーンの定理の系)

$$S = \frac{1}{2}\int_{2a}^{4a} (xy'-y)\,dx = \frac{1}{2}\int_{2a}^{4a} \{(x-2a)^2 + 4a(x-2a)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ \frac{1}{3}(x-2a)^3 + 2a(x-2a)^2\ \right]_{2a}^{4a} = \boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}$$



補足 解説の公式は，ガウス・グリーンの定理

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\}\,dt$$

の変数 t を x に変更したものである．このとき，積分区間は動径の偏角が正の向きになるようにとる．例えば，C と線分 OQ，OA で囲まれた部分の面積 S' を求める場合は次のようになる．

$$S' = \frac{1}{2}\int_{2a}^{a} (xy'-y)\,dx = \frac{1}{2}\int_{2a}^{a} \{(x-2a)^2 + 4a(x-2a)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ \frac{1}{3}(x-2a)^3 + 2a(x-2a)^2\ \right]_{2a}^{a} = \frac{5}{6}a^3$$

3.3.3　バウムクーヘン型求積法

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転した立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

バウムクーヘン型求積法は，教科書では扱っていないが，問題集・参考書では重要公式として扱われている．熊大ではバウムクーヘン型求積法を用いる出題が目立ち，近年だけでも 2014 年 (理系)，2016 年 (理系・医医) で出題されている．2016 年では理系・医医の共通問題として出題され，理系の 5 割，医医の 7 割の受験生がバウムクーヘン型求積法を用いて解答したそうである (熊大入試連絡会)．本題 (3) は多くの受験生が，(1)，(2) の出来と関係なく独立して解答できたものと予想される．勿論，教科書にない公式 (バウムクーヘン型求積法) であるからということで減点されることはなかったそうである．熊大は発展的な解法に対しても寛大である．2018 年の空間のベクトルで四面体の体積をベクトル積 (外積) を用いた解答についても間違っていなかったため，正解として減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会)．

熊大理系 2014 年 4

a を正の実数とする。xy 平面上の曲線 $C : y = e^{ax}$ の接線で，原点を通るものを l とし，C と l および y 軸で囲まれた領域を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) S を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_1 を求めよ。

(2) S を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V_2 を求めよ。

(3) $V_1 = V_2$ となるときの a の値を求めよ。

解答　(1)　$y=e^{ax}$ より　$y'=ae^{ax}$

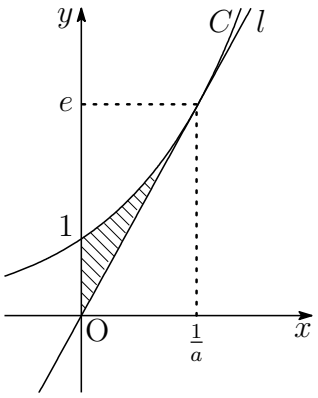
C 上の点 $(t,\ e^{at})$ における接線の方程式は

$$y-e^{at}=ae^{at}(x-t)$$

ゆえに　　$y=ae^{at}x+(1-at)e^{at}$

これが原点を通るから

$$1-at=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=\frac{1}{a}$$



l の方程式は　　$y=aex$

よって　　$V_1=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}}(e^{ax})^2\,dx-\frac{1}{3}\cdot\pi e^2\cdot\frac{1}{a}=\frac{\pi}{2a}\left[\ e^{2ax}\ \right]_0^{\frac{1}{a}}-\frac{\pi e^2}{3a}$

$$=\frac{\pi(e^2-1)}{2a}-\frac{\pi e^2}{3a}=\boldsymbol{\frac{\pi(e^2-3)}{6a}}$$

(2)　$y=e^{ax}$ より　$x=\dfrac{1}{a}\log y$

よって　　$V_2=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 e-\dfrac{\pi}{a^2}\displaystyle\int_1^e(\log y)^2\,dy$

$$=\frac{\pi e}{3a^2}-\frac{\pi}{a^2}\left[\ y\{(\log y)^2-2\log y+2\}\ \right]_1^e$$

$$=\frac{\pi e}{3a^2}-\frac{\pi(e-2)}{a^2}=\boldsymbol{\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}}$$

別解 (バウムクーヘン型求積法)

$$V_2=2\pi\int_0^{\frac{1}{a}}x(e^{ax}-aex)\,dx$$

$$=2\pi\left[\ e^{ax}\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{ae}{3}x^3\ \right]_0^{\frac{1}{a}}=\boldsymbol{\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}}$$

(3)　(1)，(2) の結果を $V_1=V_2$ に代入して

$$\frac{\pi(e^2-3)}{6a}=\frac{2\pi(3-e)}{3a^2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=\frac{4(3-e)}{e^2-3}}$$

熊大理系 2016 年 4

$x \geqq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) (1) で求めた x の値を a とする。曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3) (2) の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答　(1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ を微分すると

$$f'(x) = (\log x)'\frac{1}{x^2} + \log x\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} + \log x\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{1 - 2\log x}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ とすると　　$x = \sqrt{e}$

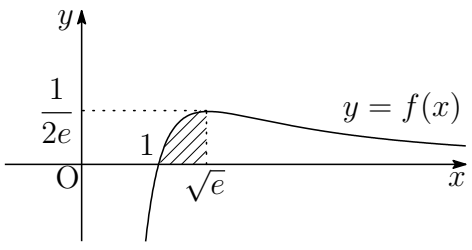
$f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ $(x \geqq 1)$ の増減表は，次のようになる．

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	極大	↘

よって，求める最大値は　　$\boldsymbol{f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2e}}$

(2) 求める面積を S とすると，(1) の結果から

$$S = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\left[\ \frac{1}{x}(\log x + 1)\ \right]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}}$$



(3) 求める立体の体積を V とすると

$$V = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)(\log x)'\,dx = \pi\left[\ (\log x)^2\ \right]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

熊大理系 2020 年 3

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，曲線 $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq V(b) - V(a) \leqq \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

を示せ。

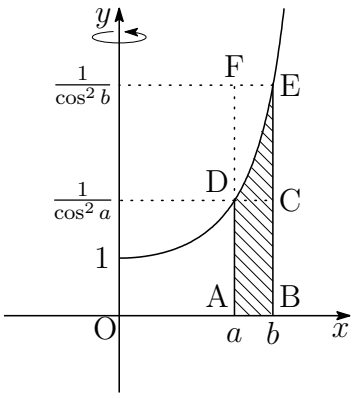
(2) (1) の不等式を用いて，$\dfrac{d}{dt}V(t) = 2\pi t\dfrac{1}{\cos^2 t}$ を示せ。

(3) $V\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ を求めよ。

解答 (1) 曲線 $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が x 軸と区間 $a \leqq x \leqq b$ において囲まれた斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は

$$V(b) - V(a)$$

右の図の長方形 ABCD，長方形 ABEF を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると



$$V_1 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a}$$
$$V_2 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} = \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

$V_1 \leqq V(b) - V(a) \leqq V_2$ であるから

$$\pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq V(b) - V(a) \leqq \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

(2) (1) の結果から，$0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$$\pi(b+a)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq \frac{V(b)-V(a)}{b-a} \leqq \pi(b+a)\frac{1}{\cos^2 b} \quad \cdots(*)$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ に対して，$(*)$ より

$0 < t < u < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 t} \leqq \frac{V(u)-V(t)}{u-t} \leqq \pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 u} \quad \cdots①$$

$0 < u < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 u} \leqq \frac{V(u)-V(t)}{u-t} \leqq \pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 t} \quad \cdots②$$

$\displaystyle\lim_{u\to t}\pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 u} = 2\pi t\frac{1}{\cos^2 t}\cdots③$，$\displaystyle\lim_{u\to t}\pi(u+t)\frac{1}{\cos^2 t} = 2\pi t\frac{1}{\cos^2 t}\cdots④$

①〜④ から，$\dfrac{d}{dt}V(t) = \displaystyle\lim_{u\to t}\frac{f(u)-f(t)}{u-t}$ は，はさみうちの原理により

$$\frac{d}{dt}V(t) = 2\pi t\frac{1}{\cos^2 t}$$

(3) (2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)'\,dx \\ &= 2\pi\Big[\, x\tan x + \log\cos x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \boldsymbol{2\pi\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2\right)} \end{aligned}$$

佐賀大学 2022 年 3

関数 $f(x)=e^{-x^2}$ について，正の定数 a は $f''(a)=0$ を満たすとする．次の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．また，関数 $f(x)$ のグラフの凹凸を調べ，変曲点を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=f(a)$ で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答　(1) $f(x)=e^{-x^2}$ より

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\quad f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

$f''(a)=0$ より $(a>0)$　$2a^2-1=0$　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

したがって，$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる．

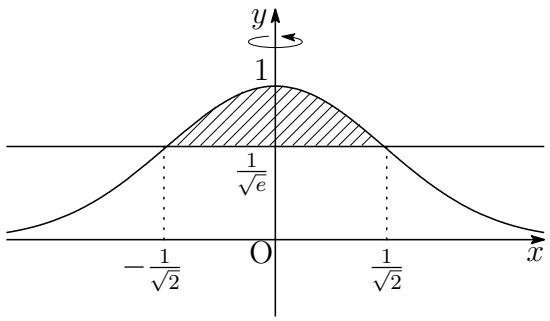
x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

変曲点は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right),\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)}$

(2) 求める回転体の体積を V とすると

$$V=2\pi\int_0^a x\{f(x)-f(a)\}\,dx=2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\left(e^{-x^2}-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)dx$$

$$=\pi\left[-e^{-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{e}}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\boldsymbol{\pi\left(1-\dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)}$$



長崎大学 2021 年 7

$a>0$ とし，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を，それぞれ以下のように定義する．

$$f(x)=e^x \quad (x \geqq 0)$$
$$g(x)=ax^2 \quad (x \geqq 0)$$

2 つの曲線 $C_1 : y=f(x)$ と $C_2 : y=g(x)$ は，ともに点 P を通り，かつ点 P において共通な直線 l に接しているものとする．点 P の x 座標が p $(p>0)$ であるとき，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) a と p の値，および直線 l の式を求めよ．

(2) $x>0$ において定義される関数 $h(x)=\log f(x)-\log g(x)$ について，$h(x)$ の増減表を作成せよ．また，$x \geqq 0$ ならば $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) 2 つの曲線 C_1 と C_2 および y 軸とで囲まれる図形 F の面積 S を求めよ．

(4) (3) の図形 F を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

解答　(1)　$f(x)=e^x$ $(x \geqq 0)$，$g(x)=ax^2$ $(x \geqq 0)$ より

$$f'(x)=e^x, \quad g'(x)=2ax$$

2 つの曲線 $C_1 : y=f(x)$ と $C_2 : y=g(x)$ が $x=p$ で接するとき

$$\begin{cases} f(p)=g(p) \\ f'(p)=g'(p) \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} e^p=ap^2 \\ e^p=2ap \end{cases}$$

$(*)$ の 2 式から e^p を消去すると　$ap^2=2ap$　ゆえに　$ap(p-2)=0$

$a>0,\ p>0$ であるから　$\boldsymbol{p=2}$　これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$e^2=4a \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=\frac{e^2}{4}}$$

C_1 上の点 $\mathrm{P}(2,\ e^2)$ における接線 l の傾きは e^2 であるから，l の方程式は

$$y-e^2=e^2(x-2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=e^2(x-1)}$$

(2) (1) の結果から　　$g(x) = \dfrac{e^2x^2}{4}$

$$h(x) = \log f(x) - \log g(x) = \log e^x - \log \frac{e^2x^2}{4}$$
$$= x - 2\log x - 2 + \log 4$$

したがって　$h'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	0	↗

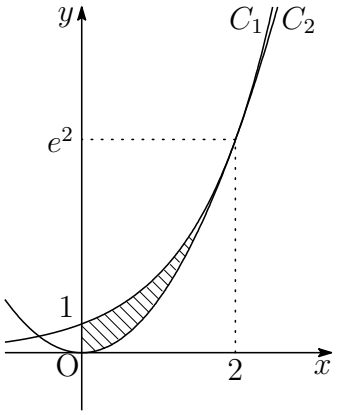
$x > 0$ のとき，$h(x) \geqq 0$ であるから

$$\log f(x) - \log g(x) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) \geqq g(x)$$

また，$f(0) = 1$，$g(0) = 0$ であるから　$x \geqq 0$ のとき　$f(x) \geqq g(x)$

(3) 求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$S = \int_0^2 \{f(x) - g(x)\}\,dx$$
$$= \int_0^2 \left(e^x - \frac{e^2x^2}{4}\right) dx$$
$$= \left[\, e^x - \frac{e^2x^3}{12} \,\right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{e^2}{3} - 1}$$



(4) 求める回転体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_0^2 x\{f(x) - g(x)\}\,dx$$
$$= 2\pi \int_0^2 \left(xe^x - \frac{e^2x^3}{4}\right) dx$$
$$= 2\pi \left[\, (x-1)e^x - \frac{e^2x^4}{16} \,\right]_0^2 = \boldsymbol{2\pi}$$

長崎大学 2014 年 8

区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x$$
$$g(x) = \cos\frac{x}{2} + c$$

と定義する．c は定数である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = 0$ 以外の点で接するように c の値を定め，接点 $(p,\ q)$ を求めよ．また，そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における関数 $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係を調べよ．

(2) 定数 c と接点 $(p,\ q)$ は (1) で求めたものとする．そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq p$ において，y 軸および 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ によって囲まれた図形を D とする．D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解答　(1)　$f(x)$，$g(x)$ を微分すると

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin x, \quad g'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の接点が $(p,\ q)$ であるから，$q = f(p) = g(p)$，$f'(p) = g'(p)$ より

$$q = \frac{1}{2}\cos p = \cos\frac{p}{2} + c \qquad \cdots ①$$
$$-\frac{1}{2}\sin p = -\frac{1}{2}\sin\frac{p}{2} \qquad \cdots ②$$

② より　$\sin\dfrac{p}{2}\left(\cos\dfrac{p}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = 0$　　$0 < p \leqq \pi$ であるから　$p = \dfrac{2}{3}\pi$

これを ① に代入すると　$q = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{3}\pi = \cos\dfrac{\pi}{3} + c$

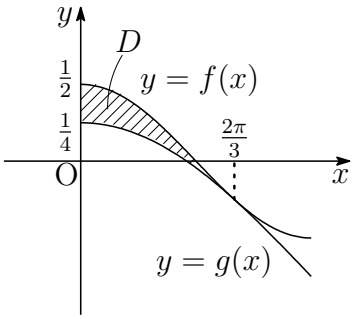
ゆえに　$q = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + c$　　よって　$\boldsymbol{(p,\ q) = \left(\dfrac{2}{3}\pi, -\dfrac{1}{4}\right)}$，　$\boldsymbol{c = -\dfrac{3}{4}}$

したがって　$f(x) - g(x) = \dfrac{1}{2}\cos x - \left(\cos\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}\right) \qquad \cdots (*)$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) - \cos\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$
$$= \left(\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$$

よって　$\boldsymbol{f(x) \geqq g(x)}$　$\left(\boldsymbol{x = \dfrac{2\pi}{3}}\text{のとき等号が成り立つ}\right)$

(2) (1) の結果から，図形 D は，下の図の斜線部分である．



したがって，求める回転体の体積 V は，$(*)$ により

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} x\{f(x)-g(x)\}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}x\cos x - x\cos\frac{x}{2} + \frac{3}{4}x\right)dx \\ &= \left[\,\frac{1}{2}(x\sin x+\cos x) - 2\left(x\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right)+\frac{3}{8}x^2\,\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{5}{4}\end{aligned}$$

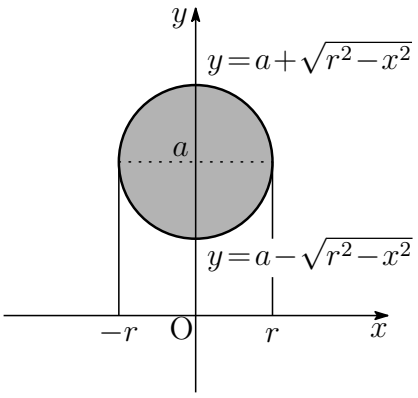
よって　　$\boldsymbol{V = \pi\left(\dfrac{\pi^2}{3} - \sqrt{3}\pi + \dfrac{5}{2}\right)}$

3.3.4　回転体の体積

例題 1 $0 < r < a$ とする．円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

解答 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ を y について解くと

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$



半円 $y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x = -r$，$x = r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_1，半円 $y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x = -r$，$x = r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とすると

$$V_1 = \pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx, \quad V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx$$

よって　　$V = V_1 - V_2 = 4\pi a \displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$

$$= 4\pi a \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = \boldsymbol{2\pi^2 r^2 a}$$

別解 $C_1 : y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$, $C_2 : y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ とする $(-r \leqq x \leqq r)$.

$x^2 + (y-a)^2 = r^2$ より　$y^2 = r^2 - x^2 - a^2 + 2ay$

$$\int_{C_1} y^2 \, dx = \int_{-r}^{r} \{(r^2 - x^2) + a^2 + 2a(y-a)\} \, dx$$
$$= \int_{-r}^{r} \{(x+r)(r-x) + a^2\} \, dx + 2a \int_{C_1} (y-a) \, dx$$
$$= \frac{2}{3}r^3 + 2a^2 r + 2a \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2}{3}r^3 + 2a^2 r + \pi r^2 a$$

$$\int_{C_2} y^2 \, dx = \int_{-r}^{r} \{(r^2 - x^2) + a^2 - 2a(a-y)\} \, dx$$
$$= \int_{-r}^{r} \{(x+r)(r-x) + a^2\} \, dx - 2a \int_{C_2} (a-y) \, dx$$
$$= \frac{2}{3}r^3 + 2a^2 r - 2a \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2}{3}r^3 + 2a^2 r - \pi r^2 a$$

ゆえに　$\dfrac{V}{\pi} = \displaystyle\int_{C_1} y^2 \, dx - \int_{C_2} y^2 \, dx = 2\pi r^2 a$　よって　$V = \boldsymbol{2\pi^2 r^2 a}$

阪大理系 2024 年 4

$a>1$ とする．xy 平面において，点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする．

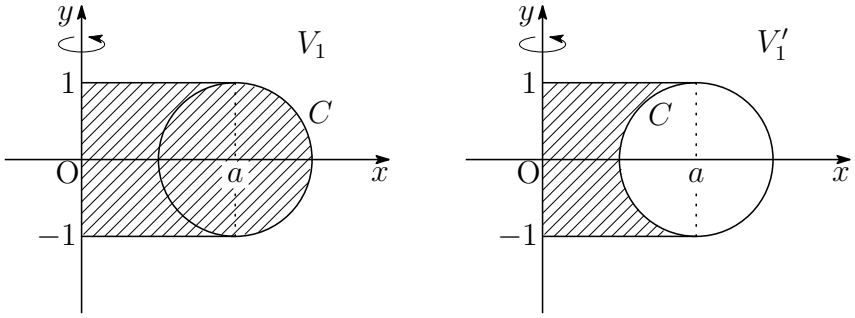
(1) 円 C の $x \geqq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y=1$，$y=-1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする．(1) における V_1 について，$V_1=2V_2$ となる a の値を求めよ．

解答　(1) 円 $C:(x-a)^2+y^2=1$ より　$x^2=-(y+1)(y-1)-a^2+2ax$

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi}&=-\int_{-1}^{1}(y+1)(y-1)\,dy-a^2\int_{-1}^{1}dy+2a\int_{-1}^{1}x\,dy\\&=\frac{1}{6}\cdot 2^3-2a^2+2a\left(2a+\frac{\pi}{2}\right)\qquad(*)\\&=\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_1=\pi\left(\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\right)}$



別解

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi}&=\int_{-1}^{1}x^2\,dy=\int_{-1}^{1}(a+\sqrt{1-y^2}\,)\,dy\\&=\int_{-1}^{1}(1-y^2+a^2+2a\sqrt{1-y^2}\,)\,dy\\&=\frac{1}{6}(1+1)^3+2a^2+2a\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_1=\pi\left(\frac{4}{3}+2a^2+\pi a\right)}$

(2) 右上の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1' とすると，$(*)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1'}{\pi} &= \frac{1}{6}\cdot 2^3 - 2a^2 + 2a\left(2a - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4}{3} + 2a^2 - \pi a\end{aligned}$$

$V_2 = V_1 - V_1'$ であるから　　$V_2 = 2\pi^2 a$

上式および (1) の結果を $V_1 = 2V_2$ に代入すると

$$\pi\left(\frac{4}{3} + 2a^2 + \pi a\right) = 2 \times 2\pi^2 a$$

整理すると　　$2a^2 - 3\pi a + \dfrac{4}{3} = 0 \quad \cdots ①$

$f(a) = 2a^2 - 3\pi a + \dfrac{4}{3}$ とすると　$f(1) = \dfrac{10}{3} - 3\pi < 0$

2 次方程式 $f(a) = 0$ は 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつことに注意して，① を解くと

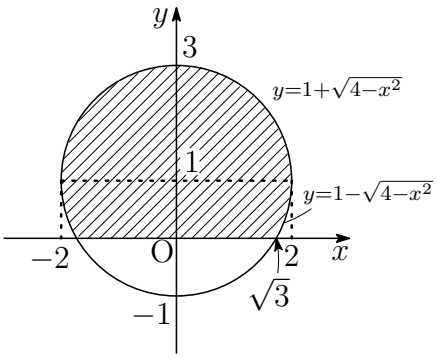
$$\boldsymbol{a = \frac{9\pi + \sqrt{81\pi^2 - 96}}{12}}$$

九大理系 2012 年 1

円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 立体は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体である．円の方程式 $x^2+(y-1)^2=4$ を y について解くと

$$y=1\pm\sqrt{4-x^2}$$



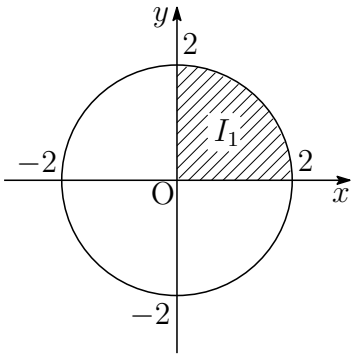
斜線部分は，y 軸に関して対称であるから，求める回転体の体積を V とすると

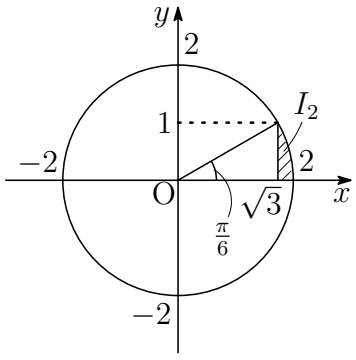
$$\begin{aligned}V&=2\left\{\pi\int_0^2(1+\sqrt{4-x^2})^2dx-\pi\int_{\sqrt{3}}^2(1-\sqrt{4-x^2})^2dx\right\}\\&=2\pi\left\{\int_0^2(5-x^2+2\sqrt{4-x^2})dx-\int_{\sqrt{3}}^2(5-x^2-2\sqrt{4-x^2})dx\right\}\\&=2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx+2\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}dx\right\}\end{aligned}$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$，$I_2=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}dx$ とおくと，これらはそれぞれ下の図の斜線部分の面積であるから

$$I_1=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2=\pi$$

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot1\\&=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$





よって

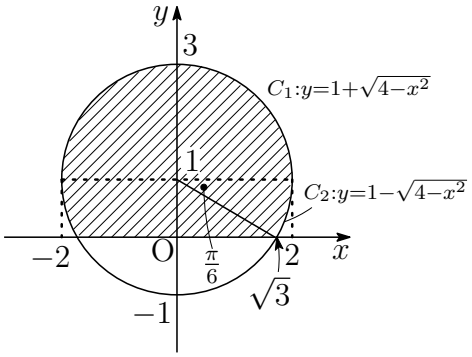
$$\begin{aligned}V&=2\pi\left\{\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+2\cdot\pi+2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{16}{3}\pi^2+6\sqrt{3}\pi}\end{aligned}$$

別解 $C_1 : y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$，$C_2 : y = 1 - \sqrt{4 - x^2}$ $(\sqrt{3} \leqq x \leqq 2)$ とする．

下の図から

$$\int_{C_1} y\,dx = \frac{1}{4}\cdot\pi 2^2 + 1\cdot 2 = \pi + 2$$

$$\int_{C_2} y\,dx = 1\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$$



$x^2 + (y-1)^2 = 4$ より，$y^2 = 3 - x^2 + 2y$ であるから

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y^2\,dx &= \int_0^2 (3 - x^2)\,dx + 2\int_{C_1} y\,dx \\ &= \left[\ 3x - \frac{x^3}{3}\ \right]_0^2 + 2(\pi + 2) = \frac{22}{3} + 2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} y^2\,dx &= \int_{\sqrt{3}}^2 (3 - x^2)\,dx + 2\int_{C_2} y\,dx \\ &= \left[\ 3x - \frac{x^3}{3}\ \right]_{\sqrt{3}}^2 + 2\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{22}{3} - 3\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_{C_1} y^2\,dx - \int_{C_2} y^2\,dx \\ &= \left(\frac{22}{3} + 2\pi\right) - \left(\frac{22}{3} - 3\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{8}{3}\pi + 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって　　$V = \boldsymbol{2\pi\left(\frac{8}{3}\pi + 3\sqrt{3}\right)}$

阪大理系 2002 年 5

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．ただし $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする．円 C_2 と x 軸との交点を A，B とし，A，B を通り y 軸と平行なと直線をそれぞれ ℓ_{A}，ℓ_{B} とする．2 直線 ℓ_{A}，ℓ_{B} ではさまれた領域の部分で，円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1，円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする．いま，D_1，D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha)$，$V_2(\alpha)$ とする．

(1) $V_1(\alpha)$，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ．

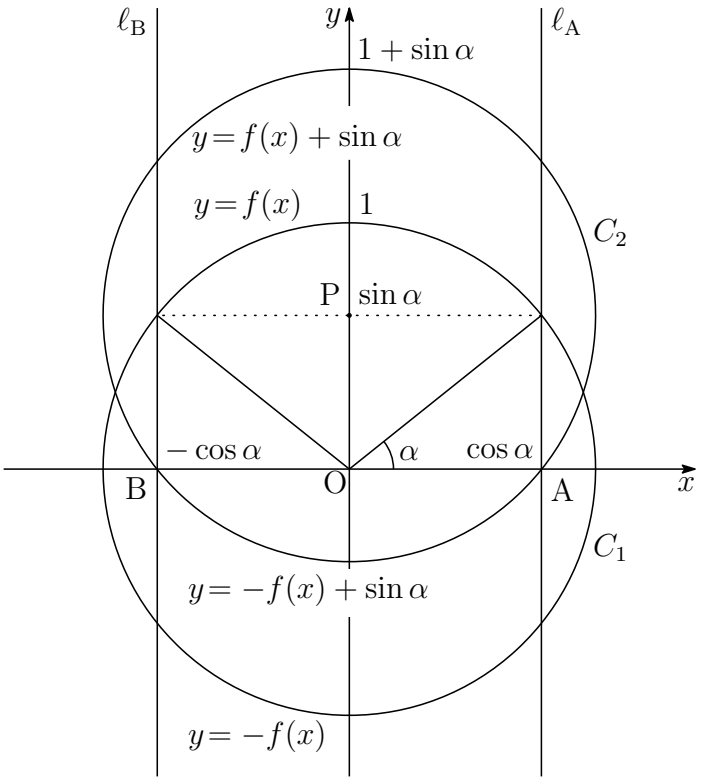
(2) α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ．

解答　(1) $-\cos\alpha \leqq x \leqq \cos\alpha$ における C_1 の x 軸の上側の曲線を $y=f(x)$ とすると

$$\begin{aligned}
\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} f(x)\,dx &= 2\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-2\alpha)\\
&= \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha+\pi-2\alpha),\\
\frac{V_1(\alpha)}{\pi} &= \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\{(f(x)+\sin\alpha)^2-f(x)^2\}dx\\
&= (2\sin\alpha)\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} f(x)\,dx+(\sin^2\alpha)\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} dx\\
&= (2\sin\alpha\cos\alpha+\pi-2\alpha)\sin\alpha+2\sin^2\alpha\cos\alpha\\
&= (4\sin\alpha\cos\alpha+\pi-2\alpha)\sin\alpha,\\
\frac{V_2(\alpha)}{\pi} &= \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\{|-f(x)|^2-|-f(x)+\sin\alpha|^2\}dx\\
&= (2\sin\alpha)\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} f(x)\,dx-(\sin^2\alpha)\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} dx,\\
\frac{V_1(\alpha)}{\pi}-\frac{V_2(\alpha)}{\pi} &= (2\sin^2\alpha)\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} dx = 4\sin^2\alpha\cos\alpha
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V_1(\alpha)=\pi(4\sin\alpha\cos\alpha+\pi-2\alpha)\sin\alpha}$

$\boldsymbol{V_1(\alpha)-V_2(\alpha)=4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha}$



(2) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$t=\cos\alpha$，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)=g(t)$ とおくと

$$g(t)=4\pi(1-t^2)t=4\pi(t-t^3)\quad(0<t<1)$$

したがって　　$g'(t)=4\pi(1-3t^2)$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗	$\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$	↘	

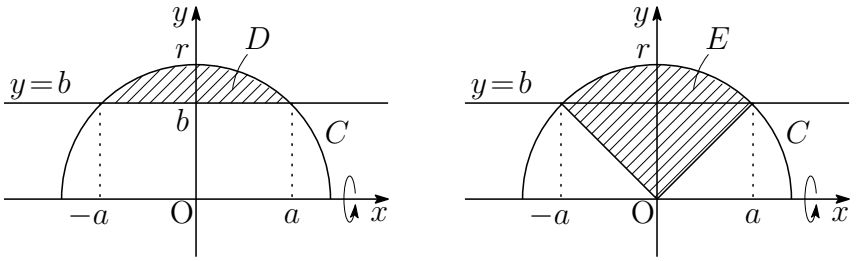
よって，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{8\pi}{3\sqrt{3}}}$ をとる．

次の結果は，求積問題おいて利用する場面が多く，非常に有効な計算方法である．

三日月形・扇形の回転体の体積

下の図の斜線部分 D, E を x 軸の周りに 1 回転された回転体の体積をそれぞれ V_D，V_E とすると

$$\boldsymbol{V_D = \frac{4}{3}\pi a^3}, \qquad \boldsymbol{V_E = \frac{4}{3}\pi r^2 a}$$



証明 V_D は (A) で証明済 (a だけで求まることが面白い).

E の下側の三角形の面積は ab，重心は $\left(0,\ \dfrac{2b}{3}\right)$ であるから，パップス・ギュルダンの定理により

$$\begin{aligned} V_E &= V_D + 2\pi\cdot ab\cdot\frac{2b}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3 + \frac{4}{3}\pi ab^2 \\ &= \frac{4}{3}\pi(a^2+b^2)a = \frac{4}{3}\pi r^2 a \end{aligned}$$

別証 (定積分を用いる解法)

$$\begin{aligned} \frac{V_E}{2\pi} &= \int_0^a \left\{(r^2-x^2) - \left(\frac{b}{a}x\right)^2\right\} dx = \left[\ r^2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{b^2}{3a^2}x^3\ \right]_0^a \\ &= r^2a - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}ab^2 = r^2a - \frac{1}{3}(a^2+b^2)a \\ &= r^2a - \frac{1}{3}r^2a = \frac{2}{3}r^2a \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_E = \frac{4}{3}\pi r^2 a}$　　**証終**

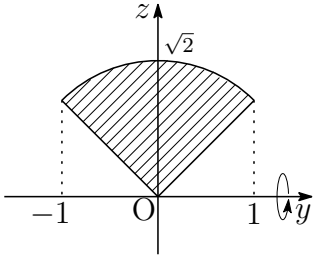
喜劇アニメ「トムとジェリー」で猫のトムが投げ飛ばされて，壁にトムの輪郭が残る場面を小さい頃よく目にしました．数学の回転の体積も壁にできた輪郭を利用して計算することも可能です．次の阪大の問題では，円すいを回転させて yz 平面 (壁) にできた輪郭 (扇形) を回転させた立体の体積として求めることができます.

2013 年 阪大理系 4

xyz 空間内の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0) を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする．円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答 右の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積であるから

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{8}{3}\pi$$



2017 年 東大理系 6

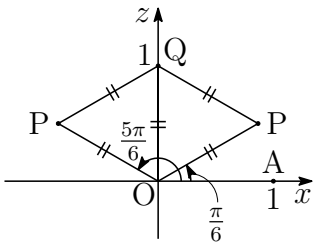
点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす．また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく．ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

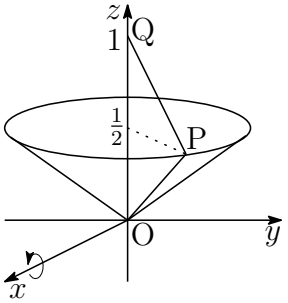
解答 (1) θ が最大または最小となるのは，zx 平面上において，P が右の図で示した位置にあるときである．$x = \cos\theta$ であるから

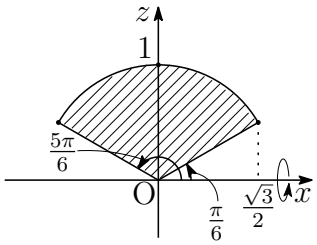
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{6}}, \quad \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上の点 (0, 0, 1) にあるとき，辺 OP は左図の円錐面を描く．点 Q を平面 $x = 0$ を動かす，すなわち，OQ を平面 $x = 0$ 上で O を中心に回転させると，この円錐面が zx 平面を通過してできる zx 平面に描く輪郭は右図の斜線部分になる．よって，求める K の体積 V は

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$





3.3.5　パップス・ギュルダンの定理

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

一般に，$a \leqq x \leqq b$ において $f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq 0$ である 2 曲線 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積を S，その重心の y 座標を h とすると

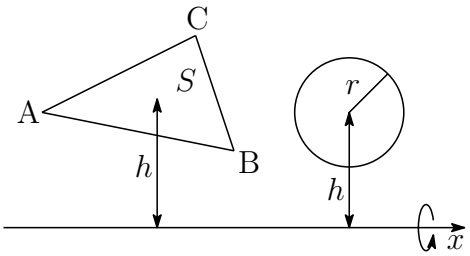
$$hS = \int_a^b \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \times \{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

$\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$ は微小区間の面積，$\dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$ はその重心を表す．
この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

よって，上の 2 式から　　$\boldsymbol{V = 2\pi hS}$
回転体の体積は，(回転による重心の軌跡の長さ) × (面積) である．

例 2 パップス・ギュルダンの定理を用いると，右の図の △ABC の面積が S，x 軸から重心までの距離が h のとき，x 軸のまわりに 1 回転した立体の体積 V は



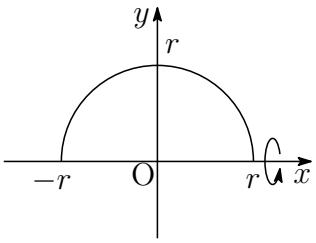
$$V = 2\pi hS$$

半径 r の円の中心と x 軸との距離が h のとき $(r < h)$，x 軸のまわりに 1 回転した立体 (solid torus) の体積 V は (torus は solid torus の表面)

$$V = 2\pi h \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 h r^2$$

図形の面積とその回転体の体積からその図形の重心を求めることができる．

例 3 右の半円は，y 軸に関して対称であるから，重心の x 座標は 0 である．また重心の y 座標 h は，x 軸のまわりに 1 回転すると，その立体 (球) の体積 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ と半円の面積 $S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$ により



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi h \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \quad \text{ゆえに} \quad h = \frac{4r}{3\pi}$$

2007 年 東北大理系

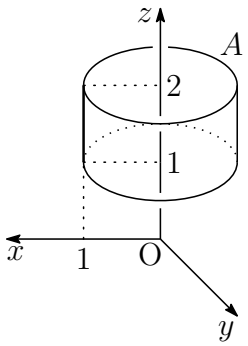
xyz 空間において，点 $(1,\ 0,\ 1)$ と点 $(1,\ 0,\ 2)$ を結ぶ線分を l とし，l を z 軸のまわりに一回転してできる図形を A とする．A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求めよ．

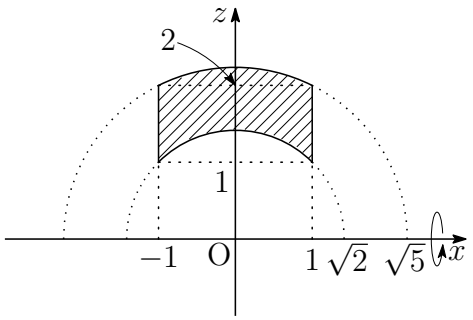
解答 A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を V とすると，V は右下の図の斜線部分を x 軸のまわり一回転してできる回転体の体積である．
zx 平面上の原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$ の同心円

$$x^2+z^2=1^2+1^2,\quad x^2+z^2=1^2+2^2$$

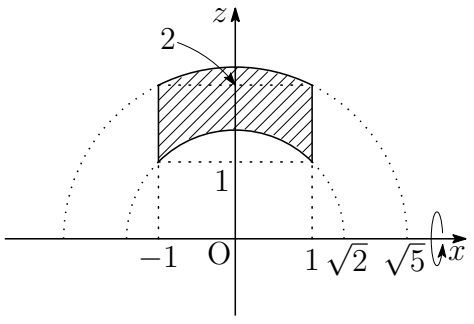
により，2 曲線 $z=\sqrt{2-x^2}$, $z=\sqrt{5-x^2}$ および 2 直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに一回転しできる回転体の体積に等しいから

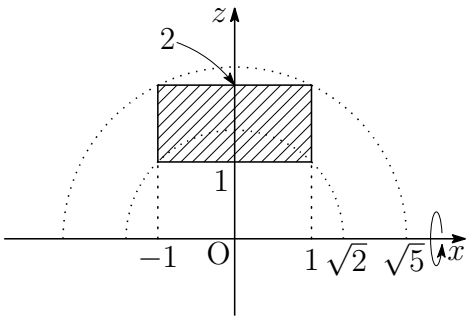
$$V=\pi\int_{-1}^{1}\{(\sqrt{5-x^2}\,)^2-(\sqrt{2-x^2}\,)^2\}dx=\pi\int_{-1}^{1}3\,dx=\mathbf{6\pi}$$





補足 曲線 $y=\sqrt{5-x^2}$ と直線 $y=2$ で囲まれた領域，曲線 $y=\sqrt{2-x^2}$ と直線 $y=1$ で囲まれた領域を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積は等しい．よって，V は右下の図の長方形を x 軸のまわり一回転させた回転体の体積に等しい．





例題 2 $f(x)=\sin x$ とするとき，曲線 $y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれ部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解 1 (基本的な積分法) 曲線 $y=\sin x$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ および $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ の部分をそれぞれ C_1，C_2 とする．C_1 および C_2 を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると，$\dfrac{dy}{dx}=\cos x$ より

$$\frac{V_1}{\pi}=\int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{2})} x^2\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$$
$$\frac{V_2}{\pi}=\int_{f(\pi)}^{f(\frac{\pi}{2})} x^2\,dy=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\frac{V_2}{\pi}-\frac{V_1}{\pi}=\int_{\pi}^{0} x^2\cos x\,dx=\int_{\pi}^{0} x^2(\sin x)'\,dx\\&=\left[\ x^2\sin x-2x(-\cos x)+2(-\sin x)\ \right]_{\pi}^{0}\\&=\left[\ (x^2-2)\sin x+2x\cos x\ \right]_{\pi}^{0}=2\pi\end{aligned}$$

よって　　$V=\boldsymbol{2\pi^2}$

解 2 (バウムクーヘン型求積法)

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=2\pi\int_0^{\pi} x(-\cos x)'\,dx\\&=2\pi\left[\ x(-\cos x)-1(-\sin x)\ \right]_0^{\pi}\\&=2\pi\left[\ -x\cos x+\sin x\ \right]_0^{\pi}=\boldsymbol{2\pi^2}\end{aligned}$$

解 3 (パップス・ギュルダンの定理)

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[\ -\cos x\ \right]_0^{\pi}=2$$

図形の重心は直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 上にあるから

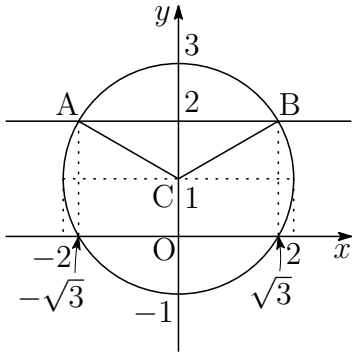
$$V=2\pi\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2=\boldsymbol{2\pi^2}$$

例題 3 次の領域 D_1 および D_2 をそれぞれ x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$$D_1 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ y \geqq 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

解答 D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．

右図において，$\angle \mathrm{ACB} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_2 = \pi\cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$y = 1+\sqrt{4-x^2}\ (-2 \leqq x \leqq 2)\cdots(*)$ とすると

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx = S_1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

D_1 および D_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする．$(*)$ より，$x^2+(y-1)^2 = 4$ であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y^2-2^2)\,dx = 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2)\,dx \\ &= 2\pi S_1 + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)\,dx \\ &= 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{6}(2\sqrt{3})^3 = 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

D_2 の境界を表す 2 曲線 $C_1 : y = f(x)$，$C_2 : y = g(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{4-x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 2 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{4-x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 0 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

とすると

$$f(x)+g(x) = 2, \quad \int_{-2}^{2} \{f(x)-g(x)\}\,dx = S_2$$

したがって

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-2}^{2} \{f(x)^2 - g(x)^2\}\, dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} \{f(x) + g(x)\}\{f(x) - g(x)\}\, dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} 2\{f(x) - g(x)\}\, dx = 2\pi \int_{-2}^{2} \{f(x) - g(x)\}\, dx \\ &= 2\pi S_2 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

補足 D_2 の重心は $(0,\ 1)$ であるから，パップス・ギュルダンの定理[4] により

$$V_2 = 2\pi S_2 \cdot 1 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right)$$

九大理系 2012 年 1

円 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 求める体積は　　$V_1 + V_2 = 2\pi \left(\frac{8\pi}{3} + 3\sqrt{3} \right)$

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 参照)

2020 年 京大特色

ブラマンジェという型にはめて作るフランス由来のお菓子がある．ここではブラマンジェが，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上の関数

$$y = \sum_{n=0}^{N} \frac{s(2^n x)}{2^n}$$

のグラフと x 軸で囲まれた領域を直線 $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転してできる立体として与えられているとする．ただし，ここで N は自然数，$s(x)$ は x から最も近い整数までの距離とする．

(1) ブランマンジェの体積を計算し，N を用いて表せ．

(2) (1) で求めた体積の $N \to \infty$ の極限を求めよ．

ただし，計算の際にパップス・ギュルダンの定理を証明無しに使ってもよい．ここでパップス・ギュルダンの定理とは次のものである．

> 面積 S の平面図形 A が，それと同一平面上の直線 l の一方の側 (直線 l を含む) のみにあるとき，その図形 A を直線 l の周りに 1 回転させてできる立体の体積は，(回転による A の重心の移動距離) $\times S$ となる．

また面積 S の平面図形 A が，区間 $a \leqq x \leqq b$ 上で，$\varphi(x) \leqq \psi(x)$ となる連続関数 $\varphi(x),\ \psi(x)$ を用いて

$$A = \{(x,\ y) \,|\, a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$$

と表せたとき，A の重心の座標は

$$\left(\frac{1}{S} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx,\ \frac{1}{S} \int_a^b \frac{\psi(x)^2 - \varphi(x)^2}{2}\, dx \right)$$

であることを証明無しに使ってもよい．

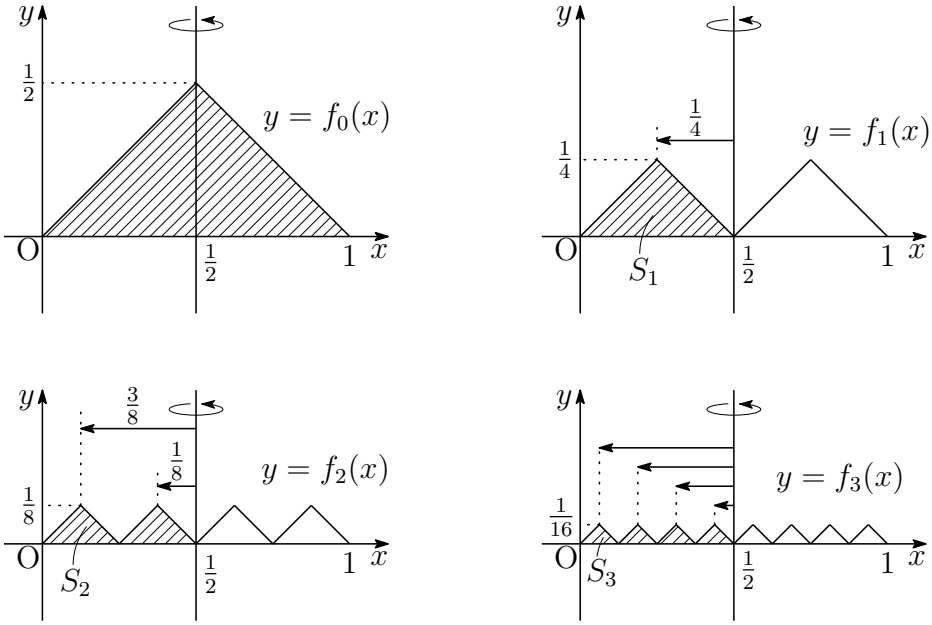
解答　(1) $s(x)$ は x から最も近い整数までの距離であるから　$0 \leqq s(x) \leqq \dfrac{1}{2}$

$f_n(x) = \dfrac{s(2^n x)}{2^n}$ とおくと，$0 \leqq s(2^n x) \leqq \dfrac{1}{2}$ より　$0 \leqq f_n(x) \leqq \dfrac{1}{2^{n+1}}$

$s(2^n(1-x)) = s(2^n - 2^n x) = s(-2^n x) = s(2^n x)$ より　$f_n(1-x) = f_n(x)$

したがって，$f_n(x)$ のグラフは直線 $x = \dfrac{1}{2}$ に関して対称である．

$n = 0, 1, 2, 3$ について，$y = f_n(x)$ のグラフは次のようになる．



$y = f_n(x)$ を直線 $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_n とする．

$$V_0 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{24}$$

例えば，V_3 は $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の区間にある 4 つの三角形 $\left(\text{面積 } S_3 = \dfrac{1}{256}\right)$ を $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転させると

$$V_3 = 2\pi S_3 \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{7}{16}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{256} \cdot 1 = \frac{\pi}{128}$$

V_n $(n \geqq 1)$ は $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の区間にある 2^{n-1} 個の三角形 $\left(\text{面積 } S_n = \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)$ を $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転させると

$$V_n = 2\pi S_n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{(2^{n-1})^2}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+4}}$$

したがって

$$V = V_0 + \sum_{n=1}^{N} V_n$$
$$= \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{32} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{5\pi}{48} - \frac{\pi}{2^{N+4}}}$$

(2) (1) の結果から

$$\lim_{N \to \infty} V = \boldsymbol{\frac{5\pi}{48}}$$

補足 $y = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{s(2^n x)}{2^n}$ は連続関数であるが，至るところで微分不可能な曲線 (**高木曲線**) として有名である．

3.3.6　斜軸回転

2024 年 長崎大学 7

原点を O とする xy 座標平面上において，放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = x$ があり，C と l で囲まれた領域の周および内部を図形 F とする．
また，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を通り，ℓ に垂直な直線を m とし，m と l の交点を Q とする．以下の問いに答えよ．

(1) 図形 F を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 直線 m の方程式および点 Q の座標を，t を用いてそれぞれ表せ．

(3) 線分 PQ の長さの平方 (PQ^2) を t を用いて表せ．

(4) 線分 OQ の長さを s とするとき，s および $\dfrac{ds}{dt}$ を，t を用いてそれぞれ表せ．

(5) 図形 F を直線 l の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．また，(1) で求めた V_1 との比 $\dfrac{V_2}{V_1}$ を求めよ．

解答　(1) 求める体積 V_1 は

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^1 \{x^2 - (x^2)^2\}\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\ \right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

よって　　$\boldsymbol{V_1 = \dfrac{2}{15}\pi}$

(2) 直線 m は点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，傾き -1 であるから

$$y = -(x - t) + t^2 \quad \text{すなわち} \quad m : y = -x + t + t^2$$

これと $l : y = x$ の共有点 Q の座標は　　$\boldsymbol{\left(\dfrac{t + t^2}{2},\ \dfrac{t + t^2}{2}\right)}$

(3) $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{t + t^2}{2},\ \dfrac{t + t^2}{2}\right)$ より

$$\mathrm{PQ}^2 = \left(t - \frac{t + t^2}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{t + t^2}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(t - t^2)^2}$$

(4) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t + t^2}{2},\ \dfrac{t + t^2}{2}\right)$ より $(0 \leqq t \leqq 1)$，$\mathrm{OQ} = \dfrac{t + t^2}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\boldsymbol{s = \frac{t + t^2}{\sqrt{2}}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1 + 2t}{\sqrt{2}}}$$

(5) s と t について

t	$0 \longrightarrow 1$
s	$0 \longrightarrow \sqrt{2}$

体積 V_2 は，(3)，(4) の結果を利用して [5]

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{\pi} &= \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{PQ}^2\,dx = \int_0^1 \mathrm{PQ}^2\frac{ds}{dt}\cdot dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t-t^2)^2}{2}\cdot\frac{1+2t}{\sqrt{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 t^3(1-t)^2\,dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2!2!}{5!}(1-0)^5 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3!2!}{6!}(1-0)^6 = \frac{1}{30\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{60}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi}$,　　$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi \Big/ \dfrac{2}{15}\pi = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{8}}$

別解　C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，l 上の点 $\mathrm{R}(t,\ t)$ をとる $(0 \leqq t \leqq 1)$.

線分 PR の中点を M とすると　　$\mathrm{M}\left(t,\ \dfrac{t^2+t}{2}\right)$

M から直線 $l : x - y = 0$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|t - \frac{t^2+t}{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{t-t^2}{2\sqrt{2}}$$

$\Delta S = \mathrm{PR}\Delta t = (t-t^2)\Delta t$ を l の周りに 1 回転させた体積 ΔV_2 は，パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem) により [6]

$$\Delta V_2 = 2\pi d\Delta S = 2\pi\cdot\frac{t-t^2}{2\sqrt{2}}\cdot(t-t^2)\Delta t = \frac{\pi t^2(1-t)^2}{\sqrt{2}}\Delta t$$

よって　$V_2 = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2!2!}{5!}(1-0)^5 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{60}\pi}$

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.
[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

2022 年 九工大後期 2

原点を O とする座標平面上の曲線 $y = x^3$ $(x \geqq 0)$ を C とし，直線 $y = ax$ $(a > 0)$ を l とする．

(4) 直線 l と曲線 C で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

解答 C 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$，l 上に点 $\mathrm{Q}(t,\ at)$ をとる $(0 \leqq t \leqq \sqrt{a})$．

線分 PQ の中点を M とすると　$\mathrm{M}\left(t,\ \dfrac{t^3+at}{2}\right)$

M から直線 $l : ax - y = 0$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|at - \frac{t^2+at}{2}|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = \frac{at - t^3}{2\sqrt{a^2+1}}$$

$\Delta S = \mathrm{PQ}\Delta t = (at - t^3)\Delta t$ を l の周りに 1 回転させた体積 ΔV は

$$\Delta V = 2\pi d\Delta S = 2\pi \cdot \frac{at - t^3}{\sqrt{a^2+1}} \cdot (at - t^3)\Delta t = \frac{\pi(at - t^3)^2}{\sqrt{a^2+1}}\Delta t$$

よって　$V = \dfrac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} (at - t^3)^2\, dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \int_0^{\sqrt{a}} (t^6 - 2at^4 + a^2t^2)\, dt$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \left[\frac{t^7}{7} - \frac{2a}{5}t^5 + \frac{a^2}{3}t^3 \right]_0^{\sqrt{a}} = \boldsymbol{\frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}}$$

2018 年 東北大理系 6

xy 平面内の図形

$$S:\begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える．図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする．

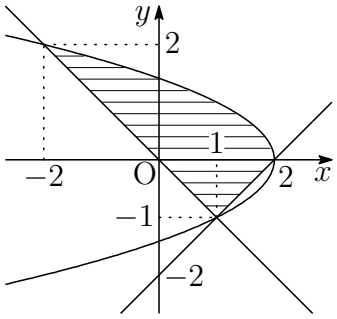
(1) S を xy 平面に図示せよ．

(2) V を求めよ．

解答 (1) xy 平面内の図形

$$S:\begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) x 軸の下側の領域 D_1 の面積を S_1 とし，D_1 の重心 $\left(1,-\dfrac{1}{3}\right)$ と直線 $x+y=0$ との距離を d_1 とすると

$$S_1=1,\quad d_1=\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

D_1 を直線 $x+y=0$ のまわりに 1 回転した回転体を体積を V_1 とすると，(半径 $\sqrt{2}$，高さ $\sqrt{2}$ の円錐の体積)

$$V_1=2\pi d_1 S_1=2\pi\cdot\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot 1=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

放物線 $x=-y^2+2$ 上に点 $\mathrm{P}(-t^2+2,\ t)$，直線 $x+y=0$ 上に点 $\mathrm{Q}(-t,\ t)$ をとり $(0\leqq t\leqq 2)$，線分 PQ の中点を M とすると

$$\mathrm{M}\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+1,\ t\right)$$

M と直線 $x+y=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{\left|-\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}+1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{-t^2+t+2}{2\sqrt{2}}$$

$\Delta S = \mathrm{PQ}\Delta t = (-t^2+t+2)\Delta t$ を l のまわりに 1 回転させた体積 ΔV_2 は

$$\Delta V_2 = 2\pi d\Delta S = 2\pi\cdot\frac{-t^2+t+2}{2\sqrt{2}}\cdot(-t^2+t+2)\Delta t$$
$$= \frac{\pi(-t^2+t+2)^2}{\sqrt{2}}\Delta t = \frac{\pi(2-t)^2(t+1)^2}{\sqrt{2}}\Delta t$$

x 軸の上側の部分を直線 $x+y=0$ のまわりに 1 回転させた体積 V_2 は

$$\frac{\sqrt{2}V_2}{\pi} = \int_0^2 (2-t)^2(t+1)^2\,dt = \int_0^2 (2-t)^2(t^2+2t+1)\,dt$$
$$= \int_0^2 t^2(2-t)^2\,dt + 2\int_0^2 t(2-t)^2\,dt + \int_0^2 (t-2)^2\,dt$$
$$= \frac{2!2!}{5!}(2-0)^5 + 2\cdot\frac{1!2!}{4!}(2-0)^4 + \left[\ \frac{(t-2)^3}{3}\ \right]_0^2$$
$$= \frac{2^5}{30} + \frac{2^4}{6} + \frac{2^3}{3} = 2^3\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{5}$$

したがって　　$V_2 = \dfrac{16\sqrt{2}}{5}\pi$

よって，求める回転体の体積は

$$V_1 + V_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{16\sqrt{2}}{5}\pi = \boldsymbol{\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi}$$

2020 年 東工大 4

n を正の奇数とする．曲線 $y=\sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x+y=0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする．

(2) 回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

解答　$y=\sin x$ の微小区間 $[t,\ t+\Delta t]$ の面積 ΔS とその重心 G は

$$\Delta S = (\sin t)\Delta t, \quad \mathrm{G}\left(t,\ \frac{1}{2}\sin t\right)$$

G と直線 $x+y=0$ の距離 d は　$d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\dfrac{1}{2}\sin t\right)$

$$V_n\text{の体積} = 2\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{2}\sin t\right)\sin t\,dt$$
$$= \sqrt{2}\pi\left[-t\cos t+\sin t+\frac{t}{4}-\frac{1}{8}\sin 2t\ \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \boldsymbol{\sqrt{2}\pi^2\left(2n-\frac{3}{4}\right)}$$

3.3.7　極方程式の計量

2016 年神戸大学 5

極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ．

(4) 曲線 C の長さを求めよ．

解答　(1) $r = 1 + \cos\theta$ より

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

これらを θ について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -\sin\theta(1+2\cos\theta), \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\sin\theta\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= -(1-\cos^2\theta) + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= (1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta) \end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の解は　$\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　　$\mathbf{(2,\ 0)},\ \mathbf{(0,\ 0)},\ \left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\ \pm\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}\right)$

また，$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の解は　$\theta = \pi,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　　$\mathbf{(0,\ 0)},\ \left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}},\ \pm\dfrac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}\right)$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{(1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)}$

$$=\frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta}$$

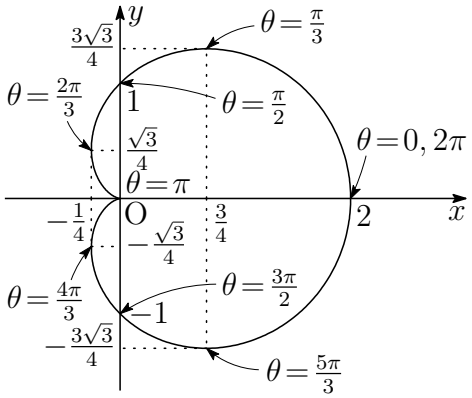
$$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta}$$

よって $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=\lim_{\theta\to\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta}=\frac{0}{1+1}\cdot\frac{1+2}{1-2}=\mathbf{0}$

(3) $f(\theta)=1+\cos\theta$ とすると，$f(2\pi-\theta)=r(\theta)$．C は x 軸に関して対称であるから，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における C の増減を調べる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta})$		↖	←	↙	↓	↘	
(x,y)	$(2,0)$	$\cdots$	$(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4})$	$\cdots$	$(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$	$\cdots$	$(0,0)$

上の増減表および (2) の結果から，C の概形は次のようになる．



(4) $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

ゆえに $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

$r = 1 + \cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2 \\ &= 2(1+\cos\theta) = 4\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

よって，曲線 C の長さを l とすると

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \left[\, 4\sin\frac{\theta}{2} \,\right]_0^{\pi} = 4 \end{aligned}$$

よって $\quad l = \mathbf{8}$

補足 曲線 $r = a(1+\cos\theta)$ は，カージオイド (cardioid) または心臓形という．

解説

C の x 軸の上側の部分と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\, r^2\sin\theta\cos\theta \,\Big]_{0}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\, \frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \,\Big]_{0}^{\pi} = \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

C の x 軸の上側の部分を x 軸のまわりに 1 回転した回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y^2\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y^2\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} (r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\Big[\, r^3\sin^2\theta\cos\theta \,\Big]_{0}^{\pi} + \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\Big[\, -\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4 \,\Big]_{0}^{\pi} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

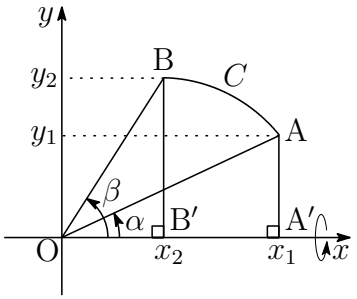
よって　　$V = \dfrac{8}{3}\pi$

曲線 $r = f(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の弧長 l，x 軸と囲まれた部分の面積 S，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$l = \int_{0}^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta, \quad S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\,d\theta, \quad V = \frac{2\pi}{3}\int_{0}^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta$$

極方程式と面積

$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から x 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．$S_A = \triangle \mathrm{OAA'}$，$S_B = \triangle \mathrm{OBB'}$ とし，曲線 C，x 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域 D_C の面積を S_C，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域 D の面積を S とすると



$$
\begin{aligned}
S_C &= \int_{x_2}^{x_1} y\,dx = \int_{\beta}^{\alpha} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\, r^2\sin\theta\cos\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -S_B + S_A + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$S = S_C + S_B - S_A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta$

極方程式と x 軸の周りの回転体の体積

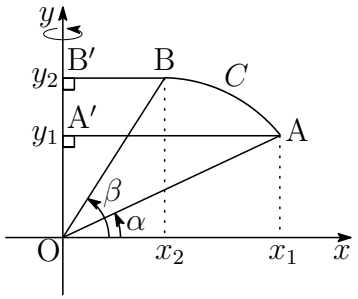
次に $\triangle \mathrm{OAA'}$，$\triangle \mathrm{OBB'}$ を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると

$$
\begin{aligned}
V_C &= \pi\int_{x_2}^{x_1} y^2\,dx = \pi\int_{\beta}^{\alpha} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} (r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\Big[\, r^3\sin^2\theta\cos\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -V_B + V_A + \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$V = V_C + V_B - V_A = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta$

極方程式と y 軸の周りの回転体の体積

$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から y 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．曲線 C，y 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域を D_C とし，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域を D とする．△OAA′，△OBB′ を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると



$$
\begin{aligned}
V_C &= \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^2\cos^2\theta(r'\sin\theta + r\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} (r^3)'\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\Big[\, r^3\cos^2\theta\sin\theta \,\Big]_{\alpha}^{\beta} - \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(-2\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta)d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= V_B - V_A + \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$V = V_C + V_A - V_B = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta$

極方程式の計量

- 弧長 l　　$\boldsymbol{l = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$
- 面積 S　　$\boldsymbol{S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta}$
- x 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi)}$$

- y 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right)}$$

2003 年 九大理系 [1]

xy 平面上で，　　$x = r(t)\cos t,\ \ y = r(t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$
で表される曲線を C とする。

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ。

(2) 一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積は $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t\,dt$ と表せることを示せ。

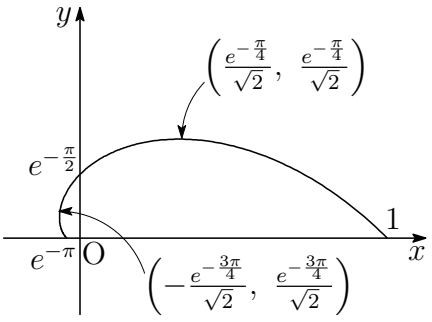
解答　(1) $x = e^{-t}\cos t$，$y = e^{-t}\sin t$ を t で微分すると

$$x' = -e^{-t}(\sin t + \cos t) = -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y' = -e^{-t}(\sin t - \cos t) = -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

x，y の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
x'		$-$	0	$+$	
x	1	↘	$-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↗	$-e^{-\pi}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↘	0



x は $t = \dfrac{3\pi}{4}$ で最小値 $-\dfrac{\boldsymbol{e^{-\frac{3\pi}{4}}}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$ をとり，y は $t = \dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\dfrac{\boldsymbol{e^{-\frac{\pi}{4}}}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$ をとる．

したがって，C の概形は右の図のようになる．

(2) $$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{(r(t))^3\}' \sin^2 t \cos t \, dt$$
$$= \frac{1}{3} \Big[\{r(t)\}^3 \sin^2 t \cos t \Big]_0^{\pi} - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 (\sin^2 t \cos t)' \, dt$$
$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t) \, dt$$
$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \{2 \sin t (1 - \sin^2 t) - \sin^3 t\} \, dt$$
$$= \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

(3) $y_1 = e^{-t} \sin t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $y_2 = e^{-t} \sin t \quad \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq t \leqq \pi\right)$,

$\alpha = -\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$, $\beta = e^{-\pi}$ とおくと

$$V = \pi \int_{\alpha}^{1} {y_1}^2 \, dx - \pi \int_{\alpha}^{\beta} {y_2}^2 \, dx$$
$$= \pi \int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} y^2 \frac{dx}{dt} \cdot dt - \pi \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} y^2 \frac{dx}{dt} \cdot dt$$
$$= -\pi \int_0^{\pi} y^2 \frac{dx}{dt} dt = -\int_0^{\pi} (r(t) \sin t)^2 \{r(t) \cos t\}' dt$$
$$= -\pi \int_0^{\pi} (r(t))^2 \sin^2 t \cdot \{r'(t) \cos t - r(t) \sin t\} \, dt$$
$$= -\pi \int_0^{\pi} (r(t))^2 r'(t) \sin^2 t \cos t \, dt + \pi \int_0^{\pi} (r(t))^3 \sin^3 t \, dt$$

これに (2) の等式を適用すると

$$V = -\pi \int_0^{\pi} (r(t))^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt + \pi \int_0^{\pi} (r(t))^3 \sin^3 t \, dt$$
$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} (r(t))^3 \sin t \, dt = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} e^{-3t} \sin t \, dt$$

次の問題は前に示した公式を用いると瞬殺です.

2009 年 京大理系 5

xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r = 2 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ により表される曲線を C とする．C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ.

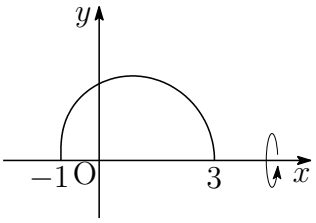
解答 $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{40}{3}\pi}$

瞬殺過ぎて心配であれば，次のように r を残して公式を導いて最後にこれを利用する方が計算は簡単です (最初から $r = 2 + \cos\theta$ で計算すると計算は重い).

計算結果 (goal) がどこにあるか分かって計算を走らせるのは楽です．難関大を受験する生徒は一度は走っておく計算 (route) だと思います.

別解 $r = 2 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ より

$$x = r\cos\theta = (2+\cos\theta)\cos\theta$$



$\theta = 0$ のとき $x = 3$，$\theta = \pi$ のとき $x = -1$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^{3} y^2\,dx = \pi\int_{\pi}^{0} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\int_0^{\pi}(r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \pi\int_0^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\left[r^3\sin^2\theta\cos\theta\right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)d\theta + \pi\int_0^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{40\pi}{3}}
\end{aligned}$$

一般的な解答と極方程式を利用した別解を紹介します.

2016 年 東大理系 6

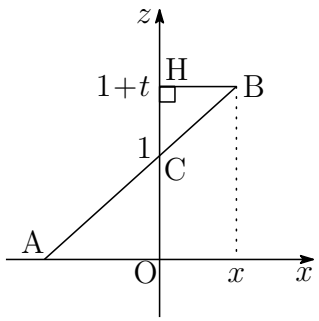
座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a)，(b) をみたしながら動く.

(a) 点 A は平面 $z=0$ 上にある.

(b) 点 C$(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある.

このとき，線分 AB が通過することのできる範囲を K とする．K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ.

解答 B の z 座標を $1+t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$，B から z 軸に降ろした垂線 BH の長さを x とすると



$$\mathrm{BC}=\sqrt{t^2+x^2},\quad \mathrm{CA}=\frac{\mathrm{BC}}{t}=\frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t}$$

$\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=2$ であるから

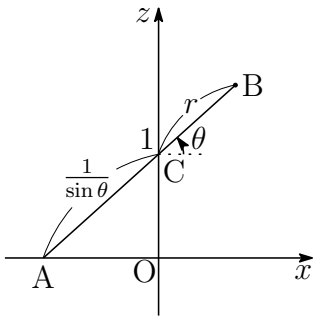
$$\sqrt{t^2+x^2}+\frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t}=2$$

ゆえに $\quad\sqrt{t^2+x^2}=\dfrac{2t}{t+1}\quad$ したがって $\quad x^2=\left(\dfrac{2t}{t+1}\right)^2-t^2$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1 x^2\,dt=\pi\int_0^1\left\{\left(\frac{2t}{t+1}\right)^2-t^2\right\}dt\\&=\pi\int_0^1\left\{\left(2-\frac{2}{t+1}\right)^2-t^2\right\}dt\\&=\pi\int_0^1\left\{4-\frac{8}{t+1}+\frac{4}{(t+1)^2}-t^2\right\}dt\\&=\pi\left[4t-8\log(t+1)-\frac{4}{t+1}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\boldsymbol{\pi\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)}\end{aligned}$$

別解 zx 平面上で C を極として，$r = \mathrm{CB}$，CB と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると，求める体積 V は



$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^3\cos\theta\,d\theta$$

このとき，$r = 2 - \dfrac{1}{\sin\theta}$ であるから

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{\sin\theta}\right)^3\cos\theta\,d\theta$$

ここで，$u = \sin\theta$ とおくと　$\dfrac{du}{d\theta} = \cos\theta$

θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
u	$\frac{1}{2} \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2 - \frac{1}{u}\right)^3 du \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(8 - \frac{12}{u} + \frac{6}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right) du \\ &= \frac{2\pi}{3}\left[\,8u - 12\log u - \frac{6}{u} + \frac{1}{2u^2}\,\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \boldsymbol{\pi\left(\frac{17}{3} - 8\log 2\right)} \end{aligned}$$

3.3.8　弧長

数学 III の面積・体積など求積問題では，教科書に書いてない公式であっても，受験生が過去問を学習する中でマスターしたものが数多くあります．熊大入試においてもバームクーヘン型の求積法を受験生の半数以上 (医学部では 7 割以上) が使っています．入学試験で出題される求積問題について解説していきます．今回は，曲線の長さ (弧長) について解説します．グラフや媒介変数表示された曲線の弧長を求める公式は，発展的な内容として教科書に紹介されてはいますが，極方程式で表された曲線の弧長については教科書には載っていませんが，入試では出題されています．

次の宮崎大は，オーソドックスなグラフの弧長に関する出題です．

2021 年 宮崎大

関数 $f(x)=\log x$ および座標平面上の曲線 $y=f(x)$ について，次の空欄 サ ～ ソ を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は自然対数を表す．

曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=\sqrt{3}$ で囲まれた部分の面積の値は サ である．

曲線 $y=f(x)$ $(1 \leqq x \leqq \sqrt{3})$ の長さ L は

$$L=\int_1^{\sqrt{3}} \ell(x)\,dx, \quad \ell(x)=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\sqrt{\frac{x^2+1}{\boxed{\text{シ}}}}$$

により求めることができる．$\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと，L は，t だけで表される数式 $g(t)=$ ス を用いて，

$$L=\int_{\sqrt{2}}^{2} g(t)\,dt$$

と表される．ここで，不定積分 $\displaystyle\int g(t)\,dt$ を求めると

$$\int g(t)\,dt=\boxed{\text{セ}}+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる．よって，

$$L=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\frac{\boxed{\text{ソ}}}{3}$$

である．

解答 曲線 $y=\log x$ と x 軸および直線 $x=\sqrt{3}$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_1^{\sqrt{3}} \log x\,dx = \Big[\, x(\log x-1) \,\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3 - \sqrt{3} + 1$$

曲線 $y=\log x$ $(1 \leqq x \leqq \sqrt{3})$ の長さ L は

$$L = \int_1^{\sqrt{3}} \ell(x)\,dx, \quad \ell(x) = \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

により求めることができる．$\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと

$$x^2 = t^2-1, \quad \ell(x) = \frac{t}{x} = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}$$

x	$1 \longrightarrow \sqrt{3}$
t	$\sqrt{2} \longrightarrow 2$

$$\ell(x)\,dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$$

L は，t だけで表される数式 $g(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1}$ を用いて

$$L = \int_{\sqrt{2}}^{2} g(t)\,dt$$

と表される．ここで，不定積分 $\displaystyle\int g(t)\,dt$ を求めると，

$$\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = t + \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

よって　$\displaystyle L = \Big[\, t+\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \,\Big]_{\sqrt{2}}^{2} = 2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$

(サ) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log 3-\sqrt{3}+1}$　(シ) $\boldsymbol{x^2}$　(ス) $\boldsymbol{\dfrac{t^2}{t^2-1}}$　(セ) $\boldsymbol{t+\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|}$

(ソ) $\boldsymbol{3+2\sqrt{2}}$

次は，パラメータによる最もオーソドックスなサイクロイド (cycloid) の弧長です．九大では面積と弧長の出題です．

2010 年 九大理系

中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ。

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

解答　(1) 円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，円が角 t だけ回転したとき，円の中心を C，x 軸との接点を T とする．このとき，$\mathrm{OT} = \overset{\frown}{\mathrm{TP}} = at$ であるから

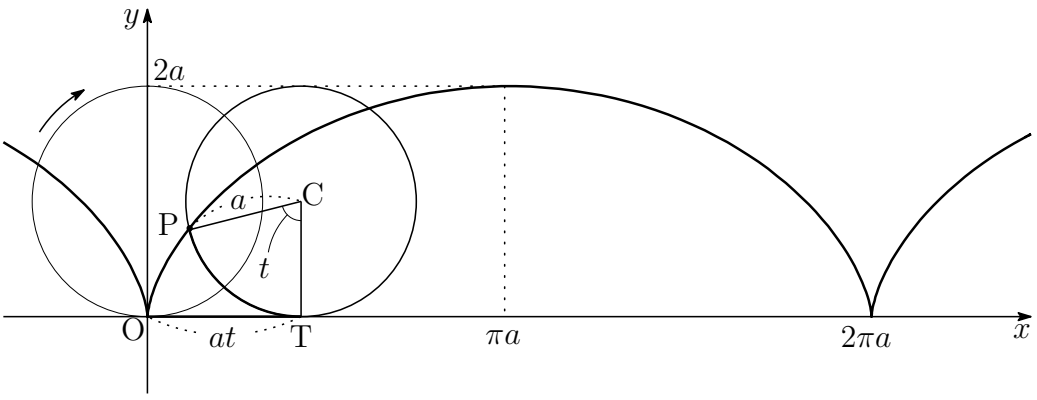
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix}$$

また $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{CT}}$ を $-t$ だけ回転したものであるから

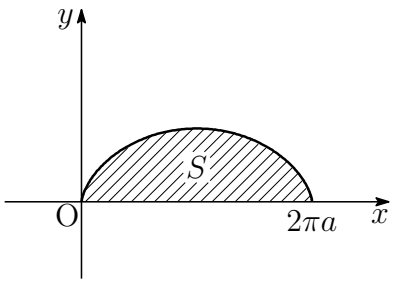
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{CT}} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} \\ &= \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，P の座標は　　$\boldsymbol{(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))}$



(2) 求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x = a(t - \sin t)$ より

$$dx = a(1 - \cos t)dt \qquad \leftarrow \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$$

で，x と t の対応は右のようになる．

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
t	$0 \longrightarrow 2\pi$

よって，置換積分法により

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt \\ &= a^2 \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\ &= \boldsymbol{3\pi a^2} \end{aligned}$$

(3) 求める曲線 C の長さを L とすると，$\dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ より

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\{a(1-\cos t)\}^2 + (a\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{8a} \end{aligned}$$

極方程式の代表例は，次のカージオイド (cardioid) です (心臓形ともいう).

2009 年 京大理系

極方程式 $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線の長さを求めよ.

解答 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

ゆえに $\quad \left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

$r = 1 + \cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2 \\ &= 2(1+\cos\theta) = 4\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

よって，曲線 C の長さを l とすると

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \left[\, 4\sin\frac{\theta}{2} \,\right]_0^{\pi} = \mathbf{4} \end{aligned}$$

2016 年 神戸大理系

極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする．以下の問に答えよ.

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標を求めよ.

(2) $\lim\limits_{\theta\to\pi} \dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ.

(4) 曲線 C の長さを求めよ.

解答　(1)　$r = 1 + \cos\theta$ より

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

これらを θ について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -\sin\theta(1+2\cos\theta), \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\sin\theta\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= -(1-\cos^2\theta) + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= (1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta) \end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の解は　$\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　　$\mathbf{(2,\ 0)},\ \mathbf{(0,\ 0)},\ \left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\ \pm\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}\right)$

また，$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の解は　$\theta = \pi,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　　$\mathbf{(0,\ 0)},\ \left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}},\ \pm\dfrac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}\right)$

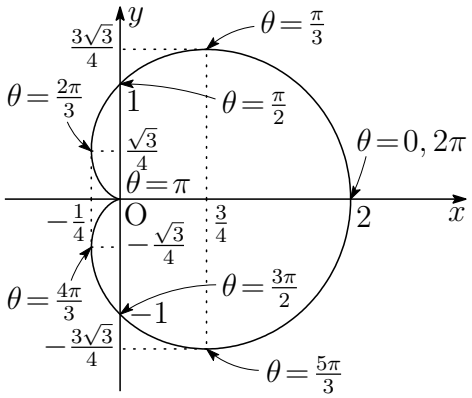
(2)　$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} &= \frac{(1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)} \\ &= \frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ &= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx} = \lim_{\theta\to\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} = \frac{0}{1+1}\cdot\frac{1+2}{1-2} = \mathbf{0}$

(3) $f(\theta)=1+\cos\theta$ とすると，$f(2\pi-\theta)=r(\theta)$．C は x 軸に関して対称であるから，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $x,\ y$ の増減を調べる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(\frac{dx}{d\theta},\frac{dy}{d\theta})$		↖	←	↙	↓	↘	
(x,y)	$(2,0)$	$\cdots$	$(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4})$	$\cdots$	$(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$	$\cdots$	$(0,0)$

上の増減表および (2) の結果から，C の概形は次のようになる．



(4) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta$$

ゆえに $\quad\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

$r=1+\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2&=(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2\\&=2(1+\cos\theta)=4\cos^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

よって，曲線 C の長さを l とすると

$$\begin{aligned}\frac{l}{2}&=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta\\&=\int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\left[\,4\sin\frac{\theta}{2}\,\right]_0^{\pi}=4\end{aligned}$$

よって $\quad l=\mathbf{8}$

次は弧長に関する秀逸問題です.

2021 年 神戸大理系

座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\quad y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，以下の問に答えよ.

(1) 点 P と原点 O との距離を求めよ.

(2) 点 P の時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}$ を求めよ.

解答　(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\quad y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}\qquad(*)$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2&=\left(\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t}\right)^2+\left(\frac{3\sin t}{5+4\cos t}\right)^2\\&=\frac{16+40\cos t+25\cos^2 t+9\sin^2 t}{(5+4\cos t)^2}\\&=\frac{25+40\cos t+16\cos^2 t}{(5+4\cos t)^2}=1\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{OP=1}$

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{-5\sin t(5+4\cos t)-(4+5\cos t)(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2}\\ &= -\frac{9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{3\cos t(5+4\cos t)-3\sin t(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2}\\ &= \frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\vec{v} = \left(-\dfrac{9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\ \dfrac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}\right)}$

P を原点を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた点を $\mathrm{Q}(-y,\ x)$ とすると

$$\vec{v} = \frac{3}{5+4\cos t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \qquad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 1$$

よって　$|\vec{v}| = \left|\dfrac{3}{5+4\cos t}\right| |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \boldsymbol{\dfrac{3}{5+4\cos t}}$

補足 $\mathrm{OP}^2 = 1$ より，$x^2+y^2=1$ の両辺を t で微分すると

$$2\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=0 \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\vec{v}$$

(3) $(*)$ より　$t=0$ のとき　$\mathrm{P}(1,\ 0)$,　　$t=\pi$ のとき　$\mathrm{P}(-1,\ 0)$

$$0 \leqq t \leqq \pi \text{ において} \quad y \geqq 0$$

(2) の結果から　$0<t<\pi$ において　$\dfrac{dx}{dt}<0$

よって，点 P は $0 \leqq t \leqq \pi$ において，単位円周上を点 $(1,\ 0)$ から点 $(-1,\ 0)$ まで反時計回りに移動する．したがって，点 P の描く弧長 s は

$$s=\int_0^{\pi} |v|\,dt=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 1=\pi$$

上式に (2) の結果を代入すると

$$\int_0^{\pi} \frac{3}{5+4\cos t}\,dt=\pi \quad \text{よって} \quad \int_0^{\pi} \frac{dt}{5+4\cos t}\,dt=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

補足 P が単位円周上を移動することは変数変換を行うことで確認できる．まず

$$f(u)=\frac{1-9u^2}{1+9u^2},\quad g(u)=\frac{6u}{1+9u^2} \quad (0 \leqq u<\infty)$$

とおくと

$$f(u)^2+g(u)^2=1,\quad f'(u)=-\frac{36u}{(1+9u^2)^2}$$

$f(u)$ は単調減少で，点 $(f(u),\ g(u))$ は，$u=0$ のとき $(1,\ 0)$，$u\to\infty$ のとき $(-1,\ 0)$ にある．さらに

$$u=\tan\theta \quad \left(0 \leqq \theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とする ($\theta\to\frac{\pi}{2}-0$ のとき $u\to\infty$)．$\cos t=f(u)$，$\sin t=g(u)$ とおくと

$$\begin{aligned} x&=\frac{4+5f(u)}{5+4f(u)}=\frac{4(1+9u^2)+5(1-9u^2)}{5(1+9u^2)+4(1-9u^2)}\\ &=\frac{1-u^2}{1+u^2}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta,\\ y&=\frac{3g(u)}{5+4f(u)}=\frac{3\cdot 6u}{5(1+9u^2)+4(1-9u^2)}\\ &=\frac{2u}{1+u^2}=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\sin 2\theta \end{aligned}$$

$0 \leqq 2\theta<\pi$ であることから，P の軌跡が分かる．

本題の定積分を $\cos t = f(u)$ および $u = \tan\theta$ を用いて求めることもできる．$\cos t = f(u)$ の両辺を u について微分すると

$$-\sin t\frac{dt}{du} = f'(u) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{dt}{du} = -\frac{f'(u)}{g(u)}$$

t	$0 \longrightarrow \pi$
u	$0 \longrightarrow \infty$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{dt}{5+4\cos t} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{5+4f(u)}\cdot\frac{-f'(u)}{g(u)}\,du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{5(1+9u^2)+4(1-9u^2)}\cdot\frac{36u}{6u}\,du \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2}\end{aligned}$$

さらに，$u = \tan\theta$ を θ について微分すると

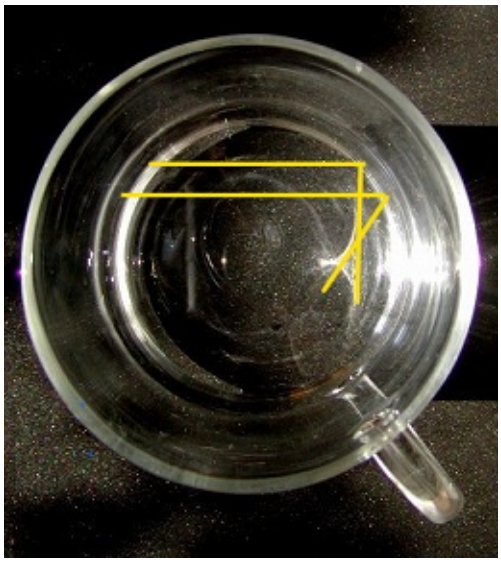
$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1+u^2$$

u	$0 \longrightarrow \infty$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

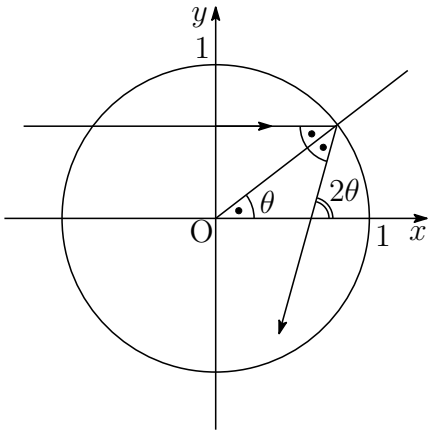
よって $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{5+4\cos t} = \frac{2}{3}\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{3}$

3.3.9　内サイクロイド・外サイクロイド

数学と物理に関連する問題として，焦線 (caustic) について取り上げます．円柱型のガラスコップを太陽光の当てると，写真のようにコップの内側に明るく光るところが現れる．



コップを原点を中心とする半径 1 の円とし，下の図のように，x 軸に平行な光線が，点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ で反射した光線 (直線の方程式) は，点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通り，傾き $\tan 2\theta$ の直線であるから



$$y - \sin\theta = (\tan 2\theta)(x - \cos\theta)$$

これを整理すると

$$(*)\quad x\sin 2\theta - y\cos 2\theta = \sin\theta$$

光線の包絡線上の点を $\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ とすると，P は $(*)$ 上の点であるから

$$x(\theta)\sin 2\theta - y(\theta)\cos 2\theta = \sin\theta \tag{1}$$

また，包絡線の接ベクトル $(x'(\theta),\ y'(\theta))$ は，$(*)$ の法ベクトルと垂直であるから

$$x'(\theta)\sin 2\theta - y'(\theta)\cos 2\theta = 0 \tag{2}$$

(1) を θ で微分すると

$$x'(\theta)\sin 2\theta - y'(\theta)\cos 2\theta + 2x(\theta)\cos 2\theta + 2y(\theta)\sin 2\theta = \cos\theta \tag{3}$$

(2) を (3) に代入すると

$$2x(\theta)\cos 2\theta + 2y(\theta)\sin 2\theta = \cos\theta \tag{4}$$

(1)，(4) から

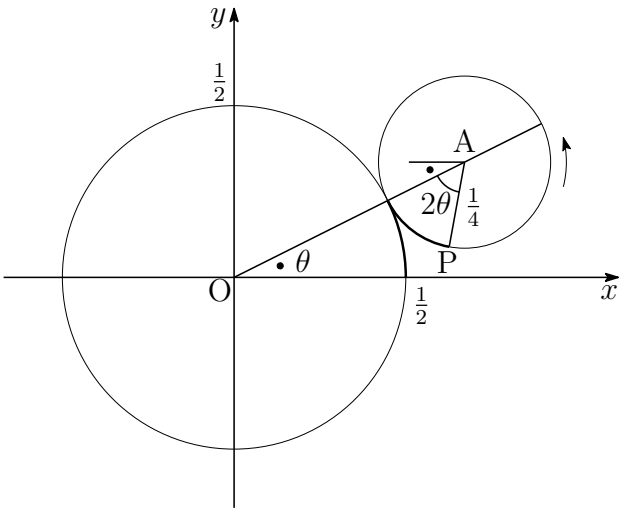
$$\begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ 2\cos\theta & 2\sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -2\cos\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta + \sin 2\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ \sin 3\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

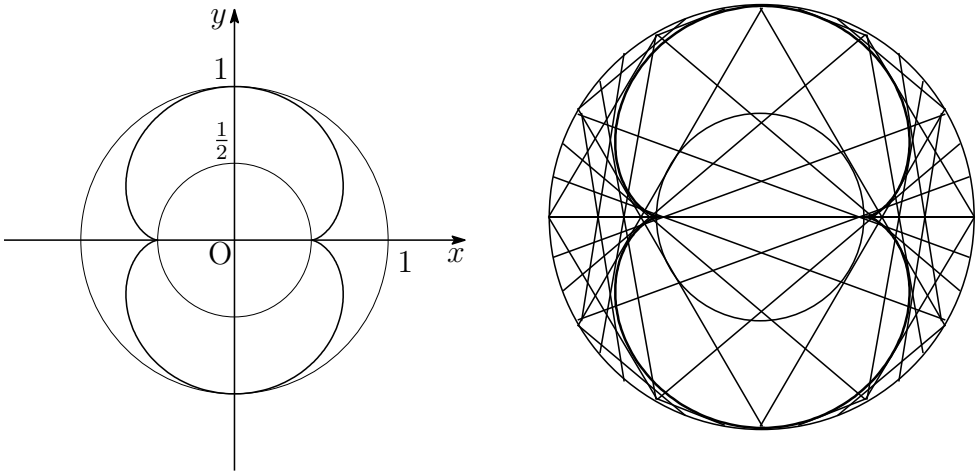
$\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ の描く図形は，半径 $\dfrac{1}{2}$ の基準円と半径 $\dfrac{1}{4}$ の動円の外サイクロイド曲線 (epicycloid) である．特に，動円の半径が基準円の半径の $\dfrac{1}{2}$ である曲線のことを焦線 (caustic) という．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos(\pi + 3\theta) \\ \sin(\pi + 3\theta) \end{pmatrix}$$



P$(x(\theta),\ y(\theta))$ の表す軌跡を $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ で描くと次の様になります (円は補助線). 焦線 (caustic) は $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ で，y 軸の右側になります.

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ \sin 3\theta \end{pmatrix}$$



基準円の半径が 2 で動円 (外接円) の半径が 1 の焦線 (caustic) の問題 (東工大 2016 年) が出題されている．基準円と動円の半径が等しい外サイクロイド (epicycloid) の問題 (長崎大 2009 年) も出題されている．また，基準円の内接円 (動円) の 1 点が描く曲線を内サイクロイド (hypocycloid) という．特に動円 (内接円) の半径が基準円の $\frac{1}{4}$ であるとき，星芒形 (astroid) となる問題 (大分大医医 2016 年) が出題されている．内サイクロイドに関する問題は東大理系 2004 年もある．これらの定型問題は経験による差が大きい．入試対策の基本として，難問・奇問に時間をかけるよりもこうしたオーソドックスな問題をしっかりやり上げておくことが大切だと思います．これらの問題に関しては面積を求めさせることが非常に多く，ガウス・グリーンの定理をさりげなく使ってもよいのではないでしょうか (計算量がかなり圧縮されます).

これらの関連する問題に次があります.

- 東工大 2016 年 (外サイクロイド)[caustic]
- 長崎大 2009 年 (外サイクロイド)
- 大分大医医 2016 年 (内サイクロイド)[astroid]
- 東大理系 2004 年 (内サイクロイド)

定型問題の 1 つであるアステロイド (astroid)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

が半径 a の円内をその 1/4 の半径を持つ円が滑ることなく転がるとき，内円の円周上の任意の一点の軌跡であることは入試問題でもよく取り上げられています．また，アステロイドが接線群の包絡線としても出題されています．今回は入試問題に出題される接線群の包絡線について解説します．

2016 年 大分大医医

中心が原点 O で半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する．円 C_2 上の点 P は最初に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ にあるとする．円 C_2 の中心を B とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle \mathrm{AOB} = \theta$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表しなさい．

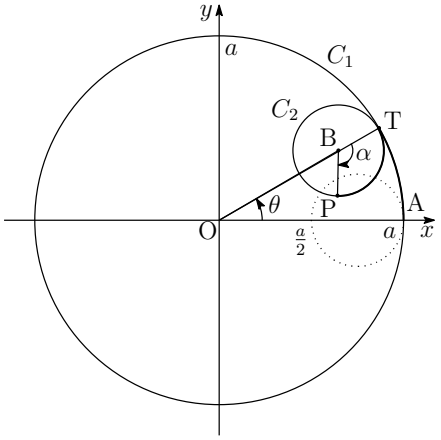
(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めなさい．

解答　(1) C_1 と C_2 の接点を T，$\alpha = \angle \mathrm{PBT}$ とする．C_1 および C_2 上の弧について，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}$=$\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから

$$a\theta = \frac{a}{4} \times \alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 4\theta$$

BT の x 軸のなす角が θ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \frac{a}{4}(\cos(\theta - \alpha), \sin(\theta - \alpha)) \\ &= \frac{a}{4}(\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta)) \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)}\end{aligned}$$



(2) $\mathrm{OB} = \mathrm{OT} - \mathrm{BT} = a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{3}{4}a$，$\angle \mathrm{AOB} = \theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \\ &= \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta - \sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{3}{4}a(\sin\theta + \sin 3\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{4}a(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

したがって $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{9}{8}a^2(1 - \cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta)$

$$= \frac{9}{8}a^2(1 - \cos 4\theta) = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta$$

求める距離を s とすると，$\dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$ の周期が $\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して

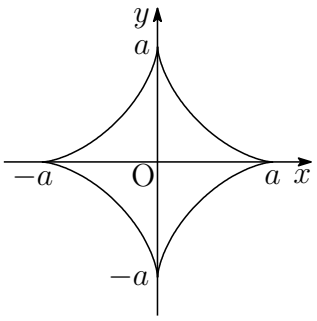
$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}a|\sin 2\theta|\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2\theta\,d\theta = \left[-3a\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{6a}$$

解説 (2) の結果は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$$

となり，その軌跡はアストロイドである．
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと



$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) = a\left(-3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cos\theta\right)$$

$$= 3a\sin\theta\cos\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$= \frac{3}{2}a\sin 2\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

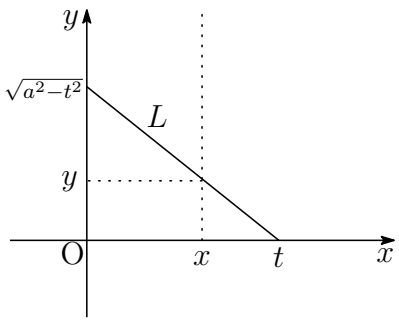
ゆえに $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2} = \dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$

アストロイド (astroid) の x 軸および y 軸に関する対称性により

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}a\sin 2\theta\, d\theta = 3a\Big[-\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

補足 アステロイドは，次の線分 L の接線群の包絡線である．

長さ a の線分 L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，L の包絡線 (L の通る領域と通らない領域の境界線) を求める．
右の図のように L が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にあるとき，L 上の点 $(x,\ y)$ について



$$y = -\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}x + \sqrt{a^2-t^2} \quad \cdots(*)$$

が成立する．ここで，x を固定し，y を t の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}x - \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{a^2x - t^3}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$
これを $(*)$ に代入すると

$$y = -x^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$$

したがって　$y^2 = x^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})$
$= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2$
$= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3$

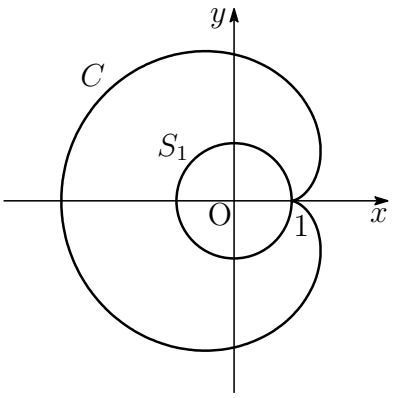
よって　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

一般に，L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，上式は成立する．

これらの問題では面積を求めされることが多く，ガウス・グリーンの定理による解法がこれまでの一般的な解法よりも計算量が少なくて済みます．

2009 年 長崎大

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 S_1 と，点 A を中心とする半径 1 の円 S_2 がある．円 S_2 は円 S_1 に外接しながら，すべることなく円 S_1 のまわりを反時計回りに一周する．点 A の出発点は $(2,\ 0)$ であり，円 S_2 上の点で，このとき $(1,\ 0)$ に位置している点を P とする．点 A が $(2,\ 0)$ から出発し，$(2,\ 0)$ に戻ってくるとき，点 P の描く曲線を C とすると，図のようになる．また，動径 OA と x 軸の正の部分とのなす角が θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ であるときの点 P の座標を $(x(\theta),\ y(\theta))$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

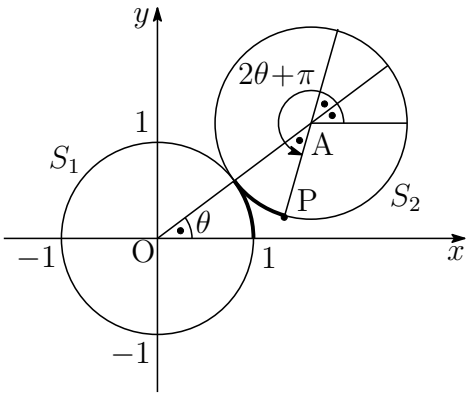


(1) $x(\theta)$，$y(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを証明せよ．

(3) 曲線 C と円 S_1 によって囲まれた部分の面積を求めよ．

解答　(1) 右の図において



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (\cos(2\theta+\pi),\ \sin(2\theta+\pi)) \\ &= (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= (2\cos\theta - \cos 2\theta,\ 2\sin\theta - \sin 2\theta)\end{aligned}$$

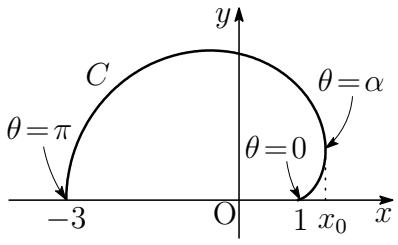
よって　$\boldsymbol{x(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta,\ y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta}$

(2) $x(2\pi-\theta)=2\cos(2\pi-\theta)-\cos 2(2\pi-\theta)=2\cos\theta-\cos 2\theta=x(\theta)$

$y(2\pi-\theta)=2\sin(2\pi-\theta)-\sin 2(2\pi-\theta)=-2\sin\theta+\sin 2\theta=-y(\theta)$

よって，C は x 軸関して対称である．

(3) C の x 軸の上側の部分の面積を T とすると



$$\begin{aligned}
T&=\int_{-3}^{1} y\,dx=\int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\
&=\int_{\pi}^{0}(2\sin\theta-\sin 2\theta)(2\cos\theta-\cos 2\theta)'\,d\theta\\
&=\int_{0}^{\pi}(2\sin\theta-\sin 2\theta)(2\sin\theta-2\sin 2\theta)\,d\theta\\
&=\int_{0}^{\pi}(4\sin^2\theta-6\sin 2\theta\sin\theta+2\sin^2 2\theta)\,d\theta\\
&=\int_{0}^{\pi}\{2(1-\cos 2\theta)+3(\cos 3\theta-\cos\theta)+(1-\cos 4\theta)\}\,d\theta\\
&=3\pi
\end{aligned}$$

よって，求める面積を S とすると　$S=2T-\pi=2\cdot 3\pi-\pi=\mathbf{5\pi}$

補足 C の x が，$\theta=\alpha$ で最大値 x_0 とすると

$$\begin{aligned}
T&=\int_{-3}^{x_0} y\,dx-\int_{1}^{x_0} y\,dx\\
&=\int_{\pi}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta-\int_{0}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\
&=\int_{\pi}^{\alpha} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta+\int_{\alpha}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta=\int_{\pi}^{0} y(\theta)\frac{dx}{d\theta}\,d\theta
\end{aligned}$$

また，(1) の結果から

$$x'(\theta)=-2\sin\theta+2\sin 2\theta,\quad y'(\theta)=2\cos\theta-2\cos 2\theta$$

ガウス・グリーンの定理により，曲線 C で囲まれた図形の面積は

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\{x(\theta)y'(\theta)-x'(\theta)y(\theta)\}\,d\theta=\int_{0}^{2\pi}(3-3\cos\theta)\,d\theta=6\pi$$

2016 年 九工大 [情]

原点 O を中心とする半径 1 の円を C_1 とする．円 C_1 に外接しながら，半径 1 の円 C_2 がすべることなく回転する．円 C_2 の中心を P とし，円 C_2 上の点 Q は最初，x 軸上の点 A(3, 0) にあるものとする．半直線 PQ 上で点 P からの距離が 2 の点を R とし，OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とする．C_2 が回転して θ が 0 から 2π まで変化するとき，点 R が描く曲線を C とする．曲線 C の概形を図 1 に示す．以下の問いに答えよ．

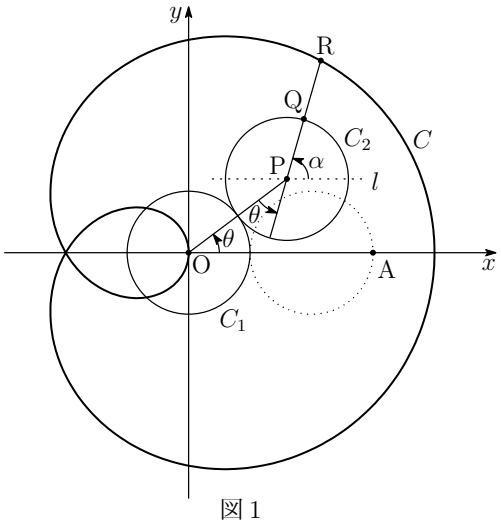


図 1

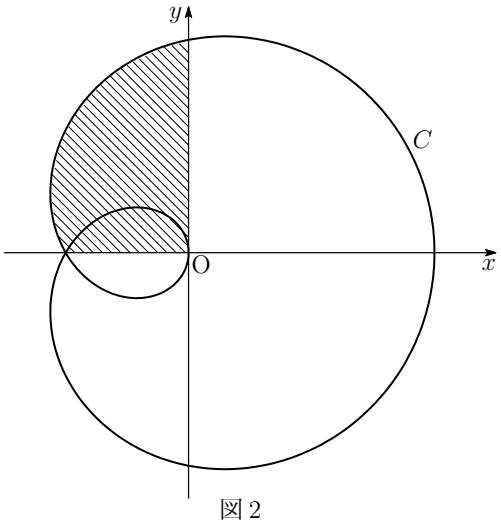


図 2

(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 P を通り x 軸と平行な直線を l とする．直線 l と線分 PR のなす角 α を，θ を用いて表せ．また，R の座標を θ を用いて表せ．

(3) 曲線 C と x 軸の共有点の座標をすべて求めよ．

(4) 曲線 C と y 軸の共有点の座標をすべて求めよ．

(5) 点 R の x 座標が最小となるときの点 R の座標をすべて求めよ．

(6) 曲線 C と x 軸，y 軸に囲まれた図 2 の斜線部分の面積を求めよ．

解答　(1) OP = 2，OP と x 軸の正の向きとなす角が θ であるから

$$\mathbf{P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)}$$

(2) 線分 OP の P の延長と C_2 の交点を Q′ とすると，直線 l と PQ′ のなす角は θ であり，$\angle \mathrm{Q'OQ} = \theta$ であるから

$$\alpha = \theta + \angle \mathrm{Q'OQ} = \theta + \theta = \boldsymbol{2\theta}$$

$\mathrm{PR} = 2$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}}$

$$= (2\cos\theta,\ 2\sin\theta) + (2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$$
$$= (2\cos\theta + 2\cos 2\theta,\ 2\sin\theta + 2\sin 2\theta)$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{R}(2\cos\theta + 2\cos 2\theta,\ 2\sin\theta + 2\sin 2\theta)}$

(3) $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると，(2) の結果から

$$y = 2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 4\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，$y = 0$ を解くと　$\theta = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$

これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

$$(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (4,\ 0)$$

よって，求める x 軸との共有点の座標は

$$\boldsymbol{(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0)}$$

(4) (3) と同様に，(2) の結果から

$$x = 2\cos\theta + 2\cos 2\theta = 4\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

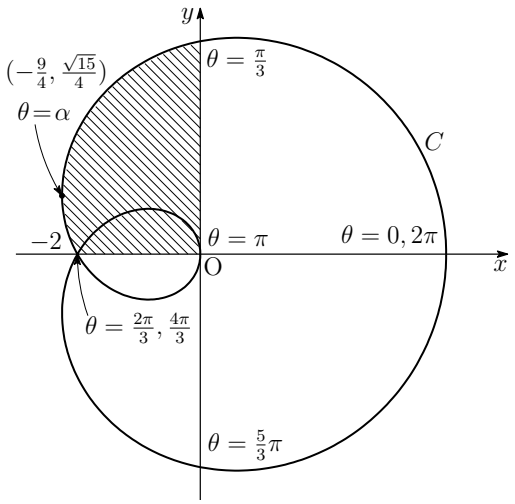
$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，$y = 0$ を解くと　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

$$\boldsymbol{(0,\ 2\sqrt{3}),\ (0,\ 0),\ (0,\ -2\sqrt{3})}$$

(5) (2) の結果から

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\theta + 2\cos 2\theta \\ &= 2\cos\theta + 2(2\cos^2\theta - 1) \\ &= 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 \\ &= 4\left(\cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$



点 R の x 座標が最小となるとき

$$\cos\theta = -\frac{1}{4}$$

このとき　$\sin\theta = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos 2\theta = -\dfrac{7}{8}$，$\sin 2\theta = \mp\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　(複号同順)

よって，求める座標は　$\left(-\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}},\ \pm\dfrac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{4}}\right)$

(6) よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} y\,dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta + 2\sin 2\theta)(2\cos\theta + 2\cos 2\theta)'\,d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin\theta + \sin 2\theta)(\sin\theta + 2\sin 2\theta)\,d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2\theta + 3\sin\theta\sin 2\theta + 2\sin^2 2\theta)\,d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 3\times\frac{\cos\theta - \cos 3\theta}{2} + 2\times\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (6 + 6\cos\theta - 2\cos 2\theta - 6\cos 3\theta - 4\cos 4\theta)\,d\theta \\ &= \left[\ 6\theta + 6\sin\theta - \sin 2\theta - 2\sin 3\theta - \sin 4\theta\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \mathbf{2\pi} \end{aligned}$$

補足　$S = \displaystyle\int_{-\frac{9}{4}}^{0} y\,dx - \int_{-\frac{9}{4}}^{-2} y\,dx = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta - \int_{\alpha}^{\frac{2\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$

別解 (2) の結果から　$x = 2\cos\theta + 2\cos 2\theta,\ \ y = 2\sin\theta + 2\sin 2\theta$

$$x' = -2\sin\theta - 4\sin 2\theta,\quad y' = 2\cos\theta + 4\cos 2\theta$$

ガウス・グリーンの定理により

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (xy' - x'y)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (6 + 6\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \left[\ 6\theta + 6\sin\theta\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \boldsymbol{2\pi}$$

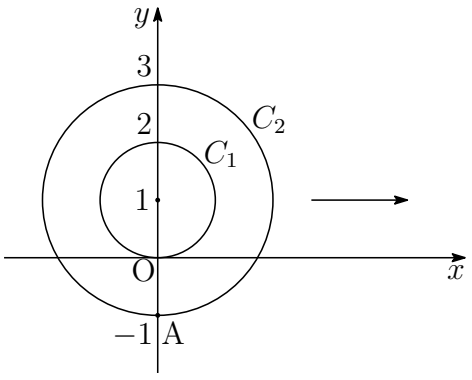
2013 年 名大理系

半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円盤 C_2 に貼り付けられており，2 つの円盤の中心は一致する．C_2 の周上にある定点を A とする．図のように，時刻 $t = 0$ において C_1 は $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で x 軸に接し，A は座標 $(0, -1)$ の位置にある．2 つの円盤は一体となり，C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく．時刻 t で C_1 の中心が点 $(t,\ 1)$ にあるように転がるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする．

(1) 時刻 t における A の座標を $(x(t),\ y(t))$ で表す．$(x(t),\ y(t))$ を求めよ．

(2) $x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ，$x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標を全て求めよ．

(3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．



解答　(1) 時刻 t における C_1 の中心 $(t,\ 1)$ を B とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 2\sin t \\ 1 - 2\cos t \end{pmatrix}$$

よって　　$\boldsymbol{(x(t),\ y(t)) = (t - 2\sin t,\ 1 - 2\cos t)}$

(2) (1) の結果から　$x'(t) = 1 - 2\cos t$，$y'(t) = 2\sin t$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$y'(t)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(x'(t), y'(t))$		$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
$(x(t), y(t))$	$(0,-1)$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3},0)$	$\cdots$	$(\pi,3)$	$\cdots$	$(\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3},0)$	$\cdots$	$(2\pi,-1)$

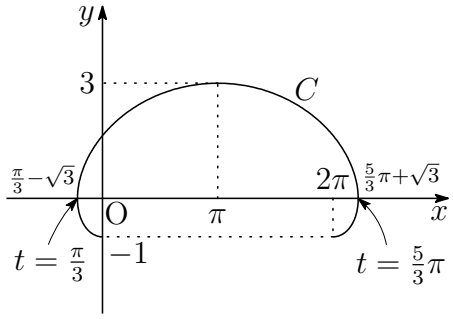
$x(t)$ を最大にする点 A は，$t = \dfrac{5}{3}\pi$ のとき　$\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{3}\pi + \sqrt{3},\ 0}\right)$

$x(t)$ を最小にする点 A は，$t = \dfrac{\pi}{3}$ のとき　$\left(\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3},\ 0}\right)$

$y(t)$ を最大にする点 A は，$t = \pi$ のとき　$\boldsymbol{(\pi,\ 3)}$

$y(t)$ を最小にする点 A は，$t = 0,\ 2\pi$ のとき　$\boldsymbol{(0, -1),\ (2\pi, -1)}$

(3) (2) の結果から，C は次のようになる．



求める面積を S とすると

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}}^{\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} (1-2\cos t)\frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} (1-2\cos t)^2\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} \left(1 - 4\cos t + 4\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= \left[\ 3t - 4\sin t + \sin 2t\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} = \boldsymbol{4\pi + 3\sqrt{3}}$$

別解 曲線 C の経路に注意して，ガウス・グリーンの定理を適用すると

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x(\theta)y'(\theta) - x'(\theta)y(\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (-2t\sin t - 4\cos t + 5)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ 2t\cos t - 6\sin t + 5t\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} = 4\pi + 3\sqrt{3}$$

2016 年 東工大

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ．

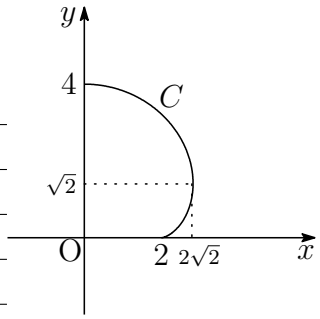
(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答 (1) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

上式を t について微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 6\cos 2t \sin t$$
$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = 6\sin 2t \sin t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$		↗	↑	↖	
(x, y)	$(2, 0)$	$\cdots$	$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\cdots$	$(0,4)$



C の概形は右の図のようになる．

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^4 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)(3\cos t - 3\cos 3t)\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t - 4\cos 3t\cos t + \cos^2 3t)\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3}{2}(1+\cos 2t) - 2(\cos 4t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\right\} dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{2}\cos 2t - 2\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t\right) dt \\
&= 3\left[\, 2t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{1}{12}\sin 6t \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boldsymbol{3\pi}
\end{aligned}$$

別解 (1) の計算結果により

$$\begin{aligned}
xy' - x'y &= (3\cos t - \cos 3t)(3\cos t - 3\cos 3t) \\
&\qquad - (-3\sin t + 3\sin 3t)(3\sin t - \sin 3t) \\
&= 12 - 12(\cos 3t\cos t - \sin 3t\sin t) \\
&= 12 - 12\cos 4t
\end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理により

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (xy' - x'y)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6 - 6\cos 4t)\,dt \\
&= \left[\, 6t - \frac{3}{2}\sin 4t \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{3\pi}
\end{aligned}$$

補足 上の 2 つの計算を比較して分かるように，ガウス・グリーンの定理を用いた方が一般に計算は簡単である．同定理は，極方程式についても適用できる万能な公式である．

2008 年 東大理系

座標平面において，媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ．

解答 $x(t)=\cos 2t$，$y(t)=t\sin t$ とおく $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$.

$0 \leqq t \leqq \pi$ および $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ において，与えられた曲線は単純閉曲線である．

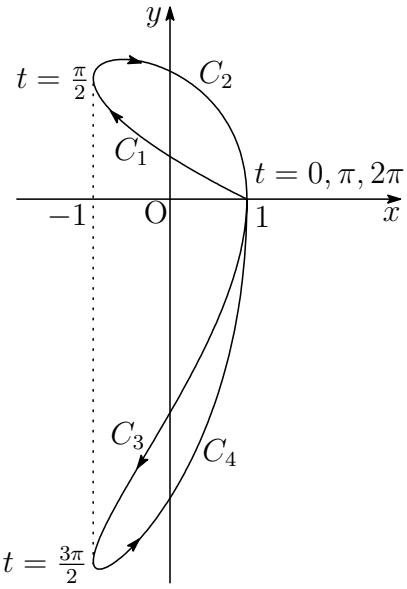
実際，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とすると

$$x(\pi-t)-x(t)=\cos(2\pi-2t)-\cos 2t=0,$$
$$y(\pi-t)-y(t)=(\pi-t)\sin(\pi-t)-t\sin t=(\pi-2t)\sin t \geqq 0$$

また，$\pi \leqq t \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ とすると

$$x(3\pi-t)-x(t)=\cos(6\pi-2t)-\cos 2t=0,$$
$$y(3\pi-t)-y(t)=(3\pi-t)\sin(3\pi-t)-t\sin t=(3\pi-2t)\sin t \leqq 0$$

区間 $\dfrac{k-1}{2}\pi \leqq t \leqq \dfrac{k}{2}\pi$ における曲線を C_k：$y=f_k(x)$ とすると $(k=1,2,3,4)$，上の結果から C_2 は C_1 の上側，C_3 は C_4 の上側にある．C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S とし，C_3 と C_4 で囲まれた部分の面積を T とする．



$$\begin{aligned}
S&=\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx-\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx\\
&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin t(\cos 2t)'\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} t\sin t(\cos 2t)'\,dt\\
&=-2\int_{0}^{\pi} t\sin t\sin 2t\,dt\\
T&=\int_{-1}^{1} f_3(x)\,dx-\int_{-1}^{1} f_4(x)\,dx\\
&=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} t\sin t(\cos 2t)'\,dt-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} t\sin t(\cos 2t)'\,dt\\
&=2\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t\sin 2t\,dt\\
&=2\int_{0}^{\pi} (t+\pi)\sin(t+\pi)\sin 2(t+\pi)\,dt\\
&=-2\int_{0}^{\pi} t\sin t\sin 2t\,dt-2\pi\int_{0}^{\pi}\sin t\sin 2t\,dt\\
&=S+\pi\int_{0}^{\pi}(\cos 3t-\cos t)\,dt=S
\end{aligned}$$

よって，求める面積は

$$\begin{aligned}2S &= -4\int_0^{\pi} t\sin t\sin 2t\,dt = 2\int_0^{\pi} t(\cos 3t-\cos t)\,dt\\ &= 2\int_0^{\pi} t\left(\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right)'\,dt\\ &= 2\left[\ t\left(\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right)\ \right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right)\,dt\\ &= 2\left[\ \frac{1}{9}\cos 3t-\cos t\ \right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{32}{9}}\end{aligned}$$

別解 $f(t)=x'(t)g(t)-x(t)g'(t)$ とおくと

$$\begin{aligned}f(t) &= \cos 2t(\sin t+t\cos t)-(-2\sin 2t)t\sin t\\ &= \sin t\cos 2t+t(\cos t\cos 2t+2\sin t\sin 2t)\\ &= \sin t(2\cos^2 t-1)+t\left(\frac{\cos t+\cos 3t}{2}+2\cdot\frac{\cos t-\cos 3t}{2}\right)\\ &= 2\sin t\cos^2 t-\sin t+\frac{3}{2}t\cos t-\frac{1}{2}t\cos 3t\end{aligned}$$

$f(t)$ の原始関数の 1 つを

$$F(t)=-\frac{2}{3}\cos^3 t+\frac{5}{2}\cos t-\frac{1}{18}\cos 3t+\frac{3}{2}t\sin t-\frac{1}{6}\sin 3t$$

とおくと　$F(0)=F(2\pi)=\dfrac{16}{9},\ F(\pi)=-\dfrac{16}{9}$

求める面積 S は経路の向きに注意して

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0} F(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} F(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\{F(0)+F(2\pi)-2F(\pi)\} = \boldsymbol{\frac{32}{9}}\end{aligned}$$

2004 年 東大理系

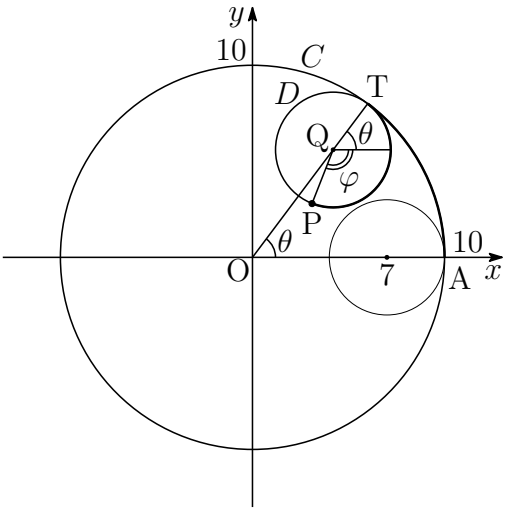
半径 10 の円 C がある．半径 3 の円板 D を，円 C に内接させながら，円 C の円周に沿って滑ることなく転がす．円板 D の周上の一点を P とする．点 P が，円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は，円 C を 2 つの部分に分ける．それぞれの面積を求めよ．

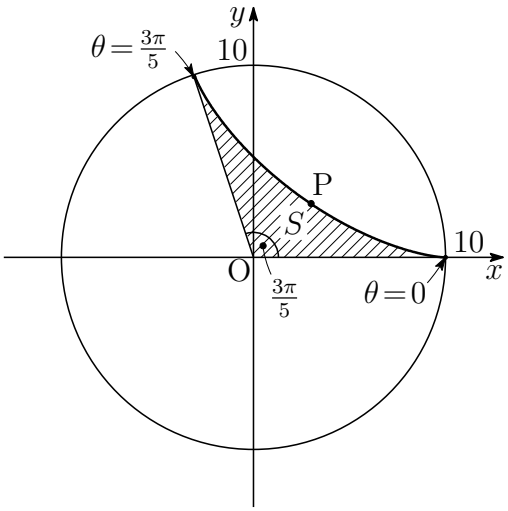
解答 左下の図のように D の中心を Q，C と D の接点を T とし，点 P が点 A$(10,\ 0)$ から D 上を φ だけ回転したとき，$\theta = \angle\mathrm{AOQ}$ とすると，C 上の $\overset{\frown}{\mathrm{AT}}$ と D 上の $\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ が等しいから

$$10\theta = 3(\theta + \varphi) \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = \frac{7}{3}\theta$$

再び点 P が C に接するとき，$\theta + \varphi = 2\pi$ であるから

$$\theta + \frac{7}{3}\theta = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{3\pi}{5}$$





このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = 7\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}\cos(-\varphi)\\ \sin(-\varphi)\end{pmatrix}$

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると　$x = 7\cos\theta + 3\cos\dfrac{7}{3}\theta, \quad y = 7\sin\theta - 3\sin\dfrac{7}{3}\theta$

右上の図の斜線部分の面積を S とすると　$S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{5}} \left(x\frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}y\right) d\theta$

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}y &= \left(7\cos\theta + 3\cos\frac{7}{3}\theta\right)\cdot 7\left(\cos\theta - \cos\frac{7}{3}\theta\right) \\ &\qquad + 7\left(\sin\theta + \sin\frac{7}{3}\theta\right)\cdot\left(7\sin\theta - 3\sin\frac{7}{3}\theta\right) \\ &= 49(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 21\left(\sin^2\frac{7}{3}\theta + \cos^2\frac{7}{3}\theta\right) \\ &\qquad 21\left(\cos\frac{7}{3}\theta\cos\theta - \sin\frac{7}{3}\theta\sin\theta\right) \\ &= 28 + 21\cos\frac{10}{3}\theta \end{aligned}$$

したがって　　$S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{5}} \left(28 + 21\cos\frac{10}{3}\theta\right) d\theta$

$= \dfrac{1}{2}\left[\ 28\theta + \dfrac{63}{10}\sin\dfrac{10}{3}\theta\ \right]_0^{\frac{3\pi}{5}} = \dfrac{42}{5}\pi$

小さい部分の面積を S_1，大きい部分の面積を S_2 とすると

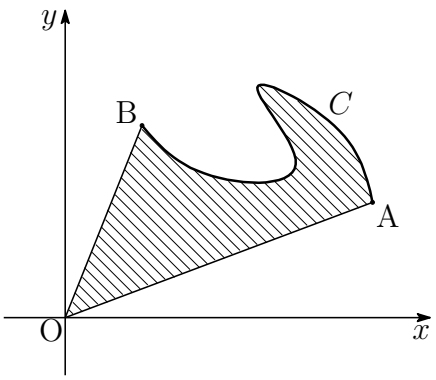
$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 10^2 \cdot \frac{3\pi}{5} - S = 30\pi - \frac{42}{5}\pi = \boldsymbol{\frac{108}{5}\pi}$$

$$S_2 = \pi\cdot 10^2 - S_1 = 100\pi - \frac{108}{5}\pi = \boldsymbol{\frac{392}{5}\pi}$$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



例 曲線 $x = a\cos^3\theta,\ y = b\sin^3\theta\quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で囲まれた部分の面積 S

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x\frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}y\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a\cos^3\theta\cdot 3b\sin^2\theta\cos\theta + 3a\cos^2\theta\sin\theta\cdot b\sin^3\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{3}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{3}{8}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta = \frac{3}{16}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta$$

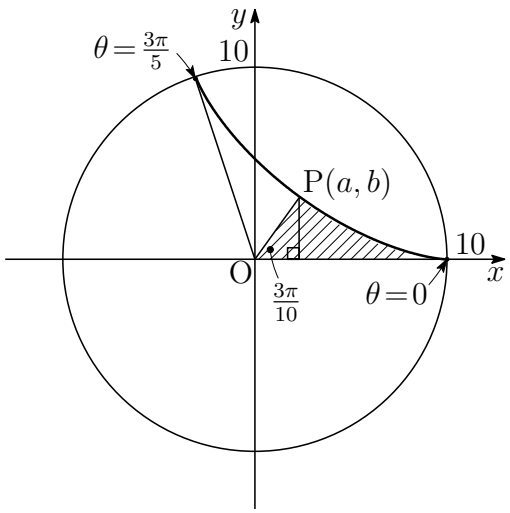
$$= \frac{3}{16}ab\left[\ \theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3ab}{32}\pi$$

よって　　$S = \dfrac{3ab}{8}\pi$

補足 ガウス・グリーンの定理を用いると，被積分関数が簡単になる場合が多い．

別解 媒介変数曲線 $x=7\cos\theta+3\cos\dfrac{7}{3}\theta,\ \ y=7\sin\theta-3\sin\dfrac{7}{3}\theta$ の対称性に着目する.

$\theta=\dfrac{3}{10}\pi$ のとき，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると



$$a=7\cos\frac{3}{10}\pi+3\cos\frac{7}{10}\pi=4\cos\frac{3}{10}\pi$$

$$b=7\sin\frac{3}{10}\pi-3\sin\frac{7}{10}\pi=4\sin\frac{3}{10}\pi$$

$$\frac{1}{2}ab=8\sin\frac{3}{10}\pi\cos\frac{3}{10}\pi=4\sin\frac{3}{5}\pi$$

x	$a \longrightarrow 10$
θ	$\frac{3\pi}{10} \longrightarrow 0$

$\dfrac{dx}{d\theta}=-7\left(\sin\theta+\sin\dfrac{7}{3}\theta\right)$ より

$$\begin{aligned}
\int_a^{10} y\,dx &= \int_{\frac{3}{10}\pi}^{0}\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\cdot(-7)\left(\sin\theta+\sin\frac{7}{3}\right)\,d\theta \\
&= 7\int_0^{\frac{3}{10}\pi}\left(7\sin^2\theta-3\sin^2\frac{7}{3}\theta+4\sin\frac{7}{3}\theta\sin\theta\right)d\theta \\
&= \frac{49}{2}\int_0^{\frac{3}{10}\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta-\frac{21}{2}\int_0^{\frac{3}{10}\pi}\left(1-\cos\frac{14}{3}\theta\right)d\theta \\
&\qquad +14\int_0^{\frac{3}{10}\pi}\left(\cos\frac{4}{3}\theta-\cos\frac{10}{3}\theta\right)d\theta \\
&= \frac{49}{2}\left[\ \theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\ \right]_0^{\frac{3}{10}\pi}-\frac{21}{2}\left[\ \theta-\frac{3}{14}\sin\frac{14}{3}\theta\ \right]_0^{\frac{3}{10}\pi} \\
&\qquad +14\left[\ \frac{3}{4}\sin\frac{4}{3}\theta-\frac{3}{10}\sin\frac{10}{3}\theta\ \right]_0^{\frac{3}{10}\pi} \\
&= \frac{21}{5}\pi-4\sin\frac{3}{5}\pi
\end{aligned}$$

したがって $\qquad \dfrac{S}{2}=\dfrac{1}{2}ab+\displaystyle\int_a^{10} y\,dx=\frac{21}{5}\pi$

以下，前ページと同様.

3.4　微分方程式

次の各問いに答えよ．

(1) α を定数とする．微分方程式 $y' = \alpha y$ $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$ の解が $y = Ce^{\alpha x}$ (C は定数) であることを証明せよ．

(2) (1) の結論を利用して，**オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$** を証明せよ．

(3) 放射性同位体の原子数は，時間の経過により (原子の崩壊)，その原子数は減少する．原子数 N は時刻 t の減少関数で，その変化率は $\dfrac{dN}{dt} < 0$ で，N に比例し

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

であることが分かっている (崩壊定数 λ は物質の種類による固有の定数)．

$t = 0$ のとき $N = N_0$，$t = T$ (T は半減期) のとき $N = \dfrac{1}{2}N_0$ であるとすると

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

が成り立つことを (1) の結論を利用して証明せよ．

(4) $\alpha \neq \beta$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とするとき，微分方程式

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

の解は，$y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$ (C_1, C_2は定数) であることを証明せよ．

(5) $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とするとき，微分方程式

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

の解は，$y = (C_1x + C_2)e^{\alpha x}$ (C_1, C_2は定数) であることを証明せよ．

(6) ばね定数 k[N/m] のばねの一端が固定され，他端に質量 m[kg] のおもりが付けられ，なめらかな水平面を運動している．自然長の位置を原点 O とし，ばねが伸びる向きを変位 x[m] の正の向きとし，おもりの加速度を a[m/s^2] とすると，次式が成り立つ．

$$ma = -kx$$

このとき，$a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ より，$a = x''$ とおくと

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

となる．初期条件が $t = 0$ のとき $x = A$，$v = \dfrac{dx}{dt} = 0$ とすると

$$x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

であることを (2)，(4) の結論を用いて証明せよ．

(7) a, b を実数とするとき ($b \neq 0$)，微分方程式

$$y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$$

の解は，$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)$ (C_1, C_2は定数) であることを (2)，(4) の結論を利用して証明せよ．

解答　(1) $y' - \alpha y = 0$ の両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y'e^{-\alpha x} + y(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})' = 0$$

これを積分すると　$ye^{-\alpha x} = C$　よって　$y = Ce^{\alpha x}$　(C は定数)

(2) $y = \cos x + i\sin x$ とおき，x で微分すると

$$y' = -\sin x + i\cos x = i(\cos x + i\sin x) = iy$$

これを解いて　$y = Ce^{ix}$ (C は定数)

$x = 0$ のとき $y = 1$ であるから　$1 = C$　よって　$y = e^{ix}$

したがって　　$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

(3) (1) の結論を利用して　　$N = Ce^{-\lambda t}$

$t = 0$ のとき $N = N_0$ であるから，$C = N_0$ より

$$N = N_0e^{-\lambda t} \quad \cdots ①$$

また，$t = T$ のとき $N = \dfrac{1}{2}N_0$ より　$\dfrac{1}{2}N_0 = N_0e^{-\lambda T}$

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \quad \cdots ②$$

①，② から　　$N = N_0(e^{-\lambda})^t = N_0\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}\right\}^t = N_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

(4) 与式から　$(y'-\beta y)'-\alpha(y'-\beta y)=0$　両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(y'-\beta y)'e^{-\alpha x}+(y'-\beta y)(e^{-\alpha x})'=0 \quad \text{ゆえに} \quad \{(y'-\beta y)e^{-\alpha x}\}'=0$$

これを積分すると

$$(y'-\beta y)e^{-\alpha x}=A_1 \quad \text{ゆえに} \quad y'-\beta y=A_1e^{\alpha x} \quad (A_1\text{は定数})$$

となる．同様にして　　$y'-\alpha y=A_2e^{\beta x}$　$(A_2\text{は定数})$
よって，上の 2 式から，y' を消去すると

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x} \quad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$

(5) 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y''e^{-\alpha x}+2y'(e^{-\alpha x})'+y(e^{-\alpha x})''=0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})''=0$$

これを 2 回積分すると

$$ye^{-\alpha x}=C_1x+C_2 \quad \text{よって} \quad y=(C_1x+C_2)e^{\alpha x} \quad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$

別解 (4) で示した $y'-\beta y=A_1e^{\alpha x}$ に $\beta=\alpha$ を代入し，両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y'e^{-\alpha x}-\alpha ye^{-\alpha x}=A_1 \quad \text{すなわち} \quad (ye^{-\alpha x})'=A_1$$

これを x について積分すると

$$ye^{-\alpha x}=A_1x+A_2 \quad \text{よって} \quad y=(A_1x+A_2)e^{\alpha x} \quad (A_1,\ A_2\text{は定数})$$

(6) $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおき，$\alpha=i\omega$，$\beta=-i\omega$ とすると，(4) の結論から

$$x=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t}=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t},$$
$$x'=i\omega(C_1e^{i\omega t}-C_2e^{-i\omega t})$$

初期条件から　$C_1+C_2=A,\ C_1-C_2=0$　ゆえに　$C_1=C_2=\dfrac{A}{2}$
$x=\dfrac{A}{2}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})$ となり，これに (2) の結論を適用すると

$$x=A\cos\omega t=A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

(7) 特性方程式 $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2 = 0$ を解くと　$\lambda = a \pm bi$

微分方程式 $y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$ は

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

となるから，$\alpha = a + bi$，$\beta = a - bi$ として，(4) の結論に適用すると (A_1, A_2 は定数)

$$\begin{aligned} y &= A_1 e^{(a+bi)x} + A_2 e^{(a-bi)x} \\ &= e^{ax}\{A_1 e^{bxi} + A_2 e^{-bx} i\} \\ &= e^{ax}\{A_1(\cos bx + i \sin bx) + A_2(\cos bx - i \sin bx)\} \\ &= e^{ax}\{(A_1 + A_2)\cos bx + (A_1 - A_2)i \sin bx\} \end{aligned}$$

ここで，$C_1 = A_1 + A_2$，$C_2 = (A_1 - A_2)i$ とおくと

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。(九大理系 2023 年 4)

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A) すべての x，y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$

(B) すべての x，y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$

(C) $f(0) \neq 0$

(D) $f(x)$，$g(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$，$g'(0) = 1$

①条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ がわかる。以上のことから
②$f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で, $f'(x) = -g(x)$，$g'(x) = f(x)$ が成立する ことが示される。
③上のことから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 1$ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A)，(B)，(C)，(D) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x$，$g(x) = \sin x$ であることが示される。

さらに，a，b を実数で $b \neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)′ $f(x)$，$g(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = a$，$g'(0) = b$

におきかえて，条件 (A)，(B)，(C)，(D)′ を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも，条件 (A)，(B)，(C) から $f(0) = 1$，$g(0) = 0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，④条件 (A)，(B)，(C)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x) =$ ア，$g(x) =$ イ が得られる。

(1) 下線部 ① について，$f(0) = 1$，$g(0) = 0$ となることを示せ。

(2) 下線部 ② について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，$f'(x) = -g(x)$ となることを示せ。

(3) 下線部 ③ について，下線部 ①，下線部 ② の事実を用いることにより，$\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ となることを示せ。

(4) 下線部 ④ について，条件 (B)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ に置き換えた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

(B) すべての $x,\ y$ について $q(x + y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$

(D) $p(x)$，$q(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $p'(0) = 0$，$q'(0) = 1$

を満たすことを示せ。空欄 ア , イ に入る関数を求めよ。

解答 (1) 条件式 (A)，(B) に $x=y=0$ を代入すると

$$f(0)=f(0)^2-g(0)^2,\quad g(0)=2f(0)g(0) \qquad (*)$$

上の第 2 式から　　$\{2f(0)-1\}g(0)=0$

したがって　　$f(0)=\dfrac{1}{2}$　または　$g(0)=0$

- $f(0)=\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ の第 1 式に代入して整理すると　$g(0)^2=-\dfrac{1}{4}$

  $g(0)$ は実数値であるから，$f(0)=\dfrac{1}{2}$ は不適.
- $g(0)=0$ のとき，これを $(*)$ の第 1 式に代入して整理すると

$$f(0)\{f(0)-1\}=0 \quad f(0)\neq 0 \text{ に注意して} \quad f(0)=1$$

よって，題意は成立する.

(2) (1) の結論および条件 (A)，(D) より

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}-g(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}\right\}\\ &=f(x)f'(0)-g(x)g'(0) \qquad (**)\\ &=f(x)\cdot 0-g(x)\cdot 1=-g(x) \end{aligned}$$

(3) (2) と同様に，(1) の結論および条件 (B)，(D) より

$$\begin{aligned} g'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+g(x)f(h)-g(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\}\\ &=f(x)g'(0)+g(x)f'(0) \qquad (***)\\ &=f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 0=f(x) \end{aligned}$$

$\pi(x)=\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)$ とおくと，(2) および上式から

$$\begin{aligned} \pi'(x)&=\{f(x)+ig(x)\}'(\cos x-i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)'\\ &=\{f'(x)+ig'(x)\}(\cos x-i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(-\sin x-i\cos x)\\ &=\{-g(x)+if(x)\}(\cos x-i\sin x)-i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)\\ &=i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)-i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=0 \end{aligned}$$

$\pi(x)$ は定数関数であるから　$\pi(x)=\pi(0)=\{f(0)+ig(0)\}\cdot 1=1$

よって　　$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$

(4) (3) の結論から　$f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$
$f(x),\ g(x)$ は実関数 (実数値関数) であるから

$$f(x)=\cos x,\quad g(x)=\sin x$$

ここで，$\varphi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\varphi'(x)=f'(x)+ig'(x)=-g(x)+if(x)=i\{f(x)+ig(x)\}=i\varphi(x)$$

$\varphi(0)=\cos 0+i\sin 0=1$ および上式を満たす $\varphi(x)$ を求める．

$$\varphi'(x)e^{-ix}-i\varphi(x)e^{-ix}=0\quad\text{ゆえに}\quad\{\varphi(x)e^{-ix}\}'=0$$

したがって　$\varphi(x)e^{-ix}=C$　(C は積分定数)　ゆえに　$\varphi(x)=Ce^{ix}$
$\varphi(0)=1$ より　$C=1$　すなわち　$\varphi(x)=e^{ix}$
$\varphi(x)=f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$ であるから

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad (\#)$$

(#) により，条件 (A)，(B)，(C)，(D′) を満たす関数 $f(x),\ g(x)$ を求める．
(D′) を (∗∗)，(∗ ∗ ∗) に代入すると

$$f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)$$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=f'(x)+ig'(x)=\{af(x)-bg(x)\}+i\{bf(x)+ag(x)\}\\&=(a+bi)\{f(x)+ig(x)\}=(a+bi)\phi(x)\end{aligned}$$

$\phi(0)=f(0)+ig(0)=1+i\cdot 0=1$ および上式を満たす $\phi(x)$ を求める．

$$\phi'(x)e^{-(a+bi)x}-(a+bi)e^{-(a+bi)x}=0\quad\text{ゆえに}\quad\{\phi(x)e^{-(a+bi)x}\}'=0$$

したがって

$$\phi(x)e^{-(a+bi)x}=C_0\ \ (C_0\text{は積分定数})\quad\text{ゆえに}\quad\phi(x)=C_0e^{(a+bi)x}$$

$\phi(0)=1$ より　$C_0=1$　すなわち　$\phi(x)=e^{(a+bi)x}$
(#) より　　$\phi(x)=e^{ax}e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$
$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ であるから ($f(x),\ g(x)$ は実関数)

$$\boldsymbol{f(x)=e^{ax}\cos bx,\quad g(x)=e^{ax}\sin bx}$$

これから　$f\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\cos x,\quad g\left(\dfrac{x}{b}\right)=e^{\frac{a}{b}x}\sin x$

これらを $p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\dfrac{x}{b}\right),\ \ q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\dfrac{x}{b}\right)$ に代入すると

$$p(x)=\cos x,\quad q(x)=\sin x$$

［**B の証明**］ このとき，加法定理を用いて

$$\begin{aligned}q(x+y)&=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\&=q(x)p(y)+p(x)q(y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)\end{aligned}$$

［**D の証明**］ $p'(x)=-\sin x,\ \ q'(x)=\cos x$ より

$$p'(0)=0,\ \ q'(0)=1$$　　［証終］

補足　本題の線形の連立微分方程式

$$\begin{aligned}&f(0)=1,\ g(0)=0,\ f'(0)=a,\ g'(0)=b,\\&f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)\end{aligned}$$

から $g(x),\ g'(x)$ を消去して，2 階の微分方程式

$$f(0)=1,\ f'(0)=a,\ f''(x)-2af'(x)+(a^2+b^2)f(x)=0$$

を解いてもよい．特性方程式 $X^2-2aX+a^2+b^2=0$ の解を

$$\alpha=a+bi,\quad \beta=a-bi$$

とおくと　$f(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$　$(C_1,\ C_2$ は積分定数$)$[7]

このとき，$f(0)=1,\ f'(0)=a$ より

$$C_1+C_2=1,\quad \alpha C_1+\beta C_2=a$$

上の第 2 式について　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}(C_1+C_2)+\dfrac{\alpha-\beta}{2}(C_1-C_2)=a$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=a,\ \dfrac{\alpha-\beta}{2}=bi$ を代入すると　$a(C_1+C_2)+bi(C_1-C_2)=a$

$C_1+C_2=1,\ b\neq0$ より　$C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$　よって　$f(x)=e^{ax}\cos bx$

同様に，2 階の微分方程式

$$g(0)=0,\ g'(0)=b,\ g''(x)-2ag'(x)+(a^2+b^2)g(x)=0$$

を解くと，$g(x)=e^{ax}\sin bx$ を得る．

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2010.pdf (p.17 例 2)

3.5　連続する自然数のべき乗和

定理 0

自然数 i に対して，$S_i(n)=\sum_{k=1}^{n}k^i$ とすると，$S_i(n)$ は，n の $i+1$ 次式である．

証明

i) $S_1(n)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ であるから，$i=1$ のとき，定理 0 が成り立つ．

ii) $1\leqq i\leqq p-1$ の自然数について，定理 0 が成り立つと仮定すると

$$(k+1)^{p+1}-k^{p+1}=1+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{i+1}{j}k^j+(p+1)k^p$$

ゆえに
$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^{p+1}-k^{p+1}\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{1+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p+1}{j}k^j+(p+1)k^p\right\}$$
$$(n+1)^{p+1}-1=n+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_j(n)+(p+1)S_p(n)$$

したがって
$$S_p(n)=\frac{1}{p+1}\left\{(n+1)^{p+1}-\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_j(n)-n-1\right\}$$

よって，$S_p(n)$ は，n の $p+1$ 次式である．

i)，ii) より，定理 0 は成り立つ．　　証終

自然数 i について
$$S_i(1)=1,\quad S_i(k)-S_i(k-1)=k^i \tag{13}$$
であるから，(13) に $k=1,\ 0$ を代入すると

$$S_i(1)-S_i(0)=1^i,\quad S_i(0)-S_i(-1)=0^i\quad\text{ゆえに}\quad S_i(0)=S_i(-1)=0$$

因数定理により，$S_i(n)$ は $n(n+1)$ を因数にもつ．

実際,

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$S_4(n) = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$
$$S_5(n) = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$
$$S_6(n) = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$
$$S_7(n) = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$
$$S_8(n) = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$
$$S_9(n) = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)$$
$$S_{10}(n) = \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)$$

また，$S_0(n) = \sum_{k=1}^{n} k^0 = n$ と定義する．

注意 最初に，$S_i(n)$ の i を 0 以上の整数としなかったのは，$i=0$ のとき (13) に $k=0$ を代入すると，0^0 が現れるからである．

一般に，$x^0x^1 = x^1$ より，$x \neq 0$ のとき，$x^0 = \dfrac{x}{x} = 1$.

しかし，$x=0$ のとき，0^0 は不定形 $\dfrac{0}{0}$ となり，定義されない．

(13) を微分すると　　$S_i'(k) - S_i'(k-1) = ik^{i-1}$

上式の k について，1 から n まで辺々を加えると

$$S_i'(n) - S_i'(0) = iS_{i-1}(n) \quad \text{ゆえに} \quad S_i'(n) = iS_{i-1}(n) + S_i'(0)$$

$S_0(n) = n$ を微分すると $S_0'(n) = 1$．また，$S_i'(0)$ は定数であるから

$$S_0'(n) = B_0 = 1, \quad S_i'(0) = (-1)^i B_i$$

とおくと (定数 B_i は後述のベルヌーイ数)

$$S_i'(n) = iS_{i-1}(n) + (-1)^i B_i \tag{14}$$

ファウルハーバー (Faulhaber) の定理

i を 0 以上の整数とすると　$S_i(n) = \dfrac{1}{i+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i+1}{j}B_j n^{i+1-j}$　$\cdots(*)$

ただし，$\binom{i+1}{j}$ は 2 項係数 ${}_{i+1}\mathrm{C}_j$ とする．(B_i は後述のベルヌーイ数)

証明　i) $i=0$ のとき，$B_0=1$ であるから　$S_0(n)=B_0 n$

よって，$i=0$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $i=m$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m+1}{j}B_j n^{m+1-j}$$

が成り立つと仮定すると，(14) より

$$\begin{aligned} S'_{m+1}(n) &= (m+1)S_m(n) + (-1)^{m+1}B_{m+1} \\ &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m+1}{j}B_j n^{m+1-j} + (-1)^{m+1}B_{m+1} \end{aligned}$$

$S_{m+1}(n)$ の定数項が 0 になることに注意して，これを積分すると

$$\begin{aligned} S_{m+1}(n) &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{\binom{m+1}{j}}{m+2-j}B_j n^{m+2-j} + (-1)^{m+1}B_{m+1}n \\ &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{\binom{m+2}{j}}{m+2}B_j n^{m+2-j} + (-1)^{m+1}B_{m+1}n \\ &= \frac{1}{m+2}\sum_{j=0}^{m+1}(-1)^j\binom{m+2}{j}B_j n^{m+2-j} \end{aligned}$$

よって，$i=m+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

i)，ii) から，0 以上の整数 i に対して，$(*)$ が成り立つ．　**証終**

$(*)$ に $n=-1$ を代入すると

$$\begin{aligned} S_i(-1) &= \frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i+1}{j}B_j(-1)^{i+1-j} \\ &= \frac{(-1)^{i+1}}{i+1}\sum_{j=0}^{i}\binom{i+1}{j}B_j \end{aligned}$$

自然数 i に対して，$S_i(-1)=0$ であるから $\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\binom{i+1}{j}B_j=0$

具体的に示すと

$$\begin{aligned} &i=1\text{ のとき} && B_0+2B_1=0 \\ &i=2\text{ のとき} && B_0+3B_1+3B_2=0 \\ &i=3\text{ のとき} && B_0+4B_1+6B_2+4B_3=0 \\ &i=4\text{ のとき} && B_0+5B_1+10B_2+10B_3+5B_4=0 \\ &i=5\text{ のとき} && B_0+6B_1+15B_2+20B_3+15B_4+6B_5=0 \\ &i=6\text{ のとき} && B_0+7B_1+21B_2+35B_3+35B_4+21B_5+7B_6=0 \\ &i=7\text{ のとき} && B_0+8B_1+28B_2+56B_3+70B_4+56B_5+28B_6+8B_7=0 \\ & && \vdots \end{aligned}$$

$B_0=1$ および上の諸式から

$$B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\ B_7=0,\ \cdots$$

ここに得た $B_j\ (j=0,1,2,\ldots)$ をベルヌーイ数 (Bernoulli number) という．

上の結果および $(*)$ から，$S_i(n)$ の n^{i+1}(最高次) の係数が $\dfrac{1}{i+1}$，n^i の係数が $\dfrac{1}{2}$ であることがわかる．例えば，

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{5}{j}B_jn^{5-j} \\ &= \frac{1}{5}\left(B_0n^5-5B_1n^4+10B_2n^3-10B_3n^2+5B_4n\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n\right) \\ &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \end{aligned}$$

3.6　ベルヌーイ数

ベルヌーイ数 B_j は，次のマクローリン展開 (テイラー展開) の展開係数として[8]

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j}{j!}x^j \quad \cdots(**)$$

と定義される．例えば，B_0，B_1 は次のようになる (ロピタルの定理を使用)．

$$B_0=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=1$$
$$B_1=\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{2(e^x-1)e^x}=-\frac{1}{2}$$

B_j は前ページで示した漸化式を満たす．

証明 定義式から　　$e^xf(x)-f(x)=x$

ライプニッツの公式を利用して，上式を j 回微分すると

$$\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}e^xf^{(k)}(x)-f^{(j)}(x)=(x)^{(j)} \qquad \cdots(**)$$

$(**)$ の右辺は，$j=1$ のとき 1，$j>1$ のとき 0 であるから，$x=0$ とすると

$$j=1\text{ のとき}\quad B_0=1 \qquad\qquad j>1\text{ のとき}\quad \sum_{k=0}^{j-1}\binom{j}{k}B_k=0$$

よって，B_j は前ページの漸化式と一致する．　　**証終**

また，$g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，$h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ とおくと

$$g(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j}{j!}\{x^j+(-x)^j\}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_{2j}}{(2j)!}x^{2j}$$
$$h(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{e^x-1}-\frac{-x}{e^{-x}-1}\right)=-\frac{x}{2},$$
$$h'(x)=-\frac{1}{2},\quad h^{(j)}(x)=0\ (j>1)$$

j が奇数のとき $g^{(j)}(0)=0$ である．とくに，j が 3 以上の奇数のとき

$$B_j=f^{(j)}(0)=g^{(j)}(0)+h^{(j)}(0)=0+0=0$$

[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf

前ページの $f(x)$ は B_n の (指数型) 母関数である [9] .

証明 等式 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}\right)(e^x-1) = x$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}\right)(e^x-1) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{B_j}{j!}\frac{1}{(n-j)!}\right)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j\right)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

$n>1$ のとき, $\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j = 0$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j\right)\frac{x^n}{n!} = x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j\right)\frac{x^n}{n!} = x$$ 証終

B_n の一般項を示す準備として, 以下を述べる.

http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf

の p17(3) において, m 個の要素を異なる n 個のグループに分ける (各グループには, 少なくとも 1 個の要素がある) 総数 ${}_m\mathrm{Q}_n$ は

$${}_m\mathrm{Q}_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}k^m \tag{15}$$

となることを示した. このとき, n 個のグループの区別をなくした総数を $\left\{ {m \atop n} \right\}$ とすると

$$\left\{ {m \atop n} \right\} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}k^m \tag{16}$$

となる. なお, $0<m<n$ のとき, (15) より, (16) の値は 0 になる.

[9] 数列 $\{a_n\}$ の (指数型) 母関数は $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ である.

$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$ が成り立つように，$\left\{ {m \atop n} \right\}$ についても，次の漸化式が成り立つ．

$$\left\{ {m \atop n} \right\} = \left\{ {m-1 \atop n-1} \right\} + n\left\{ {m-1 \atop n} \right\} \tag{17}$$

m 個の要素を n 個のグループに分割するには，次の 2 つの手順に分けるとよい．

i) $m-1$ 個の要素を $n-1$ 個のグループに分割し，m 番目の要素を n 番目のグループとして単独で追加する $\left\{ {m-1 \atop n-1} \right\}$ 通り．

ii) $m-1$ 個の要素を n 個のグループに分割し，m 番目の要素を n 個のグループのどれかに挿入する $n\left\{ {m-1 \atop n} \right\}$ 通り．

i)，ii) より，漸化式 (17) が成り立つことが分かる．

さらに，初期値 $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$，$\left\{ {m \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop n} \right\} = 0$ $(m,\ n \neq 0)$ で定義すると，漸化式 (17) から，3 つの数 $\left\{ {m \atop n} \right\}$，$\left\{ {m-1 \atop n-1} \right\}$，$\left\{ {m-1 \atop n} \right\}$ のうち 2 つを決めれば残りが決まる．ただし，$\left\{ {m-1 \atop n} \right\}$ の前に n がかかっているが，$n = 0$ のときは，残りの 2 つから $\left\{ {m-1 \atop n} \right\}$ を求めることはできないため，初期値で与えてある．漸化式 (17) からすべての整数 m，n に拡張して $\left\{ {m \atop n} \right\}$ の値が定まる．これを第 2 種スターリング数 (Stirling number of the second kind) という．

$m \geqq 1,\ n \geqq 0$ のとき，(16) は，

$$\left\{ {m \atop n} \right\} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m \tag{18}$$

としてもよい．ここで，$0^0 = 1$ で定義すると，(18) は $m,\ n \geqq 0$ で成り立つ．

注意 e^x の級数表示について

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{または} \quad e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

と表される．$x = 0$ のときを考えると第 2 式のように表すべきであるが，$0! = 1$ のように，便宜的に $0^0 = 1$ と定義しておけば，第 1 式でもよい．しかし，第 1 式で書かれる場合が一般的であり，その際，$0^0 = 1$ と判断する必要がある．

(18) の m と n を入れ替えた

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} k^n \tag{19}$$

の m を 0 以上とすると，$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ を第 n 項とする (指数型) 母関数は

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} k^n \right\} \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \right) \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} e^{kx} \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-e^x)^k \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} (1 - e^x)^m = \frac{1}{m!} (e^x - 1)^m
\end{aligned} \tag{20}$$

ここで，関数 $\lambda(t) = \log(1-t)$ の第 m 次導関数は　$\lambda^{(m)}(t) = -\dfrac{(m-1)!}{(1-t)^m}$
ゆえに，$\log(1-t)$ のマクローリン展開は

$$\log(1-t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m}$$

$t = 1 - e^x$ をこれに代入すると

$$x = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^x)^m}{m}$$

上式により，$(**)$ は (20) を利用して

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x - 1} &= -\frac{1}{e^x - 1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^x)^m}{m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(e^x - 1)^{m-1}}{n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(e^x - 1)^m}{m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \right) \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

したがって
$$B_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$$

これに (19) を代入することにより，次式を得る．

$$B_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} k^n \tag{21}$$

注意

ベルヌーイ数は，連続する自然数のべき乗和を定式化する際の展開係数としてヤコブ・ベルヌーイ (1654–1705) が著書 Ars Conjectandi(推測術) で導入したものである．

和算家の関孝和 (?–1708) の没後，弟子の荒木村英 (1640–1718) 等が，関の遺稿を整理した『括要算法』にべき乗和の展開係数としてベルヌーイ数について述べられていた．そのため，ベルヌーイ数を関・ベルヌーイ数と書いている文献もある．

関，ベルヌーイは，独立した研究成果であったが，ともに

$$B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = -\frac{1}{42},\ \cdots$$

という結果を残していることから

$$B_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} k^n \tag{22}$$

のタイプの定義をし，(∗) は

$$S_i(n) = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^{i} \binom{i+1}{j} B_j n^{i+1-j}$$

となっている．

古い専門書においては，関・ベルヌーイのオリジナルの定義による (22) を採用したものが多かったが，近年では (21) を採用しているものが多いようである．(21) と (22) は，n が偶数のときは一致するが，n が奇数のときは符号が異なる．しかしながら，n が 3 以上の奇数のときは，B_n は 0 であるから，B_1 の符号をみて，(21) と (22) のどちらの定義に基づいているかに注意する必要がある．

4　数学 A

4.1　図形の性質 (数学 A)

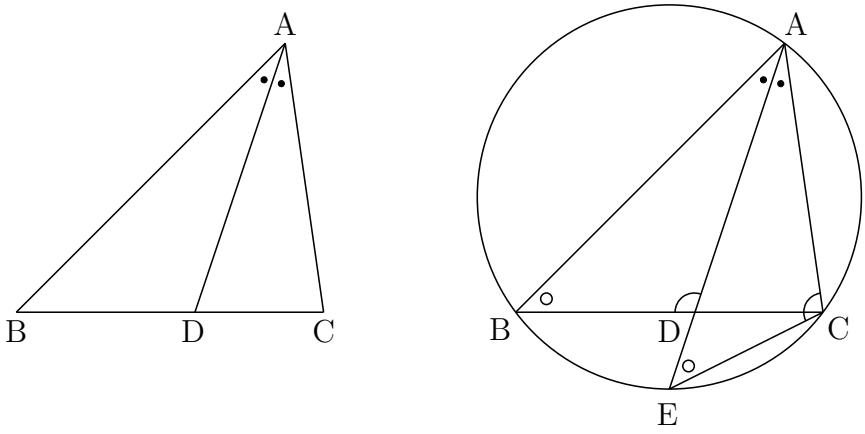
4.1.1　角の二等分線

三角形の角の二等分線に関する公式

△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

$$\mathbf{AD^2 = AB{\cdot}AC - BD{\cdot}DC}$$

証明 右下の図のように △ABC の外接円と AD の延長との交点を E とする.



△ABD ∽ △AEC より

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AD} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AB{\cdot}AC} = \mathrm{AD{\cdot}AE}$$

AE = AD + DE より

$$\mathrm{AB{\cdot}AC} = \mathrm{AD}(\mathrm{AD} + \mathrm{DE}) = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD{\cdot}DE}$$

方べきの定理により，AD·DE = BD·DC であるから

$$\mathrm{AB{\cdot}AC} = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD{\cdot}DC} \quad \text{よって} \quad \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB{\cdot}AC} - \mathrm{BD{\cdot}DC}$$

証終

4.1.2　複比と調和点列

複比 (cross ratio)

同一直線上の 4 点 A，P，B，Q に対して複比を

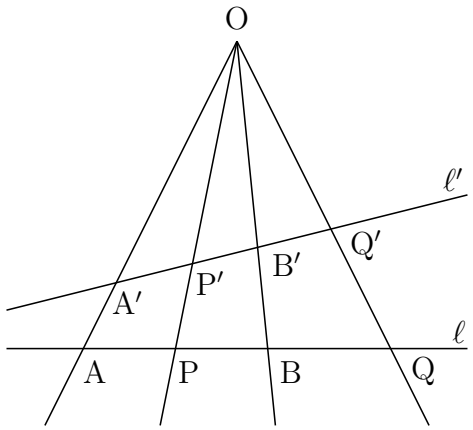
$$(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}}$$

と定義する．P，Q はそれぞれ AB の内分点，外分点である．

定理 8 O から伸びる四本の半直線がある。別の直線 ℓ がこれらの半直線と A，P，B，Q で交わるとする。このとき，複比 $(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{P},\mathrm{Q})$ は ℓ の取り方によらない不変量である。

補足 下の図において，次式が成立することである．

$$\mathbf{\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{AQ} = \frac{A'P'}{B'P'}\cdot\frac{B'Q'}{A'Q'}}$$



証明

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}} = \frac{\triangle\mathrm{OAP}}{\triangle\mathrm{OPB}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\sin\angle\mathrm{AOP}}{\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{POB}} = \frac{\mathrm{OA}\sin\angle\mathrm{AOP}}{\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{POB}},$$
$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}} = \frac{\triangle\mathrm{OBQ}}{\triangle\mathrm{OAQ}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OQ}\sin\angle\mathrm{BOQ}}{\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OQ}\sin\angle\mathrm{AOQ}} = \frac{\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{BOQ}}{\mathrm{OA}\sin\angle\mathrm{AOQ}}$$

上の 2 式の辺々を掛けると　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}} = \dfrac{\sin\angle\mathrm{AOP}\sin\angle\mathrm{BOQ}}{\sin\angle\mathrm{POB}\sin\angle\mathrm{AOQ}}$

この値は，角のみで決まるので ℓ の取り方によらない．　証終

調和点列

同一直線上に 4 点 A，P，B，Q がこの順にあり，

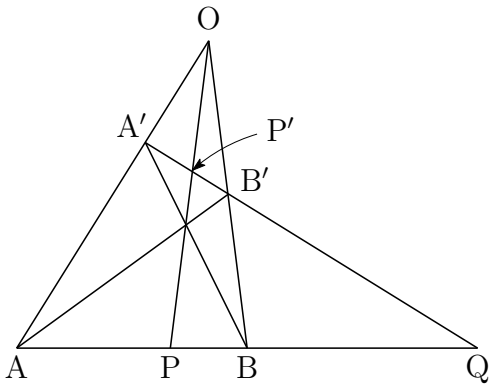
$$(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}} = 1$$

を満たすとき，4 点 A，P，B，Q を**調和点列**という．上式を

$$\frac{2}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\mathrm{AP}} + \frac{1}{\mathrm{AQ}}$$

と表記することもできる．

右の図の △OAB にチェバの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{A'A}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{B'O}} = 1$$

また，△OAB と直線 A′Q についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{A'A}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}\cdot\frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{B'O}} = 1$$

上の第 1 式の辺々を第 2 式の辺々で割ると

$$(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}} = 1$$

さらに，定理 8 により　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}} = \dfrac{\mathrm{A'P'}}{\mathrm{B'P'}}\cdot\dfrac{\mathrm{B'Q}}{\mathrm{A'Q}} = 1$

P が AB を $m:n$ に内分する点であるとき $(m \neq n)$，Q は AB を $m:n$ に外分する点である．同時に，P′，Q も A′B′ をそれぞれ $m:n$ に内分，外分する点である．

4 点 A，P，B，Q が調和点列であるから，4 点 A′，P′，B′，Q も調和点列である．

調和点列 A，P，B，Q について，AP·BQ = BP·AQ であるから，これに

$$\mathrm{BQ} = \mathrm{AQ} - \mathrm{AB},\quad \mathrm{BP} = \mathrm{AB} - \mathrm{AP}$$

を代入すると　$\mathrm{AP}\cdot(\mathrm{AQ} - \mathrm{AB}) = (\mathrm{AB} - \mathrm{AP})\cdot\mathrm{AQ}$

$$2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ} = \mathrm{AB}(\mathrm{AP} + \mathrm{AQ}) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\mathrm{AP}} + \frac{1}{\mathrm{AQ}}$$

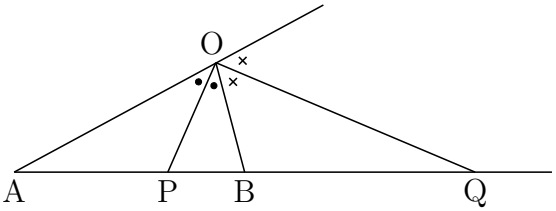
よって

$$(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}} = 1 \iff \frac{2}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\mathrm{AP}} + \frac{1}{\mathrm{AQ}}$$

調和点列の代表的な性質を 2 つ紹介する.

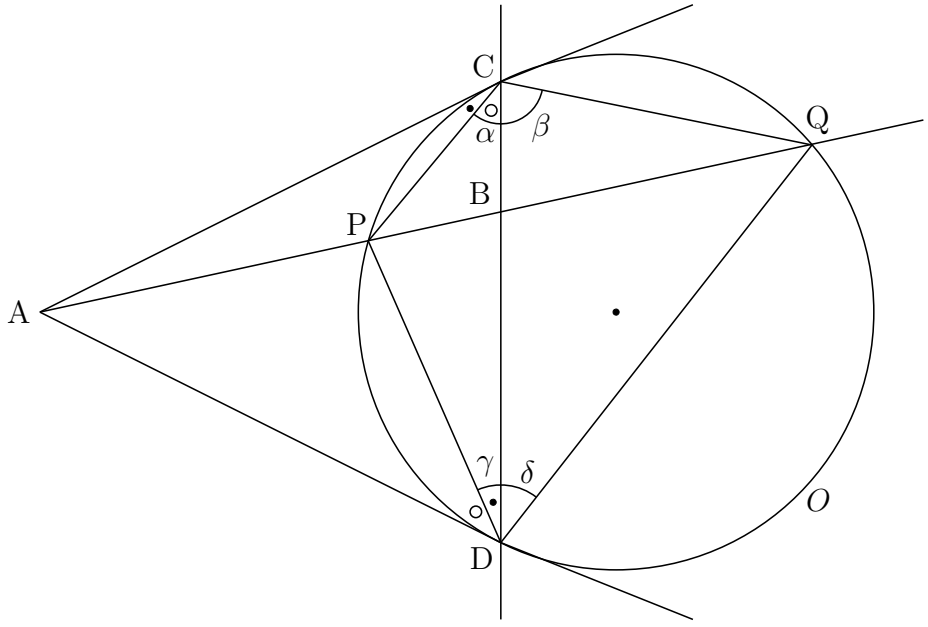
(1) 図の △OAB の ∠AOB の角の二等分線 OP と外角の二等分線 OQ について

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}\quad\text{ゆえに}\quad(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{P},\mathrm{Q})=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}}=1$$



(2) 図の円 O の極 A と極線 CD について，次式が成立する

$$(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{P},\mathrm{Q})=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}}=1$$



証明 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180^\circ$ に注意して

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}}=\frac{\triangle\mathrm{CAP}}{\triangle\mathrm{CPB}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{CBQ}}{\triangle\mathrm{CAQ}}=\frac{\mathrm{CA}\sin\gamma}{\mathrm{CB}\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{CB}\sin\beta}{\mathrm{CA}\sin(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\delta},$$
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}}=\frac{\triangle\mathrm{DAP}}{\triangle\mathrm{DPB}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{DBQ}}{\triangle\mathrm{DAQ}}=\frac{\mathrm{DA}\sin\alpha}{\mathrm{DB}\sin\gamma}\cdot\frac{\mathrm{DB}\sin\delta}{\mathrm{DA}\sin(\alpha+\gamma+\delta)}=\frac{\sin\alpha\sin\delta}{\sin\gamma\sin\beta}$$

上の 2 式の辺々を掛けると $\left(\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}}\right)^2=1$ よって $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AQ}}=1$ **証終**

4.2　整数の性質 (数学 A)

4.2.1　ユークリッドの互除法

- 千葉大 2022 年 4 (ユークリッドの互除法)

5　数学 B

5.1　数列 (数学 B)

5.1.1　隣接 3 項間

数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_{n+2}-pa_{n+1}+qa_n=0$ の特性方程式

$$x^2-px+q=0$$

の解を α，β とすると，与えられた漸化式は　　$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

これから　　$\begin{cases} a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \\ a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \end{cases}$

ゆえに　　$\begin{cases} a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1) \\ a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1) \end{cases}$　　$\cdots(*)$

i) $\alpha\neq\beta$ のとき，$(*)$ の第 1 式から第 2 式を引くことにより

$$a_n=\frac{(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}-(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$$

ii) $\alpha=\beta$ のとき，$(*)$ から　　$\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\dfrac{a_n}{\alpha^n}=\dfrac{a_2}{\alpha^2}-\dfrac{a_1}{\alpha}$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{\alpha}$，公差 $\dfrac{a_2}{\alpha^2}-\dfrac{a_1}{\alpha}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{a_1}{\alpha}+(n-1)\left(\frac{a_2}{\alpha^2}-\frac{a_1}{\alpha}\right)$$

よって　　$a_n=\alpha^{n-1}\left\{a_1+(n-1)\left(\dfrac{a_2}{\alpha}-a_1\right)\right\}$

i)，ii) の結果から，定数 A，B，C，D を用いて

$\alpha\neq\beta$ のとき　$\boldsymbol{a_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}}$

$\alpha=\beta$ のとき　$\boldsymbol{a_n=(Cn+D)\alpha^{n-1}}$

2014 鹿児島大学 3

r を実数とする．$\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=ra_{n+1}-4a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定められる数列とする．次の各問いに答えよ．

(1) $r=0$ の場合に，以下のそれぞれについて一般項 a_n を n の式で表せ．

(i) n が奇数のとき．

(ii) n が偶数のとき．

(2) $r=5$ の場合に，次の (a)，(b) に答えよ．

(a) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n=a_{n+1}-a_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$
$$c_n=a_{n+1}-4a_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定めるとき，一般項 b_n，c_n を求めよ．

(b) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $r=4$ の場合に，次の (c)，(d) に答えよ．

(c) 数列 $\{d_n\}$ を

$$d_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定めるとき，一般項 d_n を求めよ．

(d) 一般項 a_n を求めよ．

解答 (1) $r=0$ のとき　$a_{n+2}=-4a_n$ より

(i) n が奇数のとき，$n=2m-1$ とおくと　$a_{2m+1}=-4a_{2m-1}$

数列 $\{a_{2m-1}\}$ は，初項 $a_1=1$，公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{2m-1}=(-4)^{m-1}$$

$m=\dfrac{n+1}{2}$ であるから　　$\boldsymbol{a_n=(-4)^{\frac{n-1}{2}}}$

(ii) n が偶数のとき，$n=2m$ とおくと　$a_{2m+2}=-4a_{2m}$

数列 $\{a_{2m}\}$ は，初項 $a_2=3$，公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{2m}=3\cdot(-4)^{m-1}$$

$m=\dfrac{n}{2}$ であるから　　$\boldsymbol{a_n=3\cdot(-4)^{\frac{n-2}{2}}}$

(2) (a) $r=5$ のとき，$a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$ より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n),\quad a_{n+2}-4a_{n+2}=a_{n+1}-4a_n$$

ゆえに　　$b_{n+1}=4b_n$，$c_{n+1}=c_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $a_2-a_1=3-1=2$，公比 4 の等比数列であるから

$$b_n=2\cdot4^{n-1}=\boldsymbol{2^{2n-1}}$$

数列 $\{c_n\}$ は初項 $a_2-4a_1=3-4\cdot1=-1$ および漸化式から

$$c_n=\boldsymbol{-1}$$

(b) (a) の結果から　$a_{n+1}-a_n=2^{2n-1}$,　$a_{n+1}-4a_n=-1$

上の 2 式から，a_{n+1} を消去すると　$a_n=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{(2^{2n-1}+1)}$

(3) (c) $r=4$ のとき，$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$ より

$$\frac{a_{n+2}}{2^{n+2}}-\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}\quad\text{ゆえに}\quad d_{n+1}=d_n$$

数列 $\{d_n\}$ は初項 $\dfrac{a_2}{2^2}-\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{4}$ および漸化式から　$d_n=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$

(d) 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{4}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(n-1)\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{a_n=(n+1)\cdot2^{n-2}}$$

解説　(2) は特性方程式 $x^2-5x+4=0$ の解が 1，4 であるから，一般項を

$$a_n=A+B\cdot4^{n-1}$$

とおける．$a_1=1$，$a_2=3$ であるから

$$A+B=1,\quad A+4B=3\quad\text{これを解いて}\quad A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{3}$$

よって

$$a_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot4^{n-1}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{(1+2^{2n-1})}$$

(3) は特性方程式 $x^2-4x+4=0$ が重解 2 をもつから，一般項を

$$a_n=(Cn+D)\cdot 2^{n-1}$$

とおける．$a_1=1$，$a_2=3$ であるから

$$C+D=1,\quad (2C+D)\cdot 2=3\quad \text{これを解いて}\quad C=D=\frac{1}{2}$$

よって $$a_n=\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=\boldsymbol{(n+1)\cdot 2^{n-2}}$$

(1) は特性方程式 $x^2+4=0$ の解が $\pm 2i$ であるから，一般項を

$$a_n=C(2i)^n+D(-2i)^n$$

とおくと，$a_1=1$，$a_2=3$ であるから

$$2i(C-D)=1,\quad -4(C+D)=3\quad \text{ゆえに}\quad C+D=-\frac{3}{4},\quad (C-D)i=\frac{1}{2}$$

ド・モアブルの定理により

$$\begin{aligned}a_n&=2^n\{Ci^n+D(-i)^n\}\\&=2^n\left\{C\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n+D\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n\right\}\\&=2^n\left\{(C+D)\cos\frac{n}{2}\pi+(C-D)i\sin\frac{n}{2}\pi\right\}\\&=2^n\left(-\frac{3}{4}\cos\frac{n}{2}\pi+\frac{1}{2}\sin\frac{n}{2}\pi\right)\\&=2^{n-2}\left(-3\cos\frac{n}{2}\pi+2\sin\frac{n}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

i) n が奇数のとき，$\cos\dfrac{n}{2}\pi=0$，$\sin\dfrac{n}{2}\pi=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ より

$$a_n=2^{n-2}\cdot 2\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}=(-4)^{\frac{n-1}{2}}$$

ii) n が偶数のとき，$\cos\dfrac{n}{2}\pi=(-1)^{\frac{n}{2}}$，$\sin\dfrac{n}{2}\pi=0$ より

$$a_n=2^{n-2}\cdot(-3)\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}=3\cdot(-4)^{\frac{n-2}{2}}$$

宮崎大学 2007 年 7

数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められるとき，次の各問に答えよ．

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を，n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を，n を用いて表せ．

福岡教育大学 2010 年 7

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たす．

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき次の問いに答えよ．

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ を満たす実数 α，β の組を全て求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

熊大文系 2012 年 2

数列 $\{a_n\}$ に対して次の漸化式が成り立つとする．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ．

(1) 定数 c に対して $b_n = a_n + c$ で定められた数列 $\{b_n\}$ を考える．

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

を満たす c の値を求めよ．

(2) a_n を n の式で表せ．

熊大文系 2022 年 3

数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たしているとする。$a_1<a_2$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n=3,4,5,\cdots$ に対して

$$a_1<a_n<a_2$$

が成り立つことを示せ。

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$b_n=a_{2n-1}, \quad c_n=a_{2n}$$

として数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を定めると，

$$b_n<b_{n+1}<c_{n+1}<c_n$$

が $n=1,2,3,\cdots$ に対して成り立つことを示せ。

解答 (1) $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$ より

$$a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n, \qquad a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$$

したがって

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=a_2+\frac{1}{2}a_1, \qquad a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

上の 2 式から，a_{n+1} を消去すると

$$a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}a_2+\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}a_1 \qquad (*)$$

$a_2>a_1$ であるから，$n=3,4,5,\cdots$ に対して

$$a_n-a_1=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}(a_2-a_1)>0,$$

$$a_n-a_2=\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}(a_1-a_2)<0$$

よって　　$a_1<a_n<a_2 \quad (n=3,4,5,\cdots)$

別解 数列 $\{a_n\}$ の特性方程式は　$x^2 = \dfrac{x+1}{2}$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1, -\frac{1}{2}$$

数列 $\{a_n\}$ は定数 $A,\ B$ を用いて

$$a_n = A\cdot 1^{n-1} + B\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

このとき，$A + B = a_1,\ \ A - \dfrac{1}{2}B = a_2$ であるから

$$A = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2),\ \ B = \frac{2}{3}(a_1 - a_2)$$

したがって　　$a_n = \dfrac{1}{3}(a_1 + 2a_2) + \dfrac{2}{3}(a_1 - a_2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_2 > a_1$ であるから，$n = 3, 4, 5, \cdots$ に対して

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= \frac{2}{3}(a_2 - a_1) + \frac{2}{3}(a_1 - a_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{3}(a_2 - a_1)\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} > 0, \\ a_n - a_2 &= \frac{1}{3}(a_1 - a_2) + \frac{2}{3}(a_1 - a_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3}(a_1 - a_2)\left\{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} < 0 \end{aligned}$$

(2) $b_n = a_{2n-1},\ c_n = a_{2n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は $(*)$ により

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}a_2 + \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}a_1, \\ c_n &= \frac{2}{3}\left\{1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}a_2 + \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}a_1 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}(a_2 - a_1) > 0, \\ c_n - c_{n+1} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n}(a_2 - a_1) > 0, \\ c_{n+1} - b_{n+1} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n}(a_2 - a_1) > 0 \end{aligned}$$

よって　　$b_n < b_{n+1} < c_{n+1} < c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

九工大工学部 2002 年 2

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{10}{9},\ \ a_2 = 2,\quad 100a_{n+2} - 180a_{n+1} + 81a_n = 0\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって与えられている．次に答えよ．

(1) $b_n = a_{n+1} - \dfrac{9}{10}a_n$ とおく．数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(2) $a_n = \dfrac{9}{10}b_n c_n$ により数列 $\{c_n\}$ を定める．一般項 c_n および a_n を求めよ．

(3) a_n が最大になるときの自然数 n を求めよ．

5.1.2　フィボナッチ数列

大分大学 2020 年 7

階段を上るとき，一度に上ることができる段数は 1 段または 2 段のみであるとする．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) ちょうど 10 段上る方法は全部で何通りあるか答えなさい．

(2) n を正の整数とする．ちょうど n 段上る方法は全部で何通りあるか答えなさい．

九工大情報工学部 5

袋の中に白色と黄色の 2 枚のカードが入っている．袋から無作為に 1 枚取り出してその色を記録し，袋にもどす試行を n 回くり返し行う．最後の 2 回の試行，つまり，$n-1$ 回目と n 回目にはじめて 2 枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数を $f(n)$ とおく．ただし $n \geqq 2$ とする．以下に答えよ．

(1) $f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ を求めよ．

(2) $f(n-2),\ f(n-1),\ f(n)$ $(n \geqq 4)$ の間の関係式を求めたい．下の (ア),(イ),(ウ) に当てはまる式を求めよ．
1 枚目のカードが白色で，さらに $n-1$ 回の試行を行った結果最後の 2 回ではじめて 2 枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数は［　(ア)　］である．1 枚目のカードが黄色で，さらに $n-1$ 回の試行を行った結果最後の 2 回ではじめて 2 枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数は［　(イ)　］である．したがって，$f(n-2)$，$f(n-1)$，$f(n)$ $(n \geqq 4)$ の間に［　(ウ)　］の関係式が成り立つ．

(3) 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解を α，β とし，$a_n=f(n)-\alpha f(n-1)$，$b_n=f(n)-\beta f(n-1)$ とおく．このとき数列 $\{a_n\}$ は公比 β の等比数列であり，数列 $\{b_n\}$ は公比 α の等比数列であることを示せ．

(4) $f(n)$ を求めよ．

鹿児島大学 2016 年 3

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定める．また α を $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$ を満たす正の実数とする．次の各問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ で定める．b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $b_n \geqq 1$ となることを示せ．

(3) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $|b_{n+1} - \alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha}|b_n - \alpha|$ となることを示せ．

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $|b_n - \alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha^n}$ となることを示せ．

鹿児島大学 2022 年 3

各項が正となる数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1}a_{n-1} = {a_n}^2 + 1 \quad (n \geqq 2)$$

を満たすとする．

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) c を実数とする．3 以上のすべての自然数 n に対して

$$(a_{n+1} + ca_n + a_{n-1})a_{n-1} = a_n(a_n + ca_{n-1} + a_{n-2})$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 3 以上のすべての自然数 n に対して

$$a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

東大理系 2015 年 4

数列 $\{p_n\}$ を次のように定める．

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2 + {p_n}^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ．

(2) すべての $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対し，$p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ．

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める．

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ を示せ．

5.1.3 S_n を含む漸化式

福岡教育大学 2001 年 1

第 1 項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = an^2 + bn + c$ で表される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を求めよ．ただし，a，b，c は定数とする．

福岡教育大学 2005 年 6

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．いま $S_n = n^2 - 25n$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) 初項 a_1 を求めよ．

(2) この数列が等差数列であることを示せ．

(3) $S_n > 396$ となる最小の n を求めよ．

宮崎大学 2008 年 9

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$a_1 = 1, \quad S_{n-1} - a_n = -4 \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

が成り立つとき，次の各問に答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 の値をそれぞれ求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

宮崎大学 2006 年 8

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，関係式 $S_n = 2a_n + n$ が成り立っている．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，a_n を a_{n-1} を用いて表せ．

(2) $n \geqq 1$ のとき，$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく．b_n を n を用いて表せ．

(3) a_n を n を用いて表せ．

大分大学 2012 年 1

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = \dfrac{3}{2}a_n - n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたす.

(1) a_1 を求めなさい.

(2) a_2 を求めなさい.

(3) 一般項 a_n を求めなさい.

大分大学 2009 年 2

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n - S_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つとき，次の問いに答えなさい.

(1) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ.

(2) $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

熊本大学 2013 年 4

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ.

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ.

(2) a_n を n の式で表せ.

5.1.4　分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について，以下に述べる．

$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．

$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots (***)$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

したがって　　$\dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \dfrac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha} \left(\dfrac{r\alpha + s}{r\beta + s} \right)^{n-1}$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+\dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

大分大学 2001 年 1

数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_n+5}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたす．

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解説 漸化式

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{2a_n}{3a_n+5}$$

の特性方程式 $x=\dfrac{2x}{3x+5}$ の解が $0,-1$ であるから

$$a_{n+1}+1=\frac{5(a_n+1)}{3a_n+5}$$

したがって　$\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n}{a_n+1}$　ゆえに　$\dfrac{a_n}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

よって　$a_n=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}}{4\cdot 5^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}$

宮崎大学 2003 年 12

$a_1 = \dfrac{q}{p}$ $(p > q > 0)$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定義された数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2) 一般項 a_n を推定し，n，p，q を用いて表せ．さらに，その推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

解説 漸化式

$$a_1 = \frac{q}{p}\ (p > q > 0), \quad a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

の特性方程式 $x = \dfrac{1}{2 - x}$，すなわち $x^2 - 2x + 1 = 0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} - 1$$

ゆえに $\dfrac{1}{a_n - 1} = \dfrac{1}{\frac{q}{p} - 1} - (n - 1)$ よって $a_n = \dfrac{(n-1)p - (n-2)q}{np - (n-1)q}$

熊大文系 2019 年 1

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。

(2) $b_n = \dfrac{3}{a_n - 2} + 1$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $a_n > \dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

福岡教育大学 2013 年 6

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{(4n+3)a_{n-1}+5} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2) (1) の b_n を用いて $c_n = b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

5.1.5　連立漸化式

佐賀大学 2002 年 1

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が初項 $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ であり，また

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n + 2, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n$$

の関係を満たしているとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) a_3，b_3 を求めよ．

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_n + b_n$ で定めたとき，その一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

熊大文系 2007 年 4

数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は以下の条件を満たしているものとする．

$$\begin{aligned} &x_1 = 8, \qquad y_1 = -5 \\ &x_{n+1} = 2x_n + y_n + 3n - 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ &y_{n+1} = 2y_n + x_n - 3n + 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $z_n = x_n + y_n$，また $w_n = x_n - y_n$ とおく．数列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y = x$ との距離が最小になるような n の値をすべて求めよ．

九工大情報工学部 2005 年 1

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，

$$\begin{cases} 2a_{2k+1} - 3a_{2k} + a_{2k-1} = 0 \\ 2a_{2k+2} - 3a_{2k+1} + a_{2k} = 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたしている．次に答えよ．

(1) a_3，a_4，a_5 の値をそれぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義する．b_{n+2} を b_n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

5.1.6　確率漸化式

琉球大学 2005 年 4

平面の上に正四面体がある．平面と接している面の 3 辺の 1 つを任意に選び，これを軸として正四面体をたおす．この操作を n 回続けて行ったとき，最初に平面と接していた面が再び平面と接する確率を p_n とする．

(1) p_1，p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_n を n を用いて表せ．

琉球 2019 年 4

箱の中に赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている．この箱から玉を 1 個取り出し，玉の色を見た上で箱に戻すという試行を n 回繰り返す．赤玉が連続して m 回以上出た確率を $P(n,\ m)$ とおく．だだし，$n \geqq m \geqq 2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $P(2,\ 2)$，$P(3,\ 2)$，$P(4,\ 2)$ を求めよ．

(2) $P(m,\ m)$，$P(m+1,\ m)$，$P(m+2,\ m)$ を求めよ．

(3) $n = m+1,\ m+2,\ m+3, \cdots, 2m$ に対し $P(n,\ m) - P(n-1,\ m)$ を求めよ．

(4) $P(2m,\ m)$ を求めよ．

鹿児島 2009 年 7

容器の中にある種類の生物がいて，この容器の中では増殖しない．この生物に関して，次の性質を満たす定数 p があることが知られている．

［性質］この生物の個体は k 日目に生存していれば，他の個体が何匹いるかにかかわりなく，$k+1$ 日目には確率 p で生存している $(k = 1, 2, 3, \cdots)$．

k 日目に生存している個体数を X_k で表す．$X_1 = n$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $X_2 = 0$ となる確率を求めよ．

(2) $X_3 = 0$ となる確率を求めよ．

(3) $X_k > 0$ であるが $X_{k+1} = 0$ となる確率を求めよ．

大分大学 2014 年 6

正三角形 ABC があり，点 X は正三角形 ABC の頂点を移動する点である．サイコロを投げて 5 の目が出たとき点 X は時計回りに隣の頂点に移動し，6 の目が出たとき点 X は反時計回りに隣の頂点に移動し，それ以外の目が出たとき点 X は移動しない．はじめに点 X は頂点 A にあるとし，サイコロを n 回投げたとき点 X が頂点 A にある確率を P_n とする．

(1) P_1，P_2，P_3 を求めなさい．

(2) P_{n+1} を P_n を用いて表しなさい．

(3) P_n を求めなさい．

九工大情報工学部 2012 年 4

1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点を時計回りに P，Q，R とする．これらの頂点のいずれかにある動点が，次のように辺上を移動することを 1 回の試行とする．さいころを 1 回投げて，1 の目が出れば反時計回りに長さ 1 だけ移動し，6 の目が出れば移動せず，それ以外の場合は時計回りに長さ 1 だけ移動する．動点は最初に点 P にあり，n 回の試行後に動点が点 P，Q，R にある確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2 をそれぞれ求めよ．

(2) q_2，r_2 をそれぞれ求め，さらに p_3 を求めよ．

(3) p_{n+1} を r_n を用いて表せ．

(4) p_{n+3} を p_n を用いて表せ．

(5) p_{3n} を n を用いて表せ．

佐賀大学 2015 年 4

正方形の 4 個の頂点を，時計回りに順に A，B，C，D とする．頂点 A から出発して頂点上を時計回りに点 P を進めるゲームを行う．硬貨を 1 回投げるごとに，表が出たときには頂点 1 つ分だけ点 P を進め，裏が出たときには頂点 2 つ分だけ点 P を進めるものとする．ただし，点 P が頂点 D にとまった時点でゲームは終わるものとする．硬貨を n 回投げ終えた時点で点 P が頂点 A に到達する確率を p_n とするとき，次の問に答えよ．

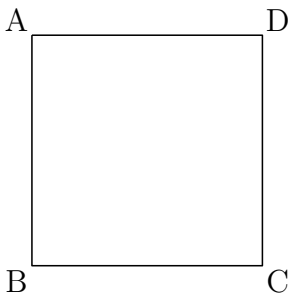
(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_4，p_5 を求めよ．

(3) p_{12} を求めよ．

九大文系 2007 年 3

図のような一辺の長さが 1 の正方形 ABCD がある．この正方形の辺上の点 Q を，コインを投げて表が出れば反時計まわりに 1，裏が出れば時計まわりに 1 動かす試行を考える．点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする．このとき，次の問いに答えよ．



(1) 表の出る確率が $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ．同様に上記の試行を 3 回および 4 回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ．

(2) 裏の出る確率 p が $\dfrac{1}{2}$ より大きいコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，頂点 A，B，C，D のうち点 Q が頂点 C にある確率が最大となることを示せ．同様に 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となることを示せ．

宮崎大学 2016 年 4

A と B は，赤球 2 個と白球 1 個が入った袋をそれぞれ 1 つずつ持っている．次のような試行を考える．

> A と B が，それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を 1 つ選び，色を見てからもとの袋に戻す．

上の試行を n $(n \geqq 2)$ 回繰り返したとき，n 回の試行の中で A と B が取り出した球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない確率を P_n とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 1 回の試行で，A と B が取り出した球の色が一致する確率を求めよ．

(2) P_2，P_3 を求めよ．

(3) $n \geqq 4$ のとき，

$$P_n = \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{20}{81}P_{n-2} + \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

が成り立つことを示せ．

宮崎大 2018 年 4

2 つの袋 A，B のそれぞれに，赤玉 1 個と白玉 2 個の合計 3 個が入っている．次のような試行を考える．

袋 A から無作為に玉を 1 個取り出し，

袋 B から無作為に玉を 1 個取り出す．

次に，上で袋 A から取り出した玉を袋 B に入れ，

上で袋 B から取り出した玉を袋 A に入れる．

この試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 行った後，袋 A の中を確認する．例えば，$n = 2$ の場合，1 回目の試行で，袋 A から白玉，袋 B から赤玉を取り出し，2 回目の試行で，袋 A から白玉，袋 B から白玉を取り出したとすると，その結果，袋 A には赤玉が 2 個，白玉が 1 個入っている．

n 回の試行の後で，

袋 A に赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている確率を P_n，

袋 A に赤玉 2 個と白玉 1 個が入っている確率を Q_n，

袋 A に赤玉が入っていない確率を R_n

とする．ただし，どの玉も同じ確率で取り出されるとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) P_1，Q_1，R_1 を求めよ．

(2) P_2 を求めよ．

(3) P_{n+1} を，P_n を用いて表せ．

(4) P_n を求めよ．

九大理系 2017 年 4

赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A，B，C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している．3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える．1 回目は A が玉を取り出し，次のルール (a)，(b)，(c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す．

(a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする．

(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す．

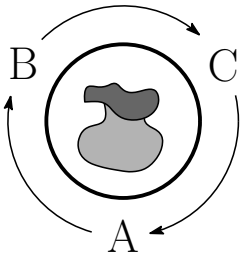
(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣の人が次の回に玉を取り出す．

A，B，C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする．ただし，$a_1 = 1$，$b_1 = c_1 = 0$ である．以下の問いに答えよ．

(1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ．

(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ．

(3) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ．



九大理系 2009 年 2

k は 2 以上の自然数とする.「1」と書かれたカードが 1 枚,「2」と書かれたカードが 2 枚，$\cdots$,「k」と書かれたカードが k 枚ある．そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す．この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す．記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_1 と p_2 を M，N で表せ.

(2) p_{n+1} を p_n，M，N で表せ.

(3) $\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ.

(4) p_n を n と k で表せ.

九工大情報工学部 5

はじめに，袋 A には赤玉が 1 個と白玉が 2 個，袋 B にも赤玉が 1 個と白玉が 2 個入っている．袋 A から無作為に玉を 1 個取り出して袋 B に入れ，引き続き袋 B から無作為に玉を 1 個取り出して袋 A に戻す．この一連の操作を 1 回の試行とするとき，n 回 $(n \geqq 1)$ の試行の後，袋 A に赤玉が 1 個だけ入っている確率を p_n，2 個入っている確率を q_n，1 個も入っていない確率を r_n とする．以下に答えよ．

(1) p_1，q_1，r_1 の値を求めよ.

(2) p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いて表せ.

(3) $q_n = r_n$ であることを示せ.

(4) p_n，q_n，r_n を求めよ.

九大文系 2012 年 4

いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える．

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，
箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる．

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ．

(1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n = 1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ．

(2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n = 1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ．

(3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ．

九工大 2014 年情報工学部 4

点 P は次の (i)，(ii)，(iii) の規則に従って数直線上を動く．

(i) 時刻 0 で，P は整数座標点 0 から 10 のいずれかの位置 i $(1 \leqq i \leqq 10)$ にある．

(ii) 時刻 t $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ に位置 i $(1 \leqq i \leqq 9)$ にある P は，$t+1$ には確率 p $\left(0 < p < \dfrac{1}{2}\right)$ で位置 $i+1$ に，確率 $1-p$ で位置 $i-1$ に移動する．

(iii) 時刻 t に位置 0 または 10 にある P は，$t+1$ にもその位置に留まる．

以下の問いに答えよ．

(1) P が時刻 0 で位置 2 にあるとき，時刻 3 で位置 0 にある確率を求めよ．

(2) P が時刻 0 で位置 1 にあるとき，時刻 3 で位置 0 にある確率を求めよ．

時刻 0 で位置 i にある P が，いずれかの時刻で位置 0 に到達する確率を q_i とする．ただし，$q_0 = 1$，$q_{10} = 0$ である．$1 \leqq i \leqq 9$ のとき，q_{i+1}，q_i，q_{i-1} の間には $q_i = pq_{i+1} + (1-p)q_{i-1}$ の関係が成り立つ．

(3) $q_{i+1} - q_i = \boxed{\text{(a)}}(q_i - q_{i-1})$ である．空欄の (a) に入る適切な数または式を求めよ．

(4) q_i を q_1 と p を用いて表せ．

(5) q_1 を求め，q_i を p を用いて表せ．

5.1.7　数学的帰納法

鹿児島 2013 年 3

次の (1)，(2) に答えよ．

(1) 自然数 n に対して自然数 a_n を次のように定義する．

$$a_n = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1$$

このとき，すべての自然数 k に対して $(2k)! = 2^k k! a_k$ が成り立つ．このことを証明せよ．

(2) すべての自然数 n に対して，$2^n!$ は $2^{(2^n-1)}$ で割り切れる．このことを数学的帰納法で証明せよ．

宮崎大学 2013 年 2

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = \sin^2\theta$，$a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められているとき，次の (1)，(2) に答えよ．

(1) a_2 と a_3 を，θ を用いて表せ．

(2) a_n が θ と n を用いてどのように表されるのか予想し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

福岡教育大学 2015 年 1

n は 3 以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ．

$$2^n > \frac{1}{2}n^2 + n$$

福岡教育大学 2013 年 5

自然数 n について $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ．

鹿児島大学 2002 年 4

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=6$，$a_{n+1}=a_n+16n+8$ $(n=1,2,3,\cdots)$ により，定まるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

(3) 和 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$ を求めよ．

鹿児島大学 2006 年 4

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=3-\dfrac{2}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n について，$1<a_n<2$ であることを示せ．

(2) $x_n=\dfrac{1}{2-a_n}$ とおくとき，x_{n+1} と x_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

宮崎大学 2003 年 12

$a_1=\dfrac{q}{p}$ $(p>q>0)$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ で定義された数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2) 一般項 a_n を推定し，n，p，q を用いて表せ．さらに，その推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

宮崎大学 2012 年 10

数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_1=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{1}{3-2a_n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

で定められているとき，次の各問に答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 の値を求めよ．

(2) 一般項 a_n を予想し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

宮崎大学 2015 年 10

初項 $a_1 = 0$ と漸化式

$$a_{n+1} = (1-r)r^{n-1} + r^2 a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって与えられる数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．ただし，$r \neq 0$，$r \neq 1$ とする．

(1) a_2，a_3，a_4 を，r を用いてそれぞれ表せ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それが正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算し，r，n を用いて表せ．

大分大学 2002 年 1

条件 $a_1 = 0$，$na_{n+1} = (n+1)a_n + 2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列を $\{a_n\}$ とし，条件 $b_1 = 1$，$nb_{n+1} = (n+1)b_n + n(n+1)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列を $\{b_n\}$ とする．

(1) a_n，b_n を表す n の式を推定し，それらが正しいことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．

(2) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる数を小さい順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とするとき，c_n を表す n の式を求め，簡潔にその理由を述べなさい．

(3) $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めなさい．

琉球 2020 年 3

i を虚数単位とし，複素数 a_n を

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_n + \sqrt{3}i \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定められる．また，複素数 b_n を

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = a_n b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(2) すべての正の整数 n について $a_{n+3} = a_n$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) b_n を求めよ．

長崎 2012 年 2

次の問いに答えよ．

(1) m を 5 以上の自然数とする．次の不等式が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ．

$$m! > 2^m > m^2$$

(2) 自然数 n に対する次の和を求めよ．

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

(3) (2) で求めた S_n について，$S_n < \dfrac{3}{4}$ が成り立つことを示せ．

(4) (2) で求めた S_n について，$S_n > \dfrac{2}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

佐賀 2012 年 5

正の数からなる数列 $\{a_n\}$ に対し，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．すべての自然数 n に対して，$\dfrac{a_n+3}{2} = \sqrt{3S_n}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を S_n を用いて表せ．

(3) n が自然数であるとき，数学的帰納法を用いて，$S_n = 3n^2$ が成り立つことを証明せよ．

宮崎 2005 年 13

関係式

$$a_1 = \beta, \quad a_{n+1} = 2a_n(1-a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．ただし，$\beta < \dfrac{1}{2}$ とする．

(1) $n \geqq 1$ に対して，不等式 $a_n < \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) $n \geqq 1$ に対して，$b_n = \log_2\left(\dfrac{1}{2} - a_n\right)$ とおく．このとき，関係式

$$b_{n+1} = 2b_n + 1$$

が成り立つことを示せ．

(3) a_n を n と β を用いて表せ．

熊大文系 2014 年 4

1 次関数 $f_n(x) = a_n x + b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は以下の 2 つの条件を満たすとする．

(i) $f_1(x) = x$

(ii) $f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x) = \displaystyle\int_1^x 6t f_n(t)\, dt$ を $x^2 + x$ で割った余りに等しい．

以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ．

(3) $n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数ではないことを示せ．

長崎 2013 年 3

n を 2 以上の整数とする．n 個の実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ が与えられたとき，

$$P_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,\quad Q_n={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2$$

とおく．次に，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての番号 i，j に対する a_ia_j の和を R_n とする．たとえば，$R_2=a_1a_2$，$R_3=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$ である．同様に，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての番号 i，j に対する $(a_i-a_j)^2$ の和を S_n とする．たとえば，$S_2=(a_1-a_2)^2$，$S_3=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2$ である．次の問いに答えよ．

(1) P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ．

(2) すべての $n\geqq 2$ に対して $S_n=(n-1)Q_n-2R_n$ と表されることを，数学的帰納法で証明せよ．

(3) Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ．

(4) $a_1+a_2+a_3+a_4=1$ のとき，Q_4 の最小値と，そのときの a_1，a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ．

九大文系 2006 年 2

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，$a_1=b_1=1$ および，関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n$$
$$b_{n+1}={a_n}^2+{b_n}^2$$

をみたすものとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $n\geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ．

(2) $n\geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ．

九大文系 2008 年 1

自然数 n に対して，$a_n=(\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく．ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ．

(2) $a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ．

(3) $a_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ．

九大文系 2002 年 4

次の問いに答えよ．

(1) n を正の整数とする．どんな角度 θ に対しても

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ．また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ．

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になることを示せ．

(3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ．また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ．

6　数学C

6.1　平面上のベクトル (数学C)

6.1.1　三角形の重心・外心・内心

長崎大学 2020 年 4

平面上に △ABC がある．点 O を △ABC の外心とし，外接円の半径を R とする．
また，点 H は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を満たす点とする．
ただし，点 H は 3 点 A，B，C と異なる点であるとする．
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

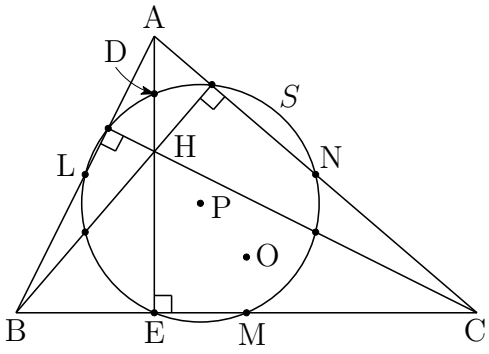
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，AH⊥BC，CH⊥AB であることを示せ．

(2) 線分 OH の中点を P とし，△ABC の各辺 AB，BC，CA の中点を，それぞれ L，M，N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，P は △LMN の外心になることを示せ．

(3) 線分 AH の中点を D とするとき，P は線分 DM の中点になることを示せ．

(4) 頂点 A から直線 BC に垂線を下ろし，直線 BC との交点を E とするとき，E は △LMN の外接円の周上にあることを示せ．

解答　(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，



$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{c}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{c}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$$

上式および $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2=R^2-R^2=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=R^2-R^2=0$$

よって　AH⊥BC，CH⊥AB

補足 同様の計算により，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となる．これと (1) の結果より，H が△ABC の垂心であることがわかる．また，△ABC の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

△ABC の重心 G は外心 O と垂心 H を 1 : 2 に内分する点である．3 点 O，G，H は同一直線 (オイラー線) 上にある．

(2) L，M，N は AB，BC，CA の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$$

点 P は OH の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$\overrightarrow{\mathrm{PL}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{c}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{b}}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PL}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|=\frac{1}{2}R$ である．
よって，点 P は△LMN の外心である．

(3) 点 D は線分 AH の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

線分 DM の中点は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

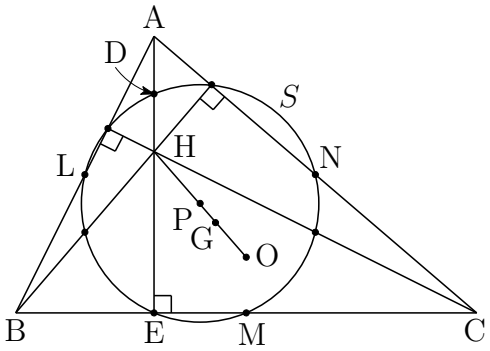
よって，P は線分 DM の中点である．

(4) △LMN の外接円を S とすると，(3) の結果から，DM は S の直径である．
∠DEM は直角であるから，E は外接円 S 上の点である．

補足 E と同様に，頂点 B から直線 CA に垂直に引いた直線と CA との交点，頂点 C から直線 AB に垂直に引いた直線と AB との交点も S 上にある．また，D と同様に，線分 BH の中点，線分 CH の中点も S 上にある．これら 9 点が S 上にあるから，九点円 (オイラー円) と呼ばれている．S の中心 P もオイラー線上にある．△ABC の外心 O，重心 G，垂心 H を含めて次の比に内分される．

$$\mathrm{OG} : \mathrm{GP} : \mathrm{PH} = 2 : 1 : 3$$

S の半径は，△ABC の外接円の $\dfrac{1}{2}$ である．



6.1.2　射影ベクトル

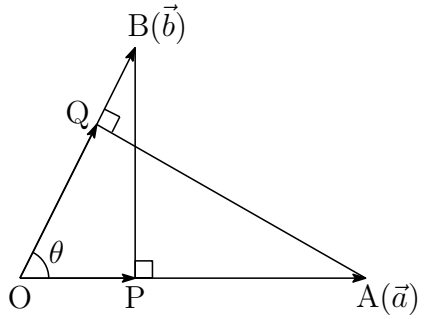
下の図において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{a}|\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|},\ \ |\vec{b}|\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

B から直線 OA 上に垂線 BP，A から直線 OB 上に垂線 AQ を引く．$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ はそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(|\vec{b}|\cos\theta)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(|\vec{a}|\cos\theta)\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$



大分大学 2013 年 3

△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とする．点 A から直線 OB に垂線 AP を下ろし，点 B から直線 OA に垂線 BQ を下ろし，直線 AP と直線 BQ の交点を R とする．

(1) t の範囲を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を t と $\vec{b}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t と $\vec{a}$ で表しなさい．

(3) $t=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表し，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ を求めなさい．

解答　(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

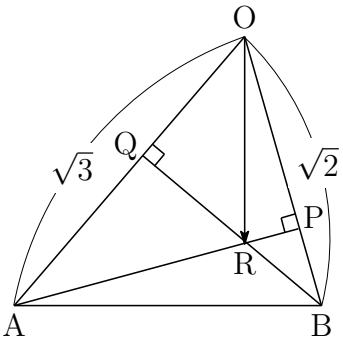
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \sqrt{3}\sqrt{2}\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad t = \sqrt{6}\cos\theta$$

$-1 < \cos\theta < 1$ であるから　　$\boldsymbol{-\sqrt{6} < t < \sqrt{6}}$

(2) $|\vec{a}| = \sqrt{3},\ |\vec{b}| = \sqrt{2},\ \vec{a}\cdot\vec{b} = t$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \boldsymbol{\frac{t}{2}\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \boldsymbol{\frac{t}{3}\vec{a}}$$



(3) $t = 1$ のとき，(2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{3}\vec{a}$

R は直線 AP 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} \quad \cdots ①$$

$\vec{a} = 3\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，上式より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 3(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

また，R は直線 QB 上の点でもあるから

$$3(1-s) + \frac{s}{2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{4}{5}$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{5}|\vec{a} + 2\vec{b}| = \frac{1}{5}\sqrt{|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2}$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{3 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{5}}$$

北大理系 2021 年 1

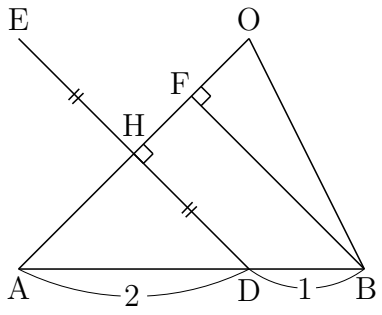
三角形 OAB において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D とし，直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする．

(1) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 三角形 BDE の面積が $\dfrac{5}{9}$ になるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ．

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\dfrac{6}{4^2}\vec{a}=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}\vec{a}}$



(2) 点 D は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$$

点 D から直線 OA に垂線 DH を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}}{3|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2\cdot6}{4^2}\right)\vec{a}=\frac{7}{12}\vec{a}$$

H は線分 DE の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\cdot\frac{7}{12}\vec{a}-\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})=\boldsymbol{\frac{5\vec{a}-4\vec{b}}{6}}$$

(3) $\triangle \mathrm{BDE} = \triangle \mathrm{DEF} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DE}}||\overrightarrow{\mathrm{FH}}| = \dfrac{5}{9} \cdots ①$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{5\vec{a} - 4\vec{b}}{6} - \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{FH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{7}{12}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{a} = \frac{5}{24}\vec{a}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 = \left|\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{16}{9}|\vec{b}|^2$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 4^2 - \frac{4}{3}\cdot 6 + \frac{16}{9}|\vec{b}|^2 = \frac{16}{9}|\vec{b}|^2 - 4 \quad \cdots ②$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{FH}}| = \frac{5}{24}|\vec{a}| = \frac{5}{24}\cdot 4 = \frac{5}{6} \quad \cdots ③$$

①, ③ より $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|\cdot\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{9}$ ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{DE}}| = \dfrac{4}{3}$

これを ② に代入すると $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}|\vec{b}|^2 - 4$

したがって $|\vec{b}|^2 = \dfrac{13}{4}$ よって $\boldsymbol{|\vec{b}| = \dfrac{\sqrt{13}}{2}}$

6.2　空間のベクトル (数学 C)

6.2.1　外積 (ベクトル積)

2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積 (ベクトル積)** と言い，$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b}}$ で表し (内積をスカラー積とも言う)，その成分は

$$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

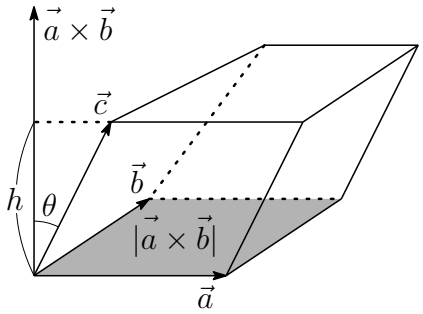
であるから，$\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V = \dfrac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c})\cdot\vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

直線の方程式

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ の直線 ℓ の方程式は

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}=t \qquad (t \text{ は媒介変数})$$

証明 ℓ 上の任意の点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=t\vec{v}$ であるから

$$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)=t(a,\ b,\ c)$$

ゆえに $\quad x-x_1=at,\ \ y-y_1=bt,\ z-z_1=ct$

よって $\quad \dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}=t$ 証終

点と平面の距離

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $H:ax+by+cz+d=0$ の距離 h は

$$\boldsymbol{h=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

証明 平面 H の法ベクトルは $\quad \vec{n}=(a,\ b,\ c)$

点 P を通り，方向ベクトルが $\vec{n}$ の直線の方程式が ℓ であるから

$$x=at+x_1,\quad y=bt+y_1,\quad z=ct+z_1$$

ℓ と H の交点を $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とし，そのときの t の値を t_0 とすると

$$x_2=at_0+x_1,\quad y_2=bt_0+y_1,\quad z_2=ct_0+z_1 \qquad (*)$$

Q は H 上の点であるから

$$a(at_0+x_1)+b(bt_0+y_1)+c(ct_0+z_1)+d=0$$

これを t_0 について解くと $\quad t_0=-\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}$

$(*)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(at_0,\ bt_0,\ ct_0)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|t_0|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\left|-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

証終

九大理系 2011 年 4

空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(0,\ 2,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 3),\ \mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$$

を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 4 点 O，A，B，C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。

(2) 3 点 A，B，C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

解答 (1) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を通ることに注意して，球面の方程式を

$$x^2+y^2+z^2+lx+my+nz=0$$

とおくと

点 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ 3)$ を通るから　$2m+3n+13=0$
点 $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 3)$ を通るから　$l+3n+10=0$
点 $\mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$ を通るから　$l+2m+5=0$

これを解いて　$l=-1,\ m=-2,\ n=-3$
したがって，球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$$

すなわち　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{7}{2}$

よって，求める球面の中心 D の座標は　$\left(\mathbf{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}}\right)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,-2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 0,-3)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(6,\ 3,\ 2)$
点 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ 3)$ を通り，法ベクトル $\vec{n}=(6,\ 3,\ 2)$ の平面上に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ をとると，$\vec{n}=(6,\ 3,\ 2)\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y-2,\ z-3)$ より

$$6x+3(y-2)+2(z-3)=0\quad\text{すなわち}\quad 6x+3y+2z-12=0$$

よって　$\mathbf{DF}=\dfrac{|6\cdot\frac{1}{2}+3\cdot1+2\cdot\frac{3}{2}-12|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\mathbf{\dfrac{3}{7}}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\dfrac{7}{2}$

求める体積は　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DF}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{3}{7}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (6,\ 3,\ 2)$

$\mathrm{A}(0,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \left(\dfrac{1}{2}, -1, -\dfrac{3}{2}\right)$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}| \\ &= \frac{1}{6}\left|6\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot(-1) + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \mathbf{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

補足 3 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ を通る平面の法ベクトルを

$$\vec{n} = (a,\ b,\ c) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とする．平面 ABC 上の任意の点を $\mathrm{T}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AT}}$ より

$$a(x - a_1) + b(y - b_1) + c(z - c_1) = 0$$

点 $\mathrm{D}(d_1,\ d_2,\ d_3)$ から平面 ABC までの距離 h は

$$\begin{aligned} h &= \frac{|a(d_1 - a_1) + b(d_2 - a_2) + c(d_3 - a_3)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}|} \end{aligned}$$

△ABC の面積は $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ より [10]，四面体 ABCD の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cdot\frac{|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}|} \\ &= \mathbf{\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|} \end{aligned}$$

[10] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10)

熊大理系 2018 年 1

t を実数とする。空間の 4 点 A$(1,\ 5,\ 0)$，B$(4,\ 2,\ 0)$，C$(t,\ 2t,\ t-1)$，D$(1,\ 6,\ 1)$ について，$\angle$BAC が直角であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) t の値を求めよ。

(2) D から A，B，C を通る平面に垂線を下ろし，A，B，C を通る平面との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ を求めよ。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

解答　(1) A$(1,\ 5,\ 0)$，B$(4,\ 2,\ 0)$，C$(t,\ 2t,\ t-1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1)$$

$\angle$BAC が直角であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より

$$3(t-1)-3(2t-5)+0(t-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t=4}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1,\ 6,\ 1)-(1,\ 5,\ 0)=(0,\ 1,\ 1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-9,-9,\ 18)=-9(1,\ 1,-2)$$

平面 ABC の法ベクトルを

$$\vec{n}=(1,\ 1,-2)$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{HD}}=k\vec{n}$ であるから (k は実数)，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+k\vec{n}$$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k|\vec{n}|^2$

したがって　$-1=6k$　　ゆえに　$k=-\dfrac{1}{6}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{HD}}=-\dfrac{1}{6}\vec{n}=\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{3}}\right)$

別解 平面 ABC 上に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ をとると

$$\vec{n} = (1,\ 1, -2) \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-1,\ y-5,\ z)$$

したがって，平面 ABC の方程式は

$$1(x-1) + 1(y-5) - 2z = 0 \quad \text{すなわち} \quad x + y - 2z - 6 = 0$$

点 $\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ を通り，平面 ABC に垂直な直線の方向ベクトルは $\vec{n}$ であるから，その直線の媒介変数表示は

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (1,\ 6,\ 1) + s(1,\ 1, -2) \qquad (*)\\ &= (1+s,\ 6+s,\ 1-2s) \qquad (s \text{ は媒介変数})\end{aligned}$$

これを平面の方程式に代入して

$$(1+s) + (6+s) - 2(1-2s) - 6 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{1}{6}$$

このとき，$(*)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{1}{6}\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{HD}} = -\frac{1}{6}\vec{n}$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{HD}} = -\dfrac{1}{6}(1,\ 1, -2) = \left(\mathbf{-\dfrac{1}{6}}, \mathbf{-\dfrac{1}{6}}, \mathbf{\dfrac{1}{3}}\right)$

(3) よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{HD}}| &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{HD}}|\\ &= \frac{1}{6}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \mathbf{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3, -3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3,\ 3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-9, -9,\ 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,\ 1,\ 1)$ より

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \frac{1}{6}|-9\cdot 0 - 9\cdot 1 + 18\cdot 1| = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

九大理系 2024 年 1

a を実数とし，座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(-1,\ 1,-1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $a \neq -1,\ a \neq 1$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にないことを示せ。

(2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

解答　(1) 3 点 $\mathrm{P}(-1,\ 1,-1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (2,\ 0,\ 2), \quad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = (a+1,\ a^2-1,\ a^3+1)$$

3 点 P，Q，R が一直線上にあると仮定すると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の y 成分から

$$a^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \pm 1$$

これは，$a \neq -1,\ a \neq 1$ に反する．

よって，3 点 P，Q，R は一直線上にない．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = 8$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} = 2(a^3+a+2)$

点 R から直線 PQ に垂線 RH を引くと

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PH}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{2(a^3+a+2)}{8}(2,\ 0,\ 2) \\
&= \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a}{2} + 1,\ 0,\ \frac{a^3}{2} + \frac{a}{2} + 1\right), \\
\overrightarrow{\mathrm{RH}} &= \overrightarrow{\mathrm{PH}} - \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left(-\frac{a}{2} + \frac{a^3}{2},\ 1-a^2,\ \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2}\right) \\
&= (1-a^2)\left(-\frac{a}{2},\ 1,\ \frac{a}{2}\right)
\end{aligned}$$

$-1 < a < 1$ より，$1 - a^2 > 0$ であるから

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{RH}}| &= (1-a^2)\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-a^2)\sqrt{2+a^2} \\
\triangle \mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{RH}}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1-a^2)\sqrt{2+a^2} \\
&= (1-a^2)\sqrt{2+a^2}
\end{aligned}$$

ここで，$t=1-a^2$ とおくと　$0<t\leqq 1$

$$\triangle \mathrm{PQR}=t\sqrt{3-t}=\sqrt{3t^2-t^3}$$

$f(t)=3t^2-t^3$ とおくと　$f'(t)=6t-3t^2=3t(2-t)>0$

$f(t)$ は単調増加であるから，$t=1$，すなわち，$a=0$ のとき，$\triangle$PQR の面積は，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ をとる．

補足 (外積を用いる解法)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=(2(1-a^2),\ 2a(1-a^2),-2(1-a^2))\\&=2(1-a^2)(1,\ a,-1)\end{aligned}$$

$-1<a<1$ に注意して

$$\triangle \mathrm{PQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=(1-a^2)\sqrt{2+a^2}$$

(面積公式を用いる解法)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=2^2+0^2+2^2=8,\\|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2&=(a+1)^2+(a^2-1)^2+(a^3+1)^2\\&=(a+1)^2\{1+(a-1)^2+(a^2-a+1)^2\}\\&=(a+1)^2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3),\\\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=2(a+1)+0+2(a^3+1)\\&=2(a+1)(a^2-a+2)\end{aligned}$$

$-1<a<1$ に注意して

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{PQR}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{8\cdot(a+1)^2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3)-\{2(a+1)(a^2-a+2)\}^2}\\&=(a+1)\sqrt{2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3)-(a^2-a+2)^2}\\&=(a+1)\sqrt{a^4-2a^3+3a^2-4a+2}\\&=(a+1)\sqrt{(a-1)^2(a^2+2)}\\&=(a+1)(1-a)\sqrt{a^2+2}\\&=(1-a^2)\sqrt{2+a^2}\end{aligned}$$

九大理系 2022 年 1

座標空間内の 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 1,\ 2),\ \mathrm{P}(4,\ 0,-1),\ \mathrm{Q}(4,\ 0,\ 5)$$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P′ の座標を求めよ。

(3) 点 R が平面 α 上を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

解答　(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,\ 2)$

$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ であるから

$$x+y=0,\ \ 2x+y+2z=0 \quad \text{ゆえに} \quad y=-x,\ \ z=-\frac{1}{2}x$$

$\vec{n}=\left(x,-x,-\dfrac{1}{2}x\right)$，$|\vec{n}|^2=1$ であるから

$$x^2+x^2+\frac{1}{4}x^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2=4$$

$x>0$ に注意して　$x=\dfrac{2}{3}$　よって　　$\boldsymbol{\vec{n}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}$

別解 $\vec{a}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=(2,\ 1,\ 2)$ より　$\vec{a}\times\vec{b}=(2,-2,-1)$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ と平行な単位ベクトルで，x 成分が正であるベクトル $\vec{n}$ は

$$\vec{n}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\boldsymbol{\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}$$

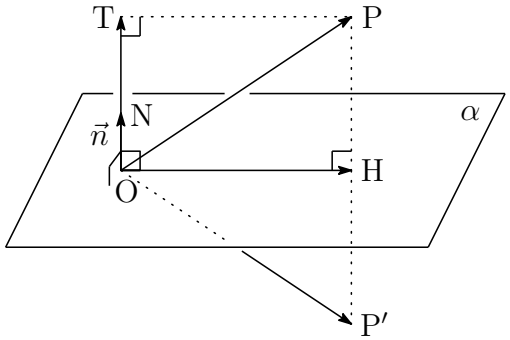
(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$ とし，P から平面 α および直線 ON に引いた垂線の交点をそれぞれ H，T とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OT}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n})\vec{n} \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 0,-1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(2,-2,-1)$

これと $(*)$ の第 1 式により，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ 2,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+(-\overrightarrow{\mathrm{OT}})=(0,\ 4,\ 1)\quad \text{よって}\quad \mathbf{P'(0,\ 4,\ 1)}$$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき，$\mathrm{PR}:\mathrm{RQ}=\mathrm{P'R}:\mathrm{RQ}=3:1$ であるから，R は線分 P′Q を $3:1$ に内分する点である．

$$\left(\frac{1\cdot0+3\cdot4}{3+1},\ \frac{1\cdot4+3\cdot0}{3+1},\ \frac{1\cdot1+3\cdot5}{3+1}\right)\quad \text{すなわち}\quad \mathbf{R(3,\ 1,\ 4)}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき点 R は，2 点 P′$(0,\ 4,\ 1)$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ を通る直線上にある．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+t\overrightarrow{\mathrm{P'Q}} \qquad (t\text{ は実数})\\ &=(0,\ 4,\ 1)+t(4,-4,\ 4)\\ &=(4t,\ 4-4t,\ 1+4t)\end{aligned}$$

点 R は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n}=0$ より

$$\frac{2}{3}\cdot4t-\frac{2}{3}(4-4t)-\frac{1}{3}(1+4t)=0\quad \text{これを解いて}\quad t=\frac{3}{4}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(3,\ 1,\ 4)$　よって　$\mathbf{R(3,\ 1,\ 4)}$

筑波大学 2021 年 3

O を原点とする座標空間において，3 点 A$(-2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面を α とする．2 点 P$(0,\ 5,\ 5)$，Q$(1,\ 1,\ 1)$ をとる．点 P を通り $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ に平行な直線を ℓ とする．直線 ℓ 上の点 R から平面 α に下ろした垂線と α の交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$(ただし k は実数) とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を成分で表せ．

(2) 点 S が △ABC の内部または周にあるような k の値の範囲を求めよ．

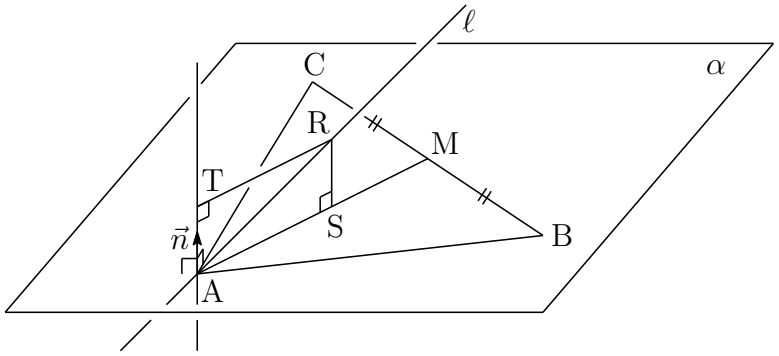
解答　(1) A$(-2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 1,\ 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2,\ 0,\ 1) \qquad \cdots(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と垂直なベクトルの 1 つを $\vec{n} = (-1,\ 2,\ 2)$ とする．A を通り $\vec{n}$ と平行な直線上に点 R から垂線 RT を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \overrightarrow{\mathrm{AS}} + \overrightarrow{\mathrm{AT}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AT}} = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \overrightarrow{\mathrm{AR}} - \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \qquad \cdots(**)$



A$(-2,\ 0,\ 0)$，P$(0,\ 5,\ 5)$，Q$(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= (2,\ 5,\ 5) + k(1,\ 1,\ 1), \\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n} &= 18 + 3k\end{aligned}$$

$|\vec{n}|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 2^2 = 9$ であるから，上式および $(**)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AS}} &= (2,\ 5,\ 5) + k(1,\ 1,\ 1) - \frac{18+3k}{9}(-1,\ 2,\ 2) \\ &= \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{3}}\right)\mathbf{(4,\ 1,\ 1)}\end{aligned}$$

(2) 2 点 B，C の中点を M とすると，(∗) より　$2\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (4,\ 1,\ 1)$

上式および (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = 2\left(1 + \dfrac{k}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

条件を満たすとき　$0 \leqq 2\left(1 + \dfrac{k}{3}\right) \leqq 1$　よって　$\boldsymbol{-3 \leqq k \leqq -\dfrac{3}{2}}$

6.3　複素数平面 (数学 C)

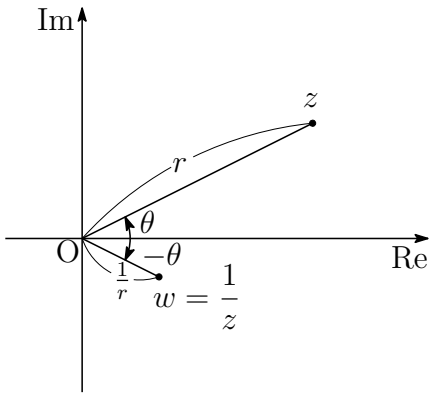
複素数平面の主な出題分野として，ド・モアブルの定理，方程式，図形への応用などあるが，難関大学を中心に 1 次分数式変換 (メビウス変換) や 2 次曲線との融合問題など出題されることがある．大学ごとに特徴があり，難易度の差も大きい．

6.3.1　反転

複素数平面上の点 z を $w=\dfrac{1}{z}$ に移す変換を**反転**という．
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

となり，下の図のような位置関係になる．



中心 $\alpha\neq 0$，半径 r の円 $|z-\alpha|=r$ を反転すると

$$\left|\frac{1}{w}-\alpha\right|=r\quad\text{ゆえに}\quad|1-\alpha w|=r|w|$$

上の第 2 式から

$$(1-\alpha w)(1-\overline{\alpha}\,\overline{w})=r^2|w|^2$$
$$(|\alpha|^2-r^2)|w|^2-(\alpha w+\overline{\alpha}\,\overline{w})+1=0 \qquad (*)$$

(i) $|\alpha|^2 - r^2 \neq 0$ のとき，$(*)$ より

$$|w|^2 - \frac{\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w}}{|\alpha|^2 - r^2} = -\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2}$$

$$|w|^2 - \frac{\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w}}{|\alpha|^2 - r^2} + \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} = -\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} + \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2}$$

$$\left(w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right)\left(\overline{w} - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\right) = \frac{r^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2}$$

$$\left|w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right| = \frac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$$

(ii) $|\alpha|^2 - r^2 = 0$ のとき，$(*)$ より　$\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w} = 1$

$$\frac{w}{\overline{\alpha}} + \frac{\overline{w}}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|^2} \quad \text{ゆえに} \quad \left|w - \frac{1}{\alpha}\right|^2 = |w|^2$$

したがって，w は原点 O と $\dfrac{1}{\alpha}$ を結ぶ線分の垂直二等分線である．

定理 9 中心 $\alpha(\neq 0)$，半径 r の円を反転した像は

(i) $|\alpha| \neq r$ のとき，中心 $\dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}$，半径 $\dfrac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$ の円

(ii) $|\alpha| = r$ のとき，原点 O と点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を結ぶ線分の垂直二等分線

上の (ii) から，次が成立する．

原点 O と点 α を結ぶ線分の垂直二等分線上の点を反転した像は，点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を中心とする半径 $\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|$ の円 (ただし，原点を除く)

難関大が出題する複素数平面の問題は，反転・拡縮を含めた回転・2 次曲線との融合問題などがあり，ある程度，複素数平面に関する問題を解いてきた受験生でも全く手が出ないということがある．先ずは難関大への登竜門として，良問で質の高い筑波大の過去問から取り組んでもらいたい．

- 筑波大 2015 年 6 (図形への応用，直線，正三角形)
- 筑波大 2016 年 6 (メビウス変換 [反転] により直線は円に移る)
- 筑波大 2017 年 6 (図形への応用，2 次方程式の解)
- 筑波大 2018 年 6 (図形への応用，放物線)
- 筑波大 2019 年 6 (図形への応用，円，偏角)
- 筑波大 2020 年 6 (図形への応用，円，三角形の面積)
- 筑波大 2021 年 6 (図形への応用，三角形)
- 筑波大 2022 年 6 (図形への応用，領域)
- 筑波大 2023 年 6 (図形への応用，円の方程式)
- 筑波大 2024 年 6 (図形への応用，円の直径と円周上の点)

メビウス変換については，東大理系 2017 年 3 ・九大理系 2019 年 5 を参照．

6.3.2　演習問題

- 九工大工学部後期 2016 年 [2]　方程式
- 九工大 2019 年 [3]　回転
- 九工大後期 2019 年 [2]　円
- 九工大 2020 年 [3]　回転
- 九工大 2023 年 [4]　領域
- 九工大 2024 年 [3]　方程式
- 福教大後期 2019 年 [2]　ド・モアブルの定理
- 福教大 2020 年 [2]　$\sum kz^k$
- 福教大後期 2020 年 [2]　方程式
- 福教大 2021 年 [3]　$1,\ z,\ w$ は一直線上
- 福教大 2022 年 [3]　三角形の面積
- 福教大 2023 年 [3]　基本中の基本
- 佐賀大 2016 年 [3]　極形式の基本
- 佐賀大 2017 年 [3]　極形式の基本
- 佐賀大 2019 年 [3]　極形式の基本+3 次方程式 (良問)
- 佐賀大 2022 年 [4]　三角形の基本
- 佐賀大 2023 年 [3]　4 次方程式　解の配置と三角形
- 佐賀大 2024 年 [4]　基本問題
- 佐賀大理工 2024 年後期 [3]　対称移動 (対称移動の公式を確認)
- 長崎大 2017 年 [3] (4) $w=(z+3i)/z$ の描く図形 ($|z|=3$)
- 長崎大 2018 年 [7]　アポロニスの円
- 長崎大 2019 年 [6]　ド・モアブルの定理
- 長崎大 2020 年 [3] (3)　基本問題 (複素数の判定)

- 長崎大 2021 年 8　複素数列　大きさ
- 長崎大 2022 年 3 (4) 複素方程式 (基本)
- 長崎大 2024 年 9　4 次方程式
- 熊大理系 2016 年 3　極形式　数列
- 熊大理系 2017 年 2　極形式　正三角形
- 熊大理系 2020 年 2　極形式　三角形の面積 (三角形の面積を確認)
- 熊大理系 2021 年 3　極形式　三角形
- 熊大後期 2021 年 2　直角三角形
- 熊大理系 2023 年 3　極形式　三角形
- 宮大 2017 年 4　方程式基本　三角形面積
- 宮大 2019 年 4　基本
- 宮大 2021 年 1 (2)　基本
- 鹿大 2015 年 7　4 次方程式
- 鹿大 2016 年 7　ド・モアブルの定理
- 鹿大 2017 年 7　四角形
- 鹿大 2018 年 7　円
- 鹿大 2019 年 6　楕円
- 鹿大 2021 年 7　円，3 点が同一直線上
- 鹿大 2023 年 7　メビウス変換

6.3.3　応用問題 (重要)

- 東北大理系 2016 年 4　ド・モアブルの定理
- 東北大理系 2023 年 4　ド・モアブルの定理
- 千葉大 2021 年 7　ド・モアブルの定理
- 千葉大 2021 年 9　ド・モアブルの定理 (応用)
- 京大理系 2021 年 3　ド・モアブルの定理
- 九大理系 2016 年 5　ド・モアブルの定理
- 千葉大 2016 年 9　1 の 7 乗根
- 千葉大 2018 年 12　1 の 9 乗根
- 千葉大 2020 年 8　複素数列
- 北大理系 2017 年 3　複素数領域
- 北大理系 2018 年 2　複素数領域
- 東北大理系 2021 年 5　三角形
- 東大理系 2016 年 4　三角形
- 九大理系 2023 年 1　正方形
- 東北大理系 2020 年 5　半円
- 千葉大理系 2017 年 9　円
- 阪大理系 2022 年 1　アポロニウスの円
- 東北大理系 2018 年 5　複素数平面上の楕円
- 京都大理系 2017 年 1　双曲線
- 東大理系 2018 年 5　対称移動

その他の問題については，入試の軌跡「難関理系」を参照してください．

6.4　2 次曲線 (数学 C)

6.4.1　2 次曲線の性質

平面上の点 F と F を通らない直線 ℓ について，点 P から ℓ に引いた垂線を PH とするとき

$$e = \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}} \quad (e \text{ は } \textbf{離心率})$$

の値が一定であるような点 P の軌跡 C は，2 次曲線であることを示す．F は 2 次曲線の**焦点**，ℓ は**準線**という．

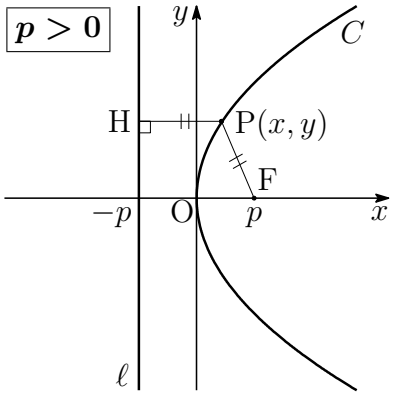
(I) $e = 1$ のとき，$\mathrm{F}(p,\ 0)$，$\ell : x = -p$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{H}(-p,\ y)$ であるから，このとき，$\mathrm{PF}^2 = \mathrm{PH}^2$ により

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

したがって

$$C : y^2 = 4px$$

よって，$e = 1$ のとき，C は**放物線**である．



(II) $e \neq 1$ のとき，$\mathrm{F}(ae,\ 0)$，$\ell : x = \dfrac{a}{e}$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると $(a \neq 0)$，$\mathrm{H}\left(\dfrac{a}{e},\ y\right)$ であるから，このとき，$\mathrm{PF}^2 = e^2\mathrm{PH}^2$ により

$$(x-ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

整理すると

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = (1-e^2)a^2 \tag{1}$$

$(1-e^2)a^2 \neq 0$ に注意して

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1 \tag{2}$$

(i) $0 < e < 1$ のとき，$(1-e^2)a^2 = b^2$ とおくと，(2) より

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(|a| > |b|,\ e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a|}\right)$$

よって，$0 < e < 1$ のとき，C は**楕円**である．

(ii) $1 < e$ のとき，$(1-e^2)a^2 = -b^2$ とおくと，(2) より

$$C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}\right)$$

よって，$1 < e$ のとき，C は**双曲線**である．

前ページの (2) で示した

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$$

は，x 軸，y 軸，原点に関して対称であるから，上式の焦点，準線は，次の 2 組である．

$$\mathrm{F}(ae,\ 0),\ \ell : y = \frac{a}{e} \quad \text{および} \quad \mathrm{F}'(-ae,\ 0),\ \ell' : y = -\frac{a}{e}$$

前ページの (1) より，$y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2)$ を利用すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{FP}^2 &= (x-ae)^2 + y^2 = (x-ae)^2 + (1-e^2)(a^2-x^2) \\
&= e^2x^2 - 2aex + a^2 = (ex-a)^2, \\
\mathrm{F'P}^2 &= (x+ae)^2 + y^2 = (x+ae)^2 + (1-e^2)(a^2-x^2) \\
&= e^2x^2 2aex + a^2 = (ex+a)^2
\end{aligned}$$

したがって

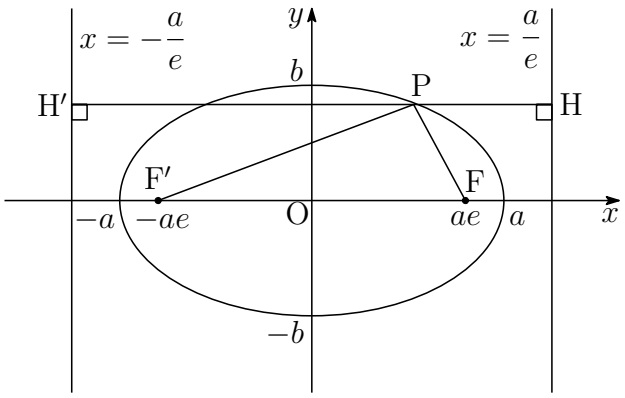
$$\boldsymbol{\mathrm{FP} = |ex-a|, \quad \mathrm{F'P} = |ex+a|}$$

(i) $0 < e < 1$ のとき (楕円)，$a > 0$ とすると，$-a \leqq x \leqq a$ より

$$\mathrm{FP} = a - ex, \quad \mathrm{F'P} = a + ex \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = 2a}$$

(補足) $\mathrm{FP} = e\mathrm{PH},\ \mathrm{F'P} = e\mathrm{PH}'$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{FP} = e\mathrm{PH} &= e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex, \\
\mathrm{F'P} = e\mathrm{PH}' &= e\left\{x - \left(-\frac{a}{e}\right)\right\} = a + ex \\
\mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = e(\mathrm{PH} + \mathrm{PH}') &= e\mathrm{HH}' = e\cdot\frac{2a}{e} = 2a
\end{aligned}$$



解説 C 上の点 P における法線は，$\angle\mathrm{FPF}'$ の二等分線 (証明は New Global Top 499) であるから，P における接線と x 軸の交点は線分 FF′ を FP : F′P の比に外分する点である．

(ii) $1 < e$ のとき (双曲線)，$a > 0$ とすると，$x \leqq -a,\ a \leqq x$ より

$a \leqq x$ のとき　$\mathrm{FP} = ex - a, \quad \mathrm{F'P} = ex + a$

$x \leqq -a$ のとき　$\mathrm{FP} = -ex + a, \quad \mathrm{F'P} = -ex - a$

よって　　$\boldsymbol{|\mathrm{FP} - \mathrm{F'P}| = 2a}$

(補足) $\mathrm{FP} = e\mathrm{PH},\ \mathrm{F'P} = e\mathrm{PH'}$ より

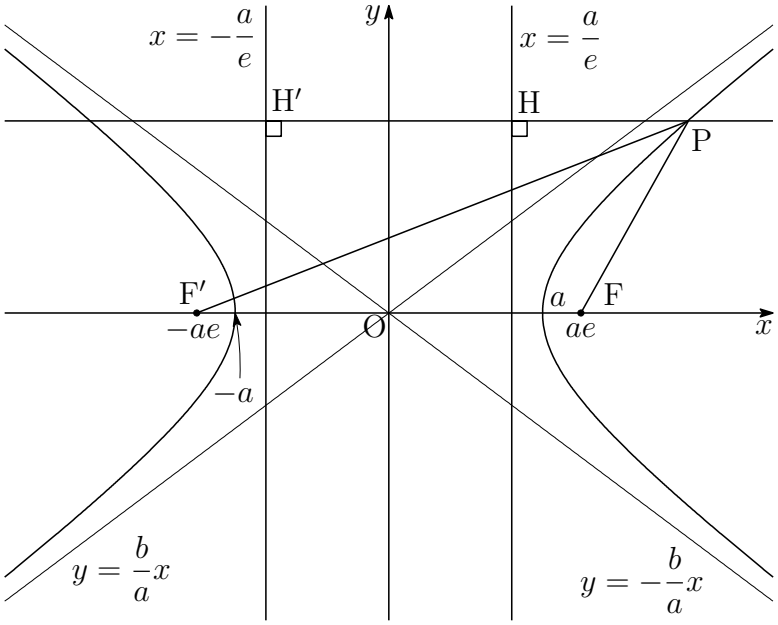
$a \leqq x$ のとき　　$\mathrm{FP} = e\mathrm{PH} = e\left(x - \dfrac{a}{e}\right) = ex - a,$

$$\mathrm{F'P} = e\mathrm{PH'} = e\left\{x - \left(-\frac{a}{e}\right)\right\} = ex + a$$

$x \leqq -a$ のとき　　$\mathrm{FP} = e\mathrm{PH} = e\left(\dfrac{a}{e} - x\right) = -ex + a,$

$$\mathrm{F'P} = e\mathrm{PH'} = e\left(-\frac{a}{e} - x\right) = -ex - a$$

$$\mathrm{FP} \sim \mathrm{F'P} = e(\mathrm{PH} \sim \mathrm{PH'}) = e\mathrm{HH'} = e{\cdot}\frac{2a}{e} = 2a$$



解説 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線 $\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{(1-e^2)a^2} = 1$ の x 軸との交点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{a^2}{x_1},\ 0\right)$ について

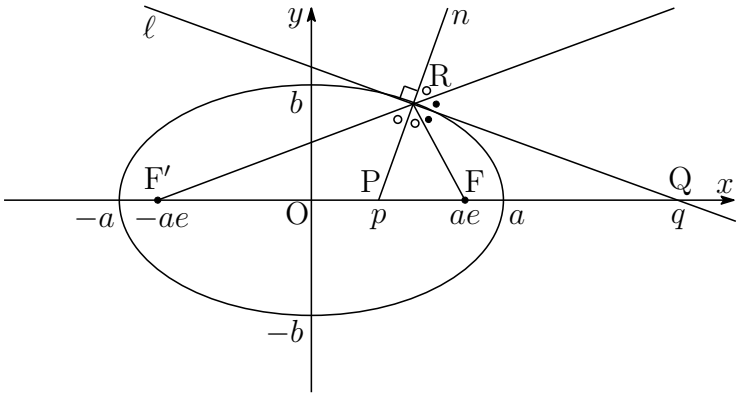
$$\mathrm{FQ} : \mathrm{F'Q} = ae - \frac{a^2}{x_1} : \frac{a^2}{x_1} + ae = ex_1 - a : ex_1 + a = \mathrm{FP} : \mathrm{FP'}$$

上式より，接線 PQ は $\angle \mathrm{FPF'}$ の二等分線であるから，P における法線と x 軸との交点は線分 $\mathrm{FF'}$ を $\mathrm{FP} : \mathrm{F'P}$ の比に外分する点である．

172 ページの性質 (1) から次のことが分かる．

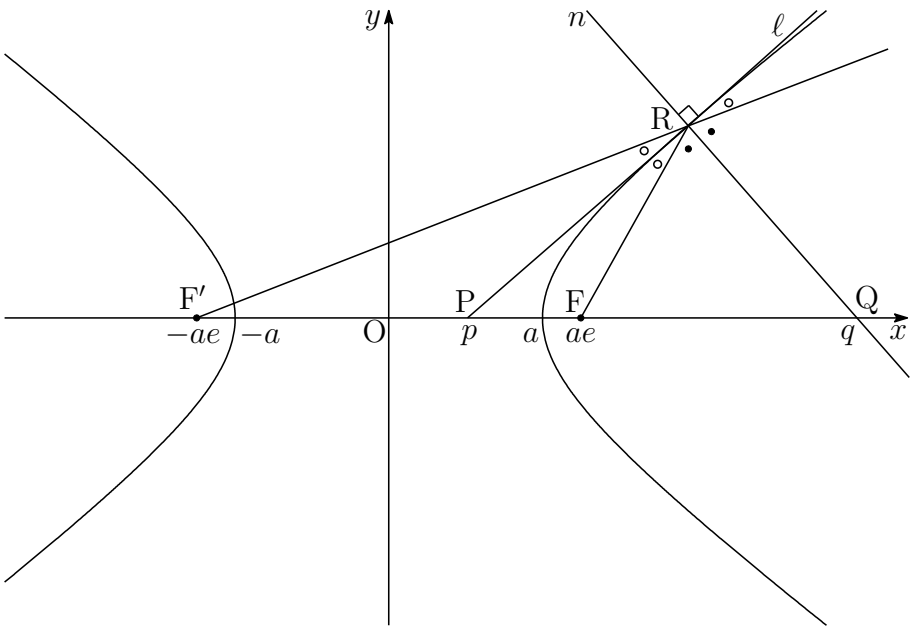
$a > b > 0$ のとき，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 R における接線を ℓ，法線を n とし，n，ℓ の x 軸との交点をそれぞれ P，Q とおくと，4 点 F′，P，F，Q は調和点列である．

$$(\mathrm{F}', \mathrm{F}; \mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \frac{\mathrm{F}'\mathrm{P}}{\mathrm{F}\mathrm{P}} \cdot \frac{\mathrm{F}\mathrm{Q}}{\mathrm{F}'\mathrm{Q}} = 1$$



双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 R における接線を ℓ，法線を n とし，ℓ，n の x 軸との交点をそれぞれ P，Q とおくと，4 点 F′，P，F，Q は調和点列である．

$$(\mathrm{F}', \mathrm{F}; \mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \frac{\mathrm{F}'\mathrm{P}}{\mathrm{F}\mathrm{P}} \cdot \frac{\mathrm{F}\mathrm{Q}}{\mathrm{F}'\mathrm{Q}} = 1$$



O を通らない直線 ℓ(準線) に，点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ から下ろした垂線を PH とするとき

$$e = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

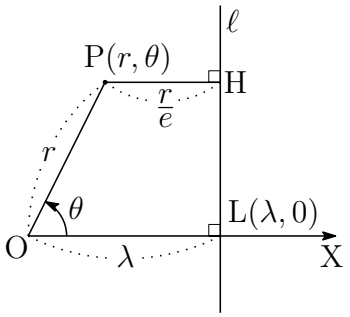
の値が一定であるような点 P の軌跡は，2 次曲線になる．

点 $\mathrm{L}(\lambda,\ 0)$ を通り，始線 OX に垂直な直線を ℓ とする．

右の図において，L と H は ℓ 上にあるから

$$r\cos\theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

ゆえに　　$r = \dfrac{e\lambda}{1 + e\cos\theta}$　　$\cdots$①

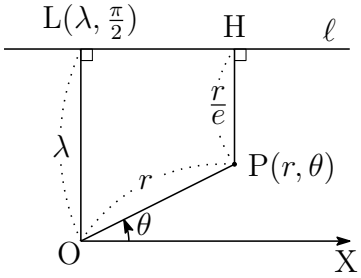


同様に，点 $\mathrm{L}(\lambda,\ \frac{\pi}{2})$ を通り，始線 OX に平行な直線を ℓ とする．

右の図において，L と H は ℓ 上にあるから

$$r\sin\theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

ゆえに　　$r = \dfrac{e\lambda}{1 + e\sin\theta}$　　$\cdots$②



①，② が点 P の軌跡を表す極方程式である．

一般に，極方程式 $r = -f(\theta + \pi)$ と $r = f(\theta)$ は一致する．

したがって，$\lambda < 0$ のとき，$d = -\lambda$ とおくと $(d > 0)$，①，② は，それぞれ次のように表すこともできる．

$$r = \frac{e\lambda}{1 + \cos\theta} = -\frac{e(-\lambda)}{1 - e\cos(\theta + \pi)} = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} \qquad \cdots ①'$$

$$r = \frac{e\lambda}{1 + \sin\theta} = -\frac{e(-\lambda)}{1 - e\sin(\theta + \pi)} = \frac{ed}{1 - e\sin\theta} \qquad \cdots ②'$$

極方程式 ① を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表すと

$$(1-e^2)x^2+y^2+2e^2\lambda x-e^2\lambda^2=0 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ は，$e\neq 1$ のとき $\dfrac{(1-e^2)^2}{e^2\lambda^2}\left(x+\dfrac{e^2\lambda}{1-e^2}\right)^2+\dfrac{1-e^2}{e^2\lambda^2}y^2=1$

i) $0<e<1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1-e^2}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e|\lambda|}$ とおくと $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

したがって，$(*)$ は λ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき $\dfrac{(x+ea)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(-ea,\ 0)$，準線 $x=-ea+\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき $\dfrac{(x-ea)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(ea,\ 0)$，準線 $x=ea-\dfrac{a}{e}$

ii) $e=1$ のとき，$(*)$ は $y^2=-2\lambda\left(x-\dfrac{\lambda}{2}\right)$

iii) $e>1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{e^2-1}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{e|\lambda|}$ とおくと $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

したがって，$(*)$ は λ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき $\dfrac{(x-ea)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(ea,\ 0)$，準線 $x=ea-\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき $\dfrac{(x+ea)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(-ea,\ 0)$，準線 $x=-ea+\dfrac{a}{e}$

これらの表す曲線は，e のとる値によって，次のような 2 次曲線に分類される．この e の値を離心率という．

［1］ $0<e<1$ のとき　O を焦点の 1 つとする楕円

［2］ $e=1$ のとき　O を焦点，ℓ を準線とする放物線

［3］ $e>1$ のとき　O を焦点の 1 つとする双曲線

同様に，極方程式 ② を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表すと

$$x^2+(1-e^2)y^2+2e^2\lambda x-e^2\lambda^2=0 \quad \cdots(**)$$

$(**)$ は，$e\neq 1$ のとき $\dfrac{1-e^2}{e^2\lambda^2}x^2+\dfrac{(1-e^2)^2}{e^2\lambda^2}\left(y+\dfrac{e^2\lambda}{1-e^2}\right)^2=1$

i) $0<e<1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1-e^2}{e|\lambda|}$ とおくと $e=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

したがって，$(**)$ は λ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y+ea)^2}{b^2}=1$，
中心 $(0,-ea)$，準線 $y=-ea+\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-ea)^2}{b^2}=1$，
中心 $(0,\ ea)$，準線 $y=ea-\dfrac{a}{e}$

ii) $e=1$ のとき，$(**)$ は $x^2=-2\lambda\left(y-\dfrac{\lambda}{2}\right)$

iii) $e>1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{e^2-1}{e|\lambda|}$ とおくと $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

したがって，$(**)$ は λ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-ea)^2}{b^2}=1$，
中心 $(0,\ ea)$，準線 $y=ea-\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y+ea)^2}{b^2}=1$，
中心 $(0,-ea)$，準線 $y=-ea+\dfrac{a}{e}$

補足 (1) の楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$ の焦点は y 軸上にあるから (準線は y 軸に垂直)，極方程式を次のようにおける．

$$r=\frac{\delta}{1+\varepsilon\sin\theta}$$

(1) に示した図の 2 点 $\mathrm{P}_1\left(8,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_2\left(2,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ を通ることから

$$\delta=\frac{16}{5},\quad \varepsilon=-\frac{3}{5} \quad \text{ゆえに} \quad r=\frac{16}{5-3\sin\theta}$$

(∗)，(∗∗) で示した楕円と双曲線の中心，放物線の頂点を，原点に平行移動した 2 次曲線は，次のようになる．

［1］楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$a>b$ のとき　$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，焦点 $(\pm ea,\ 0)$，準線 $x=\pm\dfrac{a}{e}$　(複号同順)

$a<b$ のとき　$e=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$，焦点 $(0,\ \pm eb)$，準線 $y=\pm\dfrac{b}{e}$　(複号同順)

［2］放物線 $y^2=-2\lambda x$

$e=1$，焦点 $\left(-\dfrac{\lambda}{2},\ 0\right)$，準線 $x=\dfrac{\lambda}{2}$

放物線 $x^2=-2\lambda y$

$e=1$，焦点 $\left(0,\ -\dfrac{\lambda}{2}\right)$，準線 $y=\dfrac{\lambda}{2}$

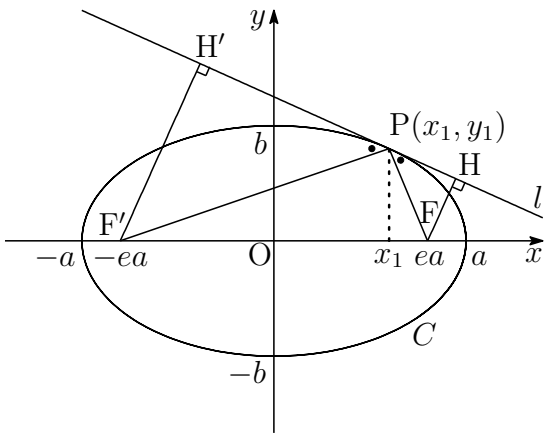
［3］双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，焦点 $(\pm ea,\ 0)$，準線 $x=\pm\dfrac{a}{e}$　(複号同順)

双曲線 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$，焦点 $(0,\ \pm eb)$，準線 $y=\pm\dfrac{b}{e}$　(複号同順)

楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ について $(a > b)$，C 上の点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，焦点を $\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$，C の P における接線を l とする．F，F′ から l にそれぞれ垂線 FH，F′H′ を引くと，次が成り立つ．



$$\mathrm{FP} = a - ex_1$$
$$\mathrm{F'P} = a + ex_1$$
$$\angle \mathrm{FPH} = \angle \mathrm{F'PH'}$$

証明

$$\begin{aligned}
\mathrm{FP}^2 &= (x_1 - ea)^2 + {y_1}^2 = {x_1}^2 - 2eax_1 + e^2a^2 + {y_1}^2 \\
&= {x_1}^2 - 2eax_1 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) a^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - {x_1}^2) \\
&= a^2 - 2eax_1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}{x_1}^2 \\
&= a^2 - 2eax_1 + e^2{x_1}^2 = (a - ex_1)^2
\end{aligned}$$

$a > ex_1$ であるから　$\mathrm{FP} = a - ex_1$　　同様にして　$\mathrm{F'P} = a + ex_1$

$\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$ から $l : \dfrac{x_1}{a^2}x + \dfrac{y_1}{b^2}y - 1 = 0$ までの距離は，それぞれ

$$\mathrm{FH} = \frac{\left|\dfrac{x_1}{a^2}ea - 1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a - ex_1}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{\mathrm{FP}}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

$$\mathrm{F'H'} = \frac{\left|\dfrac{x_1}{a^2}(-ea) - 1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a + ex_1}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{\mathrm{F'P}}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

上の 2 式から　$\dfrac{\mathrm{FH}}{\mathrm{FP}} = \dfrac{\mathrm{F'H'}}{\mathrm{F'P}}$　　ゆえに　$\angle \mathrm{FPH} = \angle \mathrm{F'PH'}$　　**証終**

6.4.2　2 次曲線の標準形

2 次曲線 $C : \alpha x^2 + \beta y^2 = d$ を原点を中心に θ だけ回転させた曲線が

$$C' : ax^2 + 2bxy + cy^2 = d \quad (b \neq 0)$$

であるとする $\left(-\dfrac{\pi}{4} < \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$.

C 上の点 $(X,\ Y)$ と C' 上の点 $(x,\ y)$ を，複素数平面上にとると

$$\begin{aligned} x + yi &= (X + Yi)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (X\cos\theta - Y\sin\theta) + (X\sin\theta + Y\cos\theta)i \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases} \tag{$*$}$$

これから

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= a(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 \\ &\quad + 2b(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) \\ &\quad + c(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 \\ &= (a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)X^2 \\ &\quad + \{-2(a-c)\sin\theta\cos\theta + 2b(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\}XY \\ &\quad + (a\sin^2\theta - 2b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta)Y^2 \\ &= \left(a\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b\sin 2\theta + c\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)X^2 \\ &\quad \{-(a-c)\sin 2\theta + 2b\cos 2\theta\}XY \\ &\quad \left(a\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} - b\sin 2\theta + c\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)Y^2 \end{aligned}$$

上式と $\alpha X^2 + \beta Y^2$ の係数を比較すると

$$\alpha = a\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b\sin 2\theta + c\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} \tag{1}$$

$$\beta = a\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} - b\sin 2\theta + c\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} \tag{2}$$

$$0 = -(a-c)\sin 2\theta + 2b\cos 2\theta \tag{3}$$

(3) から

$$a = c \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{4}, \qquad a \neq c \text{ のとき } \tan 2\theta = \frac{2b}{a-c} \tag{A}$$

(1)，(2) の辺々の和と差は

$$\alpha+\beta=a+c \tag{4}$$
$$\alpha-\beta=(a-c)\cos 2\theta+2b\sin 2\theta \tag{5}$$

$(3)^2+(5)^2$ より

$$0^2+(\alpha-\beta)^2=\{-(a-c)\sin 2\theta+2b\cos 2\theta\}^2+\{(a-c)\cos 2\theta+2b\sin 2\theta\}^2$$
$$(\alpha-\beta)^2=(a-c)^2+4b^2 \tag{6}$$

$(4)^2-(6)$ より

$$(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=(a+c)^2-\{(a-c)^2+4b^2\}$$
$$\alpha\beta=ac-b^2 \tag{7}$$

ここで，(5) の符号について，(A) より

$$\begin{aligned}\alpha-\beta&=(a-c+2b\tan 2\theta)\cos 2\theta\\&=\left(a-c+2b\cdot\frac{2b}{a-c}\right)\cos 2\theta\\&=(a-c)\left\{1+\left(\frac{2b}{a-c}\right)^2\right\}\cos 2\theta\end{aligned} \tag{8}$$

(4)，(7) より，α, β は 2 次方程式

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$$

の解である．(8) より，$a-c\neq 0$ のとき，$\alpha-\beta$ の符号は $a-c$ の符号と一致する．$a-c=0$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ であるから，(5) より，$\alpha-\beta$ の符号は b の符号と一致する．

定理 10 2 次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2=d$ は 2 次曲線 $\alpha x^2+\beta y^2=d$ を原点を中心に θ だけ回転させたものである $\left(-\dfrac{\pi}{4}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$．ここで，$\alpha$, β は 2 次方程式

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$$

の解である $(b\neq 0)$.

(i) $a-c\neq 0$ のとき，$\alpha-\beta$ の符号は $a-c$ の符号と一致し，$\tan 2\theta=\dfrac{2b}{a-c}$

(ii) $a-c=0$ のとき，$\alpha-\beta$ の符号は b の符号と一致し，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

7 New Global Top

7.1 数と式

7.1.1 Review

1 次の式を展開せよ.

(1) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

(2) $(2a+b)^3+(2a-b)^3$

(3) $(x^2-2x+3)^2$

解答 (1)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)\\ &= (x^3-1)(x^3+1) = \boldsymbol{x^6-1}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (2a)^3+3(2a)^2b+3(2a)b^2+b^3\\ &\quad +(2a)^3-3(2a)^2b+3(2a)b^2-b^3\\ &= \boldsymbol{16a^3+12ab^2}\end{aligned}$$

(3) 公式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ を利用.

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \{x^2+(-2x)+3\}^2\\ &= (x^2)^2+(-2x)^2+3^2+2\cdot x^2\cdot(-2x)+2(-2x)\cdot 3+2\cdot 3\cdot x^2\\ &= \boldsymbol{x^4-4x^3+10x^2-12x+9}\end{aligned}$$

2 次の式を因数分解せよ.

(1) $8a^3b+27b^4$

(2) $a^3-4ab^2+a^2c-4b^2c$

(3) $2x^2-5xy-3y^2+x+11y-6$

(4) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

解答 (1)

$$\begin{aligned}8a^3b+27b^4 &= a(8a^3+27b^3) = a\{(2a)^3+(3b)^3\}\\ &= a(2a+3b)\{(2a)^2-2a\cdot 3b+(3b)^2\}\\ &= \boldsymbol{a(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)}\end{aligned}$$

(2) 最も次数の低い文字 c に注目して整理する.

$$\begin{aligned} a^3-4ab^2+a^2c-4b^2c &= a(a^2-4b^2)+c(a^2-4b^2) \\ &= (a^2-4b^2)(a+c) \\ &= \boldsymbol{(a+2b)(a-2b)(a+c)} \end{aligned}$$

(3) $2x^2-5xy-3y^2=(x-3y)(2x+y)$ より

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (x-3y)(2x+y)+x+11y-6 \\ &= \{(x-3y)+2\}\{(2x+y)-3\} \\ &= \boldsymbol{(x-3y+2)(2x+y-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcll} (x-3y) & & 2 & \longrightarrow \quad 4x+2y \\ (2x+y) & & -3 & \longrightarrow \quad \underline{-3x+9y}(+ \\ & & & \quad x+11y \end{array}$$

(4) 特定の文字 (ここでは a) に着目して整理.

$$\begin{aligned} & a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \\ =& a^2(b-c)-(b^2-c^2)a+bc(b-c) \\ =& (b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\} \\ =& \boldsymbol{(b-c)(a-b)(a-c)} \end{aligned}$$

3 次の式を計算せよ.

(1) $(2+\sqrt{3})^3-(2-\sqrt{3})^3$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

解答 (1) $A=2+\sqrt{3}$, $B=2-\sqrt{3}$ とすると

$$A+B=4, \quad A-B=2\sqrt{3}, \quad AB=1$$

したがって

$$\begin{aligned} A^3-B^3 &= (A-B)(A^2+AB+B^2) \\ &= (A-B)\{(A+B)^2-AB\} \\ &= 2\sqrt{3}(4^2-1)=\boldsymbol{30\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(2)

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})-(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{(3+2\sqrt{2})-5}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\boldsymbol{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$$

4 $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x+y,\ xy$

(2) x^2+y^2

(3) x^3+y^3

(4) x^5+y^5

解答 (1)

$$x+y=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\boldsymbol{6},$$
$$xy=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\boldsymbol{1}$$

(2) (1) の結果から

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot1=\boldsymbol{34}$$

(3) (1) の結果から

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=6^3-3\cdot1\cdot6=\boldsymbol{198}$$

別解 (1)，(2) の結果から

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=6(34-1)=\boldsymbol{198}$$

(4) $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+y^5+(xy)^2(x+y)$ に (1),(2),(3) の結果を代入すると

$$34\times198=x^5+y^5+1^2\cdot6\quad\text{よって}\quad x^5+y^5=\boldsymbol{6726}$$

5 次の不等式を解け.

(1) $\begin{cases} 4x-5>2x-3 \\ 7x-6 \leqq 4x+9 \end{cases}$

(2) $|5x-2|+1 \geqq 4$

解答 (1) 第 1 式を解くと　$x>1$　$\cdots$①

第 2 式を解くと　$x \leqq 5$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めると　$\boldsymbol{1<x \leqq 5}$

(2) 与式から　$|5x-2| \geqq 3$

ゆえに　$5x-2 \leqq -3,\ 3 \leqq 5x-2$

よって　$\boldsymbol{x \leqq -\dfrac{1}{5},\ 1 \leqq x}$

7.1.2 Exercise

6* 次の式を因数分解せよ.

(1) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)+24$

(2) x^4+4

(3) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

(4) $x^3+y^3-3xy+1$

解答 (1) $x^2-x=A$ とおくと

$$\begin{aligned}(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)+24 &= (x^2-x-2)(x^2-x-12)+24 \\ &= (A-2)(A-12)+24 \\ &= A^2-14A+48 \\ &= (A-6)(A-8) \\ &= (x^2-x-6)(x^2-x-8) \\ &= \boldsymbol{(x+2)(x-3)(x^2-x-8)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}x^4+4 &= (x^2+2)^2-(2x)^2 \\ &= \{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\} \\ &= \boldsymbol{(x^2+2x+2)(x^2-2x+1)}\end{aligned}$$

(3) $(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y)$ を利用

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3&=\{(a+b)+c\}^3-a^3-b^3-c^3\\&=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2-a^3-b^3\\&=3ab(a+b)+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2\\&=3(a+b)\{c^2+(a+b)c+ab\}\\&=3(a+b)(c+a)(c+b)=\boldsymbol{3(a+b)(b+c)(c+a)}\end{aligned}$$

(4) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ を利用

$$\begin{aligned}x^3+y^3-3xy+1&=x^3+y^3+1^3-3xy\cdot1\\&=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-xy-y\cdot1-1\cdot x)\\&=\boldsymbol{(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)}\end{aligned}$$

7* $0<x<1$ とする．$x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $x+\dfrac{1}{x}$

(2) x^3

(3) $x^5+\dfrac{1}{x^5}$

解答 (1) $A=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと，$0<x<1$ より　$A>0$

$$A^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=6+2=8$$

$A>0$ であるから　$A=x+\dfrac{1}{x}=2\sqrt{2}$

(2) $B=x-\dfrac{1}{x}$ とおくと，$0<x<1$ より，$B=\dfrac{x^2-1}{x}<0$

$$B^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=6-2=4$$

したがって　$B=-2$

$x=\dfrac{A+B}{2}=\sqrt{2}-1$ より　$x^2=3-2\sqrt{2}$

よって　$x^3=xx^2=(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})=\boldsymbol{5\sqrt{2}-7}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{1}{x^3}=\frac{1}{5\sqrt{2}-7}=5\sqrt{2}+7 \quad \text{ゆえに} \quad x^3+\frac{1}{x^3}=10\sqrt{2}$$

したがって $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)=6\cdot 10\sqrt{2}$ より

$$x^5+\frac{1}{x^5}+\left(x+\frac{1}{x}\right)=60\sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad x^5+\frac{1}{x^5}+2\sqrt{2}=60\sqrt{2}$$

よって $\quad x^5+\dfrac{1}{x^5}=\mathbf{58\sqrt{2}}$

8* $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b として，a^2+ab+b^2 を求めよ．

解答 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$2<\sqrt{5}<3$ より，$\dfrac{5}{2}<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<3$ であるから

$$a+b=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad a=2\quad \text{ゆえに}\quad b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$2b+1=\sqrt{5}$ の両辺を平方すると

$$4b^2+4b+1=5\quad \text{ゆえに}\quad b^2=1-b$$

したがって

$$\begin{aligned}a^2+ab+b^2&=2^2+2b+(1-b)=b+5\\&=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+5=\boldsymbol{\frac{9+\sqrt{5}}{2}}\end{aligned}$$

9 $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ を簡単にせよ．　(東北学院大)

解答 $\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{2}}$ より (複号同順)

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$$

10 次の方程式・不等式を求めよ.

(1) $2|x|+|2x+3|=7$

(2) $|2x-1|>x$

(3) $x^2-2|x|-15=0$

(4) $|x-1|+|x-1|>x+2$

解答 (1) $f(x)=2|x|+|2x+3|$ とおくと

$$f(x)=\begin{cases} -4x-3 & (x \leqq -\frac{3}{2}) \\ 3 & (-\frac{3}{2} \leqq x \leqq 0) \\ 4x+3 & (0 \leqq x) \end{cases}$$

(i) $x \leqq -\dfrac{3}{2}$ に注意して，$f(x)=7$ を解くと

$$-4x-3=7 \quad \text{これを解くと} \quad x=-\frac{5}{2}$$

(ii) $0 \leqq x$ に注意して，$f(x)=7$ を解くと

$$4x+3=7 \quad \text{これを解くと} \quad x=1$$

(i)，(ii) より $\quad \boldsymbol{x=-\dfrac{5}{2},\ 1}$

(2) まず，$|2x-1| \leqq x$ を解くと

$$-x \leqq 2x-1 \leqq x \quad \text{これを解くと} \quad \frac{1}{3} \leqq x \leqq 1$$

よって，$|2x-1|>x$ の解は $\quad \boldsymbol{x<\dfrac{1}{3},\ 1<x}$

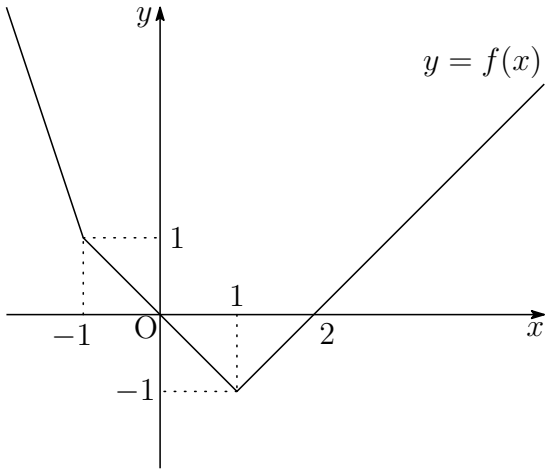
(3) $|x|^2-3|x|-15=0$ を解けばよいから

$$(|x|+2)(|x|-5)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=\pm 5}$$

(4) $f(x) = |x-1| + |x+1| - x - 2$ とおくと

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 2 & (x \leqq -1) \\ -x & (-1 \leqq x \leqq 1) \\ x - 2 & (2 \leqq x) \end{cases}$$

$y = f(x)$ のグラフをかくと



$f(x) > 0$ を満たす x の値の範囲を求めると　$\boldsymbol{x < 0,\ 2 < x}$

7.1.3 Try

11* ［1］$x=\dfrac{2}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}$，$y=\dfrac{2}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) x^2+y^2 (関西医科大学 改)

(2) $x^3+x^2y+xy^2+y^3$

(3) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

［2］実数 a，b，c が $a+b+c=2$，$a^2+b^2+c^2=8$，$abc=-3$ を満たすとき，次の値を求めよ． (福島大)

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

解答 ［1］(1) $x^2+y^2=\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}+\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}=\mathbf{6}$

(2) (1) の結果を利用して

$$xy=\frac{2\cdot 2}{\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}}=2$$

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=6+2\cdot 2=10$$

$x>0$，$y>0$ であるから　$x+y=\sqrt{10}$

よって　$x^3+x^2y+xy^2+y^3=(x^2+y^2)(x+y)=\mathbf{6\sqrt{10}}$

(3) (2) の結果を利用して

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=10-4\cdot 2=2$$

$x>y$ であるから　$x-y=\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$$

$$=\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\mathbf{\sqrt{5}+2}$$

別解

$$x=\frac{2}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$$
$$y=\frac{2}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

したがって　$x+y=\sqrt{10},\quad x-y=\sqrt{2},\quad xy=2$

よって　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10-2\cdot 2=\mathbf{6}$

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=(x^2+y^2)(x+y)=\mathbf{6\sqrt{10}}$$

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$$
$$=\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\mathbf{\sqrt{5}+2}$$

［2］$a+b+c=2$，$a^2+b^2+c^2=8$，$abc=-3$ より

$$\begin{aligned}ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)&=ab(2-c)+bc(2-a)+ca(2-b)\\&=2(ab+bc+ca)-3abc\\&=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)-3abc\\&=2^2-8-3\cdot(-3)=\mathbf{5}\end{aligned}$$

別解　$ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}=\dfrac{1}{2}(2^2-8)=-2$ より

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=(b+c)a^2+(b^2+c^2)a+bc(b+c)\\&=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)-3abc\\&=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-3abc\\&=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc\\&=2\cdot(-2)-3\cdot(-3)=\mathbf{5}\end{aligned}$$

12* $\alpha=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ とする. (慶応義塾大 改)

(1) α を二重根号を使わず簡単な形で表せ.

(2) $\alpha^2-4\alpha$ の値を求めよ.

(3) $\alpha^5-4\alpha^4+2\alpha^3-4\alpha^2+\alpha-2$ の値を求めよ.

解答 (1) $\alpha=\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=\boldsymbol{2+\sqrt{3}}$

(2) (1) の結果から, $\alpha-2=\sqrt{3}$ の両辺を平方すると

$$(\alpha-2)^2=3 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\alpha^2-4\alpha=-1}$$

(3) $\alpha^2-4\alpha+1=0$ より

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\alpha^3(\alpha^2-4\alpha+1)+\alpha(\alpha^2-4\alpha+1)-2\\&=\boldsymbol{-2}\end{aligned}$$

別解 $(\text{与式})=(a^2-4a+1)(a^3+a)-2=\boldsymbol{-2}$

$$\begin{array}{r} \multicolumn{6}{r}{a^3 \quad +a} \\ \cline{2-6} a^2-4a+1\,) \; a^5 & -4a^4 & +2a^3 & -4a^2 & +a & -2 \\ a^5 & -4a^4 & +a^3 & & & \\ \cline{1-3} & & a^3 & -4a^2 & +a & \\ & & a^3 & -4a^2 & +a & \\ \cline{3-5} & & & & & -2 \end{array}$$

13 a を定数とする．連立不等式

$$\begin{cases} 3x+a>6x-2 \\ -2x+10 \leqq x+a \end{cases}$$

を満たす実数 x が存在するような a の値の範囲は［　ア　］である．また，この連立不等式を満たす整数 x がちょうど3個であるような a の値の範囲は［　イ　］である． (愛知工業大)

解答 第1式を解くと　$x<\dfrac{a+2}{3}$　　第2式を解くと　$x \geqq \dfrac{-a+10}{3}$

上の2式を同時に満たす x が存在する条件は

$$\frac{-a+10}{3}<\frac{a+3}{3}\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{a>4}\quad \cdots(\text{ア})$$

(ア) のとき，連立不等式の解は

$$\frac{-a+10}{3} \leqq x<\frac{a+2}{3}\quad \text{すなわち}\quad -\frac{a+2}{3}+4 \leqq x<\frac{a+2}{3} \qquad (*)$$

$p=\left[\dfrac{a+2}{3}\right]$，$q=\dfrac{a+2}{3}-p$ とおくと，$(*)$ は

$$4-p-q \leqq x<p+q \qquad (**)$$

(i) $q=0$ のとき，不等式 $(**)$ の整数解がちょうど3個であるとき

$$(p-1)-(4-p)+1=3\quad \text{ゆえに}\quad 2p=7$$

これを満たす整数 p は存在しないので，不適．

(ii) $0<q<1$ のとき，不等式 $(**)$ の整数解がちょうど3個であるとき

$$p-(4-p)+1=3\quad \text{ゆえに}\quad p=3$$

(i)，(ii) より　$3<p+q<4$ であるから

$$3<\frac{a+2}{3}<4\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{7<a<10}\quad \cdots(\text{イ})$$

14 x を実数とするとき，$\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2+2x+1}$ の最大値は$\boxed{}$，最小値は$\boxed{}$である．

解答 $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2+2x+1}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-3|-|x+1| \\ &= \begin{cases} 4 & (x \leqq -1) \\ -2x+2 & (-1 \leqq x \leqq 3) \\ -4 & (3 \leqq x) \end{cases} \end{aligned}$$

よって，最大値は 4，最小値 $\mathbf{-4}$

15 $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=1-|2x-1|$, $g(x)=1-|2|2x-1|-1|$ と定める. (愛媛大)

(1) $g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $y=f(x)$ のグラフをかけ.

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $y=g(x)$ のグラフをかけ.

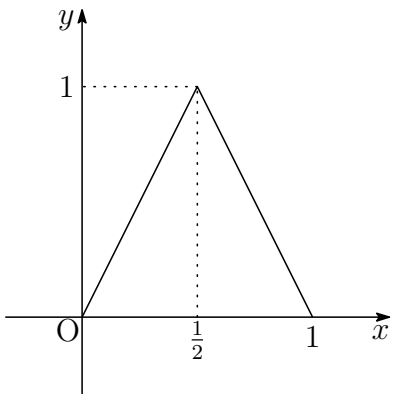
(4) 連立不等式 $y \geqq f(x)$, $y \leqq g(x)$, $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の表す領域の面積を求めよ.

解答 (1) $g(x)=1-|2|2x-1|-1|$ より

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) &= 1-\left|2\left|2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}-1\right|-1\right| = 1-\left|2\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|-1\right| \\ &= 1-\left|2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)-1\right| = 1-|1-\sqrt{3}| \\ &= 1-(-1+\sqrt{3}) = \mathbf{2-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

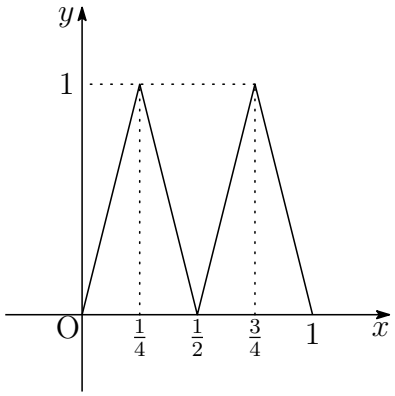
(2) $f(x)=1-|2x-1|$ より $(0 \leqq x \leqq 1)$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}) \\ -2x+2 & (\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$



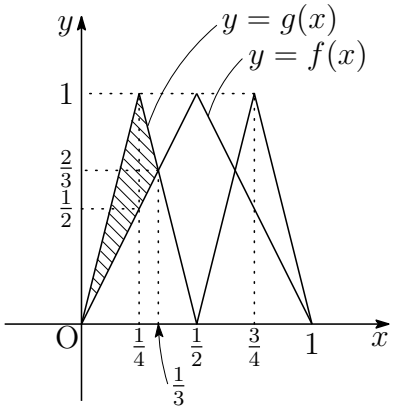
(3) $g(x) = 1 - |2|2x - 1| - 1|$ より

$$g(x) = \begin{cases} 4x & (0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}) \\ -4x + 2 & (\frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{1}{2}) \\ 4x - 2 & (\frac{1}{2} \leqq \frac{3}{4}) \\ -4x + 4 & (\frac{3}{4} \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$



(4) $\frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ における $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の座標は

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -4x + 2 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$



求める面積は，図の斜線部分であるから

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

7.2　2 次関数のグラフ，最大・最小

7.2.1　Review

16 放物線 $y = x^2 - 2x + 2 \cdots$ ① について

(1) ① を原点に関して対称移動した放物線の方程式を求めよ．

(2) ① のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動し，さらに y 軸に関して対称移動すると放物線 $y = x^2 + 4x + 1$ になった．p，q の値を求めよ．

解答　(1) $y = x^2 - 2x + 2$ において，x を $-x$，y を $-y$ に置き換えると

$$-y = (-x)^2 - 2(-x) + 2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -x^2 - 2x - 2}$$

(2) $y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \cdots$ ①，$y = x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3 \cdots$ ②

① の頂点 $(1,\ 1)$，② の頂点 $(-2, -3)$

点 $(1,\ 1)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した点は

$$(1 + p,\ 1 + q)$$

これをさらに y 軸に関して対称移動した点は

$$(-1 - p,\ 1 + q)$$

これが ② の頂点と一致するから

$$-1 - p = -2,\ 1 + q = -3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p = 1,\ q = -4}$$

17 次の条件を満たす放物線の方程式を求めよ．

(1) 軸が $x=-1$ で，2 点 $(0,\ 2)$，$(1,-1)$ を通る．

(2) 3 点 $(-1,\ 6)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 6)$ を通る．

(3) 3 点 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$ を通る．

(4) 放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したもので，頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあり，点 $(1,\ 3)$ を通る．

解答 (1) 軸が $x=-1$ であるから，放物線の方程式を

$$y=a(x+1)^2+q$$

とおける．これが 2 点 $(0,\ 2)$，$(1,-1)$ を通るから

$$2=a+q,\quad -1=4a+q \quad \text{これを解いて} \quad a=-1,\ q=3$$

よって，求める放物線の方程式は　$\boldsymbol{y=-(x+1)^2+3}$

(2) 2 点 $(-1,\ 6)$, $(3,\ 6)$ を通るから，放物線の方程式を

$$y=a(x+1)(x-3)+6$$

とおける．また，点 $(2,\ 3)$ を通るから

$$3=a\cdot 3\cdot(-1)+6 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=1}$$

したがって，放物線の方程式は

$$y=(x+1)(x-3)+6 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=x^2-2x+3}$$

(3) 放物線 $y=-2x^2$ を平行移動した放物線の頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるから，その方程式を

$$y=-2(x-p)^2+2p+1$$

とおける．これが点 $(1,\ 3)$ を通るから

$$3=-2(1-p)^2+2p+1 \quad \text{整理すると} \quad p^2-3p+2=0$$

ゆえに　$(p-1)(p-2)=0$　これを解いて　$p=1,\ 2$

したがって，求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-2(x-1)^2+3,\quad y=-2(x-2)^2+5}$$

18 $a > 0$ のとき，2 次関数 $y = x^2 - 2x$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最大値，最小値を求めよ．

解答 最大値を M，最小値を m とし，$f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ とおくと

$$M = \begin{cases} f(0) & (0 < a < 2) \\ f(a) & (2 \leqq a) \end{cases}, \quad m = \begin{cases} f(a) & (0 < a < 1) \\ f(1) & (1 \leqq a) \end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{M = \begin{cases} 0 & (0 < a < 2) \\ a^2 - 2a & (2 \leqq a) \end{cases}, \quad m = \begin{cases} a^2 - 2a & (0 < a < 1) \\ -1 & (1 \leqq a) \end{cases}}$$

7.2.2 Exercise

19 (1) xy 平面上の放物線 $y = 3x^2 + 2ax + a$ を $0x$ 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動すると，この放物線は点 $(-2,\ 0)$ で x 軸と接した．このとき $a =$ ［　　］，$b =$ ［　　］である．

(2) 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが $y = x^2 - 8x + 9$ のグラフと点 $(1, -5)$ に関して対称であるとき，a，b，c の値をそれぞれ求めよ．

(3) $a \neq 0$ とする．$y = ax^2 - 2ax + b$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 9，最小値が 1 となるような a，b の値を求めよ．

解答 (1) $y = 3x^2 + 2ax + a$ より

$$y = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} + a$$

この放物線の頂点 $\left(-\dfrac{a}{3}, -\dfrac{a^2}{3} + a\right)$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したが点 $(-2,\ 0)$ であるから

$$-\frac{a}{3} + a = -2, \quad -\frac{a^2}{3} + a + b = 0$$

上の第 1 式から $\boldsymbol{a = -3}$，これを第 2 式に代入すると $\boldsymbol{b = 6}$

(2) $y = x^2 - 8x + 9$ を点 $(1, -5)$ に関する対称移動を行うと

$$-10 - y = (2 - x)^2 - 8(2 - x) + 9 \quad \text{ゆえに} \quad y = -x^2 - 4x - 7$$

よって　$\boldsymbol{a = -1,\ b = -4,\ c = -7}$

対称移動に関する公式

x 軸に関する対称移動	$y \longrightarrow -y$
y 軸に関する対称移動	$y \longrightarrow -x$
原点に関する対称移動	$(x,\ y) \longrightarrow (-x, -y)$
点 $(a,\ b)$ に関する対称移動	$(x,\ y) \longrightarrow (2a - x,\ 2b - y)$
直線 $y = x$ に関する対称移動	$(x,\ y) \longrightarrow (y,\ x)$

(3) $f(x)=ax^2-2ax+b$ とおくと　$f(x)=a(x-1)^2-a+b$

定義域 $0 \leqq x \leqq 3$ により

$a>0$ のとき，最小値 $f(1)=1$，最大値 $f(3)=9$ より

$$-a+b=1,\ 3a+b=9 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=2,\ b=3}$$

$a<0$ のとき，最大値 $f(1)=9$，最小値 $f(3)=1$ より

$$-a+b=9,\ 3a+b=1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=-2,\ b=7}$$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(2,\ 3),\ (-2,\ 7)}$

20* a を定数とする．$0 \leqq x \leqq 4$ のとき，2 次関数 $f(x)=2x^2-ax+5$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

解答 $f(x)=2\left(x-\dfrac{a}{4}\right)^2-\dfrac{a^2}{8}+5$

$y=f(x)$ の軸 $x=\dfrac{a}{4}$ および定義域 $(0 \leqq x \leqq 4)$ の中央が 2 であるから

$2<\dfrac{a}{4}$，すなわち，$8<a$ のとき，最大値 $\boldsymbol{f(0)=5}$

$2=\dfrac{a}{4}$，すなわち，$a=8$ のとき，最大値 $\boldsymbol{f(0)=f(4)=5}$

$\dfrac{a}{4}<2$，すなわち，$a<8$ のとき，最大値 $\boldsymbol{f(4)=37-4a}$

$0 \leqq \dfrac{a}{4} \leqq 4$，すなわち，$0 \leqq a \leqq 16$ のとき，最小値 $\boldsymbol{f\left(\dfrac{a}{4}\right)=-\dfrac{a^2}{8}+5}$

$\dfrac{a}{4}<0$，すなわち，$a<0$ のとき，最小値 $\boldsymbol{f(0)=5}$

$4<\dfrac{a}{4}$，すなわち，$16<a$ のとき，最小値 $\boldsymbol{f(4)=37-4a}$

21 区間 $t \leqq x \leqq t+1$ における，関数 $f(x)=x^2-6x+2$ の最小値 $g(t)$ を求めよ．
(東京理科大)

解答 $f(x)=(x-3)^2-7$ より

$t \leqq 3 \leqq t+1$，すなわち，$2 \leqq t \leqq 3$ のとき，最小値 $f(3)=-7$

$3<t$ のとき，最小値 $f(t)=t^2-6t+2$

$t+1<3$，すなわち，$t<2$ のとき，最小値 $f(t+1)=t^2-4t-3$

よって　$\boldsymbol{g(t)=\begin{cases} t^2-4t-3 & (t<2) \\ -7 & (2 \leqq t \leqq 3) \\ t^2-6t+2 & (3<t) \end{cases}}$

22* (1) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y=6$ のとき，$4x^2+3xy+y^2-6x-3y$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $x^2+y^2=4$ のとき，x^2-2y^2+6x の最大値と最小値を求めよ．

(3) 定義域が $-1 \leqq x \leqq 1$ であるとき，関数

$$y=(x^2-2x-1)-6(x^2-2x-1)+5$$

の最大値と最小値を求めよ．

解答 (1) $2x+y=6$ より $(y \geqq 0)$ $y=6-2x$

$$6-2x \geqq 0 \quad \text{ゆえに } (x \geqq 0) \quad 0 \leqq x \leqq 3$$

したがって

$$\begin{aligned} &4x^2+3xy+y^2-6x-3y \\ =&4x^2+3x(6-2x)+(6-2x)^2-6x-3(6-2x) \\ =&2x^2-6x+18=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{2} \quad (0 \leqq x \leqq 3) \end{aligned}$$

よって，$x=0,\ 3$ のとき最大値 **18**，$x=\dfrac{3}{2},\ y=3$ のとき最小値 $\dfrac{\mathbf{27}}{\mathbf{2}}$

(2) $x^2+y^2=4$ より　$y^2=4-x^2 \geqq 0$

$$(x+2)(x-2) \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad -2 \leqq x \leqq 2$$

したがって

$$\begin{aligned} x^2-2y^2+6x &= x^2-2(4-x^2)+6x \\ &= 3x^2+6x-8 \\ &= 3(x+1)^2-11 \end{aligned}$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ より，最大値 **16**，最小値 $\mathbf{-11}$

(3) $t=x^2-2x-1$ とおくと　$t=(x-1)^2-2$

$-1 \leqq x \leqq 1$ より　$-2 \leqq t \leqq 2$

したがって

$$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4 \quad (-2 \leqq t \leqq 2)$$

よって　最大値 **21**，最小値 $\mathbf{-3}$

7.2.3 Try

23* 直線 $y=2x-1$ に $x=1$ で接し，点 $(-1,\ 2)$ を通る放物線の方程式を求めよ．(佐賀大)

解答 求める放物線の方程式を $y=f(x)$ とすると，これと $y=2x-1$ から y を消去すると

$$f(x)=2x-1 \quad f(x)-2x+1=0$$

上の第 2 式の左辺は $a(x-1)^2$ とおけるから (a は定数)

$$f(x)-2x+1=a(x-1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad f(x)=a(x-1)^2+2x-1$$

$f(-1)=2$ であるから

$$4a-3=2 \quad \text{これを解いて} \quad a=\frac{5}{4}$$

したがって

$$y=\frac{5}{4}(x-1)^2+2x-1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y=\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$$

24* p，q，m を実数とし，放物線 $y=-x^2+2px+q\cdots①$ の頂点が直線 $y=mx-3$ 上にあるとする．(山口大 改)

(1) 放物線 ① の頂点の x 座標が -4 のとき，放物線 ① が x 軸と異なる 2 点で交わるように，m の値を定めよ．また，そのとき放物線 ① が x 軸から切り取る線分の長さを m を用いて表せ．

(2) p のあたいにかかわらず，放物線 ① と y 軸の共有点の y 座標が負となるように，m の値の範囲を求めよ．

解答 (1) $y=-x^2+2px+q=-(x-p)^2+p^2+q$

上式より放物線の頂点の x 座標は p

頂点が直線 $y=mx-3$ 上にあるから，頂点の座標は $(p,\ mp-3)$

したがって，放物線の方程式は

$$y=-(x-p)^2+mp-3 \qquad (*)$$

$p=-4$ のとき，放物線 $y=-(x+4)^2-4m-3$ が x 軸と異なる 2 点で交わるから

$$-4m-3>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{m<-\frac{3}{4}}$$

放物線 $y=-(x+4)^2-4m-3$ の x 軸との共有点 x 座標は

$$(x+4)^2=-4m-3 \quad \text{ゆえに} \quad x=-4\pm\sqrt{-4m-3}$$

よって，放物線が x 軸から切り取る線分の長さは

$$(-4+\sqrt{-4m-3})-(-4-\sqrt{-4m-3})=\boldsymbol{2\sqrt{-4m-3}}$$

(2) 放物線 $(*)$ の y 軸との交点の y 座標が負であるから

$$-p^2+mp-3<0 \quad \text{ゆえに} \quad p^2-mp+3>0$$

これが p の値に関らず成立するから，係数について

$$m^2-4\cdot1\cdot3<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}}$$

25* 関数 $f(x)=|x^2-10x+18|$ を考える．　(南山大 改)

(1) $f(x)=7$ を満たす x の値を求めよ．

(2) a を実数とするとき，$f(x)$ の $a \leqq x \leqq a+4$ における最大値が 7 となるような a の値の範囲を求めよ．

解答　(1) $f(x)=|x^2-10x+18|=|(x-5)^2-7|$ より，$f(x)=7$ とすると

$$x^2-10x+18=\pm 7 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=5\pm\sqrt{14},\ 5}$$

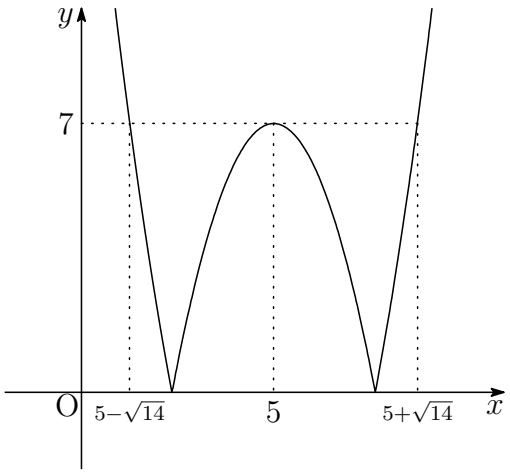
(2) $(5-\sqrt{14})+4=5+(4-\sqrt{14})>5$,

$(5+\sqrt{14})-4=1+\sqrt{14}<(1+\sqrt{14})+(4-\sqrt{14})=5$

したがって　$5<(5-\sqrt{14})+4$,　$1+\sqrt{14}=(5+\sqrt{14})-4<5$

よって，$a \leqq x \leqq a+4$ における最大値が 7 となる a の値の範囲は

$$\boldsymbol{5-\sqrt{14} \leqq a \leqq 1+\sqrt{14}}$$



26 a を実数とする．x の 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする． (岡山大)

(1) $m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ．

(3) a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ．

解答 (1) $a=\dfrac{1}{2}$ より　　$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x+1 \quad \left(-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\right)$

$$=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$$

よって　　$m\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{15}{16}}$

(2) $f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1$

(i) $a+1<-\dfrac{a}{2}$，すなわち，$a<-\dfrac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=f(a+1)=(a+1)^2+a(a+1)+1$$
$$=2a^2+3a+2=2\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$

(ii) $a-1 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq a+1$，すなわち，$-\dfrac{2}{3} \leqq a \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}+1$$

(iii) $-\dfrac{a}{2}<a-1$，すなわち，$\dfrac{2}{3}<a$ のとき

$$m(a)=f(a-1)=(a-1)^2+a(a-1)+1$$
$$=2a^2-3a+2=2\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$

(i)〜(iii) より

$$\boldsymbol{m(a)=}\begin{cases}\boldsymbol{2a^2+3a+2} & \left(\boldsymbol{a<-\dfrac{2}{3}}\right)\\ \boldsymbol{-\dfrac{a^2}{4}+1} & \left(\boldsymbol{-\dfrac{2}{3} \leqq a \leqq \dfrac{2}{3}}\right)\\ \boldsymbol{2a^2-3a+2} & \left(\boldsymbol{\dfrac{2}{3}<a}\right)\end{cases}$$

(3) (2) の結果から　$a=\pm\dfrac{3}{4}$ のとき，$m(a)$ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7}{8}}$

27 2次関数 $f(x)=\dfrac{5}{4}x^2-1$ について，次の問に答えよ． (滋賀大)

(1) a，b は $f(a)=a$，$f(b)=b$，$a<b$ を満たす．このとき，$a \leqq x \leqq b$ における $f(x)$ の最小値と最大値を求めよ．

(2) p，q は $p<q$ を満たす．このとき，$p \leqq x \leqq q$ における $f(x)$ の最小値が p，最大値が q となるような p，q の組をすべて求めよ．

解答 (1) $a,\ b$ は放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ の共有点の x 座標であるから $(a<b)$

$$\frac{5}{4}x^2-1=x \quad \text{ゆえに} \quad 5x^2-4x-4=0 \tag{$*$}$$

これを解くことにより $\quad a=\dfrac{2-2\sqrt{6}}{5},\ b=\dfrac{2+\sqrt{6}}{5}$

$a<0<\dfrac{a+b}{2}<b$ であるから，最大値 $f(b)$，最小値 $f(0)$ より

最大値 $\boldsymbol{b}$，　最小値 $\boldsymbol{-1}$

(2) (i) $q<0$ のとき，最小値 $f(q)$，最大値 $f(p)$ より

$$p=\frac{5}{4}q^2-1, \quad q=\frac{5}{4}p^2-1 \tag{A}$$

辺々の和と差をとると

$$p+q=\frac{5}{4}(p^2+q^2)-2, \quad p-q=-\frac{5}{4}(p^2-q^2)$$

$p-q \neq 0$ より (A) の第2式から $\quad p+q=-\dfrac{4}{5}$

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=\dfrac{16}{25}-2pq$ であるから，(A) の第1式より

$$-\frac{4}{5}=\frac{5}{4}\left(\frac{16}{25}-2pq\right)-2 \quad \text{ゆえに} \quad pq=-\frac{4}{25}$$

これは $p<q<0$ に反するので不適．

(ii) $\dfrac{p+q}{2} \leqq 0 \leqq q$ のとき，最小値 $f(0)$，最大値 $f(p)$ より

$$p=-1, \quad q=\frac{5}{4}p^2-1 \tag{B}$$

条件に注意して (B) を解くと $\quad p=-1,\ q=\dfrac{1}{4}$

(iii) $p \leqq 0 < \dfrac{p+q}{2}$ のとき，最小値 $f(0)$，最大値 $f(q)$ より

$$p = -1, \quad q = \frac{5}{4}q^2 - 1 \tag{C}$$

条件に注意して (B) を解くと　$p = -1,\ q = \dfrac{2+2\sqrt{6}}{5}$

(iv) $0 < p$ のとき，最小値 $f(p)$，最大値 $f(q)$ より

$$p = \frac{1}{4}p^2 - 1, \quad q = \frac{1}{4}q^2 - 1$$

p，q は 2 次方程式 $(*)$ の解であるから $(p < q)$

$$p = \frac{2-2\sqrt{6}}{5}, \quad q = \frac{2+2\sqrt{6}}{5}$$

これは $0 < p$ に反するので不適.

(i)〜(iv) より，求める p，q の組は

$$\boldsymbol{(p,\ q) = \left(-1,\ \frac{1}{4}\right),\ \left(-1,\ \frac{2+2\sqrt{6}}{5}\right)}$$

7.3　2 次方程式・不等式

7.3.1　Review

28 2 次不等式 $2ax^2+2bx+1 \leqq 0$ の解が $x \leqq -\dfrac{1}{2},\ 3 \leqq x$ となるような a，b の値を求めよ．

解答 2 次不等式の解が $x \leqq -\dfrac{1}{2},\ 3 \leqq x$ となる 2 次不等式の 1 つは

$$(2x+1)(x-3) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2-5x-3 \geqq 0$$

このとき，定数項に注意して両辺に $-\dfrac{1}{3}$ を掛けると

$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x+1 \leqq 0$$

これと $2ax^2+2bx+1 \leqq 0$ の係数が一致するから

$$2a=-\frac{2}{3},\ \ 2b=\frac{5}{3} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{3},\ b=\frac{5}{6}}$$

29 2 次不等式 $x^2-2ax+4=0\cdots$①，$x^2-2ax+2a+3=0\cdots$② が次の条件を満たすような a の値の範囲を求めよ．

(1) ①，② ともに実数解をもつ．

(2) ①，② のうち一方だけが実数解をもつ．

(3) ①，② のうち少なくとも一方が実数解をもつ．

解答 ①，② の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1/4=(-a)^2-1\cdot 4=(a+2)(a-2),$$
$$D_2/4=(-a)^2-1\cdot(2a+3)=(a+1)(a-3)$$

(1) ①，② ともに実数解をもつ，すなわち，$D_1\geqq 0,\ D_2\geqq 0$ のとき

$$\begin{cases} a\leqq -2,\ 2\leqq a \\ a\leqq -1,\ 3\leqq a \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a\leqq -2,\ 3\leqq a}$$

(2) まず，①，② のうち少なくとも一方が実数解をもつ，すなわち，$D_1\geqq 0$ または $D_2\geqq 0$ を満たす a の値の範囲は

$$a\leqq -1,\ 2\leqq a \qquad (*)$$

これから，(1) で求めた a の範囲を除くとよいから

$$\boldsymbol{-2<a\leqq -1,\ 2\leqq a<3}$$

(3) ①，② のうち少なくとも一方が実数解をもつ a の値の範囲は，$(*)$ より

$$\boldsymbol{a\leqq -1,\ 2\leqq a}$$

30 次の条件を満たす実数 k の値の範囲を求めよ.

(1) すべての実数 x に対し，不等式 $kx^2 - kx + 2 > 0$ が成り立つ.

(2) ある実数 k に対し，不等式 $x^2 - 3x + 4 < kx$ が成り立つ.

解答 (1) 係数について　$D = (-k)^2 - 4{\cdot}k{\cdot}2 = k(k-8)$

$k \neq 0$ のとき，与えられた不等式が成立するのとき

$$k < 0,\ D = k(k-8) < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < k < 8$$

また，$k = 0$ のときも与えられた不等式が成立することに注意して

$$\boldsymbol{0 \leqq k < 8}$$

(2) 与えらえた不等式を整理すると

$$x^2 - (k+3)x + 4 < 0$$

これを満たす実数 x が存在するとき，係数について

$$D = (k+3)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}4 = (k+7)(k-1) > 0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{k < -7,\ 1 < k}$

31 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = x^2 + 2|x+1|$

(2) $y = |x^2 - 2x - 3|$

解答 (1) $f(x) = x^2 + 2|x+1|$ とおくと

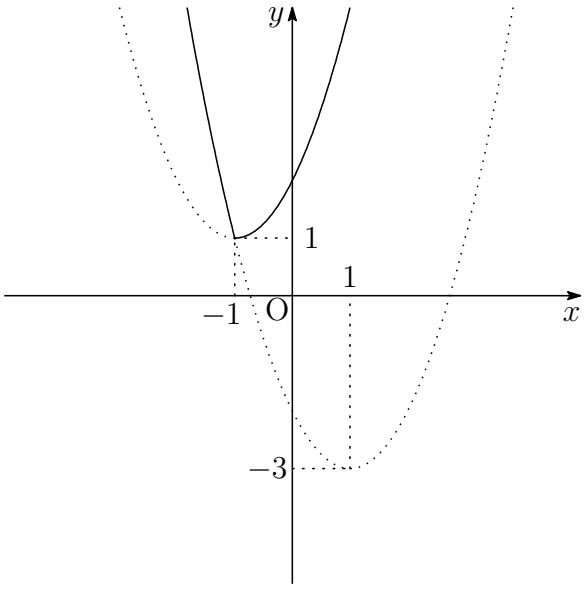
(i) $x+1 \geqq 0$，すなわち，$x \geqq -1$ のとき

$$f(x) = x^2 + 2(x+1) = (x+1)^2 + 1$$

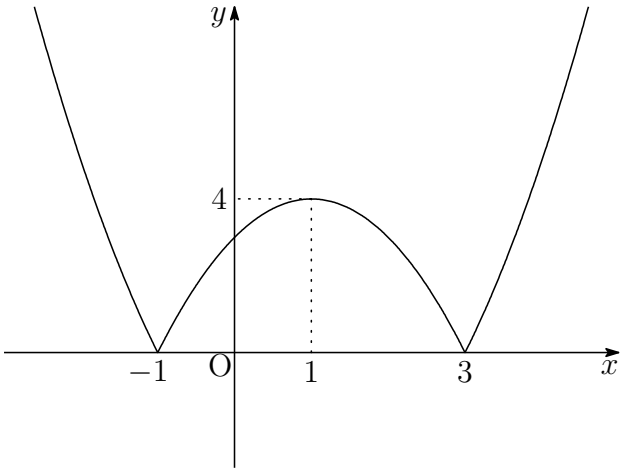
(ii) $x+1 \leqq 0$，すなわち，$x \leqq -1$ のとき

$$f(x) = x^2 - 2(x+1) = (x-1)^2 - 3$$

(i)，(ii) の結果から，$y = f(x)$ のグラフは下の図の実線部分である.



(2) $y = |x^2 - 2x - 3| = |(x+1)(x-3)| = |(x-1)^2 - 4|$ より



7.3.2 Exercise

32 x についての 2 つの 2 次方程式

$$2x^2-(3m-1)x+m^2-m=0 \quad と \quad x^2-(2m-5)x+m^2-5m+6=0$$

がただ 1 つの共通解をもつとき，m の値とそのときの共通解を求めよ．

(国士舘大 改)

解答 2 つの 2 次方程式から

$$(x-m)(2x-m+1)=0 \qquad これを解いて \quad x=m,\ \frac{m-1}{2}$$

$$(x-m+2)(x-m+3)=0 \quad これを解いて \quad x=m-2,\ m-3$$

$m \neq m-2,\ m-3$ より，上の 2 つの 2 次方程式の共通解について

(i) $\dfrac{m-1}{2}=m-2$，すなわち，$m=3$ のとき，共通解は $x=1$

(ii) $\dfrac{m-1}{2}=m-3$，すなわち，$m=5$ のとき，共通解は $x=2$

よって　$\boldsymbol{m=3}$ **のとき　共通解** $\boldsymbol{x=1}$

　　$\boldsymbol{m=5}$ **のとき　共通解** $\boldsymbol{x=2}$

33 a を実数の定数とする．2 つの 2 次不等式

$$x^2 - x - 6 \leqq 0 \qquad \cdots (\mathrm{A})$$
$$x^2 - (2a-3)x + a^2 - 3a - 10 \leqq 0 \qquad \cdots (\mathrm{B})$$

がある．不等式 (A) を満たすすべての x が不等式 (B) を満たすような a の値の範囲は［　ア　］であり，不等式 (A) と不等式 (B) を同時に満たす x が存在するような a の値の範囲は［　イ　］である． (関西大)

解答 (A) を解くと

$$(x+2)(x-3) \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad -2 \leqq x \leqq 3$$

(B) を解くと

$$(x-a+5)(x-a-2) \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a-5 \leqq x \leqq a+2$$

(A) を満たすすべての x が不等式 (B) を満たすとき

$$a-5 \leqq -2,\ \ 3 \leqq a+2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{1 \leqq a \leqq 3} \quad \cdots (\text{ア})$$

(A) と不等式 (B) を同時に満たす x が存在するとき

$$-2 \leqq a+2,\ \ a-5 \leqq 3 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{-4 \leqq a \leqq 8} \quad \cdots (\text{イ})$$

34 x についての 2 次方程式 $x^2-2px+2p+1=0$ が次のような異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 p の値の範囲を求めよ．

(1) 2 つの解がともに正

(2) 1 つの解が正，他の解が負

(3) 2 つの解がともに 1 より大きく 5 より小さい

解答 $f(x)=x^2-2px+2p+1$ とおくと

$$f(x)=(x-p)^2-p^2+2p+1$$

放物線 $y=f(x)$ の頂点は　$(p,\,-p^2+2p+1)$

(1) $f(x)=0$ の 2 つの解がともに正であるとき

$$p>0 \quad \cdots ①, \quad -p^2+2p+1<0, \quad f(0)=2p+1>0 \qquad \text{(A)}$$

(A) の第 2 式から　$p^2-2p-1>0$

これを解いて　　$p<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<p \quad \cdots ②$

(A) の第 3 式から　$p>-\dfrac{1}{2} \quad \cdots ③$

①〜③ を同時に満たす p の範囲を求めると　$\boldsymbol{1+\sqrt{2}<p}$

35 方程式 $|x^2-9|=3x+k$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，定数 k のとり得る値の範囲は $\boxed{} < k \boxed{}$ である．　(関西大 改)

解答 与えられ方程式より　$|x^2-9|-3x=k \quad \cdots(*)$

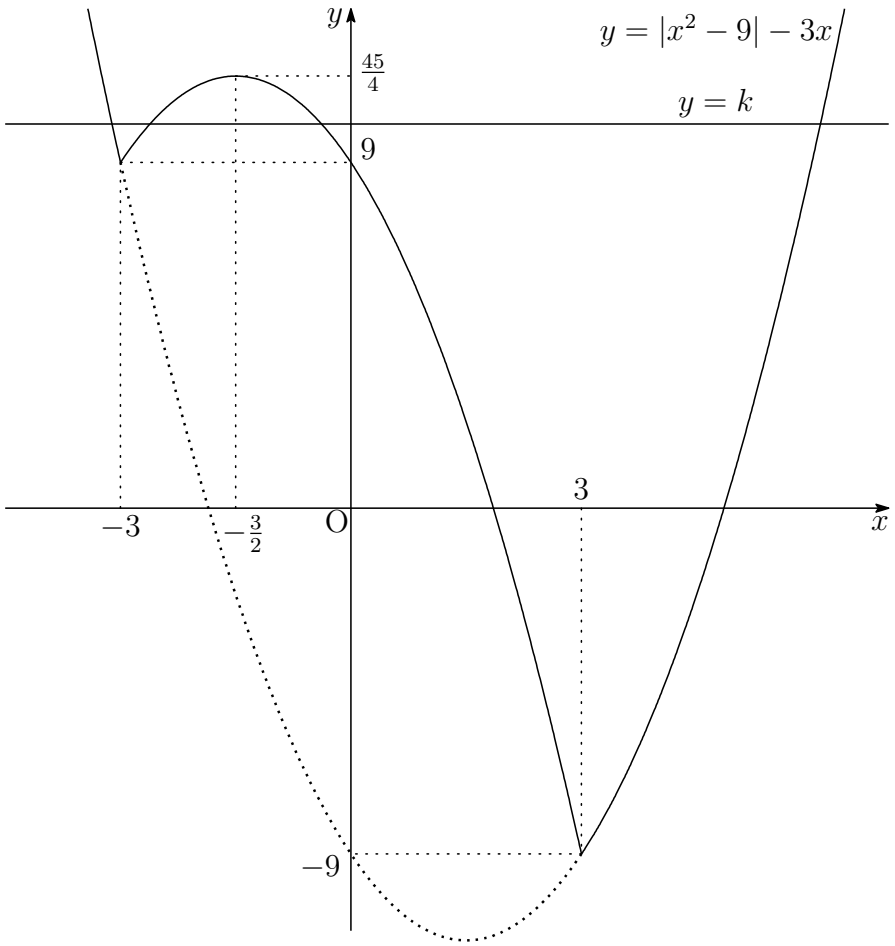
方程式 $(*)$ の解は，$y=|x^2-9|-3x$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の x 座標である．

$$y=|x^2-9|-3x=\begin{cases} x^2-3x-9 & (x \leqq -3,\ 3 \leqq x) \\ -x^2-3x+9 & (-3 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

ここで

$$x^2-3x-9=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{45}{4}, \quad -x^2-3x+9=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{45}{4}$$

下のグラフから，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{9<k<\dfrac{45}{4}}$



7.3.3 Try

36 連立不等式 $\begin{cases} x^2-7x+6 \geqq 0 \\ x^2-(a^2-2a)x-a(a^2-a) \leqq 0 \end{cases}$ を ① とおく．ただし，a は正の定数とする． (法政大)

(1) $a=3$ のとき，① を解け．

(2) ① を満たす整数 x が存在しないような，a の値の範囲を求めよ．

(3) ① を満たす整数 x がちょうど 6 個存在するような，a の値の範囲を求めよ．

解答 ① の第 1 式から

$$(x-1)(x-6) \geqq 0 \quad \text{これを解くと} \quad x \leqq 1,\ 6 \leqq x \qquad (*)$$

① の第 2 式から

$$(x+a)(x-a^2+a) \leqq 0 \quad \text{これを解くと } (a>0) \quad -a \leqq x \leqq a^2-a \qquad (**)$$

(1) $a=3$ のとき，$(**)$ は $\quad -3 \leqq x \leqq 6$

よって，① の解は $\quad \boldsymbol{-3 \leqq x \leqq 1,\ x=6}$

(2) (i) $a^2-a \geqq 0$，すなわち，$a \leqq 0,\ 1 \leqq a$ のとき
$(*)$，$(**)$ は共通の整数解 $x=0$ をもつので不適

(ii) $0<a<1$ のとき，$-1<a<0,\ a^2-a<0$ より，
$(*)$，$(**)$ は共通の整数解をもたない．

(i)，(ii) より，求める a の値の範囲は $\quad \boldsymbol{0<a<1}$

(3) $a > 0$ および (2) の結論から，$a \geqq 1$ であることが ① が共通解をもつための必要条件である．

$$A = \{x \mid x \leqq 1,\ 6 \leqq x,\ x \text{ は整数}\},$$
$$B = \{x \mid -a \leqq x \leqq a^2 - a,\ x \text{ は整数}\}$$

とし，集合 X の要素の個数をそれぞれ $n(X)$ とおくと，$n(A \cap B) = 6$ を満たす a の値の範囲を求めればよい．

(i) $1 \leqq a < 3$ のとき

$$A \cap B \subset \{-2, -1,\ 0,\ 1\} \quad \text{ゆえに} \quad n(A \cap B) \leqq 4$$

(ii) $3 \leqq a < 4$ のとき

$$\{-3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 6\} \subset A \cap B \quad \text{ゆえに} \quad 6 \leqq n(A \cap B)$$

(iii) $4 \leqq a$ のとき

$$\{-4, -3, -2, -1, 0,\ 1,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\} \subset A \cap B$$

ゆえに $\quad 13 \leqq n(A \cap B)$

(i)〜(iii) より，$n(A \cap B) = 6$ となるのは，(ii) において，$a \geqq 3$ かつ $7 \notin B$ となる a の値の範囲を求めればよい．

$$a \geqq 3 \ \text{ かつ } \ a^2 - a < 7 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{3 \leqq a < \frac{1 + \sqrt{29}}{2}}$$

37* a を実数とし，$f(x)=x^2-2x+2$，$g(x)=-x^2+ax+a$ とする． (神戸大)

(1) すべての実数 s，t に対して $f(s)\geqq g(t)$ が成り立つような，a の値の範囲を求めよ．

(2) $0\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対して $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つような，a の値の範囲を求めよ．

解答 (1) $f(x)=(x-1)^2+1$，$g(x)=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}+a$ より

$$1\geqq \frac{a^2}{4}+a \quad \text{ゆえに} \quad a^2+4a-4\leqq 0$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{-2-2\sqrt{2}\leqq a\leqq -2+2\sqrt{2}}$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} h(x)&=(x^2-2x+2)-(-x^2+ax+a)\\ &=2x^2-(a+2)x-a+2\\ &=2\left(x-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最小値を $m(a)$ とおく．

(i) $\dfrac{a+2}{4}<0$，すなわち，$a<-2$ のとき

$$m(a)=h(0)=2-a$$

(ii) $0\leqq \dfrac{a+2}{4}\leqq 1$，すなわち，$-2\leqq a\leqq 2$ のとき

$$m(a)=h\left(\frac{a+2}{4}\right)=-\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}$$

(iii) $1<\dfrac{a+2}{4}$，すなわち，$2<a$ のとき

$$m(a)=h(1)=2-2a$$

(i)〜(iii) より

$$\boldsymbol{m(a)=\begin{cases} 2-a & (a<-2)\\ -\dfrac{1}{8}a^2-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{3}{2} & (-2\leqq a\leqq 2)\\ 2-2a & (2<a)\end{cases}}$$

38 不等式 $-x^2+(a+2)x+a-3<y<x^2-(a-1)x-2\cdots$① を考える．ただし，$x$，$y$，$a$ は実数とする． (早稲田大)

(1) 「どんな x に対しても，それぞれ適当な y をとれば不等式 ① が成立する」ための a の値の範囲を求めよ．

(2) 「適当な y をとれば，どんな x に対しても不等式 ① が成立する」ための a の値の範囲を求めよ．

解答 $f(x)=-x^2+(a+2)x+a-3$，$g(x)=x^2-(a-1)x-2$ とおく．

(1) すべての x に対して，$f(x)<g(x)$ が成立する，すなわち

$$2x^2-(2a+1)x-a+1>0$$

が成り立つことであるから，係数について

$$\begin{aligned} D&=(2a+1)^2-4\cdot2\cdot(-a+1)\\ &=4a^2+12a-7=(2a-1)(2a+7)<0 \end{aligned}$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{-\dfrac{7}{2}<a<\dfrac{1}{2}}$

(2) $f(x)$ の最大値 $<g(x)$ の最小値 を満たす．

$$f(x)=-x^2+(a+2)x+a-3=-\left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2+\frac{1}{4}a^2+2a-2$$

$$g(x)=x^2-(a-1)x-2=\left(x-\frac{a-1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{9}{4}$$

このとき，上の 2 式から

$$\frac{1}{4}a^2+2a-2<-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{9}{4} \quad \text{整理すると} \quad 2a^2+6a+1<0$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}<a<\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}}$

39* k を定数とし，2 次関数 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ のグラフを C とする．

(1) C と x 軸が異なる 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ．

(2) C が x 軸の $-2 < x < 4$ の部分と異なる 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ．

(3) C が x 軸の $-2 < x < 4$ の部分と 1 点のみで交わるような k の値の範囲を求めよ．ただし，C が x 軸と接する場合は考えない． (東京理科大)

解答 (1) $y = (x-k)^2 - k^2 + 2k + 3$ より

$$D/4 = -k^2 + 2k + 3 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (k+1)(k-3) > 0$$

これを解いて $\boldsymbol{k < -1,\ 3 < k}$

(2) $f(x) = x^2 - 2kx + 2k + 3$ とおく．

$-2 < k < 4$，$f(k) < 0$，$f(-2) > 0$，$f(4) > 0$ を満たせばよい．

$f(k) < 0$ より $\quad -k^2 + 2k + 3 < 0 \quad$ ゆえに $\quad k < -1,\ 3 < k$

$f(-2) > 0$ より $\quad 6k + 7 > 0 \quad$ ゆえに $\quad k > -\dfrac{7}{6}$

$f(4) > 0$ より $\quad -6k + 19 > 0 \quad$ ゆえに $\quad k < \dfrac{19}{6}$

よって，求める k の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{7}{6} < k < -1,\ 3 < k < \frac{19}{6}}$$

(3) $f(-2)f(4) \leqq 0$ を満たせばよい．

$$(6k+7)(-6k+19) \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (6k+7)(6k-19) \geqq 0$$

よって，求める k の値の範囲は

$$\boldsymbol{k \leqq -\frac{7}{6},\ \frac{19}{6} \leqq k}$$

40 放物線 $y=x^2+ax+2$ が，2 点 A(0, 1)，B(2, 3) を結ぶ線分と異なる 2 点で交わるという．この条件を満たす a の値の範囲を求めよ．　(群馬大)

解答 線分 AB の方程式は　$y=x+1 \ \ (0 \leqq x \leqq 2)$

放物線 $y=x^2+ax+2$ と直線 $y=x+1$ から y を消去すると

$$x^2+ax+2=x+1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2+(a-1)x+1=0$$

上の方程式が $0 \leqq x \leqq 2$ において異なる 2 つの解をもてばよいから，

$$f(x)=x^2+(a-1)x+1$$

とおくと，放物線 $y=f(x)$ が x 軸と $0 \leqq x \leqq 2$ の区間で x 軸と 2 点で交わるための a の値の範囲を求めればよい．

$$D=(a-1)^2-4\cdot1\cdot1>0, \quad 0<-\frac{a-1}{2}<2, \quad f(0) \geqq 0, \quad f(2) \geqq 0 \qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式から

$$(a+1)(a-3)>0 \quad \text{これを解いて} \quad a<-1, \ \ 3<a \quad \cdots ①$$

$(*)$ の第 2 式から

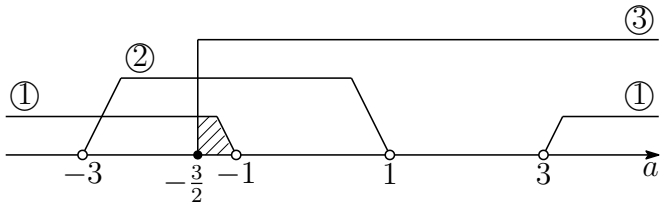
$$0<1-a<4 \quad \text{これを解いて} \quad -3<a<1 \quad \cdots ②$$

$(*)$ の第 3 式から　$f(0)=1 \geqq 0$　これは成立する．

$(*)$ の第 4 式から

$$2a+3 \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad a \geqq -\frac{3}{2} \quad \cdots ②$$

①〜③ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq a<-1}$



41* $f(x)=|2x^2-10x+9|$ とおく．$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=ax+1$ がちょうど 4 個の共有点をもつような，実数の定数 a の値の範囲を求めよ．(法政大 改)

解答 $y=f(x)$ の x 軸との共有点の x 座標は

$$2x^2-10x+9=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$$

$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ において，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=ax+1$ が接するとき

$$-2x^2+10x-9=ax+1 \quad \text{整理すると} \quad 2x^2+(a-10)x+10=0$$

このとき，係数について

$$D/4=(a-10)^2-2\cdot 10=a^2-20a+80=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=10\pm 4\sqrt{5}$$

このとき，接点の x 座標

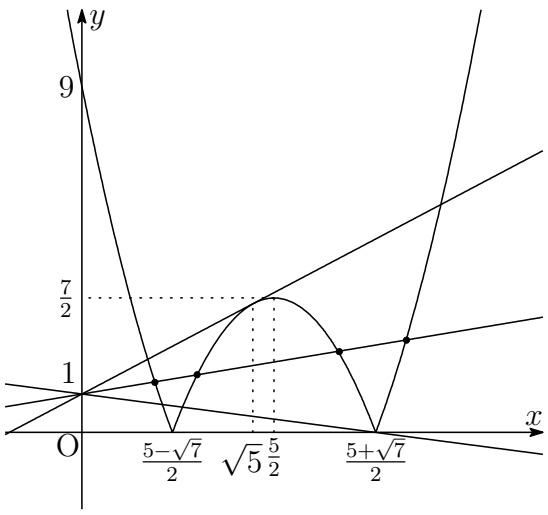
$$-\frac{a-10}{2\cdot 2}=\frac{10-a}{4}=\mp\sqrt{5} \quad \text{(複号同順)}$$

が $\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ にある a の値は $\quad a=10-4\sqrt{5}$

また，直線 $y=ax+1$ が点 $\left(\dfrac{5+\sqrt{7}}{2},\ 0\right)$ を通るとき

$$0=\frac{5+\sqrt{7}}{2}a+1 \quad \text{これを解いて} \quad a=-\frac{5-\sqrt{7}}{9}$$

よって，a の値の範囲は $\quad \boldsymbol{-\dfrac{5-\sqrt{7}}{9}<a<10-4\sqrt{5}}$



7.4　三角比と図形の計量

7.4.1　Review

42 $\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)-\cos^2\theta\tan^2(180^\circ-\theta)$ を簡単にせよ.

解答

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \cos\theta(-\cos\theta)-\cos^2\theta(-\tan\theta)^2\\ &= -\cos^2\theta-\cos^2\theta\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\ &= -(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\boldsymbol{-1}\end{aligned}$$

43 $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ で，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(3) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

(4) $\sin\theta-\cos\theta$

解答　(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の両辺を平方すると

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta &= (\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{5}{8}\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(3) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\ &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\boldsymbol{-4}\end{aligned}$$

(4) (1) の結果から，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$ より，$\sin\theta-\cos\theta>0$ であるから

$$\begin{aligned}\sin\theta-\cos\theta &= \sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta}\\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}\end{aligned}$$

44 △ABC において，次を求めよ．

(1) $b=10$，$A=60^\circ$，$C=75^\circ$ のとき，a，外接円の半径 R

(2) $a=7$，$b=5$，$c=8$ のとき，A

(3) $a=5$，$c=7$，$C=120^\circ$ のとき，△ABC の面積

解答 (1) $B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

正弦定理により $\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=2R$

$$a=\frac{10\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\boldsymbol{5\sqrt{6}},$$
$$R=\frac{5}{\sin 45^\circ}=\boldsymbol{5\sqrt{2}}$$

(2) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\frac{1}{2}$$

よって　$\boldsymbol{A=60^\circ}$

(3) 余弦定理により　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$7^2=5^2+b^2-2\cdot5b\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\quad\text{整理すると}\quad b^2+5b-24=0$$

ゆえに　$(b+8)(b-3)=0$　$b>0$ であるから　$b=3$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{15}{4}\sqrt{3}}$

45 $x-1,\ x,\ x+1$ が三角形の 3 辺の長さとなるような x の値の範囲を求めよ．また，鈍角三角形の 3 辺の長さとなるような x の値の範囲を求めよ．

解答 $x-1,\ x,\ x+1$ が三角形の 3 辺の長さとなるような x の値の範囲は

$$x+1<(x-1)+x\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{x>2}$$

鈍角三角形となるような x の値の範囲は

$$(x+1)^2>(x-1)^2+x^2\quad\text{ゆえに}\quad x(x-4)<0$$

$x>2$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{2<x<4}$

7.4.2 Exercise

46* AB = 6，BC = 5，CA = 4 である △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を P とするとき

(1) △ABC の面積 S と内接円の半径 r を求めよ．

(2) 線分 BP と線分 AP の長さを求めよ．

解答 (1) $a=5,\ b=4,\ c=6,\ s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)=\dfrac{15}{2}$ とおく．ヘロンの公式により

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{15}{4}\sqrt{7}}$$

$S=rs$ より　$\dfrac{15}{4}\sqrt{7}=r\cdot\dfrac{15}{2}$　これを解いて　$\boldsymbol{r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$

(2) BP : PB = AB : AC より　BP : PB = 3 : 2

よって　$\mathrm{BP}=\dfrac{3}{3+2}\mathrm{BC}=\dfrac{3}{5}\cdot 5=\boldsymbol{3}$

$\mathrm{AP}^2=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BP}\cdot\mathrm{PC}=6\cdot 4-3\cdot 2=18$　よって　$\mathrm{AP}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

参照 角の二等分線に関する公式

47 △ABC において，$\dfrac{\sin A}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sin B}{\sqrt{2}} = \sin C$ のとき

(1) 3 辺の長さの比 AB : BC : CA と最大角の大きさを求めよ．

(2) △ABC の外接円の半径が 2 のとき，△ABC の面積を求めよ．

解答 (1) 正弦定理により $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$

したがって $\mathbf{AB : BC : CA = 1 : \sqrt{5} : \sqrt{2}}$

定数 k を用いて

$$\mathrm{AB} = k,\ \ \mathrm{BC} = \sqrt{5}k,\ \ \mathrm{CA} = \sqrt{2}k \qquad (*)$$

とおくと，∠CAB が最大角であるから

$$\cos\angle\mathrm{CAB} = \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} = \frac{2k^2 + k^2 - 5k^2}{2\cdot\sqrt{2}k\cdot k} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，求める最大角は $\mathbf{\angle CAB = 135^\circ}$

(2) 正弦定理により $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin 135^\circ} = 2\cdot 2$ ゆえに $\mathrm{BC} = 4\sin 135^\circ = 2\sqrt{2}$

これを $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$\sqrt{5}k = 2\sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad k = 2\sqrt{\frac{2}{5}} \qquad (**)$$

△ABC の面積 S は，$(*)$，$(**)$ より

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin 135^\circ = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}k\cdot k\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}k^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5} = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

48* 四角形 ABCD は円に内接し，$\mathrm{AB}=8,\ \mathrm{BC}=3,\ \mathrm{CD}=5,\ \mathrm{DA}=5$ である．

(1) BD の長さを求めよ．

(2) 外接円の半径 R を求めよ．

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ．

解答 (1) △ABD に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{BD}^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot5\cdot8\cos A = 89 - 80\cos A$$

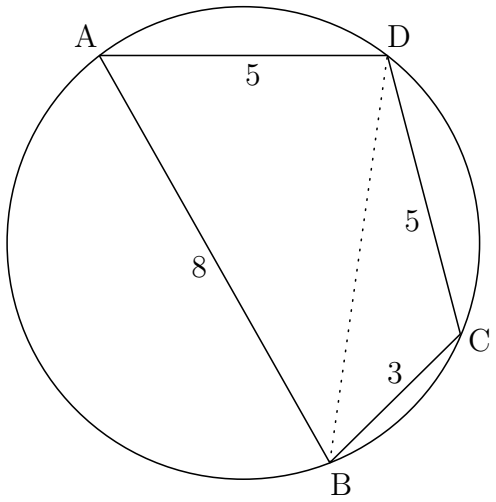
四角形 ABCD は円に内接しているから，$C = 180^\circ - A$
△BCD に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{BD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2\cdot5\cdot3\cos(180^\circ - A) = 34 + 30\cos A$$

上の 2 式から

$$\cos A = \frac{1}{2},\quad \mathrm{BD}^2 = 49 \qquad (*)$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　　$\mathbf{BD = 7}$



(2) $(*)$ の第 1 式から　$A = 60^\circ$

△ABD に正弦定理を適用すると　$2R = \dfrac{\mathrm{BD}}{\sin 60^\circ}$

$$2R = 7 \div \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{R = \frac{7}{\sqrt{3}}}$$

(3) 四角形 ABCD は円に内接しているから　$C = 180^\circ - A = 120^\circ$

求める面積は

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\sin 120^\circ \\ &= \boldsymbol{\frac{55\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

別解 (ブラマーグプタの公式)

$s = \dfrac{1}{2}(8+3+5+5) = \dfrac{21}{2}$ より，求める面積は

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(\frac{21}{2}-8\right)\left(\frac{21}{2}-3\right)\left(\frac{21}{2}-5\right)\left(\frac{21}{2}-5\right)} \\ =&\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{11}{2}} \end{aligned}$$

ブラマーグプタの公式

円に内接する四角形 ABCD において

$$\mathrm{AB} = a,\ \mathrm{BC} = b,\ \mathrm{CD} = c,\ \mathrm{DA} = d$$

とし，$2s = a+b+c+d$ とすると，四角形 ABCD の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

補足 ブラマーグプタの公式において，$d = 0$ のとき，ヘロンの公式と一致する．

49* △ABC において，$a = \mathrm{BC}$，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とする．次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形であるか．

(1) $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$

(2) $b\cos B = c\cos C$

解答 (1) △ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

により

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

であるから，これらを $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ に代入すると

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

したがって，△ABC は $\boldsymbol{A = 90°}$**の直角三角形**

(2) 余弦定理により

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

これらを $b\cos B = c\cos C$ に代入すると

$$b\cdot\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = c\cdot\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b^2(c^2 + a^2 - b^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$(b^2 - c^2)a^2 - (b^4 - c^4) = 0$$

$$(b^2 - c^2)a^2 - (b^2 - c^2)(b^2 + c^2) = 0$$

$$(b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2) = 0$$

$$(b + c)(b - c)(a^2 - b^2 - c^2) = 0$$

$b + c \neq 0$ であるから

$$b = c \quad \text{または} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

よって，△ABC は

CA = AB の二等辺三角形　または　∠A = 90°の直角三角形

7.4.3 Try

50* △ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である．このとき，△ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ．　(千葉大 2010 年 [3])

解答 $a = \mathrm{BC}$，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$，△ABC の面積を S とし，△ABC の外接円の半径，内接円の半径をそれぞれ $R,\ r$ とすると，△ABC の面積について

$$S = \frac{1}{2}a\cdot 1 = \frac{1}{2}b\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{2}c\cdot 2 \quad \text{ゆえに} \quad S = \frac{a}{2} = \frac{b}{\sqrt{2}} = c \qquad (*)$$

$a = 2c$，$b = \sqrt{2}c$ を余弦定理に適用すると

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(2c)^2+(\sqrt{2}c)^2-c^2}{2\cdot 2c\cdot\sqrt{2}c} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$$

ゆえに　　$\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \dfrac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$

$(*)$ より，$S = c$，$a = 2c$，$b = \sqrt{2}c$ を $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ に代入すると

$$c = \frac{1}{2}\cdot 2c\cdot\sqrt{2}c\cdot\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{4}{\sqrt{7}} \quad \text{よって} \quad S = \boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{7}}}$$

△ABC の内接円の半径 r は，$S = \dfrac{1}{2}(a+b+c)r$ により

$$c = \frac{1}{2}(2c+\sqrt{2}c+c)r \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{1}{2}(3+\sqrt{2})cr$$

したがって　　$r = \dfrac{2}{3+\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{2(3-\sqrt{2})}{7}}$

△ABC の外接円の半径 R は，正弦定理により

$$2R = \frac{c}{\sin C} \quad \text{ゆえに} \quad R = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{7}}$$

51* 円に内接する四角形 ABCD において，AD = 2AB とする．また，対角線 AC と BD の交点 E が BD を 3 : 2 に内分するとき，次の問に答えよ．　(滋賀大)

(1) △ABC の面積を S_1，△ACD の面積を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ を求めよ．

(2) BC : CD を求めよ．

(3) ∠BAD = 120°，AB = 2 とするとき，四角形 ABCD の面積を求めよ．

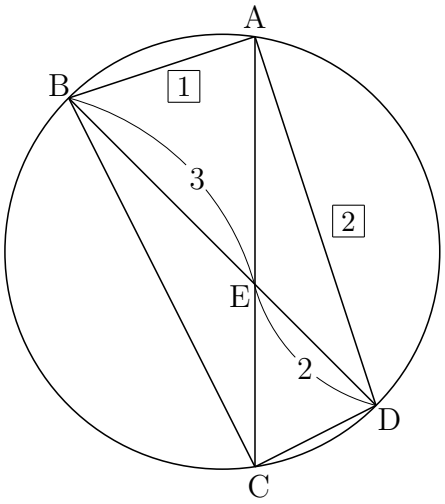
解答　(1) $S_1 : S_2 = \triangle ABC : \triangle ACD = BE : ED = \mathbf{3 : 2}$

(2) $S_1 = \dfrac{1}{2}AB{\cdot}BC\sin\angle DAB$,

$S_2 = \dfrac{1}{2}AD{\cdot}CD\sin\angle BCD = \dfrac{1}{2}{\cdot}2AB{\cdot}CD\sin\angle BCD$

四角形 ABCD は円に内接するから　$\sin\angle DAB = \sin\angle BCD$

したがって　$S_1 : S_2 = BC : 2CD = 3 : 2$　よって　$\mathbf{BC : CD = 3 : 1}$



(3) AB = 2 より，AD = 2AB = 2·2 = 4

△ABD に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB{\cdot}AD\cos 120^\circ$$
$$= 2^2 + 4^2 - 2{\cdot}2{\cdot}4{\cdot}\left(-\frac{1}{2}\right) = 28$$

(2) の結果から，BC = 3k，CD = k とおき ($k > 0$)，△BCD に余弦定理を適用すると

$$28 = (3k)^2 + k^2 - 2{\cdot}3k{\cdot}k\cos 60^\circ = 7k^2 \quad \text{ゆえに} \quad k = 2$$

求める面積は　$\triangle ABD + \triangle BCD = \dfrac{1}{2}{\cdot}2{\cdot}4\sin 120^\circ + \dfrac{1}{2}{\cdot}2{\cdot}6\sin 60^\circ = \mathbf{5\sqrt{3}}$

52 正五角形 ABCDE の外接円の中心を O とし，線分 AC と線分 BE の交点を M とする．(横浜市立大 改)

(1) BC = MC を示せ．　(2) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ の値を求めよ．

(3) $\cos 108^\circ$ の値を求めよ．　(4) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}$ の値を求めよ．

(5) $\cos 36^\circ$ の値を求めよ．

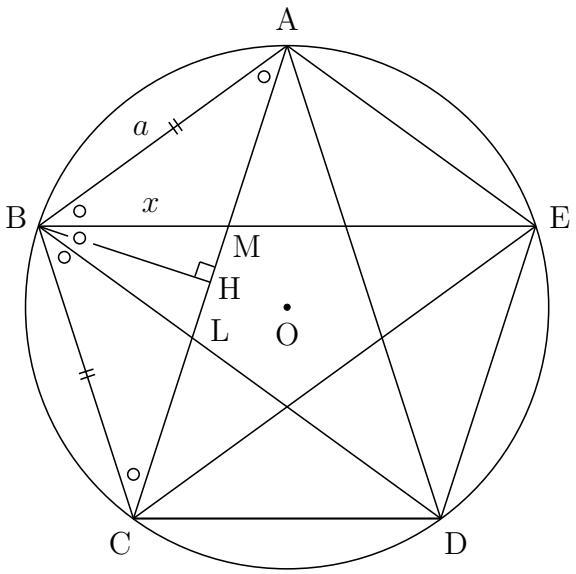
解答　(1) AB = BC = CD = DE = EA であるから，円周角の定理により

$$\angle \mathrm{ABE} = \angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CBD} = \angle \mathrm{DBE} = \theta$$

とおくと

$$\angle \mathrm{CBM} = \angle \mathrm{CBD} + \angle \mathrm{DBE} = 2\theta$$
$$\angle \mathrm{CMB} = \angle \mathrm{MAB} + \angle \mathrm{MBA} = 2\theta$$

∠CBM = ∠CMB より，△CBM は二等辺三角形であり　BC = MC



(2) 正五角形の 1 辺の長さを a，$\mathrm{BM} = x$ とおくと，△CMB ∽ △BLM より，CM : MB = BL : LM であるから

$$a : x = x : a - x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + ax - a^2 = 0$$

$x > 0$ に注意してこれを解くと　$x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}a$

$\mathrm{AB} = a$，$\mathrm{AC} = a + x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$ より　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(3) $5\theta = 180^\circ$ であるから，$\theta = 36^\circ$

点 C から辺 BM に垂線 CH を引くと　$\mathrm{BH} = \dfrac{x}{2}$

$$\cos 72^\circ = \cos \angle \mathrm{CBM} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}} = \frac{\frac{x}{2}}{a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

よって　　$\cos 108^\circ = -\cos 72^\circ = \boldsymbol{\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}}$

(4) (3) の結果から

$$\sin 108^\circ = \sqrt{1-\cos^2 108^\circ} = \sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

OA は △ABC の外接円の半径であるから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin 108^\circ} = 2\mathrm{OA} \quad \text{よって} \quad \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}} = 2\sin 108^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}$$

(5) AC の中点を H とすると

$$\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}a$$

直角三角形 ABH について

$$\cos 36^\circ = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

53 △ABC において，AB = 13，BC = 14，CA = 15 とする．△ABC の内接円を I，外接円を O とする．I と BC，CA，AB との接点をそれぞれ P，Q，R とおく．O の中心から辺 BC に垂線 OH を下ろす．　(京都産業大 改)

(1) BH = [ア] である．BP = [イ] である．

(2) $\cos A =$ [ウ]，$\sin A =$ [エ] である．O の半径は [オ] である．

(3) △ABC の面積は [カ] である．I の半径は [キ] である．

(4) I の中心と O の中心の距離は [ク] である．

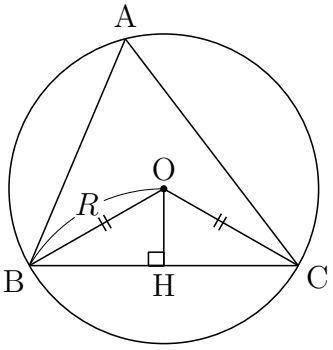
解答　(1) H は BC の中点であるから　BH = **7**　$\cdots$(ア)

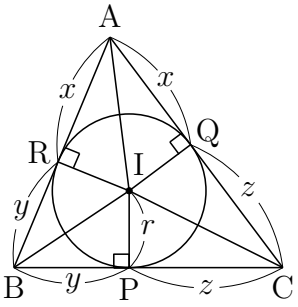
AQ = AR = x，BP = BR = y，CQ = CP = z とおくと

$$x+y=13,\quad y+z=14,\quad z+x=15$$

上の 3 式の辺々を加えて整理すると　$x+y+z=21$

これと上の第 3 式から　BP = y = **6**　$\cdots$(イ)





(2) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos A=\frac{13^2+15^2-14^2}{2\cdot13\cdot15}=\frac{\mathbf{33}}{\mathbf{65}}\quad\cdots(\text{ウ})$$

これから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{33}{65}\right)^2}=\sqrt{\left(1+\frac{33}{65}\right)\left(1-\frac{33}{65}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{98}{65}\cdot\frac{32}{65}}=\sqrt{\frac{49\cdot64}{65^2}}=\frac{\mathbf{56}}{\mathbf{65}}\quad\cdots(\text{エ})$$

△ABC に正弦定理を適用すると　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$

$$R=\frac{1}{2}\cdot14\div\frac{56}{65}=\frac{\mathbf{65}}{\mathbf{8}}\quad\cdots(\text{オ})$$

(3) △ABC の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 13\cdot\frac{55}{65} = \mathbf{84} \quad \cdots(\text{カ})$$

△ABC の内接円の半径を r，$s = \dfrac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}) = 21$ とおくと，$S = rs$ であるから

$$84 = r\cdot 21 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{r = 4} \quad \cdots(\text{キ})$$

(4) △OBH について

$$\mathrm{OH} = \sqrt{R^2 - \mathrm{BH}^2} = \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - 7^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{65}{8}+7\right)\left(\frac{65}{8}-7\right)} = \sqrt{\frac{121}{8}\cdot\frac{9}{8}} = \frac{33}{8}$$

したがって

$$\mathrm{IO}^2 = (\mathrm{BH}-\mathrm{BP})^2 + (\mathrm{OH}-\mathrm{IP})^2$$
$$= (7-6)^2 + \left(\frac{33}{8}-4\right)^2 = 1 + \frac{1}{64} = \frac{65}{64}$$

$\mathrm{IO} > 0$ であるから　　$\mathrm{IO} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{65}}}{\boldsymbol{8}}$　$\cdots(\text{ク})$

54 正弦定理の証明をせよ．ただし，鋭角三角形の場合だけの証明でよい．

(大分大 2011 年 6)

解答 右の図で，△ABC の外接円の半径を R とし，

線分 BD は △ABC の直径とする．

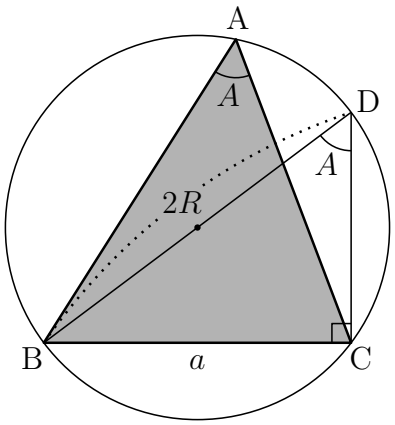
このとき，円周角と中心角の性質により，

$$\angle \mathrm{BDC} = \angle \mathrm{BAC} = A$$
$$\angle \mathrm{BCD} = 90^\circ$$

が成り立つ．また，$\mathrm{BD} = 2R$ である．
よって，△BCD において

$$a = 2R\sin A$$

が成り立つ．



$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とおくと，同様に

$$b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C$$

が成り立つ．よって，次の正弦定理を得る．

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

7.5　空間図形の計量

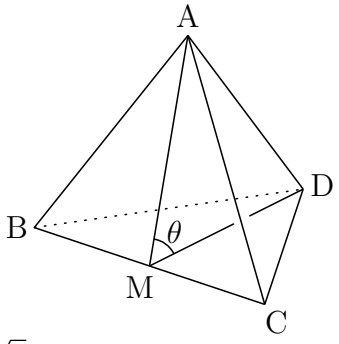
7.5.1　Review

55 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD の BC の中点を M とする．次の値を求めよ．

(1) AM，DM の長さ

(2) $\angle \mathrm{AMD} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$

(3) △AMD の面積



解答　(1) 直角三角形 ABM に注目すると　$\mathrm{AM} = \sqrt{3}$

よって　　$\mathbf{AM = DM = \sqrt{3}}$

(2) △AMD に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

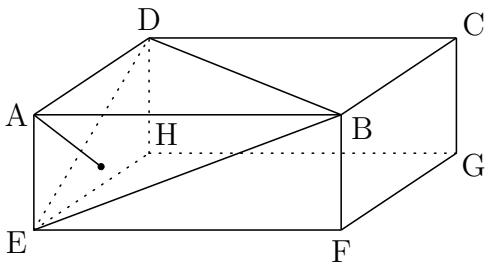
(3) $\sin\theta > 0$ であるから，(2) の結果から

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，△AMD の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AM}\cdot\mathrm{DM}\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \mathbf{\sqrt{2}}$$

56 右の図の直方体 ABCD-EFGH において，AB = 3，AD = 2，AE = 1 であり，∠DEB = θ とおく．



(1) $\cos\theta$

(2) △BDE の面積を求めよ．

(3) A から △BDE に下した垂線の長さを求めよ．

解答 (1) $\mathrm{DE}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$\mathrm{EB}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，$\mathrm{BD}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

△DEB に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{DE}^2+\mathrm{EB}^2-\mathrm{BD}^2}{2\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{BD}}=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{1}{5\sqrt{2}}}$$

(2) $\sin\theta>0$ であるから，(1) の結果から

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$$

△BDE の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{DE}\cdot\mathrm{EB}\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

(3) 四面体 ABDE の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABD}\cdot\mathrm{AE}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\right)\cdot1=1$$

A から △BDE に下した垂線の長さを h とすると　$V=\dfrac{1}{3}Sh$

$$1=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}h\quad\text{ゆえに}\quad h=\boldsymbol{\frac{6}{7}}$$

7.5.2 Exercise

57 1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，辺OAを3 : 2に内分する点をPとし，辺OB上の点QをPQ + QCが最小となるようにとる．このとき，OQ : QB = [ア]であり，PQ + QC = [イ]である．　(愛知工業大)

解答 下の展開図を考えると，点Qは直線PCとOBの交点である．OBの中点をMとし，△OAMと直線PCについてメネラウスの定理を適用すると

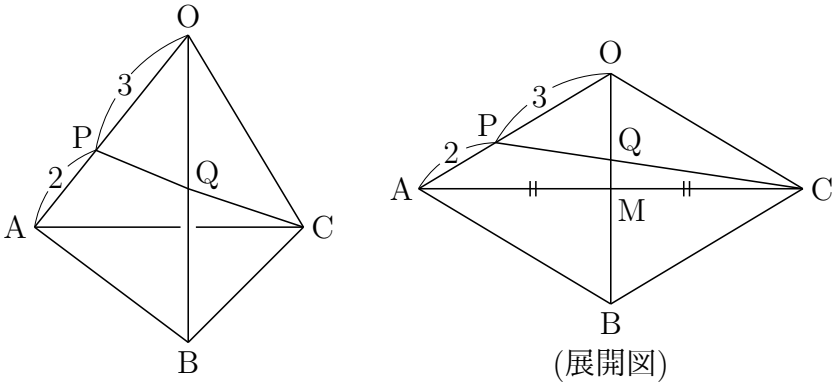
$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CM}}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QO}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QO}}=1$$

上の第2式から　$\mathrm{OQ}:\mathrm{QM}=3:1$　よって　$\mathbf{OQ:QB=3:5}$

このとき，$\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}=\mathrm{PC}=\dfrac{3}{5}$，$\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{POC}=120^\circ$ であるから，余弦定理により

$$\mathrm{PC}^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2+1^2-2\cdot\frac{3}{5}\cdot1\cos120^\circ=\frac{49}{25}$$

$\mathrm{PC}>0$ であるから　$\mathbf{PC=\dfrac{7}{5}}$



(展開図)

別解 展開図から

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}(5\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$
$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{8}=\frac{8}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

よって　$\mathbf{OQ:QB=3:5}$

58 四面体 ABCD は，AB = 6，BC = $\sqrt{13}$，AD = BD = CD = CA = 5 を満たしているとする． (学習院大 改)

(1) ∠BAC = θ とするとき，$\cos\theta$ および $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) △ABC の面積を求めよ．

(3) 頂点 D から △ABC に下した垂線を DH とすると，AH = BH = CH が成り立つことを示し，AH を求めよ．

(4) 四面体 ABCD の体積を求めよ．

(5) 頂点 B から △ACD に下した垂線の長さを求めよ．

解答 (1) 余弦定理を △ABC に適用すると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} = \frac{5^2 + 6^2 - (\sqrt{13})^2}{2\cdot5\cdot6} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

$\sin\theta > 0$ であるから　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$

(2) (1) の結果から

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{3}{5} = \boldsymbol{9}$$

(3) AD = BD = CD であるから　DAH ≡ DBH ≡ DCH

したがって　AH = BH = CH

H は △ABC の外心で，AH のその半径であるから，正弦定理により

$$2\mathrm{AH} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin\theta} = \sqrt{13} \div \frac{3}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\mathrm{AH} = \frac{5}{6}\sqrt{13}}$$

(4) (2)，(3) の結果から，求める体積を V とすると

$$\mathrm{DH} = \sqrt{\mathrm{AD}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{6}\sqrt{13}\right)^2} = 5\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{23}$$

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH} = \frac{1}{3}\cdot9\cdot\frac{5}{6}\sqrt{23} = \boldsymbol{\frac{5}{2}\sqrt{23}}$$

(5) AD = CD = CA = 5 より　$\triangle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\cdot5\cdot5\sin60^\circ = \frac{25}{4}\sqrt{3}$

B から △ACD に垂線 BT を引くと，$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ACD}\cdot\mathrm{BT}$ より

$$\frac{5}{2}\sqrt{23} = \frac{1}{3}\cdot\frac{25}{4}\sqrt{3}\cdot\mathrm{BT} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{BT} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\sqrt{69}}$$

59* 1辺の長さが4の正四面体OABCについて

(1) △OABの面積S_1を求めよ．

(2) 正四面体OABCの体積V_1を求めよ．

(3) 正四面体OABCの外接球の半径Rを求めよ．

(4) 正四面体OABCの内接球の半径rを求めよ．

(5) 正四面体OABCの内接球の表面積S_2，体積V_2を求めよ．

解答 (1) $S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sin 60^\circ = \boldsymbol{4\sqrt{3}}$

(2) Oから平面ABCに垂線OGを下すと，△OAG ≡ △OBG ≡ △OCGであるから，AG = BG = CGより，Gは△ABCの外心である．正弦定理より

$$2\mathrm{AG} = \frac{4}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AG} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

直角三角形OAGについて

$$\mathrm{OG} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AG}^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = 4\sqrt{1-\frac{1}{3}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$\triangle\mathrm{ABC} = S_1 = 4\sqrt{3}$であるから

$$V_1 = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OG} = \frac{1}{3}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{\frac{16}{3}\sqrt{2}}$$

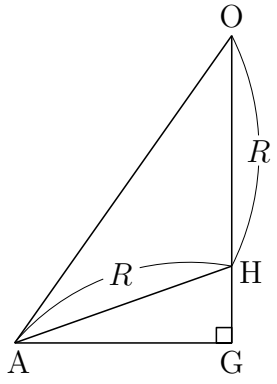
(3) Hを外接球の中心とし，その半径をRとすると

$$\mathrm{AH} = R, \quad \mathrm{HG} = \mathrm{OG} - R$$

$\mathrm{AH}^2 = \mathrm{AG}^2 + \mathrm{HG}^2$より

$$R^2 = \mathrm{AG}^2 + (\mathrm{OG} - R)^2$$

よって $\quad R = \dfrac{\mathrm{AG}^2 + \mathrm{OG}^2}{2\mathrm{OG}} = \dfrac{\frac{16}{3} + \frac{32}{3}}{2\cdot 4\sqrt{\frac{2}{3}}} = \boldsymbol{\sqrt{6}}$



(4) 正四面体OABCの表面積$4S_1$，内接球の半径rより $\quad V_1 = \dfrac{1}{3}\cdot 4S_1\cdot r$

$$\frac{16}{3}\sqrt{2} = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}r \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

(5) (4)の結果より $\quad S_2 = 4\pi r^2 = \boldsymbol{\frac{8}{3}\pi}$，$V_2 = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{6}}{27}\pi}$

7.5.3 Try

60* AB = 3，AD = 4 である直方体 ABCD − EFGH において，球 S が三角柱 ABC − EFG のすべての面に内接する．　(法政大 改)

(1) 辺 AE の長さを求めよ．

(2) 球 S の中心と，頂点 F との間の距離を求めよ．

(3) 三角柱の 3 つの面 ABFE，BCGF，EFG と，球 S のいずれにも接する球 T の半径を求めよ．

解答　(1) 直方体 ABCD − EFGH を座標空間に F を原点 O に下の図のように定める．
球 S の半径を s とすると，その中心は S$(s,\ s,\ s)$ である．

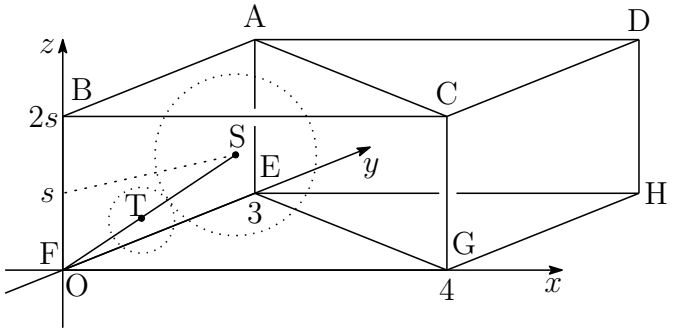
$$\frac{1}{2}(3+4+5)s=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 \quad \text{ゆえに} \quad s=1$$

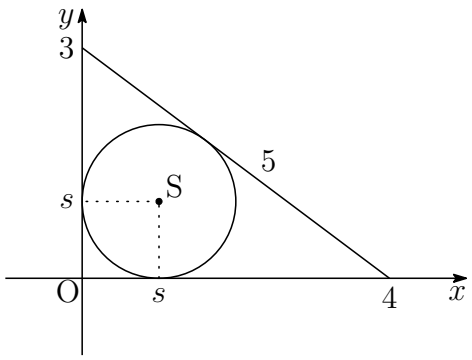
AE $=2s$ より　AE $=2\cdot 1=\mathbf{2}$

(2) S$(1,\ 1,\ 1)$ であるから　FS $=$ OS $=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(3) 球 T の半径を t とすると，その中心は T$(t,\ t,\ t)$ である．
3 点 O，T，S は同一直線上にあるから　OT + TS = OS
OT $=\sqrt{3}t$，TS $=t+1$，OS $=\sqrt{3}$ より

$$\sqrt{3}t+(t+1)=\sqrt{3} \quad \text{よって} \quad t=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$$





61* 四面体 ABCD において，AB $=\sqrt{2}$，AC $=2$，AD $=\sqrt{3}$，$\angle$BAC $=45^\circ$，$\angle$CAD $=30^\circ$ であり，さらに $\cos\angle\mathrm{BAD}=\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{BCD}$ が成り立つとき，次の問に答えよ．

(1) 辺 BD の長さを求めよ．

(2) 四面体 ABCD の表面積を求めよ．

(3) 辺 AC の中点を E とするとき，BE$\perp$AC，BE$\perp$DE であることを示せ．

(4) 四面体 ABCD の体積を求めよ．

解答 (1) △ABC および △ACD に着目すると

$$\mathrm{BC}=\sqrt{2},\quad \mathrm{CD}=1$$

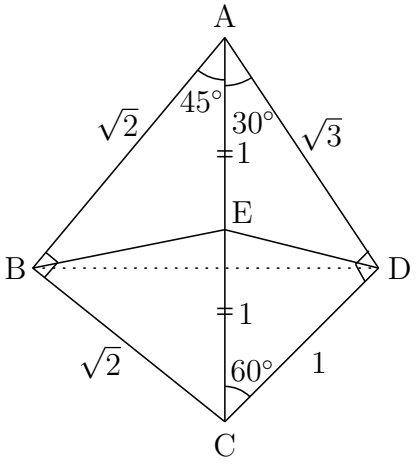
$\cos\angle\mathrm{BAD}=\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{BCD}$ より，$\cos\angle\mathrm{BCD}=k$ とおくと

$$\cos\angle\mathrm{BAD}=\sqrt{3}k$$

△ABD および △ACD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{BAD}\\&=2+3-2\sqrt{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}k=5-6\sqrt{2}k\\\mathrm{BD}^2&=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{BCD}\\&=2+1-2\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot k=3-2\sqrt{2}k\end{aligned}$$

上の 2 式から，k を消去して　$\mathrm{BD}^2=2$　ゆえに　$\mathrm{BD}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$



(2) 下の図から

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = 1$$

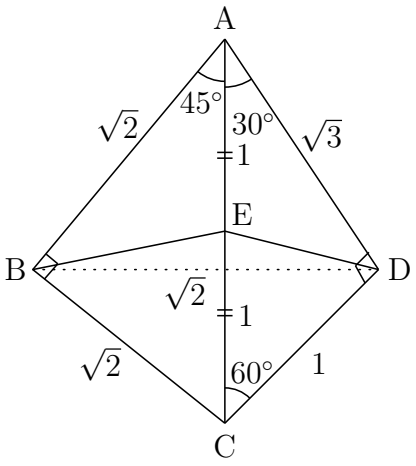
$$\triangle \mathrm{CAD} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle \mathrm{ABD} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\triangle \mathrm{BCD} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

したがって，四面体の表面積は

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\mathbf{4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{15}}}{\mathbf{4}}$$



(3) $\triangle \mathrm{BAE} \equiv \triangle \mathrm{BCD}$ より　$\mathrm{BE} = 1,\ \mathrm{BE}\perp\mathrm{AC}$　$\cdots$①

$\triangle \mathrm{CDE}$ が正三角形であるから　$\mathrm{DE} = 1$

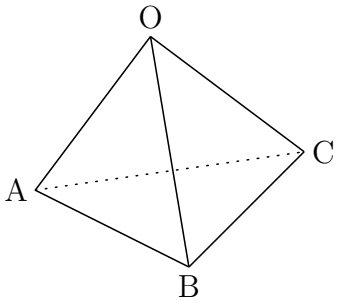
$\mathrm{BE} = \mathrm{DE} = 1,\ \mathrm{BD} = \sqrt{2}$ より　$\mathrm{BE}\perp\mathrm{DE}$　$\cdots$②

(4) ① ,② より，平面 $\mathrm{ACD}\perp\mathrm{BE}$

よって，四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle \mathrm{ACD}\cdot\mathrm{BE} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = \frac{\mathbf{\sqrt{3}}}{\mathbf{6}}$$

62 x を正の実数とする．四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{AB}=2x$ とする． (茨木大)



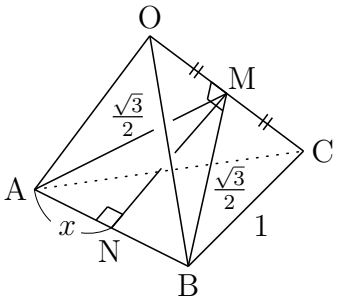
(1) x のとり得る値を求めよ．

(2) 四面体 OABC の体積を x を用いて表せ．

(3) x が (1) の範囲を動くとき，四面体 OABC の体積の最大値を求めよ．

解答 (1) 辺 OC の中点を M とすると　$0<\mathrm{AB}<\mathrm{AM}+\mathrm{BM}$

$$0<2x<\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



(2) 辺 AB の中点を N とすると　$\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{AN}^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}-x^2}$

$$\triangle\mathrm{ABM}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\cdot 2x\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}=x\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}$$

四面体 OABC の体積の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{AMB}\cdot\mathrm{OC}=\frac{1}{3}\cdot x\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}\cdot 1=\boldsymbol{\frac{1}{3}x\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{-x^4+\frac{3}{4}x^2}=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(x^2-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{9}{64}}\quad\left(0<x^2<\frac{3}{4}\right)$$

よって，V の最大値は　$\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{64}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

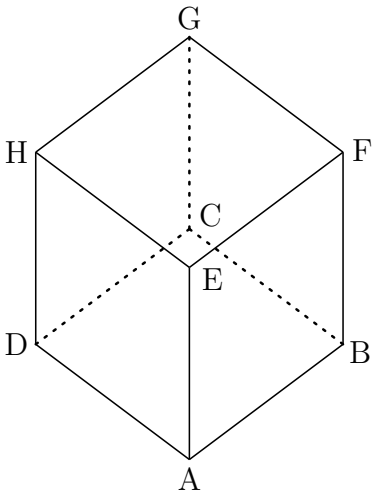
63 1辺の長さが1の立方体 ABCD-EFGH がある．3点 A，C，F を含む平面と直線 BH の交点を P，P から面 ABCD に下ろした垂線の足を Q とする．

(北大文系 2004 年 3)

(1) 長方形 DBFH を描き，三角形 ACF との交線と点 P を図示せよ．さらに，線分 BP，PQ の長さを求めよ．

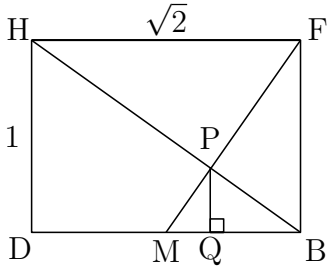
(2) 四面体 ABCF に内接する球の中心を O とする．点 O は線分 BP 上にあることを示せ．

(3) 四面体 ABCF に内接する球の半径を求めよ．



解答 (1) DB の中点を M とすると，P は線分 MF を 2 : 1 に内分する点で，下の図のようになる．

$$\mathrm{BP}=\frac{1}{3}\mathrm{BH}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}},\quad \mathrm{PQ}=\frac{1}{3}\mathrm{BF}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$



(2) BA = BC = BF より，B から平面 ACF と BH は垂直である．O は BH 上にあり，位置関係から O は BP 上にある．

(3) 四面体 ABCF の体積 V は　$V=\dfrac{1}{6}$

四面体の ABCF の表面積 S は

$$\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\sin 60^\circ=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

四面体 ABCF の内接球の半径を r とすると，$\dfrac{1}{3}Sr=V$ より

$$\frac{1}{3}\times\frac{3+\sqrt{3}}{2}r=\frac{1}{6}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{r=\frac{3-\sqrt{3}}{6}}$$

64* 底面が正六角形 ABCDEF で頂点が O の正六角錐 O − ABCDEF がある．底面の辺の長さを a，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=\mathrm{OE}=\mathrm{OF}=2a$ とする．2 つの面 △OAB と △OBC のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．　(早稲田大)

解答 二等辺三角形 OAB の A から OB に垂線 AT を引くと，△OAB の面積について

$$\frac{1}{2}a\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot \mathrm{AT}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{AT}=\frac{\sqrt{15}}{4}a$$

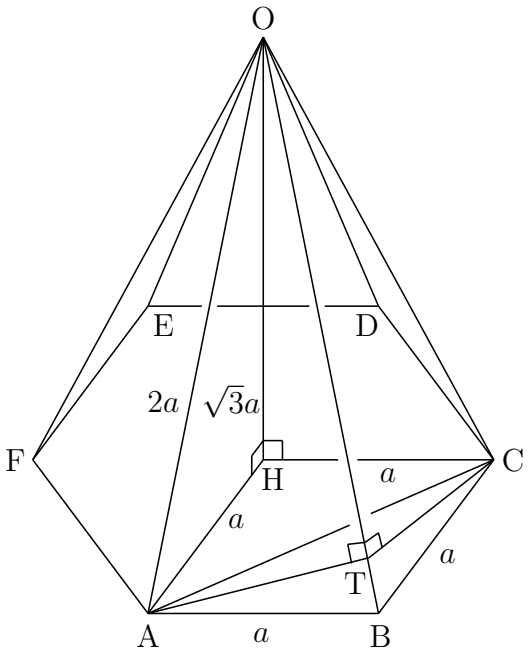
△ABC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AC}^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos 120^\circ=3a^2$$

$\mathrm{AT}=\mathrm{CT}$ に注意して，△ATC に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{ATC}=\frac{\mathrm{AT}^2+\mathrm{CT}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AT}\cdot\mathrm{CT}}=\frac{\frac{15}{16}a^2+\frac{15}{16}a^2-3a^2}{2\cdot\frac{15}{16}a^2}=-\frac{3}{5}$$

$\theta=\angle\mathrm{ATC}$ であるから　　$\boldsymbol{\cos\theta=-\frac{3}{5}}$



別解 4 点 O，A，B，C を座標空間の点として

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(a,\ 0, -\sqrt{3}a),\ \mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a, -\sqrt{3}a\right),\ \mathrm{C}\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, -\sqrt{3}a\right)$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}(\sqrt{3},\ 1,\ 1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}(0,\ 2,\ 1)$$

上の 2 つのベクトルのなす角を φ とすると

$$\cos\varphi = \frac{0+2+1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

$\cos\varphi > 0$ より，$\theta = \pi - \varphi$ であるから

$$\cos\theta = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi = \boldsymbol{-\frac{3}{5}}$$

7.6　データの整理，分散と標準偏差

7.6.1　Review

65 次のデータは都市 A の 5 年間の猛暑日の日数のデータである．

A : 4　12　3　5　6　(単位は日)

同じ期間において都市 B の猛暑日の日数の標準偏差が 4 だった．A の猛暑日の日数の分散を求め，猛暑日の日数の散らばりの度合いが大きいと考えられるのは，A，B のどちらか答えよ．　(秋田大)

解答 A の猛暑日の日数の平均値は

$$\frac{1}{5}(4+12+3+5+6)=6$$

A の猛暑日の日数の分散は

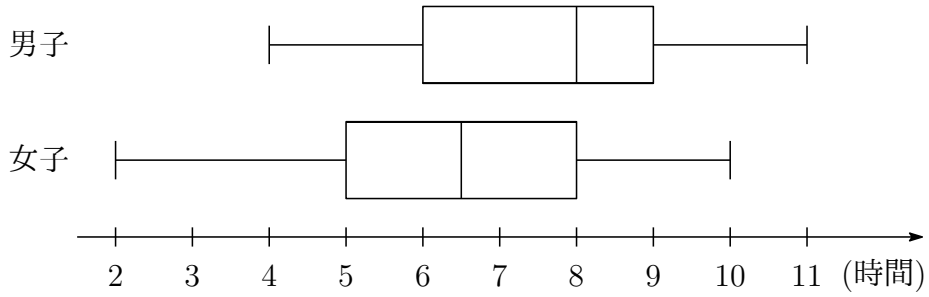
$$\frac{1}{5}\{(4-6)^2+(12-6)^2+(3-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2\}=10$$

B の猛暑日の日数の分散は　　$4^2=16$

よって，猛暑日の散らばりの度合いが大きいのは　　**B**

7.6.2 Exercise

66 下の図は，男子，女子 43 人のずつの睡眠時間のデータを表した箱ひげ図である．この箱ひげ図から読み取れることとして正しいものを，次の ①〜⑤ から選べ．(関西医科大 改)



① 男子の方が範囲が広い

② 男子の方が四分位範囲が大きい

③ 6 時間以下の人が男子は 22 人以下で，女子は 22 以上いる．

④ 7 時間以下の人が男子も女子も 22 人以上いる．

⑤ 9 時間以上の人が女子は 10 人以下である．

解答 ① 男子の範囲は　$11-4=7$ (時間)
女子の範囲は　$10-2=8$ (時間)
よって，女子の方が範囲が大きいから，正しくない．

② 男子の四分位範囲は　$9-6=3$ (時間)
女子の四分位範囲は　$8-5=3$ (時間)
よって，四分位範囲が等しいから，正しくない．

③ 女子の中央値は 6.5 時間であるから，睡眠時間が 22 番目に短い女子の睡眠時間は 5.5 時間である．よって，6 時間以下の女子は 21 人以下であるから，正しくない．

④ 男子の中央値は 8 時間であるから，睡眠時間が 22 番目に短い男子の睡眠時間は 8 時間である．よって，7 時間以下の男子は 21 人以下であるから，正しくない．

⑤ 女子の第 3 四分位数は 8 時間であるから，睡眠時間が 11 番目に長い女子の睡眠時間は 8 時間である．よって，9 時間以上の女子は 10 人以下であるから，正しい．

以上より，正しいものは　⑤

67* ある集団はAとBの2つのグループで構成される．データを集計したところ，それぞれのグループの個数，平均値，分散は下の図のようになった．このとき，集団の平均値は［　ア　］と分散は［　イ　］である．　(立命館大)

グループ	個数	平均値	分散
A	20	16	24
B	60	12	28

解答 $n_A = 20$，$n_B = 60$，$E_A(X) = 16$，$E_B(X) = 12$ より

$$E(X) = \frac{n_A E_A(X) + n_B E_B(X)}{n_A + n_B} = \frac{20{\cdot}16 + 60{\cdot}12}{20 + 60} = \mathbf{13} \quad \cdots(\text{ア})$$

$V_A(X) = 24$，$E_A(X) = 16$ を $V_A(X) = E_A(X^2) - E_A(X)^2$ に代入すると

$$24 = E_A(X^2) - 16^2 \quad \text{ゆえに} \quad E_A(X^2) = 280$$

$V_B(X) = 28$，$E_B(X) = 12$ を $V_B(X) = E_B(X^2) - E_B(X)^2$ に代入すると

$$28 = E_B(X^2) - 12^2 \quad \text{ゆえに} \quad E_B(X^2) = 172$$

したがって

$$E(X^2) = \frac{n_A E_A(X^2) + n_B E_B(X^2)}{n_A + n_B} = \frac{20{\cdot}280 + 80{\cdot}172}{20 + 60} = 199$$

よって　$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 199 - 13^2 = \mathbf{30}$　$\cdots(\text{イ})$

68* あるクラスでテストを行ったところ，平均値は55，分散は40であった．このとき，角点数を1.5倍した点数の分散は［　ア　］である．また，各点数から50点を引いた点数を2乗したものの平均値は［　イ　］である．　(福岡大 改)

解答 $V(X) = 40$ より，$V(1.5X) = 1.5^2 V(X) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 {\cdot}40 = \mathbf{90}$　$\cdots(\text{ア})$

$E(X) = 55$，$V(X) = 40$ を $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ に代入すると

$$40 = E(X^2) - 55^2 \quad \text{ゆえに} \quad E(X^2) = 3065$$

したがって
$$\begin{aligned} E((X-50)^2) &= E(X^2 - 100X + 2500) \\ &= E(X^2) - 100E(X) + 2500 \\ &= 3065 - 100{\cdot}55 + 2500 = \mathbf{65} \quad \cdots(\text{イ}) \end{aligned}$$

7.6.3 Try

69* 7 人の身長 (単位は cm) が，$a,\ b,\ c,\ 164,\ 172,\ 174,\ 176$ で，この 7 人の身長と s のデータの中央値は 173，平均値は 172，標準偏差は $\sqrt{14}$ であった．このとき，$a,\ b,\ c$ の値を求めよ．ただし，$a<b<c$ とする．　(京都府立大)

解答 7 個のデータの中央値が 173 であるから，173 以下のデータが 3 個，173 以上のデータが 3 個ある．したがって，$b=173$，$a \leqq 173$，$173 \leqq c$ である．

$A=a-173$，$B=b-172$，$C=c-173$ とすると $(A \leqq 0,\ C \geqq 0)$

7 個のデータ $A,\ 1,\ C,\ -8,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4$ の平均値は 0，分散は 14 であるから

$$\frac{A+1+C+(-8)+0+1+2+4}{7}=0,$$
$$\frac{A^2+1^2+C^2+(-8)^2+0^2+2^2+4^2}{7}=14$$

整理すると　$A+C=1,\ \ A^2+C^2=13$

$$AC=\frac{(A+C)^2-(A^2+B^2)}{2}=-6$$

したがって，$A,\ C$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2-x-6=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-3)=0$$

$A \leqq 0,\ C \geqq 0$ に注意して　$A=-2,\ C=3$

よって　$a=A+172=\mathbf{170},\ \ b=\mathbf{173},\ \ c=C+172=\mathbf{175}$

70 n を 2 以上の自然数とし，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ を満たす実数とする．n 個のデータ $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の平均値を m，標準偏差を s，中央値を M とする． (広島大)

(1) 関数

$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$$

の最小値，およびそのときの x の値を $n,\ m,\ s,\ M$ のうち必要なものを用いて表せ．

(2) n は偶数であるとする．このとき関数

$$g(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \cdots + |x-a_n|$$

は $x = M$ で最小となることを示せ．

(3) n は偶数であるとする．このとき，(2) の関数 $g(x)$ が最小値をとる x がただ 1 つであるための必要十分条件を，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ のうちから必要なものを用いて述べよ．

解答 (1) $m = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$，$s^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 - m^2$ より，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = m^2 + s^2$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2 = x^2 - 2x\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \\ &= x^2 - 2xm + m^2 + s^2 = (x-m)^2 + s^2\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x = m}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{ns^2}$ をとる．

(2) (i) $x \leqq a_1$ のとき

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k| = -\sum_{k=1}^{n} (x - a_k) = -nx + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

この区間おいて，$g(x)$ は単調減少

(ii) $a_j \leqq x \leqq a_{j+1}$ のとき $(j < \frac{n}{2})$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k| = \sum_{k=1}^{j} (x - a_k) - \sum_{k=j+1}^{n} (x - a_k)$$

$$= jx - \sum_{k=1}^{j} a_k - (n-j)x + \sum_{k=j+1}^{n} a_k = (2j-n)x - \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k$$

この区間おいて，$g(x)$ は単調減少

(iii) $a_{\frac{n}{2}} \leqq x \leqq a_{\frac{n}{2}+1}$ のとき

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k| = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (x - a_k) - \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} (x - a_k)$$

$$= \frac{n}{2}x - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} a_k - \frac{n}{2}x + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} a_k + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} a_k$$

この区間おいて，$g(x)$ は定数関数

(iv) $a_j \leqq x \leqq a_{j+1}$ のとき $(\frac{n}{2} < j)$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k| = \sum_{k=1}^{j} (x - a_k) - \sum_{k=j+1}^{n} (x - a_k)$$

$$= jx - \sum_{k=1}^{j} a_k - (n-j)x + \sum_{k=j+1}^{n} a_k = (2j-n)x - \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k$$

この区間おいて，$g(x)$ は単調増加

(v) $a_n \leqq x$ のとき

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k| = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k) = nx - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

この区間おいて，$g(x)$ は単調増加

(i)〜(v) より，$a_{\frac{n}{2}} \leqq x \leqq a_{\frac{n}{2}+1}$ で $g(x)$ で最小値をとる．$M = \min\{a_{\frac{n}{2}},\ a_{\frac{n}{2}+1}\}$ であるから，$x = M$ で $g(x)$ は最小値をとる．

(3) (2)(iii) より　$\boldsymbol{a_{\frac{n}{2}} = a_{\frac{n}{2}+1}}$

71* 50 人のテストの得点 x の平均値 $\overline{x}$ が 60 で，分散 s^2 が 100 であった．ところが，テストを受けた生徒の中の A 君が答案用紙の裏にも解答を書いていることに気づいたため，採点しなおしたところ，A 君の得点が 50 点上がった．

(1) A 君の得点を修正した後の平均点を求めよ． (岡山理科大)

(2) 修正する前の A 君の得点が 50 点だったとするとき，A 君の得点を修正した後の分散の値を求めよ．

(3) A 君の得点を修正した後の標準偏差が 11 になったとするとき，修正する前の A 君の得点を求めよ．

解答 (1) 修正後の総得点は $50\overline{x}+50$ であるから，修正後の平均点は

$$\frac{1}{50}(50\overline{x}+50)=\overline{x}+1=60+1=\mathbf{61}\ (\text{点})$$

(2) 修正前の分散により

$$(*)\quad \frac{1}{50}\sum_{k=1}^{50}{x_k}^2-60^2=100 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{50}\sum_{k=1}^{50}{x_k}^2=60^2+100$$

修正後の分散は，(1) の結果および上式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{50}\left(\sum_{k=1}^{50}{x_k}^2-50^2+100^2\right)-61^2&=\frac{1}{50}\sum_{k=1}^{50}{x_k}^2+\frac{1}{50}(-50^2+100^2)-61^2\\&=60^2+100+\frac{1}{50}(-50^2+100^2)-61^2\\&=\mathbf{129}\end{aligned}$$

(3) A 君の修正前の得点を a 点とすると，修正後の分散が 121 であるから

$$\frac{1}{50}\left\{\sum_{k=1}^{50}{x_k}^2-a^2+(a+50)^2\right\}-61^2=121$$

上式と $(*)$ の辺々の差をとると

$$\frac{1}{50}\{a^2-(a+50)^2\}-60^2+61^2=100-121$$

これを解いて $\quad a=\mathbf{46}\ (\text{点})$

72 変量 x の 9 個のデータ $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ について考える．この 9 個のデータの平均値は m，標準偏差は s であり，s は 0 ではないとする．

(1) $a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする．変量 x の 9 個のデータと，変量 y の 9 個のデータ $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_9$ との間に

$$y_k = ax_k + b \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, 9)$$

の関係があるとする．変量 y の 9 個のデータの平均値は 0，標準偏差は 1 であるとき，a，b を m，s を用いて表せ．

(2) 変量 x の 9 個のデータのうち 4 個のデータ $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の平均値が m，標準偏差が $s+1$ であるとする．このとき，残りの 5 個のデータ $x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9$ の平均値と標準偏差を m，x を用いて表し，$s \geqq 2$ でなければならないことを示せ．　(奈良女子大)

解答　(1) 変量 y の平均値，標準偏差をそれぞれ $\overline{y}$，x_y とする．

$y_k = ax_k + b$ より $(k = 1, 2, 3, \cdots, 9)$

$$\overline{y} = am + b, \quad {s_y}^2 = a^2 s^2$$

$\overline{y} = 0$，$s_y = 1$ であるから $(a>0)$

$$am + b = 0, \quad a^2 s^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = \frac{1}{s},\ b = -\frac{m}{s}}$$

(2) $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ の平均値が m，標準偏差が s であるから

$$m = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9} x_k, \quad s^2 = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9} {x_k}^2 - m^2$$

これから

$$\sum_{k=1}^{9} x_k = 9m, \quad \sum_{k=1}^{9} {x_k}^2 = 9(s^2 + m^2) \qquad (*)$$

また，$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の平均値が m，標準偏差が $s+1$ であるから

$$m = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} x_k, \quad (s+1)^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} {x_k}^2 - m^2$$

これから

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = 4m, \quad \sum_{k=1}^{4} {x_k}^2 = 4\{(s+1)^2 + m^2\} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より，$x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9$ の平均値 m'，標準偏差 s' は

$$\begin{aligned}
m' &= \frac{1}{5}\sum_{k=5}^{9} x_k = \frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{9} x_k - \sum_{k=1}^{4} x_k\right) \\
&= \frac{1}{5}(9m - 4m) = \boldsymbol{m}, \\
s'^2 &= \frac{1}{5}\sum_{k=5}^{9} x_k^2 - m'^2 \\
&= \frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{9} {x_k}^2 - \sum_{k=1}^{4} {x_k}^2\right) - m^2 \\
&= \frac{1}{5}\left[9(s^2+m^2) - 4\{(s+1)^2 + m^2\}\right] - m^2 \\
&= \frac{1}{5}(5s^2 - 8s - 4) = \frac{1}{5}(5s+2)(s-2)
\end{aligned}$$

上式から，$(5s+2)(s-2) \geqq 0$ であるから $(s>0)\quad s \geqq 2$

$$s' = \sqrt{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{(5s+2)(s-2)}}$$

7.7　データの相関

7.7.1　Review

73 X, Y のデータが以下のように与えられている．　(中京大　改)

X	25	-5	-15	5	40
Y	1	-3	-7	9	15

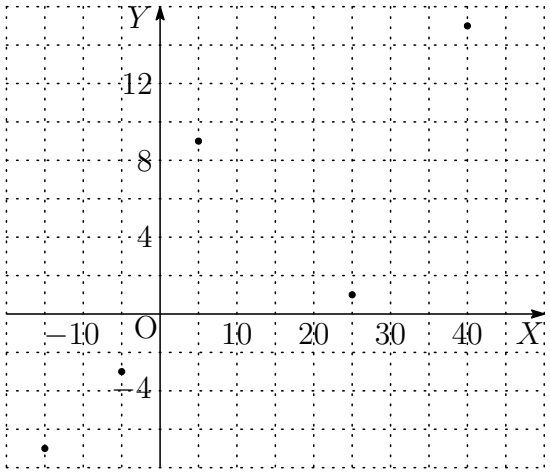
このとき，次の問いに答えよ．

(1) X, Y の散布図を作成せよ．

(2) X と Y の平均値・分散・標準偏差をそれぞれ求めよ．

(3) X と Y の共分散と相関係数を求めよ．

解答　(1)



(2) X，Y の平均をそれぞれ $\overline{X}$，$\overline{Y}$ とすると

$$\overline{X} = \frac{25 + (-5) + (-15) + 5 + 40}{5} = \mathbf{10}$$
$$\overline{Y} = \frac{1 + (-3) + (-7) + 9 + 15}{5} = \mathbf{3}$$

X	25	-5	-15	5	40
Y	1	-3	-7	9	15
$X - \overline{X}$	15	-15	-25	-5	30
$Y - \overline{Y}$	-2	-6	-10	6	12
$(X - \overline{X})^2$	225	225	625	25	900
$(Y - \overline{Y})^2$	4	36	100	36	144
$(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})$	-30	90	250	-30	360

X の分散 ${s_X}^2$ および標準偏差 s_X は

$${s_X}^2 = \frac{225 + 225 + 625 + 25 + 900}{5} = \mathbf{400},$$
$$s_X = \sqrt{400} = \mathbf{20}$$

Y の分散 ${s_Y}^2$ および標準偏差 s_Y は

$${s_Y}^2 = \frac{4 + 36 + 100 + 36 + 144}{5} = \mathbf{64},$$
$$s_Y = \sqrt{64} = \mathbf{8}$$

(3) X と Y の共分散 s_{XY} は

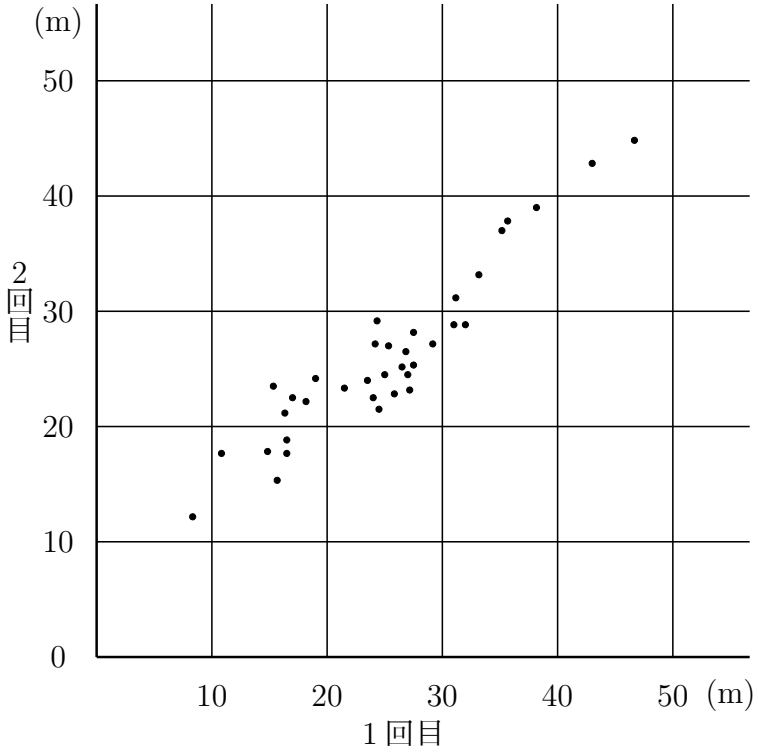
$$s_{XY} = \frac{-30 + 90 + 250 + (-30) + 360}{5} = \mathbf{128}$$

相関係数 r は

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{128}{20 \cdot 8} = \mathbf{0.8}$$

7.7.2 Exercise

74* ある高校2年生40人のクラスで一人2回ずつハンドボール投げの飛距離のデータを取ることにした．下の図は，1回目のデータを横軸に，2回目のデータを縦軸にとった散布図である．なお，一人の生徒が欠席したため，39人のデータとなっている．



	平均値	中央値	分散	標準偏差
1回目のデータ	24.70	24.30	67.40	8.21
2回目のデータ	26.90	26.40	48.72	6.98

1回目と2回目データの共分散	54.30

(共分散とは1回目のデータの偏差と2回目のデータの偏差の積の平均である)

(1) 1回目のデータと2回目のデータの相関係数を，四捨五入して小数第2位まで求めよ．

(2) 欠席していた一人の生徒について，別の日に同じようにハンドボール投げの記録を2回取ったところ，1回目の記録が24.7m，2回目の記録は26.9mであった．この生徒の記録を含めて計算し直したときの新しい共分散を A，もとの共分散を B，新しい相関係数を C，もとの相関係数を D とする．A と B の大小関係および C と D の大小関係を $=$，$<$，$>$ を用いて表せ．(センター試験 改)

解答 (1) 1回目のデータの標準偏差は8.21，2回目のデータの標準偏差は6.98，1回目と2回目のデータの共分散は54.30であるから，相関係数は

$$\frac{54.30}{8.21 \cdot 6.98} = 0.948\cdots = \mathbf{0.95}$$

(2) もとのデータの平均値に等しい記録であるから，偏差の2乗の和が変わらないため，1回目も2回目もデータの分散は $\dfrac{39}{40}$ 倍になる．

共分散も，同様に $A = \dfrac{39}{40}$ 倍であるから

$$\boldsymbol{A < B}$$

共分散が $\dfrac{39}{40}$ 倍で，1回目と2回目のデータの標準偏差はともに $\sqrt{\dfrac{39}{40}}$ 倍になるから，相関係数は等しい．よって

$$\boldsymbol{C = D}$$

7.7.3 Try

75* 右の表は100人生徒が受けた英語と数学のテストについて，A さんの結果である．なお，平均点 m，標準偏差 s のテストにおいて，得点 x の偏差値 y は次の式により求められる．

$$y = \frac{x-m}{s} \times 10 + 50$$

	英語	数学
満点	50	100
得点	35	55
平均点	27	45
偏差値	58	54

(1) 英語の得点を2倍にして100点満点にするとき，換算した後の英語の得点の標準偏差を求めよ．

(2) 英語の得点を2倍にして100点満点に換算する前の英語の得点と，数学の得点の共分散は175である．このとき，換算した後の英語の得点と数学の得点の相関係数を求めよ．

解答 (1) 変換前の英語の標準偏差 s_x とすると，変換前の A さんの英語の得点から

$$58 = \frac{35-27}{s_x} \times 10 + 50 \quad \text{ゆえに} \quad s_x = 10$$

したがって，変換後の標準偏差は　　$2s_x = \mathbf{20}$

(2) 変換前の数学の標準偏差 s_y とすると，変換前の A さんの数学の得点から

$$54 = \frac{55-45}{s_y} \times 10 + 50 \quad \text{ゆえに} \quad s_y = 25$$

英語の得点を2倍にしても元の相関係数と等しいから，求める相関係数 r は

$$r = \frac{175}{s_x s_y} = \frac{175}{10 \cdot 25} = \mathbf{0.7}$$

補足 x_k が a 倍されて ax_k とすると，共分散は a 倍になる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\{(ax_1 - a\bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (ax_2 - a\bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (ax_n - a\bar{x})(y_n - \bar{y})\} \\
=&\frac{1}{n}\{a(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + a(x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + a(x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\} \\
=&a \times \frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\}
\end{aligned}$$

標準偏差は $|a|s_x$ となるため，変換後の相関係数は

$$\frac{as_{xy}}{|a|s_x s_y} = \frac{a}{|a|} \times \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

$a > 0$ のときは一致するが，$a < 0$ のときは符号が変わる．

76 n は自然数とする．2 つの変量 x，y の n 個のデータ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$，$\cdots$，$(x_n,\ y_n)$ が与えられている．x の平均値は $\overline{x}=16$，分散は ${s_x}^2=3$ であり，y の平均値は $\overline{y}=3$，分散は ${s_y}^2=\dfrac{2}{3}$ である．x と y の共分散を s_{xy} とおく．さらに，$z=2x-3y$ で新たな変量 z をつくる．z のデータは $z_i=2x_i-3y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ である．このとき，z の平均値 $\overline{z}$ は $\overline{z}=$ ［ア］ となり，z の分散 ${s_z}^2$ を s_{xy} を用いて書き表すと ${s_z}^2=$ ［イ］ となる．また，x と z の共分散 s_{xz} を s_{xy} を用いて書き表すと $s_{xz}=$ ［ウ］ となる．x と y の相関係数を r_{xy}，x と z の相関係数を r_{xz}，y と z の相関係数を r_{yz} とおき，$R=(r_{xy})^2+(r_{yz})^2$ とおく．もし，$r_{xy}=0$ ならば R の値は $R=$ ［エ］ となる．もし，$r_{xy}=1$ ならば R の値は $R=$ ［オ］ となる． (同志社大)

解答 $\overline{x}=16$，$\overline{y}=3$，$z=2x-3y$ より

$$\begin{aligned}\overline{z}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2x_i-3y_i)=2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-3\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\\&=2\overline{x}-3\overline{y}=2\cdot16-3\cdot3=\boldsymbol{23}\quad\cdots(\text{ア})\end{aligned}$$

${x_x}^2=3,\ {s_y}^2=\dfrac{2}{3}$ より

$$\begin{aligned}{s_z}^2&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(2x_i-3y_i)-(2\overline{x}-3\overline{y})\}^2\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{2(x_i-\overline{x})-3(y_i-\overline{y})\}^2\\&=4\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2-12\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+9\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\\&=4{s_x}^2-12s_{xy}+9{s_y}^2=4\cdot3-12s_{xy}+9\cdot\frac{2}{3}=\boldsymbol{18-s_{xy}}\quad\cdots(\text{イ})\\s_{xz}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(z_i-\overline{z})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\{2(x_i-\overline{x})-3(y_i-\overline{y})\}\\&=2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\overline{x})^2-3\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\\&=2{s_x}^2-3s_{xy}=2\cdot3-3s_{xy}=\boldsymbol{6-3s_{xy}}\quad\cdots(\text{ウ})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_{yz} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(z_i-\overline{z}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})\{2(x_i-\overline{x})-3(y_i-\overline{y})\} \\
&= 2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) - 3\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2 \\
&= 2s_{xy} - 3{s_y}^2 = 2s_{xy} - 3\cdot\frac{2}{3} = 2s_{xy}-2 \qquad (*) \\
r_{xy} &= \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{2}} \qquad (**)
\end{aligned}
$$

もし，$r_{xy}=0$ のとき，$(*)$，$(**)$ から　$s_{xy}=0,\ s_{yz}=-2$

また，(イ)，(ウ) から　${s_z}^2=18,\ s_{xz}=6$ より

$$
\begin{aligned}
R &= (r_{xz})^2+(r_{yz})^2 = \left(\frac{s_{xz}}{s_x s_y}\right)^2 + \left(\frac{s_{yz}}{s_y x s_z}\right)^2 \\
&= \frac{6^2}{3\cdot 18} + \frac{(-2)^2}{\frac{2}{3}\cdot 18} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = \mathbf{1} \quad \cdots(\text{エ})
\end{aligned}
$$

もし，$r_{xy}=1$ のとき，$(*)$，$(**)$ から　$s_{xy}=\sqrt{2},\ s_{yz}=2\sqrt{2}-2$

また，(イ)，(ウ) から　${s_z}^2=18-12\sqrt{2},\ s_{xz}=6-3\sqrt{2}$ より

$$
\begin{aligned}
R &= (r_{xz})^2+(r_{yz})^2 = \left(\frac{s_{xz}}{s_x s_y}\right)^2 + \left(\frac{s_{yz}}{s_y x s_z}\right)^2 \\
&= \frac{(6-3\sqrt{2})^2}{3(18-12\sqrt{2})} + \frac{(2\sqrt{2}-2)^2}{\frac{2}{3}(18-12\sqrt{2})} \\
&= \frac{18(\sqrt{2}-1)^2}{18(3-2\sqrt{2})} + \frac{4(\sqrt{2}-1)^2}{4(3-2\sqrt{2})} = 1+1 = \mathbf{2} \quad \cdots(\text{オ})
\end{aligned}
$$

77 x は 0 以上の整数である．次の表は 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 5 人の得点をまとめたものである． (一橋大 2016 年 6)

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

(1) $2n$ 個の実数 $a_1,\ a_2,\ ,\cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ について，
$a=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，$b=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

が成り立つことを示せ．

(2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ．

(3) x の値を 2 増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった．このとき，r_{XY} の値を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

解答 (1) $na=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，$nb=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)&=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-a\sum_{k=1}^{n}b_k-b\sum_{k=1}^{n}a_k+ab\sum_{k=1}^{n}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-a\cdot nb-b\cdot na+nab\\&=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab\end{aligned}$$

(2) 科目 X と科目 Y の得点の平均をそれぞれ a，b とすると

$$a = \frac{1}{5}(x+6+4+7+4) = \frac{x+21}{5}, \quad b = \frac{1}{5}(9+7+5+10+9) = 8$$

科目 X と科目 Y の得点の分散をそれぞれ ${s_X}^2$，${s_Y}^2$ とすると

$${s_{\mathrm{X}}}^2 = \frac{1}{5}(x^2+6^2+4^2+7^2+4^2) - a^2 = \frac{2}{25}(2x^2-21x+72)$$
$${s_{\mathrm{Y}}}^2 = \frac{1}{5}(9^2+7^2+5^2+10^2+9^2) - b^2 = \frac{16}{5}$$

科目 X と科目 Y の得点の共分散を s_{XY} とすると

$$s_{\mathrm{XY}} = \frac{1}{5}(x\cdot 9+6\cdot 7+4\cdot 5+7\cdot 10+4\cdot 9) - ab = \frac{x}{5}$$

よって　　$r_{\mathrm{XY}} = \dfrac{s_{\mathrm{XY}}}{s_{\mathrm{X}} s_{\mathrm{Y}}} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{5}x}}{\boldsymbol{4\sqrt{2(2x^2-21x+72)}}}$

(3) r_{XY} は x の値を 2 増やしても値は同じであるから，(2) の結果から

$$\frac{\sqrt{5}(x+2)}{4\sqrt{2}\sqrt{2(x+2)^2-21(x+2)+72}} = \frac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{2}\sqrt{2x^2-21x+72}}$$

ゆえに　　$x\sqrt{2x^2-13x+38} = (x+2)\sqrt{2x^2-21x+72}$

両辺を平方して整理すると　　$7x^2-34x-48=0$

したがって　$(x-6)(7x+8)=0$　　x は 0 以上の整数であるから　$x=6$

ゆえに　$r_{\mathrm{XY}} = \dfrac{\sqrt{5}\cdot 6}{4\sqrt{2(2\cdot 6^2-21\cdot 6+72)}} = \dfrac{\sqrt{5}}{4} = \dfrac{2.236\cdots}{4} = 0.559\cdots$

よって　$\boldsymbol{r_{\mathrm{XY}} = 0.6}$

7.8 集合と論証

7.8.1 Review

78 x，y を実数とする．命題「$x+y>0$ ならば $x>0$ または $y>0$」の逆，裏，対偶を述べ，その真偽を調べよ．また，もとの命題の真偽も調べよ．

解答　**逆**　**「$x>0$ または $y>0$ ならば $x+y>0$」：偽**
(反例) $x=1,\ y=-2$

裏　**「$x+y\leqq 0$ ならば $x\leqq 0$ かつ $y\leqq 0$」：偽**
(反例) $x=1,\ y=-2$

対偶　**「$x\leqq 0$ かつ $y\leqq 0$ ならば $x+y\leqq 0$」：真**

対偶が真であるから，本命題は**真**

補足 **逆**と**裏**の真偽も一致する．

79 x を実数とする．次の□の中に必要条件，十分条件，必要十分条件のうち，最も適するものを入れよ．

(1)　「$x<2$」は「$x^2<4$」であるための□

(2)　「$x\leqq 2$ かつ $x\geqq -2$」は「$x^2\leqq 4$」であるための□

(3)　「$x<2$ かつ $x>0$」は「$x^2<4$」であるための□

解答　(1) $\{x\,|\,x<2\}\supset\{x\,|\,x^2<4\}$ より，**必要条件**

(2) $\{x\,|\,x\leqq 2$ かつ $x\geqq -2\}=\{x\,|\,x^2\leqq 4\}$ より，**必要十分条件**

(3) $\{x\,|\,x<2$ かつ $x>0\}\subset\{x\,|\,x^2<4\}$ より，**十分条件**

80 次の命題の否定をつくり，その真偽を調べよ．

(1) すべての実数 $x,\ y$ について　$x^2+y^2>0$

(2) ある実数 x について　$x^2-2x+1\leqq 0$

解答　(1) 本命題の否定は
「ある実数 x，y について，$x^2+y^2\leqq 0$」
$x=0,\ y=0$ で成立するから　**真**

(2) 本命題の否定は
「すべての実数 x について，$x^2-2x+1>0$」
$x=1$ のとき成立しないから　**偽**

7.8.2 Exercise

81* a を実数とする．2 つの集合

$$A = \{2,\ 4,\ a^3 - 3a^2 + 9\},$$
$$B = \{-2,\ a + 2,\ a^2 - 2a + 1,\ a^3 + a^2 + 3a - 13\}$$

において，$A \cap B = \{4,\ 5\}$ であれば $a =$ ［ア］である．また，このとき $A \cup B = \{-2,$ ［イ］$,\ 2,\ 4,\ 5\}$ である． (玉川大)

解答 $A \cap B = \{4,\ 5\}$ より，$5 \in A$ であるから

$$a^3 - 3a^2 + 9 = 5 \quad \text{ゆえに} \quad (a + 1)(a - 2)^2 = 0$$

これを解いて　$a = -1,\ 2$

(i) $a = -1$ のとき

$$A = \{2,\ 4,\ 5\},$$
$$B = \{-2,\ 1,\ 4, -18\}$$

このとき，$A \cap B = \{4,\ 5\}$ を満たさない．

(ii) $a = 2$ のとき

$$A = \{2,\ 4,\ 5\},$$
$$B = \{-2,\ 4,\ 1\ 5\}$$

このとき，$A \cap B = \{4,\ 5\}$ を満たす．

(i),(ii) より　$\boldsymbol{a = 2,\ A \cup B = \{-2,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5\}}$

82* $x,\ y$ はともに実数とする．(1)〜(5) の文中の空欄にあてはまるものを，次の①〜④ のうちから 1 つ選び，記号で答えよ．

① 必要条件であるが十分条件でない
② 十分条件であるが必要条件でない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

(1) 「$x > 0$」は「$x \geqq 0$」のための$\boxed{}$．

(2) 「$x = 0$」は「$x^2 + y^2 = 0$」のための$\boxed{}$．

(3) 「$xy = 0$」は「$x = 0$ かつ $y = 0$」のための$\boxed{}$．

(4) 「$x^2 + y^2 = 1$」は「$x + y = 0$」のための$\boxed{}$．

(5) 「$x + y \geqq 0$ かつ $xy \geqq 0$」は「$y \geqq 0$」のための$\boxed{}$．(慶応義塾大 改)

解答 (1) $x > 0 \implies x \geqq 0$ ゆえに **十分条件** $\cdots$②

(2) $x = 0 \impliedby x^2 + y^2 = 0$ ゆえに **必要条件** $\cdots$①

(3) $xy = 0 \impliedby x = 0$ かつ $y = 0$ ゆえに **必要条件** $\cdots$①

(4) $A = \{(x,\ y)\,|\,x^2 + y^2 = 1\}$，$B = \{(x,\ y)\,|\,x + y = 0\}$ とすると $A \not\subset B$，$A \not\supset B$ より，**必要条件でも十分条件でもない** $\cdots$④

(5) 「$x + y \geqq 0$ かつ $xy \geqq 0$」，すなわち，「$x \geqq 0,\ y \geqq 0$」は「$y \geqq 0$」のための**十分条件** $\cdots$②

83 整数 m，n に関する次の命題について，真偽を述べよ．また真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．

(1) $m+n$ が 2 で割り切れないならば，mn は 2 で割り切れる．

(2) mn が 2 で割り切れないならば，$m+n$ は 2 で割り切れない．

(3) $m+n$ が 2 で割り切れるならば，mn は 2 で割り切れる．

解答 (1) **真**　　$m+n$ が 2 で割り切れない
$\Longrightarrow$ m, n の偶奇が異なる
$\Longrightarrow$ mn は 2 で割り切れる

(2) **偽**　(反例) $\boldsymbol{m=n=1}$

補足　　mn が 2 で割り切れない
$\Longrightarrow$ m, n はともに奇数
$\Longrightarrow$ $m+n$ は 2 で割り切れる

(3) **偽**　(反例) $\boldsymbol{m=n=1}$

7.8.3 Try

84 8 つの数の集まり $\{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ を 2 組に分け，それぞれの組に属する数の和を考える．例えば，$\{-1,\ 0,\ 2,\ 4,\ 5\}$ と $\{-2,\ 1,\ 3\}$ という組み分けについては，10 と 2 である．このとき，

「どんな組み分けについても，少なくとも一方の和は a 以上である」

という主張が成立するような数 a のうち最大のものは$\boxed{}$である．

(神奈川大)

解答 2 組のそれぞれの和を $p,\ q$ とすると　$p+q=12$

$(*)$ $\max\{p,\ q\} \geqq a$ を満たす最大の a を求めればよい．

$\max\{p,\ q\} \geqq p,\ \max\{p,\ q\} \geqq q$ より

$$2\max\{p,\ q\} \geqq p+q=12 \quad \text{ゆえに} \quad \max\{p,\ q\} \geqq 6$$

上の第 2 式から，$\max\{p,\ q\}$ の最小値は 6 である．

よって，$(*)$ を満たす最大の a の値は　　**6**

85 自然数 n に関する条件 $p,\ q,\ r,\ s$ を次のように定める．

p : n は 5 で割ると 1 余る数である

q : n は 10 で割ると 1 余る数である

r : n は奇数である

s : n は 2 より大きい素数である

また，条件 r の否定を $\overline{r}$，条件 s の否定を $\overline{s}$ で表す．このとき，次のア～ウにあてはまるものを，①～④ のうちから 1 つ選べ．　(センター試験 改)

「p かつ r」は q であるための［　ア　］．

$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための［　イ　］．

「p かつ s」は「q かつ s」であるための［　ウ　］．

① 必要条件であるが十分条件でない
② 十分条件であるが必要条件でない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

解答(ア)　「p かつ r」より

$$\begin{aligned} & n-1 \equiv 0 \pmod 5 \quad \text{かつ} \quad n-1 \equiv 0 \pmod 2 \\ \iff \quad & n-1 \equiv 0 \pmod{10} \end{aligned}$$

よって，「p かつ r」は q であるための**必要十分条件**　…③

(イ) $\overline{r}$: n は偶数，$\overline{s}$: n は 1, 2 および 4 以上の合成数であるから

$$\overline{r} \implies \overline{s}$$

また，$9 \in \overline{s}$，$9 \notin \overline{r}$ である．

よって，$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための**十分条件**　…②

(ウ) $s \iff$「r かつ s」であるから，(ア) より

$$\begin{aligned} \text{「}p \text{ かつ } s\text{」} &\iff \text{「}p \text{ かつ } r \text{ かつ } s\text{」} \\ &\iff \text{「}q \text{ かつ } s\text{」} \end{aligned}$$

よって，「p かつ s」は「q かつ s」であるための**必要十分条件**　…③

86* 実数 x についての条件 $p : x^2 - 10x + 25 - a^2 > 0$，$q : x^2 - 2(a+2)x + 8a > 0$ がある．ただし，$a > 0$ とする．条件 p が条件 q の十分条件となるような a の値の範囲を求めよ． (大阪府立大 改)

解答 $p : (x - 5 + a)(x - 5 - a) > 0$，$q : (x - 4)(x - 2a) > 0$

(i) $0 < a < 2$ のとき，$p \Longrightarrow q$ を満たすとき

$$5 - a \leqq 2a,\ 4 \leqq 5 + a \quad \text{これを解いて} \quad \frac{5}{3} \leqq a < 2$$

(ii) $a = 2$ のとき

$$p : (x - 3)(x - 7) > 0,\quad q : (x - 4)^2 > 0$$

このとき，$p \Longrightarrow q$ が成立する．

(iii) $2 < a$ のとき，$p \Longrightarrow q$ を満たすとき

$$5 - a \leqq 4,\ 2a \leqq 5 + a \quad \text{これを解いて} \quad 2 < a \leqq 5$$

(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は $\quad \boldsymbol{\frac{5}{3} \leqq a \leqq 5}$

87* 実数 x，y に関する次の名大で正しいものは証明し，誤っているものは判例をあげよ．(兵庫県立大)

(1) x，y がともに無理数であることは $x+y$ が無理数であることの十分条件である．

(2) x と y のいずれかが無理数であることは $x+y$ が無理数であることの必要十分条件である．

(3) x が無理数で y が無理数であることは $x+y$ が無理数であることの十分条件である．

解答 (1) **偽**

(反例)$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$

(2) **真**

「$x+y$ が無理数ならば x と y のいずれかが無理数である」であることを対偶「x と y がともに有理数ならば $x+y$ は有理数」を示す．

証明 $x=\dfrac{p}{q}$, $y=\dfrac{r}{s}$ とすると (p, q, r, s は整数)

$$x+y=\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs}$$

よって，$x+y$ は有理数． **証終**

(3) **真**

証明 (背理法)

$x+y$ が有理数であるとすると，$-x$ が有理数であるから

$$y=(x+y)+(-x)$$

において，(2) の証明により，右辺は有理数であり，y が無理数であることに反する． **証終**

88* (1) $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ．

(2) $s,\ t$ を有理数とする．$s+t\sqrt{3}=0$ のとき，$s=t=0$ を示せ．

(3) $a,\ b$ を有理数とする．多項式 $f(x)=x^2+ax+b$ が $f(1+\sqrt{3})=0$ を満たすとき，$a,\ b$ を求めよ．

(4) $g(x)$ は有理数を係数とする 3 次多項式で最高次の係数が 1 であるとする．$g(1+\sqrt{3})=0$ となるとき，$g(1-\sqrt{3})=0$ を示せ．　(阪大 改)

解答 (1) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\quad (p,\ q \text{ は互いに素である自然数})$$

両辺を 2 乗して整理すると　$p^2=3q^2$

$3q^2$ は 3 の倍数であるから，p^2 は 3 の倍数である．

$p=3r$ とおくと (r は自然数)

$$(3r)^2=3q^2 \quad \text{ゆえに} \quad q^2=3r^2$$

したがって，q も 3 の倍数である．

このとき，$p,\ q$ がともに 3 の倍数となり，互いに素であることに矛盾する．

よって，$\sqrt{3}$ は無理数である．

(2) $t\neq 0$ と仮定すると

$$\sqrt{3}=-\frac{s}{t}$$

$s,\ t$ は有理数であるから，右辺 $-\dfrac{s}{t}$ は有理数であり，左辺 $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する．

よって，$t=0$．これを $s+t\sqrt{3}=0$ に代入すると　$s=0$

(3) Q を有理数とするとき

$$Q[\sqrt{3}\,] = \{u + v\sqrt{3}\,|\,u, v \in Q\}$$

を考える．$x, \overline{x} \in Q[\sqrt{3}\,]$ を

$$x = u + v\sqrt{3}$$
$$\overline{x} = u - v\sqrt{3}$$

と定義すると，$k \in Q,\ x, y \in Q[\sqrt{3}\,]$ について，次の 3 式が成り立つ．

$$(*) \quad \begin{cases} \overline{k} = k \\ \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} \\ \overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y} \end{cases}$$

第 3 式から　$\overline{x^2} = (\overline{x})^2$,　さらに　$\overline{x^n} = (\overline{x})^n$　(n は自然数)．

$a, b, c, d \in Q$ である 3 次方程式

$$(**) \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

の解が $z \in Q[\sqrt{3}\,]$ のとき，$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ であるから，$(*)$ により

$$\overline{az^3 + bz^2 + cz + d} = \overline{0}$$
$$\overline{az^3} + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \overline{d} = 0$$
$$\overline{a}\,\overline{z^3} + \overline{b}\,\overline{z^2} + \overline{c}\,\overline{z} + d = 0$$
$$a(\overline{z})^3 + b(\overline{z})^2 + c\overline{z} + d = 0$$

これから $\overline{z}$ が $(**)$ の解であることが分かる．
したがって，有理数を係数とする 3 次多項式 $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について，$\overline{1 + \sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$ であるから，$g(1 + \sqrt{3}) = 0$ のとき

$$g(1 - \sqrt{3}) = 0$$

7.9　場合の数と順列

7.9.1　Review

89 男子 4 人，女子 3 人が横 1 列に並ぶ．次の並び方は何通りあるか．

(1) 両端が女子

(2) 少なくとも一方の端が男子

(3) 女子はすべて隣り合う

(4) 女子どうしが隣り合わない

解答　(1) 両端の女子の並び方は　${}_3\mathrm{P}_2$ (通り)
そのそれぞれに並び方に対して，残りの 5 人の並び方は　5! (通り)
よって，求める場合の数は

$$ {}_3\mathrm{P}_2 \times 5! = 6 \times 120 = \mathbf{720} \text{ (通り)} $$

(2) 並び方の総数は　$7! = 5040$ (通り)
これからの (1) の結果を除けばよいから

$$ 5040 - 720 = \mathbf{4320} \text{ (通り)} $$

(3) 女子 3 人をひとまとめにする．
男子 4 人とひとまとめにした女子の並び方は，5! 通りある．
また，ひとまとめにした女子 3 人の並び方は，3! 通りある．
よって，並び方の総数は，積の法則により

$$ 5! \times 3! = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 \times 3{\cdot}2{\cdot}1 = \mathbf{720} \text{ (通り)} $$

(4) 男子 4 人が並んだのち，それぞれの女子が男子の間または両端に 1 人ずつ入ると考えると

$$ 4! \times {}_5\mathrm{C}_3 = 24 \times 60 = \mathbf{1440} \text{ (通り)} $$

90 〔1〕6 人が円形に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか.

(1) すべての並び方

(2) 特定の 2 人 A，B が隣り合う

(3) 特定の二人が向かい合う

〔2〕色の異なる 6 つの球すべてを用いた首飾りのつくり方は何通りあるか.

解答 〔1〕(1) $(6-1)! = 5! = \mathbf{120}$ (通り)

(2) A，B をひとまとめにする.
残りの 4 人とひとまとめにした 5 つの円順列は $(5-1)! = 4!$ (通り)
また，ひとまとめにした A，B の並び方は，2! 通りある.
よって，並び方の総数は，積の法則により

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = \mathbf{48} \text{ (通り)}$$

(3) 向かい合う A，B を固定すると，残り 4 人の並び方は

$$4! = \mathbf{24} \text{ (通り)}$$

〔2〕6 個の数珠順列の総数であるから $\dfrac{(6-1)!}{2} = \mathbf{60}$ (通り)

91 0, 1, 2, 3, 4 の 5 個の数字を用いて 4 桁の偶数をつくる．次のそれぞれの場合，何個できるか.

(1) 異なる数字を用いる場合

(2) 同じ数字を繰り返し用いてもよい場合

解答 (1) 一の位が 0 のとき $4! = 24$ (通り)
一の位が 0 以外の 2, 4 のとき $2 \times 3 \cdot 3! = 36$ (通り)
よって $24 + 36 = \mathbf{60}$ (通り)

(2) 一の位は 0, 2, 4 の 3 通り
千，百，十の位は，それぞれ 4 通り，5 通り，5 通りあるから

$$4 \times 5 \times 5 \times 3 = \mathbf{300} \text{ (通り)}$$

7.9.2 Exercise

92* $N = 25200$ とする．

(1) N を素因数分解すると　　$N = 2^{ア} \cdot 3^{イ} \cdot 5^{ウ} \cdot 7$

(2) N の正の約数は全部で［　エ　］個であり，そのうち偶数は［　オ　］個，3 の倍数は［　カ　］個，6 の倍数は［　キ　］個ある．

(3) N の正の約数の総和は［　ク　］である．

(4) N の正の約数のうち 2 の倍数でも 3 の倍数でもないものの総和は［　ケ　］．

解答　(1) $N = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$　(ア $\cdots$ **4**, イ $\cdots$ **2**, ウ $\cdots$ **2**)

(2) (1) の結果から，N の正の約数の個数は

$$5 \times 3 \times 3 \times 2 = \mathbf{90}\ \textbf{(個)} \quad \cdots(エ)$$

N が偶数，すなわち，$\dfrac{N}{2} = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ の約数の個数は

$$4 \times 3 \times 3 \times 2 = \mathbf{72}\ \textbf{(個)} \quad \cdots(オ)$$

N が 3 の倍数，すなわち，$\dfrac{N}{3} = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7$ の約数の個数は

$$5 \times 2 \times 3 \times 2 = \mathbf{60}\ \textbf{(個)} \quad \cdots(カ)$$

N が 6 の倍数，すなわち，$\dfrac{N}{6} = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$ の約数の個数は

$$4 \times 2 \times 3 \times 2 = \mathbf{48}\ \textbf{(個)} \quad \cdots(キ)$$

(3) (1) の結果から，N の正の約数の総和 S は

$$\begin{aligned} S &= (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5 + 5^2)(1 + 7) \\ &= 31 \times 13 \times 31 \times 8 = \mathbf{99944} \quad \cdots(ク) \end{aligned}$$

(4) N の正の約数のうち 2 の倍数でも 3 の倍数でもないもの，すなわち，$\dfrac{N}{2^4 \cdot 3^2} = 5^2 \times 7$ の約数の総和 T は

$$T = (1 + 5 + 5^2)(1 + 7) = 31 \times 8 = \mathbf{248} \quad \cdots(ケ)$$

93* 1，2，3，4，5，6，7の7つの数字から，異なる4つの数字をとってできる4桁の数について，次の問に答えよ．

(1) 4567よりも大きいものは何通りあるか．

(2) 小さい方から並べて434番目にくる数を求めよ．

解答 (1) 4567より大きい数は

$457\square$ $\cdots$ $\{1,2,3,6\}$ から1つ並べる4通り
$46\square\square$ $\cdots$ $\{1,2,3,5,7\}$ から2つ並べる ${}_5\mathrm{P}_2$ 通り
$47\square\square$ $\cdots$ $\{1,2,3,5,6\}$ から2つ並べる ${}_5\mathrm{P}_2$ 通り
$5\square\square\square$ $\cdots$ $\{1,2,3,4,6,7\}$ から3つ並べる ${}_6\mathrm{P}_3$ 通り
$6\square\square\square$ $\cdots$ $\{1,2,3,4,5,7\}$ から3つ並べる ${}_6\mathrm{P}_3$ 通り
$7\square\square\square$ $\cdots$ $\{1,2,3,4,5,6\}$ から3つ並べる ${}_6\mathrm{P}_3$ 通り

よって，求める総数は

$$4+{}_5\mathrm{P}_2\times 2+{}_6\mathrm{P}_3\times 3=4+20\times 2+120\times 3=\mathbf{404\ (通り)}$$

(2) 小さい順に並べると

$1\square\square\square$ $\cdots$ $\{2,3,4,5,6,7\}$ から3つ並べる ${}_6\mathrm{P}_3=120$ 通り
$2\square\square\square$ $\cdots$ $\{1,3,4,5,6,7\}$ から3つ並べる ${}_6\mathrm{P}_3=120$ 通り
$3\square\square\square$ $\cdots$ $\{1,2,4,5,6,7\}$ から3つ並べる ${}_6\mathrm{P}_3=120$ 通り
$41\square\square$ $\cdots$ $\{2,3,5,6,7\}$ から2つ並べる ${}_5\mathrm{P}_2=20$ 通り
$42\square\square$ $\cdots$ $\{1,3,5,6,7\}$ から2つ並べる ${}_5\mathrm{P}_2=20$ 通り
$43\square\square$ $\cdots$ $\{1,2,5,6,7\}$ から2つ並べる ${}_5\mathrm{P}_2=20$ 通り
$451\square$ $\cdots$ $\{2,3,6,7\}$ から1つ並べる ${}_4\mathrm{P}_1=4$ 通り
$452\square$ $\cdots$ $\{1,3,6,7\}$ から1つ並べる ${}_4\mathrm{P}_1=4$ 通り
$453\square$ $\cdots$ $\{1,2,6,7\}$ から1つ並べる ${}_4\mathrm{P}_1=4$ 通り

以上小さい順に並べた総数が

$$120\times 3+20\times 3+4\times 3=432\ (\text{通り})$$

次に大きい数4561は433番目であるから，434番目の数は　**4562**

94 次を満たす 5 桁の自然数の総数を求めよ．　(兵庫県立大)

(1) 各桁が 1 か 2 で，1 と 2 の両方が用いられている自然数

(2) 各桁が 1，2，3 のいずれかで，それらすべてが用いられている自然数

解答　(1) 各桁が 1 または 2 である 5 桁の自然数の個数は　2^5 (個)

この中から 1 種類の数字からなる 11111，22222 を除けばよいから

$$2^5 - 2 = \mathbf{30} \text{ (個)}$$

(2) 各桁が 1，2，3 のいずれかである 5 桁の自然数の個数は　3^5 (個)

この中に 1 種類の数字からなる自然数は　3 (個)

また，2 種類の数字から自然数の個数は，(1) の結果を利用して

$$30 \times {}_3\mathrm{C}_2 \text{ (個)}$$

以上の結果から，求める自然数の個数は

$$3^5 - 3 - 30 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 243 - 3 - 90 = \mathbf{150} \text{ (個)}$$

95* 立方体の 6 面を次の色をすべて使って塗る方法は何通りあるか．ただし，隣り合う色はすべて異なる色を塗るものとする．

(1) 赤，白，黒，緑，青，橙の 6 色

(2) 赤，白，黒，緑，青の 5 色

解答 (1) 赤，白，黒，緑，青，橙の 6 色を用いて塗り分けるとき

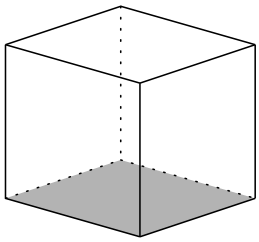
［1］赤色の面は，下に固定する．

［2］上の面は，残り 5 色のどれかになる．

［3］側面は，残り 4 色の円順列になる．

以上から，6 色による立方体の色塗りの総数は

$$5 \times (4-1)! = 5 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \text{ (通り)}$$



(2) 赤，白，黒，緑，青の 5 色を用いて塗り分けるとき

［1］上面と下面を同じ色で塗る 5 通り．

［2］側面は，残り 4 色の数珠順列になる．

以上から，5 色による立方体の色塗りの総数は

$$5 \times \frac{(4-1)!}{2} = 5 \times 3 = \mathbf{15\ (通り)}$$

7.9.3 Try

96 有限集合 X の要素の個数を $n(X)$ で表すことにする．全体集合 U は有限集合で $n(U)=100$ とし，A，B は U の部分集合で $n(A)=30$，$n(B)=80$ とする．$n(A\cap B)$ のとり得る値の最大値および最小値を求めよ．(鹿児島大 2019 年 $\boxed{1}$)

解答 $n(A\cap B)=x$ とおくと，右の表から

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ 30-x \geqq 0 \\ 80-x \geqq 0 \\ x-10 \geqq 0 \end{cases}$$

	B	$\overline{B}$	合計
A	x	$30-x$	30
$\overline{A}$	$80-x$	$x-10$	70
合計	80	20	100

これを解いて　$10 \leqq x \leqq 30$　よって　$\boldsymbol{10 \leqq n(A\cap B) \leqq 30}$

97* 1 から 6 までの番号が書かれた 6 枚のカードを 1 列に並べるとき

(1) 前半 3 枚の数の和が後半 3 枚の数の和より小さい並べ方は何通りあるか．

(2) 奇数が少なくとも 1 か所は連続するか，または，偶数が少なくとも 1 箇所は連続するような並べ方は何通りあるか．　(東京理科大 改)

解答 (1) 6 枚のカードの和は　$1+2+3+4+5+6=21$

奇数であるから，前半 3 枚の数の和と後半 3 枚の数の数の和が等しくなることはない．

(i) 前半 3 枚のカードの和が後半 3 枚のカードの和よりも小さくなる場合

(ii) 前半 3 枚のカードの和が後半 3 枚のカードの和よりも大きくなる場合

(i) と (ii) の場合の数は等しいから，求める場合の数は

$$\frac{6!}{2}=\mathbf{360\ (通り)}$$

(2) 条件を満たさない場合の並び方は

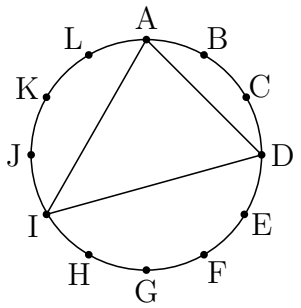
偶奇偶奇偶奇　または　奇偶奇偶奇偶

これらを除いた場合の数であるから

$$6!-3!3!\times 2=720-72=\mathbf{648\ (通り)}$$

98* 右図のように円周を12等分する点A，B，C，D，E，F，G，H，I，J，K，Lが与えられている。これらの中から相異なる3点を選んで線分で結ぶと三角形がえられる。たとえば，A，D，Iを選べば，図のような三角形がえられる。このとき，次の問に答えよ。

(九大文系1998年 2)



(1) 正三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。

(2) 二等辺三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。

(3) 直角三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。

(4) 3点を選んで得られる三角形のうち，互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

解答 (1) 正三角形は，△AEI，△BFJ，△CGK，△DHLの**4通り**.

(2) ∠Aを頂角とする二等辺三角形で正三角形以外のものは4通り.
∠Bから∠Lまでの頂角についても同様である.
したがって，これらと(1)の結果を含めて

$$4 \times 12 + 4 = \mathbf{52} \text{ (通り)}$$

(3) 直角三角形となるのは，1辺が円の直径の場合である.
したがって，直径の選び方は6通りあり，その各々に対して頂点の取り方が10通りであるから

$$6 \times 10 = \mathbf{60} \text{ (通り)}$$

(4) 円周を12等分した円弧を含む個数により，合同でない三角形を分類できる．3頂点間の円弧の個数をx，y，zとすると

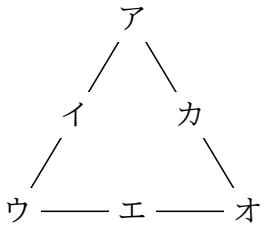
$$x + y + z = 12, \quad 1 \leqq x \leqq y \leqq z$$

を満たす整数$(x,\ y,\ z)$の組数であるから，次の**12通り**.

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) =& (1,\ 1,\ 10),\ (1,\ 2,\ 9),\ (1,\ 3,\ 8),\ (1,\ 4,\ 7),\ (1,\ 5,\ 6),\\ & (2,\ 2,\ 8),\ (2,\ 3,\ 7),\ (2,\ 4,\ 6),\ (2,\ 5,\ 5),\\ & (3,\ 3,\ 6),\ (3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 4,\ 4)\end{aligned}$$

99 スペードのA，2，3，4，5，6の6枚と，ハートのA，2，3，4，5，6の6枚の合計12枚のトランプのカードから6枚を選び，図の正三角形の辺上のアイウエオカの位置に1枚ずつ置く．正三角形の各辺にはそれぞれ3枚のカードが置かれるが，このとき，スペードのカードが3枚並ぶ辺の数をnとする．

(大阪府立大)



(1) $n=3$である場合の数を求めよ．

(2) $n=2$である場合の数を求めよ．

(3) $n=1$である場合の数を求めよ．

解答 (1) すべての位置にスペードのカードが並ぶから，その総数は

$$6!=\mathbf{720}\ (\text{通り})$$

(2) スペードのカードが並ぶ2辺が「アイウ」と「ウエオ」にすると,「カ」にはハートのカード並ぶ．その並べ方の総数は

$${}_6\mathrm{P}_5\times 6=720\times 6=4320\ (\text{通り})$$

スペードのカードが並ぶ2辺が

「ウエオ」と「オカア」，　「オカア」と「アイウ」

の場合も同様であるから，求める総数は

$$4320\times 3=\mathbf{12960\ (通り)}$$

(3) スペードのカードが並ぶ辺が「アイウ」のとき

(i) 「オ」がスペードのカードのとき,「エ」,「カ」にはハートのカードが並ぶから，その総数は

$$ {}_6\mathrm{P}_3 \times 3 \times {}_6\mathrm{P}_2 = 10800 \text{ (通り)} $$

(ii) 「オ」がハートのカードのとき,「エ」,「カ」にはどのカードを置いてもよいから，その総数は

$$ {}_6\mathrm{P}_3 \times 6 \times {}_8\mathrm{P}_2 = 40320 \text{ (通り)} $$

このとき，場合の総数は　$10800 + 40320 = 51120$ (通り)

スペードのカードが並ぶ辺が「ウエオ」,「オカア」のときも同様であるから，求める場合の総数は

$$ 51120 \times 3 = \mathbf{153360 \text{ (通り)} } $$

100 n 人がそれぞれ異なるプレゼントを 1 つずつ持ってパーティーに参加し，くじを引いてプレゼント交換を行う．どの人にも，自分のもってきたプレゼントと異なるプレゼントが当たる場合を考えるとき，次の問に答えよ．

(1) $n=3$ のときの場合の数は何通りか． (愛知医科大)

(2) $n=4$ のときの場合の数は何通りか．

(3) $n=5$ のときの場合の数は何通りか．

解答 (1) $2!=\mathbf{2}$ **(通り)**

(2) $3!+\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!}=\mathbf{9}$ **(通り)**

(3) $4!+{}_5\mathrm{C}_3\times 2!=\mathbf{44}$ **(通り)**

参照 九大理系 1999 年 7

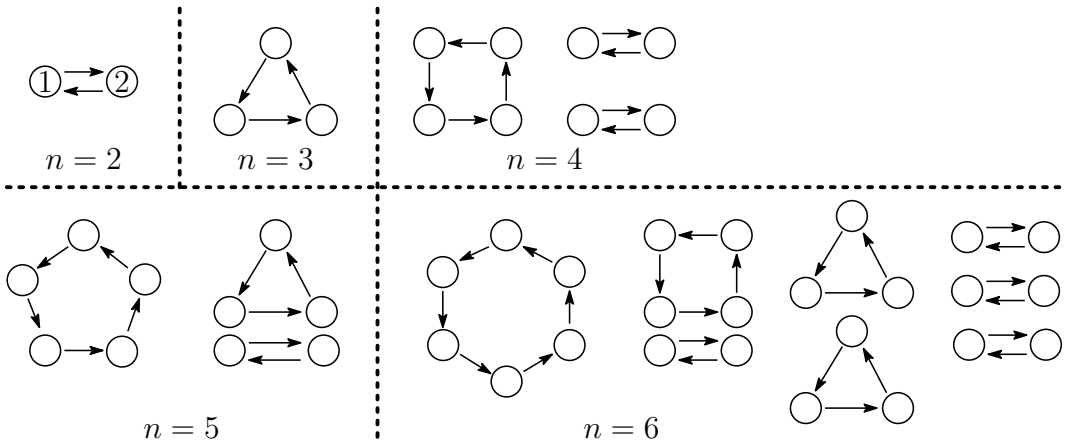
モンモール数

n 個の整数 $1,2,3,\cdots,n$ を要素とする順列において，i 番目 $(1\leqq i\leqq n)$ が i でない順列を**完全順列**という．

完全順列の総数を**モンモール数** (Montmort number) という．n 個の要素の完全順列の総数を M_n で表すことにする．

例えば，n 人が各自 1 個ずつプレゼントを持ち寄り，プレゼントの交換会を行うとき (全員が交換)，プレゼントの交換方法の総数が M_n に等しい．

モンモール数は，次の図に示したループにより求めることもできる．



まず，$M_1 = 0$，$M_2 = 1$ は明らか．$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について

$$M_3 = 2! = 2,$$
$$M_4 = 3! + \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 9,$$
$$M_5 = 4! + {}_5\mathrm{C}_3 \times 2! = 44,$$
$$M_6 = 5! + {}_6\mathrm{C}_4 \times 3! + \frac{{}_6\mathrm{C}_3 \times 2! \times 2!}{2!} + \frac{{}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2}{3!} = 265$$

n 個の整数 $1, 2, \ldots, n$ の完全順列の総数 M_n を，上の図で示したループを用いて考える．あるループの中で i $(1 \leqq i \leqq n-1)$ に n が続くとする．このとき，次の場合分けができる．

(i) i と n が互換でないとき (i と n を含むループが 3 個以上で構成)，i と n を同一視することにより，$n-1$ 個の完全順列の総数 M_{n-1} に等しい．

(ii) i と n が互換であるとき (i と n を含むループが 2 個で構成)，i と n を除く残りの $n-2$ 個の完全順列の総数 M_{n-2} に等しい．

(i)，(ii) から次の漸化式が成立する．

$$M_n = (n-1)(M_{n-1} + M_{n-2}) \quad \cdots(*)$$

$M_1 = 0$，$M_2 = 1$ であるから，$(*)$ より，順次以下の結果を得る．

$$M_1 = 0,\ M_2 = 1,\ M_3 = 2,\ M_4 = 9,\ M_5 = 44,\ M_6 = 265,$$
$$M_7 = 1854,\ M_8 = 14833,\ M_9 = 133496, \cdots$$

$(*)$ に $n = 2$ を代入すると　$M_2 = M_1 + M_0$
これから便宜的に $M_0 = 1$ とすることがある．また，$(*)$ より

$$\begin{aligned} M_k - kM_{k-1} &= -\{M_{k-1} - (k-1)M_{k-2}\} \\ &= (-1)^{k-2}(M_2 - 2M_1) = (-1)^{k-2} \end{aligned}$$

ゆえに　$$\frac{M_k}{k!} - \frac{M_{k-1}}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

したがって　$$\sum_{k=2}^{n} \left\{ \frac{M_k}{k!} - \frac{M_{k-1}}{(k-1)!} \right\} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\frac{M_n}{n!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$M_0 = 1$，$M_1 = 0$ であるから，$n \geqq 0$ について，次式が成立する．

$$M_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

n 人が各自 1 個ずつプレゼントを持ち寄り，くじ引きでプレゼント交換を行うとき，全員が交換する確率は

$$\frac{M_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

とくに $$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

上の結果から，このくじ引きによるプレゼント交換会において，n がいくら大きくてもプレゼントが交換できない人がいる確率は

$$1 - \frac{1}{e} \fallingdotseq 0.632\cdots$$

7.10　組合せ

7.10.1　Review

101　(1) 9 人を 4 人，3 人，2 人の 3 組分ける方法は何通りあるか.

(2) 9 人を 3 人ずつの 3 組に分ける方法は何通りあるか.

解答　(1) 4 人の選び方は，${}_9\mathrm{C}_4$ 通りある.
残りの 5 人から 3 人の選び方は ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りある.
4 人，3 人の組が決まれば，残りの 2 人は決まる.
よって，分け方の総数は

$$ {}_9\mathrm{C}_4 \times {}_5\mathrm{C}_3 = 126 \times 10 = \mathbf{1260}\ (\text{通り}) $$

(2) A 組 3 人，B 組 3 人，C 組 3 人の組の分け方は

$$ {}_9\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_3 = 84 \times 20 $$

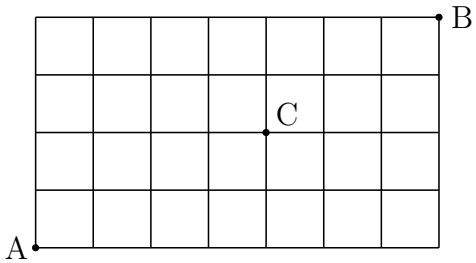
A 組，B 組，C 組の区別をなくせばよいから

$$ \frac{{}_9\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_3}{3!} = \frac{84 \times 20}{6} = \mathbf{280}\ (\text{通り}) $$

102 地点 A から B まで最短経路で行く方法について

(1) 行き方の総数を求めよ.

(2) 地点 C を通らない行き方は何通りあるか.



解答　(1) $\dfrac{11!}{7!4!} = \mathbf{330}\ (\text{通り})$

(2) 地点 C を通る経路の総数は　$\dfrac{6!}{4!2!} \times \dfrac{5!}{3!2!} = 150\ (\text{通り})$

(1) の結果から上の結果を引けばよいから

$$ 330 - 150 = \mathbf{180}\ (\text{通り}) $$

7.10.2 Exercise

103* 正八角形について，次のものはそれぞれいくつあるか.

(1) 対角線

(2) 頂点を結んでできる三角形

(3) (2) の三角形の中で正八角形と辺を共有しないもの

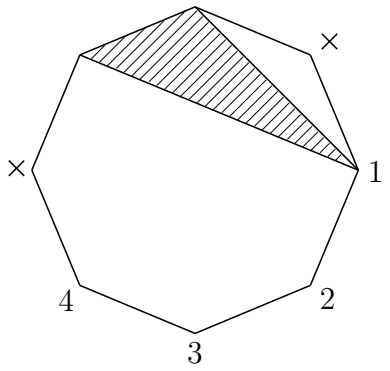
解答 (1) 頂点を 2 か所選ぶ選び方の総数から辺の数を引けばよいから

$$ {}_8\mathrm{C}_2 - 8 = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} - 8 = \mathbf{20}\ \textbf{(本)} $$

(2) 頂点を 3 か所選ぶ選び方の総数であるから

$$ {}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{56}\ \textbf{(個)} $$

(3) 正八角形と 2 辺を共有する三角形は 8 個.
正八角形と 1 辺を共有する三角形は　$8 \times 4 = 32$ 個



これらの個数と (2) の結果から，求める個数は

$$ 56 - (8 + 32) = \mathbf{16}\ \textbf{(個)} $$

104 10個の文字，N，A，G，A，R，A，G，A，W，Aを左から右へ横1列に並べる．(岐阜大 改)

(1) この10個の文字の並べ方は全部で何通りあるか．

(2) 「NAGARA」という連続した文字が現れるような並べ方は何通りあるか．

(3) N，R，Wの文字が，この順に現れるような並べ方は全部で何通りあるか．ただし，N，R，Wが連続しない場合も含める．

解答 (1) A，A，A，A，A，G，G，N，R，WのAが5個，Gが2個，N，R，Wが1個ずつの10個の並べ方であるから

$$\frac{10!}{5!2!} = \mathbf{15120}\ \textbf{(通り)}$$

(2) 「NAGARA」，A，A，W，GのAが2個,「NAGARA」，W，Gが1個ずつの5個の並べ方であるから

$$\frac{5!}{2!} = \mathbf{60}\ \textbf{(通り)}$$

(3) N，R，Wを同じ文字Xに置き換えて並べた後，左から順に，XをN，R，Wに戻すと考えると，A，A，A，A，A，G，G，X，X，Xの並べ方であるから

$$\frac{10!}{5!2!3!} = \mathbf{2520}\ \textbf{(通り)}$$

105* 次の場合において，6 個の球を 3 つの箱に入れる方法は何通りあるか.

(1) 球に区別がなく，箱に区別があるとき

(a) 空箱があってもよい.

(b) 空箱はない.

(2) 球にも箱にも区別があり，空箱はない.

(3) 球に区別があり，箱に区別がなく，空箱はない.

解答 (1) (a) 6 個の○と 2 つの「|」を 1 列に並べる順列の総数に等しいから

$$\frac{8!}{6!2!} = \mathbf{28}\ \textbf{(通り)}$$

別解 重複組合せ ${}_3\mathrm{H}_6 = {}_{3+6-1}\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_2 = \mathbf{28}\ \textbf{(通り)}$

(b) 6 個の○の間の 5 か所から 2 つを選んで「|」を入れる総数に等しいから

$${}_5\mathrm{C}_2 = \mathbf{10}\ \textbf{(通り)}$$

(2) 1 つの箱に入れる総数は ${}_3\mathrm{C}_1 \cdot 1^6 = 3$ 通り

2 つの箱に入れる総数は ${}_3\mathrm{C}_2 \cdot (2^6 - 2) = 186$ 通り

よって，求める場合の総数は

$$3^6 - (3 + 186) = \mathbf{540}\ \textbf{(通り)}$$

(3) (2) の結果から，その箱の区別をなくせばよいか

$$\frac{540}{3!} = \mathbf{90}\ \textbf{(通り)}$$

別解 4 個，1 個，1 個に分けるとき

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_4 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times 1}{2!} = 15\ (\text{通り})$$

3 個，2 個，1 個に分けるとき

$${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times 1 = 60\ (\text{通り})$$

2 個ずつ分けるとき

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 1}{3!} = 15\ (\text{通り})$$

よって，求める場合の総数は

$$15 + 60 + 15 = \mathbf{90}\ \textbf{(通り)}$$

106* 1 つのさいころを 3 回続けて投げて，出た目を順に $a_1,\ a_2,\ a_3$ とする．このとき，次のような目の出方は何通りあるか.

(1) $a_1 < a_2 < a_3$ となる

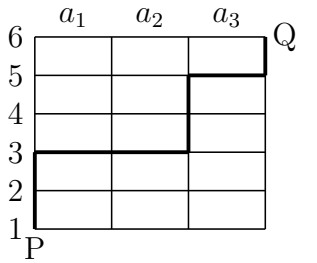
(2) $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ となる.

解答 (1) 1 から 6 までの数から異なる 3 つの数を選ぶ組み合わせの数に等しいから (選んだ 3 つの数を $a_1 < a_2 < a_3$ となるように定める)

$$_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{20}\ \textbf{(通り)}$$

(2) 下の図の地点 P から Q まで最短距離でいく道順の総数と等しいから

$$_8\mathrm{C}_3 = \frac{8!}{3!5!} = \mathbf{56}\ \textbf{(通り)}$$



$(a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5)$

別解 異なる 6 つの数字から重複を許して 3 つの数字を選ぶ重複組合せの数に等しいから (選んだ 3 つの数を $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ となるように定める)

$$_6\mathrm{H}_3 = {}_{6+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8!}{3!5!} = \mathbf{56}\ \textbf{(通り)}$$

7.10.3 Try

107* H，I，T，A，C，H，I の 7 文字を横一列に並べて得られる順列を考える．

(1) 並べ方の総数は，□通りである．

(2) C が A より左側にある並べ方は，□通りである．

(3) I と C が隣り合う並べ方は，□通りである．

(4) 同じ文字が連続して並ばない並べ方は，□通りである．

(5) 2 つの H が少なくとも一方より A が左側にある並べ方は，□通りである．

(茨城大)

解答 (1) H を 2 つ，I を 2 つ含むから

$$\frac{7!}{2!2!} = \mathbf{1260\ (通り)}$$

(2) C と A を X として並べ，左から C，A とすればよい．

$$\frac{7!}{2!2!2!} = \mathbf{630\ (通り)}$$

(3) I と C が隣り合わない場合を考える．

I 以外の 5 文字の並べ方は $\dfrac{5!}{2!} = 60$ (通り)

2 つの I は，C の隣に並ばない．

$$\overset{1}{\vee}\square\,\mathrm{C}\,\square\overset{2}{\vee}\square\overset{3}{\vee}\square\overset{4}{\vee}$$

(i) I が隣り合うとき，1〜4 の 4 か所のいずれかに 2 つの I が入るから

$$4\ (\text{通り})$$

(ii) I が隣り合わないとき，1〜4 の 4 か所のうち 2 か所に I が入るから

$${}_4\mathrm{C}_2 = 6\ (\text{通り})$$

(i)，(ii) より，I と C が隣り合わない並べ方は

$$(4+6)\times 60 = 600\ (\text{通り})$$

よって，求める場合の数は，(1) の結果を利用して

$$1260 - 600 = \mathbf{660\ (通り)}$$

(4) (i) 2 つの H が隣り合う場合の数は，2 つの H をひとまとめにして

$$\frac{6!}{2!} = 360 \text{ (通り)}$$

(ii) 2 つの I が隣り合う場合の数は，(i) と同様にして

$$\frac{6!}{2!} = 360 \text{ (通り)}$$

(iii) 2 つの H，2 つの I がそれぞれ隣り合う場合の数は，2 つの H をひとまとめにし，2 つの I もひとまとめにして

$$5! = 120 \text{ (通り)}$$

(i)〜(iii) から，同じ文字が連続する並べ方は

$$360 + 360 - 120 = 600 \text{ (通り)}$$

よって，同じ文字が連続して並ばない並べ方は，(1) の結果を利用して

$$1260 - 600 = \mathbf{660 \text{ (通り)}}$$

(5) 2 つの H と A をすべて Y として並べ，左から A，H，H または H，A，A に戻すと考えると，求める場合の数は

$$\frac{7!}{3!2!} \times 2 = \mathbf{840 \text{ (通り)}}$$

108 P は正 n 角形 $(n \geqq 6)$ とする．以下のものは何通りあるか求めよ．

(首都大学東京 改)

(1) P の異なる 2 本の対角線の組で，P の頂点を共有するもの

(2) P の異なる 2 本の対角線の組で，P の頂点以外を共有するもの

(3) P の異なる 2 本の対角線の組で，共有点をもたないもの

解答 (1) 共有する頂点の選び方は n 通り．その頂点を共有する 2 本の対角線の残りの端点の選び方は，共有する点とその両隣の 2 点を除く $n-3$ 個の頂点から 2 個の選び方は

$$ {}_{n-3}\mathrm{C}_2 = \frac{(n-3)(n-4)}{2} \ \text{(通り)} $$

よって，求める対角線の本数は

$$ n \times \frac{(n-3)(n-4)}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)} \ \textbf{(通り)} $$

(2) P の頂点のうち 4 点を選ぶとき，その 4 点に対して，条件を満たす 2 本の対角線の組が 1 つできるから，その本数は

$$ {}_n\mathrm{C}_4 = \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)} \ \textbf{(通り)} $$

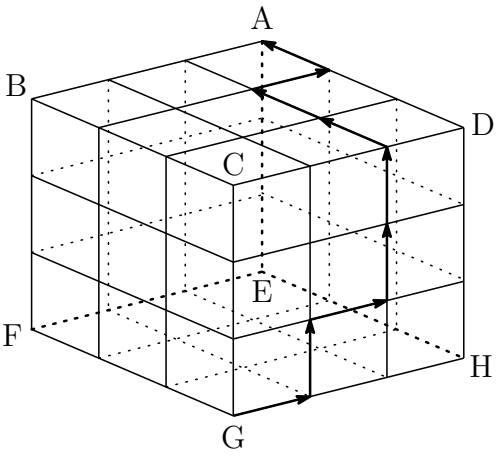
(3) P の対角線の本数は $\dfrac{n(n-3)}{2}$ であるから，2 本の対角線の組は

$$ \begin{aligned} {}_{\frac{n(n-3)}{2}}\mathrm{C}_2 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-3)}{2}\cdot\left\{\frac{n(n-3)}{2}-1\right\} \\ &= \frac{1}{8}n(n-3)(n^2-3n-2) \ \text{(通り)} \end{aligned} $$

求める本数を N とすると，上式から (1)，(2) の結果を引けばよいから

$$ \begin{aligned} N &= \frac{1}{8}n(n-3)(n^2-3n-2) - \frac{1}{2}n(n-3)(n-4) - \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= \frac{1}{24}n(n-3)\{3(n^2-3n-2) - 12(n-4) - (n-1)(n-2)\} \\ &= \frac{1}{24}n(n-3)(2n^2-18n+40) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5)} \ \textbf{(通り)} \end{aligned} $$

109* 6つの面すべてに図のような各面を9等分する平行線の入った立方体 ABCD − EFGH において，G から A まで立方体の辺または平行線上を通って行く最短経路を考える．ただし，辺は両端点を含むものとする．　　(上智大 改)



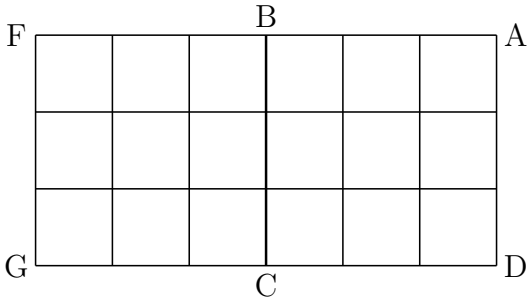
(1) 辺 BC 上の少なくとも1つの点を通って G から A まで行く最短経路は□通りある．

(2) 辺 BC もしくは辺 CD の上の少なくとも1つの点を通って G から A まで行く最短経路は□通りある．

(3) G から A まで行く最短経路は□通りある．

解答　(1) 下の展開図により，求める最短経路は

$$\frac{9!}{6!3!} = \mathbf{84}\ (\text{通り})$$



(2) 辺 CD を通る最短経路も (1) と同様に　84 (通り)
点 C を通る最短経路の数は

$$\frac{6!}{3!3!} = 20\ (\text{通り})$$

したがって，求める最短経路は

$$84 + 84 - 20 = \mathbf{148\ (通り)}$$

(3) 辺 BC，CD，DH，HE，EF，FB 上の少なくとも1つの点を通る最短経路は，それぞれ 84 通り．また，点 B，C，D，E，F，H を通る最短経路は，それぞれの点について 20 通り．よって，求める場合の数は

$$84 \times 6 - 20 \times 6 = \mathbf{384\ (通り)}$$

110 白い玉が5個，赤い玉が2個，黒い玉が1個ある．　(京都先端科学大)

(1) これらの玉を1列に並べる方法は［　ア　］通りある．このうち，黒い玉が赤い玉の間にある並べ方は［　イ　］通りある．ただい，黒い玉が赤い玉と隣り合っている必要はない．

(2) これらの玉を円形に並べる方法は［　ウ　］通りある．また，これらの玉に糸を通して輪にする方法は［　エ　］通りある．

(3) これらの玉に黒い玉を1つ追加したとき，糸を通して輪にする方法は［　オ　］通りある．

解答　(1) 1列に並べる方法は　$\dfrac{8!}{5!2!} = \mathbf{168\ (通り)}$　$\cdots$(ア)

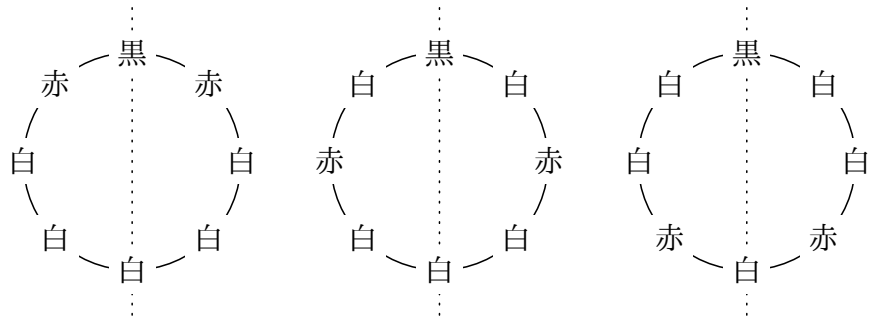
黒玉と赤玉の区別をなくすとその並べ方は
(並べ後に左から順に赤，黒，赤とする)

$$\frac{8!}{5!3!} = \mathbf{56\ (通り)} \quad \cdots(イ)$$

(2) 黒玉を固定して，残りの白い玉5個と赤い玉2個を並べる方法は

$$\frac{7!}{5!2!} = \mathbf{21\ (通り)} \quad \cdots(ウ)$$

(ウ) のうち，左右対称であるものは次の3通り．



よって，(ウ) のうち左右対称でないものは

$$21 - 3 = 18\ (\text{通り})$$

これらの中には，糸を通して輪にしたとき裏返して同じものが2つずつあるから，糸を通して輪にしたときに左右対称でないものは

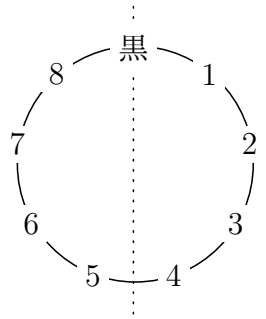
$$18 \div 2 = 9\ (\text{通り})$$

よって，求める場合の数は　　$3 + 9 = \mathbf{12\ (通り)}$

(3) まず円形に並べる場合の数を考える．

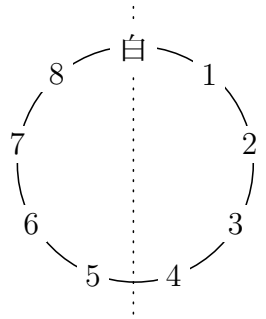
黒い玉のうち 1 個を固定したとき，回転して同じものが現れないようにするために，もう 1 個の黒い玉は 1〜4 のいずれかに並べ，残りの場所に白い玉と赤い玉を並べる．よって，円形に並べる方法は

$$4 \times \frac{7!}{5!2!} = 84 \text{ (通り)}$$



このうち，左右対称なものは白い玉のうち 1 個を固定し，1〜4 に白い玉を 2 個，赤い玉 1 個，黒い玉 1 個を並べる場合の数だけあり

$$\frac{4!}{2!} = 12 \text{ (通り)}$$



よって，左右対称でないものは

$$84 - 12 = 72 \text{ (通り)}$$

これらの中には，糸を通して輪にしたときに裏返して同じものが 2 つずつあるから，糸を通して輪にしたときに左右対称でないものは

$$72 \div 2 = 36 \text{ (通り)}$$

したがって，求める場合の数は

$$12 + 36 = \mathbf{48 \text{ (通り)}}$$

7.11　確率

7.11.1　Review

111 a，b，c，d，e を無作為に 1 列に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) b と c が隣り合う．

(2) 両端が子音になる．

解答 a，b，c，d，e を無作為に 1 列に並べる場合の総数は　5! (通り)

(1) b と c をひとまとにする．
a，d，e とひとまとめにした b，c の並び方の総数は　4!·2! (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{4!\cdot 2!}{5!} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

(2) 3 つの子音 b，c，d から 2 つを両端に並べる場合の総数は　${}_3\mathrm{P}_2$ (通り)
残りの 3 つを間に並べる場合の総数は　3! (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{P}_2 \times 3!}{5!} = \boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

112 袋の中に赤球が 3 個，白球が 4 個入っている．この袋の中から同時に 3 個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 白球が 2 個以上含まれる確率

(2) 赤球が少なくとも 1 つは含まれる確率

解答 赤球 3 個，白球 4 個から球を 3 個取り出す場合の総数は　${}_7\mathrm{C}_3$ (通り)

(1) 赤球 1 個，白球 2 個を取り出す場合の総数は　${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1$ (通り)
白球 3 個を取り出す場合の総数は　${}_4\mathrm{C}_3$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{3\times 6 + 4}{35} = \boldsymbol{\dfrac{22}{35}}$

(2) 白球 3 個を取り出す確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{4}{35}$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{4}{35} = \boldsymbol{\frac{31}{35}}$$

113 赤球4個と白球3個の入った袋から，A，Bの2人がこの順に，次のように1球ずつ取り出すとき，2人とも赤球を取り出す確率を求めよ．

(1) 取り出した球はもとに戻さない．

(2) 取り出した球をもとに戻す．

解答 (1) 球を取り出して並べた順にA，Bと考えると

$$\frac{{}_4\mathrm{P}_2}{{}_7\mathrm{P}_2} = \frac{4\cdot 3}{7\cdot 6} = \boldsymbol{\frac{2}{7}}$$

(2) 1回目，2回目ともに赤球を取り出す確率は $\dfrac{4}{7}$

よって，求める確率は $\dfrac{4}{7} \times \dfrac{4}{7} = \boldsymbol{\dfrac{16}{49}}$

7.11.2 Exercise

114* 異なる 4 色のカードが 3 枚ずつ計 12 枚ある．各色のカードには，それぞれ 1 から 3 までの数字が 1 つずつ書いてある．この中から 3 枚のカードを同時に引いたとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 枚のカードの数字がすべて異なる確率

(2) 3 枚のカードの色も数字も異なる確率

(3) 2 枚のカードだけ数字が等しい確率

解答 12 枚のカードの取り出し方の総数は ${}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$ (通り)

(1) 1, 2, 3 の数字が書かれたカードはそれぞれ 4 枚ずつあるから，3 枚のカードの数字がすべて異なる場合は

$$4^3 = 64 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は $\dfrac{64}{220} = \boldsymbol{\dfrac{16}{55}}$

(2) 3 枚のカードを 1 枚ずつ取り出すと考えてもよい．

- 1 枚の目のカードは色と数字の組合せは 4·3 通り
- 2 枚の目のカードは 1 枚目との色と数字が異なるの組合せで 3·2 通り
- 3 枚の目のカードは 1, 2 枚目の色と数字が異なるの組合せで 2·1 通り

よって，求める確率は $\dfrac{4{\cdot}3 \times 3{\cdot}2 \times 2{\cdot}1}{220} = \boldsymbol{\dfrac{36}{55}}$

(3) 3 枚のカードの数字がすべて等しい場合の数は，1 から 3 のそれぞれ同じ数字の 4 枚のカードから 3 枚取り出す場合の総数で

$$3 \times {}_4\mathrm{C}_3 = 12 \text{ 通り}$$

であるから，その確率は

$$\frac{12}{220} = \frac{3}{55}$$

求める確率は，これと (1) の余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{3}{55} + \frac{16}{55}\right) = \boldsymbol{\frac{36}{55}}$$

115* 3 人でじゃんけんをして，1 人の勝者を決めたい．3 人はそれぞれグー，チョキ，パーを同じ確率で出すとする．あいこの場合は，もう一度じゃんけんをして，2 人が勝った場合にはその 2 人でじゃんけんをする．

(1) 1 回目のじゃんけんで勝者が 1 人に決まる確率を求めよ．

(2) 3 回目のじゃんけんをしても，3 人があいこなる確率を求めよ．

(3) ちょうど 3 回目で勝者が 1 人に決まる確率を求めよ．

解答 j 人でじゃんけんをして，k 人が勝つ確率 (あいこの場合を含む) を P_k^j とすると

$$\mathrm{P}_2^3 = \frac{3\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{3^3} = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}_1^3 = \frac{3\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{3^3} = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}_3^3 = 1 - \left(\mathrm{P}_2^3 + \mathrm{P}_1^3\right) = \frac{1}{3}$$
$$\mathrm{P}_1^2 = \frac{3\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{3^2} = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{P}_2^2 = 1 - \mathrm{P}_1^2 = \frac{1}{3}$$

(1) $\mathrm{P}_1^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

(2) $\mathrm{P}_3^3\cdot\mathrm{P}_3^3\cdot\mathrm{P}_3^3 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{27}}$

(3) 求める確率を P とすると

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{P}_3^3\cdot\mathrm{P}_3^3\cdot\mathrm{P}_1^3 + \mathrm{P}_3^3\cdot\mathrm{P}_2^3\cdot\mathrm{P}_1^2 + \mathrm{P}_2^3\cdot\mathrm{P}_2^2\cdot\mathrm{P}_1^2 \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{27}} \end{aligned}$$

116 大，中，小の 3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 つの目がすべて異なる

(2) 大，中，小の順に目が小さくなる

(3) 出た目の和は 10

(4) 出た目の最大値が 4 以下

(5) 出た目の最大値が 4

(6) 出た目の最大値が 4，最小値が 2

解答 大，中，小の 3 個のさいころを目の出方の総数は　6^3 通り

(1) 3 つの目がすべて異なる場合の数は　${}_6\mathrm{P}_3$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3} = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{6\cdot6\cdot6} = \boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

(2) 1 から 6 の 6 個の数から 3 個選び，大きい順に大，中，小の目と考えると，目の出方は

$${}_6\mathrm{C}_3 = 20 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{20}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{54}}$

(3) 目の和が 10 となるのは

$$(6,\ 3,\ 1),\ (6,\ 2,\ 2),\ (5,\ 4,\ 1),\ (5,\ 3,\ 2),\ (4,\ 4,\ 2),\ (4,\ 3,\ 3)$$

の場合である．このうち

$$(6,\ 3,\ 1),\ (5,\ 4,\ 1),\ (5,\ 3,\ 2)$$

の場合は，大，中，小の目の出方はそれぞれについて 3! 通りある．

また

$$(6,\ 2,\ 2),\ (4,\ 4,\ 2),\ (4,\ 3,\ 3)$$

の場合は，大，中，小の目の出方はそれぞれについて 3 通りある．

よって，求める確率は　$\dfrac{3\cdot3! + 3\cdot3}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

(4) すべての目が 4 以下であるから，求める確率は

$$\frac{4^3}{6^3} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}$$

(5) 最大値が 3 以下の確率は

$$\frac{3^3}{6^3}$$

これと (4) の結果から，求める確率は

$$\frac{4^3}{6^3} - \frac{3^3}{6^3} = \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{216}}$$

(6) すべてのさいころの目が

2, 3, 4 のいずれかである事象を A,

3, 4 のいずれかである事象を B,

2, 3 のいずれかである事象を C

とすると，求める確率は

$$\begin{aligned} P(A) - P(B \cup C) &= P(A) - \{P(B) + P(C) - P(B \cap C)\} \\ &= \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}} \end{aligned}$$

7.11.3 Try

117* 袋の中に青玉が7個，赤玉が3個入っている．袋から1回につき1個ずつ玉を取り出す．一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ．

(1) 4回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ．

(2) 8回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ．

(3) 赤玉がちょうど8回目ですべて取り出される確率を求めよ．

(東北大文系 2009年 3)

解答 (1) 求める確率は $\dfrac{7}{10}\times\dfrac{6}{9}\times\dfrac{5}{7}\times\dfrac{3}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

別解 青玉7個，赤玉3個の計10個を取り出す場合の総数は (10個の玉を取り出して一列に並べる場合の総数)

$$\frac{10!}{7!3!}=120\ (\text{通り})$$

取り出した玉を一列に並べたとき，1番目から4番目までが青青青赤で，5番目以降に青4個，赤2個が並ぶ場合の総数は

青	青	青	赤						

$$\frac{6!}{4!2!}=15\ (\text{通り})\quad \text{求める確率は}\quad \frac{15}{120}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

(2) 取り出した玉を一列に並べたとき，9番目と10番目が青で，1番目から8番目までに青5個と赤3個を並べる場合の総数は

								青	青

$$\frac{8!}{5!3!}=56\ (\text{通り})\quad \text{求める確率は}\quad \frac{56}{120}=\boldsymbol{\frac{7}{15}}$$

(3) 取り出した玉を一列に並べたとき，8番目が赤，9番目と10番目が青で，1番目から7番目までに青5個と赤2個を並べる場合の総数は

							赤	青	青

$$\frac{7!}{5!2!}=21\ (\text{通り})\quad \text{求める確率は}\quad \frac{21}{120}=\boldsymbol{\frac{7}{40}}$$

118* A，B，C の 3 人がそれぞれさいころを 1 個振る．このとき，次の問に答えよ．

(1) 3 人とも同じ目の出る確率を求めよ．

(2) 3 人とも互いに異なる目の出る確率を求めよ．

(3) 3 人が出した目の積が 3 の倍数になる確率を求めよ．

(4) 3 人が出した目の積が 6 の倍数になる確率を求めよ．　(広島大 改)

解答 (1) A，B，C3 人の目の出方の総数は　6^3 (通り)

3 人とも同じ目が出るのは　6 (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$

(2) 3 人とも互いに異なる目が出るのは　${}_6\mathrm{P}_3$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

(3) 3 人のとも 3，6 以外の目が出る確率は　$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\left(\frac{4}{6}\right)^3=\boldsymbol{\frac{19}{27}}$$

(4) 2 の倍数の目が出ない事象を E，3 の倍数の目がでない事象を F とすると，$E\cap F$ は 1 または 5 の目が出る事象である．求める事象の確率は

$$\begin{aligned}P(\overline{E}\cap\overline{F})&=P(\overline{E\cup F})=1-P(E\cup F)\\&=1-\{P(E)+P(F)-P(E\cap F)\}\\&=1-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^3+\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3\right\}\\&=1-\left(\frac{27}{216}+\frac{64}{216}-\frac{8}{216}\right)=\boldsymbol{\frac{133}{216}}\end{aligned}$$

119 サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に $p_1,\ p_2,\ p_3$ とし，x の 2 次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0 \qquad \cdots(*)$$

を考える．　(東北大理系 2015 年 $\boxed{3}$)

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 $\alpha,\ \beta$ をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ．

(3) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 $\alpha,\ \beta$ をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ．

解答　(1) 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0\cdots(*)$ が実数解をもつとき，

$$p_2{}^2-4\cdot 2p_1\cdot 2p_3=p_2{}^2-16p_1p_3\geqq 0$$

$p_1,\ p_2,\ p_3$ はそれぞれ 6 以下の自然数であるから，上式を満たすとき

$p_2=4,\ 5$ のとき　$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

$p_2=6$ のとき　$(p_1,\ p_2)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

よって，求める確率は　$\dfrac{2\times 1+3}{6^3}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{216}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解 $\alpha,\ \beta$ と係数の関係により

$$\alpha\beta=\frac{2p_3}{2p_1}=\frac{p_3}{p_1}=1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3=p_1$$

このとき，2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_1=0$ が複素数解をもつとき

$$p_2{}^2-4\cdot 2p_1\cdot 2p_1<0 \quad \text{ゆえに} \quad p_2<4p_1$$

上式を満たすとき

$p_1=p_3=1$ のとき　$p_2=1,\ 2,\ 3$

$p_1=p_3=2,3,4,5,6$ のとき　$p_2=1,2,3,4,5,6$

よって，求める確率は　$\dfrac{3+5\cdot 6}{6^3}=\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{72}}$

(3) 2 次方程式 $(*)$ の解 $\alpha,\ \beta$ と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{2p_3}{2p_1} = \frac{p_3}{p_1} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad p_3 < p_1$$

2 次方程式 $(*)$ が複素数解をもつ確率は，(1) の結果から

$$1 - \frac{5}{216} = \frac{211}{216} \quad \cdots ①$$

2 次方程式が複素数の解をもち，かつ，$p_3 < p_1$ である確率と 2 次方程式が複素数の解をもち，かつ，$p_3 > p_1$ である確率は等しい．

よって，(2) の結果および ① から，求める確率は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{211}{216} - \frac{11}{72}\right) = \boldsymbol{\frac{89}{216}}$$

120* 袋の中に赤玉 $n-7$ 個，白玉 7 個の合計 n 個の玉が入っている．ただし $n \geqq 10$ とする．この袋から一度に 5 個の玉を取り出したとき，赤玉が 3 個，白玉が 2 個取り出される確率を P_n とする．P_n が最大となる n の値は$\boxed{}$である．

(早稲田大)

解答

$$P_n = \frac{{}_{n-7}\mathrm{C}_3 \times {}_7\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_5} = \frac{(n-7)!}{3!(n-10)!} \times {}_7\mathrm{C}_2 \times \frac{5!(n-5)!}{n!}$$
$$= \frac{{}_7\mathrm{C}_2 \cdot 5!(n-7)!(n-5)!}{(n-10)!n!}$$

P_{n+1} と P_n について

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n-6)!(n-4)!}{(n-9)!(n+1)!} \times \frac{(n-10)!n!}{(n-7)!(n-5)!}$$
$$= \frac{(n-4)(n-6)}{(n+1)(n-9)}$$

これから

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} - 1 = \frac{(n-4)(n-6) - (n+1)(n-9)}{(n+1)(n-9)}$$
$$= \frac{-2n+33}{(n+1)(n-9)}$$

したがって　$P_1 < P_2 < \cdots < P_{16} < P_{17} > P_{18} > \cdots$

よって，P_n が最大となるは　　**18**

121 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

(1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

(九大理系 2015 年 4)

解答 (1) 求める確率は，2 回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2) 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

(3) 偶数回目の操作で青玉の個数は 1 個または 3 個である．青玉 1 個の状態からその後の 2 回目の操作で青玉が 1 個となる確率を p とすると

$$p=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{7}{9}$$

8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p)=p^3(1-p)=\left(\frac{7}{9}\right)^3\frac{2}{9}=\boldsymbol{\frac{686}{6561}}$$

(4) 青玉 3 個の状態から，2 回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$(1-p)qpp = p^2(1-p)q$$

4 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$p(1-p)qp = p^2(1-p)q$$

6 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$pp(1-p)q = p^2(1-p)q$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} 3 \times p^2(1-p)q + p^3(1-p) &= 2p^2(1-p) + p^3(1-p) \\ &= p^2(1-p)(2+p) \\ &= \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{25}{9} = \boldsymbol{\frac{2450}{6561}} \end{aligned}$$

研究

操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が 3 個とも青玉になることなしに，青玉の個数が 1 個である確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき

(2) で示したように奇数回目に青玉が 1 個になることはないから　$p_n = 0$

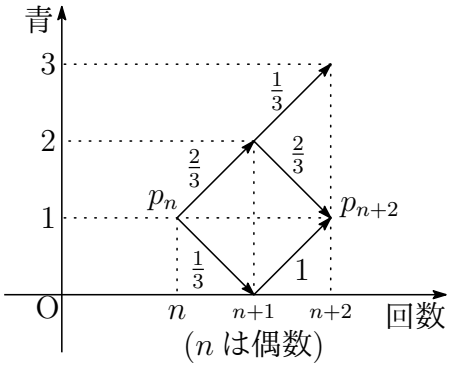
(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1\right) = \frac{7}{9}p_n$$

ゆえに　　$p_n = \left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$

n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2} \times \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$



(n は偶数)

東大理科 2008 年

白黒 2 種類のカードがたくさんある．そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作 (**A**) を考える．

(**A**) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる．

以下の問 (1)，(2) に答えよ．

(1) 最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

(2) 最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

解答　(1) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 4 枚とも同じ色になることなしに，白と黒のカードが 2 枚づつである確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき

奇数回目に 4 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　$\mathbf{0}$

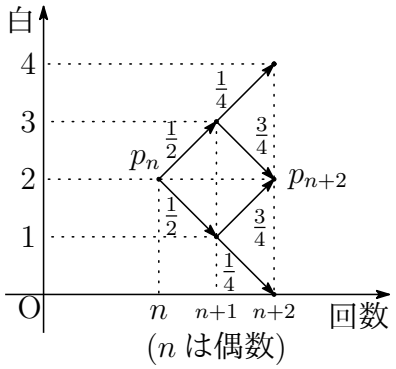
(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4}p_n$$

ゆえに　　$p_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

求める確率は

$$p_{n-2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \times 2 = \mathbf{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$



(n は偶数)

(2) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 6 枚とも同じ色になることなしに，白のカードが 2 枚である確率を q_n とすると，対称性により白のカードが 4 枚である確率も q_n である．

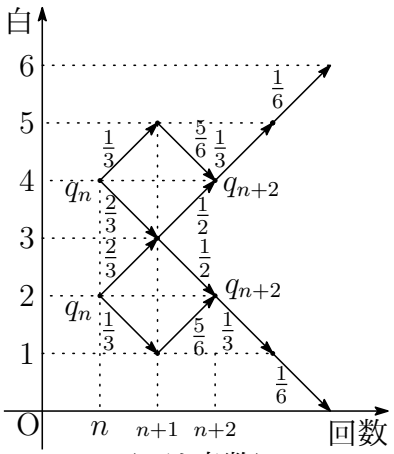
(i) n が奇数のとき　$q_1 = \dfrac{1}{2}$

$$q_{n+2} = q_n \times \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} + q_n\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{17}{18}q_n$$

ゆえに　$q_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

求める確率は，3 以上の奇数のとき

$$q_{n-2} \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} \times 2 = \mathbf{\frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}}$$



(n は奇数)

(ii) n が 1 または偶数のとき

6 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　$\mathbf{0}$

7.12　反復試行の確率，条件付き確率，期待値

7.12.1　Review

122 1 枚の硬貨を 5 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 表が 2 回，裏が 3 回出る．

(2) 5 回目に 2 度目の表が出る．

解答　(1) ${}_5\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \times \frac{1}{32} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$

(2) 4 回目までに表が丁度 1 回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4} $$

このあと 5 回目に表が出る確率であるから

$$ \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{8}} $$

123 3 つのさいころを同時に投げたとき，すべて異なる目が出る事象を A，1 の目が少なくとも 1 つ出る事象を B とする．

(1) 事象 B が起こる確率を求めよ．

(2) 事象 A と事象 B が同時に起こる確率を求めよ．

(3) 事象 B が起こったとき，事象 A が起こる条件付き確率を求めよ．

解答 (1) 1 の目が出ない事象 $\overline{B}$ の確率 $P(\overline{B})$ は

$$P(\overline{B}) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{\mathbf{91}}{\mathbf{216}}$$

(2) $P(A) = 1 \times \dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{9}$，$P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{18}$ であるから

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) - P(A \cap \overline{B}) \\ &= \frac{5}{9} - \frac{5}{18} = \frac{5}{9} - \frac{5}{18} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{18}} \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から，求める条件付き確率は

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{18} \div \frac{91}{216} = \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{91}}$$

124 (1) 白球3個，赤球2個の入った袋の中から3個の球を同時に取り出したとき，その中の白球の個数 X の期待値を求めよ．

(2) 大小のさいころを同時に投げたとき，出ための差の絶対値 X の期待値を求めよ．

解答 (1) X の確率分布表は次のようになる．

X	0	1	2	3	計
P	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

よって，X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 0 \times 0 + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{6}{10} + 3 \times \frac{1}{10} = \mathbf{\frac{9}{5}} \text{ (個)}$$

(2) 確率分布表は

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

大＼小	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

よって，求める期待値は

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{6}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{8}{36} \\ &\quad + 3 \times \frac{6}{36} + 4 \times \frac{4}{36} + 5 \times \frac{2}{36} \\ &= \mathbf{\frac{35}{18}} \end{aligned}$$

7.12.2 Exercise

125* 数直線上の原点Oに点Pがある．さいころを投げ，2以下の目が出たら正の向きに2，3以上の目が出たら負の向きに1だけ点Pが移動する．さいころn回投げたの点Pの座標をP_nとするとき，次の確率を求めよ．　(関西学院大)

(1) $P_3 = 0$となる確率

(2) $P_4 = 2$となる確率

(3) $P_6 = 0$となる確率

(4) $P_6 = 0$であったとき，$P_3 = 0$である条件付き確率

解答 さいころをn回投げて点Pの座標がxであるとき，2以下がj回，3以上がk回出たとすると

$$\begin{cases} j+k=n \\ 2j-k=x \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad j=\frac{n+x}{3}, \quad k=\frac{2n-x}{3}$$

よって，さいころをn回投げて，点Pの座標がxとなる確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_j \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \text{ただし} \quad j=\frac{n+x}{3}, \quad k=\frac{2n-x}{3} \qquad (*)$$

(1) $(*)$に$n=3$，$x=0$を代入すると，$j=1,\ k=2$より

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

(2) $(*)$に$n=4$，$x=2$を代入すると，$j=2,\ k=2$より

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{8}{27}}$$

(3) $(*)$に$n=6$，$x=0$を代入すると，$j=2,\ k=4$より

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{80}{243}}$$

(4) $n=3$ のとき $x=0$ となる事象を A，$n=6$ のとき $x=0$ となる事象を B とすると，(1)，(3) の結果から

$$P(A)=\frac{4}{9},\quad P(B)=\frac{80}{243}$$

本題では，$P_A(B)=P(A)$ であるから

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\quad \text{ゆえに}\quad P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=P(A)^2$$

したがって

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)^2}{P(B)}=\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^2}{\frac{80}{243}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

126 ある部品を製造する 2 つの機械 A，B があり，不良品の発生する割合は，A では 3%，B では 2%である．A で製造された部品と B で製造された部品が 4 : 5 の割合で大量に混ざっている箱があり，この箱から部品 1 個を取り出す．

(1) それが不良品である確率を求めよ．

(2) 取り出された部品が不良品であったとき，それが機械 B で製造された部品である確率を求めよ． (福岡大)

解答 取り出した 1 個の部品が，A で製造された部品である事象を A，B で製造された部品である事象を B，不良品である事象を E とすると

$$P(A)=\frac{4}{9},\quad P(B)=\frac{5}{9},\quad P_A(E)=\frac{3}{100},\quad P_B(E)=\frac{2}{100}$$

(1) 求める確率は $P(E)$ である．

$$P(A\cap E)=P(A)P_A(E)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{100}=\frac{12}{900}$$
$$P(B\cap E)=P(B)P_B(E)=\frac{5}{9}\times\frac{2}{100}=\frac{10}{900}$$

$A\cap E$ と $B\cap E$ は互いに排反であるから

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(B\cap E)\\&=\frac{12}{900}+\frac{10}{900}=\frac{22}{900}=\boldsymbol{\frac{11}{450}}\end{aligned}$$

(2) 求める確率は $P_E(B)$ であるから

$$P_E(B)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{10}{900}\div\frac{22}{900}=\boldsymbol{\frac{5}{11}}$$

127* A と B の 2 人があるゲームを繰り返し行い，先に 4 勝した方を優勝とする．1 回ごとのゲームで A が勝つ確率が $\dfrac{1}{3}$，B が勝つ確率が $\dfrac{2}{3}$ のとき

(1) ちょうど 6 回目のゲームで A が優勝する確率を求めよ．

(2) A が優勝する確率を求めよ．

(3) どちらかが優勝するまでに必要なゲームの回数の期待値を求めよ．

解答 (1) 5 回目終了時点で A が 3 勝 2 敗で，6 回目に A が勝つ確率であるから

$$ {}_5\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{40}{729}} $$

(2) $3+k$ 回目終了時点で A が 3 勝 k 敗で，$4+k$ 回目に A が勝つ確率は

$$ {}_{3+k}\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \frac{1}{3} = \frac{{}_{3+k}\mathrm{C}_3 \cdot 2^k}{3^{4+k}} \qquad (k=0,1,2,3) \qquad (*) $$

よって，A が優勝する確率は

$$ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{3} \frac{{}_{3+k}\mathrm{C}_3 \cdot 2^k}{3^{4+k}} &= \frac{1}{3^4} + \frac{4\cdot 2}{3^5} + \frac{10\cdot 4}{3^6} + \frac{20\cdot 8}{3^7} \\ &= \frac{27 + 9\cdot 8 + 3\cdot 40 + 160}{3^7} = \boldsymbol{\frac{379}{2187}} \end{aligned} $$

(3) $3+k$ 回目終了時点で B が 3 勝 k 敗で，$4+k$ 回目に B が勝つ確率は

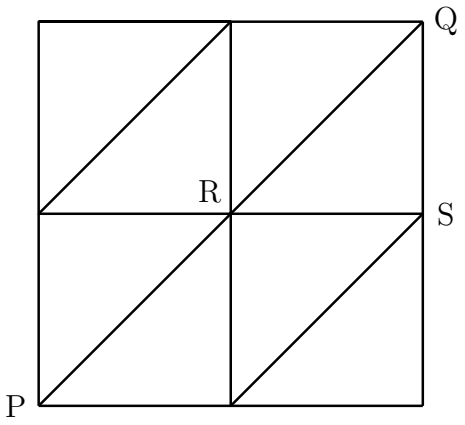
$$ {}_{3+k}\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{{}_{3+k}\mathrm{C}_3 \cdot 16}{3^{4+k}} \qquad (k=0,1,2,3) \qquad (**) $$

$(*)$，$(**)$ より，求める期待値を E とすると

$$ \begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^{3} \frac{(4+k)\cdot {}_{3+k}\mathrm{C}_3 \cdot (2^k + 16)}{3^{4+k}} \\ &= \frac{4\cdot 1\cdot 17}{3^4} + \frac{5\cdot 4\cdot 18}{3^5} + \frac{6\cdot 10\cdot 20}{3^6} + \frac{7\cdot 20\cdot 24}{3^7} \\ &= \frac{27\cdot 68 + 9\cdot 360 + 3\cdot 1200 + 3360}{3^7} \\ &= \frac{12036}{3^7} = \boldsymbol{\frac{4012}{729}} \ \text{(回)} \end{aligned} $$

7.12.3 Try

128 下の図において点Pから線の上を通って，戻ることなく，点Qに進む．このとき，各地点において上方向に進む確率が$\frac{1}{2}$，右方向に進む確率が$\frac{1}{4}$，右斜め上方向に進む確率が$\frac{1}{4}$とする．ただし，上方向または右方向にしか進めない場合は確率1でその方向に進むものとする．　(明治薬科大 改)



(1) 点Rを通る確率は[(a)]であり，点Sを通る確率は[(b)]である．

(2) 斜めの線を通らない確率は[(c)]である．

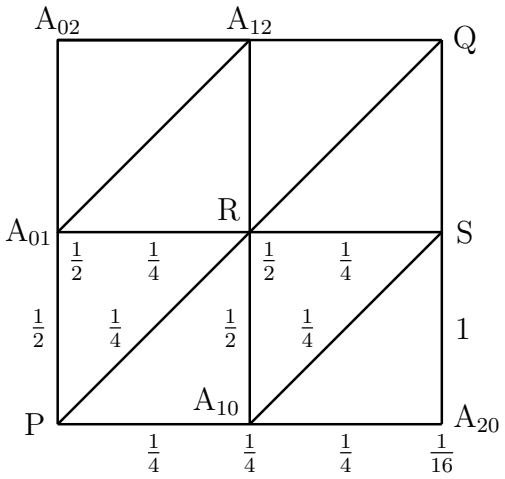
(3) 斜めの線を1度だけ通る確率は[(d)]であり，斜めの線を1度だけ通ったという条件の下，点Sを通る条件付き確率は[(e)]である．

解答　(1) 下の図から，点 R を通る確率は，$\mathrm{P} \to \mathrm{R},\ \mathrm{A}_{01} \to \mathrm{R},\ \mathrm{A}_{10} \to \mathrm{R}$ を通過する確率の和を求めればよいから

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

点 S を通る確率は，$\mathrm{R} \to \mathrm{S},\ \mathrm{A}_{10} \to \mathrm{R},\ \mathrm{A}_{20} \to \mathrm{R}$ を通過する確率の和を求めればよいから

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$



(2) A_{01}, A_{10} を通る確率は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$

A_{02}, R, A_{20} を通る確率は，それぞれ

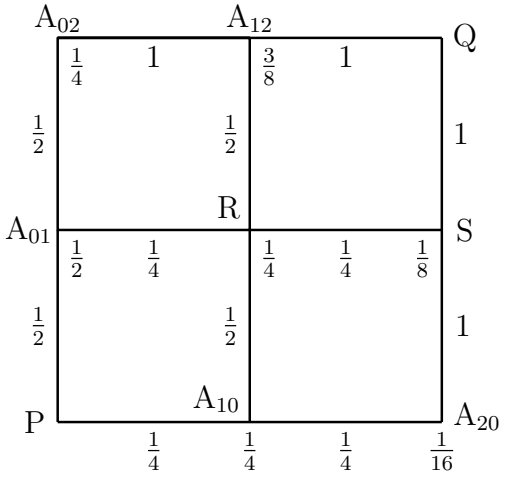
$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\quad \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\quad \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

A_{12}, S を通る確率は，それぞれ

$$\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8},\quad \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\times 1=\frac{1}{8}$$

よって，斜めの線を通らず Q に至る確率は

$$\frac{3}{8}\times 1+\frac{1}{8}\times 1=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$



(3) 1 度だけ通過する斜めの線 PR, $A_{10}S$, $A_{01}A_{12}$, RQ を通る確率は，それぞれ

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 1\right)=\frac{3}{16}$$
$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{16},$$
$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{8},$$
$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

したがって，斜めの線を 1 度だけ通る確率は

$$\frac{3}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\boldsymbol{\frac{7}{16}}$$

点 S を通り，斜めの線を 1 度だけ通るのは，

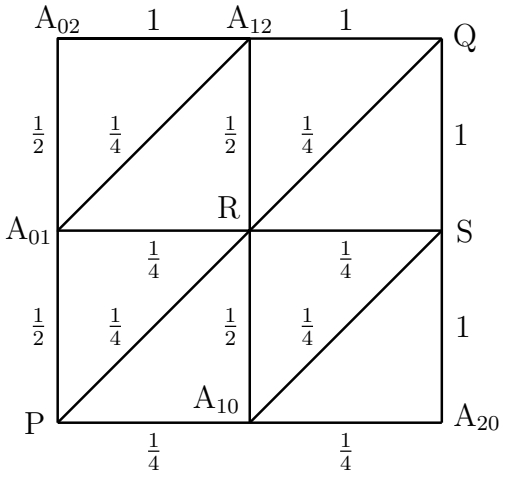
$$\mathrm{P}\to\mathrm{R}\to\mathrm{Q}\quad\text{および}\quad\mathrm{P}\to\mathrm{A}_{10}\to\mathrm{S}\to\mathrm{Q}$$

を通過する確率は

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{8}$$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{1}{8}\Big/\frac{7}{16}=\boldsymbol{\frac{2}{7}}$$



129* ある病原菌の検査薬は，病原菌に感染しているのに誤って陰性と判断する確率が20%，感染していないのに誤って要請と判断する確率が10%である．全体の20%がこの病原菌に感染している集団から1つの検体を取り出して，独立に2回，検査薬で検査する．このとき (上智大 改)

(1) 2回とも陰性であったが，実際には感染している確率を求めよ．

(2) 少なくとも1回は要請であったが，実際には病原菌に感染していない確率を求めよ．

解答 取り出した検体が

感染しているという事象を A,

1回目の検査で陽性と判断される事象を B_1,

2回目の検査で陽性と判断される事象を B_2

とする．

(1) 求める確率は

$$P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(A)=\frac{P(A\cap(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}))}{P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})}$$

まず，取り出した検体が感染していて，2回とも陰性である確率は

$$P(A\cap(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}))=P(A)P_A(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

次に，検体が2回とも陰性となる確率は

$$\begin{aligned}P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})&=P(A\cap(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}))+P(\overline{A}\cap(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}))\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\left(\frac{9}{10}\right)^2\end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(A)=\frac{\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}{\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{9}{10}\right)^2}=\frac{1}{1+9^2}=\boldsymbol{\frac{1}{82}}$$

(2) 求める確率は

$$P_{B_1\cup B_2}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\cap(B_1\cup B_2))}{P(B_1\cup B_2)}$$

取り出した検体が感染しておらず，少なくとも 1 回陽性となる確率は

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\cap(B_1\cup B_2)) &= P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B_1\cup B_2) \\ &= P(\overline{A})\{1-P_A(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})\} \\ &= \frac{4}{5}\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

次に，検体が少なくとも 1 回陽性となる確率は

$$\begin{aligned} P(B_1\cup B_2) &= P(A\cap(B_1\cup B_2)) + P(\overline{A}\cap(B_1\cup B_2)) \\ &= P(A)P_A(B_1\cup B_2) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B_1\cup B_2) \\ &= P(A)\{1-P_A(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})\} + P(\overline{A})\{1-P_{\overline{A}}(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})\} \\ &= \frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\} + \frac{4}{5}\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P_{B_1\cup B_2}(\overline{A}) &= \frac{\dfrac{4}{5}\left\{1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^2\right\}}{\dfrac{1}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\right\} + \dfrac{4}{5}\left\{1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^2\right\}} \\ &= \frac{100-81}{(25-1)+(100-81)} = \boldsymbol{\frac{19}{43}} \end{aligned}$$

130* 3 枚のカードに，1, 2, 3 の各数字書かれている．この 3 枚のカードから 1 枚引き，そこに書いてある数字を記録してカードを戻す，という作業を n 回繰り返す．ただし，何回目の作業であっても，どのカードを引く確率も等しいとする．一度も引かなかったカードがあった場合に限り，n 回引いて得た数字のうち一番大きいものを得点として獲得するものとする．たとえば $n = 5$ のとき，引いた数字が順に 2, 2, 3, 3, 2 であれば 3 点を獲得し，2, 1, 2, 2, 3 であれば得点は獲得しない．　(お茶の水女子大)

(1) 1 点を獲得する確率を求めよ．

(2) 2 点を獲得する確率を求めよ．

(3) 3 点を獲得する確率を求めよ．

(4) 獲得する得点の期待値が最大となるような回数 n の値をすべて求め，そのときの期待値を求めよ．

解答 m 点を獲得する確率を P_m とおく $(m = 0, 1, 2, 3)$.

(1) 1 点を獲得するのは，n 回とも 1 のカードを引くときであるから

$$P_1 = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

(2) 2 点を獲得するのは，n 回とも 2 以下のカードを引き，n 回とも 1 のカードを引く場合を除いたものであるから

$$P_2 = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}} - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

(3) 3 点を獲得するのは，次の事象 A，B に対して，$A \cup B$ の時である．

A : 少なくとも 1 回 3 のカードを引き，残りは 1 または 3 のカードを引く．

B : 少なくとも 1 回 3 のカードを引き，残りは 2 または 3 のカードを引く．

(2) と同様に

$$P(A) = P(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$A \cap B$ は n 回とも 3 のカードを引く事象であるから

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

求める確率は

$$P_3 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \mathbf{2}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{3}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

(4) 得点する得点の期待値を E_n とすると，(3) の結果から

$$\begin{aligned} E_n &= 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + 3\cdot P_3 \\ &= 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} + 3\left\{2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\ &= 8\left(\frac{2}{3}\right)^n - 10\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= 8\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 10\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 8\left(\frac{2}{3}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= -\frac{8}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{20}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{3^{n+1}}(5 - 2^{n+1}) \end{aligned}$$

したがって　$E_1 < E_2 > E_3 > E_4 > \cdots$

よって，期待値 E_n は，$\boldsymbol{n = 2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{E_2 = \dfrac{22}{9}}$

131 半径 1 の円周上に等間隔に並んだ 8 個の点がある．これらの中から相異なる 3 個の点を同時選び，それらを結んで三角形をつくる． (山口大)

(1) 何種類の異なる三角形が作られるかを答えよ．ただし，合同な三角形は同じものとみなす．

(2) 面積が最大の三角形がつくられる確率と，その三角形の面積を求めよ．

(3) つくられる三角形の面積の期待値を求めよ．

解答 (1) 円周を 8 等分した弧の j 個分，k 個分，l 個分について

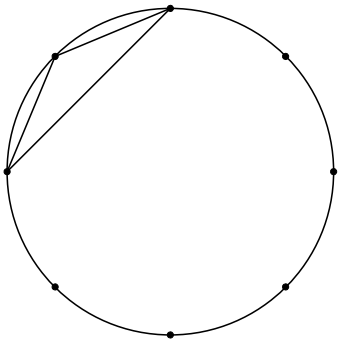
$$j+k+l=8, \quad 1 \leqq j \leqq k \leqq l$$

を満たす整数の組 $(j,\ k,\ l)$ を求めると

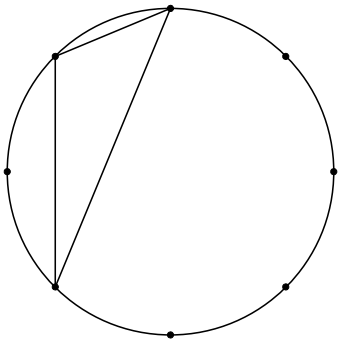
$$(j,\ k,\ l)=(1,\ 1,\ 6),\ (1,\ 2,\ 5),\ (1,\ 3,\ 4),\ (2,\ 2,\ 4),\ (2,\ 3,\ 3)$$

よって　　**5 種類**

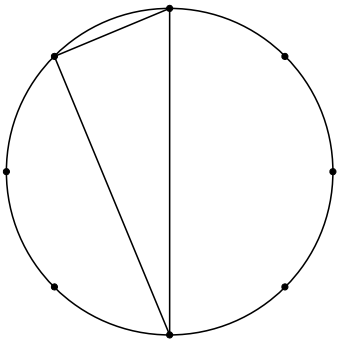
(i)



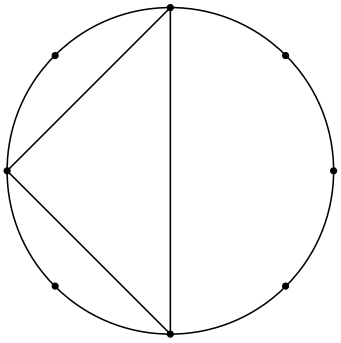
(ii)



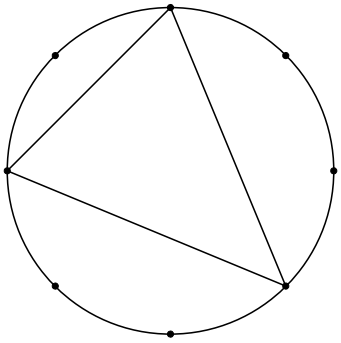
(iii)



(iv)



(v)



(2) 外接円の半径が 1，3 つの角が $\dfrac{j\pi}{8},\ \dfrac{k\pi}{8},\ \dfrac{l\pi}{8}$ の三角形の面積 $S(j,k,l)$ は

$$S(j,k,l)=2\cdot 1^2\sin\frac{j\pi}{8}\sin\frac{k\pi}{8}\sin\frac{l\pi}{8}=2\sin\frac{j\pi}{8}\sin\frac{k\pi}{8}\sin\frac{l\pi}{8}$$

であるから，$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ を利用すると

(i) $S(1,1,6)=2\sin\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{3\pi}{4}=\left(1-\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

(ii) $S(1,2,5)=2\sin\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{5\pi}{8}=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}$

(iii) $S(1,3,4)=2\sin\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{3\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{2}=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

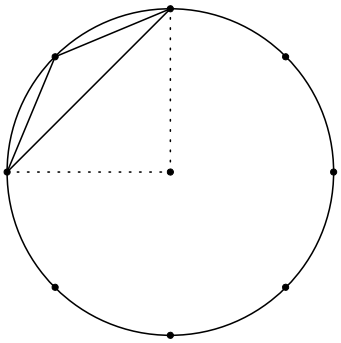
(iv) $S(2,2,4)=2\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

(v) $S(2,3,3)=2\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{3\pi}{8}\sin\dfrac{3\pi}{8}=\left(1-\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

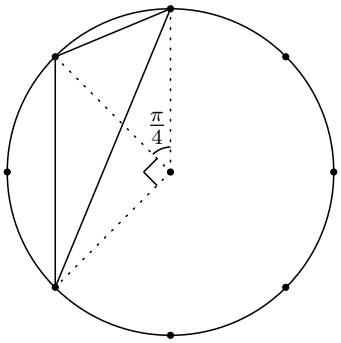
よって，$(j,k,l)=(2,3,3)$ のとき，三角形の面積は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$

この面積の三角形は 8 個あるから，これができる確率は　$\dfrac{8}{{}_8\mathrm{C}_3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$

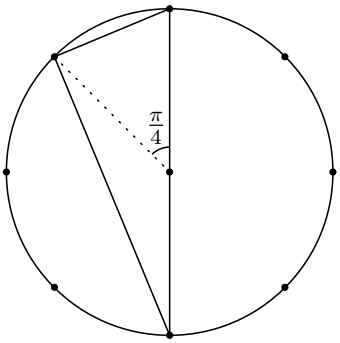
(i)



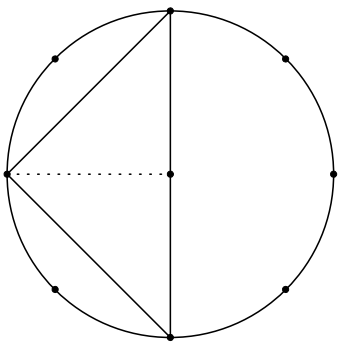
(ii)



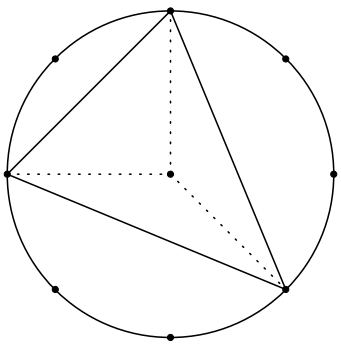
(iii)



(iv)



(v)



(3) $(j,k,l)=(1,1,6),\ (2,2,4),\ (2,3,3)$ の三角形はそれぞれ 8 通りあり，その確率は

$$\frac{8}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{7}$$

$(j,k,l)=(1,2,5),\ (1,3,4)$ の三角形はそれぞれ 8×2 通りあり，その確率は

$$\frac{8\times 2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{2}{7}$$

よって，(2) の結果から求める期待値を E とすると

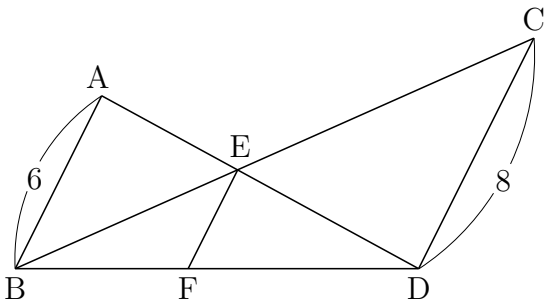
$$\begin{aligned}E&=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{7}+1\times\frac{1}{7}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\times\frac{1}{7}\\&=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}+2}{7}}\end{aligned}$$

7.13　三角形と比

7.13.1　Review

132 下の図で，AB//EF//CD である．

AB = 6，CD = 8 のとき，EF の長さを求めよ．

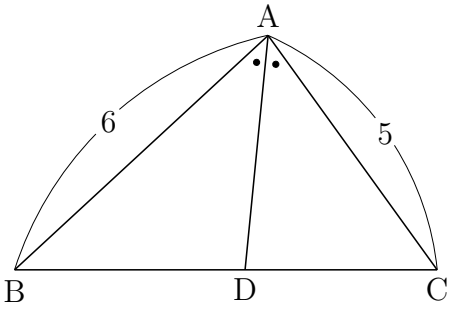


解答 点 F は線分 BD を $1-x:x$ に内分する点であるとすると

$$6x = 8(1-x) \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{4}{7}$$

よって　　$\mathrm{EF} = 6x = 6 \times \dfrac{4}{7} = \boldsymbol{\dfrac{24}{7}}$

133 △ABC において，∠A に二等分線が辺 BC と交わる点を D とする．AB = 6，AC = 5，△ABC の面積が 11 のとき，△ABD の面積を求めよ．



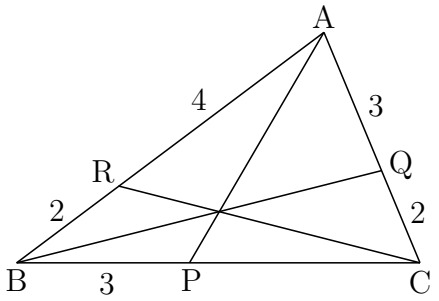
解答 BD : DC = AB : AC = 6 : 5 より

$$\triangle\mathrm{ABD} = \frac{6}{6+5}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{6}{11} \times 11 = \boldsymbol{6}$$

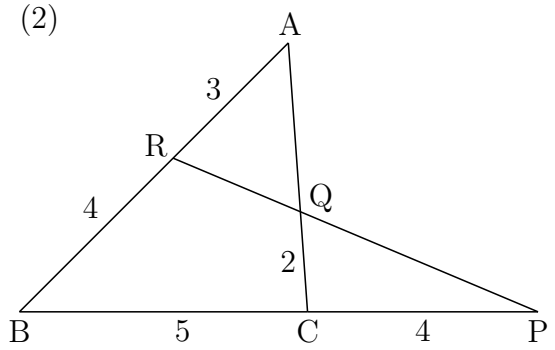
134 (1) 下の図で CP の長さを求めよ.

(2) 下の図で AQ の長さを求めよ.

(1)



(2)



解答 (1) チェバの定理により $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$

$$\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{2}{3}=1 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{CP=4}$$

(2) △ABC と直線 PR についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RP}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{\mathrm{AQ}}=1$$

これを解いて $\mathbf{AQ=\dfrac{27}{8}}$

7.13.2 Exercise

135 1辺の長さが2の正方形ABCDにおいて，辺AB上に点EをAE$=\sqrt{2}$となるようにとる．線分DEと線分ACの交点をFとし，直線DEと直線BCの交点をGとする．このとき，$\dfrac{\mathrm{FE}}{\mathrm{EG}}$を求めよ．

解答 下の図のように1辺の長さが2の正方形ABCDを座標平面上にとり，Fからx軸に垂線FHを引く．2直線AC，DEの方程式は，それぞれ

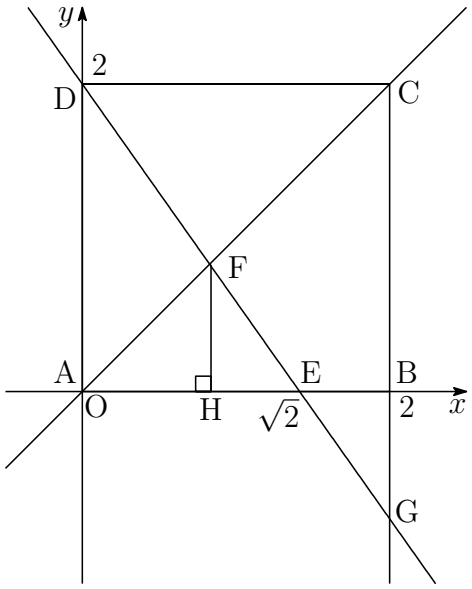
$$y=x,\quad \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{2}=1$$

この2直線の交点Fのx座標は

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2}=1\quad\text{これを解いて}\quad x=2\sqrt{2}-2$$

したがって　$\mathrm{HE}=\sqrt{2}-(2\sqrt{2}-2)=2-\sqrt{2}=\mathrm{EB}$

よって　　$\dfrac{\mathrm{FE}}{\mathrm{EG}}=\dfrac{\mathrm{HE}}{\mathrm{EB}}=\mathbf{1}$



136* △ABC において，AB = 6，BC = 5，CA = 4 とする．∠C の二等分線と AB の交点を D とし，∠B の二等分線と CD の交点を I とする．さらに，I を通って BC に平行な直線と AB の交点を E とする．

(1) BD の長さを求めよ．

(2) IE の長さを求めよ．

(3) △DIE の面積は △ABC の面積の何倍であるか．

解答 (1) BD : DA = CB : CA より，BD : DA = 5 : 4 であるから

$$\mathrm{BD} = \frac{5}{5+4}\mathrm{BA} = \frac{5}{9}\cdot 6 = \boldsymbol{\frac{10}{3}}$$

(2) DI : IC = BD : BC $= \dfrac{10}{3} : 5 = 2 : 3$，△DIE ∽ △DCB より

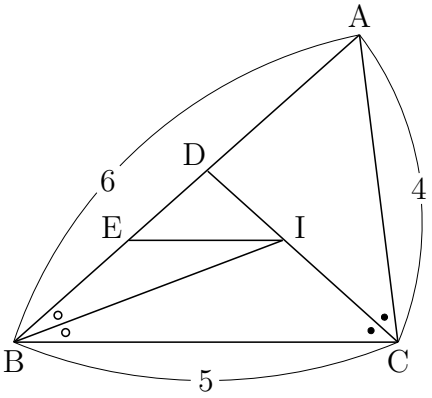
$$\mathrm{IE} = \frac{2}{2+3}\mathrm{BC} = \frac{2}{5}\cdot 5 = \boldsymbol{2}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\triangle\mathrm{DIE} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \triangle\mathrm{DBC}, \quad \triangle\mathrm{DBC} = \frac{5}{9}\triangle\mathrm{ABC}$$

したがって $\triangle\mathrm{DIE} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \cdot \dfrac{5}{9}\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{4}{45}$

よって $\boldsymbol{\dfrac{4}{45}}$**倍**



137* △ABC の内部の点 P と 3 頂点 A，B，C を結ぶ直線が対辺 BC，CA，AB と交わる点をそれぞれ D，E，F とする．BD : DC = 2 : 1，CP : PF = 2 : 3 であるとき，CE : EA を求めよ．

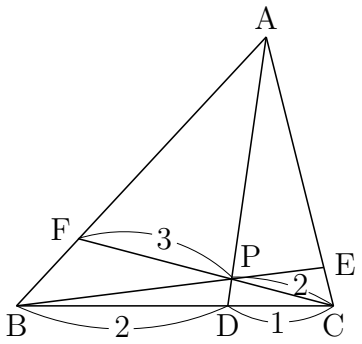
解答 △FBC および直線 AD について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PF}}\cdot\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{AB}}=1$$

上の第 2 式から　FA : AB = 3 : 4　ゆえに　AF : FB = 3 : 1

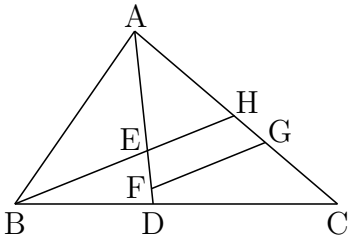
チェバの定理により　$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \quad \text{よって} \quad \mathbf{CE : EA = 1 : 6}$$



7.13.3　Try

138* 右図の △ABC において，AB : AC = 3 : 4 とする．また，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする．さらに，



線分 AD を 5 : 3 に内分する点を E,
線分 ED を 2 : 1 に内分する点を F,
線分 AC を 7 : 5 に内分する点を G

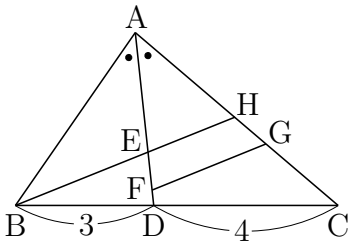
とする．直線 BE と辺の AC との交点を H とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}$ の値を求めよ．　(宮崎大 2010 年 8)

(2) BH//FG であることを示せ．

(3) FG = 7 のとき，線分 BE の長さを求めよ．

解答　(1) △ACD と直線 BH について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EA}}=1 \quad \cdots ①$$

仮定より　$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EA}}=\dfrac{3}{5}$ $\cdots ②$

AD は，∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=3:4 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}=\frac{7}{3} \quad \cdots ③$$

②，③ を ① に代入すると

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}\times\frac{7}{3}\times\frac{3}{5}=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}=\frac{5}{7}}$$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{5}{12}$　$\cdots$④,　　仮定から　$\dfrac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{7}{12}$

上の 2 式から　$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AG}}=\dfrac{5}{7}$　$\cdots$⑤

仮定から　　$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ED}}=\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{ED}}=\dfrac{2}{3}$

上の 2 式から　$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EF}}=\dfrac{5}{2}$　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}=\dfrac{5}{7}$　$\cdots$⑥

⑤，⑥ より　EH//FG　よって　BH//FG

(3) (2) の結果から，△AEH $\backsim$ △AFG であるから　$\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{FG}}=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}$

上式に FG = 7 および ⑥ を代入すると　　EH = 5　$\cdots$⑦

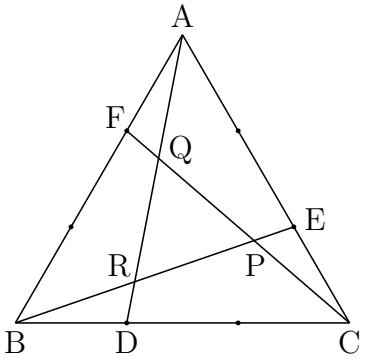
仮定より　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{3}{4}$　これと ④ により　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}}=\dfrac{9}{5}$　$\cdots$⑧

AE は ∠A の二等分線であるから，BE : EH = AB : AH

⑦，⑧ により　BE : 5 = 9 : 5　よって　**BE = 9**

139* 1辺の長さ1の正三角形ABCにおいて，BCを1 : 2に内分する点をD，CAを1 : 2に内分する点をE，ABを1 : 2に内分する点をFとし，さらにBEとCFの交点をP，CFとADの交点をQ，ADとBEの交点をRとする．このとき，△PQRの面積を求めよ．（千葉大2015年 3 ）

解答 △ABEと直線FPおよび△BCEと直線RDについて，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{BP}{PE}\cdot\frac{EC}{CA}\cdot\frac{AF}{FB}=1,\quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CA}{AE}\cdot\frac{ER}{RB}=1$$

したがって

$$\frac{BP}{PE}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=1,\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{ER}{RB}=1$$

ゆえに　$BP:PE=6:1,\quad ER:RB=4:3$

すなわち　$BR:RP:PE=3:3:1$

同様に　　$CP:PQ:QF=3:3:1,\quad AQ:QR:RD=3:3:1$

$AD=BE=CF$ であるから，$PQ=QR=RP$　ゆえに　△PQRは正三角形

△ABDに余弦定理を適用すると

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos 60^\circ=1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{9}$$

$AD=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ であるから　$QR=\dfrac{3}{7}AD=\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

よって，正三角形PQRの面積は　$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^2\sin 60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{28}}$

発展 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とすると ($\vec{b}$，$\vec{c}$ を空間のベクトルと考える)

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{7}(2\vec{b}+\vec{c})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{FC}}=\frac{3}{7}\left(\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)=\frac{1}{7}(-\vec{b}+3\vec{c})$$

ベクトル積 $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\times\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は，$\vec{c}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{c}$，$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$，$\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}$ に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\times\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{49}(2\vec{b}+\vec{c})\times(-\vec{b}+3\vec{c})=\frac{1}{7}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\times\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{1}{14}|\vec{b}\times\vec{c}|=\dfrac{1}{14}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{28}$

なお，$|\vec{b}\times\vec{c}|$ は，2 つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の張る平行四辺形の面積である．

140 四面体 ABCD において，△BCD は 1 辺の長さが $2\sqrt{2}$ の正三角形，その他 3 つの三角形は 2 辺の長さが 4 の二等辺三角形である．辺 AB を 3 : 2 に内分する点を I，辺 AC を 5 : 1 に外分する点を K，辺 BC と IK の交点を J として，以下の問に答えよ．(防衛医科大)

(1) BJ : JC，IJ : JK はそれぞれいくらか．

(2) A から △BCD に垂線 AG，B から △ACD に垂線 BH を下す．AG，BH の長さはいくらか．

(3) 四面体 JCDK の体積はいくらか．

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$．J は線分 IK を $1-t:t$ に内分する点とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AJ}}&=t\overrightarrow{\mathrm{AI}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AK}}\\&=t\cdot\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\cdot\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{3}{5}t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{4}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

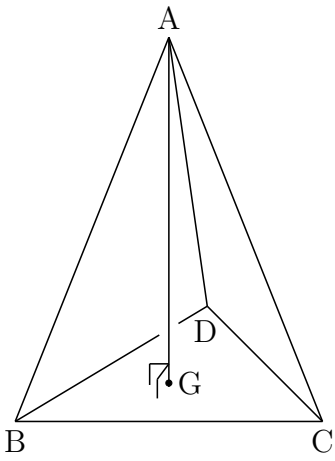
J は直線 BC 上の点であるから，上式の係数について

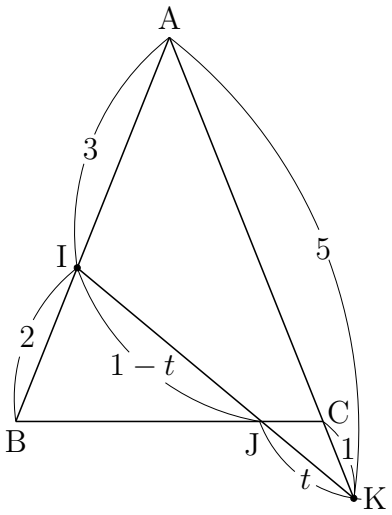
$$\frac{3}{5}t+\frac{5}{4}(1-t)=1\quad\text{これを解いて}\quad t=\frac{5}{13}$$

したがって　$\mathrm{IJ}:\mathrm{JK}=1-\dfrac{5}{13}:\dfrac{5}{13}=\mathbf{8:5}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{4}\cdot\left(1-\frac{5}{13}\right)=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+10\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{13}$$

よって　　$\mathrm{BJ}:\mathrm{JC}=\mathbf{10:3}$





(2) AB = AC = AD であるから　△ABG ≡ △ACG ≡ △ADG

G は正三角形 BCD の外心でありその半径を R とすると，正弦定理より

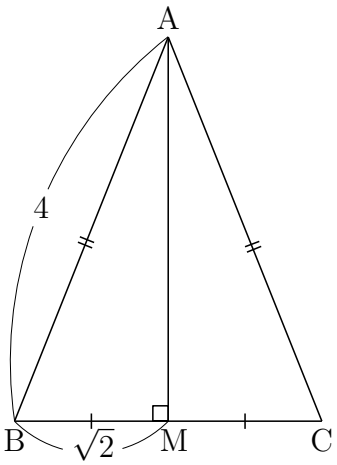
$$2R = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad R = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

したがって　　$\mathrm{AG} = \sqrt{4^2 - R^2} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}}}$

$$\triangle \mathrm{BCD} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

BC の中点を M とすると，$\mathrm{BM} = \sqrt{2}$，$\mathrm{AM} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BM}^2} = \sqrt{14}$

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AM} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{14} = 2\sqrt{7}$$



四面体 ABCD の体積 V について　$V = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AG} = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{BH}$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{7}\mathrm{BH} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\mathrm{BH} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{7}}}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$V = \dfrac{4\sqrt{10}}{3}$，$\mathrm{BJ} : \mathrm{JC} = 10 : 3$，$\mathrm{AC} : \mathrm{CK} = 4 : 1$

よって　　$\dfrac{3}{13}\cdot\dfrac{1}{4}V = \dfrac{3}{13}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4\sqrt{10}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{13}}$

141 四面体 ABCD がある．線分 AB，BC，CD，DA 上にそれぞれ点 P，Q，R，S がある．点 P，Q，R，S は同一平面上にあり，四面体のどの頂点とも異なるとする． (埼玉大)

(1) PQ と RS が平行であるとき，等式 $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}=1$ が成り立つことを示せ．

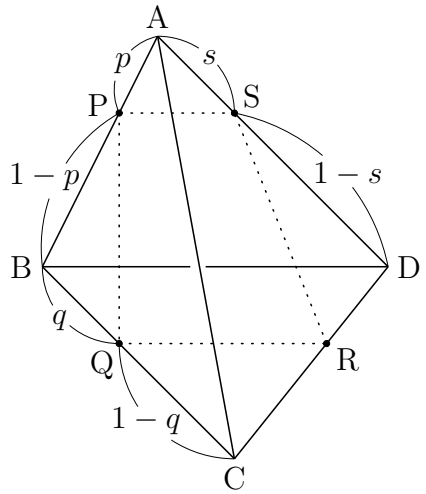
(2) PQ と RS が平行でないとき，等式 $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}=1$ が成り立つことを示せ．

解答 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とし

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=\frac{p}{1-p},\quad \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}=\frac{q}{1-q},\quad \frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}=\frac{1-s}{s}\qquad (0<p,q,s<1)$$

とおく．点 R は平面 PQS 上の点であるから，実数 $x,\ y$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+x\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+y\overrightarrow{\mathrm{PS}}\\&=p\vec{b}+x\{(1-q)\vec{b}+q\vec{c}-p\vec{b}\}+y(s\vec{d}-p\vec{b})\\&=\{(1-p-q)x-py+p\}\vec{b}+qx\vec{c}+sy\vec{d}\qquad(*)\end{aligned}$$



R は直線 CD 上の点であるから

$$\begin{cases} (1-p-q)x - py = -p & \cdots ① \\ qx + sy = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① $\times s$ + ② $\times p$ より

$$\{(1-p-q)s + pq\}x = -ps + p$$
$$\{(1-p)(1-q)s + pq(1-s)\}x = p(1-s)$$

② $\times (1-p-q)$ − ① $\times q$ より

$$\{s(1-p-q) + pq\}y = (1-p-q) + pq$$
$$\{(1-p)(1-q)s + pq(1-s)\}y = (1-p)(1-q)$$

$\Delta = (1-p)(1-q)s + pq(1-s)$ とおくと，$\Delta > 0$ であるから

$$x = \frac{p(1-s)}{\Delta}, \quad y = \frac{(1-p)(1-q)}{\Delta}$$

$(*)$ および ① から

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{pq(1-s)\vec{c} + (1-p)(1-q)s\vec{d}}{\Delta}$$

これから $\quad \dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}} = \dfrac{(1-p)(1-q)s}{pq(1-s)}$

したがって

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \cdot \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} \cdot \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}} \cdot \frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{q}{1-q} \cdot \frac{(1-p)(1-q)s}{pq(1-s)} \cdot \frac{1-s}{s} = 1$$

よって，(1)，(2) はともに成立する．

別解　(1) PQ と AC が平行でないと仮定すると，平面 ABC 上の 2 直線 PQ と AC の交点 T が存在するから

$$\begin{aligned} \mathrm{T} \in \text{直線 PQ},\ \mathrm{T} \in \text{直線 AC} &\Longrightarrow \mathrm{T} \in \text{平面 PQRS},\ \mathrm{T} \in \text{平面 ACD} \\ &\Longrightarrow \mathrm{T} \in \text{直線 RS} \end{aligned}$$

このとき，T は直線 PQ および直線 RS 上の点となり，PQ//RS と矛盾する．

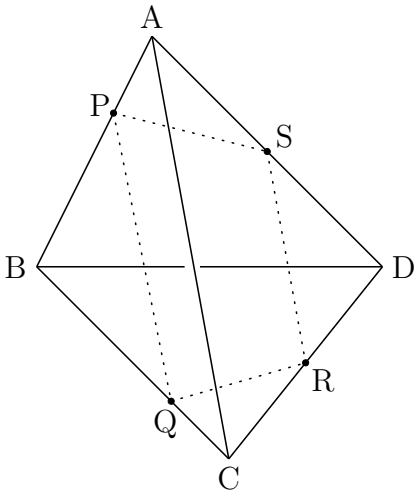
したがって　PQ//AC

同様に　RS//AC

PQ//AC より　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} = \dfrac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BQ}}$　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \cdot \dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} = 1$　$\cdots$①

RS//AC より　$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}} = \dfrac{\mathrm{SA}}{\mathrm{DS}}$　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}} \cdot \dfrac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}} = 1$　$\cdots$②

① と ② の辺々を掛けると　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \cdot \dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} \cdot \dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}} \cdot \dfrac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}} = 1$



(2) 平面 PQRS 上の 2 直線 PQ，RS の交点を U とする．

△ABC と直線 PQ について，メネラウスの定理を適用すると

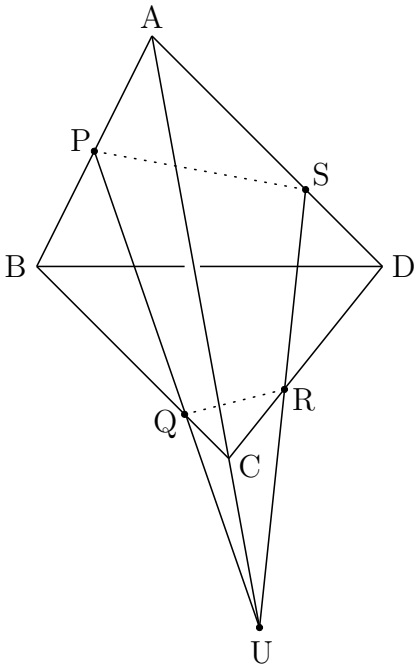
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CU}}{\mathrm{UA}}=1 \qquad (*)$$

△ACD と直線 RS について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{UC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}=1 \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ の辺々を掛けると

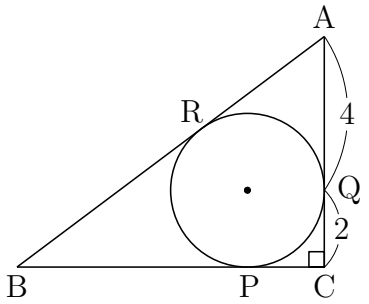
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}=1$$



7.14　円の性質

7.14.1　Review

142 下の図で，AB，BC を求めよ (P，Q，R は接点).



解答 BP = BR = x とおくと，AB = $x+4$, BC = $x+2$

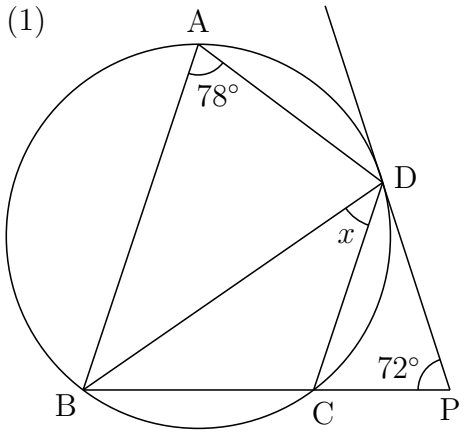
三平方の定理により

$$(x+4)^2 = (x+2)^2 + 6^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = 6$$

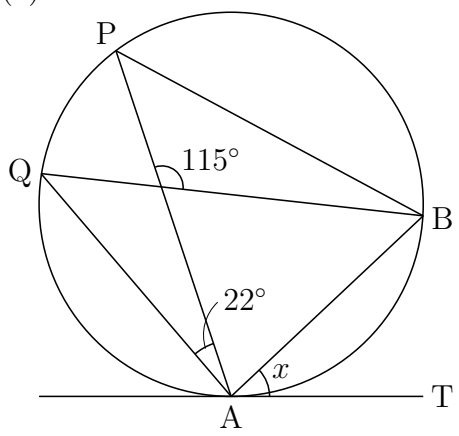
よって　AB = $6+4=$ **10**，BC = $6+2=$ **8**

143 次の図で角 x を求めよ.

(1)



(2)



解答 (1) $\angle\mathrm{PCD} = \angle\mathrm{BAD} = 78^\circ$ より

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{PDC} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{PCD} + \angle\mathrm{CPD}) \\ &= 180^\circ - (78^\circ + 72^\circ) = 30^\circ\end{aligned}$$

接弦定理により　$\angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{PDC} = 30^\circ$

$\triangle$BCD について　$x + 30^\circ = 78^\circ$　ゆえに　$\boldsymbol{x = 48^\circ}$

(2) 接弦定理により　$\mathrm{APB} = x$

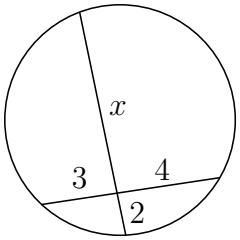
円周角の定理により　$\angle\mathrm{AQB} = \angle\mathrm{APB} = \mathrm{x}$

線分 AP と BQ の交点を R とすると，$\triangle$AQR について

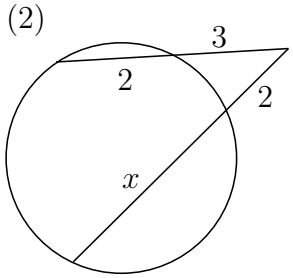
$$x + 22^\circ + 115^\circ = 180^\circ$$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 43^\circ}$

144 次の図で x を求めよ (T は接点).

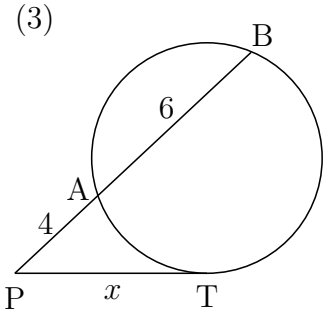
(1)



(2)



(3)



(1) 方べきの定理により

$$x\cdot 2 = 3\cdot 4 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = 6}$$

(2) 方べきの定理により

$$(x+2)\cdot 2 = 5\cdot 3 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = \frac{11}{2}}$$

(3) 方べきの定理により

$$x^2 = 4\cdot 10 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = 2\sqrt{10}}$$

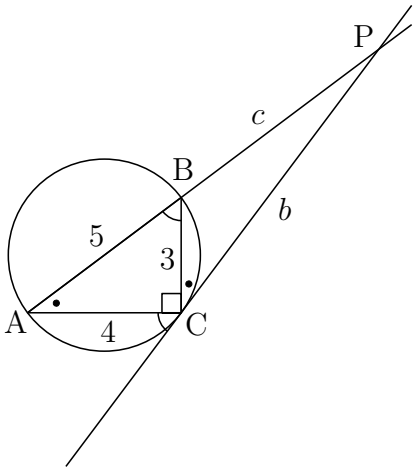
7.14.2 Exercise

145* △ABC は AB = 5，AC = 4 で，AB を直径とする円に内接している．この円の点 C における接線と AB の延長線との交点を P とするとき，線分 CP の長さを求めよ．

解答 $b = \mathrm{CP}$，$c = \mathrm{BP}$ とおくと，△BCP ∽ △CAP より

$$3 : b : c = 4 : (5+c) : b \quad \text{ゆえに} \quad 4b = 3(5+c),\ \ 3b = 4c \qquad (*)$$

$(*)$ から，c を消去して　$7b = 60$　よって　$\mathbf{CP = \dfrac{60}{7}}$



146 半径5の円がある．円Oの外部にある点Pを通る直線がこの円と2点A，Bで交わり，Pに近い方の点をAとする．また，円Oの中心をOとする．$\mathrm{OP}=10$，$\mathrm{AB}=6$のとき，PAの長さを求めよ．

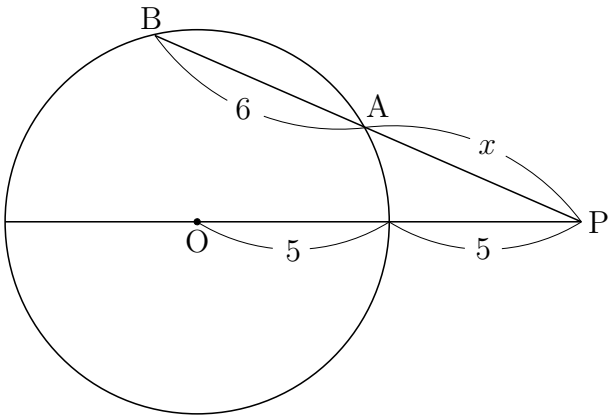
解答 $x=\mathrm{PA}$とおくと，方べきの定理により

$$x(x+6)=5\cdot 15 \quad \text{整理すると} \quad x^2+6x-75=0$$

ゆえに　　$(x+3)^2=84$

$x>0$に注意してこれを解くと　$x=2\sqrt{21}-3$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{PA}=2\sqrt{21}-3}$



147 半径rの円O′が半径$2r$の円Oに点Pで内接し，さらに円O′は円Oの弦ABに点Qで接している．線分PQの延長が円Oと交わる点をMとする．$\angle\mathrm{PQB}=60^\circ$のとき，線分QMの長さを求めよ．　(鹿児島大2015年 1)

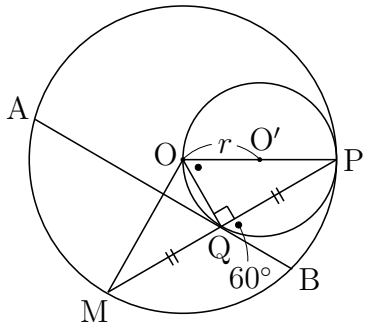
解答 Qは弦ABと円O′の接点であるから

$$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{PQB}=60^\circ$$

弦OPは，円O′の直径であるから

$$\angle\mathrm{OQP}=90^\circ$$

$\triangle\mathrm{OMQ}\equiv\triangle\mathrm{OPQ}$であるから



$$\mathrm{QM}=\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}\sin 60^\circ=2r\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{3}\,r}$$

7.14.3 Try

148* 円に内接する四角形 ABCD の辺の長さをそれぞれ，AB = 4，BC = 3，CD = 2，DA = 6 とする．2 直線 BC と AD の交点を E とし，2 直線 AB と CD の交点を F とする． (センター試験追試 改)

(1) △ABE ∽ △CDE を示せ．

(2) EC = x，ED = y とおく．x，y の値を求め，EC·EB の値を求めよ．

(3) FC·FD の値を求めよ．

(4) 点 G を △FBC の外接円と直線 EF の交点で，F と異なる点とする．4 点 E，D，C，G は同一円周上にあることを示せ．

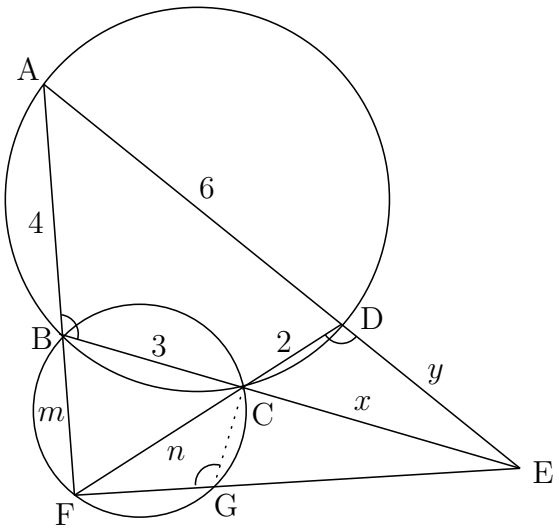
(5) (2)，(3) の結果と，方べきの定理を用いることにより，EF の値を求めよ．

解答 (1) △EAB と △ECD について，角 E は共通．
四角形 ABCD は円に内接するから，∠ABE = ∠CDE．
2 組の角がそれぞれ等しいから　△ABE ∽ △CDE

(2) (1) の結果より，AB : BE : EA = CD : DE : EC であるから

$$4 : x+3 : y+6 = 2 : y : x \quad \text{ゆえに} \quad 4 : x+3 : y+6 = 4 : 2y : 2x$$

したがって　$x+3 = 2y,\ y+6 = 2x$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 5,\ y = 4}$
EC = 5, EB = BC + EC = 3 + 5 = 8 より　EC·EB = 5·8 = **40**



(3) (2) と同様に，△DAF ∽ △BCF より，DA : AF : FD = BC : CF : FB であるから

$$6 : m+4 : n+2 = 3 : n : m \quad \text{ゆえに} \quad 6 : m+4 : n+2 = 6 : 2n : 2m$$

したがって　$m+4 = 2n,\ n+2 = 2m$　これを解いて　$m = \dfrac{8}{3},\ n = \dfrac{10}{3}$

$\mathrm{FC} = \dfrac{10}{3},\ \mathrm{FD} = \mathrm{FC} + \mathrm{CD} = \dfrac{10}{3} + 2 = \dfrac{16}{3}$ より　$\mathrm{FC}\cdot\mathrm{FD} = \dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{16}{3} = \boldsymbol{\dfrac{160}{9}}$

(4) 四角形 ABCD は円に内接するから　$\angle\mathrm{CDE} = \angle\mathrm{ABC}$　$\cdots$①

四角形 BCGF は円に内接するから　$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{CGF}$　$\cdots$②

①，② より，$\angle\mathrm{CDE} = \angle\mathrm{CGF}$

よって，4 点 E，D，C，G は同一円周上にある．

(5) 方べきの定理により

$$\mathrm{EG}\cdot\mathrm{EF} = \mathrm{EC}\cdot\mathrm{EB}, \quad \mathrm{FG}\cdot\mathrm{FE} = \mathrm{FC}\cdot\mathrm{FD}$$

これに (2)，(3) の結果を代入すると

$$\mathrm{EG}\cdot\mathrm{EF} = 40, \quad \mathrm{FG}\cdot\mathrm{FE} = \frac{160}{9}$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$(\mathrm{EG}+\mathrm{FG})\cdot\mathrm{EF} = \frac{520}{9} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{EF}^2 = \frac{520}{9}$$

$\mathrm{EF} > 0$ であるから　$\boldsymbol{\mathrm{EF} = \dfrac{2\sqrt{130}}{3}}$

149 鋭角三角形 ABC について，点 B，C から大変に下した垂線をそれぞれ BD，CE とし，2 線分 BD，CE の交点を F とするとき，次の問に答えよ．

(1) BE·BA + CD·CA = BF·BD + CF·CE を示せ．

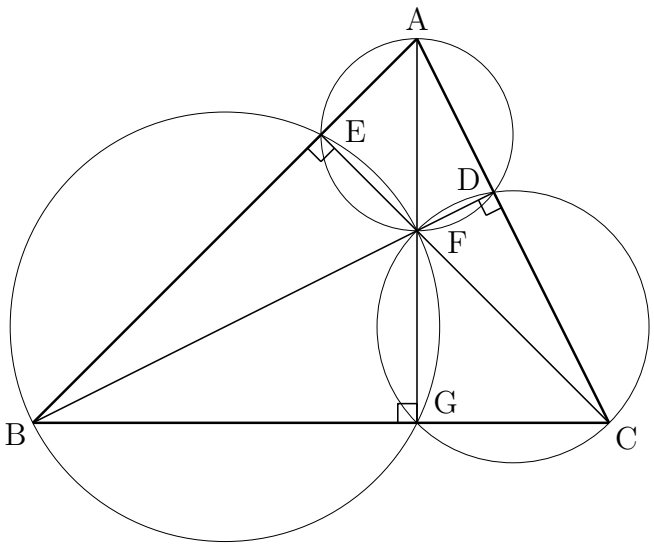
(2) BC^2 = BE·BA + CD·CA を示せ． (茨木大)

解答 (1) 四角形 AEFD は円に内接するから，方べきの定理により

$$BE\cdot BA = BF\cdot BD, \quad CD\cdot CA = CF\cdot CE \qquad (*)$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$BE\cdot BA + CD\cdot CA = BF\cdot BD + CF\cdot CE$$



(2) 点 A から対辺に垂線 AG を引くと，四角形 BGFE および四角形 CDFG は円に内接するから，方べきの定理により

$$BF\cdot BD = BG\cdot BC, \quad CF\cdot CE = CG\cdot CB \qquad (**)$$

(*) および (**) から

$$BE\cdot BA = BG\cdot BC, \quad CD\cdot CA = CG\cdot CB$$

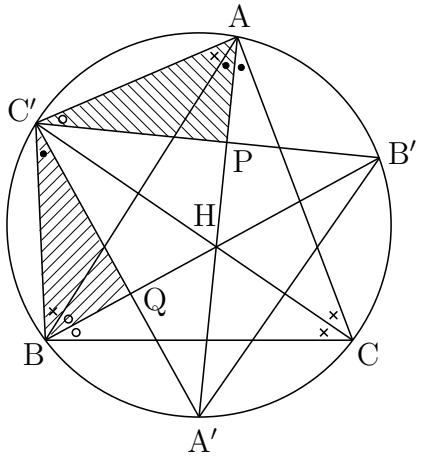
上の 2 式の辺々を加えると

$$BE\cdot BA + CD\cdot CA = (BG + CG)\cdot BC = BC^2$$

150 △ABC において，∠A の二等分線とこの三角形の外接円の交点で A と異なる点を A′ とする．同様に ∠B，∠C の二等分線とこの外接円との交点をそれぞれ B′，C′ とする．このとき 3 直線 AA′，BB′，CC′ は 1 点 H で交わり，この点 H は三角形 A′B′C′ の垂心と一致することを証明せよ．　(京大 2007 年 8)

解答 △ABC において，$\angle A = 2\alpha$，$\angle B = 2\beta$，$\angle C = 2\gamma$ とおくと

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \quad \cdots (*)$$



2 直線 AA′ と B′C′ の交点を P とする．
円周角の定理により

$$\angle AC'B' = \angle ABB' = \beta$$
$$\angle BAC' = \angle BCC' = \gamma$$

△AC′P について

$$\angle AC'P = \beta, \quad \angle PAC' = \gamma + \alpha$$

上の 2 式と $(*)$ により

$$\angle C'PA = 180^\circ - \angle AC'P - \angle PAC' = 180^\circ - \beta - (\gamma + \alpha) = 90^\circ$$

したがって，2 直線 AA′ と B′C′ は直交する．

同様に，2 直線 BB′ と C′A′ の交点を Q とすると，$\angle BQC' = 90^\circ$．

したがって，2 直線 BB′ と C′A′ は直交する．

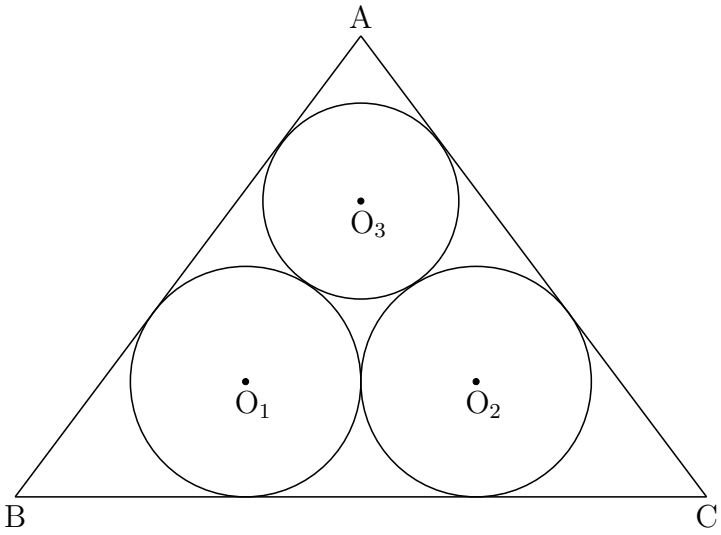
よって，H は △A′B′C′ の垂心である．

151 図のように，AB = AC = 5，BC = 6 の二等辺三角形 ABC 内に，半径が等しい 2 つの円 O_1，O_2 が次の 2 つの条件を満たすように置かれているとする．

- 円 O_1 と円 O_2 は外接する．
- 円 O_1 は辺 AB と辺 BC に接し，円 O_2 は辺 AC と辺 BC に接する．

(1) 円 O_1 の半径 R を求めよ．

(2) さらに円 O_3 が図のように円 O_1 と円 O_2 に外接し，辺 AB と辺 AC に接しているとき，円 O_3 の半径 r を求めよ．　(香川大 改)



解答　(1) BC の中点を M とすると，BM = 3，AM⊥BC より

$$\mathrm{AM} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BM}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$2\theta = \angle\mathrm{ABM}$ とすると，$\tan 2\theta = \dfrac{4}{3}$ より

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4}{3} \quad \text{整理すると} \quad 2\tan^2\theta + 3\tan\theta - 2 = 0$$

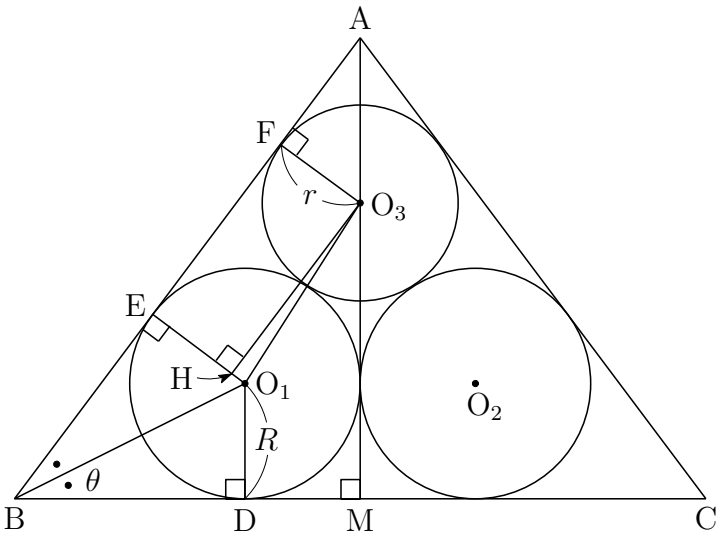
ゆえに　$(2\tan\theta - 1)(\tan\theta + 2) = 0$　このとき，$\tan\theta > 0$ より　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$

直角三角形 $\mathrm{O_1BD}$ について

$$\frac{R}{\mathrm{BD}} = \tan\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{BD} = 2R$$

また，$\mathrm{DM} = R$，$\mathrm{BD} + \mathrm{DM} = 3$ であるから

$$2R + R = 3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{R = 1}$$



別解　$\triangle\mathrm{O_1AB} + \triangle\mathrm{O_1BM} + \triangle\mathrm{O_1MA} = \triangle\mathrm{ABM}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot R + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot R + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot R = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$$

これを解いて　　$\boldsymbol{R = 1}$

(2) $\triangle \mathrm{AFO_3} \backsim \triangle \mathrm{AMB}$ より，$\dfrac{\mathrm{FO_3}}{\mathrm{AF}} = \dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{AM}}$ であるから

$$\frac{r}{\mathrm{AF}} = \frac{3}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AF} = \frac{4}{3}r$$

$\mathrm{O_1O_3} = 1 + r$，$\mathrm{O_1H} = 1 - r$ より，$\mathrm{HO_3} = \sqrt{\mathrm{O_1O_3}^3 - \mathrm{O_1H}^2}$ であるから

$$\mathrm{EF} = \mathrm{HO_3} = \sqrt{(1+r)^2 - (1-r)^2} = 2\sqrt{r}$$

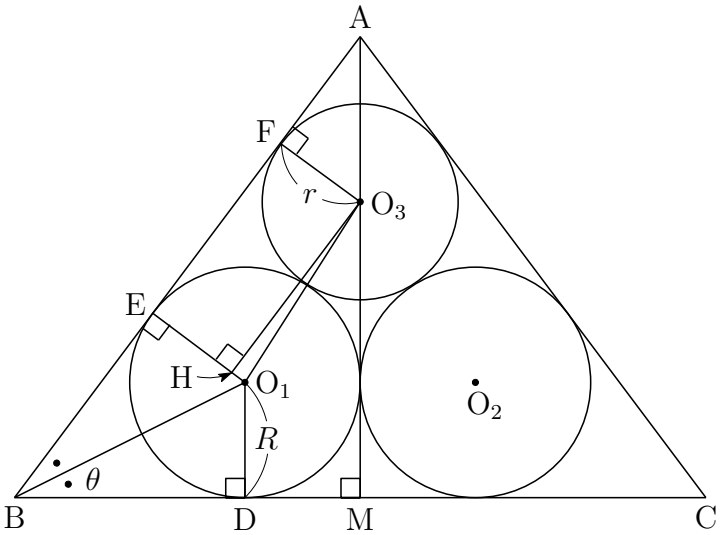
また，$\mathrm{BE} = 2$，$\mathrm{BE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FA} = 5$ であるから

$$2 + 2\sqrt{r} + \frac{4}{3}r = 5 \quad \text{ゆえに} \quad 2\sqrt{r} = 3 - \frac{4}{3}r$$

上の第 2 式を平方すると

$$4r = 9 - 8r + \frac{16}{9}r^2 \quad \text{整理すると} \quad 16r^2 - 108r + 81 = 0$$

$0 < r < R = 1$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{r = \dfrac{27 - 9\sqrt{5}}{8}}$



7.15　約数・倍数・剰余類

7.15.1　Review

152 $\sqrt{\dfrac{480}{n}}$ が自然数となるような，自然数 n をすべて求めよ．

解答 $480 = 2^5{\cdot}3{\cdot}5 = 2{\cdot}3{\cdot}5 \times 2^4$ より

$$\begin{aligned} n &= 2{\cdot}3{\cdot}5,\ 2{\cdot}3{\cdot}5 \times 2^2,\ 2{\cdot}3{\cdot}5 \times 2^4 \\ &= \mathbf{30,\ 120,\ 480} \end{aligned}$$

153 360 の正の約数の個数を求めよ．また，これらの約数の総和，これらの約数の逆数の総和を求めよ．

解答 $360 = 2^3{\cdot}3^2{\cdot}5$ より，約数の総和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5) = 15 \times 13 \times 6 = \mathbf{1170}$$

また，逆数の総和は，上の結果に注意して

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right) &= \frac{2^3+2^2+2+1}{2^3} \times \frac{3^2+3+1}{3^2} \times \frac{5+1}{5} \\ &= \frac{1170}{360} = \mathbf{\frac{13}{4}} \end{aligned}$$

154 最大公約数が 9，最小公倍数が 108 であるような 2 つの正の整数の組をすべて求めよ．

解答 2 つの正の整数の最大公約数が 9 であるから，これら 2 つの整数を $9a,\ 9b$ とおくと (a と b は互いに素)，2 つの整数の最小公倍数が 108 であるから

$$9ab = 108 \quad \text{ゆえに} \quad ab = 2^2{\cdot}3$$

条件を満たす $\{a,\ b\}$ の組は　$\{2^2,\ 3\},\ \{1,\ 2^2{\cdot}3\}$

よって，求める 2 つの整数の組は　**{36, 27}, {9, 108}**

155 m を自然数とするとき，m^2 を 5 で割った余りは，0, 1, 4 のいずれかであることを示せ．

解答 法 5 に関して　$0^2 \equiv 0,\ (\pm1)^2 \equiv 1,\ (\pm2)^2 \equiv 4 \pmod 5$

よって，m を自然数とするとき，m^2 を 5 で割った余りは，0, 1, 4 のいずれかである．

7.15.2 Exercise

156 (1) $\dfrac{n^2+7n+12}{n+1}$ が整数になるような自然数 n をすべて求めよ．(金沢工業大)

(2) $\dfrac{n}{6}$, $\dfrac{n^2}{196}$, $\dfrac{n^3}{441}$ がすべて整数となるような最小の自然数 n を求めなさい．
(東北福祉大)

解答 (1) $\dfrac{n^2+7n+12}{n+1}=\dfrac{(n+1)(n+6)+6}{n+1}=n+6+\dfrac{6}{n+1}$

上式が整数であるとき，$n+1$ は 6 の約数であるから (n は自然数)

$$n+1=2,\ 3,\ 6 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n=1,\ 2,\ 5}$$

(2) $\dfrac{n}{6}=\dfrac{n}{2\cdot3}$, $\dfrac{n^2}{196}=\left(\dfrac{n}{2\cdot7}\right)^2$, $\dfrac{n^3}{441}=n\left(\dfrac{n}{3\cdot7}\right)^2$

n は 2,3,7 の倍数，すなわち，42 の倍数である．

よって，求める最小の n は　　**42**

157 n 以下の自然数のうち，n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ で表す．例えば，$f(6)=2$，$f(7)=6$ である．p，q を異なる素数とするとき，次の値を求めよ．

(1) $f(24)$

(2) $f(p^2)$

(3) $f(pq)$

解答 (1) $24=2^3\cdot 3$

24 以下の数で 2, 3, $2\cdot 3$ の倍数の個数は，それぞれ

$$\frac{24}{2},\quad \frac{24}{3},\quad \frac{24}{2\cdot 3}$$

したがって

$$f(24)=24-\left(\frac{24}{2}+\frac{24}{3}-\frac{24}{2\cdot 3}\right)=24\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3}\right)$$
$$=24\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\mathbf{8}$$

(2) p^2 以下の数で，p の倍数の個数は $\dfrac{p^2}{p}$

よって $f(p^2)=p^2-\dfrac{p^2}{p}=\boldsymbol{p^2}\left(\mathbf{1}-\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}\right)$

(3) pq 以下の数で p, q, pq の倍数の個数は，それぞれ

$$\frac{pq}{p},\quad \frac{pq}{q},\quad \frac{pq}{pq}$$

したがって

$$f(pq)=pq-\left(\frac{pq}{p}+\frac{pq}{q}-\frac{pq}{pq}\right)=pq\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}\right)$$
$$=\boldsymbol{pq}\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}\right)\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}}\right)$$

公式 p_1, p_2, $\cdots$, p_l を素数，k_1, k_2, $\cdots$, k_l を自然数とすると

$$n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$f(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

証明 **http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6)**

158* 30 の階乗の素因数分解を $30! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdots 23^i \cdot 29^j$ としたとき

(1) $a,\ b,\ c$ の値を求めよ.

(2) 30! は末尾から続けて 0 が何個並ぶか求めよ.

解答 (1) $[\,x\,]$ を x を超えない最大の整数とする.

$$a = \left[\frac{30}{2}\right] + \left[\frac{30}{4}\right] + \left[\frac{30}{8}\right] + \left[\frac{30}{16}\right] = 15 + 7 + 3 + 1 = \mathbf{26},$$

$$b = \left[\frac{30}{3}\right] + \left[\frac{30}{9}\right] + \left[\frac{30}{27}\right] = 10 + 3 + 1 = \mathbf{14},$$

$$c = \left[\frac{30}{5}\right] + \left[\frac{30}{25}\right] = 6 + 1 = \mathbf{7}$$

(2) $10 = 2 \cdot 5$ であるから，$c < a$ に注意して　　**7 個**

159* n を奇数とする．次の問に答えよ．

(1) n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ．

(2) n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ．

(3) n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ．

解答 (1) n は奇数であるから，$n-1=2k$ とおくと (k は整数)

$$n^2-1=(n-1)(n+1)=2k(2k+2)=4k(k+1)$$

$k(k+1)$ は連続する 2 数の積であるから，$k(k+1)$ は 2 の倍数であるから，n^2-1 は 8 の倍数である．

(2) 与えられた等式を因数分解すると

$$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1) \qquad (*)$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 数の積であるから，$(n-1)n(n+1)$ は 3! の倍数である．よって，n^5-n は 3 の倍数である．

(3) $n^2+1=(n-2)(n+2)+5$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} n^5-n &= (n-1)n(n+1)\{(n-2)(n+2)+5\} \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

(A) $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ は連続する 5 数の積で $5!=120$ の倍数である．

(B) $(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 整数の積で，3 の倍数であり，n が奇数であるから，$(n-1)(n+1)$ は 4 の倍数である．したがって，$5(n-1)n(n+1)$ は 5·3·4 は 120 の倍数である．

(A)，(B) より，n^5-n は 120 の倍数である．

160* (1) 整数 n が 3 の倍数でないならば，n^2 を 3 で割ったときの余りは 1 であることを示せ．

(2) 3 つの整数 $x,\ y,\ z$ が等式 $x^2+y^2=z^2$ を満たすならば，x と y の少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ．　(慶応義塾大)

解答 (1) n が 3 の倍数でない，すなわち，$n \equiv \pm 1$ のとき，$n^2 \equiv 1 \pmod 3$

(2) n が 3 の倍数，すなわち，$n \equiv 0$ のとき，$n^2 \equiv 0 \pmod 3$
これと (1) の結果から

$$\begin{aligned} n^2 \equiv 0 \quad &\Longrightarrow \quad n \equiv 0 \pmod 3 \\ n^2 \equiv 1 \quad &\Longrightarrow \quad n \equiv \pm 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

$x^2+y^2=z^2$ について

$$\begin{aligned} z^2 \equiv 0 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 \equiv 0,\ \ y^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ &\Longrightarrow \quad x \equiv 0,\ \ y \equiv 0 \pmod 3, \\ z^2 \equiv 1 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 \equiv 0,\ y^2 \equiv 1 \ \text{ または } \ x^2 \equiv 1,\ y^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ &\Longrightarrow \quad x \equiv 0 \ \text{ または } \ y \equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

7.15.3 Try

161 (1) 自然数 $a,\ b$ が互いに素であるとき，$a+b$，ab も互いに素であることを示せ．

(2) 和が 406 で最小公倍数が 2660 であるような正の整数 $A,\ B$ を求めよ．

(弘前大 改)

解答 (1) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x,y) と表記すると，ユークリッドの互除法により

$$(a+b,\ ab)=(a+b,\ ab-a(a+b))=(a+b,-a^2)=(a+b,\ a^2),$$
$$(a+b,\ ab)=(a+b,\ ab-b(a+b))=(a+b,-b^2)=(a+b,\ b^2)$$

ここで

$$p\,|\,(a+b,\ ab)$$

を満たす素数 p が存在すると仮定すると

$$p\,|\,a^2,\quad p\,|\,b^2\quad \text{ゆえに}\quad p\,|\,(a,\ b)$$

これは，$(a,\ b)=1$ であることに反する．よって，$(a+b,\ ab)=1$

(2) 406 と 2660 の最大公約数は　14

$$\begin{array}{rrrrr} & 3 & 4 & 1 & 6 \\ \hline 14\,) & 42\,) & 224\,) & 406\,) & 2660 \\ & 42 & 168 & 224 & 2436 \\ \hline & 0 & 14 & 42 & 224 \end{array}$$

$406=14\times 29,\ 2660=14\times 190$ より

$$29=10+19,\quad 190=10\times 19$$

$A,\ B$ は，$14\times 10,\ 14\times 19$，すなわち，**140，266**

162 自然数 n の約数の個数を $f(n)$ とおく．例えば 12 の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 12 であるので，$f(12)=6$ である． (広島大)

(1) n が $n={p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}\cdots{p_k}^{a_k}$ と因数分解されるとき，

$$f(n)=(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$$

となることを示せ．

(2) $f(n)$ が奇数になるのは n がどのような数のときか．

(3) $f(n)$ が 3 以上の素数になるような 500 以下の自然数 n はいくつあるか．

解答 (1) n の約数は

$${p_1}^{b_1}{p_2}^{b_2}\cdots{p_k}^{b_k}\quad(0\leqq b_1\leqq a_1,\ 0\leqq b_2\leqq a_2,\cdots,0\leqq b_k\leqq a_k)$$

であるから，その個数 $f(n)$ は

$$f(n)=(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$$

(2) $f(n)$ が奇数になるのは，(1) の結論から $a_1+1,\ a_2+1,\cdots,a_k+1$ が奇数である，すなわち，$a_1,\ a_2,\cdots,a_k$ が偶数であるから，n は**平方数**である．

(3) $f(n)$ が 3 以上の素数になるのは，n が

$$f(n)=q,\quad n=p^{q-1}\leqq 500$$

を満たす素数 $p,\ q$ の組の総数であるから $(q\geqq 3)$

p	2	2	2	3	3	5	7	11	13	17	19
q	3	5	7	3	5	3	3	3	3	3	3

よって，求める自然数 n の個数は　**11 個**

163* p は奇数である素数とし，$N=(p+1)(p+3)(p+5)$ とおく．

(1) N は 48 の倍数であることを示せ．　(千葉大 2014 年 3)

(2) N が 144 の倍数になるような p の値を，小さい順に 5 つ求めよ．

解答　(1) p は，奇素数であるから，$p+1=2n$ とおくと (n は整数)

$$\begin{aligned} N&=(p+1)(p+3)(p+5)=2n(2n+2)(2n+4)\\ &=8n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

連続する 3 整数 $n,\ n+1,\ n+2$ の中には，2 の倍数および 3 の倍数が少なくとも 1 つあるから，$n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数である．

よって，N は，8×6，すなわち，48 の倍数である．

(2) 法 3 について　$p+3\equiv p,\quad p+5\equiv p+2\pmod 3$

したがって，$p+1$，$p+3$，$p+5$ の中で 3 の倍数は 1 つだけである．

N が $144=3\times 48$ の倍数であるとき，$p+5,\ p+3,\ p+1$ のいずれかが 9 の倍数でなければならない．自然数 k を用いて，これらを $9k$ とすると

$$p=9k-5,\ 9k-3,\ 9k-1$$

が素数となるものを小さい順に 5 つ求めればよい．このとき，k が奇数のとき，p は偶数となるから，k が偶数の場合について調べればよい．

k	2	4	6	8
$9k-5$	13	31	49	67
$9k-3$	15	33	51	69
$9k-1$	17	35	53	71

よって，求める p の値を小さい順に 5 つ求めると

13，17，31，53，67

164* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ は，$x = 1, -1, -2$ で整数値 $f(1) = r$，$f(-1) = s$，$f(-2) = t$ をとるとする． (岡山大)

(1) $a,\ b,\ c$ を $r,\ s,\ t$ の式で表せ．

(2) すべての整数 n について，$f(x)$ は整数になることを示せ．

解答 (1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$，$f(1) = r$，$f(-1) = s$，$f(-2) = t$ より

$$\begin{cases} a + b + c = r \\ -a + b - c = s \\ -8a + 4b - 2c = t \end{cases}$$

したがって $\quad \boldsymbol{a = \dfrac{r + 3s - t}{6},\ b = \dfrac{r + s}{2},\ c = \dfrac{2r - 6s + t}{6}}$

(2) (1) の結果を $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{r + 3s - t}{6}x^3 + \frac{r + s}{2}x^2 + \frac{2r - 6s + t}{6}x \\ &= r\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) + s\left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - x\right) - t\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) \\ &= r\cdot\frac{1}{6}x(x+1)(x+2) + sx\left\{\frac{x(x+1)}{2} - 1\right\} + t\cdot\frac{1}{6}(x-1)x(x+1) \end{aligned}$$

$x = n$(n は整数) のとき

$$f(n) = r\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + sn\left\{\frac{n(n+1)}{2} - 1\right\} + t\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$

連続する 3 整数 $n(n+1)(n+2),\ (n-1)n(n+1)$ は 3! で割り切れ，連続する 2 整数 $n(n+1)$ は 2! で割り切れる．

したがって，$r,\ s,\ t$ が整数であるから，$f(n)$ は整数である．

165 $k,\ m,\ n$ を自然数とする．以下の問いに答えよ．　(千葉大 2015 年 6)

(1) 2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする．このとき，k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ．

(2) $4m+5n$ が 3 で割り切れるとする．このとき，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ．

解答　(1) 法 7 について

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 1 \pmod 7$$

l を 0 以上の整数とすると

$$2^{3l} \equiv 1, \quad 2^{3l+1} \equiv 2, \quad 2^{3l+2} \equiv 4 \pmod 7 \qquad (*)$$

したがって，2^k を 4 で割った余りが 4 であるとき

$$k = 3l+2 \quad (l \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表される．よって，k を 3 で割った余りは 2 である．

(2) $4m+5n \equiv 0 \pmod 3$ のとき，$4 \equiv 1,\ 5 \equiv -1 \pmod 3$ であるから

$$1m+(-1)n \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad m \equiv n \pmod 3$$

(i) $m \equiv n \equiv 0 \pmod 3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{mn} = (2^m)^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 7$$

(ii) $m \equiv n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{mn} = (2^m)^n \equiv 2^n \equiv 2 \pmod 7$$

(iii) $m \equiv n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{mn} = (2^m)^n \equiv 4^n \equiv (2^n)^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod 7$$

(i)〜(iii) から，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではない．

166 x と y は 0 以上の整数をとるとき，$5x+7y$ という形で表せない素数をすべて列挙せよ．(桜美林大)

解答 n を正の整数とし，$n=5x+7y$ とすると

$$\begin{aligned} n+1&=5(x+3)+7(y-2)\\ n+2&=5(x-1)+7(y+1)\\ n+3&=5(x+2)+7(y-1)\\ n+4&=5(x-2)+7(y+2)\end{aligned}$$

したがって，$n\geqq 5\cdot 2+7\cdot 2=24$ について，$n=5x+7y$ を満たす整数 $x,\ y$ が必ず存在する．したがって，23 以下の素数 p について，$5x+7y=p$ を満たす x，y の存在について調べればよい ($x,\ y$ は 0 以上の整数)．

$$5=5\cdot 1+7\cdot 0,\quad 7=5\cdot 0+7\cdot 1,\quad 17=5\cdot 2+7\cdot 1,\quad 19=5\cdot 1+7\cdot 2$$

よって，求める素数は　**2，3，11，13，23**

167* 2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ．(京大理系 2006 年 4)

解答　(i) $n\equiv 0\pmod 3$ のとき，n が素数であるのは，$n=3$ のときに限る．

(ii) $n\equiv \pm 1\pmod 3$ のとき，$n^2+2\equiv(\pm 1)^2+2\equiv 0\pmod 3$

$n\geqq 2$ より，$n^2+2\geqq 6$ であるから，n^2+2 は 6 以上の 3 の倍数．

(i),(ii) より，n と n^2+2 がともに素数となるのは，$\boldsymbol{n=3}$ の場合に限る．

7.16　不定方程式，整数の性質の活用

7.16.1　Review

168 次の等式を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ.

(1) $xy = 2x + 3y + 1$

(2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$

(3) $5x + 7y = 1$

解答　(1) $xy = 2x + 3y + 1$ より　$(x-3)(y-2) = 7$

$$(x-3,\ y-2) = (\pm 1,\ \pm 7),\ (\pm 7,\ \pm 1) \quad \text{(複号同順)}$$

したがって　$(x,\ y) = (3 \pm 1,\ 2 \pm 7),\ (3 \pm 7,\ 2 \pm 1)$　(複号同順)

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y) = (4,\ 9),\ (2, -5),\ (10,\ 3),\ (-4, 1)}$

(2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$ より　$xy - 2x - 2y = 0$　ゆえに　$(x-2)(y-2) = 4$

$x \neq 0,\ y \neq 0$ より，$x - 2 \neq -2,\ y - 2 \neq -2$ に注意して

$$(x-2,\ y-2) = (\pm 1,\ \pm 4),\ (2,\ 2),\ (\pm 4,\ \pm 1) \quad \text{(複号同順)}$$

したがって

$$\begin{aligned}(x,\ y) &= (2 \pm 1,\ 2 \pm 4),\ (2+2,\ 2+2),\ (2 \pm 4,\ 2 \pm 1) \quad \text{(複号同順)} \\ &= \boldsymbol{(3,\ 6),\ (1, -2),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3),\ (-2,\ 1)}\end{aligned}$$

(3) $5x + 7y = 1$ より　$5(x-3) = -7(y+2)$　$\cdots (*)$

$(*)$ は 5 の倍数かつ 7 の倍数，すなわち，35 の倍数であるから

$$5(x-3) = -7(y+2) = 35k \quad (k \text{ は整数})$$

よって　　$\boldsymbol{x = 7k + 3,\ y = -5k - 2}$　$\boldsymbol{(k \text{ は整数})}$

169 $\dfrac{9073}{2021}$ を約分せよ．

解答 ユークリッドの互除法により，9073 と 2021 の最大公約数は 43

$$\begin{array}{rrrr} & 23 & 2 & 4 \\ \hline 43 \,) & 989 \,) & 2021 \,) & 9073 \\ & 989 & 1978 & 8084 \\ \hline & 0 & 43 & 989 \end{array}$$

よって　$\dfrac{9073}{2021} = \dfrac{43 \times 211}{43 \times 47} = \dfrac{\mathbf{211}}{\mathbf{47}}$

170 ある自然数 m を 8 進法で表すと 2525 となる．$2m$ を 8 進法で表せ．

解答 $m = 2525_{(8)} = 2{\cdot}8^3 + 5{\cdot}8^2 + 2{\cdot}8 + 5$ より

$$\begin{aligned} 2m &= 4{\cdot}8^3 + 10{\cdot}8^2 + 4{\cdot}8 + 10 \\ &= 4{\cdot}8^3 + (8+2){\cdot}8^2 + 4{\cdot}8 + (8+2) \\ &= 5{\cdot}8^3 + 2{\cdot}8^2 + 5{\cdot}8 + 2 \\ &= \mathbf{5252_{(8)}} \end{aligned}$$

7.16.2 Exercise

171 (1) $\sqrt{x^2+84}$ が整数となるような正の整数 x をすべて求めよ．
(名古屋市立大)

(2) $n^2-18n+45$ が素数であるような自然数 n をすべて求めよ．(城西大 改)

解答 (1) $n=\sqrt{x^2+84}$ とおくと (n は整数)

$$n^2=x^2+84 \quad \text{ゆえに} \quad (n+x)(n-x)$$

$n+x=(n-x)+2x$ より (x は正の整数)，$n+x$ と $n-x$ の偶奇は一致するから

$$(n+x,\ n-x)=(42,\ 2),\ (14,\ 6)$$

これを解いて $(n,\ x)=(22,\ 20),\ (10,\ 4)$ よって $\boldsymbol{x=20,\ 4}$

(2) $n^2-18n+45=(n-3)(n-15)>0$ より，$n<3,\ 15<n$ に注意して

$$n-3=-1 \quad \text{または} \quad n-15=1 \quad \text{ゆえに} \quad n=2,\ 16$$

$n=2$ のとき，$(n-3)(n-15)=(2-3)(2-15)=13$
$n=16$ のとき，$(n-3)(n-15)=(16-3)(16-15)=13$
これらについて，$(n-3)(n-15)$ が素数となり，条件を満たす．
よって $\boldsymbol{n=2,\ 16}$

172* 次の等式を満たす x，y の組をすべて求めよ．

(1) $2x^2+3xy-2y^2+2x-16y-30=0$

(2) $x^2-4xy+7y^2+y-14=0$

解答 (1) $(2x-y)(x+2y)+2x-16y=30\cdots$① であるから，定数 p，q を用いて

$$p(2x-y)+q(x+2y)=2x-16y$$

とおき，x，y の係数を比較すると

$$(2p+q)x+(-p+2q)y=2x-16y$$

$2p+q=2,\ -p+2q=-16$ を解いて　$p=4,\ q=-6$

① より　$(2x-y)(x+2y)+4(2x-y)-6(x+2y)=30$

$$(2x-y)(x+2y)+4(2x-y)-6(x+2y)+4\cdot(-6)=30+4\cdot(-6)$$

したがって　　$(2x-y-6)(x+2y+4)=6$

ここで，整数 $a,\ b$ を用いて $(ab=6)$

$$2x-y-6=a,\ x+2y+4=b \qquad (*)$$

とおくと

$$x=\frac{2a+b-2}{5}+2,\quad y=\frac{-a+2b+1}{5}-3$$

$(*)$ より，整数 $a,\ b$ に対して，x，y の一方が整数のとき，他方も整数であることに注意すると，$x,\ y$ が整数となるのは，次の 4 組である．

$(a,\ b)=(-6,-1)$ のとき　　$(x,\ y)=(-1,-2)$
$(a,\ b)=(-3,-2)$ のとき　　$(x,\ y)=(0,-3)$
$(a,\ b)=(-1,-6)$ のとき　　$(x,\ y)=(0,-5)$
$(a,\ b)=(2,\ 3)$ のとき　　$(x,\ y)=(3,-2)$

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y)=(-1,-2),\ (0,-3),\ (0,-5),\ (3,-2)}$

(2) $x^2-4xy+7y^2+y-14=0$ より　$(x-2y)^2=-3y^2-y+14$　$\cdots(*)$

$-3y^2-y+14 \geqq 0$ であるから　$3y^2+y-14 \leqq 0$

$$(3y+7)(y-2) \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{7}{3} \leqq y \leqq 2$$

$N=-3y^2-y+14$ とすると，N は平方数であるから，これを満たす y は

$$y=-2,\ 2$$

(i) $y=-2$ のとき，これを $(*)$ に代入して

$$(x+4)^2=4 \quad \text{ゆえに} \quad x=-6,-2$$

(ii) $y=2$ のとき，これを $(*)$ に代入して

$$(x-4)^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=4$$

(i)，(ii) より，求める整数 $x,\ y$ の組は

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(-6,-2),\ (-2,-2),\ (4,\ 2)}$$

173* $2 \leqq p < q < r$ を満たす整数 $p,\ q,\ r$ の組で，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r} \geqq 1$ となるものをすべて求めよ．(群馬大)

解答 $(*)$ $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r} \geqq 1$ $(2 \leqq p < q < r)$ について，$\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{r}$ であるから

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p} > \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{p} > 1 \quad \text{これから} \quad p < 3$$

$2 \leqq p < 3$ より　$p = 2$　$(*)$ に代入して整理すると　$\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r} \geqq \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q} > \frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{q} > \frac{1}{2} \quad \text{これから} \quad q < 4$$

$2 = p < q < 4$ より　$q = 3$　$(*)$ に代入して整理すると

$$\frac{1}{r} \geqq \frac{1}{6} \quad \text{これから} \quad r \leqq 6$$

$3 = q < r \leqq 6$ より　$r = 4,\ 5,\ 6$

よって，求める $p,\ q,\ r$ の組は，次の 3 組である．

$$\boldsymbol{(p,\ q,\ r) = (2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 3,\ 6)}$$

174* (1) 71 と 33 が互いに素であることを示せ.

(2) $71x-33y=1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ.

(3) 71 で割ると 2 余り，33 で割ると 7 余る自然数のうち，4 桁で最小のものを求めよ. (名城大)

解答 (1) ユークリッドの互除法により

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 6 & 2 \\ \hline 2 &) & 3 &) & 5 &) & 33 &) & 71 \\ & & 2 & & 3 & & 30 & & 66 \\ \hline & & 1 & & 2 & & 3 & & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 6 & 2 \\ \hline e &) & d &) & c &) & b &) & a \\ \\ \hline & 1 & & e & & d & & c & \end{array}$$

よって，71 と 33 は互いに素である.

(2) (1) の結果から，$a=71,\ b=33,\ c=5,\ d=3,\ e=2$ とおくと

$$\begin{cases} a=2b+c \\ b=6c+d \\ c=d+e \\ d=e+1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} c=a-2b \\ d=b-6c \\ e=c-d \\ 1=d-e \end{cases}$$

$(*)$ の 4 式から $e,\ d,\ c$ の順に消去すると

$$\begin{aligned} 1=d-e&=d-(c-d)=-c+2d \\ &=-c+2(b-6c)=2b-13c \\ &=2b-13(a-2b)=-13a+28b \\ &=a\cdot(-13)-b\cdot(-28) \end{aligned}$$

よって，$71x-33y=1$ の整数解の 1 つは $\boldsymbol{x=-13,\ y=-28}$

別解 $71\equiv 5,\ 33\equiv 0 \pmod{33}$ を $71x-33y=1\cdots$① に適用すると

$$5x\equiv 1 \text{ より} \quad 35x\equiv 7 \quad \text{ゆえに} \quad 2x\equiv 7 \pmod{33}$$

したがって $x=5x-2\cdot 2x\equiv 1-2\cdot 7\equiv -13 \pmod{33}$

① より，$33(2x-y)=-5x+1$ であるから，$x=-13$ を右辺に代入すると

$$33(2x-y)=66 \quad \text{ゆえに} \quad y=2x-2$$

$x=-13$ を上の第 2 式に代入すると $y=-28$

よって，$71x-33y=1$ の整数解の 1 つは $\boldsymbol{x=-13,\ y=-28}$

(3) 求める数を N とすると，整数 $x,\ y$ を用いて

$$N = 71x + 2 = 33y + 7 \quad \text{ゆえに} \quad 71x - 33y = 5 \qquad (*)$$

(2) の結果から，$x_0 = -13,\ y_0 = -28$ とすると，$71x_0 - 33y_0 = 1$ より

$$71{\cdot}5x_0 - 33{\cdot}5y_0 = 5 \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より

$$71(x - 5x_0) - 33(y - 5y_0) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 71(x - 5x_0) = 33(y - 5y_0)$$

上の第 2 式から，$x - 5x_0$ は 33 で割り切れるから，整数 k を用いて

$$x - 5x_0 = 33k \quad \text{ゆえに} \quad 71x + 2 = 71(33k + 5x_0) + 2$$

したがって　　$N = 71(33k - 65) + 2$
$k = 2$ のとき $N = 73$，$k = 3$ のとき $N = 2416$
よって，求める数 N は 4 桁で最小のものであるから　**2416**

別解 $(*)$ について，$71 \equiv 5,\ 33 \equiv 0 \pmod{33}$ より

$$5x \equiv 5 \quad \text{ゆえに} \quad x \equiv 1 \pmod{33}$$

x は整数 n を用いて，$x = 33n + 1$ と表されるから

$$N = 71x + 2 = 71(33n + 1) + 2$$

$n = 0$ のとき $N = 73$，$n = 1$ のとき $N = 2416$
よって，求める数 N は 4 桁で最小のものであるから　**2416**

175 正の整数 N を 5 進法，7 進法で表すと，それぞれ 3 桁の数 abc，cab になるという．このとき，$a,\ b,\ c$ の値を求めよ．また，正の整数 N を求めよ．

解答 条件から，$1 \leqq a \leqq 4,\ 0 \leqq b \leqq 4,\ 1 \leqq c \leqq 4$

$$N = a{\cdot}5^2 + b{\cdot}5 + c = c{\cdot}7^2 + a{\cdot}7 + b$$

$N = 25a + 5b + c = 7a + b + 49c$ より

$$24c = 9a + 2b \qquad (*)$$

$9a + 2b \leqq 9{\cdot}4 + 2{\cdot}4 = 44$ であるから，$(*)$ を満たす c は　$c = 1$

$c = 1$ を $(*)$ に代入すると

$$24 = 9a + 2b \quad \text{ゆえに} \quad 9a = 24 - 2b \qquad (**)$$

$16 \leqq 24 - 2b \leqq 24$ であるから，$(**)$ を満たす a は　$a = 2$

$a = 2$ を $(**)$ に代入すると

$$18 = 24 - 2b \quad \text{これを解いて} \quad b = 3$$

$\boldsymbol{a = 2,\ b = 3,\ c = 1}$ より　$N = 2{\cdot}5^2 + 3{\cdot}5 + 1 = \mathbf{66}$

176* 次の問に答えよ．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．　(龍谷大)

(1) $[2x]=4$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

(2) $[2x-1]=4x$ を満たす実数 x をすべて求めよ．

(3) $[2x]-[x]=4$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

解答　(1) $4 \leqq 2x < 5$　よって　$\boldsymbol{2 \leqq x < \frac{5}{2}}$

(2) $[2x-1]=4x$ より，$4x$ は整数であるから

$$4x \leqq 2x-1 < 4x+1 \quad \text{これを解いて} \quad -1 < x \leqq -\frac{1}{2}$$

$-4 < -4x \leqq -2$ で，$4x$ は整数であるから

$$4x = -3, -2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}}$$

(3) $[2x-4]=[x]=a$ とおくと (a は整数)

$$a \leqq 2x-4 < a+1, \quad a \leqq x < a+1 \quad \cdots ①$$

上の第 1 式から　$\dfrac{a+4}{2} \leqq x < \dfrac{a+5}{2}$　$\cdots ②$

(i) a が奇数のとき ①，② より

$$a+1 = \frac{a+5}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a=3$$

$a=3$ を ①，② に代入して

$$3 \leqq x < 4, \ \frac{7}{2} \leqq x < 4 \quad \text{すなわち} \quad \frac{7}{2} \leqq x < 4$$

(ii) a が偶数のとき ①，② より

$$a = \frac{a+4}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a=4$$

$a=4$ を ①，② に代入して

$$4 \leqq x < 5, \ 4 \leqq x < \frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad 4 \leqq x < \frac{9}{2}$$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{\frac{7}{2} \leqq x < \frac{9}{2}}$

7.16.3 Try

177 自然数 n に対して，$3n^3+n$ と n^3+1 の最大公約数を g とする． (学習院大)

(1) すべての n について，$g \neq 5$ であることを示せ.

(2) $g=14$ となるような n の最小値を求めよ.

解答 (1) 整数 x，y の最大公約数を (x,y) と表記すると，ユークリッドの互除法により

$$\begin{aligned}(3n^3+n,\ n^3+1) &= (3n^3+n-3(n^3+1),\ n^3+1)\\ &= (n-3,\ n^3+1)\\ &= (n-3,\ n^3+1-(n-3)(n^2+3n+9))\\ &= (n-3,\ 28) = g \qquad (*)\end{aligned}$$

g は 28 の約数であるから，$g \neq 5$

(2) $(*)$ から，$g=14$ となるような n の最小値は

$$n-3=14 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n=17}$$

178* (1) m が自然数のとき，$\sqrt{m}$ が整数でなければ，$\sqrt{m}$ は無理数であることを証明せよ．(京都教育大)

(2) n が 2 以上の整数のとき，$\sqrt{n^2+3}$ は無理数であることを証明せよ．

解答 (1) 対偶「$\sqrt{m}$ が有理数ならば $\sqrt{m}$ は整数である」が成り立つことを示す．

$\sqrt{m}$ が有理数のとき

$$\sqrt{m}=\frac{p}{q}\ (p,\ q \text{ は互いに素な自然数})$$

と表すことができる．両辺を 2 乗すると

$$m=\frac{p^2}{q^2}$$

p，q が互いに素であるから，$\dfrac{p^2}{q^2}$ が自然数となるのは，$q=1$ の場合である．このとき $\sqrt{m}=p$，すなわち，$\sqrt{m}$ は整数となる．

対偶が成立するから，本命題は真である．

(2) $\sqrt{n^2+3}$ が整数であると仮定すると $(n \geqq 2)$

$$\sqrt{n^2+3}=k \quad (k \text{ は自然数})$$

を満たす整数 k が存在する．両辺を平方すると

$$n^2+3=k^2 \quad \text{ゆえに} \quad (k+n)(k-n)=3$$

$k,\ n$ は自然数であるから

$$k+n=3,\ k-n=1 \quad \text{これを解いて} \quad k=2,\ n=1$$

これは，$n \geqq 2$ であることに反するから，$\sqrt{n^2+3}$ は整数ではない．

さらに，(1) の結論から，$\sqrt{n^2+3}$ は無理数である．

補足 n が 2 以上の自然数であるとき

$$(\sqrt{n^2+3})^2-n^2=3>0 \quad \text{ゆえに} \quad n<\sqrt{n^2+3}$$
$$(n+1)^2-(\sqrt{n^2+3})^2=2n-2>0 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{n^2+3}<n+1$$

したがって $\quad n<\sqrt{n^2+3}<n+1 \quad$ よって $\quad \sqrt{n^2+3}$ は整数ではない．

179 次の等式を満たす自然数 $m,\ n$ の組の総数を求めよ．　(東京理科大 改)

(1) $mn = 4m - 3n + 24$

(2) $m^2n - 2mn + 3n - 36 = 0$

(3) $m^3 - m^2n + (2n+3)m - 3n + 6 = 0$

解答　(1) $(m+3)(n-4) = 12$ より，これを満たす自然数 $m,\ n$ の組は

$$(m+3,\ n-3) = (4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (12,\ 1)$$

すなわち　$(m,\ n) = (1,\ 7),\ (3,\ 6),\ (9,\ 5)$　よって　**3 組**

(2) $n\{(m-1)^2+2\} = 36$ より，これを満たす自然数 $(m,\ n)$ の組は，$(m-1)^2+2$ が 36 の約数であることに注意して

m	1	2	3	5
$(m-1)^2+2$	2	3	6	18
n	18	12	6	2

よって　**4 組**

(3) 与式から

$$n = \frac{m^2+3m+6}{m^2-2m+3} = m + 2 + \frac{4m}{m^2-2m+3}$$

n は自然数であるから

$$\frac{4m}{m^2-2m+3} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (m-3)^2 \leqq 6$$

これを満たす自然数 m は　$1, 2, 3, 4, 5$

この中で $\dfrac{4m}{m^2-2m+3}$ が自然数となる m は　$1,\ 3$

よって，求める $m,\ n$ の組は次の **2 組**である．

$$(m,\ n) = (1,\ 5),\ (3,\ 4)$$

180* 方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{3w}=\dfrac{7}{3}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z,\ w)$ について考える. (北里大 改)

(1) x のとり得る値をすべて求めよ.

(2) $x=y=1$ のとき，自然数の組 $(z,\ w)$ をすべて求めよ.

(3) 自然数の組 $(x,\ y,\ z,\ w)$ をすべて求めよ.

解答 (1) 与えられた方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{3w}=\dfrac{7}{3}\cdots(*)$ から

$$\frac{7}{3}-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}\leqq\frac{1}{1}+\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1}{3\cdot1}=\frac{11}{6}$$

したがって $\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{2}$ x は自然数であるから $x=1,\ 2$

$(*)$ は，x と y の対称式から，同様に $y=1,\ 2$

(i) $x=y=1$ を $(*)$ に代入すると

$$\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{1}{3}\quad\text{ゆえに}\quad 2zw=2z+3w$$

したがって $(2z-3)(w-1)=3$

z，w は自然数であるから $(2z-3,\ w-1)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$

よって $(z,\ w)=(2,\ 4),\ (3,\ 2)$

(ii) $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ のとき，これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{5}{6}\quad\text{ゆえに}\quad 5zw=2z+3w$$

したがって $(5z-3)(5w-2)=6$

$5z-3\geqq2$，$5w-2\geqq3$ に注意して解くと $(z,\ w)=(1,\ 1)$

(i)，(ii) から x のとり得る値は $\boldsymbol{x=1,\ 2}$

(2) $x=y=1$ のとき，(1)(i) より $\boldsymbol{(z,\ w)=(2,\ 4),\ (3,\ 2)}$

(3) $x=y=2$ を代入すると $\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{3w}=\dfrac{4}{3}$

$$\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}\leqq\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1}{3\cdot1}=\frac{5}{6}<\frac{4}{3}$$

$x=y=2$ となる自然数 $(z,\ w)$ の組は存在しない.

(i)，(ii) より $\boldsymbol{(x,\ y,\ z,\ w)=(1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 3,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1,\ 1)}$

181* 以下の問いに答えよ。 (熊大理系 2020 年 1)

(1) x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0，1，4 のいずれかであることを示せ。

(2) 自然数 x，y，z が $x^2+5y=2z^2$ を満たすとき，x，y，z はすべて 5 の倍数であることを示せ。

(3) $x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しないことを示せ。

解答 (1) 法 5 について

$$\begin{array}{lll} x\equiv 0 \text{ のとき} & x^2\equiv 0 & (\mathrm{mod}\ 5) \\ x\equiv \pm 1 \text{ のとき} & x^2\equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 5) \\ x\equiv \pm 2 \text{ のとき} & x^2\equiv 4 & (\mathrm{mod}\ 5) \end{array}$$

よって，題意は成立する．

(2) $x^2+5y=2z^2$ より，法 5 について

$$(*)\quad x^2\equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8\equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2\equiv 0,\ 2z^2\equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x\equiv z\equiv 0 \pmod 5$
$x=5x',\ z=5z'$ ($x',\ z'$は整数) を $x^2+5y=2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2+5y=2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y=5(2z'^2-x'^2)$$

$y\equiv 0 \pmod 5$ であるから，x，y，z はすべて 5 の倍数である．

(3) $x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x，y，z が存在し，これら 3 数の最大公約数が 1 であるものを仮定する．
$x^2+5y^2=2z^2$ より，法 5 について

$$(*)\quad x^2\equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8\equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2\equiv 0,\ 2z^2\equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x\equiv z\equiv 0 \pmod 5$
$x=5x',\ z=5z'$ ($x',\ z'$は整数) を $x^2+5y^2=2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2+5y^2=2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2=5(2z'^2-x'^2)$$

$y^2\equiv 0 \pmod 5$ より，$y\equiv 0 \pmod 5$ であるから，$x,\ y,\ z$ が 5 を共通因数にもつことになり，仮定に反する．よって，題意は証明された．

182 (1) 10 進法の分数 $\dfrac{12}{13}$ を 10 進法の小数で表すとき，小数第 100 位の数字を求めよ．

(2) 10 進法の整数 12 と 13 をそれぞれ 3 進数で表せ．

(3) 10 進法分数 $\dfrac{12}{13}$ を 3 進法の小数で表すとき，小数第 100 位の数字を求めよ．

(成城大)

解答 (1) $10^3+1=7{\cdot}11{\cdot}13,\ 10^3-1=3^3{\cdot}37$ より

$$10^6-1=(10^3+1)(10^3-1)=3^3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}37$$

したがって，$\dfrac{12}{13}$ は周期 6 の循環小数で，小数点以下の循環部分は

$$\begin{aligned}\frac{12}{13}\times(10^6-1)&=\frac{12}{13}\times 3^3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}37\\&=12{\cdot}3^3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}37=923076\end{aligned}$$

$100=16{\cdot}6+4$ より，小数第 100 位の数字は　$\mathbf{0}$

(2) $12=3^2+3=\mathbf{110_{(3)}}$，$13=3^2+3+1=\mathbf{111_{(3)}}$

(3) $a=3$ とすると，(2) の結果から

$$\frac{12}{13}=\frac{a^2+a}{a^2+a+1}$$

$a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$ より，$\dfrac{12}{13}$ は周期 3 の循環小数で，小数点以下の循環部分は

$$\begin{aligned}\frac{a^2+a}{a^2+a+1}\times(a^3-1)&=(a^2+a)(a-1)\\&=a^3-a=(2a^2+3a)-a\\&=2a^2+2a=220\end{aligned}$$

$100=33\times 3+1$ より，小数第 100 位の数字は　$\mathbf{2}$

183 等式 $\left[\dfrac{a}{2}\right]+\left[\dfrac{2a}{3}\right]=a$ を満たす最大の整数 a は $a=\boxed{}$ である．ただし，実数 x に対して，$[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．　(早稲田大)

解答 k は整数とする．

(i) $a=6k+1$ のとき

$$3k+4k=6k+1 \quad \text{これを解いて} \quad k=1 \quad \text{ゆえに} \quad a=7$$

(ii) $a=6k+2$ のとき

$$(3k+1)+(4k+1)=6k+2 \quad \text{これを解いて} \quad k=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=2$$

(iii) $a=6k+3$ のとき

$$(3k+1)+(4k+2)=6k+3 \quad \text{これを解いて} \quad k=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=3$$

(iv) $a=6k+4$ のとき

$$(3k+2)+(4k+2)=6k+4 \quad \text{これを解いて} \quad k=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=4$$

(v) $a=6k+5$ のとき

$$(3k+2)+(4k+3)=6k+5 \quad \text{これを解いて} \quad k=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=5$$

(vi) $a=6k$ のとき

$$3k+4k=6k \quad \text{これを解いて} \quad k=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=0$$

よって，最大の整数 a は　$\boldsymbol{a=7}$

7.17　多項式の除法，恒等式，二項定理

7.17.1　Review

184 $6x^4-x^3-16x^2+5x$ を多項式 $P(x)$ で割ると，商が $3x^2-2x-4$ で余りが $5x-8$ であるとき，多項式 $P(x)$ を求めよ．

解答 題意より　$6x^4-x^3-16x^2+5x=(3x^2-2x-4)P(x)+5x-8$

したがって　$6x^4-x^3-16x^2+8=(3x^2-2x-4)P(x)$

よって　$P(x)=(6x^4-x^3-16x^2+8)\div(3x^2-2x-4)$

$=\boldsymbol{2x^2+x-2}$

185 すべての実数 x に対し，

$$x^3+2x^2+3x+4=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)+d$$

となるような定数 a，b，c，d を求めよ．　(山梨大)

解答 与えられた等式に $x=10$ を代入すると　$\boldsymbol{d=1234}$

与えられた等式の両辺を微分すると

$$3x^2+4x+3=3a(x-10)^2+2b(x-10)+c \qquad \text{(A)}$$

(A) に $x=10$ を代入すると　$\boldsymbol{c=343}$

(A) を微分すると

$$6x+4=6a(x-10)+2b \qquad \text{(B)}$$

(B) に $x=10$ を代入すると　$64=2b$　ゆえに　$\boldsymbol{b=32}$

(B) を微分すると　$6=6a$　ゆえに　$\boldsymbol{a=1}$

186 次の展開式における〔　〕内に指定された項を求めよ.

(1) $(2x-y)^6$　〔x^2y^4〕

(2) $(x+2y-3z)^4$　〔xy^2z〕

解答　(1) $\{2x+(-y)\}^6$ より，x^2y^4 の項は

$$\frac{6!}{2!4!}(2x)^2(-y)^4 = \boldsymbol{60x^2y^4}$$

(2) $\{x+2y+(-3z)\}^4$ より，xy^2z の項は

$$\frac{4!}{1!2!1!}x(2y)^2(-3z) = \boldsymbol{-144xy^2z}$$

7.17.2　Exercise

187 多項式 $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ は，x^2+3 で割ると余りは $x+3$ であり，x^2+x+2 で割ると余りは $3x+5$ である．このとき，a，b，c を求めよ．

(上智大 改)

解答　$x^2 \equiv -3,\ x^3 \equiv -3x \pmod{x^2+3}$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\ &\equiv a\cdot(-3x)+b\cdot(-3)+cx+d \qquad \pmod{x^2+3} \\ &= (-3a+c)x-3b+d \end{aligned}$$

$f(x)$ を x^2+3 で割った余りが $x+3$ であるから，係数を比較して

$$-3a+c=1,\quad -3b+d=3 \quad \text{ゆえに} \quad c=3a+1,\ \ d=3b+d \qquad (*)$$

$x^2 \equiv -x-2,\ \ x^3 \equiv -x^2-2x \equiv -(-x-2)-2x = -x+2 \pmod{x^2+x+2}$

であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\ &\equiv a\cdot(-x+2)+b\cdot(-x-2)+cx+d \qquad \pmod{x^2+3} \\ &= (-a-b+c)x+(2a-2b+d) \end{aligned}$$

$f(x)$ を x^2+x+2 で割った余りが $3x+5$ であるから，係数を比較して

$$-a-b+c=3,\quad 2a-2b+d=5$$

上式に $(*)$ を代入して整理すると

$$2a-b=2,\quad 2a+b=2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=1,\ b=0}$$

これを $(*)$ に代入して　$\boldsymbol{c=4,\ d=3}$

188* $x = 1 - \sqrt{5}$ のとき，$x^2 - 2x - \boxed{} = 0$ となり，$x^4 - 5x^3 - 14x + 3 = \boxed{}$ である．

解答 $x = 1 - \sqrt{5}$ より，$x - 1 = -\sqrt{5}$ の両辺を平方すると

$$x^2 - 2x + 1 = 5 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2x - 4 = 0$$

$x^4 - 5x^3 - 14x + 3$ を $x^2 - 2x - 4$ で割ると

$$\begin{array}{rl} & x^2 \ -3x \ \ -2 \\ \hline x^2 - 2x - 4 \ ) & x^4 \ -5x^3 \qquad -14x \ +3 \\ & x^4 \ -2x^3 \ -4x^2 \\ \hline & \quad -3x^3 \ +4x^2 \ -14x \\ & \quad -3x^3 \ +6x^2 \ +12x \\ \hline & \qquad -2x^2 \ -26x \ +3 \\ & \qquad -2x^2 \ \ +4x \ +8 \\ \hline & \qquad -30x \ -5 \end{array}$$

よって　$x^4 - 5x^3 - 14x + 3 = (x^2 - 2x - 4)(x^2 - 3x - 2) - 30x - 5$
$= -30(1 - \sqrt{5}) - 5 = \mathbf{-35 + 30\sqrt{5}}$

別解 $x - 1 = -\sqrt{5}$ の両辺を平方すると

$$(x - 1)^2 = (-\sqrt{5})^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2x - \mathbf{4} = 0$$

$x^2 = 2x + 4$ より

$$x^3 = 2x^2 + 4x = 2(2x + 4) + 4x = 8x + 8,$$
$$x^4 = 8x^2 + 8x = 8(2x + 4) + 8x = 24x + 32$$

したがって

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 14x + 3 &= (24x + 32) - 5(8x + 8) - 14x + 3 \\ &= -30x - 5 \\ &= -30(1 - \sqrt{5}) - 5 \\ &= \mathbf{-35 + 30\sqrt{5}} \end{aligned}$$

189* x について恒等式

$$\frac{x^2-x+6}{x^3-x^2-x+1}=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$$

が成立するとき，a，b，c の値を求めよ．

解答 $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$ であるから，これを両辺に掛けると

$$\begin{aligned}x^2-x+6&=a(x+1)+b(x+1)(x-1)+c(x-1)^2\\&=(b+c)x^2+(a-2c)x+a-b+c\end{aligned}$$

上式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$\begin{cases}b+c=1 & \cdots①\\ a-2c=-1 & \cdots②\\ a-b+c=6 & \cdots③\end{cases}$$

①，③ から，b を消去すると　$a+2c=7$　$\cdots④$

②，④ を解いて　$a=3,\ c=2$

$c=2$ を ① に代入すると　$b+2=1$　ゆえに　$b=-1$

よって　　$\boldsymbol{a=3,\ b=-1,\ c=2}$

190* (1) $(x^3+1)^{10}$ の展開式における x^{15} の係数は［　ア　］である．

(2) $(x-1)^{10}(x^2+x+1)^{10}$ の展開式における x^{15} の係数は［　イ　］である．

(3) $(x^2+2x+2)^{10}(x^2-2x+2)^{10}$ の展開式における x^3 の係数は［　ウ　］であり，x^{32} の係数は［　エ　］である．

解答 (1) x^{15} の項は　${}_{10}\mathrm{C}_5(x^3)^5\cdot 1^5$　よって，求める係数は　$\dfrac{10!}{5!5!}=\boldsymbol{252}$

(2) $(x-1)^{10}(x^2+x+1)^{10}=(x^3-1)^{10}$

x^{15} の項は　${}_{10}\mathrm{C}_5(x^3)^5\cdot(-1)^5$　よって，求める係数は　$\dfrac{10!}{5!5!}\cdot(-1)^5=\boldsymbol{-252}$

(3) $\begin{aligned}(x^2+2x+2)^{10}(x^2-2x+2)^{10}&=\{(x^2+2)+2x\}^{10}\{(x^2+2)-2x\}^{10}\\&=\{(x^2+2)^2-(2x)^2\}^{10}=(x^4+4)^{10}\end{aligned}$

$(x^4+4)^{10}$ の展開式における一般項は

$${}_{10}\mathrm{C}_r(x^4)^{10-r}\cdot 4^r={}_{10}\mathrm{C}_r\cdot 4^r x^{40-4r}\quad(r=0,1,2,\cdots,10)$$

$40-4r=3$ を満たす整数 r は存在しないから，求める係数は　$\boldsymbol{0}$

7.17.3 Try

191* a，b，c を定数とする．$x+y-z=0$ および $2x-2y+z+1=0$ を満たす x，y，z のすべての値に対して，$ax^2+by^2+cz^2=1$ が成立するとき，a，b，c の値を求めよ． (東京薬科大)

解答 $x+y-z=0$，$2x-2y+z+1=0$ より，x，y を z で表すと

$$x=\frac{1}{4}(z-1),\quad y=\frac{1}{4}(3z+1)$$

これらを $ax^2+by^2+cz^2=1$ に代入すると

$$\frac{a}{16}(z-1)^2+\frac{b}{16}(3z+1)^2+cz^2=1$$

z について整理すると

$$(a+9b+16c)z^2-2(a-3b)z+a+b=16$$

上式は，z に関する恒等式であるから

$$a+9b+16c=0,\quad a-3b=0,\quad a+b=16$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=12,\ b=4,\ c=-3}$

192 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とするとき，$a^4+5a^3+4a^2+4a$ の値を求めよ． (愛媛大)

解答 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=2+\sqrt{5}$，$2<\sqrt{5}<3$ より，$4<2+\sqrt{5}<5$ であるから

$$a=(2+\sqrt{5})-4=\sqrt{5}-2$$

$a+2=\sqrt{5}$ であるから，この両辺を平方すると

$$(a+2)^2=5\quad \text{整理すると}\quad a^2+4a-1=0$$

$a^4+5a^3+4a^2+4a$ を a^2+4a-1 で割った商が a^2+a+1，余りが $a+1$.

$$\begin{aligned}a^4+5a^3+4a^2+4a&=(a^2+4a-1)(a^2+a+1)+a+1=a+1\\&=(\sqrt{5}-2)+1=\boldsymbol{\sqrt{5}-1}\end{aligned}$$

193* 次の問いに答えなさい. (大分大 2010 年 2)

(1) 正の整数 n について $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ の展開式に，定数項が含まれるための n の条件を求めなさい.

(2) $\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の展開式における定数項を求めなさい.

解答 (1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ の展開式の一般項は

$$ {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = {}_n\mathrm{C}_k x^{n-2k} \quad (0 \leqq k \leqq n) $$

したがって，$n-2k=0$ より　　$\boldsymbol{n}$ **は偶数**

(2) $A=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと　$\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7 = (1+A)^7$

$(1+A)^7$ の展開式の一般項は

$$ {}_7\mathrm{C}_n 1^{7-n} A^n = {}_7\mathrm{C}_n A^n \quad (0 \leqq n \leqq 7) $$

$\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の定数項の一般項は，上式および (1) の結果から

$$ {}_7\mathrm{C}_n \cdot {}_n\mathrm{C}_k \quad (n=2k,\ k=0,1,2,3) $$

よって，求める定数項は

$$ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{3} {}_7\mathrm{C}_{2k} \cdot {}_{2k}\mathrm{C}_k &= {}_7\mathrm{C}_0 \cdot {}_0\mathrm{C}_0 + {}_7\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 + {}_7\mathrm{C}_4 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_6 \cdot {}_6\mathrm{C}_3 \\ &= 1\times 1 + 21\times 2 + 35\times 6 + 7\times 20 \\ &= \mathbf{393} \end{aligned} $$

別解 $(A+B+C)^n$ の展開式の一般項は

$$\frac{n!}{a!b!c!}A^aB^bC^c \quad (a+b+c=n)$$

したがって，$\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の展開式の一般項は

$$\frac{7!}{a!b!c}x^a1^b\left(\frac{1}{x}\right)^c=\frac{7!}{a!b!c!}x^{a-c} \quad (a+b+c=7)$$

ゆえに，定数項は $a-c=0$ のとき，すなわち $a=c$ および $a+b+c=7$ を満たす 0 以上の整数 $a,\ b,\ c$ は

$$(a,\ b,\ c)=(0,\ 7,\ 0),\ (1,\ 5,\ 1),\ (2,\ 3,\ 2),\ (3,\ 1,\ 3)$$

よって，求める定数項は

$$\frac{7!}{0!7!0!}+\frac{7!}{1!5!1!}+\frac{7!}{2!3!2!}+\frac{7!}{3!1!3!}=1+42+210+140=\mathbf{393}$$

194 x の多項式 $f(x)$，$g(x)$ について，次の 2 つの恒等式が成り立つ．

$$(x+2)f(x^2) = x^2\{f(x)+7\} - 3x - 6$$
$$g(x) = f(2x)(x^2+3) - 4x + 9$$

(1) $f(10)$ の値は$\square$である．

(2) $g(x)$ を $x+\sqrt{2}$ で割ったときの余りは$\square - \square\sqrt{\square}$である．

(慶応義塾大)

解答 $f(x)$ を n 次式とすると，第 1 式の両辺の次数を比較すると

$$1 + 2n = 2 + n \quad \text{ゆえに} \quad n = 1$$

$f(x)$ を 1 次関数 $f(x) = ax + b$ とおくと

$$(x+2)(ax^2+b) = x^2(ax+b+7) - 3x - 6$$
$$ax^3 + 2ax^2 + bx + 2b = ax^3 + (b+7)x^2 - 3x - 6$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$2a = b + 7, \quad b = -3, \quad 2b = -6$$

これを解いて $\quad a = 2,\ b = -3 \quad$ ゆえに $\quad f(x) = 2x - 3$

$f(x) = 2x - 3$ を第 2 式に代入すると

$$g(x) = (4x-3)(x^2+3) - 4x + 9$$
$$= 4x^3 - 3x^2 + 8x$$

(1) $f(10) = 2\cdot 10 - 3 = \mathbf{17}$

(2) $g(x)$ を $x+\sqrt{2}$ で割った余りは

$$g(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2})^3 - 3\cdot(-\sqrt{2})^2 + 8\cdot(-\sqrt{2})$$
$$= \mathbf{-6 - 16\sqrt{2}}$$

195* n を自然数とする．$(1+x)^n$ の展開式を利用して，次の問いに答えなさい．
(大分大 2006 年 1)

(1) ${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=127$ を満たす n の値を求めなさい．

(2) 31^{17} を 900 で割ったときの余りを求めなさい．

解答 (1) 2 項定理により

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k \qquad \cdots(*)$$

これに $x=1$ を代入することにより

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n-1$$

条件により　$2^n-1=127$　ゆえに　$2^n=2^7$　よって　$\boldsymbol{n=7}$

(2) $(*)$ に $x=30$，$n=17$ を代入すると

$$\begin{aligned}31^{17}&=\sum_{k=0}^{17}{}_{17}\mathrm{C}_k\cdot 30^k\\&=1+{}_{17}\mathrm{C}_1\cdot 30+30^2\sum_{k=2}^{17}{}_{17}\mathrm{C}_k\cdot 30^{k-2}\\&=511+900\sum_{k=2}^{17}{}_{17}\mathrm{C}_k\cdot 30^{k-2}\end{aligned}$$

よって，31^{17} を 900 で割った余りは　**511**

196 多項式 $f(x)=x^4-x^2+1$ について，以下の問に答えよ．　(早稲田大)

(1) x^6 を $f(x)$ で割った余りを求めよ．

(2) x^{2021} を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ．

(3) 自然数 n が 3 の倍数であるとき，$(x^2-1)^n-1$ が $f(x)$ で割り切れることを示せ．

解答　(1) $x^4\equiv x^2-1 \pmod{x^4-x^2+1}$ であるから

$$\begin{aligned} x^6=x^2\cdot x^4 &\equiv x^2(x^2-1)=x^4-x^2 \\ &\equiv (x^2-1)-x^2=-1 \qquad (\mathrm{mod}\ x^4-x^2+1) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} x^{2021}=(x^6)^{336}x^4x &\equiv (-1)^{336}(x^2-1)x \\ &= x^3-x \qquad \mathrm{mod}\ x^4-x^2+1 \end{aligned}$$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{x^3-x}$

(3) $x^2-1\equiv x^4 \pmod{x^4-x^2+1}$ であるから，n が 3 の倍数であるとき

$$\begin{aligned} (x^2-1)^n-1\equiv (x^4)^n-1 &\equiv \{(x^6)^2\}^{\frac{n}{3}}-1 \\ &\equiv \{(-1)^2\}^{\frac{n}{3}}-1=0 \qquad (\mathrm{mod}\ n^4-n^2+1) \end{aligned}$$

よって，題意は成立する．

7.18　等式，不等式の証明

7.18.1　Review

197 次の不等式を証明せよ．また，(1)〜(4) において，等号が成り立つのはどのようなときか．ただし，a，b，x，y は実数とする．

(1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

(2) $x^2+3y^2 \geqq 3xy$

(3) $a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b} \geqq 4$

(4) $|a|+|b| \geqq |a+b|$

(5) $m>0$，$n>0$，$x<y$ のとき，不等式 $x<\dfrac{mx+ny}{m+n}<y$

解答　(1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2 \geqq 0$ であるから

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

が成立する．また，等号が成立するのは

$$ay-bx=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{ay=bx}$$

のときである．

(2) $x^2+3y^2-3xy=\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2 \geqq 0$ であるから

$$x^2+3y^2 \geqq 3xy$$

が成立する．また，等号が成立するのは

$$x-\frac{3}{2}y=0,\ y=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=y=0}$$

のときである．

(3) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}-4=\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}-2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right) \geqq 0$ であるから

$$\frac{b}{a}+\frac{4a}{b} \geqq 4$$

が成立する．また，等号が成立するのは

$$\sqrt{\frac{b}{a}}-2\sqrt{\frac{a}{b}}=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b=2a}$$

のときである．

(4)

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2-|a+b|^2 &= |a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2\\ &= a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2\\ &= 2(|ab|-ab) \geqq 0\end{aligned}$$

よって　　$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2 \geqq 0 \iff |a|+|b| \geqq |a+b|$

また，等号が成立するのは

$$|ab|-ab=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{ab \geqq 0}$$

(5) $m>0$，$n>0$，$x<y$ より

$$\frac{mx+ny}{m+n}-x=\frac{n(y-x)}{m+n}>0,$$
$$y-\frac{mx+ny}{m+n}=\frac{m(y-x)}{m+n}>0$$

よって　$m>0$，$n>0$，$x<y$ のとき　$x<\dfrac{mx+ny}{m+n}<y$

7.18.2 Exercise

198* $x,\ y,\ z$ は実数とする．$\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{5}\ (\neq 0)$ のとき，$x:y:z=$ $\square:\square:\square$ であり，$\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=\square$ である．

解答 $\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{5}=2k$ とおくと

$$x+y=8k,\quad y+z=12k,\quad z+x=10k \qquad (*)$$

$(*)$ の辺々を加えると

$$2x+2y+2z=30k \quad \text{ゆえに} \quad x+y+z=15k$$

上の第 2 式および $(*)$ より　　$x=3k,\ \ y=5k,\ \ z=7k$ $\qquad (**)$

よって　　$\boldsymbol{x:y:z=3:5:7}$

$(**)$ より

$$\begin{aligned}\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}&=\frac{(3k+5k)(5k+7k)(7k+3k)}{(3k-5k)(5k-7k)(7k-3k)}\\&=\frac{8\cdot 12\cdot 10}{(-2)\cdot(-2)\cdot 4}=\mathbf{60}\end{aligned}$$

199 (1) 実数 $a,\ b,\ c$ が $a+b+c=5$ かつ $ab+bc+ca=4+abc$ を満たすとき，$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 つは 1 であることを示せ．　(岡山県立大)

(2) 実数 $a,\ b,\ c$ が $a+b+c=ab+bc+ca=3$ を満たすとき，$a,\ b,\ c$ はすべて 1 であることを示せ．

解答 (1) $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1$ であるから上式の右辺に $a+b+c=5$，$ab+bc+ca=4+abc$ を代入すると

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(4+abc)+5-1=0$$

よって，$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 つは 1 である．

(2)

$$\begin{aligned}(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2&=a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3\\&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&\quad-2(a+b+c)+3\end{aligned}$$

上式に $a+b+c=ab+bc+ca=3$ を代入すると

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=3^2-2\cdot3-2\cdot3+3=0$$

したがって　$a-1=0,\ b-1=0,\ c-1=0$

よって　　$a=b=c=1$

200 $a>\sqrt{2}$ を満たすとき，次の 3 つの数を小さい順に並べよ．

$$\frac{a+2}{a+1},\quad \frac{a}{2}+\frac{1}{a},\quad \sqrt{2}$$

解答 $a>\sqrt{2}$ より

$$\begin{aligned}\frac{a}{2}+\frac{1}{a}-\sqrt{2}&=\frac{a^2+2-2\sqrt{2}a}{2a}=\frac{(a-\sqrt{2})^2}{2a}>0,\\ \sqrt{2}-\frac{a+2}{a+1}&=\frac{\sqrt{2}(a+1)-(a+2)}{a+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2})}{a+1}>0\end{aligned}$$

よって，小さい順に並べると

$$\boldsymbol{\frac{a+2}{a+1}<\sqrt{2}<\frac{a}{2}+\frac{1}{a}}$$

201* $a,\ b,\ c$ を実数とするとき，次のことを示せ．　(富山県立大 改)

(1) $a \neq b$ のとき，$ab+bc+ca < a^2+b^2+c^2$ が成り立つ．

(2) $a \neq b$，$a+b+c=1$ のとき，不等式 $ab+bc+ca < \dfrac{1}{3} < a^2+b^2+c^2$ が成り立つ．

解答　(1) $a \neq b$ のとき

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} > 0$$

よって　$ab+bc+ca < a^2+b^2+c^2$

(2) (1) の結果から，$a \neq b$ のとき

$$3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = 2\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\} > 0,$$
$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) > 0$$

上の 2 式に $a+b+c=1$ を代入すると

$$3(a^2+b^2+c^2)-1 > 0, \quad 1-3(ab+bc+ca) > 0$$

よって　　$ab+bc+ca < \dfrac{1}{3} < a^2+b^2+c^2$

202* $x>0$ とする．このとき，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ は $x=$ $\boxed{}$ のとき，最小値 $\boxed{}$ をとる．

解答

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{9}{x}\right)=x^2+\frac{9}{x^2}+10$$
$$=\left(x-\frac{3}{x}\right)+16\geqq 16$$

上式において，等号が成立するのは，$x>0$ より

$$x-\frac{3}{x}=0 \quad \text{すなわち} \quad x=\sqrt{3}$$

よって，$\boldsymbol{x=\sqrt{3}}$ のとき，最小値 **16** をとる．

別解 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{9}{x}\right)=x^2+\frac{9}{x^2}+10\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{9}{x^2}}+10=16$$

上式おいて，等号が成立するのは $(x>0)$

$$x^2=\frac{9}{x^2} \quad \text{すなわち} \quad x=\sqrt{3}$$

よって，$\boldsymbol{x=\sqrt{3}}$ のとき，最小値 **16** をとる．

7.18.3 Try

203* (1) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ を展開せよ．

(2) a，b，c を 0 以上の実数とする．次の不等式が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ．　(首都大学東京)

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

解答 (1) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = \boldsymbol{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

(2) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = \dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$ より

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geqq 0 \qquad (*)$$

が成立する．また，等号が成立するのは，$x=y=z$ のときである．

(1) の結果および $(*)$ から，$x,\ y,\ z$ を 0 以上の実数とするとき

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geqq 0 \qquad (**)$$

が成立する．また，等号が成立するのは，$x=y=z$ のときである．

$(**)$ に $x=\sqrt[3]{a},\ y=\sqrt[3]{b},\ z=\sqrt[3]{c}$ を代入すると，次式が成立する．

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc} \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

また，等号が成立するのは，

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c} \quad \text{すなわち} \quad a=b=c$$

のときである．

204* (1) a，b，c が $a+b+c=1$ を満たす正の数であるとき，

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqq 8$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) a，b，c が $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=1$ を満たす正の数であるとき，$abc\geqq 8$ が成り立つことを証明せよ．

解答 (1) a，b，c は正の数で $a+b+c=1$ であるから

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)&=\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}\\&=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}\cdot\frac{a+b}{c}\\&\geqq\frac{2\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{2\sqrt{ca}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8\end{aligned}$$

(2) (1) の結論から，x，y，z は正の数で $x+y+z=1$ であるとき

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geqq 8$$

a，b，c が $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=1$ であるから，$x=\dfrac{1}{a+1}$，$y=\dfrac{1}{b+1}$，$z=\dfrac{1}{c+1}$ とすると

$$\{(a+1)-1\}\{(b+1)-1\}\{(c+1)-1\}\geqq 8\quad\text{すなわち}\quad abc\geqq 8$$

が成立する．

205 $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ はすべて正の実数である．

(1) 不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを証明せよ．

(2) (1) において等号が成り立つのはどのようなときかを示せ．

(3) $a^2+b^2+c^2=25,\ x^2+y^2+z^2=36,\ ax+by+cz=30$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ の値を求めよ．

解答 (1)

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)&-(ax+by+cz)^2\\ &=(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2\\ &\qquad -2(abxy+bcyz+cazx)\\ &=(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2cazx+a^2z^2)\\ &\qquad +(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)\\ &=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

よって　　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

(2) (1) において，等号が成り立つとき

$$bz-cy=0,\quad cx-az=0,\quad ay-bx=0$$

したがって　$\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z},\ \dfrac{c}{z}=\dfrac{a}{x},\ \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$　すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}}$

補足 (2) の解答は $\boldsymbol{a:b:c=x:y:z}$ でもよい．

(3) $a^2+b^2+c^2=25,\ x^2+y^2+z^2=36,\ ax+by+cz=30$ のとき

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=25\cdot 36-30^2=0$$

したがって，(2) の結論から $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=k$ とおくと $(k>0)$

$$a=kx,\quad b=ky,\quad c=kz\quad \text{ゆえに}\quad \frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{kx+ky+kz}{x+y+z}=k$$

であるから　　$a^2+b^2+c^2=k^2(x^2+y^2+z^2)$

$$25=k^2\cdot 36\quad \text{ゆえに}\quad k=\frac{5}{6}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{5}{6}}$$

別解　(1) $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$，$\vec{v}=(x,\ y,\ z)$ とすると　　$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \geqq (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

よって　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

(2) (1) において，等号が成立するとき，$\vec{u}//\vec{v}$ であるから

$$\boldsymbol{a:b:c=x:y:z}$$

(3) $|\vec{u}|^2=a^2+b^2+c^2=25,\ |\vec{v}|^2=x^2+y^2+z^2=36,\ \vec{u}\cdot\vec{v}=ax+by+cz=30$

したがって　　$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2=(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

$\vec{u}//\vec{v}$ であるから，$\vec{u}=k\vec{v}$ とおくと $(k>0)$

$(a,\ b,\ c)=k(x,\ y,\ z)$　ゆえに　$a^2+b^2+c^2=k^2(x^2+y^2+z^2)$

したがって　$25=36k^2$　ゆえに　$k=\dfrac{5}{6}$

$a=kx,\ b=ky,\ c=kz$ であるから

$$\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{kx+ky+kz}{x+y+z}=k=\boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

206* (1) $p>1$，$q>1$ のとき，不等式 $p+q<pq+1$ を証明せよ．

(2) $a>1$，$b>1$ のとき，$\sqrt{a+b-1}<\sqrt{a}+\sqrt{b}-1$ を証明せよ．

(3) $a>1$，$b>1$，$c>1$ のとき，不等式

$$\sqrt{a+b+c-2}<\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-1$$

を証明せよ． (福井大)

解答 (1) $p-1>0$，$q-1>0$ より

$$(p-1)(q-1)>0 \quad \text{ゆえに} \quad p+q<pq+1$$

(2) $a>1$，$b>1$ のとき

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)^2-(a+b-1)&=2(\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1)\\&=(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)>0\end{aligned}$$

$\sqrt{a+b-1}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}-1>0$ であるから

$$\sqrt{a+b-1}<\sqrt{a}+\sqrt{b}-1$$

が成立する．

(3) $a>1$，$b>1$，$c>1$ のとき，$a+b-1>0$ であるから，(2) の結論から

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b+c-2}&=\sqrt{(a+b-1)+c-1}\\&<\sqrt{a+b-1}+\sqrt{c}-1\\&<(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)+\sqrt{c}-1\end{aligned}$$

すなわち $\sqrt{a+b+c-2}<\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-2$

207 (1) $a>0,\ b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{8}{a}\right)$ の最小値は$\boxed{}$であり，このとき $ab=\boxed{}$ である．

(2) $a>1$ のとき，$\dfrac{a-1}{a^2-2a+5}$ の最大値は$\boxed{}$であり，このとき $a=\boxed{}$ である． (立命館大)

解答 (1) 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)=ab+\frac{16}{ab}+10\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}}+10=18$$

したがって，最小値は　**18**

等号が成立するとき　$ab=\dfrac{16}{ab}$　すなわち　$\boldsymbol{ab=4}$

(2) $a-1>0$ に注意すると，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{a-1}{a^2-2a+5}=\frac{a-1}{(a-1)^2+4}=\frac{1}{a-1+\dfrac{4}{a-1}}\leqq\frac{1}{2\sqrt{(a-1)\cdot\dfrac{4}{a-1}}}=\frac{1}{4}$$

等号が成立するとき　$a-1=\dfrac{4}{a-1}$　すなわち　$a=3$

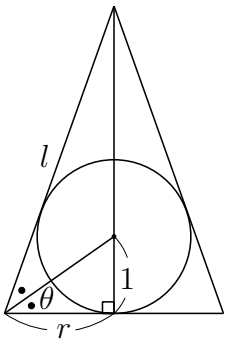
よって，$\boldsymbol{a=3}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる．

208 半径 1 の球が直円錐に内接している．この直円錐の底面の半径を r とし，表面積を S とする．　(一橋大 2014 年 4)

(1) S を r を用いて表せ．

(2) S の最小値を求めよ．

解答　(1) 直円錐の母線の長さを l とすると，右の図において



$$l\cos 2\theta = r, \quad \tan\theta = \frac{1}{r}$$

$\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ より

$$\cos 2\theta = \frac{1-\frac{1}{r^2}}{1+\frac{1}{r^2}} = \frac{r^2-1}{r^2+1}$$

したがって　　$l = \dfrac{r}{\cos 2\theta} = \dfrac{r(r^2+1)}{r^2-1}$

よって　　$S = \pi r^2 + \dfrac{1}{2}l\cdot 2\pi r$

$$= \pi r^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{r(r^2+1)}{r^2-1}\cdot 2\pi r = \boldsymbol{\frac{2\pi r^4}{r^2-1}}$$

(2) (1) の結果および相加平均・相乗平均の大小関係により

$$S = 2\pi\left(r^2 - 1 + \frac{1}{r^2-1} + 2\right)$$

$$\geqq 2\pi\left(2\sqrt{(r^2-1)\cdot\frac{1}{r^2-1}} + 2\right) = 8\pi$$

よって，求める S の最小値は　　$\boldsymbol{8\pi}$

7.19　複素数と 2 次方程式

7.19.1　Review

209 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{2-i}{1+3i}-\dfrac{i+3}{-1+2i}$

(2) $\dfrac{1-i^5}{1+i^5}+\dfrac{1-i^3}{1+i^3}$

解答　(1)

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{1+3i}-\frac{i+3}{-1+2i}&=\frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}-\frac{(i+3)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}\\&=\frac{-1-7i}{10}-\frac{-1-7i}{5}=\boldsymbol{\frac{1+7i}{10}}\end{aligned}$$

(2) $i^5=i$, $i^3=-i$ により

$$\begin{aligned}\frac{1-i^5}{1+i^5}+\frac{1-i^3}{1+i^3}&=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}\\&=\frac{(1-i)^2+(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

210 $(2+i)x+(3-2i)y=-9+20i$ を満たす実数 x, y の値を求めよ.

解答　与えられた等式の左辺を整理すると

$$(2x+3y)+(x-2y)i=-9+20i$$

$2x+3y$ および $x-2y$ は実数であるから

$$2x+3y=-9,\ x-2y=20\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{x=6,\ y=-7}$$

211 2 次方程式 $2x^2+x+2=0$ の解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $(\alpha+2)(\beta+2)$

(2) $\alpha^2+\beta^2$

(3) $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}$

解答 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{2},\ \alpha\beta=1$

(1)

$$\begin{aligned}(\alpha+2)(\beta+2)&=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4\\&=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+4=\mathbf{4}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot1=-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}&=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}\\&=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1^3}=\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}\end{aligned}$$

212 2 次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha+\dfrac{1}{\beta}$, $\beta+\dfrac{1}{\alpha}$ を解にもつ 2 次方程式で係数が最も簡単な整数であるものを求めよ．

解答 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

$x_1=\alpha+\dfrac{1}{\beta}$，$x_2=\beta+\dfrac{1}{\alpha}$ とすると

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)\\ &=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\\ &=2+2\div\frac{1}{2}=6,\\ x_1x_2&=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2\\ &=\frac{1}{2}+2+2=\frac{9}{2} \end{aligned}$$

したがって，$x_1,\ x_2$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2-6x+\frac{9}{2}=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{2x^2-12x+9=0}$$

7.19.2 Exercise

213* 等式 $(x+yi)^2=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ を満たす実数 $x,\ y$ を求めよ．ただし，i は虚数単位を表す. (山梨大)

解答 $(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$ より

$$x^2-y^2=\frac{1}{2},\quad 2xy=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (*)$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^2&=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1\end{aligned}$$

したがって　　$x^2+y^2=1$ $\qquad (**)$

$(*)$ の第 1 式と $(**)$ から　　$x^2=\dfrac{3}{4},\ \ y^2=\dfrac{1}{4}$

$(*)$ の第 2 式に注意して　　$\boldsymbol{x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ y=\pm\dfrac{1}{2}}$ **(複号同順)**

別解 $x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると

$$(x+yi)^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

また，$\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を極形式で表すと　$\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

よって，$(x+yi)^2=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ は

$$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2=1,\quad 2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad (k\text{ は整数})$$

$r>0$ および $0\leqq\theta<2\pi$ により

$$r=1,\quad \theta=\frac{\pi}{6}+k\pi\quad (k=0,\ 1)$$

したがって　$x=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right),\ \ y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right)\quad (k=0,\ 1)$

よって　　$\boldsymbol{x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ y=\pm\dfrac{1}{2}}$ **(複号同順)**

214 2 次方程式 $x^2+kx+1=0$ の 2 つの解 (重解を含む) を，ぞれぞれ 2 乗した数を解にもつ 2 次方程式が $x^2-(k+4)x+1=0$ であるとする．このとき，実数 k の値を求めよ． (甲南大)

解答 $x^2+kx+1=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-k,\quad \alpha\beta=1$$

$x^2-(k+4)x+1=0$ の解が $\alpha^2,\ \beta^2$ であるから，解と係数の関係より

$$\alpha^2+\beta^2=k+4$$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ より

$$k+4=(-k)^2-2\cdot 1\quad \text{整理すると}\quad k^2-k-6=0$$

ゆえに $(k+2)(k-3)=0$ これを解いて $\boldsymbol{k=-2,\ 3}$

215 実数 $a,\ b$ を係数とする 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が異なる 2 つの虚数解をもつ．1 つの虚数解を α とすると，他の解は $2\alpha-4+3i$ と表すことができる．このとき，$a,\ b$ の値を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

解答 実数 $a,\ b$ を係数とする 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の虚数解の 1 つが α であるとき，他の解は $\overline{\alpha}$ であるから

$$\overline{\alpha}=2\alpha-4+3i\quad \text{ゆえに}\quad 2\alpha-\overline{\alpha}=4-3i$$

$\alpha=p+qi$ とおくと ($p,\ q$ は実数)

$$2\alpha-\overline{\alpha}=2(p+qi)-(p-qi)=p+3qi$$

したがって $p+3qi=4-3i$ ゆえに $p=4,\ q=-1$

$\alpha=4-i,\ \overline{\alpha}=4+i$ であるから，$\alpha+\overline{\alpha}=8,\ \alpha\overline{\alpha}=17$

解と係数の関係により，$\alpha+\overline{\alpha}=-a,\ \alpha\overline{\alpha}=b$ であるから

$$8=-a,\ \ 17=b\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a=-8,\ b=17}$$

216 x の方程式 $x^2-(a-i)x-3+(a+1)i=0$ が実数解をもつように，実数 a の値を定めよ．

解答 実数解を r とすると

$$r^2-(a-i)r-3+(a+1)i=0 \quad \text{ゆえに} \quad r^2-ar-3+(r+a+1)i=0$$

$r^2-ar-3,\ r+a+1$ は実数であるから

$$r^2-ar-3=0, \quad r+a+1=0$$

上の第 2 式から，$r=-a-1$．これを第 1 式に代入すると

$$(-a-1)^2-a(-a-1)-3=0 \quad \text{整理すると} \quad 2a^2+3a-2=0$$

ゆえに $(a+2)(2a-1)=0$ これを解いて $\boldsymbol{a=-2,\ \dfrac{1}{2}}$

217* $x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\,i}$ のとき，$3x^3+4x^2+3x-1$ の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする． (茨城大)

解答 $x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\,i}=\frac{1+\sqrt{2}\,i}{3}$ より $3x-1=\sqrt{2}\,i$

$$(3x-1)^2=(\sqrt{2}\,i) \quad \text{整理すると} \quad 3x^2-2x+1=0$$

$3x^3+4x^2+3x-1$ を $3x^2-2x+1$ で割ると，商 $x+2$，余り $6x-3$ より

$$3x^3+4x^2+3x-1=(3x^2-2x+1)(x+2)+6x-3 \qquad (*)$$

$$\begin{array}{r} x\quad +2 \\ \hline 3x^2-2x+1\,)\,3x^3+4x^2+3x-1 \\ \underline{3x^3-2x^2\ \ +x\ \ \ } \\ 6x^2+2x-1 \\ \underline{6x^2-4x+2\ \ } \\ 6x-3 \end{array}$$

$x=\dfrac{1+\sqrt{2}\,i}{3}$，$3x^2-2x+1=0$ であるから，$(*)$ より

$$3x^3+4x^2+3x-1=6x-3=6\cdot\left(\frac{1+\sqrt{2}\,i}{3}\right)-3=\boldsymbol{-1+2\sqrt{2}\,i}$$

7.19.3 Try

218 t を定数とする 2 次方程式 $z^2-tz+t-\dfrac{1}{2}=0$ について，次の各問に答えよ．ただし，定数 t は実数とする． (宮崎大 2014 年 4)

(1) この 2 次方程式が実数解をもち，すべての解が -1 以上 1 以下であるような定数 t の値の範囲を求めよ．

(2) この 2 次方程式が 2 つの共役な虚数解 $z=x\pm yi$ (x，y は実数，i は虚数単位) をもち，$x^2+y^2\leqq 1$ を満たすような定数 t の値の範囲を求めよ．

解答 (1) $f(z)=z^2-tz+t-\dfrac{1}{2}=\left(z-\dfrac{t}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}t^2+t-\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$f\left(\frac{t}{2}\right)=-\frac{1}{4}t^2+t-\frac{1}{2},\quad f(-1)=2t+\frac{1}{2},\quad f(1)=\frac{1}{2}>0$$

$f(z)=0$ の解が $-1\leqq z\leqq 1$ であるとき，次式を満たせばよい．

$$-1\leqq\frac{t}{2}\leqq 1\cdots①,\quad f\left(\frac{t}{2}\right)\leqq 0\cdots②,\quad f(-1)\geqq 0\cdots③$$

① より　$-2\leqq t\leqq 2\cdots①'$

② より　$-\dfrac{1}{4}t^2+t-\dfrac{1}{2}\leqq 0$　ゆえに　$t\leqq 2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\leqq t\cdots②'$

③ より　$2t+\dfrac{1}{2}\geqq 0$　ゆえに　$t\geqq -\dfrac{1}{4}\cdots③'$

①′，②′，③′ を同時に満たす範囲を求めると　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}\leqq t\leqq 2-\sqrt{2}}$

(2) 2 次方程式 $z^2-tz+t-\dfrac{1}{2}=0\cdots(*)$ が虚数解をもつので

$$(-t)^2-4\cdot 1\left(t-\frac{1}{4}\right)<0\quad\text{すなわち}\quad t^2-4t+2<0$$

これを解いて　$2-\sqrt{2}<t<2+\sqrt{2}\quad\cdots④$

2 次方程式 $(*)$ の 2 解が $x\pm yi$ であるから，解と係数の関係により

$$(x+yi)(x-yi)=t-\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad x^2+y^2=t-\frac{1}{2}$$

$x^2+y^2\leqq 1$ であるから

$$t-\frac{1}{2}\leqq 1\quad\text{ゆえに}\quad t\leqq\frac{3}{2}\quad\cdots⑤$$

④，⑤ の共通範囲を求めると　$\boldsymbol{2-\sqrt{2}<t\leqq\dfrac{3}{2}}$

219* α，β を $x^2-x+1=0$ の異なる解とする．以下の問に答えよ． (三重大)

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ．

(2) $\alpha^{27}+\beta^{27}$ の値を求めよ．

(3) $\alpha^n+\beta^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の値を求めよ．

解答 (1) α, β は $x^2-x+1=0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=1$$

したがって $\qquad \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{1}=\mathbf{1}$

(2) α は $x^2-x+1=0$ の解であるから $\quad \alpha^2-\alpha+1=0$

$$\alpha^3+1=(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^3=-1$$

同様に，α は $x^2-x+1=0$ の解であるから $\quad \beta^3=-1$

よって $\qquad \alpha^{27}=(\alpha^3)^9=(-1)^9=\mathbf{-1}$,

$$\beta^{27}=(\beta^3)^9=(-1)^9=\mathbf{-1}$$

(3) 方程式 $x^2-x+1=0$ を解くと

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

α, β は方程式 $x^2-x+1=0$ の異なる解であるから

$$\begin{aligned}\alpha^n+\beta^n&=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n\\&=\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)+\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\\&=\mathbf{2\cos\frac{n\pi}{3}}\end{aligned}$$

220 n は自然数，m は整数，k，α，β は実数とする． (愛媛大)

(1) $\alpha \geqq 1$，$\beta \geqq 1$ のとき，$\alpha\beta \geqq \alpha + \beta - 1$ が成り立つことを示せ．

(2) x に関する 2 次方程式 $x^2 - mx + k = 0$ の 2 つの解を p，q とする．p が整数ならば，q と k も整数であることを示せ．

(3) x に関する 2 次方程式 $x^2 - n^2x + n = 0$ は，整数の解をもたないことを示せ．

(4) x に関する 2 次方程式 $x^2 - (n-2)^2x + n = 0$ が整数の解をもつとき，n の値とその解をすべて求めよ．

解答 (1) $\alpha - 1 \geqq 0,\ \beta - 1 \geqq 0$ であるから

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) \geqq 0 \quad \text{よって} \quad \alpha\beta \geqq \alpha + \beta - 1$$

(2) 2 次方程式 $x^2 - mx + k = 0$ の解 $p,\ q$ と係数の関係から

$$p + q = m, \quad pq = k$$

上の第 1 式より，$q = m - p$ であるから (m は整数)，p が整数のとき q は整数である．また，第 2 式より，$p,\ q$ が整数のとき，k は整数である．

(3) 2 次方程式 $x^2 - n^2x + n = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = n^2, \quad \alpha\beta = n$$

n は自然数であるから $\alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$

$\alpha,\ \beta$ が整数であると仮定すると，$\alpha \geqq 1,\ \beta \geqq 1$ であるから，(1) の結論に適用すると

$$n \geqq n^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad n(n-1) \leqq 1$$

n は自然数であるから，これを満たす n は $n = 1$

このとき，2 次方程式

$$x^2 - x + 1 = 0 \qquad \text{すなわち} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

は実数解をもたないので，整数解をもたない．

別解 2 次方程式 $x^2-n^2x+n=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=n^2,\quad \alpha\beta=n$$

n は自然数であるから，$\alpha,\ \beta$ が整数であると仮定し $(1\leqq\alpha\leqq\beta)$，n を消去すると

$$\alpha+\beta=(\alpha\beta)^2\quad \text{ゆえに}\quad \frac{\alpha}{\beta}=\alpha^2\beta-1$$

$\alpha,\ \beta$ は整数であり，$0<\dfrac{\alpha}{\beta}\leqq 1$ および上式の右辺が整数であることから

$$\frac{\alpha}{\beta}=1\quad \text{ゆえに}\quad \alpha=\beta$$

これから，2 次方程式 $x^2-n^2x+n=0$ が重解をもつから，係数について

$$D=(n^2)^2-4n=n(n^3-4)=0$$

上式を満たす自然数 n は存在しない．

よって，2 次方程式 $x^2-n^2x+n=0$ は整数の解をもたない．

(4) x に関する 2 次方程式 $x^2-(n-2)^2x+n=0$ が整数の解 $\alpha,\ \beta$ をもつとすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=(n-2)^2>0,\quad \alpha\beta=n>0$$

このとき，$\alpha\geqq 1,\ \beta\geqq 1$ であるから，(1) の結論に適用すると

$$n\geqq(n-2)^2-1\quad \text{ゆえに}\quad n(5-n)\geqq 3$$

これを満たす自然数 n は　　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$

2 次方程式 $x^2-(n-2)^2x+n=0$ の判別式 $D=(n-2)^4-4n$ について

n	1	2	3	4
D	-3	-8	-11	0

方程式の解が実数であるのは，$n=4$ のときで，2 次方程式

$$x^2-4x+4=0\quad \text{これを解いて}\quad x=2$$

よって　　$\boldsymbol{n=4}$**, 整数解** $\boldsymbol{x=2}$

別解 $f(x)=x^2-(n-2)^2x+n$ とおく．2 次方程式 $f(x)=0$ の実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=(n-2)^2,\quad \alpha\beta=n$$

n は自然数であるから，$\alpha,\ \beta$ の一方が整数であるとき，他方も整数である．また，$\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$ より，$\alpha,\ \beta$ はともに自然数である．

(i) $x=1$ を解にもつとき，$f(1)=0$ より

$$1-(n-2)^2+n=0\quad \text{ゆえに}\quad n(5-n)=3$$

これを満たす自然数 n は存在しない．

(ii) 2 以上の自然数を解にもつとき，$f(2)\geqq 0$ より

$$4-2(n-2)^2+n\geqq 0\quad \text{ゆえに}\quad (2n-1)(n-4)\leqq 0$$

これを満たす自然数 n は　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$

2 次方程式 $x^2-(n-2)^2x+n=0$ の判別式 $D=(n-2)^4-4n$ について

n	1	2	3	4
D	-3	-8	-11	0

方程式の解が実数であるのは，$n=4$ のときで，2 次方程式

$$x^2-4x+4=0\quad \text{これを解いて}\quad x=2$$

よって　　$\boldsymbol{n=4}$**, 整数解** $\boldsymbol{x=2}$

221* 実数 x と y が $x^2+xy+y^2=3$ を満たしながら動くとき，以下の問に答えよ．

(1) $t=x+y$，$s=xy$ とおくとき，t がとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $z=x^2+y^2+2x+2y$ とするとき，z がとり得る値の範囲を求めよ．また，z の最大値と最小値を与える x，y の値をそれぞれ求めよ．(西南学院大)

解答 (1) $x^2+xy+y^2=3$ より　$(x+y)^2-xy=3$

$t=x+y$，$s=xy$ を代入すると

$$t^2-s=3 \quad \text{ゆえに} \quad s=t^2-3 \quad \cdots ①$$

x, y を解とする 2 次方程式は

$$\lambda^2-(x+y)\lambda+xy=0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2-t\lambda+s=0 \qquad (*)$$

x，y は実数であるから，係数について

$$D=(-t)^2-4s \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2-4s \geqq 0 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入すると

$$t^2-4(t^2-3) \geqq 0 \quad \text{整理すると} \quad t^2-4 \leqq 0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{-2 \leqq t \leqq 2}$

(2) ① を $(*)$ に代入すると，x，y は次の 2 次方程式の解である．

$$\lambda^2-t\lambda+t^2-3=0 \quad \text{これを解いて} \quad \lambda=\frac{t\pm\sqrt{3(4-t^2)}}{2} \qquad (**)$$

$z=(x+y)^2-2xy+2(x+y)$ であるから，① および (1) の結果から

$$\begin{aligned} z &= t^2-2s+2t \\ &= t^2-2(t^2-3)+2t \\ &= -t^2+2t+6 \\ &= -(t-1)^2+7 \quad (-2 \leqq t \leqq 2) \end{aligned}$$

$(**)$ より

$t=1$，すなわち，$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,-1),\ (-1,\ 2)}$ のとき最大値 $\boldsymbol{7}$

$t=-2$，すなわち，$\boldsymbol{(x,\ y)=(-1,-1)}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-2}$

222 $x,\ y,\ a$ を実数とする．方程式 $x^2-2x+y^2=a$ に対し，次の問に答えよ．

(1) $a \geqq -1$ を示せ．

(2) $x+y$ の値のとり得る範囲を a を用いて表せ．　(津田塾大)

解答　(1) 方程式 $x^2-2x+y^2=a$ より

$$(*)\quad (x-1)^2+y^2=a+1 \quad \text{ゆえに} \quad a+1 \geqq 0 \quad \text{よって} \quad a \geqq -1$$

(2) $(*)$ は中心 $(1,\ 0)$，半径 $\sqrt{a+1}$ の円を表す．

$x+y=k$ とおくと，直線 $x+y-k=0$ がこの円と共有点をもつことから

$$\frac{|1+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leqq \sqrt{a+1} \quad \text{ゆえに} \quad |k-1| \leqq \sqrt{2(a+1)}$$

よって　$\boldsymbol{1-\sqrt{2(a+1)} \leqq x+y \leqq 1+\sqrt{2(a+1)}}$

別解　$\vec{u}=(1,\ 1)$，$\vec{v}=(x-1,\ y)$ とおくと $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqq |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ より

$$(x-1+y)^2 \leqq 2\{(x-1)^2+y^2\}=2(a+1)$$

したがって　$-\sqrt{2(a+1)} \leqq x+y-1 \leqq \sqrt{2(a+1)}$

よって　$\boldsymbol{1-\sqrt{2(a+1)} \leqq x+y \leqq 1+\sqrt{2(a+1)}}$

7.20　剰余の定理，高次方程式

7.20.1　Review

223 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $x=1+i$ を解にもつとき，実数 a，b の値と他の解をすべて求めよ．

解答 実数を係数とする 3 次方程式が $1+i$ を解をもつとき，$1-i$ もその解であり，残りの解を γ とすると，解と係数の関係から

$$(1+i)+(1-i)+\gamma=-\frac{-5}{1}\quad\text{これを解いて}\quad\gamma=3$$

また，$(1+i)+(1-i)=2$，$(1+i)(1-i)=2$ であるから，$1+i,\ 1-i,\ 3$ を解にもつ 3 次方程式は

$$(x^2-2x+2)(x-3)=0\quad\text{すなわち}\quad x^3-5x^2+8x-6=0$$

よって，係数を比較して　$\boldsymbol{a=8,\ b=-6}$，　他の解は　$\boldsymbol{1-i,\ 3}$

224 多項式 $P(x)=x^3+ax+b$ を $x-2$ で割ると余りが -6，$x+3$ で割ると余りが -16 である．このとき，実数 $a,\ b$ の値を求めよ．また，方程式 $P(x)=0$ の正の解を求めよ．　(南山大 改)

解答 剰余の定理により　$P(2)=-6,\ P(-3)=-16$

$$8+2a+b=-6,\ -27-3a+b=-16\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{a=-5,\ b=-4}$$

$P(x)=x^3-5x-4$ であるから，$P(-1)=0$ より，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち，

$$P(x)=(x+1)(x^2-x-4)$$

$P(x)=0$ を解くと　$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

よって，$P(x)=0$ の正の解は　$\boldsymbol{x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$

225 次の方程式を解け.

(1) $x^3+5x^2-2x-24=0$

(2) $2x^3-5x^2+1=0$

(3) $(x-1)(x-2)(x-3)=2\cdot3\cdot4$

(4) $x^4-5x^2+4=0$

解答 (1) $x=2$ は解であるから　$(x-2)(x^2+7x+12)=0$

$$(x-2)(x+3)(x+4)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x=2,\,-3,\,-4}$$

(2) $x=\dfrac{1}{2}$ は解であるから　$(2x-1)(x^2-2x-1)=0$

よって　　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},\ 1\pm\sqrt{2}}$

(3) $(x-3)(x-2)(x-1)=2\cdot3\cdot4$ より，$x=5$ は解である.

$$x^3-6x^2+11x-6=24 \quad \text{ゆえに} \quad x^3-6x^2+11x-30=0$$

したがって　$(x-5)(x^2-x+6)=0$　　よって　$\boldsymbol{x=5,\ \dfrac{1\pm\sqrt{23}\,i}{2}}$

(4) $(x^2-1)(x^2-4)=0$ であるから，$x^2-1=0,\ x^2-4=0$ を解いて

$$\boldsymbol{x=\pm1,\ \pm2}$$

226 ω を $x^3=1$ の虚数解の 1 つとするとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}-\omega^{30}$

(2) $(1+2\omega+\omega^2)^{99}$

解答 ω は $x^3=1$ の解であるから　$\omega^3=1$　$\cdots$①

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

ω は虚数であるから，$\omega-1\neq 0$ より　$\omega^2+\omega+1=0$　$\cdots$②

(1) ① より　$\omega^{20}=(\omega^3)^6\omega^2=\omega^2$，$\omega^{10}=(\omega^3)^3\omega=\omega$，$\omega^{30}=(\omega^3)^{10}=1$

上の 3 式および ② から

$$\begin{aligned}\omega^{20}+\omega^{10}-\omega^{30}&=\omega^2+\omega-1\\&=(\omega^2+\omega+1)-2=\mathbf{-2}\end{aligned}$$

(2) ② より　$1+2\omega+\omega^2=(\omega^2+\omega+1)+\omega=\omega$

したがって　$(1+2\omega+\omega^2)^{99}=\omega^{99}=(\omega^3)^{33}=1^{33}=\mathbf{1}$

7.20.2 Exercise

227* 多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると 5 余り，$x-2$ で割ると 7 余る．

(1) $f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りを求めよ．

(2) $f(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を $x-2$ で割ったときの余りを求めよ．

解答 (1) 剰余の定理により　$f(1)=5$，$f(2)=7$ $(*)$

$f(x)$ を 2 次式 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りは 1 次以下であるから $ax+b$ とおくと

$$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$$

上式に $x=1,\ 2$ をそれぞれ代入すると

$$f(1)=a+b,\quad f(2)=2a+b \qquad (**)$$

$(*)$ より　　$a+b=5,\quad 2a+b=7$

これを解いて　$a=2,\ b=3$　よって，求める余りは　$\boldsymbol{2x+3}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-1)(x-2)Q(x)+2x+3\\ &=(x-1)\{(x-2)Q(x)+2\}+5 \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を $g(x)$ とすると

$$g(x)=(x-2)Q(x)+2$$

よって，$g(x)$ を $x-2$ で割った余りは　　$\boldsymbol{2}$

228 多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると 2 余り，x^2+x+2 で割ると $-3x+1$ 余るとき，$P(x)$ を $(x-1)(x^2+x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．

解答 $P(x)$ を x^2+x+2 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x^2+x+2)Q(x)-3x+1$$

$Q(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を $A(x)$，余りを B とすると

$$P(x)=(x^2+x+2)\{(x-1)A(x)+B\}-3x+1 \qquad (*)$$

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 2 であるから，$P(1)=2$ より

$$4B-2=2 \quad \text{ゆえに} \quad B=1$$

これを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+x+2)\{(x-1)A(x)+1\}-3x+1 \\ &= (x^2+x+2)(x-1)A(x)+x^2-2x+3 \end{aligned}$$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{x^2-2x+3}$

229 k を実数の定数とし，

$$f(x) = x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2-k+1)x - k + 1$$

とする． (北大文系 2022 年 1)

(1) $f(k-1)$ の値を求めよ．

(2) $|k| < 2$ のとき，不等式 $f(x) \geqq 0$ を解け．

解答 (1) $f(x) = x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2-k+1)x - k + 1$ より

$$\begin{aligned} f(k-1) &= (k-1)^3 - (2k-1)(k-1)^2 + (k^2-k+1)(k-1) - k + 1 \\ &= (k-1)^2\{(k-1) - (2k-1)\} + (k-1)\{(k^2-k+1) - 1\} \\ &= -k(k-1)^2 + k(k-1)^2 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$f(x)$ は $x-k+1$ を因数にもつから

$$f(x) = (x-k+1)(x^2-kx+1)$$

$|k| < 2$ より $\quad x^2 - kx + 1 = \left(x - \dfrac{k}{2}\right)^2 + \dfrac{4-k^2}{4} > 0$

したがって，不等式 $f(x) \geqq 0$ を解くと $\quad \boldsymbol{x \geqq k-1}$

230* 3 次方程式 $x^3+px+q=0$ の 3 つの解を α，β，γ とする． (福島大)

(1) p，q を α，β，γ を用いて表せ．

(2) $\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2$ を用いて表せ．

解答 (1) 解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p,\quad \alpha\beta\gamma=-q$$

よって $\quad \boldsymbol{p=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha},\quad \boldsymbol{q=-\alpha\beta\gamma}$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\&=p^2-2\cdot(-q)\cdot 0=\boldsymbol{p^2}\end{aligned}$$

7.20.3 Try

231 3 次の整式 $P(x)$ は，次の条件 1)，2)，3) を満たしている．

1) $P(x)$ の x^3 の係数は 1 である．
2) $P(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れる．
3) $P(x)$ を $x+1$ で割った余りと，x^2-x-2 で割った余りは等しい．

このとき，次の各問に答えよ． (宮崎大 2013 年 11)

(1) $P(x)$ を求めよ．
(2) $\{P(x)\}^2$ を $(x+1)^2$ で割った余りを求めよ．

解答 (1) 3 次式 $P(x)$ の x^3 の係数が 1 で $(x-1)^2$ で割り切れるので

$$P(x)=(x-1)^2(x+a) \quad \cdots ①$$

とおける (a は定数).
$P(x)$ を x^2-x-2 で割った商を $Q(x)$ とし，余りは，$P(x)$ を $x+1$ で割った余り $P(-1)$ に等しいので，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-x-2)Q(x)+P(-1) \\ &= (x+1)(x-2)Q(x)+P(-1) \end{aligned}$$

これに $x=2$ を代入すると $\quad P(2)=P(-1) \quad \cdots ②$

①，② より $\qquad (2-1)^2(2+a)=(-1-1)^2(-1+a)$

これを解いて $\quad a=2 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{P(x)=(x-1)^2(x+2)}$

(2) (1) の結果から

$$P(x)=x^3-3x+2=(x+1)^2(x-2)+4$$

したがって

$$\begin{aligned} \{P(x)\}^2 &= \{(x+1)^2(x-2)+4\}^2 \\ &= (x+1)^4(x-2)^2+8(x+1)^2(x-2)+16 \\ &= (x+1)^2\{(x+1)^2(x-2)^2+8(x-2)\}+16 \end{aligned}$$

よって，$\{P(x)\}^2$ を $(x+1)^2$ で割った余りは $\quad \mathbf{16}$

232* $\gamma = 1 + \sqrt{3}i$ とする．ただし，i は虚数単位である．実数 a，b に対して多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8(\sqrt{3}+1)x + 16$$

で定める．このとき，以下の問いに答えよ．　　(北大文系 2009 年 1)

(1) $P(\gamma) = 0$ となるように a と b を定めよ．

(2) (1) で定めた a と b に対して，$P(x) = 0$ となる複素数 x で γ 以外のものをすべて求めよ．

解答　(1) $\gamma = 1 + \sqrt{3}i$ より　$(\gamma - 1)^2 = (\sqrt{3}i)^2$　ゆえに　$\gamma^2 - 2\gamma + 4 = 0$　$\cdots$①

また　$\gamma^3 + 8 = (\gamma+2)(\gamma^2 - 2\gamma + 4) = 0$　ゆえに　$\gamma^3 = -8$　$\cdots$②

② より　$\gamma^4 = \gamma^3 \cdot \gamma = -8\gamma$,　① より　$\gamma^2 = 2\gamma - 4$

上の結果を利用して

$$\begin{aligned} P(\gamma) &= \gamma^4 + a\gamma^3 + b\gamma^2 - 8(\sqrt{3}+1)\gamma + 16 \\ &= -8\gamma - 8a + b(2\gamma - 4) - 8(\sqrt{3}+1)\gamma + 16 \\ &= 2(b - 8 - 4\sqrt{3})\gamma - 4(2a + b - 4) \end{aligned}$$

$P(\gamma) = 0$ より　$2(b - 8 - 4\sqrt{3})\gamma - 4(2a + b - 4) = 0$　$\cdots$③

ここで，$b - 8 - 4\sqrt{3} \neq 0$ のとき，③ より

$$\gamma = \frac{2(2a + b - 4)}{b - 8 - 4\sqrt{3}}$$

このとき，上式の右辺は実数であるから，左辺 $1 + \sqrt{3}i$ に反する．

したがって，$b - 8 - 4\sqrt{3} = 0 \cdots$④ となり，これを ③ に代入すると

$$2a + b - 4 = 0 \quad \cdots ⑤$$

④，⑤ を解くと　　$\boldsymbol{a = -2(1+\sqrt{3}),\ \ b = 4(2+\sqrt{3})}$

(2) (1) の結果から

$$P(x) = x^4 - 2(1+\sqrt{3})x^3 + 4(2+\sqrt{3})x^2 - 8(1+\sqrt{3})x + 16$$

① に注意して，$P(x)$ を $x^2 - 2x + 4$ で割ることにより

$$P(x) = (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 4)$$

したがって，$P(x) = 0$ の解は　$x = 1 \pm \sqrt{3}i,\ \ \sqrt{3} \pm i$

よって，求める解は　　$\boldsymbol{x = 1 - \sqrt{3}i,\ \ \sqrt{3} \pm i}$

補足 実係数の方程式が α を解に持つとき，その共役な複素数 $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解である．本題では γ が方程式 $P(x)=0$ の解であるから，$\overline{\gamma}$ もこの方程式の解である[11]．すなわち，$P(x)$ は，

$$(x-\gamma)(x-\overline{\gamma})=x^2-(\gamma+\overline{\gamma})x+\gamma\overline{\gamma}=x^2-2x+4$$

を因数に持つ．

233* (1) 方程式 $4x^4-8x^3+11x^2-8x+4=0$ を解け．

(2) $x^{2020}+x+1$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ．

(3) 3 次方程式 $x^3-x^2-x-1=0$ の 3 つの解を α, β, γ とする．$\dfrac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}$, $\dfrac{1}{(\beta-2)(\gamma-2)}$, $\dfrac{1}{(\gamma-2)(\alpha-2)}$ を解とする 3 次方程式を求めよ．x^3 の係数は 1 とする．

解答 (1) 方程式 $4x^4-8x^3+11x^2-8x+4=0$ について，$x=0$ は解ではないから

$$4x^2-8x+11-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと $\quad 4t^2-8t+3=0$

$$(2t-1)(2t-3)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$$

(i) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき $\quad x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$

$$2x^2-x+2=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{1\pm\sqrt{15}i}{4}$$

(ii) $t=\dfrac{3}{2}$ のとき $\quad x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$

$$2x^2-3x+2=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$$

(i),(ii) より $\quad \boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{4},\ \dfrac{3\pm\sqrt{7}i}{4}}$

[11] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf 4 の補足を参照

(2) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ より

$$x^3-1\equiv 0 \pmod{x^2+x+1}$$

$x^3\equiv 1 \pmod{x^2+x+1}$ であるから

$$\begin{aligned} x^{2020}+x+1&=(x^3)^{673}x+x+1\\ &\equiv 1^{673}x+x+1=2x+1 \pmod{x^2+x+1}\end{aligned}$$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{2x+1}$

(3) α は3次方程式 $x^3-x^2-x-1=0$ の解であるから

$$\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1=0$$

$x=\alpha-2$ を解とする3次方程式は，$\alpha=x+2$ を上式に代入して

$$(x+2)^3-(x+2)^2-(x+2)-1=0$$

すなわち　　$x^3+5x^2+7x+1=0 \quad \cdots(*)$

方程式 $(*)$ は，同様に $\beta-2$, $\gamma-2$ も解にもつ．$p=\alpha-2$, $q=\beta-2$, $r=\gamma-2$ とおくと，これらは3次方程式 $(*)$ の解であるから，解と係数の関係により

$$pqr=-1$$

$(*)$ について，$x^3+5x^2+7x+1=(x-p)(x-q)(x-r)$ であるから，x を $pqrx=-x$ に置き換えると

$$\begin{aligned}(-x)^3+5(-x)^2+7(-x)+1&=(pqrx-p)(pqrx-q)(pqrx-r)\\ -(x^3-5x^2+7x-1)&=(pqr)^3\left(x-\frac{1}{qr}\right)\left(x-\frac{1}{rp}\right)\left(x-\frac{1}{pq}\right)\end{aligned}$$

よって，求める3次方程式は　　$\boldsymbol{x^3-5x^2+7x-1=0}$

京大理系 2023 年 1

整式 $x^{2023}-1$ を整式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りを求めよ．

解答　$x^4+x^3+x^2+x+1$ に関する合同式を考えると

$$x^4+x^3+x^2+x+1\equiv 0$$

したがって　　$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\equiv 0$

$x^5\equiv 1$ であるから　　$x^{2023}-1=(x^5)^{404}x^3-1\equiv x^3-1$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{x^3-1}$

234 実数 $x,\ y,\ z$ が 3 つの等式 $x+y+z=0$，$x^3+y^3+z^3=3$，$x^5+y^5+z^5=15$ を満たしている．$x^2+y^2+z^2=a$ とおくとき，次の問に答えよ．　(静岡大)

(1) $xy+yz+zx$ を a を用いて表せ.

(2) xyz の値を求めよ.

(3) a の値を求めよ.

解答　(1) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ より

$$0=a+2(xy+yz+zx)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{xy+yz+zx=-\frac{a}{2}}$$

(2) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ より

$$3-3xyz=0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{xyz=1}$$

(3) $x,\ y,\ z$ を解とする 3 次方程式は

$$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$$

すなわち　$t^3-\dfrac{a}{2}t-1=0\quad \cdots(*)$

x は方程式 $(*)$ の解であるから　$x^3=\dfrac{a}{2}x+1$

$$x^5=x^2x^3=x^2\left(\frac{a}{2}x+1\right)=\frac{a}{2}x^3+x^2$$
$$=\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}x+1\right)+x^2=x^2+\frac{a^2}{4}x+\frac{a}{2}$$

同様にして

$$y^5=y^2+\frac{a^2}{4}y+\frac{a}{2}$$
$$z^5=z^2+\frac{a^2}{4}z+\frac{a}{2}$$

これら 3 式の辺々を加えると

$$x^5+y^5+z^5=x^2+y^2+z^2+\frac{a^2}{4}(x+y+z)+\frac{3}{2}a$$
$$=a+\frac{a^2}{4}\cdot 0+\frac{3}{2}a=\frac{5}{2}a$$

したがって　$\dfrac{5}{2}a=15$　よって　$\boldsymbol{a=6}$

235 次の問に答えよ．　(佐賀大 2020 年 5)

(1) p，q を正の実数とし，正の実数 α，β が

$$\alpha - \beta = q, \quad \alpha\beta = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

を満たすとする．このとき，$\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$ は，方程式

$$x^3 + px - q = 0$$

の解であることを示せ．

(2) 3 次方程式 $x^3 + 6x - 2 = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつ．この実数解を求めよ．ただし，ただ 1 つの実数解をもつことは証明しなくてよい．

(3) 実数

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{28}{27}}}$$

は有理数である．この有理数の値を求めよ．

解答　(1) $p,\ q,\ \alpha,\ \beta$ は正の実数であるから，$\alpha\beta=\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ より　$p=3\sqrt[3]{\alpha\beta}$

$q=\alpha-\beta$ であるから，方程式 $x^3+px-q=0$ は

$$x^3+3\sqrt[3]{\alpha\beta}x-(\alpha-\beta)=0 \quad \cdots(*)$$

$x=\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$ を $(*)$ の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}(*)\text{の左辺}&=(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})^3+3\sqrt[3]{\alpha\beta}(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})-(\alpha-\beta)\\&=\alpha-3\sqrt[3]{\alpha^2\beta}+3\sqrt[3]{\alpha\beta^2}-\beta\\&\qquad\qquad+3\sqrt[3]{\alpha^2\beta}-3\sqrt[3]{\alpha\beta^2}-\alpha+\beta\\&=0\end{aligned}$$

よって，$\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$ は方程式 $x^3+px-q=0$ の解である．

(2) 3 次方程式 $x^3+6x-2=0$ を (1) の結果に適用すると，$p=6$，$q=2$ より

$$\alpha-\beta=2,\quad \alpha\beta=\left(\frac{6}{3}\right)^3=8$$

第 1 式から　$\alpha=\beta+2$　これを第 2 式に代入すると

$$(\beta+2)\beta=8 \quad \text{ゆえに} \quad (\beta-2)(\beta+4)=0$$

与えれた方程式から，$\beta>0$ に注意して　$\beta=2$　ゆえに　$\alpha=4$

求める実数解は　$\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$，すなわち，$\boldsymbol{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$

(3) $t=\sqrt[3]{1+\sqrt{\dfrac{28}{27}}}-\sqrt[3]{-1+\sqrt{\dfrac{28}{27}}}$ とし，

$$\alpha=1+\sqrt{\frac{28}{27}},\quad \beta=-1+\sqrt{\frac{28}{27}}$$

とすると

$$q=\alpha-\beta=2,\quad p=3\sqrt[3]{\alpha\beta}=3\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=1$$

(1) の結果から，t は方程式 $x^3+px-q=0$，すなわち，$x^3+x-2=0$ の解であるから

$$(x-1)(x^2+x+2)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

t は実数であるから　$t=1$　よって　求める有理数は　$\mathbf{1}$

7.21　点，直線，放物線

7.21.1　Review

236 3 点 A$(-3,\ 2)$，B$(-1, -2)$，C$(4,\ 3)$ がある．

(1) △ABC はどんな三角形か．

(2) 線分 AB，BC，CA をそれぞれ 3 : 2 に内分する点を D，E，F，1 : 3 に外分する点を P，Q，R とするとき，△ABC の重心 G と △DEF の重心 G′ と △PQR の重心 G″ は一致することを示せ．

解答　(1) A$(-3,\ 2)$，B$(-1, -2)$，C$(4,\ 3)$ より，3 辺の長さは

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB} &= \sqrt{(-1+3)^2+(-2-2)^2} = 2\sqrt{5},\\
\mathrm{BC} &= \sqrt{(4+1)^2+(3+2)^2} = 5\sqrt{2},\\
\mathrm{CA} &= \sqrt{(-3-4)^2+(2-3)^2} = 5\sqrt{2}
\end{aligned}$$

よって　**BC = CA の二等辺三角形**

(2) 3 点 A$(-3,\ 2)$，B$(-1, -2)$，C$(4,\ 3)$ を頂点とする △ABC の重心 G は

$$\left(\frac{-3+(-1)+4}{3},\ \frac{2+(-2)+3}{3}\right)\quad \text{すなわち}\quad (1,\ 0)$$

2 点 A$(-3,\ 2)$，B$(-1, -2)$ を 3 : 2 に内分する点 D は

$$\left(\frac{2\cdot(-3)+3\cdot(-1)}{3+2},\ \frac{2\cdot 2+3\cdot(-2)}{3+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(-\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

2 点 B$(-1, -2)$，C$(4,\ 3)$ を 3 : 2 に内分する点 E は

$$\left(\frac{2\cdot(-1)+3\cdot 4}{3+2},\ \frac{2\cdot(-2)+3\cdot 3}{3+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad (2,\ 1)$$

2 点 C$(4,\ 3)$，A$(-3,\ 2)$ を 3 : 2 に内分する点 F は

$$\left(\frac{2\cdot 4+3\cdot(-3)}{3+2},\ \frac{2\cdot 3+3\cdot 2}{3+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(-\frac{1}{5},\ \frac{12}{5}\right)$$

したがって，△DEF の重心 G′ は

$$\left(\frac{-\frac{9}{5}+2+\left(-\frac{1}{5}\right)}{3},\ \frac{-\frac{2}{5}+1+\frac{12}{5}}{3}\right)\quad \text{すなわち}\quad (0,\ 1)$$

2 点 A$(-3,\ 2)$，B$(-1, -2)$ を $1 : 3$ に外分する点 P は

$$\left(\frac{-3\cdot(-3)+1\cdot(-1)}{1-3},\ \frac{-3\cdot 2+1\cdot(-2)}{1-3}\right) \quad \text{すなわち} \quad (-4,\ 4)$$

2 点 B$(-1, -2)$，C$(4,\ 3)$ を $1 : 3$ に外分する点 Q は

$$\left(\frac{-3\cdot(-1)+1\cdot 4}{1-3},\ \frac{-3\cdot(-2)+1\cdot 3}{1-3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(-\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

2 点 C$(4,\ 3)$，A$(-3,\ 2)$ を $1 : 3$ に外分する点 R は

$$\left(\frac{-3\cdot 4+1\cdot(-3)}{1-3},\ \frac{-3\cdot 3+1\cdot 2}{1-3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{15}{2},\ \frac{7}{2}\right)$$

したがって，△PQR の重心 G″ は

$$\left(\frac{-4+\left(-\frac{7}{2}\right)+\frac{15}{2}}{3},\ \frac{4+\left(-\frac{9}{2}\right)+\frac{7}{2}}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad (0,\ 1)$$

以上の結果から，3 点 G，G′，G″ は一致する．

237 次の直線の方程式を求めよ．

(1) 点 $(1, -2)$ を通り，直線 $x+2y-1=0$ に平行な直線と垂直な直線

(2) 2 点 A$(2,\ 4)$，B$(-4,\ 6)$ を結ぶ線分の垂直二等分線

解答 (1) 点 $(1, -2)$ を通り，直線 $x+2y-1=0$ に平行な直線は

$$(x-1)+2(y+2)=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x+2y+3=0}$$

点 $(1, -2)$ を通り，直線 $x+2y-1=0$ に垂直な直線は

$$-2(x-1)+1(y+2)=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{-2x+y+4=0}$$

(2) 2 点 A$(2,\ 4)$，B$(-4,\ 6)$ の中点 M は $(-1,\ 5)$

2 点 A$(2,\ 4)$，B$(-4,\ 6)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{6-4}{-4-2}=-\frac{1}{3}$$

直線 AB に垂直で，点 M$(-1,\ 5)$ を通る直線は

$$y-5=3(x+1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{3x-y+8=0}$$

238 2 直線 $3x+4y-6=0\cdots$①，$x-y-1=0\cdots$② について

(1) 直線 ① と点 $(1,\ 2)$ との距離を求めよ．

(2) 2 直線 ①，② の交点と点 $(0,\ 4)$ を通る直線の方程式を求めよ．

解答 (1) 直線 $3x+4y-6=0\cdots$① と点 $(1,\ 2)$ の距離は

$$\frac{|3\cdot 1+4\cdot 2-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\mathbf{1}$$

(2) k を定数とすると，直線

$$3x+4y-6+k(x-y-1)=0 \qquad (*)$$

は ① と ② の交点を通る．これが点 $(0,\ 4)$ を通るから

$$10-5k=0 \quad \text{これを解いて} \quad k=2$$

これを $(*)$ に代入すると

$$3x+4y-6+2(x-y-1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{5x+2y-8=0}$$

7.21.2 Exercise

239* 3 直線 $l_1 : (a+2)x+(3a-2)y-7=0$，$l_2 : x-y+3a=0$，$l_3 : 2x+y-6a=0$ がある．

(1) a の値にかかわらず l_1 が通る定点の座標を求めよ．

(2) l_1 と l_2 が平行になる a の値と，l_1 と l_2 が垂直になる a の値を求めよ．

(3) 3 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3$ が三角形をつくらないような a の値を求めよ．

解答 (1) $(a+2)x+(3a-2)y-7=0$ より

$$a(x+3y)+2x-2y-7=0$$

上式が a の値に関らず成立するとき

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x-2y-7=0 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{21}{8},\ \ y=-\frac{7}{8}$$

よって，求める定点は $\quad \left(\boldsymbol{\frac{21}{8}, -\frac{7}{8}}\right)$

(2) $l_1 : (a+2)x+(3a-2)y-7=0$，$l_2 : x-y+3a=0$ の法線ベクトルをそれぞれ

$$\vec{n}_1=(a+2,\ 3a-2), \quad \vec{n}_2=(1,-1)$$

とする．

- $l_1 /\!/ l_2$ のとき，$\vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$ であるから

$$(a+2)\cdot(-1)-(3a-2)\cdot 1=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=0}$$

- $l_1 \perp l_2$ のとき，$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ であるから

$$(a+2)\cdot 1+(3a-2)\cdot(-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=2}$$

(3) 3 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3$ が三角形をつくらないのは，次の (i)〜(iii) の場合である．

(i) $l_1 /\!/ l_2$　　(ii) $l_1 /\!/ l_3$　　(iii) 3 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3$ が 1 点で交わる

(i) $l_1 /\!/ l_2$ のとき，(2) の結果から　$a = 0$

(ii) $l_1 /\!/ l_3$ のとき，$l_3 : 2x + y - 6a = 0$ の法線ベクトルを $\vec{n}_3 = (2,\ 1)$ とおくと，$\vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_3$ であるから

$$(a+2)\cdot 1 - (3a-2)\cdot 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{6}{5}$$

(iii) 3 直線 $l_1,\ l_2,\ l_3$ が 1 点で交わるとき，l_2 と l_3 の交点は

$$\begin{cases} x - y + 3a = 0 \\ 2x + y - 6a = 0 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad x = a,\ y = 4a$$

$l_1 : (a+2)x + (3a-2)y - 7 = 0$ が点 $(a,\ 4a)$ を通るから

$$(a+2)\cdot a + (3a-2)\cdot 4a - 7 = 0 \quad \text{整理すると} \quad 13a^2 - 6a - 7 = 0$$

ゆえに　$(a-1)(13a+7) = 0$　これを解いて　$a = 1, -\dfrac{7}{13}$

(i)〜(iii) から　$\boldsymbol{a = -\dfrac{7}{13},\ 0,\ 1,\ \dfrac{6}{5}}$

240 (1) 座標平面上の3点 A$(-6,\ 3)$，B$(-4,-1)$，C$(3,\ 6)$ を頂点とする △ABC の外接円の中心の座標と半径を求めよ．

(2) 座標平面上の3点 A$(1,\ 0)$，B$(4,\ 0)$，C$(1,\ 4)$ を頂点とする △ABC の内接円の中心の座標と半径を求めよ．

解答 (1) 外接円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく．3点 A$(-6,\ 3)$，B$(-4,-1)$，C$(3,\ 6)$ を通るから

$$\begin{cases} -6l+3m+n+45=0 \\ -4l-m+n+17=0 \\ 3l+6l+n+45=0 \end{cases}$$

これを解いて　$l=2,\ m=-6,\ n=-15$

したがって，外接円の方程式は　$x^2+y^2+2x-6y-15=0$

$$(x+1)^2+(y-3)^2=25$$

よって，外接円は中心 **$(-1,\ 3)$**，半径 **5** の円．

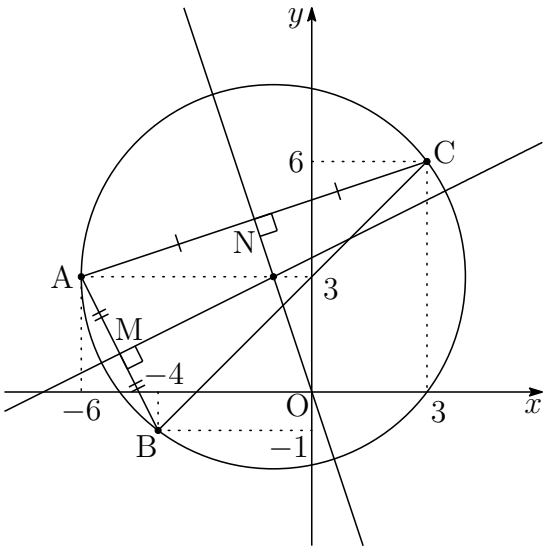
別解 辺 AB の垂直二等分線は，AB の中点 M$(-5,\ 1)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線

$$y-1=\frac{1}{2}(x+5)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\quad \cdots ①$$

辺 AC の垂直二等分線は，AC の中点 $\mathrm{N}\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$ を通り，傾き -3 の直線

$$y-\frac{9}{2}=-3\left(x+\frac{3}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad y=-3x\quad \cdots ②$$

外心は ①，② を解いて **$(-1,\ 3)$**，半径は2点 $(-1,\ 3)$，$(-6,\ 3)$ の距離 **5**



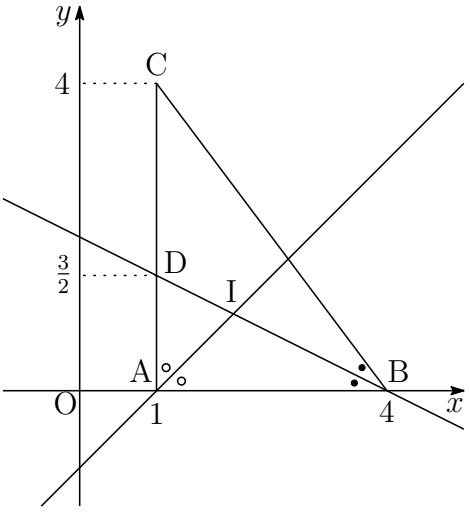
(2) AB = 3，BC $= \sqrt{3^2+4^2} = 5$ より，∠B の二等分線と辺 AC の交点を D とすると，D は辺 AC を 3 : 5 に内分する点であるから

$$\left(1,\ \frac{5\cdot 0+3\cdot 4}{3+5}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{D}\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$$

AB : AD $= 3 : \dfrac{3}{2} = 2 : 1$ より，内心 I は BD を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\left(\frac{1\cdot 4+2\cdot 1}{2+1},\ \frac{1\cdot 0+2\cdot\frac{3}{2}}{2+1}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{I}\mathbf{(2,\ 1)}$$

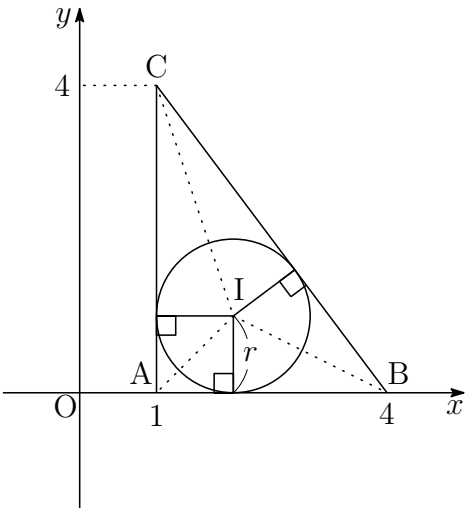
内接円は x 軸に接するから，その半径は　**1**



別解 内接円の半径を r とすると，△IAB + △IBC + △ICA = △ABC より

$$\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})r = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2}(3+5+4)r = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$$

これを解いて　$r = 1$　内心は　$(1+1,\ 1)$　すなわち　**(2, 1)**



241* 直線 $l : y = \dfrac{1}{2}x + 1$ と 2 点 A(1, 4)，B(5, 6) がある．次の問に答えよ．(富山大)

(1) 直線 l に関して，点 A と対称な点 C の座標を求めよ．

(2) 直線 l 上の点 P で，AP + PB を最小にするものの座標を求めよ．

解答 (1) C$(p,\ q)$ とおくと，線分 AC の中点 M$\left(\dfrac{1+p}{2},\ \dfrac{4+q}{2}\right)$ が直線 l 上にあるから

$$\frac{4+q}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+p}{2} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad p - 2q = 3 \quad \cdots ①$$

また，AC$\perp l$ より

$$\frac{q-4}{p-1}\cdot\frac{1}{2} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad 2p + q = 6 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$p = 3,\ q = 0$　よって　C の座標は　$\mathbf{(3,\ 0)}$

(2) AP = CP であるから

$$\mathrm{AP} + \mathrm{PB} = \mathrm{CP} + \mathrm{PB} \geqq \mathrm{BC}$$

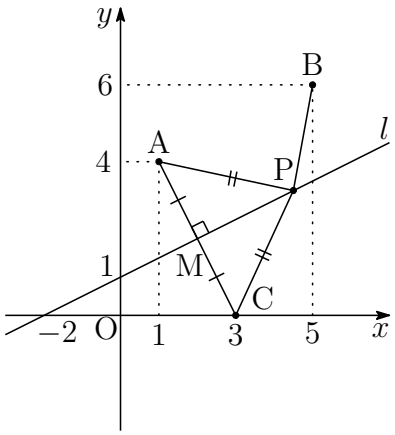
上式において，等号が成立するのは，P が直線 BC 上にあるときである．このとき，AP + PB は最小となる．直線 BC の方程式は

$$y - 0 = \frac{6-0}{5-3}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x - 9$$

この直線と l の交点が P であるから，連立方程式

$$\begin{cases} y = 3x - 9 \\ y = \dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

これを解いて　$\mathrm{P}\mathbf{(4,\ 3)}$



7.21.3 Try

242* 2 次関数 $y=-x^2+2x+4$ $(-2 \leqq x \leqq 3)$ の表す曲線において，$x=-2$，$x=3$ での端点をそれぞれ A，B とする．また，点 C をこの曲線上の点とする．

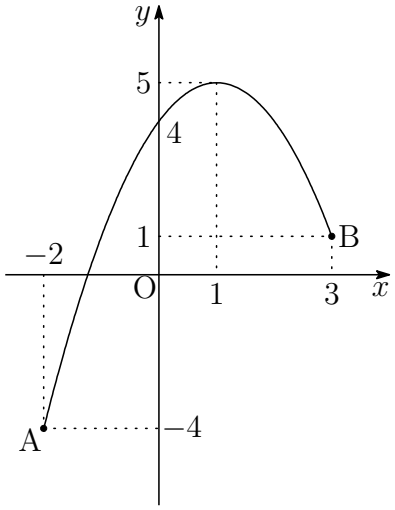
(1) この関数のグラフをかけ． (名古屋市立大)

(2) △ABC の面積が 15 となるとき，点 C の座標を求めよ．

(3) △ABC の面積が最大となるとき，点 C の座標を求めよ．

(4) △ABC が AC = BC の二等辺三角形となるとき，点 C の座標を求めよ．

解答 (1) $y=-(x-1)^2+5$ より，グラフの概形は次のようになる．



(2) A$(-2,-4)$，B$(3,\ 1)$，C$(t,-t^2+2t+4)$ とすると $(-2 \leqq t \leqq 3)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,\ 5),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t+2,-t^2+2t+8)$$

$-2 \leqq t \leqq 3$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}|5(-t^2+2t+8)-5(t+2)| \\ &= \frac{5}{2}|-t^2+t+6| = \frac{5}{2}|-(t+2)(t-3)| \\ &= -\frac{5}{2}(t+2)(t-3) \qquad (*)\end{aligned}$$

△ABC = 15 のとき

$$-\frac{5}{2}(t+2)(t-3)=15 \quad \text{整理すると} \quad t^2-t=0$$

これを解いて $t=0,\ 1$ よって，C の座標は **(0, 4), (1, 5)**

(3) $(*)$ より　$\triangle \mathrm{ABC} = -\dfrac{5}{2}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{125}{8}$

$\triangle$ABC が最小となるのは　$t = \dfrac{1}{2}$　　よって C $\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}, \boldsymbol{\dfrac{19}{4}}\right)$

(4) 線分 AB の垂直二等分線は，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ を通り，傾き -1 の直線

$$y + \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -x - 1$$

これと $y = -x^2 + 2x + 4$ から y を消去すると

$$-x^2 + 2x + 4 = -x - 1 \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 3x - 5 = 0$$

$-2 \leqq x \leqq 3$ に注意して解くと　$x = \dfrac{3 - \sqrt{29}}{2}$

よって，点 C の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}}, \boldsymbol{\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}}\right)$

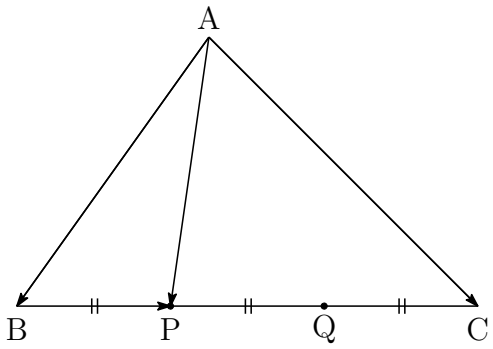
243 △ABC において，辺 BC を 3 等分する点 P，Q を BP = PQ = QC となるようにとる．このとき，次の関係式が成り立つことを証明せよ．

$$2AB^2 + AC^2 = 3(AP^2 + 2BP^2)$$ (福島大)

解答 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP}$ より

$$\begin{aligned} 2|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 &= 2|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP}|^2 + |\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP}|^2 \\ &= 3(|\overrightarrow{AP}|^2 + 2|\overrightarrow{BP}|^2) \end{aligned}$$

よって　　$2AB^2 + AC^2 = 3(AP^2 + 2BP^2)$



244* 放物線 $y = x^2 - 6x + 10$ と直線 $y = 3x + k$ が 2 点 P，Q で交わり，2 点 P，Q 間の距離が $5\sqrt{10}$ であるとき，定数 k の値を求めよ．(滋賀大)

解答 $y = x^2 - 6x + 10$ と $y = 3x + k$ から y を消去して整理すると

$$x^2 - 9x + 10 - k = 0 \quad \text{これを解くと} \quad x = \frac{9 \pm \sqrt{4k + 41}}{2}$$

2 つの交点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

$$\beta - \alpha = \sqrt{4k + 41} \quad \text{ゆえに} \quad (\beta - \alpha)^2 = 4k + 41 \qquad (*)$$

2 点 P，Q の座標は $(\alpha,\ 3\alpha + k)$，$(\beta,\ 3\beta + k)$ であるから

$$\mathrm{PQ}^2 = (\beta - \alpha)^2 + (3\beta - 3\alpha)^2 = 10(\beta - \alpha)^2$$

$\mathrm{PQ}^2 = (5\sqrt{10})^2 = 250$ より

$$10(\beta - \alpha)^2 = 250 \quad \text{ゆえに} \quad (\beta - \alpha)^2 = 25 \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$4k + 41 = 25$　よって　$\boldsymbol{k = -4}$

245 3 直線 $7x+y-5=0\cdots$①，$x+4y+7=0\cdots$②，$2x-y+5=0\cdots$③ に対して，① と ② の交点を A，② と ③ の交点を B，③ と ① の交点を C とする．
(福島大 改)

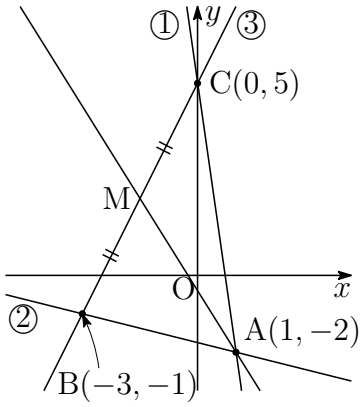
(1) A を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ．

(2) 直線 ③ 上の点 $\mathrm{D}\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ．

(3) A を通り，B と C から等しい距離にある直線の方程式を求めよ．

解答 (1) ①，② を解くと，交点 A は $(1,-2)$
②，③ を解くと，交点 B は $(-3,-1)$
③，① を解くと，交点 C は $(0,\ 5)$
2 点 B，C の中点を M とすると $\mathrm{M}\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$
求める直線は，2 点 $\mathrm{A}(1,-2)$，$\mathrm{M}\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$ を通る直線であるから

$$y-(-2)=\frac{2-(-2)}{-\frac{3}{2}-1}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{8x+5y+2=0}$$



(2) 直線 DA の傾きは $\dfrac{-2-0}{1-\left(-\dfrac{5}{2}\right)}=-\dfrac{4}{7}$

点 $\mathrm{M}\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$ を通り，直線 DA に平行な直線は

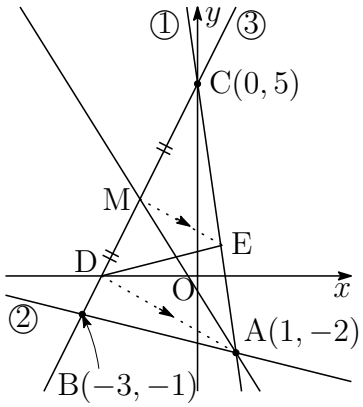
$$y-2=-\frac{4}{7}\left(x+\frac{3}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{4}{7}x+\frac{8}{7}$$

この直線と直線 $7x+y-5=0\cdots$① との交点を E とすると

$$\mathrm{E}\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

△AME ≡ △DME であるから，求める直線は，直線 DE である．

$$y=\frac{\frac{4}{5}-0}{\frac{3}{5}-\left(-\frac{5}{2}\right)}\left(x+\frac{5}{2}\right)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{8x-31y+20=0}$$



(3) 2 点 B，C からそれぞれ直線 AM に引いた垂線の長さは等しいから，求める直線の 1 つは (1) で求めた直線 AM である．また，点 A を通り，直線 BC に平行な直線

$$y-(-2)=2(x-1)\quad \text{すなわち}\quad 2x-y-4=0$$

も求める直線である．

よって　　$\boldsymbol{8x+5y+2=0,\ 2x-y-4=0}$

246* $ax^2-xy-y^2+10x+2y+8=0$ $(a\neq 0)$ が 2 直線を表すとき(神戸女子大 改)

(1) a の値を求めよ.

(2) 2 直線の方程式を求めよ.

(3) この 2 直線と点 $\mathrm{A}(0,-2)$ を通る直線 l とで囲まれる図形の面積が 18 のとき，直線 l の方程式を求めよ.

解答 (1) 与えられた方程式から　$y^2+(x-2)y=ax^2+10x+8$

$$4y^2+4(x-2)y=4ax^2+40x+32$$
$$4y^2+4(x-2)y+(x-2)^2=4ax^2+40x+32+(x-2)^2$$
$$(x+2y-2)^2=(4a+1)x^2+36x+36$$

上の方程式は，2 直線を表すから，右辺の係数について

$$D/4=18^2-(4a+1)\cdot 36=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=2}$$

(2) (1) の結果から　$(x+2y-2)=9x^2+36x+36$

$$(x+2y-2)^2=9(x+2)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x+2y-2\pm 3(x+2)=0$$

よって　　$\boldsymbol{2x+y+2=0,\ x-y+4=0}$

(3) (2) で求めた 2 直線を $2x+y+2=0\cdots$①, $x-y+4=0\cdots$② とする．① は点 $\mathrm{A}(0,-2)$ を通る．① と ② の交点を $\mathrm{B}(-2,\ 2)$ とする．l と ② の交点を $\mathrm{C}(t,\ t+4)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 4), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t,\ t+6)$$

したがって

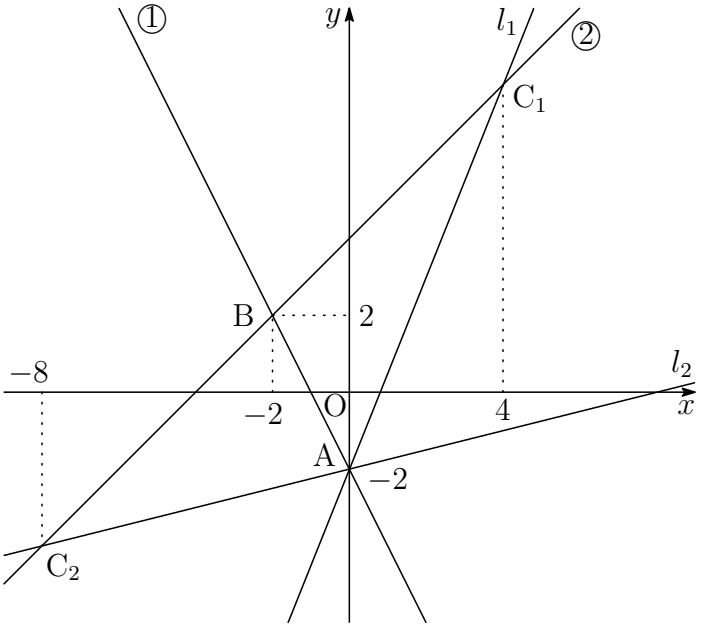
$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|-2(t+6)-4t|=|3t+6|=18$$

これを解いて　$t=4,-8$

ゆえに，C の座標は　$(4,\ 8),\ (-8,-4)$

2 点 A，C を通る直線 l の傾きは　$\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{4}$

よって，l の方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{5}{2}x-2,\ \ y=\dfrac{1}{4}x-2}$


①
y
l_1
②
C_1
B
2
-8
l_2
-2
O
4
x
A
-2
C_2

247 3 直線 $l_1 : 3x + 4y = 10$，$l_2 : 4x - 3y = 10$，$l_3 : 12x + 5y = -26$ で囲まれた三角形 T を考える．　(岩手県立大 改)

(1) l_1 と l_2 のなす角を 2 等分する直線の方程式をすべて求めよ．

(2) l_2 と l_3 のなす角を 2 等分する直線の中で，T の内部を通る直線の方程式を求めよ．

(3) T の内接円の中心の座標と半径を求めよ．

解答　(1) $l_1,\ l_2$ の角の二等分線上の点 $(x,\ y)$ から直線 $l_1,\ l_2$ までの距離は等しいから

$$\frac{|3x + 4y - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x - 3y - 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

したがって　$3x + 4y - 10 = \pm(4x - 3y - 10)$

よって　　$\boldsymbol{x - 7y = 0,\ 7x + y - 20 = 0}$

(2) $l_1,\ l_2,\ l_3$ から等しい距離 r にある点を $(a,\ b)$ とすると

$$\frac{|3a + 4b - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4a - 3b - 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|12a + 5b - 26|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \qquad (*)$$

これを満たす点 $(a,\ b)$，すなわち，T の内心は　$(0,\ 0)$

$l_2,\ l_3$ の角の二等分線上の点 $(x,\ y)$ から直線 $l_2,\ l_3$ までの距離は等しいから

$$\frac{|4x - 3y - 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|12x + 5y + 26|}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$$

したがって　$13(4x - 3y - 10) = \pm 5(12x + 5y + 26)$
このうち，内心 $(0,\ 0)$ を通るのは

$$13(4x - 3y - 10) = -5(12x + 5y + 26) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{8x - y = 0}$$

(3) 求める半径 r は，(2) で求めた内心 $(0,\ 0)$ を $(a,\ b)$ に代入して　$r = 2$

よって，T の内接円の中心は $\boldsymbol{(0,\ 0)}$，半径 $\boldsymbol{2}$

7.22　円

7.22.1　Review

248 次の方程式を求めよ.

(1) 点 $(2,\ 3)$ を中心として直線 $4x-3y+11=0$ に接する円

(2) 3 点 $(0,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(6,-7)$ を通る円

(3) 点 $(-2,\ 1)$ を通り，x 軸，y 軸に接する円

解答　(1) 点 $(2,\ 3)$ と直線 $4x-3y+11=0$ との距離 d は

$$d=\frac{|4\cdot 2-3\cdot 3+11|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$$

円の半径は 2 であるから，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-3)^2=4}$$

(2) 求める円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおく.
これが 3 点 $(0,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(6,-7)$ を通るから

$$\begin{cases} b+c+1=0 \\ 3a+2b+c+13=0 \\ 6a-7b+c+85=0 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad \begin{cases} a=-6 \\ b=6 \\ c=-7 \end{cases}$$

よって　　$\boldsymbol{x^2+y^2-6x+6y-7=0}$

(3) 円の半径を r とすると，円の中心は第 2 象限にあるから，中心 $(-r,\ r)$ より，その方程式を

$$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2 \qquad (*)$$

とおける．これが点 $(-2,\ 1)$ を通るから

$$(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2 \quad \text{ゆえに} \quad r^2-6r+5=0$$

したがって　$(r-1)(r-5)=0$　これを解いて　$r=1,\ 5$

よって，求める円の方程式は，$(*)$ より

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ \ (x+5)^2+(y-5)^2=25$$

249 直線 $2x+y-k=0$ と円 $x^2+y^2=25$ が異なる 2 点で交わるとき，実数 k の値の範囲を求めよ．

解答 円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $2x+y-k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

円 $x^2+y^2=25$ の半径 r は　$r=5$

このとき，$d<r$ であるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<5 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-5\sqrt{5}<k<5\sqrt{5}}$$

250 円 $x^2+y^2=25$ において，次の条件を満たす接線の方程式を求めよ．

(1) 点 $(3,\ 4)$ における接線

(2) 点 $(-1,\ 7)$ を通る接線

解答 (1) 点 $(3,\ 4)$ における接線は　$\boldsymbol{3x+4y=25}$

(2) 点 $(-1,\ 7)$ を極とする極線の方程式は　$-x+7y=25$

極線と円の共有点は

$$\begin{cases} -x+7y=25 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

を解いて　$(3,\ 4),\ (-4,\ 3)$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{3x+4y=25,\ -4x+2y=25}$$

7.22.2 Exercise

251* 方程式 $x^2+2mx+y^2-2(m+1)y+3m^2-3m+5=0$ は円を表す.

(1) m の値の範囲を求めよ.

(2) この円の半径の最大値とそのときの m の値を求めよ. (福岡大 改)

解答 (1) 方程式 $x^2+2mx+y^2-2(m+1)y+3m^2-3m+5=0$ を変形すると

$$(x+m)^2+(y-m-1)^2=-m^2+5m-4 \qquad (*)$$

これが円を表すとき

$$-m^2+5m-4>0 \quad \text{ゆえに} \quad (m-1)(m-4)<0$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{1<m<4}$

(2) 円の半径を r とすると，$(*)$ より

$$r^2=-m^2+5m-4=-\left(m-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

r^2 は $m=\dfrac{5}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{9}{4}$ $\quad$ よって $\quad r$ は $\boldsymbol{m=\dfrac{5}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

252* 円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点 P，Q で交わるとき

(1) 実数 k の値の範囲を求めよ．

(2) 線分 PQ の長さが $\sqrt{6}$ となるような k の値を求めよ．

解答 (1) 円 $x^2+y^2=2$ と $y=x+k$ から y を消去すると

$$x^2+(x+k)^2=2 \quad \text{整理すると} \quad 2x^2+2kx+k^2-2=0$$

このとき，係数について

$$D/4=k^2-2\cdot(k^2-2)=-(k^2-4)>0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{-2<k<2}$

別解 円 $x^2+y^2=2$ の中心から直線 $x-y+k=0$ までの距離を d とすると

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

円 $x^2+y^2=2$ の半径 r は　　$r=\sqrt{2}$

円 $x^2+y^2=2$ と直線 $x-y+k=0$ が異なる 2 点で交わるから，$d<r$ より

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-2<k<2}$$

(2) 円の半径を r，円の中心から直線 $x-y+k=0$ までの距離を d とすると

$$\mathrm{PQ}=2\sqrt{r^2-d^2}$$

これに $\mathrm{PQ}=\sqrt{6}$，$r=\sqrt{2}$，$d=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$ を代入すると

$$\sqrt{6}=2\sqrt{2-\frac{k^2}{2}} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=\pm 1}$$

253 2つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$，$C_2 : x^2 + y^2 + 8x - 6y + 24 = 0$ がある．

(1) 円 C_1 に円 C_2 が外接するとき，r の値を求めよ．

(2) 円 C_1 と円 C_2 が異なる2点で交わるとき，r の値の範囲を求めよ．

(3) $r = 2$ とする．点Pが円 C_1 上を動き，点Qが円 C_2 上を動くとき，線分PQの長さの最大値，最小値を求めよ．

解答 (1) C_2 を変形すると　$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 1$

$C_1 : x^2 + y^2 = r^2$ の中心と C_2 の中心間の距離を d とすると

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

C_1 と C_2 が外接するから，$r + 1 = d$ より

$$r + 1 = 5 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{r = 4}$$

(2) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるから，$|r-1| < d < r+1$ より

$$|r-1| < 5 < r+1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{4 < r < 6}$$

(3) $d = 5$，$r = 2$ より，$1 + r < d$ であるから，C_1，C_2 は互いに外部にある．

このとき，$d - (1+r) \leqq \mathrm{PQ} \leqq d + 1 + r$ より　$2 \leqq \mathrm{PQ} \leqq 8$

よって　PQの最大値 **8**，PQの最小値 **2**

254* 2 つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = 25$，$C_2 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 2$ について

(1) C_1，C_2 の両方の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ．

(2) C_1，C_2 の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ．

(3) C_2，C_2 の 2 つの交点を通り，点 $(3,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ．

解答 (1) 求める直線は C_1 と C_2 の中心を通る直線，すなわち，2 点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 3)$ を通る直線の方程式であるから

$$y - 0 = \frac{3-0}{4-0}(x-0) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{3}{4}x}$$

(2) $C_1 : x^2 + y^2 - 25 = 0$，$C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0$
k を実数とする．C_1，C_2 の 2 つの交点を通る図形の方程式は

$$k(x^2 + y^2 - 25) + x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0 \qquad (*)$$

整理すると

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 - 8x - 6y - 25k + 23 = 0$$

上式が直線を表すとき，$k + 1 = 0$，すなわち，$k = -1$ であるから

$$-8x - 6y + 48 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{4x + 3y - 24 = 0}$$

(3) $(*)$ が点 $(3,\ 1)$ を通るとき

$$-15k + 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{1}{5}$$

これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{1}{5}(x^2 + y^2 - 25) + x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0$$

よって $\qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x - 5y + 15 = 0}$

7.22.3 Try

255* 円 $C_1 : x^2+y^2-r=0$ と円 $C_2 : x^2-10x+y^2+21=0$ について，以下の問に答えよ．ただし，r は正の定数とする． (中央大 改)

(1) 円 C_1 と円 C_2 が接するとき，r の値を求めよ．

(2) $r=1$ とする．円 C_1 と円 C_2 の両方に接する直線の方程式をすべて求めよ．

解答 (1) $C_1 : x^2+y^2=(\sqrt{r})^2,\ C_2 : (x-5)^2+y^2=2^2$

C_1，C_2 の中心間の距離が 5 で，半径がそれぞれ $\sqrt{r},\ 2$ であるから

$$5=|\sqrt{r}\pm 2| \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{r=9,\ 49}$$

(2) C_1 上の接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると $\quad a^2+b^2=1\cdots①$

C_1 上の点 P における接線 l は $\quad l : ax+by-1=0$

l と C_2 の中心 $(5,\ 0)$ までの距離が 2 であるから

$$\frac{|5a-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \quad \text{ゆえに} \quad |5a-1|=2$$

これを解いて $\quad a=\dfrac{3}{5},-\dfrac{1}{5}$

① により，$a=\dfrac{3}{5}$ のとき $b=\pm\dfrac{4}{5}$，$\quad a=-\dfrac{1}{5}$ のとき $b=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

したがって，l の方程式は

$$\frac{3}{5}x\pm\frac{4}{5}y=1,\quad -\frac{1}{5}x\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}y=1$$

よって $\quad \boldsymbol{3x\pm 4y=5,\ -x\pm 2\sqrt{6}y=5}$

256* 座標平面上に中心が $(2,\ 2)$ で半径が 1 の円 C と，原点を通り傾きが m の直線 l がある． (お茶の水女子大)

(1) 円 C と直線 l が異なる 2 点で交わるための m の値の範囲を求めよ．

(2) 円 C と直線 l の 2 つの共有点と円 C の中心とでできる三角形の面積が最大となるような m の値を求めよ．

解答 (1) 直線 $l : mx - y = 0$ と点 $(2,\ 2)$ の距離について

$$\frac{|2m-2|}{\sqrt{m^2+1}} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3m^2 - 8m + 3 < 0$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{\dfrac{4-\sqrt{7}}{3} < m < \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}}$

(2) 円の中心 $(2,\ 2)$ から直線 l の距離を d とすると，三角形の面積は

$$\frac{1}{2}d\cdot 2\sqrt{1-d^2} = d\sqrt{1-d^2} = \frac{1}{2}\{1-(d-\sqrt{1-d^2})^2\}$$

面積が最大となるとき $\quad d = \sqrt{1-d^2} \quad$ すなわち $\quad d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

このとき $\quad \dfrac{|2m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$2(2m-2)^2 = m^2+1 \quad \text{ゆえに} \quad 7m^2 - 16m + 7 = 0$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{m = \dfrac{8 \pm \sqrt{15}}{7}}$

補足 円 C の中心を A$(2,\ 2)$，円 C と直線 l の交点を P，Q とおき，$\angle \mathrm{PAQ} = \theta\ (0^\circ < \theta \leqq 180^\circ)$ とおくと

$$\triangle \mathrm{APQ} = \frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin\theta$$

よって，$\triangle$APQ の面積は $\theta = 90^\circ$ のとき最大となる．

このとき，点 A と直線 l の距離は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる．

257 放物線 $C_1 : y = x^2 + 2x + 3$ と放物線 $C_2 : y = -x^2 - 4x + 1$ がある．

(1) C_1 と C_2 の 2 交点を通る直線の方程式を求めよ．

(2) C_1 と C_2 の 2 交点と原点 O を通り，軸が y 軸に平行な放物線の方程式を求めよ．

(3) C_1 と C_2 の 2 交点と原点 O を通る円の方程式を求めよ． (駒沢大 改)

解答 (1) C_1, C_2 の 2 交点を通る図形の方程式は，実数 k を用いて

$$x^2 + 2x - y + 3 + k(x^2 + 4x + y - 1) = 0 \qquad (*)$$

$(*)$ が直線を表すとき，これに $k = -1$ を代入して

$$x^2 + 2x - y + 3 - (x^2 + 4x + y - 1) = 0$$

よって　　$\boldsymbol{x + y - 2 = 0}$

(2) $(*)$ が原点 O を通るから

$$3 - k = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = 3$$

これを $(*)$ に代入すると

$$x^2 + 2x - y + 3 + 3(x^2 + 4x + y - 1) = 0$$

よって　　$\boldsymbol{y = -2x^2 - 7x}$

(3) (1)，(2) の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2+3x+1=0$$

この方程式の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-3$$

(1)，(2) で求めた直線と放物線の交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ 2-\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 2-\beta)$ とおくと，OA の垂直二等分線の方程式は

$$\alpha\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)+(2-\alpha)\left(y-\frac{2-\alpha}{2}\right)=0$$

$$\alpha x+(2-\alpha)y=\alpha^2-2\alpha+2$$

$\alpha^2=-3\alpha-1$ より　　$\alpha x+(2-\alpha)y=-5\alpha+1$　$\cdots$①

同様に，直線 OB の垂直二等分線の方程式は

$$\beta x+(2-\beta)y=-5\beta+1\quad\cdots②$$

① + ② とすると，$\alpha+\beta=-3$ より　$-3x+7y=17$　$\cdots$③

① − ② より　$(\alpha-\beta)x-(\alpha-\beta)y=-5(\alpha-\beta)$

$\alpha\neq\beta$ であるから　$x-y=-5$　$\cdots$④

③，④ を解いて　　$\left(-\frac{9}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

求める円の方程式は，中心 $\left(-\frac{9}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ で原点を通るから

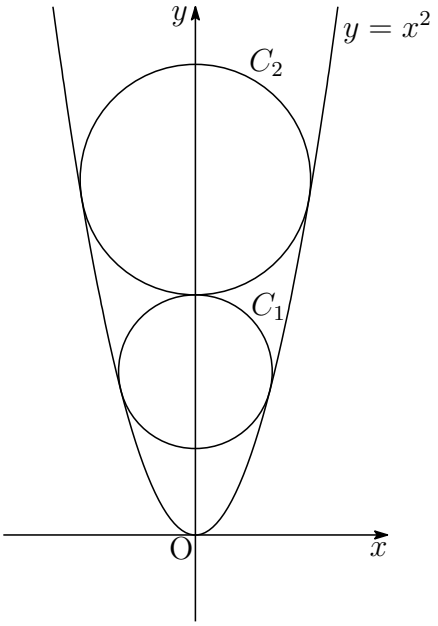
$$\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

よって　　$\boldsymbol{x^2+y^2+9x-y=0}$

258* 座標平面上に放物線 $H : y = x^2$ と，2 つの円 C_1 と C_2 がある．円 C_1 は y 軸上に中心があり，原点を通らず，ある点にて放物線 H と接している．円 C_1 の半径を r_1，その中心の y 座標を y_1 とする．一方，円 C_2 は y 軸上に中心があり，その中心の y 座標 y_2 は y_1 より大きい．また C_2 は円 C_1 に外接し，ある点にて放物線 H と接している．円 C_2 の半径を r_2 とする．ここで，$r_1 = 2$ とする．

(1) 円 C_1 と放物線 H の接点の座標を求めよ．

(2) r_2，y_2 の値を求めよ．



解答 (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

C_1 と H の接点を $(s,\ s^2)$ とすると，C_1 の点 $(s,\ s^2)$ における法線は

$$x - s + 2s(y - s^2) = 0$$

この法線と y 軸との交点の y 座標 y_1 は，$x = 0$ を代入して $(s \neq 0)$

$$-s + 2s(y_1 - s^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y_1 = s^2 + \frac{1}{2}$$

r_1 は 2 点 $(s,\ s^2)$，$\left(0,\ s^2 + \dfrac{1}{2}\right)$ 間の距離であるから

$$r_1 = \sqrt{s^2 + \frac{1}{4}}$$

$r_1 = 2$ であるから

$$\sqrt{s^2 + \frac{1}{4}} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad s = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$$

よって，求める接点の座標は　$\left(\pm\dfrac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}\right)$

(2) C_2 の H との接点を $(t,\ t^2)$ とすると，(1) と同様に

$$y_2 = t^2 + \frac{1}{2}, \quad r_2 = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}$$

$y_2 = y_1 + r_1 + r_2$ より，これに $y_1 = {r_1}^2 + \dfrac{1}{4},\ y_2 = {r_2}^2 + \dfrac{1}{4}$ を代入すると

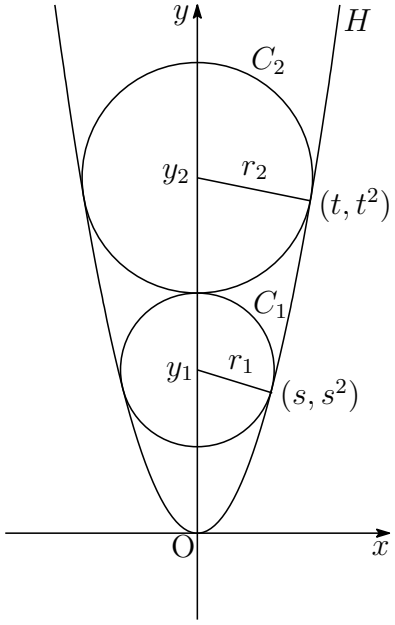
$${r_2}^2 + \frac{1}{4} = {r_1}^2 + \frac{1}{4} + r_1 + r_2 \quad \text{ゆえに} \quad {r_2}^2 - r_2 - {r_1}^2 - r_1 = 0$$

$r_1 = 2$ を上の第 2 式に代入すると

$${r_2}^2 - r_2 - 6 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (r_2 + 2)(r_2 - 3) = 0$$

$r_2 > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{r_2 = 3}$

また　$y_2 = {r_2}^2 + \dfrac{1}{4} = 3^2 + \dfrac{1}{4} = \boldsymbol{\dfrac{37}{4}}$



259 座標平面上に原点Oを中心とする半径1の円Cをとり，その外部に点$\mathrm{P}(a,\ b)$をとる．点Pから円Cに2本の接線を引き，その2つの接点をそれぞれ$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$とする．2点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線をlとする．直線l上の点Qを円Cの外部にとる．上と同様に，点Qから円Cに2本の接線を引き，その2つの接点を通る直線をmとする．　(奈良女子大)

(1) $ax_1+by_1=1$，$ax_2+by_2=1$を示せ．

(2) 直線lの方程式は$ax+by=1$であることを示せ．

(3) 直線mは点Pを通ることを示せ．

(4) △OPQが正三角形となるとき，線分OPの長さを求めよ．

解答　(1) $C:x^2+y^2=1$上の点$\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=1$$

同様に，C上の点$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$における接線の方程式は

$$x_2x+y_2y=1$$

上の2つの接線は，ともに点$\mathrm{P}(a,\ b)$を通るから

$$ax_1+by_1=1,\quad ax_2+by_2=1$$

(2) (1)，(2)の結果から，直線$ax+by=1$は2点M，Nを通る．

よって，直線l，すなわち，Pを極とする極線の方程式は

$$ax+by=1$$

円$C:x^2+y^2=r^2$の外部の点$\mathrm{P}(a,\ b)$からCに引いた2本の接線の接点を$\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$とする．2本の接線

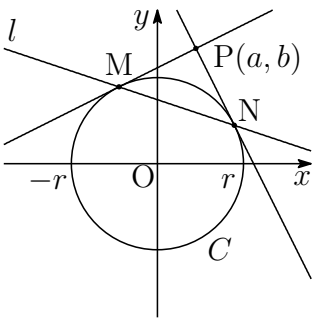
$$x_1x+y_1y=r^2,\quad x_2x+y_2y=r^2$$

は点$\mathrm{P}(a,\ b)$を通るから

$$ax_1+by_1=r^2,\quad ax_2+by_2=r^2$$

上の2式から直線$l:ax+by=r^2$は2点M，Nを通る．

このとき，lをPを**極**とするCの**極線**という．



(3) Q$(c,\ d)$ とすると，Q は l 上の点であるから

$$ac+bd=1 \qquad (*)$$

また，Q を極とする極線 m の方程式は

$$cx+dy=1$$

であるから，上の 2 式から，m は P$(a,\ b)$ を通る．

(4) $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$|\vec{p}|=|\vec{q}|=|\vec{q}-\vec{p}|=r$ とおくと

$$|\vec{q}-\vec{p}|^2=r^2 \quad \text{ゆえに} \quad r^2=2\vec{p}\cdot\vec{q}$$

$(*)$ より，$\vec{p}\cdot\vec{q}=1$ であるから

$$r^2=2\cdot1=2 \quad \text{したがって} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{2}$$

よって　　$\mathbf{OP=\sqrt{2}}$

長崎大学 2012 年 7

原点 O を中心とし，半径 1 の円を C とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 $y=2$ 上の点 P$(t,\ 2)$ から円 C に 2 本の接線を引き，その接点を M，N とする．直線 OP と弦 MN の交点を Q とする．点 Q の座標を t を用いて表せ．ただし，t は実数とする．

(2) 点 P が直線 $y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

解答　(1) 直線 OP の方程式は　　$2x-ty=0 \quad \cdots①$

直線 MN は P$(t,\ 2)$ を極とする C の極線であるから

$$tx+2y=1 \quad \cdots②$$

Q は，①，② の交点であるから

$$x=\frac{t}{t^2+4},\ \ y=\frac{2}{t^2+4} \quad \text{よって} \quad \mathbf{Q}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t^2+4}},\ \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{t^2+4}}\right)$$

(2) (1) の結果から $t=2\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x=\frac{t}{t^2+4}=\frac{2\tan\theta}{(2\tan\theta)^2+4}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\sin2\theta$$

$$y=\frac{2}{t^2+4}=\frac{2}{(2\tan\theta)^2+4}=\frac{1}{2}\cos^2\theta=\frac{1}{4}\cos2\theta+\frac{1}{4}$$

よって，求める点 Q の軌跡の方程式は，$-\pi<2\theta<\pi$ より

$$\boldsymbol{x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16},\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)}$$

7.23　軌跡

7.23.1　Review

260 2 定点 O(0, 0)，A(3, 0) に対して

(1) OP : AP = 1 : 1 となる点 P の軌跡を求めよ．

(2) OP : AP = 1 : 2 となる点 P の軌跡を求めよ．

解答　(1) 点 P の軌跡は，OA の垂直二等分線，すなわち，2 点 O，A の中点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通り，直線 OA(x 軸) に垂直な直線であるから

$$\textbf{直線 } \boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$$

(2) 2 点 O(0, 0)，A(3, 0) を 1 : 2 に内分および外分する点はそれぞれ

$$(1,\ 0),\ (-3,\ 0)$$

求める点 P の軌跡は，これらを直径の両端とする円，すなわち，中心 $(-1,\ 0)$，半径 2 の円であるから

$$\textbf{円 } \boldsymbol{(x+1)^2 + y^2 = 4}$$

261 (1) 中心が点 $(1,\ 2)$，半径が 3 の円がある．点 P がこの円上を動くとき，点 $\mathrm{A}(-3,\ 6)$ と点 P を結ぶ線分 AP を $2:1$ に内分する点 Q の軌跡を求めよ．
(佐賀大 2011 年 $\boxed{7}$)

(2) 円 $x^2+2x+y^2-3=0$ 上を動く点 P と，2 点 $\mathrm{A}(3,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,-4)$ を頂点とする $\triangle$ABP の重心 G の軌跡を求めよ．
(島根県立大 改)

解答 (1) 点 P の座標を $(s,\ t)$ とすると，P は中心 $(1,\ 2)$，半径 3 の円周上にあるから

$$(s-1)^2+(t-2)^2=9 \quad \cdots ①$$

また，点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，条件から

$$x=\frac{1\cdot(-3)+2s}{2+1},\quad y=\frac{1\cdot 6+2t}{2+1}$$

すなわち　　$s=\dfrac{3x+3}{2}$，$t=\dfrac{3y-6}{2}$

これらを ① に代入して　$\left(\dfrac{3x+3}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{3y-6}{2}-2\right)^2=9$

整理すると　　$\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{10}{3}\right)^2=4$

よって，点 Q は円 $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{10}{3}\right)^2=4$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，**点 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$ を中心とする半径 2 の円．**

(2) P の座標を $(s,\ t)$ とすると

$$s^2+2s+t^2-3=0 \quad \text{ゆえに} \quad (s+1)^2+t^2=4 \quad \cdots ①$$

また，点 G の座標を $(x,\ y)$ とすると，条件から

$$x=\frac{3+1+s}{3},\quad y=\frac{1+(-4)+t}{3}$$

すなわち　　$s=3x-4$，$t=3y+3$

これらを ① に代入して　$(3x-3)^2+(3y+3)^2=4$

整理すると　　$(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{4}{9}$

よって，点 G は円 $(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{4}{9}$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点 $\mathrm{G}(x,\ y)$ は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，**点 $(1,-1)$ を中心とする半径 $\dfrac{2}{3}$ の円．**

262 k を実数とし，2 次関数 $y = x^2 + 4kx + 2k^2 - 2k + 2$ のグラフを C とする．k がすべての実数値をとって変化するとき，頂点 P の軌跡を求めよ．

解答 $y = x^2 + 4kx + 2k^2 - 2k + 2$ より　$y = (x + 2k)^2 - 2k^2 - 2k + 2$

頂点 $\mathrm{P}(-2k, -2k^2 - 2k + 2)$ から

$$-2k^2 - 2k + 2 = -\frac{1}{2}(-2k)^2 + (-2k) + 2$$

よって，求める軌跡の方程式は

$$\textbf{放物線 } \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2}$$

7.23.2 Exercise

263* xy 平面において，直線 $l : x + t(y - 3) = 0$，$m : tx - (y + 3) = 0$ を考える．ただし，t は実数である．

(1) l は t の値にかかわらずある定点を通ることを示せ．

(2) t が実数全体を動くとき，l と m の交点はどんな図形をえがくか．

解答 (1) $x + t(y - 3) = 0$ を t に関する恒等式とすると

$$x = 0, \quad y - 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = 0,\ y = 3$$

よって，求める定点は　$\boldsymbol{(0,\ 3)}$

(2) $l,\ m$ の 2 式から

$$\begin{cases} x + ty = 3t \\ tx - y = 3 \end{cases} \quad \text{これを解くと} \quad x = \frac{6t}{t^2 + 1},\ \ y = \frac{3(t^2 - 1)}{t^2 + 1}$$

$t = \tan\theta$ とすると $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$x = \frac{6\tan\theta}{\tan^2\theta + 1} = \frac{6\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 3\sin 2\theta$$
$$y = \frac{3(\tan^2\theta - 1)}{\tan^2\theta + 1} = \frac{3(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = -3\cos 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ であるから，求める図形は

$$\textbf{円 } \boldsymbol{x^2 + y^2 = 9, \quad (x,\ y) \neq (0,\ 3)}$$

264* 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ を通り，傾きが a の直線を l とする．放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と直線 l は，異なる 2 点 P，Q で交わっている． (龍谷大 改)

(1) 傾き a の値の範囲を求めよ．

(2) 線分 PQ の中点 R の軌跡を xy 平面にかけ．

解答 (1) 直線 l の方程式は $\quad y=a(x+1)$

直線 l と放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の方程式から y を消去すると

$$\frac{1}{2}x^2=a(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad x^2-2ax-2a=0 \qquad (*)$$

放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と直線 l は異なる 2 点で交わるから，$(*)$ の係数について

$$D/4=(-a)^2-1\cdot(-2a)=a(a+2)>0$$

これを解いて $\qquad \boldsymbol{a<-2,\ 0<a}$

(2) 2 点 P，Q の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とすると，$(*)$ の解と係数の関係により

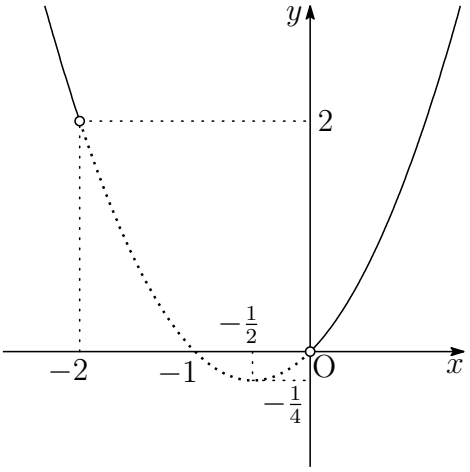
$$\alpha+\beta=2a \qquad (**)$$

2 点 P，Q は l 上の点であるから，2 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ a(\alpha+1))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ a(\beta+1))$ の中点 R は，$(**)$ により

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\right) \quad \text{すなわち} \quad (a,\ a(a+1))$$

よって，(1) の結果に注意して

$$\boldsymbol{y=x(x+1) \quad (x<-2,\ 0<x)}$$



265 直線 $y=a(x+2)$ と円 $x^2+y^2-4x=0$ は異なる 2 点 P，Q で交わるとする．また，線分 PQ の中点を R とする．(愛媛大 改)

(1) 定数 a の値の範囲を求めよ．

(2) 点 R の座標を a を用いて表せ．

(3) a の値が (1) で求めた範囲を動くとき，点 R の軌跡を求めよ．

解答 (1) 直線 $l: y=a(x+2)$ と円 $C: x^2+y^2-4x=0$ から y を消去すると

$$x^2+\{a(x+2)\}^2-4x=0$$

整理すると $$(a^2+1)x^2+4(a^2-1)x+4a^2=0 \qquad (*)$$

l と C は異なる 2 点で交わるから，$(*)$ の係数について

$$D/4=\{2(a^2-1)\}^2-(a^2+1)\cdot 4a^2=-12a^2+4>0$$

これを解いて $$\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{3}}<a<\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(2) 2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると，$(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{4(a^2-1)}{a^2+1}$$

$\mathrm{P}(\alpha,\ a(\alpha+2))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ a(\beta+2))$ の中点 R は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+2\right)\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\left(-\frac{2(a^2-1)}{a^2+1},\ \frac{4a}{a^2+1}\right)}$$

(3) (1)，(2) の結果から，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，$a=\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$ とおくと

$$x=-\frac{2(\tan^2\theta-1)}{\tan^2\theta+1}=\frac{-2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=2\cos 2\theta$$
$$y=\frac{4\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{4\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=2\sin 2\theta$$

$\varphi=2\theta$ とおくと

$$x=2\cos\varphi,\quad y=2\sin\varphi \quad \left(-\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{3}\right)$$

よって，点 R の軌跡は

$$\boldsymbol{\text{円 } x^2+y^2=4 \quad (1<x\leqq 2)}$$

7.23.3 Try

266* 座標平面において，点 A$(1,\ 1)$，B$(1,\ 0)$，C$(0,\ 4)$ をとる．k を実数として，点 A を通り，傾きが k である直線を考える．この直線に関する点 B の対称な点を P とする． (東京理科大)

(1) $k=1$ のとき，点 P の座標を求めよ．

(2) k が実数全体を動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

(3) k が実数全体を動くとき，PC が最小となるような傾き k の値を求めよ．

解答 (1) P$(p,\ q)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(p-1,\ q)\perp\vec{v}=(1,\ k)$ より

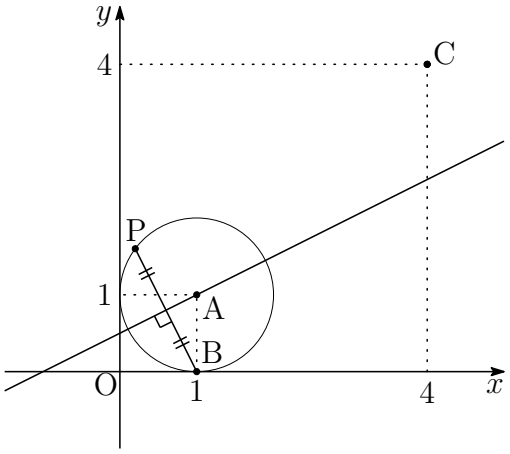
$$1(p-1)+kq=0 \quad \text{ゆえに} \quad p+kq=1 \quad \cdots ①$$

2 点 B$(1,\ 0)$，P$(p,\ q)$ の中点 $\left(\dfrac{p+1}{2},\ \dfrac{q}{2}\right)$ は直線 $y=k(x-1)+1$ 上の点であるから

$$\frac{q}{2}=k\left(\frac{p+1}{2}-1\right)+1 \quad \text{ゆえに} \quad kp-q=k-2 \quad \cdots ②$$

①，② を解くと　　$p=\dfrac{(k-1)^2}{k^2+1},\ q=\dfrac{2}{k^2+1}$　　$(*)$

$(*)$ に $k=1$ を代入すると　　P$\mathbf{(0,\ 1)}$



(2) $(*)$ に $k=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を代入すると

$$(**)\begin{cases} p=\dfrac{(\tan\theta-1)^2}{\tan^2\theta+1}=(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-\sin 2\theta \\ q=\dfrac{2}{\tan^2\theta+1}=2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta \end{cases}$$

$-\pi<2\theta<\pi$ より，$(p,\ q)\neq(1,\ 0)$

$(p-1)^2+(q-1)^2=1$ であるから，P の軌跡は

$$\textbf{円}\ \boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2=1,\quad (x,\ y)\neq(1,\ 0)}$$

(3) PC が最小となるとき，$p=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$q=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$1-\sin 2\theta=1+\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 1+\cos 2\theta=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　　$\sin 2\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 2\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-\pi<2\theta<\pi$ であるから　$2\theta=-\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\theta=-\dfrac{\pi}{8}$

よって　　$k=\tan\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=\boldsymbol{1-\sqrt{2}}$

267* 2点 $\mathrm{A}(x,\ y)$，$\mathrm{B}(X,\ Y)$ が原点Oを通る同一直線上にある．$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=4$ を満たし，AとBは原点Oに対し反対側にある． (岐阜薬科大)

(1) 点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ を X と Y を用いて表せ．

(2) 点Aが直線 $y=-2x-2$ 上を動くとき，次を求めよ．

(i) 点Bの軌跡

(ii) $\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$ が最大となる点Aおよび点Bの座標

解答 (1) $\mathrm{A}(x,\ y)$ と $\mathrm{B}(X,\ Y)$ は原点Oに対し反対側にあるから

$$(x,\ y)=-k(X,\ Y) \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{x^2+y^2}=k\sqrt{X^2+Y^2} \quad (k>0) \quad \text{(A)}$$

$\mathrm{OA}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{X^2+Y^2}$ を $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=4$ に代入すると

$$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{X^2+Y^2}=4 \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B)の2式から $\sqrt{x^2+y^2}$ を消去すると

$$4=k(X^2+Y^2) \quad \text{ゆえに} \quad k=\frac{4}{X^2+Y^2}$$

これを(A)の第1式に代入すると

$$(x,\ y)=-\frac{4}{X^2+Y^2}(X,\ Y)=\left(-\frac{\boldsymbol{4X}}{\boldsymbol{X^2+Y^2}},-\frac{\boldsymbol{4Y}}{\boldsymbol{X^2+Y^2}}\right) \qquad \text{(C)}$$

(2) (i) (1)の結果を $y=-2x-2$ に代入すると

$$-\frac{4Y}{X^2+Y^2}=\frac{8X}{X^2+Y^2}-2 \quad \text{整理すると} \quad X^2+Y^2-4X+2Y=0$$

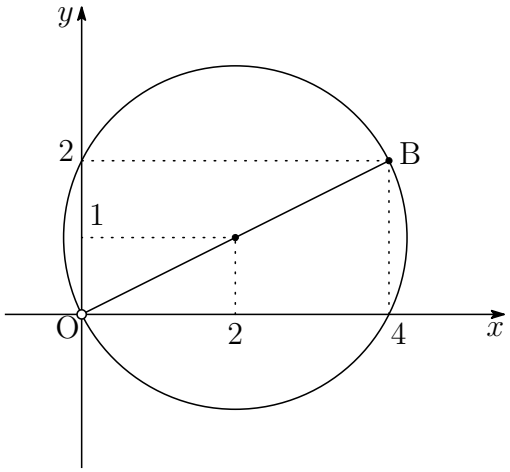
$X^2+Y^2\neq 0$ に注意して

$$(X-2)^2+(Y-1)^2=5, \quad (X,\ Y)\neq(0,\ 0)$$

よって，**中心 (2, 1)，半径 $\sqrt{5}$ の円から原点を除いたもの．**

(ii) $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=4$ により　$\mathrm{OA}=\dfrac{4}{\mathrm{OB}}$

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}+\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{OB}}{\dfrac{4}{\mathrm{OB}}+\mathrm{OB}}=\frac{1}{\dfrac{4}{\mathrm{OB}^2}+1}$$



$\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$ が最大となるのは，OB が最大となるときであるから

$$\mathbf{B(4,\ 2)}$$

これを (C) に代入して　　$\mathbf{A}\left(-\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}},-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)$

268 a を実数とする．xy 平面において，関数 $y=x^2$ と $y=-x^2+2ax-a$ のグラフをそれぞれ C_1，C_2 とする． (東北大)

(1) C_1 と C_2 が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ．

(2) a が (1) で求めた範囲にあるとき，C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本存在することを示せ．

(3) a が (1) で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 の両方に接する 2 本の直線の交点がえがく図形を図示せよ．

解答 (1) C_1 と C_2 の 2 式から，y を消去して整理すると

$$2x^2-2ax+a=0$$

C_1 と C_2 は共有点をもたないから，上式の係数について

$$D/4=(-a)^2-2\cdot a=a(a-2)<0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0<a<2}$$

(2) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C_1 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t) \quad \text{ゆえに} \quad y=2tx-t^2$$

C_2 と ℓ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2+2(t-a)x+a-t^2=0$$

C_2 と ℓ は接するから，係数について

$$D/4=(t-a)^2-(a-t^2)=2t^2-2at+a^2-a=0 \qquad (*)$$

これを解くと　　$t=\dfrac{a\pm\sqrt{a(2-a)}}{2}$

$0<a<2$ のとき，上の t の値は異なる 2 つの実数，すなわち，C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本存在する．

(3) 2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=a,\quad \alpha\beta=\frac{a^2-a}{2}$$

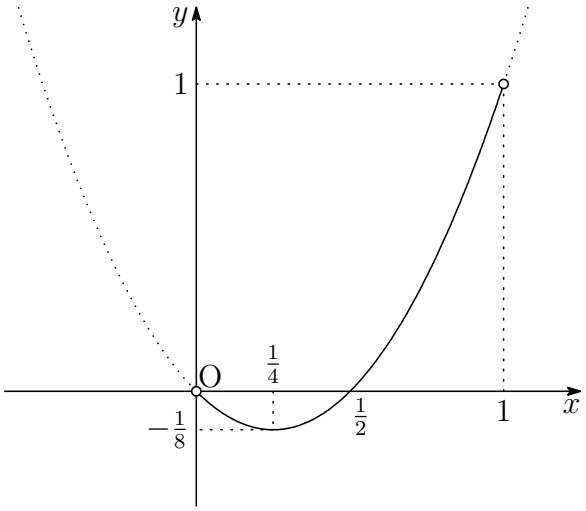
このとき，2 本の接線

$$y=2\alpha x-\alpha^2,\quad y=2\beta x-\beta^2$$

の交点は，$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$，すなわち，$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2-a}{2}\right)$

$x=\dfrac{a}{2},\ y=\dfrac{a^2-a}{2}$ とおき $(0<a<2)$，a を消去すると

$$y=2x^2-x\quad (0<x<1)$$



269 O を原点とする座標平面において，円 $x^2+y^2=4$ の外部の点 A からこの円に 2 本の接線を引き，その接点を P，Q とする．線分 PQ の中点を M とし，M の座標を $(s,\ t)$ とする．(東京理科大)

(1) 点 A の座標が $(a,\ b)$ であるとき，a，b を用いて，点 M の座標 $(s,\ t)$ を表せ．

(2) 点 A が直線 $2x+3y=12$ 上を動くとき，点 M の軌跡を求めよ．

解答 (1) A は円 $x^2+y^2=4$ の外部の点であるから　$a^2+b^2>4$

直線 PQ は点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を極とする極線より　$ax+by=4$　$\cdots$①

直線 OA は　$bx-ay=0$　$\cdots$②

M は直線 PQ と直線 OA の交点であるから，$a^2+b^2\neq 0$ に注意して，①，② を解くと

$$x=\frac{4a}{a^2+b^2},\quad y=\frac{4b}{a^2+b^2}$$

よって　$\boldsymbol{(s,\ t)=\left(\dfrac{4a}{a^2+b^2},\ \dfrac{4b}{a^2+b^2}\right)}$

(2) $(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ より，(1) の結果から　$(s,\ t)\neq(0,\ 0)$

$(s,\ t)$ は ①，② の解であるから

$$sa+tb=4,\quad -ta+sb=0$$

$s^2+t^2\neq 0$ に注意して，上の 2 式を a，b について解くと

$$a=\frac{4s}{s^2+t^2},\quad b=\frac{4t}{s^2+t^2}$$

$\mathrm{A}(a,\ b)$ が直線 $2x+3y=12$ 上にあるから，$2a+3b=12$ に上の 2 式を代入すると

$$\frac{8s}{s^2+t^2}+\frac{12t}{s^2+t^2}=12\quad \text{ゆえに}\quad s^2+t^2-\frac{2}{3}s-t=0$$

したがって　$\left(s-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{36},\quad (s,\ t)\neq(0,\ 0)$

よって，M の軌跡は

$$\boldsymbol{\text{円}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{36},\quad (x,\ y)\neq(0,\ 0)}$$

270* s，t を $s<t$ をみたす実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとする．以下の問に答えよ．　(神戸大文系 2015 年 1)

(1) s と t の間の関係式を求めよ．

(2) 線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とする．u と v の間の関係式を求めよ．

(3) s，t が変化するとき，v の最小値と，そのときの u，s，t の値を求めよ．

解答　(1) $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s-1,s^2-2),\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(t-s)(1,\ s+t)$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}//\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから $(s<t)$

$$(s-1)(s+t)-(s^2-2)\cdot 1=0\quad \text{整理すると}\quad \boldsymbol{st=s+t-2}$$

(2) 線分 BC の中点 $\mathrm{M}(u,\ v)$ は

$$u=\frac{s+t}{2},\quad v=\frac{s^2+t^2}{2}\quad \cdots(*)$$

$(*)$ の第 1 式および (1) の結果から　$s+t=2u,\ st=2u-2$　$\cdots(**)$

よって　$v=\dfrac{s^2+t^2}{2}=\dfrac{(s+t)^2-2st}{2}=\dfrac{(2u)^2-2(2u-2)}{2}$

$$=\boldsymbol{2u^2-2u+2}$$

(3) (2) の結果から　$v=2\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$

したがって　$\boldsymbol{u=\dfrac{1}{2}}$ のとき v は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ をとる．

$u=\dfrac{1}{2}$ を $(**)$ に代入すると　$s+t=1,\quad st=-1$

2 数 s，t を解とする 2 次方程式は

$$x^2-x-1=0\quad \text{これを解いて}\quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$s<t$ であるから　$\boldsymbol{s=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

7.24　領域

7.24.1　Review

271 次の不等式で表される領域を図示せよ.

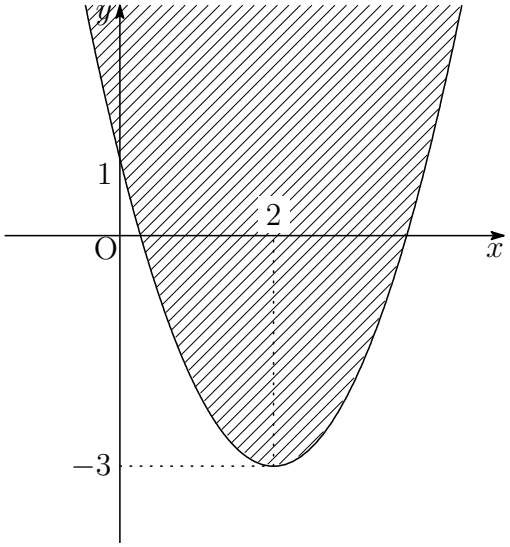
(1) $x^2-4x+1-y<0$

(2) $x^2+y^2-2x+4y \leqq 0$

(3) $\begin{cases} x+y<1 \\ x^2+y^2<25 \end{cases}$

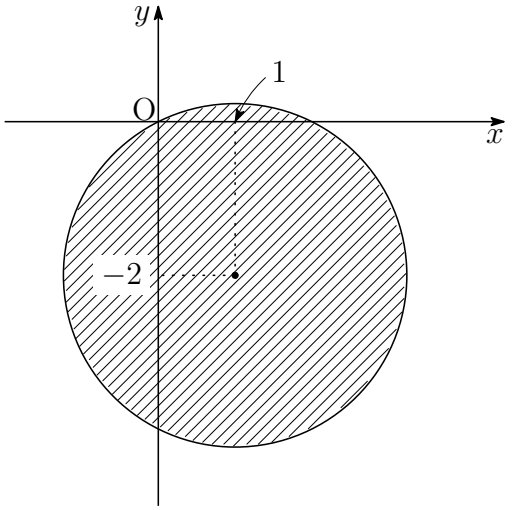
(4) $(2x-y-3)(x-y+1) \geqq 0$

解答　(1) $y>(x-2)^2-3$ より，求める領域は放物線 $y=(x-2)^2-3$ の上側で境界線を含まない.



(2) $x^2+y^2-2x+4y \leqq 0$ より　$(x-1)^2+(y+2)^2 \leqq 5$

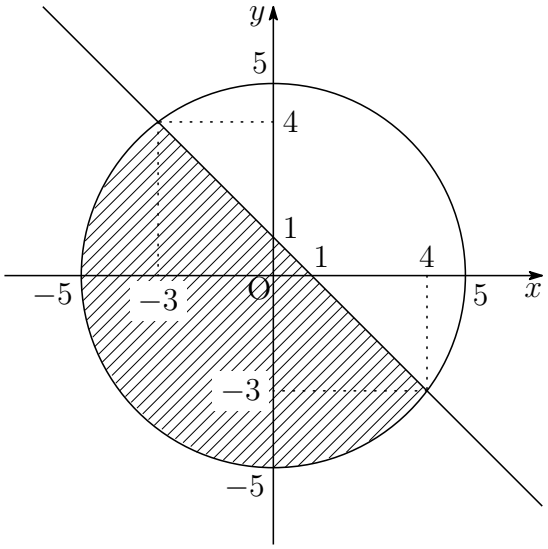
求める領域は円 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ の内部で境界線を含む.



(3) $x+y<1$ の表す領域は，直線 $y=-x+1$ の下側

$x^2+y^2<25$ の表す領域は，円 $x^2+y^2=25$ の内部

求める領域は，これらの領域の共通部分で境界線を含まない.



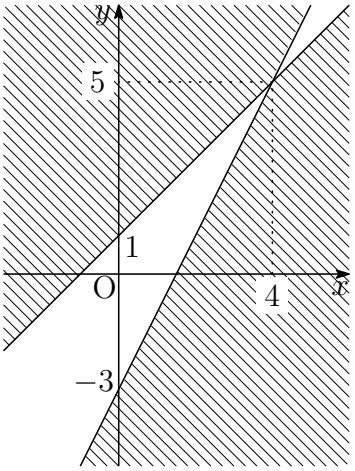
(4) $(2x-y-3)(x-y+1) \geqq 0$ より

$$\begin{cases} 2x-y-3 \geqq 0 \\ x-y+1 \geqq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 2x-y-3 \leqq 0 \\ x-y+1 \leqq 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} y \leqq 2x-3 \\ y \leqq x+1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \geqq 2x-3 \\ y \geqq x+1 \end{cases}$$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



272 連立不等式 $x-y-1 \leqq 0$，$x-3y+9 \geqq 0$，$2x+y+4 \geqq 0$ の表す領域を D とする．

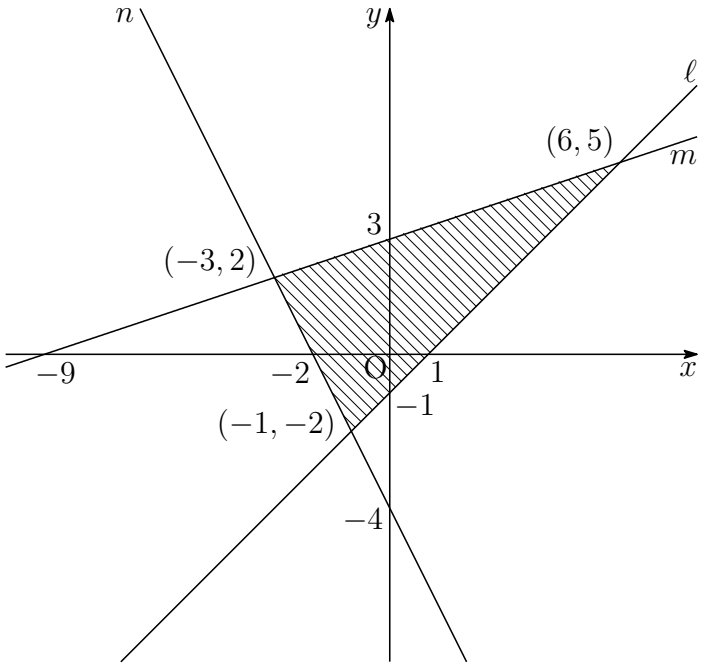
(1) 領域 D を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$y-2x$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

解答 (1) $x-y-1 \leqq 0$，$x-3y+9 \geqq 0$，$2x+y+4 \geqq 0$ より

$$(*)\begin{cases} y \geqq x-1 \\ y \leqq \dfrac{1}{3}x+3 \\ y \geqq -2x-4 \end{cases}$$

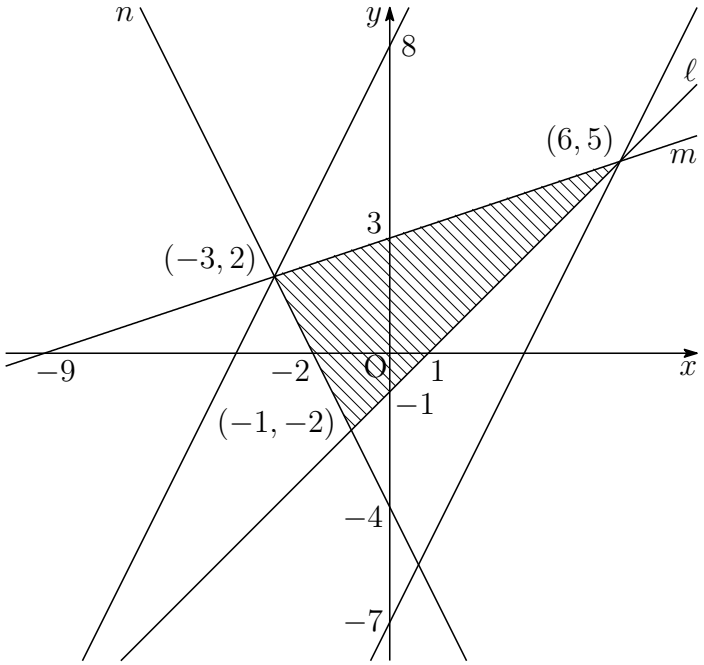
$\ell : y=x-1$，$m : y=\dfrac{1}{3}x+3$，$n : y=-2x-4$ とすると，$(*)$ の表す領域は，下の図のようになる．



(2) $y-2x=k$ とおくと　$y=2x+k$　$\cdots$①

直線① は傾き 2，y 切片 k の直線であるから，点 $(-3,\ 2)$ を通るとき k は最大値 M をとり，点 $(6,\ 5)$ を通るとき k は最小値 m をとる．

$$M=2-2\cdot(-3)=\mathbf{8},\quad m=5-2\cdot6=\mathbf{-7}$$



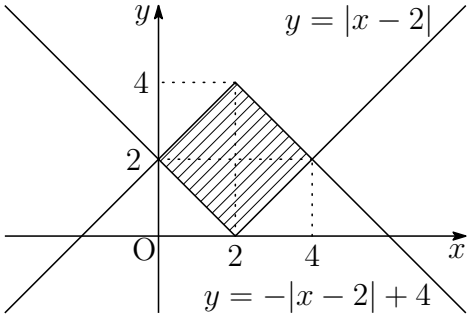
7.24.2 Exercise

273* 不等式 $|x-2| \leqq y \leqq -|x-2|+4$ が表す領域を D とする.

(1) 領域 D を座標平面上に図示せよ.

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，x^2+y^2 のとり得る値の範囲を求めよ.

解答 (1) D は下の図の斜線部分で境界線を含む.



(2) x^2+y^2 が最小となる D の点は，$y=|x-2|$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点であるから

$$x^2+y^2 = x^2+|x-2|^2 = 2x^2-4x+4 = 2(x-1)^2+2 \geqq 2$$

x^2+y^2 が最大となる D の点は，$(2,\ 4),\ (4,\ 2)$ であるから

$$x^2+y^2 \leqq 2^2+4^2 = 20$$

よって　　$\boldsymbol{2 \leqq x^2+y^2 \leqq 20}$

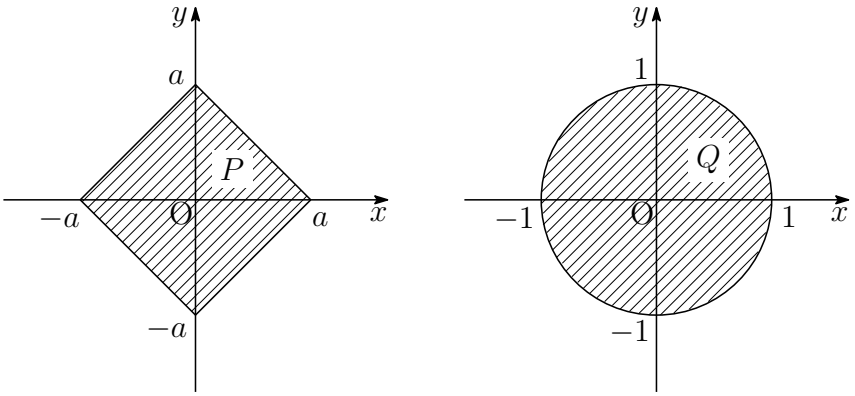
274 a を 0 以上の定数とする．実数 x，y に関する条件 p，q を次のように定める．

$$p : |x| + |y| \leqq a, \quad q : x^2 + y^2 \leqq 1$$

(1) 条件 p が条件 q であるための十分条件であるような a の値の範囲を求めよ．

(2) 条件 p が条件 q であるための必要条件であるような a の値の範囲を求めよ．

解答 条件 p, q の表す領域をそれぞれ P, Q とすると，下の図の斜線部分で境界線を含む．



(1) $P \subset Q$ となる a の値の範囲であるから　$\boldsymbol{0 \leqq a \leqq 1}$

(2) $P \supset Q$ となる a の値の範囲であるから　$\boldsymbol{a \geqq \sqrt{2}}$

275* a を実数とし，直線 $y = 2ax - a^2$ を l_a とする． (三重大)

(1) l_a が点 $(2, -5)$ を通るときの a の値を求めよ．

(2) どのような実数 a を選んでも点 $(3,\ 10)$ を通らないことを示せ．

(3) a がすべての実数を動くとき，l_a が通る点 $(x,\ y)$ の全体を S とおく．領域 S を図示せよ．

解答 (1) l_a が点 $(2, -5)$ を通るから　$-5 = 2a \cdot 2 - a^2$

$$a^2 - 4a - 5 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+1)(a-5) = 0$$

よって　$\boldsymbol{a = -1,\ 5}$

(2) $x = 3,\ y = 10$ を l_a に代入すると　$10 = 2a \cdot 3 - a^2$

$$a^2 - 6a + 10 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a-3)^2 + 1 = 0$$

これを満たす実数 a は存在しない．

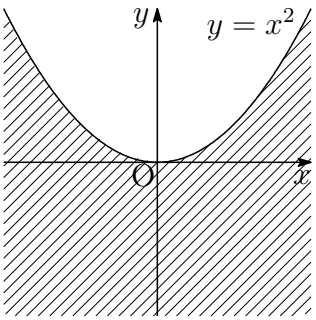
よって，どのような実数 a を選んでも点 $(3,\ 10)$ を通らない．

(3) l_a を a について整理すると　$a^2 - 2xa + y = 0$

a がすべての実数を動くから，係数について

$$D/4 = (-x)^2 - y \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \leqq x^2$$

よって，点 $(x,\ y)$ の表す領域 S は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



7.24.3 Try

276 放物線 $y = x^2 + ax + b$ より，xy 平面を 2 つの領域に分割する．以下の問に答えよ． (愛知教育大)

(1) 点 $(-1,\ 4)$ と点 $(2,\ 8)$ が放物線上にはなく個別の領域に属するような a，b の条件を求めよ．さらに，その条件を満たす $(a,\ b)$ の領域を ab 平面に図示せよ．

(2) a，b が (1) で求めた条件を満たすとき，$a^2 + b^2$ がとり得る値の範囲を求めよ．

解答 (1) $f(x,\ y) = x^2 + ax - y + b$ とおくと

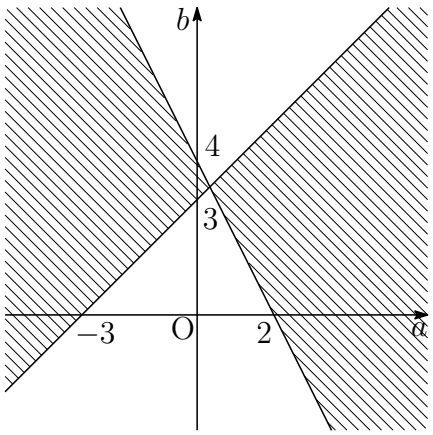
$$f(-1,\ 4)f(2,\ 8) < 0$$

を満たせばよいから

$$(-a + b - 3)(2a + b - 4) < 0$$

すなわち $\begin{cases} b > a + 3 \\ b < -2a + 4 \end{cases}$ または $\begin{cases} b < a + 3 \\ b > -2a + 4 \end{cases}$

求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



(2) 原点 O から 2 直線 $-a + b - 3 = 0$，$2a + b - 4 = 0$ までの距離をそれぞれ $d_1,\ d_2$ とすると

$$d_1 = \frac{-3}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad d_2 = \frac{|-4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

このとき $\quad {d_1}^2 - {d_2}^2 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{16}{5} = \dfrac{13}{10} > 0$

したがって $\quad a^2 + b^2 > {d_2}^2 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{a^2 + b^2 > \dfrac{16}{5}}$

277* 座標平面上で，不等式 $|x-3|+|y-3| \leqq 2$ で表される領域を D とするとき，次の問に答えよ．(同志社大)

(1) 領域 D を座標平面上に図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2x+y$ の最大値を求めよ．

(3) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x^2+y^2-4x-2y$ の最大値を求めよ．

(4) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$\dfrac{y-1}{x+2}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

解答 (1) (i) $x \geqq 3$ のとき，$|x-3|=x-3$ より

$$|y-3| \leqq -x+5 \quad \text{ゆえに} \quad x-5 \leqq y-3 \leqq -x+5$$

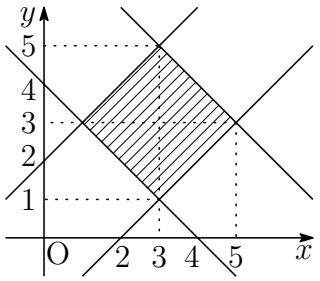
よって $\quad x-2 \leqq y \leqq -x+8$

(ii) $x \leqq 3$ のとき，$|x-3|=3-x$ より

$$|y-3| \leqq x-1 \quad \text{ゆえに} \quad -x+1 \leqq y-3 \leqq x-1$$

よって $\quad -x+4 \leqq y \leqq x+2$

(i)，(ii) より，領域 D は下の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) $2x+y=k$ とおくと，$y=-2x+k$ より

$x=5$，$y=3$ のとき，最大値 **13** をとる．

(3) $x^2+y^2-4x-2y=(x-2)^2+(y-1)^2-5$

$\mathrm{A}(2,\ 1)$ とし，D 内の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x^2+y^2-4x-2y=\mathrm{AP}^2-5$$

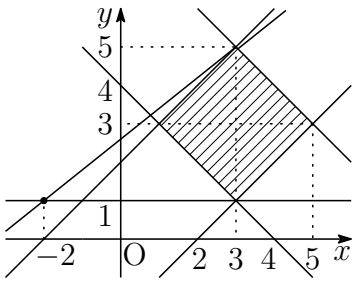
上式が最大となるのは，$\mathrm{P}(3,\ 5)$ のとき，$\mathrm{AP}^2-5=12$

よって，$x=3,\ y=5$ のとき，最大値 **12** をとる．

(4) $\dfrac{y-1}{x+2}$ は，点 $(-2,\ 1)$ と領域 D 内の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を通る直線の傾き m である
から，m は

$$\mathrm{P}(3,\ 1) \text{ のとき最小値 } 0, \quad \mathrm{P}(3,\ 5) \text{ のとき最大値} \frac{4}{5}$$

よって　　$\boldsymbol{0 \leqq \dfrac{y-1}{x+2} \leqq \dfrac{4}{5}}$



278* 連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 - 2x + 1 \\ y \leqq -x^2 + 4x + 1 \end{cases}$$

の表す領域を D とする．このとき，次の各問に答えよ．(宮崎大 2017 年 9)

(1) D を座標平面上に図示せよ．

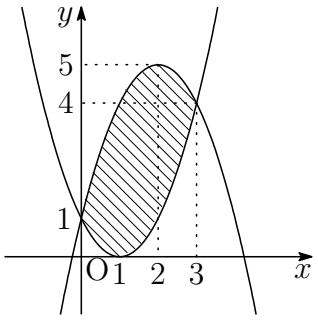
(2) a を実数とする．点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$-ax + y$ の最大値を $f(a)$ とする．$f(a)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $f(a)$ に対し，関数 $b = f(a)$ のグラフをかけ．

解答 (1) 与えられた連立不等式から

$$\begin{cases} y \geqq (x-1)^2 \\ y \leqq -(x-2)^2 + 5 \end{cases}$$

したがって，領域 D は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．



(2) $k = -ax + y$ とおくと，$y = ax + k$ であるから，k が最大となる D の点 $(x,\ y)$ は $y = -(x-2)^2 + 5 \cdots$① 上にある $(0 \leqq x \leqq 3)$.
① より，$y' = -2(x-2)$ であるから

$$x = 0 \text{ のとき } y' = 4, \quad x = 3 \text{ のとき } y' = -2$$

(i) $-2 < a < 4$ のとき，$-2(x-2) = a$ より，点 $\left(2 - \dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4} + 5\right)$ で k は最大となり，最大値は

$$k = -a\left(2 - \frac{a}{2}\right) - \frac{a^2}{4} + 5 = \frac{a^2}{4} - 2a + 5 = \frac{1}{4}(a-4)^2 + 1$$

(ii) $a \leqq -2$ のとき，点 $(3,\ 4)$ で k は最大となり，最大値は

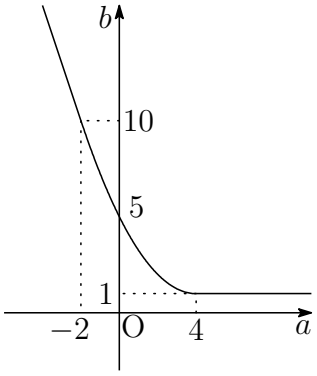
$$k = -a \cdot 3 + 4 = -3a + 4$$

(iii) $4 \leqq a$ のとき，点 $(0,\ 1)$ で k は最大となり，最大値は

$$k = -a \cdot 0 + 1 = 1$$

(i)〜(iii) より $\quad \boldsymbol{f(a) = \begin{cases} -3a + 4 & (a \leqq -2) \\ \dfrac{1}{4}(a-4)^2 + 1 & (-2 < a < 4) \\ 1 & (4 \leqq a) \end{cases}}$

(3) (2) の結果から，関数 $b = f(a)$ のグラフは下の図のようになる．



279* 実数 α，β に対し，座標平面上の点 $(x,\ y)$ を $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$y=\alpha\beta$ によって定める． (神奈川大 改)

(1) $\alpha,\ \beta$ がすべての実数を動くとき，点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ．

(2) 実数 $\alpha,\ \beta$ が $\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ を満たすように動くとき，点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ．

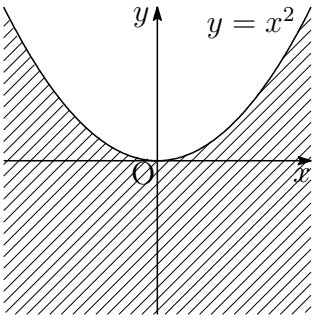
解答 (1) $\alpha+\beta=2x,\ \alpha\beta=y$ であるから，$\alpha,\ \beta$ を解とする 2 次方程式は

$$t^2-2xt+y=0$$

この方程式は実数解をもつから，係数について

$$D/4=(-x)^2-y\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y\leqq x^2$$

よって，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含む．

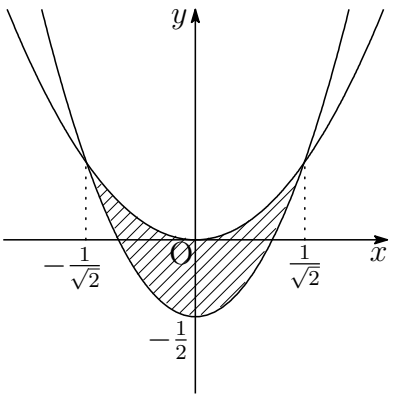


(2) $\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ より $\quad(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\leqq 1$

$\alpha+\beta=2x,\ \alpha\beta=y$ を代入すると

$$(2x)^2-2y\leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad y\geqq 2x^2-\frac{1}{2}$$

上式および (1) の結果から，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



東大 1954 年理科文科

点 $(x,\ y)$ が原点を中心とする半径 1 の円の内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲を図示せよ．

解答 $s=x+y$，$t=xy$ とすると

$$s^2-2t=(x+y)^2-2xy=x^2+y^2<1 \quad \text{ゆえに} \quad t>\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2} \quad \cdots①$$

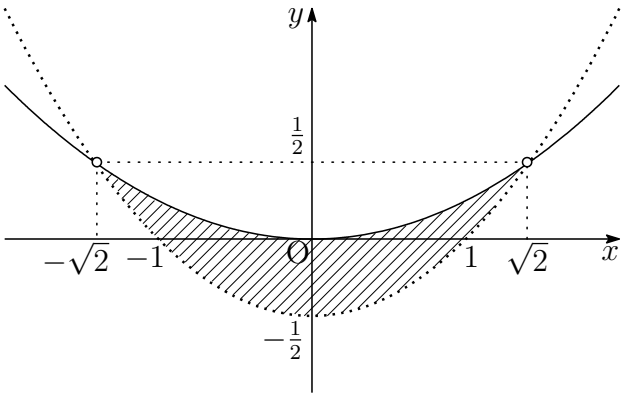
$x,\ y$ を解とする 2 次方程式は　$X^2-sX+t=0$

この方程式は，実数解をもつから，係数について

$$s^2-4t \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t \leqq \frac{s^2}{4} \quad \cdots②$$

①，② より　　$y>\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2},\ \ y \leqq \dfrac{x^2}{4}$

求める領域は，下の図の斜線部分で，点線および ∘ を含まない．

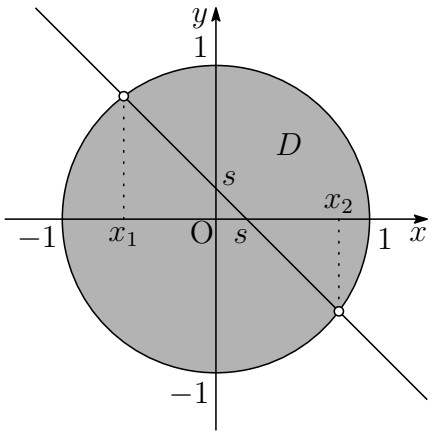


別解 $D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ とし，直線 $x+y=s$ 上の点 $(x,\ y)\in D$ における $t=xy$ のとる値の範囲を求める．

$$s^2=(x+y)^2\leqq(1^2+1^2)(x^2+y^2)<2$$

直線 $x+y=s$ $(-\sqrt{2}<s<\sqrt{2})$ と円 $x^2+y^2=1$ の共有点の x 座標を $x_1,\ x_2$ とすると $(x_1<x_2)$

$$x_1=\frac{s-\sqrt{s^2-2}}{2},\quad x_2=\frac{s+\sqrt{s^2-2}}{2}$$



$t=xy=x(s-x)$ より，$f(x)=x(s-x)$ $(x_1<x<x_2)$ とおくと

$$f(x)=-\left(x-\frac{s}{2}\right)^2+\frac{s^2}{4}$$

$f(x_1)=f(x_2)=\dfrac{s^2}{2}-\dfrac{1}{2},\ f\left(\dfrac{s}{2}\right)=\dfrac{s^2}{4}$ であるから，t の範囲について

$$\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}<t\leqq\frac{s^2}{4}\quad(-\sqrt{2}<s<\sqrt{2})$$

この不等式の表す領域は，前ページの図のとおりである．

広大文系 2018 年 1

次の問いに答えよ．

(1) t の 2 次関数 $s=\left(t-\dfrac{1}{5}\right)\left(t-\dfrac{3}{5}\right)$ のグラフを図示せよ．

(2) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(A) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(3) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

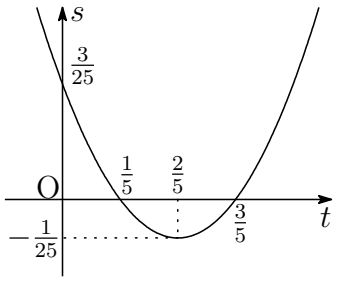
(B) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(4) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ．

解答　(1) $s=\left(t-\dfrac{1}{5}\right)\left(t-\dfrac{3}{5}\right)$ より

$$s=\left(t-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{1}{25}$$

グラフの概形は右の図のようになる．



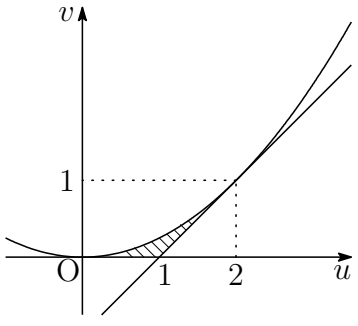
(2) $f(t)=t^2-ut+v$ とおくと　$f(t)=\left(t-\dfrac{u}{2}\right)^2+v-\dfrac{u^2}{4}$

2 次方程式 $f(t)=0$ の実数解 $x,\ y$ が $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たすから，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \geqq 0$ および上式より

$$v \geqq 0,\quad 1-u+v \geqq 0,\quad 0 \leqq \frac{u}{2} \leqq 1,\quad v-\frac{u^2}{4} \leqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} 0 \leqq u \leqq 2 \\ v \geqq 0 \\ v \geqq u-1 \\ v \leqq \dfrac{u^2}{4} \end{cases}$$



よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．

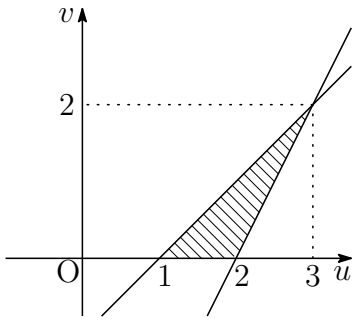
(3) 2 次方程式 $f(t)=0$ の実数解 $x,\ y$ が $0 \leqq x \leqq 1 \leqq y \leqq 2$ を満たすから，$f(0) \geqq 0$，$f(1) \leqq 0$，$f(2) \geqq 0$ より

$$v \geqq 0, \quad 1-u+v \leqq 0, \quad 4-2u+v \geqq 0$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} v \geqq 0 \\ v \leqq u-1 \\ v \geqq 2u-4 \end{cases}$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．



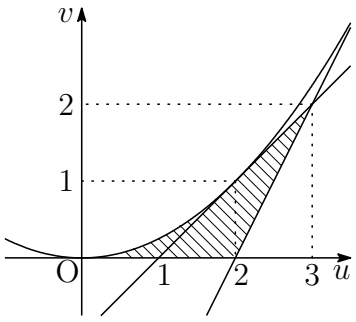
(4) $A=\{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$，$B=\{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1 \leqq y \leqq 2\}$ とすると，$(x,\ y)$ が 4 点 $(0,0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部は $A \cup B$ である．(1)，(2) で求めた領域をそれぞれ E，F とすると

$$\text{点}\,(x+y,\ xy) \quad \text{すなわち} \quad \text{点}\,(u,\ v)$$

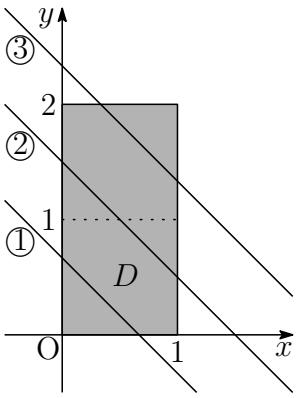
の表す領域は $E \cup F$ で，右の図のようになる．

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 \\ &= \left[\ \frac{u^3}{12}\ \right]_0^2 + \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{7}{6}} \end{aligned}$$



別解 $D=\{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$ とし，直線 $x+y=u$ 上の点 $(x,\ y) \in D$ における $v=xy$ のとる値の範囲を求める．



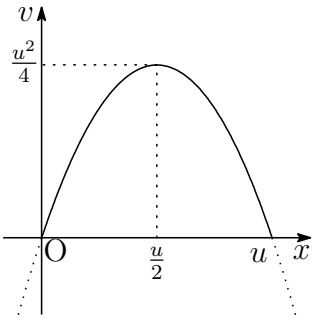
$$v=x(u-x)=-\left(x-\frac{u}{2}\right)^2+\frac{u^2}{4}$$

① $0 \leqq u \leqq 1$ のとき　$0 \leqq x \leqq u$

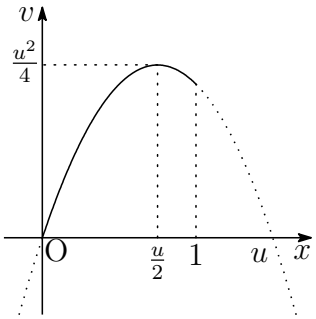
② $1 \leqq u \leqq 2$ のとき　$0 \leqq x \leqq 1$

③ $2 \leqq u \leqq 3$ のとき　$u-2 \leqq x \leqq 1$

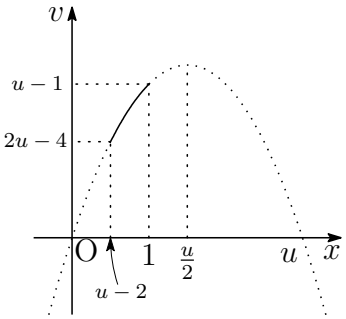
① $0 \leqq u \leqq 1$



② $1 \leqq u \leqq 2$



③ $2 \leqq u \leqq 3$



(i) $0 \leqq u \leqq 2$ のとき　$0 \leqq v \leqq \dfrac{u^2}{4}$

(ii) $2 \leqq u \leqq 3$ のとき　$2u-4 \leqq v \leqq u-1$

よって　$S=\displaystyle\int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du+\int_2^3 \{(u-1)-(2u-4)\}\,du=\frac{7}{6}$

名大理系 2023 年 1

実数係数の 4 次方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ は相異なる複素数 $\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ を解に持ち，それらは全て複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるとする．ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ はそれぞれ $\alpha,\ \beta$ と共役な複素数を表す．

(1) $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ を示せ．

(2) $t=\alpha+\overline{\alpha}$，$u=\beta+\overline{\beta}$ とおく．$p,\ q,\ r,\ s$ をそれぞれ t と u で表せ．

(3) 座標平面において，点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲を図示せよ．

解答　(1) α は点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるから

$$|\alpha-1|^2=1 \qquad \text{ゆえに} \qquad \alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$$

(2) $t=\alpha+\overline{\alpha}$，$u=\beta+\overline{\beta}$ より，(1) の結果から

$$\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}=t, \quad \beta+\overline{\beta}=\beta\overline{\beta}=u$$

したがって，$\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ を解とする 4 次方程式は

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})&=0\\ \{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}\}&=0\\ (x^2-tx+t)(x^2-ux+u)&=0 \qquad \text{(A)}\\ x^4-(t+u)x^3+(t+u+tu)x^2-2tux+tu&=0\end{aligned}$$

これが 4 次方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ と一致するから，同じ次数の項の係数を比較すると

$$\boldsymbol{p=t+u, \quad q=t+u+tu, \quad r=2tu, \quad s=tu}$$

(3) $\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ は，異なる 4 つの虚数であるから，(A) より　$t\neq u$

$$t^2-4t<0, \quad u^2-4u<0 \quad \text{すなわち} \quad 0<u<4,\ 0<t<4\ (t\neq u)$$

(2) の結果から，$t,\ u$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2-(t+u)x+tu=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2-px+s=0$$

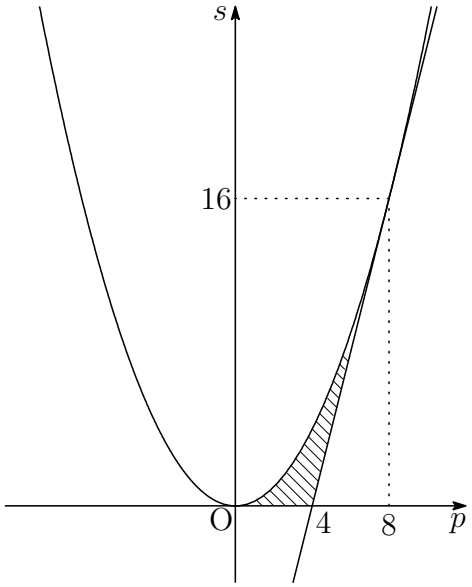
$f(x)=x^2-px+s$ とすると　$f(x)=\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2-4s}{4}$

2 次方程式 $f(x)=0$ は $0<x<4$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つから

$$0<\frac{p}{2}<4, \quad f\left(\frac{p}{2}\right)<0, \quad f(0)>0, \quad f(4)>0$$

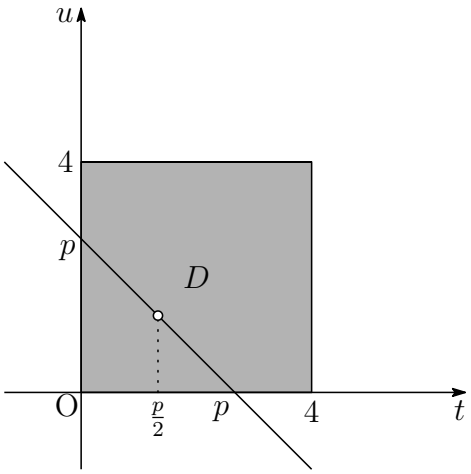
したがって　$0 < p < 8, \quad p^2 - 4s > 0, \quad s > 0, \quad -4p + s + 16 > 0$

点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．

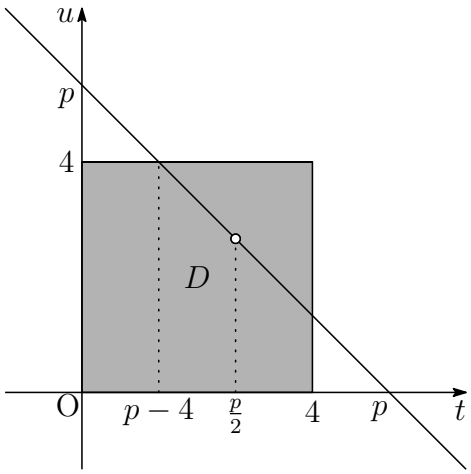


別解 $D=\{(t,\ u)\,|\,0<t<4,\ 0<u<4\}$ とし，直線 $t+u=p$ 上の点 $(t,\ u)\in D$ における $s=tu$ のとる値の範囲を求める．$t=2\mathrm{Re}(\alpha)$，$u=2\mathrm{Re}(\beta)$，$\mathrm{Re}(\alpha)\neq\mathrm{Re}(\beta)$ であるから，$t\neq u$ より，$t\neq\dfrac{p}{2}$

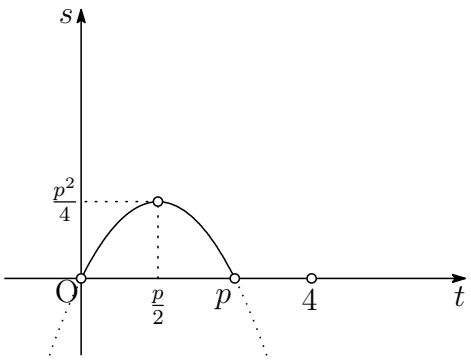
$$s=t(p-t)=-\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}$$

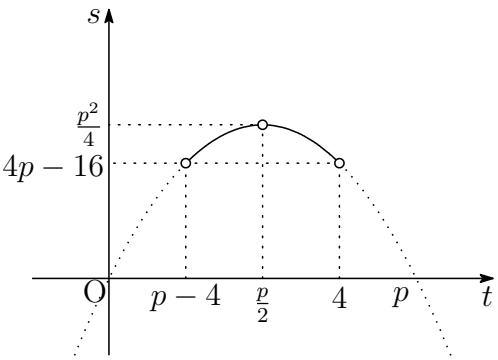


(i) $0<p\leqq 4$



(ii) $4\leqq p<8$





したがって

(i) $0<p\leqq 4$ のとき　$0<s<\dfrac{s^2}{4}$

(ii) $4\leqq p<8$ のとき　$4p-16<s<\dfrac{s^2}{4}$

(i)，(ii) より，前ページと同じ領域を得る．

280 実数 a に対し，xy 平面上の放物線 $C : y = (x-a)^2 - 2a^2 + 1$ を考える．

(1) a がすべての実数を動くとき，C が通過する領域を求め，図示せよ．

(2) a が $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき，C が通過する領域を求め，図示せよ．

(横浜国立大)

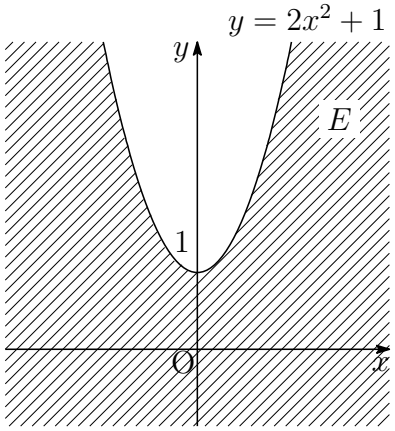
解答 (1) C の方程式を a について整理すると

$$a^2 + 2xa - x^2 + y - 1 = 0 \qquad (*)$$

a に関する 2 次方程式 $(*)$ が実数解をもつから，係数について

$$D = x^2 - 1\cdot(-x^2 + y - 1) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \leqq 2x^2 + 1$$

求める領域を E とすると，E は下の図の斜線部分で境界線を含む．



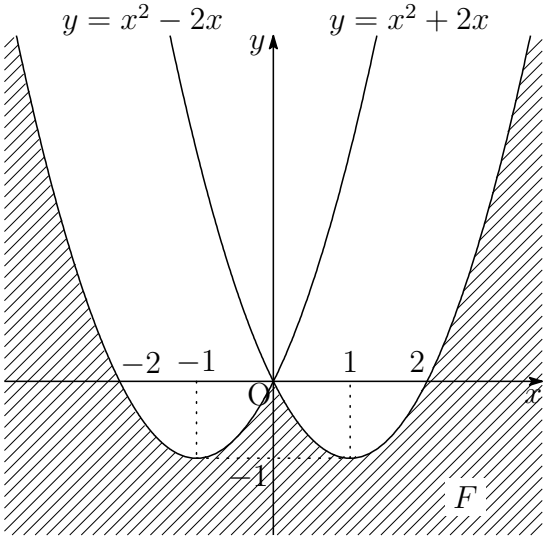
(2) $(*)$ の左辺を

$$f(a) = a^2 + 2xa - x^2 + y - 1$$

とおくと，$f(a) = 0$ の解が $-1 \leqq a \leqq 1$ に少なくとも 1 つ存在する $(x,\ y)$ の領域を求めればよい．まず $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲に $f(a) = 0$ を満たす a が存在しない $(x,\ y)$ の領域 F を求める．

F は $f(-1)<0$ かつ $f(1)<0$ を満たす領域であるから

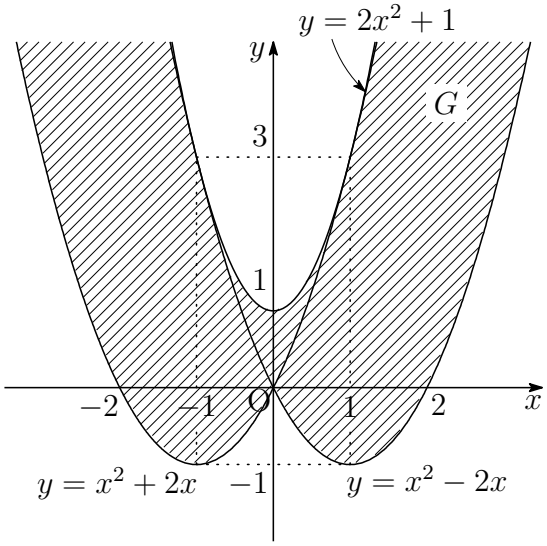
$$\begin{cases} -2x-x^2+y<0 \\ 2x-x^2+y<0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} y<x^2+2x \\ y<x^2-2x \end{cases}$$



求める領域を G とすると，$G=E\cap\overline{F}$ であるから

$$\begin{cases} y\leqq 2x^2+1 \\ y\geqq x^2+2x \\ y\geqq x^2-2x \end{cases}$$

G は下の図の斜線部分で境界線を含む.



7.25　三角関数と加法定理

7.25.1　Review

281 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け.

(1) $\sin\theta \geqq -\dfrac{1}{2}$

(2) $\tan\theta < 1$

(3) $\dfrac{1}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解答　(1) $\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi}$

(2) $\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi}$

(3) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{11}{6}\pi}$

282 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ で，$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\sin\beta = \dfrac{12}{13}$ のとき，次の値を求めよ.

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

(2) $\cos(\alpha-\beta)$

(3) $\sin 2\alpha$

(4) $\cos 2\beta$

(5) $\tan 2\alpha$

(6) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$

解答　$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\alpha}{2}\right)$ より，$\cos\alpha > 0$ であるから

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$\sin\beta = \dfrac{12}{13}$ $\left(\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$ より，$\cos\beta < 0$ であるから

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$$

(1)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=\boldsymbol{\frac{16}{65}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ &= \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\boldsymbol{\frac{33}{65}}\end{aligned}$$

(3)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\boldsymbol{\frac{24}{25}}$$

(4)

$$\cos 2\beta = 1-2\sin^2\beta = 1-2\left(\frac{12}{13}\right)^2=-\boldsymbol{\frac{119}{169}}$$

(5) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{5}\div\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{3}$ より

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\boldsymbol{\frac{24}{7}}$$

(6) $0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ より，$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるから

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

283 2 直線 $y=x+1$，$y=-(2+\sqrt{3})x-1$ のなす鋭角 θ を求めよ．

解答 2 直線 $y=x+1$，$y=-(2+\sqrt{3})x-1$ の偏角をそれぞれ α, β とすると

$$\tan\alpha=1,\quad \tan\beta=-(2+\sqrt{3})$$

したがって

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{-(2+\sqrt{3})-1}{1-(2+\sqrt{3})\cdot 1}=\frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\sqrt{3}$ であるから $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{3}}$

284 関数 $y=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフは $y=2\sin 3x$ のグラフを x 軸方向に［　ア　］だけ平行移動したものであり，その正で最小の周期は［　イ　］である．

解答 $y=2\sin 3\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから　(ア) $\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6}}$，(イ) $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$

7.25.2 Exercise

285* (1) $\sin 1$，$\sin 2$，$\sin 3$，$\cos 1$ という 4 つの数値を小さい方から順に並べよ．ただし，1，2，3 は，それぞれ 1 ラジアン，2 ラジアン，3 ラジアンを表す．
(鹿児島大 2021 年 [1])

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ であって，$\sin(\theta+44^\circ)=\sin\theta$ が成り立つとき，θ の値を求めよ．
(千葉工業大)

解答 (1) $\sin 2=\sin(\pi-2)$，$\sin 3=\sin(\pi-3)$，$\cos 1=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$ について

$$\pi-3>0,\quad \left(\frac{\pi}{2}-1\right)-(\pi-3)=\frac{4-\pi}{2}>0,$$
$$1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{4-\pi}{2}>0,\quad (\pi-2)-1=\pi-3>0,$$
$$\frac{\pi}{2}-(\pi-2)=\frac{4-\pi}{2}>0$$

ゆえに　$0<\pi-3<\dfrac{\pi}{2}-1<1<\pi-2<\dfrac{\pi}{2}$

したがって　$\sin(\pi-3)<\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)<\sin 1<\sin(\pi-2)$

よって　$\boldsymbol{\sin 3<\cos 1<\sin 1<\sin 2}$

(2) $0\leqq\theta\leqq 90^\circ$ より，$44^\circ\leqq\theta+44^\circ\leqq 134^\circ$ であることに注意して

$\theta+44^\circ=180-\theta$　これを解いて　$\boldsymbol{\theta=68^\circ}$

286 $0 \leqq x < 2\pi$ であるとき，次の不等式を解け．　(関西大)

(1) $\sin x \leqq \cos x$

(2) $|\sin x| \leqq |\cos x|$

(3) $|\sin x| \leqq \cos x$

解答　(1) $\sin x - \cos x \leqq 0$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ であるから　$\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 0$

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7\pi}{4}$ の範囲でこれを解くと

$$-\frac{\pi}{4} \leqq x - \frac{\pi}{4} \leqq 0, \quad \pi \leqq x - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4}$$

よって　　$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}, \quad \dfrac{5\pi}{4} \leqq x < 2\pi}$

(2) $\sin^2 x \leqq \cos^2 x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ であるから　$2\sin^2 x - 1 \leqq 0$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解いて $(0 \leqq x < 2\pi)$

$$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}, \ \frac{3\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5\pi}{4}, \ \frac{7\pi}{4} \leqq x < 2\pi}$$

(3) $\cos x \geqq 0$ であるから　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{3\pi}{2} \leqq x < 2\pi$

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\sin x \leqq \cos x$

(1) の結果を利用して　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$

(ii) $\dfrac{3\pi}{2} \leqq x < 2\pi$ のとき　$-\sin x \leqq \cos x$

$$\sin x + \cos x \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqq 0$$

$\dfrac{7\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9\pi}{4}$ の範囲でこれを解くと

$$2\pi \leqq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} \qquad \text{すなわち} \quad \frac{7\pi}{4} \leqq x < 2\pi$$

(i)，(ii) から　　$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}, \ \dfrac{7\pi}{4} \leqq x < 2\pi}$

287* 実数 x，y が $0 < y < x < \dfrac{\pi}{2}$，$\cos x + \cos y = 1$，$\sin x + \sin y = \sqrt{2}$ を満たすとき，次の値を求めよ．(日本女子大)

(1) $\cos(x-y)$

(2) $\cos x$，$\sin x$，$\cos y$，$\sin y$

解答 (1) $\cos x + \cos y = 1 \quad \cdots ①$，$\sin x + \sin y = \sqrt{2} \quad \cdots ②$

$(\cos x + \cos y)^2 = 1$，$(\sin x + \sin y)^2 = 2$ の辺々の和を計算すると

$$2 + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 3 \quad \text{ゆえに} \quad 2 + 2\cos(x-y) = 3$$

よって $\cos(x-y) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) $0 < x - y < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，(1) の結果より

$$x - y = \frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad x = y + \frac{\pi}{3}$$

これから $\cos x = \cos\left(y + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\cos y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin y$

$$\sin x = \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin y + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y$$

上の 2 式を ①，② にそれぞれ代入して整理すると

$$\frac{3}{2}\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y = 1, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y + \frac{3}{2}\sin y = \sqrt{2}$$

これを解くと $\boldsymbol{\cos y = \dfrac{3+\sqrt{6}}{6}}$，$\boldsymbol{\sin y = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}}$

この結果と ①，② から

$$\cos x = 1 - \cos y = \boldsymbol{\frac{3-\sqrt{6}}{6}}$$

$$\sin x = \sqrt{2} - \sin y = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}}$$

別解 ①，② より　$\cos x = 1 - \cos y,\ \sin x = \sqrt{2} - \sin y$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = (1 - \cos y)^2 + (\sqrt{2} - \sin y)^2$$

整理すると　　$2\sqrt{2}\sin y = 3 - 2\cos y \quad \cdots ③$

この両辺を平方すると　$8\sin^2 y = 9 - 12\cos y + 4\cos^2 y$

$$8(1 - \cos^2 y) = 9 - 12\cos y + 4\cos^2 y$$

整理すると　$12\cos^2 y - 12\cos y + 1 = 0$　ゆえに　$\cos y = \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{6}$

① から　$\sin x = 1 - \cos y = 1 - \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{6} = \dfrac{3 \mp \sqrt{6}}{6}$　(複号同順)

このとき，$0 < y < x < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos x < \cos y$ であるから

$$\boldsymbol{\cos x = \frac{3 - \sqrt{6}}{6},\quad \cos y = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sin^2 x = 1 - \cos^2 x &= \frac{21 + 6\sqrt{6}}{36} \\
&= \frac{3(7 + 2\sqrt{6})}{36} = \left\{ \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6} + 1)}{6} \right\}^2, \\
\sin^2 y = 1 - \cos^2 y &= \frac{21 - 6\sqrt{6}}{36} \\
&= \frac{3(7 - 2\sqrt{6})}{36} = \left\{ \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6} - 1)}{6} \right\}^2
\end{aligned}$$

$\sin x > 0$，$\sin y > 0$ であるから

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6},\quad \sin y = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}}$$

288 k を正の実数とし，2 次方程式 $8x^2 - 12kx + 3k^2 + 8 = 0$ は $\sin\theta + 2\cos\theta$，$2\sin\theta + \cos\theta$ を解にもつとする．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする．

(1) $\sin\theta + \cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(2) k の値を求めよ．

(3) $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

解答 (1) 解と係数の関係により

$$(\sin\theta + 2\cos\theta) + (2\sin\theta + \cos\theta) = \frac{3k}{2},$$
$$(\sin\theta + 2\cos\theta)(2\sin\theta + \cos\theta) = \frac{3k^2 + 8}{8}$$

上の 2 式をそれぞれ整理すると

$$3(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{3k}{2}, \quad 2 + 5\sin\theta\cos\theta = \frac{3k^2 + 8}{8}$$

よって　　$\boldsymbol{\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{k}{2}}$，$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta = \dfrac{3k^2 - 8}{40}}$

(2) (1) の結果を $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3k^2 - 8}{40} = 1 \quad \text{整理すると} \quad k^2 = 6$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{k}{2} > 0$ であるから　$\boldsymbol{k = \sqrt{6}}$

(3) (1)，(2) の結果から　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$\sin\theta < \cos\theta$ であるから

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}, \quad \boldsymbol{\cos\theta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

7.25.3 Try

289* $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$，$\tan\gamma=8$，$0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$，$\alpha+\beta+\gamma$ を求めよ．

(2) $\beta-\alpha>\gamma-\beta$ となることを示せ．

(3) $\beta>\dfrac{5}{12}\pi$ となることを示せ．　　(お茶の水女子大 改)

解答　(1) $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$ より

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+5}{1-2\cdot5}=-\frac{7}{9}$$

上式および $\tan\gamma=8$ より

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{-\dfrac{7}{9}+8}{1-\left(-\dfrac{7}{9}\right)\cdot8}=1$$

$\sqrt{3}<\tan\alpha<\tan\beta<\tan\gamma$，$0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$(*)\quad \frac{\pi}{3}<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}\quad \text{ゆえに}\quad \pi<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{2}\pi$$

よって　　$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi}$

(2) $(*)$ より，$0<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\gamma-\beta<\dfrac{\pi}{2}$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5-2}{1+5\cdot2}=\frac{3}{11},$$
$$\tan(\gamma-\beta)=\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta}=\frac{8-5}{1+8\cdot5}=\frac{3}{41}$$

したがって　$\tan(\beta-\alpha)>\tan(\gamma-\beta)$　よって　$\beta-\alpha>\gamma-\beta$

(3) (2) の結果から　$2\beta>\alpha+\gamma$,　　(1) の結果から　$\alpha+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi-\beta$

上の 2 式から　$2\beta>\dfrac{5}{4}\pi-\beta$　よって　$\beta>\dfrac{5}{12}\pi$

別解　$\tan\dfrac{5}{12}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=2+\sqrt{3}<5=\tan\beta$

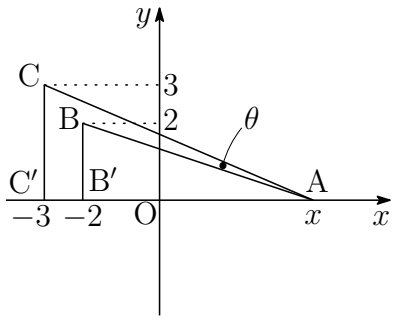
$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\beta>\dfrac{5}{12}\pi$

290* x を正の実数とし，座標平面上に 3 点 A$(x,\ 0)$，B$(-2,\ 2)$，C$(-3,\ 3)$ をとる．直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) $\tan\theta$ を x で表せ．　(北大文系 2019 年 2)

(2) $x > 0$ における $\tan\theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ．

解答　(1) 2 点 B，C から x 軸にそれぞれ垂線 BB′，CC′ を下ろし，$\beta = \angle\mathrm{BAB'}$，$\gamma = \angle\mathrm{CAC'}$ とすると



$$\tan\beta = \frac{2}{x+2}, \quad \tan\gamma = \frac{3}{x+3},$$
$$\theta = \gamma - \beta$$

したがって

$$\tan\theta = \tan(\gamma-\beta) = \frac{\tan\gamma - \tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta} = \frac{\dfrac{3}{x+3} - \dfrac{2}{x+2}}{1 + \dfrac{3}{x+3}\cdot\dfrac{2}{x+2}}$$
$$= \frac{3(x+2)-2(x+3)}{(x+2)(x+3)+6} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2+5x+12}}$$

(2) (1) の結果から　$f(x) = \dfrac{1}{x + \dfrac{12}{x} + 5}$　$(x > 0)$　$\cdots$①

$x > 0$，$\dfrac{12}{x} > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x + \frac{12}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{12}{x}} = 4\sqrt{3} \quad \cdots ②$$

② において，等号が成立するとき

$$x = \frac{12}{x} \quad \text{すなわち} \quad x = 2\sqrt{3}$$

①，② から　$f(x) \leqq \dfrac{1}{4\sqrt{3}+5} = \dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}$

よって，$\boldsymbol{x = 2\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $\dfrac{\boldsymbol{4\sqrt{3}-5}}{\boldsymbol{23}}$ をとる．

291 xy 平面上に正三角形があり，その 1 辺の傾きが 1 であるとする．

(1) 他の 2 辺の傾きを求めよ．

(2) この正三角形の 3 つの頂点が曲線 $y=x^2$ 上にあるとする．3 つの頂点の x 座標を求めよ． (長岡技術科学大)

解答 (1) 他の 2 辺の傾きは，それぞれ

$$\tan(45^\circ+60^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 60^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 60^\circ}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\boldsymbol{-2-\sqrt{3}}$$

$$\tan(45^\circ-60^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 60^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 60^\circ}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\boldsymbol{-2+\sqrt{3}}$$

(2) 3 頂点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とし，3 直線 AB，BC，CA のそれぞれの傾きを $1, -2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}$ とすると

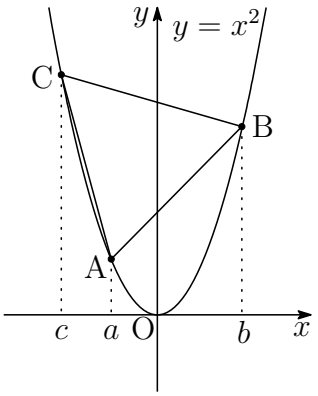
$$\frac{b^2-a^2}{b-a}=a+b=1,$$
$$\frac{c^2-b^2}{c-b}=b+c=-2+\sqrt{3},$$
$$\frac{a^2-c^2}{a-c}=c+a=-2-\sqrt{3}$$

上の 3 式の辺々を加えると

$$2(a+b+c)=-3 \quad \text{ゆえに} \quad a+b+c=-\frac{3}{2}$$

よって，3 つの頂点の x 座標は

$$a=(a+b+c)-(b+c)=-\frac{3}{2}-(-2+\sqrt{3})=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\sqrt{3}},$$
$$b=(a+b+c)-(c+a)=-\frac{3}{2}-(-2-\sqrt{3})=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\sqrt{3}},$$
$$c=(a+b+c)-(a+b)=-\frac{3}{2}-1=\boldsymbol{-\frac{5}{2}}$$



292* a を正の定数とする．放物線 $C : y = ax^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ at^2)$ (ただし $t \neq 0$) に対して，C の P での接線を m，P を通り，y 軸に平行な直線を v とする．直線 m に関して v を対称移動した直線を l とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) l の傾きを，a，t を用いて表せ．　(大阪府立大)

(2) l の y 切片は t によらず一定であることを示せ．

解答　(1) $y' = 2at$ より，直線 m の傾きは　$2at$

よって，直線 m と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると

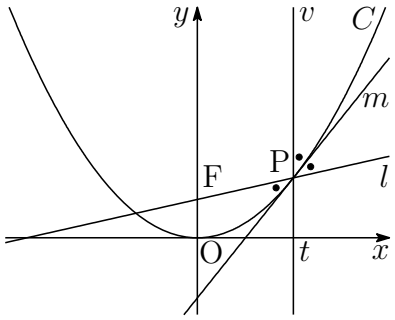
$$\tan\theta = 2at$$

直線 l の偏角を φ とすると

$$\varphi + \frac{\pi}{2} = 2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = 2\theta - \frac{\pi}{2}$$

よって，直線 l の傾きは

$$\tan\varphi = \tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{\tan^2\theta - 1}{2\tan\theta} = \boldsymbol{\frac{4a^2t^2 - 1}{4at}}$$



(2) 直線 l の方程式は

$$y - at^2 = \frac{4a^2t^2 - 1}{4at}(x - t) \quad \text{よって} \quad y = \frac{4a^2t^2 - 1}{4at}x + \frac{1}{4a}$$

したがって，l の y 切片は t によらず $\dfrac{1}{4a}$ となり，一定である．

補足　C と y 軸との交点 F は C の焦点である．

北大理系 2009 年 3

$t>0$ とし，$x=t$ で表される直線を ℓ_1 とする．$y=\dfrac{x^2}{4}$ で表される放物線を C とおく．C と ℓ_1 の共有点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における C の接線を ℓ_2 とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) ℓ_1 と ℓ_2 のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(2) ℓ_1 を ℓ_2 に関して対称移動させた直線を ℓ_3 とおくとき，ℓ_3 の方程式を求めよ．

(3) ℓ_3 は t によらない定点を通ることを示せ．

(4) ℓ_3 と C の 2 つの共有点を P，Q とする．線分 PQ の長さが最小になるような t の値を求めよ．

解答　(1) ℓ_1 の x 軸の正の向きとなす角 (偏角) は　$\dfrac{\pi}{2}$

$C:y=\dfrac{x^2}{4}$ より，$y'=\dfrac{x}{2}$ であるから，C 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における接線 ℓ_2 の傾きは $\dfrac{t}{2}$ であるから，その偏角を β とすると　$\tan\beta=\dfrac{t}{2}\quad(t>0)$

したがって，ℓ_1 と ℓ_2 のなす角 θ について，$t>0$ に注意して

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\frac{1}{\tan\beta}=\frac{2}{t}\quad\left(t>0,\ \ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

ゆえに　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{t^2}{t^2+4}$　すなわち　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}}$

(2) ℓ_3 の偏角を γ とすると　$\dfrac{\pi}{2}+\gamma=2\beta\quad(t>0$ より，$0<\gamma<\frac{\pi}{2})$

$$\tan\gamma=\tan\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)=-\frac{1}{\tan2\beta}$$
$$=\frac{\tan^2\beta-1}{2\tan\beta}=\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2-1}{2\cdot\frac{t}{2}}=\boldsymbol{\frac{t^2-4}{4t}}$$

よって，ℓ_3 は点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{t^2-4}{4t}$ の直線であるから

$$y-\frac{t^2}{4}=\frac{t^2-4}{4t}(x-t)\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{y=\frac{t^2-4}{4t}x+1}$$

(3) (2) の結果から，$(t^2-4)x-4t(y-1)=0$ となり，ℓ_3 は定点 $\boldsymbol{(0,\ 1)}$ を通る

(4) C と ℓ_3 の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{4}=\frac{t^2-4}{4t}x+1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-t)(tx+4)=0$$

2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ $x_p,\ x_q$ とすると　$x_p-x_q=t+\dfrac{4}{t}$

また　$\dfrac{1}{\cos^2\gamma}=1+\tan^2\gamma=1+\left(\dfrac{t^2-4}{4t}\right)^2=\left(\dfrac{t^2+4}{4t}\right)^2$

$\dfrac{1}{\cos\gamma}=\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{t}$ となり　$\mathrm{PQ}=\dfrac{x_p-x_q}{\cos\gamma}=\left(t+\dfrac{4}{t}\right)\left(\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{4}{t^2}+2$

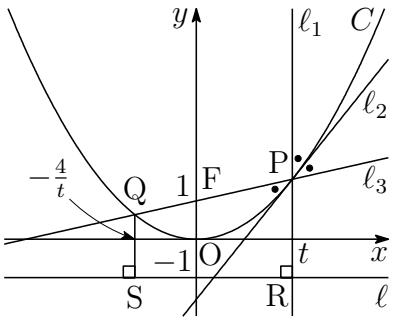
相加平均・相乗平均の大小関係により　$\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{4}{t^2}\geqq 2\sqrt{\dfrac{t^2}{4}\cdot\dfrac{4}{t^2}}=2$

上式において，等号が成立するのは　$\dfrac{t^2}{4}=\dfrac{4}{t^2}$　すなわち　$t=2$

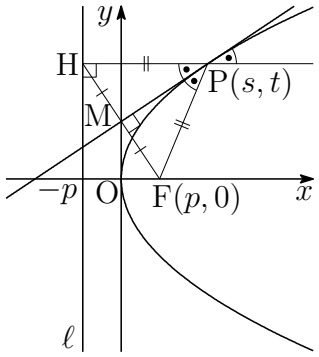
よって，PQ は，$\boldsymbol{t=2}$ のとき最小値 4 をとる．

別解 (3) で求めた定点 F(0, 1) は C の焦点である．準線を $\ell: y=-1$ とし，2 点 P，Q から ℓ に垂線 PR，QS を引くと

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}&=\mathrm{PF}+\mathrm{QF}=\mathrm{PR}+\mathrm{QS}\\&=\left(\frac{t^2}{4}+1\right)+\left(\frac{4}{t^2}+1\right)\\&=\frac{t^2}{4}+\frac{4}{t^2}+2\end{aligned}$$



解説 放物線 $y^2 = 4px$ の焦点を F，準線を ℓ とする．F の座標は $(p,\ 0)$，ℓ の方程式は $x = -p$ である．この放物線上の任意の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とし，線分 FH の中点を M とする．



放物線の定義によると PF = PH であるから，二等辺三角形 PHF において，直線 PM は頂角 ∠FPH を 2 等分する．

よって，図に示した 3 つの角は等しいことがわかる．

PM⊥FH と直線 FH の傾きが $-\dfrac{t}{2p}$ であるから，直線 PM の方程式は

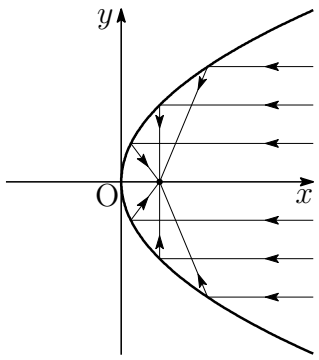
$$y - t = \frac{2p}{t}(x - s)$$

$t^2 = 4ps$ であるから，放物線上の点 P における接線の方程式は

$$ty = 2p(x + s)$$

点 M の座標は $\left(0,\ \dfrac{t}{2}\right)$ であり，この接線上にあるから，直線 PM は放物線上の点 P における接線であることがわかる．

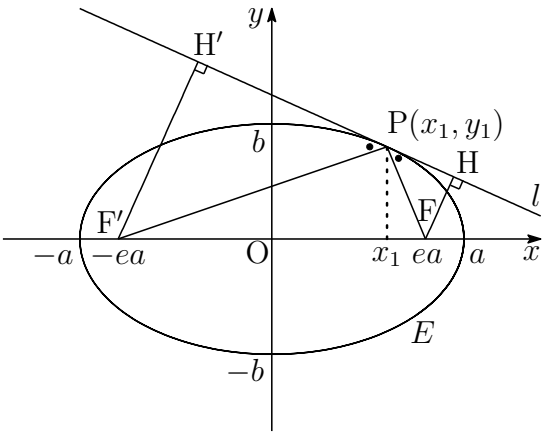
以上のことから，放物線の軸に平行に進んできた光や電波が放物線に当たって反射すると，右の図のように，そのすべてが焦点を通過する．



2 次曲線の離心率を e とする．

楕円 $E : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について $(a>b)$，E 上の点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，焦点を $\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$，E の P における接線を l とする．F，F′ から l にそれぞれ垂線 FH，F′H′ を引くと，次が成り立つ．

$$\mathrm{FP}=a-ex_1$$
$$\mathrm{F'P}=a+ex_1$$
$$\angle\mathrm{FPH}=\angle\mathrm{F'PH'}$$



証明

$$\begin{aligned}\mathrm{FP}^2&=(x_1-ea)^2+{y_1}^2={x_1}^2-2eax_1+e^2a^2+{y_1}^2\\&={x_1}^2-2eax_1+\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)a^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-{x_1}^2)\\&=a^2-2eax_1+\frac{a^2-b^2}{a^2}{x_1}^2\\&=a^2-2eax_1+e^2{x_1}^2=(a-ex_1)^2\end{aligned}$$

$a>ex_1$ であるから　$\mathrm{FP}=a-ex_1$　同様にして　$\mathrm{F'P}=a+ex_1$

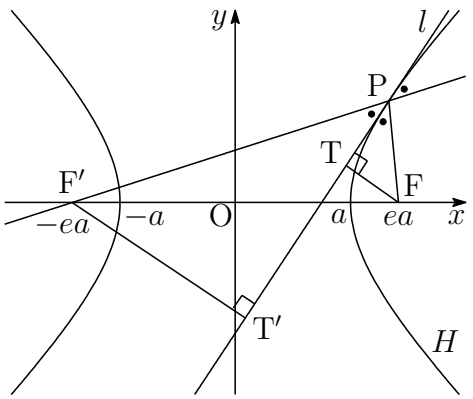
$\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$ から $l : \dfrac{x_1}{a^2}x+\dfrac{y_1}{b^2}y-1=0$ までの距離は，それぞれ

$$\mathrm{FH}=\frac{\left|\dfrac{x_1}{a^2}ea-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)^2}}=\frac{a-ex_1}{\sqrt{{x_1}^2+\left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}=\frac{\mathrm{FP}}{\sqrt{{x_1}^2+\left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$
$$\mathrm{F'H'}=\frac{\left|\dfrac{x_1}{a^2}(-ea)-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)^2}}=\frac{a+ex_1}{\sqrt{{x_1}^2+\left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}=\frac{\mathrm{F'P}}{\sqrt{{x_1}^2+\left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

上の 2 式から　$\dfrac{\mathrm{FH}}{\mathrm{FP}}=\dfrac{\mathrm{F'H'}}{\mathrm{F'P}}$　ゆえに　$\angle\mathrm{FPH}=\angle\mathrm{F'PH'}$　　証終

参照 2 次曲線 (数学 C)

双曲線 $H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について，H 上の点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，焦点を $\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$，H の P における接線を l とする．F，F′ から l にそれぞれ垂線 FT，F′T′ を引くと，次が成り立つ．



$$\mathrm{FP}=a-ex_1$$
$$\mathrm{F}'\mathrm{P}=a+ex_1$$
$$\angle\mathrm{FPT}=\angle\mathrm{F}'\mathrm{PT}'$$

証明

$$\begin{aligned}\mathrm{FP}^2&=(x_1-ea)^2+{y_1}^2={x_1}^2-2eax_1+e^2a^2+{y_1}^2\\&={x_1}^2-2eax_1+\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)a^2+\frac{b^2}{a^2}({x_1}^2-a^2)\\&=a^2-2eax_1+\frac{a^2+b^2}{a^2}{x_1}^2\\&=a^2-2eax_1+e^2{x_1}^2=(a-ex_1)^2\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{FP}=|a-ex_1|$　同様にして　$\mathrm{F}'\mathrm{P}=|a+ex_1|$

$\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$ から $l:\dfrac{x_1}{a^2}x-\dfrac{y_1}{b^2}y-1=0$ までの距離は，それぞれ

$$\mathrm{FT}=\frac{\left|\dfrac{x_1}{a^2}ea-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)^2}}=\frac{|a-ex_1|}{\sqrt{{x_1}^2+\left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}=\frac{\mathrm{FP}}{\sqrt{{x_1}^2+\left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

$$\mathrm{F}'\mathrm{T}'=\frac{\left|\dfrac{x_1}{a^2}(-ea)-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)^2}}=\frac{|a+ex_1|}{\sqrt{{x_1}^2+\left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}=\frac{\mathrm{F}'\mathrm{P}}{\sqrt{{x_1}^2+\left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

上の 2 式から　$\dfrac{\mathrm{FT}}{\mathrm{FP}}=\dfrac{\mathrm{F}'\mathrm{T}'}{\mathrm{F}'\mathrm{P}}$　ゆえに　$\angle\mathrm{FPT}=\angle\mathrm{F}'\mathrm{PT}'$　　**証終**

293 (1) (a) 加法定理を利用し，等式 $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ を証明せよ．

(b) $0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ を満たす θ を求めよ．

(2) (1)(b) で求めた θ に対して，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) 3 つの三角比の積 $\sin 6^\circ\sin 54^\circ\sin 66^\circ$ の値を求めよ． (浜松医科大)

解答 (1) (a) 加法定理により

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

上の第 1 式から第 2 式を引くと

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y \qquad (*)$$

$(*)$ に $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ を代入すると

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(b) $\sin 3\theta-\sin 2\theta=0$ を満たす θ を求めればよい．

(a) で証明した等式に $\alpha=3\theta$，$\beta=2\theta$ を代入すると

$$\sin 3\theta-\sin 2\theta=2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=0$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$0^\circ<\dfrac{5\theta}{2}<225^\circ$，$0^\circ<\dfrac{\theta}{2}<45^\circ$ であるから上式を満たす θ は

$$\frac{5\theta}{2}=90^\circ \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{\theta=36^\circ}$$

(2) $(*)$ に $x=2\theta$，$y=\theta$ を代入すると $\sin 3\theta-\sin\theta=2\cos 2\theta\sin\theta$

$$\sin 3\theta=2\cos 2\theta\sin\theta+\sin\theta$$

上式を $\sin 2\theta=\sin 3\theta$ に代入すると $\sin 2\theta=2\cos 2\theta\sin\theta+\sin\theta$

$$2\sin\theta\cos\theta=2\cos 2\theta\sin\theta+\sin\theta$$

$\sin\theta\neq 0$ であるから $2\cos\theta=2\cos 2\theta+1$

$$2\cos\theta=2(2\cos^2\theta-1)+1 \quad \text{ゆえに} \quad 4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0 \qquad (**)$$

$\cos\theta>0$ に注意してこれを解くと $\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$

(3) $(**)$ より　$\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{4}$

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}$ に $\alpha = 66^\circ,\ \beta = 6^\circ$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sin 66^\circ \sin 6^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 72^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cos 2\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\theta + 1\right) = -\cos^2\theta + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

また，$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ &= \cos\theta\left(-\cos^2\theta + \frac{3}{4}\right) = \cos\theta\left(-\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\cos\theta = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\theta \\ &= \frac{1}{4}\cos\theta - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{16}}\end{aligned}$$

7.26　三角関数の応用

7.26.1　Review

294 次の方程式，不等式を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で解け.

(1) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

(2) $\cos 2\theta - \sin\theta \leqq 0$

(3) $\sin 2\theta + \cos\theta > 0$

(4) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \geqq 1$

解答　(1) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$ より　$2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$

整理すると　$2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$　ゆえに　$(\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

したがって　$\sin\theta = 1,\ \dfrac{1}{2}$　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

(2) $\cos 2\theta - \sin\theta \leqq 0$ より　$(1 - 2\sin^2\theta) - \sin\theta \leqq 0$

整理すると　$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 \geqq 0$　ゆえに　$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) \geqq 0$

したがって　$\sin\theta \leqq -1,\ \dfrac{1}{2} \leqq \sin\theta$　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{6}\pi,\ \theta = \dfrac{3}{2}\pi}$

(3) $\sin 2\theta + \cos\theta > 0$ より　$2\sin\theta\cos\theta + \cos\theta > 0$

整理すると　$\cos\theta(2\sin\theta + 1) > 0$

$$\begin{cases} \cos\theta > 0 \\ \sin\theta > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \cos\theta < 0 \\ \sin\theta < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi}$

(4) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \geqq 1$ より　$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) \geqq \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{13}{6}\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

よって　$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi}$

295 次の関数の最大値，最小値とそのときの $theta$ の値をそれぞれ求めよ．

(1) $f(\theta) = -\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(2) $f(\theta) = \cos^2\theta + \cos 2\theta - 3\sin\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(3) $f(\theta) = \sin\theta + \cos\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi\right)$

解答 (1) $f(\theta) = -\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ より

$$f(\theta) = \cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \left(\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

よって　$\cos\theta = 1$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = 0}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{1 + \sqrt{3}}$

$\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{3}{4}}$

(2) $f(\theta) = \cos^2\theta + \cos 2\theta - 3\sin\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ より

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (1 - \sin^2\theta) + (1 - 2\sin^2 theta) - 3\sin\theta \\ &= -3\sin^2\theta - 3\sin\theta + 2 \\ &= -3\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \end{aligned}$$

よって　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{11}{4}}$

$\sin\theta = 1$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-4}$

(3) $f(\theta) = \sin\theta + \cos\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi\right)$ より

$$f(\theta) = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}$ より　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \pi$

よって　$\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

$\theta + \dfrac{\pi}{4} = \pi$，すなわち，$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき，最小値 $\boldsymbol{0}$

7.26.2 Exercise

296* 関数 $y = \cos 2\theta - 4a\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について

(1) $t = \sin\theta$ とするとき，y を t で表せ.

(2) 関数 y の最大値と最小値を求めよ.

解答 (1) $\sin\theta = t$，$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2t^2$ より

$$y = (1 - 2t^2) - 4at = \boldsymbol{-2t^2 - 4at + 1}$$

(2) $f(t) = -2t^2 - 4at + 1$ とおくと　$f(t) = -2(t+a)^2 + 2a^2 + 1$
最大値を M，最小値 m とすると

(i) $1 < -a$，すなわち，$a < -1$ のとき，$M = f(1)$
$-1 \leqq -a \leqq 1$，すなわち，$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき，$M = f(-a)$
$-a < -1$，すなわち，$a > 1$ のとき，$M = f(-1)$

(ii) $0 < -a$，すなわち，$a < 0$ のとき，$m = f(-1)$
$-a \leqq 0$，すなわち，$a \geqq 0$ のとき，$m = f(1)$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{M=}\begin{cases} \boldsymbol{-4a-1} & \boldsymbol{(a<-1)} \\ \boldsymbol{2a^2+1} & \boldsymbol{(-1 \leqq a \leqq 1)} \\ \boldsymbol{4a-1} & \boldsymbol{(1<a)} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{m=}\begin{cases} \boldsymbol{4a-1} & \boldsymbol{(a<0)} \\ \boldsymbol{-4a-1} & \boldsymbol{(a \geqq 0)} \end{cases}$$

補足 定義域 $-1 \leqq t \leqq 1$ の中央 $t = 0$ が軸 $t = -a$ より左側 $(0 < -a)$ にあるとき，定義の左端で最小値をとり，定義域 $-1 \leqq t \leqq 1$ の中央 $t = 0$ が軸 $t = -a$ より右側 $(-a \leqq 0)$ にあるとき，定義の右端で最小値をとる.

熊大文系 2008 年 1

a を実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y = a\cos\theta - 2\sin^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ $M(a)$，$m(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $M(a)$ と $m(a)$ を求めよ。

(2) a が実数全体を動くとき，$M(a)$ の最小値と $m(a)$ の最大値を求めよ。

解答 (1) $a\cos\theta - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta + a\cos\theta - 2$ であるから

$\cos\theta = x$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$y = 2x^2 + ax - 2 = 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} - 2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ゆえに，この関数のグラフは下に凸の放物線で，

軸は $x = -\dfrac{a}{4}$ である．$-1 \leqq x \leqq 1$ の中央は　$x = 0$

最大値 $M(a)$ は，次の 2 つの場合に分けて求める．

2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

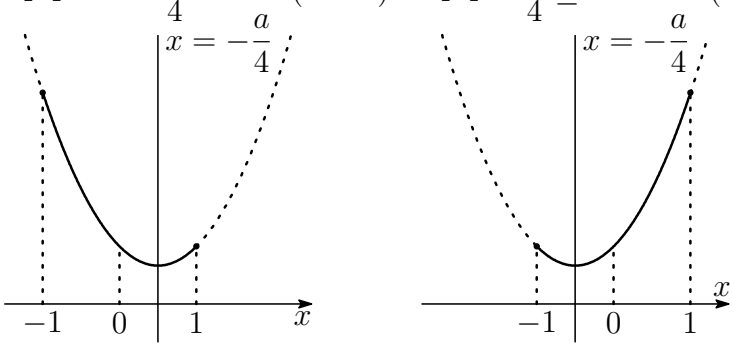
［1］$0 < -\dfrac{a}{4}$　すなわち　$a < 0$ のとき

$x = -1$ で最大値をとるから　$M(a) = 2(-1)^2 + a(-1) - 2 = -a$

［2］$-\dfrac{a}{4} \leqq 0$　すなわち　$a \geqq 0$ のとき

$x = 1$ で最大値をとるから　$M(a) = 2\cdot 1^2 + a\cdot 1 - 2 = a$

［1］$0 < -\dfrac{a}{4}$ のとき $(a < 0)$　　［2］$-\dfrac{a}{4} \leqq 0$ のとき $(a \geqq 0)$



したがって　　$\boldsymbol{M(a) = \begin{cases} -a & (a < 0) \\ a & (a \geqq 0) \end{cases}}$

最小値 $m(a)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

［1］$1 < -\dfrac{a}{4}$　すなわち　$a < -4$ のとき

$x = 1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2\cdot 1^2 + a\cdot 1 - 2 = a$

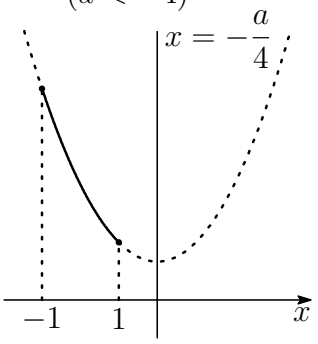
［2］$-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$　すなわち　$-4 \leqq a \leqq 4$ のとき

$x = -\dfrac{a}{4}$ で最小値をとるから　$m(a) = -\dfrac{a^2}{8} - 2$

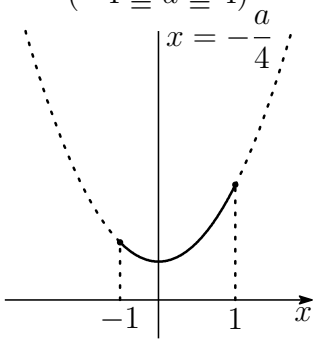
［3］$-\dfrac{a}{4} < -1$　すなわち　$4 < a$ のとき

$x = -1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2\cdot(-1)^2 + a\cdot(-1) - 2 = -a$

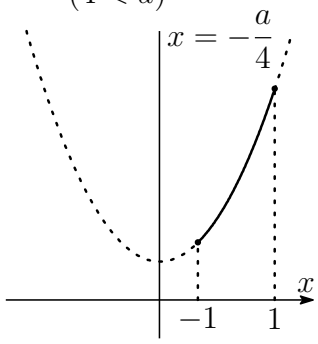
［1］$1 < -\dfrac{a}{4}$ のとき　$(a < -4)$



［2］$-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$ のとき　$(-4 \leqq a \leqq 4)$



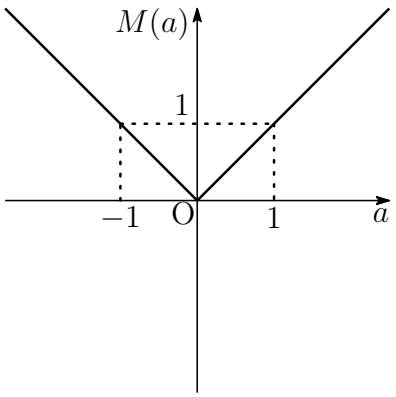
［3］$-\dfrac{a}{4} < -1$ のとき　$(4 < a)$

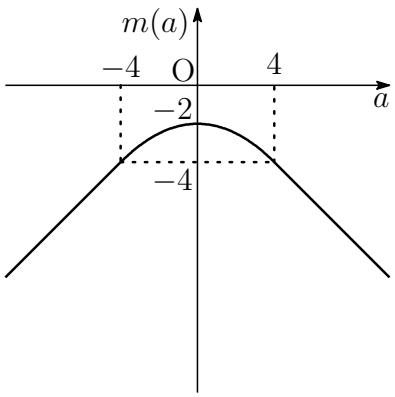


したがって　$\boldsymbol{m(a) = \begin{cases} a & (a < -4) \\ -\dfrac{a^2}{8} - 2 & (-4 \leqq a \leqq 4) \\ -a & (4 < a) \end{cases}}$

(2) (1) の結果から

$M(a)$ の最小値は 0，　$m(a)$ の最大値は -2





297* 関数 $y = 2\sqrt{2}\sin 2\theta - 4\sin\theta - 4\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ．

解答 $t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

$$(*)\quad t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{ゆえに} \quad -1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

$t = \sin\theta + \cos\theta$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= 4\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta - 4(\sin\theta + \cos\theta) \\ &= 4\sqrt{2}\cdot\frac{t^2 - 1}{2} - 4t = 2\sqrt{2}t^2 - 4t - 2\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2}\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$(*)$ より　$t = -1$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \pi}$ のとき，最大値 $\mathbf{4}$

$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{7}{12}\pi}$ のとき，最小値 $\mathbf{-3\sqrt{2}}$

298* 関数 $f(x)=8\sqrt{3}\cos^2 x+6\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin^2 x$ について

(1) $f(x)$ を $\sin 2x$ と $\cos 2x$ を用いて表せ.

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ であるとき，関数 $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ.

解答 (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 8\sqrt{3}\cos^2 x+6\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin^2 x \\ &= 8\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+6\cdot\frac{\sin 2x}{2}+2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= \boldsymbol{3\sin 2x+3\sqrt{3}\cos 2x+5\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)+5\sqrt{3} \\ &= 6\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2x+\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{7\pi}{3}$ であるから

$2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{12}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{6+5\sqrt{3}}$

$2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{x=\dfrac{7\pi}{12}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-6+5\sqrt{3}}$

熊大理系 2010 年 1

関数 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=t$ とおいて，y を t の式で表せ。

(2) $0\leqq x\leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，y の最大値および最小値を求めよ。

解答 (1) $\quad t=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$x-\dfrac{\pi}{3}=\theta$ とおくと $t=2\sin\theta\cdots$① であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x&=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left\{2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right\}\\&=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2\theta\\&=2(1-2\sin^2\theta)=2-(2\sin\theta)^2=2-t^2\end{aligned}$$

また $\quad 2\sin x-2\sqrt{3}\cos x=2(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=2t$

よって $\quad y=(2-t^2)+2t=\boldsymbol{-t^2+2t+2}$

別解 $t=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ の両辺を平方すると

$$\begin{aligned}t^2&=\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x\\&=\frac{1-\cos 2x}{2}-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\\&=-\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2\end{aligned}$$

ゆえに $\quad \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2-t^2$

また $\quad 2\sin x-2\sqrt{3}\cos x=2(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=2t$

よって $\quad y=(2-t^2)+2t=\boldsymbol{-t^2+2t+2}$

(2) ① より $0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき $\quad -\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\quad$ ゆえに $\quad -\sqrt{3}\leqq t\leqq\sqrt{3}$

(1) の結果から $\quad y=-(t-1)^2+3$

よって

$t=1\quad$ すなわち $\quad \theta=\dfrac{\pi}{6}\left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき $\quad$ **最大値 3**

$t=-\sqrt{3}\quad$ すなわち $\quad \theta=-\dfrac{\pi}{3}(x=0)$ のとき $\quad$ **最小値 $\boldsymbol{-2\sqrt{3}-1}$**

熊大文系 2012 年 3

$f(\theta)=4\left(\sin^3\dfrac{\theta}{2}+\cos^3\dfrac{\theta}{2}\right)+6\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)(\sin\theta-2)-\sqrt{6}(\sin\theta+1)$ とおく。ただし，θ の範囲は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x=\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，$f(\theta)$ を x のみの式で表せ。

(2) $f(\theta)$ の最小値そのときの θ の値を求めよ。

解答 (1) $x=\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}$ の両辺を平方すると

$$x^2=1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=1+\sin\theta$$

ゆえに

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(x^2-1),\quad \sin\theta=x^2-1$$

$$\begin{aligned}\sin^3\frac{\theta}{2}+\cos^3\frac{\theta}{2}&=\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^3-3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)\\&=x^3-3\cdot\frac{1}{2}(x^2-1)x=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\end{aligned}$$

したがって，上の諸式より

$$\begin{aligned}f(\theta)&=4\left(\sin^3\frac{\theta}{2}+\cos^3\frac{\theta}{2}\right)+6\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)(\sin\theta-2)-\sqrt{6}(\sin\theta+1)\\&=4\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\right)+6x\{(x^2-1)-2\}-\sqrt{6}\{(x^2-1)+1\}\\&=\boldsymbol{4x^3-\sqrt{6}x^2-12x}\end{aligned}$$

(2) $$x = \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi\right) \quad \cdots ①$$

このとき　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} \leqq \pi$　ゆえに　$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$

(1) の結果より

$$g(x) = 4x^3 - \sqrt{6}x^2 - 12x \quad (0 \leqq x \leqq \sqrt{2})$$

とおくと

$$g'(x) = 12x^2 - 2\sqrt{6}x - 12 = 2(2x - \sqrt{6})(3x + \sqrt{6})$$

したがって，$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	極小 $-\frac{9}{2}\sqrt{6}$	↗	

また，① により $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$　すなわち　$\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって，$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{9}{2}\sqrt{6}}$ をとる．

299 関数 $y=\sin x+3\cos x$ $(0 \leqq x<2\pi)$ の最小値は［ ア ］である．また，y が最小値をとるときの x の値を θ とすると，$\cos 2\theta=$［ イ ］である．(工学院大)

解答 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ とおくと $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} y&=\sin x+3\cos x \\ &=\sqrt{10}(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha) \\ &=\sqrt{10}\sin(x+\alpha) \end{aligned}$$

y が最小値をとるときの x の値が θ であるから

$$\theta+\alpha=\frac{3\pi}{2}\quad \text{ゆえに}\quad \theta=\frac{3\pi}{2}-\alpha\text{のとき，}y\text{は最小値}\ \boldsymbol{-\sqrt{10}}$$

$2\theta=3\pi-2\alpha$ であるから

$$\begin{aligned} \cos 2\theta&=\cos(3\pi-2\alpha)=\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha \\ &=1-2\cos^2\alpha=1-2\cdot\frac{1}{10}=\boldsymbol{\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

300* $0 \leqq \theta<2\pi$ のとき，θ の方程式 $\cos^2\theta+\sin\theta+a=0$ が解をもつような a の値の範囲を求めよ．

解答 $x=\sin\theta$ とおくと $(0 \leqq \theta<2\pi)$　$-1 \leqq x \leqq 1$

$$a=x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=a$ が共有点をもつことであるから

$$\boldsymbol{-\frac{5}{4} \leqq a \leqq 1}$$

7.26.3 Try

301* (1) $\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ で表せ.

(2) 関数 $y = -8\sin^3\theta + 6\sin\theta - 3\cos\theta + 4\cos^3\theta + 1$ の $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ. (岩手大)

解答 (1) (加法定理による証明)

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta\\ &= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

別解 (ド・モアブルの定理による証明)

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

ド・モアブルの定理により $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

上の 2 式から

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

上式の虚部は等しいので

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\\ &= 3(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

なお, 実部についても同様に

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta)\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

ド・モアブルの定理

整数 n に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

(2) (1) の結果に注意して

$$\begin{aligned} y &= -8\sin^3\theta + 6\sin\theta - 3\cos\theta + 4\cos^3\theta + 1 \\ &= 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) + (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 1 \\ &= 2\sin 3\theta + \cos 3\theta + 1 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} &y = \sqrt{5}\sin(3\theta + \alpha) + 1, \\ &\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

とおくと，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\frac{3}{2}\pi + \alpha \leqq 3\theta + \alpha \leqq 3\pi + \alpha$$

であるから

$$\sqrt{5}\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + 1 \leqq y \leqq \sqrt{5}\sin\frac{5}{2}\pi + 1$$

すなわち　　$-1 \leqq y \leqq \sqrt{5} + 1$

よって　　最大値 $\boldsymbol{\sqrt{5} + 1}$，　　最小値 $\boldsymbol{-1}$

302 関数 $f(x)$ を $f(x)=\left|\,2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{5}{4}\,\right|$ と定める．以下の問いに答えよ．　(東北大文系 2012 年 2)

(1) $t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおく．$f(x)$ を t の関数として表せ．

(2) x が $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) x が $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ．また，$f(x)$ が最大値をとる x は $60^\circ < x < 75^\circ$ を満たすことを示せ．

解答　(1) $t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ より

$$t^2=\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$$

ゆえに　$t^2-1=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$

したがって

$$f(x)=\left|\,2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\frac{5}{4}\,\right|$$

$$=\left|\,(t^2-1)+t-\frac{5}{4}\,\right|=\left|\,\boldsymbol{t^2+t-\frac{9}{4}}\,\right|$$

(2) $t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+120^\circ)$，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より

$$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{3}}$$

(3) $g(t)=t^2+t-\dfrac{9}{4}=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}$ とおくと $(-1 \leqq t \leqq \sqrt{3})$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) \leqq g(t) \leqq g(\sqrt{3}) \quad \text{すなわち} \quad -\frac{5}{2} \leqq g(t) \leqq \frac{3}{4}+\sqrt{3}$$

$\dfrac{5}{2}-\left(\dfrac{3}{4}+\sqrt{3}\right)=\dfrac{7-4\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{4}>0$ であるから

$$0 \leqq |g(t)| \leqq \frac{5}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0 \leqq f(x) \leqq \frac{5}{2}}$$

次に，$0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ のとき　$120^\circ \leqq x+120^\circ \leqq 210^\circ$

$t=2\sin(x+120^\circ)=-\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\sin(x+120^\circ)=-\dfrac{1}{4}$ を満たす x は

$(\sqrt{3}-1)^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{7-4\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{2}>0$ より

$$\sqrt{3}-1>\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad 0>-\frac{1}{4}>-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

したがって　$\sin 180^\circ > \sin(x+120^\circ) > \sin 195^\circ$

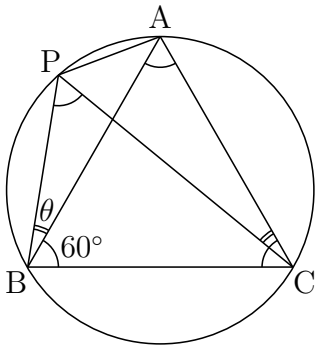
ゆえに　$180^\circ < x+120 < 195^\circ$　よって　$60^\circ < x < 75^\circ$

303* 正三角形 ABC が半径 1 の円に内接しているとする。P は点 A，B と異なる点で，A，B を両端とし点 C を含まない弧の上を動くものとする。以下の問いに答えよ。 (熊大文系 2018 年 2)

(1) $\angle \mathrm{PBA} = \theta$ とおくとき，PA，PB，PC をそれぞれ θ を用いて表せ。また，$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$ の最大値を求めよ。

(2) $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$ を求めよ。

解答 (1) $\angle \mathrm{PBA} = \theta$ より，右の図から



$$\angle \mathrm{PBC} = 60^\circ + \theta, \quad \angle \mathrm{PCB} = 60^\circ - \theta$$

△PBA，△PBC は半径 1 の円に内接しているから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\theta} = 2\cdot 1,$$

$$\frac{\mathrm{PB}}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{\mathrm{PC}}{\sin(60^\circ + \theta)} = 2\cdot 1$$

ゆえに $\quad \mathbf{PA = 2\sin\theta}$

$\mathbf{PB = 2\sin(60^\circ - \theta),\ \ PC = 2\sin(60^\circ + \theta)}$

加法定理により $\quad \sin(60^\circ - \theta) + \sin(60^\circ + \theta) = 2\sin 60^\circ \cos\theta = \sqrt{3}\cos\theta$

したがって $\quad \mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC} = 2\{\sin\theta + \sin(60^\circ - \theta) + \sin(60^\circ + \theta)\}$

$$= 2(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)$$

$$= 4\sin(\theta + 60^\circ)$$

よって，$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$ は，$\theta = 30^\circ$ のとき，最大値 **4** をとる.

(2) $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ であるから

$$\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2 = 2\{2\sin^2\theta + 2\sin^2(60^\circ - \theta) + 2\sin^2(60^\circ + \theta)\}$$

$$= 2\{3 - \cos 2\theta - \cos(120^\circ - 2\theta) - \cos(120^\circ + 2\theta)\}$$

$$= 6 - 2\{\cos 2\theta + \cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta)\}$$

ここで，加法定理により

$$\cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta) = 2\cos 120^\circ \cos 2\theta = -\cos 2\theta$$

上式より，$\cos 2\theta + \cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta) = 0$ であるから

$$\mathbf{PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6}$$

304 実数 x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$3x^2+2xy+y^2$ の最大値，最小値を求めよ．(釧路公立大)

解答 $x^2+y^2=1$ より，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおくと

$$x^2=\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2},\quad y^2=\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2},$$
$$2xy=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$$

したがって

$$\begin{aligned}3x^2+2xy+y^2&=3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sin 2\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\\&=\sin 2\theta+\cos 2\theta+2\\&=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2\end{aligned}$$

$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ より　最大値 $\boldsymbol{2+\sqrt{2}}$，最小値 $\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$

305* 関数 $f(x)=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x-\sin 2x$ に対して，以下の問に答えよ．

(1) $t=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくとき，$f(x)$ を t の式で表せ．

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 方程式 $f(x)=\alpha$ が $0\leqq x<2\pi$ の範囲で相異なる 2 つの解をもつための実数 a の条件を求めよ．　(首都大学東京)

解答　(1) $t=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x)$ より

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}t$$

上式の両辺を平方すると

$$1-2\sin x\cos x=2t^2 \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2x=1-2t^2$$

よって　$f(x)=-\sqrt{2}(\cos x-\sin x)-\sin 2x$

$=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}t-(1-2t^2)$

$=\boldsymbol{2t^2-2t-1}$

(2) $0\leqq x<2\pi$ より　$-1\leqq t\leqq 1$

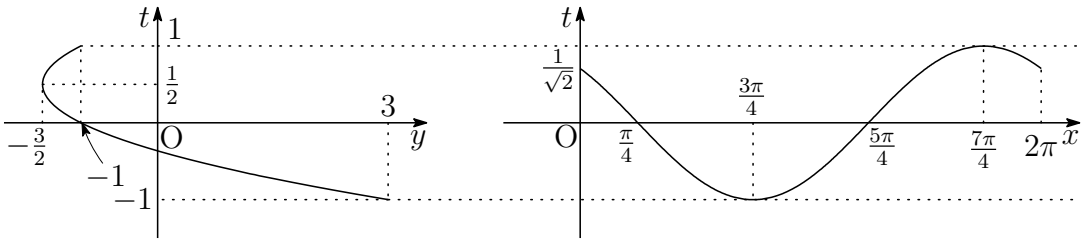
(1) の結果から　$f(x)=2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

したがって　$\boldsymbol{t=-1}$ のとき　最大値 **3**

$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$

(3) 求める a の値は

$$\boldsymbol{a=-\frac{3}{2},\quad -1<a<3}$$



306 (1) $\sin 2x = \cos x$ を満たす x を $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において求めよ．

(2) $\cos 3x$ を $\cos x$ を用いて表せ．

(3) a，b は実数とする．$\cos 3x - a\sin 2x + b\cos x = 0$ を満たす x が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において 2 個あるような a，b の条件を求めて，ab 平面上に図示せよ．(茨木大)

解答 (1) $\sin 2x = \cos x$ より　　$2\sin x\cos x = \cos x$

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して解くと　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6}}$

(2) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ に $\alpha = 2x$，$\beta = x$ を代入すると

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x\cos x$$

したがって　　$\begin{aligned}\cos 3x &= 2\cos 2x\cos x - \cos x\\ &= 2(2\cos^2 x - 1)\cos x - \cos x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$

(3) (2) の結果および $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ を

$$\cos 3x - a\sin 2x + b\cos x = 0$$

に代入すると

$$4\cos^3 x - 3\cos x - 2a\sin x\cos x + b\cos x = 0$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos x \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned}4\cos^2 x - 3 - 2a\sin x + b &= 0\\ 4\sin^2 x + 2a\sin x - b - 1 &= 0\end{aligned}$$

$f(t) = 4t^2 + 2at - b - 1$ とおくと

$$f(t) = 4\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - b - 1$$

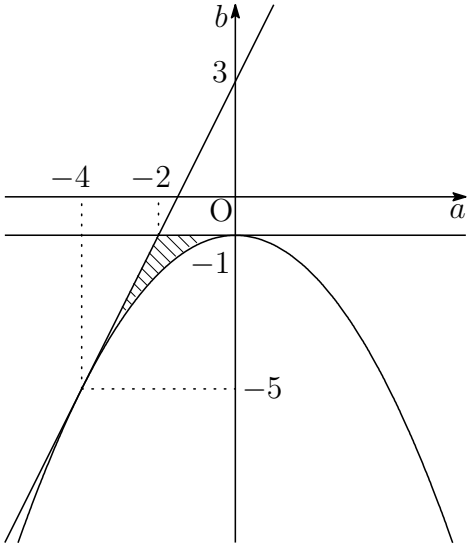
$0 < t < 1$ に $f(t) = 0$ を満たす t が 2 個存在する条件を求めればよいから

$$\begin{aligned}&0 < -\frac{a}{4} < 1, \quad -\frac{a^2}{4} - b - 1 < 0,\\ &f(0) = -b - 1 > 0, \quad f(1) = 2a - b + 3 > 0\end{aligned}$$

したがって　　$-4 < a < 0, \quad b > -\dfrac{a^2}{4} - 1$

$b < -1, \quad b < 2a + 3$

よって，求める領域は下の図の斜線部分で境界線を含まない．



7.27　指数関数・対数関数

7.27.1　Review

307 次の計算せよ.

(1) $(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})(9^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{3}})$

(2) $\sqrt[3]{81}\times\sqrt{\sqrt[3]{3}}\div\sqrt{27}$

(3) $4^{\log_2\sqrt{2}}$

(4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\sqrt[3]{25}$

(5) $(\log_3 4-\log_9 4)\left(\log_2 3+\log_4\dfrac{1}{3}\right)$

解答　(1)

$$\begin{aligned}(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})(9^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{3}}) &= (3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})\{(3^{\frac{1}{3}})^2+3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+(2^{\frac{1}{3}})^2\}\\ &= (3^{\frac{1}{3}})^3-(2^{\frac{1}{3}})^3 = 3-2 = \mathbf{1}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{81}\times\sqrt{\sqrt[3]{3}}\div\sqrt{27} &= \sqrt[3]{3^4}\times\sqrt[6]{3}\div\sqrt{3^3}\\ &= 3^{\frac{4}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}}\div 3^{\frac{3}{2}}\\ &= 3^{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}} = 3^0 = \mathbf{1}\end{aligned}$$

(3)

$$4^{\log_2\sqrt{2}} = 2^{2\log_2\sqrt{2}} = 2^{\log_2 2} = \mathbf{2}$$

(4)

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\sqrt[3]{25} = \frac{\log_5\sqrt[3]{25}}{\log_5\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\log_5 5^{\frac{2}{3}}}{\log_5 5^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}} = -\mathbf{\frac{4}{3}}$$

(5)

$$\begin{aligned}(\log_3 4-\log_9 4)\left(\log_2 3+\log_4\frac{1}{3}\right) &= (\log_3 4-\log_3 2)\left(\log_2 3+\log_2\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \log_3 2\log_2\sqrt{3} = \log_2 2\log_3\sqrt{3} = \mathbf{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

補足　$\boldsymbol{\log_b A\log_a B = \log_a A\log_b B}$

308 (1) 4 つの数 $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[4]{32}$, $\sqrt[5]{64}$ の大小を比較せよ.

(2) 4 つの数 $4^{\frac{5}{6}}$, $\log_2 3$, $\log_4 7$, $2^{\frac{4}{3}}$ の大小を比較せよ.

解答 (1)

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}},$$
$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}},$$
$$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}},$$
$$\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2^{\frac{6}{5}}$$

$\dfrac{6}{5} < \dfrac{5}{4} < \dfrac{4}{3} < \dfrac{3}{2}$ で底 2 は 1 より大きいから

$$2^{\frac{6}{5}} < 2^{\frac{5}{4}} < 2^{\frac{4}{3}} < 2^{\frac{3}{2}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\sqrt[5]{64} < \sqrt[4]{32} < \sqrt[3]{16} < \sqrt{8}}$$

(2) $4^{\frac{5}{6}}$, $\log_2 3$, $\log_4 7$, $2^{\frac{4}{3}}$ について

$$4^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{3}}, \quad \log_2 3 < \log_2 4 = 2, \quad \log_4 7 = \log_2 \sqrt{7} < \log_2 3, \quad 2 < 2^{\frac{4}{3}}$$

$$\log_4 7 < \log_2 3 < 2 < 2^{\frac{4}{3}} < 2^{\frac{5}{3}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\log_4 7 < \log_2 3 < 2^{\frac{4}{3}} < 4^{\frac{5}{6}}}$$

309 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき, $\log_{10} \dfrac{9}{16}$, $\log_2 27$ を a, b で表せ.

解答

$$\log_{10} \frac{9}{16} = \log_{10} \frac{3^2}{2^4} = 2\log_{10} 3 - 4\log_{10} 2 = \boldsymbol{2b - 4a},$$
$$\log_2 27 = \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 2} = \frac{3\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \boldsymbol{\frac{3b}{a}}$$

7.27.2 Exercise

310* 次の方程式，不等式を解け．ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする．

(1) $16^{x+1}-2\times 4^{x+3}-4^x+8=0$

(2) $3^x-3^{2-x}=8$

(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}+\dfrac{1}{3}>0$

(4) $(\log_2 x)^2-\log_2 8x^2=0$

(5) $\log_4(2x+3)+\log_2\sqrt{4x+1}=2\log_4 5$

(6) $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2+\log_{\frac{1}{3}} 3x^2>2$

(7) $2\log_a(x-1)<\log_a(7-x)$

解答 (1) $16^{x+1}-2\times 4^{x+3}-4^x+8=0$ より

$$(4^2)^{x+1}-2\cdot 4^3\cdot 4^x-4^x+8=0$$
$$16\cdot(4^x)^2-129\cdot 4^x+8=0$$

$t=4^x$ とおくと　$16t^2-129t+8=0$

$$(16t-1)(t-8)=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=\frac{1}{16},\ 8$$

$4^x=\dfrac{1}{16}$ より　$4^x=4^{-2}$　ゆえに　$x=-2$

$4^x=8$ より　$2^{2x}=2^3$　ゆえに　$x=\dfrac{3}{2}$

したがって　$\boldsymbol{x=-2,\ \dfrac{3}{2}}$

(2) $3^x-3^{2-x}=8$ より　$3^x-\dfrac{3^2}{3^x}=8$

両辺に $t=3^x$ とおくと $(t>0)$　$t-\dfrac{9}{t}=8$

$$t^2-8t-9=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t-9)=0$$

$t>0$ より，$t=9$　ゆえに　$3^x=3^2$　よって　$\boldsymbol{x=2}$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x} + \frac{1}{3} > 0$ より，$t = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ とおくと $(t > 0)$

$$t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{1}{3} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-1)(3t-1) > 0$$

$0 < t < \frac{1}{3},\ 1 < t$ ゆえに $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{x} < \frac{1}{3},\ 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから

$$x > 1,\ 0 > x \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x < 0,\ 1 < x}$$

(4) $(\log_2 x)^2 - \log_2 8x^2 = 0$ より，真数は正であるから $x > 0$

$$(\log_2 x)^2 - (3 + 2\log_2 x) = 0$$

$t = \log_2 x$ とおくと $t^2 - (3 + 2t) = 0$

$$t^2 - 2t - 3 = (t+1)(t-3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -1,\ 3$$

$x = 2^t > 0$ より $\boldsymbol{x = \frac{1}{2},\ 8}$

(5) $\log_4(2x+3) + \log_2\sqrt{4x+1} = 2\log_4 5$ より，真数は正であるから

$$2x + 3 > 0,\ \ 4x + 1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > -\frac{1}{4}$$

$\log_2\sqrt{4x+1} = \log_{2^2}(\sqrt{4x+1})^2 = \log_4(4x+1)$ より

$$\log_4(2x+3) + \log_4(4x+1) = 2\log_4 5$$

これから $\log_4(2x+3)(4x+1) = \log_4 5^2$

$$(2x+3)(4x+1) = 25 \quad \text{ゆえに} \quad (4x+11)(x-1) = 0$$

$x > -\frac{1}{4}$ に注意してこれを解くと $\boldsymbol{x = 1}$

補足 $\log_a b = \log_{a^n} b^n$

(6) $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + \log_{\frac{1}{3}} 3x^2 > 2$ より，真数は正であるから　$x > 0$

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{3}} x - 1 > 2$$

$t = \log_{\frac{1}{3}} x$ とおくと

$$t^2 + 2t - 1 > 2 \quad \text{ゆえに} \quad (t-1)(t+3) > 0$$

$t < -3,\ 1 < t$ より　$\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 27,\ \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} x$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x > 27,\ \dfrac{1}{3} > x$

$x > 0$ に注意して　$\boldsymbol{0 < x < \dfrac{1}{3},\ 27 < x}$

(7) $2\log_a(x-1) < \log_a(7-x)$ より，真数が正であるから

$$x - 1 > 0 \ \text{ かつ } \ 7 - x > 0 \quad \text{すなわち} \quad 1 < x < 7 \quad \cdots ①$$

与えられた不等式から　$\log_a(x-1)^2 < \log_a(7-x)$

(i) $a > 1$ のとき　　$(x-1)^2 < (7-x)$

$$(x+2)(x-3) < 0 \quad \text{すなわち} \quad -2 < x < 3$$

① に注意して，これを解くと　$1 < x < 3$

(ii) $0 < a < 1$ のとき　　$(x-1)^2 > (7-x)$

$$(x+2)(x-3) > 0 \quad \text{すなわち} \quad x < -2,\ 3 < x$$

① に注意して，これを解くと　$3 < x < 7$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{a > 1 \text{ のとき}} & \boldsymbol{1 < x < 3} \\ \boldsymbol{0 < a < 1 \text{ のとき}} & \boldsymbol{3 < x < 7} \end{cases}$

311 (1) $f(x)=3\cdot4^x-2^{x+3}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $x+2y=8$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$ の最大値を求めよ．

(3) $f(x)=(\log_3 9x)\left(\log_3\dfrac{3}{x}\right)$ $\left(\dfrac{1}{9}\leqq x\leqq 9\right)$ の最大値と最小値を求めよ．

解答 (1) $t=2^x$ とおくと $(0\leqq x\leqq 1)$ $1\leqq t\leqq 2$

$$\begin{aligned} f(x)&=3\cdot4^x-2^{x+3}=3\cdot(2^x)^2-2^3\cdot2^x\\ &=3t^2-8t=3\left(t-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{3}\end{aligned}$$

よって　$t=2$　すなわち　$x=1$ のとき　　**最大値 -4**

$t=\dfrac{4}{3}$　すなわち　$x=\log\dfrac{4}{3}$のとき　**最小値 $-\dfrac{16}{3}$**

(2) 真数は正であるから　$x>0,\ y>0$

$x=8-2y>0$ であるから　　$0<y<4$

$$\begin{aligned}\log_2 x+log_2y&=\log_2 xy=\log_2(8-2y)y\\ &=\log_2\{-2(y-2)^2+8\}\\ &\leqq\log_2 8=3\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{x=4,\ y=2}$ のとき，最大値 $\mathbf{3}$

(3) $t=\log_3 x$ とおくと $\left(\dfrac{1}{9}\leqq x\leqq 9\right)$　$-2\leqq t\leqq 2$

$$\begin{aligned} f(x)&=(\log_3 9x)\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\\ &=(\log_3 9+\log_3 x)(\log_3 3-\log_3 x)\\ &=(2+t)(1-t)=-t^2-t+2\\ &=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\end{aligned}$$

よって　$t=-\dfrac{1}{2}$　すなわち　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のとき　**最大値$\dfrac{9}{4}$**

$t=2$　　すなわち　$x=9$ のとき　　**最小値 -4**

312* 関数 $y = 4^x + 4^{-x} - 3(2^x + 2^{-x}) - 2$ について，次の問に答えよ．　(防衛大)

(1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおいて，y を t で表した式を求めよ．

(2) $y = 0$ のとき，x の値を求めよ．

(3) y の最小値を求めよ．

解答　(1) $t = 2^x + 2^{-x}$，$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ より

$$\begin{aligned} y &= 4^x + 4^{-x} - 3(2^x + 2^{-x}) - 2 \\ &= (t^2 - 2) - 3t - 2 \\ &= \boldsymbol{t^2 - 3t - 4} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$y = (t+1)(t-4)$

$y = 0$ のとき，$t > 0$ に注意してこれを解くと　$t = 4$

$$2^x + 2^{-x} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 = 0$$

したがって　$2^x = 2 \pm \sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})}$

(3) $t = 2^x + 2^{-x} = (2^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{x}{2}})^2 + 2 \geqq 2$

(1) の結果から　$y = \left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$

したがって，$t = 2$ のとき，y は**最小値 -6** をとる．

313* a は $2^{2\log_4 48-\log_2 \frac{3}{4}}$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．このとき

(1) a の値を整数で表すと［　　］である．

(2) a^{30} は［　　］桁の数である．

(3) b は，b^{50} を小数で表すと小数第 25 位に初めて 0 でない数字が現れる正の数である．このとき $\left(\dfrac{b}{a}\right)^4$ を小数で表すと，小数第［　　］位に初めて 0 でない数字が現れる．

解答　(1) $2\log_4 48 - \log_2 \dfrac{3}{4} = \log_{2^2} 48^2 - 2\log_2 \dfrac{3}{4} = \log_2 48 - \log_2 \dfrac{3}{4} = \log_2 64$ より

$$a = 2^{2\log_4 48-2\log_2 \frac{3}{4}} = 2^{\log_2 64} = \mathbf{64}$$

(2) (1) の結果から，$a = 2^6$ より　$a^{30} = (2^6)^{30} = 2^{180}$

$$\log_{10} a^{30} = \log_{10} 2^{180} = 180\log_{10} 2 = 180 \times 0.3010 = 54.18$$

$54 < \log_{10} a^{30} < 55$ であるから　$10^{54} < a^{30} < 10^{55}$

したがって，a^{50} は **55 桁の数**である．

(3) $10^{-25} \leqq b^{50} < 10^{-24}$ より　$-25 \leqq \log_{10} b^{50} < -24$

$$-25 \leqq 50\log_{10} b < -24 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{2} \leqq \log_{10} b < -\frac{12}{25}$$

$a = 2^6$ であるから

$$\log_{10}\left(\frac{b}{a}\right)^4 = 4\log_{10} b - 4\log_{10} a = 4\log_{10} b - 4\log_{10} 2^6$$
$$= 4\log_{10} b - 24\log_{10} 2$$

$\log_{10} 2 = \dfrac{301}{1000}$ より

$$4\left(-\frac{1}{2}\right) - 24\cdot\frac{301}{1000} < \log_{10}\left(\frac{b}{a}\right)^4 < 4\left(-\frac{12}{25}\right) - 24\cdot\frac{301}{1000}$$

したがって　$-\dfrac{9924}{1000} < \log_{10}\left(\dfrac{b}{a}\right)^4 < -\dfrac{9144}{1000}$

すなわち　$-10 < \log_{10}\left(\dfrac{b}{a}\right)^4 < -9$

よって，$\left(\dfrac{b}{a}\right)^4$ は，**小数第 10 位**に初めて 0 でない数字が現れる．

7.27.3 Try

314 〔1〕連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(1-x) - 2\log_4(y+6) = -2 \\ 3\cdot 2^x + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^y = 2 \end{cases}$$

を解け. (福岡教育大 2019 年 1)

〔2〕x，y は実数で，$x \geqq 100$，$y \geqq 10$，$xy = 100000$ を満たす．このとき，$z = (\log_{10} x)(\log_{10} y)$ の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ．
(東京女子大)

解答 〔1〕

$$(*)\begin{cases} \log_2(1-x) - 2\log_4(y+6) = -2 \\ 3\cdot 2^x + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^y = 2 \end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式において，真数は正であるから

$$1-x>0,\ \ y+6>0 \quad \text{ゆえに} \quad x<1,\ \ y>-6 \quad \cdots ①$$

$(*)$ の第 1 式から

$$\log_2(1-x) - \log_2(y+6) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 \frac{1-x}{y+6} = \log_2 \frac{1}{4}$$

上の第 2 式から $\dfrac{1-x}{y+6} = \dfrac{1}{4}$ すなわち $y = -4x - 2 \quad \cdots ②$
これを $(*)$ 第 2 式に代入すると

$$3\cdot 2^x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4x-2} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad 3\cdot 2^x + 2\cdot 2^{2x} = 2$$

ここで，$t = 2^x$ とおくと $(t>0)$

$$3t + 2t^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (t+2)(2t-1) = 0$$

$t>0$ に注意して $t = \dfrac{1}{2}$ ゆえに $2^x = 2^{-1}$ すなわち $x = -1$
したがって，① に注意して，これを ② に代入すると $y = 2$
よって $\boldsymbol{x = -1,\ y = 2}$

〔2〕 $xy = 100000$ より　$y = \dfrac{10^5}{x}$　$\cdots$①

$x \geqq 10^2,\ y = \dfrac{10^5}{x} \geqq 10$ より　$10^2 \leqq x \leqq 10^4$　$\cdots$②

① より　$z = (\log_{10} x)\left(\log_{10} \dfrac{10^5}{x}\right) = (\log_{10} x)(5 - \log_{10} x)$

$t = \log_{10} x$ とおくと，上式および ② から

$$z = t(5-t) = -\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

よって　$t = \dfrac{5}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{x = y = 10^{\frac{5}{2}}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{25}{4}}$

$t = 4$，すなわち，$\boldsymbol{x = 10^4,\ y = 10}$ のとき最小値 $\boldsymbol{4}$

315 k を定数とする．関数 $y = 4^x + 4^{-x} - 2k(2^x + 2^{-x}) + 2$ について，次の問に答えよ．(滋賀大 改)

(1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく．このとき，t の最小値が 2 であることを示せ．

(2) y の最小値を k を用いて表せ．

(3) r を実数とする．$k = 5$ のとき，$y = r$ となるような x の個数が r の値によってどのように変化するか調べよ．

解答 (1) 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t = 2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号が成立するとき　$2^x = 2^{-x}$　ゆえに　$2^{2x} = 1$　すなわち　$x = 0$

よって，$x = 0$ のとき，t は最小値 2 をとる．

別解 $t = 2^x + 2^{-x} = (2^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{x}{2}})^2 + 2$

等号が成立するとき

$$2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2^x = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = 0$$

よって，$x = 0$ のとき，t は最小値 2 をとる．

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$，$4^x + 4^{-x} + 2 = (2^x + 2^{-x})^2 = t^2$ より

$$y = t^2 - 2kt = (t - k)^2 - k^2$$

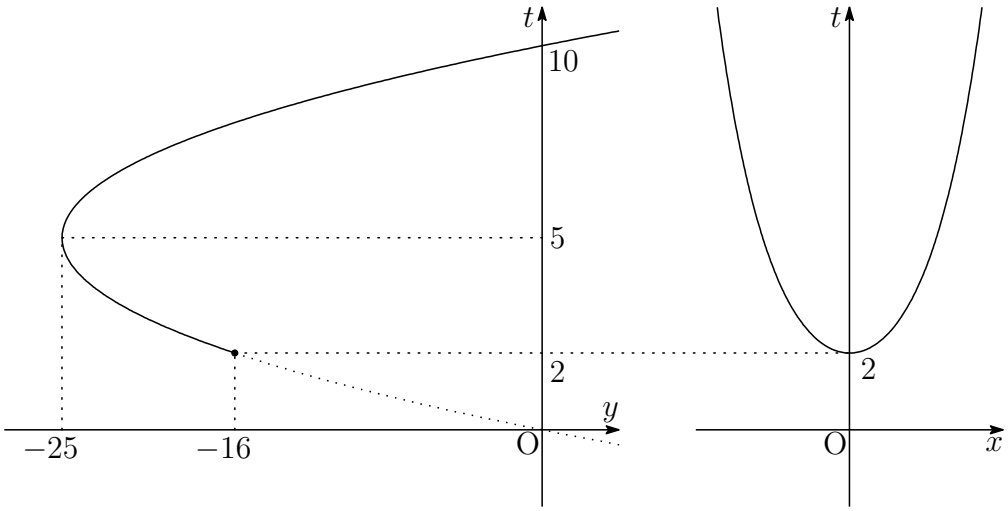
よって　　$k < 2$ のとき，$t = 2$ で最小値 $\boldsymbol{4 - 4k}$

$2 \leqq k$ のとき，$t = k$ で最小値 $\boldsymbol{-k^2}$

(3) $k=5$ のとき　$y=(t-5)^2-25$ $(t \geqq 2)$

これと $t=2^x+2^{-x}$ のグラフから，$y=r$ となる x の個数は

$r<-25$ のとき　　0 個
$r=-25, -16<r$ のとき　2 個
$r=-16$ のとき　　3 個
$-25<r<-16$ のとき　4 個



熊大医医 2024 年 3

k を実数とし，$f(x)=\sin^2 x-\cos x-1+k$ とおく。曲線 $y=f(x)\left(0\leqq x\leqq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸の共有点の個数が k の値によってどのように変わるか調べよ。

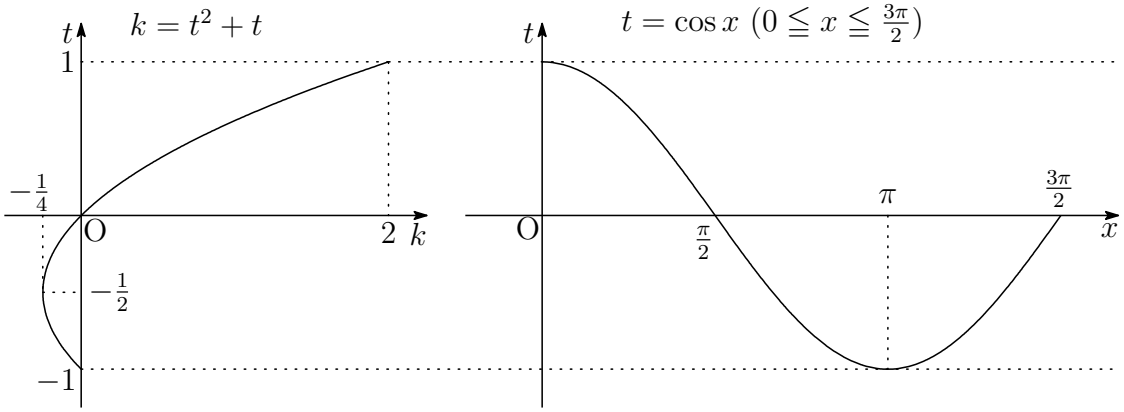
(2) (省略)

解答　(1) 曲線 C の x 軸との交点であるから，$f(x)=0$ とし，$t=\cos x$ とおくと

$$k=t^2+t,\quad t=\cos x\ \left(0\leqq x\leqq \frac{3\pi}{2}\right)$$

下の 2 つのグラフから，曲線 C と x 軸の共有点の個数は，次のようになる．

$\boldsymbol{2<k}$ のとき	**0** 個
$\boldsymbol{0<k\leqq 2}$ のとき	**1** 個
$\boldsymbol{k=0}$ のとき	**3** 個
$\boldsymbol{-\frac{1}{4}<k<0}$ のとき	**4** 個
$\boldsymbol{k=-\frac{1}{4}}$ のとき	**2** 個
$\boldsymbol{k<-\frac{1}{4}}$ のとき	**0** 個



316* 不等式

$$\log_x y < 2 + 3\log_y x$$

の表す領域を座標平面上に図示せよ. (宮崎大 2014 年 5)

解答 不等式 $\log_x y < 2 + 3\log_y x$ の底および真数から

$$x \neq 1,\ y \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$$

不等式を変形すると $\log_x y - 2 - \dfrac{3}{\log_x y} < 0$

$(\log_x y)^2$ を掛けると $\log_x y(\log_x y + 1)(\log_x y - 3) < 0$

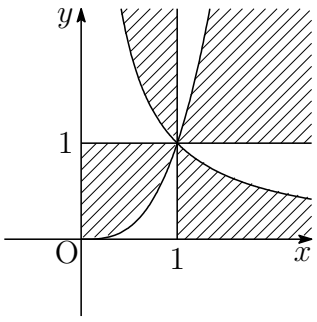
ゆえに $\log_x y < -1,\quad 0 < \log_x y < 3$

したがって $\log_x y < \log_x \dfrac{1}{x},\quad \log_x 1 < \log_x y < \log_x x^3$

(i) $0 < x < 1$ のとき $y > \dfrac{1}{x},\quad x^3 < y < 1$

(ii) $x > 1$ のとき $y < \dfrac{1}{x},\quad 1 < y < x^3$

(i), (ii) より，求める領域は，次の図の斜線部分で，ただし境界線を含まない.



317* ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある．「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする．この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36%である．1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには，このボタンを最低何回押せばよいか．必要なら $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい．(京大文系 2016 年 2)

解答 「はずれ」が表示される確率を p とすると，ボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」が出る確率が 36% であるから

$$1 - p^{20} = \frac{36}{100} \quad \text{ゆえに} \quad p^{10} = \frac{8}{10} \quad \cdots ①$$

ボタンを n 回押したとき,「あたり」の出る確率が 90% 以上となるとき

$$1 - p^n \geqq \frac{90}{100} \quad \text{ゆえに} \quad p^n \leqq \frac{1}{10} \quad \cdots ②$$

①，② から p を消去すると

$$\left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{n}{10}} \leqq \frac{1}{10} \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{10}{1 - 3\log_{10} 2} \quad \cdots ③$$

$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であるから $\quad \dfrac{967}{10000} < 1 - 3\log_{10} 2 < \dfrac{97}{1000}$

したがって $\quad \dfrac{10000}{97} < \dfrac{10}{1 - 3\log_{10} 2} < \dfrac{100000}{967}$

ここで $\quad \dfrac{10000}{97} = 103 + \dfrac{9}{97}$, $\dfrac{100000}{967} = 103 + \dfrac{399}{967}$

よって，③ を満たす最小の自然数 n は $\quad$ **104**

318* 次の問に答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$，$\log_{10} 11 = 1.0414$ とする． (早稲田大)

(1) 3^{20} の一の位の数字を求めよ．

(2) n を自然数とし，3^n が 21 桁で一の位の数字が 7 となるとき，n の値を求めよ．

(3) 7^{70} の最高位の数字を求めよ．

(4) 7^{70} の最高位の次の位の数字を求めよ．

解答 (1) 法 10 について

$$3^2 \equiv 9, \quad 3^3 \equiv 7, \quad 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

したがって $\quad 3^{20} = (3^4)^5 \equiv 1^5 \equiv 1 \pmod{10}$

よって，3^{20} の一の位は $\quad \mathbf{1}$

(2) 3^n が 21 桁の数であるから

$$10^{20} \leqq 3^n < 10^{21}$$

常用対数をとると $(\log_{10} 3 = 0.4771) \quad 20 < n \log_{10} 3 < 21$

$$\frac{20}{\log_{10} 3} \leqq n < \frac{21}{\log_{10} 3} \quad \text{ゆえに} \quad 41.91\cdots \leqq n < 44.01\cdots$$

n は整数であるから $\quad n = 42,\ 43,\ 44$

$3^{40} = (3^4)^{10} \equiv 1 \pmod{10}$ であるから

$$3^{42} \equiv 3^2 \equiv 9, \quad 3^{43} \equiv 3^3 \equiv 7, \quad 3^{44} \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

よって，条件を満たす n は $\quad \boldsymbol{n = 43}$

(3) $\log_{10} 7^{70} = 70 \log_{10} 7 = 70 \times 0.8451 = 59.157$

$0 < 0.157 < 0.3010$ より $\quad 0 < 0.157 < \log_{10} 2$

$$59 < 0.157 + 59 < \log_{10} 2 + 59$$
$$\log_{10} 10^{59} < 59.157 < \log_{10}(2 \times 10^{59})$$

したがって $\quad 10^{59} < 7^{70} < 2 \times 10^{59}$

よって，7^{70} の最高位の数は $\quad \mathbf{1}$

(4) $\log_{10} 1.4 = \log_{10} \dfrac{2\cdot 7}{10} = \log_{10} 2 + \log_{10} 7 - 1$

$= 0.3010 + 0.8451 - 1 = 0.1461$

$\log_{10} 1.5 = \log_{10} \dfrac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$

$= 0.4771 - 0.3010 = 0.1761$

$0.1461 < 0.157 < 0.1761$ より　$\log_{10} 1.4 < 0.157 < \log_{10} 1.5$

$\log_{10} 1.4 + 59 < 0.157 + 59 < \log_{10} 1.5 + 59$

$\log_{10}(1.4 \times 10^{59}) < 59.157 < \log_{10}(1.5 \times 10^{59})$

したがって　　$1.4 \times 10^{59} < 7^{70} < 1.5 \times 10^{59}$

よって，7^{70} の最高位の次の位の数字は　**4**

319 次の問いに答えよ．　(広大文系 2011 年 2)

(1) $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m，n は存在しないことを証明せよ．

(2) p，q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ．

(3) $\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ．

解答　(1) $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ より　$2^{\frac{m}{n}} = 3$　ゆえに　$2^m = 3^n$

m，n は，自然数であるから，上式は素因数分解の一意性に反する．

よって，$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m，n は存在しない．

補足 自然数 m，n に対し，$2^m = 3^n$ の左辺は偶数，右辺は奇数であるから矛盾．

(2) $p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しくなる自然数 p，q に対し $(p \neq q)$

$$p\log_2 3 - q\log_2 3$$

は整数であるから，これを l とすると

$$(p-q)\log_2 3 = l \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 3 = \frac{l}{p-q}$$

これは (1) の結果に反するので，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しくなる自然数 $p,\ q$ $(p \neq q)$ は存在しない．

(3) $8 < 9$，$243 < 256$，すなわち，$2^3 < 3^2$，$3^5 < 2^8$　ゆえに　$2^{\frac{3}{2}} < 3 < 2^{\frac{8}{5}}$

したがって　$\dfrac{3}{2} < \log_2 3 < \dfrac{8}{5}$　すなわち　$1.5 < \log_2 3 < 1.6$

よって，$\log_2 3$ の小数第 1 位は　**5**

補足 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ ということを知っていれば

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

を計算することで，$1.5 < \log_2 3 < 1.6$ を評価すればよいことが分かる．

7.28　導関数，接線，関数の増減と極値

7.28.1　Review

320 関数 $f(x)=x^2-2x+3$ について

(1) x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率を求めよ.

(2) 定義にしたがって $f'(x)$ を求めよ.

解答　(1) $f(3)=3^2-2\cdot3+3=6$，$f(1)=1^2-2\cdot1+3=2$

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{6-2}{2}=\mathbf{2}$$

(2)

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-2(x+h)+3-(x^2-2x+3)}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2-2h}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{h(2x+h-2)}{h}\\
&=\lim_{h\to0}(2x+h-2)\\
&=\boldsymbol{2x-2}
\end{aligned}$$

321 3 次関数 $y = x^3 + 3x^2 - 2 \cdots ①$ がある．

(1) ① 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線，法線の方程式を求めよ．

(2) ① の接線で直線 $y = 9x + 8$ に平行なものの方程式を求めよ．

解答 (1) $y' = 3x^2 + 6x$ より，点 $(-1,\ 0)$ における接線の傾きは

$$3\cdot(-1)^2 + 6\cdot(-1) = -3$$

よって，接線の方程式は

$$y - 0 = -3(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -3x - 3}$$

法線の傾きを m とすると

$$-3m = -1 \quad \text{ゆえに} \quad m = \frac{1}{3}$$

よって，法線の方程式は

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x + 1) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}$$

(2) 接点を $(t,\ t^3 + 3t^2 - 2)$ とすると，接線は直線 $y = 9x + 8$ と平行であるから

$$3t^2 + 6t = 9 \quad \text{整理すると} \quad t^2 + 2t - 3 = 0$$

ゆえに $(t + 3)(t - 1) = 0$ これを解いて $t = -3,\ 1$
したがって，接点は $(-3, -2),\ (1,\ 2)$
点 $(-3, -2)$ における接線の方程式は

$$y + 2 = 9(x + 3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 9x + 25}$$

点 $(1,\ 2)$ における接線の方程式は

$$y - 2 = 9(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 9x - 7}$$

322 次の関数の極限を調べてグラフをかけ．また，極値があればそれを求めよ．

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

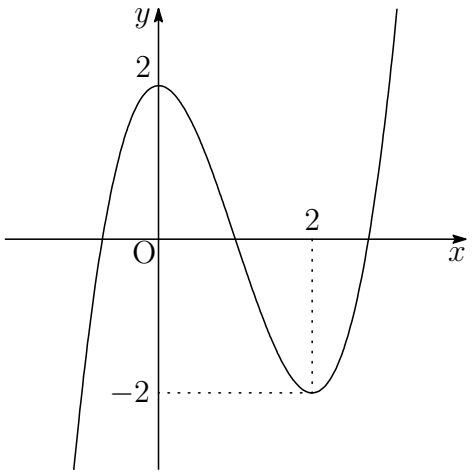
(2) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

(3) $y = x^3 - 6x^2 + 13x - 5$

解答 (1) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$　$y' = 0$ とすると　$x = 0,\ 2$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗



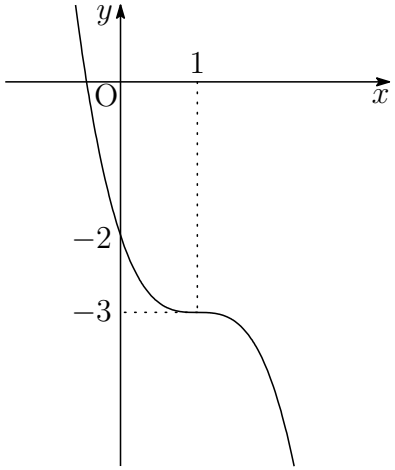
よって　$x = 0$ のとき，**極大値 2**

$x = 2$ のとき，**極小値 −2**

(2) $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2$　$y' = 0$ とすると　$x = 1$

したがって，y の増減表は次のようになる．

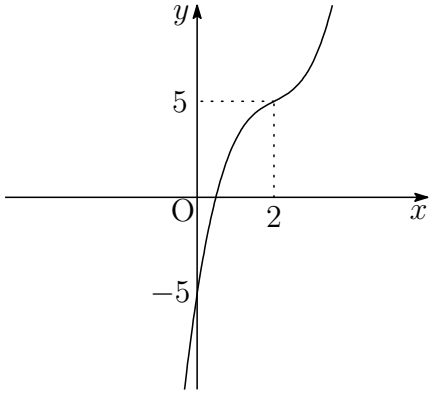
x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	↘	-3	↘



よって，極値はなし

(3) $y' = 3x^2 - 12x + 13 = 3(x-2)^2 + 1 > 0$

よって，y は常に増加．



よって，極値はなし

7.28.2 Exercise

323* $f(x)=x^n$ (n は 2 以上の自然数) の導関数を，定義にしたがって求めよ．
(大阪教育大 改)

解答 導関数の定義により

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}h^k - x^n\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}h^{k-1} \\ &= {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

324 3 次関数 $f(x)=ax^3+6x^2+(a-1)x\cdots$① について

(1) ① が極値をもつような a の値の範囲を求めよ．

(2) ① が常に増加する関数となるような a の値を求めよ．

解答 (1) $f'(x)=3ax^2+12x+(a-1)$
$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいから ($a\neq 0$)，係数について

$$D/4=6^2-3a\cdot(a-1)=-3(a^2-a-12)=-3(a+3)(a-4)>0$$

$a\neq 0$ に注意して　$\boldsymbol{-3<a<0,\ 0<a<4}$

(2) すべての x について $f'(x)\geqq 0$ を満たせばよいから

$$a>0 \quad \text{かつ} \quad D/4=-3(a+3)(a-4)\leqq 0$$

よって　　$\boldsymbol{a\geqq 4}$

325* 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=1$ で極大値 3 をとり，$x=3$ で極小となるように a，b，c の値を求め，極小値を求めよ．

解答 $f'(x)$ が $x=1,\ 3$ で $f'(x)=0$ であることと 2 次関数 $f'(x)$ の x^2 の係数が 3 であるから

$$f'(x)=3(x-1)(x-3)=3x^2-12x+9$$

$f(x)$ の定数項 c に注意して，これを積分すると

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+c$$

また，$f(1)=3$ であるから

$$1-6+9+c=3 \quad \text{ゆえに} \quad c=-1$$

したがって　　$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

よって　$\boldsymbol{a=-6,\ b=9,\ c=-1}$　極小値は　$f(3)=\boldsymbol{-1}$

326* a を定数とし，曲線 $y=x^3+ax^2+3x$ を C とおく．C 上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ における C の接線を l とし，O を通り l に垂直な直線を m とする．

(1) l，m の方程式を，それぞれ求めよ．

(2) m が C に接するとき，定数 a の値を求めよ．

解答 (1) $f(x)=x^3+ax^2+3x$ とおくと　$f'(x)=3x^2+2ax+3$

$f'(0)=3$ より，l の傾きは 3，m の傾きは $-\dfrac{1}{3}$

l，m は $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る直線であるから

$$\boldsymbol{l:y=3x,\quad m:y=-\frac{1}{3}x}$$

(2) C と m の方程式から，y を消去すると

$$x^3+ax^2+3x=-\frac{1}{3}x \quad \text{ゆえに} \quad x(3x^2+3ax+10)=0$$

2 次方程式 $3x^2+3ax+10=0$ は重解をもつから，係数について

$$D=(3a)^2-4\cdot3\cdot10=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=\pm\frac{2\sqrt{30}}{3}}$$

327 3次関数 $f(x)=x^3+x^2-x+3$ について，次の問に答えよ．　(東京海洋大)

(1) $f(x)$ の極値を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2) 3点 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 3)$，$\mathrm{C}(p,\ f(p))$ (ただし，$-2<p<0$) を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 $S(p)$ が最大となるときの p の値を求めよ．

解答　(1) $f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$

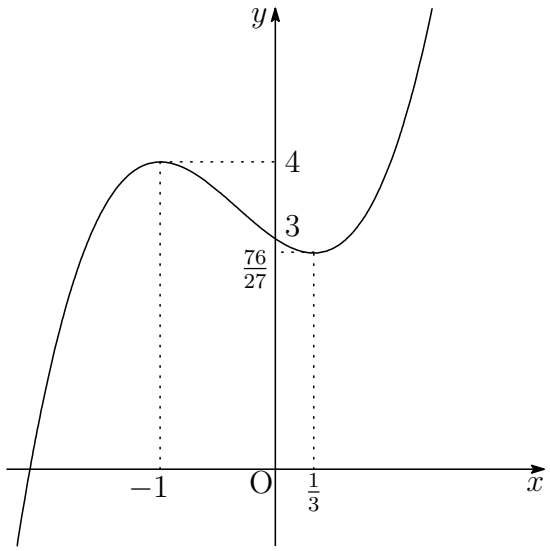
$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	$\frac{76}{27}$	↗

よって　$x=-1$ のとき極大値 **4**，$x=\dfrac{1}{3}$ のとき極小値 $\boldsymbol{\dfrac{76}{27}}$

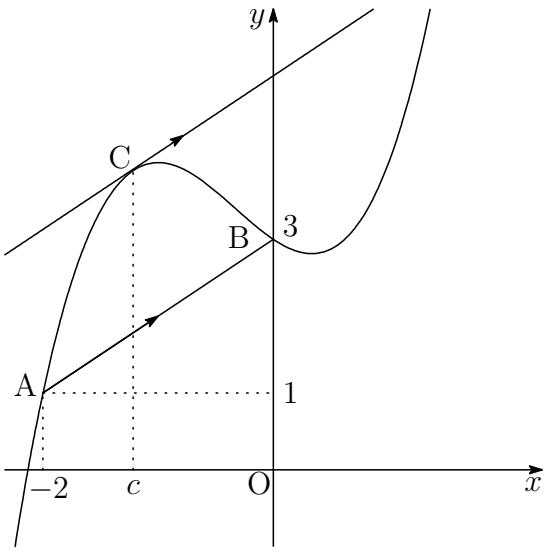
$y=f(x)$ のグラフの概形はつぎのようになる．



(2) △ABC の面積が最大となるのは，点 $\mathrm{C}(c,\ f(c))$ における接線が直線 AB の傾きと等しいときであるから

$$f'(c) = 3c^2 + 2c - 1 = \frac{3-1}{0-(-2)} \quad \text{ゆえに} \quad 3c^2 + 2c - 2 = 0$$

$-2 < c < 0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{c = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}}$



7.28.3 Try

328* 関数 $f(x)=x^3+3ax^2+15x$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が極大値，極小値をもつように，a の値の範囲を求めよ．

(2) (1) の a の値の範囲において，$f(x)$ の極大値と極小値の和を a を用いて表せ．

(3) $f(x)$ の極大値と極小値の和が -18 のとき，a の値を求めよ．

(琉球大 2015 年後期理学部 [数理科学科])

解答 (1) $f(x)=x^3+3ax^2+15x$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2+6ax+15=3(x^2+2ax+5)$$

方程式 $x^2+2ax+5=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$$D/4=a^2-5>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<a}$$

(2) $f(x)$ を $x^2+2ax+5$ で割ることにより

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2+2ax+5)(x+a)+(10-2a^2)x-5a \\ &=\frac{1}{3}f'(x)(x+a)+(10-2a^2)x-5a \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-2a$$

求める極値の和は，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ であることに注意して

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta)&=(10-2a^2)(\alpha+\beta)-10a \\ &=(10-2a^2)(-2a)-10a \\ &=\boldsymbol{4a^3-30a} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，このとき

$$4a^3-30a=-18 \quad \text{ゆえに} \quad (a+3)(2a^2-6a+3)=0$$

(1) の結果に注意して $\qquad \boldsymbol{a=-3,\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}}$

329 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ とする．$f(x)$ の増減を調べ，極大値，極小値を求めよ．(兵庫県立大)

解答 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-4)(x-2)(x-3) \\ &= (x^2-5x+4)(x^2-5x+6) \qquad (*) \\ &= (x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24 \end{aligned}$$

これを微分すると (数学 III の微分法を利用)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^2-5x)(2x-5)+10(2x-5) \\ &= 2(2x-5)(x^2-5x+5) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ のとき，$x^2-5x+5=0$ であるから，$(*)$ より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right) &= (x^2-5x+5-1)(x^2-5x+5+1) \\ &= (-1)\cdot 1=-1, \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-3\right)\left(\frac{5}{2}-4\right) \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{16} \end{aligned}$$

$x=\dfrac{5}{2}$ のとき極大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{16}}$，$x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ のとき極小値 $\boldsymbol{-1}$

補足 数学 III の微分法を利用しない場合は，次のように展開して微分し，さらに因数分解することになる．

$$f(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24$$

これを微分すると　$f'(x)=4x^3-30x^2+70x-50=2(2x-5)(x^2-5x+5)$

330* a を正の定数とし，2 つの曲線 C_1，C_2 を次のように定める．

$$C_1 : y = x^3 - 3x \qquad C_2 : y = x^3 - 3x + a$$

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする．l と C_1 の 2 つの共有点の x 座標の差が 1 となるような a の値を求めよ．　(一橋大)

解答　(1) $y = x^3 - 3x$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 3$

C_1 上の点 $(t,\ t^3 - 3t)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (3t^2 - 3)x - 2t^3 \quad (*)$$

この直線と C_2 の方程式から y を消去すると

$$x^3 - 3x + a = (3t^2 - 3)x - 2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad a = -x^3 + 3t^2x - 2t^3 \quad (**)$$

$f(x) = -x^3 + 3t^2x - 2t^3$ とおくと　$f'(x) = -3x^2 + 3t^2 = -3(x+t)(x-t)$

$$f(t) = 0, \quad f(-t) = -4t^3$$

$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ が接するから $(a > 0)$，C_2 と直線 $(*)$ は $x = -t$ で接する．これを $(**)$ に代入すると

$$a = -4t^3 \quad \text{ゆえに} \quad t = \sqrt[3]{-\frac{a}{4}} \qquad (***)$$

よって，C_1，C_2 の接する直線 l は唯一存在し，その方程式は $(*)$ より

$$\boldsymbol{y = \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2}} - 3\right)x + \frac{a}{2}}$$

(2) C_1 と $(*)$ から，y を消去すると　$x^3 - 3x = (3t^2 - 3)x - 2t^3$

$$(x-t)^2(x+2t) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = t, -2t$$

$a > 0$ であるから，$(***)$ より　$t < 0$ に注意して

$$-2t - t = 1 \quad t = -\frac{1}{3}$$

したがって　$\sqrt[3]{-\frac{a}{4}} = -\frac{1}{3}$　よって　$\boldsymbol{a = \frac{4}{27}}$

331* $f(x)$ は 3 次の多項式で，x^3 の係数と定数項は 1 である．α を正の実数とする．関数 $f(x)$ が，$x=-\alpha$ と $x=\alpha$ で極値をとるとき，以下の問いに答えよ．

(九大理学部 [数学科]2015 年後期 $\boxed{1}$)

(1) 等式 $f(-\alpha)-f(\alpha)=4\alpha^3$ が成り立つことを示せ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と放物線 $y=x^2-\dfrac{1}{3}x+1$ がある点 P で接するとき，α の値と点 P の座標を求めよ．ただし，2 つの曲線が点 P で接するとは，それらの曲線が点 P を共有し，点 P で共通の接線をもつことである．

解答 (1) $y=f(x)$ が，$x=-\alpha$ と $x=\alpha$ で極値をとるので，最高次数の項の係数に注意して

$$f'(x)=3(x+\alpha)(x-\alpha) \quad \cdots(*)$$

よって $\quad f(-\alpha)-f(\alpha)=\displaystyle\int_{\alpha}^{-\alpha} f'(x)\,dx=3\int_{\alpha}^{-\alpha}(x+\alpha)(x-\alpha)\,dx$

$$=3\left(-\frac{1}{6}\right)(-\alpha-\alpha)^3=4\alpha^3$$

(2) $f(x)$ の定数項が 1 であるから，$(*)$ より

$$f(x) = x^3 - 3\alpha^2 x + 1$$

$g(x) = f(x) - \left(x^2 - \dfrac{1}{3}x + 1\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - x^2 + \left(\frac{1}{3} - 3\alpha^2\right)x \\ &= x\left(x^2 - x + \frac{1}{3} - 3\alpha^2\right) \end{aligned}$$

$g(x) = 0$ が重解 (接点 P の x 座標) をもてばよいので，$\alpha > 0$ に注意して

(i) $x = 0$ を重解にもつとき

$$\frac{1}{3} - 3\alpha^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

(ii) $x = \dfrac{1}{2}$ を重解にもつとき

$$\frac{1}{3} - 3\alpha^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{1}{6}$$

接点 P は放物線 $y = x^2 - \dfrac{1}{3}x + 1$ 上の点であるから

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{3}} \text{ のとき} \quad \mathbf{P\,(0,\ 1)}$$

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{6}} \text{ のとき} \quad \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{12}}\right)$$

332* 関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。 (九大文系 2012 年 2)

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本持つことを示せ。

(2) (1) において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする (ただし $p<q$)。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき，2 点 P，Q の間の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P，Q の x 座標 p，q もそれぞれ求めよ。

解答 (1) $f'(x)=3x^2+6x+1$ より，C 上の点 $(u,\ f(u))$ における接線の傾きが t であるとき，u は方程式

$$3x^2+6x+1=t \quad \text{すなわち} \quad 3x^2+6x+1-t=0 \quad \cdots ①$$

の解である．この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4=3^2-3(1-t)=3t+6$$

$t \geqq 0$ のとき，$D>0$ であるから，① は異なる 2 つの実数解をもつ．

よって，C は傾きが t $(t \geqq 0)$ である接線を 2 本もつ．

(2) p，q は 2 次方程式 ① の解であるから，解と係数の関係により

$$p+q=-2, \quad pq=\frac{1-t}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(p)+f(q) &= (p^3+3p^2+p-1)+(q^3+3q^2+q-1) \\ &= p^3+q^3+3(p^2+q^2)+p+q-2 \\ &= (p+q)^3-3pq(p+q)+3\{(p+q)^2-2pq\} \\ &\qquad +(p+q)-2 \\ &= (-2)^3-3\times\frac{1-t}{3}\times(-2)+3\left\{(-2)^2-2\times\frac{1-t}{3}\right\} \\ &\qquad +(-2)-2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに $\quad \dfrac{p+q}{2}=-1,\ \dfrac{f(p)+f(q)}{2}=0$

よって，2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称である．

(3) $\mathrm{PQ}^2=(p-q)^2+\{f(p)-f(q)\}^2$ であるから，まず

$$\begin{aligned}f(p)-f(q)&=(p^3+3p^2+p-1)-(q^3+3q^2+q-1)\\&=p^3-q^3+3(p^2-q^2)+p-q\\&=(p-q)\{(p^2+pq+q^2)+3(p+q)+1\}\\&=(p-q)\{(p+q)^2-pq+3(p+q)+1\}\\&=(p-q)\left\{(-2)^2-\frac{1-t}{3}+3(-2)+1\right\}\\&=\frac{1}{3}(t-4)(p-q)\end{aligned}$$

次に　　$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=(-2)^2-4\times\dfrac{1-t}{3}=\dfrac{4}{3}(t+2)$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(p-q)^2+\{f(p)-f(q)\}^2\\&=(p-q)^2+\frac{1}{9}(t-4)^2(p-q)^2\\&=(p-q)^2\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}\\&=\frac{4}{3}(t+2)\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}=\frac{4}{27}(t^3-6t^2+9t+50)\end{aligned}$$

$g(t)=\dfrac{4}{27}(t^3-6t^2+9t+50)$ $(t\geqq 0)$ の最小値を求めればよいから

$$g'(t)=\frac{4}{9}(t-1)(t-3)$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\frac{200}{27}$	↗	8	↘	$\frac{200}{27}$	↗

上の増減表により，$g(t)$ は，$t=0,\ 3$ で最小値 $\dfrac{200}{27}$ をとる．

ゆえに，PQ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{10\sqrt{6}}{9}}$ である．

$p,\ q$ $(p<q)$ は方程式 ① の解であるから

$t=0$ のとき，$3x^2+6x+1=0$ を解いて

$$\boldsymbol{p=\frac{-3-\sqrt{6}}{3},\quad q=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}}$$

$t=3$ のとき，$3x^2+6x-2=0$ を解いて

$$\boldsymbol{p=\frac{-3-\sqrt{15}}{3},\quad q=\frac{-3+\sqrt{15}}{3}}$$

補足 $f(x)$ を $3x^2+6x+1-t$ で割った商と余りは，それぞれ $\dfrac{1}{3}(x+1)$，$\dfrac{1}{3}(t-4)(x+1)$ であるから

$$f(x)=\frac{1}{3}(x+1)(3x^2+6x+1-t)+\frac{1}{3}(t-4)(x+1)$$

p，q は方程式 $3x^2+6x+1-t=0$ の解であるから

$$f(p)=\frac{1}{3}(t-4)(p+1),\quad f(q)=\frac{1}{3}(t-4)(q+1)$$

これを次の計算に用いることができる．

(2) $f(p)+f(q)=\dfrac{1}{3}(t-4)(p+q+2)$

解と係数の関係により，$p+q=-2$ であるから，$f(p)+f(q)=0$

ゆえに　　$\dfrac{p+q}{2}=-1$，$\dfrac{f(p)+f(q)}{2}=0$

よって，2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称である．

(3) $f(p)-f(q)=\dfrac{1}{3}(t-4)(p-q)$

次に　　$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=(-2)^2-4\times\dfrac{1-t}{3}=\dfrac{4}{3}(t+2)$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(p-q)^2+\{f(p)-f(q)\}^2\\&=(p-q)^2+\frac{1}{9}(t-4)^2(p-q)^2\\&=(p-q)^2\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}\\&=\frac{4}{3}(t+2)\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}=\frac{4}{27}(t^3-6t^2+9t+50)\end{aligned}$$

$g(t)=\dfrac{4}{27}(t^3-6t^2+9t+50)$ $(t\geqq 0)$ の最小値を求めればよい．

333 曲線 $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 2$ を C とし，異なる 2 点で C と接する直線を l とする．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 l に囲まれる部分の面積を求めよ．

解答 (1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 2$ とし，l の方程式を $y = px + q$ とおき，C と l の接点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ すると $(\alpha < \beta)$

$$\begin{aligned} f(x) - (px + q) &= (x - \alpha)^2(x - \beta)^2 \qquad (*) \\ &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x^2 - 2\beta x + \beta^2) \\ &= x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 + (\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta)x^2 \\ &\qquad - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2 \end{aligned}$$

上式の x^3 および x^2 の係数を比較すると

$$-2 = -2(\alpha + \beta), \quad \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta = 1$$

すなわち　　$\alpha + \beta = 1 \cdots ①, \quad (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = 1$

上の第 1 式を第 2 式に代入すると　$\alpha\beta = 0 \cdots ②$

$\alpha < \beta$ に注意して，①，② を解くと　$\alpha = 0,\ \beta = 1$ これを $(*)$ に代入すると

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 2 - (px + q) = x^2(x - 1)^2$$

したがって　　$px + q = -2x + 2$

よって，l の方程式は　　$\boldsymbol{y = -2x + 2}$

(2) $\alpha = 0,\ \beta = 1$ であるから，$(*)$ より，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^1 x^2(x - 1)^2\,dx = \frac{2!2!}{5!}(1 - 0)^5 = \boldsymbol{\frac{1}{30}}$$

公式 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{(x - \alpha)^m(\beta - x)^n\,dx} = \frac{\boldsymbol{m!n!}}{\boldsymbol{(m + n + 1)!}}\boldsymbol{(\beta - \alpha)^{m+n+1}}$

7.29　導関数の応用

7.29.1　Review

334 関数 $y = x^3 - 3x + 1$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ．

解答 $y = x^3 - 3x + 1$ より　$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

区間 $0 \leqq x \leqq 2$ における y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

よって　$\boldsymbol{x = 2}$ **のとき，最大値 3**

$\boldsymbol{x = 1}$ **のとき，最小値 −1**

335 a を定数として，3 次方程式 $2x^3-3x^2-12x-a=0\cdots$① を考える．方程式 ① が実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．　(日本工業大 改)

(1) 異なる 3 つの実数解

(2) 異なる正の解を 2 つ，負の解を 1 つ

解答　(1) ① より　$2x^3-3x^2-12x=a$

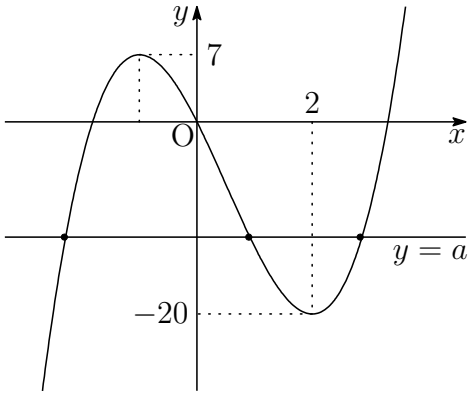
$f(x)=2x^3-3x^2-12x$ とおくと

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗



① の実数解は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の x 座標であるから，

① が異なる 3 個の実数解をもつとき　$\boldsymbol{-20<a<7}$

(2) また，(1) のグラフから，① が異なる正の解を 2 つ，負の解を 1 つもつとき

$$\boldsymbol{-20<a<0}$$

336 不等式 $x^4+2x^3-2x^2+k>0$ がすべての実数 x について成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ.

解答 $f(x)=x^4+2x^3-2x^2+k$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3+6x^2-4x = 2x(2x^2+3x-2) \\ &= 2x(2x-1)(x+2) \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$k-8$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-\frac{3}{16}$	$\nearrow$

$f(x)$ の最小値は　$f(2)=k-8$

すべての x について $f(x)>0$ が成り立つのは

$$k-8>0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k>8}$$

7.29.2 Exercise

337* 関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ について，次の問に答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=1$ を満たす x の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(3) 正の定数 a に対し，$0 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

解答 (1) $f(x)=1$ より　$x^3-3x^2-9x+1=1$

$$x(x^2-3x-9)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=0,\ \frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}}$$

(2) $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$ より，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	-26	↗

したがって，極大値 $f(-1)=\boldsymbol{6}$，極小値 $f(3)=\boldsymbol{-26}$

(3) (1)，(2) の結果から，$0 \leqq x \leqq a$ における最大値を M，最小値を m とすると $(a>0)$

$$\boldsymbol{M=}\begin{cases} \boldsymbol{f(0)=1} & \boldsymbol{\left(0<a<\frac{3+3\sqrt{5}}{2}\right)} \\ \boldsymbol{f(a)=a^3-3a^2-9a+1} & \boldsymbol{\left(\frac{3+3\sqrt{5}}{2} \leqq a\right)} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{m=}\begin{cases} \boldsymbol{f(a)=a^3-3a^2-9a+1} & \boldsymbol{(0<a<3)} \\ \boldsymbol{f(3)=-26} & \boldsymbol{(3 \leqq a)} \end{cases}$$

338 (1) 関数 $f(x)=\sin y+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ の最大値および最小値とそのときの x の値を求めよ. (東北学院大 改)

(2) 関数 $f(x)=\left(27^x+\dfrac{1}{27^x}\right)-5\left(9^x+\dfrac{1}{9^x}\right)-5\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)+1$ は $x=$ ア のとき最小値 イ をとる. (早稲田大 改)

解答 (1) $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ であるから

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x\\ &=\sin x+\frac{1}{3}(3\sin x-4\sin^3 x)\\ &=-\frac{4}{3}\sin^3 x+2\sin x \end{aligned}$$

$t=\sin x$ とおくと $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ $\quad -1 \leqq t \leqq 1$

$g(t)=-\dfrac{4}{3}t^3+2t$ とおくと $\quad g'(t)=-4t^2+2t$

$g'(t)=0$ とすると $\quad t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって, $-1 \leqq t \leqq 1$ における $g(t)$ の増減表は次のようになる.

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{2}{3}$	↘	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	↗	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	↘	$\frac{2}{3}$

よって $\quad t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, すなわち, $\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}}$ のとき, 最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, すなわち, $\boldsymbol{x=-\dfrac{\pi}{4},-\dfrac{3\pi}{4}}$ のとき, 最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

(2) $t = 3^x + \dfrac{1}{3^x}$ とおくと，$3^x > 0$，$\dfrac{1}{3^x} > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t = 3^x + \frac{1}{3^x} \geqq 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} = 2$$

上式において等号が成立するとき

$$3^x = \frac{1}{3^x} \quad \text{すなわち} \quad x = 0$$

また

$$9^x + \frac{1}{9^x} = \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$$

$$27^x + \frac{1}{27^x} = \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^3 - 3\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) = t^3 - 3t$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^3 - 3t) - 5(t^2 - 2) - 5t + 1 \\ &= t^3 - 5t^2 - 8t + 11 \end{aligned}$$

$g(t) = t^3 - 5t^2 - 8t + 11$ とおくと

$$g'(t) = 3t^2 - 10t - 8 = (3t + 2)(t - 4)$$

$t \geqq 2$ に注意して，$g'(t) = 0$ を解くと　$t = 4$

$t \geqq 2$ における $g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	-27	$\nearrow$

$t = 4$ のとき　$3^x + \dfrac{1}{3^x} = 4$　ゆえに　$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$

これを解くと　$3^x = 2 \pm \sqrt{3}$　すなわち　$x = \log_3(2 \pm \sqrt{3})$

よって，$\boldsymbol{x = \log_3(2 \pm \sqrt{3})}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-37}$

339* 方程式 $x^3-3a^2x+16=0$ (a は実数) が異なる 3 つの実数解をもつとき，a の値の範囲と正の実数解の個数を求めよ．　(北海道薬科大 改)

解答 $f(x)=x^3-3a^2x+16$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3a^2=3x^2-3|a|^2=3(x+|a|)(x-|a|)$$

$a=0$ のとき，$f'(x)=3x^2$ となり，$f(x)=0$ の実数解の個数は 1 個であるから

$$a\neq 0$$

したがって，$f(x)$ の増減表は ($a\neq 0$)

x	$\cdots$	$-\lvert a\rvert$	$\cdots$	$\lvert a\rvert$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値 $f(-|a|)$ および極小値 $f(|a|)$ は

$$\text{極大値}f(-|a|)=(-|a|)^3-3a^2(-|a|)+16=2|a|^3+16>0,$$
$$\text{極小値}f(|a|)=(|a|)^3-3a^2|a|=-2|a|^3+16$$

$f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつには，$f(|a|)<0$ を満たせばよい．

$-2|a|^3+16<0$　ゆえに　$|a|>2$　よって　$\boldsymbol{a<-2,\ 2<a}$

340* k を定数とする．3 次方程式 $x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$ が，異なる 3 つの解 α，β，γ (ただし $\alpha<\beta<\gamma$) をもつとき，α，β，γ のとり得る値の範囲を求めよ．

(東京理科大 改)

解答 与えられた 3 次方程式から　$x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x=k$

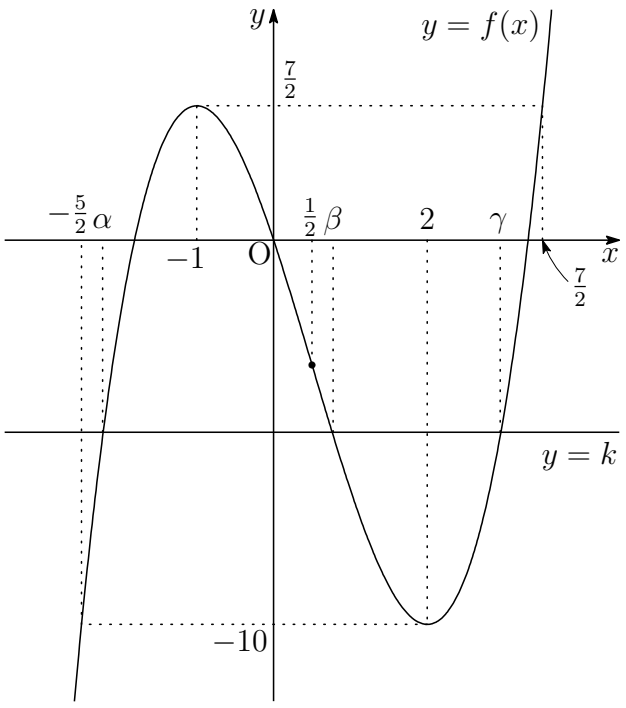
$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x$ とおくと，α，β，γ は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の x 座標である．

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$ より，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	-10	↗

$f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f(2)=-10$，$f(-1)=f\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{7}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{-\frac{5}{2}<\alpha<-1,\ -1<\beta<2,\ 2<\gamma<\frac{7}{2}}$$



補足 変曲点の x 座標 $\dfrac{1}{2}$ は，極大値および極小値を与える x の値の中央である．

また，上の図から分かるように，$-\dfrac{5}{2},\ -1,\ \dfrac{1}{2},\ 2,\ \dfrac{7}{2}$ は等差数列をなす．

341 $f(x)=x^4+x^3-3x^2$ とおく．曲線 $y=f(x)$ に点 $(0,\ a)$ から接線がただひとつ引けるとし，しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする．このときの a の値を求めよ．　(阪大理系 2001 年 $\boxed{2}$)

解答 $f(x)=x^4+x^3-3x^2$ より　$f'(x)=4x^3+3x^2-6x$

$$f''(x)=12x^2+6x-6=6(x+1)(2x-1)$$

曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

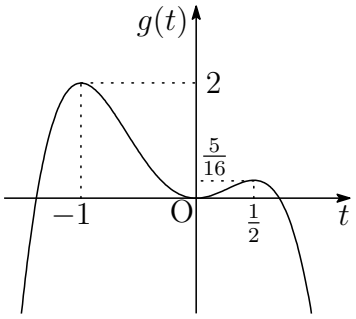
この接線が点 $(0,\ a)$ を通るから

$$a-f(t)=-tf'(t)\quad \text{ゆえに}\quad a=f(t)-tf'(t)$$

$g(t)=f(t)-tf'(t)$ とすると

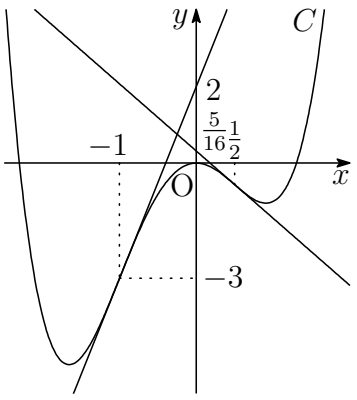
$$g'(t)=-tf''(t)=-6t(t+1)(2t-1)$$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗	2	↘	0	↗	$\frac{5}{16}$	↘



よって，方程式 $g(t)=a$ がただ一つの実数解をもつ a の値は　$\boldsymbol{a=2}$

解説 点 $(0,\ 2)$ から曲線 $C:y=f(x)$ に引いた接線の接点は，曲線の変曲点である．
実際，$g'(t)=-tf''(t)$ より，変曲点において，$g(t)$ は極値をとる．
したがって，曲線に引ける接線の本数は，曲線の変曲点における接線と曲線で区分される領域で分類できる．



補足 3 次関数のグラフに引ける接線についても同様である [12].

3 次曲線 $C : y = f(x)$ の変曲点の x 座標を a とすると　$f''(a) = 0$

点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ_t の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

とくに，C の変曲点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ℓ_t が点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ を通るとき

$$q = f'(t)(p - t) + f(t) \quad \text{ゆえに} \quad f(t) + f'(t)(p - t) - q = 0$$

$\varphi(t) = f(t) + f'(t)(p - t) - q$ とおくと，3 次方程式 $\varphi(t) = 0$ の解の個数が点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線の本数である．

$$\varphi'(t) = f'(t) + f''(t)(p - t) + f'(t)\cdot(-1) = f''(t)(p - t)$$

$\varphi'(t) = 0$ の解は　$t = p,\ a$

$$\varphi(p) = f(p) - q, \quad \varphi(a) = f(a) + f'(a)(p - a) - q = g(p) - q$$

(i) 点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線が 3 本のとき ($\varphi(t) = 0$ の解が 3 個)

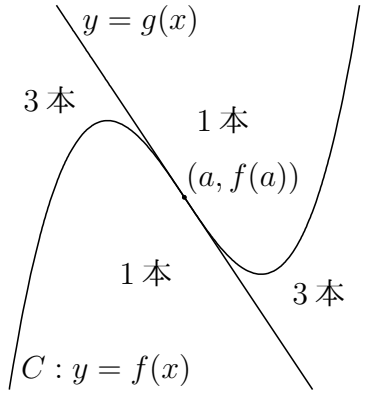
$$\varphi(p)\varphi(a) = (f(p) - q)(g(p) - q) < 0$$

(ii) 点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線が 2 本のとき ($\varphi(t) = 0$ の解が 2 個)

$$\varphi(p)\varphi(a) = (f(p) - q)(g(p) - q) = 0 \quad (p \neq a)$$

(iii) 点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ から C に引ける接線が 1 本のとき ($\varphi(t) = 0$ の解が 1 個)

$$\varphi(p)\varphi(a) = (f(p) - q)(g(p) - q) > 0 \quad \text{または} \quad (p,\ q) = (a,\ f(a))$$



[12] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf 6

千葉大 2017 年 6

座標平面上の点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に引ける接線の本数を n とする．

(1) $n=3$ をみたすような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

(2) $-3a<b$ かつ $n\leqq 2$ をみたすように点 $(a,\ b)$ が動くとき，$b-3a$ の最小値を求めよ．

解答　(1) $f(x)=x^3-3x$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3,\quad f''(x)=6x$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

これが点 $(a,\ b)$ を通るから

$$b=f'(t)(a-t)+f(t)\quad \text{ゆえに}\quad f(t)+f'(t)(a-t)-b=0$$

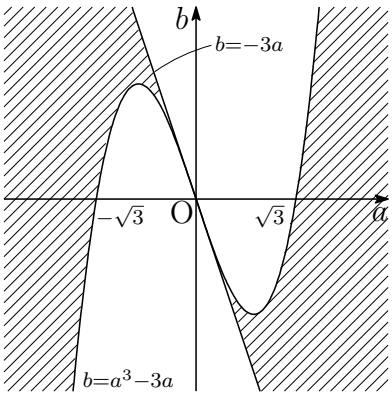
$\varphi(t)=f(t)+f'(t)(a-t)-b$ とおくと　$\varphi(t)=-2t^3+3a(t^2-1)-b$

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=f'(t)+f''(t)(a-t)+f'(t)\cdot(-1)\\&=f''(t)(a-t)=6t(a-t)\end{aligned}$$

$\varphi'(t)=0$ を解くと　$t=0,\ a$
このとき，3 次方程式 $\varphi(t)=0$ の解の個数が点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に引ける接線の本数であるから

$$\begin{aligned}\varphi(0)\varphi(a)&=(-3a-b)(a^3-3a-b)\\&=(3a+b)(-a^3+3a+b)<0\end{aligned}$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界線は含まない．



(2) (1) の結果から，$n \leqq 2$ および $-3a < b$ を同時に満たす不等式は

$$(3a+b)(-a^3+3a+b) \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad -3a < b$$

$k = b - 3a$ とおくと　$b = 3a + k$
k が最小となるときの a の値は

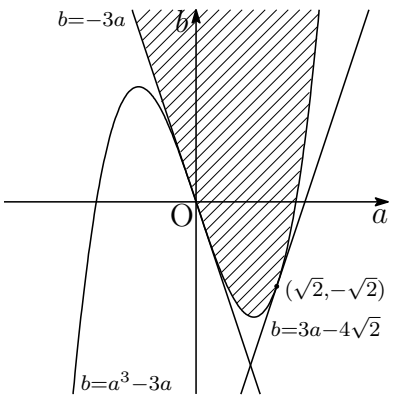
$f'(a) = 3a^2 - 3 = 3$　ゆえに　$a = \pm\sqrt{2}$

$a > 0$ に注意して　$a = \sqrt{2}$

$$b = f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

よって，求める最小値は

$$k = b - 3a = -\sqrt{2} - 3\cdot\sqrt{2} = \mathbf{-4\sqrt{2}}$$



7.29.3 Try

342 a，b を実数として，x の 4 次関数 $f(x)=x^4-ax^2+bx$ を考える．関数 $f(x)$ が極大値をもつための必要十分条件を a と b に関する不等式で与えよ．

(東京理科大 改)

解答 $f'(x)$ の値が正から負になる x が存在する条件を求めればよい．

$f(x)=x^4-ax^2+bx$ より

$$f'(x)=4x^3-2ax+b$$
$$f''(x)=12x^2-2a$$

$a \leqq 0$ のとき，常に $f''(x) \geqq 0$ であるから，$f'(x)$ は単調増加で条件を満たさないから，$a>0$ であることが条件を満たすための必要条件である．

$f'(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{6}}$	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$\cdots$
$f'(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f'\left(-\sqrt{\dfrac{a}{6}}\right)>0$，$f'\left(\sqrt{\dfrac{a}{6}}\right)<0$ を満たせばよい．

$$\frac{2\sqrt{6}}{9}a\sqrt{a}+b>0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{2\sqrt{6}}{9}a\sqrt{a}+b<0$$

よって　　$\boldsymbol{b^2<\dfrac{8}{27}a^3}$

343* $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x-3\sin x\cos x$ の最大値と最小値を求めよ．
(奈良県立医科大)

解答 $t=\sin x+\cos x$ とおくと

$$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\quad \text{ゆえに}\quad -\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

$t=\sin x+\cos x$ の両辺を平方すると

$$t^2=1+2\sin x\cos x\quad \text{ゆえに}\quad \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$ より

$$\sin^3 x+\cos^3 x=t^3-3\cdot\frac{t^2-1}{2}\cdot t=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

したがって $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x-3\sin x\cos x$

$$=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t-3\cdot\frac{t^2-1}{2}=-\frac{1}{2}(t^3+3t^2-3t-3)$$

$g(t)=-\dfrac{1}{2}(t^3+3t^2-3t-3)$ とおくと

$$g'(t)=-\frac{1}{2}(3t^2+6t-3)=-\frac{3}{2}(t^2+2t-1)$$

$g'(t)=0$ $(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$ とすると $t=-1+\sqrt{2}$

ここで $-2g(t)=t^3+3t^2-3t-3$

$$=(t^2+2t-1)(t+1)-4t-2$$

$$=-\frac{2}{3}g'(t)(t+1)-4t-2$$

これから $g(t)=\dfrac{1}{3}g'(t)(t+1)+2t+1$

$$g(-1+\sqrt{2})=2(-1+\sqrt{2})+1=2\sqrt{2}-1$$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $g(t)$ の増減表は

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{3+\sqrt{2}}{2}$	↗	$2\sqrt{2}-1$	↘	$-\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

よって **最大値 $2\sqrt{2}-1$，最小値 $-\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$**

344 a を実数とする．関数 $f(x)=x^3-ax$ を考える． (早稲田大)

(1) $f(x)$ が区間 $-1<x<1$ において極値をとるような a の値の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における最小値が $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となる a の値をすべて求めよ．

解答 (1) $f'(x)=3x^2-a$ より，$f(x)$ が極値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことであるから

$$-a<0 \quad \text{すなわち} \quad a>0$$

$-1<x<1$ において極値をとらないための条件は

$$f'(-1) \leqq 0 \quad \text{かつ} \quad f'(1) \leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad a \geqq 3$$

よって，$-1<x<1$ において極値をとるための a の値の範囲は

$$a>0 \quad \text{かつ} \quad a<3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0<a<3}$$

(2) (i) $a \leqq 0$ のとき，$f'(x) = 3x^2 - a \geqq 0$ より，$f(x)$ は単調増加であるから，最小値は

$$f(-1) = a - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

これは $a \leqq 0$ に反するの不適.

(ii) $2\sqrt{\dfrac{a}{3}} \leqq 1$，すなわち，$0 < a \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき，最小値は

$$f(-1) = a - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(iii) $\sqrt{\dfrac{a}{3}} \leqq 1 < 2\sqrt{\dfrac{a}{3}}$，すなわち，$\dfrac{3}{4} < a \leqq 3$ のとき，最小値は

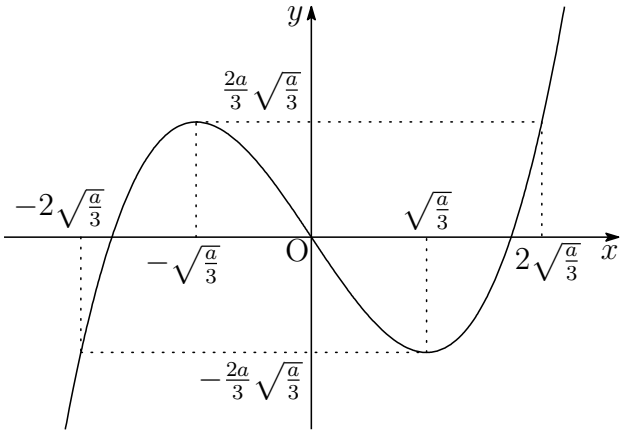
$$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{3}{2}$$

(iv) $1 < \sqrt{\dfrac{a}{3}}$，すなわち，$3 < a$ のとき，最小値は

$$f(1) = 1 - a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

これは，$3 < a$ に反するので，不適.

(i)〜(iv) より $\quad \boldsymbol{a = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3}{2}}$



345* 縦 $x$cm，横 $y$cm，高さ $z$cm の直方体がある．この直方体の対角線の長さは 3cm，全表面積は 16cm^2 である．　(早稲田大 改)

(1) $x+y+z$ の値を求めよ．

(2) この直方体の体積の最小値を求めよ．

(3) この直方体の体積が最大となるとき，最も長い辺の長さを求めよ．

解答　(1) 対角線の長さ $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ が 3 であるから　$x^2+y^2+z^2=9$

全表面積 $2(xy+yz+zx)$ が 16 であるから　$xy+yz+zx=8$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ より $(x,y,z>0)$

$$(x+y+z)^2=9+2\cdot 8=25 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x+y+z=5}$$

(2) $x,\ y,\ z$ を解とする 3 次方程式は

$$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$$

すなわち　　$(*)$ $t^3-5t^2+8t=xyz$

$f(t)=t^3-5t^2+8t$ とおくと

$$f'(t)=3t^2-10t+8=(3t-4)(t-2)$$

$f(t)$ の増減表は

t	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	$\frac{112}{27}$	↘	4	↗

3 次方程式 $(*)$ が与えられた条件を満たす $x,\ y,\ z$ を解にもつとき

$$4 \leqq xyz \leqq \frac{112}{27}$$

よって，直方体の体積の最小値は　**4**

(3) $f(1)=f(2),\ f\left(\dfrac{4}{3}\right)=f\left(\dfrac{7}{3}\right)$ であるから，一般性を失うことなく

$x \leqq y \leqq z$ とすると　$1 \leqq x \leqq \dfrac{4}{3} \leqq y \leqq 2 \leqq z \leqq \dfrac{7}{3}$

xyz は最大値 $\dfrac{112}{27}$ をとり，このとき　$x=y=\dfrac{4}{3},\ z=\dfrac{7}{3}$

よって，最も長い辺の長さは　$\boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$

346 関数 $y = x^3 - x$ のグラフを C とする． (福島大)

(1) C 上の点 $(t,\ t^3 - t)$ における C の接線の方程式を求めよ．

(2) C 上の 2 点 $(t,\ t^3 - t)$ および $(s,\ s^3 - s)$ における C の接線が一致するのは $t = s$ のときに限ることを示せ．

(3) C 上にない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ から C へ引ける数がちょうど 2 本となるとき，$a,\ b$ が満たす条件を求めよ．

(4) (3) の 2 本の接線が直交するときの $a,\ b$ の値を求めよ．

解答 (1) $y = x^3 - x$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 1$

C 上の点 $(t,\ t^3 - t)$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = (3t^2 - 1)x - 2t^3}$$

(2) (1) の結果を利用すると，C 上の点 $(s,\ s^3 - s)$ における接線の方程式は

$$y = (3s^2 - 1)x - 2s^3$$

これが (1) の結果と一致するとき

$$3s^2 - 1 = 3t^2 - 1, \quad -2s^3 = -2t^3$$

したがって　$(s + t)(s - t) = 0, \quad (s - t)(s^2 + st + t^2) = 0$

$$s = \pm t \quad \text{かつ} \quad s = t,\ s = t = 0$$

よって，$s = t$ のときに限る．

(3) (1) で求めた接線が点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通るとき $(b \neq a^3 - a)$

$$b = (3t^2 - 1)a - 2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad 2t^3 - 3at^2 + a + b = 0 \qquad (*)$$

$f(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$ とおく．$f(t) = 0$ の解がちょうど 2 個あるとき，$a,\ b$ が満たす条件を求めればよい．

$$f'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t - a)$$

$f'(t) = 0$ を解くと　$t = 0,\ a$
$f(0) = 0$ または $f(a) = 0$ を満たせばよいから $(a \neq 0)$

$$a + b = 0 \quad \text{または} \quad -a^3 + a + b = 0$$

このとき，$a \neq 0,\ b \neq a^3 - a$ に注意して

$$\boldsymbol{a \neq 0,\ \ a + b = 0}$$

(4) (3) の結果を $(*)$ に代入すると

$$2t^3 - 3at^2 = t^2(2t - 3a) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 0,\ \frac{3a}{2}\ (a \neq 0)$$

$t = 0$ のとき $y' = -1$，　$t = \dfrac{3a}{2}$ のとき $y' = 3 \cdot \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{27}{4}a^2 - 1$
これらの 2 本の接線の傾きについて，このとき

$$-1 \cdot \left(\frac{27}{4}a^2 - 1\right) = -1 \quad \text{ゆえに} \frac{27}{4}a^2 = 2$$

したがって，$a^2 = \dfrac{8}{27}$ を解いて　$a = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$
$b = -a$ であるから，求める $a,\ b$ の値は

$$\boldsymbol{a = \pm\frac{2\sqrt{6}}{9},\quad b = \mp\frac{2\sqrt{6}}{9}} \quad \textbf{(複号同順)}$$

347* a を実数とし，関数

$$f(x) = x^3 - 3ax + a$$

を考える．$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$f(x) \geqq 0$$

となるような a の範囲を求めよ．　(阪大文系 2006 年 $\boxed{1}$)

解答 $0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) \geqq 0$ となるためには

$$f(0) = a \geqq 0, \quad f(1) = 1 - 2a \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$$

であることが必要条件である．

(i) $a = 0$ のとき，$f(0) = 0$，$f'(x) \geqq 0$ であるから，$a = 0$ は条件を満たす．

(ii) $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x + \sqrt{a}\,)(x - \sqrt{a}\,)$ より

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) \geqq 0$ となる条件は

$$f(\sqrt{a}\,) = -2a\sqrt{a} + a = a(1 - 2\sqrt{a}) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < a \leqq \frac{1}{4}$$

(i), (ii) より，求める a の値の範囲は　　$\boldsymbol{0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{4}}$

7.30　不定積分と定積分，面積の基本

7.30.1　Review

348 関数 $y=f(x)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ を通り，また，点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きが $3x^2-4x$ のとき，関数 $f(x)$ を求めよ．

解答 $f'(x)=3x^2-4x$ より　$f(x)=x^3-2x^2+C$　(C は積分定数)

$f(1)=1$ であるから　$-1+C=1$　ゆえに　$C=2$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^3-2x^2+2}$

349 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_1^3 (x^2+1)^2\,dx-\int_1^3 (x^2-1)^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^0 (-2x^2-3x+2)\,dx+\int_0^2 (-2x^2-3x+2)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-3}^3 (x^2-3|x|+2)\,dx$

解答　(1)

$$\begin{aligned}&\int_1^3 (x^2+1)^2\,dx-\int_1^3 (x^2-1)^2\,dx\\ =&\int_1^3 \{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2\}\,dx\\ =&\int_1^3 4x^2\,dx=\left[\,\frac{3}{4}x^3\,\right]_1^3=\boldsymbol{\frac{104}{3}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^0 (-2x^2-3x+2)\,dx+\int_0^2 (-2x^2-3x+2)\,dx\\ =&\int_{-2}^2 (-2x^2-3x+2)\,dx=2\int_0^2 (-2x^2+2)\,dx\\ =&-\frac{4}{3}\left[\,x^3\,\right]_0^2+4\left[\,x\,\right]_0^2=-\frac{32}{3}+8=\boldsymbol{-\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

(3)　($x^2-3|x|+2$ は遇関数)

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 (x^2-3|x|+2)\,dx&=2\int_0^3 (x^2-3|x|+2)\,dx=2\int_0^3 (x^2-3x+2)\,dx\\ &=2\left[\,\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\,\right]_0^3=\boldsymbol{3}\end{aligned}$$

350 (1) 等式 $\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = x^2 - 2x + a$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ が $f(x) = x^2 - x + 2\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たすとき，関数 $f(x)$ を求めよ.

解答 (1) 与えらえた等式に $x = -1$ を代入すると

$$0 = 3 + a \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = -3}$$

与えられた等式を x で微分すると　$\boldsymbol{f(x) = 2x - 2}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから

$$k = \int_0^1 f(t)\,dt$$

とおくと，$f(x) = x^2 - x + 2k$ より

$$k = \int_0^1 (t^2 - t + 2k)\,dt = \left[\ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2kt\ \right]_0^1 = 2k - \frac{1}{6}$$

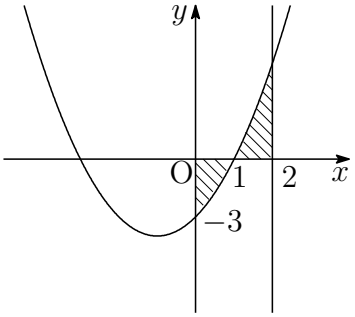
これを解いて　$k = \dfrac{1}{6}$　よって　$\boldsymbol{f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{3}}$

351 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $y = x^2 + 2x - 3$ $(0 \leqq x \leqq 2)$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

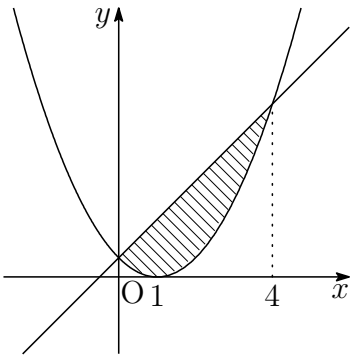
(2) $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 2x + 1$

解答 (1) 求める面積 S は，下の図の斜線部分



$$\begin{aligned} S &= -\int_0^1 (x^2 + 2x - 3)\,dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3)\,dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_1^2 = \mathbf{4} \end{aligned}$$

(2) 求める面積 S は，下の図の斜線部分



$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{(2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)\}\,dx \\ &= -\int_0^4 x(x - 4)\,dx = -\left(-\frac{1}{6}\right)(4 - 0)^3 = \mathbf{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

7.30.2 Exercise

352* 次の関係式を満たす関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ.

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 g(t)\,dt, \quad g(x) = 2x^2 - \int_0^1 f(t)\,dt$$

解答 $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから

$$a = \int_0^1 g(t)\,dt, \quad b = \int_0^1 f(t)\,dt$$

とおくと

$$f(x) = x^2 + a, \quad g(x) = 2x^2 - b \qquad (*)$$

したがって

$$a = \int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 (2t^2 - b)\,dt = \left[\ \frac{2}{3}t^3 - bt\ \right]_0^1 = \frac{2}{3} - b,$$
$$b = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (t^2 + a)\,dt = \left[\ \frac{t^3}{3} + at\ \right]_0^1 = \frac{1}{3} + a$$

上の 2 式から　　$a = \dfrac{1}{6},\ b = \dfrac{1}{2}$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 + \frac{1}{6}, \quad g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}}$$

353 x が実数全体を動くとき，関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x t(t-1)(t+2)\,dt$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

解答 $f(x)=\displaystyle\int_0^x t(t-1)(t+2)\,dt$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=x(x-1)(x+2)$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_0^x (t^3+t^2-2t)\,dt \\ &=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-t^2\right]_0^x=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2 \end{aligned}$$

したがって　$f(-2)=-\dfrac{8}{3}$，$f(1)=-\dfrac{5}{12}$

よって　$\boldsymbol{x=-2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{8}{3}}$

354* (1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ．

(2) a を定数とする．直線 $y=ax-a+3$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を S とするとき，S を最小にする a の値，およびその最小値を求めよ．

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx\\ &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx-(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\,dx\\ &= \frac{1}{3}\Big[\,(x-\alpha)^3\,\Big]_\alpha^\beta-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\Big[\,(x-\alpha)^2\,\Big]_\alpha^\beta\\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

(2) $y=ax-a+3$ と $y=x^2$ の 2 式から y を消去して整理すると

$$x^2-ax+a-3=0$$

係数について

$$D=(-a)^2-4\cdot1(a-3)=a^2-4a+12=(a-2)^2+8>0$$

したがって，直線 $y=ax-a+3$ と放物線 $y=x^2$ が異なる 2 点で交わる．これらの共有点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\begin{aligned}&x^2-ax+a-3=(x-\alpha)(x-\beta),\\ &\alpha+\beta=a,\quad \alpha\beta=a-3\end{aligned}$$

であるから，求める面積 S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\{(ax-a+3)-x^2\}\,dx=-\int_\alpha^\beta (x^2-ax+a-3)\,dx\\ &=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}\\ &=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{a^2-4(a-3)\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(a-2)^2+8\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

よって，S は $a=2$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{6}\cdot8^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{2}}{3}}$

7.30.3 Try

355 3次関数 $y=f(x)$ が $x=1-\sqrt{3}$ と $x=1+\sqrt{3}$ において極値をとり，点 $(3,\ f(3))$ における $y=f(x)$ のグラフの接線が直線 $y=4x-27$ であるとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 3x^2-14x$ が成立することを示せ．

解答 (1) 2次関数 $f'(x)=0$ の解が $x=1\pm\sqrt{3}$ であるから，定数 a を用いて

$$\begin{aligned} f'(x) &= a(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3}) \\ &= a\{(x-1)^2-3\} = a(x^2-2x-2) \end{aligned} \qquad (*)$$

$(3,\ f(3))$ における $y=f(x)$ のグラフの接線が直線 $y=4x-27$ であるから

$$f'(3)=4, \quad f(3)=4\cdot 3-27=-15$$

$f'(3)=4$ を $(*)$ に代入すると

$$a(3^2-2\cdot 3-2)=4 \quad \text{ゆえに} \quad a=4$$

$f'(x)=4(x^2-2x-2)$ であるから，これを積分すると

$$f(x)=4\left(\frac{x^3}{3}-x^2-2x\right)+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$f(3)=-15$ であるから

$$-24+C=-15 \quad \text{ゆえに} \quad C=9$$

よって $\quad f(x)=4\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2-2x\right)+9$

$$= \boldsymbol{\frac{4}{3}x^3-4x^2-8x+9}$$

(2) $g(x) = f(x) - (3x^2 - 14x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 8x + 9\right) - (3x^2 - 14x) \\ &= \frac{4}{3}x^3 - 7x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

したがって

$$g'(x) = 4x^2 - 14x + 6 = 2(2x - 1)(x - 3)$$

$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	9	↗	極大	↘	極小	↗

$$g(3) = \frac{4}{3}\cdot 3^3 - 7\cdot 3^2 + 6\cdot 3 + 7 = 0$$

したがって，$x \geqq 0$ のとき　$g(x) = f(x) - (3x^2 - 14x) \geqq 0$

よって，$x \geqq 0$ のとき　$f(x) \geqq 3x^2 - 14x$

356* 等式 $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-t)f(t)\,dt+7$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．　(立教大 改)

解答 $f(x)=x\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,dt-\int_{-1}^{1}tf(t)\,dt+7$ より

$$a=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt,\quad b=\int_{-1}^{1}tf(t)\,dt$$

とおくと，$f(x)=ax-b+7$

$$a=\int_{-1}^{1}(at-b+7)\,dt=\left[\ \frac{at^2}{2}+(7-b)t\ \right]_{-1}^{1}=2(7-b)$$

$$b=\int_{-1}^{1}t(at-b+7)\,dt=\left[\ \frac{at^3}{3}+\frac{(7-b)t^2}{2}\ \right]_{-1}^{1}=\frac{2a}{3}$$

上の 2 式から　$a=6,\ b=4$　よって　$\boldsymbol{f(x)=6x+3}$

357* 実数 t の関数

$$F(t)=\int_0^1 |x^2-t^2|\,dx$$

について考える. (東北大文系 2022 年 2)

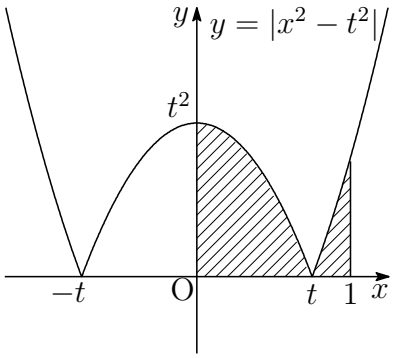
(1) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$F(t)$ を t の整式として表せ.

(2) $t \geqq 0$ のとき，$F(t)$ を最小にする t の値 T と $F(T)$ の値を求めよ.

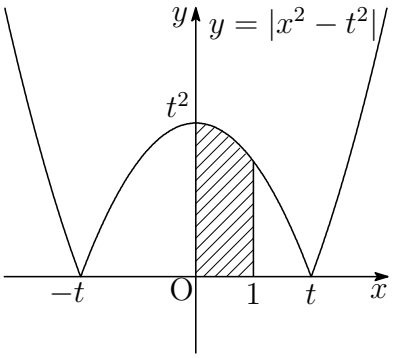
解答 (1) $0 \leqq t \leqq 1$，$F(t)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-t^2|\,dx$ より

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^t (t^2-x^2)\,dx+\int_t^1 (x^2-t^2)\,dx\\&=\left[\,t^2x-\frac{x^3}{3}\,\right]_0^t+\left[\,\frac{x^3}{3}-t^2x\,\right]_t^1\\&=\boldsymbol{\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき



$1 \leqq t$ のとき



(2) $1 \leqq t$ のとき

$$F(t)=\int_0^1 (t^2-x^2)\,dx=\left[\,t^2x-\frac{x^3}{3}\,\right]_0^1=t^2-\frac{1}{3}$$

$1 \leqq t$ において，$F(t)$ は単調増加であるから，$t \geqq 0$ における最小値は $0 \leqq t \leqq 1$ で調べればよい. (1) の結果から

$$F'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$F'(t)$		$-$	0	$+$	
$F(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

よって $\boldsymbol{T=\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}}$

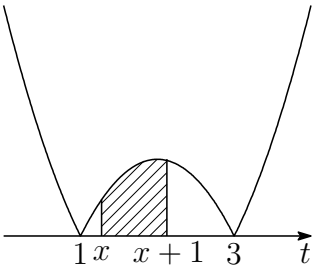
358 関数 $f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|\,t^2-4t+3\,|\,dt\ (x\geqq 1)$ とおくとき，関数 $f(x)$ を求めて $y=f(x)$ のグラフをかけ. (宮城教育大)

解答 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|\,(t-1)(t-3)\,|\,dt\ (x\geqq 1)$

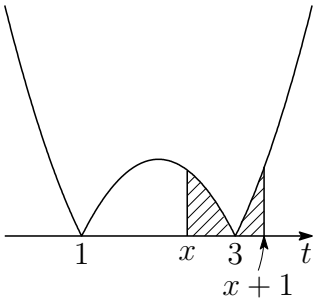
t^2-4t+3 の原始関数の 1 つを $F(t)=\dfrac{t^3}{3}-2t^2+3t$ とおくと

$$\begin{aligned}F(x+1)-F(x)&=\left\{\frac{(x+1)^3}{3}-2(x+1)^2+3(x+1)\right\}-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\\&=x^2-3x+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

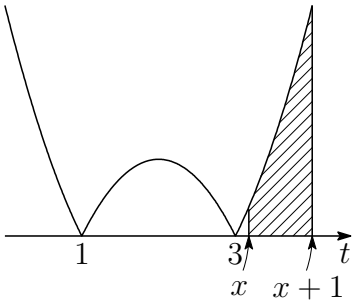
(i) $x+1\leqq 3$



(ii) $x\leqq 3\leqq x+1$



(iii) $3\leqq x$



(i) $x+1\leqq 3$，すなわち，$1\leqq x\leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=-\int_x^{x+1}(t^2-4t+3)\,dt=-\Big[\ F(t)\ \Big]_x^{x+1}\\&=-\{F(x+1)-F(x)\}=-x^2+3x-\frac{4}{3}\\&=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{12}\end{aligned}$$

(ii) $x \leqq 3 \leqq x+1$，すなわち，$2 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_x^3 (t^2-4t+3)\,dt + \int_3^{x+1} (t^2-4t+3)\,dt \\ &= -\Big[\ F(t)\ \Big]_x^3 + \Big[\ F(t)\ \Big]_3^{x+1} \\ &= F(x)+F(x+1)-2F(3) \\ &= \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right) + \left\{\frac{(x+1)^3}{3}-2(x+1)^2+3(x+1)\right\} - 2\cdot 0 \\ &= \frac{2}{3}x^3-3x^2+3x+\frac{4}{3} \end{aligned}$$

これを微分すると　$f'(x) = 2x^2-6x+3$

$2<x<3$ に注意して $f'(x)=0$ を解くと　$x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

$f(x)$ を $f'(x)$ で割った商が $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}$，余りが $-x+\dfrac{17}{6}$ であるから

$$f(x) = f'(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right) - x + \frac{17}{6}$$

したがって　$f\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{17}{6} = \dfrac{8-3\sqrt{3}}{6}$

このとき，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	2	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	↘	$\frac{8-3\sqrt{3}}{6}$	↗	$\frac{4}{3}$

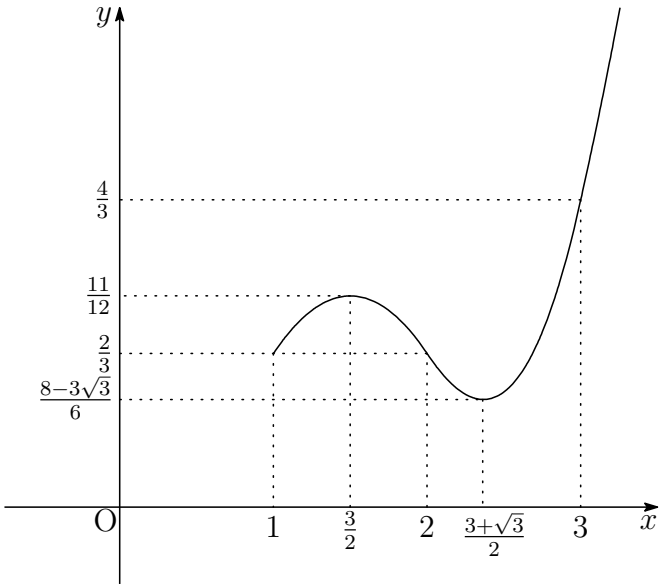
(iii) $3 \leqq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+1} (t^2-4t+3)\,dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_x^{x+1} \\ &= F(x+1)-F(x) = x^2-3x+\frac{4}{3} \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{12} \end{aligned}$$

(i)〜(iii) から

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} -x^2+3x-\dfrac{4}{3} & (1 \leqq x \leqq 2) \\ \dfrac{2}{3}x^3-3x^2+3x+\dfrac{4}{3} & (2 \leqq x \leqq 3) \\ x^2-3x+\dfrac{4}{3} & (3 \leqq x) \end{cases}}$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



359* (1) xy 平面において，$y=-2x^2+3x$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S を求めよ．

(2) (1) で求めた面積 S を放物線 $y=\dfrac{1}{3}mx^2$ $(m>0)$ が 2 等分するとき，定数 m の値を求めよ．　(東京経済大)

解答 (1) $y=-2x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ より

$$S=-2\int_0^{\frac{3}{2}}x\left(x-\frac{3}{2}\right)dx=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{2}-0\right)^3=\boldsymbol{\frac{9}{8}}$$

(2) $y=\dfrac{1}{3}mx^2$ と $y=-2x^2+3x$ の 2 式から，y を消去すると

$$\frac{1}{3}mx^2=-2x^2+3x \quad \text{ゆえに} \quad x\{(m+6)x^2-9\}=0$$

これを解いて　$x=0,\ \dfrac{9}{m+6}$

このとき

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^{\frac{9}{m+6}}\left\{(-2x^2+3x)-\frac{mx^2}{3}\right\}dx\\&=-\frac{m+6}{3}\int_0^{\frac{9}{m+6}}x\left(x-\frac{9}{m+6}\right)dx\\&=-\frac{m+6}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{9}{m+6}\right)^3\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{m+6}\right)^2=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

ゆえに　$\left(\dfrac{9}{m+6}\right)^2=\dfrac{9}{8}$　両辺の逆数をとると　$\left(\dfrac{m+6}{9}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

$$\frac{m+6}{9}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$m>0$ であるから　　$\boldsymbol{m=6\sqrt{2}-6}$

360 t を正の実数とし，放物線 $C : y = \dfrac{x^2}{4}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ に対して，P における C の法線を L とする． (学習院大学)

(1) L の方程式を求めよ．

(2) C と L とで囲まれた部分の面積を S とする．t が正の実数全体を動くとき，S の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ．

(3) C と L の P 以外の交点を Q とし，P，Q における C の接線を，それぞれ L_1，L_2 とする．3 つの直線 $L,\ L_1,\ L_2$ で囲まれてできる三角形が二等辺三角形となるような t を求めよ．

解答 (1) $y = \dfrac{x^2}{4}$ を微分すると $\quad y' = \dfrac{x}{2}$

$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における C の接線の傾きが $\dfrac{t}{2}$ である $(t > 0)$.

したがって，P における C の法線 L の方程式は

$$y = -\frac{2}{t}(x - t) + \frac{t^2}{4} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -\frac{2}{t}x + \frac{t^2}{4} + 2}$$

(2) L と C の方程式から

$$\left(-\frac{2}{t}x + \frac{t^2}{4} + 2\right) - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\left\{x^2 + \frac{8}{t}x - t\left(t + \frac{8}{t}\right)\right\}$$
$$= -\frac{1}{4}(x - t)\left(x + t + \frac{8}{t}\right)$$

したがって，点 Q の x 座標を s とすると $\quad s = -t - \dfrac{8}{t} \quad \cdots ①$

$$S = -\frac{1}{4}\int_s^t (x - t)(x - s)\,dx = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)(t - s)^3$$
$$= \frac{1}{24}\left(2t + \frac{8}{t}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(t + \frac{4}{t}\right)^3$$
$$\geqq \frac{1}{3}\left(2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}}\right)^3 = \frac{64}{3}$$

上式において，等号が成立するとき $\quad t = \dfrac{4}{t} \quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{t = 2}$

よって，$\boldsymbol{t = 2}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{64}{3}}$ をとる．

(3) C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における接線 L_1 の方程式は

$$y=\frac{t}{2}(x-t)+\frac{t^2}{4} \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4}$$

同様に，C 上の点 $\mathrm{P}\left(s,\ \dfrac{s^2}{4}\right)$ における接線 L_2 の方程式は $\quad y=\dfrac{s}{2}x-\dfrac{s^2}{4}$

L_1 と L_2 の交点を R とすると，R の座標は，$L_1,\ L_2$ の方程式から

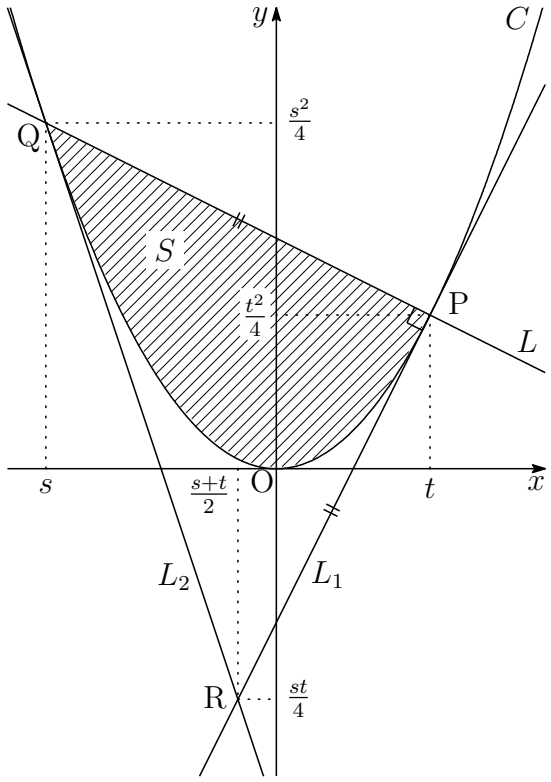
$$\frac{s}{2}x-\frac{s^2}{4}=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4} \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{s+t}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{st}{4}$$

$\mathrm{R}\left(\dfrac{s+t}{2},\ \dfrac{st}{4}\right)$ であるから，$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{s^2}{4}\right)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\frac{t-s}{2},\ \frac{t(t-s)}{4}\right), \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(s-t,\ \frac{(s+t)(s-t)}{4}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたベクトルを $\vec{v}$ とすると $\quad \vec{v}=\left(\dfrac{t(s-t)}{4},\ \dfrac{t-s}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{v}$ であるから，x 成分を比較して $\quad \boldsymbol{t=4}$



補足 $\vec{a}=(x,\ y)$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたベクトルを $\vec{b}$ とすると $\quad \vec{b}=(-y,\ x)$

別解 $L_1,\ L_2$ の偏角をそれぞれ $\theta_1,\ \theta_2$ とすると

$$\tan\theta_1 = \frac{t}{2}, \quad \tan\theta_2 = \frac{s}{2}$$

$\theta_2 - \theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1} = \frac{\frac{s}{2} - \frac{t}{2}}{1 + \frac{s}{2}\cdot\frac{t}{2}} = 1$$

したがって　$\dfrac{2(s-t)}{4+st} = 1$　ゆえに　$s(t-2) + 2t + 4 = 0$

① を上の第 2 式に代入すると

$$\left(-t - \frac{8}{t}\right)(t-2) + 2t + 4 = 0$$

整理すると　$t^3 - 4t^2 + 4t - 16 = 0$　したがって　$(t-4)(t^2+4) = 0$

$t > 0$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{t = 4}$

7.31　面積の応用

7.31.1　Review

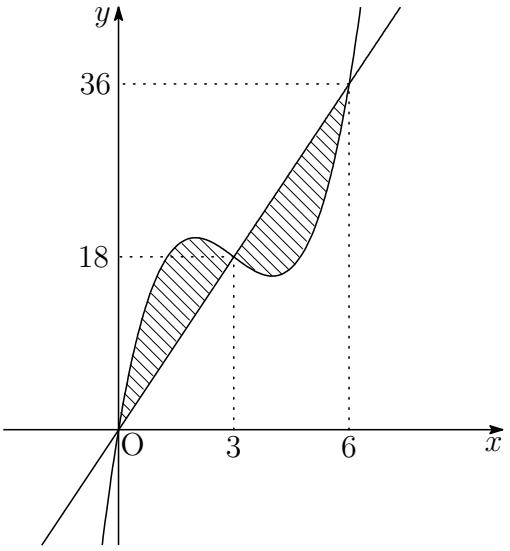
361 関数 $f(x)=x^3-9x^2+24x$ について，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=6x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．　(静岡大 改)

解答 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=6x$ の共有点の x 座標は

$$x^3-9x^2+24x=6x \quad \text{ゆえに} \quad x(x-3)(x-6)=0$$

これを解いて　$x=0,\ 3,\ 6$

求める面積 S は，下の図の斜線部分である．



$$\begin{aligned}
S&=\int_0^3\{(x^3-9x^2+24x)-6x\}\,dx+\int_3^6\{6x-(x^3-9x^2+24x)\}\,dx\\
&=\int_0^3(x^3-9x^2+18x)\,dx-\int_3^6(x^3-9x^2+18x)\,dx\\
&=\left[\ \frac{x^4}{4}-3x^3+9x^2\ \right]_0^3-\left[\ \frac{x^4}{4}-3x^3+9x^2\ \right]_3^6=\mathbf{\frac{81}{2}}
\end{aligned}$$

補足 点 $(3,\ 18)$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点であり，2 つの斜線部分の面積は等しい．

362 曲線 $C : y = |x^2 - 4|$ と直線 $\ell : y = 2x + 4$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ. (東京電機大)

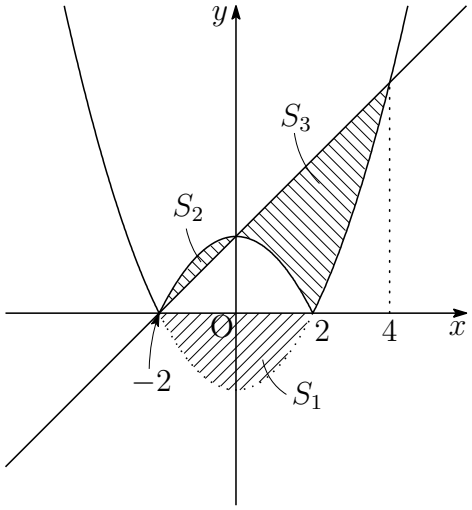
解答 図の斜線部分を $S_1,\ S_2,\ S_3$ とすると

$$S_1 = \frac{1}{6}\cdot 4^3 = \frac{32}{3}, \quad S_2 = \frac{1}{6}\cdot 2^3 = \frac{4}{3}, \quad S_1 + (S_1 - S_2) + S_3 = \frac{1}{6}\cdot 6^3 = 36$$

上の第 1 式と第 2 式を第 3 式に代入することにより $\quad S_3 = 16$

よって，求める面積は

$$S_2 + S_3 = \frac{4}{3} + 16 = \boldsymbol{\frac{52}{3}}$$



7.31.2 Exercise

363* 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = x^2 - 6x + 15$ の共通接線を l とするとき，C_1，C_2 および l によって囲まれた部分の面積を求めよ．

解答 $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

$C_1 : y = x^2$ と l の接点を $(t,\ t^2)$ とすると，l の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2 \qquad (*)$$

C_2 と l の方程式から y を消去すると

$$x^2 - 6x + 15 = 2tx - t^2 \qquad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2(t+3)x + t^2 + 15 = 0 \qquad (**)$$

C_2 と l は接するから，係数について

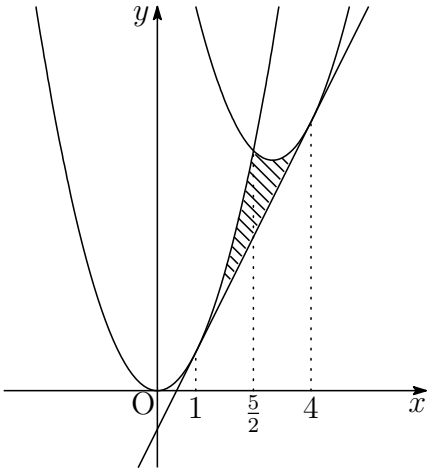
$$D/4 = (t+3)^2 - (t^2 + 15) = 6(t-1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 1$$

$(*)$，$(**)$ より，$l : y = 2x - 1$，l と C_2 の接点の x 座標は　4

また，$C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = x^2 - 6x + 15$ の共有点の x 座標は　$\dfrac{5}{2}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{5}{2}} \{x^2 - (2x-1)\}\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \{x^2 - 6x + 15 - (2x-1)\}\,dx \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} (x-1)^2\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 (x-4)^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[\ (x-1)^3\ \Big]_1^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\Big[\ (x-4)^3\ \Big]_{\frac{5}{2}}^4 = \mathbf{\frac{9}{4}} \end{aligned}$$



364* 放物線 $y=x^2$ に点 $(1,-3)$ を通る 2 本の接線を引き，接点を P，Q とする．

(1) 直線 PQ と放物線で囲まれる図形の面積 S_1 を求めよ．

(2) 2 本の接線と放物線で囲まれる図形の面積を S_2 とするとき，$S_1:S_2$ を求めよ．　(摂南大 改)

解答　(1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

放物線上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=2tx-t^2$$

これが点 $(1,-3)$ を通るから

$$-3=2t\cdot 1-t^2\quad \text{ゆえに}\quad (t+1)(t-3)=0$$

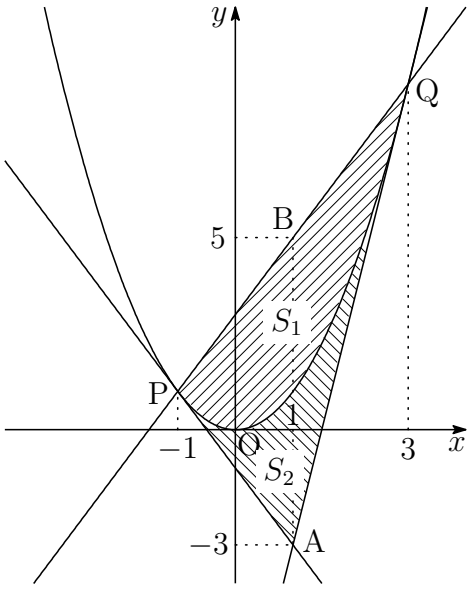
これを解いて　$t=-1,\ 3$　ゆえに，接点 P，Q は　$(-1,\ 1),\ (3,\ 9)$

2 点 P，Q を通る直線の方程式は

$$y-1=\frac{9-1}{3-(-1)}\{x-(-1)\}\quad \text{すなわち}\quad y=2x+3$$

よって，求める面積 S_1 は

$$S_1=\int_{-1}^{3}\{(2x+3)-x^2\}\,dx=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$



(2) 求める面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^{1} \{x^2 - (-2x-1)\}\,dx + \int_{1}^{3} \{x^2 - (6x-9)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x+1)^2\,dx + \int_{1}^{3} (x-3)^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[\,(x+1)^3\,\Big]_{-1}^{1} + \frac{1}{3}\Big[\,(x-3)^3\,\Big]_{1}^{3} = \mathbf{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

よって　　$S_1 : S_2 = \dfrac{32}{3} : \dfrac{16}{3} = \mathbf{2 : 1}$

別解 点 $\mathrm{A}(1, -3)$ を通り y 軸と平行な直線と直線 PQ の交点を B とすると　$\mathrm{B}(1,\ 5)$
2 点 P，Q の x 座標および 2 点 A，B の y 座標により

$$\triangle \mathrm{APQ} = \frac{1}{2}\{3-(-1)\}\{5-(-3)\} = 16$$

したがって　　$S_2 = \triangle \mathrm{APQ} - S_1 = 16 - \dfrac{32}{3} = \dfrac{16}{3}$

よって　　$S_1 : S_2 = \dfrac{32}{3} : \dfrac{16}{3} = \mathbf{2 : 1}$

補足 $\mathrm{A}(1, -3)$，$\mathrm{P}(-1,\ 1)$，$\mathrm{Q}(3,\ 9)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (-2,\ 4), \quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (2,\ 12)$$

したがって　　$\triangle \mathrm{APQ} = \dfrac{1}{2}|-2\cdot 12 - 4\cdot 2| = 16$

九大文系 2009 年 4

曲線 $y = x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし，$a < 0 < b$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形 PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $\angle \mathrm{PRQ} = 90^\circ$ をみたしながら P と Q が動くとき，(2) で求めた面積の最小値を求めよ。

解答　(1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$.

点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a)\quad \text{ゆえに}\quad y=2ax-a^2\quad \cdots ①$$

同様に，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線の方程式は　$y=2bx-b^2$　$\cdots ②$

①，② を解いて　　$\mathbf{R}\left(\dfrac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}},\ \boldsymbol{ab}\right)$

直線 PQ の方程式は

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=(a+b)x-ab$$

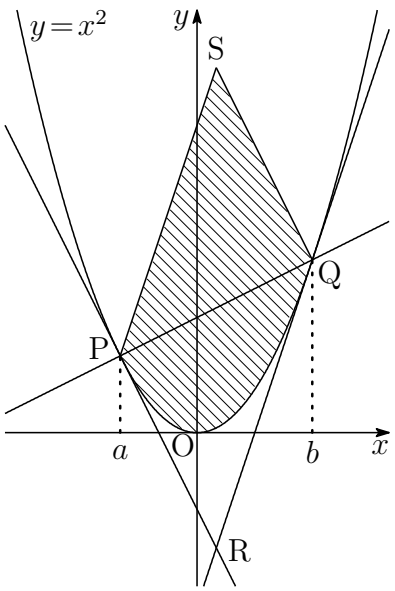
直線 PQ 上の x 座標が $\dfrac{a+b}{2}$ である点を M とすると　$\mathrm{M}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$

このとき　　$\mathrm{MR}=\dfrac{a^2+b^2}{2}-ab=\dfrac{1}{2}(b-a)^2$

よって　$\triangle \mathrm{PRQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{MR}\times(b-a)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}(b-a)^2\times(b-a)=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(b-a)^3}$

(2) 直線 PQ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}&\int_a^b\{(a+b)x-ab-x^2\}\,dx\\ =&-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx\\ =&\frac{1}{6}(b-a)^3\end{aligned}$$



$\triangle \mathrm{PSQ}$ の面積は $\triangle \mathrm{PRQ}$ の面積に等しいので，上式および (1) の結果から，求める図形の面積は

$$\frac{1}{6}(b-a)^3+\frac{1}{4}(b-a)^3=\boldsymbol{\frac{5}{12}(b-a)^3}$$

(3) $\angle \mathrm{PRQ} = 90^\circ$ のとき，直線 ①，② は直交するので

$$2a \times 2b = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{4b}$$

これを ② の結果に代入すると　$\dfrac{5}{12}\left(b + \dfrac{1}{4b}\right)^3$

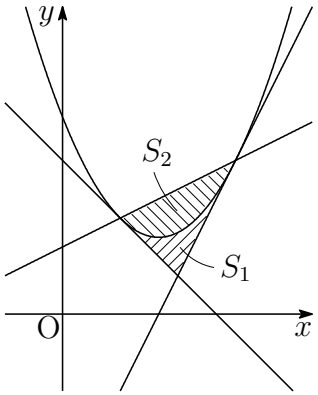
ここで，$b > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

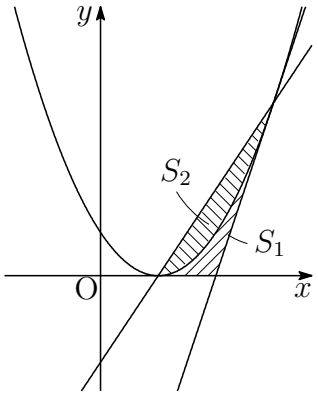
$$b + \frac{1}{4b} \geqq 2\sqrt{b \times \frac{1}{4b}} = 1$$

よって，求める最小値は　$\dfrac{5}{12} \cdot 1^3 = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

補足

放物線と放物線の 2 本の接線で囲まれた図形の面積 S_1 と，その 2 つの接点を結ぶ直線と放物線で囲まれた図形の面積 S_2 の比は，$S_1 : S_2 = 1 : 2$ である．また，2 本の接線の交点の x 座標は，2 つの接点の中点の x 座標と等しい．





365 関数 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$ が $x=2$ で極値 6 をとるとき，次の問に答えよ．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 曲線 $C_1: y=f(x)$ を x 軸方向に -4 だけ平行移動した曲線を C_2 とする．このとき，2 つの曲線 C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．(福岡大)

解答 (1) $f(x)$ は $x=2$ で極値 6 をとるから

$$f(2)=6, \quad f'(2)=0$$

$f(2)=6$ より

$$-2^3+a\cdot 2^2+b\cdot 2=6 \quad \text{ゆえに} \quad 2a+b=7 \quad \cdots ①$$

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$ であるから，$f'(2)=0$ より

$$-3\cdot 2^2+2a\cdot 2+b=0 \quad \text{ゆえに} \quad 4a+b=12 \quad \cdots ②$$

①，② を解くと　$a=\dfrac{5}{2},\ b=2$

このとき　$f'(x)=-3x^2+5x+2=-(3x+1)(x-2)$

$x=2$ の前後で $f'(x)$ の符号が正から負に変わるから，極大値とる．

よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{5}{2},\ b=2}$

(2) (1) の結果から　$f(x)=-x^3+\dfrac{5}{2}x^2+2x$

$y=f(x)$ を x 軸方向に -4 だけ平行移動した曲線は　$y=f(x+4)$

$$\begin{aligned} f(x+4)-f(x) &= -\{(x+4)^3-x^3\}+\frac{5}{2}\{(x+4)^2-x^2\}+2\{(x+4)-x\} \\ &= -(12x^2+48x+64)+\frac{5}{2}(8x+16)+8 \\ &= -12x^2-28x-16=-4(3x+4)(x+1) \end{aligned}$$

したがって，$y=f(x)$ と $y=f(x+4)$ の共有点の x 座標は　$x=-\dfrac{4}{3}, -1$

また，区間 $-\dfrac{4}{3}\leqq x\leqq -1$ において　$f(x+4)\geqq f(x)$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{4}{3}}^{-1}\{f(x+4)-f(x)\}\,dx=-4\int_{-\frac{4}{3}}^{-1}(3x+4)(x+1)\,dx \\ &= -12\int_{-\frac{4}{3}}^{-1}\left(x+\frac{4}{3}\right)(x+1)\,dx \\ &= -12\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left\{-1-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}^3=\boldsymbol{\frac{2}{27}} \end{aligned}$$

366* 関数 $f(x)=x^3-9x^2+23x-12$ に対し，曲線 $y=f(x)$ と，曲線上の点 $(2,\ 6)$ における接線とで囲まれた部分の面積を求めよ．(信州大)

解答 $f'(x)=3x^2-18x+23$ より　$f'(2)=-1$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(2,\ 6)$ における接線の方程式は

$$y=-(x-2)+6 \quad \text{すなわち} \quad y=-x+8$$

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-x+8$ の共有点の x 座標は

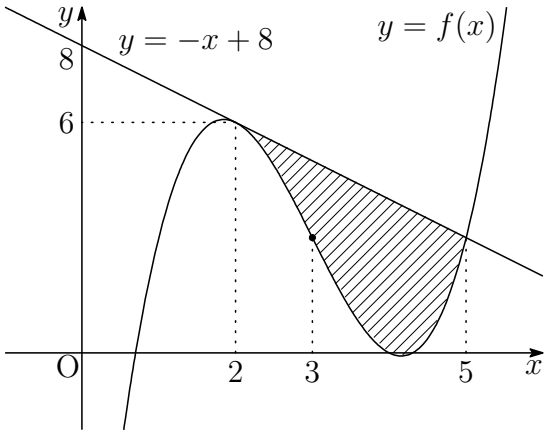
$$x^3-9x^2+23x-12=-x+8 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)^2(x-5)=0$$

これを解いて　$x=2,\ 5$

$f''(x)=6x-18=6(x-3)$ より，$y=f(x)$ の変曲点の x 座標は　$x=3$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S&=\int_2^5 \{(-x+8)-(x^3-9x^2+23x-12)\}\,dx \\ &=\int_2^5 (x-2)^2(5-x)\,dx \\ &=\frac{2!1!}{4!}(5-2)^4=\boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$



公式 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx}=\frac{\boldsymbol{m!n!}}{\boldsymbol{(m+n+1)!}}\boldsymbol{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

補足 曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標 3 は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-x+8$ の接点の x 座標 2 と接点以外の共有点の x 座標 5 を $1:2$ に内分したものである．

解説 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-x+8$ の共有点の x 座標は，方程式

$$f(x)=-x+8 \quad \text{すなわち} \quad f(x)+x-2=6$$

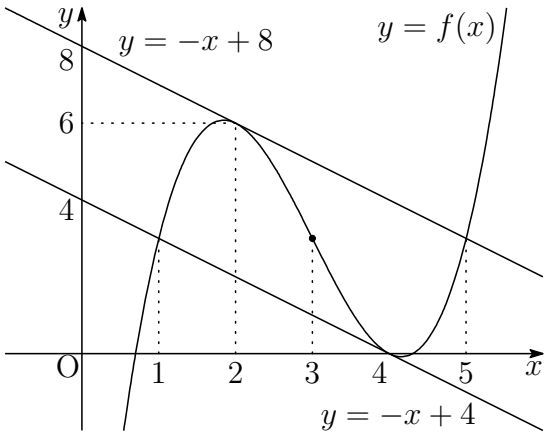
の解である．曲線 $y=f(x)+x-2$ と直線 $y=6$ は $x=2$ で接し，$y=f(x)+x-2$ の変曲点の x 座標が 3 であるから，接点以外の共有点の x 座標は 5 である．点 $(2,\ 6)$ と曲線 $y=f(x)+x-2$ の変曲点 $(3,\ 4)$ に関して対称な点 $(4,\ 2)$ である．したがって，$y=f(x)+x-2$ は $y=2$ で接する．それらの共有点は，方程式

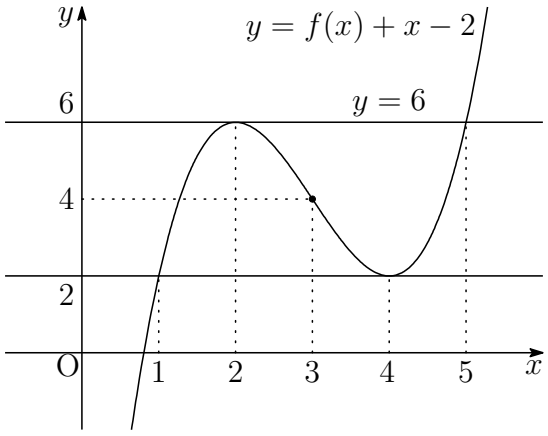
$$f(x)+x-2=2 \quad \text{ゆえに} \quad f(x)=-x+4$$

の解である．上の第 2 式から，曲線 $y=f(x)$ の $x=4$ における接線の方程式は

$$y=-x+4$$

である．





公式 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x-\alpha})^{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\beta-x})^{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{m!n!}}{\boldsymbol{(m+n+1)!}}(\boldsymbol{\beta-\alpha})^{\boldsymbol{m+n+1}}$

証明 m，n を 0 以上の整数とする．

$$I(m,n)=\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

とおくと，部分積分法により

$$\begin{aligned}I(m,n)&=\frac{1}{m+1}\int_0^1(t^{m+1})'(1-t)^n\,dt\\&=\left[\ \frac{1}{m+1}t^{m+1}(1-t)^n\ \right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{n-1}\,dt\\&=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)\\&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}I(m+n,0)\\&=\frac{m!n!}{(m+n)!}\int_0^1 t^{m+n}\,dt=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\end{aligned}$$

この結果を利用すると

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$$

について，$x=\alpha+(\beta-\alpha)t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\beta-\alpha$

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

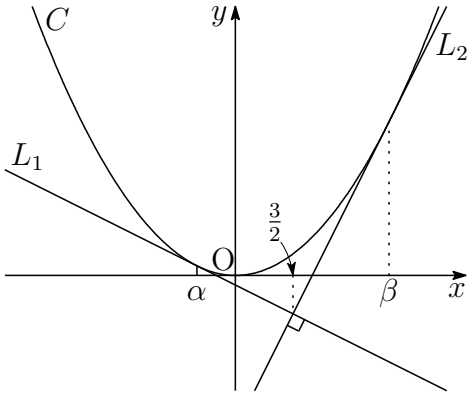
このとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$

よって $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x-\alpha})^{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\beta-x})^{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{m!n!}}{\boldsymbol{(m+n+1)!}}(\boldsymbol{\beta-\alpha})^{\boldsymbol{m+n+1}}$

7.31.3　Try

367 xy 平面上の 2 直線 $L_1,\ L_2$ は直交し，交点の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ である．また，$L_1,\ L_2$ はともに $C : y = \dfrac{x^2}{4}$ に接している．このとき，$L_1,\ L_2$ および C で囲まれる図形の面積を求めよ．　(京大文系 2022 年 3)

解答　$C : y = \dfrac{x^2}{4}$ より　$y' = \dfrac{x}{2}$



C と $L_1,\ L_2$ の接点の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

L_1 の方程式は　$y - \dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{\alpha}{2}(x - \alpha)$

すなわち　　$L_1 : y = \dfrac{\alpha}{2}x - \dfrac{\alpha^2}{4}$

同様にして　　$L_2 : y = \dfrac{\beta}{2}x - \dfrac{\beta^2}{4}$

L_1 と L_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\beta}{2}x - \frac{\beta^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

条件から　$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{3}{2}$　ゆえに　$\alpha + \beta = 3$　$\cdots$①

L_1 と L_2 は直交するから　$\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\beta}{2} = -1$　ゆえに　$\alpha\beta = -4$　$\cdots$②

①，② より，$\alpha,\ \beta$ は，2 次方程式 $x^2 - 3x - 4 = 0$ の解であるから $(\alpha < \beta)$

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = -1,\ \beta = 4$$

これより　　$L_1 : y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}, \quad L_2 : y = 2x - 4$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{x^2}{4} - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx + \int_{\frac{3}{2}}^{4} \left\{ \frac{x^2}{4} - (2x - 4) \right\} dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{\frac{3}{2}} (x+1)^2\, dx + \frac{1}{4}\int_{\frac{3}{2}}^{4} (x-4)^2\, dx \\ &= \frac{1}{12}\Big[\ (x+1)^3\ \Big]_{-1}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}\Big[\ (x-4)^3\ \Big]_{\frac{3}{2}}^{4} = \boldsymbol{\frac{125}{48}} \end{aligned}$$

368* t を実数とする．$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く．
(京大文系 2014 年 2)

(1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ．

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ．

解答 (1) $C:y=x^3-x$ より　$y'=3x^2-1$

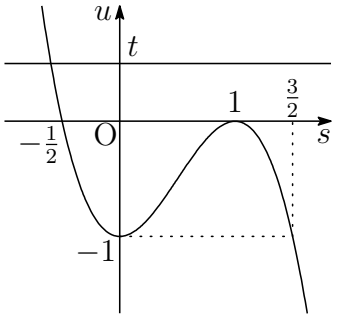
C 上の点 $\mathrm{A}(s,\ s^3-s)$ における接線の方程式は

$$y-(s^3-s)=(3s^2-1)(x-s)\quad \text{すなわち}\quad y=(3s^2-1)x-2s^3$$

この接線が点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ を通るとき　　$t=-2s^3+3s^2-1\quad\cdots(*)$

$f(s)=-2s^3+3s^2-1$ とおくと

$$f'(s)=-6s^2+6s=-6s(s-1)$$



$f(s)$ の増減表は次のようになる．

s	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(s)$	$-$	0	$+$	0	$\cdots$
$f(s)$	↘	-1	↗	0	↘

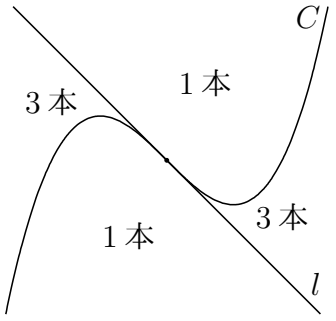
実数 t に対し，方程式 $(*)$ の実数解 s がただ 1 つだけであるとき，$u=f(s)$ のグラフと直線 $u=t$ の共有点がただ 1 つである．

よって，求める t の値の範囲は　　$\boldsymbol{t<-1,\ 0<t}$

補足 3 次関数のグラフ C 上の変曲点 $(y''=0)$ における接線 l とそのグラフにより，P から引ける接線の本数は右の図のようになる．P が変曲点を除く C および l 上にあるとき 2 本，変曲点では l のみの 1 本である．

本題では，変曲点 $(0,0)$，$l:y=-x$．

直線 $x=1$ と C および l の共有点は，それぞれ $(1,\ 0)$，$(1,-1)$



(2) $C : y = x^3 - x$ と C 上の点 $\mathrm{A}(s,\ s^3 - s)$ における接線 $y = (3s^2 - 1)x - 2s^3$ の方程式より

$$x^3 - x - \{(3s^2 - 1)x - 2s^3\} = (x - s)^2(x + 2s)$$

点 A 以外の共有点の x 座標は $-2s$ であるから，求める面積 $S(t)$ は [13]

$$S(t) = \frac{1}{12}\{s - (-2s)\}^4 = \frac{27}{4}s^4$$

(1) で示したグラフから，$t < -1,\ 0 < t$ のとき　$s < -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2} < s$

したがって　$s^4 > \dfrac{1}{16}$　よって　$\boldsymbol{S(t) > \dfrac{27}{64}}$

[13] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

369 a を正の定数とする．2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問に答えよ．　(名大 2017 年文系 $\boxed{1}$)

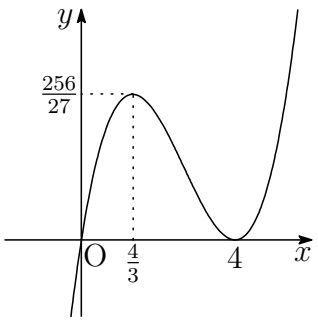
(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け．

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ．

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ．またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ．

解答　(1) $g(x)=x(x-4)^2=x^3-8x^2+16x$ より

$$\begin{aligned} g'(x)&=3x^2-16x+16\\ &=(x-4)(3x-4)\end{aligned}$$



$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって　極大値 $g\left(\dfrac{4}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{256}{27}}$，　極小値 $g(4)=\boldsymbol{0}$

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ から y を消去すると

$$ax^2=x(x-4)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x\{x^2-(a+8)x+16\}=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $x^2-(a+8)x+16=0$ の係数について，$a>0$ であるから

$$D=(a+8)^2-4\cdot1\cdot16=a(a+16)>0$$

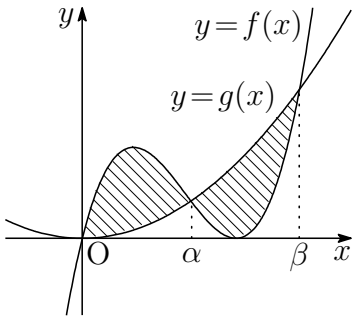
方程式 $x^2-(a+8)x+16=0$ は 0 でない異なる 2 つの実数解をもつので，方程式 $(*)$ は異なる 3 つの解をもつ．

よって　$y=f(x)$，$y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わる

(3) (2) の結果から，方程式 $(*)$ の 3 つの解を 0，α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=a+8>0,\quad \alpha\beta=16\quad \cdots(**)\quad \text{ゆえに}\quad 0<\alpha<\beta$$

条件より



$$\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

ゆえに $\displaystyle\int_0^{\beta}\{g(x)-f(x)\}\,dx=0$

ここで
$$\begin{aligned} g(x)-f(x)&=x\{x^2-(a+8)x+16\}\\ &=x(x-\alpha)(x-\beta)\\ &=-x^2(\beta-x)+\alpha x(\beta-x)\end{aligned}$$

したがって
$$-\int_0^{\beta}x^2(\beta-x)\,dx+\alpha\int_0^{\beta}x(\beta-x)\,dx=0$$
$$-\frac{1}{12}\beta^4+\alpha\cdot\frac{1}{6}\beta^3=0$$
$$\beta=2\alpha$$

これを $(**)$ に代入すると

$$\alpha+2\alpha=a+8,\quad \alpha\cdot 2\alpha=16$$

$\alpha>0$ に注意して　$\alpha=2\sqrt{2}$，$\beta=4\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a=6\sqrt{2}-8}$

2 つの曲線の交点の x 座標は　$\boldsymbol{0,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}}$

補足 次の公式[14] を利用するとよい．

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

[14] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

370* xy 平面上に，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}-3$ と原点 O を中心とする円 C' があって，2 曲線 C，C' は相異なる 2 点 P，Q で接線を共有している．　(摂南大 改)

(1) 円 C' の半径を求めよ．

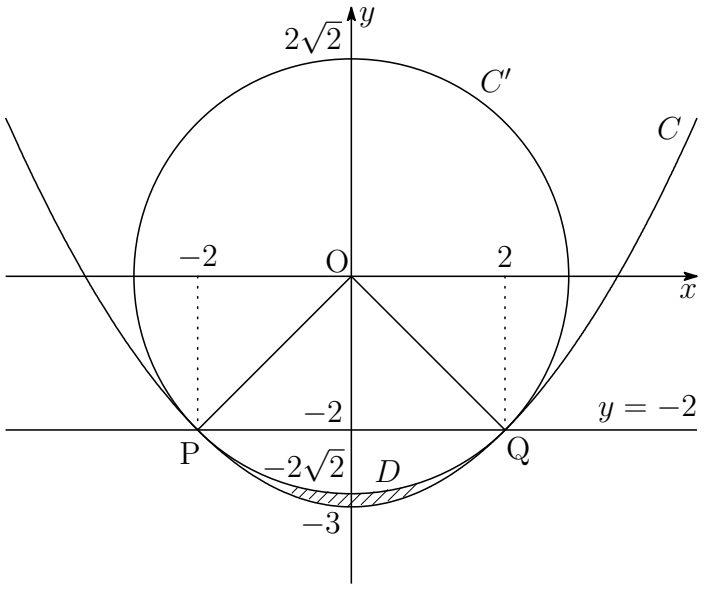
(2) P，Q によって分けられる円 C' の弧のうち，長さの短い方を D とする．C と D が囲む部分の面積 S を求めよ．

解答　(1) C 上の点 $\mathrm{T}\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}-3\right)$ をとると

$$\mathrm{OT}^2=t^2+\left(\frac{t^2}{4}-3\right)^2=\frac{1}{16}t^4-\frac{1}{2}t^2+9=\frac{1}{16}(t^2-4)^2+8$$

P, Q は OT が最小となる点であるから　$(\pm2,-2)$

よって，C' の半径は　$\sqrt{2^2+2^2}=\mathbf{2\sqrt{2}}$



(2) 直線 PQ と放物線 C で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_{-2}^{2}\{-2-\left(\frac{x^2}{4}-3\right)\}dx=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)\,dx$$
$$=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-2)\}^3=\frac{8}{3}$$

D と線分 PQ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot2\cdot4=2\pi-4$$

よって　$S=S_1-S_2=\dfrac{8}{3}-(2\pi-4)=\mathbf{\dfrac{20}{3}-2\pi}$

琉球大 2014 年 6

xy 平面上で，中心が点 $\mathrm{P}(0,\ 2)$ で半径が 1 の円と，放物線 $y = x^2 + a$ (a は定数) が，異なる 2 点で接している．ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点における円の接線と放物線の接線が一致することであり，その点を接点という．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 2 つの接点を A，B とする．ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする．線分 PA，PB と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答　(1) 放物線 $y = x^2 + a$ 上に点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2 + a)$ をとり，関数 $f(t) = \mathrm{PQ}^2$ を考える．

$$f(t) = t^2 + (t^2 + a - 2)^2 = t^4 + (2a - 3)t^2 + (a - 2)^2$$
$$= \left(t^2 + a - \frac{3}{2}\right)^2 - a + \frac{7}{4} \qquad (*)$$

$f(t)$ の最小値が 1^2 で，$f(t) = 1^2$ となる t が丁度 2 つ存在すればよいから

$$-a + \frac{7}{4} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{3}{4}$$

これを $(*)$ に代入すると

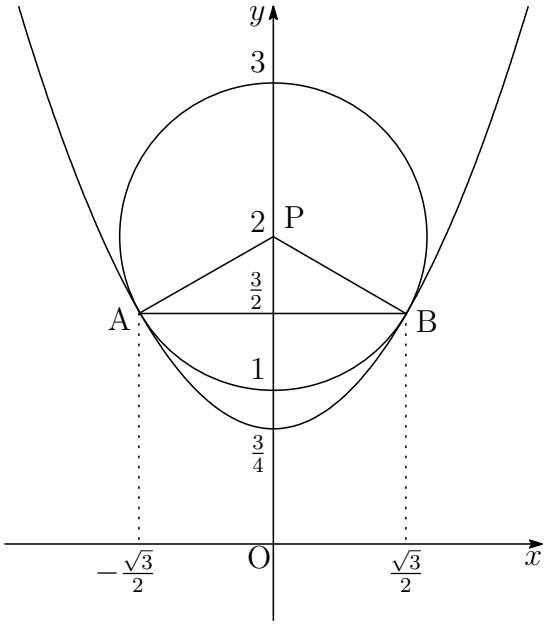
$$f(t) = \left(t^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + 1$$

実際，$f(t)$ は $t = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値 1 をとる．よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{3}{4}}$

(2) $y=x^2+\dfrac{3}{4}$ から，$\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

求める面積を S とすると，下の図から

$$
\begin{aligned}
S &= \triangle \mathrm{PAB} + \int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \frac{3}{2} - \left(x^2 + \frac{3}{4} \right) \right\} dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6} (\sqrt{3})^3 = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}
\end{aligned}
$$



熊大文系 2024 年 3

a を実数とし，座標平面上の円 $x^2+y^2=8$ を C_1，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2+a$ を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の共有点の個数が 4 個のとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) C_1 と C_2 の共有点の個数が 2 個であるような a の最小値を求め，そのときの共有点 P，Q の座標を求めよ。ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいとする。

(3) a が (2) で求めた値であるとき，直線 PQ の下側で，C_1 と C_2 によって囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　(1) C_1 と C_2 が接する次の場合を考える．

(i) C_1 の半径が $2\sqrt{2}$ であるから，$a=-2\sqrt{2}$ とすると

$$C_1 : x^2+y^2=8, \quad C_2 : y=\frac{1}{4}x^2-2\sqrt{2}$$

上の 2 式から x^2 を消去すると

$$y^2-8+4(y+2\sqrt{2})=0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+2\sqrt{2})(y-2\sqrt{2}+4)=0$$

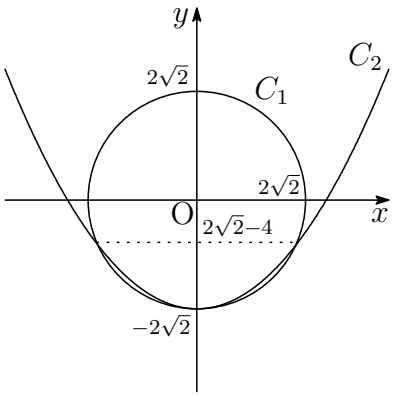
これらの共有点の y 座標 $-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}-4$ は $-2\sqrt{2} \leqq y \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす．このとき，左下の図のように C_1，C_2 は 3 点を共有する．

(ii) $C_1 : x^2+y^2=8$ と $C_2 : y=\dfrac{1}{4}x^2+a$ の 2 式から，x^2 を消去すると

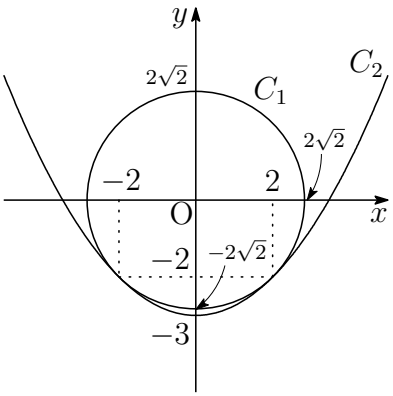
$$y^2+4y-4a-8=0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+2)^2=4a+12$$

よって，$4a+12=0$，すなわち，$a=-3$ のとき，重解 $y=-2$ をもつ．このとき，右下の図のように C_1，C_2 は 2 点 $(\pm 2, -2)$ で接する．

(i) $\underline{a=-2\sqrt{2}}$



(ii) $\underline{a=-3}$



したがって，C_1 と C_2 の共有点が 4 個となる a の値の範囲は

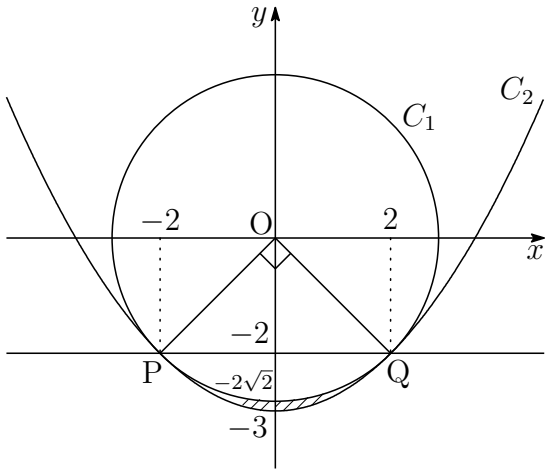
$$\boldsymbol{-3<a<-2\sqrt{2}}$$

(2) (1) の図 (ii) から分かるように，求める a の最小値は　$\boldsymbol{a=-3}$

よって　　$\mathbf{P(-2,-2),\ Q(2,-2)}$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{2} \left\{ -2 - \left(\frac{1}{4}x^2 - 3 \right) \right\} dx - \left\{ \frac{1}{4} \cdot \pi (2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-2}^{2} (x+2)(x-2)\, dx - (2\pi - 4) \\ &= \frac{1}{24}(2+2)^3 - 2\pi + 4 = \boldsymbol{\frac{20}{3} - 2\pi} \end{aligned}$$



補足 (i) のように C_1 と C_2 が放物線の頂点で接する場合と，(ii) のように頂点以外の点で接する場合がある．本題の (ii) では，円の中心から放物線までの距離 2 乗関数を考えてもよい．

C_1 の中心 O から C_2 上の点 $\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{1}{4}t^2 + a \right)$ までの距離 OR について

$$f(t) = \mathrm{OR}^2 = t^2 + \left(\frac{1}{4}t^2 + a \right)^2$$

とおく．このとき，(i) の結果に注意して，$a < -2\sqrt{2}$ とする．

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 + \left(\frac{1}{4}t^2 + a \right)^2 = \frac{1}{16}t^4 + \left(\frac{a}{2} + 1 \right) t^2 + a^2 \\ &= \frac{1}{16}\{t^2 + 4(a+2)\}^2 - 4a - 4 \end{aligned}$$

C_1 と C_2 が接するとき，$f(t)$ の最小値が 8 であるから

$$-4a - 4 = 8 \quad \text{ゆえに} \quad a = -3$$

$f(t) = (t^2 - 4)^2 + 8$ より，接点の x 座標は　　± 2

371 xy 平面上の曲線 $C : y = |\, x^2 + 2x \,|$ と直線 $l : y = k(x + 2)$ が相異なる 3 点を共有する．ただし，k は実数の定数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) k の値の範囲を求めよ．

(2) 3 つの共有点の x 座標を求めよ．必要ならば k を用いてよい．

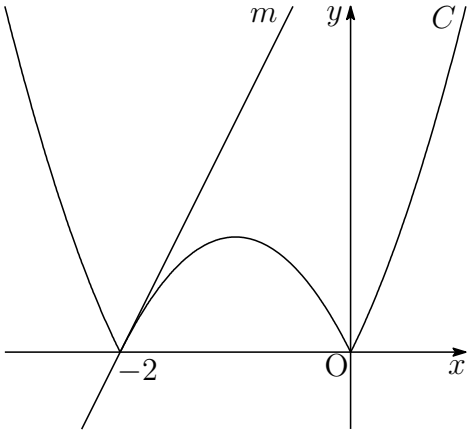
(3) 曲線 C と直線 l で囲まれる 2 つの部分の面積の和の最小値と，そのときの k の値を求めよ．　(東京海洋大)

解答　(1) $y = -x^2 - 2x$ より　$y' = -2x - 2$

$y = -x^2 - 2x$ 上の点 $(-2,\ 0)$ における接線 m の傾きは

$$y' = -2\cdot(-2) - 2 = 2$$

下の図から，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{0 < k < 2}$



(2) $y = x^2 + 2x$ と $y = k(x+2)$ の交点の x 座標は

$$x^2 + 2x = k(x+2) \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-k) = 0$$

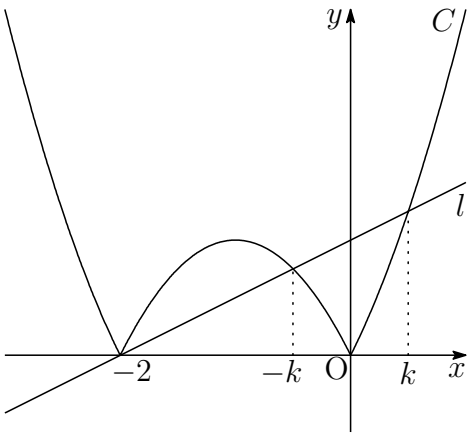
これを解いて　$x = -2,\ k$

$y = -x^2 - 2x$ と $y = k(x+2)$ の交点の x 座標は

$$-x^2 - 2x = k(x+2) \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x+k) = 0$$

これを解いて　$x = -2, -k$

よって，求める共有点の x 座標は　$\boldsymbol{x = -2,\ k, -k}$



(3) $y=x(x+2)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_{-2}^{0}x(x+2)\,dx\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{4}{3}$$

$-2\leqq x\leqq -k$ において，C と l で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned}S_2&=\int_{-2}^{-k}\{-x(x+2)-k(x+2)\}\,dx\\&=-\int_{-2}^{-k}(x+2)(x+k)\,dx=\frac{1}{6}(2-k)^3\end{aligned}$$

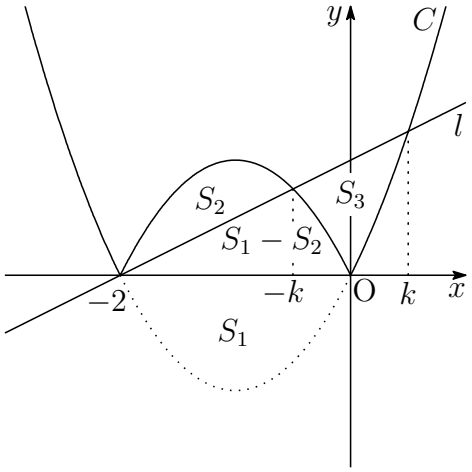
$-k\leqq x\leqq k$ において，C と l で囲まれた部分の面積を S_3 とすると

$$S_1+(S_1-S_2)+S_3=\int_{-2}^{k}\{k(x+2)-x(x+2)\}\,dx$$

$$2S_1-S_2+S_3=-\int_{-2}^{k}(x+2)(x-k)\,dx=\frac{1}{6}(k+2)^3$$

したがって

$$\begin{aligned}S_2+S_3&=\frac{1}{6}(k+2)^3-2S_1+2S_2\\&=\frac{1}{6}(k+2)^3-2\cdot\frac{4}{3}+2\cdot\frac{1}{6}(2-k)^3\\&=\frac{1}{6}\{(k+2)^3+2(2-k)^3\}-\frac{8}{3}\\&=-\frac{1}{6}(k^3-18k^2+12k-8)\end{aligned}$$



$S(k)=S_2+S_3$ とおくと $(0<k<2)$

$$S(k)=-\frac{1}{6}(k^3-18k^2+12k-8)$$

これを微分すると　$S'(k)=-\dfrac{1}{2}(k^2-12k+4)$

$S(k)$ の $0<k<2$ における増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘	極小	↗	

$0<k<2$ に注意して，$S'(k)=0$ を解くと　$k=6-4\sqrt{2}$

ここで，$k^3-18k^2+12k-8$ を $k^2-12k+4$ で割ったとき，商 $k-6$，余り $-64k+16$ により

$$\begin{aligned}S(k)&=-\frac{1}{6}\{(k^2-12k+4)(k-6)-64k+16\}\\&=\frac{1}{3}f'(k)(k-6)+\frac{8}{3}(4k-1)\end{aligned}$$

$k=6-4\sqrt{2}$ のとき　$S(6-4\sqrt{2})=\dfrac{8}{3}\{4(6-4\sqrt{2})-1\}=\dfrac{184-128\sqrt{2}}{3}$

よって，$\boldsymbol{k=6-4\sqrt{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boldsymbol{184-128\sqrt{2}}}{\boldsymbol{3}}$

大分大学 2015 年 3

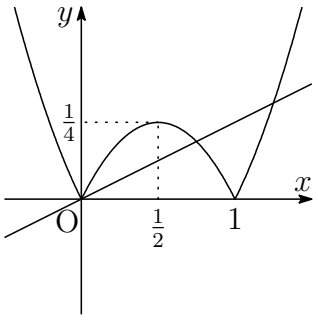
k を実数とする．関数 $y=|x(x-1)|$ のグラフと直線 $y=kx$ が異なる 3 点を共有している．これらで囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする．

(1) k の値の範囲を求めなさい．

(2) S を k の式で表しなさい．

(3) S が最小になるときの k の値を求めなさい．

解答　(1) $|x(x-1)|=\begin{cases} x^2-x & (x\leqq 0,\ 1\leqq x) \\ -x^2+x & (0\leqq x\leqq 1) \end{cases}$



したがって

$$y=|x(x-1)| \quad \cdots(*)$$

のグラフは，右の図のようになる．

$y=-x^2+x$ を微分すると　$y'=-2x+1$

$y=-x^2+x$ の $x=0$ における接線の傾きは　　$y'=1$

$(*)$ グラフと直線 $y=kx$ が異なる 3 つの共有点をもつ k の値の範囲は

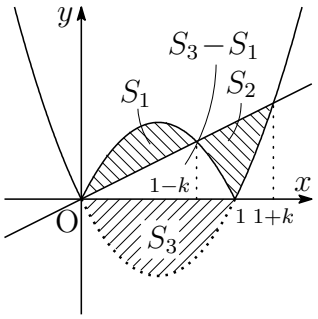
$$\boldsymbol{0<k<1}$$

(2) $(*)$ のグラフと直線 $y=kx$ の共有点の x 座標は

$x\leqq 0,\ 1\leqq x$ のとき　　$x(x-1)=kx$　これを解いて　$x=1+k$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき　　$-x(x-1)=kx$　これを解いて　$x=1-k$

右の図について，求める面積 S は



$$S=S_1+S_2,\quad S_1=\frac{1}{6}(1-k)^3,\quad S_3=\frac{1}{6},$$

$$S_3+(S_3-S_1)+S_2=\frac{1}{6}(1+k)^3 \text{ より}$$

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}(1+k)^3+2S_1-2S_3$$

$$=\frac{1}{6}(1+k)^3+2\times\frac{1}{6}(1-k)^3-2\times\frac{1}{6}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}(-k^3+9k^2-3k+1)}$$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{dS}{dk} = -\dfrac{1}{2}(k^2 - 6k + 1)$　$\dfrac{dS}{dk} = 0$ とすると　$k = 3 \pm 2\sqrt{2}$

ここで　　$0 < 3 - 2\sqrt{2} = \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} < 1 < 3 + 2\sqrt{2}$

したがって，$0 \leqq k \leqq 1$ における S の増減表は，次のようになる．

k	0	$\cdots$	$3 - 2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{dk}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，求める k の値は　　$\boldsymbol{k = 3 - 2\sqrt{2}}$

類題 宮崎大学 2015 年 12

7.32　等差数列・等比数列，$\sum$ 記号

7.32.1　Review

372 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n，および初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(1) a_n は等差数列であり，$a_3 = 7,\ a_6 = 16$ である．

(2) $\{a_n\}$ は各項が実数の等比数列であり，$a_2 = 6,\ a_5 = 48$ である．

解答　(1) 初項を a，公差を d とすると，$a_3 = 7,\ a_6 = 16$ より

$$a + 2d = 7, \quad a + 5d = 16 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1,\ d = 3$$

よって　　$a_n = 1 + (n-1)\cdot 3 = \boldsymbol{3n - 2}$

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2\cdot 1 + (n-1)\cdot 3\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n - 1)}$$

(2) 初項を a，公比を r とすると，$a_2 = 6,\ a_5 = 48$ より

$$ar = 6, \quad ar^4 = 48 \quad \text{これを解いて} \quad a = 3,\ r = 2$$

よって　　$a_n = \boldsymbol{3\cdot 2^{n-1}}$

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = \boldsymbol{3(2^n - 1)}$$

373 $-8,\ a,\ b$ がこの順で等差数列をなし，$a,\ b, -36$ がこの順で等比数列をなすとき，$a,\ b$ の値を求めよ．

解答　$-8,\ a,\ b$ がこの順で等差数列をなすから　$2a = -8 + b$　$\cdots$①

$a,\ b, -36$ がこの順で等比数列をなすから　$b^2 = -36a$　$\cdots$②

①，② から b を消去すると　$(2a + 8)^2 = -36a$

整理すると　$a^2 + 17a + 16 = 0$ ゆえに　$(a + 1)(a + 16) = 0$

これを解いて　$a = -1, -16$

① より，$a = -1$ のとき $b = 6$，$a = -16$ のとき $b = -24$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b) = (-1,\ 6),\ (-16, -24)}$

374 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(3^k-k)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

解答 (1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)\{(k+3)-k\}\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)(k+2)(k+3)-k(k+1)(k+2)\}\\&=\frac{1}{3}\{(n+1)(n+2)(n+3)-1\cdot2\cdot3\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2+6n+11)}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^{n+1}-2}$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(3^k-k)&=\sum_{k=1}^{n-1}3^k-\sum_{k=1}^{n-1}k\\&=\frac{3(3n-1-1)}{3-1}-\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}\\&=\frac{3^n-3}{2}-\frac{1}{2}n(n-1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}(3^n-3-n^2+n)}\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\boldsymbol{\frac{n}{n+1}}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\boldsymbol{\sqrt{n+1}-1}$

7.32.2 Exercise

375* 等差数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とする．
$a_2 = 43$，$S_9 = 306$ のとき

(1) 0 はこの数列の項として存在するか．

(2) 初項から第何項までの和が最大となるか．また，その和を求めよ．

(3) 初項から第 25 項までの絶対値の和を求めよ．

解答 (1) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とする．

$a_2 = 43$ より　　$a + d = 43$　$\cdots$①

$S_9 = 306$ より　$\dfrac{1}{2}\cdot 9(2a + 8d) = 306$　ゆえに　$a + 4d = 34$　$\cdots$②

①，② を解いて　$a = 46$，$d = -3$

したがって　$a_n = 46 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 49$　$\cdots(*)$

$a_n = 0$ とすると　$-3n + 49 = 0$

これを満たす自然数 n は存在しない．

よって，**0 はこの数列の項として存在しない．**

(2) $(*)$ について $a_n > 0$ とすると　$-3n + 49 > 0$

これを満たす自然数は　$1 \leqq n \leqq 16$

したがって，**第 16 項までの和が最大**で，その和は

$$S_{16} = \frac{1}{2}\cdot 16\{2\cdot 46 + (16-1)\cdot(-3)\} = \mathbf{376}$$

(3) $(*)$ より

$$|a_{17}| = |-3\cdot 17 + 49| = 2, \quad a_{25} = |-3\cdot 25 + 49| = 26$$

$|a_{17}|$ から $|a_{25}|$ までの和は，初項 2，末項 26，項数 $25 - 17 + 1 = 9$ の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot(2 + 26) = 126$$

これと (2) の結果から，求める和は　$376 + 126 = \mathbf{502}$

376* 初項から第 3 項までの和が 3，第 4 項から第 6 項までの和が -24 である等差数列 $\{a_n\}$ がある．ただし，公比は実数とする．

(1) 一般項 a_n，および初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表せ．

(2) 第 7 項から第 12 項までの和を求めよ．

解答 (1) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とすると

$$a+ar+ar^2=3, \quad ar^3+ar^4+ar^5=-24 \qquad (*)$$

したがって $\dfrac{ar^3+ar^4+ar^5}{a+ar+ar^2}=\dfrac{-24}{3}$ ゆえに $r^3=-8$

これを解いて $r=-2$ $(*)$ の第 1 式に代入して $3a=3$ ゆえに $a=1$

したがって $a_n=1\cdot(-2)^{n-1}=\boldsymbol{(-2)^{n-1}}$, $S_n=\dfrac{2^n-1}{2-1}=\boldsymbol{2^n-1}$

(2) $a_7=(-2)^6$，$a_{12}=(-2)^{11}$ より，第 7 項から第 12 項までの和は

$$\frac{(-2)\cdot(-2)^{11}-(-2)^6}{(-2)-1}=\boldsymbol{-1344}$$

補足 初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和 S は (n は項数)

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{r\cdot ar^{n-1}-a}{r-1}=\boldsymbol{\frac{rl-a}{r-1}}$$

377* 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=5,\ a_2=7,\ a_3=11$ を満たすとする．数列 $\{a_n\}$ の階差数列が等差数列であるとき a_n を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ の階差数列が等比数列であるとき a_n を求めよ．

解答 $b_n=a_{n+1}-a_n$ とすると $(n\geqq 1)\quad b_1=2,\ b_2=4$

- $\{b_n\}$ が等差数列のとき
  $\{b_n\}$ は初項 2，公差 2 の等差数列であるから

$$b_n=2+(n-1)\cdot 2=2n$$

  $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}2k\\&=5+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=n^2-n+5\end{aligned}$$

  上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n=n^2-n+5}$$

- $\{b_n\}$ が等比数列のとき
  $\{b_n\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

  $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}2^k\\&=5+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3\end{aligned}$$

  上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n=2^n+3}$$

378 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k)k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

解答 (1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(n-k)k &= n\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\\ &= n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{3n-(2n+1)\}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{n}{n+1}+\frac{n}{2(n+2)}\right\}\\ &= \frac{n}{2}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}\right\}\\ &= \frac{n}{2}\cdot\frac{2(n+2)+(n+1)}{2(n+1)(n+2)}\\ &= \boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$

7.32.3 Try

379* 1 以上 100 以下のすべての自然数の集合を U とする．U の部分集合 A および B を

$$A = \{n \,|\, n \in U \text{ かつ } n \text{ を } 5 \text{ で割ると } 2 \text{ 余る }\}$$
$$B = \{n \,|\, n \in U \text{ かつ } n \text{ を } 7 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る }\}$$

と定めるとき，集合 $A \cup B$ に属する自然数の総和を求めよ．　(慶應義塾大)

解答 $c = 5a + 2 = 7b + 1 \in A \cap B$ とすると　$5(a-4) = 7(b-3)$

$$5(a-4) = 7(b-3) = 35k \ (k \text{ は整数}) \quad \text{ゆえに} \quad c = 35k + 22$$

したがって　$A \cap B = \{22,\ 57,\ 92\}$

X を自然数からなる集合とすると，その自然数の総和を $S(X)$ と表記すると

$$\begin{aligned}
S(A) &= \sum_{k=1}^{20} \{5(k-1)+2\} = \sum_{k=1}^{20} (5k-3) \\
&= 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 - 3 \cdot 20 = 990, \\
S(B) &= \sum_{k=1}^{15} \{7(k-1)+1\} = \sum_{k=1}^{15} (7k-6) \\
&= 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 - 6 \cdot 15 = 750, \\
S(A \cap B) &= 22 + 57 + 92 = 171, \\
S(A \cup B) &= S(A) + S(B) - S(A \cap B) \\
&= 990 + 750 - 171 = \mathbf{1569}
\end{aligned}$$

380 年利率5%，1年ごとの複利で賃金を運用する．必要であれば，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ を用いてよい．

(1) 1万円の元金を運用したとき，元利合計が初めて2万円を超えるのは□年後である．

(2) 毎年1万円ずつ積み立てる．つまり，1年後の時点の資金は，はじめの1万円の元利合計と，新たに積み立てた1万円の合計になり，2年後の時点の資金は，1年後の時点の資金に対する元利合計と，新たに積み立てた1万円の合計になる．このとき，資金が初めて20万円を超えるのは□年後である．

解答 (1) 元金が2倍になる年数を求めればよいから，n 年後に2倍を超えるとする．

$$(*)\quad 1.05^n > 2 \quad \text{ゆえに} \quad n \log_{10} 1.05 > \log_{10} 2$$

ここで
$$\log_{10} 1.05 = \log_{10} \frac{21}{20} = \log_{10} 3 + \log_{10} 7 - \log_{10} 2 - 1$$
$$= 0.4471 + 0.8451 - 0.3010 - 1 = 0.0212$$

したがって $0.0212n > 0.3010$ ゆえに $n > 14.1\cdots$ よって **15年後**

(2) $a = 10,000$，$r = 1 + 0.05$ とする．a 円ずつ積み立てて n 年後に $20a$ 円を超えるとすると

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} > 20a \quad \text{ゆえに} \quad 1.05^{n+1} > 2$$

上式は $(*)$ の n が $n+1$ に置き換わっていることに注意して

$$n + 1 > 14.1 \quad \text{よって} \quad \textbf{14年後}$$

381 m を自然数，n を 2 以上の整数とする．m から始まる連続した n 個の自然数の和を $S(m,\ n)$ と書く． (広島大)

(1) $S(m,\ n)$ を求めよ．

(2) $S(m,\ n)=90$ を満たすような $(m,\ n)$ の組をすべて求めよ．

(3) $S(m,\ n)=1024$ を満たすような $(m,\ n)$ の組は存在しないことを示せ．

解答 (1) $S(m,\ n)$ は初項 m，公差 1，項数 n の等差数列の和であるから

$$S(m,\ n)=\frac{1}{2}n\{2\cdot m+(n-1)\cdot 1\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}$$

(2) (1) の結果から，$S(m,\ n)=90$ のとき

$$\frac{1}{2}n(2m+n-1)=90 \quad \text{ゆえに} \quad (2m+n-1)n=180$$

m は自然数であるから　$2m+n-1>n$

$2m+n-1$ と n は偶奇が異なることに注意して (n は 2 以上の整数)

$$(2m+n-1,\ n)=(60,\ 3),\ (45,\ 4),\ (36,\ 5),\ (20,\ 9),\ (15,\ 12)$$

したがって

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(29,\ 3),\ (22,\ 4),\ (16,\ 5),\ (6,\ 9),\ (2,\ 12)}$$

(3) (1) の結果から，$S(m,\ n)=1024$ のとき

$$\frac{1}{2}n(2m+n-1)=1024 \quad \text{ゆえに} \quad (2m+n-1)n=2^{11}$$

$2m+n-1>n\geqq 2$ であり，$2m+n-1$ と n の偶奇が異なるから，$2m+n-1$ と n が同時に 2 を因数にもつことはない．よって，本題を満たす $(m,\ n)$ の組は存在しない．

382* 等差数列 $\{a_n\}$ が，$a_3+a_4+a_5=27$，$a_5+a_7+a_9=45$ を満たすとする．$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とするとき，次を n を用いて表せ．(山形大)

(1) 一般項 a_n

(2) S_n

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_{2k-1}}+\frac{1}{S_{2k}}\right)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)S_k}$

解答 (1) $\{a_n\}$ は等差数列であるから，$a_3+a_5=2a_4$，$a_5+a_9=2a_7$ より

$$3a_4=27,\ \ 3a_7=45 \quad \text{ゆえに} \quad a_4=9,\ a_7=15$$

$\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

$$a+3d=9,\ \ a+6d=15 \quad \text{これを解いて} \quad a=3,\ d=2$$

よって　　$a_n=3+(n-1)\cdot 2=\boldsymbol{2n+1}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\\&=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=\boldsymbol{n(n+2)}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_{2k-1}}+\frac{1}{S_{2k}}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{2k(2k+2)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{n}{2n+1}+\frac{n}{4(n+1)}=\frac{\boldsymbol{n(6n+5)}}{\boldsymbol{4(n+1)(2n+1)}}\end{aligned}$$

(4) (2) の結果から　　$(k+1)S_k = k(k+1)(k+2)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)S_k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2) - 2}{2(n+1)(n+2)} \\
&= \boldsymbol{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}
\end{aligned}$$

383 数列の和について次の一連の問いに答えなさい. (大分大 2014 年 8)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ を示しなさい.

(2) 多項式 $(k+1)^3 - k^3$ の展開を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示しなさい.

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示しなさい.

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めなさい. 結果は因数分解すること.

解答 (1) $k(k+1) - (k-1)k = 2k$ であるから

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1) - (k-1)k\} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3 - k^3\}$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} = (n+1)^3 - 1^3$$

これに (1) の結果および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} = n$ を代入すると

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{1}{2}n(n+1) + n = n^3 + 3n^2 + 3n$$

よって $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

補足 証明法に制約がなければ，次式を利用するとよい．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\{(k+1)-(k-1)\} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-(k-1)k\} \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

参考 次式を利用するする方法が最も簡単である．

$$k(k+1)(2k+1) - k(k-1)(2k-1) = 6k^2$$

(3) $k^2(k+1)^2 - k^2(k-1)^2 = 4k^3$ であるから

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\{k^2(k+1)^2 - k^2(k-1)^2\} \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

補足 S_n は分かっているので，$S_k - S_{k-1} = a_k$ を利用する．

(4) $k^3(k+1)^2 - (k-1)^3k^2 = k^2(5k^2-2k+1)$ より

$$5k^4 = \{k^3(k+1)^2 - (k-1)^3k^2\} + 2k^3 - k^2$$

(2)，(3) の結果を利用して

$$\begin{aligned}5\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \sum_{k=1}^{n}\{k^3(k+1)^2 - (k-1)^3k^2\} + 2\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= n^3(n+1)^2 + 2\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{6n^2(n+1) + 3n(n+1) - (2n+1)\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{3n(n+1)(2n+1) - (2n+1)\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\{3n(n+1) - 1\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

別解

$$\begin{aligned}
f_1(k) &= k &&= k \\
f_2(k) &= k(k+1) &&= k^2 + k \\
f_3(k) &= k(k+1)(k+2) &&= k^3 + 3k^2 + 2k \\
f_4(k) &= k(k+1)(k+2)(k+3) &&= k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k
\end{aligned}$$

とおくと，$k^4 = f_4(k) - 6f_3(k) + 7f_2(k) - f_1(k)$ である．ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f_1(k) &= \frac{1}{2}n(n+1) \\
\sum_{k=1}^{n} f_2(k) &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\
\sum_{k=1}^{n} f_3(k) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \\
\sum_{k=1}^{n} f_4(k) &= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) - (k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\} \\
&= \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \sum_{k=1}^{n}\{f_4(k) - 6f_3(k) + 7f_2(k) - f_1(k)\} \\
&= \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \\
&\quad - 6 \times \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \\
&\quad + 7 \times \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\
&\quad - \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{30}n(n+1)\{6(n+2)(n+3)(n+4) - 45(n+2)(n+3) + 70(n+2) - 15\} \\
&= \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}
\end{aligned}$$

解説 $(k+1)^5 - k^5$ の展開式を利用するのが一般的であるが，別解を紹介した．

参照 連続する自然数のべき乗和

7.33　いろいろな数列

7.33.1　Review

384 次の数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

(1) $\{a_n\}: 2,\ 2+4,\ 2+4+8,\ 2+4+8+16,\ \cdots$

(2) $\{a_n\}: 2,\ 22,\ 222,\ 2222,\ \cdots$

(3) $\{a_n\}: 1\cdot 1,\ 3\cdot 2,\ 5\cdot 2^2,\ 7\cdot 2^3$

解答　(1) $a_n = 2+2^2+\cdots+2^n = \dfrac{2(2^n-1)}{2-1} = 2^{n+1}-2$ より

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-2) = \frac{2^2(2^n-1)}{2-1} - 2n = \boldsymbol{2^{n+2}-2n-4}$$

(2) $a_n = 2(1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}) = 2\times\dfrac{10^n-1}{10-1} = \dfrac{2}{9}(10^n-1)$ より

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{n}(10^k-1) = \frac{2}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{81}(10^{n+1}-10) - \frac{2}{9}n} \end{aligned}$$

(3) $a_n = (2n-1)\cdot 2^{n-1}$ より

$$\begin{aligned} S_n &= 1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1} \\ 2S_n &= \quad 1\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n-1}+(2n-1)\cdot 2^n \end{aligned}$$

上の第 1 式から第 2 式を引くと

$$\begin{aligned} -S_n &= 1+2(2+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n-1)\cdot 2^n \\ &= -1+2(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n-1)\cdot 2^n \\ S_n &= 1-2(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+(2n-1)\cdot 2^n \\ &= 1-2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}+(2n-1)\cdot 2^n = \boldsymbol{3+(2n-3)\cdot 2^n} \end{aligned}$$

385 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で与えられるとき，この数列の一般項 a_n を求めよ．

(1) $S_n = 2n^2 - n$

(2) $S_n = 2 \cdot 3^n - 4$

解答 (1) $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} = 4n - 3$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = 4n - 3}$

(2) $a_1 = S_1 = 2 \cdot 3^1 - 4 = 2$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2 \cdot 3^n - 4) - (2 \cdot 3^{n-1} - 4) = 4 \cdot 3^{n-1}$$

よって　$\boldsymbol{a_1 = 2,\ a_n = 4 \cdot 3^{n-1}\ (n \geqq 2)}$

386 奇数の数列を

$$1\,|\,3,\ 5\,|\,7,\ 9,\ 11\,|\,13,\ 15,\ 17,\ 19\,|\,21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29\,|\,31,\cdots$$

のように，第 n 群が n 個の数を含むように分けるとき，次の問に答えよ．

(1) 第 n 群の最初の奇数を求めよ．

(2) 2019 は第何群の何番目の数か．　(東北学院大)

解答　(1) 第 $n-1$ 群の最後の項までの項数は

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

したがって，第 n 群の最初の項の項数は　$\dfrac{1}{2}n(n-1)+1$

よって，第 n 群の最初の項は

$$2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1=\boldsymbol{n^2-n+1}$$

(2) (1) の結果から

第 45 群の最初の項は　$45^2-45+1=1981$

第 46 群の最初の項は　$46^2-46+1=2071$

$$2019=1981+(20-1)\cdot 2$$

よって，**2019 は第 45 群の 20 番目の項である．**

7.33.2 Exercise

387 自然数 n に対し，2^n の一の位の数を a_n とし，一般項を a_n とする数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，次の問に答えよ．　(東北学院大)

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ．

(2) a_{2015} を求めよ．

(3) $S_n \geqq 2015$ を満たす最小の n の値を求めよ．

解答　(1) $3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81,\ 3^5 = 243$ より

$$\boldsymbol{a_1 = 3,\ a_2 = 9,\ a_3 = 7,\ a_4 = 1,\ a_5 = 3}$$

(2) $2015 \equiv 3 \pmod 4$ であるから　$a_{2015} = a_3 = \mathbf{7}$

(3) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 + 9 + 7 + 1 = 20$ であるから

$$\begin{aligned} S_{4m} &= \sum_{k=1}^{4m} a_k \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \cdots + (a_{4m-3} + a_{4m-2} + a_{4m-1} + a_{4m}) \\ &= \overbrace{20 + \cdots + 20}^{m\text{ 個}} = 20m \end{aligned}$$

上式に $m = 100,\ 101$ を代入すると　$S_{400} = 2000,\ S_{404} = 2020$

$$\begin{aligned} S_{401} &= S_{400} + a_1 = 2000 + 3 = 2003, \\ S_{402} &= S_{400} + a_1 + a_2 = 2000 + 3 + 9 = 2012, \\ S_{403} &= S_{400} + a_1 + a_2 + a_3 = 2000 + 3 + 9 + 7 = 2019 \end{aligned}$$

したがって，$S_n \geqq 2015$ を満たす最小の n の値は　$\boldsymbol{n = 403}$

308* 分母が偶数，分子が奇数であって，0 より大きく 1 より小さい分数を次のように並べた数列がある．

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{10},\ \frac{3}{10},\ \frac{5}{10},\ \cdots$$

(1) 第 70 項を求めよ．

(2) 初項から第 70 項までの和を求めよ．

(3) 初項から第 n 項までの和を S_n とする．$S_n \leqq 40$ を満たす最大の n を求めよ． (中央大)

解答 (1) 次の群を考える．

$$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{5}{6}\ \Big|\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}\ \Big|\ \frac{1}{10},\ \frac{3}{10},\ \frac{5}{10},\ \cdots$$

第 k 群の最後の項 $\dfrac{2k-1}{2k}$ の項数は

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

$k=11$，すなわち，$\dfrac{21}{22}$ は第 66 項であるから，第 67 項から第 70 項は

$$\frac{1}{24},\ \frac{3}{24},\ \frac{5}{24},\ \frac{7}{24}$$

よって，第 70 項は $\boldsymbol{\dfrac{7}{24}}$

(2) 第 k 群の和は

$$\frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{k}(2j-1)=\frac{1}{2k}\cdot k^2=\frac{k}{2}$$

初項から第 k 群の最後の項までの和は

$$S_{\frac{1}{2}k(k+1)}=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+k)=\frac{1}{4}k(k+1) \qquad (*)$$

$k=11$ を $(*)$ に代入すると　$S_{66}=33$

$$\begin{aligned} S_{70} &= S_{66}+a_{67}+a_{68}+a_{69}+a_{70} \\ &= 33+\frac{1}{24}+\frac{3}{24}+\frac{5}{24}+\frac{7}{24}=\boldsymbol{\frac{101}{3}} \end{aligned}$$

(3) $(*)$ について，$\dfrac{1}{4}k(k+1) \leqq 40$ とすると　$k(k+1) \leqq 160$

$12 \cdot 13 = 156$，$13 \cdot 14 = 182$ より，$k = 12$ を $(*)$ に代入すると

$$S_{78} = 39$$

第 12 群までの和が 39 であるから，第 13 群の初項 $\dfrac{1}{26}$ から第 l 項 $\dfrac{2l-1}{26}$ までの和が 1 以下であるとき

$$\frac{l^2}{26} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad l \leqq 5$$

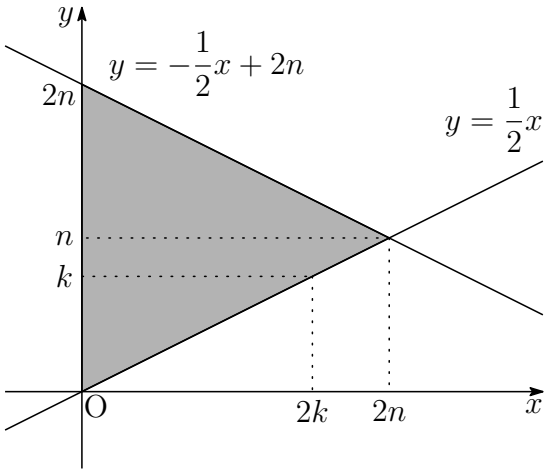
よって，求める最大の n は　$78 + 5 = \mathbf{83}$

389* n を正の整数とする．次の条件を満たす整数解 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

$$x \geqq 0, \quad y \geqq \frac{1}{2}x, \quad y \leqq -\frac{1}{2}x + 2n$$

解答 不等式の表す領域は，直線 $y = n$ に関して対称であるから，求める整数解 $(x,\ y)$ の個数を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= 2\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) + 2n + 1 \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2n + 1 \\ &= \boldsymbol{2n^2 + 2n + 1} \ \textbf{(個)} \end{aligned}$$



7.33.3 Try

390* 公比が 1 より大きい等比数列 $\{a_n\}$ の，初項から第 n 項までの和を S_n とする．また，数列 $\{b_n\}$ は，初項が 3 で $b_{n+1}-b_n=a_n$ を満たす．$a_2=18$，$S_3=78$ であるとき，次の問に答えよ．ただし，$n=1,2,3,\cdots$ とする．　(北海学園大)

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka_k$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2b_k$ を求めよ．

解答　(1) 等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とすると，$a_2=18,\ S_3=78$ より

$$ar=18,\quad a(1+r+r^2)=78 \qquad (*)$$

上の 2 式から a を消去すると　$\dfrac{a(1+r+r^2)}{ar}=\dfrac{78}{18}$

整理すると　$3r^2-10r+3=0$　ゆえに　$(3r-1)(r-3)=0$

$r>1$ であるから　$r=3$　これを $(*)$ に代入して　$a=6$

よって　　$\boldsymbol{a_n=6\cdot3^{n-1}}$

(2) $S_n(r)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}$，$T_n(r)=\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} rT_n(r)&=\sum_{k=1}^{n} kr^k=\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)r^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-1}+nr^n\\ &=\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}-\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}+nr^n=T_n(r)-S_n(r)+nr^n\\ (r-1)T_n(r)&=-\frac{r^n-1}{r-1}+nr^n=\frac{nr^{n+1}-(n+1)r^n+1}{r-1}\\ T_n(r)&=\frac{nr^{n+1}-(n+1)r^n+1}{(r-1)^2} \end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka_k=\sum_{k=1}^{n} k\cdot6\cdot3^{k-1}=6\sum_{k=1}^{n} k\cdot3^k=6T_n(3)$ より

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k=6\cdot\frac{n\cdot3^{n+1}-(n+1)\cdot3^n+1}{(3-1)^2}=\boldsymbol{\frac{(2n-1)\cdot3^{n+1}+3}{2}}$$

別解 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = xS_n(x) = \frac{x^{n+1}-x}{x-1}$ の両辺を微分すると

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{\{(n+1)x^n-1\}(x-1)-(x^{n+1}-x)\cdot 1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2} \qquad (*)$$

したがって，$a=6,\ r=3$ より

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = a\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{a\{nr^{n+1}-(n+1)r^n+1\}}{(r-1)^2}$$
$$= \frac{6\{n\cdot 3^{n+1}-(n+1)\cdot 3^n+1\}}{2^2} = \frac{\boldsymbol{(2n-1)\cdot 3^{n+1}+3}}{\boldsymbol{2}}$$

(3) $b_{n+1}-b_n = a_n$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad \text{ゆえに} \quad b_n - 3 = 6\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1} = 3^n-3$$

上式は，$b_1=3$ より，$n=1$ のときも成立するから　$b_n = 3^n$

$U_n(r) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 r^{k-1}$ とおくと

$$rU_n(r) = \sum_{k=1}^{n} k^2 r^k = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2 r^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 r^{k-1} + n^2 r^n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 r^{k-1} - 2\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} + n^2 r^n$$
$$= U_n(r) - 2T_n(r) + S_n(r) + n^2 r^n$$
$$(r-1)U_n(r) = -2T_n(r) + S_n(r) + n^2 r^n$$
$$= -2\cdot\frac{nr^{n+1}-(n+1)r^n+1}{(r-1)^2} + \frac{r^n-1}{r-1} + n^2 r^n$$
$$= \frac{n^2 r^{n+2}+(-2n^2-2n+1)r^{n+1}+(n+1)^2 r^n - r - 1}{(r-1)^2}$$
$$U_n(r) = \frac{n^2 r^{n+2}+(-2n^2-2n+1)r^{n+1}+(n+1)^2 r^n - r - 1}{(r-1)^3}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 b_k = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 3^{k-1} = 3U_n(3) = \frac{\boldsymbol{(n^2-n+1)3^{n+1}-3}}{\boldsymbol{2}}$

別解 $(*)$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x\}(x-1)^{-2}$ を微分すると

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} \\ &= \{n(n+2)x^{n+1} - (n+1)^2 x^n + 1\}(x-1)^{-2} \\ &\qquad + \{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x\}\cdot(-2)(x-1)^{-3} \\ &= \frac{n^2 x^{n+2} + (-2n^2 - 2n + 1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 b_k = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 3^{k-1} = 3U_n(3) = \boldsymbol{\frac{(n^2 - n + 1)3^{n+1} - 3}{2}}$

391* xy 平面上の x 座標がともに正の整数である点 $(x,\ y)$ 全体の集合を D とする．D に属する点 $(x,\ y)$ に対して $x+y$ が小さいものから順に，また $x+y$ が等しい点の中では x が小さい順に番号をつけ，n 番目 $(n=1,2,3,\cdots)$ の点を P_n とする．例えば，$\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$ の座標は順に $(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 座標が $(2,\ 4)$ である点は何番目か．また，P_{10} の座標を求めよ．

(2) 座標が $(n,\ n)$ である点の番号を a_n とする．数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) (2) で定めた数列 $\{a_n\}$ に対し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

解答 (1) $x+y=k\ (k\geqq 2)$ となる $(x,\ y)$ の組は $k-1$ 個あるから，点 $(x,\ y)$ を N 番目とすると

$$\begin{aligned} N &= 1+2+\cdots+(k-2)+x \\ &= \frac{1}{2}(k-2)(k-1)+x \\ &= \frac{1}{2}(x+y-2)(x+y-1)+x \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

点 $(2,\ 4)$ は，$x=2$，$y=4$ を (A) に代入して

$$N=\frac{1}{2}(2+4-2)(2+4-1)+2=\mathbf{12}\ (\text{番目})$$

また，$N=10$ を (A) に代入すると

$10=\dfrac{1}{2}(x+y-2)(x+y-1)+x$　ゆえに　$(x+y-2)(x+y-1)+2x=20$

$20=3\cdot 4+8=4\cdot 5$ に注意すると

$$x+y-2=3,\quad 2x=8 \quad \text{これを解いて} \quad x=4,\ y=1$$

よって　P_{10} の座標は　$\boldsymbol{(4,\ 1)}$

(2) (A) に $x=n,\ y=n,\ N=a_n$ を代入して

$$a_n=\frac{1}{2}(n+n-2)(n+n-1)+n=\boldsymbol{2n^2-2n+1}$$

(3) (2) の結果により

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n^2+1)} \end{aligned}$$

392* 正の整数 n について，$a_n=[\sqrt{2n-1}]$ とする．ただし，記号 $[x]$ は，x 以下の最大の整数を表すものとする． (福井大 改)

(1) a_{100} の値を求めよ．

(2) $a_n=6$ となる n はいくつあるか求めよ．

(3) 正の整数 k に対して，$a_n=2k$ となる n はいくつあるか求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 100 項までの和を求めよ．

解答 (1) $a_{100}=[\sqrt{199}]$，$\sqrt{196}=14$，$\sqrt{225}=15$ より　$\boldsymbol{a_{100}=14}$

(2) $6\leqq\sqrt{2n-1}<7$ を満たす整数 n は

$$36\leqq 2n-1<49 \quad \text{ゆえに} \quad 19\leqq n\leqq 24$$

$a_n=6$ を満たす n の個数は　$24-19+1=\mathbf{6}$ (個)

(3) $2k\leqq\sqrt{2n-1}<2k+1$ を満たす整数 n は

$$4k^2\leqq 2n-1<4k^2+4k+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2k^2+1\leqq n\leqq 2k^2+2k$$

$a_n=2k$ を満たす n の個数は　$(2k^2+2k)-(2k^2+1)+1=\boldsymbol{2k}$ (個)

(4) $2k-1\leqq\sqrt{2n-1}<2k$ (k は整数) を満たす整数 n は

$$4k^2-4k+1\leqq 2n-1<4k^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2k^2-2k+1\leqq n\leqq 2k^2$$

$a_n=2k-1$ を満たす n の個数は　$2k^2-(2k^2-2k+1)+1=2k$ (個)

(i) $a_n=2k$ $(k=1,2,\dots,6)$ となる項の総和は

$$\sum_{k=1}^{6}2k\cdot 2k=\sum_{k=1}^{6}4k^2=4\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13=364$$

(ii) $a_n=2k-1$ $(k=1,2,\dots,7)$ となる項の総和は

$$\sum_{k=1}^{7}2k\cdot(2k-1)=\sum_{k=1}^{6}4(4k^2-2k)=4\cdot\frac{1}{6}\cdot 7\cdot 8\cdot 15-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8=504$$

(iii) 初項から第 100 項までの項で，$a_n=14$ となるのは，$\sqrt{196}=14$ より

$$a_{99}=[\sqrt{197}]=14,\quad a_{100}=[\sqrt{199}]=14$$

(i)〜(iii) より　　$364+504+14\cdot 2=\mathbf{896}$

393 初項が 1，公差が 2 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項 $(n \geqq 2)$ において，異なる 2 項の積の和 T_n を求めよ．例えば，$T_2 = a_1a_2 = 3$，$T_3 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = 23$ である．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項 $(n \geqq 3)$ において，次の 2 つの条件

・相異なっている．　　・互いに隣り合っていない．

を満たす 2 項の積の和 U_n を求めよ．例えば，$U_3 = a_1a_3 = 5$，
$U_4 = a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_4 = 33$ である．　(滋賀県立大)

解答　(1) 初項 1，公差 2 の等差数列の一般項は

$$a_n = 1 + 2(n-1) = \boldsymbol{2n - 1}$$

(2) (1) の結果から

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n = \boldsymbol{n^2}$$

(3) ${S_n}^2 = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 + 2T_n$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 4k + 1)\\ &= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n\\ &= \frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\} = \frac{1}{3}n(4n^2-1)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}T_n &= \frac{1}{2}{S_n}^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\\ &= \frac{1}{2}(n^2)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}n(4n^2-1)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n^4 - \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{6}n}\end{aligned}$$

(4) $U_n = T_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)(2k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(4k^2-1)\\ &= 4\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - (n-1)\\ &= \frac{4}{3}n^3 - 2n^2 + \frac{2}{3} - n + 1\\ &= \frac{4}{3}n^3 - 2n^2 - \frac{1}{3}n + 1\end{aligned}$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}U_n &= T_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1}\\ &= \left(\frac{1}{2}n^4 - \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{6}n\right) - \left(\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 - \frac{1}{3}n + 1\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n^4 - 2n^3 + 2n^2 + \frac{1}{2}n - 1}\end{aligned}$$

394 (1) k を 0 以上の整数とするとき，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\leqq k$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の組の個数 a_k を k の式で表せ.

(2) n を 0 以上の整数とするとき，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+z\leqq n$ を満たす 0 以上の整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数 b_n を n の式で表せ. (横浜国立大)

解答 (1) $0\leqq x\leqq 3k$ における直線 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=k$ 上の格子点の個数を c_k とすると

$$3y=2(3k-x)$$

上式の左辺が 3 の倍数であるから，$3k-x$ は 3 の倍数となり，

$$x=3j,\quad y=2(k-j)\quad (j=0,1,\cdots,k)$$

したがって　　$c_k=k+1$

不等式 $0\leqq x\leqq 3k,\ 0\leqq y\leqq 2k,\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}<k$ の表す領域を D_k とし，

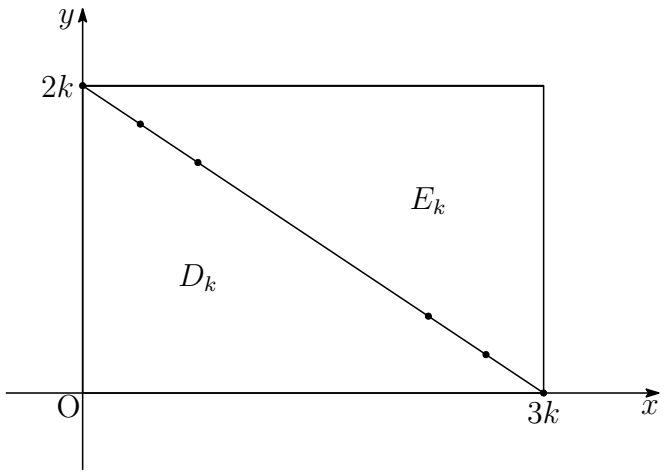
不等式 $0\leqq x\leqq 3k,\ 0\leqq y\leqq 2k,\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}>k$ の表す領域を E_k とする.

$D_k,\ E_k$ 内の格子点の個数をそれぞれ $d_k,\ e_k$ とすると　$d_k=e_k$

$c_k+d_k+e_k=(3k+1)(2k+1)$，$a_k=c_k+d_k=c_k+e_k$ であるから

$$\begin{aligned}2a_k&=(c_k+d_k)+(c_k+e_k)=(3k+1)(2k+1)+c_k\\&=(3k+1)(2k+1)+(k+1)=6k^2+6k+2\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{a_k=3k^2+3k+1}$



(2) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+z \leqq n$ より　$z=0,1,\cdots,n$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2} \leqq n-z$$

このとき，$n-z=0,1,\cdots,n$ であるから，(1) の結果を利用して

$$\begin{aligned} b_n &= a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k = 1+\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1) \\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\} \\ &= 1+\{(n+1)^3-1^3\} = \boldsymbol{(n+1)^3} \end{aligned}$$

7.34　漸化式

7.34.1　Review

395 次の漸化式で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $a_1=-1,\ a_{n+1}=a_n+3n \quad (n=1,2,3,\cdots)$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^n \quad (n=1,2,3,\cdots)$

(3) $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2 \quad (n=1,2,3,\cdots)$

解答　(1) $a_{n+1}-a_n=3n$ より，$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}3k$

$$a_n-a_1=3\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから，$a_1=-1$ より

$$\boldsymbol{a_n=\frac{3}{2}n(n-1)-1}$$

(2) $a_{n+1}-a_n=2^n$ より，$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$$a_n-a_1=\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから，$a_1=1$ より

$$\boldsymbol{a_n=2^n-1}$$

(3) $a_{n+1}=3a_n-2$ より　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=1$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n-1=1\cdot 3^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a_n=3^{n-1}+1}$$

7.34.2 Exercise

396* 次の漸化式で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(4) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

解答 (1) $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ より $\quad \dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{a_n}{3^n} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$n \geqq 2$ のとき $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{3^{k+1}} - \frac{a_k}{3^k}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

$$\frac{a_n}{3^n} - \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから，$a_1 = 2$ より

$$\frac{a_n}{3^n} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{4}{3} - \frac{2^n}{3^n}$$

$$a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 2^n$$

別解 p を定数とする．$f(n) = p\cdot 2^n$ が

$$f(n+1) = 3f(n) + 2^n \qquad (*)$$

を満たすとすると

$$p\cdot 2^{n+1} = 3p\cdot 2^n + 2^n \quad \text{ゆえに} \quad 2p = 3p + 1$$

これを解いて $\qquad p = -1$

漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ および $(*)$ から

$$a_{n+1} - f(n+1) = 3\{a_n - f(n)\} \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n)$$

数列 $\{a_n + 2^n\}$ は初項 $a_1 + 2^1 = 4$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n + 3^n = 4\cdot 3^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 2^n}$$

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+2}$ において，$a_{k+1}=0$ となる k が存在すると，$a_k=0$ となるから，$a_1=1$ に反する．したがって，すべての自然数 n に対して

$$a_n \neq 0$$

与えられた漸化式から

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_{n+1}}+1=2\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$$

$\left\{\dfrac{1}{a_n}+1\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1}+1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{1}{a_n}+1=2\cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{2^n-1}}$$

補足 $b_n=\dfrac{1}{b_n}$ とおき，漸化式

$$b_1=1, \quad b_{n+1}=2b_n+1$$

として求めてもよい．

(3) $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n$ に対して 1 次関数 $f(n)=pn+q$ が

$$f(n+1)=2f(n)+n \qquad (*)$$

を満たすとすると

$$p(n+1)+q=2(pn+q)+n \quad \text{ゆえに} \quad (p+1)n-p+q=0$$

上の第 2 式は，n に関する恒等式であるから

$$p=q=-1 \quad \text{ゆえに} \quad f(n)=-n-1$$

漸化式および $(*)$ から　　$a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$

$$a_{n+1}+n+2=2(a_n+n+1)$$

数列 $\{a_n+n+1\}$ は初項 $a_1+1+1=3$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n+n+1=3\cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n=3\cdot 2^{n-1}-n-1}$$

(4) 漸化式 $a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$ の特性方程式 $x^2+x-6=0$ の解は　$x=-3,\ 2$

$$\begin{cases} a_{n+2}+3a_{n+1}=2(a_{n+1}+3a_n) \\ a_{n+2}-2a_{n+1}=-3(a_{n+1}-2a_n) \end{cases}$$

$\{a_{n+1}+3a_n\}$ は初項 $a_2+3a_1=6$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}+3a_n=6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n \quad \cdots ①$$

$\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=1$，公比 -3 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=1\cdot(-3)^{n-1}=(-3)^{n-1} \quad \cdots ②$$

①−② より　$5a_n=3\cdot 2^n-(-3)^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{5}\{3\cdot 2^n-(-3)^{n-1}\}}$

参照 隣接 3 項間の数列は特性方程式が異なる 2 つ解をもつ場合と重解をもつ場合についてそれぞれ解法が異なる．

類題 鹿児島大学 2014 年 3

熊大文系 2012 年 2

数列 $\{a_n\}$ に対して次の漸化式が成り立つとする。

$$a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 定数 c に対して $b_n=a_n+c$ で定められた数列 $\{b_n\}$ を考える。

$$b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0 \quad (n=1,2,3\cdots)$$

を満たす c の値を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

解答　(1) $b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0\cdots$① と $a_{n+2}-5a_{n+1}+6_n=1$ の辺々の差をとると

$$(b_{n+2}-a_{n+2})-5(a_{n+1}-b_{n+1})+6(b_n-a_n)=-1$$

$b_n-a_n=c$ であるから

$$c-5c+6c=-1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{c=-\frac{1}{2}}$$

(2) (1) の結果より，$b_n=a_n-\dfrac{1}{2}$ であるから

$$b_1=a_1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \quad b_2=a_2-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

① より

$$b_{n+2}-2b_{n+1}=3(b_{n+1}-2b_n)$$
$$b_{n+2}-3b_{n+1}=2(b_{n+1}-3b_n)$$

数列 $\{b_{n+1}-2b_n\}$ は初項 b_2-2b_1，公比 3 の等比数列であり，同様に，
数列 $\{b_{n+1}-3b_n\}$ は初項 b_2-3b_1，公比 2 の等比数列であるから

$$b_{n+1}-2b_n=3^{n-1}(b_2-2b_1)=\frac{1}{2}\cdot 3^n$$
$$b_{n+1}-3b_n=2^{n-1}(b_2-3b_1)=2^{n-1}$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$b_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n-2^{n-1}$$

$a_n=b_n+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n-2^{n-1}+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3^n-2^n+1}{2}}$$

熊大文系 2013 年 4

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。

解答 (1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ より

$$a_{n+1} = \{2a_{n+1} + (n+1)^2\} - (2a_n + n^2)$$

ゆえに $\quad \boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1} \quad \cdots ①$

(2) 初項 a_1 は $\quad S_1 = 2a_1 + 1^2$

$S_1 = a_1$ より $\quad a_1 = -1$

① に対して，次の等式をみたす n の 1 次式 $f(n)$ を考える．

$$f(n+1) = 2f(n) - 2n - 1 \quad \cdots ②$$

$f(n) = pn + q$ とおくと $\quad p(n+1) + q = 2(pn+q) - 2n - 1$

n に関する恒等式であるから $\quad p = 2$，$q = 3$

ゆえに $\quad f(n) = 2n + 3 \quad \cdots ③$

① − ② から $\quad a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$

したがって $\quad a_n - f(n) = 2^{n-1}\{a_1 - f(1)\}$

$a_1 = -1$，③ より $\quad a_n - (2n+3) = 2^{n-1}(-1-5)$

よって $\quad \boldsymbol{a_n = 2n + 3 - 3 \cdot 2^n}$

397* 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=1$，$b_1=1$，$a_{n+1}=a_n+9b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n$ で定めるとき，次の問に答えよ．(東北学院大)

(1) $a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ を満たす定数 x，y の組を 2 組求めよ．

(2) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

解答 (1) $a_{n+1}=a_n+9b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1}+xb_{n+1} &= a_n+9b_n+x(a_n+b_n) \\ &= (1+x)a_n+(9+x)b_n \qquad (*) \end{aligned}$$

$1:x=(1+x):(9+x)$ より　$x(1+x)=9+x$

$$x^2=9 \quad \text{ゆえに} \quad x=\pm 3$$

$x=3,-3$ をそれぞれ $(*)$ に代入すると

$$\begin{cases} a_{n+1}+3b_{n+1}=4(a_n+3b_n) & \cdots ① \\ a_{n+1}-3b_{n+1}=-2(a_n-3b_n) & \cdots ② \end{cases}$$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 4),\ (-3,-2)}$

(2) ① より，$\{a_n+3b_n\}$ は初項 $a_1+3b_1=4$，公比 4 の等比数列であるから

$$a_n+3b_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$$

② より，$\{a_n-3b_n\}$ は初項 $a_1-3b_1=-2$，公比 -2 の等比数列であるから

$$a_n-3b_n=-2\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$$

上の 2 式の辺々の和と差をとると

$$2a_n=4^n+(-2)^n, \quad 6b_n=4^n-(-2)^n$$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{4^n+(-2)^n}{2}, \quad b_n=\dfrac{4^n-(-2)^n}{6}}$

398* 1から7までの数を1つずつ書いた7個の玉が，袋の中に入っている．袋から玉を1個取り出し，書かれている数を記録して袋に戻す．この試行を n 回繰り返して得られる n 個の数の和が4の倍数となる確率を p_n とする．ただし，n は正の整数とする．このとき，次の問いに答えよ．　(琉球大2020年 4)

(1) p_1 と p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n の式で表せ．

(3) p_n を求めよ．

解答　(1) $\boldsymbol{p_1 = \dfrac{1}{7}}$

2回繰り返して得られる2個の数の和が4の倍数となるのは，次の13通り

1回目	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7
2回目	3	7	2	6	1	5	4	3	7	2	6	1	5

よって　$p_2 = \dfrac{13}{7^2} = \boldsymbol{\dfrac{13}{49}}$

(2) n 回繰り返して得られる n 個の数の和を4で割った余りが0，1，2，3 である確率をそれぞれ $p_n,\ q_n,\ r_n,\ s_n$ とすると

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}q_n + \frac{2}{7}r_n + \frac{2}{7}s_n \\ &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}(q_n + r_n + s_n) \end{aligned}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}(1 - p_n) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}} \end{aligned}$$

(3) (2)の結果から　$p_{n+1} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{7}\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $p_1 - \dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{7}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \left(p_1 - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1} \\ p_n &= -\frac{3}{28}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

399 n 段からなる階段を，1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで昇るとき，昇り方の総数 a_n を考える．

(1) a_{n+2} を a_{n+1}，a_n で表せ．

(2) a_{10} を求めよ．

解答 (1) $n+2$ 段の階段を昇るとき，最初に 1 段昇る場合と 2 段昇る場合がある．

- 最初に 1 段昇場合，残り $n+1$ 段を上る場合の数は a_{n+1} 通りである．
- 最初に 2 段昇場合，残り n 段を上る場合の数は a_n 通りである．

よって　　$\boldsymbol{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$

(2) (1) の結果から

$$
\begin{aligned}
a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3,\\
a_4 &= a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5,\\
a_5 &= a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8,\\
a_6 &= a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13,\\
a_7 &= a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21,\\
a_8 &= a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34,\\
a_9 &= a_8 + a_7 = 34 + 21 = 55,\\
a_{10} &= a_9 + a_8 = 55 + 34 = 89
\end{aligned}
$$

よって　**89** 通り

大分大学 2020 年 7

階段を上るとき，一度に上ることができる段数は 1 段または 2 段のみであるとする．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) ちょうど 10 段上る方法は全部で何通りあるか答えなさい．

(2) n を正の整数とする．ちょうど n 段上る方法は全部で何通りあるか答えなさい．

解答　(1) 与えらた規則により，n 段の階段を上る方法を a_n 通りとすると

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \cdots (*)$$

が成立する．これから，順次

$$a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 8,\ a_6 = 13,\ a_7 = 21,\ a_8 = 34,\ a_9 = 55,\ a_{10} = 89$$

よって　**89** 通り

(2) (1) より，特性方程式

$$x^2 = x + 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$　$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

したがって　$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

$(*)$ から　$a_0 = 1$ であるから

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n(a_1 - \alpha a_0) = \beta^n(1 - \alpha) = \beta^{n+1}$$
$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n(a_1 - \beta a_0) = \alpha^n(1 - \beta) = \alpha^{n+1}$$

上の 2 式から　$(\beta - \alpha)a_n = \beta^{n+1} - \alpha^{n+1}$　ゆえに　$a_n = \dfrac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$

方程式 $(**)$ の解は　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$　ゆえに　$\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2},\quad \beta = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

よって，階段をちょうど n 段上る方法は

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}$$

宮崎大学 2016 年 4

A と B は，赤球 2 個と白球 1 個が入った袋をそれぞれ 1 つずつ持っている．次のような試行を考える．

> A と B が，それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を 1 つ選び，色を見てからもとの袋に戻す．

上の試行を n $(n \geqq 2)$ 回繰り返したとき，n 回の試行の中で A と B が取り出した球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない確率を P_n とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 1 回の試行で，A と B が取り出した球の色が一致する確率を求めよ．

(2) P_2，P_3 を求めよ．

(3) $n \geqq 4$ のとき，

$$P_n = \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{20}{81}P_{n-2} + \frac{5\cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

が成り立つことを示せ．

解答 (1) A，B が赤球で一致する確率は $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

A，B が白球で一致する確率は $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$

これらの事象は互いに排反であるから $\dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = \boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

(2) A，B が取り出す球の色が一致する確率を p，一致しない確率を q とすると

$$p = \frac{5}{9}, \quad q = 1 - p = \frac{4}{9}$$

よって
$$\begin{aligned} P_2 &= pq + qp = 2pq \\ &= 2 \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \boldsymbol{\frac{40}{81}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= pqp + pqq + qpq + qqp = pq(p + 3q) \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{4}{9}\left(\frac{5}{9} + 3 \times \frac{4}{9}\right) = \boldsymbol{\frac{340}{729}} \end{aligned}$$

(3) A と B が n 回の試行の中で取り出す球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない事象は，次の i)〜iii) の和事象である．このとき，i)，ii)，iii) は互いに排反である．

i) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致せず，2 回目から n 回目にかけて，一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない．

ii) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致し，2 回目に一致せず，3 回目から n 回目にかけて，一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない．

iii) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致し，2 回目から n 回目にかけて一致しない．

よって
$$P_n = \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{9}P_{n-2} + \frac{5}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{4}{9}P_{n-1} + \frac{20}{81}P_{n-2} + \frac{5 \cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

東大理系 2015 年 2

どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く．さいころを投げ，出た目が 1，2，3 のときは文字列 AA を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く．さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2，5，6，3，4 であったとすると，得られる文字列は

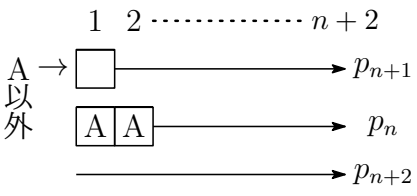
AACDAAB

となる．このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である．

(1) n を正の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ．

(2) n を 2 以上の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ．

解答　(1) 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とすると，p_{n+2} は最初に出た目が 4，5，6 の場合と 1，2，3 の場合により



$$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots(*)$$

このとき　$p_1=\dfrac{1}{2}$，$p_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

$(*)$ より　$p_{n+2}-p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(p_{n+1}-p_n)$，

$$p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}=p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n$$

第 1 式から　$p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 2 式から　$p_{n+1}+\dfrac{1}{2}p_n=p_2+\dfrac{1}{2}p_1=1$

上の 2 式から　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}} \quad \boldsymbol{(n \geqq 1)}$

(2) 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字列が B となる確率を q_n とすると，q_{n+2} は，(1) と同様に

$$q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n \quad (n \geqq 2) \quad \cdots (**)$$

このとき　$q_2 = 0$，$q_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

(**) より　$q_{n+2} - q_{n+1} = -\frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n)$,

$q_{n+2} + \frac{1}{2}q_{n+1} = q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$

第 1 式から　$q_{n+1} - q_n = (q_3 - q_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

第 2 式から　$q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n = q_3 + \frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{12}$

上の 2 式から　$\boldsymbol{q_n = \frac{1}{18}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \quad (n \geqq 2)}$

千葉大 2018 年 11

n を 3 以上の自然数として，n 枚のカード $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_{n-1},\ C_n$ がある．初めにこれらのカードを下から $C_n,\ C_{n-1},\ \cdots,\ C_2,\ C_1$ の順番に積み上げておく．いちばん上にあるカードが C_1 で，いちばん下が C_n である．積み上げられたカードに対して以下の試行を繰り返す．いちばん上にあるカードを取ってそれを残りのいずれかのカードの下に入れるか，またはいちばん上に戻す．どの位置におくかの確率はすべて等しいものとする．
$k=1,2,\cdots$ について，k 回の試行の後にカード C_1 が上から数えて ℓ 番目にある確率を $P(k,\ \ell)$ $(\ell=1,2,\cdots,n)$ で表し，また k 回の試行の後にカード C_2 が上から数えて ℓ 番目にある確率を $Q(k,\ \ell)$ で表す．例えば $P(1,\ \ell)$ は ℓ によらず $\dfrac{1}{n}$ に等しい．以下の問いに答えよ．

(1) $P(2,\ \ell)$ を求めよ．

(2) $P(k,\ \ell)$ を求めよ．

(3) $Q(k,\ \ell)$ を求めよ．

解答　(1) C_1 の 1 回目，2 回目の試行後の上からの位置は，次のように推移する．

(i) $\ell=1$ のとき　　$1\to 1,\quad 2\to 1$

(ii) $1<\ell<n$ のとき　　$1\to \ell,\quad \ell\to \ell,\quad \ell+1\to \ell$

(iii) $\ell=n$ のとき　　$1\to n,\quad n\to n$

(i)〜(iii) について，$P(2,\ \ell)$ の確率は

$$P(2,\ 1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$$
$$P(2,\ \ell)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\ell-1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-\ell}{n}=\frac{1}{n}\qquad(1<\ell<n)$$
$$P(2,\ n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$$

よって　$\boldsymbol{P(2,\ \ell)=\dfrac{1}{n}\quad(\ell=1,2,\cdots,n)}$

(2) $P(1,\ \ell)=\dfrac{1}{n}$，$P(2,\ \ell)=\dfrac{1}{n}$ より

$$(*)\quad P(k,\ \ell)=\frac{1}{n}\quad (k\text{ は自然数},\ \ell=1,2,\cdots,n)$$

と推測し，k に関する数学的帰納法により証明する．

［1］$k=1$ のとき，$(*)$ は明らかに成立する．

［2］$k=j$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定する．C_1 の j 回目，$j+1$ 回目の試行後の上からの位置も，(i)〜(iii) と同じ推移により

$$\begin{aligned}
P(j+1,\ 1)&=P(j,\ 1)\times\frac{1}{n}+P(j,\ 2)\times\frac{n-1}{n}\\
&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}\\
P(j+1,\ \ell)&=P(j,\ 1)\times\frac{1}{n}+P(j,\ \ell)\times\frac{\ell-1}{n}+P(j,\ \ell+1)\times\frac{n-\ell}{n}\\
&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\ell-1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-\ell}{n}=\frac{1}{n}\qquad (1<\ell<n)\\
P(j+1,\ n)&=P(j,\ 1)\times\frac{1}{n}+P(j,\ n)\times\frac{n-1}{n}\\
&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

したがって，$k=j+1$ のときも，$(*)$ が成立する．

［1］［2］より，すべての自然数 k について，$(*)$ が成立する．

よって　$\boldsymbol{P(k,\ \ell)=\dfrac{1}{n}\quad (k\text{ は自然数},\ \ell=1,2,\cdots,n)}$

(3) 1回後にC_2が上からℓ番目にある確率$Q(1,\ \ell)$は

$$(**)\quad Q(1,\ 1)=\frac{n-1}{n},\quad Q(1,\ 2)=\frac{1}{n},\quad Q(1,\ \ell)=0\ \ (3\leqq\ell\leqq n)$$

$Q(k+1,\ \ell)$を$P(k,\ \ell)$と$Q(k,\ \ell)$を用いた確率漸化式を求める.

(a) C_2が1回目の試行で1番上にあるとき，残りのk回の試行で上からℓ番目にくる確率，すなわち，C_1がk回後に上からℓ番目にくる確率$P(k,\ \ell)$に等しい

(b) C_2が1回目の試行で上から2番目にあるとき，残りのk回の試行で上からℓ番目にくる確率，すなわち，C_2がk回後に上からℓ番目にくる確率$Q(k,\ \ell)$に等しい

(a), (b)から次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned}Q(k+1,\ \ell)&=Q(1,\ 1)P(k,\ \ell)+Q(1,\ 2)Q(k,\ \ell)\\&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}Q(k,\ \ell)\\&=\frac{1}{n}Q(k,\ \ell)+\frac{n-1}{n^2}\end{aligned}$$

これから　$Q(k+1,\ \ell)-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}\left\{Q(k,\ \ell)-\dfrac{1}{n}\right\}$

したがって　$Q(k,\ \ell)-\dfrac{1}{n}=\left\{Q(1,\ \ell)-\dfrac{1}{n}\right\}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$

$(**)$より，$Q(k,\ \ell)$は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q(k,\ 1)}&=\boldsymbol{\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}}\\\boldsymbol{Q(k,\ 2)}&=\boldsymbol{\frac{1}{n}}\\\boldsymbol{Q(k,\ \ell)}&=\boldsymbol{\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^{k}}\quad\boldsymbol{(3\leqq\ell\leqq n)}\end{aligned}$$

7.34.3 Try

400* 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 2\sqrt{2}$，$a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定められるとき，次の問に答えよ．(徳島大 改)

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) 初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を求めよ．

解答 (1) $a_1 = 2\sqrt{2}$，$a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$ より，$a_n > 0$ であるから

$$b_n = \log_2 a_n$$

とおくと　$b_1 = \log_2 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{2}$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2\sqrt{a_n} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + 1$$

したがって　$b_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2}(b_n - 2)$

$$b_n - 2 = (b_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって　$\boldsymbol{a_n = 2^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$

(2) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\} = 2n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって　$a_1 a_2 \cdots a_n = \boldsymbol{2^{2n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$

401* 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 1$ である．初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_{n+1} = 4a_n + 3$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成立している． (関西大 改)

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_{n+1} - 4a_n + 4a_{n-1} = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解答 (1) 与えられた漸化式から

$$S_{n+1} = 4a_n + 3, \quad S_n = 4a_{n-1} + 3 \quad (n = 2, 3 \cdots)$$

上の 2 式を $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ に代入すると

$$a_{n+1} = (4a_n + 3) - (4a_{n-1} + 3) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - 4a_n + 4a_{n-1} = 0$$

(2) $S_2 = a_1 + a_2 = 4a_1 + 3$，$a_1 = 1$ より $\quad a_2 = 6$

(1) の結果から

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_2}{2^2} - \frac{a_1}{2} = 1$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{a_k}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{2} = n - 1$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n = (2n-1) \cdot 2^{n-1}}$$

402 $a_1=1$，$a_2=2$，$(n+3)a_{n+2}-(2n+3)a_{n+1}+na_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で表された数列 $\{a_n\}$ がある．このとき，次を n を用いて表せ．　(芝浦工大 改)

(1) $a_{n+1}-a_n$

(2) a_n

解答　(1) 与えられた漸化式より　$(n+3)(a_{n+2}-a_{n+1})=n(a_{n+1}-a_n)$

$$(n+3)(n+2)(n+1)(a_{n+2}-a_{n+1})=(n+2)(n+1)n(a_{n+1}-a_n)$$

したがって　$(n+2)(n+1)n(a_{n+1}-a_n)=3\cdot2\cdot1(a_2-a_1)=6$

よって　$\boldsymbol{a_{n+1}-a_n=\dfrac{6}{n(n+1)(n+2)}}$

(2) (1) の結果から，$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=3\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$a_n-a_1=3\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n=\frac{5}{2}-\frac{3}{n(n+1)}}$$

別解　与えられた漸化式より

$$(n+3)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-na_n$$

したがって　$(n+2)a_{n+1}-na_n=3a_2-1\cdot a_1=5$

$$(n+1)(n+2)a_{n+1}-n(n+1)a_n=5(n+1)$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)(k+2)a_{k+1}-k(k+1)a_k\}=\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\{(k+2)-k\}$$

$$n(n+1)a_n-1\cdot2\cdot a_1=\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)(k+2)-k(k+1)\}$$

$$n(n+1)a_n-2=\frac{5}{2}\{n(n+1)-2\}$$

上式は $n=1$ のときも成立するから

$$n(n+1)a_n=\frac{5}{2}n(n+1)-3\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{a_n=\frac{5}{2}-\frac{3}{n(n+1)}}$$

403 平面上の円に n 本の弦を次の条件で引く．　(立命館大 改)

① どの 2 本の弦も円の内部 (円周上の点は含まない) で交わる．

② どの 3 本の弦も 1 点で交わることはない．

このとき，円の内部は n 本の弦によって A_n 個の部分に分割されるとする．

(1) $A_4 =$ ［　　］，$A_5 =$ ［　　］となる．

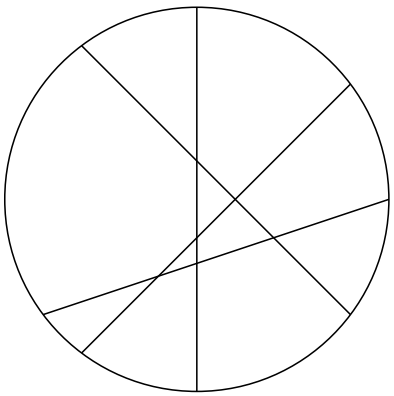
(2) A_n を n の式で表すと，$A_n =$ ［　　］となる．

(3) A_n 個の部分の中で多角形であるものは［　　］個ある．

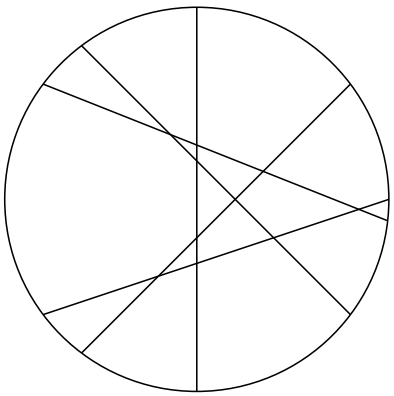
解答　(1) $A_1 = 2$，$A_2 = A_1 + 2$，$A_3 = A_2 + 3$，$A_4 = A_3 + 4$，$A_5 = A_4 + 5$ より

$$A_2 = 4,\quad A_3 = 7,\quad \boldsymbol{A_4 = 11},\quad \boldsymbol{A_5 = 16}$$

$n = 4$



$n = 5$



(2) $A_{n+1} - A_n = n + 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(A_{k+1} - A_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

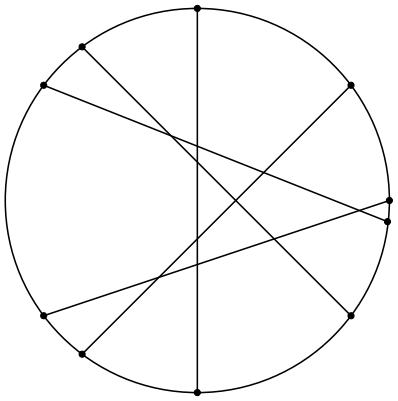
$$A_n - A_1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{A_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1}$$

(3) 多角形でないものが $2n$ 個存在するから，(2) の結果を利用して

$$A_n - 2n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$



404* 2 つの粒子が時刻 0 において △ABC の頂点 A に位置している．これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする．たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ．　(京大理系 2014 年 2)

解答 次の確率漸化式が成り立つ．

$$p(n+1)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)p(n)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{1-p(n)\}$$

すなわち　$p(n+1)=\dfrac{1}{4}p(n)+\dfrac{1}{4}$

したがって　$p(n+1)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left\{p(n)-\dfrac{1}{3}\right\}$

ゆえに　$p(n)-\dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\left\{p(0)-\dfrac{1}{3}\right\}$　よって　$\boldsymbol{p(n)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$

405 n を自然数とする．赤色，黄色，青色の 3 種類のタイルがあり，すべて同じ大きさの正方形である．赤色と黄色のタイルが隣り合わないように，左から右に横一列に n 枚並べるときの場合の数を a_n とする．このうち，n 枚目が赤色，黄色，青色である場合の数をそれぞれ b_n，c_n，d_n とする．　(大阪市立大)

(1) $a_1,\ a_2$ を求めよ．

(2) $b_{n+1},\ c_{n+1},\ d_{n+1}$ を $b_n,\ c_n,\ d_n$ を用いて表せ．

(3) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(4) a_n を求めよ．

解答　(1) $n=1$ のとき，赤色，黄色，青色のタイルの 3 通りであるから

$$\boldsymbol{a_1=3}$$

$n=2$ のとき，赤色，黄色，青色のタイルを 2 枚並べる方法は　3^2 (通り)
このうち，赤黄，黄赤と並ぶ 2 通りを除けばよいから

$$a_2=9-2=\mathbf{7}\ (\text{通り})$$

(2) 赤色と黄色のタイルが隣り合わないから

$$\boldsymbol{b_{n+1}=b_n+d_n,\quad c_{n+1}=c_n+d_n,\quad d_{n+1}=b_n+c_n+d_n}$$

(3) $a_n=d_{n+1}=b_n+c_n+d_n$ より

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=b_{n+2}+c_{n+2}+d_{n+2}\\&=(b_{n+1}+d_{n+1})+(c_{n+1}+d_{n+1})+d_{n+2}\\&=(b_{n+1}+c_{n+1}+d_{n+1})+d_{n+1}+d_{n+2}\\&=a_{n+1}+a_n+a_{n+1}\\&=\boldsymbol{2a_{n+1}+a_n}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から，特性方程式 $x^2-2x-1=0$ の解を

$$\alpha=1+\sqrt{2},\quad \beta=1-\sqrt{2}$$

とすると　　$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

これから　　$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\beta a_n&=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)=\alpha^{n-1}(7-3\beta)\\&=\alpha^{n-1}(4+3\sqrt{2})=\alpha^{n-1}(3+2\sqrt{2})\sqrt{2}\\&=\alpha^{n+1}\sqrt{2}\end{aligned}\tag{A}$$

同様に　　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha a_n&=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)=\beta^{n-1}(7-3\alpha)\\&=\beta^{n-1}(4-3\sqrt{2})=-\beta^{n-1}(3-2\sqrt{2})\sqrt{2}\\&=-\beta^{n+1}\sqrt{2}\end{aligned}\tag{B}$$

(A) − (B) より　　$(\alpha-\beta)a_n=\sqrt{2}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$

よって　　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}\}}$

7.35　数学的帰納法

7.35.1　Review

406 次の等式，不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

(1) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$　　ただし，n は自然数

(2) $n^2 < 2^n < n!$　　ただし，n は 5 以上の自然数

解答　(1) $(*)$ $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

［1］$n = 1$ のとき，(左辺) $= 1\cdot 1^2 = 1$，(右辺) $= (1+1)! - 1 = 1$

よって，$n = 1$ のとき $(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + k\cdot k! = (k+1)! - 1$$

上式の両辺に $(k+1)\cdot(k+1)!$ を加えると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + k\cdot k! + (k+1)\cdot(k+1)! \\
(\text{右辺}) &= (k+1)! - 1 + (k+1)\cdot(k+1)! \\
&= \{1 + (k+1)\}(k+1)! - 1 \\
&= (k+2)! - 1
\end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］, ［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

(2) $(*)$ $n^2 < 2^n < n!$

［1］$n = 4$ のとき

$$5^2 = 25,\ 2^5 = 32,\ 5! = 120$$

よって，$n = 5$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$k \geqq 5$ として，$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$k^2 < 2^k < k!$$

$n = k+1$ のときの辺々の差をとると

$$\begin{aligned}
2^{k+1} - (k+1)^2 &= 2\cdot 2^k - k^2 - 2k - 1 \\
&= 2(2^k - k^2) + k(k-3) + (k-1) > 0, \\
(k+1)! - 2^{k+1} &= \{(k-1) + 2\}k! - 2\cdot 2^k \\
&= (k-1)\cdot k! + 2(k! - 2^k) > 0
\end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］, ［2］より，5 以上の自然数 n について，$(*)$ は成立する．

407 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ．

(2) 一般項 a_n を推定し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

解答 (1) 与えられた漸化式に順次 $n = 1, 2, 3, 4$ を代入すると

$$a_2 = \frac{3a_1 + 1}{a_1 + 3} = \frac{3\cdot\frac{1}{3} + 1}{\frac{1}{3} + 3} = \frac{3 + 3}{1 + 9} = \boldsymbol{\frac{3}{5}},$$

$$a_3 = \frac{3a_2 + 1}{a_2 + 3} = \frac{3\cdot\frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 3} = \frac{9 + 5}{3 + 15} = \boldsymbol{\frac{7}{9}},$$

$$a_4 = \frac{3a_3 + 1}{a_3 + 3} = \frac{3\cdot\frac{7}{9} + 1}{\frac{7}{9} + 3} = \frac{21 + 9}{7 + 27} = \boldsymbol{\frac{15}{17}},$$

$$a_5 = \frac{3a_4 + 1}{a_4 + 3} = \frac{3\cdot\frac{15}{17} + 1}{\frac{15}{17} + 3} = \frac{45 + 17}{15 + 51} = \boldsymbol{\frac{31}{33}}$$

(2) (1) の結果から

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1} \quad \cdots (*)$$

と推測できる．

［1］$n = 1$ のとき，$\dfrac{2^1 - 1}{2^1 + 1} = \dfrac{1}{3}$ より，$(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立する，すなわち

$$a_k = \frac{2^k - 1}{2^k + 1}$$

であると仮定すると，与えられた漸化式により

$$a_{k+1} = \frac{3a_k + 1}{a_k + 1} = \frac{3\cdot\dfrac{2^k - 1}{2^k + 1} + 1}{\dfrac{2^k - 1}{2^k + 1} + 3} = \frac{3(2^k - 1) + (2^k + 1)}{2^k - 1 + 3(2^k + 1)}$$

$$= \frac{4\cdot 2^k - 2}{4\cdot 2^k + 2} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1} + 1}$$

よって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

補足 与えらた漸化式の特性方程式は

$$x = \frac{3x+1}{x+3} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 1 = 0$$

これを解いて　$x = \pm 1$

$$a_{n+1} + 1 = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} + 1 = \frac{4(a_n + 1)}{a_n + 3},$$
$$a_{n+1} - 1 = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} - 1 = \frac{2(a_n - 1)}{a_n + 3}$$

与えられた漸化式から，$a_n > 0$ に注意して

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$$

数列 $\left\{ \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1} \right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = \dfrac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = -\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\frac{a_n - 1}{a_n + 1} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = -\frac{1}{2^n} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$$

7.35.2 Exercise

408 すべての自然数 n に対して，不等式

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}>\sqrt{2n+1}-1$$

が成り立つことを示せ．　(学習院大)

解答　$(*)$　$\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}>\sqrt{2n+1}-1$

［1］$n=1$ のとき

$$1=2-1>\sqrt{3}-1 \quad \text{ゆえに} \quad (\text{左辺})>(\text{右辺})$$

よって，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k-1}}>\sqrt{2k+1}-1 \quad \cdots①$$

ここで　$\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}=\dfrac{2}{\sqrt{2k+3}+\sqrt{2k+1}}$

$$<\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+1}}=\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

したがって　$\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}>\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1} \quad \cdots②$

① と ② の辺々を加えると

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}>\sqrt{2k+3}-1$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

別解 $k < x \leqq k+1$ のとき　$\dfrac{1}{\sqrt{2k-1}} > \dfrac{1}{2x-1}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2k-1}} &= \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{2k-1}} \\ &> \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} = \left[\ \sqrt{2x-1}\ \right]_k^{k+1} \\ &= \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}} > \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) = \sqrt{2n+1} - 1$$

409* すべての自然数 n に対して，$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ が 5 の倍数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．(徳島大)

解答 「$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ が 5 の倍数である」を (A) とする．

［1］$n=1$ のとき

$$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}=2^0+3^1+7^0=5$$

よって，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$2^{k-1}+3^{3k-2}+7^{k-1}\text{は}5\text{の倍数である}$$

このとき

$$\begin{aligned}2^k+3^{3k+1}+7^k&=2\cdot 2^{k-1}+27\cdot 3^{3k-2}+7\cdot 7^{k-1}\\&=2(2^{k-1}+3^{3k-2}+7^{k-1})+5(5\cdot 3^{3k-2}+7^{k-1})\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) は成立する．

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) は成立する．

補足 $3^3\equiv 2,\ 7\equiv 2 \pmod 5$ より

$$\begin{aligned}2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}&\equiv 2^{n-1}+3\cdot 3^{3(n-1)}+7^{n-1}\\&\equiv 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-1}+2^{n-1}\\&\equiv 5\cdot 2^{n-1}\equiv 0 \pmod 5\end{aligned}$$

410 $a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{8}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．すべての自然数 n に対して $0<a_n-4<\dfrac{1}{2^{n-1}}$ が成り立つことを示せ．

(大阪府立大 改)

解答 $a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{8}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より　$a_n>0$

$$a_{n+1}-4=\frac{1}{2a_n}(a_n-4)^2 \qquad (*)$$

$a_{k+1}-4=0$ となる k が存在すると，$1\leqq n\leqq k+1$ に対して，$a_n=4$ となり，$a_1=5$ に反するので，すべての自然数 n について

$$a_n\neq 4$$

$a_n>0$ であるから，上式および $(*)$ より　$a_n>4$　$\cdots$①

また，$(*)$ から

$$\begin{aligned}a_{n+1}-4&=\frac{1}{2a_n}(a_n-4)^2=\frac{1}{2a_n}(a_n-4)(a_n-4)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{a_n}\right)(a_n-4)\end{aligned}$$

① より，$0<\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{a_n}<\dfrac{1}{2}$ であるから

$$a_{n+1}-4<\frac{1}{2}(a_n-4)$$

したがって　$a_n-4<(a_1-4)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$　$\cdots$②

①，② より，すべての自然数 n について　$0<a_n-4<\dfrac{1}{2^{n-1}}$

補足 特性方程式 $x=\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{x}$ の解は　$x=\pm 4$

$$a_{n+1}+4=\frac{1}{2a_n}(a_n+4)^2,\quad a_{n+1}-4=\frac{1}{2a_n}(a_n-4)^2$$

漸化式より $a_n>0$ に注意して　　$\dfrac{a_{n+1}-4}{a_{n+1}+4}=\left(\dfrac{a_n-4}{a_n+4}\right)^2$

ここで，$b_n=\log_3\dfrac{a_n-4}{a_n+4}$ とおくと

$$b_1=-2,\quad b_{n+1}=2b_n\quad \text{ゆえに}\quad b_n=-2\cdot 2^{n-1}=-2^n$$

したがって　$\log_3\dfrac{a_n-4}{a_n+4}=-2^n$　ゆえに　$\dfrac{a_n-4}{a_n+4}=3^{-2^n}$

よって　　$a_n=\dfrac{4(1+3^{-2^n})}{1-3^{-2^n}}$

411* 2 次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の 2 つの解を α，β とする．

(1) $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^3 + \beta^3$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して，$\alpha^n + \beta^n$ は偶数になることを示せ．

解答 (1) 解と係数の関係により　$\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 1$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2\cdot 1 = \mathbf{14}$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 4^3 - 3\cdot 1\cdot 4 = \mathbf{52}$$

(2) $\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n)$ より

$$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = 4(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^n + \beta^n)$$

上式および (1) の結果から，すべての自然数 n に対して，$\alpha^n + \beta^n$ は偶数である．

7.35.3 Try

412 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\dfrac{3}{4}$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{4a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定める．(岐阜大 改)

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$ を求めよ．また，一般項 a_n を求めよ．

(2) n を正の整数とする．すべての実数 x に対して，不等式 $a_nx^2+x+1 \geqq a_{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) n を正の実数とするとき，すべての実数 x に対して，不等式

$$x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+x^2+x+1 \geqq a_n$$

が成り立つことを示せ．

解答 (1) 漸化式に順次 $n=1,2,3,4,5$ を代入すると

$$a_2=1-\frac{1}{4a_1}=1-\frac{1}{3}=\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}},\qquad a_3=1-\frac{1}{4a_2}=1-\frac{3}{8}=\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{8}},$$
$$a_4=1-\frac{1}{4a_3}=1-\frac{2}{5}=\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{5}},\qquad a_5=1-\frac{1}{4a_4}=1-\frac{5}{12}=\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{12}},$$
$$a_6=1-\frac{1}{4a_5}=1-\frac{3}{7}=\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{7}}$$

初項から順に

$$\frac{3}{4},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{10},\ \frac{7}{12},\ \frac{8}{14},\ \cdots$$

となるから，一般項は

$$(*)\quad a_n=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

と推測される．

［1］$n=1$ のとき，$(*)$ は $a_1=\dfrac{3}{4}$ となり，成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$a_k=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

これを与えられた漸化式に代入すると

$$a_{k+1}=1-\frac{1}{4\cdot\frac{k+2}{2(k+1)}}=1-\frac{k+1}{2(k+2)}=\frac{k+3}{2(k+2)}$$

$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

よって　　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{n+2}{2(n+1)}}$

別解 特性方程式 $x = 1 - \dfrac{1}{4x}$，すなわち，$4x^2 - 4x + 1 = 0$ を解くと　$x = \dfrac{1}{2}$

与えられた漸化式から　$2a_{n+1} - 1 = 1 - \dfrac{1}{2a_n} = \dfrac{2a_n - 1}{2a_n}$

$a_{m+1} = \dfrac{1}{2}$ を満たす項が存在すると仮定するすると　$a_m = \dfrac{1}{2}$

すなわち，すべての自然数 n について，$a_n = \dfrac{1}{2}$ となる．

これは，$a_1 = \dfrac{3}{4}$ に反するので，$a_n \neq \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{2a_{n+1} - 1} = \frac{2a_n}{2a_n - 1} = \frac{1}{2a_n - 1} + 1$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{2a_n - 1}\right\}$ は初項 2，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{2a_n - 1} = 2 + (n - 1) = n + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2a_n - 1 = \frac{1}{n + 1}$$

したがって　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{n + 2}{2(n + 1)}}$

よって　$\boldsymbol{a_2 = \dfrac{2}{3},\ a_3 = \dfrac{5}{8},\ a_4 = \dfrac{3}{5},\ a_5 = \dfrac{7}{12},\ a_6 = \dfrac{4}{7}}$

補足 分数漸化式の特性方程式が重解 α をもつとき，$\left\{\dfrac{1}{a_n - \alpha}\right\}$ は等差数列．

(2) $a_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{4a_n}$ より，$1 - a_{n+1} = \dfrac{1}{4a_n}$ であるから

$$\begin{aligned} a_n x^2 + x + (1 - a_{n+1}) &= a_n x^2 + x + \frac{1}{4a_n} \\ &= a_n \left(x + \frac{1}{2a_n}\right)^2 \end{aligned}$$

(1) の結果より，$a_n > 0$ であるから

$$a_n x^2 + x + (1 - a_{n+1}) \geqq 0 \quad \text{よって} \quad a_n x^2 + x + 1 \geqq a_{n+1}$$

(3) (A) $x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+x^2+x+1 \geqq a_n$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{3}{4}$ より

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \geqq a_1$$

よって，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$x^{2k}+x^{2k-1}+x^{2k-2}+\cdots+x^2+x+1 \geqq a_k$$

上式および (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}&x^{2k+2}+x^{2k+1}+x^{2k}+\cdots+x^2+x+1\\ =&x^2(x^{2k}+x^{2k-1}+x^{2k-2}+\cdots+x^2+x+1)+x+1\\ =&a_kx^2+x+1 \geqq a_{k+1}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］, ［2］より，すべての自然数 n について，(A) が成立する．

413* n を自然数，p を素数とする．次の問に答えよ． (大阪教育大)

(1) $r = 1, 2, \cdots, p-1$ に対し，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数であることを証明せよ．ただし，${}_p\mathrm{C}_r$ は異なる p 個のものから r 個とる組合せの総数とする．

(2) $(n+1)^p - (n^p+1)$ は p の倍数であることを証明せよ．

(3) $n^p - n$ は p の倍数であることを証明せよ．

(4) n^{p-1} を p で割った余りを求めよ．

解答 (1) $$ {}_p\mathrm{C}_r = \frac{p!}{r!(p-r)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{r!(p-r)!} $$

p は素数であるから，p は $2, 3, 4, \cdots, p-1$ で割り切れない．

したがって，p は $r!$ および $(p-r)!$ と互いに素である．

よって，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数である．

(2) 整数 $a,\ b$ に対して

$$ (a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_k a^{p-k} b^k $$

(1) の結論から，$k = 1, 2, \cdots, p-1$ について ${}_p\mathrm{C}_k \equiv 0 \pmod{p}$

したがって

$$ (a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p} \qquad (*) $$

$(*)$ に $a = n,\ b = 1$ を代入すると

$$ (n+1)^p \equiv n^p + 1 \quad \text{すなわち} \quad (n+1)^p - (n^p+1) \equiv 0 \pmod{p} $$

(3) $(*)$ から，整数 $a,\ b,\ c$ に対して，$a+b+c = (a+b)+c$ より

$$ (a+b+c)^p \equiv (a+b)^p + c^p \equiv a^p + b^p + c^p \pmod{p} $$

一般に，整数 $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$ に対して

$$ (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^p \equiv {a_1}^p + {a_2}^p + \cdots + {a_n}^p \pmod{p} $$

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ を代入すると

$$ n^p \equiv n \quad \text{よって} \quad n^p - n \equiv 0 \pmod{p} $$

(4) (3) の結論から

$$n(n^{p-1}-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

$n \not\equiv 0 \pmod{p}$ のとき

$$n^{p-1}-1 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$n \equiv 0 \pmod{p}$ のとき

$$n^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

よって $\quad \boldsymbol{n^{p-1} \equiv \begin{cases} 1 & (n \not\equiv 0) \\ 0 & (n \equiv 0) \end{cases} \pmod{p}}$

414* (1) n を自然数とする．それぞれの n に対してある自然数 a と b を用いて，

$$(2+\sqrt{3})^n = a+b\sqrt{3}, \quad (2-\sqrt{3})^n = a-b\sqrt{3}$$

と表せることを示せ．

(2) (1) の a と b について，$a^2-3b^2=1$ が成り立つことを示せ．

(3) n を自然数とする．それぞれの n に対してある自然数 m を用いて，

$$(2+\sqrt{3})^n = \sqrt{m}-\sqrt{m-1}, \quad (2-\sqrt{3})^n = \sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

と表せることを示せ． (明治学院大)

解答 (1) $(2+\sqrt{3})^n = a_n+b_n\sqrt{3}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より $(a_n,\ b_n$ は自然数)

$$\begin{aligned} a_1=2, \quad b_1&=1, \\ (2+\sqrt{3})^{n+1} &= (2+\sqrt{3})(a_n+b_n\sqrt{3}) \\ &= (2a_n+3b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって　　$a_{n+1}=2a_n+3b_n, \quad b_{n+1}=a_n+2b_n$

$(2-\sqrt{3})^n = x_n-y_n\sqrt{3}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とすると $(x_n,\ y_n$ は整数)

$$\begin{aligned} x_1=2, \quad y_1&=1, \\ (2-\sqrt{3})^{n+1} &= (2-\sqrt{3})(x_n-y_n\sqrt{3}) \\ &= (2x_n+3y_n)-(x_n+2y_n)\sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって　　$x_{n+1}=2x_n+3y_n, \quad y_{n+1}=x_n+2y_n$

以上の結果から，$x_n=a_n$，$y_n=b_n$ であるから，すべての自然数 n に対して

$$(2-\sqrt{3})^n = a_n-b_n\sqrt{3}$$

が成り立つ．よって

$$(2+\sqrt{3})^n = a_n+b_n\sqrt{3}, \quad (2-\sqrt{3})^n = a_n-b_n\sqrt{3} \qquad (*)$$

(2) $(*)$ の 2 式の辺々を掛けると

$$(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=(a_n+b_n\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3})$$

よって

$$a_n{}^2-3b_n{}^2=1 \qquad (**)$$

(3) $(*)$, $(**)$ より

$$\begin{aligned}(2\pm\sqrt{3})^n&=a_n\pm b_n\sqrt{3}\\&=\sqrt{a_n{}^2}\pm\sqrt{3b_n{}^2}\\&=\sqrt{a_n{}^2}\pm\sqrt{a_n{}^2-1}\quad\text{(複号同順)}\end{aligned}$$

$a_n{}^2=m$ とおくと

$$(2\pm\sqrt{3})^n=\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1}\quad\text{(複号同順)}$$

と表せる.

415 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式によって定める．　(東北大文系 2019 年 3)

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2}a_n = 2{a_{n+1}}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) すべての正の整数 n について，a_n は正であることを示せ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

解答　(1)　　$(*)$　　$a_{n+2}a_n = 2{a_{n+1}}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

自然数 n について，$a_n > 0$，$a_{n+1} > 0$ と仮定すると，$(*)$ より

$$a_{n+2} = \frac{2{a_{n+1}}^2}{a_n} > 0$$

$a_1 = 1 > 0$，$a_2 = 3 > 0$ より，すべての自然数 n について，a_n は正である．

(2) $(*)$ より　　$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2 \cdot \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_2}{a_1}$，公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{n-1} \cdot \frac{a_2}{a_1} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 3^{n-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = 3^{n-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}}$

416* 以下の問いに答えよ。 (九大文系 2021 年 4)

(1) n を自然数とするとき，

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$$

を求めよ。

(2) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

解答 (1) $x_n = \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$ とおくと，$x_n = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)2^{k-2}$ より

$$\begin{aligned} 2x_n &= \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)2^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k-1)2^{k-1} + n2^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + n2^n \\ &= x_n - \frac{2^n - 1}{2-1} + n2^n \end{aligned}$$

よって $\quad x_n = \boldsymbol{(n-1)2^n + 1}$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}a_1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 2$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}(n+2-k)a_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k \\ &= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

整理すると　　$2a_{n+2} - 3a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とすると　$S_1 = a_1 = 2,\ S_2 = a_1 + a_2 = 4$

$$\begin{aligned} 2(S_{n+2} - S_{n+1}) - 3(S_{n+1} - S_n) &= S_n \\ S_{n+2} - 2S_{n+1} &= \frac{1}{2}(S_{n+1} - 2S_n) \end{aligned}$$

$S_2 - 2S_1 = 4 - 2\cdot 2 = 0$ より

$$S_{n+1} - 2S_n = 0 \quad \text{ゆえに} \quad S_n = S_1 2^{n-1} = 2^n$$

したがって

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n = 1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2) \end{cases} \qquad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = \begin{cases} \mathbf{2} & (\boldsymbol{n = 1}) \\ \mathbf{2^{n-1}} & (\boldsymbol{n \geqq 2}) \end{cases}}$$

補足 $S_1=2,\ S_2=4,\ 2S_{n+2}-5S_{n+1}+2S_n=0$

漸化式の特性方程式は

$$2x^2-5x+2=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=2,\ \frac{1}{2}$$

したがって，$\{S_n\}$ は定数 $p,\ q$ を用いて

$$S_n=p2^n+q\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

とおける．このとき

$$2p+\frac{q}{2}=2, \quad 4p+\frac{q}{4}=4 \quad \text{これを解いて} \quad p=1,\ q=0$$

したがって　$S_n=2^n$　(以下同様)

別解 $a_1=2, \quad a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k \quad (n=1,2,3,\cdots)$

$$a_2=1+\frac{1}{2}a_1=1+\frac{1}{2}\cdot 2=2$$
$$a_3=1+\frac{1}{2}(2a_1+a_2)=1+\frac{1}{2}(2\cdot 2+2)=4$$
$$a_4=1+\frac{1}{2}(3a_1+2a_2+a_3)=1+\frac{1}{2}(3\cdot 2+2\cdot 2+4)=8$$

これから，$\{a_n\}$ を次のように推測する．

$$n\geqq 2 \text{ のとき} \quad a_n=2^{n-1} \quad \cdots(*)$$

［1］$n=2$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$2\leqq n\leqq j$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$a_{j+1}=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j}(j+1-k)a_k$$
$$=1+\frac{1}{2}(j+1)\sum_{k=1}^{j}a_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j}ka_k$$

$a_1=2$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{j}a_k=2^j,\ \sum_{k=1}^{j}ka_k=(j-1)2^j+2$ であるから

$$a_{j+1}=1+\frac{1}{2}(j+1)2^j-\frac{1}{2}\{(j-1)2^j+2\}=2^j$$

よって，$2\leqq n\leqq j+1$ のときも，$(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，$(*)$ が成立する．よって，$\boldsymbol{a_1=2,\ a_n=2^{n-1}\ (n\geqq 2)}$

7.36　確率分布

7.36.1　Review

417 4 個のさいころを同時に投げて，3 の倍数の目が出る個数を X とするとき

(1) X の確率分布を求めよ．

(2) $P(1 \leqq X \leqq 3)$ を求めよ．

解答　(1) $P(X=k) = {}_4\mathrm{C}_k \left(\dfrac{1}{3}\right)^k \left(\dfrac{2}{3}\right)^{4-k}$ より $(X = 0, 1, 2, 3, 4)$

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81},$$
$$P(X=1) = {}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81},$$
$$P(X=2) = {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81},$$
$$P(X=3) = {}_4\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81},$$
$$P(X=4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

よって，X の確率分布表は

X	0	1	2	3	4	計
$P(X)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

(2) (1) の結果から

$$P(1 \leqq X \leqq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$
$$= \frac{32}{81} + \frac{24}{81} + \frac{8}{81} = \boldsymbol{\frac{64}{81}}$$

418 0 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードから同時に 2 枚のカードを引き，その差の絶対値を X とする．このとき

(1) 平均 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 $Y=-2X+3$ について，$E(X)$，$V(Y)$，$\sigma(Y)$ を求めよ．

解答 (1) X の確率分布表は

X	1	2	3	4	計
$P(X)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

よって

$$E(X)=1\cdot\frac{4}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{2}{10}+4\cdot\frac{1}{10}=\mathbf{2},$$
$$V(X)=(1-2)^2\cdot\frac{4}{10}+(2-2)^2\cdot\frac{3}{10}+(3-2)^2\cdot\frac{2}{10}+(4-2)^2\cdot\frac{1}{10}=\mathbf{1},$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\mathbf{1}$$

別解

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{4}{10}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\frac{2}{10}+4^2\cdot\frac{1}{10}=5,$$
$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=5-2^2=\mathbf{1}$$

(2) (1) の結果から

$$E(Y)=E(-2x+3)=-2E(X)+3=-2\cdot2+3=\mathbf{-1},$$
$$V(Y)=V(-2X+3)=(-2)^2V(X)=4\cdot1=\mathbf{4},$$
$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{4}=\mathbf{2}$$

419 1 個のさいころを 90 回投げて，3 以上の目が出る回数を X とするとき，X の平均と標準偏差を求めよ．

解答 1 個のさいころを投げて 3 以上の目が出る確率は $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

よって，確率変数 X は二項分布 $B\left(90,\ \dfrac{2}{3}\right)$ に従うから

$$E(X)=90\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{60},$$
$$\sigma(X)=\sqrt{90\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)}=\mathbf{2\sqrt{5}}$$

7.36.2 Exercise

420 確率変数 X のとり得る値が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ であるとする．$i = 1, 2, 3, \cdots, n$ に対し確率 $P(X = x_i) = p_i$，$E(X) = m$ とおくと，X の分散は

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i$$

で与えられる．このことを用いて

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

が成り立つことを示せ．

解答 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = m$ であるから

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - 2m \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - 2m \cdot m + m^2 \cdot 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - m^2 = E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

421* 赤球3個と白球5個が入っている袋Aから2個の球を取り出し，含まれる赤球の個数を X とする．また，赤球4個と白球2個が入っている袋Bから2個の球を取り出し，含まれる個数を Y とする．次の値を求めよ．

(1) E(X+3Y)

(2) $E(XY)$

(3) $V(2X+3Y)$

解答 $E(X)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_j\cdot{}_5\mathrm{C}_{2-j}}{{}_8\mathrm{C}_2}$ $(j=0,1,2)$，$E(Y)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_k\cdot{}_2\mathrm{C}_{2-k}}{{}_6\mathrm{C}_2}$ $(k=0,1,2)$

X，Y の確率分布表は

X	0	1	2	計
P	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	1

したがって

$$E(X)=1\cdot\frac{15}{28}+2\cdot\frac{3}{28}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$$
$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{15}{28}+2^2\cdot\frac{3}{28}=\frac{27}{28}$$
$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{27}{28}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{45}{112}$$
$$E(Y)=1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{6}{15}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$$
$$E(Y^2)=1\cdot\frac{8}{15}+2^2\cdot\frac{6}{15}=\frac{32}{15}$$
$$E(V)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{32}{15}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{45}$$

(1) $E(X+3Y)=E(X)+3E(Y)=\dfrac{3}{4}+3\cdot\dfrac{4}{3}=\boldsymbol{\dfrac{19}{4}}$

(2) X と Y は独立であるから

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\mathbf{1}$$

(3) X と Y は独立であるから

$$V(2X+3Y)=V(2X)+V(3Y)=2^2V(X)+3^2V(Y)$$
$$=4\cdot\frac{45}{112}+9\cdot\frac{16}{45}=\boldsymbol{\frac{673}{140}}$$

422* 表が出る確率が $\dfrac{1}{4}$ である歪んだコインを 3 枚同時に投げ，表が出た枚数を X とする．このとき，$Y = aX + b$ を満たす確率変数 Y について，$E(Y) = 0$，$\sigma(Y) = 1$ となるように定数 a，b の値を定めよ．ただし，$a > 0$ とする．

解答 コインを 1 枚投げて，表の出る確率は $\dfrac{1}{4}$ である．

確率変数 X は，二項分布 $B\left(3,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従う．

$$E(X) = 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \qquad V(X) = 3\cdot\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

$Y = aX + b$ を満たす確率変数 Y について

$$E(Y) = 0, \quad V(Y) = \sigma(Y)^2 = 1^2 = 1$$

であるから

$$E(Y) = aE(X) + b = \frac{3}{4}a + b = 0,$$
$$V(Y) = a^2V(X) = \frac{9}{16}a^2 = 1$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{a = \dfrac{4}{3},\ b = -1}$

423 さいころを用いたゲームを行う．最初は 0 点であり，1 個のさいころを投げて 3 の倍数の目が出れば 5 点，それ以外の目であれば -1 点を得る．さいころを 100 回投げたときの総得点を X とするとき，X の平均と標準偏差を求めよ．ただし，得点は負の数になってもよい．

解答 1 個のさいころを投げて 3 の倍数の目が出る確率は $\dfrac{1}{3}$ である．

さいころを 100 回投げて 3 の倍数の目が出る回数を Y とすると，確率変数 Y は二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従う．

$$E(Y) = 100\cdot\frac{1}{3} = \frac{100}{3},$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{100\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

100 回のうち Y 回で 5 点を，$(100-Y)$ 回で -1 点を得るから，総得点 X は

$$X = 5Y + (-1)\cdot(100-Y) = 6Y - 100$$

したがって

$$\begin{aligned} E(X) &= E(6Y-100) = 6E(Y) - 100 \\ &= 6\cdot\frac{100}{3} - 100 = \mathbf{100}, \\ \sigma(X) &= \sigma(6Y-100) = |6|\sigma(Y) \\ &= 6\cdot\frac{10\sqrt{2}}{3} = \mathbf{20\sqrt{2}} \end{aligned}$$

7.36.3 Try

424 2 つの確率変数 X，Y の確率分布を同時に考えた表 (同時確率分布表) が以下のように与えられている．ただし，X，Y は互いに独立であり，$0 < a < 1$，$0 < b < 1$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大 2014 年 7)

X \ Y	2	4	計
1			a
2			
計	b		1

(1) 表を完成せよ．

(2) 確率変数 $W = X - Y$ の平均 $E(W)$ を求めよ．

(3) 確率変数 $Z = \dfrac{Y}{X}$ の確率分布表を作成し，Z の平均 $E(Z)$ を求めよ．

(4) $E(Z) = \dfrac{9}{4}$，$E(W) = -\dfrac{3}{2}$ となる場合に，Z の分散 $V(Z)$ を求めよ．

解答　(1) X，Y は，互いに独立であるから

X \ Y	2	4	計
1	ab	$a(1-b)$	a
2	$(1-a)b$	$(1-a)(1-b)$	$1-a$
計	b	$1-b$	1

(2) $W = X - Y$ より

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X) - E(Y) \\ &= \{1 \cdot a + 2(1-a)\} - \{2 \cdot b + 4(1-b)\} \\ &= \boldsymbol{-a + 2b - 2} \end{aligned}$$

(3) $Z = \dfrac{2}{2} = 1$，$Z = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2} = 2$，$Z = \dfrac{4}{1} = 4$ より

Z	1	2	4	計
$P(Z)$	$(1-a)b$	$(1-a)(1-b) + ab$	$a(1-b)$	1

$$\begin{aligned} E(Z) &= 1 \cdot (1-a)b + 2\{(1-a)(1-b) + ab\} + 4 \cdot a(1-b) \\ &= \boldsymbol{2 + 2a - b - ab} \end{aligned}$$

(4) $E(Z)=\dfrac{9}{4}$，$E(W)=-\dfrac{3}{2}$ を (2)，(3) の結果に代入すると

$$2+2a-b-ab=\frac{9}{4},\quad -a+2b-2=-\frac{3}{2}$$

ゆえに　　$a(2-b)-b=\dfrac{1}{4}$，$a=2b-\dfrac{1}{2}$

$0<a<1$，$0<b<1$ に注意してこれを解くと　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$

このとき，(3) の表は

Z	1	2	4	計
$P(Z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

よって　　$V(Z)=E(Z^2)-\{E(Z)\}^2$

$$=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{2}+4^2\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\boldsymbol{\frac{19}{16}}$$

425* 1，2，3，4，5，6 の数字が 1 つずつ記入された 6 枚のカードを袋の中に入れる．この袋の中から 2 枚のカードを同時に抜き出し，それらのカードの数の大きい方を X，小さい方を Y とする．　(鹿児島大 2021 年 5)

(1) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X と Y は互いに独立であるか，独立でないか，答えよ．

(3) 確率変数 XY の期待値 $E(XY)$ を求めよ．

解答　(1) $P(X=k)=\dfrac{k-1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{k-1}{15}$ $(1 \leqq k \leqq 6)$ より，求める期待値は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{6} kP(X=k)=\frac{1}{15}\sum_{k=1}^{6} k(k-1)$$
$$=\frac{1}{45}\sum_{k=1}^{6}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}=\frac{5\cdot 6\cdot 7}{45}=\boldsymbol{\frac{14}{3}}$$

(2) $P(Y=j)=\dfrac{6-j}{15}$，$P(X=k,\ Y=j)=\begin{cases} \frac{1}{15} & (k>j) \\ 0 & (k \leqq j) \end{cases}$　$(1 \leqq j,k \leqq 6)$

$1<k \leqq j<6$ とすると

$$P(X=k)P(Y=j)>0, \quad P(X=k,\ Y=j)=0$$

ゆえに　$P(X=k)P(Y=j) \neq P(X=k,\ Y=j)$

よって　確率変数 X と Y は互いに**独立ではない．**

(3) 確率変数 XY の期待値は

$$E(XY)=\sum_{1 \leqq j,k \leqq 6} P(X=k,Y=j)jk=\sum_{1 \leqq j<k \leqq 6}\frac{1}{15}jk$$
$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{2}\{(1+2+\cdots+6)^2-(1^2+2^2+\cdots+6^2)\}$$
$$=\frac{1}{30}(21^2-91)=\boldsymbol{\frac{35}{3}}$$

426 1 つの袋の中に 1, 2, 3, $\cdots$, n までの番号が書かれたカードが，それぞれ $2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^n$ 枚入っている．この袋から 1 枚のカードを取り出し，その番号を X とするとき，次の問に答えよ． (新潟大)

(1) 番号 k について，$X = k$ である確率を求めよ．

(2) X の平均 $E(X)$ を求めよ．

(3) X の分散 $V(X)$ を求めよ．

解答 $x \neq 1$ とし，次式を定める．

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}, \quad U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = xS_n(x) = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$ の両辺を微分すると

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{\{(n+1)x^n - 1\}(x-1) - (x^{n+1} - x)\cdot 1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = xT_n(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$ の両辺を微分すると

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} = \{n(n+2)x^{n+1} - (n+1)^2 x^n + 1\}(x-1)^{-2}$$
$$+ \{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x\}\cdot(-2)(x-1)^{-3}$$
$$= \frac{n^2 x^{n+2} + (-2n^2 - 2n + 1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^3}$$

(1) $S_n(2) = 2^n - 1$ より

$$P(X = k) = \frac{2^k}{2S_n(2)} = \frac{2^k}{2(2^n - 1)} = \boldsymbol{\frac{2^{k-1}}{2^n - 1}}$$

(2) $T_n(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} = n\cdot 2^{n+1} - (n+1)\cdot 2^n + 1 = (n-1)\cdot 2^n + 1$ より

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\cdot E(X = k) = \frac{1}{2^n - 1}\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$$
$$= \frac{T_n(2)}{2^n - 1} = \boldsymbol{\frac{(n-1)\cdot 2^n + 1}{2^n - 1}}$$

(3)

$$\begin{aligned}
U_n(2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot 2^k \\
&= n^2 \cdot 2^{n+2} + (-2n^2 - 2n + 1) \cdot 2^{n+1} + (n+1)^2 \cdot 2^n - 2 - 1 \\
&= \{4n^2 + 2(-2n^2 - 2n + 1) + (n+1)^2\} \cdot 2^n - 3 \\
&= (n^2 - 2n + 3) \cdot 2^n - 3
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot P(X = k) - E(X)^2 \\
&= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot 2^{k-1} - E(X)^2 \\
&= \frac{1}{2^n - 1} U_n(2) - E(X)^2 \\
&= \frac{(n^2 - 2n + 3) \cdot 2^n - 3}{2^n - 1} - \left\{ \frac{(n-1) \cdot 2^n + 1}{2^n - 1} \right\}^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{2^{2n+1} - (n^2 + 4) \cdot 2^n + 2}{(2^n - 1)^2}}
\end{aligned}$$

427* 1 つのサイコロを n 回振る．k 回目 $(k \leqq n)$ に出た目の数を 3 で割った余りを X_n とし，確率変数 Y_n を $Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$ で定める． (横浜市立大)

(1) $Y_5 = 2^3$ となる確率を求めよ．

(2) $0 \leqq l \leqq n$ である整数 l に対して $Y_n = 2^l$ となる確率を求めよ．

(3) Y_n の平均を求めよ．

解答 (1) 確率変数 X_k のとり得る値は $0,\ 1,\ 2$ のいずれかで，確率はいずれも $\dfrac{1}{3}$ である．$Y_5 = 2^3$ となるのは，5 回の試行のうち，$X_k = 2$ が 3 回，$X_k = 1$ が 2 回起こるときである．よって，求める確率は

$$P(Y_5 = 2^3) = {}_5\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 10 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \boldsymbol{\frac{10}{243}}$$

(2) $Y_n = 2^l$ $(0 \leqq l \leqq n)$ となるのは，n 回の試行のうち，$X_k = 2$ が l 回，$X_k = 1$ が $n - l$ 回起こるときである．よって，求める確率は

$$P(Y_n = 2^l) = {}_n\mathrm{C}_l \left(\frac{1}{3}\right)^l \left(\frac{1}{3}\right)^{n-l} = \boldsymbol{\frac{n!}{l!(n-l)!3^n}}$$

(3) 確率変数 Y_n のとり得る値は $0,\ 1,\ 2,\ 2^2, \cdots,\ 2^n$ のいずれかであるから

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= 0 \cdot P(Y_n = 0) + \sum_{k=0}^{n} 2^k P(Y_n = 2^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^n = \boldsymbol{1} \end{aligned}$$

428* 1 回の試行ではサイコロを n 回振る．2 回目の試行では 1 回目の試行で 1 以外の目が出た回数だけサイコロを振る．1 回目および 2 回目の試行で 1 の目が出た回数の合計を表す確率変数を X とする．次の問に答えよ．　(横浜国立大)

(1) 確率 $P(X=n)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X=k)$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$ を求めよ．

(3) 平均 $E(X)$ を求めよ．

解答　(1) 1 回目の試行で 1 の目が j 回 $(j=0,1,2,\cdots,n)$ 出て，2 回目の試行 $n-j$ 回すべてで 1 の目が出るとき，$X=n$ となるから，その確率は

$$\begin{aligned} E(X=n) &= \sum_{j=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_j \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-j} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \sum_{j=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_j 1^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(1+\frac{5}{6}\right)^n = \boldsymbol{\left(\frac{11}{36}\right)^n} \end{aligned}$$

(2) 1 回目の試行で 1 の目が j 回 $(j=0,1,2,\cdots,k)$ 出て，2 回目の試行 $n-j$ 回うち $k-j$ 回 1 の目が出るとき，$X=n$ となるから，その確率は

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{j=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_j \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j} {}_{n-j}\mathrm{C}_{j-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-j} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{(n-j)!}{(j-k)!(n-k)!} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-j-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2k} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(j-k)!} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-j} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2k} \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j 1^j \left(\frac{5}{6}\right)^{k-j} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2k} \left(1+\frac{5}{6}\right)^k \\ &= \boldsymbol{\frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{11}{36}\right)^k \left(\frac{25}{36}\right)^{n-k}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{11}{36}\right)^{k}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-k} \\
&= \frac{11}{36}n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{11}{36}\right)^{k-1}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-k} \\
&= \frac{11}{36}n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{11}{36}\right)^{k}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-k-1} \\
&= \frac{11}{36}n\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{11}{36}\right)^{k}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1-k} \\
&= \frac{11}{36}n\left(\frac{11}{36}+\frac{25}{36}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\frac{11}{36}n}
\end{aligned}$$

補足 **二項分布**：1 回の試行で事象 A の起こる確率が p で，起こらない確率が q のとき，n 回の試行が独立ならば，$X=r$ となる確率，すなわち，この反復試行で事象 A がちょうど r 回起こる確率は，

$$P(X=r) = {}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}q^{n-r} \qquad (p+q=1)$$

したがって，X の確率分布は，次の表のようになる．

X	0	1	$\cdots$	r	$\cdots$	n	計
P	${}_{n}\mathrm{C}_{0}q^{n}$	${}_{n}\mathrm{C}_{1}pq^{n-1}$	$\cdots$	${}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}q^{n-r}$	$\cdots$	${}_{n}\mathrm{C}_{n}p^{n}$	1

このような確率分布を**二項分布**といい，$\boldsymbol{B(n,\ p)}$ と表す．

二項分布の平均と標準偏差：X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$p+q=1$ とすると

$$E(X)=np, \quad \sigma(X)=\sqrt{npq}$$

このことに気づけば，(3) は二項分布に従うとして，公式を利用してもよい．

7.37　統計的な推測

7.37.1　Review

429 確率変数 X が正規分布 $N(5,\ 3^2)$ に従うとき，正規分布表を用いて次の確率を求めよ．

(1) $P(X \geqq 8)$

(2) $P(5 \leqq X \leqq 11)$

(3) $P(-1 \leqq X \leqq 8)$

解答 確率変数 X が正規分布 $N(5,\ 3^2)$ に従うとき

$$Z = \frac{X-5}{3}$$

とおくと，Z は積分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

(1)

$$\begin{aligned} P(X \geqq 8) &= P(Z \geqq 1) = P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = \mathbf{0.1587} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(5 \leqq X \leqq 11) &= P(0 \leqq Z \leqq 2) \\ &= \mathbf{0.4772} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(-1 \leqq X \leqq 8) &= P(-2 \leqq Z \leqq 1) \\ &= P(-2 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 1) \\ &= P(0 \leqq Z \leqq 2) + P(0 \leqq Z \leqq 1) \\ &= 0.4772 + 0.3413 = \mathbf{0.8185} \end{aligned}$$

430 全国の高校生が受験したあるテストの得点の分布が，平均 65 点，標準偏差 10 点の正規分布と見なせるとき，得点が 50 点以上 60 点以下の高校生は何%いるか．正規分布表を用い，四捨五入して整数で答えよ．

解答 平均 65，標準偏差 10 の正規分布に従う確率変数を X とすると，求める割合は $P(50 \leqq X \leqq 60)$ である．

$$Z = \frac{X - 65}{10}$$

とすると，Z は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned} P(50 \leqq X \leqq 60) &= P(-1.5 \leqq Z \leqq -0.5) = P(0.5 \leqq Z \leqq 1.5) \\ &= P(0 \leqq Z \leqq 1.5) - P(0 \leqq Z \leqq 0.5) \\ &= 0.4332 - 0.1915 = \mathbf{0.2417} \end{aligned}$$

よって　**およそ 24%**

431 確率変数 X が二項分布 $B\left(125,\ \dfrac{4}{5}\right)$ に従うとき，$95 \leqq X$ である確率を求めよ．ただし，$\sqrt{5} = 2.24$ とし，正規分布表を用いてよい．

解答

$$E(X) = 125 \cdot \frac{4}{5} = 100, \quad \sigma(X) = \sqrt{125 \cdot \frac{4}{5}\left(1 - \frac{4}{5}\right)} = 2\sqrt{5}$$

試行回数 125 は十分に大きいから

$$Z = \frac{X - 100}{2\sqrt{5}}$$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned} P(95 \leqq X) &= P\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \leqq Z\right) = P\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \leqq Z \leqq 0\right) + P(0 \leqq Z) \\ &= P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + P(0 \leqq Z) \\ &= P(0 \leqq Z \leqq 1.12) + P(0 \leqq Z) \\ &= 0.3686 + 0.5 = \mathbf{0.8686} \end{aligned}$$

432 M サイズに分類された卵が入った箱の中から無作為に 100 個選んで調べたところ，重さの平均は 60g であった．母標準偏差を 5g として，この箱の中のすべての卵の重さの平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間を求めよ．

解答 母標準偏差 5，標本の大きさ 100，標本平均 60 より，m に対する 95%の信頼区間は

$$60 - 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}} \leqq m \leqq 60 + 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}} \quad \text{よって} \quad \mathbf{59.02 \leqq m \leqq 60.98}$$

7.37.2 Exercise

433* 母平均 100，母標準偏差 20 である母集団から，大きさ 200 の標本を抽出する．標本平均を $\overline{X}$ として，次の値を求めよ．ただし，(2) は $\sqrt{2} = 1.41$ として，四捨五入して小数第 2 位まで求めよ．また，正規分布表を用いてよい．

(1) 平均 $E(\overline{X})$，標準偏差 $\sigma(\overline{X})$

(2) $\overline{X} < 98$ となる確率

解答 (1) $E(\overline{X}) = \mathbf{100}$，$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{20}{\sqrt{200}} = \mathbf{\sqrt{2}}$

(2) 標本平均 $\overline{X}$ の分布は正規分布 $N(100,\ (\sqrt{2})^2)$ と見なせるから，$Z = \dfrac{\overline{X} - 100}{\sqrt{2}}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとみなせる．

$$\begin{aligned} P(\overline{X} < 98) &= P\left(Z < \frac{98 - 100}{\sqrt{2}}\right) \\ &= P(Z < -2) = P(Z < -1.41) = P(Z > 1.41) \\ &= 0.5 - u(1.41) = 0.5 - 0.4207 = 0.0793 \fallingdotseq \mathbf{0.08} \end{aligned}$$

434 以前の調査から，ある昆虫の成体について全長の標準偏差は 2.5mm であることが知られている．いま，この昆虫の成体にちて全長の平均を信頼度 95%で推定するとき，信頼区間の幅を 0.5mm 以下にするには，何匹以上調査する必要があるか．

解答 標本の大きさを n とすると，信頼区間の幅は

$$2 \cdot 1.96 \cdot \frac{2.5}{\sqrt{n}} = \frac{9.8}{\sqrt{n}}$$

条件より $\dfrac{9.8}{\sqrt{n}} \leqq 0.5$ ゆえに $n \geqq \left(\dfrac{9.8}{0.5}\right)^2 = 384.16$

よって，**384 匹以上**調査する必要がある．

435 ある林にはA，Bの2種類のリスが生息しているという．任意に200匹のリスを捉えて調査したところ，A種が80匹だった．この林のリス全体のうち，何%がA種であると考えられるか．信頼度95%の信頼区間を求めよ．ただし，$\sqrt{3}=1.73$とし，区間の両端は四捨五入して整数で答えよ．

解答 標本におけるA種の比率p'は

$$p'=\frac{80}{200}=0.4$$

よって，林のリス全体におけるA種の比率pに対する信頼度95%の信頼区間は

$$0.4-1.96\sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{200}}\leqq p\leqq 0.4+1.96\sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{200}}$$
$$0.4-1.96\cdot\frac{\sqrt{3}}{50}\leqq p\leqq 0.4+1.96\cdot\frac{\sqrt{3}}{50}$$
$$0.332184\leqq p\leqq 0.467816$$

したがって，**33%以上47%以下**である．

436* あるお菓子は，1袋あたりの内容量の基準を90gとして製造されており，標準偏差は8gである．製造された大量のお菓子から100袋を取り出して調べたところ，内容量の平均は91.2gであった．製造されたお菓子は基準と異なっているといえるか．正規分布表を用い，有意水準5%で両側検定せよ．

解答 製造されたお菓子全体の平均の内容量をmgとすると

$$\text{帰無仮説}:m=90,\qquad \text{対立仮説}:m\neq 90$$

標本の大きさ100，母標準偏差8より，標本平均$\overline{X}$の分布は正規分布$N\left(90,\ \dfrac{8^2}{100}\right)$とみなせるから，$Z=\dfrac{\overline{X}-90}{\frac{8}{\sqrt{100}}}$は標準正規分布$N(0,\ 1)$に従うとみなせる．

$$P(|\overline{X}-m|\geqq 91.2-90)=P\left(\frac{|\overline{X}-90|}{\frac{8}{\sqrt{100}}}\geqq\frac{1.2}{\frac{8}{\sqrt{100}}}\right)$$
$$=P(|Z|\geqq 1.5)=2(0.5-u(1.5))=2(0.5-0.4332)=\mathbf{0.1336}$$

これは有意水準5%よりも大きい．

したがって，帰無仮説は棄却されず，製造されたお菓子は**基準と異なっているといえない**．

7.37.3 Try

437 $0 \leqq x \leqq a$ $(a > 0)$ のすべての値をとる確率変数 X の確率密度関数を

$$f(x) = b(4-x)x$$

とする．X の平均が $\dfrac{a}{2}$ のとき，次の問に答えよ．　(東京都立大 改)

(1) a，b の値を求めよ．

(2) X の分散を求めよ．

(3) t の方程式 $4t^2 - 12t + 9(X-1) = 0$ の 2 つの解がともに正となる X の確率を求めよ．

解答　(1) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = 1$ より

$$b\int_0^a (4-x)x\,dx = b\left[\ 2x^2 - \frac{x^3}{3}\ \right]_0^a = a^2 b\left(2 - \frac{a}{3}\right) = 1$$

$E(X) = \displaystyle\int_0^a xf(x)\,dx = \frac{a}{2}$ より

$$b\int_0^a (4-x)x^2\,dx = b\left[\ \frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\ \right]_0^a = a^3 b\left(\frac{4}{3} - \frac{a}{4}\right) = \frac{a}{2}$$

上の 2 式から　　$a^2 b\left(2 - \dfrac{a}{3}\right) = a^2 b\left(\dfrac{8}{3} - \dfrac{a}{2}\right) = 1$

$2 - \dfrac{a}{3} = \dfrac{8}{3} - \dfrac{a}{2}$　ゆえに　$\boldsymbol{a = 4}$　上式に代入して　$\boldsymbol{b = \dfrac{3}{32}}$

(2) (1) の結果から　$E(X) = 2$，$f(x) = \dfrac{3}{32}(4-x)x$

$$E(X^2) = \int_0^4 x^2 f(x)\,dx = \frac{3}{32}\int_0^4 x^3(4-x)\,dx$$
$$= \frac{3}{32}\cdot\frac{3!1!}{5!}(4-0)^5 = \frac{24}{5}$$

よって　　$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{24}{5} - 2^2 = \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

(3) $g(t) = 4t^2 - 12t + 9(X-1)$ とおくと

$$g(t) = 4\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 9(X-2)$$

$g(t) = 0$ の 2 つの解がともに正となるのは

$$g(0) = 9(X-1) > 0, \quad g\left(\frac{3}{2}\right) = 9(X-2) \leqq 0$$

したがって　　$\mathbf{1 < \boldsymbol{X} \leqq 2}$

よって，求める確率は

$$E(1 < X \leqq 2) = \frac{3}{32}\int_1^2 (4-x)x\,dx$$
$$= \frac{3}{32}\left[\, 2x^2 - \frac{x^3}{3} \,\right]_1^2 = \mathbf{\frac{11}{32}}$$

438* 次の問に答えよ．なお，次頁の正規分布表を利用してもよい．　(滋賀大 改)

(1) 確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma)$ に従うとき，$P\left(|X-m| \geqq \dfrac{\sigma}{4}\right)$ を求めよ．ただし，小数第 4 位を四捨五入せよ．

(2) 母平均 m，母標準偏差 σ の正規分布に従う母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ について，$P\left(|X-m| \geqq \dfrac{\sigma}{4}\right) \leqq 0.02$ を満たす最小の n を求めよ．

解答　(1) X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．$X - m = \sigma Z$ より

$$\begin{aligned} P\left(|X-m| \geqq \frac{\sigma}{4}\right) &= P\left(|\sigma Z| \geqq \frac{\sigma}{4}\right) = P\left(|Z| \geqq \frac{1}{4}\right) \\ &= 2\left\{P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq \frac{1}{4})\right\} \\ &= 2\{0.5 - u(0.25)\} = 2(0.5 - 0.09871) \\ &= 0.80258 \end{aligned}$$

小数第 4 位を四捨五入して　$\boldsymbol{P\left(|X-m| \geqq \dfrac{\sigma}{4}\right) = 0.803}$

(2) $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うから，$Z = \dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．$\overline{X} - m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z$ より

$$\begin{aligned} P\left(|\overline{X}-m| \geqq \frac{\sigma}{4}\right) &= P\left(\left|\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z\right| \geqq \frac{\sigma}{4}\right) = P\left(|Z| \geqq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \\ &= 2\left\{0.5 - P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{n}}{4}\right)\right\} \leqq 0.02 \end{aligned}$$

よって　$P\left(0 \leqq Z \leqq \dfrac{\sqrt{n}}{4}\right) \geqq 0.49$

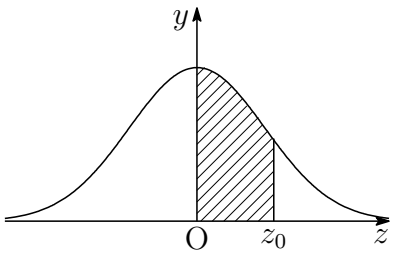
正規分布表より，$P\,(0 \leqq Z \leqq 2.33) = 0.49010$ であるから

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \geqq 2.33 \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq (4 \cdot 2.33)^2 = 86.8624$$

よって，求める最小の n は　$\boldsymbol{n = 87}$

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における
右図の斜線部分の面積をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

439* さいころを n 回投げて，出た目の数を表す確率変数を順に $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ とする．$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ とするとき (九州芸術工科大)

(1) $\overline{X}$ の平均 $E(\overline{X})$ と分散 $V(\overline{X})$ を求めよ．

(2) $n=3$ のとき，$|\overline{X}-E(\overline{X})|\geqq 2\sqrt{V(\overline{X})}$ となる確率を求めよ．

解答 (1) さいころを 1 回投げて出る目の平均は

$$E(X_j)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7=\frac{7}{2}$$

よって，標本平均 $\overline{X}$ の平均は

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E(X_j)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{7}{2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{7}{2}n=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

次に，さいころを 1 回投げて出る目の分散は

$$\begin{aligned}V(X_j)&=E({X_j}^2)-E(X_j)^2=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13-\frac{49}{4}=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}\end{aligned}$$

$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ は独立であるから，標本平均 $\overline{X}$ の分散は

$$\begin{aligned}V(\overline{X})&=V\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}V(X_j)\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{35}{12}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{35}{12}n=\boldsymbol{\frac{35}{12n}}\end{aligned}$$

(2) $n=3$ のとき　　$V(\overline{X})=\dfrac{35}{12\cdot 3}=\dfrac{35}{36}$

$|\overline{X}-E(\overline{X})|\geqq 2\sqrt{V(\overline{X})}$ に代入すると　$\left|\overline{X}-\dfrac{7}{2}\right|\geqq 2\sqrt{\dfrac{35}{36}}$

$$\overline{X}-\frac{7}{2}\leqq -\frac{\sqrt{35}}{3},\quad \frac{\sqrt{35}}{3}\leqq \overline{X}-\frac{7}{2}$$

ここで，$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$ であるから

(i) $X_1+X_2+X_3\leqq \dfrac{21}{2}-\sqrt{35}$ のとき，$4<\dfrac{21}{2}-\sqrt{35}$ に注意して

$$X_1+X_2+X_3\leqq 4$$

これを満たす $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ の組は，次の 4 通り

$$(1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1)$$

(ii) $\dfrac{21}{2}+\sqrt{35}\leqq X_1+X_2+x_3$ のとき，$16<\dfrac{21}{2}+\sqrt{35}<17$ に注意して

$$X_1+X_2+X_3\geqq 17$$

これを満たす $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ の組は，次の 4 通り

$$(5,\ 6,\ 6),\ (6,\ 5,\ 6),\ (6,\ 6,\ 5),\ (6,\ 6,\ 6)$$

(i)，(ii) より，求める確率は　　$\dfrac{4+4}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{27}}$

440 ある会社で製造しているパッケージ入り食料品の正味重量は，母平均 104.0g，母標準偏差 2.0g の正規分布に従うと考えられる．正規分布表を用いて，次の問に答えよ．(筑波大 改)

(1) パッケージの正味重量が 100.0g 以下であるものの割合を求めよ．

(2) 4 個のパッケージを無作為に取り出したとき，その正味重量が 101.0g 以下になる確率を求めよ．

(3) 製造工程の変更を行い，81 個のパッケージを無作為に取り出しその正味重量を調べたところ，平均 110.0g，標準偏差 1.8g であった．このとき，1 パッケージあたりの平均正味重量を信頼度 95%で推定せよ．ただし，製造工程変更後も正味重量は正規分布に従うものとする．

解答 (1) 平均 104.0，標準偏差 2.0 の正規分布に従う確率変数を X とし，

$$Z = \frac{X - 104.0}{2.0}$$

とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから，求める確率は

$$\begin{aligned} P(X \leqq 100.0) &= P\left(Z \leqq \frac{100.0 - 104.0}{2.0}\right) \\ &= P(Z \leqq -2) = P(Z \geqq 2) \\ &= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 = \mathbf{0.0228} \end{aligned}$$

(2) 大きさ 4 の標本平均 $\overline{X}$ は $N\left(104.0,\ \dfrac{2.0^2}{4}\right)$ の正規分布に従うから

$$Z = \frac{\overline{X} - 104.0}{\frac{2.0}{\sqrt{4}}}$$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．したがって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \leqq 101.0) &= P\left(Z \leqq \frac{101.0 - 104.0}{\frac{2.0}{\sqrt{4}}}\right) \\ &= P(Z \leqq -3.0) = P(Z \geqq 3.0) \\ &= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq) \\ &= 0.5 - 0.4987 = \mathbf{0.0013} \end{aligned}$$

(3) 標本の大きさが十分大きいから，標本の標準偏差を母標準偏差とみなしてよい．

母標準偏差が 1.8，標本の大きさが 81，標本平均が 110.0 であるから，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間は

$$110.0 - 1.96 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{81}} \leqq m \leqq 110.0 + 1.96 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{81}}$$

すなわち　　$109.608 \leqq m \leqq 110.392$

したがって，1 パッケージあたりの平均正味重量は，

109.608g 以上 110.392g 以下

と推定できる．

7.38　ベクトルの基本

7.38.1　Review

441 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が $2\vec{a}-3\vec{b}=(1,\ 9)$，$-\vec{a}+2\vec{b}=(0,-5)$ を満たし，$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$，$d=k\vec{a}+\vec{b}$ (k は実数) とする．

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ を成分表示せよ．また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の大きさを求めよ．

(2) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ が垂直となるような k の値を求めよ．

(3) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ が平行となるような k の値を求めよ．

解答　(1) $2\vec{a}-3\vec{b}=(1,\ 9)$，$-\vec{a}+2\vec{b}=(0,-5)$ より

$$2\vec{a}-3\vec{b}+2(-\vec{a}+2\vec{b})=(1,\ 9)+2(0,-5)$$
$$\vec{b}=\boldsymbol{(1,-1)}$$

$-\vec{a}+2\vec{b}=(0,-5)$ より

$$\vec{a}=2\vec{b}-(0,-5)$$
$$=2(1,-1)-(0,-5)=\boldsymbol{(2,\ 3)}$$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(2)　$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}=(2,\ 3)+2(1,-1)=(4,\ 1)$，
$\vec{d}=k\vec{a}+\vec{b}=k(2,\ 3)+(1,-1)=(2k+1,\ 3k-1)$

$\vec{d}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\perp\vec{d}$ より

$$4(2k+1)+1(3k-1)=0\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{k=-\frac{3}{11}}$$

$\vec{d}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\perp\vec{d}$ より

$$4(3k-1)-1(2k+1)=0\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$$

補足 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}\iff a_1b_1+a_2b_2=0},\qquad\boldsymbol{\vec{a}/\!/\vec{b}\iff a_1b_2-a_2b_1=0}$$

442 (1) $\vec{a}=(1,-2),\ \vec{b}=(3,-1)$ のなす角 θ を求めよ．

(2) $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$ と 30° の角をなす単位ベクトル $\vec{e}$ の成分を求めよ．

解答 (1)

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1\cdot3+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　　$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$

(2) $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)=2(\cos30^\circ,\ \sin30^\circ)$ より

$$\vec{e}=(\cos0^\circ,\ \sin0^\circ)\quad\text{または}\quad\vec{e}=(\cos60^\circ,\ \sin60^\circ)$$

よって　　$\boldsymbol{\vec{e}=(1,\ 0),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

443 △ABC において辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P，辺 AC の中点を Q，辺 BC を 2 : 1 に外分する点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，3 点 P，Q，R が一直線上にあることを示し，PQ : QR を求めよ．

解答 点 P は AB を 1 : 2 に内分する点，点 Q は AC の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\vec{b},\quad\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

点 R は BC を 2 : 1 に外分する点であるから

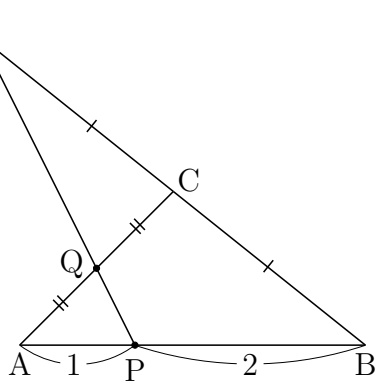
$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-\vec{b}+2\vec{c})-\frac{1}{3}\vec{b}=2\vec{c}-\frac{4}{3}\vec{b}=4\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　よって，3 点 P，Q，R は一直線上にある．

また　PQ : QR = 1 : 4 − 1 = **1 : 3**



7.38.2 Exercise

444 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ のとき

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

(2) △OAB の面積 S を求めよ．

(3) $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値を求めよ．

解答 (1) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ より　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$

$$3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=7 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=-3}$$

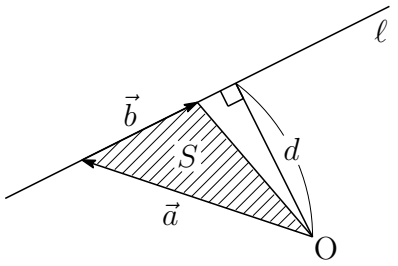
(2) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ および (1) の結果から

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\cdot2^2-(-3)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{36-9}=\boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{3}}$$

(3) $\vec{a}+t\vec{b}$ の表す直線を ℓ とすると，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値は，O から ℓ までの距離 d であるから

$$S=\frac{1}{2}|\vec{b}|d \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot d$$

これを解いて　$\boldsymbol{d=\frac{3}{2}\sqrt{3}}$



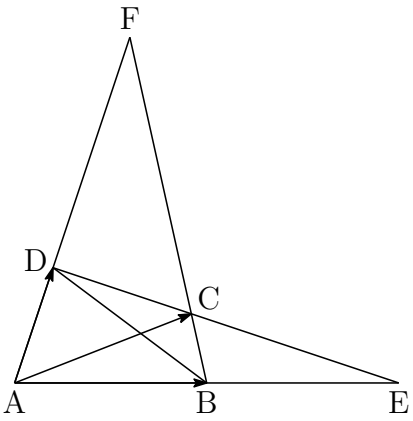
445* 平面に四角形 ABCD があり，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を満たす．また，直線 AB と DC の交点を E，直線 AD と BC の交点を F とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を用いて表せ．

(2) 線分 AC の中点を P，線分 BD の中点を Q，線分 EF の中点を R とするとき，3 点 P，Q，R は同一直線上にあることを証明せよ．

解答 (1) C は直線 DE 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AE}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$$



(2) C は直線 BF 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AF}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{\mathrm{AF}}=3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

線分 AC の中点 P は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{10}$

線分 BD の中点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}$

線分 EF の中点 R は $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{10}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+6\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5}$ ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=6\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

よって，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．

446 △OAB の辺 OA を 3 : 2 に内分する点を P，辺 OB を 5 : 1 に内分する点を Q，2 直線 AQ，BP の交点を R，線分 OR の延長と辺 AB との交点を S とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2) AS : SB，OR : RS を求めよ．

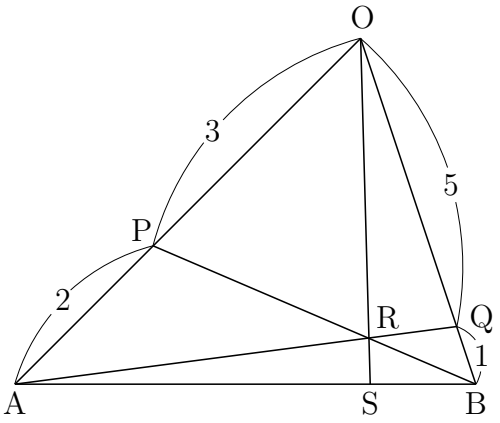
解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{5}{3}x\overrightarrow{\mathrm{OP}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{6}{5}y\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

R は 2 直線 BP，AQ 上の点であるから

$$\frac{5}{3}x+y=x+\frac{6}{5}y=1 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{1}{5},\ y=\frac{2}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$



別解 △OAQ と直線 BP について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{BO}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{1}{6}=1 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{AR}:\mathrm{RQ}=4:1$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{5}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\dfrac{1}{5}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\cdot\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+10\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{15}=\dfrac{13}{15}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+10\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{13}=\dfrac{13}{15}\overrightarrow{\mathrm{OS}}$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{AS}:\mathrm{SB}=10:3,\ \ \mathrm{OR}:\mathrm{RS}=13:2}$

447* △ABC とその内部にある点 P が，$7\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている．

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(2) △PAB，△PBC，△PCA の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とするとき，$S_1:S_2:S_3$ を求めよ．　(関西大 改)

解答　(1) $7\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より　$7\overrightarrow{PA}+2(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$$12\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{12}}$$

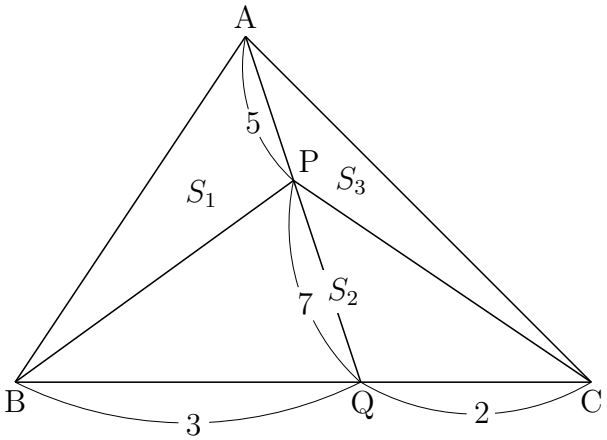
(2) 線分 AP の延長と辺 BC との交点を Q とすると，(1) の結果から

$$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{12}\cdot\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AQ}$$

BQ : QC = 3 : 2，OP : PQ = 5 : 7 であるから

$$S_1:S_3=3:2,\quad S_1:\frac{3}{5}S_2=5:7$$

したがって　　$\boldsymbol{S_1:S_2:S_3=3:7:2}$



補足　$7\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ のとき　△PBC : △PCA : △PAB = 7 : 2 : 3

一般に，$\boldsymbol{x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0}}$ のとき $(x,\ y,\ z>0)$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}}{x+y+z}=\frac{y+z}{x+y+z}\cdot\frac{y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}}{y+z}=\frac{y+z}{x+y+z}\overrightarrow{AQ}$$

BQ : QC = $z:y$，AP : PQ = $y+z:x$ であるから

$$\triangle PAB:\triangle PCA=z:y,\quad \triangle PAB:\frac{z}{y+z}\triangle PBC=y+z:x$$

よって　　$\boldsymbol{\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=x:y:z}$

7.38.3 Try

448 $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{q}=\vec{a}+3\vec{b}$，$|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ のとき　(中京大 改)

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ をそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表せ.

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{a}+\vec{b}|$ のとり得る値の範囲を求めよ.

解答　(1) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}\cdots①$，$\vec{q}=\vec{a}+3\vec{b}\cdots②$ とすると

①$\times 3-$②より　$3\vec{p}-\vec{q}=5\vec{a}$　よって　$\boldsymbol{\vec{a}=\dfrac{3\vec{p}-\vec{q}}{5}}$

②$\times 2-$①より　$2\vec{q}-\vec{p}=5\vec{b}$　よって　$\boldsymbol{\vec{b}=\dfrac{-\vec{p}+2\vec{q}}{5}}$

(2) $-|\vec{p}||\vec{q}|\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq|\vec{p}||\vec{q}|$ であるから，$|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ より

$$-1\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq 1 \qquad (*)$$

(1) の結果から

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\frac{3\vec{p}-\vec{q}}{5}\right)\cdot\left(\frac{-\vec{p}+2\vec{q}}{5}\right)=\frac{1}{25}(3\vec{p}-\vec{q})\cdot(-\vec{p}+2\vec{q})$$
$$=\frac{1}{25}(-3|\vec{p}|^2+7\vec{p}\cdot\vec{q}-2|\vec{q}|^2)=\frac{1}{25}(7\vec{p}\cdot\vec{q}-5)$$

$(*)$ より　$\boldsymbol{-\dfrac{12}{25}\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq\dfrac{2}{25}}$

(1) の結果から

$$\vec{a}+\vec{b}=\frac{3\vec{p}-\vec{q}}{5}+\frac{-\vec{p}+2\vec{q}}{5}=\frac{1}{5}(2\vec{p}+\vec{q}),$$
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\frac{1}{25}|2\vec{p}+\vec{q}|^2=\frac{1}{25}(4|\vec{p}|^2+4\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2)$$
$$=\frac{1}{25}(4\vec{p}\cdot\vec{q}+5)$$

$(*)$ より　$\dfrac{1}{25}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|^2\leqq\dfrac{9}{25}$　よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq\dfrac{3}{5}}$

449* △ABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を P，辺 AC を 1 : 2 に内分する点を Q とし，辺 BC 上に点 R があるとする．　(大分大 2015 年 2)

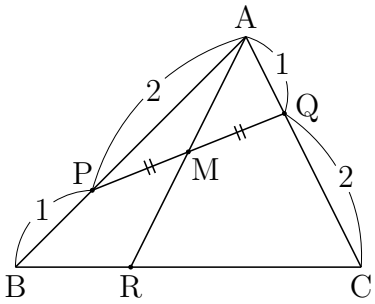
(1) 線分 PQ の中点を M とし，点 A，M，R が一直線上にあるとき，BR : RC を求めなさい．

(2) △ABC の重心 G と △PRQ の重心 H が一致するとき，BR : RC を求めなさい．

(3) 直線 AR，BQ，CP が一点で交わるとき，BR : RC を求めなさい．

解答　(1) M は線分 PQ の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$



条件から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

点 A，M，R が一直線上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AM}}\quad\text{ゆえに}\quad\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

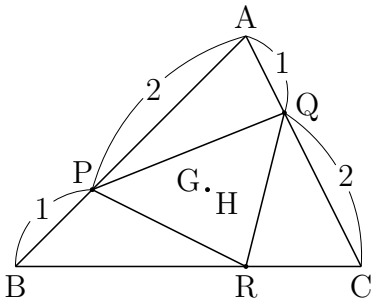
R は直線 BC 上の点であるから

$$\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}k=1\quad\text{これを解いて}\quad k=2$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって　$\mathbf{BR : RC = 1 : 2}$

(2) G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$



H は △PQR の重心であるから

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}\right)$$

これに $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ を代入すると

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AR}\right)=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AR}$$

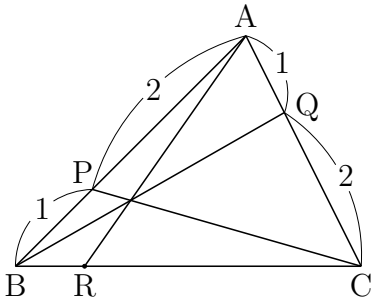
このとき，$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AH}$ であるから

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AR}$$

ゆえに　$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　よって　**BR : RC = 2 : 1**

(3) チェバの定理により　$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$

したがって　$\frac{2}{1}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{2}{1}$　ゆえに　$\frac{BR}{RC}=\frac{1}{4}$



よって　**BR : RC = 1 : 4**

450* 平面上の点 O を中心とする半径 2 の円周上に 3 点 A，B，C があり，

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}-4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たす．(鳥取大)

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(2) 線分 AB の長さを求めよ．

(3) 線分 AB と線分 OC の交点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

(4) 四角形 OBCA の面積を求めよ．

解答 (1) $(*)$ $2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=16|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$ を上式に代入すると

$$4\cdot2^2+12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9\cdot2^2=16\cdot2^2 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1$$

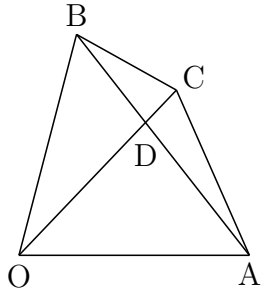
(2) (1) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=2^2+2^2-2\cdot1=6$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|>0$ であるから $\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

(3) $(*)$ より $\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$

D は線分 AB 上の点であるから $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}}$



(4) $\triangle\mathrm{OAB}=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot2^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$\mathrm{OC}=\dfrac{5}{4}\mathrm{OD}$ より，求める面積を S とすると

$$S=\frac{5}{4}\triangle\mathrm{OAB}=\frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{15}}{8}}$$

451* $\triangle$ABC と点 P が $4\overrightarrow{AP}-6\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ を満たしているとき

(1) 直線 AB と直線 PC の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$ を用いて表せ．

(2) 三角形の面積比 $\triangle$PCA : $\triangle$PAB を求めよ．

(3) 直線 AB と直線 PC が直交し，かつ直線 AC と直線 PB が直交するとき，$\cos\angle$BAC を求めよ．　(大阪教育大)

解答　(1) $4\overrightarrow{AP}-6\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ より　$4\overrightarrow{AP}-6(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$$\overrightarrow{AP}=6\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} \qquad (*)$$

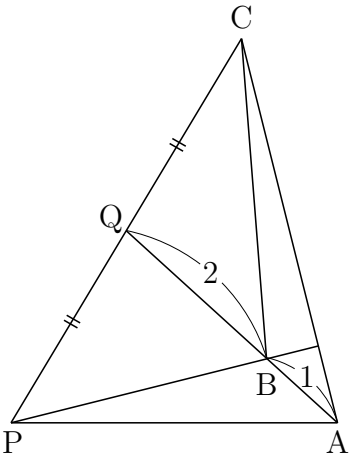
Q は直線 AB と直線 PC の交点であるから

$$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}}{2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AB}}$$

(2) (1) の結果から，Q は線分 PC の中点で，B は線分 AQ を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\triangle PBC=\frac{2}{3}\triangle PCA,\quad \triangle PAB=\frac{1}{3}\triangle PAQ=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle PCA$$

よって　$\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB=\dfrac{2}{3}:1:\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{4:6:1}$



(3) (∗) より　$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 5\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2(3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}})$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{CP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$5\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} - |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 0,\ 3|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$

上の 2 式から

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2} = \frac{1}{5},\quad \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2} = 3 \qquad (**)$$

(∗∗) の 2 式の辺々を掛けると

$$\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

(∗∗) から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} > 0$ に注意して

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{5}}$$

452 三角形 OAB の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を C とする．動点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(x \geqq 1)$ を満たすとし，直線 CD と直線 OB の交点を E とする．

(1) 実数 y を $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定めるとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

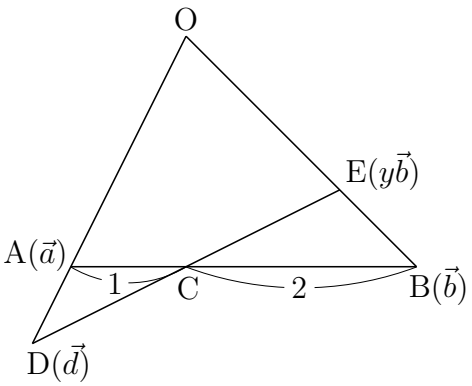
(2) 三角形 OAB の面積を S，三角形 ODE の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の最大値と，そのときの x を求めよ．　(東北大文系 2011 年 2)

解答　(1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = y\vec{b}$$

点 C は DE を $s : 1-s$ に内分する点とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{OE}} \\ &= (1-s)x\vec{a} + sy\vec{b}\end{aligned}$$



点 C は AB を 1 : 2 に内分する点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}$

したがって　$(1-s)x = \dfrac{2}{3}, \quad sy = \dfrac{1}{3}$

上の 2 式から　$1 - s = \dfrac{2}{3x}, \quad s = \dfrac{1}{3y}$　ゆえに　$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 3$

別解　△OAB および直線 DE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}} \cdot \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} \cdot \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EO}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-y}{y} = 1$$

したがって　$\dfrac{1-y}{y} = \dfrac{2(x-1)}{x}$　よって　$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 3$

(2) $a = \mathrm{OA}$，$b = \mathrm{OB}$，$\theta = \angle\mathrm{AOB}$ とすると　$\mathrm{OD} = xa$，$\mathrm{OE} = yb$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta, \quad T = \frac{1}{2}xa{\cdot}yb\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{S}{T} = \frac{1}{xy}$$

2 正数 $\dfrac{2}{x}$，$\dfrac{1}{y}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$3 = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{2}{x}{\cdot}\frac{1}{y}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{xy} \leqq \frac{9}{8}$$

上式で等号が成立するとき　$\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}$　すなわち　$x = \dfrac{4}{3},\ y = \dfrac{2}{3}$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{4}{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{8}}$ をとる．

7.39　ベクトルと平面図形，ベクトル方程式

7.39.1　Review

453 OA = 4，OB = 5，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{5}{2}$ である．△OAB に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．次の問いに答えよ．　(大阪市立大)

(1) 辺 AB の長さを求めよ．

(2) ∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を P，∠OAB の二等分線と辺 OB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) △OAB の内心を I とする．$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

解答　(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{5}{2}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=5^2-2\cdot\frac{5}{2}+4^2=36\end{aligned}$$

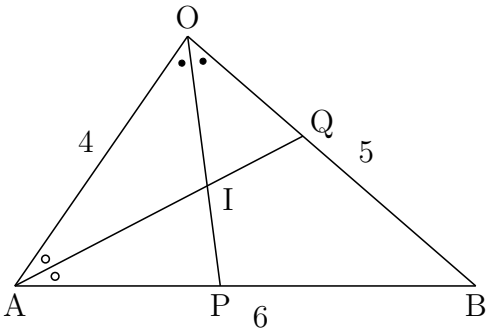
よって　　$\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\mathbf{6}$

(2) 点 P は辺 AB を 4 : 5 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4+5}=\boldsymbol{\frac{5}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}}\qquad(*)$$

点 Q は辺 OB を 4 : 6，すなわち，2 : 3 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{\frac{2}{5}\vec{b}}$$



(3) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ および (∗) より，I は線分 AQ 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{10}{9}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{3}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OI}}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5\vec{a}+4\vec{b}}{9}=\boldsymbol{\dfrac{5\vec{a}+4\vec{b}}{15}}$

454 点 $\mathrm{P}(5, -1)$ を通り，$\vec{n} = (1,\ 2)$ が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ．また，この直線と直線 $x-3y-2=0$ とのなす角 α を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$ とする． (岩手大)

解答 直線上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから

$$1(x-5)+2(y+1)=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x+2y-3=0}$$

直線 $x-3y-2=0$ の法線ベクトルを $\vec{m}=(1,-3)$ とする．

$\vec{m}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \frac{1\cdot 1+(-3)\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\theta = 135^\circ$

よって，求める角 α $(0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ)$ は　$\alpha = 180^\circ - 135^\circ = \boldsymbol{45^\circ}$

455 3 つの定点 O，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ がある．動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ がベクトル方程式 $|4\vec{p}-3\vec{a}-\vec{b}|=6$ を満たすとき，点 P はどのような図形上にあるか．

解答 $|4\vec{p}-3\vec{a}-\vec{b}|=6$ より

$$\left|\vec{p}-\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right| = \frac{3}{2}$$

よって，点 P は**線分 AB を 1 : 3 に内分する点を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円上にある．**

7.39.2 Exercise

456* △OAB において，OA = 8，OB = 10，AB = 12 とする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} =$ ［ ア ］である．また，△OAB の垂心を H とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{OH}} =$ ［ イ ］となる．　(慶応義塾大)

解答 $|\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$$10^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 8^2 = 12^2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 10}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = 0$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 10$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 10$

$$x|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + y\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + y|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 10$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 8$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 10$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 10$ より

$$64x + 10y = 10x + 100y = 10 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1}{7},\ y = \frac{3}{35}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{35}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

457* 平面上に，一直線上にない3点O，A，Bがあり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と定める．s，t が次の条件を満たすとき，点Pの存在する範囲を示せ．

(1) $0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$

(2) $s + t = 1$

(3) $3s + 2t = 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$

(4) $s + t \leqq 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$

解答 (1) **$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が張る平行四辺形の周および内部**

(2) **直線 AB**

(3) $3s + 2t = 6$ より $\quad \dfrac{s}{2} + \dfrac{t}{3} = 1$

$s' = \dfrac{s}{2},\ t' = \dfrac{t}{3}$ とおくと $\quad s' + t' = 1,\ s' \geqq 0,\ t' \geqq 0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s'(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + t'(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

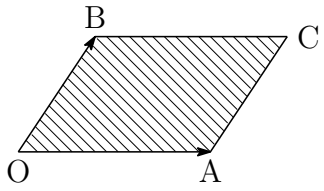
$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす2点 A′，B′ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}} \qquad (s' + t' = 1,\ s' \geqq 0,\ t' \geqq 0)$$

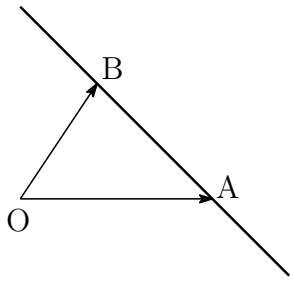
よって　**両端を含む線分 AB**

(4) **△OAB の周および内部**

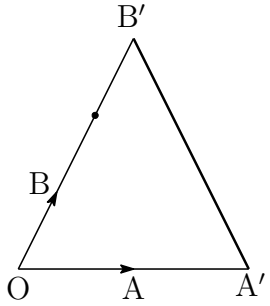
(1)



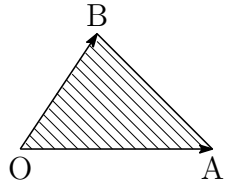
(2)



(3)



(4)



458 座標平面上の 4 点 O(0, 0)，A(1, 2)，B(2, 3)，C(6, 10) と動点 P(x, y) に関する次の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=6$ であるとき，x，y の関係式を求めよ．

(2) $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ であるとき，x，y の関係式を求めよ．

解答 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=6$ より $\quad|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})|=6$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\right|=2$$

$\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=(3,\ 5)$ より，P は点 $(3,\ 5)$ を中心とする半径 2 の円周上の点であるから

$$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-5)^2=4}$$

(2) $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$$

したがって $\quad|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})|=2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$$

$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,1)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{13}$ より，P は点 $(0,\ 1)$ を中心とする半径 $2\sqrt{13}$ の円周上の点であるから

$$\boldsymbol{x^2+(y-1)^2=52}$$

7.39.3　Try

459* △ABC において，AB = 2，AC = 3，BC = 4 とする．△ABC の外接円の中心を P，内接円の中心を I とするとき　(早稲田大 改)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

(2) IP の長さを求めよ．

解答　(1) $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，$|\vec{b}-\vec{c}|=4$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{b}-\vec{c}|^2}{2}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2}=-\frac{3}{2}$$

2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を実数 $x,\ y$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\vec{b}+y\vec{c}$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ であるから

$$\vec{b}\cdot\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)b+y\vec{c}\right\}=0,\quad \vec{c}\cdot\left\{x\vec{b}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\vec{c}\right\}=0$$

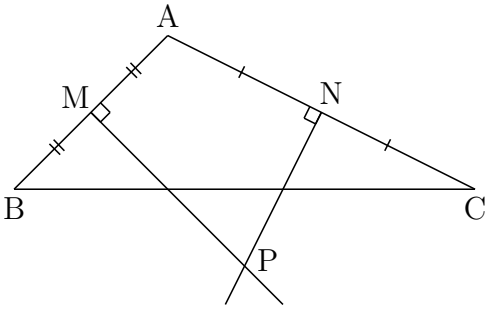
したがって

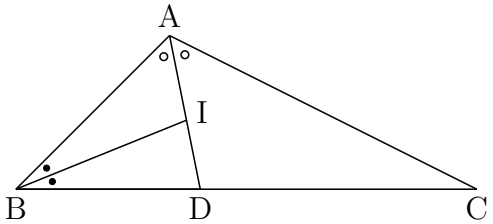
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2+y\vec{b}\cdot\vec{c}=0,\quad x\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(y-\frac{1}{2}\right)|\vec{c}|^2=0$$

$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{3}{2}$ を代入すると

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}y=0,\quad -\frac{3}{2}x+9\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$$

これを解いて　$x=\dfrac{11}{15},\ y=\dfrac{28}{45}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{11}{15}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{28}{45}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$





別解 $\vec{b}\perp\{|\vec{b}|^2\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b}\}$，$\vec{c}\perp\{|\vec{c}|^2\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{c}\}$ に注意すると，P は線分 AB，AC の垂直二等分線の交点であるから，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\frac{1}{2}\vec{b}+s\{|\vec{b}|^2\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b}\}=\frac{1}{2}\vec{c}+t\{|\vec{c}|^2\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{c}\}\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}s\right)\vec{b}+4s\vec{c}=9t\vec{b}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t\right)\vec{c}\end{aligned}$$

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立 (線形独立) であるから

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}s=9t,\quad 4s=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t$$

これを解いて　　$s=\dfrac{7}{45},\ t=\dfrac{11}{135}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{11}{15}\vec{b}+\dfrac{28}{45}\vec{c}=\boldsymbol{\dfrac{11}{15}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{28}{45}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(2) ∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とすると

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=2:3\quad\text{ゆえに}\quad\mathrm{BD}=\frac{2}{5}\mathrm{BC}=\frac{2}{5}\cdot4=\frac{8}{5}$$

$\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=2:\dfrac{8}{5}=5:4$ より，∠ABC の二等分線と線分 AD の交点 I は，AD を 5 : 4 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{5}{9}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

(1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{IP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AI}}\\&=\left(\frac{11}{15}\vec{b}+\frac{28}{45}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)=\frac{2}{5}(\vec{b}+\vec{c})\end{aligned}$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2=\frac{4}{25}(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)=\frac{4}{25}(4-3+9)=\frac{4}{25}\cdot10$$

よって　　$\mathrm{IP}=|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{10}}{5}}$

460* △OABにおいて，頂点A，Bにおけるそれぞれの外角の二等分線の交点をCとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき (静岡大)

(1) 点Pが∠AOBの二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$となる実数$t$が存在することを示せ．

(2) $|\vec{a}|=7$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$とすると，△OA′B′は，OA′＝OB′の二等辺三角形で，A′B′の中点をMとすると　△OA′M≡△OB′M

$$\angle \mathrm{A'OM}=\angle \mathrm{B'OM}\quad \text{ゆえに}\quad \angle \mathrm{AOM}=\angle \mathrm{BOM}$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

Pが∠AOBの二等分線上にある，すなわち，Pは直線OMにあるから，実数tを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2t\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

となる実数tが存在する．

(2) $|\vec{a}|=7,\ |\vec{b}|=5,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=5$ より

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7^2-2\cdot5+5^2=64$$

$|\vec{b}-\vec{a}|>0$ であるから　$|\vec{b}-\vec{a}|=8$

C は頂点 A，B におけるそれぞれの外角の二等分線の交点であるから，実数 $x,\ y$ を用いて

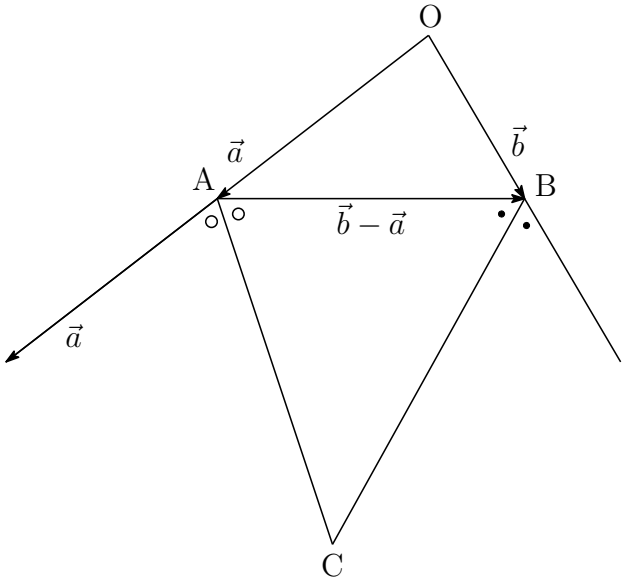
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\vec{a}+x\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{|\vec{b}-\vec{a}|}\right)=\vec{b}+y\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}\right)\\&=\vec{a}+x\left(\frac{\vec{a}}{7}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{8}\right)=\vec{b}+y\left(\frac{\vec{b}}{5}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{8}\right)\\&=\left(1+\frac{x}{56}\right)\vec{a}+\frac{x}{8}\vec{b}=\frac{y}{8}\vec{a}+\left(1+\frac{3y}{40}\right)\vec{b}\qquad(*)\end{aligned}$$

$\vec{a},\ \vec{b}$ は 1 次独立 (線形独立) であるから

$$1+\frac{x}{56}=\frac{y}{8},\quad \frac{x}{8}=1+\frac{3y}{40}$$

これを解いて　　$x=14,\ y=10$

これらを $(*)$ に代入して　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{7}{4}\vec{b}}$



461 △ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$ であるとする．辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D，線分 AD に関して B と対称な点を E，直線 AE と辺 BC の交点を F とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) DF : BC を求めよ．

解答 (1) $3\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\vec{b}+\vec{c}$ より，点 B から直線 AD に垂線 BT を引くと

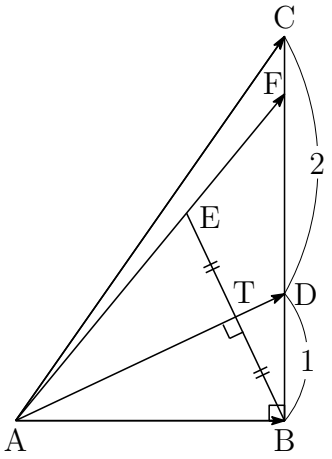
$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\frac{\vec{b}\cdot(2\vec{b}+\vec{c})}{|2\vec{b}+c|^2}(2\vec{b}+\vec{c})=\frac{2|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}}{4|\vec{b}|^2+4\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2}(2\vec{b}+\vec{c})=\frac{3}{11}(2\vec{b}+\vec{c})$$

$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=2\overrightarrow{\mathrm{AT}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\cdot\frac{3}{11}(2\vec{b}+c)-\vec{b}=\boldsymbol{\frac{1}{11}(\vec{b}+6\vec{c})}$$

点 F は 2 直線 AE，BC 上の点であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{1}{7}(\vec{b}+6\vec{c})}$$



(2) $|\vec{b}|^2\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b}$，すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$ と垂直であるから

$$\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AB}^2}=\sqrt{2}$$

下の図のように，座標平面上に $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ \sqrt{2})$ をとると

$$\mathrm{D}\left(1,\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

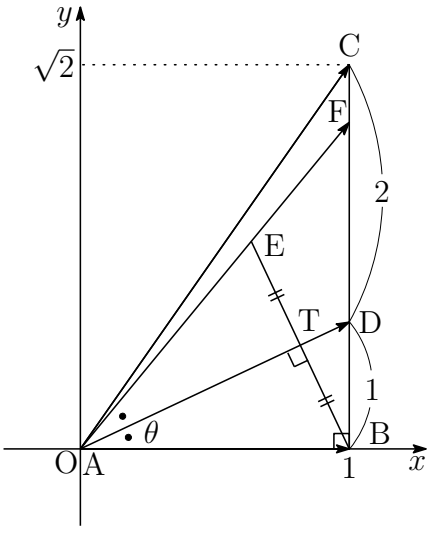
直線 AD の偏角を θ とすると　　$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

点 E の座標は $(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta},\ \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)=\left(\frac{7}{11},\ \frac{6\sqrt{2}}{11}\right)$$

$(1,\ 0)=\vec{b}$，$(0,\ \sqrt{2})=\vec{c}-\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{7}{11}\vec{b}+\frac{6}{11}(\vec{c}-\vec{b})=\boldsymbol{\frac{1}{11}(\vec{b}+6\vec{c})},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{11}{7}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\frac{1}{7}(\vec{b}+6\vec{c})}$$



(3) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{7}(\vec{b}+6\vec{c})-\frac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{c})$$
$$=\frac{11}{21}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{11}{21}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

よって　$\mathbf{DF:BC=11:21}$

462 △OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は

$$|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=2.\quad |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$$

を満たすとする．s，t，k は

$$s\geqq 0,\quad t\geqq 0,\quad s+t=k$$

を満たす実数とし，点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s-2t)\vec{a}+(s+t)\vec{b}$$

を満たしながら動くとする．　　(大分大 2020 年 2)

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $|-2\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めなさい．

(2) $k=1$ のとき，点 P の存在範囲を求めなさい．

(3) $1\leqq k\leqq 2$ のとき，点 P の存在範囲を求めなさい．

(4) $1\leqq k\leqq 2$ のとき，点 P の存在範囲の面積を求めなさい．

解答　(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ より　　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$

これに $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ を代入すると

$$1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=7\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=1}$$

また　　$|-2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=4\cdot 1^2-4\cdot 1+2^2=4$

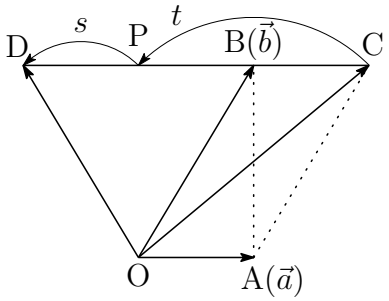
よって　$|-2\vec{a}+\vec{b}|=\boldsymbol{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s-2t)\vec{a}+(s+t)\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(\vec{a}+\vec{b})+t(-2\vec{a}+\vec{b})$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-2\vec{a}+\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad \cdots(*)$$

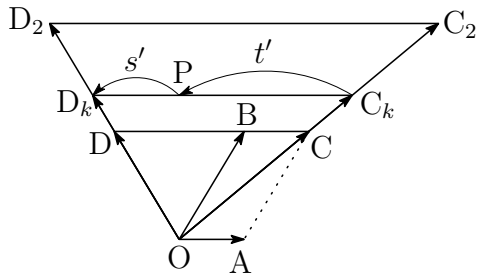


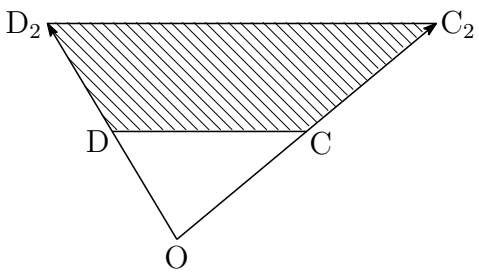
点 P は線分 CD を $t:s$ に内分する点である $(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t=1)$．
よって，P は線分 CD 上 (両端を含む) にある．

(3) $(*)$ において，$s=ks'$，$t=kt'$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく
$(s'\geqq 0,\ t'\geqq 0,\ s'+t'=1)$．なお，点 C_1，D_1 はそれぞれ C，D である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=ks'\overrightarrow{\mathrm{OC}}+kt'\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OC}_k}+t'\overrightarrow{\mathrm{OD}_k}$$

点 P は線分 $\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$ を $t':s'$ に内分する点である．$1\leqq k\leqq 2$ より，P の存在する範囲は，図の斜線部分の台形 $\mathrm{CC_2D_2D}$ の内部および境界線である．





(4) $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-2\vec{a}+\vec{b}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=3\vec{a}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

したがって　$\triangle\mathrm{OCD}=3\triangle\mathrm{OAB}=3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

よって，求める面積は　$(2^2-1)\triangle\mathrm{OCD}=3\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{3}}{2}}$

463* a を正の定数とする．AB $=a$，AC $=2a$，$\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{2}{3}\pi$ である $\triangle \mathrm{ABC}$ と，$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=a$ を満たす動点 P がある．　(旭川医科大)

(1) 辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ の最大値を求めよ．

(3) 線分 AP が通過してできる図形の面積 S を求めよ．

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\dfrac{1}{3}|2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

$$|2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+4\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$
$$=4\cdot a^2+4\cdot a\cdot 2a\cos\frac{2}{3}\pi+(2a)^2=4a^2$$

$|2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|>0$ より　$|2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2a$　$\cdots$①

よって　　$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\dfrac{1}{3}\cdot 2a=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}a}$

(2) $2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})$
$$=-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=a$ より

$$|-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=a\quad\text{すなわち}\quad|\overrightarrow{\mathrm{EP}}|=a$$

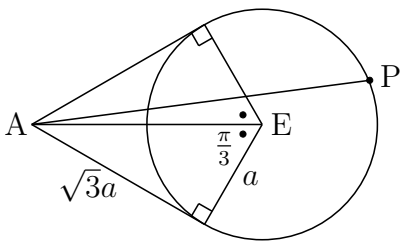
① より $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EP}}|$ であるから

$$2a-a\leqq|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\leqq 2a+a\quad\text{ゆえに}\quad a\leqq|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\leqq 3a$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ の最大値は　$\boldsymbol{3a}$

(3) 下の図から，求める面積は

$$2\cdot\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{3}a+\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{4\pi}{3}=\boldsymbol{\left(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)a^2}$$



464 平面上の △ABC は，AB = 2，AC = 3，∠BAC = 60° を満たしているとする．また，平面上の動点 P に対し実数 $f(\mathrm{P})$ を

$$f(\mathrm{P}) = \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

で定める． (香川大)

(1) △ABC の重心を G とするとき，$f(\mathrm{G})$ の値を求めよ．

(2) $f(\mathrm{P}) = \dfrac{8}{3}$ となる点 P の全体は円になることを示せ．

(3) 点 P が平面全体を動くとき，$f(\mathrm{P})$ のとり得る値の範囲を求めよ．

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 60^\circ = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = 3$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ より

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{P}) &= \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + (\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) + (\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\
&= 3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - 2(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= 3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - 6\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 3 \\
&= 3|\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2 - 3|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2 + 3 \\
&= 3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2 - 3|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2 + 3
\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2 = \frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 &= \frac{1}{9}(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2) \\
&= \frac{1}{9}(2^2 + 2\cdot 3 + 3^2) = \frac{19}{9}
\end{aligned}$$

したがって

$$f(\mathrm{P}) = 3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2 - 3\cdot\frac{19}{9} + 3 = 3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2 - \frac{10}{3} \qquad (*)$$

(∗) より　　$\boldsymbol{f(\mathrm{G}) = -\dfrac{10}{3}}$

(2) (∗) より，$f(\mathrm{P}) = \dfrac{8}{3}$ のとき　$3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2 - \dfrac{10}{3} = \dfrac{8}{3}$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{GP}}| = \sqrt{2}$

よって，点 P の全体は **G を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円**になる．

(3) (∗) より　　$\boldsymbol{f(\mathrm{P}) \geqq -\dfrac{10}{3}}$

7.40　ベクトルと空間図形

7.40.1　Review

465 2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ 0,\ -1)$ がある．実数 t に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とするとき

(1) $|\vec{c}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ．

(2) $\vec{b}\perp\vec{c}$ であるとき，t の値を求めよ．

解答　(1) $|\vec{a}|^2=14$，$|\vec{b}|^2=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ より

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2&=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\\&=14-2t+5t^2=5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{69}{5}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{5}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{69}{5}}}$

466 2つの空間ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 4,\ 5)$ の両方に垂直で，大きさが1である空間ベクトルをすべて求めよ．

解答　$\vec{a}\times\vec{b}=(2,\ 1,\ -2)$，$|\vec{a}\times\vec{b}|=3$ より，求めるベクトルは

$$\pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\boldsymbol{\pm\frac{1}{3}(2,1,-2)}$$

467 (1) 3 点 A$(2,\ 3, -1)$，B$(4,\ 1, -4)$，C$(-2,\ m-1, -n+2)$ が同一直線上にあるとき，m，n の値を求めよ．

(2) 3 点 A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(0,\ 2,\ 3)$，C$(-1,\ 0,\ 0)$ の定める平面を α とする．点 P$(2,\ 3,\ z)$ が平面 α 上にあるとき，z の値を求めよ．

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, -2, -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-4,\ m-4, -n+3)$ より，3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，これらの x 成分に注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \text{ゆえに} \quad (-4,\ m-4, -n+3) = (-4,\ 4,\ 6)$$

上の第 2 式の y 成分，z 成分が等しいから

$$m-4=4,\ -n+3=6 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{m=8,\ n=-3}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2, -1, -1)$ より $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1, -5,\ 3)$

A$(1,\ 1,\ 1)$，P$(2,\ 3,\ z)$ より $\qquad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1,\ 2,\ z-1)$

点 P が平面 ABC 上にあるとき，$(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ より

$$1 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 3(z-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{z=4}$$

468 空間において原点を O とし，3 点 A，B，C の位置ベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,\ 1, -2), \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (4,\ 1, -3), \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (5,\ 3, -3)$$

とする．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ と内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(2) $\angle \mathrm{BAC}$ の大きさと $\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 0, -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2,\ 2, -1)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \boldsymbol{\sqrt{2}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = \boldsymbol{3}$$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$ および (1) の結果から

$$\cos \angle \mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\angle \mathrm{BAC} = \frac{\pi}{4}},$$
$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 9 - 3^2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

7.40.2 Exercise

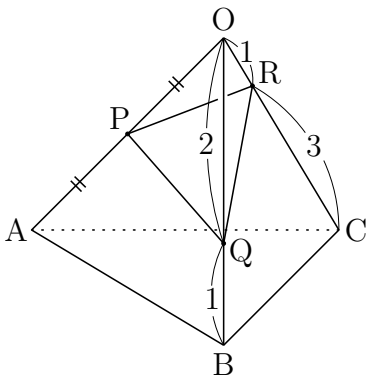
469 1辺の長さが1である正四面体OABCを考える。辺OAの中点をP，辺OBを2 : 1に内分する点をQ，辺OCを1 : 3に内分する点をRとする。以下の問いに答えよ。 (九大文系2015年 2)

(1) 線分PQの長さと線分PRの長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ。

(3) 三角形PQRの面積を求めよ。

解答 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと



$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{4}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{4}{9}|\vec{b}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

よって
$$\mathbf{PQ=\frac{\sqrt{13}}{6},\ PR=\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

別解 △OPQおよび△OPRに余弦定理を適用すると

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{36}$$
$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OR}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$

$= \frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2$

$= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{5}{48}}$

(3) $\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{36}\cdot\frac{3}{16} - \left(\frac{5}{48}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{131}}{96}}$

470 四面体 OABC において，辺 OA を 1 : 3 に内分する点を M，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を N，線分 MN の中点を P，直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) OP : OQ を求めよ．

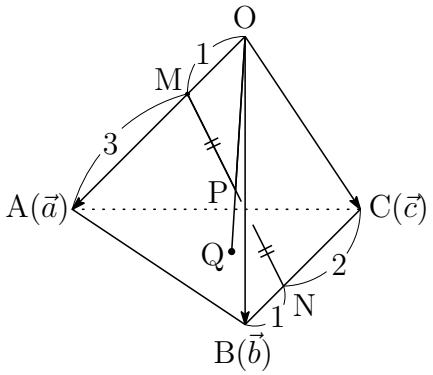
解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{3\vec{a}+8\vec{b}+4\vec{c}}{24}}$$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{8}\cdot\frac{3\vec{a}+8\vec{b}+4\vec{c}}{15}=\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

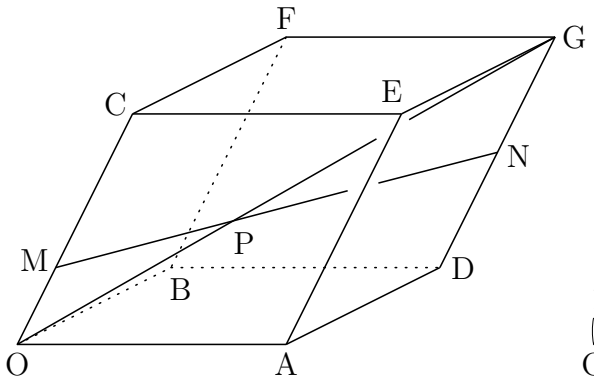
よって　　$\mathbf{OP : OQ = 5 : 8}$

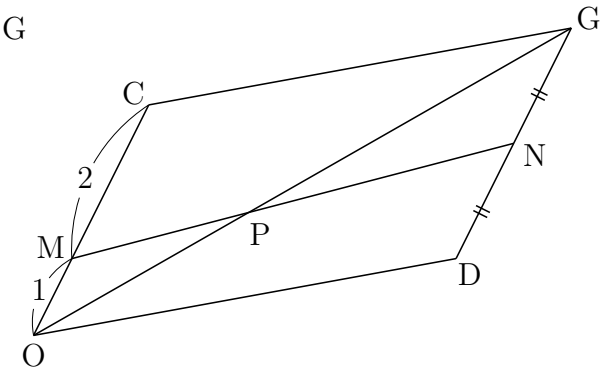


471 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OC を 1 : 2 に内分する点を M とし，辺 DG の中点を N とする．対角線 OG と平面 AMN との交点を P とする．OG : OP を求めよ．

解答 OC//DG であるから，4 点 O，M，N，G を通る平面上に 2 直線 OG，MN にある．OM : NG = 2 : 3 であるから，点 P は線分 OG を 2 : 3 に内分する点である．

よって　**OG : OP = 5 : 2**





7.40.3 Try

472* 四面体 OABC において，OA = OB = OC = 1 とする．
∠AOB = 60°，∠BOC = 45°，∠COA = 45° とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) CH の長さを求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．　(東北大文系 2013 年 2)

解答 (1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})$ は平面 OAB 上のベクトルで $\vec{a}$ に垂直．

これと平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{\vec{c}(\vec{a}-2\vec{b})}{\sqrt{3}}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}-\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\right|^2=\frac{2}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})-\frac{2\sqrt{2}}{3}(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+|\vec{c}|^2$$

$$=\frac{2}{9}\cdot3-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}+1=\frac{1}{3}\quad\text{よって}\quad \mathrm{CH}=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は $\vec{a},\ \vec{b}$ と垂直であることに注意して

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\vec{c}\cdot\left\{\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\right\}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+|\vec{c}|^2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1^2 = \frac{1}{3}$$

よって　　$\mathrm{CH} = |\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

(3) $\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

473 座標空間に 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 1)，B(2, 2, 1)，C(1, 3, −3) がある．

(1) △ABC の面積を求めよ．

(2) 原点 O から 3 点 A，B，C を通る平面に下した垂線を OD とする．点 D の座標と線分 OD の長さを求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ． (鳥取大 改)

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 2,-4)$ より $\quad\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-4,\ 4,\ 2)$

したがって $\quad|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}=6$

よって $\quad\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\dfrac{1}{2}\cdot6=\mathbf{3}$

(2) $\vec{n}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 2,\ 1)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}=\frac{1\cdot(-2)+3\cdot2+(-3)\cdot1}{(-2)^2+2^2+1^2}(-2,\ 2,\ 1)$$
$$=\frac{1}{9}(-2,\ 2,\ 1)=\left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}},\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{1}{9}\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

(3) 四面体 OABC の体積を V とすると，(1)，(2) より

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{1}{3}\cdot3\cdot\frac{1}{3}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-4,\ 4,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(-1,-1,-1)$ より

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=\frac{1}{6}|(-4)\cdot(-1)+4\cdot(-1)+2\cdot(-1)|=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

O を始点とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 3-3)$ より

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{1}{6}|-1\cdot1+1\cdot3+0\cdot(-3)|=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

補足 外積 (ベクトル積) を参照

$$|(\overrightarrow{\mathbf{OA}}\times\overrightarrow{\mathbf{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathbf{OC}}|=|(\overrightarrow{\mathbf{OB}}\times\overrightarrow{\mathbf{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathbf{OA}}|=|(\overrightarrow{\mathbf{OC}}\times\overrightarrow{\mathbf{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathbf{OB}}|$$

474* 四面体 ABCD と点 P があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする．

〔1〕 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}+4\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$ を満たす．

(1) 直線 AP と平面 BCD の交点を E，平面 ABP と辺 CD の交点を F とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ．また，CF : FD を求めよ．

(2) 四面体 ABCD，PBCD，PACD の体積比を求めよ．

〔2〕 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$ (α, β, γ は正の実数) を満たす．平面 ABP と辺 CD の交点を G とするとき，CG : GD を求めよ．　(立命館大 改)

解答 〔1〕 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}+4\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}\quad\cdots(*)$

(1) $(*)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}})+4(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=\vec{0}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{10}=\boldsymbol{\dfrac{2\vec{b}+3\vec{c}+4\vec{d}}{10}}$

E は平面 BCD 上の点であるから，上式より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{9}{10}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{9}=\frac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\quad\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{9}=\boldsymbol{\frac{2\vec{b}+3\vec{c}+4\vec{d}}{9}}$$

$(*)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}+2(\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}+4(\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\vec{0}$

F は平面 ABP 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{7}{4}\cdot\frac{-\overrightarrow{\mathrm{CA}}-2\overrightarrow{\mathrm{CB}}+10\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{7}=\frac{7}{4}\overrightarrow{\mathrm{CF}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より　　$\boldsymbol{\mathrm{CF}:\mathrm{FD}=4:3}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{4}{7}(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{7}=\boldsymbol{\frac{3\vec{c}+4\vec{d}}{7}}$$

(2) $(*)$ より　$(\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}})+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})+4(\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}})=\vec{0}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+3\overrightarrow{\mathrm{BC}}+4\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{10}=\frac{4}{5}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+3\overrightarrow{\mathrm{BC}}+4\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{8}\quad\cdots②$$

①，② より，求める体積比は　$1:\dfrac{1}{10}:\dfrac{1}{5}=\boldsymbol{10:1:2}$

〔2〕 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$ ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は正の実数) より

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\alpha(\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})+\beta\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\gamma(\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\vec{0}$$

整理すると

$$-\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{CB}}+(1+\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\gamma\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

G は平面 ABP 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{CB}}+(1+\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

よって　$\mathrm{CG}:\mathrm{GD}=\dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}:1-\dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}=\boldsymbol{\gamma:\beta}$

475 一辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。ただし，点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}$，および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$ をみたす。辺 AP を 2 : 1 に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする。さらに，点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は，平面 OMN に垂直であるとする。このとき，長さの比 BQ : QC，および線分 OP の長さを求めよ。

(九大理系 2013 年 2)

解答 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{e}\perp\vec{a}$，$\vec{e}\perp\vec{c}$，$|\vec{e}|=1$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{e}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{c}+z\vec{e} \qquad (x,\ y,\ z \text{ は実数})$$

とおくと，条件により　$x=\dfrac{1}{4}$，$y=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}$

したがって，M，N の条件により

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}z\vec{e}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)=\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}z\vec{e}$$

α，β，γ を実数とし，$\alpha\vec{a}+\beta\vec{c}+\gamma\vec{e}$ が，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ に垂直であるとき

$$\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{2}{3}z\gamma=0,\quad \frac{1}{8}\alpha+\frac{3}{4}\beta+\frac{1}{2}z\gamma=0$$

したがって　　$\alpha:\beta:\gamma=2z:z:-2$

ゆえに，直線 PQ の方向ベクトルを $\vec{v}=2z\vec{a}+z\vec{c}-2\vec{e}$ とすると，直線 PQ は，媒介変数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\vec{v}&=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}+t(2z\vec{a}+z\vec{c}-2\vec{e})\\&=\left(\frac{1}{4}+2zt\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}+zt\right)\vec{c}+(z-2t)\vec{e}\end{aligned}$$

Q は BC 上の点であるから，上式より

$$\frac{1}{2}+zt=1,\ \ z-2t=0 \quad \text{すなわち} \quad z=\pm1,\ t=\pm\frac{1}{2} \quad (\text{複号同順})$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{5}{4}\vec{a}+\vec{c}$，　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\dfrac{5}{4}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}$

よって　　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\dfrac{1}{4}:\dfrac{5}{4}=\mathbf{1:5}$

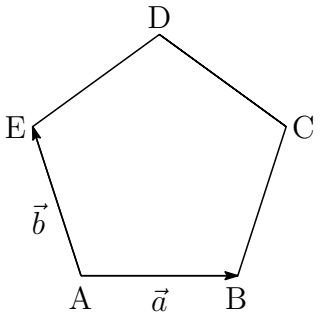
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)$，$z=\pm1$ より

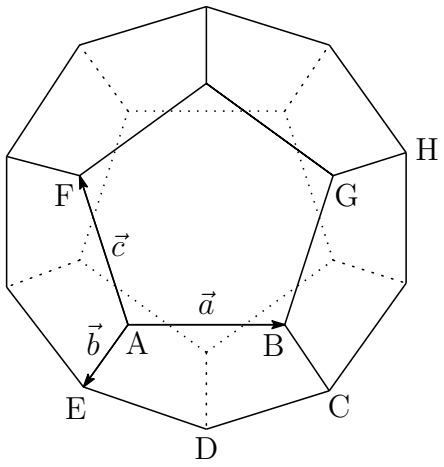
$$\mathrm{OP}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{21}}}{\mathbf{4}}$$

補足　ベクトル $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\times\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ に平行である．九大 2004 年一般前期理系数学 **4** のベクトル積[15](外積) を参照.

[15] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

476* 下の図のように，辺の長さが 1 の正五角形を面にもつ正十二面体があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{c}$ とする． (早稲田大 改)





(1) 正五角形 ABCDE の対角線 AD の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ で表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

解答 (1) $x = \mathrm{AD}$ とおく．$\angle\mathrm{DAB}$ の二等分線と BD の交点を P とすると

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AP} = \mathrm{PD} = x, \quad \mathrm{PB} = x - 1$$

$\triangle\mathrm{DAB} \backsim \triangle\mathrm{ABP}$ であるから

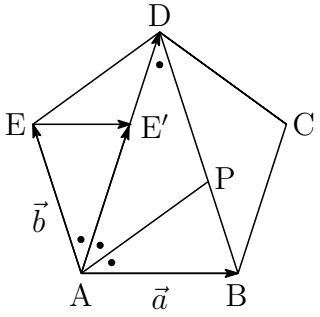
$$x : 1 = 1 : x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$x > 0$ であるから $\qquad x = \mathrm{AD} = \dfrac{\boldsymbol{1 + \sqrt{5}}}{\boldsymbol{2}}$

(2) AD 上に $\mathrm{AE'} = 1$ となる点 E′ をとると，$\triangle\mathrm{AEE'} \equiv \triangle\mathrm{APB}$ より

$$\mathrm{EE'} = \mathrm{PB} = x - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AE'}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{EE'}} = \vec{b} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\vec{a}$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AE'}} = \boldsymbol{\vec{b} + \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\vec{a}}$ $\quad$ 同様に $\quad \overrightarrow{\mathrm{BG}} = \boldsymbol{\vec{c} + \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\vec{a}}$



(3) $x(x-1)=1$ に注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=x\overrightarrow{\mathrm{AE'}}=x\{\vec{b}+(x-1)\vec{a}\}=x\vec{b}+\vec{a}$$

この結果を利用すると　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=x\overrightarrow{\mathrm{BG}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

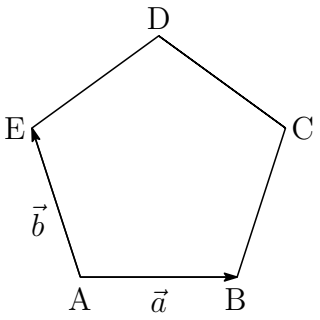
$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}-\overrightarrow{\mathrm{BG}}=(x-1)\overrightarrow{\mathrm{BG}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}} \qquad (*)$$

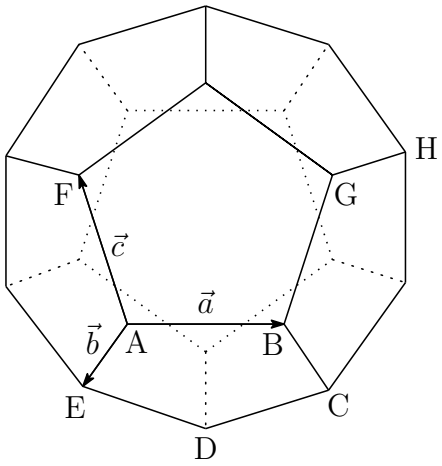
(2) で求めた 2 式

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\vec{c}+(x-1)\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}+(x-1)\vec{a}$$

を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GH}}&=(x-1)\{\vec{c}+(x-1)\vec{a}\}+\vec{b}+(x-1)\vec{a}\\&=x(x-1)\vec{a}+\vec{b}+(x-1)\vec{c}\\&=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}}\end{aligned}$$





7.41　空間のベクトル方程式

7.41.1　Review

477 空間内の 2 点 $(-2,\ 5,-1)$，$(2,\ 1,\ 3)$ を通る直線の，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ を同時に満たす部分の長さを求めよ．(津田塾大)

解答 2 点 $(-2,\ 5,-1)$，$(2,\ 1,\ 3)$ を通る直線は，t を媒介変数として

$$\begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = -4t + 5 \\ z = 4t - 1 \end{cases}$$

と表される．$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ のとき

$$4t - 2 \geqq 0, \quad -4t + 5 \geqq 0, \quad 4t - 1 \geqq 0 \quad \text{よって} \quad \frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{5}{4}$$

$t = \dfrac{1}{2}$ のとき $(0,\ 3,\ 1)$，　$t = \dfrac{5}{4}$ のとき $(3,\ 0,\ 4)$

よって，求める線分の長さは

$$\sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (4-1)^2} = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$$

473 2 点 $\mathrm{A}(3,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{B}(1,\ 6,\ 0)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ．(高知工科大)

解答 球面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-3,\ y-2,\ z-2), \quad \overrightarrow{\mathrm{BP}} = (x-1,\ y-6,\ z)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$ であるから

$$(x-3)(x-1) + (y-2)(y-6) + (z-2)z = 0$$

よって　$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 6}$

479 座標空間において，点 $(a,\ 0,-1)$ を中心とする半径 3 の球面が，yz 平面と交わってできる円の半径が 2 のとき，a の値を求めよ．(山梨大)

解答 点 $(a,\ 0,-1)$ を中心とする半径 3 の球面の方程式は

$$(x-a)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$$

この球面が yz 平面と交わってできる円の方程式は

$$x = 0, \quad y^2 + (z+1)^2 = 9 - a^2$$

この円の半径が 2 であるから　$9 - a^2 = 2^2$　よって　$\boldsymbol{a = \pm\sqrt{5}}$

7.41.2 Exercise

480* 3 点 A(1, 1, 3)，B(2, 2, 1)，C(1, 3, 2) をとり，原点を O とする．

(1) 2 点 A，B を結ぶ直線と xy 平面の交点を B′ とし，2 点 A，C を結ぶ直線と xy 平面の交点を C′ とするとき，点 B′，点 C′ の座標を求めよ．

(2) △OB′C′ の面積を求めよ．

解答 (1) 3 点 A(1, 1, 3)，B(2, 2, 1)，C(1, 3, 2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 1, -2), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (0,\ 2, -1)$$

直線 AB を媒介変数 s を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 1,\ 3) + s(1,\ 1, -2) \\ &= (1+s,\ 1+s,\ 3-2s) \end{aligned} \tag{$*$}$$

直線 AC を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 3) + t(0,\ 2, -1) \\ &= (1,\ 1+2t,\ 3-t) \end{aligned} \tag{$**$}$$

これらの直線と xy 平面との共有点において

$$3-2s=0, \quad 3-t=0 \quad \text{ゆえに} \quad s=\frac{3}{2},\ t=3$$

これらを $(*)$，$(**)$ に代入して　　$\mathbf{B'\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ 0\right)}$，$\mathbf{C'(1,\ 7,\ 0)}$

(2) (1) の結果から，その x 座標，y 座標に注目して

$$S = \frac{1}{2}\left|\frac{5}{2}\cdot 7 - 1\cdot\frac{5}{2}\right| = \mathbf{\frac{15}{2}}$$

481* 点 $(1,\ 2,\ 3)$ を中心とする球が平面 $z=-2$ と接している．

(1) この球面の方程式を求めよ．

(2) 点 $(8,\ 1,\ p)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(3,-4,\ 2)$ に平行な直線が，この球と接している．p の値を求めよ．

解答 (1) 球の半径は，z 座標に注目して　$3-(-2)=5$

求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25}$$

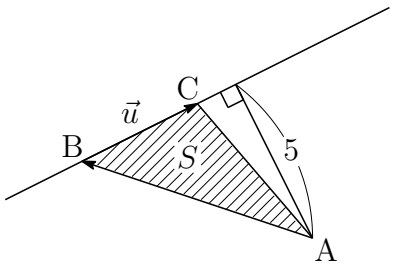
(2) $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{B}(8,\ 1,\ p)$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{u}$ とする．△ABC の面積を S とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(7,-1,\ p-3)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(3,-4,\ 2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4p-14,\ 3p-23,-25)$$

$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cdot 5$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{(4p-14)^2+(3p-23)^2+(-25)^2}&=\frac{1}{2}\sqrt{29}\cdot 5\\ (4p-14)^2+(3p-23)^2+(-25)^2&=29\cdot 25\\ (4p-14)^2+(3p-23)^2&=100\\ 25p^2-250p+625&=0\\ p^2-10p+25&=0\\ (p-5)^2&=0\end{aligned}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{p=5}$



482 $a,\ b,\ c$ を実数とし，座標空間内の点を

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{A}(2,\ 1,\ 1),\quad \mathrm{B}(1,\ 2,\ 3),\quad \mathrm{C}(a,\ b,\ c),\quad \mathrm{M}\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$$

と定める．空間内の点 P で $4|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2+3|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=30$ を満たすもの全体が M を中心とする球面をなすとき，この球面の半径と $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．　(東北大)

解答 $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$|\vec{a}|^2=6,\quad |\vec{b}|^2=14,\quad |\vec{c}|^2=$$

与えらた等式から

$$\begin{aligned}4|\vec{p}|^2+|\vec{p}-\vec{a}|^2+2|\vec{p}-\vec{b}|^2+3|\vec{p}-\vec{c}|^2&=30\\ 10|\vec{p}|^2-2(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})\cdot\vec{p}&=30-(|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+3|\vec{c}|^2)\\ |\vec{p}|^2-2\cdot\frac{1}{10}(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})\cdot\vec{p}&=3-\frac{1}{10}(|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+3|\vec{c}|^2)\qquad(*)\end{aligned}$$

この円の中心が M であるから $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{10}(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})$ であるから

$$\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1\right)=\frac{1}{10}(4+3a,\ 5+3b,\ 7+3c)$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=2,\ b=0,\ c=1}$

このとき
$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2&=2^2+1^2+1^2=6,\\ |\vec{b}|^2&=1^2+2^2+3^2=14,\\ |\vec{c}|^2&=2^2+0^2+1^2=5,\\ |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2&=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

$(*)$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=3-\frac{1}{10}(6+2\cdot14+3\cdot5)\\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|^2&=-\frac{19}{10}+\frac{9}{4}\\ |\overrightarrow{\mathrm{MP}}|^2&=\frac{7}{20}\end{aligned}$$

よって，球面の半径は　　$\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{7}{20}}}$

483 (1) 点 A(5, 3, 6) を通り，$\vec{n} = (1,\ 3,\ 2)$ に垂直な平面の方程式を求めよ．

(2) 3 点 A(2, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(0, 0, 4) とするとき，平面 ABC の方程式を求めよ．

解答 (1) 平面上に点 P$(x,\ y,\ z)$ をとると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ より

$$1(x-5)+3(y-3)+2(z-6)=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x+3y+2z-26=0}$$

(2) $\boldsymbol{\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1}$

7.41.3 Try

484* 点 O(0, 0, 0) を原点とする座標空間において，点 A，B，C を A(4, 0, 0)，B(0, 4, 0)，C(1, 1, $\sqrt{6}$) とし，直線 AB 上の点を P，直線 OC 上の点を Q とする． (立命館大)

(1) 直線 AB と直線 OC が交わらないことを証明せよ．

(2) 2 点 P，Q の距離 PQ の最小値を求め，そのときの点 P および点 Q の座標を求めよ．

(3) 直線 OC 上に，点 R を △ABR が正三角形となるようにとるとき，点 R の座標を求めよ．

解答 (1) s, t を媒介変数とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{s}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,\ 0,\ 0) + s(-1,\ 1,\ 0) = (-s+4,\ s,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t(1,\ 1,\ \sqrt{6}) = (t,\ t,\ \sqrt{6}t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とすると

$$-s+4 = t, \quad s = t, \quad 0 = \sqrt{6}t$$

上の第 1，第 2 式から $s = t = 2$ となり，これは第 3 式を満たさない．

よって，直線 AB と直線 OC は交わらない．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (s+t-4, -s+t,\ \sqrt{6}t)$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= (s+t-4)^2 + (-s+t)^2 + (\sqrt{6}t)^2 \\ &= 2s^2 - 8s + 8t^2 - 8t + 16 \\ &= 2(s-2)^2 + 8\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 6\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は $s = 2,\ t = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 6 を取るから

$$\textbf{PQ は P(2, 2, 0), Q}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}}\right)\textbf{ のとき 最小値}\sqrt{\mathbf{6}}$$

別解 2 直線 AB，OC はねじれの位置にあるから，PQ が最小となるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ より

$$\begin{aligned}-4(s+t-4)+4(-s+t)&=0,\\ 1(s+t-4)+1(-s+t)+\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}t&=0\end{aligned}$$

整理すると　$-8s+16=0,\ 8t-4=0$　ゆえに　$s=2,\ t=\dfrac{1}{2}$

このとき，$\mathrm{P}\boldsymbol{(2,\ 2,\ 0)}$，$\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}}\right)$ で最小値 $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ をとる．

(3) $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ より

$$(x-4)^2+y^2+z^2=x^2+(y-4)^2+z^2=(0-4)^2+(4-0)^2$$

整理すると

$$x^2+y^2+z^2-8x=x^2+y^2+z^2-8y=16$$

R は直線 OC 上にあるから，上式に $x=t,\ y=t,\ z=\sqrt{6}$ を代入すると

$$t^2+t^2+6t^2-8t=16\quad\text{ゆえに}\quad(t+1)(t-2)=0$$

$t=-1,\ 2$ であるから，点 R の座標は

$$\boldsymbol{(-1,-1,-\sqrt{6}),\quad (2,\ 2,\ 2\sqrt{6})}$$

485* 座標空間の 3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) が定める平面を α とする．点 D(1, 1, 2) から平面 α に垂線を下ろし，垂線と平面 α との交点を H とする．

(1) 点 H の座標を求めよ．

座標空間に点 E(1, 1, 1) をとり，点 P は平面 α 上を動くものとする．

(2) $\mathrm{DP}^2+\mathrm{PE}^2$ の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ．

(3) $\mathrm{DP}+\mathrm{PE}$ の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ．　(同志社大 改)

解答　(1) 3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) を通る平面 α の方程式は

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \quad \text{すなわち} \quad x+y+z-1=0$$

したがって，α の法ベクトルは　$\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$

点 D(1, 1, 2) を通り，$\vec{n}$ に平行な直線を媒介変数表示すると

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=(1,\ 1,\ 2)+t(1,\ 1,\ 1)\\&=(1+t,\ 1+t,\ 2+t)\end{aligned}\qquad (t \text{ は媒介変数})$$

これを α の方程式に代入すると

$$(1+t)+(1+t)+(2+t)-1=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=-1$$

よって，点 H の座標は　$\boldsymbol{(0,\ 0,\ 1)}$

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，D(1, 1, 2)，E(1, 1, 1) より

$$\begin{aligned}\mathrm{DP}^2+\mathrm{EP}^2&=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2\\&\qquad+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\\&=2\left\{(x-1)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}\end{aligned}\qquad (*)$$

$\mathrm{F}\left(1,\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ とおくと　$\mathrm{DP}^2+\mathrm{EP}^2=2\mathrm{FP}^2+\dfrac{1}{2}$

P は FP を最小とする点，すなわち，F から α に引いた垂線との交点である．その垂線を媒介変数表示すると

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=\left(1,\ 1,\ \frac{3}{2}\right)+s(1,\ 1,\ 1)\\&=\left(1+s,\ 1+s,\ \frac{3}{2}+s\right)\end{aligned}\qquad (s \text{ は媒介変数})$$

上式を α の方程式に代入して　$s=-\dfrac{5}{6}$　よって　$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{6}},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{6}},\ \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}\right)$

これを $(*)$ に代入して，最小値　$\boldsymbol{\dfrac{14}{3}}$

(3) D$(1,\ 1,\ 2)$ と α に関して対称な点を D$'(x_1,\ y_1,\ z_1)$ とすると，2 点 D，D$'$ の中点が H$(0,\ 0,\ 1)$ であるから

$$\frac{1+x_1}{2}=0,\ \frac{1+y_1}{2}=0,\ \frac{2+z_1}{2}=1$$

これを解いて　$x_1=-1,\ y_1=-1,\ z_2=0$　ゆえに　D$'(-1,-1,\ 0)$

E$(1,\ 1,\ 1)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{D'E}}=(2,\ 2,\ 1)$

直線 D$'$E を媒介変数表示すると

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=(-1,-1,\ 0)+u(2,\ 2,\ 1)\\&=(-1+2u,-1+2u,\ u)\qquad (u\text{ は媒介変数})\end{aligned}$$

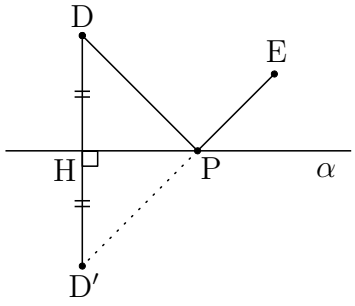
これを α の方程式に代入すると

$$(-1+2u)+(-1+2u)+u-1=0$$

これを解いて　$u=\dfrac{3}{5}$　したがって　$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{5}}\right)$

$$\mathrm{DP}+\mathrm{PE}\geqq|\overrightarrow{\mathrm{D'E}}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$$

よって，求める最小値は　**3**



九大理系 2022 年 1

座標空間内の 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 1,\ 2),\ \mathrm{P}(4,\ 0,-1),\ \mathrm{Q}(4,\ 0,\ 5)$$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P′ の座標を求めよ。

(3) 点 R が平面 α 上を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

解答　(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,\ 2)$

$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ であるから

$$x+y=0,\quad 2x+y+2z=0 \quad \text{ゆえに} \quad y=-x,\quad z=-\frac{1}{2}x$$

$\vec{n}=\left(x,-x,-\dfrac{1}{2}x\right)$，$|\vec{n}|^2=1$ であるから

$$x^2+x^2+\frac{1}{4}x^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2=4$$

$x>0$ に注意して　$x=\dfrac{2}{3}$　よって　　$\boldsymbol{\vec{n}=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)}$

別解 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,\ 2)$ より

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2,-2,-1) \quad \text{また} \quad |\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$$

求める単位ベクトル $\vec{n}$ は，その x 成分が正であることに注意して

$$\vec{n}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

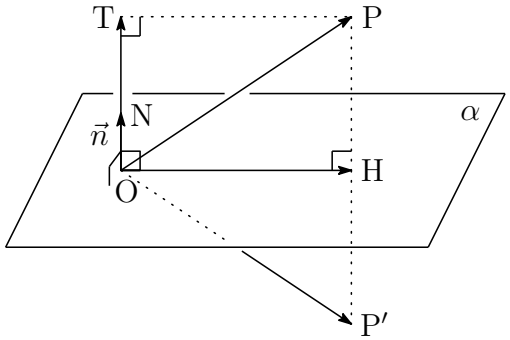
(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$ とし，P から平面 α および直線 ON に引いた垂線の交点をそれぞれ H，T とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OT}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n})\vec{n} \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 0,-1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(2,-2,-1)$

これと $(*)$ の第 1 式により，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ 2,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+(-\overrightarrow{\mathrm{OT}})=(0,\ 4,\ 1)\quad \text{よって}\quad \mathbf{P'(0,\ 4,\ 1)}$$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき，$\mathrm{PR}:\mathrm{RQ}=\mathrm{P'R}:\mathrm{RQ}=3:1$ であるから，R は線分 P′Q を $3:1$ に内分する点である．

$$\left(\frac{1\cdot0+3\cdot4}{3+1},\ \frac{1\cdot4+3\cdot0}{3+1},\ \frac{1\cdot1+3\cdot5}{3+1}\right)\quad \text{すなわち}\quad \mathbf{R(3,\ 1,\ 4)}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき点 R は，2 点 P′$(0,\ 4,\ 1)$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ を通る直線上にある．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+t\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}\qquad (t\text{ は実数})\\&=(0,\ 4,\ 1)+t(4,-4,\ 4)\\&=(4t,\ 4-4t,\ 1+4t)\end{aligned}$$

点 R は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n}=0$ より

$$\frac{2}{3}\cdot4t-\frac{2}{3}(4-4t)-\frac{1}{3}(1+4t)=0\quad \text{これを解いて}\quad t=\frac{3}{4}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(3,\ 1,\ 4)$　よって　$\mathbf{R(3,\ 1,\ 4)}$

486 座標空間において 2 点 $(2,\ 5,\ 13)$，$(2, -7, -3)$ を直径の両端とするような球面 S の中心は$\boxed{}$で，半径は$\boxed{}$である．

3 点 $(3,\ 7,\ 9)$，$(4,\ 9,\ 7)$，$(4,\ 3,\ 10)$ を含む平面と球面 S が交わってできる円の中心は$\boxed{}$で，半径は$\boxed{}$である． (明治薬科大)

解答 A$(2,\ 5,\ 13)$，B$(2, -7, -3)$ の中点，すなわち，S の中心 C は　C$\mathbf{(2,\ -1,\ 5)}$

S の半径は　$\mathrm{CA} = \sqrt{(2-2)^2 + (5+1)^2 + (13-5)^2} = \mathbf{10}$

D$(3,\ 7,\ 9)$，E$(4,\ 9,\ 7)$，F$(4,\ 3,\ 10)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = (1,\ 2, -2), \quad \overrightarrow{\mathrm{DF}} = (1, -4,\ 1) \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{DE}} \times \overrightarrow{\mathrm{DF}} = (-6, -3, -6)$$

$\vec{n} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DE}} \times \overrightarrow{\mathrm{DF}} = (2,\ 1,\ 2)$ とし，C から平面 DEF に垂線 CH を引くと

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (1,\ 8,\ 4)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{2^2 + 1^2 + 2^2}(2,\ 1,\ 2) = (4,\ 2,\ 4),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}} = (2, -1,\ 5) + (4,\ 2,\ 4)) = (6,\ 1,\ 9)$$

S と平面 DEF が交わってできる円の中心 H は　$\mathbf{(6,\ 1,\ 9)}$

S と平面 DEF が交わってできる円の半径は

$$\sqrt{10^2 - |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2} = \sqrt{100 - 36} = \mathbf{8}$$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{CE}} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{CF}} \cdot \vec{n}$

487* 座標空間内に3点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) をとり，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の内積が0になるような点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ の集合を S とする．3点 A，B，C を通る平面を α とするとき，次の問に答えよ．　(岡山大 改)

(1) 集合 S は球面であることを示し，その中心 Q の座標と半径 r の値を求めよ．

(2) 原点 O から最も遠い距離にある S 上の点 R の座標を求めよ．

(3) (1) で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を l とする．球面 S と直線 l のすべての共有点について，その座標を求めよ．

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-1,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(x,\ y-1,\ z)+(x,\ y,\ z-1)$

$$=2\left(x,\ y-\frac{1}{2},\ z-\frac{1}{2}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ であるから，S の方程式は

$$(x-1)x+y\left(y-\frac{1}{2}\right)+z\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad (*)$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{6}{16}$$

よって　$\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}}\right)$，$\boldsymbol{r=\frac{\sqrt{6}}{4}}$

(2) $(*)$ より，S は原点を通る．(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

よって　$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}\right)$

(3) l に平行な単位ベクトルの1つを

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)$$

とおくと，求める点は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\pm r\vec{n}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)$$

$$=\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4}\right)$$

よって　$\left(\boldsymbol{\frac{2\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4}}\right)$

488 座標空間において，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径1の球面を考える．点 $\mathrm{P}(0,\ 1,\ 2)$ と球面上の点 Q の2点を通る直線が xy 平面と交わるとき，その交点を R とおく．点 Q が球面上を動くとき，R の動く領域を求め，xy 平面に図示せよ．

(香川大)

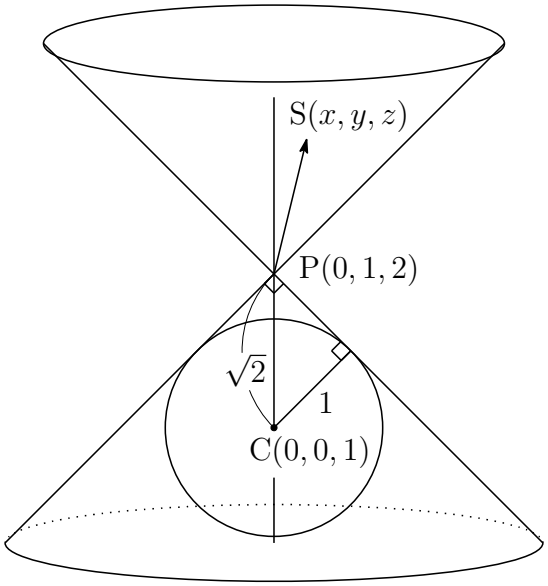
解答 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ とする．直線 PQ は P を頂点とする円錐面およびその内部を通過する．直線 PQ が通る領域内の点を $\mathrm{S}(x,\ y,\ z)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ のなす角を θ とすると，$|\cos\theta| \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}||\overrightarrow{\mathrm{PS}}|} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{|y+z-3|}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-2)^2}} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

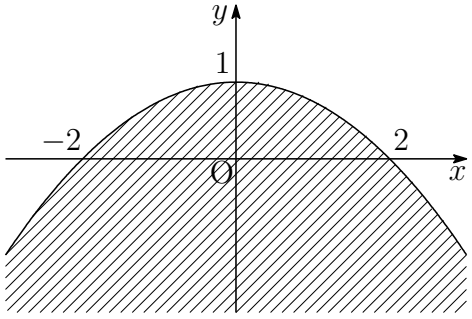
整理すると　　$(y+z-3)^2 \geqq x^2+(y-1)^2+(z-2)^2$

この領域と xy 平面との交点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ 0)$ は，上式に $z=0$ を代入して

$$(y-3)^2 \geqq x^2+(y-1)^2+4 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y \leqq -\frac{1}{4}x^2+1}$$



R の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



大分大学 2010 年 8 番

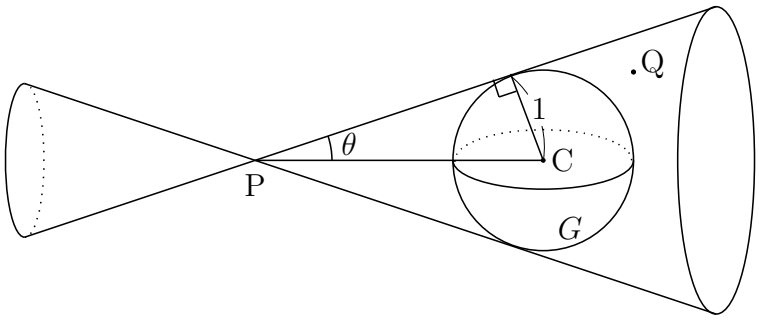
中心の xyz 座標が $(0,\ 0,\ 1)$ で半径が 1 の球 G と点 $\mathrm{P}(0, -2,\ a)$ に関して，点 P を通る直線が球 G と共有点をもつとき，この直線と xy 平面の交点全体が作る図形の外形を表す方程式を求めよ．また，その方程式が表す図形を実数 a に関して分類せよ．

解答 G に接する $\mathrm{P}(0, -2,\ a)$ を頂点とする円錐面上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ とする．

G の中心 $(0,\ 0,\ 1)$ を C とおくと　　$\mathrm{PC} = \sqrt{2^2 + (1-a)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 5}$

円錐面と直線 PC のなす角を θ とすると　$\sin\theta = \dfrac{1}{\mathrm{PC}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 5}}$

したがって　　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = \dfrac{a^2 - 2a + 4}{a^2 - 2a + 5}$



$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (0,\ 2,\ 1-a)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (x,\ y+2,\ z-a)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 2(y+2) + (1-a)(z-a)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 = 2^2 + (1-a)^2 = a^2 - 2a + 5$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = x^2 + (y+2)^2 + (z-a)^2$$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の角は，θ または $\pi - \theta$ であるから

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\cos^2\theta$$

また，上式に上の諸式および $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\cos^2\theta = a^2 - 2a + 4$ を代入すると

$$\{2(y+2) + (1-a)(z-a)\}^2 = (a^2 - 2a + 4)\{x^2 + (y+2)^2 + (z-a)^2\}$$

これを整理することにより，次の円錐面の方程式を得る．

$$(a^2 - 2a + 4)x^2 + (a^2 - 2a)(y+2)^2 + 3(z-a)^2 - 4(1-a)(y+2)(z-a) = 0 \quad \cdots(*)$$

xy 平面による円錐面 $(*)$ の切り口を表す図形は，$z=0$ を代入することにより

$$(a^2-2a+4)x^2+a(a-2)(y+2)^2+4a(1-a)(y+2)+3a^2=0 \quad \cdots(**)$$

$a(a-2)\neq 0$，すなわち，$a\neq 0,\ 2$ のとき，$(**)$ より

$$(a^2-2a+4)x^2+a(a-2)\left\{y+2+\frac{2(1-a)}{a-2}\right\}^2=\frac{a(a^2-2a+4)}{a-2}$$

$$(a^2-2a+4)x^2+a(a-2)\left(y-\frac{2}{a-2}\right)^2=\frac{a(a^2-2a+4)}{a-2} \quad \cdots(***)$$

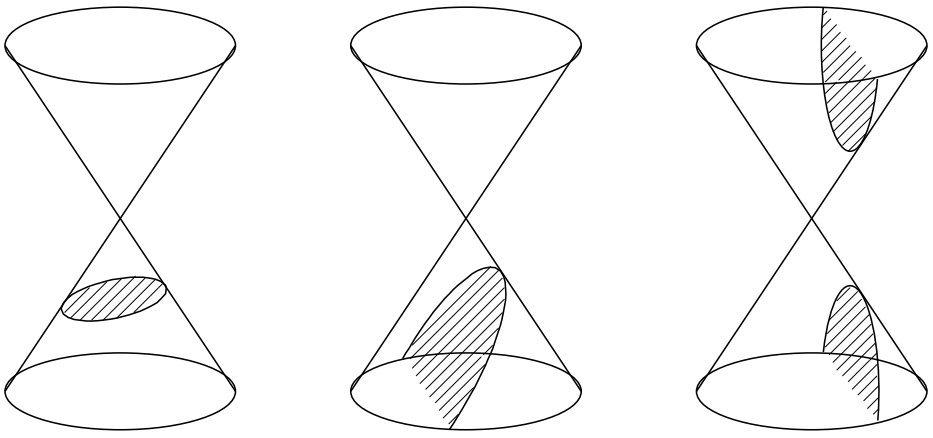
$a^2-2a+4=(a-1)^2+3>0$ であるから，$a(a-2)$ と $\dfrac{a(a^2-2a+4)}{a-2}$ は同符号.

したがって，$(**)$，$(***)$ から

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=0} \text{ のとき} & \text{直線 } \boldsymbol{(x=0)} \\ \boldsymbol{a=2} \text{ のとき} & \text{放物線 } \left(\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{a<0,\ 2<a} \text{ のとき} & \text{楕円} \\ \boldsymbol{0<a<2} \text{ のとき} & \text{双曲線} \end{cases}$$

解説 2 次曲線は，平面 (問題では xy 平面) による円錐面の切り口としても現れる．そのため，これらの曲線を円錐曲線ともいう.

放物線となるのは，平面が母線と平行な場合である．また，直線となるのは，平面が頂点を通り，母線に平行な場合である．とくに，平面が頂点のみを共有するとき，円錐曲線は 1 点に退化するので，本題の $(***)$ では円錐曲線が退化していないことを確認している.



楕円　　放物線　　双曲線

7.42　2 次曲線

7.42.1　Review

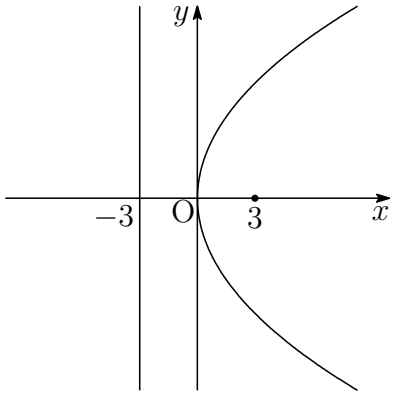
489 次の方程式の焦点と準線の方程式を求め，その概形をかけ.

(1) $y^2 = 12x$

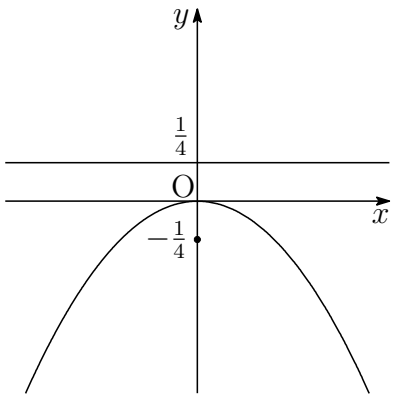
(2) $y = -x^2$

(3) $2y^2 + x = 0$

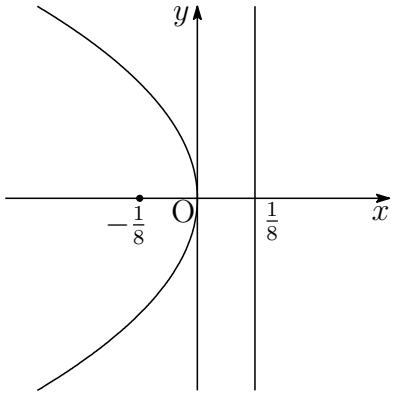
解答　(1) $y^2 = 4 \cdot 3x$ より，**焦点 $(3,\ 0)$，準線 $x = -3$**



(2) $x^2 = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) x$ より，**焦点 $\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$，準線 $y = \dfrac{1}{4}$**



(3) $y^2 = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{8}\right) x$ より，**焦点** $\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{8},\ 0}\right)$，**準線** $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{8}}$

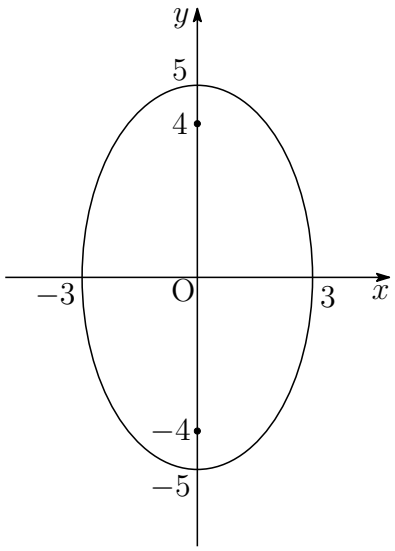


490 次の楕円の頂点と焦点の座標，長軸と短軸の長さを求め，その概形をかけ．

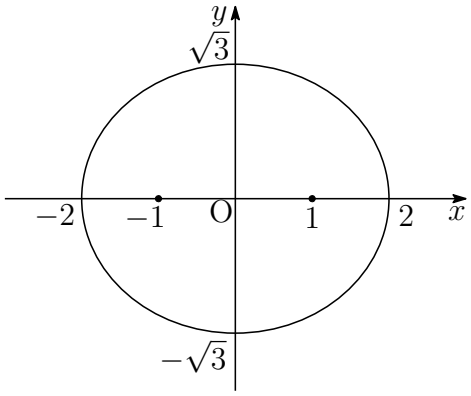
(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

(2) $3x^2+4y^2=12$

解答 (1) **頂点 $(\pm 3,\ 0)$，$(0,\ \pm 5)$，焦点 $(0,\ \pm 4)$**
長軸の長さ 10，短軸の長さ 6



(2) **頂点 $(\pm 2,\ 0)$，$(0,\ \pm \sqrt{3})$，焦点 $(\pm 1,\ 0)$**
長軸の長さ 4，短軸の長さ $2\sqrt{3}$

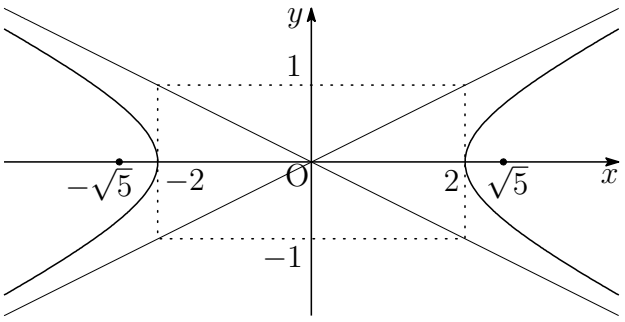


491 次の双曲線の焦点と頂点の座標，漸近線の方程式を求め，その概形をかけ．

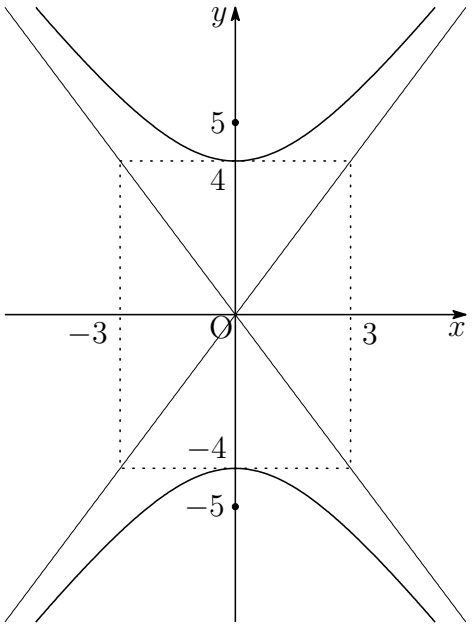
(1) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(2) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = -1$

解答　(1) **頂点 $(\pm 2,\ 0)$，焦点 $(\pm\sqrt{5},\ 0)$，漸近線 $y = \pm\dfrac{1}{2}x$**



(2) **頂点 $(0,\ \pm 4)$，焦点 $(0,\ \pm 5)$，漸近線 $y = \pm\dfrac{4}{3}x$**



492 直線 $\ell : x+y=k$ と曲線 $C : y^2=x$ の共有点の個数を求めよ．

解答 ℓ と C の方程式から，x を消去して整理すると

$$y^2+y-k=0$$

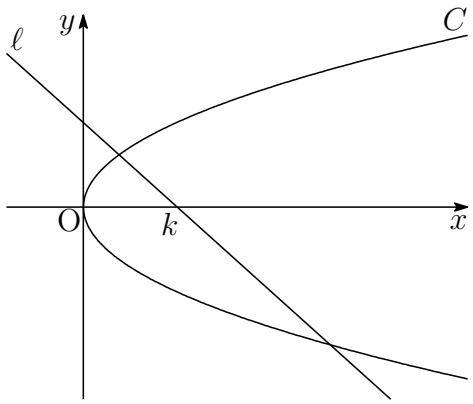
上式の判別式を D とすると

$$D=1^2-4\cdot 1\cdot(-k)=1+4k$$

$D>0$，すなわち，$\boldsymbol{k>-\dfrac{1}{4}}$ のとき　**2個**

$D=0$，すなわち，$\boldsymbol{k=-\dfrac{1}{4}}$ のとき　**1個**

$D<0$，すなわち，$\boldsymbol{k<-\dfrac{1}{4}}$ のとき　**0個**



7.42.2 Exercise

493 次の曲線が，放物線であれば焦点の座標と準線の方程式を，楕円であれば焦点の座標を，双曲線であれば焦点の座標と漸近線の方程式を求め，その概形をかけ.

(1) $-2(x-2)^2 = y-3$

(2) $2(y+1)^2 = x+2$

(3) $\dfrac{(x-2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$

(4) $9(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$

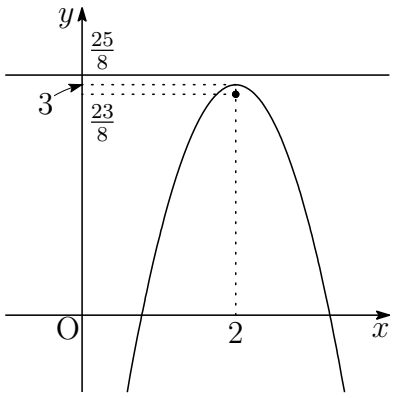
(5) $9(x-2)^2 - 4(y-3)^2 = 36$

(6) $(x+1)^2 - \dfrac{(y-2)^2}{3} = -1$

解答 (1) $-2(x-2)^2 = y-3 \cdots$① を変形すると

$$(x-2)^2 = -\frac{1}{2}(y-3) \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2 = 4\left(-\frac{1}{8}\right)(y-3)$$

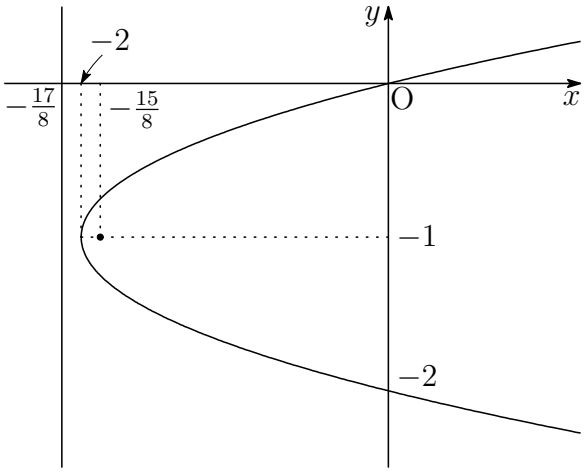
① は，放物線 $x^2 = 4\left(-\dfrac{1}{8}\right)y \cdots$② を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである．② の焦点は $\left(0, -\dfrac{1}{8}\right)$，準線は $y = \dfrac{1}{8}$ であるから，① の焦点は $\left(\mathbf{2},\ \dfrac{\mathbf{23}}{\mathbf{8}}\right)$，準線は $\boldsymbol{y = \dfrac{25}{8}}$



(2) $2(y+1)^2 = x+2 \cdots$① を変形すると

$$(y+1)^2 = \frac{1}{2}(x+2) \quad \text{すなわち} \quad (y+1)^2 = 4\cdot\frac{1}{8}(x+2)$$

① は，放物線 $y^2 = 4\cdot\frac{1}{8}x \cdots$② を x 軸方向に -2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである．② の焦点は $\left(\frac{1}{8},\ 0\right)$，準線は $x = -\frac{1}{8}$ であるから，① の焦点は $\left(\boldsymbol{-\frac{15}{8}, -1}\right)$，準線は $\boldsymbol{x = -\frac{17}{8}}$



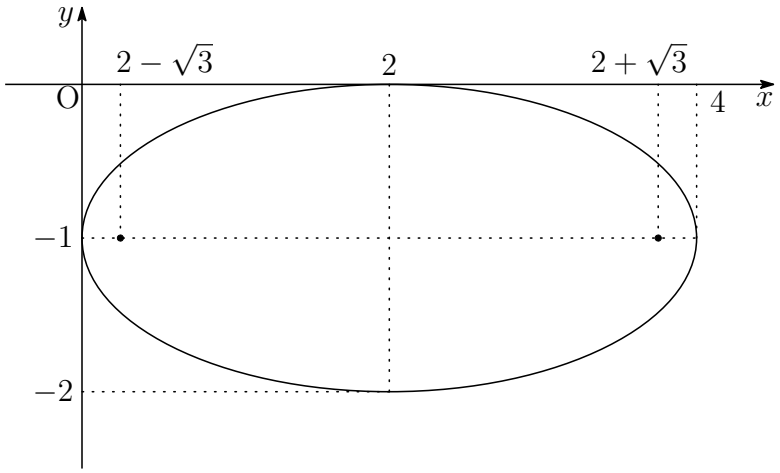
(3) $\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1\cdots$① は，楕円

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1\cdots②$$

を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである．

楕円 ② の焦点が $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ であるから，楕円 ① の焦点は

$$\boldsymbol{(2+\sqrt{3},\ -1),\ (2-\sqrt{3},\ -1)}$$



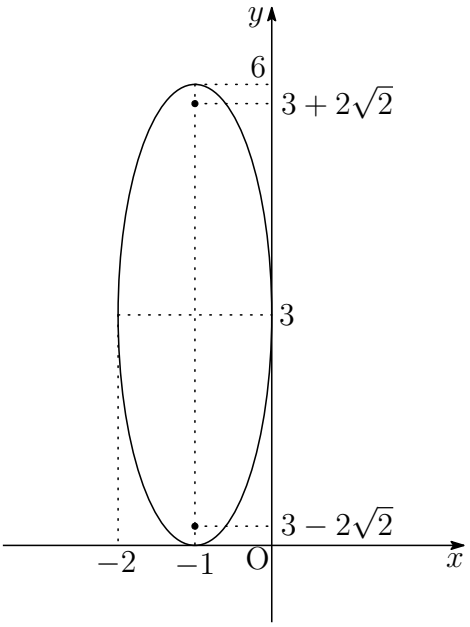
(4) $9(x+1)^2+(y-3)^2=9\cdots$①，すなわち，$(x+1)^2+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$ は，楕円

$$x^2+\frac{y^2}{9}=1\cdots②$$

を x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである．

楕円 ② の焦点が $(0,\ 2\sqrt{2})$，$(0,-\sqrt{2})$ であるから，楕円 ① の焦点は

$$\boldsymbol{(-1,\ 3+2\sqrt{2}),\ (-1,\ 3-2\sqrt{2})}$$



(5) $9(x-2)^2-4(y-3)^2=36\cdots①$，すなわち，$\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$ は，双曲線

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\cdots②$$

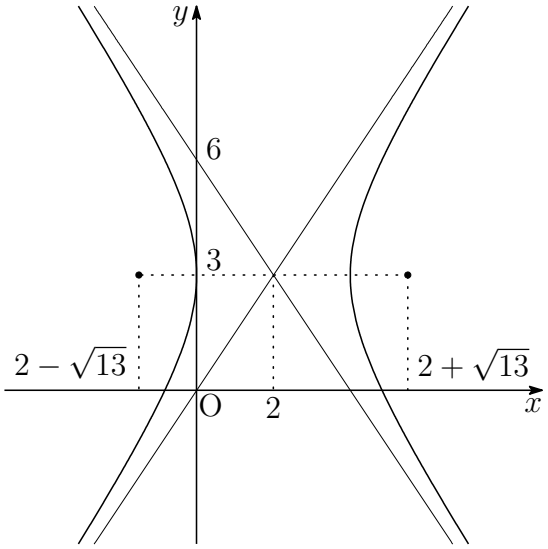
を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである．

双曲線 ② の焦点が $(\sqrt{13},\ 0)$，$(-\sqrt{13},\ 0)$ であるから，双曲線 ① の焦点は

$$\boldsymbol{(2+\sqrt{13},\ 3),\ (2-\sqrt{13},\ 3)}$$

漸近線は，$\dfrac{x-2}{2}\pm\dfrac{y-3}{3}=0$ より

$$\boldsymbol{y=\frac{3}{2}x,\ \ y=-\frac{3}{2}x+6}$$



(6) $(x+1)^2 - \dfrac{(y-2)^2}{3} = -1 \cdots ①$ は，双曲線

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \cdots ②$$

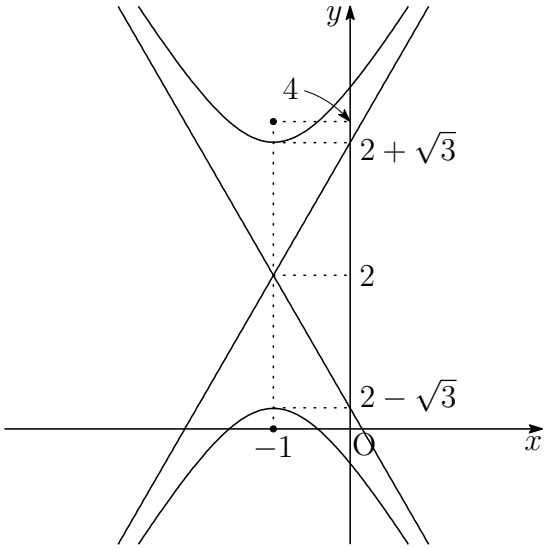
を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである．

双曲線 ② の焦点が $(0,\ 2)$，$(0, -2)$ であるから，双曲線 ① の焦点は

$$\boldsymbol{(-1,\ 4),\ (-1,\ 0)}$$

漸近線は，$x+1 \pm \dfrac{y-2}{\sqrt{3}} = 0$ より

$$\boldsymbol{y = \sqrt{3}x + 2 + \sqrt{3},\ \ y = -\sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3}}$$



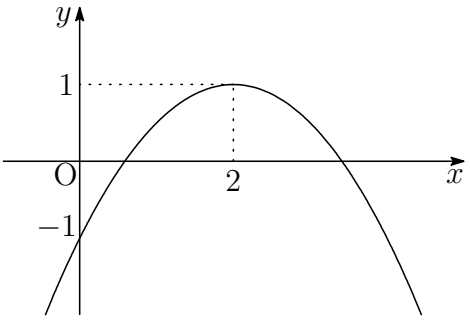
494* 次の式で表される図形の概形をかけ.

(1) $x^2-4x+2y+2=0$

(2) $4x^2+y^2+8x-4y+4=0$

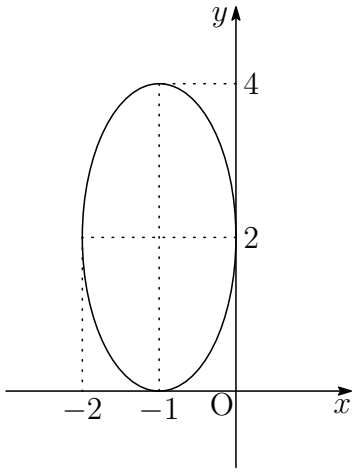
(3) $9x^2-y^2-18x-6y+9=0$

解答 (1) $x^2-4x+2y+2=0$ より　$y=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+1$



(2) $4x^2+y^2+8x-4y+4=0$ より　$(x+1)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

これは，楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した楕円である.

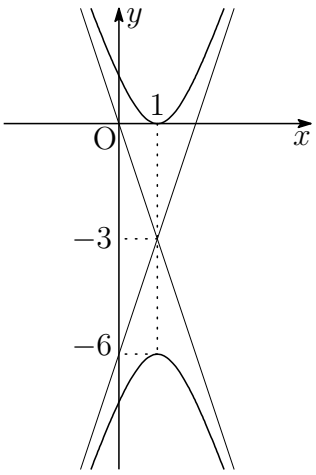


(3) $9x^2 - y^2 - 18x - 6y + 9 = 0$ より　$(x-1)^2 - \dfrac{(y+3)^2}{9} = -1$

これは，双曲線 $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = -1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動した双曲線である．

漸近線は，$(x-1) \pm \dfrac{y+3}{3} = 0$ より

$$y = 3x - 6, \quad y = -3x$$



495* 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ について，次の接線の方程式を求めよ．

(1) 楕円上の点 $\left(1,\ \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ における接線

(2) 点 $(5,\ 0)$ を通る接線

解答 (1) $\dfrac{1\cdot x}{9}+\dfrac{\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot y}{4}=1$，すなわち，$\boldsymbol{x+3\sqrt{2}y-9=0}$

(2) 接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とおくと，接線の方程式は

$$\frac{ax}{9}+\frac{by}{4}=1 \qquad (*)$$

これが点 $(5,\ 0)$ を通るから

$$\frac{5}{9}a=1 \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{9}{5} \quad \cdots ①$$

点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上にあるから

$$\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}=1 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入すると $\quad b=\pm\dfrac{8}{5} \quad$ ゆえに $\quad (a,\ b)=\left(\dfrac{9}{5},\ \pm\dfrac{8}{5}\right)$

これを $(*)$ に代入すると $\qquad \dfrac{x}{5}\pm\dfrac{2y}{5}=1$

$$\boldsymbol{x+2y-5=0,\quad x-2y-5=0}$$

496 点 A$(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円と直線 $x=-1$ の両方に接し，点 A を内部に含まない円の中心の軌跡を求めよ．

解答 円の中心を P$(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{AP}-1=|x-(-1)|$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1=|x+1|$$

点 P と直線 $x=-1$ の位置関係は，点 A$(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円に接することから

$$x \geqq -1$$

$|x+1|=x+1$ であるから　$\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1=x+1$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x+2 \qquad (*)$$

これを整理すると　　**放物線 $\boldsymbol{y^2=8x}$**

補足 $(*)$ から点 P の軌跡は，点 A$(2,\ 0)$ を焦点，$x=-2$ を準線とする放物線より

$$y^2=4\cdot 2x \quad \text{すなわち} \quad y^2=8x$$

7.42.3 Try

497* 楕円 $C : \dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上の点で，$x \geqq 0$ の範囲にあり，定点 $\mathrm{A}(0, -1)$ との距離が最大となる点を P とする． (筑波大 2004 年 5)

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ．

(2) 点 Q は楕円 C 上を動くとする．△APQ の面積が最大となるとき，点 Q の座標および △APQ の面積を求めよ．

解答 (1) C 上の点 P を $(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{A}(0, -1)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= (\sqrt{3}\cos\theta)^2 + (\sin\theta + 1)^2 \\ &= 3\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta + 1 \\ &= -2\sin^2\theta + 2\sin\theta + 4 \\ &= -2\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

AP を最大にする点 P は $\sin\theta = \dfrac{1}{2},\quad \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって $\mathbf{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ よって $\mathbf{AP = \dfrac{3}{\sqrt{2}}}$

(2) $\mathrm{Q}(\sqrt{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (\sqrt{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi + 1)$ より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{APQ} &= \frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}(\sin\varphi + 1) - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cos\varphi\right| \\ &= \frac{3}{4}|\sin\varphi - \sqrt{3}\cos\varphi + 1| = \frac{3}{4}\left|2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + 1\right|\end{aligned}$$

$\varphi = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき，$\mathbf{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ △APQ の面積の最大値は $\mathbf{\dfrac{9}{4}}$

別解 $(x(\theta),\ y(\theta)) = (\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると

$$(x'(\theta),\ y'(\theta)) = (-\sqrt{3}\sin\theta,\ \cos\theta)$$

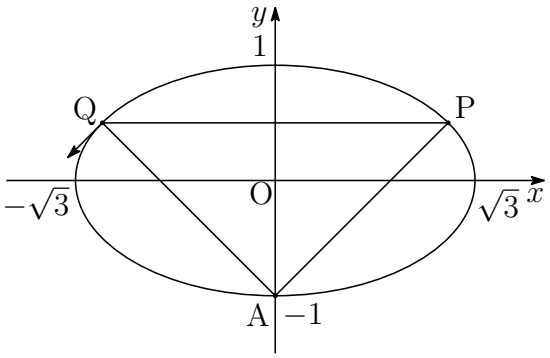
$(x'(\theta),\ y'(\theta))//\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とすると

$$(-\sqrt{3}\sin\theta,\ \cos\theta)//\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

△APQ の面積が最大となるとき，$y(\theta) > 0$ であるから

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{Q}\left(\mathbf{-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}}\right)$$

P，Q の y 座標が等しいから　$\triangle\mathrm{APQ} = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{3}{2} = \mathbf{\dfrac{9}{4}}$



498 放物線 $y^2=4px$ $(p>0)$ 上に 4 点があり，それらを y 座標の大きい順に A，B，C，D とする．線分 AC と BD は放物線の焦点 F で垂直に交わっている．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ が x 軸の正の方向となす角を θ とする．　(名古屋工業大)

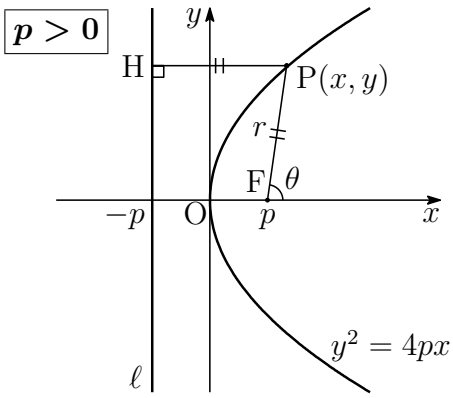
(1) 線分 AF の長さを p と θ で表せ．

(2) $\dfrac{1}{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}}+\dfrac{1}{\mathrm{BF}\cdot\mathrm{DF}}$ は θ によらず一定であることを示し，その値を p を用いて表せ．

解答　(1) 放物線 $y^2=4px$ $(p>0)$ の焦点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を極とする極方程式は

$$r=r\cos\theta+2p \quad \text{すなわち} \quad r=\frac{2p}{1-\cos\theta}$$

$\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ の偏角が θ であるから　　$\boldsymbol{\mathrm{AF}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}}$



(2) 放物線 $y^2=4px$ $(p>0)$ の焦点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を極とする極方程式の偏角

$$\theta,\ \theta+\frac{\pi}{2},\ \theta+\pi,\ \theta+\frac{3\pi}{2}$$

に対応する点がそれぞれ A，B，C，D であるから

$$\mathrm{BF}=\frac{2p}{1-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2p}{1+\sin\theta}$$
$$\mathrm{CF}=\frac{2p}{1-\cos(\theta+\pi)}=\frac{2p}{1+\cos\theta}$$
$$\mathrm{DF}=\frac{2p}{1-\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{2p}{1-\sin\theta}$$

上の諸式から

$$\frac{1}{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}}+\frac{1}{\mathrm{BF}\cdot\mathrm{DF}}=\frac{1-\cos\theta}{2p}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2p}+\frac{1+\sin\theta}{2p}\cdot\frac{1-\sin\theta}{2p}=\boldsymbol{\frac{1}{4p^2}}$$

499* $a > b > 0$ として，座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を C とおく．C 上の点 $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$ $(p_2 \neq 0)$ における C の接線を l，法線を n とする．(お茶の水女子大)

(1) 接線 l および法線 n の方程式を求めよ．

(2) 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$\mathrm{B}(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ に対して，法線は $\angle\mathrm{APB}$ の二等分線であることを示せ．

解答 (1) $\boldsymbol{l:\dfrac{p_1x}{a^2}+\dfrac{p_2y}{b^2}=1}$，　l の法線ベクトル $\vec{v}$ は　$\vec{v}=\left(\dfrac{p_1}{a^2},\ \dfrac{p_2}{b^2}\right)$

したがって，法線 n は，点 $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$ を通り，$\vec{v}$ に平行な直線であるから

$$\frac{p_2}{b^2}(x-p_1)-\frac{p_1}{a^2}(y-p_2)=0$$

整理すると　　$\boldsymbol{n:a^2p_2x-b^2p_1y=p_1p_2(a^2-b^2)}$

(2) n と x 軸との交点を Q とすると　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{p_1(a^2-b^2)}{a^2},\ 0\right)$

$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ とおくと　$b^2=a^2(1-e^2)$

$\mathrm{A}(ae,\ 0)$，$\mathrm{B}(-ae,\ 0)$，$\mathrm{Q}(p_1e^2,\ 0)$，$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$

$\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$ は C 上の点であるから

$$\frac{{p_1}^2}{a^2}+\frac{{p_2}^2}{a^2(1-e^2)}=1 \quad \text{ゆえに} \quad {p_2}^2=(a^2-{p_1}^2)(1-e^2)$$

上の結果を利用して

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}^2&=(p_1-ae)^2+{p_2}^2\\
&={p_1}^2-2ap_1e+a^2e^2+(a^2-{p_1}^2)(1-e^2)\\
&=a^2-2ap_1e+{p_1}^2e^2=(a-p_1e)^2,\\
\mathrm{BP}^2&=(p_1+ae)^2+{p_2}^2\\
&={p_1}^2+2ap_1e+a^2e^2+(a^2-{p_1}^2)(1-e^2)\\
&=a^2+2ap_1e+{p_1}^2e^2=(a+p_1e)^2
\end{aligned}$$

$0<e<1$，$-a \leqq p_1 \leqq a$ に注意して　$\mathrm{AP}=a-p_1e$，$\mathrm{BP}=a+p_1e$

また　$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=ae-p_1e^2:p_1e^2+ae=a-p_1e:a+p_1e$

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}$ より，法線 n は $\angle\mathrm{APB}$ の二等分線である．

500 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ を H とし，H の $x>0$ の部分を H_1，H の $x<0$ の部分を H_2 とする．また，l を点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を通る傾き m の直線とする．　(静岡大)

(1) 直線 l が H と共有点を 2 個もつような m の値の範囲を求めよ．

(2) 直線 l が H_1 と H_2 の両方と共有点をもつような m の値の範囲を求めよ．

(3) (2) のとき，直線 l と H_1 の共有点を P_1 とし，l と H_2 の共有点を P_2 とする．このとき，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点 M は，ある 2 次曲線 C の上を動く．C の方程式を求めよ．

(4) (3) で求めた 2 次曲線 C の焦点の座標を求めよ．

解答　(1) l の方程式は　$y=m(x-2)$

これを双曲線の方程式に代入すると　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{m^2(x-2)^2}{4}=1$

$$(9m^2-4)x^2-36m^2x+36(m^2+1)=0 \qquad (*)$$

方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，係数について

$$9m^2-4\neq 0,\quad D/4=(18m^2)^2-(9m^2-4)\cdot 36(m^2+1)$$
$$=36(-5m^2+4)>0$$

よって　$\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}<m<-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}<m<\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}<m<\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(2) 方程式 $(*)$ が正の解と負の解をもつような m の値の範囲であるから，それらの解の積 $\alpha\beta$ の符号について，解と係数の関係から

$$\alpha\beta=\frac{2m^2+1}{9m^2-4}<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}}$$

(3) (2) のとき，方程式 $(*)$ の異なる 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha > \beta)$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = \frac{36m^2}{9m^2 - 4}$$

2 点 $\mathrm{P}_1(\alpha,\ m(\alpha-2)),\ \mathrm{P}_2(\beta,\ m(\beta-2))$ の中点 M は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ m\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, -2\right)\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{18m^2}{9m^2-4},\ \frac{8m}{9m^2-4}\right)$$

$M(x, y)$ とし，$m = \dfrac{2}{3}\tan\theta$ とすると，(2) の結果から $\quad -\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{18\left(\frac{2}{3}\tan\theta\right)^2}{9\left(\frac{2}{3}\tan\theta\right)^2 - 4} = \frac{2\tan^2\theta}{\tan^2\theta - 1} = \frac{2\sin^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} \\ &= \frac{1-\cos 2\theta}{-\cos 2\theta} = 1 - \frac{1}{\cos 2\theta}, \\ y &= \frac{8\cdot\frac{2}{3}\tan\theta}{9\left(\frac{2}{3}\tan\theta\right)^2 - 4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta - 1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2\theta}{-\cos 2\theta} = -\frac{2}{3}\tan 2\theta \end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2} < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $\qquad x \leqq 0$

$$x - 1 = -\frac{1}{\cos 2\theta}, \quad \frac{3}{2}y = -\tan 2\theta, \quad \frac{1}{\cos^2 2\theta} - \tan^2 2\theta = 1$$

上の第 1 式および第 2 式を第 3 式に代入すると

$$\boldsymbol{(x-1)^2 - \frac{9}{4}y^2 = 1, \quad x \leqq 0}$$

(4) 双曲線 $x^2 - \dfrac{9}{4}y^2 = 1$ の焦点は $\quad \left(\pm\sqrt{1+\dfrac{4}{9}},\ 0\right)$ $\quad$ すなわち $\quad \left(\pm\dfrac{\sqrt{13}}{3},\ 0\right)$

双曲線 $(x-1)^2 - \dfrac{9}{4}y^2 = 1$ は，双曲線 $x^2 - \dfrac{9}{4}y^2 = 1$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動したものであるから，求める焦点の座標は

$$\boldsymbol{\left(1 \pm \frac{\sqrt{13}}{3},\ 0\right)}$$

501* xy 平面上に楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ がある． (横浜国立大)

(1) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通る C の接線が 2 本あり，それらが直交するとき，a，b が満たす条件を求めよ．

(2) C に外接する長方形のうち，x 座標が 1 で y 座標が正である頂点をもつものの面積を求めよ．

解答 (1) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から楕円 C に接する直線を $\ell : y = m(x-a)+b$ とおき，C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{4} + \{mx + (b-ma)\}^2 = 1$$

x について整理すると

$$\left(m^2 + \frac{1}{4}\right)x^2 + 2m(b-ma)x + (b-ma)^2 - 1 = 0 \qquad (*)$$

このとき，2 次方程式 $(*)$ は重解をもつから，係数について

$$D/4 = m^2(b-ma)^2 - \left(m^2 + \frac{1}{4}\right)\{(b-ma)^2 - 1\} = 0$$

したがって $\quad -\dfrac{1}{4}(b-ma)^2 + m^2 + \dfrac{1}{4} = 0$

m について整理すると $\quad (a^2-4)m^2 - 2abm + b^2 - 1 = 0 \quad \cdots (**)$

$a^2 - 4 \neq 0$ のとき，2 次方程式 $(**)$ の 2 解 $m_1,\ m_2$ について，その 2 本の接線が直交するから，解と係数の関係により

$$m_1 m_2 = \frac{b^2-1}{a^2-4} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 = 5$$

$a^2 - 4 = 0$，すなわち，$(\pm 2,\ \pm 1)$ (複号任意) から楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ にひいた 2 本の接線も直交するから

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = 5}$$

(2) (1) の結果に $a=1$，$b>0$ を適用すると　$b=2$

これを $(**)$ に代入すると

$$-3m^2-4m+3=0$$

この方程式の解を $m_1,\ m_2$ とすると，解と係数の関係により

$$m_1+m_2=-\frac{4}{3},\quad m_1m_2=-1$$

点 $(1,\ 2)$ を通り，傾き $m_1,\ m_2$ の直線をそれぞれ $l_1,\ l_2$ とすると

$$l_1:y=m_1(x-1)+2,\quad l_2:y=m_2(x-1)+2$$

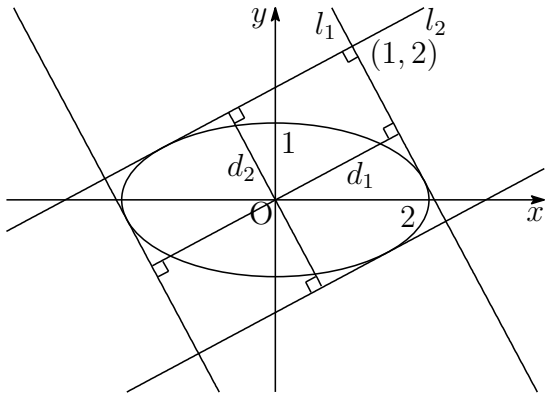
原点から 2 直線 $l_1,\ l_2$ までの距離をそれぞれ $d_1,\ d_2$ とすると

$$d_1=\frac{|m_1-2|}{\sqrt{{m_1}^2+1}},\quad d_2=\frac{|m_2-2|}{\sqrt{{m_2}^2+1}}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{4}=d_1d_2&=\frac{|m_1m_2-2(m_1+m_2)+4|}{\sqrt{(m_1m_2)^2+(m_1+m_2)^2-2m_1m_2+1}}\\&=\frac{|-1-2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+4|}{\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot(-1)+1}}=\frac{17}{2\sqrt{13}}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S=\dfrac{34}{\sqrt{13}}}$



7.43　曲線の媒介変数表示，極座標

7.43.1　Review

502 媒介変数を消去して，x と y の関係式を求めよ.

(1) $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 2\sqrt{t} - t \end{cases}$

解答　(1) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 4}$

(2) $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1}$

(3) $\boldsymbol{y = 2x - x^2 \ \ (x \geqq 0)}$

503 次の (1)〜(3) は極座標で表された点の直交座標を，(4)〜(6) は直交座標で表された点の極座標 $(r,\ \theta)$ を $r \geqq 0$，$-\pi < \theta \leqq \pi$ で，それぞれ求めよ．

(1) $\left(3,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $\left(4,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$

(3) $\left(2, -\dfrac{\pi}{4}\right)$

(4) $(-2,\ 0)$

(5) $(3, -3)$

(6) $(-\sqrt{3}, -1)$

解答 (1) $\left(3\cos\dfrac{\pi}{2},\ 3\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$，すなわち，$\boldsymbol{(0,\ 3)}$

(2) $\left(4\cos\dfrac{2}{3}\pi,\ 4\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$，すなわち，$\boldsymbol{(-2,\ 2\sqrt{3})}$

(3) $\left(2\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\ 2\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$，すなわち，$\boldsymbol{(\sqrt{2}, -\sqrt{2})}$

(4) $r = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$，$-\pi < \theta \leqq \pi$ より

$$\cos\theta = \frac{-2}{2} = -1, \quad \sin\theta = \frac{0}{2} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \theta = \pi$$

よって　$\boldsymbol{(2,\ \pi)}$

(5) $r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$，$-\pi < \theta \leqq \pi$ より

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{すなわち} \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

よって　$\left(\boldsymbol{3\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4}}\right)$

(6) $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$，$-\pi < \theta \leqq \pi$ より

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \text{すなわち} \quad \theta = -\frac{5}{6}\pi$$

よって　$\left(\boldsymbol{2, -\dfrac{5}{6}\pi}\right)$

7.43.2 Exercise

504* 媒介変数を消去して，x と y の関係式を求め，その曲線の概形をかけ.

(1) $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}\cos\theta \\ y = 2 + \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 4\cos\theta + 2 \\ y = 3\sin\theta + 3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t - \dfrac{1}{t} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = 2\tan\theta \\ y = \dfrac{1}{\cos\theta} \end{cases}$

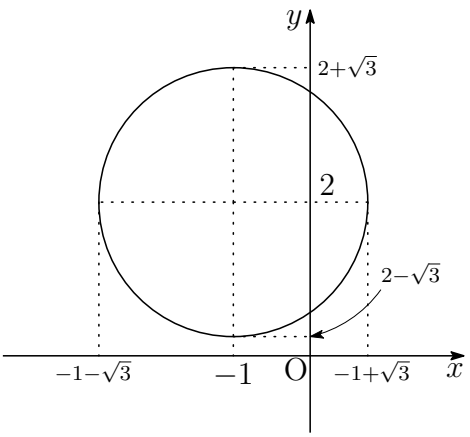
(5) $\begin{cases} x = 2\sin 2\theta \\ y = \sin\theta + \cos\theta \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x = 3^{t+1} + 3^{-t+1} + 1 \\ y = 3^t - 3^{-t} \end{cases}$

解答 (1) $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}\cos\theta \\ y = 2 + \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$

$x + 1 = \sqrt{3}\cos\theta$，$y - 2 = \sqrt{3}\sin\theta$ より

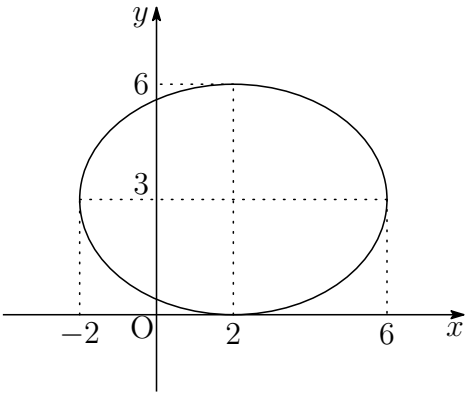
$$\boldsymbol{(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3}$$



(2) $\begin{cases} x = 4\cos\theta + 2 \\ y = 3\sin\theta + 3 \end{cases}$

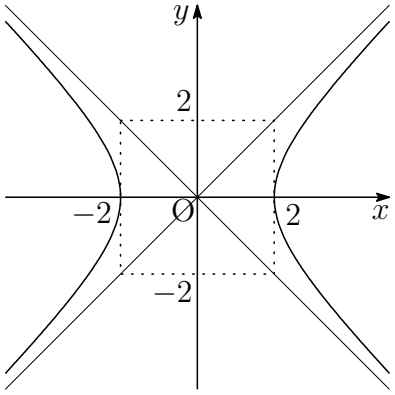
$\dfrac{x-2}{4} = \cos\theta,\ \dfrac{y-3}{3} = \sin\theta$ より

$$\boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1}$$



(3) $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t - \dfrac{1}{t} \end{cases}$

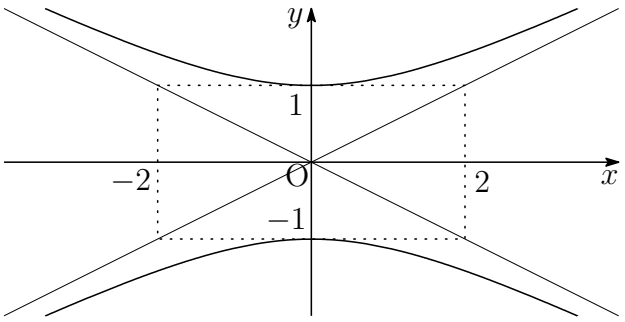
$x^2 - y^2 = 4$ より $\quad \boldsymbol{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1}$



(4) $\begin{cases} x = 2\tan\theta \\ y = \dfrac{1}{\cos\theta} \end{cases}$

$\dfrac{x}{2} = \tan\theta$，$y = \dfrac{1}{\cos\theta}$ を $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = y^2 \qquad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{4} - y^2 = -1}$$



(5) $\begin{cases} x = 2\sin 2\theta \\ y = \sin\theta + \cos\theta \end{cases}$

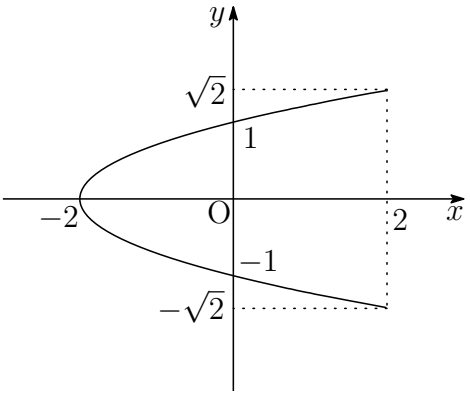
$y = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ より　$-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$

$\sin\theta + \cos\theta = y$，$2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{x}{2}$ を

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta = 1$$

に代入すると

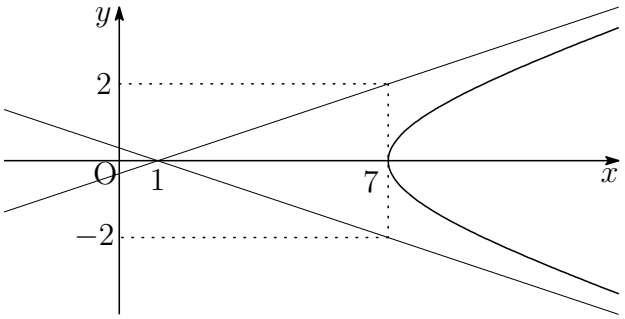
$$y^2 - \frac{x}{2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{x = 2y^2 - 2 \ \ (-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2})}$$



(6) $\begin{cases} x = 3^{t+1} + 3^{-t+1} + 1 \\ y = 3^t - 3^{-t} \end{cases}$

$\dfrac{x-1}{3} = 3^t + 3^{-t} \geqq 2\sqrt{3^t \cdot 3^{-t}} = 2$ $(x \geqq 7)$, $y = 3^t - 3^{-t}$ より

$$\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 - y^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\frac{(x-1)^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (x \geqq 7)}$$



505* 半径 2 の円板が x 軸上を正の方向に滑らずに回転するとき，円板上の点 P がえがく曲線 C を考える．円板の中心の最初の位置を $(0,\ 2)$，点 P の最初の位置を $(0,\ 1)$ とする．円板がその中心のまわりに回転した角を θ とするとき，点 P の座標を θ を用いて表せ．

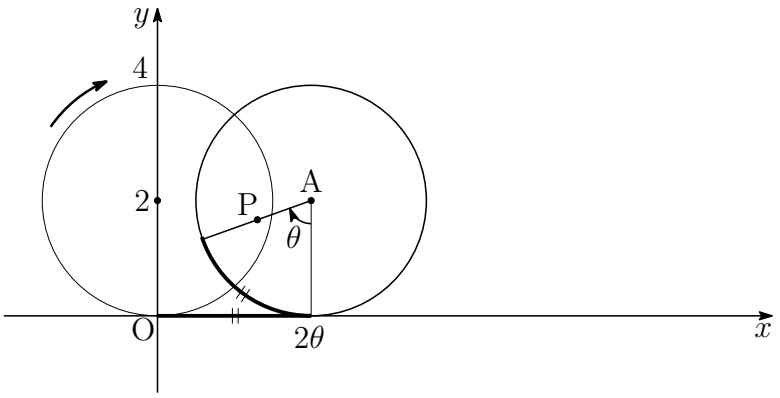
解答 半径 2 の円板が θ だけ回転したときのその中心を A とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2\theta,\ 2), \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= (2\theta,\ 2) + (-\sin\theta, -\cos\theta) \\ &= (2\theta - \sin\theta,\ 2 - \cos\theta)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{P}(2\theta - \sin\theta,\ 2 - \cos\theta)}$



506 次の直交座標による方程式を極方程式にかきかえよ.

(1) $x+\sqrt{3}y=2$

(2) $x^2+y^2-2x-2y=0$

(3) $x^2-y^2=1$

解答 (1) $x+\sqrt{3}y=2$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$r(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)=2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1}$$

(2) $x^2+y^2-2x-2y=0$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$r^2-2r(\cos\theta+\sin\theta)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

(3) $x^2-y^2=1$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r^2\cos 2\theta=1}$$

507* 次の極方程式を直交座標による方程式にかきかえよ.

(1) $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

(2) $r=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(3) $r^2\sin 2\theta=2$

(4) $r=\dfrac{3}{2+\sin\theta}$

解答 (1) $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ より $\quad r\left(\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$$x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+y\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\quad\text{ゆえに}\quad \boldsymbol{x+y-2=0}$$

(2) $r=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ より $\quad r^2=2r\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$x^2+y^2=\sqrt{3}x+y\quad\text{ゆえに}\quad \boldsymbol{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1}$$

(3) $r^2\sin 2\theta=2$ より $\quad r^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta=2$

$$r\cos\theta\cdot r\sin\theta=1\quad\text{ゆえに}\quad \boldsymbol{xy=1}$$

(4) $r=\dfrac{3}{2+\sin\theta}$ より $\quad 2r+r\sin\theta=3$

$$2r+y=3\quad\text{ゆえに}\quad (2r)^2=(3-y)^2$$

したがって $\quad 4(x^2+y^2)=9-6y+y^2$

よって $\qquad \boldsymbol{\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1}$

7.43.3 Try

508* t を媒介変数とするとき，$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$y=\dfrac{4t}{1+t^2}$ が表す図形を求めよ．

(関西大 改)

解答 $t=\tan\theta$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$x=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\cos 2\theta$$
$$y=\frac{4\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{4\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=2\sin 2\theta$$

上の 2 式から

$$x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

$-\pi<2\theta<\pi$ であるから　$(x,\ y)\neq(-1,\ 0)$

よって　　$\boldsymbol{x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\quad (x,\ y)\neq(-1,\ 0)}$

509 x，y は実数都市，座標平面上で点 P が楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$x \geqq 0$ 上を動く．

(1) $x+y$ の最大値，最小値を求めよ．

(2) x^2+y の最大値，最小値を求めよ．

(3) x^2+xy+y^2 の最大値を求めよ．

解答 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$x \geqq 0$ より

$$x=2\cos\theta,\quad y=\sqrt{3}\sin\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく．

(1) $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ とおくと $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$$x+y=2\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)$$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{7}}$

$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$

(2) $x^2+y=(2\cos\theta)^2+\sqrt{3}\sin\theta$

$$=-4\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+4$$

$$=-4\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2+\frac{67}{16}$$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{67}{16}}$

$\sin\theta=-1$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$

(3)

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= 4\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 3\sin^2\theta \\ &= 4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2} + 3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2}(2\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta) + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

ここで，$\cos\beta = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$，$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$ とおくと $\left(0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$x^2+xy+y^2 = \frac{\sqrt{13}}{2}\sin(2\theta+\beta) + \frac{7}{2}$$

$-\pi+\beta \leqq 2\theta+\beta \leqq \pi+\beta$ であるから　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{13}+7}{2}}$

510* 座標平面上に原点 O を中心とする半径 5 の円 C がある．$n=2$ または $n=3$ とし，半径 n の円 C_n が円 C に内接して滑ることなく回転していくとする．円 C_n 上に点 P_n がある．最初，円 C_n の中心 O_n が $(5-n,\ 0)$ に，点 P_n が $(5,\ 0)$ にあったとして，円 C_n の中心が円 C の内部を反時計まわりに n 周して，もとの位置に戻るものとする．円 C と円 C_n の接点を S_n とし，線分 OS_n が x 軸の正の方向となす角を t とする． (大阪大学)

(1) 点 P_n の座標を t と n を用いて表せ．

(2) 点 P_2 の描く曲線と点 P_3 のえがく曲線は同じであることを示せ．

解答 (1) $\mathrm{OO}_n=5-n$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OO}_n}=(5-n)(\cos t,\ \sin t)$$

$\mathrm{A}(5,\ 0)$，$\alpha=\angle \mathrm{S}_n\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n$ とすると，$\overset{\frown}{\mathrm{AS}_n}=\overset{\frown}{\mathrm{P}_n\mathrm{S}_n}$ であるから

$$5t=n\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha=\frac{5t}{n}$$

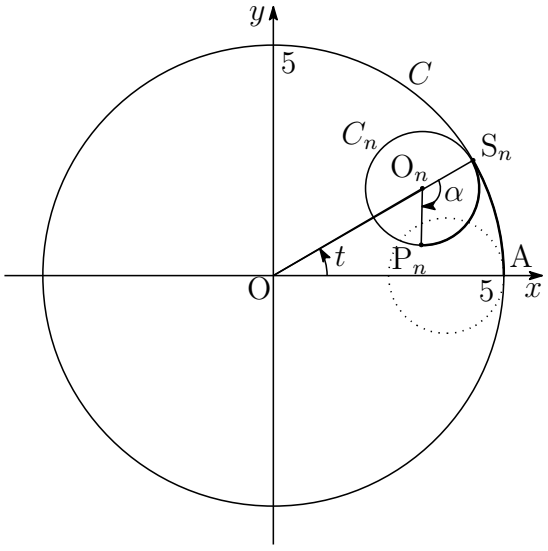
$\mathrm{O}_n\mathrm{S}_n$ の x 軸とのなす角が t であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n}&=n(\cos(t-\alpha),\ \sin(t-\alpha))\\&=n\left(\cos\left(t-\frac{5t}{n}\right),\ \sin\left(t-\frac{5t}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}_n(x_n(t),\ y_n(t))$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OO}_n}+\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n}$ より $(n=2,3)$

$$x_n(t)=\boldsymbol{(5-n)\cos t+n\cos\left(t-\frac{5t}{n}\right)},$$

$$y_n(t)=\boldsymbol{(5-n)\sin t+n\sin\left(t-\frac{5t}{n}\right)} \quad \boldsymbol{(0\leqq t\leqq 2n\pi)}$$



(2) (1) の結果に $n=2$ を代入すると

$$x_2(t) = 3\cos t + 2\cos\frac{3}{2}t,$$
$$y_2(t) = 3\sin t - 2\sin\frac{3}{2}t \quad (0 \leqq t \leqq 4\pi)$$

また，$n=3$ を代入すると

$$x_3(t) = 2\cos t + 3\cos\frac{2}{3}t,$$
$$y_3(t) = 2\sin t - 3\sin\frac{2}{3}t \quad (0 \leqq t \leqq 6\pi)$$

$x_3(t),\ y_3(t)$ において，$t = 6\pi - \dfrac{3}{2}u$ とすると $(0 \leqq u \leqq 4\pi)$

$$x_3\left(6\pi - \frac{3}{2}u\right) = 2\cos\frac{3}{2}u + 3\cos u$$
$$y_3\left(6\pi - \frac{3}{2}u\right) = -2\sin\frac{3}{2}u + 3\sin u \quad (0 \leqq u \leqq 4\pi)$$

よって，点 P_2 の描く曲線と点 P_3 のえがく曲線は同じである．

511 座標平面上に点 A$(0,\ 6)$ があり，原点 O を中心とする半径 4 の円周を C とする．

(1) 円周 C 上の動点 P は媒介変数 t を用いて $(\boxed{}\cos t,\ \boxed{}\sin t)$ と表される．2 点 A，P の中点の座標は $(\boxed{}\cos t,\ \boxed{}+\boxed{}\sin t)$ である．

(2) (1) のとき，線分 AP の垂直二等分線上の点 $(x,\ y)$ は

$$(\boxed{}-\sin t)y=(\cos t)x+\boxed{}$$

を満たす．

(3) 動点 P が円周 C 上を 1 周動くとき，線分 AP の垂直二等分線が通過する領域を求めよ． (杏林大 改)

解答 (1) C 上の点 P は媒介変数 t を用いて $\quad \boldsymbol{(4\cos t,\ 4\sin t)}$

したがって，2 点 A，P の中点の座標は

$$\left(\frac{4\cos t}{2},\ \frac{6+4\sin t}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(2\cos t,\ 3+2\sin t)}$$

(2) (1) で求めた 2 点 A，P の中点を M とし，垂直二等分線上の任意の点を Q$(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2(2\cos t,\ 2\sin t-3)$，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=(x-2\cos t,\ y-3-2\sin t)$ より

$$(x-2\cos t)\cdot 2\cos t+(y-3-2\sin t)(2\sin t-3)=0$$

整理すると $\quad x\cos t+\left(\sin t-\dfrac{3}{2}\right)y+\dfrac{5}{2}=0$

よって $\quad \boldsymbol{\left(\dfrac{3}{2}-\sin t\right)y=(\cos t)x+\dfrac{5}{2}}$

(3) (2) の結果から　$x\cos t + y\sin t = \dfrac{3y-5}{2}$

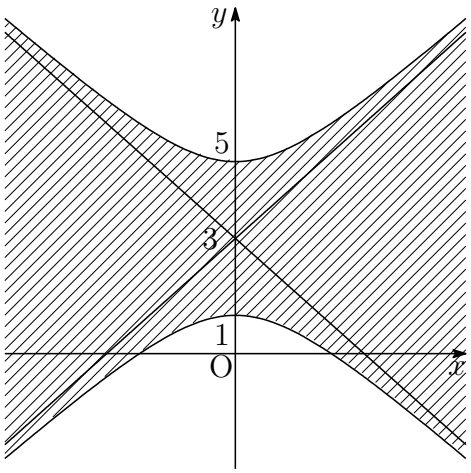
$$\left|\frac{3y-5}{2}\right| = |x\cos t + y\sin t| \leqq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{x^2+y^2}$$

したがって　$\dfrac{(3y-5)^2}{4} \leqq x^2+y^2$

$$4x^2 - 5y^2 + 30y - 25 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4x^2 - 5(y-3)^2 \geqq -20$$

よって，求める領域は　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{(y-3)^2}{4} \geqq -1}$

下の図の斜線部分で境界線を含む.



512* xy 平面において，2 点 $\mathrm{F}_1(a,\ a)$，$\mathrm{F}_2(-a,-a)$ からの距離の積が一定値 $2a^2$ となるような点 P の軌跡を C とする．ただし，$a>0$ である．このとき，次の各問いに答えよ．　(鹿児島大 2005 年 10)

(1) 直交座標 $(x,\ y)$ に関しての C の方程式を求めよ．

(2) 原点を極とし x 軸の正の部分を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ に関しての C の極方程式を求めよ．

(3) C から原点を除いた部分は，平面上の第 1 象限と第 3 象限を合わせた範囲に含まれることを示せ．

(4) 点 P が第 1 象限内にあるとき，P は点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 a の円の周または内部にあることを証明せよ．

解答　(1) $\mathrm{F}_1(a,\ a)$，$\mathrm{F}_2(-a,-a)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ より

$$\mathrm{F}_1\mathrm{P}=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2},\qquad \mathrm{F}_2\mathrm{P}=\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}$$

これを $\mathrm{F}_1\mathrm{P}\cdot\mathrm{F}_2\mathrm{P}=2a^2$ に代入すると

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}=2a^2$$

両辺を平方すると

$$\begin{aligned}\{(x^2+y^2+2a^2)-2a(x+y)\}\{(x^2+y^2+2a^2)+2a(x+y)\}&=4a^4\\ (x^2+y^2+2a^2)^2-4a^2(x+y)^2&=4a^4\\ (x^2+y^2)^2+4a^2(x^2+y^2)+4a^4-4a^2(x+y)^2&=4a^4\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{(x^2+y^2)^2-8a^2xy=0}$

(2) (1) の結果に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$(r^2)^2-8a^2r\cos\theta\cdot r\sin\theta=0\quad\text{ゆえに}\quad r^2(r^2-4a^2\sin 2\theta)=0$$

$r=0$ は，$r^2=4a^2\sin 2\theta$ に含まれるから，求める極方程式は

$$\boldsymbol{r^2=4a^2\sin 2\theta}$$

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より　　$0 \leqq 2\theta < 4\pi$

$r \neq 0$ より $r^2 > 0$ であるから　　$\sin 2\theta > 0$

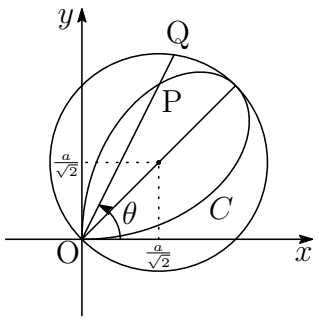
ゆえに　$0 < 2\theta < \pi$，$2\pi < 2\theta < 3\pi$　すなわち　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

よって，C から原点を除いた部分は，平面上の第 1 象限と第 3 象限を合わせた範囲に含まれる．

(4) 点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 a の円を極方程式で表すと

$$r = 2a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

この円周上の点 Q と C 上の点 P を右の図のようにとると



$$\mathrm{OQ} = \sqrt{2}a(\sin\theta + \cos\theta)$$

ゆえに　　$\mathrm{OQ}^2 - \mathrm{OP}^2 = 2a^2(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 4a^2\sin 2\theta$

$$= a^2(\sin\theta - \cos\theta)^2 \geqq 0$$

よって，第 1 象限にある P は，点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 a の周または内部にある．

7.44　複素数と極形式

7.44.1　Review

513 次の複素数を極形式で表せ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$

(2) $\sin\theta + i\cos\theta$

(3) $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$

解答　(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)}$

(2) $\sin\theta + i\cos\theta = \boldsymbol{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)}$

(3) $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \boldsymbol{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}$

514 次の値を計算せよ.

(1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)\left(\cos\dfrac{7}{18}\pi + i\sin\dfrac{7}{18}\pi\right)$

(2) $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}}{\cos\dfrac{2}{9}\pi - i\sin\dfrac{2}{9}\pi}$

(3) $\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^9$

(4) $\left(\dfrac{1}{1-i}\right)^6$

(5) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12}$

解答　(1)

$$\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{7}{18}\pi + i\sin\frac{7}{18}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{7}{18}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{7}{18}\pi\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{i}$$

(2)

$$\frac{\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{2}{9}\pi-i\sin\frac{2}{9}\pi}=\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{2}{9}\pi+i\sin\frac{2}{9}\pi\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{9}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{9}\pi\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

(3) $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^9=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}$

(4) $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$\left(\frac{1}{1-i}\right)^6=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=\boldsymbol{-\frac{i}{8}}$$

(5) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+\sin\frac{5}{12}\pi\right)$ より

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12}=(\sqrt{2})^{12}(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=\boldsymbol{-64}$$

7.44.2 Exercise

515 α，β を異なる複素数とするとき，次を証明せよ．

(1) $\alpha\overline{\beta}$ が実数でないとき，$\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}$ は純虚数である．

(2) 複素数 z に対して，$z\overline{z} + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z$ は実数である．

解答 (1) $\alpha\overline{\beta}$ が実数でないから，$\mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta}) \neq 0$

$$\alpha\overline{\beta} = \mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta}) + \mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta})i$$
$$\overline{\alpha}\beta = \mathrm{Re}(\overline{\alpha}\beta) + \mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)i$$

について，$\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\beta) = \mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta})$，$\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta) = -\mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta})$ であるから

$$\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} = -2\mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta})i \neq 0$$

よって，$\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}$ は純虚数である．

(2) $$\begin{aligned} z\overline{z} + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z &= (z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha}) - \alpha\overline{\alpha} \\ &= |z+\alpha|^2 - |\alpha|^2 \end{aligned}$$

よって，$z\overline{z} + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z$ は実数である．

516 $z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ のとき，次の複素数を極形式で表せ．また，それらの点を図示せよ．

(1) $\overline{z}$

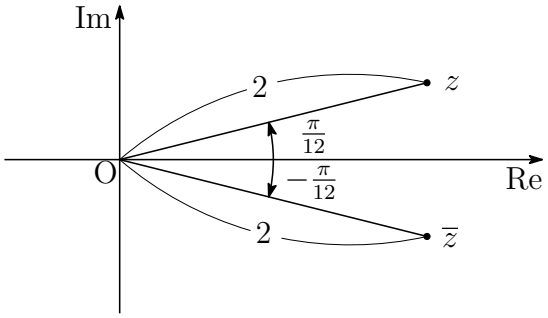
(2) $-z$

(3) $\dfrac{1}{z}$

(4) iz

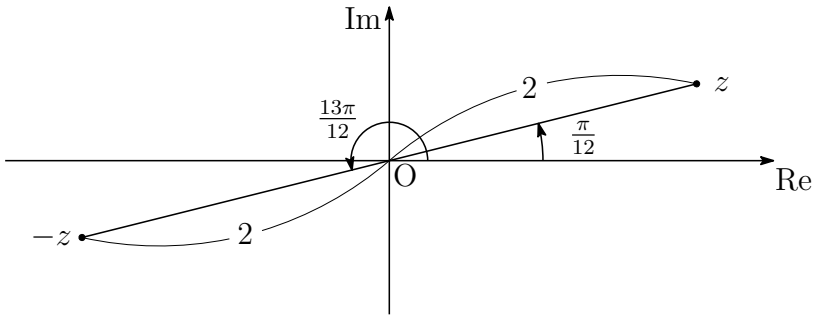
(5) $-(1-i)z$

解答 (1) $\overline{z}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right\}$

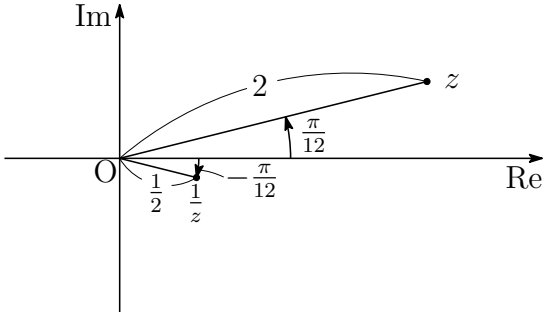


(2) $-z=-1\cdot z=(\cos\pi+i\sin\pi)\cdot 2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

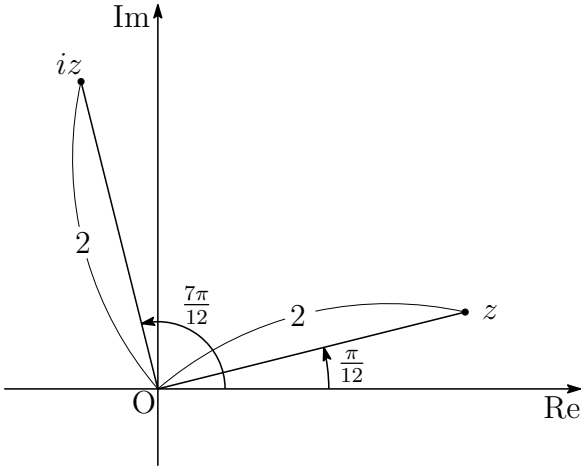
$=2\left(\cos\dfrac{13\pi}{12}+i\sin\dfrac{13\pi}{12}\right)$



(3) $\dfrac{1}{z} = z^{-1} = 2^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^{-1} = \dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right\}$

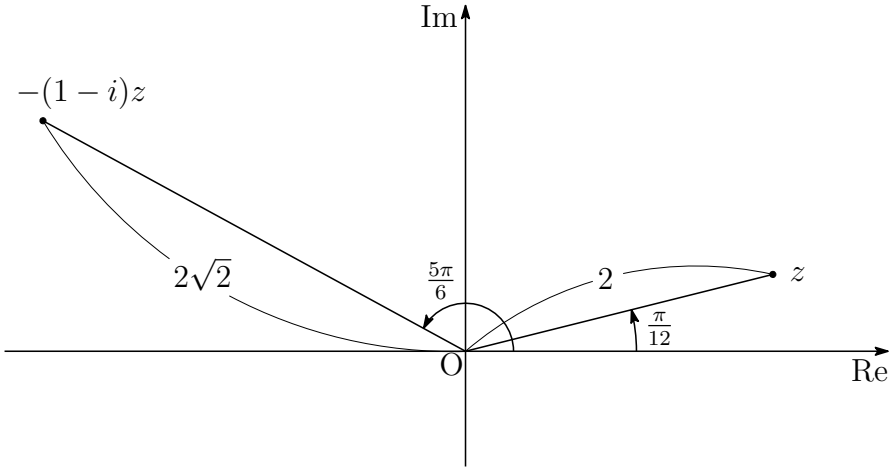


(4) $iz = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot 2\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right) = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$



(5) $-(1-i)z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$



517* z は複素数で，$|z-2|=|1-2\overline{z}|$ のとき，$|z|$ の値を求めよ．

解答 $|z-2|=|1-2\overline{z}|$ より　$|z-2|^2=|1-2\overline{z}|^2$

$$(z-2)(\overline{z}-2)=(1-2\overline{z})(1-2z)$$
$$z\overline{z}-2z-2\overline{z}+4=1-2z-2\overline{z}+4z\overline{z}$$

整理すると　$z\overline{z}=1$　よって　$\boldsymbol{|z|=1}$

518* 次の方程式を解け．また，(3) はその解を複素数平面上に図示せよ．

(1) $z^2-i=0$

(2) $z^6+1=0$

(3) $z^4=8(-1-\sqrt{3})$

解答　(1) 極形式を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (*)$$

とすると

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

また，i を極形式で表すと

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

よって，方程式 $z^2 = i$ は

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2 = 1, \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ および $0 \leqq \theta < 2\pi$ により

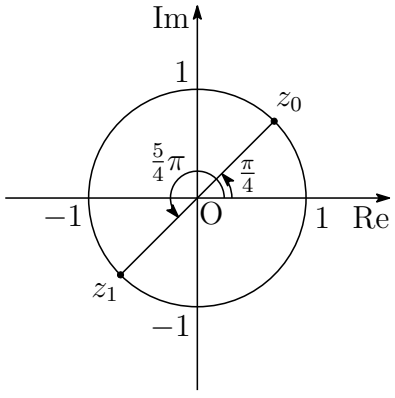
$$r = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k = 0,\ 1) \qquad (**)$$

$(**)$ を $(*)$ に代入して，$z_k = z$ とおくと

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \qquad (k = 0,\ 1)$$

したがって

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$



よって，求める方程式の解は

$$\boldsymbol{z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}$$

(2) 極形式を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (*)$$

とすると

$$z^6 = r^6(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

また，-1 を極形式で表すと

$$i = \cos\pi + i\sin\pi$$

よって，方程式 $z^6 = -1$ は

$$r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = \cos\pi + i\sin\pi$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^6 = 1, \quad 6\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ および $0 \leqq \theta < 2\pi$ により

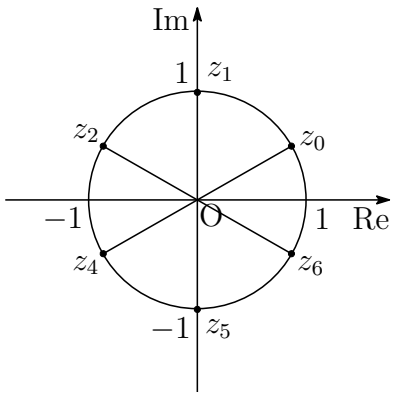
$$r = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \qquad (**)$$

$(**)$ を $(*)$ に代入して，$z_k = z$ とおくと

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

したがって

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$
$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z_4 = -i, \quad z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$



よって，求める方程式の解は

$$\boldsymbol{z = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),\quad \pm i,\quad \pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}$$

(3) 極形式を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (*)$$

とすると

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

また，$8(-1-\sqrt{3}\,i)$ を極形式で表すと

$$\begin{aligned} 8(-1-\sqrt{3}\,i) &= 16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 16\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

よって，方程式は

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 16\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4 = 16, \quad 4\theta = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ および $0 \leqq \theta < 2\pi$ により

$$r = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \qquad (**)$$

$(**)$ を $(*)$ に代入して，$z_k = z$ とおくと

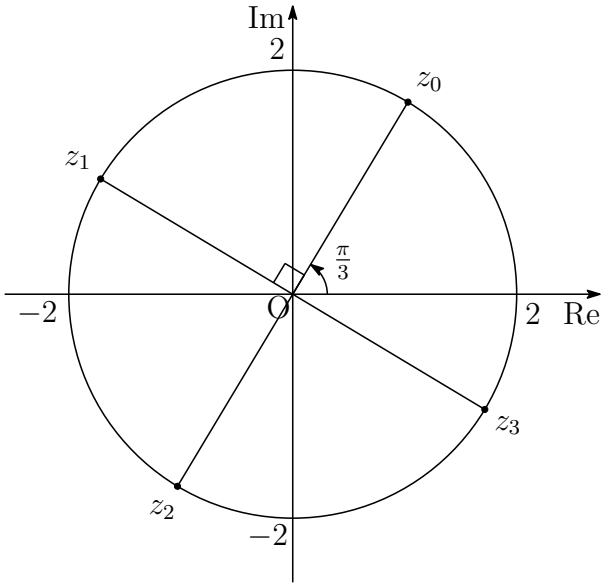
$$z_k = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)\right\} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

したがって

$$z_0 = 1+\sqrt{3}\,i, \quad z_1 = -\sqrt{3}+i, \quad z_2 = -1-\sqrt{3}\,i, \quad z_3 = \sqrt{3}-i$$

よって，求める方程式の解は

$$\boldsymbol{z = \pm(1+\sqrt{3}\,i),\ \pm(-\sqrt{3}+i)}$$


Im
2
z_0
z_1
$\frac{\pi}{3}$
-2
O
2
Re
z_3
z_2
-2

519* 方程式 $z^5 = 1$ の解について

(1) z を極形式で表せ.

(2) $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ を用いて，$z + \dfrac{1}{z}$ の値を求めよ.

(3) $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ の値を求めよ.

解答 (1) 極形式を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (*)$$

とすると

$$z^5 = r^5(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

また，-1 を極形式で表すと

$$i = \cos\pi + i\sin\pi$$

よって，方程式 $z^5 = 1$ は

$$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = \cos 0 + i\sin 0$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^5 = 1, \quad 5\theta = 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ および $0 \leqq \theta < 2\pi$ により

$$r = 1, \quad \theta = \frac{2k\pi}{5} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (**)$$

$(**)$ を $(*)$ に代入して，$z_k = z$ とおくと

$$\boldsymbol{z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)}$$

(2) $z^5-1=0$ より　$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$$z-1=0 \quad \text{または} \quad z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

i) $z-1=0$ のとき，$z=1$ より　$z+\dfrac{1}{z}=2$

ii) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ のとき，$z\neq 0$ に注意して

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+z^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$$

これを解いて　$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

i), ii) より　$\boldsymbol{z+\dfrac{1}{z}=2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

(3) (1) の結果から，$z=z_2$ とすると

$$z+\frac{1}{z}=z_2+\frac{1}{z_2}=2\cos\frac{4\pi}{5}$$

$2\cos\dfrac{4\pi}{5}<0$ であるから，これに該当する (2) の値は

$$2\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

7.44.3 Try

520 絶対値が1より小さい複素数α，βに対して，不等式$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|<1$が成り立つことを示せ. (学習院大)

解答 $|\alpha|<1$，$|\beta|<1$より

$$\begin{aligned}|1-\overline{\alpha}\beta|^2-|\alpha-\beta|^2&=1-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+|\alpha|^2||\beta|^2-(|\alpha|^2-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2)\\&=1-|\alpha|^2-|\beta|^2+|\alpha|^2|\beta|^2\\&=(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)>0\end{aligned}$$

したがって　　$|1-\overline{\alpha}\beta|^2-|\alpha-\beta|^2>0$

よって　　$\dfrac{|\alpha-\beta|}{|1-\overline{\alpha}\beta|}<1$　すなわち　$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|<1$

521 $a,\ b,\ c$ を整数とし，x の 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は次の 2 つの条件を満たすとする．(横浜国立大)

(i) 1 つの正の実数解と 2 つの虚数解をもつ．

(ii) 解の絶対値はすべて 1 である．

このとき，整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべての求めよ．

解答 3 次方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad (*)$$

の 3 つの解を $1,\ w,\ \overline{w}$ とすると (w は虚数，$|w|=1$)，$(*)$ は

$$(x-1)(x-w)(x-\overline{w})=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)\{x^2-(w+\overline{w})x+1\}=0 \quad (**)$$

$(*)$ の解と係数の関係から

$$1+w+\overline{w}=-a \quad \text{ゆえに} \quad w+\overline{w}=-a-1$$

これを $(**)$ に代入して

$$(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}=0 \qquad (\mathrm{A})$$

このとき，2 次方程式 $x^2+(a+1)x+1=0$ は異なる 2 つの虚数解をもつから

$$D=(a+1)^2-4\cdot1\cdot1<0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+3)(a-1)<0$$

a が整数であることに注意して　$a=-2,-1,\ 0$

(A) を展開すると　　$x^3+ax^2-ax-1=0$

上式と $(*)$ の係数を比較して　$b=-a,\ c=-1$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(-2,\ 2,-1),\ (-1,\ 1,-1),\ (0,\ 0,-1)}$

522* 複素数平面上に複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ をとり，$\alpha=z+1$，$\beta=z-1$ とおく。 (九大文系 2004 年 2)

(1) $|\beta|=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ を示せ。

(2) $\arg\beta=\dfrac{\theta}{2}+90^\circ$ を示せ。ただし，$0^\circ\leqq\arg\beta<360^\circ$ とする。

(3) $\theta=60^\circ$ とする。9 つの複素数 $\alpha^m\beta^n$ $(m,\ n=1,2,3)$ の虚部の最小値を求め，その最小値を与える $(m,\ n)$ のすべてを決定せよ。

解答 (1) $\beta=z-1=\cos\theta-1+i\sin\theta$ より

$$|\beta|=\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$
$$=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから $\quad |\beta|=2\sin\dfrac{\theta}{2}$

(2) $\beta=\cos\theta-1+i\sin\theta=-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}+2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}+90^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+90^\circ\right)\right\}$$

(1) の結果より $2\sin\dfrac{\theta}{2}=|\beta|$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$90^\circ<\dfrac{\theta}{2}+90^\circ<180^\circ$ であるから $\quad\arg\beta=\dfrac{\theta}{2}+90^\circ$

(3) $\alpha = \cos\theta + 1 + i\sin\theta$

$= 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} + 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$= 2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

上式および (1) の結果から，$\theta = 60^\circ$ のとき

$$\alpha = \sqrt{3}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ), \quad \beta = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

ゆえに　$|\alpha^m\beta^n| = (\sqrt{3})^m$，$\arg(\alpha^m\beta^n) = 30^\circ \times m + 120^\circ \times n$

$\alpha^m\beta^n$ の虚部を I とすると　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 120^\circ \times n)$

$n = 1$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 120^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$n = 2$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 240^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$n = 3$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 360^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$I < 0$ となるのは，次の 4 通りで，そのときの I の値は

$(m,\ n) = (1,\ 2)$ のとき　$I = -\sqrt{3}$,

$(m,\ n) = (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$ のとき　$I = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{(m,\ n) = (2, 2),\ (3, 1),\ (3, 2)}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}}$ をとる．

523* 複素数 z は $z^7=1$ かつ $z\neq 1$ を満たす．z の偏角を θ とするとき，次の値を求めよ．(早稲田大 改)

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$

(2) $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta$

解答 (1) $z^7=1$ より　$(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ であるから　$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

よって　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\boldsymbol{-1}$

(2) $z^7=1$ より　$|z|^7=1$　ゆえに　$|z|=1,\ z\overline{z}=1$

$$z^6=\overline{z},\quad z^5=\overline{z}^2,\quad z^3=\overline{z}^4$$

これらを (1) の結果に代入すると

$$z+\overline{z}+(z^2+\overline{z}^2)+(z^4+\overline{z}^4)=-1 \tag{A}$$

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ であるから

$$z+\overline{z}=2\cos\theta,\quad z^2+\overline{z}^2=2\cos 2\theta,\quad z^4+\overline{z}^4=2\cos 4\theta \tag{B}$$

(B) を (A) に代入すると

$$2\cos\theta+2\cos 2\theta+2\cos 4\theta=-1$$

よって　$\boldsymbol{\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta=-\dfrac{1}{2}}$

524 複素数 α は $\alpha^5 = 1$，$\alpha \neq 1$ を満たしている． (静岡大 改)

(1) 等式 $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)$ の値を求めよ．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数 θ に対して，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく．このとき，等式 $|1-z| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$ が成り立つことを示せ．

(4) $\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5}$ の値を求めよ．

解答 (1) $\alpha^5 = 1$ より　$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1) = 0$

$\alpha - 1 \neq 0$ であるから　$\boldsymbol{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0}$

(2) α は方程式 $z^5 - 1 = 0$ の解であるから　$\alpha^5 = 1$

$$(\alpha^2)^5 = (\alpha^5)^2 - 1 = 0,$$
$$(\alpha^3)^5 = (\alpha^5)^3 - 1 = 0,$$
$$(\alpha^4)^5 = (\alpha^5)^4 - 1 = 0$$

$z^5 - 1 = 0$ の解は $1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4$ であるから

$$z^5 - 1 = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)$$

また，$z^5 - 1 = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$ であるから

$$(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4) = z^4+z^3+z^2+z+1$$

これに $z = 1$ を代入して

$$\boldsymbol{(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4) = 5}$$

(3) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ より，$1-z=(1-\cos\theta)+i(-\sin\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}|1-z| &= \sqrt{(1-\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\\ &= \sqrt{2(1-\cos\theta)}=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$0<\dfrac{\theta}{2}<\pi$ より　$\sin\dfrac{\theta}{2}\geqq 0$

したがって　　$|1-z|=2\sin\dfrac{\theta}{2}$

(2) の結果の両辺の絶対値をとると

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)=5$$

すなわち　　$|1-\alpha||1-\alpha^2||1-\alpha^3||1-\alpha^4|=5$　　$(*)$

$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ であるから，(3) の結果から

$$|1-\alpha^k|=2\sin\frac{k\pi}{5}\quad(k=1,2,3,4)$$

これを $(*)$ に代入すると

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{5}\cdot 2\sin\frac{3\pi}{5}\cdot 2\sin\frac{4\pi}{5}=5$$

したがって　　$\boldsymbol{\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{5}{16}}$

補足　一般に次式が成立する．

$$\boldsymbol{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}}$$

7.45　複素数と図形

7.45.1　Review

525 $\alpha = 2+2i$，$\beta = 3-2i$，$\gamma = -1-i$ の表す点をそれぞれ A，B，C とする．3 点 A，B，C を頂点として平行四辺形 ABCD をつくるとき，点 D を表す複素数を求めよ．また，△ABC の重心を表す複素数を求めよ．

解答 点 D を表す複素数を δ とすると　$\dfrac{\alpha+\gamma}{2} = \dfrac{\beta+\delta}{2}$

$$\delta = \alpha - \beta + \gamma = (2+2i) - (3-2i) + (-1-i) = \boldsymbol{-2+3i}$$

△ABC の重心を表す複素数は

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{(2+2i)+(3-2i)+(-1-i)}{3} = \boldsymbol{\frac{4-i}{3}}$$

526 次のような複素数 $z_1 = -1+i$，$z_2 = 1-3i$，$z_3 = -5+9i$ の表す 3 点が一直線上にあることを示せ．また，点 z_1 は 2 点 z_2，z_3 を結ぶ線分をどのような比に分けるか．

解答 $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \dfrac{(-5+9i)-(-1+i)}{(1-3i)-(-1+i)} = -2$

よって，3 点 z_1，z_2，z_3 は一直線上にある．

また，z_1 は 2 点 z_2，z_3 を結ぶ線分を **1 : 2 に内分する．**

527 複素数平面上の点 $3+i$ を中心として，点 $7+3i$ を $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ．

解答 求める複素数を z とすると　$\dfrac{z-(3+i)}{(7+3i)-(3+i)} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} z &= (4+2i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+(3+i) \\ &= (2+i)(\sqrt{3}+i)+(3+i) \\ &= \boldsymbol{2+2\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i} \end{aligned}$$

7.45.2 Exercise

528* 複素数 $z_1,\ z_2,\ z_3$ の間に次の関係があるとき，$z_1,\ z_2,\ z_3$ の表す点 A，B，C を結んでできる三角形はどのような形の三角形であるか.

(1) $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

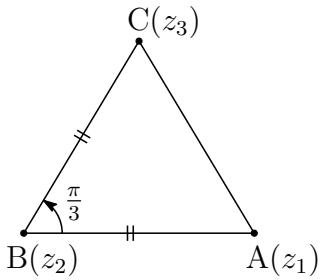
(2) $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=\sqrt{3}\,i$

(3) $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=1-i$

解答 (1) $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

したがって　$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}=1$

よって，△ABC は**正三角形**

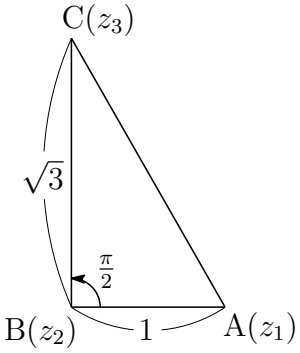


(2) $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=\sqrt{3}\,i=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

したがって　$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}=\sqrt{3}$

よって，△ABC は $\mathbf{BC=\sqrt{3}BA}$,

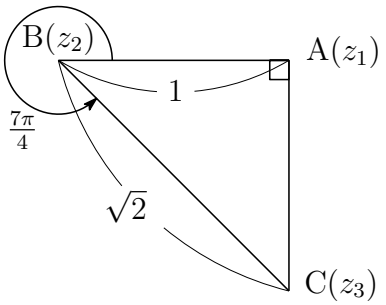
$\angle\mathbf{B}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$**の直角三角形**



(3) $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

したがって　$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}=\sqrt{2}$

よって，△ABC は $\angle\mathbf{A}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$**の直角三角形**



529* 複素数平面上の 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ は，$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$，$|\alpha-\beta|=3$ を満たし，点 O とは異なる点である．

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ．

(2) α の絶対値を求めよ．

(3) 原点 O と $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ を結んでできる $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を求めよ．

解答 (1) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0\cdots$①，$|\alpha-\beta|=3\cdots$②

$\beta=0$ とすると，① より，$\alpha=0$ となり，これは ② を満たさないので

$$\alpha\neq 0$$

① より，$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-\dfrac{\alpha}{\beta}+1=0$ を解くと

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\boldsymbol{1\pm\sqrt{3}\,i}}{\boldsymbol{2}}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{\beta}{\alpha}=\cos\frac{\pi}{3}\pm\sin\frac{\pi}{3}$$

したがって $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=1$，$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\pm\dfrac{\pi}{3}$ ゆえに $|\alpha|=|\beta|$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$

$\triangle\mathrm{OAB}$ は 1 辺が 3 の正三角形であるから $\quad\boldsymbol{|\alpha|=3}$

(3) (1)，(2) の結果から，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 3^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\boldsymbol{9\sqrt{3}}}{\boldsymbol{4}}$$

530 〔1〕複素数平面上の異なる 3 点 $\mathrm{A}(2-3i)$，$\mathrm{B}(3+i)$，$\mathrm{C}(x+i)$ (x は実数) について，点 C が 2 点 A，B を直径の両端とする円周上にあるように x の値を求めよ．

〔2〕複素数平面上の 4 点 $z_1=2i$，$z_2=-1$，$z_3=1-i$，$z_4=2+i$ について

(1) $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$，$\dfrac{z_3-z_4}{z_2-z_4}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 4 点 z_1，z_2，z_3，z_4 が同一円周上にあることを示せ．

解答 〔1〕点 C が線分 AB を直径とする円周上にあるとき，3 点 A，B，C は異なる点であることから

$$\angle \mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$$

したがって，$\dfrac{(3+i)-(x+i)}{(2-3i)-(x+i)}$ が純虚数となる．

$$\begin{aligned}\frac{(3+i)-(x+i)}{(2-3i)-(x+i)}&=\frac{3-x}{(2-x)-4i}\\&=\frac{(3-x)\{(2-x)+4i\}}{(2-x)^2+4^2}\\&=\frac{(3-x)(2-x)+4(3-x)i}{(2-x)^2+4^2}\end{aligned}$$

したがって　$(3-x)(2-x)=0$　かつ　$3-x\neq 0$　よって　$\boldsymbol{x=2}$

〔2〕 (1) $z_1 = 2i$，$z_2 = -1$，$z_3 = 1 - i$，$z_4 = 2 + i$ より

$$\begin{aligned}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{(1-i)-2i}{-1-2i} = \frac{1-3i}{-1-2i} = \frac{-1+3i}{1+2i} \\ &= \frac{(-1+3i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{5+5i}{5} = \boldsymbol{1+i}, \\ \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} &= \frac{(1-i)-(2+i)}{-1-(2+i)} = \frac{-1-2i}{-3-i} = \frac{1+2i}{3+i} \\ &= \frac{(1+2i)(3-i)}{3^2+1^2} = \frac{5+5i}{10} = \frac{\boldsymbol{1+i}}{\boldsymbol{2}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

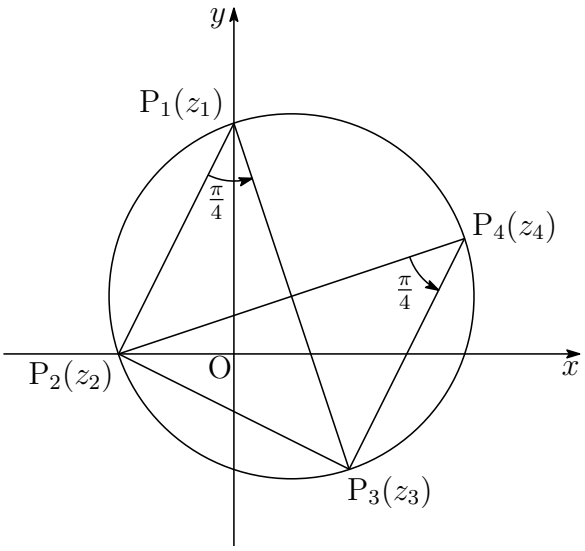
$$\begin{aligned}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

したがって　　$\arg\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg\dfrac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} = \dfrac{\pi}{4}$

4 点 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ の表す点をそれぞれ $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4$ とするとき，直線 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ に関して，2 点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_4$ は同じ側にある．

$$\angle \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3 = \angle \mathrm{P}_2\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3 = \frac{\pi}{4}$$

円周角の定理の逆により，4 点 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ が同一円周上にある．



7.45.3 Try

531* 複素数平面上に異なる 3 点 z, z^2, z^3 がある．　(一橋大 2004 年 3)

(1) z, z^2, z^3 が同一直線上にあるような z をすべて求めよ．

(2) z, z^2, z^3 が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ．また，z, z^2, z^3 が正三角形の頂点となるような z をすべて求めよ．

解答　(1) 複素数平面上の 3 点 z, z^2, z^3 が異なる点であるから

$$z \neq z^2, \quad z \neq z^3, \quad z^2 \neq z^3 \quad \text{すなわち} \quad z \neq 0, \ \pm 1$$

このとき，3 点 z, z^2, z^3 が同一直線上にあるから

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z+1)(z-1)}{z(z-1)} = z + 1$$

は実数である．よって，z は　$\boldsymbol{z \neq 0, \pm 1}$ **の実数**

(2) (1) の結果から，z が実数であるとき ($z=0,\ \pm 1$ も含めて)，$z,\ z^2,\ z^3$ は同一直線上にある．したがって，z が実数でないことが，これらの 3 点が二等辺三角形となるための必要条件である．実数でない z に対して，A(z)，B(z^2)，C(z^3) とする．このとき，△ABC が二等辺三角形となるのは，次の 3 つの場合である．

(i) AB = AC のとき　$|z^2-z|=|z^3-z|$

$$|z||z-1|=|z||z+1||z-1| \quad \text{すなわち} \quad |z+1|=1,\ z\neq -2,\ 0$$

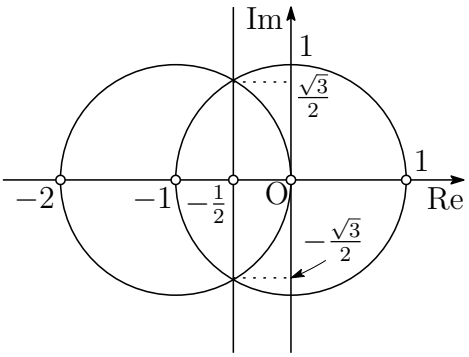
(ii) BA = BC のとき　$|z^2-z|=|z^3-z^2|$

$$|z||z-1|=|z|^2|z-1| \quad \text{すなわち} \quad |z|=1,\ z\neq \pm 1$$

(iii) CA = CB のとき　$|z^3-z|=|z^3-z^2|$

$$|z||z+1||z-1|=|z|^2|z-1| \quad \text{すなわち} \quad |z+1|=|z|,\ z\neq -\frac{1}{2}$$

3 点 $z,\ z^2,\ z^3$ が二等辺三角形となる点 z の全体は次のようになる．



3 点 $z,\ z^2,\ z^3$ が正三角形となる点 z の全体は，(i)〜(iii) のいずれか 2 つを同時にみたす点 z であるから

$$\boldsymbol{z=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$$

532 (1) 複素数平面上に3点A(α)，B(β)，C(γ)を頂点とする△ABCがある．△ABCが正三角形であるための必要十分条件は

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

であることを示せ．

(2) 複素数平面上に4点A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)を頂点とする四角形ABCDがある．四角形ABCDが正方形であるための必要十分条件は

$$\alpha+\gamma=\beta+\delta,\quad (\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$$

であることを示せ．　(大阪教育大)

解答 (1) 3点A(α)，B(β)，C(γ)を頂点とする△ABCが正三角形であるための必要十分条件は$\omega=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\omega,\ \overline{\omega}$$

ω, $\overline{\omega}$は$z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)=0$の解であるから$(z+1\neq 0)$

$$z^2-z+1=0$$

これに$z=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$を代入すると

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)+1=0$$
$$(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$$

よって，△ABCが正三角形であるための必要十分条件は

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

(2) 四角形ABCDが正方形となるための必要十分条件は

$$\gamma-\beta=\delta-\alpha,\quad \frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm i$$

したがって　　$\alpha+\gamma=\beta+\delta,\quad \left(\dfrac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=-1$

よって，四角形ABCDが正方形であるための必要十分条件は

$$\alpha+\gamma=\beta+\delta,\quad (\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$$

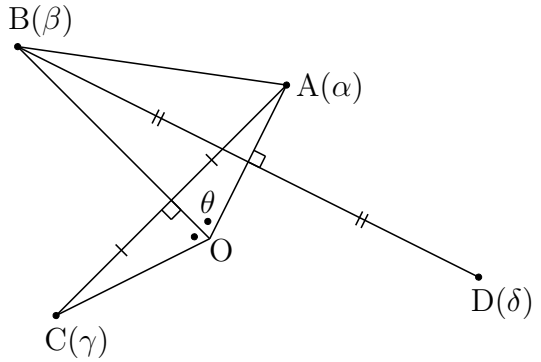
533 複素数平面上で原点 O と 2 点 A(α)，B(β) を頂点とする △ABC がある．直線 OB に関して点 A と対称な点を C，直線 OA に関して点 B と対称な点を D とする． (岐阜薬科大)

(1) 点 C(γ) とするとき，$\gamma = \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}\beta$ であることを示せ．

(2) 辺 AB と直線 DC が平行なとき，△OAB はどのような三角形か．

解答 (1) $\cos\theta + i\sin\theta = \dfrac{\beta}{|\beta|} \Big/ \dfrac{\alpha}{|\alpha|} = \dfrac{|\alpha|\beta}{|\beta|\alpha}$ とすると

$$\gamma = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\alpha = (\cos\theta + i\sin\theta)^2\alpha$$
$$= \left(\frac{|\alpha|\beta}{|\beta|\alpha}\right)^2\alpha = \frac{|\alpha|^2\beta^2}{|\beta|^2\alpha} = \frac{\alpha\overline{\alpha}\beta^2}{\beta\overline{\beta}\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\beta = \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta$$



(2) D(δ) とおくと，(1) の結果を利用して　$\delta = \overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}\alpha$

$w = \dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと　$\gamma = \dfrac{\beta}{\overline{w}},\ \delta = \overline{w}\alpha$

辺 AB と辺 DC が平行であるとき

$$\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} = \frac{\overline{w}\alpha - \dfrac{\beta}{\overline{w}}}{\beta - \alpha} = \frac{\overline{w} - \dfrac{w}{\overline{w}}}{w - 1}$$

は実数であるから　$\dfrac{\overline{w} - \dfrac{w}{\overline{w}}}{w - 1} = \dfrac{w - \dfrac{\overline{w}}{w}}{\overline{w} - 1}$

$$(w-1)\left(w - \frac{\overline{w}}{w}\right) = (\overline{w} - 1)\left(\overline{w} - \frac{w}{\overline{w}}\right)$$

整理すると　$(w + \overline{w})(w - \overline{w})\left(1 - \dfrac{1}{|w|^2}\right) = 0$

(i) $w + \overline{w} = 0$ のとき，$w = \dfrac{\beta}{\alpha}$ が純虚数であるから，$\angle\alpha 0\beta = \dfrac{\pi}{2}$

(ii) $w - \overline{w} = 0$ のとき，$w = \dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数となり，3 点 $0,\ \alpha,\ \beta$ が同一直線上にあり，不適.

(iii) $1 - \dfrac{1}{|w|^2} = 0$ のとき，$|w| = \dfrac{|\beta|}{|\alpha|} = 1$ となり，OA = OB

(i)〜(iii) より，**△ABC は，OA = OB の二等辺三角形または $\angle$AOB = $\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形**

534* 複素数平面上で，$z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$，$z_2=-\dfrac{1}{z_0}$ を表す点をそれぞれ $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ とする． (岡山大 改)

(1) $z_1,\ z_2$ を極形式で表せ．

(2) 原点 $\mathrm{O},\ \mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ の 4 点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ．

解答 (1) $z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ より

$$z_1=\frac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\cdot 2(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\boldsymbol{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$-1=\cos\pi+i\sin\pi$，$\dfrac{1}{z_0}=\dfrac{1}{2}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ より

$$z_2=-\frac{1}{z_0}=-1\cdot\frac{1}{z_0}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\}}$$

(2) $z_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{4} z_0$ より，$|z_1| = \dfrac{1}{2}|z_0|$，$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_0}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

これから，3 点 $0,\ z_1,\ z_2$ は点 $\dfrac{1}{2}z_0$ を中心とする円周上の点であり，$|z_0| = 2$ より，その円の半径は 1 である．$\alpha = \arg\dfrac{z_2}{z_0}$ とおくと，z_2 はこの円周上の点であるから

$$\left|\frac{1}{2}z_0\right| = \left|z_2 - \frac{1}{2}z_0\right| = 1,\ |z_2| = \frac{1}{2}$$

に注意して，3 点 $0,\ \dfrac{1}{2}z_0,\ z_2$ を頂点とする三角形に余弦定理を適用すると

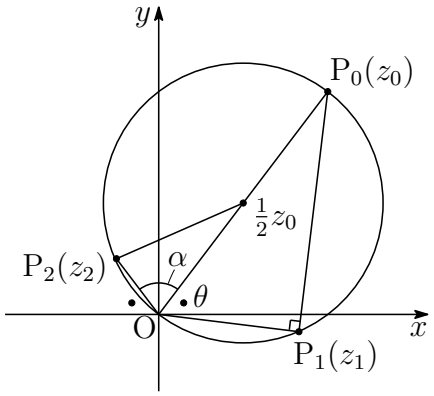
$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 - 1^2}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

$\alpha = \pi - 2\theta$ であるから

$$\cos\alpha = \cos(\pi - 2\theta) = -\cos 2\theta = 1 - 2\cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{4},\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$

よって　　$z_0 = 2(\cos\theta + i\sin\theta) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{10}}{2}i}$



535* 複素数平面上の点 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots$ を表す複素数をそれぞれ $z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots$ とする．原点 O および整数 k $(k \geqq 0)$ に対して $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす．また，$\angle \mathrm{P}_k\mathrm{OP}_{k+1} = \theta$ とする．ただし，θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．

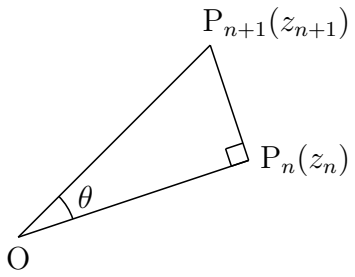
(1) z_{k+1} を z_k で表せ．

(2) $z_0 = a$ (a は正の実数) のとき，$\triangle \mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の面積 s_k を a，θ で表せ．

(3) 三角形の面積の和 $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} s_k$ を a，θ で表せ．　(名古屋市立大)

解答　(1) $\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \dfrac{1}{\cos\theta}$，$\arg\left(\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right) = \theta$ より　$\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = \dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$

よって　$\boldsymbol{z_{n+1} = \dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)z_n}$



(2) $s_0 = \dfrac{1}{2}a^2\tan\theta$，$s_{k+1} = \dfrac{s_k}{\cos^2\theta}$ より

$$s_k = \frac{1}{2}a^2\tan\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^k = \boldsymbol{\frac{a^2\tan\theta}{2\cos^{2k}\theta}}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{n-1} s_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}a^2\tan\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}a^2\tan\theta\cdot\frac{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^n - 1}{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1} \\ &= \boldsymbol{\frac{a^2}{2\tan\theta}\left(\frac{1}{\cos^{2n}\theta} - 1\right)} \end{aligned}$$

7.46　複素数平面上の軌跡と領域

7.46.1　Review

536 次の等式を満たす点 z の軌跡を求めよ.

(1) $|z-1|=|z+2i|$

(2) $|z-1+i|=4$

解答　(1) $|z-1|=|z-(-2i)|$ より，点 z の表す軌跡は，
2 点 $1, -2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線.

(2) $|z-(1-i)|=4$ より，点 z の表す軌跡は，
点 $1-i$ を中心とする半径 4 の円.

537 点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，次の関係式で表される点 w の軌跡を求めよ.

(1) $w=z+1$

(2) $w=(-1+i)(z-1)$

解答　(1) $z=w-1$ を $|z|=1$ に代入すると　$|w-1|=1$
よって，点 w の軌跡は，**点 1 を中心とする半径 1 の円.**

(2) $w=(-1+i)(z-1)$ より

$$z=\frac{w}{-1+i}+1=\frac{w-1+i}{-1+i}$$

これを $|z|=1$ に代入すると

$$\left|\frac{w-1+i}{-1+i}\right|=1 \quad \text{すなわち} \quad |w-(1-i)|=\sqrt{2}$$

よって，点 w の軌跡は，**点 $1-i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円.**

538 複素数 $z = x + yi$ ($x,\ y$ は実数) が次の条件を満たすとき，座標平面上における点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

(1) $z + \overline{z} = 2$

(2) $z^2 + (\overline{z})^2 = 0$

解答 (1) $z = x + yi$ を $z + \overline{z} = 2$ に代入すると

$$(x + yi) + (x - yi) = 2 \quad \text{すなわち} \quad x = 1$$

よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡は，**直線 $\boldsymbol{x = 1}$**

(2) $z = x + yi$ を $z^2 + (\overline{z})^2 = 0$ に代入すると

$$(x + yi)^2 + (x - yi)^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - y^2 = 0$$

よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡は，**2 直線 $\boldsymbol{y = \pm x}$**

7.46.2 Exercise

539* 複素数 z が次の等式を満たすとき，点 z の軌跡を求めよ．

(1) $z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} = 0$

(2) $|z - 2i| = 2|z + i|$

解答 (1) $z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} = 0$ より $\quad (z - 2i)(\overline{z} + 2i) = 4$

$$(z - 2i)\overline{(z - 2i)} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad |z - 2i|^2 = 4$$

$|z - 2i| = 2$ より，点 z の軌跡は**点 $\boldsymbol{2i}$ を中心とする半径 2 の円．**

(2) $|z - 2i| = 2|z + i|$ より $\quad |z - 2i|^2 = 4|z + i|^2$

$$(z - 2i)(\overline{z} + 2i) = 4(z + i)(\overline{z} - i)$$

整理すると $\qquad z\overline{z} - 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$$(z + 2i)(\overline{z} - 2i) = 4 \quad \text{ゆえに} \quad |z + 2i|^2 = 4$$

$|z + 2i| = 2$ より，点 z の軌跡は**点 $\boldsymbol{-2i}$ を中心とする半径 2 の円．**

別解 $|z - 2i| = 2|z + i|$ より $\quad |z - 2i| : |z + i| = 2 : 1$

よって，点 z は 2 点 $2i, -i$ を $2 : 1$ に内分および外分する点，すなわち，2 点 $0, -4i$ を直径の両端とする円である．

よって，点 z の軌跡は**点 $\boldsymbol{-2i}$ を中心とする半径 2 の円．**

540 点 z が単位円周上を動くとき，次の関係式で表される点 w はどのような図形をえがくか.

(1) $w=\dfrac{z+i}{z+1}$

(2) $w=\dfrac{1+i}{z}$

解答 (1) $w=\dfrac{z+i}{z+1}$ より　$(z+1)w=z+i$

$$(w-1)z=-w+i$$

$w=1$ はこの等式を満たさないから，$w-1\neq 0$ より

$$z=\frac{-w+i}{w-1}$$

$|z|=1$ であるから

$$\left|\frac{-w+i}{w-1}\right|=1 \quad \text{ゆえに} \quad |w-i|=|w-1|$$

よって，点 w の軌跡は，**2 点 i，1 を結ぶ線分の垂直二等分線.**

補足 $|w-i|=|w-1|$ より　$|w-i|^2=|w-1|^2$

$$w(1+i)+\overline{w}(1-i)=0 \quad \text{ゆえに} \quad w(1+i)+\overline{w(1+i)}=0$$

$w(1+i)$ は 0 または純虚数であるから，k を実数とすると

$$w(1+i)=2ki \quad \text{ゆえに} \quad w=ki(1-i)=k(1+i)$$

よって，点 w は原点を通り，$1+i$ に平行な直線.

(2) $w=\dfrac{1+i}{z}$ より　$wz=1+i$

$w=0$ はこの等式を満たさないから，$w\neq 0$ より

$$z=\frac{1+i}{w}$$

$z=1$ であるから

$$\left|\frac{1+i}{w}\right|=1 \quad \text{ゆえに} \quad |w|=|1+i|=\sqrt{2}$$

よって，点 w の軌跡は，**原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円.**

541* 複素数平面上で，$\dfrac{i(z-1)}{z}$ が実数となるような，点 z の軌跡を求めよ．

解答 $\dfrac{i(z-1)}{z}\cdots(*)$ から　$z \neq 0$

$(*)$ が実数であるから

$$\overline{\left\{\frac{i(z-1)}{z}\right\}} = \frac{i(z-1)}{z} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{-i(\overline{z}-1)}{\overline{z}} = \frac{i(z-1)}{z}$$

整理すると　$z\overline{z} - \dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2}\overline{z} = 0$　ゆえに　$\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}$

したがって　$\left|z-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

よって，点 z の軌跡は，点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円．ただし，原点を除く．

別解 $\dfrac{i(z-1)}{z}$ が実数であるから

$$\frac{i(z-1)}{z} = \tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと　$i - \dfrac{i}{z} = \tan\theta$

$$-1 + \frac{1}{z} = i\tan\theta \quad \text{ゆえに} \quad z = \frac{1}{1+i\tan\theta}$$

したがって

$$\begin{aligned} z &= \frac{\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= \cos^2\theta - i\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\} \end{aligned}$$

$-\pi < -2\theta < \pi$ であるから　$z \neq 0$

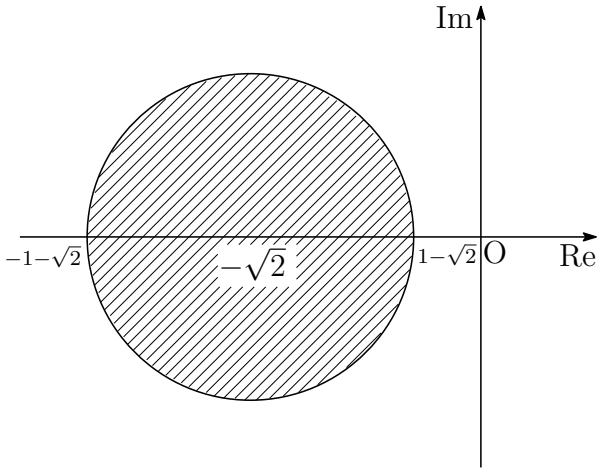
よって，点 z の軌跡は，点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円．ただし，原点を除く．

542* 複素数 z が $|z| \leqq 1$ を満たすとき，複素数 $w = z - \sqrt{2}$ について

(1) 点 w の存在する領域を複素数平面上に図示せよ．

(2) w^2 の絶対値を r，偏角を θ とするとき，r と θ の値の範囲をそれぞれ求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

解答 (1) 下の図の斜線部分で境界線を含む．

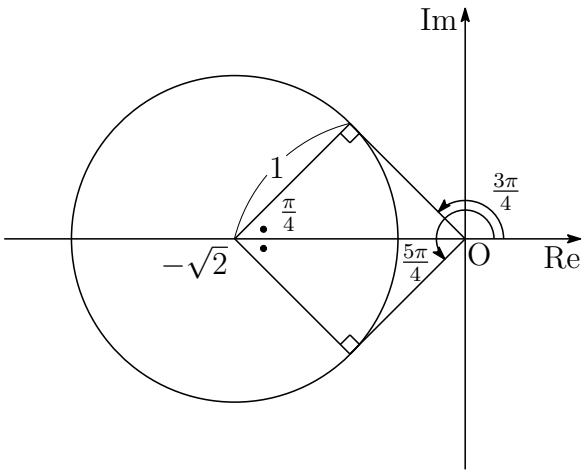


(2) (1) の結果から

$$\sqrt{2}-1 \leqq |w| \leqq \sqrt{2}+1, \quad \frac{3\pi}{4} \arg w \leqq \frac{5\pi}{4}$$

$r = |w|^2$，$\theta = \arg w^2 = 2 \arg w$ であるから $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\boldsymbol{3-2\sqrt{2} \leqq r \leqq 3+2\sqrt{2}, \ \ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, \ \ \frac{3\pi}{2} \leqq \theta < 2\pi}$$



543 複素数 $\alpha = 2+3i$，$\beta = 3+i$ に対して，$z = s\alpha + t\beta$ を考える．ただし，s，t は実数で $s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ 1 \leqq s+t \leqq 3$ とする．このとき，複素数平面上で z が存在する部分の面積は［　　］である．　(早稲田大)

解答 3 点 $0,\ \alpha,\ \beta$ を頂点とする三角形の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$$

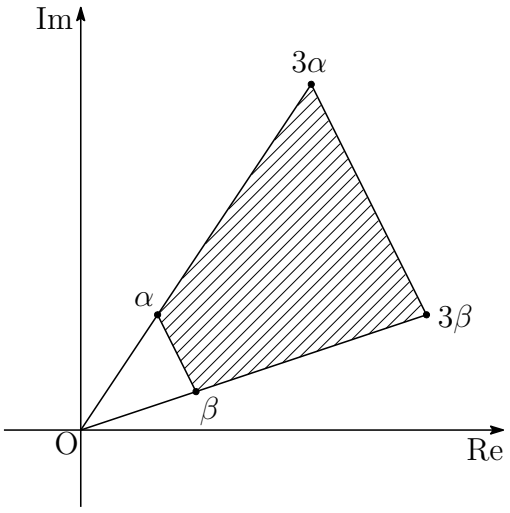
$\alpha = 2+3i$，$\beta = 3+i$ より

$$\overline{\alpha}\beta = (2-3i)(3+i) = 9-7i \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta) = -7$$

したがって　$S = \dfrac{1}{2}|-7| = \dfrac{7}{2}$

求める面積は，4 点 $\alpha,\ \beta,\ 3\beta,\ 3\gamma$ を頂点とする四角形の面積であるから

$$(3^2-1^2)S = 8\cdot\frac{7}{2} = \mathbf{28}$$



解説 $\theta = \angle\alpha 0\beta$ とすると　$\cos\theta + i\sin\theta = \dfrac{\dfrac{\beta}{|\beta|}}{\dfrac{\alpha}{|\alpha|}} = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}} = \dfrac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから　$S = \dfrac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta| = \mathbf{\dfrac{1}{2}|Im(\overline{\alpha}\beta)|}$

補足 $\mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta}) = -\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)$ であるから

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)| = \frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta})|}$$

宮崎大学 2017 年 4

次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 等式 $z^2 = i$ を満たす複素数 z は 2 つある．それらを $x + yi$ (x, y は実数) の形で表せ．

(2) 等式 $w^2 - 2iw = 1 + i$ を満たす複素数 w は 2 つあり，それらを α，β とする．ただし，α の実部は β の実部より大きいとする．α，β を $x + yi$ (x, y は実数) の形で表せ．

(3) 複素数平面上で，原点を O とし，(2) で求めた α，β が表す点をそれぞれ A，B とするとき，三角形 OAB の面積を求めよ．

解答 (1) 方程式の解 z の極形式を $\quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \cdots ①$

とすると $\qquad z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

i を極形式で表すと $\quad i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって $\qquad r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2 = 1, \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから $\quad r = 1 \quad \cdots ② \quad$ また $\quad \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると，$k = 0, 1$ であるから $\quad \theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi \quad \cdots ③$

②，③ を ① に代入すると $\quad \boldsymbol{z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}i}$ **(複号同順)**

(2) $w^2 - 2iw = 1 + i$ より $\qquad (w - i)^2 = i$

(1) の結果を利用して $\qquad w - i = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

したがって $\qquad w = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)i,\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)i$

α の実部は β の実部より大きいから

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i,\ \ \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i}$$

(3) (1) の解の 1 つを $z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ とおくと　$\alpha = i + z_1,\ \ \beta = i - z_1$

△OAB の面積を S とすると　$S = \dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

$$\overline{\alpha}\beta = (-i + \overline{z}_1)(i - z_1) = 1 - |z_1|^2 + (z_1 + \overline{z}_1)i = \sqrt{2}\,i$$

$\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta) = \sqrt{2}$ より　　$S = \dfrac{1}{2}|\sqrt{2}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

7.46.3 Try

544 (1) 複素数 z が $|z-1|=1$ を満たすとき，複素数平面上で $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ によって定まる点 w の軌跡を図示せよ．

(2) (1) の w について，$iw+3i-4$ の偏角 θ の範囲を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする． (早稲田大)

解答 (1) $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ より　$(z+i)w=z-i$　ゆえに　$(w-1)z=-i(w+1)$

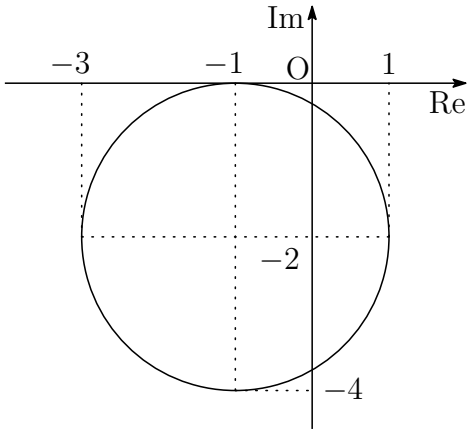
$w=1$ はこの等式を満たさないから，$w-1\neq 0$ より

$$z=\frac{-i(w+1)}{w-1}$$

これを $|z-1|=1$ に代入すると

$$\left|\frac{-i(w+1)}{w-1}-1\right|=1$$
$$\left|\frac{-(1+i)(w+i)}{w-1}\right|=1$$
$$\sqrt{2}|w+i|=|w-1| \qquad (*)$$
$$2|w+i|^2=|w-1|^2$$
$$2(w+i)(\overline{w}-i)=(w-1)(\overline{w}-1)$$
$$w\overline{w}+(1-2i)w+(1+2i)\overline{w}+1=0$$
$$(w+1+2i)(\overline{w}+1-2i)=4$$
$$|w+1+2i|^2=4$$
$$|w+1+2i|=2$$

よって，点 w は点 $-1-2i$ を中心とする半径 2 の円である．



別解 $(*)$ より　$|w-1| : |w+i| = \sqrt{2} : 1$

2 点 $1, -i$ を $\sqrt{2} : 1$ に内分する点を $\mathrm{A}(w_1)$ とすると

$$w_1 = \frac{1-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)+(-2+\sqrt{2})i$$

2 点 $1, -i$ を $\sqrt{2} : 1$ に外分する点を $\mathrm{B}(w_2)$ とすると

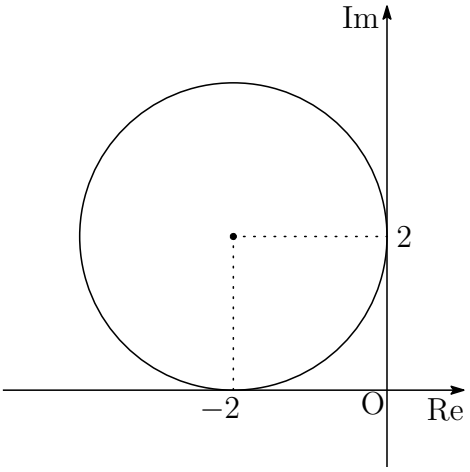
$$w_2 = \frac{-1-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-1} = (-\sqrt{2}-1)+(-2-\sqrt{2})i$$

w は 2 点 $w_1,\ w_2$ を直径の両端とする円であるから

$$\text{中心}\frac{w_1+w_2}{2} = \boldsymbol{-1-2i},\quad \text{半径}\frac{|w_2-w_1|}{2} = |-\sqrt{2}(1+i)| = \boldsymbol{2}$$

(2) $iw+3i-4$ は w を原点を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転し，$-4+3i$ だけ回転させたものであるから，w の中心 $-1-2i$ に着目すると

$$i(-1-2i)-4+3i = -2+2i$$



よって，$iw+3i-4$ の偏角 θ の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi}$

545 (1) $z+\dfrac{16}{z}$ が実数となるような，0 でない複素数 z がえがく図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) (1) でさらに $2 \leqq z+\dfrac{16}{z} \leqq 16$ となるような，0 でない複素数 z がえがく図形を複素数平面上に図示せよ．　(東京都立大)

解答 (1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

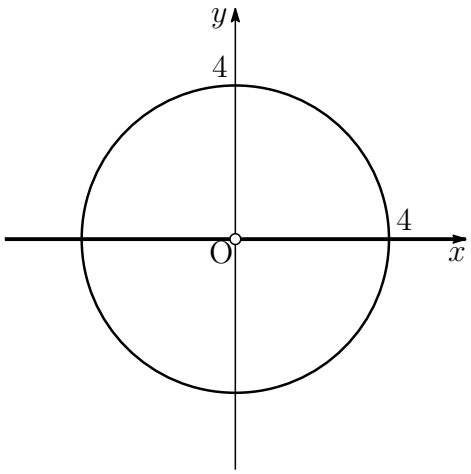
$$z+\frac{16}{z}=\left(r+\frac{16}{r}\right)\cos\theta+\left(r-\frac{16}{r}\right)i\sin\theta \qquad (*)$$

これが実数であるから $(r \neq 0)$

$$r-\frac{16}{r}=0 \quad \text{または} \quad \sin\theta=0$$

したがって　$r=4$　または　$\theta=0,\ \pi$ $(r \neq 0)$

よって，w のえがく図形は，次のようなる．ただし，$\circ$ は除く．



(2) $(*)$ より，

(i) $r=4$ のとき

$$z+\frac{16}{z}=8\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad 2\leqq 8\cos\theta\leqq 10$$

すなわち　$r=4,\ \cos\theta\geqq\dfrac{1}{4}$

(ii) $\theta=0$ のとき，$z+\dfrac{16}{z}=r+\dfrac{16}{r}$

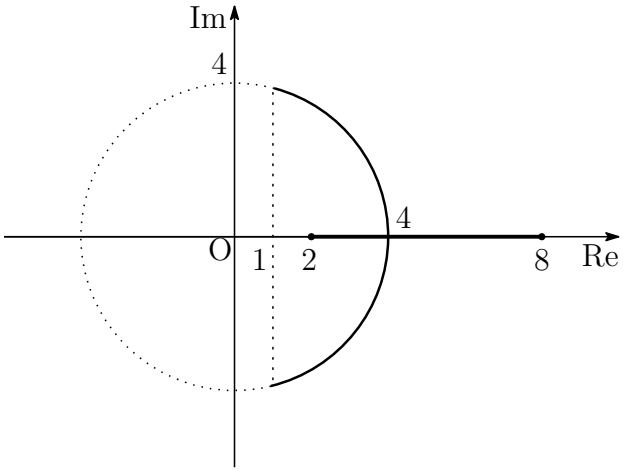
$2\leqq r+\dfrac{16}{r}\leqq 10$　ゆえに　$(r-1)^2+15\geqq 0$ かつ $(r-2)(r-8)\leqq 0$

すなわち　$2\leqq r\leqq 8$

(iii) $\theta=\pi$ のとき，$z+\dfrac{16}{z}=-\left(r+\dfrac{16}{r}\right)$

このとき，$2\leqq z+\dfrac{16}{z}\leqq 10$ を満たす r は存在しない．

(i)〜(iii) から，z の描く図形は次のようになる．



546 複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とし，複素数平面の原点を O で表す．ただし，$A \neq B$，$A \neq O$ とする． (広島大)

(1) 方程式 $\dfrac{z}{\alpha}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1$ を満たす複素数 z が表す点の複素数平面上の軌跡は，線分 OA の垂直二等分線であることを示せ．

(2) $|\alpha|=|\beta|=1$ とする．複素数平面において，直線 AB 上の点を表す複素数 z は，方程式 $z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$ を満たすことを示せ．

(3) $|\alpha|=|\beta|=1$ とする．複素数平面上において，点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点を表す複素数 z は，方程式 $z-\alpha\beta\overline{z}=\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}$ を満たすことを示せ．

解答 (1) $\dfrac{z-\dfrac{\alpha}{2}}{\alpha}$ は 0 または純虚数であるから

$$\frac{z-\frac{\alpha}{2}}{\alpha}+\overline{\left(\frac{z-\frac{\alpha}{2}}{\alpha}\right)}=0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{z}{\alpha}+\frac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1$$

(2) $\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数であるから $\quad \dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}-\overline{\left(\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}=0$

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z+(\alpha-\beta)\overline{z}=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$$

$|\alpha|=|\beta|=1$ より，$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=1$ であるから $\quad \overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha},\ \ \overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$

$$\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)z+(\alpha-\beta)\overline{z}=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}$$

したがって $\quad \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}z+(\alpha-\beta)\overline{z}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}$

$A \neq B$ より，$\alpha-\beta\neq 0$ であるから

$$z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$$

(3) $\dfrac{z-\gamma}{\beta-\alpha}$ は純虚数または 0 であるから　$\dfrac{z-\gamma}{\beta-\alpha}+\overline{\left(\dfrac{z-\gamma}{\beta-\alpha}\right)}=0$

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})(z-\gamma)+(\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\gamma})=0$$

$|\alpha|=|\beta|=1$ より，$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=1$ であるから　$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha},\ \overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$

$$\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)(z-\gamma)+(\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\gamma})=0$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}(z-\gamma)+(\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\gamma})=0$$

$$z-\gamma-\alpha\beta(\overline{z}-\overline{\gamma})=0$$

よって　　$z-\alpha\beta\overline{z}=\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}$

547 曲線 $C_0 : 5x^2+5y^2-6xy=8$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた曲線を C_1 とする. (和歌山大 改)

(1) 複素数平面上において，点 $p+qi$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点を $s+ti$ とするとき，p と q をそれぞれ s と t を用いて表せ. ただし，$p,\ q,\ s,\ t$ は実数.

(2) 曲線 C_1 の方程式を求めよ.

(3) 曲線 C_0 上の点で，原点からの距離が最大となる点をすべて求めよ.

解答 (1) 点 $p+qi$ は点 $s+ti$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned} p+qi &= (s+ti)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\} \\ &= (s+ti)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = \frac{s+t}{\sqrt{2}}+\frac{-s+t}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{p=\dfrac{s+t}{\sqrt{2}},\ q=\dfrac{-s+t}{\sqrt{2}}}$

(2) C_1 上の点 $(s,\ t)$ は C_0 上の $(p,\ q)$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものであるから，(1) の結果を $5p^2+5q^2-6pq=8$ に代入すると

$$5\left(\frac{s+t}{\sqrt{2}}\right)^2+5\left(\frac{-s+t}{\sqrt{2}}\right)^2-6\left(\frac{s+t}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-s+t}{\sqrt{2}}\right)=8$$

整理すると　　$8s^2+2t^2=8$　ゆえに　$s^2+\dfrac{t^2}{4}=1$

よって　　$\boldsymbol{C_1 : x^2+\dfrac{y^2}{4}=1}$

(3) C_1 上の点で原点からの距離が最大となる点は　$\pm 2i$
したがって，$s=0,\ t=\pm 2$ を (1) の結果に代入すると

$$p=q=\pm\sqrt{2}\quad \text{すなわち}\quad \pm\sqrt{2}(1+i)$$

よって，求める点は　$\boldsymbol{(\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2})}$ **(複号同順)**

548 複素数 $\alpha,\ \beta$ は $|\alpha-1|=1,\ |\beta-i|=1$ をみたす. (一橋大 2003 年 2)

(1) $\alpha+\beta$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ.

(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ.

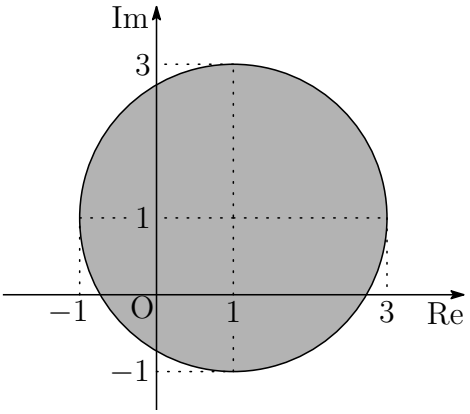
解答 (1) $|\alpha-1|=1$, $|\beta-i|=1$ より, $z=\alpha-1$, $w=\beta-i$ とおくと

$$\alpha+\beta=z+1+w+i=1+i+z+w$$

$\big||z|-|w|\big| \leqq |z+w| \leqq |z|+|w|$ に $|z|=|w|=1$ を適用すると

$$0 \leqq |z+w| \leqq 2$$

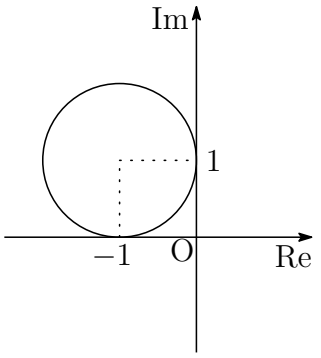
よって, $\alpha+\beta$ は, 中心 $1+i$, 半径 2 の円の内部で境界を含む.

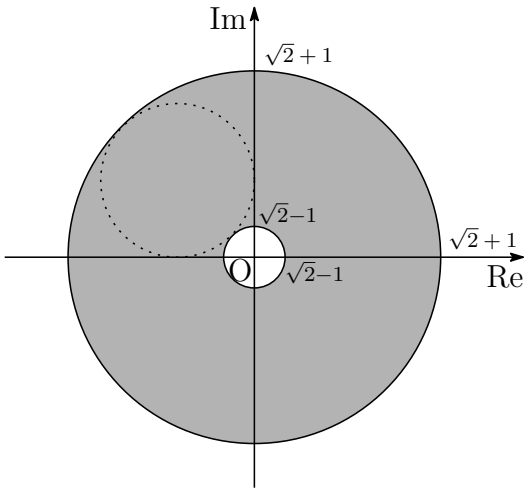


(2) $\alpha-1=z$，$\beta-1=-1+i+w$ であるから

$$(\alpha-1)(\beta-1)=z(-1+i+w)$$

左下の図のように $-1+i+w$ は中心 $-1+i$，半径 1 の円周上の点で，これを z により原点 O を中心に $\arg z$ だけ回転させたものである．よって，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}+1$ の内部と半径 $\sqrt{2}-1$ の外部であり，その範囲は右下の図のようになる (境界を含む).





8 Link(Approach)

8.1 複素数平面 (数学 C)

1 次の複素数 z を極形式で表せ．ただし，$0 \leqq \arg z < 2\pi$ とする．

(1) $z = -\sqrt{3} + i$ (大阪薬大)

(2) $z = -2 + 2i$ (鹿児島大)

(3) $z = \dfrac{3 + 15i}{3 + 2i}$ (学習院大)

解答 (1) $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ より

$$z = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \mathbf{2}\left(\mathbf{\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi}\right)$$

(2) $z = 2(-1+i)$，$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$ より

$$z = \mathbf{2\sqrt{2}}\left(\mathbf{\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi}\right)$$

(3) $z = \dfrac{3+15i}{3+2i} = 3(1+i)$，$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ より

$$z = \mathbf{3\sqrt{2}}\left(\mathbf{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}\right)$$

2 次の複素数の絶対値 r と偏角 θ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1) $(1+i)\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$ (東京電機大)

(2) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ (大阪工大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right) &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{28}\pi+i\sin\frac{11}{28}\right)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{r=\sqrt{2},\ \theta=\dfrac{11}{28}\pi}$

(2)

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

よって　　$\boldsymbol{r=\sqrt{2},\ \ \theta=\dfrac{\pi}{12}}$

3 次の計算をせよ.

(1) $\left\{2\left(\cos\dfrac{11}{12}\pi+i\sin\dfrac{11}{12}\pi\right)\right\}^{-3}$ (類 岩手大)

(2) $(1+\sqrt{3}i)^9$ (類 関西学院大)

(3) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ (山梨大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\left\{2\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)\right\}^{-3}&=2^{-3}\left\{\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{4}\pi\right)\right\}\\&=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)\\&=\frac{1}{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{16}-\frac{\sqrt{2}}{16}i}\end{aligned}$$

(2) $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$$(1+\sqrt{3}i)^9=2^9\left(\cos 3\pi+i\sin 3\pi\right)=\boldsymbol{-512}$$

(3) $1-\sqrt{3}i=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ より

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

したがって

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}\right)^{10}&=(\sqrt{2})^{10}\left\{\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right)\right\}\\&=32\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=32\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=\boldsymbol{-16+16\sqrt{3}i}\end{aligned}$$

4 次の方程式の解を求めよ.

(1) $z^2 = -1 + \sqrt{3}i$ (京都産大)

(2) $z^3 = i$ (類 福島大)

解答 (1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$-1 + \sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$ であるから

$$r^2 = 2, \quad 2\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから $\quad r = \sqrt{2}, \ \ \theta = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\quad k = 0,\ 1$ ゆえに $\quad \theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi$

よって $\quad \boldsymbol{z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i, \quad -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}i}$

(2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$r^3 = 1, \quad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから $\quad r = 1, \ \ \theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k}{3}\pi$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\quad k = 0,\ 1,\ 2$ ゆえに $\quad \theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

よって $\quad \boldsymbol{z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}, \quad -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}, \quad -i}$

5 2 点 A$(-1+i)$，B$(7-5i)$ について，次の問いに答えよ．　(類 東京理科大)

(1) 2 点 A，B 間の距離を求めよ．

(2) 線分 AB を 3 : 4 に内分する点を表す複素数を求めよ．

(3) 線分 AB を 1 : 3 に外分する点を表す複素数を求めよ．

解答 (1) $(7-5i)-(-1+i)=8-6i$ より

$$\mathrm{AB}=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\mathbf{10}$$

(2)
$$\frac{4(-1+i)+3(7-5i)}{3+4}=\frac{\mathbf{17-11}\boldsymbol{i}}{\mathbf{7}}$$

(3)
$$\frac{-3(-1+i)+1(7-5i)}{1-3}=\mathbf{-5+4}\boldsymbol{i}$$

6 次の方程式を満たす点 z はどのような図形か．

(1) $|z+3|=|z+1|$　(類 香川大)

(2) $|z+2-i|=4$　(類 法政大)

(3) $2|z-i|=|z+2i|$　(類 東京農工大)

解答 (1) **2 点 $-3,-1$ を結ぶ線分の垂直二等分線**

(2) **点 $-2+i$ を中心とする半径 4 の円**

(3) 方程式の両辺を平方すると　$4|z-i|^2=|z+2i|^2$

$$4(z-i)(\overline{z}+i)=(z+2i)(\overline{z}-2i)\quad\text{整理すると}\quad z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}=0$$

$$(z-2i)(\overline{z}+2i)=4\quad\text{ゆえに}\quad|z-2i|^2=4\quad\text{すなわち}\quad|z-2i|=2$$

よって，**点 $2i$ を中心とする半径 2 の円**

別解 $|z-i|:|z+2i|=1:2$ より，2 点 $i,-2i$ を 1 : 2 に内分および外分する点は，それぞれ

$$0,\ 4i$$

よって，求める円はこれらを直径の両端とする円であるから，

点 $2i$ を中心とする半径 2 の円

7 点 z が，原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき，次の点 w はどのような図形を描くか．

(1) 点 4 と点 z を結ぶ線分の中点 w

(2) $w = iz - 3$

解答 (1) 点 z が，原点 O を中心とする半径 2 の円上にあるから

$$|z| = 2$$

$w = \dfrac{4+z}{2}$ であるから，$z = 2w - 4$ を上式に代入すると

$$|2w - 4| = 2 \quad \text{ゆえに} \quad |w - 2| = 1$$

よって，**点 w は点 2 を中心とする半径 1 の円**を描く．

(2) 点 z が，原点 O を中心とする半径 2 の円上にあるから

$$|z| = 2$$

$w = iz - 3$ より，$z = \dfrac{w+3}{i}$ を上式に代入すると

$$\left|\frac{w+3}{i}\right| = 2 \quad \text{ゆえに} \quad |w + 3| = 2$$

よって，**点 w は点 -3 を中心とする半径 2 の円**を描く．

8 点 z が，原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，次の点 w はどのような図形を描くか.

(1) $w = \dfrac{1}{z+1}$ (中部大)

(2) $w = \dfrac{\sqrt{2}-i}{z}$ (類 防衛医大)

解答 点 z が，原点 O を中心とする半径 1 の円上にあるから

$$|z| = 1 \qquad (*)$$

(1) $w = \dfrac{1}{z+1}$ より，$z = \dfrac{-w+1}{w}$ を $(*)$ に代入すると

$$\left|\frac{-w+1}{w}\right| = 1 \quad \text{ゆえに} \quad |w| = |w-1|$$

よって，点 w は**2 点 0，1 を結ぶ線分の垂直二等分線**を描く.

(2) $w = \dfrac{\sqrt{2}-i}{z}$ より，$z = \dfrac{2-i}{w}$ を $(*)$ に代入すると

$$\left|\frac{2-i}{w}\right| = 1 \quad \text{ゆえに} \quad |w| = |2-i|$$

$|2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$ であるから $\quad |w| = \sqrt{3}$

よって，点 w は**原点を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円**を描く.

9 次の点を表す複素数を求めよ．

(1) 点 $2+4\sqrt{3}i$ を，原点を中心としてとして $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点　　(千葉工大)

(2) 点 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$ を，原点を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点　　(類 神奈川大)

解答 (1)

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(2+4\sqrt{3}i)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+4\sqrt{3}i)$$
$$=\boldsymbol{-5+3\sqrt{3}i}$$

(2)

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

10 次の点を表す複素数を求めよ．

(1) 点 1 を，点 i を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点　　(神奈川大)

(2) 点 $4+2i$ を，点 $2+i$ を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点　　(明治大)

(3) 点 $-2+\sqrt{3}i$ を，点 $-1+2\sqrt{3}i$ を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点 (東北学院大)

解答 (1) 求める点を α とすると　$\dfrac{\alpha-i}{1-i}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

$$\alpha=i(1-i)+i=\boldsymbol{1+2i}$$

(2) 求める点を α とすると　$\dfrac{\alpha-(2+i)}{(4+2i)-(2+i)}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

$$\alpha=i(2+i)+(2+i)=\boldsymbol{1+3i}$$

(3) 求める点を α とすると　$\dfrac{\alpha-(-1+2\sqrt{3}i)}{(-2+\sqrt{3}i)-(-1+2\sqrt{3}i)}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$\alpha=(-1-\sqrt{3}i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)+(-1+2\sqrt{3}i)=\boldsymbol{-1+(2\sqrt{3}-2)i}$$

11 (1) $\alpha = 5 + \sqrt{3}i$，$\beta = 1 + 3\sqrt{3}i$ とする．複素数平面上で，点 $\mathrm{B}(\beta)$ を点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を中心として角 θ だけ回転した点が $\mathrm{C}(6 + 4\sqrt{3}i)$ であるとき，θ を求めよ．ただし，$-\pi < \theta \leqq \pi$ とする．　(類 福岡大)

(2) 異なる 3 つの複素数 α，β，γ が $\gamma + i\beta = \alpha(1 + i)$ を満たすとする．α，β，γ を表す複素数平面上の点を A，B，C とするとき，△ABC はどのような形か答えよ．　(福島大)

解答 (1) $\gamma = 6 + 4\sqrt{3}i$ とおくと　$\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\begin{aligned}\cos\theta + i\sin\theta &= \frac{(6 + 4\sqrt{3}i) - (5 + \sqrt{3}i)}{(1 + 3\sqrt{3}i) - (5 + \sqrt{3}i)} = \frac{1 + 3\sqrt{3}i}{-4 + 2\sqrt{3}i} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1 + 3\sqrt{3}i}{2 - \sqrt{3}i} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1 + 3\sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i)}{(2 - \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-7 + 7\sqrt{3}i}{7} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$-\pi < \theta \leqq \pi$ であるから　　$\boldsymbol{\theta = -\dfrac{\pi}{3}}$

(2) $\gamma + i\beta = \alpha(1 + i)$ より　$\gamma - \alpha = -i(\beta - \alpha)$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$\mathrm{C}(\gamma)$ は，$\mathrm{B}(\beta)$ を $\mathrm{A}(\alpha)$ を中心に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したである．

よって，**△ABC は $\angle\mathrm{A} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形**である．

12 複素数平面上の 3 点 A(xi)，B$(4+3i)$，C$(2+2i)$ が次の条件を満たすように，実数 x の値を求めよ．　(類 自治医大)

(1) 3 点 A，B，C が同一直線上にある．

(2) BC⊥AB

解答 (1) $\alpha = xi$，$\beta = 4+3i$，$\gamma = 2+2i$ とおく．

3 点 A，B，C が同一直線上にあるのは，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ が実数のときである．

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = \frac{xi-(4+3i)}{(1+2i)-(4+3i)} = \frac{-4+(x-3)i}{-2-i}$$
$$= \frac{\{-4+(x-3)i\}(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{11-x+(2-2x)i}{5} \qquad (*)$$

これが実数であるから　$2-2x=0$　よって　$\boldsymbol{x=1}$

(2) BC⊥AB となるのは，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ が純虚数のときであるから，$(*)$ より

$11-x=0$ かつ $2-2x\neq 0$　よって　$\boldsymbol{x=11}$

8.2　式と曲線 (数学 C)

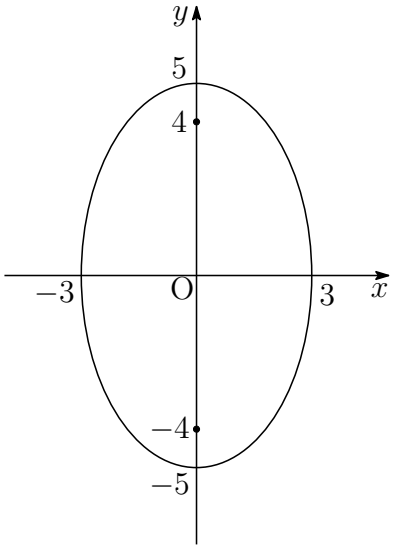
13 次の楕円の長軸の長さ，短軸の長さ，焦点，頂点，楕円上の任意の点から 2 つの焦点までの距離の和を求めよ．また，その概形をかけ．

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

解答 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$ より，長軸の長さ 10，短軸の長さ 6，

焦点は $\mathbf{(0,\pm 4)}$，頂点は $\mathbf{(\pm 3,\ 0)}$，$\mathbf{(0,\ \pm 5)}$

楕円上の任意の点から焦点間の距離の和は　$\mathbf{10}$



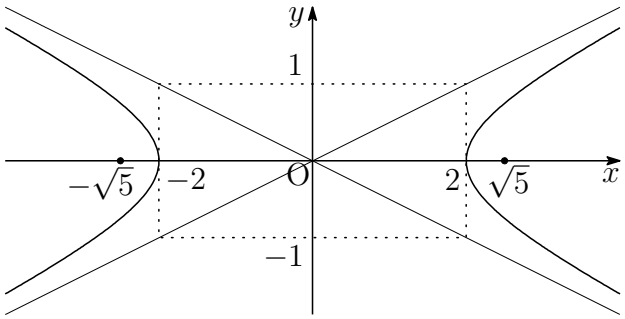
14 次の双曲線の頂点，焦点，双曲線上の任意の点から 2 つの焦点までの距離の差を求めよ．また，その概形をかけ．

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$$

解答 $\dfrac{x^2}{29} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ より，頂点は $\boldsymbol{(\pm 5,\ 0)}$，焦点は $\boldsymbol{(\pm\sqrt{29},\ 0)}$，

漸近線は　$\boldsymbol{y = \pm\dfrac{2}{5}x}$，

楕円上の任意の点から焦点間の距離の差は　$\boldsymbol{10}$



15 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ.

(1) 焦点 $(-5,\ 0)$，準線 $x=5$ である放物線

(2) 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 10 である楕円

(3) 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 4 である双曲線

解答 (1) $y^2=4\cdot(-5)x$　すなわち　$\boldsymbol{y^2=-20x}$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると $(a>b>0)$

$$2a=10,\ \ \sqrt{a^2-b^2}=4 \quad \text{ゆえに} \quad a=5,\ b=3$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1}$

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると $(a>0,\ b>0)$

$$2a=4,\ \ \sqrt{a^2+b^2}=4 \quad \text{ゆえに} \quad a=2,\ b=2\sqrt{3}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1}$

16 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ.

(1) 頂点が原点，準線 $y = \dfrac{1}{2}$ である放物線

(2) 焦点が $(2\sqrt{5},\ 0)$，$(-2\sqrt{5},\ 0)$ で，長軸と短軸の長さの差が 4 である楕円

(3) 中心が原点で，漸近線が直交し，焦点の 1 つが点 $(0,\ \sqrt{6})$ である双曲線

解答 (1) 焦点が $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ であるから，求める放物線は

$$x^2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) y \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x^2 = -2y}$$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ とすると $(a > b > 0)$

$$2a - 2b = 4,\ \ \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{5} \quad \text{ゆえに} \quad a = 6,\ b = 4$$

よって $\quad \boldsymbol{\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1}$

(3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ とおけるから $(a > 0)$

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{6} \quad \text{ゆえに} \quad a = \sqrt{3}$$

よって $\quad \boldsymbol{\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{3} = 1}$

17 次の 2 次曲線を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる曲線の方程式を求めよ．また，その焦点を求めよ．

(1) $y^2 = x$

(2) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(3) $x^2 - y^2 = 1$

解答 (1) 放物線 $y^2 = x$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる曲線の方程式は

$$\boldsymbol{(y+3)^2 = x - 2}$$

放物線 $y^2 = x$ の焦点は $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ であるから，上式の焦点は

$$\left(\frac{1}{4} + 2,\ 0 - 3\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\left(\frac{9}{4}, -3\right)}$$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる曲線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1}$$

楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ の焦点は $(\pm\sqrt{7},\ 0)$ であるから，上式の焦点は

$$\boldsymbol{(2 \pm \sqrt{7}, -3)}$$

(3) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる曲線の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2 - (y+3)^2 = 1}$$

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の焦点は $(\pm\sqrt{2},\ 0)$ であるから，上式の焦点は

$$\boldsymbol{(2 \pm \sqrt{2}, -3)}$$

18 次の方程式はどのような図形を表すか.

(1) $y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$

(2) $5x^2 + 4y^2 - 30x - 16y + 41 = 0$

(3) $2x^2 - y^2 + 8x + 2y + 11 = 0$

解答 (1) 方程式を変形すると

$$(y-1)^2 + 2(x-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{(y-1)^2 = -2(x-2)}$$

この曲線は放物線 $\boldsymbol{y^2 = -2x}$ を $\boldsymbol{x}$ 軸方向に $\boldsymbol{2}$，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に $\boldsymbol{1}$ だけ平行移動したものである.

(2) 方程式を変形すると

$$5(x-3)^2 + 4(y-2) = 20 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1}$$

この曲線は楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} = 1}$ を $\boldsymbol{x}$ 軸方向に $\boldsymbol{3}$，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に $\boldsymbol{2}$ だけ平行移動したものである.

(3) 方程式を変形すると

$$2(x+2)^2 - (y-1)^2 + 4 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{4} = -1}$$

この曲線は双曲線 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} = -1}$ を $\boldsymbol{x}$ 軸方向に $\boldsymbol{-2}$，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に $\boldsymbol{1}$ だけ平行移動したものである.

19 k を定数とする．次の問いに答えよ．

(1) 楕円 $x^2+4y^2=3$ と直線 $y=x+k$ が共有点をもつとき，k の値の範囲を求めよ．(類 京都産大)

(2) 双曲線 $x^2-2y^2=18$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ．(広島市大)

解答 (1) $x^2+4y^2=3$，$y=x+k$ から y を消去すると

$$x^2+4(x+k)^2=3 \quad \text{整理すると} \quad 5x^2+8kx+4k^2-3=0$$

上の第 2 式の判別式を D とすると

$$D/4=(4k)^2-5\cdot(4k^2-3)=-4k^2+15$$

このとき，$D \geqq 0$ であるから　　$\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{15}}{2} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{15}}{2}}$

(2) $x^2-2y^2=18$，$y=x+k$ ら y を消去すると

$$x^2-2(x+k)^2=18 \quad \text{整理すると} \quad x^2+4kx+2k^2+18=0$$

上の第 2 式の判別式を D とすると

$$D/4=(2k)^2-(2k^2+18)=2k^2-18$$

このとき，$D>0$ であるから　　$\boldsymbol{k<-3,\ 3<k}$

20 (1) 楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ における接線の方程式を求めよ．

(類 埼玉工大)

(2) 点 $(0,\ 1)$ から曲線 $3x^2-2y^2=-6$ に引いた接線の方程式を求めよ．

(広島市大)

解答 (1) $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}=1$　ゆえに　$\boldsymbol{x+2y-3=0}$

(2) 双曲線 $3x^2-2y^2=-6$ の点 $(0,\ 1)$ に対する極線は

$$3\cdot 0x-2\cdot 1y=-6 \quad \text{すなわち} \quad y=3$$

極線と双曲線 $3x^2-2y^2=-6$ の交点は　$(\pm 2,\ 3)$

よって，点 $(\pm 2,\ 3)$ における接線が求める接線であるから

$$3(\pm 2)x-2\cdot 3y=-6 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y=\pm x+1}$$

極線の方程式

2 次曲線に対して，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ から 2 本の接線を引けるとし，その接点を P，Q とおく．直線 PQ を極 A に対する**極線**という．

- 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1}$
- 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1}$
- 放物線 $y^2=4px$ の極線の方程式は　$\boldsymbol{y_1y=2p(x+x_1)}$

注意 2 次曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式と一致している．

21 次のように媒介変数表示される曲線について，媒介変数を消去して x，y の方程式を求めよ．

(1) $x = 2 - t,\ y = 2t^2 + 1$ (甲南大)

(2) $x = 5 - \cos\theta,\ y = \sin\theta$ (甲南大)

(3) $x = \dfrac{2}{\cos\theta},\ y = 3\tan\theta + 1$ (類 上智大)

解答 (1) 第 1 式から $t = 2 - x$，これを第 2 式に代入して

$$y = 2(2-x)^2 + 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y = 2x^2 - 8x + 9}$$

(2) $\cos\theta = 5 - x$，$\sin\theta = y$ を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して

$$y^2 + (5-x)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{(x-5)^2 + y^2 = 1}$$

(3) $\tan\theta = \dfrac{y-1}{3}$，$\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{x}{2}$ を $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1 + \left(\frac{y-1}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1}$$

22 次の円，楕円，双曲線を，角 θ を媒介変数として表せ．

(1) $x^2 + y^2 = 7$

(2) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(3) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(4) $9x^2 + 6y^2 = 36$

解答 (1) $x^2 + y^2 = (\sqrt{7})^2$ より $\quad \boldsymbol{x = \sqrt{7}\cos\theta,\ y = \sqrt{7}\sin\theta}$

(2) $\left(\dfrac{x}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{3}\right)^2 = 1$ より $\quad \dfrac{x}{5} = \cos\theta,\ \dfrac{y}{3} = \sin\theta$

よって $\quad \boldsymbol{x = 5\cos\theta,\ y = 3\sin\theta}$

(3) $1 + y^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ より $\quad y = \tan\theta,\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\cos\theta}$

よって $\quad \boldsymbol{x = \dfrac{2}{\cos\theta},\ y = \tan\theta}$

(4) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$ より $\quad \dfrac{x}{2} = \cos\theta,\ \dfrac{y}{\sqrt{6}} = \sin\theta$

よって $\quad \boldsymbol{x = 2\cos\theta,\ y = \sqrt{6}\sin\theta}$

23 次の曲線を極方程式で表せ.

(1) $x+y-4=0$

(2) $x^2+y^2=4x$

(3) $x^2-y^2=9$

解答 (1) $x+y-4=0$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$r\cos\theta+r\sin\theta-4=0 \quad \text{ゆえに} \quad r(\cos\theta+\sin\theta)=4$$

$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$\boldsymbol{r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}}$$

(2) $x^2+y^2=4x$ に $x^+y^2=r^2$，$x=r\cos\theta$ を代入すると

$$r^2=4r\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad r(r-4\cos\theta)=0$$

したがって　$r=0$　または　$r=4\cos\theta$

このとき，$r=4\cos\theta$ は極 O を通るから　$\boldsymbol{r=4\cos\theta}$

(3) $x^2-y^2=9$ に $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を代入すると

$$(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2=9 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r^2\cos 2\theta=9}$$

24 次の極方程式の表す曲線を直交座標 x，y の方程式で表せ.

(1) $r=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ (甲南大)

(2) $r\sin^2\theta+\sin\theta=r$ (関西大)

(3) $r=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$ (類 琉球大)

解答 (1) $r=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ の両辺に r を掛けると

$$r^2=r\cos\theta+\sqrt{3}r\sin\theta$$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$ を代入すると

$$x^2+y^2=x+\sqrt{3}y \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x^2+y^2-x-\sqrt{3}y=0}$$

(2) $r\sin^2\theta+\sin\theta=r$ の両辺に r を掛けると

$$(r\sin\theta)^2+r\sin\theta=r^2$$

$r\sin\theta=y$，$r^2=x^2+y^2$ を上式に代入すると

$$y^2+y=x^2+y^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y=x^2}$$

(3) $r=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$ の両辺に $2+\sqrt{3}\cos\theta$ を掛けると

$$2r+\sqrt{3}r\cos\theta=1 \quad \text{ゆえに} \quad 4r^2=(1-\sqrt{3}r\cos\theta)^2$$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$ を上の第 2 式に代入すると

$$4(x^2+y^2)=(1-\sqrt{3}x)^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{(x+\sqrt{3})^2}{4}+y^2=1}$$

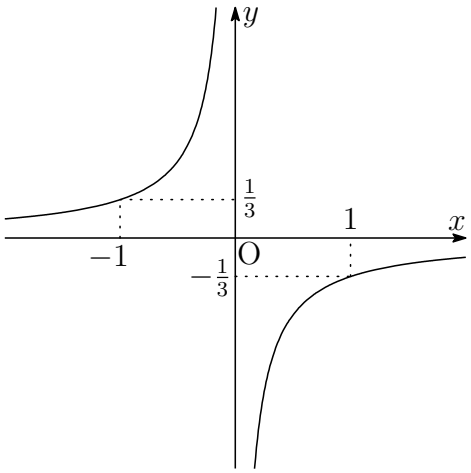
8.3　関数 (数学 III)

25 次の関数のグラフをかけ．また，その定義域，値域を求めよ．

(1) $y = -\dfrac{1}{3x}$

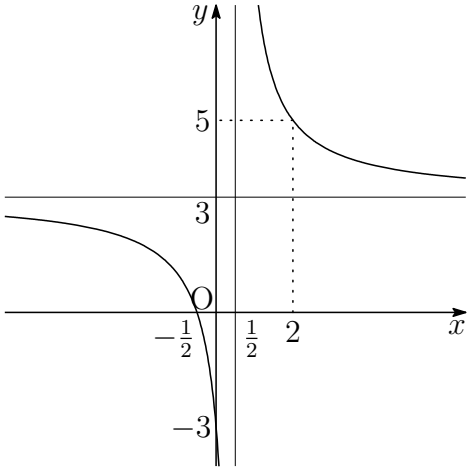
(2) $y = \dfrac{6x+3}{2x-1}$

解答 (1) **定義域は $x \neq 0$，値域は $y \neq 0$**



(2) $\dfrac{6x+3}{2x-1} = \dfrac{3(2x-1)+6}{2x-1} = \dfrac{6}{2x-1} + 3 = \dfrac{3}{x-\frac{1}{2}} + 3$

$y = \dfrac{6x-3}{2x-1}$ は，$y = \dfrac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもの．**定義域は $x \neq \dfrac{1}{2}$，値域は $y \neq 3$**



26 次の方程式，不等式を解け.

(1) $\dfrac{4x}{x-1} = x+3$

(2) $\dfrac{4x}{x-1} < x+3$

解答 (1) $\dfrac{4x}{x-1} = x+3$ より

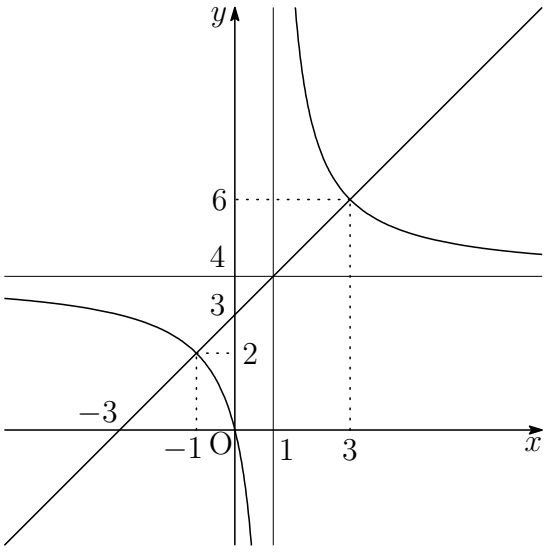
$$\frac{4x-(x+3)(x-1)}{x+3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{(x+1)(x-3)}{x+3} = 0$$

よって　$\boldsymbol{x = -1,\ 3}$

(2) $\dfrac{4x}{x-1} = \dfrac{4(x-1)+4}{x-1} = \dfrac{4}{x-1} + 4$

$y = \dfrac{4x}{x-1}$ と $y = x+3$ のグラフから，不等式 $\dfrac{4x}{x-1} < x+3$ の解は

$$\boldsymbol{-1 < x < 1,\ 3 < x}$$



別解 $\dfrac{4x}{x-1} < x+3$ より　$\dfrac{4x-(x+3)(x-1)}{x-1} < 0$

$$-\frac{(x+1)(x-3)}{x-1} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(x-1)^2} > 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{-1 < x < 1,\ 3 < x}$

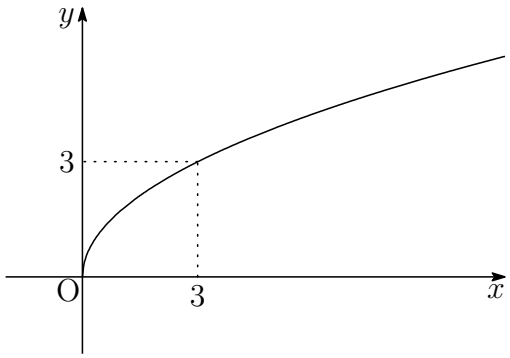
27 次の関数のグラフをかけ．その関数の定義域と値域を求めよ．

(1) $y=\sqrt{3x}$

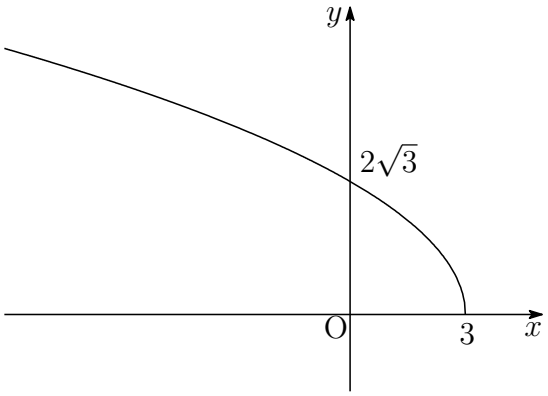
(2) $y=2\sqrt{3-x}$

(3) $-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}x}+1$

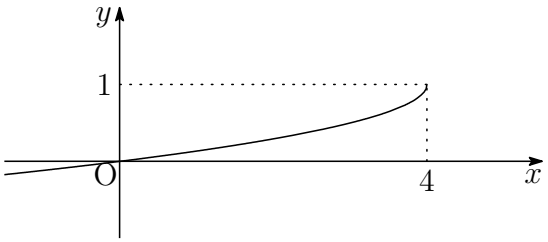
解答 (1) **定義域 $x \geqq 0$，値域 $y \geqq 0$**



(2) $2\sqrt{3-x}=2\sqrt{-(x-3)}$ より，$y=2\sqrt{3-x}$ のグラフは $y=2\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したもの．**定義域 $x \leqq 3$，値域 $y \geqq 0$**



(3) $-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}x}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{-(x-4)}+1$ より，$y=-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}x}+1$ のグラフは $y=-\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 4，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの．**定義域 $x \leqq 4$，値域 $y \leqq 1$**



28 グラフを利用して，次の不等式を解け.

(1) $x < -\sqrt{2x+3}$ (広島市大)

(2) $x - 5 \leqq \sqrt{2x+19}$ (札幌大)

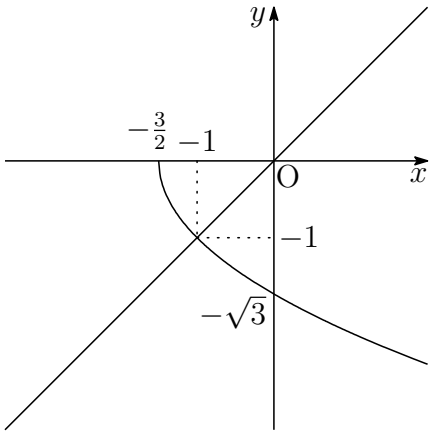
解答 (1) 方程式 $x = -\sqrt{2x+3}$ の両辺を平方すると

$$x^2 = 2x + 3 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-3) = 0$$

原方程式を満たすのは $x = -1$

下のグラフから，不等式 $x < -\sqrt{2x+3}$ を解くと

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq x < -1}$$



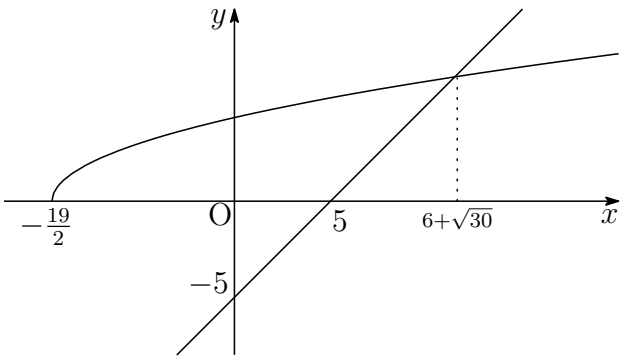
(2) 方程式 $x - 5 = \sqrt{2x+19}$ の両辺を平方すると

$$(x-5)^2 = 2x + 19 \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 12x + 6 = 0$$

原方程式に注意してこれを解くと $x = 6 + \sqrt{30}$

下のグラフから，不等式 $x - 5 \leqq \sqrt{2x+19}$ を解くと

$$\boldsymbol{-\frac{19}{2} \leqq x \leqq 6 + \sqrt{30}}$$



29 次の関数の逆関数を求めよ.

(1) $y = 2x^2 - 1 \ (x \geqq 0)$ (類 広島修道大)

(2) $y = 2^x + 1$ (大阪工大)

(3) $y = \log_2(x+3)$ (類 芝浦工大)

解答 (1) 関数 $y = 2x^2 - 1 \ (x \geqq 0)$ の値域は　$y \geqq -1$

$x \geqq 0$ に注意して　$x = \sqrt{\dfrac{y+1}{2}}$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}}$

(2) 関数 $y = 2^x + 1$ の値域は　$y > 1$

$y = 2^x + 1$ を x について解くと　$x = \log_2(y-1)$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y = \log_2(x-1)}$

(3) 関数 $y = \log_2(x+3)$ の値域は　すべての実数

$y = \log_2(x+3)$ を x について解くと　$x = 2^y - 3$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y = 2^x - 3}$

30 次の関数の逆関数を求めよ．また，もとの関数のグラフと逆関数のグラフを同じ図中にかけ．

(1) $y=\sqrt{x+1}-1$ (類 弘前大)

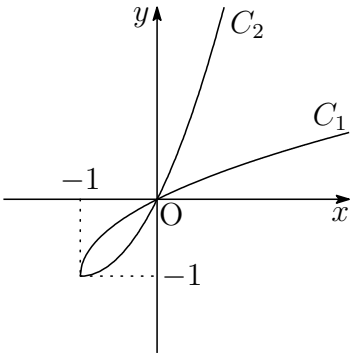
(2) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ (中部大)

解答 (1) 関数 $y=\sqrt{x+1}-1$ の値域は　$y \geqq -1$

$y=\sqrt{x+1}-1$ を x について解くと　$x=(y+1)^2-1$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y=(x+1)^2-1\ (x \geqq -1)}$

$C_1 : y=\sqrt{x+1}-1$，$C_2 : y=(x+1)^2-1\ (x \geqq -1)$

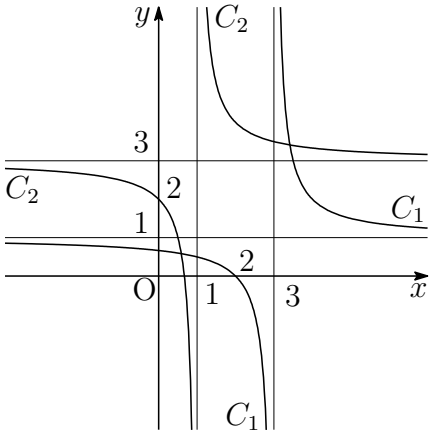


(2) $\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}+1$ より，関数 $C_1 : y=\dfrac{x-2}{x-3}$ の値域は　$y \neq 1$

$y \neq 1$ に注意して，$y=\dfrac{x-2}{x-3}$ を x について解くと　$xy-3y=x-2$

$$(y-1)x=3y-2 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{3y-2}{y-1}$$

よって，求める逆関数は　$C_2 : \boldsymbol{y=\dfrac{3x-2}{x-1}}$



31 次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ．

(1) $f(x)=3x+2$，$g(x)=x^2+1$

(2) $f(x)=\dfrac{2}{x}$，$g(x)=2x^2+1$

(3) $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_4 x$

解答 (1) $f(x)=3x+2$，$g(x)=x^2+1$

$f(x)$ の値域は実数全体で，$g(x)$ の定義域と同じである．

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))=g(3x+2)=(3x+2)^2+1\\&=\boldsymbol{9x^2+12x+5}\end{aligned}$$

$g(x)$ の値域は 1 以上の実数全体で，$f(x)$ の定義域に含まれる．

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))=f(x^2+1)=3(x^2+1)+2\\&=\boldsymbol{3x^2+5}\end{aligned}$$

(2) $f(x)=\dfrac{2}{x}$，$g(x)=2x^2+1$

$f(x)$ の値域は 0 でない実数全体で，$g(x)$ の定義域に含まれる．

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2}{x}\right)=2\left(\frac{2}{x}\right)^2+1=\boldsymbol{\frac{8}{x^2}+1}$$

$g(x)$ の値域は 1 以上の実数全体で，$f(x)$ の定義域に含まれる．

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x^2+1)=\boldsymbol{\frac{2}{2x^2+1}}$$

(3) $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_4 x$

$f(x)$ の値域は 0 より大きい実数全体で，$g(x)$ の定義域と同じである．

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2^x)=\log_4 2^x=x\log_4 2=\boldsymbol{\frac{x}{2}}$$

$g(x)$ の値域は実数全体で，$f(x)$ の定義域と同じである．

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\log_4 x)=2^{\log_4 x}=2^{\log_2\sqrt{x}}=\boldsymbol{\sqrt{x}}$$

32 $f(x)=2x-1$，$g(x)=ax+b$，$h(x)=x+c$ とする．

(1) $(g\circ f)(x)=8x-3$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ．

(2) $(g\circ f)(x)=3x-14$，$g^{-1}(4)=3$ が成り立つとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

解答 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)=a(2x-1)+b=2ax-a+b$

$(g\circ f)(x)=8x-3$ であるから　$2a=8,\ -a+b=-3$

これを解いて　$\boldsymbol{a=4,\ b=1}$

(2) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(x+c)=a(x+c)+b=ax+ac+b$

$(g\circ h)(x)=3x-14$ であるから

$$a=3,\quad ac+b=-14 \tag{$*$}$$

$g^{-1}(4)=3$ より，$g(3)=4$ であるから

$$3a+b=4 \tag{$**$}$$

$(*)$，$(**)$ を解いて　$\boldsymbol{a=3,\ b=-5,\ c=-3}$

8.4　極限 (数学 III)

33 $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -5$ のとき，次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$

(2) $\lim_{n\to\infty} (2a_n - b_n)$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3a_n - 2b_n}{2a_n + b_n}$

解答 (1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 3 + (-5) = \mathbf{-1}$

(2) $\lim_{n\to\infty} (2a_n - b_n) = 2\cdot 3 - (-5) = \mathbf{11}$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 3\cdot(-5) = \mathbf{-15}$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3a_n - 2b_n}{2a_n + b_n} = \dfrac{3\cdot 3 - 2\cdot(-5)}{2\cdot 3 + (-5)} = \mathbf{19}$

34 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3 + 5n}{2n - 1}$ (湘南工科大)

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 + n - 6}{5n^2 - 7n}$ (東京薬大)

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2 - n^3}{2 + n^3}$ (城西大)

解答 (1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3 + 5n}{2n - 1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3}{n} + 5}{2 - \frac{1}{n}} = \dfrac{0 + 5}{2 - 0} = \mathbf{\dfrac{5}{2}}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 + n - 6}{5n^2 - 7n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{4 + \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2}}{5 - \frac{7}{n}} = \dfrac{4 + 0 - 0}{5 - 0} = \mathbf{\dfrac{4}{5}}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2 - n^3}{2 + n^3} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n^3} - 1}{\frac{2}{n^3} + 1} = \dfrac{0 - 1}{0 + 1} = \mathbf{-1}$

35 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$ (岡山理科大)

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ (京都産大)

(3) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-n)$ (広島市大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = \mathbf{2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}{\sqrt{n^2+n+1}+n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

36 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\sin\frac{n\pi}{2}$ (国士舘大)

解答 (1) $\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}\right| \leqq \left|\frac{1}{n}\right|\left|\cos\frac{n\pi}{4}\right| \leqq \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4} = \mathbf{0}$$

(2) $\left|\frac{n}{n^2+1}\sin\frac{n\pi}{2}\right| \leqq \left|\frac{n}{n^2+1}\right|\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| \leqq \frac{n}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$$

したがって，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\sin\frac{n\pi}{2} = \mathbf{0}$$

37 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ.

(1) $\left(\frac{4}{3}\right)^n$

(2) $\left(-\frac{5}{4}\right)^n$

(3) $\left(\frac{2}{5}\right)^n$

(4) $-3\left(-\frac{3}{5}\right)^n$

解答 (1) $\frac{4}{3}>1$ であるから $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty$ よって，正の無限大に発散する.

(2) $-\frac{5}{4}<-1$ であるから，振動して極限値はない.

(3) $\left|\frac{2}{5}\right|<1$ であるから $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ よって，0 に収束する.

(4) $\left|-\frac{3}{5}\right|<1$ であるから $\lim_{n\to\infty}\left\{-3\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\mathbf{0}$ よって，0 に収束する.

38 次の数列が収束するような x の値の範囲を求めよ．また，そのときの極限値を求めよ．

(1) $\{(x+2)^n\}$

(2) $\{(x^2+5x+5)^n\}$

解答 (1) 数列 $\{(x+2)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < x+2 \leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{-3 < x \leqq -1}$$

極限値は　$-3 < x < -1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(x+2)^n = \mathbf{0}$

$x = -1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(x+2)^n = \mathbf{1}$

(2) 数列 $\{(x^2+5x+5)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < x^2+5x+5 \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} x^2+5x+5 > -1 \\ x^2+5x+5 \leqq 1 \end{cases}$$

これを解いて　$\begin{cases} x < -3, -2 < x \\ -4 \leqq x \leqq -1 \end{cases}$

すなわち　$\boldsymbol{-4 \leqq x < -3,\ -2 < x \leqq -1}$

極限値は　$-4 < x < -3, -2 < x < -1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(x^2+5x+5)^n = \mathbf{0}$

$x = -4, -1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(x^2+5x+5)^n = \mathbf{1}$

39 次の極限を求めよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}$　(湘南工科大)

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n+1}+3^n}{4^n+2^{n+1}}$　(東京電機大)

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4^{n+1}-(-3)^n}{2^{2n}}$　(国士舘大)

解答 (1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\} = \mathbf{3}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n+1}+3^n}{4^n+2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \mathbf{2}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4^{n+1}-(-3)^n}{2^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{4-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right\} = \mathbf{4}$

40 $r \neq -1$ のとき，数列 $\left\{\dfrac{r^n+3}{r^{n+1}+1}\right\}$ の極限を，次の場合について求めよ．

(類 関西学院大)

(1) $r > 1$

(2) $r = 1$

(3) $|r| < 1$

(4) $r < -1$

解答 (1) $r > 1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right| < 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n+3}{r^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3\left(\frac{1}{r}\right)^n}{r+\left(\frac{1}{r}\right)^n} = \frac{1+3\cdot 0}{r+0} = \boldsymbol{\frac{1}{r}}$$

(2) $r = 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n+3}{r^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^n+3}{1^{n+1}+1} = \frac{1+3}{1+1} = \boldsymbol{2}$$

(3) $|r| < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n+3}{r^{n+1}+1} = \frac{0+3}{0+1} = \boldsymbol{3}$$

(4) $r < -1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right| <$ より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n+3}{r^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3\left(\frac{1}{r}\right)^n}{r+\left(\frac{1}{r}\right)^n} = \frac{1+3\cdot 0}{r+0} = \boldsymbol{\frac{1}{r}}$$

41 次の無限級数の和を求めよ.

(1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{10}+\cdots+\dfrac{2}{n(n+1)}+\cdots$ (湘南工科大)

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ (芝浦工大)

解答 (1) $S_n=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{10}+\cdots+\dfrac{2}{n(n+1)}+\cdots$ とおくと

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\mathbf{2}$

(2) $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$ とおくと

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$

42 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ.

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{2+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}}+\cdots$$

解答 $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{3k-2}+\sqrt{3k+1}}$ とおくと

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3k+1}-\sqrt{3k-2}}{3}=\frac{\sqrt{3n+1}-1}{3}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+1}-1}{3}=\infty$

よって，**正の無限大に発散する.**

43 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ．

(1) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots$ (明星大)

(2) $(4+\sqrt{2})-(2-3\sqrt{2})+(8-5\sqrt{2})+\cdots$ (国士舘大)

(3) $1-1+1-1+1+\cdots$ (類 新潟大)

解答 (1) 初項は1，公比は $r=-\dfrac{1}{3}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

(2) 初項は $4+\sqrt{2}$，公比は $r=-\dfrac{2-3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和は

$$\frac{4+\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)}=\boldsymbol{5+3\sqrt{2}}$$

(3) 初項は1，公比は $r=-1$ で　$|r|\geqq 1$

よって，この無限等比級数は**発散する．**

44 次の無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ．また，そのときの和を求めよ．

(1) $1-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{16}{9}x^2-\dfrac{64}{27}x^3+\cdots$ (愛媛大)

(2) $x+x(1-x)^2+x(1-x)^4+x(1-x)^6$ (広島大)

解答 (1) この無限等比級数の初項は1，公比は $-\dfrac{4}{3}x$ であるから，収束するための条件は

$$-1<-\frac{4}{3}x<1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\frac{3}{4}<x<\frac{3}{4}}$$

求める和は　$\dfrac{1}{1-\left(-\frac{4}{3}x\right)}=\boldsymbol{\dfrac{3}{3+4x}}$

(2) この無限等比級数の初項は x，公比は $(1-x)^2$ であるから，

収束するための条件は

$x=0$ または　$-1<(1-x)^2<1$　すなわち　$x=0$ または $(1-x)^2<1$

これを解いて　$\boldsymbol{0\leqq x<2}$

$\boldsymbol{x=0}$ **のとき**　和は $\boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{0<x<2}$ **のとき**　和は $\boldsymbol{\dfrac{x}{1-(1-x)^2}=\dfrac{1}{2-x}}$

45 次の無限級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ (埼玉工大)

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-2^n}{7^n}$ (岡山理科大)

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}\{1+(-1)^{n-1}\}$ (防衛大)

解答 (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-2^n}{7^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n-\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{2}{7}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{4}{7}}{1-\frac{4}{7}}-\frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{2}{7}}=\frac{4}{3}-\frac{2}{5}=\boldsymbol{\frac{14}{15}}$$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}\{1+(-1)^{n-1}\}=3\sum_{n=1}^{n}2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+3\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=6+2=\boldsymbol{8}$$

46 次の無限級数は発散することを示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot 2n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$

解答 (1) $a_n=(-1)^{n-1}\cdot 2n$ とすると，$\{a_n\}$ は発散し，0 に収束しないから，与えられた無限級数は発散する.

(2) $a_n=\dfrac{n+1}{n+2}$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

$\{a_n\}$ は 1 に収束するから，与えられた無限級数は発散する.

47 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}$ (国士舘大)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$ (芝浦工大)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{2x^2-x-1}\right)$ (京都産大)

解答 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+5)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+5)=\mathbf{8}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-4}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{2x^2-x-1}&=\frac{1}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{(x-1)(2x+1)}\\&=\frac{(2x+1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)(2x+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(x+2)(2x+1)}\\&=\frac{1}{(x+2)(2x+1)}\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{2x^2-x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+2)(2x+1)}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

48 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ (京都産大)

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1-x}{x^2}$ (琉球大)

(3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x}}$ (福岡大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} &= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\{\sqrt{2x+1}-(1+x)\}\{\sqrt{2x+1}+(1+x)\}}{x^2\{\sqrt{2x+1}+(1+x)\}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2\{\sqrt{2x+1}+(1+x)\}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{2x+1}+(1+x)} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x}} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x})}{2(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

49 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+5x^2)$

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^2+3}{x^4+3x-2}$ (国士舘大)

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x+9}{x^2+3x+4}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{7x+5}{\sqrt{4x^2+2x+3}}$ (国士舘大)

解答 (1) $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+5x^2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2+\dfrac{5}{x}\right)=\boldsymbol{-\infty}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^2+3}{x^4+3x-2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}{1+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}=\boldsymbol{5}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x+9}{x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{9}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=\boldsymbol{0}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{7x+5}{\sqrt{4x^2+2x+3}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{7+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

50 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})$ (防衛大)

(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)$ (関西大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)&=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t}-t)\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-3t}-t)(\sqrt{t^2-3t}+t)}{\sqrt{t^2-3t}+t}\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t}{\sqrt{t^2-3t}+t}\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\dfrac{3}{t}}+1}=\boldsymbol{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

51 次の極限を調べよ．　(類 東京都市大)

(1) $\lim_{x\to 1+0}\dfrac{x^3-1}{|x-1|}$

(2) $\lim_{x\to 1-0}\dfrac{x^3-1}{|x-1|}$

(3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{|x-1|}$

解答 (1) $x>1$ のとき，$|x-1|=x-1$ であるから

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+0}(x^2+x+1)=\mathbf{3}$$

(2) $x<1$ のとき，$|x-1|=-(x-1)$ であるから

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1+0}\{-(x^2+x+1)\}=\mathbf{-3}$$

(3) (1)，(2) の結果から，右側極限と左側極限が一致しない．
よって，$x\longrightarrow 1$ のときの極限はない．

52 次の極限を求めよ．

(1) $\lim_{x\to -\infty}2^{\frac{1}{x}}$　(東北福祉大)

(2) $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{5}}x$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\log_3\sqrt{27x+2}-\log_3\sqrt{x+3})$　(国士舘大)

解答 (1) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow -0$ のとき，$t\longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x\to -0}2^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to -\infty}2^t=\mathbf{0}$$

(2) $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{5}}x=\mathbf{-\infty}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\log_3\sqrt{27x+2}-\log_3\sqrt{x+3})=\lim_{x\to\infty}\log_3\sqrt{\dfrac{27x+2}{x+3}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_3\sqrt{\frac{27+\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

53 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ (前橋工科大)

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (国士舘大)

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ (山梨大)

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$ (城西大)

解答 (1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=\mathbf{2}$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{3x}{\sin 3x}=\dfrac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}(1+\cos x)=1\cdot 2=\mathbf{2}\end{aligned}$$

(4) $x-\pi=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\pi$ のとき　$\theta\longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta+\pi)}{\theta}\\&=\lim_{\theta\to 0}\left(-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

54 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ (大阪工大)

(2) $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\dfrac{1}{x}$

解答 (1) $x > 0$ のとき

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = |\sin x|\cdot\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \mathbf{0}$$

(2) $x \neq 0$ のとき

$$\left|x^2 \cos\frac{1}{x}\right| = x^2 \left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqq x^2$$

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = \mathbf{0}$$

55 次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるから不連続であるかを調べよ．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

(2) $f(x)=[\,-x\,]$

(3) $f(x)=[\,-|x|\,]$

解答 (1) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$，$f(0)=0$ より

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

よって，$\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{x=0}$ で連続である．

(2) $-1\leqq -x<0$，すなわち，$0<x\leqq 1$ のとき　$[\,-x\,]=-1$

$0\leqq -x<1$，すなわち，$-1<x\leqq 0$ のとき　$[\,-x\,]=0$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=-1,\quad \lim_{x\to -0} f(x)=0$$

ゆえに，$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

よって，$\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{x=0}$ で不連続である．

(3) $-1\leqq x<0,\ 0<x\leqq 1$ のとき　$-1\leqq -|x|<0$　ゆえに　$[\,-|x|\,]=-1$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-1,\quad f(0)=0$$

$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ であるから，$\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{x=0}$ で不連続である．

56 次の方程式は与えられた範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ.

(1) $x + 5\sin x - 3 = 0 \quad (0 < x < \pi)$

(2) $x - 3^{-x} = 0 \quad (0 < x < 1)$

解答 (1) $f(x) = x + 5\sin x - 3$ とおく.
関数 $f(x)$ は区間 $[0,\ \pi]$ で連続である.

$$f(0) = -3 < 0, \quad f(\pi) = \pi - 3 > 0$$

よって，方程式 $\boldsymbol{f(x) = 0}$ は $\boldsymbol{0 < x < \pi}$ の範囲に少なくとも **1** つの実数解をもつ.

(2) $f(x) = x - 3^{-x}$ とおく.
関数 $f(x)$ は区間 $[0,\ 1]$ で連続である.

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = \frac{2}{3} > 0$$

よって，方程式 $\boldsymbol{f(x) = 0}$ は $\boldsymbol{0 < x < 1}$ の範囲に少なくとも **1** つの実数解をもつ.

8.5　微分法 (数学 III)

57 (1) 関数 $f(x)=\sqrt{2x-1}$ について，微分係数 $f'(5)$ を定義に従って求めよ．
(弘前大)

(2) 導関数の定義に従って，関数 $y=\sin x$ の導関数を求めよ．　(類 東京薬大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}f'(5)&=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{2(5+h)-1}-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{9+2h}-3}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{(\sqrt{9+2h}-3)(\sqrt{9+2h}+3)}{h(\sqrt{9+2h}+3)}\\&=\lim_{h\to0}\frac{2}{\sqrt{9+2h}+3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

(2) $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ を利用すると

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\boldsymbol{\cos x}\end{aligned}$$

別解 $\sin(x+h)-\sin x=\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x$
$=(\cos h-1)\sin x+\cos x\sin h$

であるから

$$\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\sin x+\frac{\sin h}{h}\cos x\right)$$

ここで，$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos h-1}{h}=0$，$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin h}{h}=1$ により

$$\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=0\cdot\sin x+1\cdot\cos x=\cos x$$

よって　　$(\sin x)'=\cos x$

補足

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\cos^2h-1}{h(\cos h+1)}=\lim_{h\to0}\frac{-\sin^2h}{h(\cos h+1)}\\&=\lim_{h\to0}\left(-\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{\cos h+1}\right)=-1\cdot\frac{0}{1+1}=0\end{aligned}$$

58 次の関数を微分せよ.

(1) $y=(2x^2+3)(x^2-4x+5)$

(2) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (宮崎大)

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (東京農工大)

解答 (1)

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2+3)'(x^2-4x+5)+(2x^2+3)(x^2-4x+5)' \\ &= 4x(x^2-4x+5)+(2x^2+3)(2x-4) \\ &= \boldsymbol{8x^3-24x^2+26x-12} \end{aligned}$$

(2)

$$y'=\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\boldsymbol{-\frac{4x}{(1+x^2)^2}}$$

(3)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\boldsymbol{\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}} \end{aligned}$$

59 次の関数を微分せよ．ただし，(3) は逆関数の微分法の公式を用いること．

(1) $y=(x^2+1)^5$ (甲南大)

(2) $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ (静岡理工科大)

(3) $y=\sqrt[8]{x}$

解答 (1)

$$\begin{aligned} y' &= 5(x^2+1)^4\cdot(x^2+1)' \\ &= 5(x^2+1)^4\cdot 2x \\ &= \boldsymbol{10x(x^2+1)^4} \end{aligned}$$

(2) $y=(x^2+1)^{-3}$ であるから

$$\begin{aligned} y' &= -3(x^2+1)^{-4}\cdot(x^2+1)' \\ &= -3(x^2+1)^{-4}\cdot 2x \\ &= -\frac{\boldsymbol{6x}}{\boldsymbol{(x^2+1)^4}} \end{aligned}$$

(3) $y=\sqrt[8]{x}$ より　$x=y^8$

$$\frac{dx}{dy}=8y^7=8(\sqrt[8]{x})^7=8\sqrt[8]{x^7}$$

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$$

60 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ (関東学院大)

(2) $y=\sqrt[3]{1-2x}$ (広島市大)

(3) $y=\sqrt{x^2-2x+3}$ (神奈川大)

解答 (1) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}=x^{-\frac{3}{5}}$ より

$$y'=-\frac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}}=-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{8}{5}}}=\boldsymbol{-\frac{3}{5x\sqrt[5]{x^3}}}$$

(2) $y=\sqrt[3]{1-2x}=(1-2x)^{\frac{1}{3}}$ より

$$y'=\frac{1}{3}(1-2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-2x)'=\boldsymbol{-\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}}$$

(3) $y=\sqrt{x^2-2x+3}=(x^2-2x+3)^{\frac{1}{2}}$ より

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{2}(x^2-2x+3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-2x+3)'\\&=\frac{1}{2}(x^2-2x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x-2)\\&=\boldsymbol{\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}}\end{aligned}$$

61 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \tan 2x$ (信州大)

(2) $y = x\cos x - \sin x$ (北見工大)

(3) $y = \sin x^2$ (佐賀大)

(4) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ (甲南大)

解答 (1) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)' = \boldsymbol{\dfrac{2}{\cos^2 2x}}$

(2)

$$\begin{aligned} y' &= (x)'\cos x + x(\cos x)' - (\sin x)' \\ &= \cos x + x(-\sin x) - \cos x \\ &= \boldsymbol{-x\sin x} \end{aligned}$$

(3) $y' = \cos x^2\cdot(x^2)' = \boldsymbol{2x\cos x^2}$

(4)

$$y' = \frac{(\sin x)'x - \sin x\cdot(x)'}{x^2} = \boldsymbol{\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}$$

62 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin^3(2x+1)$ (宮崎大)

(2) $y = \dfrac{1}{1+\tan x}$ (広島市大)

(3) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ (宮崎大)

解答 (1)

$$\begin{aligned} y' &= 3\sin^2(2x+1)\cdot\{\sin(2x+1)\}' \\ &= 3\sin^2(2x+1)\cdot 2\cos(2x+1) \\ &= \boldsymbol{6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)} \end{aligned}$$

(2)

$$y' = -\frac{(1+\tan x)'}{(1+\tan x)^2} = \boldsymbol{-\frac{1}{\cos^2 x(1+\tan x)^2}}$$

(3)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \boldsymbol{\frac{1}{1-\sin x}} \end{aligned}$$

63 次の関数を微分せよ．ただし，a は定数で，$a>0$，$a\neq 1$ とする．

(1) $y=\log(2x+1)$ (鹿児島大)

(2) $y=\log|x^2-1|$ (関西大)

(3) $y=\log_{10}(x^2+1)^2$ (滋賀県大)

(4) $y=e^{2-3x}$ (広島市大)

(5) $y=a^{x^2}$ (類 芝浦工大)

解答 (1) $y'=\dfrac{(2x+1)'}{2x+1}=\boldsymbol{\dfrac{2}{2x+1}}$

(2) $y'=\dfrac{(x^2-1)'}{x^2-1}=\boldsymbol{\dfrac{2x}{x^2-1}}$

(3) $y=\log_{10}(x^2+1)^2=2\log_{10}(x^2+1)$ より

$$y'=2\cdot\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\log 10}=\boldsymbol{\frac{4x}{(x^2+1)\log 10}}$$

(4) $y'=e^{2-3x}\cdot(2-3x)'=\boldsymbol{-3e^{2-3x}}$

(5) $y'=a^{x^2}\log a\cdot(x^2)'=\boldsymbol{2xa^{x^2}\log a}$

64 次の関数を微分せよ.

(1) $y = e^{-(\log x)^2}$ (甲南大)

(2) $y = e^{2x}\cos 2x$ (中央大)

(3) $y = \dfrac{\log|\cos x|}{x}$ (宮崎大)

(4) $y = \log_x 2 \quad (x > 1)$ (愛媛大)

解答 (1) $y = e^{-(\log x)^2}$ より

$$\begin{aligned} y' &= e^{-(\log x)^2}\cdot\{-(\log x)^2\}' \\ &= e^{-(\log x)^2}\cdot(-2\log x)\cdot(\log x)' \\ &= e^{-(\log x)^2}\cdot(-2\log x)\cdot\frac{1}{x} \\ &= \boldsymbol{-\frac{2e^{-(\log x)^2}\log x}{x}} \end{aligned}$$

(2) $y = e^{2x}\cos 2x$ より

$$\begin{aligned} y' &= (e^{2x})'\cos x + e^{2x}\cdot(\cos x)' \\ &= 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x \\ &= \boldsymbol{e^{2x}(2\cos x - \sin x)} \end{aligned}$$

(3) $y = \dfrac{\log|\cos x|}{x}$ より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}\cdot x - \log|\cos x|\cdot 1}{x^2} \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{x}\tan x - \frac{1}{x^2}\log|\cos x|} \end{aligned}$$

(4) $y = \log_x 2 = \dfrac{\log 2}{\log x}$ より

$$y' = -\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\log 2}{(\log x)^2} = \boldsymbol{-\frac{\log 2}{x(\log x)^2}}$$

65 対数微分法により，次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sqrt{\dfrac{x^3(x+2)}{(x+1)^5}}\quad(x>0)$ (類 埼玉大)

(2) $y=x^{\sin x}\quad(x>0)$ (類 関西大)

解答 (1) $x>0$ であるから，両辺の自然対数をとると

$$\log y=\frac{1}{2}\{3\log x+\log(x+2)-5\log(x+1)\}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{5}{x+1}\right)=\frac{-x^2+6}{2x(x+1)(x+2)}$$

したがって

$$\begin{aligned}y'&=\frac{-x^2+6}{2x(x+1)(x+2)}\cdot\sqrt{\frac{x^3(x+2)}{(x+1)^5}}\\&=-\frac{\boldsymbol{x^2-6}}{\boldsymbol{2(x+1)^3}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x+1)(x+2)}}}\end{aligned}$$

(2) $x>0$ であるから，両辺の自然対数をとると

$$\log y=\sin x\log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\cos x\log x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

したがって

$$\boldsymbol{y'=x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right)}$$

66 次の関数の第 2 次導関数を求めよ.

(1) $y = x\cos x$ (茨城大)

(2) $y = \dfrac{e^x}{x}$ (類 職能開発大)

(3) $y = \log\dfrac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$ (東京電機大)

解答 (1)

$$\begin{aligned} y' &= (x)'\cos x + x(\cos x)' \\ &= \cos x - x\sin x \\ y'' &= -\sin x - \{(x)'\sin x + x(\sin x)'\} \\ &= -\sin x - (\sin x + x\cos x) \\ &= \boldsymbol{-2\sin x - x\cos x} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(e^x)'\cdot x - e^x\cdot(x)'}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \\ y'' &= \frac{\{(x-1)e^x\}'\cdot x^2 - (x-1)e^x\cdot(x^2)'}{x^4} \\ &= \frac{\{e^x + (x-1)e^x\}\cdot x^2 - 2x(x-1)e^x}{x^4} \\ &= \frac{x^3e^x - 2x(x-1)e^x}{x^4} = \frac{\boldsymbol{(x^2 - 2x + 2)e^x}}{\boldsymbol{x^3}} \end{aligned}$$

(3) $y = \log(1+x) - \log(1-x)$ であるから

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \\ y'' &= -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{\boldsymbol{4x}}{\boldsymbol{(1+x)^2(1-x)^2}} \end{aligned}$$

67 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，y を用いて表してもよい．

(1) $x = y^2 + 2y + 1 \quad (y < -1)$ (関西大)

(2) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \quad (y \neq 0)$ (東京電機大)

(3) $x^2 - y^2 = 4$ (類 富山医薬大)

解答 (1) $x = y^2 + 2y + 1$ の両辺を x で微分すると

$$1 = 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$y + 1 \neq 0$ であるから $\quad \boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2(y+1)}}$

(2) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2}{3}x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$y \neq 0$ であるから $\quad \boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{3y}}$

(3) $x^2 - y^2 = 4$ の両辺を x で微分すると

$$2x - 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}}$$

68 x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ.

(1) $x = 2t^2 + 3, \quad y = 3t^3 + 4t^2 + 5$ (北海道工大)

(2) $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$ (宮崎大)

(3) $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t$ (類 東京電機大)

解答 (1) $x = 2t^2 + 3, \quad y = 3t^3 + 4t^2 + 5$ より

$$\frac{dx}{dt} = 4t, \quad \frac{dy}{dt} = 9t^2 + 8t$$

したがって，$t \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{9t^2 + 8t}{4t} = \boldsymbol{\frac{9t + 8}{4}}$$

(2) $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$ より

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \boldsymbol{\frac{\sin t}{1 - \cos t}}$$

(3) $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t$ より

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \boldsymbol{\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}}$$

69 次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めよ.

(1) $y=3^x$, $\mathrm{A}(a,\ 3^a)$ (類 同志社大)

(2) $y=x\log x-\tan x$ $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\log\dfrac{\pi}{4}-1\right)$ (類 名古屋市立大)

解答 (1) $y=3^x$ を微分すると $\dfrac{dy}{dx}=3^x\log 3$

$x=a$ のとき，$y'=3^a\log 3$

よって，点 A における接線の方程式は

$$y-3^a=3^a\log 3\cdot(x-a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=3^a\{(x-a)\log 3+1\}}$$

また，点 A における法線の方程式は

$$y-3^a=-\frac{1}{3^a\log 3}\cdot(x-a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-\frac{x-a}{3^a\log 3}+3^a}$$

(2) $y=x\log x-\tan x$ を微分すると $y'=\log x+1-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき $y'=\log\dfrac{\pi}{4}+1-2=\log\dfrac{\pi}{4}-1$

よって，点 A における接線の方程式は

$$y-\left(\frac{\pi}{4}\log\frac{\pi}{4}-1\right)=\left(\log\frac{\pi}{4}-1\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

すなわち $\boldsymbol{y=\left(\log\dfrac{\pi}{4}-1\right)x+\dfrac{\pi}{4}-1}$

また，点 A における法線の方程式は

$$y-\left(\frac{\pi}{4}\log\frac{\pi}{4}-1\right)=-\frac{1}{\log\dfrac{\pi}{4}-1}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

すなわち $\boldsymbol{y=-\dfrac{x-\dfrac{\pi}{4}}{\log\dfrac{\pi}{4}-1}+\dfrac{\pi}{4}\log\dfrac{\pi}{4}-1}$

70 次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $2x^2-2xy+y^2=5$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ．
(東京理科大)

(2) θ を媒介変数として，$\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}$ で表される曲線の $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．
(鹿児島大)

解答 (1) $2x^2-2xy+y^2=5$ の両辺を x で微分すると

$$4x-2(y+xy')+2yy'=0 \quad \text{ゆえに} \quad y'(y-x)+2x-y=0$$

$x=1,\ y=3$ のとき $\quad y'=\dfrac{1}{2}$

よって，求める接線の方程式は

$$y-3=\frac{1}{2}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}$$

(2) $x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta$ をそれぞれ θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$

したがって $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

ゆえに $\quad \theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\quad \dfrac{dy}{dx}=1$

よって，求める接線の方程式は

$$y-\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)=1\cdot\left\{x-\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

すなわち $\qquad \boldsymbol{y=x+2-\frac{\pi}{2}}$

71 次の関数 $f(x)$ と示された区間 $[a,\ b]$ について，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b$ を満たす実数 c の値を求めよ．

(1) $f(x)=x+2\sqrt{1-x^2}\quad [0,\ 1]$ (横浜市大)

(2) $f(x)=\log x\quad [a,\ b]\ (0<a<c<b)$ (類 東京薬大)

解答 (1) 関数 $f(x)=x+2\sqrt{1-x^2}$ は区間 $(0,\ 1)$ で微分可能であり

$$f'(x)=1-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-2=-1$$

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$ であるから $(0<c<1)$

$$-1=1-\frac{2c}{\sqrt{1-c^2}}\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{c=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(2) $0<a<b$ から，関数 $f(x)=\log x$ は区間 $(a,\ b)$ で微分可能であり

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\log b-\log a}{b-a}$$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ であるから $(0<a<c<b)$

$$\frac{\log b-\log a}{b-a}=\frac{1}{c}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{c=\frac{b-a}{\log b-\log a}}$$

72 次の関数の増減を調べよ．

(1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$ (類 日本女子大)

(2) $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ (大阪工大)

解答 (1) $f'(x)=\dfrac{2(x^2+2)-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=-\dfrac{2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$ とすると $\quad x=-2,\ 1$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，$\boldsymbol{f(x)}$ は，$\boldsymbol{x\leqq -2,\ 1\leqq x}$ で減少し，$\boldsymbol{-2\leqq x\leqq 1}$ で増加する．

(2) $f'(x)=2\sqrt{3}\cos 2x-2\cos x$

$=2\sqrt{3}(2\cos^2 x-1)-2\cos x$

$=2(\sqrt{3}\cos x+1)(2\cos x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$ とすると $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x=\pm\frac{\pi}{6}$$

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
x		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

よって，$\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{2}<x\leqq -\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6}\leqq x<\dfrac{\pi}{2}}$ で減少し，$\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{6}}$ で増加する．

73 次の関数の極値を求めよ.

(1) $y = x^3 \log x$ (類 法政大)

(2) $y = |x-1|e^x$ (類 名城大)

解答 (1) $y = x^3 \log x$ を微分すると

$$y' = 3x^2 \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3\log x + 1)$$

$x > 0$ に注意して $y' = 0$ を解くと

$$\log x = -\frac{1}{3} \quad \text{すなわち} \quad x = e^{-\frac{1}{3}}$$

したがって，y の増減表は次のようになる.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	極小 $-\frac{1}{3e}$	↗

よって，y は $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}}$ で極小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{3e}}$ をとり，極大値はない.

(2) $y = |x-1|e^x = \begin{cases} (x-1)e^x & (x \geqq 1) \\ -(x-1)e^x & (x \leqq 1) \end{cases}$

(i) $x > 1$ のとき，$y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x > 0$

(ii) $x < 1$ のとき，$y' = -xe^x$

$y' = 0$ とおくと $\quad x = 0$

(i)，(ii) から，y の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$+$
y	↗	極大 1	↘	極小 0	↗

よって，$\boldsymbol{x = 0}$ で極大値 **1**，$\boldsymbol{x = 1}$ で極小値 **0** をとる.

74 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x - 2 + \sqrt{4 - x^2}$ (岩手大)

(2) $y = x - \sin 2x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ (愛媛大)

解答 (1) $y = x - 2 + \sqrt{4 - x^2}$ の定義域は

$$4 - x^2 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad -2 \leqq x \leqq 2$$

$-2 < x < 2$ のとき

$$y' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$y' = 0$ とすると $\sqrt{4 - x^2} = x$

$x > 0$ に注意してこれを解くと $x = \sqrt{2}$

したがって，$-2 \leqq x \leqq 2$ における y の増減表は

x	-2	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-4	↗	$2\sqrt{2} - 2$	↘	0

よって，$\boldsymbol{x = \sqrt{2}}$ **で最大値** $\boldsymbol{2\sqrt{2} - 2}$ **をとり，** $\boldsymbol{x = -2}$ **で最小値** $\boldsymbol{-4}$ **をとる．**

(2) $y = x - \sin 2x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$ を微分すると $y' = 1 - 2\cos 2x$

$y' = 0$ とすると $x = \dfrac{\pi}{6}, \ \dfrac{5}{6}\pi$

よって，y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	極小	↗	極大	↘	π

$x = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき $y = \dfrac{5}{6}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $y = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって $\quad \boldsymbol{x = \dfrac{5}{6}\pi}$ **で最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6}}$ **で最小値** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

75 関数 $f(x)=(3-x)e^x$ について，関数の増減，極値，グラフの凹凸を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ は証明なしに用いてもよい．

(横浜国大)

解答 $f(x)=(3-x)e^x$ より

$$f'(x)=-e^x+(3-x)e^x=(2-x)e^x,$$
$$f''(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$$

$f'(x)=0$ とすると $x=2$，$f''(x)=0$ とすると $x=1$

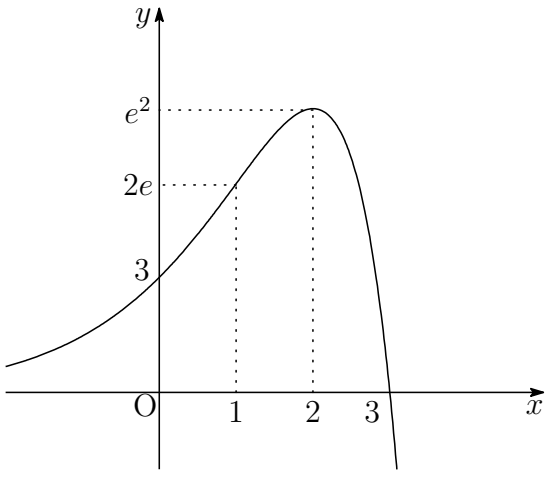
したがって，$f(x)$ の増減とグラフの凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	↗	$2e$	↱	e^2	↘

よって，**極大値 $f(2)=e^2$，変曲点 $(1,\ 2e)$**

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=(3-x)e^x=-\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(3-x)e^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}(3+x)e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+x}{e^x}=0$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



76 関数 $y=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ について，関数の増減，極値，グラフの凹凸を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．　(弘前大)

解答 $y=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ より

$$y'=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{-2x+1}{x^2(x-1)^2},$$
$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{2}{x^3}=\frac{2(3x^2-3x+1)}{x^3(x-1)^3}$$

ここで　　$3x^2-3x+1=3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}>0$

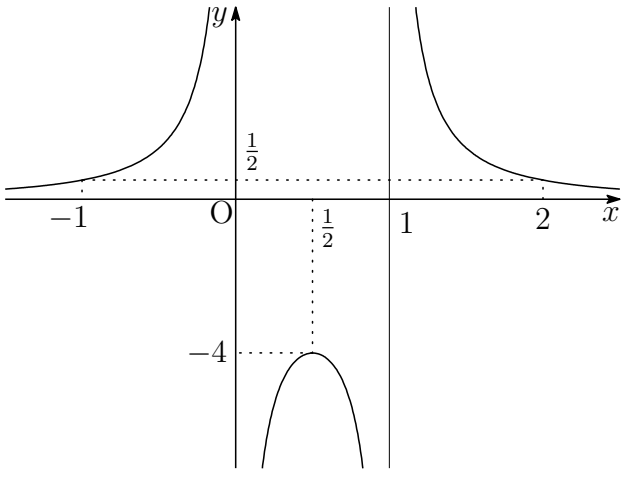
よって，y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)	$\cdots$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$
y	↗		↱	-4	↘		↳

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$ で極大値 $\boldsymbol{-4}$ をとる．

$$\lim_{x\to-\infty}y=0,\quad \lim_{x\to\infty}y=0,$$
$$\lim_{x\to-0}y=\infty,\quad \lim_{x\to+0}y=-\infty,$$
$$\lim_{x\to1-0}y=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}y=\infty$$

したがって，グラフの概形は次のようになる．



77 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

(1) $e^x = x + e$ (類 奈良女子大)

(2) $x - 3\log x = 0$ (長岡科学大)

解答 (1) $f(x) = e^x - x - e$ とおくと　$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

$$f(0) = 1 - e < 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

よって，$f(x) = 0$，すなわち，$e^x = x + e$ の実数解の個数は　**2 個**

(2) $f(x) = x - 3\log x$ とおくと $(x > 0)$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} \quad (x > 0)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

$$f(3) = 3 - 3\log 3 = 3(1 - \log 3) < 0,$$
$$\lim_{x\to+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

よって，$f(x) = 0$，すなわち，$x - 3\log x = 0$ の実数解の個数は　**2 個**

補足 $y = x$ と $y = 2^x$ のグラフから　$x < 2^x$

$x > 0$ のとき，$x < 2^x$ より　$0 < \dfrac{x}{e^x} < \left(\dfrac{2}{e}\right)^x$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^x = 0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(e^x - x - e) = \lim_{x\to\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^{x-1}}\right) = \infty$

$$\lim_{x\to\infty}(x - 3\log x) = \lim_{t\to\infty}(e^t - 3\log e^t) = \lim_{t\to\infty} e^t\left(1 - \frac{3t}{e^t}\right) = \infty$$

78 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{2}{\pi}x < \sin x$　　(琉球大 2002 年 [4])

(2) $x > 1$ のとき　$\dfrac{1}{2}\log x > \dfrac{x-1}{x+1}$　　(名古屋工大)

解答 (1) $f(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$ とおくと　$f'(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で $f'(x)$ は単調減少であり

$$f'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$$

したがって，$f'(\alpha) = 0$ を満たす α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在する．

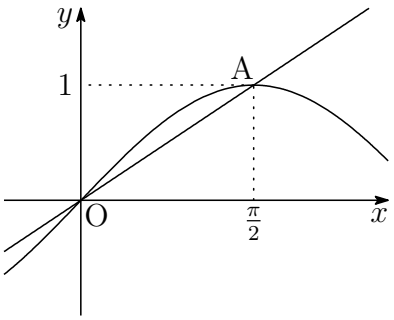
x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	↗	$f(\alpha)$	↘	(0)

よって，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$f(x) > 0$　すなわち　$\dfrac{2}{\pi}x < \sin x$

別解 $f(x) = \sin x$ とすると　　$f''(x) = -\sin x$

ゆえに，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において　$f''(x) < 0$

曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ を通る直線を $y = g(x)$ とすると



$$g(x) = \frac{2}{\pi}x$$

曲線 $y = f(x)$ は，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において上に凸であるから

$$g(x) < f(x) \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{2}{\pi}x < \sin x$$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{2}\log x - \dfrac{x-1}{x+1}$ とおくと $(x > 1)$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{2x(x+1)^2} > 0$$

$f(x)$ は単調増加であるから　$f(x) > f(1)$

よって　$x > 1$ のとき　$\dfrac{1}{2}\log x > \dfrac{x-1}{x+1}$

79 a，b，c は定数で，$a>0$ とする．座標平面上を運動する点 P の，時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が次の式で表されるとき，速さと加速度の大きさを求めよ．

(1) $x=-4t,\ y=t^2+5$

(2) $x=a\cos t+b,\ y=a\sin t+c$

解答 (1) $\dfrac{dx}{dt}=-4,\ \dfrac{dy}{dt}=2t$ であるから

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-4)^2+(2t)^2}=\boldsymbol{2\sqrt{4+t^2}}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=2$ であるから

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{0^2+2^2}=\boldsymbol{2}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-a\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=a\cos t$ であるから $(a>0)$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(a\sin t)^2+(a\cos t)^2}=\boldsymbol{a}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-a\sin t$ であるから

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-a\cos t)^2+(-a\sin t)^2}=\boldsymbol{a}$$

80 $|x|$ が十分小さいとき，次の関数の 1 次の近似式を作れ．

(1) $\dfrac{1}{(1+x)^4}$

(2) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

(3) e^{1-x}

解答 $|x|$ が十分小さいとき，次の近似式が成り立つ．

$$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$$

(1) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^4}$ とおくと　$f'(x)=-\dfrac{4}{(1+x)^5}$

$f(0)=1,\ f'(0)=-4$ であるから　$\boldsymbol{\dfrac{1}{(1+x)^4}\fallingdotseq 1-4x}$

(2) $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$

$f(0)=1,\ f'(0)=2$ であるから　$\boldsymbol{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\fallingdotseq 1+2x}$

(3) $f(x)=e^{1-x}$ とおくと　$f'(x)=-e^{1-x}$

$f(0)=e,\ f'(0)=-e$ であるから　$\boldsymbol{e^{1-x}\fallingdotseq e-ex}$

8.6　積分法 (数学 III)

81 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^{-3}\,dx$ (拓殖大)

(2) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+6}{x}\,dx$ (茨木大)

(3) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$ (信州大)

解答 (1) $\displaystyle\int x^{-3}\,dx = \boldsymbol{-\frac{1}{2}x^{-2}+C}$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+x^2+6}{x}\,dx &= \int \left(x^3+x+\frac{6}{x}\right)dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+6\log|x|+C}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)^2}{x\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{x^2-2x+1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx \\ &= \int \left(x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}+C \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C}\end{aligned}$$

82 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int e^{x+1}\,dx$ (広島大)

(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ (宮城教育大)

(3) $\displaystyle\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$ (京都産大)

解答 (1) $\displaystyle\int e^{x+1}\,dx = e\int e^x\,dx = e\cdot e^x + C = \boldsymbol{e^{x+1}+C}$

(2) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,dx &= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\ &= \boldsymbol{\tan x - x + C}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx &= \int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx\\ &= \int(1+\sin x)\,dx\\ &= \boldsymbol{x-\cos x+C}\end{aligned}$$

83 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$ (愛媛大)

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,dx$ (関西大)

(3) $\displaystyle\int \frac{2}{(1+x)^2}\,dx$ (甲南大)

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-2x)^2}\,dx$ (東京電機大)

解答 (1)

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \int (3x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{1}{2}} + C = \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,dx = \boldsymbol{-\log|1-x| + C}$

(3)

$$\int \frac{2}{(1+x)^2}\,dx = \int 2(1+x)^{-2}\,dx$$
$$= -2(1+x)^{-1} + C = \boldsymbol{-\frac{2}{1+x} + C}$$

(4)

$$\int \frac{dx}{(1-2x)^2}\,dx = \int (1-2x)^{-2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(1-2x)^{-1} + C = \boldsymbol{\frac{1}{2(1-2x)} + C}$$

84 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx$ (大分大)

(2) $\displaystyle\int (5\sin x + 3\cos 3x)\,dx$ (富山大)

(3) $\displaystyle\int e^{5x-1}\,dx$ (静岡理工科大)

(4) $\displaystyle\int e^{-2t}\,dt$ (大東文化大)

解答 (1) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\cos 2x + C}$

(2) $\displaystyle\int (5\sin x + 3\cos 3x)\,dx = \boldsymbol{-5\cos x + \sin 3x + C}$

(3) $\displaystyle\int e^{5x-1}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{5}e^{5x-1} + C}$

(4) $\displaystyle\int e^{-2t}\,dt = \boldsymbol{-\frac{1}{2}e^{-2t} + C}$

85 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ (滋賀大)

(2) $\displaystyle\int (3x+1)\sqrt{3x-2}\,dx$ (茨城大)

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-5}}\,dx$ (弘前大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\,dx &= \int \{(x-1)+1\}\sqrt{x-1}\,dx \\ &= \int \{(x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}\}\,dx \\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{15}(x-1)\sqrt{x-1}\{3(x-1)+5\} + C \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{15}(3x+2)(x-1)\sqrt{x-1} + C}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int (3x+1)\sqrt{3x-2}\,dx &= \int \{(3x-2)+3\}\sqrt{3x-2}\,dx \\ &= \int \{(3x-2)^{\frac{3}{2}} + 3(3x-2)^{\frac{1}{2}}\}\,dx \\ &= \frac{2}{15}(3x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(3x-2)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{15}(3x-2)\sqrt{3x-2}\{(3x-2)+5\} + C \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{5}(x+1)(3x-2)\sqrt{3x-2} + C}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x-5}}\,dx &= \int \frac{(x-5)+5}{\sqrt{x-5}}\,dx \\ &= \int \{(x-5)^{\frac{1}{2}} + 5(x-5)^{-\frac{1}{2}}\}\,dx \\ &= \frac{2}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + 10(x-5)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x-5}\{(x-5)+15\} + C \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}(x+10)\sqrt{x-5} + C}\end{aligned}$$

86 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int 2x(x^2+2)^2\,dx$ (東京電機大)

(2) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{x^3+1}\,dx$ (福島大)

(3) $\displaystyle\int xe^{-3x^2}\,dx$ (大阪工大)

(4) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{4+\cos x}\,dx$ (会津大)

解答 (1) $\{(x^2+2)^3\}' = 6x(x^2+2)^2$ であるから

$$\int 2x(x^2+2)^2\,dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{(x^2+2)^3+C}$$

(2) $(\log|x^3+1|)' = \dfrac{3x^2}{x^3+1}$ であるから

$$\int \frac{2x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\log|x^3+1|+C}$$

(3) $(e^{-3x^2})' = -6xe^{-3x^2}$ であるから

$$\int xe^{-3x^2}\,dx = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{e^{-3x^2}+C}$$

(4) $\{\log(4+\cos x)\}' = \dfrac{-\sin x}{4+\cos x}$ であるから

$$\int \frac{\sin x}{4+\cos x}\,dx = \boldsymbol{-\log(4+\cos x)+C}$$

補足 本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\ \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx$$

が成立する．同様に，次式も成立する．

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x) \\ \cdots + (-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x)\,dx$$

87 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$ (広島市大)

(2) $\displaystyle\int (x+2)e^x\,dx$ (東京農工大)

(3) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$ (関西大)

(4) $\displaystyle\int x2^x\,dx$ (広島市大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int x\sin 2x\,dx &= \int x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx\\ &= x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\sin 2x\right) + C\\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int (x+2)e^x\,dx &= \int (x+2)(e^x)'\,dx\\ &= (x+2)e^x - 1\cdot e^x + C\\ &= \boldsymbol{(x+1)e^x + C}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int x^2\log x\,dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\cdot(\log x)'\,dx\\ &= \boldsymbol{\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + C}\end{aligned}$$

別解 $x = e^t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = e^t$

$$\begin{aligned}\int x^2\log x\,dx &= \int (e^t)^2 t\cdot e^t\,dt = \int te^{3t}\,dt = \int t\left(\frac{e^{3t}}{3}\right)'dt\\ &= t\cdot\frac{e^{3t}}{3} - 1\cdot\frac{e^{3t}}{9} + C\\ &= \boldsymbol{\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + C}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int x2^x\,dx &= \int x\left(\frac{2^x}{\log 2}\right)'dx\\ &= x\cdot\frac{2^x}{\log 2} - 1\cdot\left\{\frac{2^x}{(\log 2)^2}\right\} + C\\ &= \boldsymbol{2^x\left\{\frac{x}{\log 2} - \frac{1}{(\log 2)^2}\right\} + C}\end{aligned}$$

88 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2 \sin x \, dx$ (東京都市大)

(2) $\displaystyle\int (x^2+2x)e^{-x} \, dx$ (南山大)

(3) $\displaystyle\int (\log x)^2 \, dx$ (東京理科大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= \int x^2(-\cos x)' \, dx \\ &= x^2(-\cos x) - 2x\cdot(-\sin x) + 2\cdot\cos x + C \\ &= \boldsymbol{2x\sin x + (2-x^2)\cos x + C}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int (x^2+2x)e^{-x} \, dx &= \int (x^2+2x)(-e^{-x})' \, dx \\ &= (x^2+2x)(-e^{-x}) - (2x+2)\cdot e^{-x} + 2\cdot(-e^{-x}) + C \\ &= (-x^2-4x-4)e^{-x} + C \\ &= \boldsymbol{-(x+2)^2e^{-x} + C}\end{aligned}$$

(3) $\log x = t$ とおくと，$x = e^t$ より $\dfrac{dx}{dt} = e^t$

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 \, dx &= \int t^2 e^t \, dt = \int t^2 (e^t)' \, dt \\ &= t^2e^t - 2t\cdot e^t + 2\cdot e^t + C \\ &= (\log x)^2 x - 2(\log x)x + 2x + C \\ &= \boldsymbol{x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\} + C}\end{aligned}$$

89 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x}\,dx$ (広島市大)

(2) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(x-1)}\,dx$ (愛知工大)

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}\,dx$ (信州大)

解答 (1) $x^2=(x+1)(x-1)+1$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1+x}\,dx &= \int \left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx \\ &= \boldsymbol{\frac{x^2}{2}-x+\log|1+x|+C}\end{aligned}$$

(2) $x-2=2(x-1)-x$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x(x-1)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= 2\log|x|-\log|x-1|+C \\ &= \boldsymbol{\log\frac{x^2}{|x-1|}+C}\end{aligned}$$

(3) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x=t^2-1$ より $\dfrac{dx}{dt}=2t$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= \int \frac{2t}{(t^2-1)t}\,dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C \\ &= \boldsymbol{\log\frac{|\sqrt{x+1}-1|}{\sqrt{x+1}+1}+C}\end{aligned}$$

90 恒等式 $\dfrac{2x+1}{x(x-1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{x-1}$ を満たす定数 a，b，c を求めよ．また，不定積分 $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x(x-1)^2}\,dx$ を求めよ． (東海大)

解答 分母を払うと

$$2x+1=a(x-1)^2+bx+cx(x-1)$$

右辺を整理すると

$$2x+1=(a+c)x^2+(-2a+b-c)x+a$$

上式は x に関する恒等式であるから

$$a+c=0,\ -2a+b-c=2,\ a=1$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=-1}$

したがって

$$\begin{aligned}\int\frac{2x+1}{x(x-1)^2}\,dx&=\int\left\{\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right\}dx\\&=\log|x|-\frac{3}{x-1}-\log|x-1|+C\\&=\boldsymbol{\log\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{3}{x-1}+C}\end{aligned}$$

91 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\cos^2 x\,dx$ (東京電機大)

(2) $\displaystyle\int\cos^3 x\,dx$ (類 富山大)

(3) $\displaystyle\int\sin 3x\cos 4x\,dx$ (甲南大)

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{\tan 4x}\,dx$ (愛媛大)

解答 (1)

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \boldsymbol{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int (1-\sin^2 x)(\sin x)'\,dx \\ &= \boldsymbol{\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C}\end{aligned}$$

別解 $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$ であるから　$\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \frac{1}{4}\int (\cos 3x + 3\cos x)\,dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C}\end{aligned}$$

補足 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ であるから，別解の解答と最初の解答は一致する．

(3)

$$\begin{aligned}\int \sin 3x\cos 4x &= \frac{1}{2}\int \{\sin(3x+4x) + \sin(3x-4x)\}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\sin 7x - \sin x)\,dx \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + C}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\tan 4x}\,dx &= \int \frac{\cos 4x}{\sin 4x}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{(\sin 4x)'}{\sin 4x}\,dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}\log|\sin 4x| + C}\end{aligned}$$

92 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$ (信州大)

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ (関西大)

(3) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$ (信州大)

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx$ (広島市大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\,dx &= \int \frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{(x+1)-1}\,dx \\ &= \int \{(x+1)^{\frac{1}{2}}-1\}\,dx \\ &= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x + C \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - x + C}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &= \int x(\tan x)'\,dx \\ &= x\tan x - x(-\log|\cos x|) + C \\ &= \boldsymbol{x\tan x + x\log|\cos x| + C}\end{aligned}$$

(3) $t = x^2$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = 2x$

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{x^2}\,dx &= \int \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\cdot 2x\,dx \\ &= \int \frac{1}{2}te^t\,dt = \int \frac{1}{2}t(e^t)'\,dt \\ &= \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}(t-1)e^t + C \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\log x\,dx &= \int \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' \log x\,dx \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\log x - \int \frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}x\sqrt{x}\log x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C}\end{aligned}$$

93 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$ (信州大)

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x-3}{x^2}\,dx$ (鹿児島大)

(3) $\displaystyle\int_2^7 \frac{x}{x+1}\,dx$ (明治大)

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{9-x^2}\,dx$ (芝浦工大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx &= \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\Big[\ (x+1)^{\frac{3}{2}}\ \Big]_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \boldsymbol{\frac{14}{3}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{2x-3}{x^2}\,dx &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)dx \\ &= 2\Big[\ \log|x|\ \Big]_1^2 + 3\Big[\ \frac{1}{x}\ \Big]_1^2 \\ &= \boldsymbol{2\log 2 - \frac{3}{2}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_2^7 \frac{x}{x+1}\,dx &= \int_2^7 \frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx \\ &= \int_2^7 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \Big[\ x\ \Big]_2^7 - \Big[\ \log(x+1)\ \Big]_2^7 \\ &= \mathbf{5-\log\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3}{9-x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{3}{(3+x)(3-x)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \log\left|\frac{3+x}{3-x}\right|\ \Big]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}\log 2}\end{aligned}$$

94 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (e^x + e^{-x})\,dx$ (岡山理科大)

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3^x}\,dx$ (神奈川工科大)

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos 3x)\,dx$ (国士舘大)

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ (兵庫県大)

解答 (1)

$$\int_0^1 (e^x + e^{-x})\,dx = \Big[\ e^x - e^{-x}\ \Big]_0^1 = \boldsymbol{e - \frac{1}{e}}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{3^x}\,dx = \int_1^2 3^{-x}\,dx &= \left[-\frac{3^{-x}}{\log 3}\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{\log 3}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{2}{9\log 3}}\end{aligned}$$

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos 3x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

(4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \Big[\ \tan x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

95 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$ (東京工科大)

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x\,dx$ (中央大)

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin 5x\,dx$ (宮崎大学 2014 年 1)

解答 (1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\, x - \frac{1}{2}\sin 2x \,\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \cos 8x)\,dx$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left[\, \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 8x \,\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{32}}$

96 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \sqrt{|x-2|}\,dx$ (東京都市大)

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 4x|\,dx$ (日本工大)

(3) $\displaystyle\int_0^{2} |e^x - 2|\,dx$ (宮崎大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3}\sqrt{|x-2|}\,dx &= \int_{-2}^{2}\sqrt{2-x}\,dx+\int_{2}^{3}\sqrt{x-2}\,dx\\ &= \left[-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{3}\\ &= \mathbf{6}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}|\cos 4x|\,dx &= \int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\cos 4x\,dx-\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 4x\,dx\\ &= \frac{1}{4}\Big[\ \sin 4x\ \Big]_{0}^{\frac{\pi}{8}}-\frac{1}{4}\Big[\ \sin 4x\ \Big]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}|\,x^2-2\,|\,dx &= -\int_{0}^{\log 2}(e^x-2)\,dx+\int_{\log 2}^{2}(e^x-2)\,dx\\ &= -\Big[\ e^x-2x\ \Big]_{0}^{\log 2}+\Big[\ e^x-2x\ \Big]_{\log 2}^{2}\\ &= (e^0-2\cdot 0)+(e^2-2\cdot 2)-2(e^{\log 2}-2\log 2)\\ &= \boldsymbol{e^2+4\log 2-7}\end{aligned}$$

97 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{10-x}}\,dx$ (東京理科大)

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^4 x\,dx$ (大阪府大)

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ (東京薬大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{10-x}}\,dx &= \int_1^6 \frac{-(10-x)+10}{\sqrt{10-x}}\,dx \\ &= \int_1^6 \left(-\sqrt{10-x}+\frac{10}{\sqrt{10-x}}\right)dx \\ &= \left[\ \frac{2}{3}(10-x)^{\frac{3}{2}}-20\sqrt{10-x}\ \right]_1^6 = \mathbf{\frac{22}{3}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^4 x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1-\cos^2 x)\cos^4 x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6 x-\cos^4 x)(\cos x)'\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{2}{35}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx &= \int_0^2 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx \\ &= \left[\ \log(x^2+1)\ \right]_0^2 = \mathbf{\log 5}\end{aligned}$$

98 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ (信州大)

(2) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4+x^2}$ (福岡大)

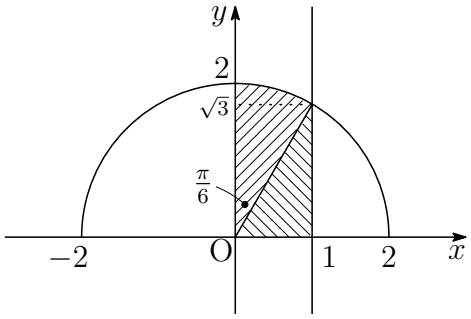
解答 (1) $x=2\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-(2\sin\theta)^2}\cdot 2\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2+2\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \left[\,2\theta+\sin 2\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

別解 求める定積分は，$y=\sqrt{4-x^2}$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における下の図の斜線部分の面積であるから

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



(2) $x=2\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

x	$0 \longrightarrow 2\sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4+x^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4+(2\tan\theta)^2}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\,d\theta = \left[\,\frac{\theta}{2}\,\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

99 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x^2}{x}\,dx$ (岡山県立大)

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx$ (芝浦工大)

(3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (東京理科大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\log x^2}{x}\,dx &= \int_1^e 2\log x(\log x)'\,dx \\ &= \Big[\ (\log x)^2\ \Big]_1^e = \mathbf{1}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int_0^1 \left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx \\ &= \Big[\ x-\log(e^x+1)\ \Big]_0^1 = \mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{e+1}}{\boldsymbol{2}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int_0^{\sqrt{3}} x(\sqrt{x^2+1}-x)\,dx \\ &= \Big[\ \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\ \Big]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{3}}-\boldsymbol{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

100 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)\sin x\,dx$ (宮崎大)

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$ (成蹊大)

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (福島大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)\sin x\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)(-\cos x)'\,dx \\ &= \Big[\ (3x+2)(-\cos x) - 3\cdot(-\sin x)\ \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \Big[-(3x+2)\cos x + 3\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{6}\end{aligned}$$

別解 $x\sin x$ は偶関数，$\sin x$ は奇関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)\sin x\,dx &= 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \\ &= 6\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \\ &= 6\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\,dx \\ &= 6\Big[\ x(-\cos x) - 1\cdot(-\sin x)\ \Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6\Big[-x\cos x + \sin x\ \Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{6}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\ \Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \mathbf{\log 3}\end{aligned}$$

別解 $\dfrac{1}{\cos\theta}$ は遇関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)d\theta \\ &= \Big[\ \log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\ \Big]_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \mathbf{\log 3}\end{aligned}$$

(3) $x = 2\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$,

x	$-1 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{1-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-4\sin\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1-4\sin\theta)\,d\theta \\ &= \Big[\ \theta+4\cos\theta\ \Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\end{aligned}$$

101 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ (宮崎大)

(2) $\displaystyle\int_1^{e} x^3\log x\,dx$ (岩手大)

(3) $\displaystyle\int_2^{3} (x^2+5)e^x\,dx$ (東京電機大)

解答 (1)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'\,dx\\ &= \left[\, x\sin x - 1\cdot(-\cos x)\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \left[\, x\sin x + \cos x\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}-1}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_1^{e} x^3\log x\,dx &= \int_1^{e}\left(\frac{x^4}{4}\right)'\log x\,dx\\ &= \left[\,\frac{x^4}{4}\log x\,\right]_1^{e} - \int_1^{e}\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{e^4}{4} - \int_1^{e}\frac{x^3}{4}\,dx\\ &= \frac{e^4}{4} - \left[\,\frac{x^4}{16}\,\right]_1^{e} = \boldsymbol{\frac{3e^4}{16}+\frac{1}{16}}\end{aligned}$$

別解 $x=e^t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=e^t$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\int_1^{e} x^3\log x\,dx &= \int_0^{1} e^{3t}t\cdot e^t\,dt = \int_0^{1} e^{4t}t\,dt\\ &= \int_0^{1}\left(\frac{e^{4t}}{4}\right)'t\,dt\\ &= \left[\,\frac{e^{4t}}{4}t - \frac{e^{4t}}{16}\cdot 1\,\right]_0^{1} = \boldsymbol{\frac{3e^4}{16}+\frac{1}{16}}\end{aligned}$$

(3)

$$\int_2^3 (x^2+5)e^x\,dx = \int_2^3 (x^2+5)(e^x)'\,dx$$
$$= \Big[\ (x^2+5)e^x - 2x\cdot e^x + 2\cdot e^x\ \Big]_2^3$$
$$= \Big[\ (x^2-2x+7)\ \Big]_2^3 = \boldsymbol{10e^3 - 7e^2}$$

102 次の関数を x について微分せよ.

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ (類 奈良教育大)

(2) $F(x) = \displaystyle\int_1^x (t-x)\log t\,dt \quad (x>0)$ (類 富山大)

(3) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{t}\sin t \quad (x>0)$ (類 北見工大)

解答 (1)

$$\frac{d}{dx}F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt = \boldsymbol{e^{x^2}}$$

(2) $F(x) = \displaystyle\int_1^x t\log t\,dt - x\int_1^x \log t\,dt$ より

$$\frac{d}{dx}F(x) = x\log x - \int_1^x \log t\,dt - x\log x$$
$$= -\int_1^x (t)'\log t\,dt$$
$$= -\Big[\ t\log t\ \Big]_1^x + \int_1^x t\cdot\frac{1}{t}\,dt$$
$$= -x\log x + \Big[\ t\ \Big]_1^x$$
$$= \boldsymbol{-x\log x + x - 1}$$

(3)

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sqrt{t}\sin t\,dt$$
$$= x\sin x^2\cdot(x^2)' = \boldsymbol{2x^2\sin x^2}$$

103 定積分を利用して，次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$ (甲南大)

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{k\pi}{2n}$ (信州大)

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$ (岡山県大)

解答 (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5\,dx=\left[\ \frac{x^6}{6}\ \right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{k\pi}{2n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\\&=\int_0^1 x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx=\int_0^1 x\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)'dx\\&=\left[\ x\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)-1\cdot\left(-\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)\ \right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{4}{\pi^2}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)\\=&\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\left[\ x^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

104 次の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ.

(2) 不等式 $\dfrac{\pi}{4} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx < 1$ を示せ.

解答 (1) $x = \tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

(2) $0 < x < 1$ において，$\dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{1+x^4} < 1$ であるから

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx < \int_0^1 dx$$

(1) の結果から

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx < 1$$

105 次の曲線と直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $y=\dfrac{1}{x}$，$x=1$，$x=e$ (湘南工科大)

(2) $y=\sqrt{3x-9}$，$x=6$ (岩手大)

(3) $y=1+\sin^2 x$，$x=0$，$x=\pi$ (明治大)

解答 (1)

$$S=\int_1^e \frac{1}{x}\,dx=\Big[\ \log x\ \Big]_1^e=\mathbf{1}$$

(2) $y=\sqrt{3x-9}$ のグラフの x 軸との交点の x 座標は　3

$$S=\int_3^6 \sqrt{3x-9}\,dx=\frac{2}{9}\Big[\ (3x-9)^{\frac{3}{2}}\ \Big]_3^6=\frac{2}{9}\cdot 27=\mathbf{6}$$

(3) $1+\sin^2 x=1+\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ であるから

$$S=\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\Big[\ \frac{3}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\ \Big]_0^{\pi}=\mathbf{\frac{3}{2}\pi}$$

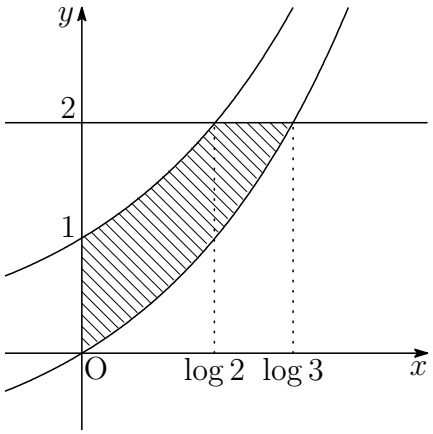
106 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $y=e^x$, $y=e^x-1$, $x=0$, $y=2$ (摂南大)

(2) $y=|\log x|$, $y=1$ (兵庫県大)

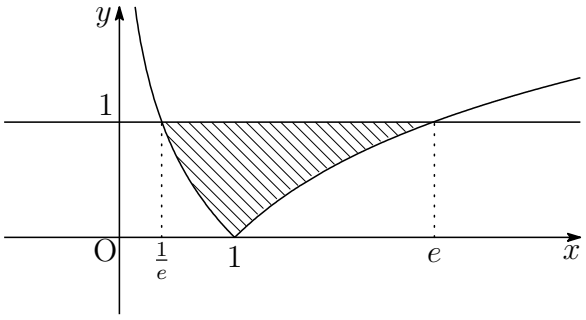
解答 (1)

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\log 2}\{e^x-(e^x-1)\}\,dx+\int_{\log 2}^{\log 3}\{2-(e^x-1)\}\,dx\\&=\int_0^{\log 2}dx+\int_{\log 2}^{\log 3}(3-e^x)\,dx\\&=\log 2+\Big[\,3x-e^x\,\Big]_{\log 2}^{\log 3}=\boldsymbol{\log\dfrac{27}{4}-1}\end{aligned}$$



(2)

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\{1-(-\log x)\}\,dx+\int_1^e(1-\log x)\,dx\\&=\Big[\,x\log x\,\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+\Big[\,x(2-\log x)\,\Big]_1^e=\boldsymbol{e+\dfrac{1}{e}-2}\end{aligned}$$



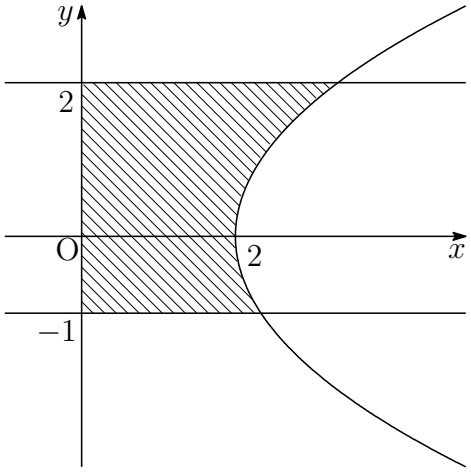
107 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $y^2 = 3x - 6$，y 軸，$y = -1$，$y = 2$ (岩手大)

(2) $y^2 = 2x + 5$，$y = x + 1$ (湘南工科大)

解答 (1) $x = \dfrac{y^2}{3} + 2$ より

$$S = \int_{-1}^{2} \left(\frac{y^2}{3} + 2 \right) dy = \left[\frac{y^3}{9} + 2y \right]_{-1}^{2} = \mathbf{7}$$



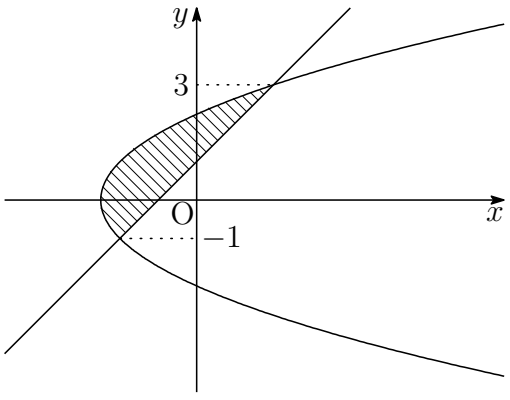
(2) 2 式から　$x = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{5}{2}$，$x = y - 1$

上の 2 式から x を消去して，整理すると　$y^2 - 2y - 3 = 0$

ゆえに　$(y + 1)(y - 3) = 0$　これを解いて　$y = -1,\ 3$

$$S = \int_{-1}^{3} \left\{ (y - 1) - \left(\frac{y^2}{2} - \frac{5}{2} \right) \right\} dy$$

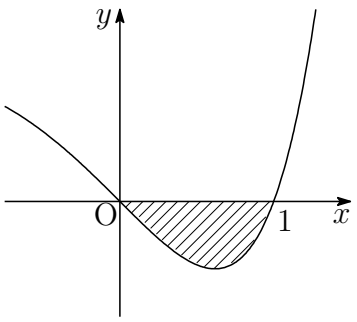
$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{3} (y + 1)(y - 3)\, dy = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \{3 - (-1)\}^3 = \mathbf{\frac{16}{3}}$$



108 曲線 $y=(x^2-x)e^{2x}$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ. (東京電機大)

解答

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \{-(x^2-x)e^{2x}\} \\
&= \int_0^1 (-x^2+x)\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx \\
&= \left[\ (-x^2+x)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - (-2x+1)\cdot\frac{e^{2x}}{4} + (-2)\cdot\frac{e^{2x}}{8}\ \right]_0^1 \\
&= \left[\ \left(-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}\ \right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$



109 次の曲線や直線で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

(1) $y = 2 - x^2$，x 軸　(東京都市大)

(2) $y = \cos x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸　(甲南大)

(3) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$　(東邦大)

解答 (1)

$$\frac{V}{\pi} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^2 \, dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x + \sqrt{2})^2 (\sqrt{2} - x)^2 \, dx$$
$$= \frac{2!2!}{(2+2+1)!} \{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})\}^5 = \frac{1}{30} (2\sqrt{2})^5 = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{64\sqrt{2}}{15}\pi}$

補足 次の公式[16] に $m = 2$，$n = 2$，$\alpha = -\sqrt{2}$，$\beta = \sqrt{2}$ を代入する．

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n \, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}}$$

(2)

$$\frac{V}{\pi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx$$
$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi^2}{2}}$

(3) $y^2 = \dfrac{4}{9}(x+3)(3-x)$ より

$$\frac{V}{\pi} = -\frac{4}{9} \int_{-3}^{3} (x+3)(x-3) \, dx = -\frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \{3 - (-3)\}^3 = 16$$

よって　$\boldsymbol{V = 16\pi}$

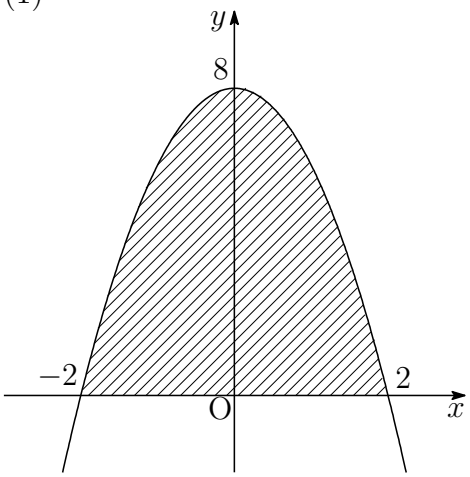
[16] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照．

110 次の曲線や直線で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

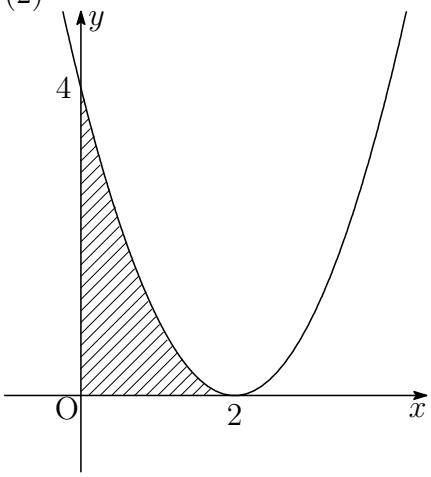
(1) $y = 8 - 2x^2$，x 軸　　(岩手大)

(2) $y = x^2 - 4x + 4$，x 軸，y 軸　　(北里大)

(1)



(2)



解答 (1) $x^2 = 4 - \dfrac{y}{2}$ より

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^8 \left(4 - \frac{y}{2}\right) dy = \left[\, 4y - \frac{y^2}{4} \,\right]_0^8 = 16$$

よって　$\boldsymbol{V = 16\pi}$

別解 バウムクーヘン型求積法により

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^2 x(8 - 2x^2)\, dx = \int_0^2 (8x - 2x^3)\, dx = \left[\, 4x^2 - \frac{x^4}{2} \,\right]_0^2 = 8$$

よって　$\boldsymbol{V = 16\pi}$

(2) $y = (x-2)^2$ より　$\dfrac{dy}{dx} = 2(x-2)$

y	$0 \longrightarrow 4$
x	$2 \longrightarrow 0$

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^4 x\, dy = \int_2^0 x \cdot 2(x-2)\, dx$$
$$= -2\int_0^2 x(x-2)\, dx = -2\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3 = \frac{8}{3}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{8}{3}\pi}$

別解 バウムクーヘン型求積法により，$y=(x-2)^2 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^2 x(2-x)^2\,dx=\frac{1}{12}(2-0)^4=\frac{4}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\dfrac{8}{3}\pi}$

補足 次の公式[17] に $m=1$，$n=2$，$\alpha=0$，$\beta=2$ を代入する．

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

111 次の曲線の長さ L を求めよ．ただし，t は媒介変数である．

(1) $x=3(t-\sin t),\quad y=3(1-\cos t) \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(藤田保健衛生大)

(2) $x=e^{-t}\cos 2\pi t,\quad y=e^{-t}\sin 2\pi t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$　　(東京電機大)

解答 (1) $\dfrac{dx}{dt}=3(1-\cos t),\quad \dfrac{dy}{dt}=3\sin t$ であるから

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9(1-\cos t)^2+9\sin^2 t}\,dt\\&=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\\&=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}\,dt=6\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{12-6\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}(2\pi\sin 2\pi t+\cos 2\pi t),\quad \dfrac{dy}{dt}=e^{-t}(2\pi\cos 2\pi t-\sin 2\pi t)$ より

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=e^{-2t}(2\pi\sin 2\pi t+\cos 2\pi t)\,\hat{}\,2+e^{-2t}(2\pi\cos 2\pi t-\sin 2\pi t)\,\hat{}\,2\\&=e^{-2t}(4\pi^2+1)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}L&=\int_0^1\sqrt{e^{-2t}(4\pi^2+1)}\,dt=\sqrt{4\pi^2+1}\int_0^1 e^{-t}\,dt\\&=\sqrt{4\pi^2+1}\left[-e^{-t}\right]_0^1=\boldsymbol{\sqrt{4\pi^2+1}\left(1-\frac{1}{e}\right)}\end{aligned}$$

[17] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

112 次の曲線の長さ L を求めよ.

(1) $y=\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \quad (2 \leqq x \leqq 7)$ (芝浦工大)

(2) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{4x} \quad (1 \leqq x \leqq 2)$ (類 自治医大)

解答 (1) $\dfrac{dy}{dx}=(x+1)^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_2^7 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\ &= \int_2^7 \sqrt{1+(x+1)}\,dx = \int_2^7 \sqrt{x+2}\,dx \\ &= \left[\ \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\ \right]_2^7 = \frac{2}{3}(9^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}(27-8) = \boldsymbol{\frac{38}{3}} \end{aligned}$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=x^2-\dfrac{1}{4x^2}$ であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\ x^3\ \right]_1^2 - \frac{1}{4}\left[\ \frac{1}{x}\ \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3}(8-1)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \boldsymbol{\frac{59}{24}} \end{aligned}$$

8.7　補充問題 (数学 III)

113 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{4}-\dfrac{n^2}{4n+1}\right)$ (国士舘大)

(2) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}-2\right)$ (名古屋市大)

(3) $\lim_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{n}$ (駒澤大)

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log 2^n}{2n+1}$ (京都産大)

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}$ (愛媛大)

解答 (1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4}-\frac{n^2}{4n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(4n+1)-4n^2}{4(4n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4(4n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\left(4+\dfrac{1}{n}\right)}=\boldsymbol{\frac{1}{16}}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\left(4+\dfrac{1}{n}\right)-2^2}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}+2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=\pi\cdot 1=\boldsymbol{\pi}$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log 2^n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\log 2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\log 2=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$$

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1 x^4\,dx=\left[\ \frac{x^5}{5}\ \right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

114 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}$ (神戸薬大)

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos 2x}$ (北見工大)

(3) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{5x^2+x}-2x)\sin\dfrac{1}{x}$ (滋賀県立大)

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(3^x-1)\sin x}$ (産業医大)

解答 (1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\mathbf{1}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-(1-2\sin^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2 x}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{5x^2+x}-2x)\sin\frac{1}{x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{\sqrt{5x^2+x}+2x}\sin\frac{1}{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{5+\dfrac{1}{x}}+2}\sin\frac{1}{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{5+\dfrac{1}{x}}+2}\cdot\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}+2}\cdot 1=\mathbf{\sqrt{5}-2}\end{aligned}$$

(4) $f(x)=3^x$ とすると，$f'(x)=3^x\log 3$ より　$f'(0)=\log 3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\log 3$$

よって　$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(3^x-1)\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{3^x-1}\cdot\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{1}{f'(0)}\cdot 1=\mathbf{\dfrac{1}{\log 3}}$

115 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{x+2}}$ (広島市大)

(2) $y=e^{\sin 2x}\tan x$ (岡山理科大)

(3) $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ (東京薬大)

(4) $y=\dfrac{\log_3 x}{3^x}$ (東京理科大)

(5) $y=x^{\cos x}\quad (x>0)$ (岡山県大)

解答 (1) $y=\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\dfrac{2x+1}{x+2}=2-\dfrac{3}{x+2}$ より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2-\frac{3}{x+2}\right)' \\ &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^2}\cdot\frac{3}{(x+2)^2} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2(x+2)^4}}} \end{aligned}$$

(2) $y=e^{\sin 2x}\tan x$ より

$$\begin{aligned} y' &= e^{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x\cdot\tan x + e^{\sin 2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \boldsymbol{e^{\sin 2x}\left(2\cos 2x\tan x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)} \end{aligned}$$

(3) $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ より

$$y'=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

(4) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\log_3 x$ であるから

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{3}\right)^x\log\frac{1}{3}\cdot\log_3 x+\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\frac{1}{x\log 3} \\ &= \frac{1}{3^x}\left(-\log 3\log_3 x+\frac{1}{x\log 3}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3^x}\left(\frac{1}{x\log 3}-\log x\right)} \end{aligned}$$

(5) $y = x^{\cos x}$ の両辺の自然対数をとると $(x > 0)$

$$\log y = \cos x \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \log x + \frac{\cos x}{x}$$

よって　　$\boldsymbol{y' = x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x} - \sin x \log x\right)}$

116 (1) 次の方程式で定められる x の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，y を用いて表してよい．

(ア) $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$　　(類 東京薬大)

(イ) $x^3 + (x^2+1)y + y^3 = 1$　　(類 広島市大)

(2) x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t を用いて表せ．

(ア) $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \dfrac{2t}{1+t^2}$　　(東京電機大)

(イ) $x = e^{2t}\sin 3t, \quad y = e^{2t}\cos 3t$　　(類 中部大)

解答 (1)(ア) $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$ の両辺を x について微分すると $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$

$$18x + 8yy' - 8y' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4(y-1)y' = -9x$$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{9x}{4(y-1)}}$

(イ) $x^3 + (x^2+1)y + y^3 = 1$ の両辺を x について微分すると $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$

$$3x^2 + 2xy + (x^2+1)y' + 3y^2y' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x^2+3y^2+1)y' = -x(3x+2y)$$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x(3x+2y)}{x^2+3y^2+1}}$

(2)(ア) $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$, $y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ より

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2\cdot(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\Big/\left\{-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right\}=\boldsymbol{\frac{t^2-1}{2t}}$$

(イ) $x=e^{2t}\sin 3t$, $y=e^{2t}\cos 3t$ より

$$\frac{dx}{dt}=2e^{2t}\sin 3t+e^{2t}\cdot 3\cos 3t=e^{2t}(2\sin 3t+3\cos 3t)$$
$$\frac{dy}{dt}=2e^{2t}\cos 3t+e^{2t}\cdot(-3\sin 3t)=e^{2t}(2\cos 3t-3\sin 3t)$$

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{e^{2t}(2\cos 3t-3\sin 3t)}{e^{2t}(2\sin 3t+3\cos 3t)}=\boldsymbol{\frac{2\cos 3t-3\sin 3t}{2\sin 3t+3\cos 3t}}$$

117 次の不定積分，定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2}\,dx$ (埼玉大)

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{2x^3}{1+x^2}\,dx$ (立教大)

(3) $\displaystyle\int_1^2\frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx$ (宮崎大学 2012 年 1)

(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx$ (東京理科大)

解答 (1)

$$\int\frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2}\,dx=\int\frac{3x^3-7x^2+5x-1}{x^2}\,dx$$
$$=\int\left(3x-7+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}x^2-7x+5\log|x|+\frac{1}{x}+C}$$

(2) $\dfrac{2x^3}{1+x^2} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$ であるから

$$\int_0^1 \frac{2x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left\{2x - \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\right\} dx$$
$$= \Big[\ x^2 - \log(x^2+1)\ \Big]_0^1 = \mathbf{1 - \log 2}$$

(3) $$\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\ \log(x^2-2x+2)\ \Big]_1^2 = \mathbf{\frac{1}{2}\log 2}$$

(4)

$$\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$= \Big[\ \log(x^2+x+1)\ \Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$= \log 3 + \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

ここで，$x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{\cos^2\theta}$,

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

よって　$$\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx = \mathbf{\log 3 + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi}$$

118 次の不定積分，定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,dx$ (甲南大)

(2) $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x+16}+\sqrt{x}}\,dx$ (愛知工大)

(3) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$ (弘前大)

(4) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{6x-x^2}\,dx$ (近畿大)

解答 (1)

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,dx = \int \left(\sqrt{x} - 3 + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - \log|x| + C}$$

(2)

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x+16}+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^9 \frac{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}{16}\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\left[\ \frac{2}{3}(x+16)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^9$$
$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}(5^3 - 4^3 - 3^3) = \boldsymbol{\frac{17}{12}}$$

(3)

$$\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx = \int_1^2 \{2-(2-x)\}\sqrt{2-x}\,dx$$
$$= \int_1^2 \{2\sqrt{2-x} - (2-x)^{\frac{3}{2}}\}\,dx$$
$$= \left[\ -\frac{4}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}\ \right]_1^2 = \boldsymbol{\frac{14}{15}}$$

(4)

$$\int_0^3 \sqrt{6x-x^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{9-(3-x)^2}\,dx$$

$3-x = 3\cos\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta} = 3\sin\theta$

x	$0 \longrightarrow 3$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

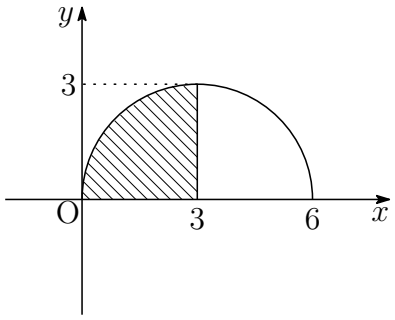
$$\int_0^3 \sqrt{9-(3-x)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-(3\cos\theta)^2}\cdot 3\sin\theta\,d\theta$$
$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta$$
$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= 9\left[\ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{9}{4}\pi}$$

別解 $y=\sqrt{6x-x^2}$ とおいて，両辺を平方すると

$$y^2=6x-x^2 \quad \text{ゆえに} \quad (x-3)^2+y^2=9$$

したがって，求める定積分は下の図の斜線部分の面積であるから

$$\int_0^3 \sqrt{9-(3-x)^2}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 3^2=\boldsymbol{\frac{9}{4}\pi}$$



119 次の不定積分，定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos 2x}\,dx$ (岡山県大)

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ (東京都市大)

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin 3x\,dx$ (類 中央大)

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,dx$ (産業医大)

解答 (1)

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos 2x}\,dx=\int \frac{\sin x}{2\cos^2 x}\,dx=-\frac{1}{2}\int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{2\cos x}+C}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^2 x\,dx&=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx\\&=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos 4x)\,dx=\frac{1}{8}\left[\,x-\frac{1}{4}\sin 4x\,\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}\end{aligned}$$

(3) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ を利用.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin 3x\,dx&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 4x+\sin 2x)\,dx\\&=\left[-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{3}{16}}\end{aligned}$$

(4) $\tan^4 x$ は遇関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 x\,dx&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\tan^2 x\,dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan^2 x\,dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{(\tan x)'-1\}\tan^2 x\,dx\\&=\frac{2}{3}\left[\ \tan^3 x\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx\\&=\frac{2}{3}+2\left[\ x-\tan x\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

120 次の不定積分，定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx$ (信州大)

(2) $\displaystyle\int_1^2\frac{e^x}{e^x-1}\,dx$ (愛媛大)

(3) $\displaystyle\int_e^{e^e}\frac{\log(\log x)}{x\log x}\,dx$ (慶応大)

(4) $\displaystyle\int\frac{x}{2^x}\,dx$ (東京電機大)

解答 (1) $\dfrac{1}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx&=\frac{1}{2}\int\left(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+C}\end{aligned}$$

(2)

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \Big[\ \log(e^x-1)\ \Big]_1^2 = \log\frac{e^2-1}{e-1} = \mathbf{\log(e+1)}$$

(3) $\{\log(\log x)\}' = \dfrac{(\log x)'}{\log(\log x)} = \dfrac{1}{x\log(\log x)}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_e^{e^e} \frac{\log(\log x)}{x\log x}\,dx &= \int_e^{e^e} \log(\log x)\cdot\{\log(\log x)\}'\,dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \log(\log x)\ \Big]_e^{e^e} = \mathbf{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(4) $(2^{-x})' = \left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}' = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \log\dfrac{1}{2} = -2^{-x}\log 2$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{2^x}\,dx = \int_0^1 x2^{-x}\,dx &= \int_0^1 x\left(-\frac{2^{-x}}{\log 2}\right)'\,dx \\ &= \left[\ x\left(-\frac{2^{-x}}{\log 2}\right) - 1\cdot\frac{2^{-x}}{(\log 2)^2}\ \right]_0^1 \\ &= \mathbf{-\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{2(\log 2)^2}}\end{aligned}$$

9 Link(Basic)

9.1 複素数平面 (数学 C)

練習 1 複素数 α，β が $|\alpha| = |\beta| = |\alpha - \beta| = 1$ を満たすとき，$|2\beta - \alpha|$ の値を求めよ．
(自治医大)

解答 1 $|\alpha - \beta| = 1$ の両辺をを平方すると　$(\alpha - \beta)(\overline{\alpha} - \overline{\beta}) = 1^2$

$$|\alpha|^2 - (\alpha\overline{\beta} + \alpha\overline{\beta}) + |\beta|^2 = 1$$

これに $|\alpha| = |\beta| = 1$ を代入すると

$$1^2 - (\alpha\overline{\beta} + \alpha\overline{\beta}) + 1^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha\overline{\beta} + \alpha\overline{\beta} = 1$$

したがって　$|2\beta - \alpha|^2 = (2\beta - \alpha)(2\overline{\beta} - \overline{\alpha})$
$= 4|\beta|^2 - 2(\alpha\overline{\beta} + \alpha\overline{\beta}) + |\alpha|^2$
$= 4{\cdot}1^2 - 2{\cdot}1 + 1^2 = 3$

よって　$\boldsymbol{|2\beta - \alpha| = \sqrt{3}}$

練習 2 複素数 z が $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ を満たすとき，$z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}$ の値を求めよ．

(類 名古屋工大)

解答 2 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ より　$z^2-\sqrt{3}z+1=0$

これを解いて　$z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}\pm i\sin\dfrac{\pi}{6}$

$z=\cos\dfrac{\pi}{6}\pm i\sin\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{z}=\cos\dfrac{\pi}{6}\mp i\sin\dfrac{\pi}{6}$ であるから (複号同順)

$$\begin{aligned} z^{100}+\frac{1}{z^{100}} &= z^{100}+\left(\frac{1}{z}\right)^{100} \\ &= \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{100}+\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{100} \\ &= \cos\frac{50\pi}{3}+i\sin\frac{50\pi}{3}+\cos\frac{50\pi}{3}-i\sin\frac{50\pi}{3} \\ &= 2\cos\frac{50\pi}{3}=2\cos\frac{2\pi}{3}=2\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-1} \end{aligned}$$

練習 3 i を虚数単位とし，$z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ とおく．

(1) $z^4-z^3+z^2-z+1$ の値を求めよ．

(2) $w=z+\dfrac{1}{z}$ として，w^2-w の値を求めよ．

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ．

解答 3 (1) $z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ より　$z^5=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$z^5+1=0$ の左辺を因数分解すると

$$(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)=0$$

$z+1\neq 0$ であるから　　$\boldsymbol{z^4-z^3+z^2-z+1=0}$

(2) (1) の結果の両辺を z^2 で割ると

$$z^2-z+1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$$

$w=z+\dfrac{1}{z}$ であるから　$w^2-w-1=0$　よって　$\boldsymbol{w^2-w=1}$

(3) $z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{1}{z}=\cos\dfrac{\pi}{5}-i\sin\dfrac{\pi}{5}$ であるから

$$w=z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{\pi}{5}>0$$

(4) (2) の結果を $w>0$ に注意して解くと　$w=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

したがって　$2\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　よって　$\boldsymbol{\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$

練習 4 $z \neq 1$ である複素数 z に対して，$w = \dfrac{z+1}{1-z}$ とする．点 z が複素数平面上の虚軸上を動くとき，次の問いに答えよ． (静岡大)

(1) w が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) $w + i + 1$ の最大値と最小値を求めよ．

解答 4 (1) $w = \dfrac{z+1}{1-z}$ より　$(w+1)z = w - 1$

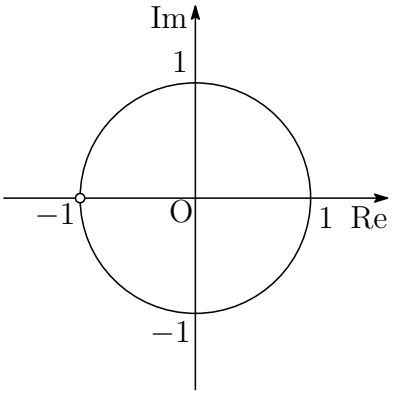
上の第 2 式において，$w \neq -1$ であるから

$$z = \frac{w-1}{w+1}$$

点 z は虚軸上にあるから　$z + \overline{z} = 0$

$$\frac{w-1}{w+1} + \frac{\overline{w}-1}{\overline{w}+1} = 0 \quad \text{整理すると} \quad |w| = 1 \ (w \neq -1)$$

したがって，点 w が描く図形を図示すると

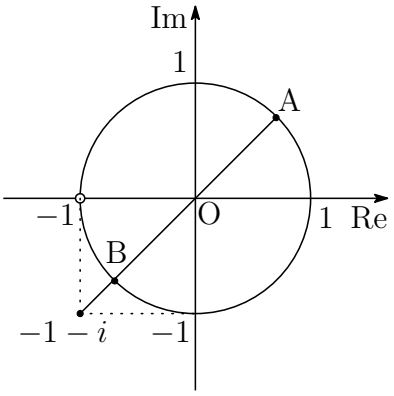


別解 $z = i\tan\theta \ \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおけるから

$$\begin{aligned} w &= \frac{i\tan\theta + 1}{1 - i\tan\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos 2\theta + i\sin 2\theta \quad (-\pi < 2\theta < \pi) \end{aligned}$$

(2) $|w+i+1|$ は点 $-1-i$ と点 w の距離であるから，最大値と最小値をとる w の点は，それぞれ下の図の A，B である．

よって　最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}+1}$，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$



練習 5 複素数平面において 2 点 $\mathrm{A}(1+i)$，$\mathrm{B}(5+3i)$ をとる．三角形 ABC が正三角形となる点 C に対応する複素数で虚部が最大のものを求めよ．

解答 5 $\alpha = 1+i$，$\beta = 5+3i$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とする．$\beta-\alpha = 4+2i$ であるから，$\theta = \arg(\beta-\alpha)$ とすると

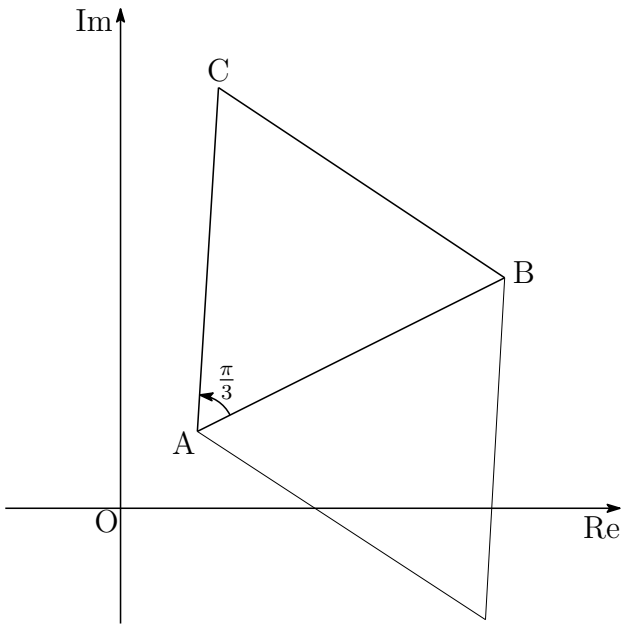
$$\tan\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{6}$$

したがって，点 C に対応する虚部が最大になるには，点 B を点 A を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させて点を C とすればよい．

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

したがって

$$\begin{aligned}
\gamma &= \alpha + (\beta-\gamma)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= 1+i+(4+2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= 1+i+(2+i)(1+\sqrt{3}i) \\
&= \boldsymbol{3-\sqrt{3}+(2+2\sqrt{3})i}
\end{aligned}$$



練習 6 α，β は，等式 $3\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2=0$ を満たす 0 でない複素数とする．複素数平面上で複素数 0，α，β を表す点をそれぞれ O，A，B とするとき，$\angle$AOB，$\angle$OAB を求めよ． (類 岐阜大)

解答 6 $3\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2=0$ を $\alpha^2\neq 0$ で割ると

$$4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-6\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+3=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{4}$$

したがって (複号同順)

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\frac{\beta-\alpha}{0-\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}+1=-\frac{3\pm\sqrt{3}i}{4}+1=\frac{1\mp\sqrt{3}i}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\mp\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\mp i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

よって $\quad \boldsymbol{\angle AOB=\frac{\pi}{6},\ \angle OAB=\frac{\pi}{3}}$

練習 7 複素数の数列 $\{z_n\}$ を $z_1=1$，$z_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1+i)z_n+\dfrac{1}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定める．(福島大)

(1) $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{2}(1+i)(z_n-\alpha)$ となる定数 α の値を求めよ．

(2) z_{17} を求めよ．

解答 7 (1) $\alpha=\dfrac{1}{2}(1+i)\alpha+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$(1-i)\alpha=1 \quad \text{これを解いて} \quad \alpha=\frac{1+i}{2}$$

(2) $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{2}(1+i)(z_n-\alpha)$ より

$$\frac{z_{n+1}-\alpha}{z_n-\alpha}=\frac{1}{2}(1+i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{i}{4}\right)$$

したがって $$\prod_{k=1}^{16}\frac{z_{k+1}-\alpha}{z_k-\alpha}=\prod_{k=1}^{16}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{i}{4}\right)$$

$$\frac{z_{17}-\alpha}{z_1-\alpha}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{16}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{i}{4}\right)^{16}$$
$$=\frac{1}{256}(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)=\frac{1}{256}$$

よって $$z_{17}=\alpha+\frac{1}{256}(z_1-\alpha)$$
$$=\frac{1+i}{2}+\frac{1}{256}\left(1-\frac{1+i}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{257+255i}{512}}$$

練習 8 複素数 z について，$\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体はどのような図形か，複素数平面上に図示せよ．　(類 岐阜大)

解答 8 $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となるための条件は

$$\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}=\overline{\left(\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}\right)}$$

右辺を変形すると

$$\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}=\frac{1}{\overline{z}-i}+\frac{1}{\overline{z}+i}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{2z}{z^2+1}=\frac{2\overline{z}}{\overline{z}^2+1}$$

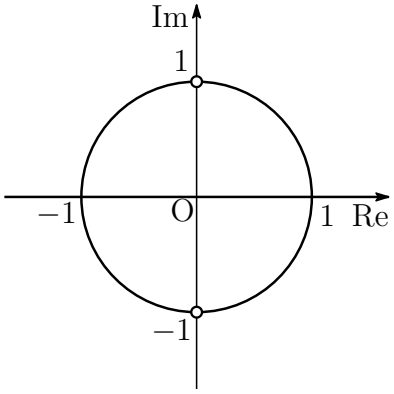
上の第 2 式から　　$z(\overline{z}^2+1)=\overline{z}(z^2+1)$

$z\overline{z}=|z|^2$ であるから

$$\overline{z}|z|^2+z=z|z|^2+\overline{z}\quad\text{ゆえに}\quad(z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$$

したがって　$z=\overline{z}$　または　$|z|=1$

よって，z は実軸または原点を中心とする半径 1 の円．ただし，$z\neq\pm i$



9.2　式と曲線 (数学 C)

練習 9 定数 a を正の実数とする．座標平面の第 1 象限または第 4 象限に中心をもち，円 $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ に外接し，y 軸にも接する円の中心 P の軌跡を C とする．曲線 C の方程式を求めよ．　(類 香川大)

解答 9 $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ を変形すると　$(x-a)^2 + y^2 = a^2$

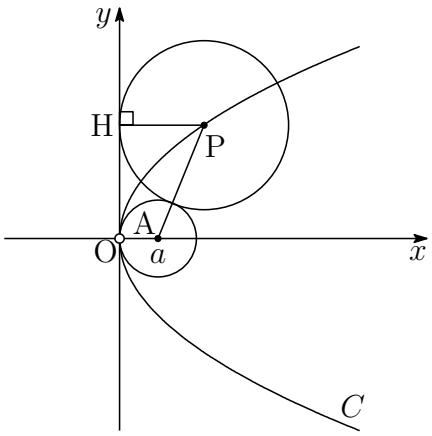
これは，中心 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，半径 a の円である．

$\mathrm{P}(x,\ y)$ から y 軸に垂線 PH を引くと，P の満たす軌跡の条件は $(x > 0)$

$$\mathrm{PA} = \mathrm{PH} + a \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a$$

両辺を平方すると　$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$

整理すると　　$\boldsymbol{y^2 = 4ax\ (x > 0)}$



練習 10 楕円 $x^2+2y^2=1$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるとき，2 つの交点の中点の軌跡を求めよ．　(類 北海道工大)

解答 10 与えられた楕円と直線の方程式から y を消去すると

$$x^2+2(x+k)^2=1 \quad \text{整理すると} \quad 3x^2+4kx+2k^2-1=0 \qquad \text{(A)}$$

楕円と直線が異なる 2 点で交わるから，係数について

$$D/4=(2k)^2-3\cdot(2k^2-1)=-2k^2+3>0 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{\sqrt{6}}{2}<k<\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \text{(B)}$$

2 次方程式 (A) の異なる 2 つの解を $x_1,\ x_2$ とすると，解と係数の関係から

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2}{3}k, \quad y=x+k=\frac{1}{3}k \qquad \text{(C)}$$

上の 2 式から k を消去すると　$y=-\dfrac{1}{2}x$

また，(B)，(C) より　$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<k<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

よって，求める軌跡は　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x} \quad \left(\boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{3}<k<\frac{\sqrt{6}}{3}}\right)$

練習 11 楕円 $x^2+2y^2=2$ を C とおく．傾き m の直線 $y=mx+3$ を ℓ とおく．

(1) C と ℓ が共有点をもたないような m の値の範囲は［　ア　］である．

(2) m が (1) で求めた範囲にある定数とする．点 P が C 上を動くとき，P と ℓ の距離の最大値と最小値を m を用いて表すと，最大値は［　イ　］，最小値は［　ウ　］と表される． (北里大)

解答 11 (1) C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^2+2(mx+3)^2=2 \quad \text{整理すると} \quad (2m^2+1)x^2+12mx+16=0$$

このとき，上の第 2 式の係数について

$$D/4=(6m)^2-(2m^2+1)\cdot 16=4(m-2)(m+2)<0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{-2<m<2}$

別解 C および ℓ を x 軸を元に y 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍だけ拡大したものをそれぞれ $C': x^2+y^2=2$，$\ell': \sqrt{2}mx-y+3\sqrt{2}=0$ とすると，このとき，C' と ℓ' が共有点をもたないから，円と直線の位置関係から

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2}m)^2+1}}>\sqrt{2} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-2<m<2}$$

(2) C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ について　$a^2+2b^2=2$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ から直線 $C: mx-y+3=0$ までの距離を d とすると

$$d=\frac{|ma-b+3|}{\sqrt{m^2+1}}$$

ここで，$\vec{u}=\left(m,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\vec{v}=(a,\ \sqrt{2}b)$ とすると，$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqq |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ より

$$(ma-b)^2 \leqq \left(m^2+\frac{1}{2}\right)(a^2+2b^2)=2m^2+1$$

(1) の結果から，$2m^2+1<9$ であることに注意して

$$\text{最大値 } \frac{\sqrt{\boldsymbol{2m^2+1}}+\boldsymbol{3}}{\sqrt{\boldsymbol{m^2+1}}}, \quad \text{最小値 } \frac{\boldsymbol{-\sqrt{2m^2+1}+3}}{\sqrt{\boldsymbol{m^2+1}}}$$

練習 12 媒介変数 t の式 $x=\dfrac{1+4t+t^2}{1+t^2}$，$y=\dfrac{3+t^2}{1+t^2}$ で表された曲線 C について

(1) 曲線 C を x，y の方程式で表せ. (類 鳥取大)

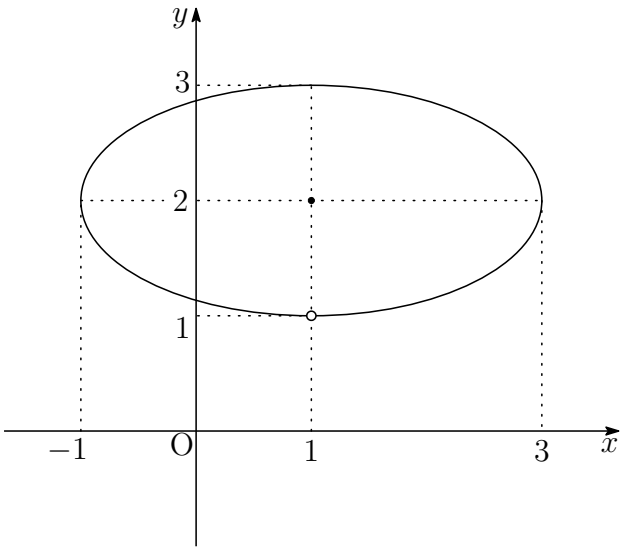
(2) 曲線 C の概形をかけ.

解答 12 (1) $x-1=\dfrac{4t}{1+t^2}$，$y-2=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ より $\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+(y-2)^2=1$

このとき $y-1=\dfrac{2}{1+t^2}\neq 0$ より $y\neq 1$

よって $\boldsymbol{\dfrac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1\ (y\neq 1)}$

(2) (1) の結果から



9.3 関数 (数学 III)

練習 13 方程式 $\sqrt{x+1} - x - k = 0$ を満たす解の個数が最も多いのは，実数 k が $\boxed{\text{ア}} \leqq k < \boxed{\text{イ}}$ を満たすときである．

解答 13 方程式の解は曲線 $y = \sqrt{x+1}$ と直線 $y = x + k$ の共有点の x 座標である．

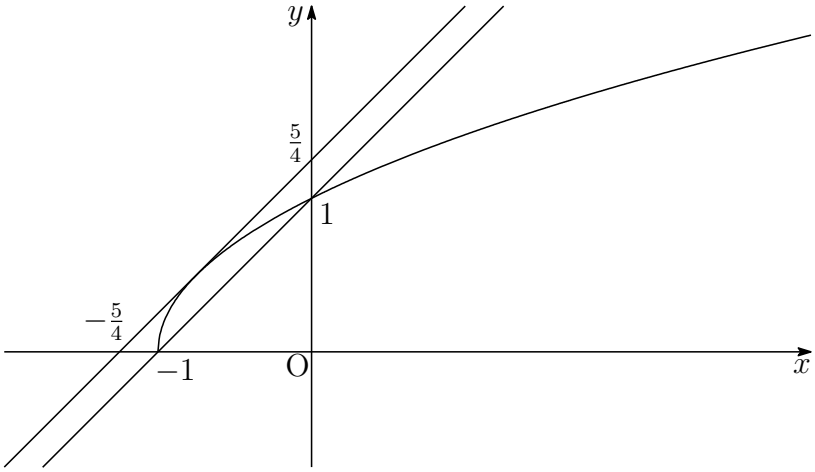
$x + k = \sqrt{x+1}$ の両辺を平方すると　$x^2 + 2kx + k^2 = x + 1$

$$x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$$

これらの曲線と直線が接するとき，係数について

$$D = (2k-1)^2 - 4 \cdot 1(k^2-1) = -4k + 5 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{5}{4}$$

下の図から，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{1 \leqq k < \dfrac{5}{4}}$



練習 14 関数 $f(x)=\dfrac{bx+1}{x+a}$ $(ab\neq 1)$ が，その逆関数 $f^{-1}(x)$ と一致するための条件を求めよ．

解答 14 $y=f(x)=\dfrac{bx+1}{x+a}$ とおくと

$$y=\frac{b(x+a)-ab+1}{x+a}=\frac{1-ab}{x+a}+b \qquad (*)$$

$ab\neq 1$ より　$y\neq b$　$(*)$ から　$y-b=\dfrac{1-ab}{x+a}$

$y-b\neq 0$ より　$x+a=\dfrac{1-ab}{y-b}$　ゆえに　$x=\dfrac{1-ab}{y-b}-a=\dfrac{-ay+1}{y-b}$

したがって　$f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+1}{x-b}$

$f(x)=f^{-1}(x)$ より　$\dfrac{bx+1}{x+a}=\dfrac{-ax+1}{x-b}$

$$(a+b)x^2+(a^2-b^2)x-(a+b)=0$$

したがって　$(a+b)\{x^2+(a-b)x-1\}=0$

上式は，x に関する恒等式であるから　$a+b=0$

$b=-a$ を $f(x)$ および $f^{-1}(x)$ に代入すると

$$f(x)=\frac{-ax+1}{x+a},\quad f^{-1}(x)=\frac{-ax+1}{x+a}$$

確かに条件を満たす．よって，求める条件は　$\boldsymbol{a+b=0}$

9.4　極限 (数学 III)

練習 15 次の極限を求めよ．ただし，n は自然数とし，$[x]$ は $m \leqq x < m+1$ を満たす整数とする．

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n(n+1)})$ (福島大)

(2) $\lim_{\to\infty}\dfrac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}$ (山梨大)

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(1+2+3+\cdots+n)^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$ (東京電機大)

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$ (防衛大)

解答 15 (1) $\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n(n+2)}=\dfrac{(n+1)(n+3)-n(n+2)}{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n(n+2)}}$

$$=\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n}}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n(n+1)})=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

$$=\frac{2+0}{1+1}=\mathbf{1}$$

別解 $\sqrt{n(n+2)}-(n+1)=\dfrac{n(n+2)-(n+1)^2}{\sqrt{n(n+2)}+n+1}=-\dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}+n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n(n+2)}-(n+1)\}=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+1)(n+3)}-(n+2)\}=0$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n(n+1)}-1)=0$$

よって　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n(n+1)})=\mathbf{1}$

(2) $[10^{2n}\pi] \leqq 10^{2n}\pi < [10^{2n}\pi] + 1$ より　$10^{2n}\pi - 1 < [10^{2n}\pi] \leqq 10^{2n}\pi$

したがって　　$\pi - \dfrac{1}{10^{2n}} \leqq \dfrac{10^{2n}\pi}{10^{2n}} \leqq \pi$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\pi - \dfrac{1}{10^{2n}}\right) = \pi$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{\to\infty} \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} = \boldsymbol{\pi}$$

(3) $\dfrac{(1+2+3+\cdots+n)^2}{n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)} = \dfrac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{3(n+1)}{2(2n+1)}$ より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+2+3+\cdots+n)^2}{n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{2(2n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right\}^{-2} = \boldsymbol{e^{-2}}$

練習 16 $0 < p < 1$ とする．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + pa_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問に答えよ． (佐賀大 2016 年 1)

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

解答 16 (1) 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -p(a_{n+1} - a_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = -pb_n$$

$\{b_n\}$ は，初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$，公比 $-p$ の等比数列であるから

$$b_n = 1 \cdot (-p)^{n-1} = \boldsymbol{(-p)^{n-1}}$$

(2) (1) の結果から $a_{n+1} - a_n = (-p)^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき $\quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-p)^{k-1} = 1 + \dfrac{1 - (-p)^{n-1}}{1+p}$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから $\quad \boldsymbol{a_n = 1 + \dfrac{1 - (-p)^{n-1}}{1+p}}$

(3) $0 < p < 1$ より $\quad -1 < -p < 0$ であるから $\quad \lim_{n\to\infty} (-p)^{n-1} = 0$

よって $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \dfrac{1}{1+p} = \boldsymbol{\dfrac{2+p}{1+p}}$

別解 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} + pa_{n+1} = a_{n+1} + pa_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + pa_n = a_2 + pa_1 = 2 + p$$

上式と $a_{n+1} - a_n = (-p)^{n-1}$ の差をとると

$$(1+p)a_n = 2 + p - (-p)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1+p}$$

練習 17 袋の中に赤球が 3 個，白球が 7 個入っている．この中から無作為に 1 個取り出し，取り出した球が赤ならば，かわりに白球を 1 つ，白球ならば，かわりに赤球を 1 つ袋に入れる．最初に赤球を取り出す確率を p_1 とし，この試行を $n-1$ 回繰り返した後，次に赤球を取り出す確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ．(類 名城大)

(1) p_{n+1} を p_n の式で表せ．

(2) p_n を n の式で表し，$\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

解答 17 (1) n 回目に取り出すとき，袋の中の赤球の個数の期待値を a_n とすると

$$p_n = \frac{a_n}{10}$$

$n+1$ 回目に取り出すとき，袋の中の赤球の個数の期待値 a_{n+1} は

$$a_{n+1} = p_n(a_n+1) + (1-p_n)(a_n-1)$$

したがって

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{10} &= p_n\left(\frac{a_n}{10}+\frac{1}{10}\right) + (1-p_n)\left(\frac{a_n}{10}-\frac{1}{10}\right) \\ &= p_n\left(p_n+\frac{1}{10}\right) + (1-p_n)\left(p_n+\frac{1}{10}\right) \\ &= \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{10}}$

(2) (1) の結果から　　$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{4}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{10} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$，公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列．

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}$$

よって　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}}$

練習 18 次の問いに答えよ．必要ならば，$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ $(|r|<1)$ を用いてよい．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ を求めよ． (日本大)

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ を求めよ．

解答 18 (1) $r=\dfrac{1}{3}$，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)r^k = r\sum_{k=0}^{n-1} kr^{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^k \\ &= r\sum_{k=1}^{n-1} kr^{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^k = r(S_n - nr^{n-1}) + \frac{1-r^n}{1-r} \end{aligned}$$

したがって $\quad (1-r)S_n = -nr^n + \dfrac{1-r^n}{1-r}$

$$S_n = -\frac{nr^n}{1-r} + \frac{1-r^n}{(1-r)^2}$$

これに $r=\dfrac{1}{3}$ を代入して

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} &= -\frac{3}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{9}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\ &= \frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}n + \frac{9}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$，$\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ であるから，(1) の結果から

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

大分大 2016 年 6

0 でない実数 r が $|r|<1$ のとき，以下の問いに答えなさい．ただし，自然数 n に対して $\lim_{n\to\infty} nr^n=0$，$\lim_{n\to\infty} n(n-1)r^n=0$ である．

(1) $R_n=\sum_{k=0}^{n} r^k$ と $S_n=\sum_{k=0}^{n} kr^{k-1}$ を求めなさい．

(2) $T_n=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2}$ を求めなさい．

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2r^k$ を求めなさい．

解答　(1) $(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k=1-r^{n+1}$ より，$|r|<1$ のとき

$$R_n=\sum_{k=0}^{n} r^k=\frac{\boldsymbol{1-r^{n+1}}}{\boldsymbol{1-r}}$$

次に，S_n について

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} kr^{k-1}\quad\cdots①,\qquad S_n=\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2}\quad\cdots②$$

とおくと，① $-$ ② $\times r$ より $(r\neq 1)$

$$\begin{aligned}S_n-rS_n&=\sum_{k=0}^{n} kr^{k-1}-r\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2}\\(1-r)S_n&=-nr^n+\sum_{k=1}^{n}\{kr^{k-1}-r(k-1)r^{k-2}\}\\&=-nr^n+\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=-nr^n+\frac{1-r^n}{1-r}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S_n=-\dfrac{nr^n}{1-r}+\dfrac{1-r^n}{(1-r)^2}}$

(2) T_n について

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2} \quad \cdots ③, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(k-2)r^{k-3} \quad \cdots ④$$

とおくと，③ $-$ ④ $\times r$ より，② に注意して $(r \neq 1)$

$$\begin{aligned} T_n - rT_n &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2} - r\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(k-2)r^{k-3} \\ (1-r)T_n &= -n(n-1)r^{n-1} + 2\sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-2} \\ &= -n(n-1)r^{n-1} - 2nr^{n-1} + 2\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2} \\ &= -n(n+1)r^{n-1} + 2S_n \\ &= -n(n+1)r^{n-1} - \frac{2nr^n}{1-r} + \frac{2(1-r^n)}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{T_n = -\dfrac{n(n+1)r^{n-1}}{1-r} - \dfrac{2nr^n}{(1-r)^2} + \dfrac{2(1-r^n)}{(1-r)^3}}$

(3) $|r| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$，$\lim_{n\to\infty} n(n-1)r^n = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n(n+1)r^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)r^n + 2nr^n}{r} = 0$$

上の諸式により

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{nr^n}{1-r} + \frac{1-r^n}{(1-r)^2} \right\} = \frac{1}{(1-r)^2} \\ \lim_{n\to\infty} T_n &= \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{n(n+1)r^{n-1}}{1-r} - \frac{2nr^n}{(1-r)^2} + \frac{2(1-r^n)}{(1-r)^3} \right\} = \frac{2}{(1-r)^3} \end{aligned}$$

よって $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 r^k = r^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)r^{k-2} + r\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}$

$$= r^2 \times \frac{2}{(1-r)^3} + r \times \frac{1}{(1-r)^2} = \boldsymbol{\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}}$$

別解 $f(r)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k=\frac{1}{1-r}$ とおくと $(0<|r|<1)$

$$f'(r)=\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}=\frac{1}{(1-r)^2},\quad f''(r)=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)r^{k-2}=\frac{2}{(1-r)^3}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k^2r^k&=\sum_{k=0}^{\infty}\{k(k-1)+k\}r^k\\&=r^2\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)r^{k-2}+r\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}\\&=r^2f''(r)+rf'(r)=\frac{2r^2}{(1-r)^3}+\frac{r}{(1-r)^2}=\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}\end{aligned}$$

練習 19 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ に内接する正方形の面積を a_1 とする．つぎに，この正方形に内接する円 C_2 を作成し，C_2 に内接する正方形の面積を a_2 とする．このような手順にならい，正方形に内接する円 C_n $(n \geqq 3)$ を順次作成し，C_n に内接する正方形の面積を a_n とする．無限等比級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

(類 甲南大)

解答 19 C_n の半径を r_n とすると　$r_1 = 1$，$r_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}$ であるから $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

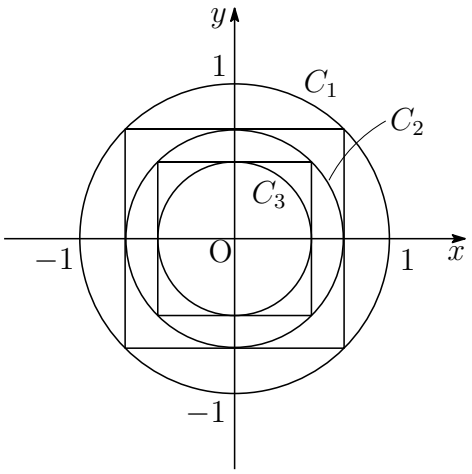
$$r_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

C_n に内接する正方形の 1 辺の長さは

$$2r_{n+1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}$$

したがって　　$a_n = (2r_{n+1})^2 = 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって　　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \mathbf{4}$



練習 20 $\lim_{x\to 1}\dfrac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ が有限な値になるように定数 a の値を定め，そのときの極限値を求めよ．

解答 20

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{a(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}+\frac{2(a-4)}{x-1}\right\}$$

このとき

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{a}{4}$$

であるから

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{a}{4}+\frac{2(a-4)}{x-1}\right\} \qquad (*)$$

$(*)$ が有限な値になるとき　$a-4=0$　ゆえに　$\boldsymbol{a=4}$

$a=4$ を $(*)$ に代入して，極限値　$\mathbf{1}$

練習 21 n を 3 以上の整数とするとき，半径 1 の円に内接する正 n 角形の 1 辺の長さ d を角度 $\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}$ を用いて表すと，$d =$ ア となる．この正 n 角形の面積 S を，θ_n の関数 $S(\theta_n)$ として表すと，$S(\theta_n) =$ イ となる．$n \longrightarrow \infty$ のとき $\theta_n \longrightarrow 0$ なので，$\lim_{n\to\infty} S(\theta_n) =$ ウ となる．　(職能開発大)

解答 21 正 n 角形の 1 辺 AB の中点を H とし，△AOH について

$$\frac{d}{2} = \sin\frac{\theta_n}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{d = 2\sin\frac{\theta_n}{2}}$$

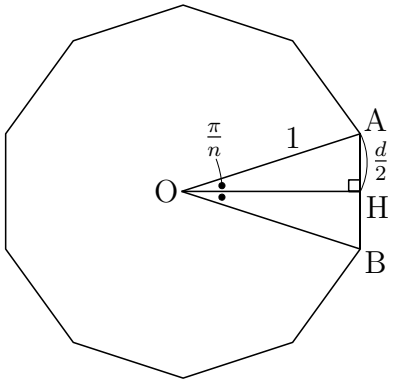
△OAB の面積は　$\dfrac{S(\theta_n)}{n} = \dfrac{1}{2}\sin\theta_n$　よって　$\boldsymbol{S(\theta_n) = \dfrac{n}{2}\sin\theta_n}$

$\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}$ より，$n = \dfrac{2\pi}{\theta_n}$ を上式に代入して

$$S(\theta_n) = \frac{\pi\sin\theta_n}{\theta_n}$$

$n \longrightarrow \infty$ のとき $\theta_n \longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S(\theta_n) = \lim_{\theta_n\to 0}\frac{\pi\sin\theta_n}{\theta_n} = \boldsymbol{\pi}$$



9.5　微分法 (数学 III)

練習 22 関数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2}+3 & (x \geqq 2)\\ ax^2+bx & (x<2)\end{cases}$ が $x=2$ で微分可能であるとき，定数 a，b の値を求めよ．　(類 関西大)

解答 22 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき，$x=2$ で連続であるから

$$f(2)=\lim_{2+0}(\sqrt{x^2-2}+3)=\lim_{2-0}(ax^2+bx)$$

ゆえに　$f(2)=\sqrt{2}+3=4a+2b$　$\cdots$①

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to 2+0}\frac{\sqrt{x^2-2}+3-(\sqrt{2}+3)}{x-2}\\ &=\lim_{x\to 2+0}\frac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}}{x-2}\\ &=\lim_{x\to 2+0}\frac{(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2})}\\ &=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2})}\\ &=\lim_{x\to 2+0}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2}}=\sqrt{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to 2-0}\frac{ax^2+bx-(4a+2b)}{x-2}\\ &=\lim_{x\to 2-0}\frac{a(x^2-4)+b(x-2)}{x-2}\\ &=\lim_{x\to 2-0}\{a(x+2)+b\}=4a+b\end{aligned}$$

ゆえに　$\sqrt{2}=4a+b$　$\cdots$②

①，② を解いて　$\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{3}-3}{4}}$, $\boldsymbol{b=3}$

練習 23 曲線 $C_1 : y = 2\cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $C_2 : y = \cos 2x + k \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が共有点 P で共通の接線 ℓ をもつ．ただし，k は定数であり，点 P の x 座標は正とする．k の値と接線 ℓ の方程式を求めよ．　(工学院大)

解答 23 $f(x) = 2\cos x$，$g(x) = \cos 2x + k$ とおくと

$$f'(x) = -2\sin x, \quad g'(x) = -2\sin 2x$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = t \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ において共通の接線をもつとき

$$f(t) = g(t), \quad f'(t) = g'(t) \qquad (*)$$

$(*)$ の第 2 式から　　$-2\sin t = -2\sin 2t$

$$\sin t = \sin 2t \quad \text{ゆえに} \quad \sin t(2\cos t - 1) = 0$$

$\cos t = \dfrac{1}{2}$ を解いて $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$　　$t = \dfrac{\pi}{3}$

これを $(*)$ の第 1 式に代入して　$1 = -\dfrac{1}{2} + k$　ゆえに　$\boldsymbol{k = \dfrac{3}{2}}$

また　　$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{3} = 1$，$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sin\dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

曲線 $y = f(x)$ の $x = \dfrac{\pi}{3}$ における接線の方程式は

$$y - 1 = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 1}$$

練習 24 α を実数の定数とする．関数 $f(x)=(x+1)3^{-ax^2}$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ．　(類 関西学院大)

解答 24 $f(x)=(x+1)3^{-ax^2}$ を微分すると

$$f'(x)=(-2ax^2-2ax+1)e^{-ax^2}$$

$e^{-ax^2}>0$ より，$-2ax^2-2ax+1=0$，すなわち，$2ax^2+2ax-1=0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいからよいから

$$D/4=a^2-2a\cdot(-1)=a(a+2)>0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a<-2,\ 0<a}$

練習 25 $0<\theta<\pi$ を満たす θ に対して平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,-\sin\theta)$ を考える．　(神戸大)

(1) △ABC の面積 $S(\theta)$ を求めよ．

(2) $S(\theta)$ の最大値を求めよ．

解答 25 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\cos\theta-1,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\cos\theta-1,-\sin\theta)$ より $(0<\theta<\pi)$

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}|(\cos\theta-1)(-\sin\theta)-(\cos\theta-1)\sin\theta|\\&=\boldsymbol{\sin\theta(1-\cos\theta)}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}S'(\theta)&=\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta\sin\theta\\&=\cos\theta(1-\cos\theta)+1-\cos^2\theta\\&=(1-\cos\theta)(2\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$ において $S'(\theta)=0$ とすると　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	極大	↘	

$S(\theta)$ は $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $S\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$

練習 26 関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) a を実数の定数とするとき，方程式 $e^x=ax^2$ の異なる実数解の個数を求めよ．(東京電機大)

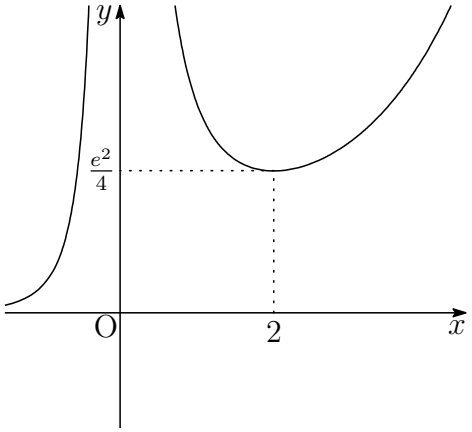
解答 26 (1) $f(x)=x^{-2}e^x$ を微分すると

$$f'(x)=-2x^{-3}e^x+x^{-2}e^x=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=2$

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘	$\frac{e^2}{4}$	↗

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to\pm0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$



(2) $x=0$ は方程式 $e^x=ax^2$ を満たさないから，$x\neq0$ で

$$\frac{e^x}{x^2}=a$$

この方程式の実数解の個数は，$y=\dfrac{e^x}{x^2}$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する．よって，(1) のグラフから，求める実数解の個数は

$\boldsymbol{a\leqq0}$ **のとき**　　**0 個**

$\boldsymbol{0<a<\dfrac{e^2}{4}}$ **のとき**　**1 個**

$\boldsymbol{a=\dfrac{e^2}{4}}$ **のとき**　　**2 個**

$\boldsymbol{\dfrac{e^2}{4}<a}$ **のとき**　　**3 個**

練習 27 すべての正の実数 x に対して $\sqrt{x}+2 \leqq k\sqrt{x+1}$ が成り立つような実数 k の最小値を求めよ. (日本女子大)

解答 27 $\sqrt{x+1}$ であるから，与えられた不等式は

$$\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}} \leqq k$$

と同値である．$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}}$ とおくと　$f(x) \leqq k$　$\cdots(*)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+1}-(\sqrt{x}+2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)-(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}(x+1)} = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}(x+1)} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{4}$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\sqrt{5}$	↘

よって，$(*)$ を満たす k の最小値は　$\boldsymbol{\sqrt{5}}$

練習 28 a，b を正の実数とする．e は自然対数の底とし，必要ならば $2.7 < e$ を用いてもよい．(京都府立医大)

(1) $a < b$ とする．このとき $a^b = b^2$ ならば $1 < a < e < b$ であることを証明せよ．

(2) $\sqrt{5}^{\sqrt{7}}$ と $\sqrt{7}^{\sqrt{5}}$ の大小を比較せよ．

解答 28 (1) $a^b = b^a$ の両辺は正であるから，両辺の自然対数をとると

$$\log a^b = \log b^a \quad \text{すなわち} \quad \frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b} \quad \cdots (*)$$

$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = e$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

$$\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad f(1) = 0$$

したがって，実数 a，b $(a < b)$ が $(*)$ を満たしているとき，次式が成立する．

$$1 < a < e < b$$

(2) $5 < 7 < e^2$ より，$\sqrt{5} < \sqrt{7} < e$ であるから，(1) の増減表から

$$f(\sqrt{5}) < f(\sqrt{7}) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\log\sqrt{5}}{\sqrt{5}} < \frac{\log\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

上の第 2 式から　$\sqrt{7}\log\sqrt{5} < \sqrt{5}\log\sqrt{7}$　よって　$\sqrt{5}^{\sqrt{5}} < \sqrt{7}^{\sqrt{5}}$

熊大理系 2007 年 4

a を定数とする。方程式 $(\log x)^2 = ax$ $(x > 0)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 解の個数を調べよ。必要なら，$\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^2}{x} = 0$ を用いよ。

(2) 解がちょうど 2 個のとき，これらの解を p^2，q^2 $(0 < p < q)$ とおく。q の値を求めよ。また，p は $\dfrac{e}{e+1} < p < 1$ を満たすことを示せ。

解答　(1) $x \neq 0$ であるから $f(x) = \dfrac{(\log x)^2}{x}$ とすると

$$f'(x) = \frac{2\log x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x - (\log x)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{\log x(2 - \log x)}{x^2}$$

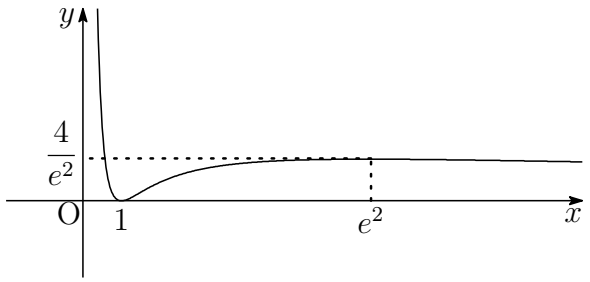
よって，$f(x)$ の増減表は次のようなる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{4}{e^2}$	↘

また　$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \dfrac{(\log x)^2}{x} = \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$$

したがって，$y = f(x)$ のグラフは下の図のようになる．



このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．したがって

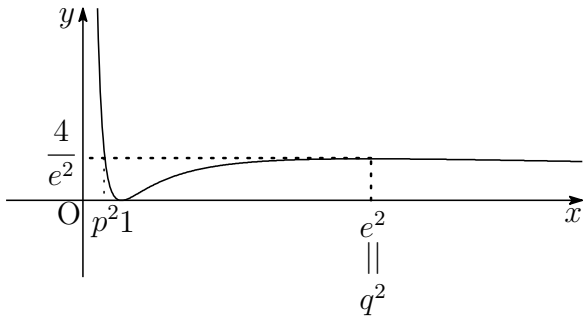
$\boldsymbol{a < 0}$ のとき　　**0 個**

$\boldsymbol{a > \dfrac{4}{e^2}}$, $\boldsymbol{a = 0}$ のとき　**1 個**

$\boldsymbol{a = \dfrac{4}{e^2}}$ のとき　　**2 個**

$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{4}{e^2}}$ のとき　　**3 個**

(2) 解が2個となるのは $a=\dfrac{4}{e^2}$ のときで，$0<p<q$ であるから p^2，q^2 は下の図ような位置関係になる．



$k=\dfrac{e}{e+1}$ とおくと

$$f(k^2)=\frac{(\log k^2)^2}{k^2}=\left(\frac{2\log k}{k}\right)^2=\left\{\frac{2(e+1)}{e}\log\frac{e}{e+1}\right\}^2$$
$$=\frac{4}{e^2}\left\{(e+1)\log\frac{e+1}{e}\right\}^2 \quad \cdots ①$$

ここで関数 $g(x)=\log x$ を考え，この関数は区間 $(e,\ e+1)$ で微分可能で，

$$g'(x)=\frac{1}{x}$$

区間 $[e,\ e+1]$ において，平均値の定理を適用すると

$$\frac{\log(e+1)-\log e}{(e+1)-e}=\frac{1}{c},\quad e<c<e+1$$

を同時に満たす c が存在する．よって

$$\frac{1}{e+1}<\log\frac{e+1}{e}<\frac{1}{e}$$

ゆえに　　$(e+1)\log\dfrac{e+1}{e}>1 \quad \cdots ②$

$f(p^2)=\dfrac{4}{e^2}$ であるから，①，② より　　$f(k^2)>f(p^2)$

グラフから　　$k^2<p^2<1$，$q^2=e^2$

$0<p<q$ より　　$\boldsymbol{\dfrac{e}{e+1}<p<1}$，$\boldsymbol{q=e}$

$$\lim_{x\to+0} x\log x = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

証明 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す．

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき} \quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1) = 2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

よって　　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\lim\limits_{x\to+0}(-2\sqrt{x}\,) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+0} x\log x = 0$$

これから

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log\frac{1}{x} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

練習 29 e は自然対数の底とし，c を正の定数とする．

(1) 方程式 $x = ce^{-x}$ は，$0 < x < c$ でただ 1 つの解をもつことを示せ．

(2) $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ に対して，不等式 $|e^{-a} - e^{-b}| \leqq |a - b|$ が成り立つことを示せ．

(3) (1) の方程式の解を α とし，数列 $\{x_n\}$ を，$x_1 = 0$，$x_{n+1} = ce^{-x_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定める．このとき，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，不等式 $|x_{n+1} - \alpha| \leqq |x_n - \alpha|$ が成り立つことを示せ．

解答 29 (1) $f(x) = x - ce^{-x}$ とすると，$c > 0$ より　$f'(x) = 1 + ce^{-x} > 0$
よって，$f(x)$ は単調に増加する連続な関数である．$c > 0$，$e^{-c} < 1$ より

$$f(0) = -c < 0, \quad f(c) = c(1 - e^{-c}) > 0$$

したがって

$$f(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = ce^{-x} \tag{$*$}$$

は，$0 < x < c$ でただ 1 つの実数解をもつ．

(2) $g(x) = e^{-x}$ とおくと　$g'(x) = -e^{-x}$
$0 \leqq b < a$ のとき，平均値の定理により

$$\frac{e^{-a} - e^{-b}}{a - b} = -e^{-t} \quad (b < t < a)$$

を満たす t が存在する．これから

$$\left|\frac{e^{-a} - e^{-b}}{a - b}\right| = |-e^{-t}| = e^{-t} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad |e^{-a} - e^{-b}| < |a - b| \quad (**)$$

$(**)$ は $a < b$ の場合にも成立し，$a = b$ のときは，$|e^{-b} - e^{-a}| = |b - a|$ であるから，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，次式が成立する．

$$|e^{-a} - e^{-b}| \leqq |a - b|$$

(3) $c > 0$，$e^{-x_n} > 0$ であるから　　$x_{n+1} = ce^{-x_n} > 0$
$x_1 = 0$ より，すべての自然数 n について　　$x_n \geqq 0$
(1) の結果から，方程式 $(*)$ の解が α のとき　$\alpha = ce^{-\alpha}$　$0 < \alpha < c$
(2) の結論を利用すると

$$|x_{n+1} - \alpha| = |ce^{-x_n} - ce^{-\alpha}| = c|e^{-x_n} - e^{-\alpha}| \leqq c|x_n - \alpha|$$

(4) $0 < c < 1$ のとき，(3) の結論から

$$|x_n - \alpha| \leqq c^{n-1}|x_1 - \alpha| = c^{n-1}\alpha$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

阪大理系 2022 年 4

$f(x) = \log(x+1) + 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = x$ は，$x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ．

(2) (1) の解を α とする．実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$$

(3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．このとき，すべての自然数 n に対して，

$$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ．

(4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を示せ．

解答 (1) $g(x) = x - f(x)$ とおくと $(x > 0)$

$$g(x) = x - \log(x+1) - 1,$$
$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$$

$g(x)$ は単調増加関数である．

$$g(0) = -1 < 0, \quad g(e^2 - 1) = e^2 - 4 = (e+2)(e-2) > 0$$

$g(x) = 0$，すなわち，$f(x) = x$ は，$x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつ．

(2) $f(x)=\log(x+1)+1$ より，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$x>0$ において，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$ より，$f(x)$ は単調増加，$f'(x)$ は単調減少である．$0<x<\alpha$ を満たすとき

$$f(x)<f(\alpha)=\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}>0 \tag{A}$$

また，平均値の定理により

$$\frac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x}=f'(c), \quad x<c<\alpha$$

を満たす c が存在する．$x<c$ より $f'(x)>f'(c)$ であるから

$$\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x) \tag{B}$$

(A)，(B) より

$$0<\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x) \tag{証終}$$

別証 $f''(x)<0$ を利用する．

$$\begin{aligned}
f(\alpha)-f(x)&=\int_x^\alpha f'(t)\,dt=\int_x^\alpha (t-\alpha)'f'(t)\,dt\\
&=\Big[(t-\alpha)f'(t)\Big]_x^\alpha-\int_x^\alpha (t-\alpha)f''(t)\,dt\\
&=(\alpha-x)f'(x)+\int_x^\alpha (\alpha-t)f''(t)\,dt\\
&<(\alpha-x)f'(x)
\end{aligned}$$

(3) すべての自然数 n について，$(*)$ $1 \leqq x_n < \alpha$ が成立することを示す．

［1］$n = 1$ のとき，$x_1 = 1$ より，$(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定する．

$f(x)$ が単調増加であるから，$1 \leqq x_n < \alpha$ より

$$f(1) \leqq f(x_n) < f(\alpha) \quad \text{ゆえに} \quad 1 < \log 2 + 1 \leqq x_{n+1} < \alpha$$

よって，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する． (証終)

$x = x_n$ として，(2) の結論を利用すると

$$0 < \frac{\alpha - f(x_n)}{\alpha - x_n} < f'(x_n)$$

$f'(x)$ が単調減少であることと $1 \leqq x_n$ により

$$0 < \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} < f'(x_n) \leqq f'(1) = \frac{1}{2} \qquad (**)$$

よって $\quad \dfrac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} < \dfrac{1}{2}$

(4) $(**)$ より $\quad 0 < \alpha - x_{n+1} < \dfrac{1}{2}(\alpha - x_n)$

したがって $\quad 0 < \alpha - x_n < (\alpha - 1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha - 1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha - x_n) = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

広大理系 2022 年 5

次の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ．

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．C 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の方程式を，実数 $m,\ k$ を用いて $y=mx+k$ と表すとき，m と k の値をそれぞれ求めよ．

(3) $f(x)$ および m と k を (2) のように定める．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq mx+k$ が成り立つことを示せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ により定義する．自然数 n に対して

$$2-a_{n+1} \leqq (\log 2)\cdot(2-a_n)$$

が成り立つことを示し，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．必要ならば，自然対数の底が $e=2.718\cdots$ であることを用いてよい．

解答　(1) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{2}\right)} > \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)} < \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}}$

(2) $f(x) = \sqrt{2}^{\,x}$ より　$f'(x) = \sqrt{2}^{\,x}\log\sqrt{2}$

$f(2) = 2,\ f'(2) = 2\log\sqrt{2} = \log 2$ であるから，求める接線の方程式は

$$y - 2 = (x-2)\log 2 \quad \text{すなわち} \quad y = x\log 2 + 2 - 2\log 2$$

よって　$\boldsymbol{m = \log 2,\ \ k = 2 - 2\log 2}$

(3) $f'(x) = \sqrt{2}^{\,x}\log\sqrt{2} > 0,\ \ f''(x) = \sqrt{2}^{\,x}(\log\sqrt{2})^2 > 0$

$mx + k = f'(2)(x-2) + f(2)$ より

$$g(x) = f(x) - f'(2)(x-2) - f(2)$$

とおくと　$g(2) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - f'(2)$$

$f'(x)$ は単調増加であるから，$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	極小	↗

したがって，すべての実数 x に対して

$$g(x) \geqq 0 \quad \text{よって} \quad f(x) \geqq mx + k$$

(4) $\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x),\ f'(x)$ は単調増加である．平均値の定理により

$$\frac{f(2)-f(x)}{2-x} = f'(c) \quad (x < c < 2)$$

を満たす c が存在する．$f(2)=2$ および $f'(c) \leqq f'(2) = \log 2$ より

$$\frac{2-f(x)}{2-x} \leqq \log 2 \tag{A}$$

$f(2)=2$ で，$\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x) \leqq f(2) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq 2-f(x) \tag{B}$$

(A)，(B) より，$\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ のとき，次式が成立する．

$$0 \leqq 2-f(x) \leqq (2-x)\log 2 \tag{$*$}$$

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ で定義されたとき，すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$a_n < a_{n+1} < 2 \tag{$**$}$$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ について

$$\sqrt{2} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{\,2} \quad \text{ゆえに} \quad a_1 < a_2 < 2$$

よって，$n=1$ のとき，$(**)$ が成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(**)$ が成立する，すなわち，$a_k < a_{k+1} < 2$ であると仮定すると，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(a_k) < f(a_{k+1}) < f(2) \quad \text{ゆえに} \quad a_{k+1} < a_{k+2} < 2$$

［1］, ［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．(証終)

$(**)$ より，すべての自然数 n について

$$\sqrt{2} \leqq a_n < 2$$

が成立するから，これを $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq 2-a_{n+1} \leqq (2-a_n)\log 2$$

したがって　　$0 \leqq 2-a_n \leqq (2-\sqrt{2})(\log 2)^{n-1}$

$0 < \log 2 < 1$ より　$\lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{2})(\log 2)^{n-1} = 0$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(2-a_n)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$$

大分大 2022 年 5

関数 $f(x)=\log\dfrac{e^x}{x}$ を用いて，$a_1=2$，$a_{n+1}=f(a_n)$ によって数列 $\{a_n\}$ が与えらえている．ただし，対数は自然対数である．以下の問に答えなさい．

(1) $1\leqq x\leqq 2$ のとき，$0\leqq f(x)-1\leqq \dfrac{1}{2}(x-1)$ が成立することを示しなさい．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい．

(3) $b_1=a_1$，$b_{n+1}=a_{n+1}b_n$ によって与えられる数列 $\{b_n\}$ の極限を求めなさい．

解答　(1) $f(x)=\log\dfrac{e^x}{x}=x-\log x$ より　$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき，$f(x)$, $f'(x)$ は単調増加である．平均値の定理により

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)\quad (1<c<x)$$

を満たす c が存在する．$f(1)=1$ および $f'(c)\leqq f'(2)=\dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{f(x)-1}{x-1}\leqq\frac{1}{2}\tag{A}$$

$f(1)=1$ で，$1\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(1)\leqq f(x)\quad \text{ゆえに}\quad 0\leqq f(x)-1\tag{B}$$

(A)，(B) より，$1\leqq x\leqq 2$ のとき，次式が成立する．

$$0\leqq f(x)-1\leqq\frac{1}{2}(x-1)\tag{$*$}$$

(2) すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$1 < a_{n+1} < a_n \qquad (**)$$

［1］$n = 1$ のとき，$a_1 = 2$，$a_2 = 2 - \log 2$

$$1 < 1 + (1 - \log 2) = a_2 < 2 \quad \text{ゆえに} \quad 1 < a_2 < a_1$$

よって，$n = 1$ のとき，$(**)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(**)$ が成立する，すなわち，$1 < a_{k+1} < a_k$ であると仮定すると，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(1) < f(a_{k+1}) < f(a_k) \quad \text{ゆえに} \quad 1 < a_{k+2} < a_{k+1}$$

［1］, ［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．(証終)

$(**)$ より，すべての自然数 n について $1 < a_n \leqq 2$ が成立するから，これを $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq a_{n+1} - 1 \leqq \frac{1}{2}(a_n - 1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

別解 すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$1 \leqq a_n \leqq 2 \qquad (\#)$$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=2$ より，明らかに $(\#)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(\#)$ が成立する，すなわち，$1 \leqq a_k \leqq 2$ であると仮定すると，$(*)$ から

$$0 \leqq a_{k+1}-1 \leqq \frac{1}{2}(a_k-1) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq a_{k+1} \leqq \frac{3}{2} \leqq 2$$

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(\#)$ が成立する． (証終)

再度，$(\#)$ を $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq a_{n+1}-1 \leqq \frac{1}{2}(a_n-1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n-1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

(3) 漸化式より $\displaystyle\frac{b_{n+1}}{b_n}=a_{n+1}$ ゆえに $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{b_k}=\prod_{k=1}^{n-1}a_{k+1} \quad (n \geqq 2)$

$$\frac{b_n}{b_1}=\prod_{k=1}^{n-1}a_{k+1} \quad b_1=a_1 \text{より} \quad b_n=\prod_{k=1}^{n}a_k \qquad (***)$$

漸化式より $a_{n+1}=f(a_n)=a_n-\log a_n$

$$\log a_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = e^{a_n-a_{n+1}}$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{n}a_k=\prod_{k=1}^{n}e^{a_k-a_{k+1}}=e^{2-a_{n+1}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ であるから，上式および $(***)$ から

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}a_k=e^{2-1}=\boldsymbol{e}$$

9.6　積分法 (数学 III)

練習 30 不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\sin^2 x\,dx$ を求めよ. (類 横浜国大)

解答 30 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ であるから

$$\int e^{-x}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}\,dx - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x\,dx \qquad (*)$$

ここで　$(e^{-x}\sin 2x)' = -e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\cos 2x$

$(e^{-x}\cos 2x)' = -2e^{-x}\sin 2x - e^{-x}\cos 2x$

上の 2 式から　$\{e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x)\}' = 5e^{-x}\cos 2x$

$$\int e^{-x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) + C \qquad (**)$$

$(**)$ を $(*)$ に代入すると (C は積分定数)

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin^2 x\,dx &= -\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) + C \\ &= \boldsymbol{e^{-x}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x\right) + C}\end{aligned}$$

熊大理学部後期 2024 年 3

正の整数 n に対して 2 つの定積分を

$$I_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\sin 2x\,dx, \quad J_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\cos 2x\,dx$$

とおく。

(1) I_n と J_n の値を n で表せ。

(2) 曲線 $y = e^{-x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2n\pi)$ と x 軸とで囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_n とおく。V_n を n で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。

解答　(1)　$e^{-2x}\sin 2x$，$e^{-2x}\cos 2x$ を微分すると

$$(e^{-2x}\sin 2x)' = -2e^{-2x}\sin 2x + 2e^{-2x}\cos 2x$$
$$(e^{-2x}\cos 2x)' = -2e^{-2x}\sin 2x - 2e^{-2x}\cos 2x$$

上の 2 式の辺々の和および差をとると

$$\{e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)\}' = -4e^{-2x}\sin 2x$$
$$\{e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)\}' = 4e^{-2x}\cos 2x$$

上の結果を利用すると

$$I_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\sin 2x\,dx$$
$$= -\frac{1}{4}\Big[\, e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x) \,\Big]_0^{2n\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi})},$$
$$J_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\, e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x) \,\Big]_0^{2n\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi})}$$

別解　オイラーの公式より，$e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x$ であるから

$$J_n + iI_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x}e^{2ix}\,dx = \int_0^{2n\pi} e^{-2(1-i)x}\,dx$$
$$= \frac{1}{-2(1-i)}\Big[\, e^{-2(1-i)x} \,\Big]_0^{2n\pi} = -\frac{1+i}{4}\Big[\, e^{-2x}e^{2ix} \,\Big]_0^{2n\pi}$$
$$= \frac{1+i}{4}(1 - e^{-4n\pi})$$

(2)　(1) の結果を利用すると

$$\frac{V_n}{\pi} = \int_0^{2n\pi} (e^{-x}\sin x)^2\,dx = \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\sin^2 x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2n\pi} e^{-2x}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2n\pi} e^{-2x}\cos 2x\,dx$$
$$= -\frac{1}{4}\Big[\, e^{-2x} \,\Big]_0^{2n\pi} - \frac{1}{2}J_n$$
$$= \frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi}) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi}) = \frac{1}{8}(1 - e^{-4n\pi})$$

よって　　$\boldsymbol{V_n = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-4n\pi})}$

(3)　(2) の結果から　$\lim_{n\to\infty} V_n = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

練習 31 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx$，$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx$ とする． (静岡大)

(1) $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおいて置換積分を用いることで，$I=J$ を示せ．

(2) $I+J$ の値を求めよ．

(3) I と J の値を求めよ．

解答 31 (1) $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)+\sin(\frac{\pi}{2}-t)}(-1)\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{\sin t+\cos t}\,dt=J$$

(2) $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$ より

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)\,dx=\left[\,x-\frac{1}{2}\sin^2 x\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi-1}{2}}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$\boldsymbol{I=J=\dfrac{\pi-1}{4}}$

練習 32 すべての実数 x に対して

$$f(x) = \sin \pi x + \int_0^1 t f(t)\, dt$$

が成り立つような関数 $f(x)$ を求めよ. (愛媛大)

解答 32 $k = \displaystyle\int_0^1 t f(t)\, dt$ とおくと　$f(x) = \sin \pi x + k$

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 t(\sin \pi x + k)\, dt = \int_0^1 t \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t\right)' + \left[\frac{1}{2} k t^2 \right]_0^1 \\ &= \left[t \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t\right) - 1 \left(-\frac{1}{\pi^2} \sin \pi t\right) \right]_0^1 + \frac{1}{2} k \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

これから　$k = \dfrac{2}{\pi}$　よって　$\boldsymbol{f(x) = \sin \pi x + \dfrac{2}{\pi}}$

千葉大 2024 年 4

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2 \sin x\, dx$ を求めよ.

解答 (部分積分法を利用)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2 \sin x\, dx &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} x^2 (-\cos x)'\, dx \\ &= \left[x^2(-\cos x) - 2x(-\sin x) + 2\cos x \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \left[(2 - x^2)\cos x + 2x \sin x \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{9}\pi^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - 3} \end{aligned}$$

補足 本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx = {} & f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\ & \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

が成立する．同様に，次式も成立する．

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x)\,dx = {} & f(x)g(x) - f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x) \\ & \cdots + (-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x)\,dx\end{aligned}$$

例題 $\displaystyle\int x^4\cos 2x\,dx$ および $\displaystyle\int x^4\sin 2x\,dx$ を計算せよ．

$$\begin{aligned}\int x^4\cos 2x\,dx &= \int x^4\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'\,dx \\ &= x^4\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - 4x^3\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right) + 12x^2\left(-\frac{1}{8}\sin 2x\right) \\ &\qquad - 24x\left(\frac{1}{16}\cos 2x\right) + 24\left(\frac{1}{32}\sin 2x\right) + C \\ &= \left(\frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}\right)\sin 2x + \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right)\cos 2x + C \\ \int x^4\sin 2x\,dx &= \int x^4\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'\,dx \\ &= x^4\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - 4x^3\left(-\frac{1}{4}\sin 2x\right) + 12x^2\left(\frac{1}{8}\cos 2x\right) \\ &\qquad - 24x\left(\frac{1}{16}\sin 2x\right) + 24\left(-\frac{1}{32}\cos 2x\right) + C \\ &= \left(-\frac{x^4}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}\right)\cos 2x + \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right)\sin 2x + C\end{aligned}$$

練習 33 1 次関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_a^{3x+2} f(t)\,dt = x^2+3x$ を満たすとき，$f(x) =$ ［ ア ］であり，$a =$ ［ イ ］である． (南山大)

解答 33 $(*)$ $\displaystyle\int_a^{3x+2} f(t)\,dt = x^2+3x$

$f(t)$ の不定積分の 1 つを $F(t)$ とすると，$(*)$ より

$$F(3x+2) - F(a) = x^2+3x \qquad (**)$$

これを x で微分すると，$\dfrac{d}{dx}F(3x+2) = 3F'(3x+2) = 3f(3x+2)$ より

$$3f(3x+2) = 2x+3 \quad \text{ゆえに} \quad f(3x+2) = \frac{2}{3}x+1$$

$3x+2=t$ とおくと $\quad x = \dfrac{1}{3}t - \dfrac{2}{3}$

$$f(t) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}\right)+1 = \frac{2}{9}t+\frac{5}{9} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{f(x) = \frac{2}{9}x+\frac{5}{9}}$$

$3x+2=a$，すなわち，$x = \dfrac{1}{3}a - \dfrac{2}{3}$ を $(*)$ に代入すると

$$\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}\right)\left\{\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}\right)+3\right\} = 0$$

$$(a-2)(a+7) = 0$$

これを解いて $\qquad \boldsymbol{a = 2, -7}$

練習 34 $f(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-a\cos x)^2\,dx$ を最小にする a の値とその最小値を求めよ.

(類 金沢工大)

解答 34 $f(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-a\cos x)^2\,dx$ より

$$f(a)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,dx-4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx+a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

ここで

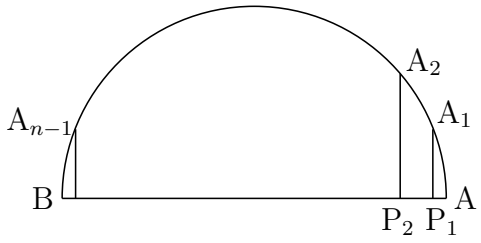
$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,dx&=\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24},\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x)'\,dx=\left[\ x\sin x-1(-\cos x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\left[\ x\sin x+\cos x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1,\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left[\ x+\frac{1}{2}\sin 2x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
I(a)&=4\cdot\frac{\pi^3}{24}-4a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+a^2\cdot\frac{\pi}{4}\\
&=\frac{\pi}{4}a^2-2(\pi-2)a+\frac{\pi^3}{6}\\
&=\frac{\pi}{4}\left\{a-\frac{4(\pi-2)}{\pi}\right\}^2+\frac{\pi^3}{6}-\frac{4(\pi-2)^2}{\pi}
\end{aligned}$$

よって，$I(a)$ は $\boldsymbol{a=\dfrac{4(\pi-2)}{\pi}}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\pi^3}{6}-\dfrac{4(\pi-2)^2}{\pi}}$ をとる.

練習 35 n を 2 以上の自然数とし，直径 AB = 2 の半円を考える．弧 AB を n 等分し，その分点を A に近い順に $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n-1}$ とする．
各点 A_k $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ に対し，点 A_k から線分 AB に下した垂線の足を P_k とする．$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k\mathrm{P}_k$ とおく．



(1) S_4 を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$

解答 35 (1) $\mathrm{A}_k\mathrm{P}_k = \sin\dfrac{k\pi}{4}$ より

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=1}^{3} \mathrm{A}_k\mathrm{P}_k = \sum_{k=1}^{3} \sin\frac{k\pi}{4} \\ &= \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} = \boldsymbol{\sqrt{2}+1} \end{aligned}$$

(2) $\mathrm{A}_k\mathrm{P}_k = \sin\dfrac{k\pi}{n}$ より

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\mathrm{P}_k &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} \\ &= \int_0^1 \sin\pi x\, dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

別解 $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ とすると　$2\sin k\theta\sin\dfrac{\theta}{2}=\cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\theta$ より

$$\begin{aligned}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\sin k\theta&=\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\\&=2\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n-1}{2}\theta\\&=2\sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

すなわち　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin k\theta=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$

これから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{2n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2n}}{\tan\frac{\pi}{2n}}=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}\end{aligned}$$

練習 36 $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする.

(1) 不等式 $\displaystyle\int_1^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx < 2a_n$ が成り立つことを示せ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\log n}$

解答 36 (1) $2k-1 < x \leqq 2k+1$ のとき (k は自然数) $\quad \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2k-1}$

$$\int_{2k-1}^{2k+1} \frac{1}{x}\,dx < \int_{2k-1}^{2k+1} \frac{1}{2k-1}\,dx = \frac{2}{2k-1}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{2k-1}^{2k+1} \frac{1}{x}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1} \quad \text{ゆえに} \quad \int_1^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx < 2a_n$$

(2) $2k-1 \leqq x < 2k+1$ のとき (k は自然数) $\quad \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2k+1}$

$$\int_{2k-1}^{2k+1} \frac{1}{x}\,dx > \int_{2k-1}^{2k+1} \frac{1}{2k+1}\,dx = \frac{2}{2k+1}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{2k-1}^{2k+1} \frac{1}{x}\,dx > \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k+1} = 2\left(a_n - 1 + \frac{1}{2n+1}\right)$$

ゆえに $\displaystyle\int_1^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx > 2\left(a_n - 1 + \frac{1}{2n+1}\right)$

上式および (1) の結果から $\displaystyle 2\left(a_n - 1 + \frac{1}{2n+1}\right) < \log(2n+1) < 2a_n$

$$0 < 2a_n - \log(2n+1) < 2\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) < 2$$

$$0 < \frac{a_n}{\log(2n+1)} - \frac{1}{2} < \frac{1}{\log(2n+1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(2n+1)} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\log(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(2n+1)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n+\log\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\log n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{\log\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}=1$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}=\frac{a_n}{\log(2n+1)}\cdot\frac{\log(2n+1)}{\log n}=\frac{1}{2}\cdot 1=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

練習 37 $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である． (山形大)

(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2) $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$ を示せ．

(3) $\dfrac{1}{n+1} < a_n < \dfrac{e}{n+1}$ を示し，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．

解答 37 (1)

$$a_1 = \int_0^1 xe^x\,dx = \Big[\,(x-1)e^x\,\Big]_0^1 = \mathbf{1}$$
$$a_2 = \int_0^1 x^2e^x\,dx = \Big[\,(x^2-2x+2)e^x\,\Big]_0^1 = \boldsymbol{e-2}$$
$$a_3 = \int_0^1 x^3e^x\,dx = \Big[\,(x^3-3x^2+6x-6)e^x\,\Big]_0^1 = \boldsymbol{-2e+6}$$

公式 $\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)e^x\,dx = \{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\}e^x + C}$

$$\int \boldsymbol{f(x)e^{-x}\,dx = -\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\}e^{-x} + C}$$

$$\int \boldsymbol{f(x)e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\}e^{kx} + C}$$

(2) $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx = \int_0^1 x^{n+1}(e^x)'\,dx \\ &= \Big[\,x^{n+1}e^x\,\Big]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx \\ &= e - (n+1)a_n \end{aligned}$$

(3) $0 < x \leqq 1$ のとき　$x^n < x^n e^x$

$$\int_0^1 x^n\,dx < \int_0^1 x^n e^x\,dx \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{n+1} < a_n$$

定義により，$a_{n+1} > 0$ を (2) の結果に適用すると

$$e - (n+1)a_n > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_n < \frac{e}{n+1}$$

よって　$\dfrac{1}{n+1} < a_n < \dfrac{e}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(4) $b_n = na_n$ とすると，(2) の結果から

$$a_{n+1} = e - \frac{n+1}{n}\cdot na_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right) b_n$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$ であるから，上式について，$n \longrightarrow \infty$ とすると

$$0 = \lim_{n\to\infty} (e - b_n) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = e$$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$

練習 38 $a>0$ とし，座標平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ から曲線 $C:y=\dfrac{1}{x}$ に引いた接線を ℓ とする．(香川大)

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と接線 ℓ，および直線 $x=a$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答 38 (1) $y=\dfrac{1}{x}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

点 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{t^2}$ の直線は

$$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{x}{t^2}+\frac{2}{t}\quad \cdots ①$$

これが点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通るから

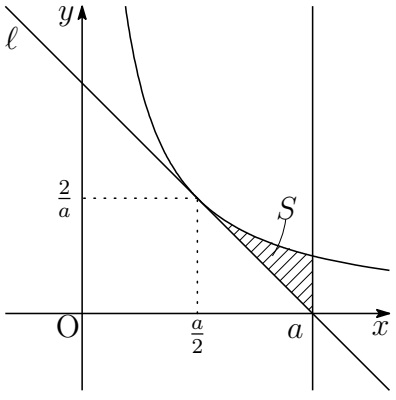
$$0=-\frac{a}{t^2}+\frac{2}{t}\quad \text{これを解いて}\quad t=\frac{a}{2}$$

これを ① に代入すると　　$\boldsymbol{\ell:y=-\dfrac{4x}{a^2}+\dfrac{4}{a}}$

求める面積を S とすると

$$S=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left\{\frac{1}{x}-\left(-\frac{4x}{a^2}+\frac{4}{a}\right)\right\}dx=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left\{\frac{1}{x}+\frac{4}{a^2}(x-a)\right\}dx$$

$$=\left[\ \log x+\frac{2}{a^2}(x-a)^2\ \right]_{\frac{a}{2}}^{a}=\boldsymbol{\log 2-\frac{1}{2}}$$



練習 39 $a>1$ に対して，3 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする． (名城大)

(1) $S(a)$ を a の式で表せ．

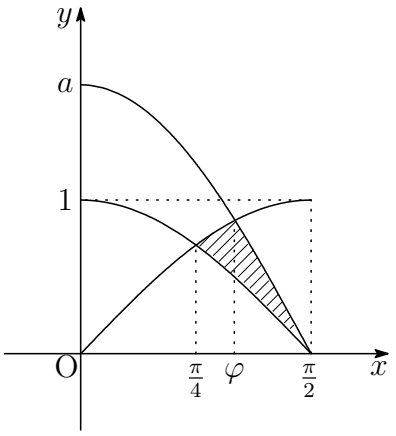
(2) $\displaystyle\lim_{a\to 1+0}\frac{S(a)}{a-1}$ を求めよ．

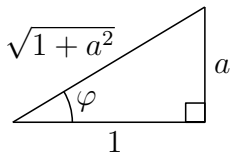
解答 39 (1) 2 曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ の共有点の x 座標を φ とすると

$$\sin\varphi = a\cos\varphi \quad \text{ゆえに} \quad \tan\varphi = a$$

$a>1$ より $\left(\dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}\sin x\,dx+\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\
&= \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}+\Big[a\sin x\Big]_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \sqrt{2}-1+a-\cos\varphi-a\sin\varphi\\
&= \sqrt{2}-1+a-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-a\cdot\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\\
&= \sqrt{2}-1+a-\sqrt{1+a^2}
\end{aligned}$$





(2) (1) の結果から $S(1)=0$，$S'(a)=1-\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ より

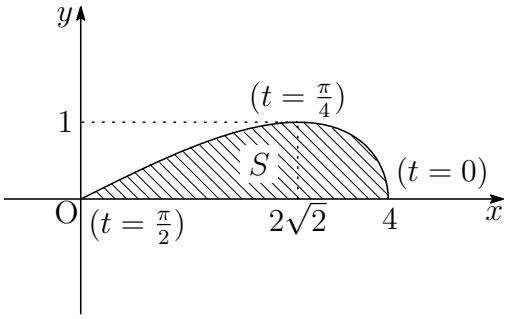
$$\lim_{a\to 1+0}\frac{S(a)}{a-1}=\lim_{a\to 1+0}\frac{S(a)-S(1)}{a-1}=S'(1)=\mathbf{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

練習 40 t を媒介変数として，$x=4\cos t,\ y=\sin 2t\ \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．(福岡大)

解答 40 $x=f(t)=4\cos t,\ y=g(t)=\sin 2t\ \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\frac{dx}{dt}=-4\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=2\cos 2t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$		↖	←	↙	
(x,y)	$(4,\ 0)$	$\cdots$	$(2\sqrt{2},\ 1)$	$\cdots$	$(0,0)$



求める面積を S とすると，$\frac{dx}{dt}=f'(t)$ より

$$S=\int_{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{f(0)} y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} g(t)f'(t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin 2t(-4\sin t)\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^2 t\cos t\,dt=\left[\frac{8}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

別解 ガウス・グリーンの定理により

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{4\cos t\cdot 2\cos 2t-(-4\sin t)\sin 2t\}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{4\cos t(1-2\sin^2 t)+4\sin^2 t\cos t\}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{4\cos t-4\sin^2 t\cos t\}\,dt$$
$$=\left[4\sin t-\frac{4}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

練習 41 xy 平面上に 3 点 A$(1,\ 0)$，P$(p,\ 0)$，Q$(p,\ \log p)$ がある．ただし，$p>1$ とする．　(大阪工大)

(1) 直線 AQ の方程式を求めよ．

(2) 関数 $y=\log x$ の第 2 次導関数 y'' を求め，曲線 $y=\log x$ が上に凸であることを示せ．

(3) 曲線 $y=\log x$ と直線 AQ で囲まれた図形の面積 $S(p)$ を求めよ．

(4) △APQ の面積を $T(p)$ とするとき，極限値 $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ．

解答 41 (1) 2 点 A$(1,\ 0)$，Q$(p,\ \log p)$ を通る直線の方程式は $(p>1)$

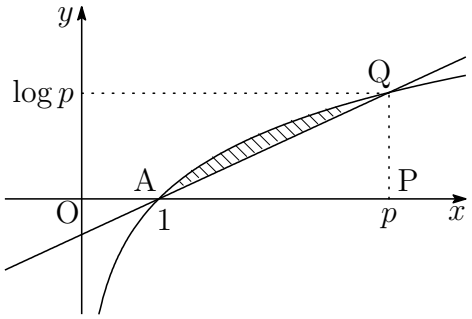
$$\boldsymbol{y=\frac{\log p}{p-1}(x-1)}$$

(2) $y=\log x$ より　$y'=\dfrac{1}{x}$　ゆえに　$y''=-\dfrac{1}{x^2}$

$x>0$ において，$y''<0$ であるから，曲線 $y=\log x$ は上に凸

(3) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}S(p)&=\int_1^p\left\{\log x-\frac{\log p}{p-1}(x-1)\right\}dx\\&=\left[\ x(\log x-1)-\frac{\log p}{2(p-1)}(x-1)^2\ \right]_1^p\\&=\boldsymbol{\frac{p+1}{2}\log p-p+1}\end{aligned}$$



別解 $S(p)=\displaystyle\int_1^p\log x\,dx-\triangle\mathrm{APQ}$

$$\begin{aligned}&=p(\log p-1)+1-\frac{1}{2}(p-1)\log p\\&=\boldsymbol{\frac{p+1}{2}\log p-p+1}\end{aligned}$$

(4) $S(p)=\displaystyle\int_1^p \log x\,dx - T(p)$ より

$$\frac{S(p)}{T(p)}=\frac{1}{T(p)}\int_1^p \log x\,dx - 1$$

上式に $\displaystyle\int_1^p \log x\,dx = p(\log p-1)$，$T(p)=\frac{1}{2}(p-1)\log p$ を代入すると

$$\frac{S(p)}{T(p)}=\frac{2}{(p-1)\log p}\cdot p(\log p-1)-1=\frac{2\left(1-\frac{1}{\log p}\right)}{1-\frac{1}{p}}-1$$

よって　　$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}=2-1=\mathbf{1}$

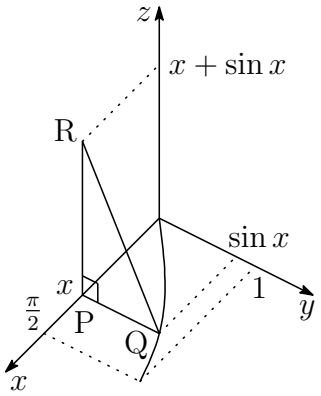
練習 42 座標空間の 3 つの動点 $\mathrm{P}(x,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(x,\ \sin x,\ 0)$，$\mathrm{R}(x,\ 0,\ x+\sin x)$ について (福井大)

(1) 三角形 PQR の面積を x を用いて表せ．ただし，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(2) 点 P が x 軸上を原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ から点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0,\ 0\right)$ まで働くとき，三角形 PQR が通過してできる立体の体積 V を求めよ．

解答 42 (1) ∠QPR が直角であるから，その面積は

$$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sin x(x+\sin x)}$$



(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x + \sin^2 x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\,dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\, x(-\cos x) - 1(-\sin x) \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\Big[\, x + \frac{1}{2}\sin 2x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\Big[-x\cos x + \sin x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{8} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}}
\end{aligned}$$

練習 43 $0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ の範囲で，曲線 $y = \cos x$ と曲線 $y = \cos 2x$ とで囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．　(奈良県立医大)

解答 43 曲線 $y = \cos x$ と曲線 $y = \cos 2x$ で囲まれた図形は Fig-1 の図の斜線部分である．Fig-1 の斜線部の x 軸の下側にある部分を x 軸に関して折り返したものが Fig-2 である．求める回転体の体積は Fig-2 の斜線部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積である．

Fig-1

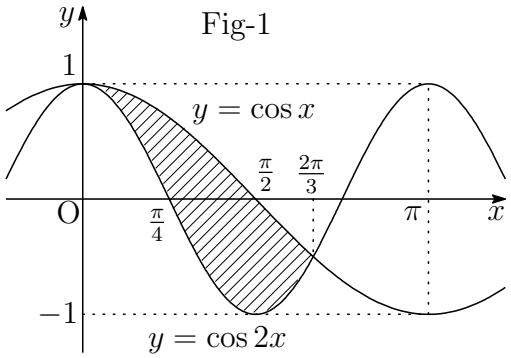
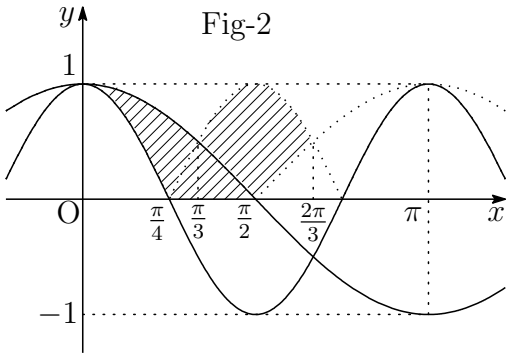


Fig-2



$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\cos x|^2 + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} |\cos 2x|^2\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2x|^2\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} |\cos x|^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\, x + \frac{1}{2}\sin 2x \,\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}\left[\, x + \frac{1}{4}\sin 4x \,\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{2}\left[\, x + \frac{1}{4}\sin 4x \,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\left[\, x + \frac{1}{2}\sin 2x \,\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi + 3\sqrt{3}}{8}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi(\pi + 3\sqrt{3})}{8}}$

福岡教育大 2024 年 4

区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \cos 2x$ と 2 つの直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ とで囲まれた部分を D とする．次の問いに答えよ．

(1) D の面積を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $|\sin x| \geqq |\cos 2x|$ を解け．

(3) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答　(1) $\sin x = \cos 2x$ とすると $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$　$\sin x = 1 - 2\sin^2 x$

$$(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

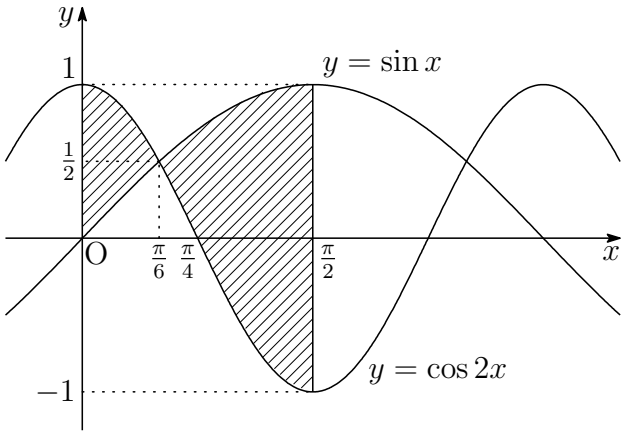
$f(x) = \cos 2x - \sin x$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x$ とおく．

D は，下の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \\ &= 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$F(0) = 1$，$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ であるから

$$S = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 - 0 = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1}$$



(2) $|\sin x| \geqq |\cos 2x|$ より　$\sin^2 x - \cos^2 2x \geqq 0$

$$(\sin x + \cos 2x)(\sin x - \cos 2x) \geqq 0$$
$$(-2\sin^2 x + \sin x + 1)(2\sin^2 x + \sin x - 1) \geqq 0$$
$$-(\sin x - 1)(2\sin x + 1)(\sin x + 1)(2\sin x - 1) \geqq 0$$
$$\cos^2 x(2\sin x + 1)(2\sin x - 1) \geqq 0$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意して解くと　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}}$

(3)　$g(x) = \cos^2 2x - \sin^2 x = \dfrac{1+\cos 4x}{2} - \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$

$g(x)$ の原始関数の 1 つを $G(x) = \dfrac{1}{8}\sin 4x + \dfrac{1}{4}\sin 2x$ とする.

求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$$
$$= 2G\left(\frac{\pi}{6}\right) - G(0) - G\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left[\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\ \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{16} - 0 - \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{8}$$

よって　$\boldsymbol{V = \pi\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8} + \dfrac{\pi}{8}\right)}$

練習 44 正の実数 a に対し，座標平面上に曲線 $C : y = a^4x + \sin ax$ と直線 $\ell : y = a^4x$ がある． (南山大)

(1) C と ℓ の交点の x 座標のうち，正で最小の値を x_1 とする．x_1 を a で表せ．

(2) (1) の x_1 に対し，$0 \leqq x \leqq x_1$ の範囲で，C と ℓ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする．$V(a)$ を a で表せ．

(3) (2) の $V(a)$ に対し，関数 $y = V(a)$ の増減を調べ，y の最小値とそのときの a の値を求めよ．

解答 44 (1) C と ℓ の方程式から，y を消去すると

$$a^4x + \sin ax = a^4x \quad \text{ゆえに} \quad \sin ax = 0$$

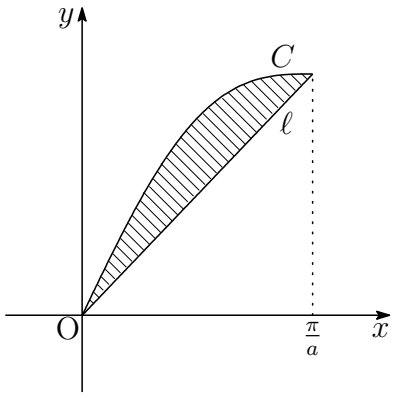
上式から，C と ℓ の交点の x 座標のうち，正で最小の値 x_1 は

$$ax_1 = \pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{a}}$$

(2) $ax_1 = \pi$ を利用すると

$$\begin{aligned}
\frac{V(a)}{\pi} &= \int_0^{x_1} \{(a^4x + \sin ax)^2 - (a^4x)^2\}\, dx \\
&= \int_0^{x_1} (2a^4x \sin ax + \sin^2 ax)\, dx \\
&= \int_0^{x_1} 2a^3x(-\cos ax)'\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{x_1} (1 - \cos 2ax)\, dx \\
&= \left[\, 2a^3x(-\cos ax) - 2a^3\left(-\frac{1}{a}\sin ax\right) \,\right]_0^{x_1} + \frac{1}{2}\left[\, x - \frac{1}{2a}\sin 2ax \,\right]_0^{x_1} \\
&= -2a^3x_1\cos ax_1 + 2a^2 \sin ax_1 + \frac{x_1}{2} - \frac{1}{4a}\sin 2ax_1 = 2a^2\pi + \frac{\pi}{2a}
\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{V(a) = \pi^2\left(2a^2 + \dfrac{1}{2a}\right)}$



(3) $V(a)=\pi^2\left(2a^2+\dfrac{1}{2a}\right)$ より

$$V'(a)=\pi^2\left(4a-\frac{1}{2a^2}\right)=\frac{\pi^2(8a^3-1)}{2a^2}$$

$V'(a)=0$ とすると $(a>0)$ $\quad a=\dfrac{1}{2}$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$V'(a)$		$-$	0	$+$
$V(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$y=V(a)$ は $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$ のとき最小値 $V\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\pi^2}{2}}$ をとる.

補足 $a>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{V(a)}{\pi^2}=2a^2+\frac{1}{2a}=2a^2+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4a}\geqq 3\sqrt[3]{2a^2\cdot\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{4a}}=\frac{3}{2}$$

上式において，等号が成立するとき

$$2a^2=\frac{1}{4a}\quad \text{すなわち}\quad a=\frac{1}{2}$$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $V\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3\pi^2}{2}$

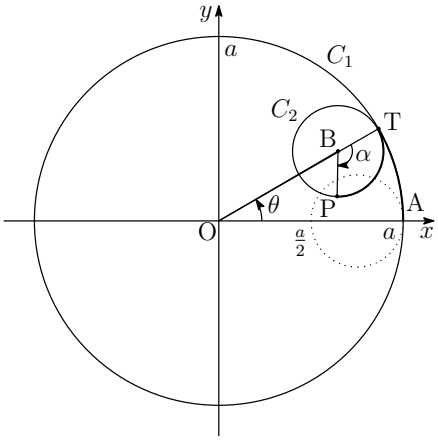
練習 45 中心が原点 O で半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する．円 C_2 上の点 P は最初に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ にあるとする．円 C_2 の中心を B とするとき，以下の問いに答えなさい． (大分大 2016 年 8)

(1) $\angle \mathrm{AOB} = \theta$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表しなさい．

(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めなさい．

解答 45 (1) C_1 と C_2 の接点を T，$\alpha = \angle \mathrm{PBT}$ とする．C_1 および C_2 上の弧について，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}} = \overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから



$$a\theta = \frac{a}{4} \times \alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 4\theta$$

BT の x 軸のなす角が θ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \frac{a}{4}(\cos(\theta - \alpha), \sin(\theta - \alpha)) \\ &= \frac{a}{4}(\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta)) \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{OB} = \mathrm{OT} - \mathrm{BT} = a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{3}{4}a$，$\angle \mathrm{AOB} = \theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \\ &= \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta - \sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{3}{4}a(\sin\theta + \sin 3\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{4}a(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

したがって $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{9}{8}a^2(1 - \cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta)$

$$= \frac{9}{8}a^2(1 - \cos 4\theta) = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta$$

求める距離を s とすると，$\dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$ の周期が $\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して

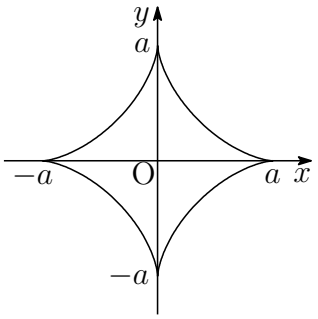
$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}a|\sin 2\theta|\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2\theta\,d\theta = \Big[-3a\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{6a}$$

解説 (2) の結果は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$$

となり，その軌跡はアストロイドである．



$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) = a\left(-3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cos\theta\right)$$

$$= 3a\sin\theta\cos\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$= \frac{3}{2}a\sin 2\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

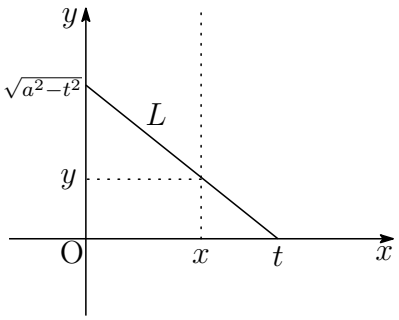
ゆえに $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2} = \dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$

アストロイド (astroid) の x 軸および y 軸に関する対称性により

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2\theta\,d\theta = 3a\Big[-\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

補足 長さ a の線分 L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，L の包絡線 (L の通る領域と通らない領域の境界線) を求める．



右の図のように L が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にあるとき，L 上の点 $(x,\ y)$ について

$$y = -\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}x + \sqrt{a^2-t^2} \quad \cdots (*)$$

が成立する．ここで，x を固定し，y を t の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}x - \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{a^2x - t^3}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$

これを $(*)$ に代入すると

$$y = -x^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$$

したがって　$y^2 = x^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})$

$$= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2$$

$$= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

よって　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

一般に，L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，上式は成立する．

9.7　補充問題 (数学 III)

練習 46　0 でない複素数 z に対して，$w = x + yi$ を $w = z^2 + \dfrac{\overline{z}}{z}$ とする．ただし，x と y は実数，i は虚数単位とし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数とする．

(鹿児島大 2019 年 6)

(1) 0 でない複素数 z について，z の絶対値を r，偏角を θ とするとき，z，$\dfrac{1}{z}$，$\overline{z}$ を，それぞれ r，θ を用いて極形式で表せ．

(2) 複素数平面上で点 z が原点を中心とする半径 1 の円の周上を動くとき，点 w が描く図形を求めよ．

(3) $r > 1$ とする．複素数平面上で点 z が原点を中心とする半径 r の円の周上を動くとき，点 w が描く曲線 C の方程式を x，y を用いて表せ．

(4) $r > 1$ とする．(3) の曲線 C で囲まれた部分の面積を r を用いて表せ．

解答 46　(1)　$z = \boldsymbol{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \boldsymbol{\frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}},$$

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = \boldsymbol{r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}}$$

(2) (1) の結果により

$$\begin{aligned} w = z^2 + \frac{\overline{z}}{z} &= r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 + \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}^2 \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta) \\ &= (r^2+1)\cos 2\theta + (r^2-1)i\sin 2\theta \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

z が原点を中心とする半径 1 の円の周上を動くから，$r = 1$ より

$$w = 2\cos 2\theta \quad \text{ゆえに} \quad -2 \leqq w \leqq 2$$

よって，点 w は **2 点 2, −2 を両端とする線分**を描く．

(3) $(*)$ より　$x = (r^2+1)\cos 2\theta$，$y = (r^2-1)\sin 2\theta$

$r > 1$ に注意して　$\cos 2\theta = \dfrac{x}{r^2+1}$，　$\sin 2\theta = \dfrac{y}{r^2-1}$

したがって　　$\boldsymbol{C : \dfrac{x^2}{(r^2+1)^2} + \dfrac{y^2}{(r^2-1)^2} = 1}$

(4) (3) の結果より，C は原点を中心とする長軸の長さ $2(r^2+1)$，短軸の長さ $2(r^2-1)$ の楕円であるから，その面積は

$$\pi(r^2+1)(r^2-1) = \boldsymbol{\pi(r^4-1)}$$

練習 47 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．　　(大阪教育大)

$$a_1=12,\ b_1=0,\ a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n,\ b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(1) $a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3$ をそれぞれ求めよ．

(2) すべての自然数 n について，$a_n+b_n=12$ が成り立つことを証明せよ．

(3) 数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n,\ \lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

解答 47 (1) 与えらた漸化式に順次 $n=1,\ 2$ を代入すると

$$\begin{aligned}
a_2&=\frac{3}{4}a_1+\frac{1}{2}b_1=\frac{3}{4}\cdot 12+\frac{1}{2}\cdot 0=\mathbf{9},\\
b_2&=\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{4}\cdot 12+\frac{1}{2}\cdot 0=\mathbf{3},\\
a_3&=\frac{3}{4}a_2+\frac{1}{2}b_2=\frac{3}{4}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 3=\boldsymbol{\frac{33}{4}},\\
b_3&=\frac{1}{4}a_2+\frac{1}{2}b_2=\frac{1}{4}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 3=\boldsymbol{\frac{15}{4}}
\end{aligned}$$

(2) 与えられた漸化式の辺々を加えると

$$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n \quad \text{ゆえに} \quad a_n+b_n=a_1+b_1=12$$

(3) 与えられた漸化式から　$a_{n+1}-2b_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n-2b_n)$

数列 $\{a_n-2b_n\}$ は初項 $a_1-2b_1=12$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$a_n-2b_n=12\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

上式および (2) の結果から

$$\boldsymbol{a_n=4\left\{2+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\},\ \ b_n=4\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}}$$

補足 $a_{n+1}+kb_{n+1}=\dfrac{3+k}{4}a_n+\dfrac{1+k}{2}b_n$ より　$1:k=\dfrac{3+k}{4}:\dfrac{1+k}{2}$

$$k^2+k-2=0 \quad \text{これを解くと} \quad k=1,-2$$

(4) (3) の結果から　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n=8,\ \lim_{n\to\infty} b_n=4}$

練習 48 (1) $x>0$ のとき，$\dfrac{x^2}{e^x}<\dfrac{6}{x}$ を示せ．

(2) (1) を用いて，$\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$ を示せ．

(3) k を実数とするとき，x の方程式 $x^2+3x+1=ke^x$ の実数解の個数を求めよ．(横浜国大)

解答 (1) $x>0$ のとき，$e^x-1>0$ であるから，順次

$$\int_0^x(e^t-1)\,dt=\left[\,e^t-t\,\right]_0^x=e^x-1-x>0,$$

$$\int_0^x(e^t-1-t)\,dt=\left[\,e^t-t-\frac{t^2}{2}\,\right]_0^x=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}>0,$$

$$\int_0^x\left(e^t-1-t-\frac{t^2}{2}\right)dt=\left[\,e^t-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\,\right]_0^x$$

$$=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}>0$$

よって，$x>0$ のとき　$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}>\dfrac{x^3}{6}$

したがって，$x>0$ のとき　$\dfrac{e^x}{x^2}>\dfrac{x}{6}$　すなわち　$\dfrac{x^2}{e^x}<\dfrac{6}{x}$

(2) (1) の結果から，$x>0$ のとき，$0<x^2e^{-x}<\dfrac{6}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x}=0$ より，はさみうちの原理により　$\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$

(3) $x^2+3x+1=ke^x$ より，方程式

$$(x^2+3x+1)e^{-x}=k$$

の実数解の個数を求めればよい．$f(x)=(x^2+3x+1)e^{-x}$ とおくと

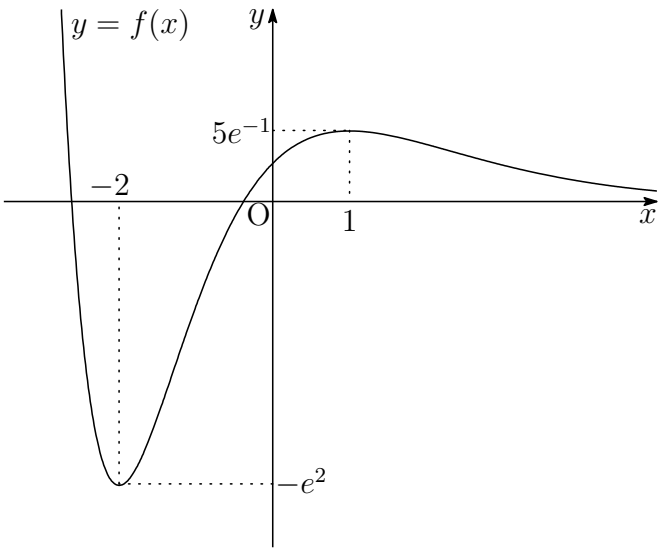
$$f'(x)=(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x+1)e^{-x}$$
$$=-(x^2+x-2)e^{-x}=-(x+2)(x-1)e^{-x}$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-e^2$	↗	$5e^{-1}$	↘

$f(x)=\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot x^2e^{-x}$ より

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty,\quad\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{k<-e^2}\text{のとき} & \textbf{0}\text{個} \\ \boldsymbol{k>5e^{-1},\ k=-e^{-2}}\text{のとき} & \textbf{1}\text{個} \\ \boldsymbol{k=5e^{-1},\ -e^2<k\leqq 0}\text{のとき} & \textbf{2}\text{個} \\ \boldsymbol{0<k<5e^{-1}}\text{のとき} & \textbf{3}\text{個} \end{cases}$$

練習 49 関数 $f(x)=\log\dfrac{e^x}{x}$ を用いて，$a_1=2$，$a_{n+1}=f(a_n)$ によって数列 $\{a_n\}$ が与えらえている．ただし，対数は自然対数である．以下の問に答えなさい．

(大分大 2022 年 5)

(1) $1\leqq x\leqq 2$ のとき，$0\leqq f(x)-1\leqq \dfrac{1}{2}(x-1)$ が成立することを示しなさい．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい．

(3) $b_1=a_1$，$b_{n+1}=a_{n+1}b_n$ によって与えられる数列 $\{b_n\}$ の極限を求めなさい．

解答 49 (1) $f(x)=\log\dfrac{e^x}{x}=x-\log x$ より　$f'(x)=1-\dfrac{1}{x},\ f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき，$f(x),\ f'(x)$ は単調増加である．平均値の定理により

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)\quad (1<c<x)$$

を満たす c が存在する．$f(1)=1$ および $f'(c)\leqq f'(2)=\dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{f(x)-1}{x-1}\leqq\frac{1}{2} \tag{A}$$

$f(1)=1$ で，$1\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(1)\leqq f(x)\quad \text{ゆえに}\quad 0\leqq f(x)-1 \tag{B}$$

(A)，(B) より，$1\leqq x\leqq 2$ のとき，次式が成立する．

$$0\leqq f(x)-1\leqq\frac{1}{2}(x-1) \tag{$*$}$$

(2) すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$1 < a_{n+1} < a_n \qquad (**)$$

［1］$n = 1$ のとき，$a_1 = 2$，$a_2 = 2 - \log 2$

$$1 < 1 + (1 - \log 2) = a_2 < 2 \quad \text{ゆえに} \quad 1 < a_2 < a_1$$

よって，$n = 1$ のとき，$(**)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(**)$ が成立する，すなわち，$1 < a_{k+1} < a_k$ であると仮定すると，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(1) < f(a_{k+1}) < f(a_k) \quad \text{ゆえに} \quad 1 < a_{k+2} < a_{k+1}$$

［1］, ［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．(証終)

$(**)$ より，すべての自然数 n について $1 < a_n \leqq 2$ が成立するから，これを $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq a_{n+1} - 1 \leqq \frac{1}{2}(a_n - 1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

別解 すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$1 \leqq a_n \leqq 2 \qquad (\#)$$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=2$ より，明らかに $(\#)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(\#)$ が成立する，すなわち，$1 \leqq a_k \leqq 2$ であると仮定すると，$(*)$ から

$$0 \leqq a_{k+1}-1 \leqq \frac{1}{2}(a_k-1) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq a_{k+1} \leqq \frac{3}{2} \leqq 2$$

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(\#)$ が成立する．(証終)

再度，$(\#)$ を $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq a_{n+1}-1 \leqq \frac{1}{2}(a_n-1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n-1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

(3) 漸化式より $\displaystyle\frac{b_{n+1}}{b_n}=a_{n+1}$ ゆえに $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{b_k}=\prod_{k=1}^{n-1}a_{k+1} \quad (n \geqq 2)$

$$\frac{b_n}{b_1}=\prod_{k=1}^{n-1}a_{k+1} \quad b_1=a_1 \text{より} \quad b_n=\prod_{k=1}^{n}a_k \qquad (***)$$

漸化式より $a_{n+1}=f(a_n)=a_n-\log a_n$

$$\log a_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = e^{a_n-a_{n+1}}$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{n}a_k=\prod_{k=1}^{n}e^{a_k-a_{k+1}}=e^{2-a_{n+1}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ であるから，上式および $(***)$ から

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}a_k=e^{2-1}=\boldsymbol{e}$$

練習 50 関数 $f(x)$ を $f(x)=e^{-x}|\sin x|$ で定める．また，正の整数 n に対して
$I_n=\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)\,dx$ とする． (岐阜大)

(1) I_1 を求めよ．

(2) I_n を求めよ．

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} I_n$ の値を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ．

解答 50 (1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ であるから

$$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$$
$$(e^{-x}\sin x)'=e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$$

上の 2 式の辺々を加えて　$\{e^{-x}(\cos x+\sin x)\}'=-2e^{-x}\sin x$

よって　$I_1=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\Big[\,e^{-x}(\cos x+\sin x)\,\Big]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}$

(2) $x=t+(n-1)\pi$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=1$

x	$(n-1)\pi \longrightarrow n\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$$\begin{aligned}I_n&=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)\,dx=\int_0^{\pi} f(t+(n-1)\pi)\,dt\\&=\int_0^{\pi} e^{-t-(n-1)\pi}|\sin\{t+(n-1)\pi\}|dt\\&=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt=e^{-(n-1)\pi}I_1\\&=e^{-(n-1)\pi}\cdot\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{-n\pi}(e^{\pi}+1)}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n} I_k=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)\sum_{k=1}^{n} e^{-k\pi}\\&=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)\cdot\frac{e^{-\pi}(1-e^{-n\pi})}{1-e^{-\pi}}=\boldsymbol{\frac{(e^{\pi}+1)(1-e^{-n\pi})}{2(e^{\pi}-1)}}\end{aligned}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n\pi}=0$ より，(3) の結果から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}$

熊大理系 2015 年 4

r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ。

解答 (1) $a_{n+1} - a_n = \displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx - \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$

$$= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$$

$t = x - n\pi$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = 1$,

x	$n\pi \longrightarrow (n+1)\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{\pi} e^{-r(n\pi+t)}|\sin(t + n\pi)|\,dt$$

$$= e^{-rn\pi}\int_0^{\pi} e^{-rt}\sin t\,dt = e^{-rn\pi}a_1$$

$$= e^{-rn\pi}\left[-\frac{e^{-rt}}{r^2+1}(r\sin t + \cos t)\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}e^{-nr\pi}}$$

(2) $$a_1 = \int_0^{\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} e^{-rx}\sin x\,dx$$
$$= -\frac{1}{r^2+1}\left[\, e^{-rx}(r\sin x + \cos x)\,\right]_0^{\pi} = \frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}$$

上式および (1) の結果より，$a_{n+1} - a_n = e^{-n\pi}a_1$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_1 \sum_{k=1}^{n-1} e^{-rk\pi}$$
$$a_n = a_1 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-rk\pi} = a_1 \times \frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}$$
$$= \frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1} \times \frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}} = \frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$a_n = \frac{\boldsymbol{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}}{\boldsymbol{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(3) $r > 0$ より，$\lim_{n\to\infty} e^{-rn\pi} = 0$ であるから

$$\lim_{\boldsymbol{n\to\infty}} \boldsymbol{a_n} = \frac{\boldsymbol{1+e^{-r\pi}}}{\boldsymbol{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(4) $rf(r) = \dfrac{r(1+e^{-r\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})} = \dfrac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)\pi} \times \dfrac{-r\pi}{e^{-r\pi}-1}$ であるから

$$\lim_{r\to+0} rf(r) = \frac{1+1}{\pi} \times 1 = \boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

練習 51 xy 平面上の曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．ただし，$f(t) = 2\sin t + \cos 2t - 1,\ g(t) = 1 - \cos 2t$ とする．　(鳥取大)

(1) $f(t)$ の最大値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ において，$y = 1$ のときの接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C と y 軸で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

解答 51 (1) $f(t) = 2\sin t + \cos 2t - 1$ より $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\sin t + (1 - 2\sin^2 t) - 1 \\ &= -2\sin^2 t + 2\sin t \\ &= -2\left(\sin t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\sin t = \dfrac{1}{2}$，すなわち，$t = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = f'(t) = 2\cos t - 2\sin 2t = 2\cos t(1 - 2\sin t)$

$\dfrac{dy}{dt} = g'(t) = 2\sin 2t = 4\sin t\cos t$

上の 2 式から　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \Big/ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4\sin t\cos t}{2\cos t(1 - 2\sin t)} = \dfrac{2\sin t}{1 - 2\sin t}$

$y = 1$ のとき $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$　$1 - \cos 2t = 1$　これ解いて　$t = \dfrac{\pi}{4}$

また，$t = \dfrac{\pi}{4}$ のとき　$x = 2\sin\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{1 - 2\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = -2 - \sqrt{2}$$

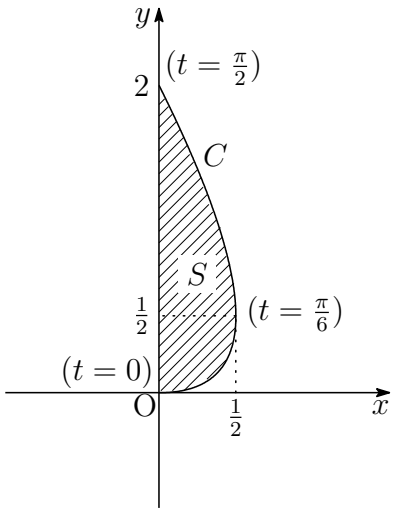
よって，求める接線の方程式は　$y - 1 = (-2 - \sqrt{2})\{x - (\sqrt{2} - 1)\}$

すなわち　$\boldsymbol{y = -(2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} + 1}$

(3) t の値に対する $(x,\ y)$ の変化は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt})$		↗	↑	↖	
(x, y)	$(0, 0)$	$\cdots$	$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$	$\cdots$	(0,2)

したがって，曲線 C の概形は次のようになる．



よって，求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{g(0)}^{g(\frac{\pi}{2})} x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t + \cos 2t - 1)\cdot 2\sin 2t\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t \sin 2t + \sin 2t\cos 2t - \sin 2t)\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sin^2\cos t + \frac{1}{2}\sin 4t - \sin 2t\right) dt \\
&= 2\left[\ \frac{4}{3}\sin^3 t - \frac{1}{8}\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 2t\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

別解 $f(t)=2\sin t-g(t)$ に注意して，ガウス・グリーンの定理を利用すると

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\,dt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(2\sin t-g(t))g'(t)-(2\cos t-g'(t))g(t)\}\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{g'(t)\sin t-g(t)\cos t\}\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{2\sin 2t\sin t-(1-\cos 2t)\cos t\}\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\sin^2 t\cos t-2\sin^2 t\cos t)\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 t\cos t\,dt=\left[\ \frac{2}{3}\sin^3 t\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

10 Link(Challenge)

10.1 複素数平面 (数学 C)

1〈n 乗根の計算〉

複素数 z が $z+\dfrac{4}{z}=2$ を満たしているとき，$z^n+\left(\dfrac{4}{z}\right)^n$ の値を求めよ．

(藤田保健衛生大)

解答 $z+\dfrac{z}{4}=2$ より，$z^2-2z+4=0$ を解くと

$$z=1\pm\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

このとき (複号同順)

$$\frac{4}{z}=\frac{4}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\mp i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}z^{11}+\left(\frac{4}{z}\right)^{11}&=2^{11}\left(\cos\frac{11\pi}{3}\pm i\sin\frac{11\pi}{3}\right)+2^{11}\left(\cos\frac{11\pi}{3}\mp i\sin\frac{11\pi}{3}\right)\\&=2^{12}\cos\frac{11\pi}{3}=2^{12}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2^{12}\cdot\frac{1}{2}=2^{11}=\mathbf{2048}\end{aligned}$$

2〈複素数と確率〉

$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする．2 つのさいころを投げて出た目の数の和を n とするとき，z^n が実数となる確率を求めよ．(龍谷大学)

解答 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ より

$$z^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$$

$2\leqq n\leqq 12$ であるから，z^n が実数となる整数 n は　$n=3,\ 6,\ 9,\ 12$

それぞれの n に対する起こり得る場合の数は　$2,\ 5,\ 4,\ 1$

$(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$
$(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3),\ (6,\ 6)$

よって，求める確率は

$$\frac{2+5+4+1}{6^2}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

3〈n 乗根の計算〉

複素数 $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対して，複素数 β，γ を $\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$，$\gamma=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6$ とする． (横浜国大)

(1) $\beta+\gamma$，$\beta\gamma$ の値を求めよ．

(2) β，γ の値を求めよ．

(3) $\sin\dfrac{2\pi}{7}+\sin\dfrac{4\pi}{7}+\sin\dfrac{8\pi}{7}$ および $\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7}$ の値を求めよ．

解答 (1) $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ より $\quad\alpha^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

$$\alpha^7-1=(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$$

$\alpha-1\neq 0$ であるから $\quad\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

$\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$，$\gamma=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6$ より

$$\begin{aligned}\beta+\gamma&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)+(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)\\&=\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha=\boldsymbol{-1}\\\beta\gamma&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)\\&=\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+3\alpha^7+\alpha^8+\alpha^9+\alpha^{10}\\&=\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7(3+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)\\&=(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)+2=\boldsymbol{2}\end{aligned}$$

(2) β, γ を解とする 2 次方程式は，(1) の結果から

$$x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma=0\quad\text{すなわち}\quad x^2+x+2=0$$

これを解いて $\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

ここで $\quad\mathrm{Im}\beta=\sin\dfrac{2\pi}{7}+\sin\dfrac{4\pi}{7}+\sin\dfrac{8\pi}{7}=\left(\sin\dfrac{2\pi}{7}-\sin\dfrac{\pi}{7}\right)+\sin\dfrac{4\pi}{7}>0$

よって $\quad\boldsymbol{\beta=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2},\ \gamma=\dfrac{-1-\sqrt{7}i}{2}}$

(3) (2) の結果から

$$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\mathrm{Im}\beta=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ とおくと　$\alpha=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$

$$z^7-1=(z-1)\prod_{k=1}^{6}(z-\alpha^k)$$

また　$z^7-1=(z-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{7}z^{7-k}$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{6}(z-\alpha^k)=\sum_{k=1}^{7}z^{7-k}$　$\cdots(*)$

$(*)$ は，z に関する恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\prod_{k=1}^{6}(1-\cos 2k\theta-i\sin 2k\theta)=\prod_{k=1}^{6}(2\sin^2 k\theta-2i\sin k\theta\cos k\theta)\\&=2^6\prod_{k=1}^{6}\sin k\theta\prod_{k=1}^{6}(\sin k\theta-i\cos k\theta)\\&=2^6\prod_{k=1}^{6}\sin k\theta\prod_{k=1}^{6}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)\right\}\\&=2^6\prod_{k=1}^{6}\sin k\theta\times(\cos 0-i\sin 0)=2^6\prod_{k=1}^{6}\sin k\theta\end{aligned}$$

$(\text{右辺})=7$

よって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{6}\sin\frac{k\pi}{7}=\frac{7}{2^6}$　したがって　$\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

別解 $(*)$ に $z=1$ を代入すると　$\displaystyle\prod_{k=1}^{6}(1-\alpha^k)=7$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{6}|1-\alpha^k|=7$

$$\begin{aligned}|1-\alpha^k|&=|1-(\cos 2k\theta+i\sin 2k\theta)|=|2\sin^2 k\theta-2i\sin k\theta\cos k\theta|\\&=2\sin k\theta|\sin k\theta-i\cos k\theta|=2\sin k\theta\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{6}2\sin k\theta=7$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{6}\sin\frac{k\pi}{7}=\frac{7}{2^6}$

よって　$\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

補足 $\theta=\dfrac{\pi}{n}$，$\alpha=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ とおくと

$$z^n-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)$$

また　$z^n-1=(z-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z^{n-k}$　　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)=\sum_{k=1}^{n}z^{n-k}$　　$\cdots(*)$

$(*)$ は，z に関する恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\prod_{k=1}^{n-1}(1-\cos 2k\theta-i\sin 2k\theta)=\prod_{k=1}^{n-1}(2\sin^2 k\theta-2i\sin k\theta\cos k\theta)\\&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}(\sin k\theta-i\cos k\theta)\\&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)\right\}\\&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\times(\cos 0-i\sin 0)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\end{aligned}$$

$(\text{右辺})=n$

よって　　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$

別証 $(*)$ に $z=1$ を代入すると　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha^k)=n$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}|1-\alpha^k|=n$

$$\begin{aligned}|1-\alpha^k|&=|1-(\cos 2k\theta+i\sin 2k\theta)|=|2\sin^2 k\theta-2i\sin k\theta\cos k\theta|\\&=2\sin k\theta|\sin k\theta-i\cos k\theta|=2\sin k\theta\end{aligned}$$

したがって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}2\sin k\theta=n$　　よって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$　　**証終**

たとえば，$n=9$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9}=\frac{9}{2^8}=\frac{9}{256}$

4〈絶対値の最小値〉

複素数 z が等式 $|2iz+6|=|z-3|$ を満たすとき，$|z|$ の最小値を求めよ．

(福島県立医大)

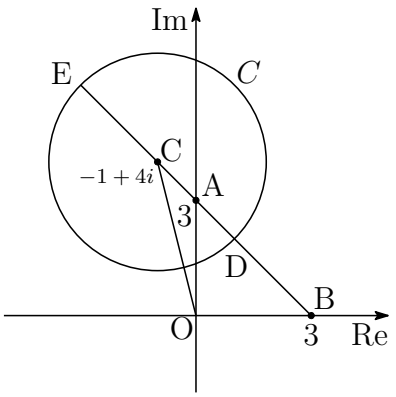
解答 $|2iz+6|=|z-3|$ より　$|2i(z-3i)|=|z-3|$

$$2|z-3i|=|z-3| \quad \text{ゆえに} \quad 4(z-3i)(\overline{z}+3i)=(z-3)(\overline{z}-3)$$

整理すると　$|z+1-4i|^2=8$

したがって，点 z は点 $\mathrm{C}(-1+4i)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円

よって，求める最小値は　$|-1+4i|-2\sqrt{2}=\boldsymbol{\sqrt{17}-2\sqrt{2}}$



別解 $2|z-3i|=|z-3|$ より　$|z-3i|:|z-3|=1:2$

2点 $\mathrm{A}(3i)$，$\mathrm{B}(3)$ を $1:2$ に内分および外分する点を点 $\mathrm{D}(1+2i)$，点 $\mathrm{E}(-3+6i)$ とすると，点 z は2点D，Eを直径の両端とする円周上の点である．すなわち，点 z は中心 $(-1+4i)$，半径 $2\sqrt{2}$ の円周上の点である．(以下同様)

5 〈$w = f(z)$ の表す図形〉

2 つの複素数 z と w との間に，$w = \dfrac{z+i}{z+1}$ なる関係がある．ただし，$z+1 \neq 0$ とする．(名古屋市大)

(1) z が複素数平面上の虚軸を動くとき，w の軌跡を求め，図示せよ．

(2) z が複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，w の軌跡を求め，図示せよ．

解答 $w = \dfrac{z+i}{z+1}$ より　$(w-1)z = -w+i$

上の第 2 式において，$w \neq 1$ であるから　$z = \dfrac{-w+i}{w-1}$

(1) z が虚軸上にあるから，$z+\overline{z}=0$ より

$$\frac{-w+i}{w-1} + \overline{\left(\frac{-w+i}{w-1}\right)} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{-w+i}{w-1} + \frac{-\overline{w}-i}{\overline{w}-1} = 0$$

したがって　$(\overline{w}-i)(-w+i) + (w-1)(-\overline{w}-i) = 0$

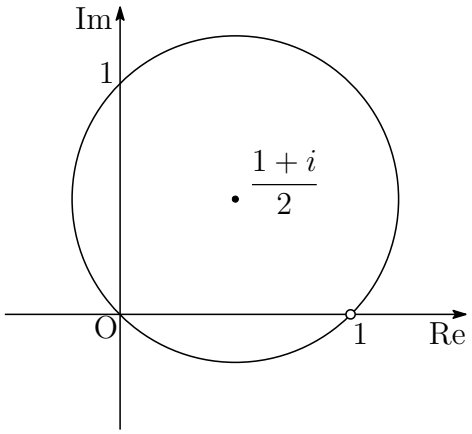
整理すると　$w\overline{w} - \dfrac{1-i}{2}w - \dfrac{1+i}{2}\overline{w} = 0$

$$\left(w - \frac{1+i}{2}\right)\left(\overline{w} - \frac{1-i}{2}\right) = \frac{(1+i)(1-i)}{4}$$

すなわち　$\left|w - \dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,　$w \neq 1$

したがって，点 w の軌跡は点 $\dfrac{1+i}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円．

ただし，点 1 を除く．



別解 z は虚軸上を動くので，$z=i\tan\theta$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

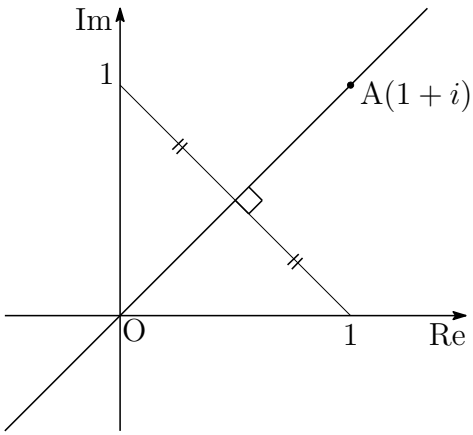
$$\begin{aligned}w&=\frac{z+i}{z+1}=\frac{i\tan\theta+i}{i\tan\theta+1}=\frac{i(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta}\\&=i(\sin\theta+\cos\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)\\&=\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)+i\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\&=\frac{1}{2}(1+\sin2\theta-\cos2\theta)+\frac{i}{2}(1+\sin2\theta+\cos2\theta)\\&=\frac{1+i}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-2\theta\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2\theta\right)\right\}\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}-2\theta<\dfrac{7\pi}{4}$ であるから，点 w の軌跡は点 $\dfrac{1+i}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円．ただし，点 1 を除く．

(2) 点 z は原点を中心とする半径 1 の円を描くから，$|z|=1$ より

$$\left|\frac{-w+i}{w-1}\right|=1 \quad \text{ゆえに} \quad |w-i|=|w-1| \qquad (*)$$

よって，w の軌跡は，2 点 i, 1 を結ぶ線分の垂直二等分線である．



補足 $(*)$ から　$(w-i)(\overline{w}+i)=(w-1)(\overline{w}-1)$

$$(1+i)w-\overline{(1+i)w}=0$$

$(1+i)w$ は虚軸上の点であるから，実数 k を用いて

$$(1+i)w=2ki \quad \text{ゆえに} \quad w=k(1+i)$$

$\mathrm{A}(1+i)$ をとると，w の描く軌跡は，直線 OA である．

考察 w は虚軸を原点 O を中心に $-\arg(1+i)=-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものである．

6〈動点にともなって動く点〉

次に答えよ．ただし，i は虚数単位を表し，$|z|$ は複素数 z の絶対値を表す．

(1) $|1+i|$ を求めよ．　(九工大 2019 年後期)

(2) 複素数平面上で，点 z が $|z|=1$ をみたしながら動くとき，複素数 $w=-iz+1-i$ が表す点 w の描く円 C_1 の中心と半径を求めよ．

(3) 複素数平面上で，点 z が $|z+i|=1$ をみたしながら動くとき，複素数 $w=\dfrac{iz+(i-2)}{z-1}$ が表す点 w の描く円 C_2 の中心と半径を求めよ．

(4) 複素数平面上の原点を O，(2) で求めた円 C_1 の中心を P，(3) で求めた円 C_2 の中心を Q とする．3 点 O，P，Q を通る円 C_3 の中心と半径を求め，円 C_3 を複素数平面上に図示せよ．

解答　(1) $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

(2) $w=-iz+1-i$ より，$w-1+i=-iz$ であるから

$$|w-1+i|=|-i||z|$$

$|-i|=1$，$|z|=1$ であるから　　$|w-(1-i)|=1$

よって，C_1 は中心 $\boldsymbol{1-i}$，半径 $\boldsymbol{1}$ の円

(3) $w=\dfrac{iz+(i-2)}{z-1}$ を z について解くと　$z=\dfrac{w-2+i}{w-i}$

ゆえに　$z+i=\dfrac{(1+i)(w+i)}{w-i}$　　これと $|z+i|=1$ により

$$\frac{|1+i||w+i|}{|w-i|}=1 \quad (1)\text{ の結果から} \quad \sqrt{2}|w+i|=|w-i| \quad \cdots(*)$$

$(*)$ より，$2|w+i|^2=|w-i|^2$ であるから

$$\begin{aligned} 2(w+i)(\overline{w}-i)&=(w-i)(\overline{w}+i)\\ w\overline{w}-3iw+3i\overline{w}+1&=0\\ (w+3i)(\overline{w}-3i)&=8\\ |w+3i|^2&=8 \end{aligned}$$

よって，C_2 は中心 $\boldsymbol{-3i}$，半径 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ の円

(4) (2)，(3) の結果から，O(0)，P$(1-i)$，Q$(-3i)$

線分 OP の中点は　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$　ゆえに，線分 OP の垂直二等分線は

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+ti(1-i)=\frac{1}{2}+t+\left(-\frac{1}{2}+t\right)i \quad (t \text{ は実数}) \quad \cdots ①$$

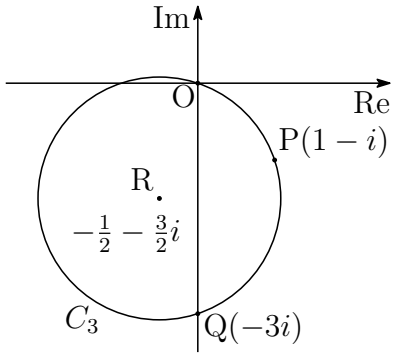
線分 OQ の中点は　$-\dfrac{3}{2}i$

ゆえに，線分 OQ の垂直二等分線は

$$u-\frac{3}{2}i \quad (u \text{ は実数}) \quad \cdots ②$$

円 C_3 の中心を R とすると，R は ① と ② の交点であるから

$$\frac{1}{2}+t+\left(-\frac{1}{2}+t\right)i=u-\frac{3}{2}i$$



これを解いて　$t=-1,\ u=-\dfrac{1}{2}$　よって　$\mathbf{R}\left(\mathbf{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i}\right)$

円の半径は　$\mathrm{OR}=\left|-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\right|=\mathbf{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

7〈点の回転と拡大・縮小〉

複素数平面上の3点 O(0)，A$(2+\sqrt{3}i)$，B が，$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$ かつ $\mathrm{OA}=2\mathrm{OB}$ を満たしているとき，点 B を表す複素数を求めよ．(関西大)

解答 $\mathrm{OB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}$，$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$ より，点 B を表す複素数は

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}\right)(2+\sqrt{3}i)=\frac{1}{4}(\sqrt{3}\pm i)(2+\sqrt{3}i)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(\sqrt{3}+5i),\ \frac{1}{4}(3\sqrt{3}+i)}$$

8〈三角形の面積〉

α，β は $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$ および $|\alpha-\beta|=2\sqrt{5}$ を満たす複素数とする．複素数平面上で，3点 0，α，β を頂点とする三角形の面積を求めよ．(産業医大)

解答 $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta\cdots$①，$|\alpha-\beta|=2\sqrt{5}\cdots$②

$\alpha=0$ とすると，① より，$\beta=0$ となり，これは ② を満たさないので，$\alpha\neq 0$

① より，$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2-\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$ を解くと

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

したがって $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=1,\ \arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\pm\dfrac{\pi}{3}$ ゆえに $|\alpha|=|\beta|,\ \angle\alpha 0\beta=\dfrac{\pi}{3}$

三角形は1辺が $2\sqrt{5}$ の正三角形であるから，求める三角形の面積は

$$\frac{1}{2}(2\sqrt{5})^2\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{5\sqrt{3}}$$

9〈3 次方程式の解と複素数平面〉

t を実数とし，x の 3 次式 $f(x)$ を $f(x)=x^3+(1-2t)x^2+(4-2t)x+4$ により定める．(類 中央大)

(1) 3 次式 $f(x)$ を実数係数の 2 次式と 1 次式の積に因数分解し，$f(x)=0$ が虚数の解をもつような t の範囲を求めよ．

実数 t が (1) で求めた範囲にあるとき，方程式 $f(x)=0$ の異なる 2 つの虚数解を α，β とし，実数解を γ とする．ただし，α の虚部は正，β の虚部は負とする．

(2) α, β, γ を t を用いて表せ．また，実数 t が (1) で求めた範囲を動くとき，点 α が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(3) 3 点 α, β, γ が正三角形の頂点となるような t の値を求めよ．

解答　(1) t について整理すると

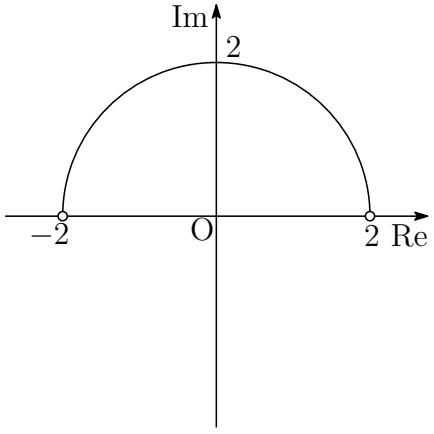
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+(1-2t)x^2+(4-2t)x+4 \\ &= (x^3+x^2+4x+4)-2tx(x+1) \\ &= (x+1)(x^2+4)-2tx(x+1) \\ &= (x+1)(x^2-2tx+4) \qquad (*) \end{aligned}$$

$f(x)=0$ が虚数解をもつとき，$x^2-2tx+4=0$ の係数について

$$D/4=(-t)^2-1\cdot 4<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-2<t<2}$$

(2) $(*)$ から　$\boldsymbol{\alpha=t+\sqrt{4-t^2}\,i,\ \beta=t-\sqrt{4-t^2}\,i,\ \gamma=-1}$

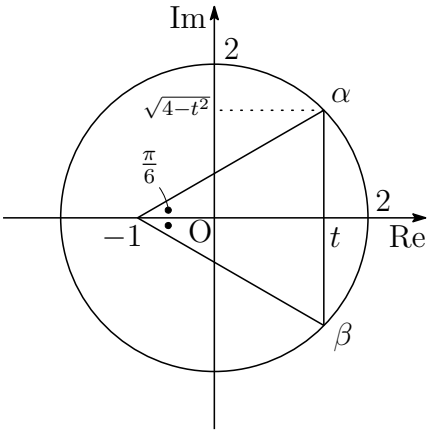
$|\alpha|=2$，$\mathrm{Im}\alpha>0$ であることに注意して



(3) 下の図から

$$\frac{\sqrt{4-t^2}}{|t+1|}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad 4t^2+2t-11=0$$

$-2<t<2$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{t=\dfrac{-1\pm 3\sqrt{5}}{4}}$



10〈3 点が同一直線上にある条件〉

t を実数，i を虚数単位とする．3 つの複素数 α，β，γ を

$$\alpha = t + 2i, \quad \beta = (3t+4) + (t^2+6)i, \quad \gamma = (t+2) + 5i$$

とする．複素数平面上の 3 点 α，β，γ が同一直線上にあるときの t をすべて求めよ．(茨木大)

解答 3 点 α, β, γ が同一直線上にあるとき，$\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ は実数である．

$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} = \frac{\{(3t+4)+(t^2+6)i\}-(t+2i)}{\{(t+2)+5i\}-(t+2i)} = \frac{2t+4+(t^2+4)i}{2+3i}$$
$$= \frac{\{2t+4+(t^2+4)i\}(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{3t^2+4t+20+(2t^2-6t-4)i}{13}$$

$2t^2-6t-4=0$ を解いて　$\boldsymbol{t = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}}$

11〈条件を満たす点が描く図形〉

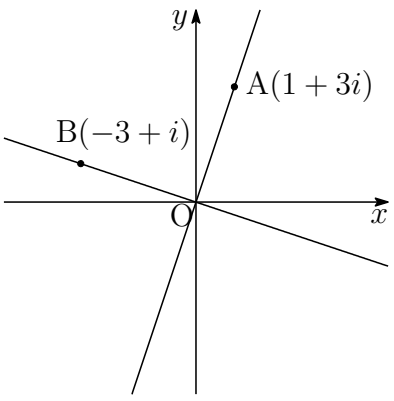
$\left(\dfrac{z}{1+3i}\right)^2$ が実数となるような複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ．(竜谷大)

解答 k を実数とすると

$$\frac{z}{1+3i} = k \quad \text{または} \quad \frac{z}{1+3i} = ki$$

ゆえに　$z = k(1+3i)$　または　$z = k(-3+i)$

$\mathrm{A}(1+3i)$，$\mathrm{B}(-3+i)$ とすると，z は直線 OA または直線 OB 上の点である．



12〈図形の条件を満たす点の図示〉

z は複素数で，$z \neq 0$，$z \neq \pm 1$ とする． (岡山大)

(1) 複素数平面上の 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が一直線上にあるための z についての必要十分条件を求めよ．

(2) 複素数平面上の 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が $\angle$C を直角とする直角三角形の 3 頂点になるような z 全体を表す図形を複素数平面上に図示せよ．

(3) 複素数平面上の 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ．

解答 $z \neq 0$，$z \neq \pm 1$ より，3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) は異なる点である．

(1) 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が一直線上にあるための必要十分条件は

$$\frac{z^2-1}{z-1} = z+1 \text{ が実数}$$

よって，z についての必要十分条件は　**0，± 1 を除く実数**

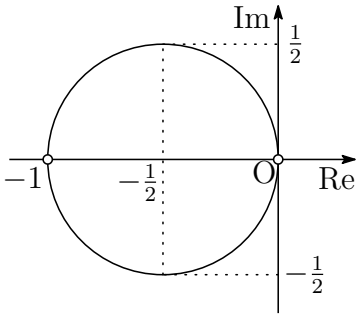
(2) $\angle \mathrm{C} = \dfrac{\pi}{2}$ である条件は

$$\frac{z-z^2}{1-z^2} = \frac{z}{1+z} \text{が純虚数}$$

したがって　$\dfrac{z}{1+z} + \overline{\left(\dfrac{z}{1+z}\right)} = 0$　ゆえに　$\dfrac{z}{1+z} + \dfrac{\overline{z}}{1+\overline{z}} = 0$

$$z(1+\overline{z}) + \overline{z}(1+z) = 0 \quad \text{これから} \quad \left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

よって，点 z は中心 $-\dfrac{1}{2}$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く．ただし，$z \neq 0, -1$



別解 $\dfrac{z}{1+z}$ が純虚数であるから

$$\frac{z}{1+z} = i\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

これから　$z = i(1+z)\tan\theta$　ゆえに　$z(1 - i\tan\theta) = i\tan\theta$

$$z(\cos\theta - i\sin\theta) = i\sin\theta$$

z について解くと

$$\begin{aligned} z &= i\sin\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = -\sin^2\theta + i\sin\theta\cos\theta \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \qquad (-\pi < 2\theta < 0,\ 0 < 2\theta < \pi) \end{aligned}$$

よって，点 z は中心 $-\dfrac{1}{2}$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く．ただし，$z \neq 0, -1$

(3) (i) $\angle\mathrm{C} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，(2) の結果から，z は点 $-\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円．ただし，点 $0, -1$ を除く．

(ii) $\angle\mathrm{A} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，z の満たす条件は

$$\frac{z^2-1}{z-1} = z+1 \text{ が純虚数} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(z+1) = 0,\ z+1 \neq 0$$

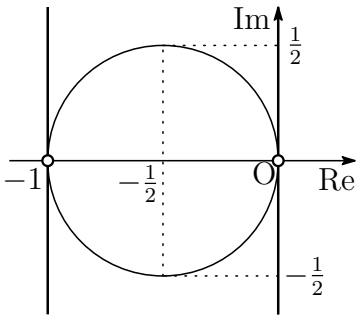
したがって，$\mathrm{Re}(z) = -1$ を満たす直線 (ただし，$z \neq -1$)

(iii) $\angle\mathrm{B} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，z の満たす条件は

$$\frac{z^2-z}{1-z} = -z \text{ が純虚数} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(z) = 0,\ z \neq 0$$

したがって，$\mathrm{Re}(z) = 0$ を満たす直線 (ただし，$z \neq 0$)

(i)〜(iii) から，点 z 全体の表す図形は，次のようになる．



13〈図形の条件を満たす点の図示〉

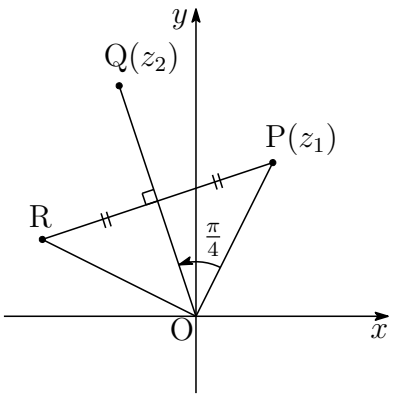
O を原点とする複素数平面上で，2 つの複素数 $z_1 = 1 + 2i$，$z_2 = -1 + 3i$ の表す点をそれぞれ P，Q とする．このとき，$\arg \dfrac{z_2}{z_1} =$ [ア] である．ただし，偏角の範囲は 0 以上 2π 未満とする．また，直線 OQ に関して，点 P と対称な点 R を表す複素数は [イ] である．(関西大)

解答 $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{-1+3i}{1+2i} = \dfrac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって　$\arg \dfrac{z_2}{z_1} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

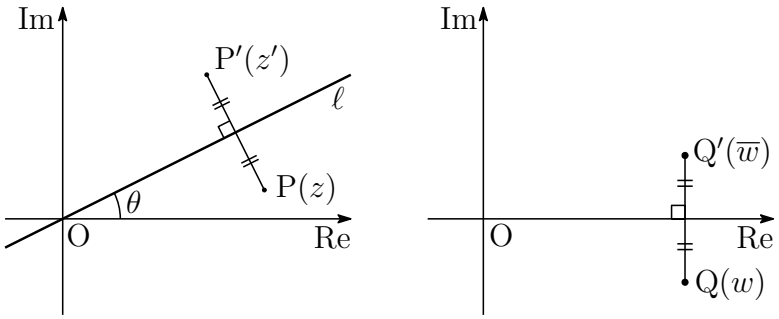
下の図から分かるように，点 R は点 P を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点である．

$$z_1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = (1+2i)i = \boldsymbol{-2+i}$$



補足 複素数平面上において，原点 O を通る直線を ℓ の偏角を θ とする．点 $\mathrm{P}(z)$ を ℓ に関して対称移動した点を $\mathrm{P}'(z')$ とし，2 点 P, P′ を O を中心に $-\theta$ だけ回転させた点をそれぞれ Q, Q′ とする．このとき，$\mathrm{Q}(w)$ とすると，Q′ は実軸に関して Q と対称であるから，$\mathrm{Q}'(\overline{w})$ である．P′ は Q′ を O を中心に θ だけ回転させたものである．以上から

$$w = z\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}, \quad \overline{w} = \overline{z}(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$z' = \overline{w}(\cos\theta + i\sin\theta) = \overline{z}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$



点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が ℓ 上の点であるとき

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{\alpha}{|\alpha|} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{z' = \frac{\overline{z}\alpha^2}{|\alpha|^2}}$$

これを本題に適用すると，点 R は

$$\frac{\overline{z_1}{z_2}^2}{|z_2|^2} = \frac{(1-2i)(-1+3i)^2}{|-1+3i|^2} = \frac{(1-2i)(-8-6i)}{10} = \boldsymbol{-2+i}$$

佐賀大 2024 年後期理工学部 3

複素数平面上で，原点および $3+i$ を通る直線を ℓ とする．次の問に答えよ．

(1) 点 z を原点のまわりに $3+i$ の偏角だけ回転した点を w とする．w を z を用いて表せ．

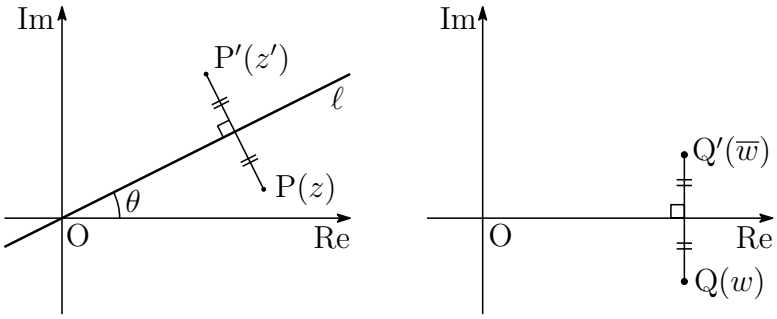
(2) 複素数 z と共役な複素数を $\overline{z}$ とし，直線 ℓ に関して点 z と対称な点を $\overline{z'}$ とする．z' を $\overline{z}$ を用いて表せ．

(3) $\mathrm{A}(1+i)$，$\mathrm{B}(2+i)$ とする．点 P が直線 ℓ 上を動くとき，AP + BP の最小値と，最小値を与える点 P を表す複素数を求めよ．

解答 (1) $w=\dfrac{3+i}{|3+i|}z=\dfrac{3+i}{\sqrt{10}}z$

(2) 複素数平面上において，原点Oを通る直線をℓの偏角をθとする．点$\mathrm{P}(z)$をℓに関して対称移動した点を$\mathrm{P}'(z')$とし，2点P, P′をOを中心に$-\theta$だけ回転させた点をそれぞれQ, Q′とする．このとき，$\mathrm{Q}(w)$とすると，Q′は実軸に関してQと対称であるから，$\mathrm{Q}'(\overline{w})$である．P′はQ′をOを中心に$\theta$だけ回転させたものである．以上から

$$w=z\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\},\quad \overline{w}=\overline{z}(\cos\theta+i\sin\theta),$$
$$z'=\overline{w}(\cos\theta+i\sin\theta)=\overline{z}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$



また，ℓの傾きがmであるとき，$m=\tan\theta$とおくと

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$
$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2m}{1+m^2}$$

したがって，次式が成立する．

$$z'=\frac{\overline{z}\{(1-m^2)+2mi\}}{1+m^2}$$

直線ℓの傾きは$\dfrac{1}{3}$であるから，$m=\dfrac{1}{3}$を上式に代入すると

$$\boldsymbol{z'=\frac{\overline{z}(4+3i)}{5}}$$

別解 点$3+i$はℓ上の点であるから　$\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{3+i}{|3+i|}$

$$z'=\overline{z}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\frac{\overline{z}(3+i)^2}{|3+i|^2}=\boldsymbol{\frac{\overline{z}(4+3i)}{5}}$$

(3) ℓ に関して点 $\mathrm{A}(1+i)$ と対称な点を $\mathrm{A}'(\alpha)$ とすると，(2) の結果を利用して

$$\alpha = \frac{(\overline{1+i})(4+3i)}{5} = \frac{(1-i)(4+3i)}{5} = \frac{7-i}{5}$$

$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ の最小値は，$\mathrm{A}'\left(\dfrac{7-i}{5}\right)$，$\mathrm{B}(2+i)$ の間の距離

$$\mathrm{A'B} = \left|2+i-\frac{7-i}{5}\right| = \frac{3}{5}|1+2i| = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

直線 $\mathrm{A'B}$ 上の点は，媒介変数 t を用いて

$$(1-t)\cdot\frac{7-i}{5} + t(1+i) = \frac{3t+7}{5} + \frac{6t-1}{5}i$$

これと ℓ の交点が P であるから

$$3\cdot\frac{6t-1}{5} = \frac{3t+7}{5} \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3} \quad \text{よって} \quad \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{9+3i}{5}}\right)$$

14〈等式を満たす複素数と偏角〉

相異なる3つの複素数 α，β，γ の間に等式 $-2i\alpha+(1+2i)\beta-\gamma=0$ が成り立つとする．このとき，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角を θ とすると，$\cos\theta$ の値は［ア］である．さらに，$|\beta-\alpha|=2$ が成り立つとすると，複素数平面上の3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする三角形 ABC の外接円の半径は［イ］である．　(福岡大)

解答 $\gamma=-2i\alpha+(1+2i)\beta$ であるから

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{-2i\alpha+(1+2i)\beta-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(1+2i)(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=1+2i$$

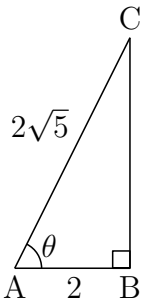
$\theta=\angle\mathrm{BAC}=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ より　$\cos\theta=\dfrac{1}{|1+2i|}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

$\dfrac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=\sqrt{5}$，$|\beta-\alpha|=2$ より　$\mathrm{AB}=2,\ \mathrm{CA}=2\sqrt{5}$

$\cos\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ であるから　$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$

下の図から分かるように，CA は三角形 ABC の外接円の直径である．

よって，三角形 ABC の外接円の半径は　$\dfrac{\mathrm{CA}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$



別解 $\gamma=-2i\alpha+(1+2i)\beta$ より　$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=-2i$　ゆえに　$\angle\gamma\beta\alpha=\dfrac{\pi}{2},\quad\dfrac{|\gamma-\beta|}{|\alpha-\beta|}=2$

$|\beta-\alpha|=2$ より　$|\gamma-\beta|=4$

△ABC は，$\angle\mathrm{CBA}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから

$$\mathrm{CA}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$$

CA は三角形 ABC の外接円の直径であるから，求める半径は　$\boldsymbol{\sqrt{5}}$

15〈複素数平面上の点列〉

z_n を虚数単位 i と異なる複素数とする．複素数 z_n を

$$z_n = i + \frac{\sqrt{2}(z_{n-1} - i)(1 + i)}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める． (愛媛大)

(1) すべての自然数 n に対し $z_n \neq i$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{z_n - i}{z_{n-1} - i}$ の絶対値 r と偏角 θ を求めよ．ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) $z_n = z_0$ となる最小の自然数 m を求めよ．

(4) 複素数平面上において z_n の表す点を P_n とする．(3) で求めた m に対し m 本の線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, $\cdots$, $\mathrm{P}_{m-1}\mathrm{P}_m$ で囲まれる図形の面積を S とする．$z_0 = 1 - i$ のとき S を求めよ．

解答 (1) $z_n = i$ を満たす n が存在すると仮定し，そのうちで最小の n を $\ell \geqq 1$ とすると，漸化式から

$$z_\ell - i = \frac{\sqrt{2}(z_{\ell-1} - i)(1 + i)}{2}$$

$z_\ell - i = 0$ より，$z_{\ell-1} - i = 0$．$n = \ell - 1$ のとき，$z_n = i$ となり，ℓ の最小性に反する．よって，すべての自然数 n に対し，$z_n \neq 0$

(2) 与えられた漸化式から

$$\frac{z_n - i}{z_{n-1} - i} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \qquad (*)$$

よって　　$\boldsymbol{r = 1,\ \theta = \dfrac{\pi}{4}}$

(3) $(*)$ から　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{z_k - i}{z_{k-1} - i} = \prod_{k=1}^{n} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{z_n - i}{z_0 - i} = \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^n$　　ゆえに　$z_n - i = (z_0 - i)\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

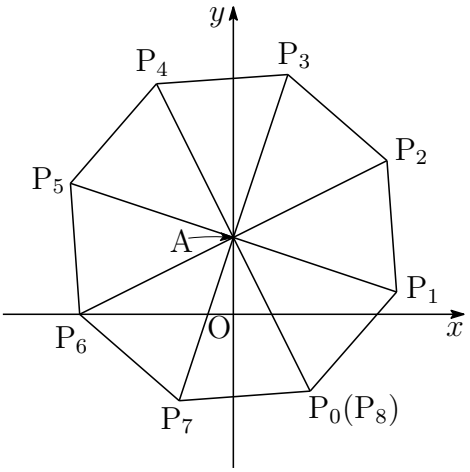
$z_m = z_0$ となる最小の自然数 m は

$$\frac{m\pi}{4} = 2\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{m = 8}$$

(4) $(*)$ から，$\mathrm{A}(i)$ とすると，AP_n は AP_{n-1} を $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものである．

$\mathrm{AP}_0 = |(1-i)-i| = |1-2i| = \sqrt{5}$ より

$$\frac{S}{8} = \frac{1}{2}(\sqrt{5})^2 \sin\frac{\pi}{4} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{S = 10\sqrt{2}}$$



10.2　式と曲線 (数学 C)

16〈2 次曲線と直線〉

放物線 $y^2 = 4px$ $(p \neq 0)$ と直線 $y = -x - 3$ が点 A で接している．このとき，$p =$ [ア] であり，点 A の x 座標は [イ] である．　(芝浦工大)

解答　放物線 $y^2 = 4px$ と直線 $y = -x - 3$ の方程式から y を消去すると

$$(-x-3)^2 = 4px \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2(3-2p)x + 9 = 0 \qquad (*)$$

上の 2 次方程式は重解をもつから，$(*)$ の係数について

$$D/4 = (3-2p)^2 - 1 \cdot 9 = 4p(p-3) = 0$$

$p \neq 0$ に注意して　$\boldsymbol{p = 3}$

このとき，$(*)$ の重解は　$x = -\dfrac{2(3-2p)}{2 \cdot 1} = 2p - 3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

よって，接点 A の x 座標は　$\mathbf{3}$

17〈楕円と双曲線の焦点〉

方程式 $2x^2-8x+y^2-6y+11=0$ が表す 2 次曲線 C_1 について，次の問に答えよ．(名城大)

(1) C_1 の概形をかけ．

(2) C_1 の焦点の座標を求めよ．

(3) $a,\ b,\ c\ (c>0)$ を定数とし，方程式 $(x-a)^2-\dfrac{(y-b)^2}{c^2}=1$ が表す双曲線を C_2 とする．C_1 の 2 つの焦点と C_2 の 2 つの焦点が正方形の 4 つの頂点となるとき，$a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

解答　(1) $C_1: 2x^2-8x+y^2-6y+11=0$ を変形すると

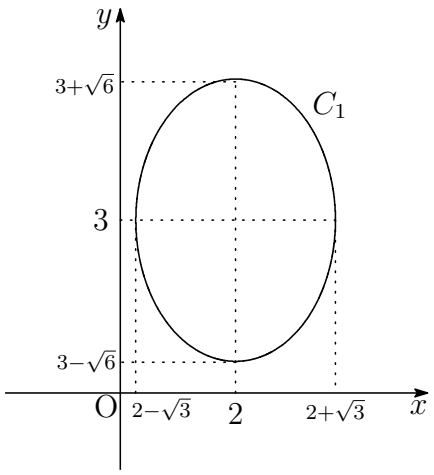
$$2(x-2)^2+(y-3)^2=6 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{6}=1$$

$C_1': \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$ とすると，C_1' の頂点は

$$(\pm\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ \pm\sqrt{6}) \quad \text{(複号任意)}$$

C_1 は C_1' を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもの．

C_1 の頂点は　$(2\pm\sqrt{3},\ 3),\ (2,\ 3\pm\sqrt{6})$　(複号任意)



(2) C_1' の焦点が $(0,\ \pm\sqrt{3})$ であるから　C_1 の焦点は　$\boldsymbol{(2,\ 3\pm\sqrt{3})}$

補足　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$ の焦点は　$\boldsymbol{(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2})}$

(3) (2) で求めた C_1 の 2 焦点を $\mathrm{F}_1(2,\ 3+\sqrt{3}),\ \mathrm{F}_2(2,\ 3-\sqrt{3})$ とすると

$$\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2 = 2\sqrt{3}$$

$C_2' : x^2 - \dfrac{y^2}{c^2} = 1$ とすると，$C_2 : (x-a)^2 - \dfrac{(y-b)^2}{c^2} = 1$ は C_2' を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したものである．

C_2' の焦点が $(\pm\sqrt{1+c^2},\ 0)$ であるから，C_2 の焦点を

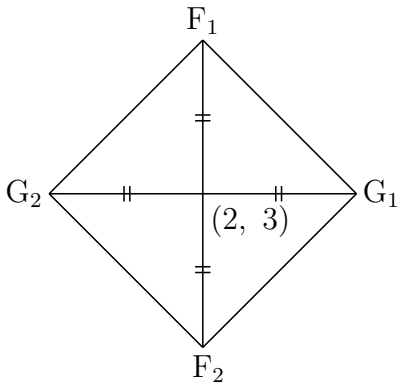
$$\mathrm{G}_1(a+\sqrt{1+c^2},\ b),\ \mathrm{G}_2(a-\sqrt{1+c^2},\ b)$$

とすると

$$\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2 = 2\sqrt{1+c^2}$$

$\mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}_2,\ \mathrm{G}_1,\ \mathrm{G}_2$ の 4 点を頂点とする四角形が正方形であるとき，$\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ の中点と $G_1,\ G_2$ の中点が一致することと $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2 = \mathrm{G}_1\mathrm{G}_2$ であることから

$$\boldsymbol{a=2,\ b=3},\ 2\sqrt{1+c^2} = 2\sqrt{3}\ (c>0) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c=\sqrt{2}}$$



18〈直交する 2 接線の交点の軌跡〉

xy 平面上の楕円 $4x^2+9y^2=36$ を C とする． (弘前大)

(1) 直線 $y=ax+b$ が楕円 C に接するための条件を a と b の式で表せ．

(2) 楕円 C の外部の点 P から C に引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ．

解答 (1) $y=ax+b$，$4x^2+9y^2=36$ の 2 式から y を消去すると

$$4x^2+9(ax+b)^2=36 \quad \text{整理すると} \quad (9a^2+4)x^2+18abx+9(b^2-4)=0$$

このとき，上の第 2 式の係数について

$$D/4=(9ab)^2-(9a^2+4)\cdot 9(b^2-4)=36(9a^2-b^2+4)=0$$

よって，求める条件は $\boldsymbol{9a^2-b^2+4=0}$

別解 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ および直線 $y=ax+b$ をそれぞれ y 軸方向に x 軸を元に $\dfrac{3}{2}$ 倍に拡大すると

$$x^2+y^2=9, \quad y=\frac{3}{2}(ax+b)$$

このとき，円の中心 $(0,\ 0)$ から直線 $3ax-2y+3b=0$ までの距離が 3 であるから

$$\frac{|3b|}{\sqrt{9a^2+4}}=3 \quad \text{ゆえに} \quad b^2=9a^2+4$$

(2) 点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を通り，傾き m の直線

$$y - Y = m(x - X) \quad \text{すなわち} \quad y = mx - mX + Y$$

が C に接するとき，(2) の結果に適用すると

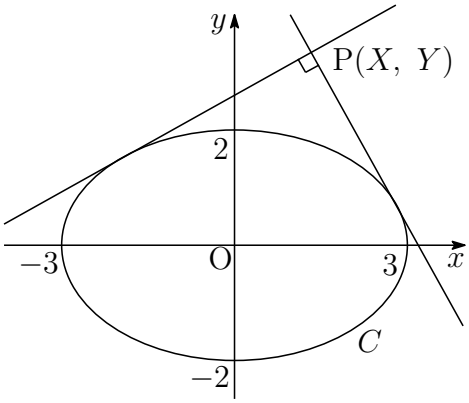
$$9m^2 - (-mX + Y)^2 + 4 = 0$$

これを m について整理すると

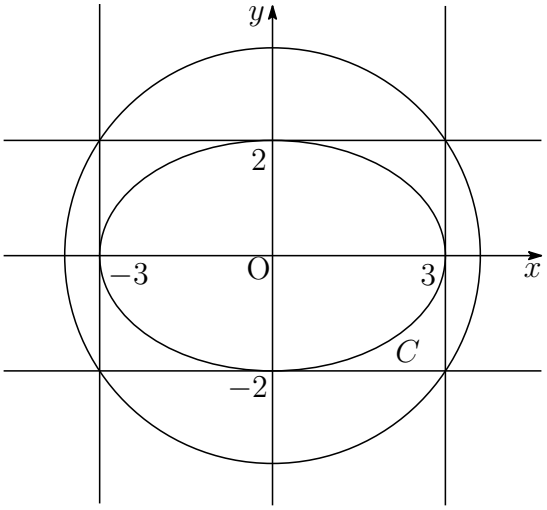
$$(9 - X^2)m^2 + 2XYm + 4 - Y^2 = 0 \qquad (*)$$

(i) $9 - X^2 \neq 0$ のとき $(X \neq \pm 3)$
m に関する 2 次方程式 $(*)$ の解を $m_1,\ m_2$ とすると，P から C に引いた 2 本の接線が直交するから，解と係数の関係により

$$m_1 m_2 = \frac{4 - Y^2}{9 - X^2} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad X^2 + Y^2 = 13 \qquad (**)$$



(ii) $X = \pm 3$ のとき，点 $(\pm 3,\ \pm 2)$ (複号任意) から C に引いた 2 本の接線は直交し，これらの点は $(**)$ を満たす．



(i)，(ii) から，求める軌跡は　円 $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 13}$

東工大 2002 年 2

楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ からひいた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ.

解答 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から楕円 C に接する直線を $\ell : y=m(x-a)+b$ とおき，C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{17}+\frac{1}{8}\{mx+(b-ma)\}^2=1$$

x について整理すると

$$\left(m^2+\frac{8}{17}\right)x^2+2m(b-ma)x+(b-ma)^2-8=0 \qquad (*)$$

このとき，2 次方程式 $(*)$ は重解をもつから，係数について

$$D/4=m^2(b-ma)^2-\left(m^2+\frac{8}{17}\right)\{(b-ma)^2-8\}=0$$

したがって　　$-\dfrac{8}{17}(b-ma)^2+8m^2+\dfrac{64}{17}=0$

m について整理すると　$(a^2-17)m^2-2abm+b^2-8=0 \quad \cdots(**)$

$a^2-17\neq 0$ のとき，2 次方程式 $(**)$ の 2 解 $m_1,\ m_2$ について，その 2 本の接線が直交するから，解と係数の関係により

$$m_1m_2=\frac{b^2-8}{a^2-17}=-1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2+b^2=25$$

$a^2-17=0$，すなわち，$(\pm\sqrt{17},\ \pm\sqrt{8})$ (複号任意) から楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ にひいた 2 本の接線も直交するから，求める点 P の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2=25}$$

類題 横浜国立大

補足 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から楕円 $C : \dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=1$ に接する直線を $\ell : y=m(x-a)+b$ とおき，C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{1}{q^2}\{mx+(b-ma)\}^2=1$$

x について整理すると

$$\left(m^2+\frac{q^2}{p^2}\right)x^2+2m(b-ma)x+(b-ma)^2-q^2=0 \qquad (*)$$

このとき，2 次方程式 $(*)$ は重解をもつから，係数について

$$D/4=m^2(b-ma)^2-\left(m^2+\frac{q^2}{p^2}\right)\{(b-ma)^2-q^2\}=0$$

したがって　　$-\dfrac{q^2}{p^2}(b-ma)^2+q^2m^2+\dfrac{q^4}{p^2}=0$

m について整理すると　$(a^2-p^2)m^2-2abm+b^2-q^2=0 \quad \cdots(**)$

$a^2-p^2\neq 0$ のとき，2 次方程式 $(**)$ の 2 解 $m_1,\ m_2$ について，その 2 本の接線が直交するから，解と係数の関係により

$$m_1m_2=\frac{b^2-q^2}{a^2-p^2}=-1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2+b^2=p^2+q^2$$

$a^2-p^2=0$，すなわち，$(\pm p,\ \pm q)$ (複号任意) から楕円 $\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=1$ にひいた 2 本の接線も直交する．よって，点 P の軌跡の方程式は

$$x^2+y^2=p^2+q^2$$

楕円 $\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=1$ の直交する 2 本の接線の交点の軌跡である円 $x^2+y^2=p^2+q^2$ を楕円 $\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=1$ の**準円**という

19〈円に接する中心の軌跡〉

中心がそれぞれ，$(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$ である半径 1 の円 $A,\ B$ を考える．円 C が，A を内部に含み，B の外部にあり，しかも，$A,\ B$ の両方に接しながら動くとき，円 C の中心の軌跡を求めよ． (類 北海道大)

解答 $C,\ A,\ B$ の中心をそれぞれ $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-2,\ 0)$，$\mathrm{R}(2,\ 0)$ とおく．

C の半径について，$\mathrm{PQ}+1=\mathrm{PR}-1$ であるから

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}+1=\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1$$

これから，$\sqrt{(x+2)^2+y^2}+2=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ の両辺を平方すると

$$(x+2)^2+y^2+4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+4=(x-2)^2+y^2$$

整理すると　$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=-2x-1$　$\cdots$①

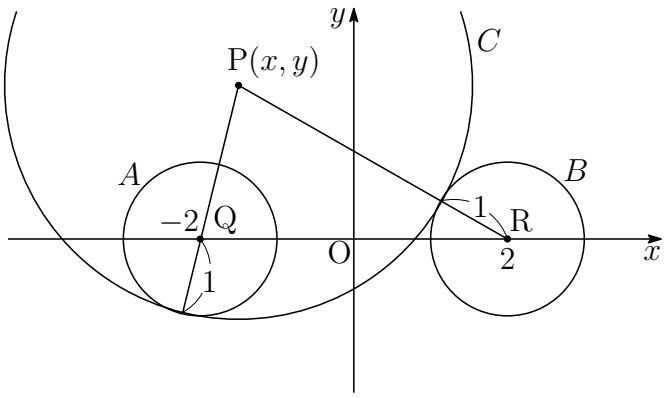
さらに，① の両辺を平方すると

$$x^2+4x+4+y^2=4x^2+4x+1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-\frac{y^2}{3}=1$$

このとき，上式および ① から　$x \leqq -1$

よって，円 C の中心 P の軌跡は

双曲線 $\boldsymbol{x^2-\dfrac{y^2}{3}=1}$ の $\boldsymbol{x \leqq -1}$ の部分



別解 PR $-$ PQ $=2$ より，P の軌跡は，2 点 Q，R を焦点とし，2 頂点間の距離が 2 の双曲線．中心は 2 点 Q，R の中点，すなわち原点であるから，2 頂点を $(\pm a,\ 0)$ とし $(a>0)$，離心率を e とすると

$$2a=2,\ ae=2 \quad \text{ゆえに} \quad a=1,\ e=2$$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の離心率は $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ であるから

$$2=\sqrt{1+b^2} \quad \text{ゆえに} \quad b^2=3$$

PR $-$ PQ >0 であるから，P は y 軸の左側にある．

よって，円 C の中心 P の軌跡は

$$\textbf{双曲線 } \boldsymbol{x^2-\frac{y^2}{3}=1} \textbf{ の } \boldsymbol{x\leqq -1} \textbf{ の部分}$$

参照 **2 次曲線の性質**

20〈離心率と 2 次曲線〉

xy 平面において，原点 O と直線 $x=2$ からの距離の比が $\sqrt{r}:1$ であるような点 P について，次の各問に答えよ．(鹿児島大 2001 年)

(1) 点 P の軌跡を C とするとき，曲線 C の方程式を求めよ．

(2) $r=2$ のとき，軌跡 C はどのような図形になるか答え，その軌跡の概形を描け．

(3) 軌跡 C が，長軸の長さが $\sqrt{5}$ であるような楕円になるときの r の値を求めよ．

解答　(1) 点 P を $(x,\ y)$ とおくと，条件により

$$\sqrt{x^2+y^2}:|x-2|=\sqrt{r}:1 \quad \text{ゆえに} \quad r(x-2)^2=x^2+y^2$$

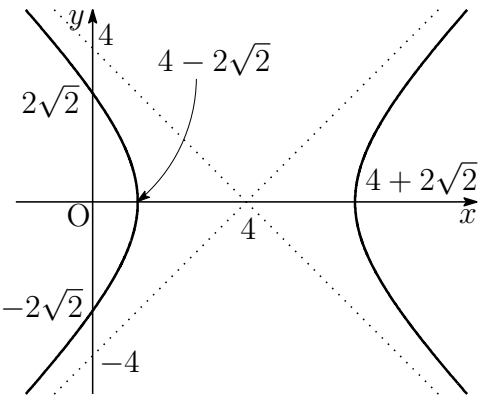
整理すると　　$\boldsymbol{(r-1)x^2-4rx-y^2+4r=0}$

(2) $r=2$ を (1) の結果に代入すると

$$x^2-8x-y^2+8=0$$
$$(x-4)^2-y^2=8$$

ゆえに　$\dfrac{\boldsymbol{(x-4)^2}}{\boldsymbol{(2\sqrt{2})^2}}-\dfrac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{(2\sqrt{2})^2}}=\boldsymbol{1}$

よって，C は右の図のような双曲線．
中心 $(4,\ 0)$，焦点 $(0,\ 0)$，$(8,\ 0)$
漸近線は　$y=\pm(x-4)$



(3) (1) の結果から　　$(1-r)x^2+4rx+y^2-4r=0 \quad \cdots(*)$

この曲線が楕円であるとき　$1-r>0$　ゆえに　$0<r<1$

$(*)$ を変形すると　　$(1-r)\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2+y^2=\dfrac{4r}{1-r}$

したがって　　$\dfrac{\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2}{\dfrac{4r}{(1-r)^2}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{4r}{1-r}}=1$

$0<r<1$ のとき，$\dfrac{4r}{(1-r)^2}>\dfrac{4r}{1-r}$ であるから

$$2\sqrt{\frac{4r}{(1-r)^2}}=\sqrt{5} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{16r}{(1-r)^2}=5$$

整理すると　$5r^2-26r+5=0$　すなわち　$(r-5)(5r-1)=0$

$0<r<1$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{r=\dfrac{1}{5}}$

解説　(2) のとき，C の離心率 $e=\sqrt{2}>1$ から，C は双曲線である (鹿大 2012 年一般前期数学 6 の解説[18] を参照．)．

また，O を極とする極方程式は　　$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\cos\theta}$

(3) のとき，C が楕円であるとき，離心率 $\sqrt{r}<1$ から　$0<r<1$

このとき，楕円の長軸は，O を通り準線 $x=2$ に垂直な直線上 (x 軸上) にあるから，$(*)$ に $y=0$ を代入すると

$$(1-r)x^2+4rx-4r=0$$

この方程式の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{4r}{1-r}, \quad \alpha\beta=-\frac{4r}{1-r}$$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$ であるから，$(\alpha-\beta)^2=5$ より

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5 \quad \text{ゆえに} \quad \left(-\frac{4r}{1-r}\right)^2-4\cdot\frac{-4r}{1-r}=5$$

整理すると　$(r-5)(5r-1)=0$　$0<r<1$ であるから　$r=\dfrac{1}{5}$

[18] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf

21〈直線の通過領域〉

座標平面上に円 $C : x^2+y^2=4$ と点 $\mathrm{P}(6,\ 0)$ がある．円 C 上を点 $\mathrm{A}(2a,\ 2b)$ が動くとき，線分 AP の中点を M とし，線分 AP の垂直二等分線を ℓ とする．

(1) 点 M の軌跡の方程式を求め，その軌跡を図示せよ．　(上智大)

(2) 直線 ℓ の方程式を a，b を用いて表せ．

(3) 直線 ℓ が通過する領域を表す不等式を求め，その領域を図示せよ．

解答　(1) $\mathrm{A}(2a,\ 2b)$ は円 $C : x^2+y^2=4$ 上の点であるから

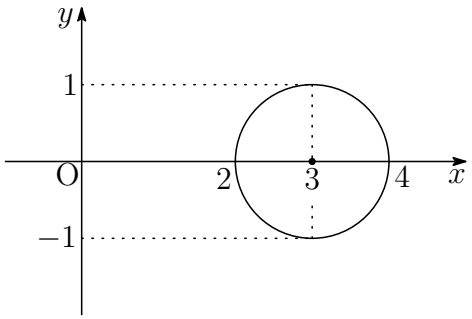
$$(2a)^2+(2b)^2=4 \quad \text{ゆえに} \quad a^2+b^2=1 \quad \cdots ①$$

$\mathrm{M}(x,\ y)$ は線分 AP の中点であるから

$$x=\frac{2a+6}{2}=a+3, \quad y=\frac{2b+0}{2}=b$$

$a=x-3,\ b=y$ であるから，これを ① に代入すると

$$\boldsymbol{(x-3)^2+y^2=1}$$



(2) ℓ は，AP の中点 $\mathrm{M}(a+3,\ b)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(2a-6,\ 2b)$ に垂直な直線である．ℓ 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=0$ であるから

$$(2a-6)(x-a-3)+2b(y-b)=0$$

整理すると　$(a-3)x+by-(a^2+b^2)+9=0$

これに ① を代入すると　$\boldsymbol{(a-3)x+by+8=0}$

(3) (2) の結果から　$ax+by=8-3x$

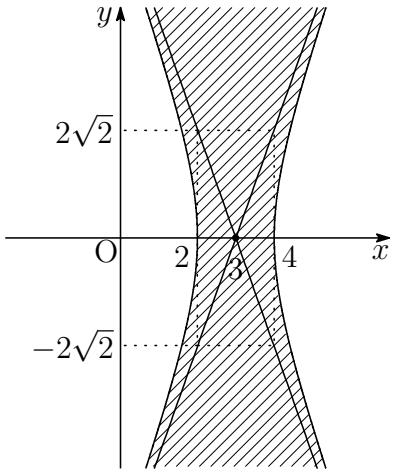
ここで，$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$ および $a^2+b^2=1$ から

$$x^2+y^2 \geqq (ax+by)^2=(8-3x)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 8x^2-48x-y^2+64 \leqq 0$$

上の第 2 式を整理すると

$$\boldsymbol{(x-3)^2-\frac{y^2}{8}=1}$$

したがって，求める領域は下の図の斜線部分で境界線を含む.



22〈楕円上を動く点の最大値・最小値〉

点 $(x,\ y)$ が，楕円 $x^2+x+2y^2+y=3$ 上を動くとき，$x+y$ の最大値は［ア］であり，最大値をとるときの点の座標 $(x,\ y)$ は［イ］である．　(神奈川大)

解答 $x+y=k\cdots$① とおき，$y=k-x$ を $x^2+x+2y^2+y=3\cdots$② に代入すると

$$x^2+x+2(k-x)^2+k-x=3$$

x について整理すると　$3x^2-4kx+2k^2+k-3=0\quad\cdots(*)$

直線 ① が楕円 ② と共有点をもつとき，$(*)$ の係数について

$$D/4=(-2k)^2-3\cdot(2k^2+k-3)=-(2k-3)(k+3)\geqq 0$$

これを解いて　$-3\leqq k\leqq\dfrac{3}{2}$　このとき，$(*)$ は重解をもつから

$$x=-\frac{-4k}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}k=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$$

これらを ① に代入すると

$$1+y=\frac{3}{2}\quad\text{ゆえに}\quad y=\frac{1}{2}$$

よって，点 $\left(\mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$ で最大値 $\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ をとる．

(答) (ア) $\dfrac{3}{2}$　(イ) $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

別解 $f(x)=x+y\cdots$① とおくと　$f'(x)=1+y'$

$f(x)$ が極値をとるとき，$f'(x)=0$ であるから　$y'=-1$

$x^2+x+2y^2+y=3\cdots$② の両辺を x で微分すると

$$2x+1+4yy'+y'=0$$

$y'=-1$ を代入して整理すると　$x=2y\cdots$④　これを ② に代入すると

$$4y^2+2y+2y^2+y=3\quad\text{整理すると}\quad 2y^2+y-1=0$$

したがって　$(y+1)(2y-1)=0$　ゆえに　$y=-1,\ \dfrac{1}{2}$

これを ④ に代入して　$(x,\ y)=(-2,-1),\ \left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

よって，$x+y$ は点 $\left(\mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$ で最大値 $\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ をとる．

23〈媒介変数表示と極方程式〉

座標平面上の曲線 C_1 上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が媒介変数 t によって

$$x=\frac{-4}{1+t^2},\quad y=\frac{4t}{1+t^2}$$

で表されているとする．また，曲線 C_2 は極方程式によって $r=4\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ と表されているとする． (類 甲南大)

(1) t を消去して，曲線 C_1 を x と y を用いて表せ．

(2) 曲線 C_2 を直交座標に関する方程式で表せ．

解答 (1) $x\neq 0$ であるから $\dfrac{y}{x}=\dfrac{\dfrac{4t}{1+t^2}}{\dfrac{-4}{1+t^2}}=-t$

$t=-\dfrac{y}{x}$ を $x=\dfrac{-4}{1+t^2}$ に代入すると $x=\dfrac{-4}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{-4x^2}{x^2+y^2}$

したがって $x^2+y^2=-4x$ よって $\boldsymbol{(x+2)^2+y^2=4\ (x\neq 0)}$

別解 $-\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{y}{2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$ であるから

$$\left(-\frac{x}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=1$$

$x\neq 0$ に注意して $\qquad \boldsymbol{(x+2)^2+y^2=4\ (x\neq 0)}$

補足 $t=\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=\cos 2\theta,\quad \frac{2t}{1+t^2}=\sin 2\theta$$

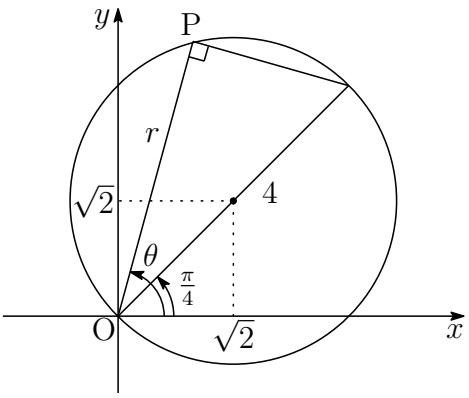
したがって，次のように媒介変数表示ができる．

$$x=-2(1+\cos 2\theta),\ y=2\sin 2\theta\ (-\pi<2\theta<\pi)$$

(2) $r = 4\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ より

$$r^2 = 4r\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + 4r\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}$$
$$x^2 + y^2 = 4x\cos\frac{\pi}{4} + 4y\sin\frac{\pi}{4}$$
$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y$$

よって　　$\boldsymbol{(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4}$



24〈楕円の焦点を極とした極方程式〉

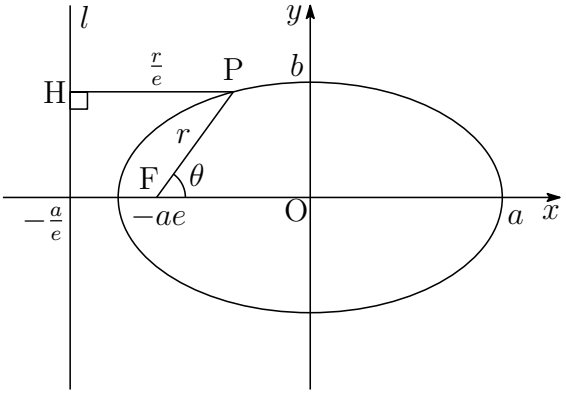
座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ について，以下の問いに答えよ．

(九大工学部 2011 年後期)

(1) x 座標が小さい方の焦点を F とし，F から正の方向へ向かう半直線を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ で表された楕円の極方程式 $r=f(\theta)$ を求めよ．

(2) 座標平面上の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と楕円上の 2 点 P_1，P_2 について，線分 OP_1 と線分 OP_2 とが互いに直交する位置にあるとする．線分 OP_1 および OP_2 の長さをそれぞれ r_1，r_2 とするとき，$\dfrac{1}{{r_1}^2}+\dfrac{1}{{r_2}^2}$ の値は定数となることを示せ．

解答　(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$



の離心率 e は

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

焦点 $\mathrm{F}(-ae,\ 0)$ の準線 l は

$$x=-\frac{a}{e}$$

F から l までの距離 λ は

$$\lambda=-ae-\left(-\frac{a}{e}\right)=\frac{a}{e}(1-e^2)=\frac{a}{e}\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{ae}$$

2 次曲線について，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=e$ であるから，$\mathrm{PF}=r$ より，$\mathrm{PH}=\dfrac{r}{e}$

右上の図から，$\mathrm{PH}=\lambda+\mathrm{PF}\cos\theta$ であるから　$\dfrac{r}{e}=\dfrac{b^2}{ae}+r\cos\theta$

よって　　$r=\dfrac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\theta}=\dfrac{\boldsymbol{b^2}}{\boldsymbol{a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}}$

(2) OP_1 の傾きを m とすると $(m \neq 0)$，P_1 は

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{直線 } y=mx$$

の交点である．上 2 式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2=\frac{1}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}, \quad y^2=\frac{m^2}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}$$

よって $\quad x^2+y^2=\dfrac{1+m^2}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}} \quad$ すなわち $\quad \dfrac{1}{{r_1}^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}{1+m^2} \quad \cdots ①$

OP_2 は OP_1 に垂直であるから，① の m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換えて

$$\frac{1}{{r_2}^2}=\frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{m^2b^2}}{1+\dfrac{1}{m^2}}=\frac{\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}{m^2+1}$$

①，② より $\quad \dfrac{1}{{r_1}^2}+\dfrac{1}{{r_2}^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2} \quad \cdots (*)$

また，P_1 および P_2 が x 軸または y 軸上にあるときも $(*)$ は成立する．

10.3　関数 (数学 III)

25〈無理関数のグラフと直線の共有点〉

曲線 $y=\sqrt{x+2}$ と直線 $y=x+a$ が共有点をもつとき，定数 a のとりうる値の範囲は［　ア　］であり，共有点の数が 2 個でかつ，その共有点の y 座標がともに正であるとき，a のとりうる値の範囲は［　イ　］である．　(関西大)

解答　$y=\sqrt{x+2}$ と $y=x+a$ から y を消去すると　$\sqrt{x+2}=x+a$

両辺を平方して整理すると　$x^2+(2a-1)x+a^2-2=0$

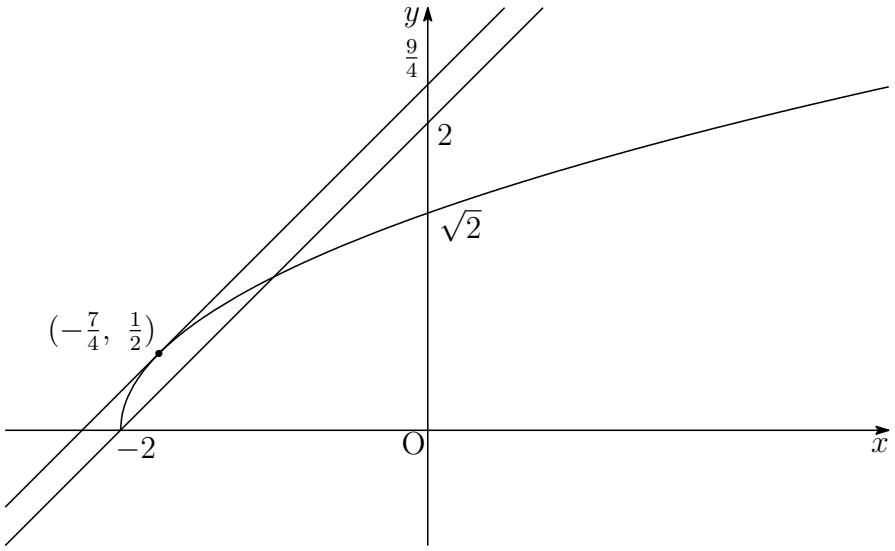
曲線 $y=\sqrt{x+2}$ と直線 $y=x+a$ が接するとき，係数について

$$D=(2a-1)^2-4\cdot1\cdot(a^2-2)=-4a+9=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{9}{4}$$

曲線 $y=\sqrt{x+2}$ と直線 $y=x+a$ が共有点をもつ a の値の範囲は　$\boldsymbol{a\leqq\frac{9}{4}}$

直線 $y=x+a$ が点 $(-2,\ 0)$ を通るとき　$a=2$

曲線 $y=\sqrt{x+2}$ と直線 $y=x+a$ が共有点の個数が 2 個で，y 座標がともに正となる a の値の範囲は　$\boldsymbol{2<a<\frac{9}{4}}$



補足　$y=\sqrt{x+2}$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$y'=1$ とすると　$x=-\dfrac{7}{4}$　接点は　$\left(-\dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$

26〈合成関数の逆関数〉

$f(x)=\dfrac{ax+b}{c-2x}$，$g(x)=x-1$ に対して，合成関数 $(f\circ g)(x)$ $\left(x\neq\dfrac{c}{2}+1\right)$ の逆関数 $(f\circ g)^{-1}(x)$ が $\dfrac{3x-7}{2x+5}$ であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．　(芝浦工大)

解答　$(f\circ g)^{-1}(x)=\dfrac{3x-7}{2x+5}$ より　$(f\circ g)(x)=\dfrac{-5x-7}{2x-3}$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{c-2x}$，$g(x)=x-1$ より

$$(f\circ g)(x)=f(x-1)=\frac{a(x-1)+b}{c-2(x-1)}=\frac{ax-a+b}{-2x+c+2}=\frac{-ax+a-b}{2x-c-2}$$

係数を比較して　$-a=-5,\ a-b=-7,\ -c-2=-3$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=5,\ b=12,\ c=1}$

27〈線分の長さのとりうる値の範囲〉

xy 平面上の点 A$(1,\ 0)$ と B$(0,\ 1)$ をとる．また，傾きが -1 で点 A を通る直線を ℓ_1，傾きが -1 で点 $(2,\ 0)$ を通る直線を ℓ_2 で表す．ℓ_1 上にない点 P$(a,\ b)$ に対し，直線 AP と ℓ_2 との交点を C，直線 BP と ℓ_2 との交点を D とするとき，次の問いに答えよ．(東京理科大)

(1) C，D の座標を a，b を用いて表せ．

(2) $a+b=t$ とおくとき，線分 CD の長さを t を用いて表せ．ただし，C と D が一致するときは線分 CD の長さは 0 とする．

(3) 点 P$(a,\ b)$ が点 $(2,\ 2)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円周上を動くとき，線分 CD の長さのとりうる値の範囲を求めよ．

(4) 点 P$(a,\ b)$ が双曲線 $xy=1$ 上を動くとき，線分 CD の長さのとりうる値の範囲を求めよ．

解答 (1) 点 P$(a,\ b)$ は直線 ℓ_1 上の点ではないから　　$a+b\neq 1$

直線 AP は点 A$(1,\ 0)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a-1,\ b)$ に平行な直線であるから

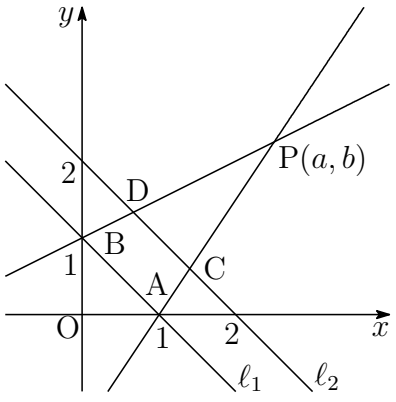
$$b(x-1)-(a-1)y=0 \quad \cdots ①$$

直線 BP は点 B$(0,\ 1)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(a,\ b-1)$ に平行な直線であるから

$$(b-1)x-a(y-1)=0 \quad \cdots ②$$

点 C は直線 AP と直線 ℓ_2 の交点，点 D は直線 BP と直線 ℓ_2 の交点であるから

$$\mathbf{C}\left(\frac{\boldsymbol{2a+b-2}}{\boldsymbol{a+b-1}},\ \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a+b-1}}\right),\quad \mathbf{D}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a+b-1}},\ \frac{\boldsymbol{a+2b-2}}{\boldsymbol{a+b-1}}\right)$$



(2) 2 点 C，D の x 座標および CD の傾きから

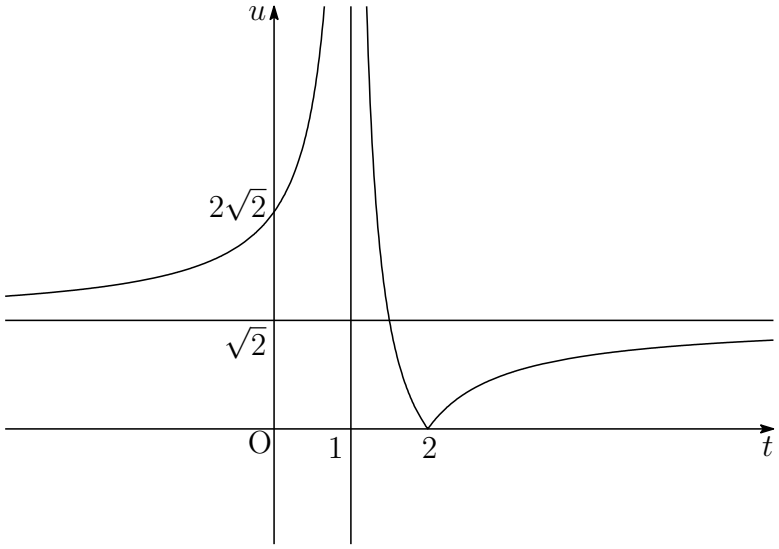
$$\mathrm{CD} = \sqrt{2}\left|\frac{2a+b-2}{a+b-1} - \frac{a}{a+b-1}\right| = \sqrt{2}\left|\frac{a+b-2}{a+b-1}\right|$$
$$= \sqrt{2}\left|\frac{t-2}{t-1}\right| = \boldsymbol{\sqrt{2}}\left|-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{t-1}} + \boldsymbol{1}\right|$$

(3) $t = a+b$ は，点 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ で最大値 5，点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ で最小値 3 をとるから，$3 \leqq t \leqq 5$ となり

$$f(t) = \sqrt{2}\left|-\frac{1}{t-1} + 1\right|$$

とおくと　$f(3) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$f(5) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

$u = f(t)$ のグラフは，双曲線 $u = \sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{t-1} + 1\right)$ のグラフをもとに考えると，次のようになる．



$3 \leqq t \leqq t$ において，$f(t)$ は単調増加であるから　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq \mathrm{CD} \leqq \dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$

(4) $a > 0,\ b > 0$ のとき，$t = a+b$ は，点 $(1,\ 1)$ で最小値 2，$a < 0,\ b < 0$ のとき，$t = a+b$ は，点 $(-1, -1)$ で最大値 -2 をとるから，$t \leqq -2,\ 2 \leqq t$ となり

$$f(-2) = \frac{4\sqrt{2}}{3},\quad f(2) = 0$$

したがって，上のグラフから　$\boldsymbol{0 \leqq \mathrm{CD} < \sqrt{2},\ \sqrt{2} < \mathrm{CD} \leqq \dfrac{4\sqrt{2}}{3}}$

10.4　極限 (数学 III)

28〈数列の極限〉

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ を求めよ．　(福岡大)

解答

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1^2+2^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}-1\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(4n+1)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}-1\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2(4n+1)}{n+1}-1\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}-1\right)=8-1=\mathbf{7}\end{aligned}$$

29〈e の定義を用いた極限〉

$a_n=\dfrac{n^n}{n!}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ を用いてよい．　(東京都市大)

解答

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\Bigg/\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\Bigg/\frac{(n+1)^n}{n!}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}\end{aligned}$$

ネイピア数 e

1 と n 個の $1+\dfrac{1}{n}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+1}\left\{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} > \sqrt[n+1]{1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

両辺を $n+1$ 乗すると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列である．

また，1 と $n+1$ 個の $\dfrac{n}{n+1}$ の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+2}\left\{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\right\} > \sqrt[n+2]{1\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

両辺を $n+2$ 乗すると

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

上式の逆数をとると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ とすると，数列 $\{b_n\}$ は単調減少列である．したがって

$$2=a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}<\cdots<b_2<b_1=4$$

また，$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ であるから　$0<b_n-a_n=\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{4}{n}$

はさみうちの原理により　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

この極限値をネイピア数といい，e ($\fallingdotseq 2.71828\cdots$) で表す．

東大理系 2016 年 1 番

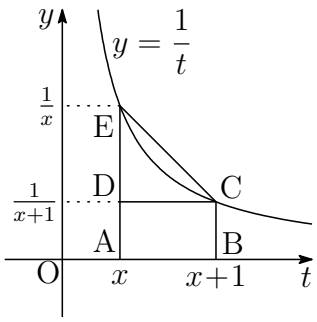
e を自然対数の底，すなわち $e=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ とする．すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

解答 $f(x)=x\{\log(x+1)-\log x\}$，$g(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x)&=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\\ &=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{x+1},\\ g'(x)&=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\\ &=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\end{aligned}$$

区間 $x\leqq t\leqq x+1$ における $y=\dfrac{1}{t}$ のグラフと t 軸で囲まれた部分の面積，右の図の長方形 ABCD および台形 ABCE の面積の大小関係から



$$\frac{1}{x+1}<\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$$

したがって　　$f'(x)>0$，$g'(x)<0$

$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x)<\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$$

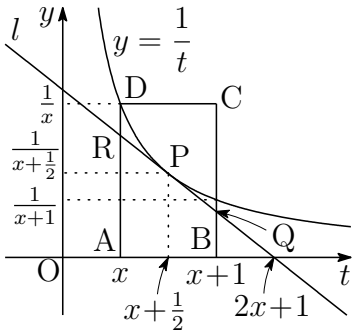
また　　$\lim\limits_{x\to\infty}\{g(x)-f(x)\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$

すなわち　　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$

$g(x)$ は単調減少であるから　　$g(x)>\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$

したがって　$f(x)<1<g(x)$　　よって　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

別解 曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ の点 $\mathrm{P}\left(x+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$ における接線を l とし $(x>0)$，l と直線 $t=x$，$t=x+1$ との交点をそれぞれ R，Q とする．右の図のように $x \leqq t \leqq x+1$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ および t 軸で囲まれた図形の面積と 2 つの四角形 ABCD および ABQR の面積との大小関係により



$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}}<\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x+\frac{1}{2}}<\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$$

したがって $\quad \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<1<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

よって $\quad \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

補足 上の図から，$x>0$ のとき $\quad \dfrac{1}{x+1}<\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{x}$

別解と同様にして[19] $\quad \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

$h(x)=(x+1)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと，上の図に注意して

$$h'(x)=\log(x+1)-\log x+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{x}<0$$

$f(x)$ は単調増加，$h(x)$ は単調減少であるから，前ページと同様の議論により

$$f(x)<1<h(x), \quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}h(x)=1$$

$F(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，$H(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}H(x)=e$$

$F(x)=H(-x-1)$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}H(-x-1)=\lim_{x\to\infty}H(x-1)=e$$

$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=e$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=e$ であるから $\quad \lim\limits_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

[19] 数列の証明は，http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf の p.9 を参照．

e の無理性

1997 大阪大学 (理系) 後期

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^ne^{1-x}$ と，その定積分 $a_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を考える．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上で $0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ．

(2) a_1 を求めよ．$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ．

解答 (1) $f_n(x)$ を微分すると　$f_n'(x)=x^{n-1}(n-x)e^{1-x}$

$0<x<1$ において $f_n'(x)>0$ であるから，$f_n(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で単調増加である．よって，$f_n(0)=0$，$f_n(1)$ より　$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$

$f_n(x)$ は，つねには 0 または 1 ではないので

$$\int_0^1 0\,dx<\int_0^1 f_n(x)\,dx<\int_0^1 1\,dx \quad \text{よって} \quad 0<a_n<1$$

(2) $a_1=\displaystyle\int_0^1 xe^{1-x}=\left[-(x+1)e^{1-x}\right]_0^1=\boldsymbol{e-2}$

また　$a_n=\displaystyle\int_0^1 x^ne^{1-x}\,dx=\int_0^1 x^n(-e^{1-x})'\,dx$

$$=\left[-x^ne^{1-x}\right]_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}\,dx=\boldsymbol{-1+na_{n-1}}$$

(3) (2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき　$\dfrac{a_n}{n!}-\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=-\dfrac{1}{n!}$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{a_k}{k!}-\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right\}=-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$

したがって　$\dfrac{a_n}{n!}-a_1=-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$　よって　$\boldsymbol{\dfrac{a_n}{n!}=e-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}$

(4) (3) の結果から　　$a_n = n!e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$

$n!e$ が整数であれば，上式において，右辺は整数となり，$0 < a_n < 1$ に反し，矛盾を生じる．よって，$n!e$ は整数とならない．■

$e = \frac{q}{p}$ を有理数 (p，q は自然数) と仮定すると，$p!e$ は整数となり，前ページ (4) の結論に反する．よって，e は無理数である．

オイラーは，このことについて，次のエレガントな証明 (1744 年) を与えている．

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{は無理数である．}$$

証明 n を自然数とすると

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$

であるから

$$\begin{aligned} n!e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n} \leqq 1 \end{aligned}$$

したがって　　$0 < n!e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < 1$

ここで，$e = \frac{q}{p}$ を有理数 (p，q は自然数) と仮定すると，$n = p$ のとき $n!e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ は整数となり，上式に反する．　**証終**

30〈格子点の個数と極限〉

n を正の整数とし，$y = n - x^2$ で表されるグラフと x 軸とで囲まれる領域を考える．この領域の内部および周に含まれ，x，y の値がともに整数である点の個数を $a(n)$ とする．(早稲田大)

(1) $a(5)$ を求めよ．

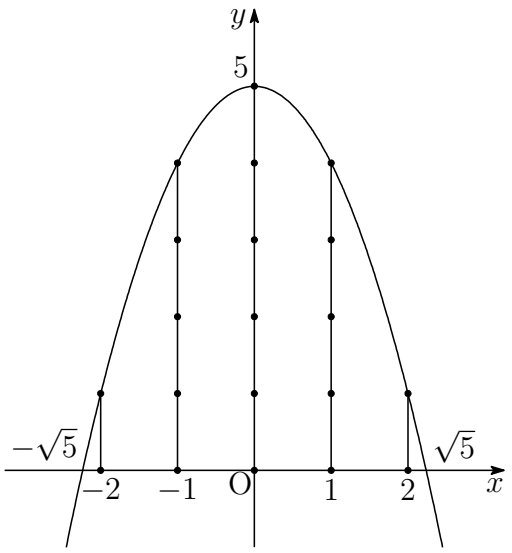
(2) $\sqrt{n}$ を超えない最大の整数を k とする．$a(n)$ を k と n の多項式で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}$ を求めよ．

解答 (1) 直線 $x = j$ 上の格子点の個数は $(5 - j^2) + 1 = 6 - j^2$

$[\sqrt{5}] = 2$ および y 軸に関する対称性に注意して

$$a(5) = 6 + 2\sum_{j=1}^{2}(6 - j^2) = 6 + 2\left(6\cdot 2 - \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 5\right) = \mathbf{20}$$



(2) (1) と同様にして

$$\begin{aligned} a(n) &= n + 1 + 2\sum_{j=1}^{k}(n + 1 - j^2) \\ &= n + 1 + 2\left\{(n+1)k - \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\right\} \\ &= (n+1)(1+2k) - \frac{1}{3}k(k+1)(2k+1) \\ &= \boldsymbol{(2k+1)\left\{(n+1) - \frac{1}{3}k(k+1)\right\}} \end{aligned}$$

(3) $k \leqq \sqrt{n} < k+1$ より　　$\sqrt{n} - 1 < k \leqq \sqrt{n}$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{k}{\sqrt{n}} \leqq 1$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 1$$

上式および (2) の結果から

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n^3}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(2k+1)\left\{(n+1) - \frac{1}{3}k(k+1)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left\{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{3}\cdot\frac{k}{\sqrt{n}}\left(\frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} \\
&= 2\cdot\left(1 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\right) = \boldsymbol{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

31〈数列の収束条件〉

k は定数で $k \neq 0$ とする．$a_1 = 1$，$ka_n + (2-k)a_{n-1} = 1$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ が収束するような k の値の範囲を求めよ．また，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(類 関西大)

解答 特性方程式 $kx + (2-k)x = 1$ を解くと　$x = \dfrac{1}{2}$

これから，漸化式は　$k\left(a_n - \dfrac{1}{2}\right) + (2-k)\left(a_{n-1} - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

$k \neq 0$ であるから　　$a_n - \dfrac{1}{2} = \left(1 - \dfrac{2}{k}\right)\left(a_{n-1} - \dfrac{1}{2}\right)$

したがって，数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $a_1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$，公比 $1 - \dfrac{2}{k}$ の等比数列であるから，$\{a_n\}$ が収束するとき

$$-1 < 1 - \frac{2}{k} \leqq 1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k > 1}$$

このとき　$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \dfrac{1}{2}\right) = 0$　　よって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}}$

32〈漸化式と極限〉

$a_1 = 27$，$a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ がある．(東京理科大)

(1) a_3，a_4 を求めよ．

(2) $b_n = \log_3 a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．また，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

解答 (1) (2)

$a_1 = 27$, $a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}$ より，$a_n > 0$ であるから $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$\log_3 a_{n+1} = \log_3 3\sqrt{a_n} \quad \text{ゆえに} \quad \log_3 a_{n+1} = \frac{1}{2}\log_3 a_n + 1$$

$b_n = \log_3 a_n$ より　$b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + 1$　ゆえに　$b_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2}(b_n - 2)$

$b_1 = \log_3 a_1 = \log_3 27 = 3$，$b_1 - 2 = 1$ より，$\{b_n - 2\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n - 2 = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b_n = 2 + \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$a_n = 3^{b_n} = 3^{2+\frac{1}{2^{n-1}}}$ より　　$\boldsymbol{a_3 = 3^{\frac{9}{4}}}$, $\boldsymbol{a_4 = 3^{\frac{17}{8}}}$

よって　　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3^{2+\frac{1}{2^{n-1}}} = 3^2 = \boldsymbol{9}$

33〈漸化式と極限〉

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=2,\ a_{n+1}=\sqrt{4a_n-3}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定義されている．

(信州大)

(1) すべての自然数 n について，不等式 $2 \leqq a_n \leqq 3$ が成り立つことを証明せよ．

(2) すべての自然数 n について，不等式 $|a_{n+1}-3| \leqq \dfrac{4}{5}|a_n-3|$ が成り立つことを証明せよ．

(3) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

解答 (1) $\quad (*)\ 2 \leqq a_n \leqq 3$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=2$ より，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，$2 \leqq a_k \leqq 3$ より

$$\sqrt{5} \leqq \sqrt{4a_k-3} \leqq 3 \quad \text{ゆえに} \quad 2 \leqq a_{k+1} \leqq 3$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

別解

$$a_{n+1}-2=\sqrt{4a_n-3}-2=\frac{4(a_n-2)+1}{\sqrt{4a_n-3}+2}$$

$$a_{n+1}-3=\sqrt{4a_n-3}-3=\frac{4(a_n-3)}{\sqrt{4a_n-3}+3}$$

$a_1=2$ より，上の 2 式から，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n-2>0,\ a_n-3<0 \quad \text{ゆえに} \quad 2<a_n<3$$

よって，すべての自然数 n について，$2 \leqq a_n \leqq 3$ が成立する．

(2) $a_{n+1}-3=\sqrt{4a_n-3}-3=\dfrac{4(a_n-3)}{\sqrt{4a_n-3}+3}=\dfrac{4}{a_{n+1}+3}(a_n-3)$

$a_{n+1} \geqq 2$ であるから

$$|a_{n+1}-3|=\frac{4}{a_{n+1}+3}|a_n-3| \leqq \frac{4}{5}|a_n-3|$$

(2) の結果から，$|a_n-3| \leqq |a_1-3|\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$

したがって $\quad \lim\limits_{n\to\infty}|a_n-3|=0 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3}$

34〈漸化式と極限〉

次の無限級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2-n}-(-1)^n}{2^{3n+1}}$ (奈良県立医大)

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}$ (神奈川大)

解答 (1) $\dfrac{3^{2-n}-(-1)^n}{2^{3n+1}}=\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{24}\right)^n-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^n$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2-n}-(-1)^n}{2^{3n+1}}=\frac{9}{2}\cdot\frac{\frac{1}{24}}{1-\frac{1}{24}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{8}}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}$$
$$=\frac{9}{2\cdot 23}+\frac{1}{2\cdot 9}=\boldsymbol{\frac{52}{207}}$$

(2) 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2+4k-3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

よって，求める無限級数の和は

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

35〈無限等比級数の収束条件〉

$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数 θ に対し，$\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を初項 1，公比 $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2$ の等比数列とする．$\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき無限等比級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ．また，無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する θ の値の範囲を求めよ．　(福岡大)

解答 公比を r とすると

$$r = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 2$$

$\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき　$r = 2\sin\dfrac{\pi}{3} - 2 = \sqrt{3} - 2$　ゆえに　$|r| < 1$

このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束して，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-(\sqrt{3}-2)} = \frac{1}{3-\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}$$

また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する条件は，$|r| < 1$ であるから

$$-1 < 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 2 < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} < \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{3}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5\pi}{3}$ であるから

$$\frac{\pi}{6} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7\pi}{6}}$$

36〈極限の図形への応用〉

AB = AC，BC = 1，$B = 2\theta$ である二等辺三角形 ABC がある．これに内接する円に接し，辺 BC に平行な直線が辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ D_1，E_1 とし，線分 D_1E_1 の長さを a_1 とする．さらに三角形 AD_1E_1 に内接する円に接し，辺 D_1E_1 に平行な直線と辺 AD_1，AE_1 との交点を D_2，E_2 とし，線分 D_2E_2 の長さを a_2 とするという操作を行い，これを順次繰り返す．このとき，n 回目の操作で引くことのできる線分 D_nE_n の長さは $a_n =$ [ア] である．また，この操作を続けるとき，無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を $\cos B$ で表すと [イ] である．(南山大)

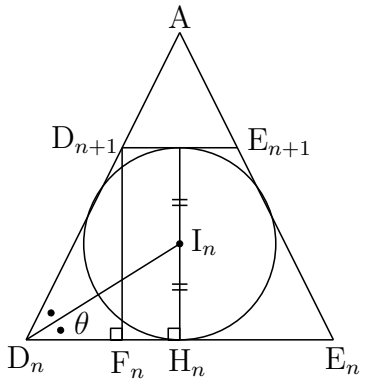
解答 D_{n+1} から D_nE_n に垂線 $D_{n+1}F_n$ を引く．$\triangle AD_nE_n$ の内接円の中心を I_n とし，I_n から D_nE_n に垂線 I_nH_n を引くと

$$I_nH_n = D_nH_n\tan\theta = \frac{1}{2}a_n\tan\theta,$$
$$D_{n+1}F_n = D_nF_n\tan 2\theta = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})\tan 2\theta$$

$D_{n+1}F_n = 2I_nH_n$ であるから　$\dfrac{1}{2}(a_n - a_{n+1})\tan 2\theta = 2\cdot\dfrac{1}{2}a_n\tan\theta$

$$\frac{(a_n - a_{n+1})\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = a_n\tan\theta \quad \text{したがって} \quad a_{n+1} = a_n\tan^2\theta$$

$a_0 = BC = 1$ とすると，$\{a_n\}$ の公比は $\tan^2\theta$ であるから　$\boldsymbol{a_n = \tan^{2n}\theta}$



$0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$0 < \tan^2\theta < 1$ より，無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)}{\cos 2\theta} = \boldsymbol{\frac{1-\cos B}{2\cos B}}$$

37〈関数の極限〉

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b)=0$ が成り立つように定数 a，b を定めよ．

(藤田保健衛生大)

解答

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3}x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+2x+1)-3x^2}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3}x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

上式から，$f(x)=\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと　$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

したがって

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b)=\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)+\left(a+\sqrt{3}\right)x+\left(b+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

の極限値が 0 であるとき　　$a+\sqrt{3}=0,\quad b+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=0$

よって　　$\boldsymbol{a=-\sqrt{3},\ \ b=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

38〈関数の連続〉

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x^2} & (x\neq 0)\\ A & (x=0)\end{cases}$$

で定義する．関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続になるように定数 A の値を定めよ．

(岩手大)

解答

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{-1}{\cos x+1}=-\frac{1}{2}$$

$x=0$ で関数 $f(x)$ が連続であるから，$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$ より

$$\boldsymbol{A=-\frac{1}{2}}$$

39〈複素数平面と極限〉

n を 2 以上の自然数とし，$z=\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n}$ とする．ただし，i は虚数単位とする． (関西大)

(1) z^n と $w=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)$ のそれぞれの値を求めよ．

(2) 等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{a_n}$ を満たす実数 a_n を $\cos\dfrac{\pi}{n}$ を用いて表せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2a_n$ を求めよ．

解答 (1) $z=\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n}$ より

$$z^n=\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^n=\cos\pi+i\sin\pi=\boldsymbol{-1},$$
$$\begin{aligned}w&=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)\\&=z^n-1=-1-1=\boldsymbol{-2}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $1+z+\cdots+z^{n-2}+z^{n-1}=\dfrac{2}{1-z}$

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}z^k=\frac{2(1-\overline{z})}{|1-z|^2}=\frac{2(1-\overline{z})}{2-(z+\overline{z})}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$$

$z^k=\cos\dfrac{k\pi}{n}+i\sin\dfrac{k\pi}{n}$ であるから，上式の両辺の虚部を比較して

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{a_n=1-\cos\frac{\pi}{n}}$$

別解

$$2\sin\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi-\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{2n-1}{2n}\pi=2\cos\frac{\pi}{2n}$$

したがって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$

よって $\boldsymbol{a_n=1-\cos\dfrac{\pi}{n}}$

(3) (2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{1+\cos\frac{\pi}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2\frac{\pi^2}{1+\cos\frac{\pi}{n}}=1^2\cdot\frac{\pi^2}{1+1}=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}$$

10.5　微分法 (数学 III)

40〈微分係数を用いた極限〉

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}$　(岡山理科大)

(2) $\lim_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}$　(a は定数)　(福島大)

解答　(1)　$f(x)=e^{3x}$ とおくと　$f'(x)=3e^{3x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}\cdot 3=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

補足　$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ であるから，$\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3}{2}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

(2)　$f(x)=\sin x$ とおくと　$f'(x)=\cos x$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sin(x-a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=1\cdot f'(a)=\boldsymbol{\cos a}$$

41〈第 n 次導関数〉

関数 $y=\log(2x-1)$ の第 n 次導関数を推測し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ．(弘前大)

解答 $y=\log(2x-1)$ を順次微分すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{2x-1} = 2(2x-1)^{-1}, \\ y'' &= (-1)\cdot 2^2(2x-1)^{-2}, \\ y''' &= (-1)(-2)\cdot 2^3(2x-1)^{-3}, \\ y^{(4)} &= (-1)(-2)(-3)\cdot 2^4(2x-1)^{-4} \end{aligned}$$

したがって

$$(*)\quad y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!2^n(2x-1)^{-n}$$

と推測される．

［1］$n=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$y^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!2^k(2x-1)^{-k}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= (-1)^{k-1}(k-1)!2^k\cdot(-k)(2x-1)^{-k-1}\cdot 2 \\ &= (-1)^k k!2^{k+1}(2x-1)^{-k-1} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

42〈連続性・微分可能性〉

a を実数とする．すべての実数 x で定義された関数 $f(x)=|x|(e^{2x}+a)$ は $x=0$ で微分可能であるとする． (京都工織大)

(1) a および $f'(0)$ の値を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ．

(3) 右側極限 $\lim_{x\to+0}\dfrac{f'(x)}{x}$ を求めよ．さらに，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ．

解答 (1) $f(x)=\begin{cases} x(e^{2x}+a) & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -x(e^{2x}+a) & (x<0) \end{cases}$ であるから

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}(e^{2h}+a)=1+a,$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\{-(e^{2h}+a)\}=-(1+a)$$

$x=0$ で微分可能であるから

$$f'(0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

したがって　$f'(0)=1+a=-(1+a)$　よって　$\boldsymbol{a=-1,\ f'(0)=0}$

(2) (1) の結果から　$f'(x)=\begin{cases} (2x+1)e^{2x}-1 & (x>0) \\ -(2x+1)e^{2x}+1 & (x<0) \end{cases}$ であるから

$$\lim_{x\to+0}f'(x)=0=f'(0),\quad \lim_{x\to-0}f'(x)=0=f'(0)$$

よって，$f'(x)$ は $x=0$ で連続である．

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}2\cdot\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=2\cdot1=2$ に注意して

$$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\left(2e^{2x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=2+2=\mathbf{4},$$
$$\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\left(-2e^{2x}-\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=-2-2=-4$$

したがって　$\lim_{x\to+0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}\neq\lim_{x\to-0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}$

よって，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能ではない．

43〈接線の方程式〉

曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ 上の点 $(1,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ．　(広島市大)

解答 $x>0$，$y>0$ のとき，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0 \quad \text{ゆえに} \quad y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

曲線上の点 $(1,\ 4)$ における接線の傾きは　$y'=-\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}=-2$

よって，求める接線の方程式は

$$y-4=-2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-2x+6}$$

44〈媒介変数で表された曲線〉

a は正の定数とする．パラメータで表された曲線 $C:\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ について，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ で表せ．また，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ における法線の方程式を求めよ．

(明星大)

解答 $\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$，$\dfrac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\frac{\boldsymbol{\sin\theta}}{\boldsymbol{1-\cos\theta}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\Big/\frac{dx}{d\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}\Big/a(1-\cos\theta)=-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a(1-\cos\theta)^2}}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$x=a\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\right)$，　$y=a\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

法線の方程式は　$y-a\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-(2-\sqrt{3})\left\{x-a\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

すなわち　　$\boldsymbol{y=-(2-\sqrt{3})x+\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}\pi a}$

補足 $x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ のとき

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}\right)=\left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}\right)\right\}\frac{d\theta}{dx}$$

$$=\frac{g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)}{f'(\theta)^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)}{f'(\theta)^3}$$

本題では，$f'(\theta)=a(1-\cos\theta)$，$g'(\theta)=a\sin\theta$，$f''(\theta)=a\sin\theta$，$g''(\theta)=a\cos\theta$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a\cos\theta\cdot a(1-\cos\theta)-a\sin\theta\cdot a\sin\theta}{\{a(1-\cos\theta)\}^3}$$

$$=\frac{a^2(\cos\theta-1)}{a^3(1-\cos\theta)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}$$

45〈ハイポサイクロイド〉

xy 平面において，原点 O を中心とする半径 4 の円 C の内側を半径 1 の円 C' が内接しながら滑ることなく転がるとき，円 C' 上の点 P が描く曲線を X とする．ただし，点 P の初めの位置は点 $\mathrm{P_0}(4,\ 0)$ とする．円 C' の中心 O′ が原点 O の周りを θ だけ回転したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ の成分を θ を用いて表せ．　(岐阜薬大)

(2) x，y を θ を用いて表せ．

(3) 点 P における曲線 X の接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q，R とするとき，線分 QR の長さは一定であることを示せ．ただし，点 P は座標軸上の点でないものとする．

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = 3(\cos\theta,\ \sin\theta) = \boldsymbol{(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)}$

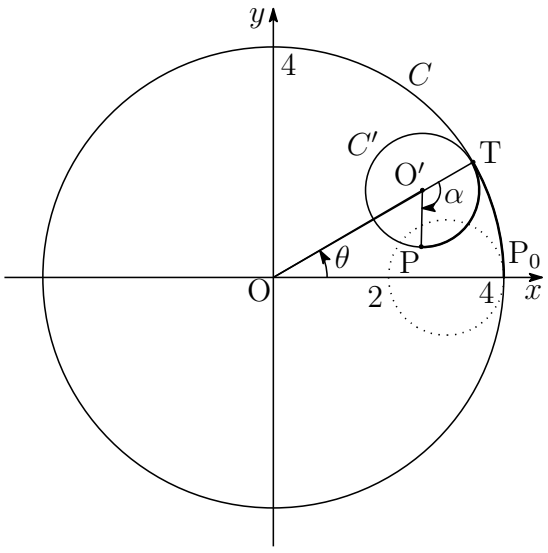
(2) C と C' の接点を T，$\alpha = \angle \mathrm{PO'T}$ とする．C および C' 上の弧について，$\overset{\frown}{\mathrm{P_0T}} = \overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから

$$4\theta = 1\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 4\theta$$

O′T の偏角が θ であるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{O'P}} &= (\cos(\theta-\alpha), \sin(\theta-\alpha)) \\
&= (\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta)) = (\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \\
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}} = (3\cos\theta,\ 3\sin\theta) + (\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \\
&= (3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta - \sin 3\theta) = (4\cos^3\theta,\ 4\sin^3\theta)
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{x = 4\cos^3\theta,\ y = 4\sin^3\theta}$



(3) (2) の結果から　$\dfrac{dx}{d\theta} = -12\cos^2\theta\sin\theta, \quad \dfrac{dy}{d\theta} = 12\sin^2\theta\cos\theta$

点 $\mathrm{P}(4\cos^3\theta,\ 4\sin^3\theta)$ が座標軸上にないとき，$\sin\theta\cos\theta \neq 0$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{12\sin^2\theta\cos\theta}{-12\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$$

したがって，点 $\mathrm{P}(4\cos^3\theta,\ 4\sin^3\theta)$ における接線の方程式は

$$y - 4\sin^3\theta = -\tan\theta(x - 4\cos^3\theta) \quad \text{すなわち} \quad y = -x\tan\theta + 4\sin\theta$$

この接線と x 軸，y 軸との交点 Q，R は

$$\mathrm{Q}(4\cos\theta,\ 0),\ \ \mathrm{R}(0,\ 4\sin\theta) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{QR} = 4$$

よって，線分 QR の長さは一定である．

定型問題の 1 つであるアステロイド (astroid)

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

が半径 a の円内をその 1/4 の半径を持つ円が滑ることなく転がるとき，内円の円周上の任意の一点の軌跡であることは入試問題でもよく取り上げられています．また，アステロイドが接線群の包絡線としても出題されています．今回は入試問題に出題される接線群の包絡線について解説します．

2016 年 大分大医医〈アストロイド (内サイクロイド)〉

中心が原点 O で半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する．円 C_2 上の点 P は最初に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ にあるとする．円 C_2 の中心を B とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表しなさい．

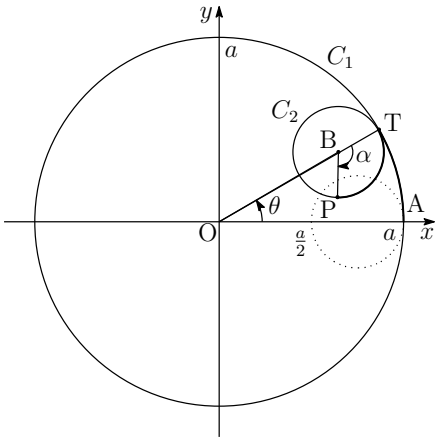
(3) $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めなさい．

解答　(1) C_1 と C_2 の接点を T，$\alpha=\angle\mathrm{PBT}$ とする．C_1 および C_2 上の弧について，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから

$$a\theta=\frac{a}{4}\times\alpha\quad\text{ゆえに}\quad\alpha=4\theta$$

BT の x 軸のなす角が θ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\frac{a}{4}(\cos(\theta-\alpha),\sin(\theta-\alpha))\\&=\frac{a}{4}(\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta))\\&=\boldsymbol{\frac{a}{4}(\cos 3\theta,-\sin 3\theta)}\end{aligned}$$



(2) $\mathrm{OB} = \mathrm{OT} - \mathrm{BT} = a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{3}{4}a$，$\angle \mathrm{AOB} = \theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \\ &= \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta - \sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{3}{4}a(\sin\theta + \sin 3\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{4}a(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

したがって $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = \dfrac{9}{8}a^2(1 - \cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta)$

$$= \frac{9}{8}a^2(1 - \cos 4\theta) = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta$$

求める距離を s とすると，$\dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$ の周期が $\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して

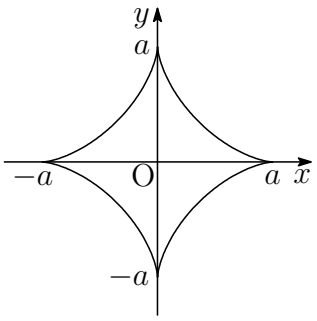
$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}a|\sin 2\theta|\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}a\sin 2\theta\, d\theta = \left[-3a\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{6a}$$

解説 (2) の結果は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$$

となり，その軌跡はアストロイドである．



$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) = a\left(-3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cos\theta\right)$$

$$= 3a\sin\theta\cos\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$= \frac{3}{2}a\sin 2\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

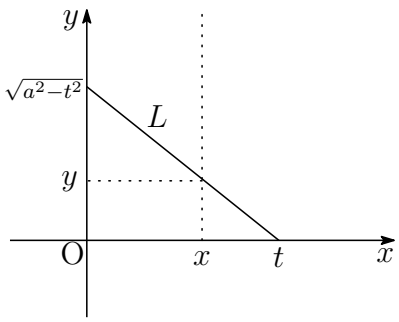
ゆえに $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2} = \dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$

アストロイド (astroid) の x 軸および y 軸に関する対称性により

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}a\sin 2\theta\, d\theta = 3a\Big[-\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \end{aligned}$$

補足 アステロイドは，次の線分 L の接線群の包絡線である．

長さ a の線分 L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，L の包絡線 (L の通る領域と通らない領域の境界線) を求める．
右の図のように L が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にあるとき，L 上の点 $(x,\ y)$ について



$$y = -\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}x + \sqrt{a^2-t^2} \quad \cdots(*)$$

が成立する．ここで，x を固定し，y を t の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}x - \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{a^2x - t^3}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$
これを $(*)$ に代入すると

$$y = -x^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$$

したがって　$\begin{aligned} y^2 &= x^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2 \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \end{aligned}$

よって　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

一般に，L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，上式は成立する．

関連 接線群の包絡線および内サイクロイド・外サイクロイドを参照．

46〈最大値から係数決定〉

関数 $f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}$ $(0\leqq x\leqq \pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ となるように定数 a の値を求めよ. (信州大)

解答 $f(x)=\dfrac{a\sin x}{1+\cos x}$ について，$0\leqq x\leqq \pi$ のとき，$\dfrac{\sin x}{\cos x+2}\geqq 0$ であるから

$$y'=a\cdot\frac{\cos x(\cos x+2)-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x+2)^2}=\frac{a(2\cos x+1)}{(\cos x+2)^2}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

$f(x)$ の最大値は　$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{-\frac{1}{2}+2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

したがって　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}$　これを解いて　$\boldsymbol{a=3}$

47〈区間内での関数の増減〉

関数 $f(x)=\dfrac{\log(1-x)}{x}$ は $0<x<1$ の範囲で減少することを示せ. (横浜国大)

解答 $f(x)=\dfrac{\log(1-x)}{x}$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{-\frac{x}{1-x}-\log(1-x)}{x^2}=\frac{-x-(1-x)\log(1-x)}{x^2(1-x)}$$

$g(x)=-x-(1-x)\log(1-x)$ とおくと　$g(0)=0$

$$g'(x)=-1+\log(1-x)-(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}=\log(1-x)$$

$0<x<1$ において，$g'(x)<0$ であるから，$g(x)$ は単調減少

$$g(x)<g(0)=0\quad\text{ゆえに}\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1-x)}<0$$

よって，$f(x)$ は，$0<x<1$ の範囲で減少する.

48〈最大・最小の応用〉

O を原点とする xy 平面上の曲線 $C : y = e^{-x}$ 上に点 $\mathrm{P}(a,\ e^{-a})$ $(a > 0)$ をとる．ただし，e は自然対数の底である．曲線 C 上の点 P における接線を ℓ とし，ℓ と x 軸との交点を Q，ℓ と y 軸との交点を R とする．　(横浜国大)

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) Q，R の座標を a を用いて表せ．

(3) 線分 QR の中点を M とする．a が $a > 0$ の範囲を動くとき，点 M の軌跡の方程式を求めよ．

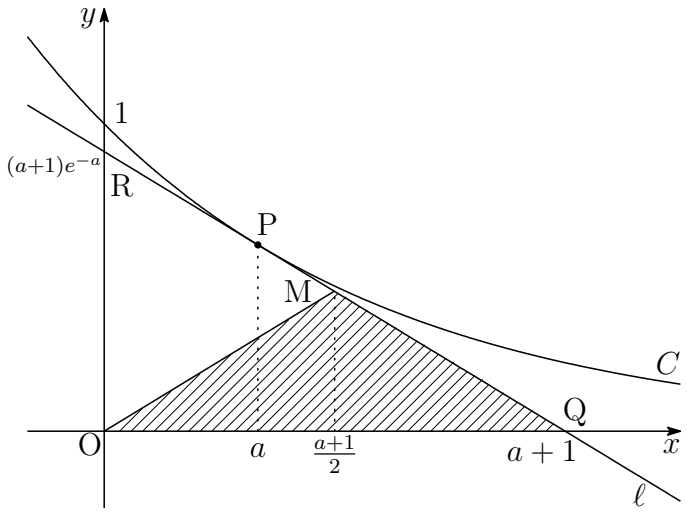
(4) (3) のとき，△OQM の面積 S の最大値を求めよ．

解答　(1) $y = e^{-x}$ を微分すると　$y' = -e^{-x}$

したがって，C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ e^{-a})$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -e^{-a}(x - a - 1)}$$

(2) (1) で求めた ℓ の方程式から　$\boldsymbol{\mathrm{Q}(a+1,\ 0),\ \mathrm{R}(0,\ (a+1)e^{-a})}$



(3) (2) の結果から，線分 QR の中点 $\mathrm{M}(x,\ y)$ の座標は

$$x = \frac{a+1}{2} \quad \left(x > \frac{1}{2}\right), \quad y = \frac{1}{2}(a+1)e^{-a}$$

上の第 1 式から　$a = 2x - 1$　これを第 2 式に代入して

$$\boldsymbol{y = xe^{-2x+1}} \quad \left(\boldsymbol{x > \frac{1}{2}}\right)$$

(4) $S = \triangle\mathrm{OQM} = \dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OQR}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+1)\cdot(a+1)e^{-a} = \frac{1}{4}(a+1)^2e^{-a}, \\ \frac{dS}{da} &= \frac{1}{2}(a+1)e^{-a} - \frac{1}{4}(a+1)^2e^{-a} \\ &= -\frac{1}{4}(a+1)(a-1)e^{-a} \end{aligned}$$

$a > 0$ における S の増減表は

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dS}{da}$		$+$	0	$-$
S		↗	$\frac{1}{e}$	↘

したがって，S は $a = 1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$ をとる．

49〈方程式の実数解の個数〉

方程式 $x^3 = k(x+1)^2$ が相異なる 3 つの実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ. (愛媛大)

解答 $x = -1$ は解ではないから　$k = x^3(x+1)^{-2}$

$f(x) = x^3(x+1)^{-2}$ とおくと

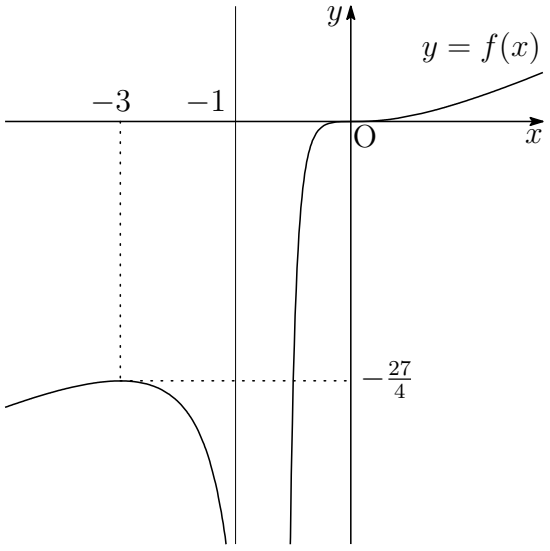
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(x+1)^{-2} + x^3 \cdot (-2)(x+1)^{-3} \\ &= \frac{3x^2(x+1) - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-\frac{27}{4}$	↘		↗	0	↗

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-1} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

したがって，$y = f(x)$ のグラフの概形は次のようになる.



$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ が相異なる 3 点を共有する k の値の範囲は

$$\boldsymbol{k < -\frac{27}{4}}$$

50〈共有点をもたない条件〉

a を正の実数とする．$x>0$ において，曲線 $y=\log x$ と曲線 $y=\sqrt{ax}$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ．　(琉球大 2020 年 2)

解答 $f(x)=\sqrt{ax}-\log x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{ax}-2}{2x}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

このとき極小値 $f\left(\dfrac{4}{a}\right)=2-\log\dfrac{4}{a}>0$ であるから

$$2>\log\frac{4}{a}\quad\text{ゆえに}\quad e^2>\frac{4}{a}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{a>4e^{-2}}$$

51〈接線の本数〉

関数 $f(x)=(1-x)e^x$ について，次の問いに答えよ．　(富山大)

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．ただし，$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ は用いてよい．

(2) 実数 a に対して，点 $(a,\ 0)$ を通る $y=f(x)$ の接線の本数を求めよ．

解答　(1) $f(x)=(1-x)e^x$ から

$$f'(x)=-xe^x,\quad f''(x)=-(x+1)e^x$$

$f'(x)=0$ とすると $x=0$，$f''(x)=0$ とすると $x=-1$

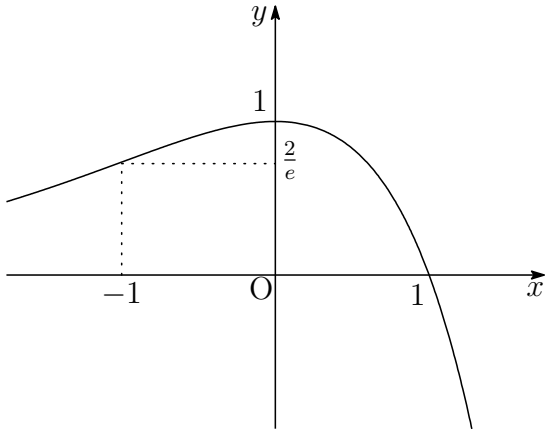
$f(x)$ の増減とグラフの凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{2}{e}$	↗	1	↘

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

よって　極大値 $f(0)=\mathbf{1}$，変曲点 $\left(\mathbf{-1},\ \dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{e}}\right)$

したがって，グラフの概形は次のようになる．

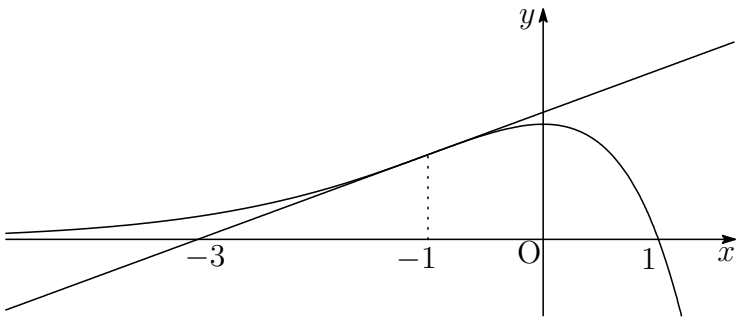


(2) 変曲点における接線の傾きは　　$f'(-1)=\dfrac{1}{e}$

したがって，曲線 $y=f(x)$ の変曲点 $\left(-1,\ \dfrac{2}{e}\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{2}{e}=\frac{1}{e}(x+1)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{1}{e}(x+3)$$

この直線の x 軸との共有点の x 座標は　$x=-3$



曲線 $y=f(x)$ の凹凸および x 軸との交点および上の直線から

$\boldsymbol{a<-3,\ 1<a}$ **のとき　2本,**
$\boldsymbol{a=-3,1}$ **のとき　1本,**
$\boldsymbol{-3<a<1}$ **のとき　0本**

52〈不等式の証明〉

すべての正の数 x，y に対して，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立つことを証明せよ．　(類 金沢大)

解答　$f(x)=x(\log x-\log y)-(x-y)$ とおくと　$f(y)=0$

$$f'(x)=\log x-\log y$$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	y	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

したがって　$f(x)\geqq 0$　よって　$x(\log x-\log y)\geqq x-y$

53〈媒介変数表示された点の速さ〉

a を正の定数，t を媒介変数として，$x(t)=e^{at}\cos t$，$y(t)=e^{at}\sin t$ で定まる曲線を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の速度ベクトルを $\vec{v}$ とすると $|\vec{v}|=$ [ア] である．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると $\cos\theta=$ [イ] である． (類 芝浦工大)

解答 $x'(t)=e^{at}(a\cos t-\sin t)$，$y'(t)=e^{at}(a\sin t+\cos t)$ より

$$\begin{aligned}x'(t)^2+y'(t)^2&=e^{2at}(a\cos t-\sin t)^2+e^{2at}(a\sin t+\cos t)^2\\&=e^{2at}(a^2+1)\end{aligned}$$

よって　　$|\vec{v}|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}=\boldsymbol{e^{at}\sqrt{a^2+1}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=(e^{at}\cos t)^2+(e^{at}\sin t)^2=e^{2at}$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=e^{at}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=e^{at}\cos t\cdot e^{at}(a\cos t-\sin t)+e^{at}\sin t\cdot e^{at}(a\sin t+\cos t)=ae^{2at}$$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\vec{v}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\dfrac{ae^{2at}}{e^{at}\sqrt{a^2+1}\cdot e^{at}}=\boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}}$

54〈不等式の証明とその利用〉

n を自然数とする．　(同志社大)

(1) $x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示せ．

(2) $x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) 極限値 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ．

解答　(1) $x>0$ のとき，$e^x-1>0$ であるから

$$\int_0^x(e^t-1)\,dt=\Big[\,e^t-t\,\Big]_0^x=e^x-x-1>0$$

よって，$x>0$ のとき　$e^x>x+1$

(2)　　$x>0$ のとき　$e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2!}-\cdots-\dfrac{x^n}{n!}>0$　$\cdots$(A)

［1］(1) の結論から，$n=1$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$\int_0^x\left(e^t-1-t-\cdots-\frac{t^n}{n!}\right)dt$$
$$=\Big[\,e^t-t-\frac{t^2}{2!}-\cdots-\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\Big]_0^x$$
$$=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\cdots-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}>0$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) が成立する．

(A) より，$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ が成立する．

(3) (2) の結論から，$x>0$ のとき

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

したがって　$\dfrac{e^x}{x^n}>\dfrac{x}{(n+1)!}>0$　ゆえに　$0<\dfrac{x^n}{e^x}<\dfrac{(n+1)!}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\mathbf{0}$$

10.6　積分法 (数学 III)

55〈定積分の計算〉

定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(\sin x)}{\tan x}\,dx$ を求めよ．　(横浜国立大)

解答　$\{\log(\sin x)\}' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$ より

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(\sin x)}{\tan x}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x)\{\log(\sin x)\}'\,dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \{\log(\sin x)\}^2\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left\{\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\log\frac{1}{2}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\log 2\right)^2 - (-\log 2)^2\right\} = \boldsymbol{-\frac{3}{8}(\log 2)^2}\end{aligned}$$

56〈定積分と数列の極限〉

自然数 n に対し $I_n = \displaystyle\int_0^{2n\pi} e^{-x}\cos x\,dx$，$J_n = \displaystyle\int_0^{2n\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ とおく．I_n と J_n を求め，さらに $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ と $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$ を求めよ．　(広島大)

解答　$\{e^{-x}\cos x\}' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$，$\{e^{-x}\sin x\}' = e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$ より

$$-I_n - J_n = \Big[\ e^{-x}\cos x\ \Big]_0^{2n\pi} = e^{-2n\pi} - 1$$

$$I_n - J_n = \Big[\ e^{-x}\sin x\ \Big]_0^{2n\pi} = 0$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{I_n = J_n = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-2n\pi})}$

よって　$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} J_n = \dfrac{1}{2}}$

57〈逆関数と定積分〉

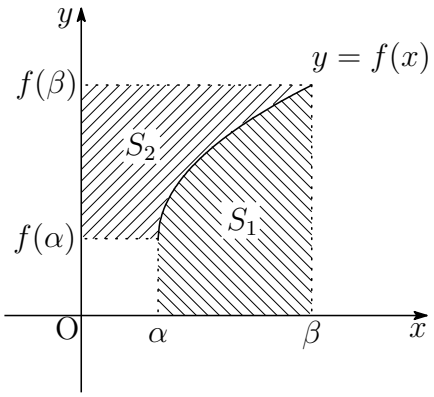
(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx+\int_1^e (\log y)^2\,dy$ を求めよ.

(2) $f(x)=\tan x$ とする. 関数 $y=f(x)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で逆関数 $x=f^{-1}(y)$ をもつ. 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$ および $\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$ を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx+\int_1^e \sqrt{\log y}\,dy$ を求めよ. (大阪市大)

解答 $S_1=\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, $S_2=\displaystyle\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)\,dy$ とすると $x=f^{-1}(y)$, $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$

$$\begin{aligned}S_1+S_2&=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)\,dy\\&=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\alpha^\beta xf'(x)\,dx\\&=\int_\alpha^\beta \{xf(x)\}'\,dx=\Big[\,xf(x)\,\Big]_\alpha^\beta=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)\end{aligned}$$



公式 $$\boldsymbol{\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)\,dy=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)}$$

次のように書くこともある.

$$\boldsymbol{\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)}$$

(1) $y = e^{\sqrt{x}}$ とすると　$\sqrt{x} = \log y$　ゆえに　$x = (\log y)^2$

$f(x) = e^{\sqrt{x}}$ とすると，$f^{-1}(y) = (\log y)^2$，$f(0) = 1$，$f(1) = e$ より

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^e (\log y)^2\,dy = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(y)\,dy$$
$$= 1\cdot f(1) - 0\cdot f(0) = \boldsymbol{e}$$

(2) $f(x) = \tan x$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx + \int_0^1 f^{-1}(y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx + \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{4})} f^{-1}(y)\,dy$$
$$= \frac{\pi}{4}\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0\cdot f(0) = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = -\Big[\ \log\cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\log 2$$

上の 2 式から　$\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2}$

(3) $y = e^{x^2}$ とすると，$x^2 = \log y$　ゆえに　$x = \sqrt{\log y}$

$f(x) = e^{x^2}$ とすると，$f^{-1}(y) = \sqrt{\log y}$，$f(0) = 1$，$f(1) = e$ より

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx + \int_1^e \sqrt{\log y}\,dy = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(y)\,dy$$
$$= 1\cdot f(1) - 0\cdot f(0) = \boldsymbol{e}$$

58〈定積分の等式から関数決定〉

実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ が等式 $f(x)=\sin^2 x+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ．(山形大)

解答 $k=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ とおくと　$f(x)=\sin^2 x+k$

$$\begin{aligned} k&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+k)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t+k\right)dt\\ &=\left[\ \frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+kt\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k \end{aligned}$$

これを解いて　$k=\dfrac{\pi}{2(2-\pi)}$　よって　$\boldsymbol{f(x)=\sin^2 x+\dfrac{\pi}{2(2-\pi)}}$

59〈定積分で表された関数の最大・最小〉

関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin|x-t|\,dt$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最小値と最大値を求めよ．(津田塾大)

解答 $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_0^x\sin(x-t)\,dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\sin(t-x)\,dt\\ &=\left[\ \cos(x-t)\ \right]_0^x-\left[\ \cos(t-x)\ \right]_x^{\frac{\pi}{2}}\\ &=2-\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2-\sin x-\cos x\\ &=2-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

よって　$x=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\mathbf{1}$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$

60〈定積分で表された関数の最大・最小〉

e を自然対数の底とし，$0 \leqq x \leqq e$ とする．関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^2 |e^t - x^2|\,dt$ について，次の問いに答えよ．(静岡大)

(1) 定積分を計算し，$f(x)$ を x を用いて表せ．

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，それらの値をとるときの x の値もそれぞれ求めよ．

解答　(1)　(i) $0 \leqq x^2 \leqq 1$，すなわち，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

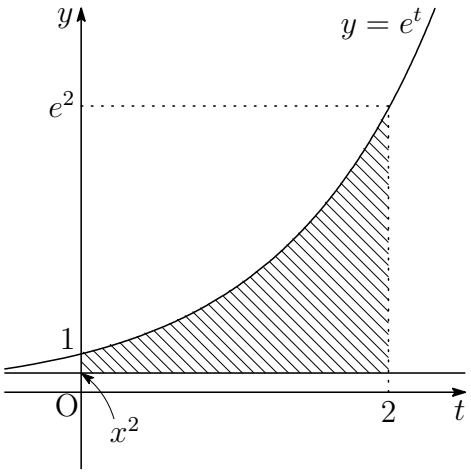
$$f(x) = \int_0^2 (e^t - x^2)\,dt = \Big[\, e^t - x^2 t \,\Big]_0^2 = -2x^2 + e^2 - 1$$

(ii) $1 \leqq x^2 \leqq e^2$，すなわち，$1 \leqq x \leqq e$ のとき

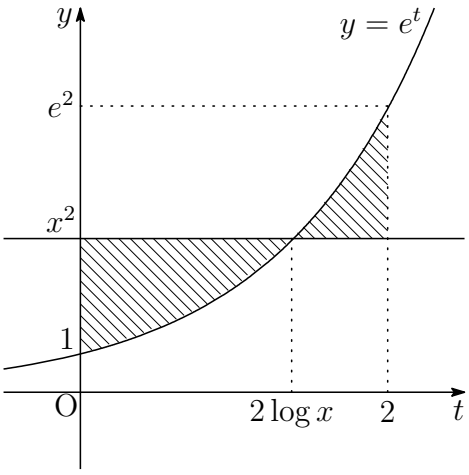
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{2\log x} (x^2 - e^t)\,dt + \int_{2\log x}^2 (e^t - x^2)\,dt \\ &= \Big[\, x^2 t - e^t \,\Big]_0^{2\log x} + \Big[\, e^t - x^2 t \,\Big]_{2\log x}^2 \\ &= 4x^2 \log x - 4x^2 + e^2 + 1 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -2x^2 + e^2 - 1 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 4x^2 \log x - 4x^2 + e^2 + 1 & (1 \leqq x \leqq e) \end{cases}}$

(i) $0 \leqq x \leqq 1$



(ii) $1 \leqq x \leqq e$



別解 $g(t)=e^t-x^2$ の原始関数の 1 つを $G(t)=e^t-x^2t$ とすると

$$G(0)=1,\quad G(2\log x)=x^2(1-2\log x),\quad G(2)=e^2-2x^2$$

$$\begin{aligned}
f(x)&=-\int_0^{2\log x} g(t)\,dt+\int_{2\log x}^{2} g(t)\,dt\\
&=-\Big[\,G(t)\,\Big]_0^{2\log x}+\Big[\,G(t)\,\Big]_{2\log x}^{2}\\
&=G(0)+G(2)-2G(2\log x)\\
&=1+e^2-2x^2-2\cdot x^2(1-2\log x)\\
&=\boldsymbol{4x^2\log x-4x^2+e^2+1}
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $\quad f'(x)=\begin{cases} -4x & (0<x<1)\\ 4x(2\log x-1) & (1<x<e)\end{cases}$

$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e^2-1	$\searrow$	e^2-3	$\searrow$	$(e-1)^2$	$\nearrow$	e^2+1

$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=e}$ で**最大値** $\boldsymbol{e^2+1}$，$\boldsymbol{x=\sqrt{e}}$ で**最小値** $\boldsymbol{(e-1)^2}$ をとる.

補足 $f(x)$ は，前頁の図の斜線部分の面積を表す.

61〈定積分で表された関数〉

関数 $f(x)$ が条件 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)^2\,dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ． (鳥取大)

(2) $f(x)$ を求めよ．

解答 (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x-t)^2 e^t\,dt \\ &= x^2\int_0^x e^t\,dt - 2x\int_0^x te^t\,dt + \int_0^x t^2e^t\,dt \end{aligned}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\int_0^x e^t\,dt + x^2e^x - 2\int_0^x te^t\,dt - 2x\cdot xe^x + x^2e^x \\ &= 2x\int_0^x e^t\,dt - 2\int_0^x te^t\,dt \\ &= 2x\Big[\ e^t\ \Big]_0^x - 2\Big[\ (t-1)e^t\ \Big]_0^x \\ &= 2x(e^x-1) - 2\{(x-1)e^x+1\} \\ &= \boldsymbol{2e^x - 2x - 2} \end{aligned}$$

補足 $\displaystyle\int f(x)e^x\,dx = \{f(x) - f'(x) + f''(x) - \cdots\}e^x + C$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2e^x - 2x - 2)\,dx \\ &= 2e^x - x^2 - 2x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$f(0)=\displaystyle\int_0^0 (0-t)^2e^t\,dt = 0$ であるから $2+C=0$ ゆえに $C=-2$

よって $\boldsymbol{f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2}$

解説 $f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\varphi_k'(x) &= \frac{1}{k}\left\{f'(x) - \frac{f''(x)}{k} + \frac{f'''(x)}{k^2} - \cdots\right\} \\
&= -\left\{-\frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\} \\
&= f(x) - \left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\} \\
&= f(x) - k\varphi_k(x)
\end{aligned}$$

よって $\quad \{\varphi_k(x)e^{kx}\}' = \varphi_k'(x)e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx}$
$$= \{f(x) - k\varphi_k(x)\}e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx}$$
$$= f(x)e^{kx}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\int f(x)e^{kx}\,dx &= \varphi_k(x)e^{kx} + C \qquad (C \text{ は積分定数}) \\
&= \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\}e^{kx} + C
\end{aligned}$$

とくに，$k = \pm 1$ のとき

$$\int f(x)e^{x}\,dx = \{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\}e^{x} + C$$
$$\int f(x)e^{-x}\,dx = -\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\}e^{-x} + C$$

62〈定積分で表された関数の極限〉

極限 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{2x-\pi}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \dfrac{t\sin t}{2+\cos t}\,dt$ を求めよ. (芝浦工大)

解答 $\dfrac{t\sin t}{2+\cos t}$ の原始関数を $F(t)$ とすると $F'(t)=\dfrac{t\sin t}{2+\cos t}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2x-\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{t\sin t}{2+\cos t}\,dt &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2x-\pi}\Big[\,F(t)\,\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{x}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cdot\frac{F(x)-F(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{2}F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}\end{aligned}$$

63〈定積分で表された関数と漸化式〉

正の整数 n について，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$ を次で定める．　(岐阜大)

$$f_1(x)=x\log x,\quad f_{n+1}(x)=(n+1)\int_1^x f_n(t)\,dt+\frac{1}{n+1}(x^{n+1}-1)$$

(1) 関数 $f_2(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f_n(x)$ の具体的な形を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ．

(3) $g(x)=|f_2(x)|-|x-1|$ とおくとき，$g(x)$ が $x=1$ で微分可能であることを証明せよ．また，微分係数 $g'(1)$ を求めよ．

解答　(1) $\displaystyle\int_1^x f_1(t)\,dt=\int_1^x t\log t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\log t-\frac{t^2}{4}\right]_1^x=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{4}(x^2-1)$

上式および与えられた漸化式から

$$\begin{aligned}f_2(x)&=2\int_1^x f_1(t)\,dt+\frac{1}{2}(x^2-1)\\&=2\left\{\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{4}(x^2-1)\right\}+\frac{1}{2}(x^2-1)=\boldsymbol{x^2\log x}\end{aligned}$$

(2)　(A)　$f_n(x)=x^n\log x$

［1］$n=1$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x)&=(k+1)\int_1^x t^k\log t\,dt+\frac{1}{k+1}(x^{k+1}-1)\\&=(k+1)\left[\frac{t^{k+1}}{n+1}\log t-\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_1^x+\frac{1}{k+1}(x^{k+1}-1)\\&=x^{k+1}\log x\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも (A) は成立する．

［1］, ［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

(3) $g(x) = |x^2 \log x| - |x-1|$ より　$g(1) = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+0} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2\log x - (x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1+0} \frac{(x^2-1)\log x - (x-1) + \log x}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1+0} \left\{ (x+1)\log x - 1 + \frac{\log x - \log 1}{x-1} \right\} \\
&= -1 + (\log x)'\Big|_{x=1} = -1+1 = 0, \\
\lim_{x\to 1-0} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1-0} \frac{-x^2\log x + (x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1-0} \frac{-(x^2-1)\log x + (x-1) - \log x}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1-0} \left\{ -(x+1)\log x + 1 - \frac{\log x - \log 1}{x-1} \right\} \\
&= 1 - (\log x)'\Big|_{x=1} = 1-1 = 0
\end{aligned}$$

上の 2 式から　$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

よって，$g(x)$ は $x=1$ で微分可能であり，$\boldsymbol{g'(1) = 0}$

64〈定積分と級数〉

$x_0=0$ とする．n を正の実数からなる数列 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ を $k=1,\cdots,n$ に対して $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} 2x\,dx=\frac{1}{n}$ を満たすものとする．(山口大)

(1) x_k を求めよ．

(2) $S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ とするとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

解答 (1) $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} 2x\,dx=\frac{1}{n}$ より $\quad\left[\,x^2\,\right]_{x_{k-1}}^{x_k}=\dfrac{1}{n}\quad$ ゆえに $\quad {x_k}^2-{x_{k-1}}^2=\dfrac{1}{n}$

$$\sum_{j=1}^{k}({x_j}^2-{x_{j-1}}^2)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n}\quad\text{ゆえに}\quad {x_k}^2-{x_0}^2=\frac{k}{n}$$

$x_0=0$，$x_k>0$ であるから $\quad\boldsymbol{x_k=\sqrt{\dfrac{k}{n}}}$

別解 ${x_k}^2-{x_{k-1}}^2=\dfrac{1}{n}$ より，$\{{x_k}^2\}$ は初項 ${x_0}^2=0$，公差 $\dfrac{1}{n}$ の等差数列．

$${x_k}^2=0+k\cdot\frac{1}{n}\quad x_k>0\text{ より}\quad x_k=\sqrt{\frac{k}{n}}$$

(2) (1) の結果から $\quad S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

公式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

65〈定積分と級数〉

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ に点 P_k $(k=1,2,\cdots,n)$ を $\angle \mathrm{P}_k\mathrm{OA}=\dfrac{k}{n}\pi$ を満たすようにとる．ただし，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0)$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{{\mathrm{OP}_1}^2}+\frac{1}{{\mathrm{OP}_2}^2}+\cdots+\frac{1}{{\mathrm{OP}_n}^2}\right)$$

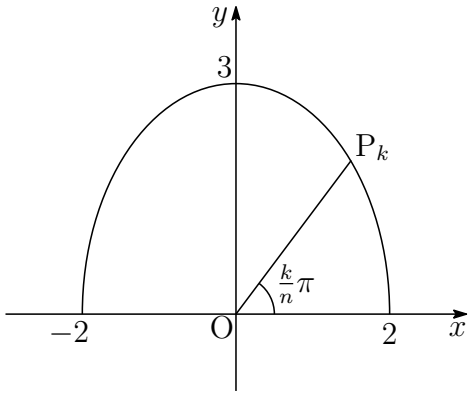
を求めよ．　(東北大)

解答　点 $\mathrm{P}_k\left(\mathrm{OP}_k\cos\dfrac{k}{n}\pi,\ \mathrm{OP}_k\sin\dfrac{k}{n}\pi\right)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上の点であるから

$$\frac{1}{4}\left(\mathrm{OP}_k\cos\frac{k}{n}\pi\right)^2+\frac{1}{9}\left(\mathrm{OP}_k\sin\frac{k}{n}\pi\right)^2=1$$

これから

$$\frac{1}{{\mathrm{OP}_k}^2}=\frac{1}{4}\cos^2\frac{k}{n}\pi+\frac{1}{9}\sin^2\frac{k}{n}\pi$$



したがって

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{{\mathrm{OP}_1}^2}+\frac{1}{{\mathrm{OP}_2}^2}+\cdots+\frac{1}{{\mathrm{OP}_n}^2}\right)\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\cos^2\frac{k}{n}\pi+\frac{1}{9}\sin^2\frac{k}{n}\pi\right)\\
&\quad=\int_0^1\left(\frac{1}{4}\cos^2\pi x+\frac{1}{9}\sin^2\pi x\right)dx\\
&\quad=\int_0^1\left\{\frac{1}{8}(1+\cos 2\pi x)+\frac{1}{18}(1-\cos 2\pi x)\right\}dx\\
&\quad=\left[\ \frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right)+\frac{1}{18}\left(x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right)\ \right]_0^1=\boldsymbol{\frac{13}{72}}
\end{aligned}$$

66〈定積分と数列の極限〉

次の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す．　(広大理系 2008 年 2)

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式

$$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) 次の値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

解答　(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき (n は自然数)

$$\int_0^x \frac{dt}{n+1} \leqq \int_0^x \frac{dt}{n+t} \leqq \int_0^x \frac{dt}{n} \quad \text{よって} \quad \frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 = \int_0^1 x^5\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(3) (1) の結果を利用して

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 \leqq \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right) \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 \quad \cdots(*)$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 = \frac{1}{6}$

上式および (2) の結果を $(*)$ に適用すると，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right) = \frac{1}{6} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{6}}}$$

67〈定積分と不等式〉

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ の値を求めよ. (富山大)

(2) 3 以上の整数 n に対して，不等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}\,dx < \frac{\pi}{6}$ が成り立つことを示せ.

解答 (1) $x=\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

x	$0 \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\,\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}}$$

(2) $n \geqq 3$，$0<x<1$ において $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^n}} < \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

したがって $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}\,dx < \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} < \frac{\pi}{6}$$

68〈定積分と不等式の応用〉

自然数 n に対して，$I(n)=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx$ とおく．　(お茶の水大)

(1) 等式 $I(n+2)=-\dfrac{1}{2}e^{-1}+\dfrac{n+1}{2}I(n)$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $0\leqq I(n)\leqq\dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} nI(n)$ を求めよ．

解答　(1) $I(n)=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx$ より

$$\begin{aligned}I(n+2)&=\int_0^1 x^{n+2}e^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n+1}(e^{-x^2})'\,dx\\&=-\frac{1}{2}\Big[\,x^{n+1}e^{-x^2}\,\Big]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 (x^{n+1})'e^{-x^2}\,dx\\&=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx\\&=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{n+1}{2}I(n)\end{aligned}$$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において　$0\leqq x^n e^{-x^2}\leqq x^n$

$$0\leqq\int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx\leqq\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}\Big[\,x^{n+1}\,\Big]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

よって　　$0\leqq I(n)\leqq\dfrac{1}{n+1}$

(3) (1)，(2) の結論から

$$0\leqq-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{n+1}{2}I(n)\leqq\frac{1}{n+3}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+3}=0$ より，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{n+1}{2}I(n)\right\}=0\quad\text{すなわち}\quad\lim_{n\to\infty}(n+1)I(n)=e^{-1}$$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty} nI(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot(n+1)I(n)=\dfrac{1}{1+0}\cdot e^{-1}=\boldsymbol{e^{-1}}$

69〈定積分と不等式の応用〉

n は正の整数とする．定積分 $I_k=\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．

(1) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}I_k$ とする．$S_1,\ S_2,\ S_3$ を求めよ．　(富山県大)

(2) 不等式 $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<I_k<\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ を示せ．

(3) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{100}}$ の整数部分を求めよ．

解答　(1) $I_k=\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\Big[\ \sqrt{x}\ \Big]_k^{k+1}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}I_k=2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2(\sqrt{n+1}-1)$$

よって　$S_1=\mathbf{2(\sqrt{2}-1)}$,　$S_2=\mathbf{2(\sqrt{3}-1)}$,　$S_3=2(\sqrt{4}-1)=\mathbf{2}$

(2) $k<x<k+1$ のとき　$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\,dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\,dx$$

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\frac{1}{\sqrt{k}}$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<I_k<\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<S_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2(\sqrt{n+1}-1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\qquad(*)$$

$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2(\sqrt{n}-1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}+1<2(\sqrt{n}-1)+1$　ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1\qquad(**)$

$(*)$，$(**)$ より　$2(\sqrt{n+1}-1) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}-1$

したがって　　$2\sqrt{n}-2 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}-1$

上式に $n=100$ を代入すると　$18 < \displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}} < 19$

よって，求める整数部分は　　**18**

70〈2 曲線と直線で囲まれた部分の面積〉

2 つの曲線 $C_1 : y = \log x$，$C_2 : y = 2\log(x-2)$ がある．　(類 芝浦工大)

(1) 曲線 $y = 2\log(x-2)$ の逆関数を求めよ．

(2) 曲線 C_1，曲線 C_2 および直線 $y = 0$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答　(1) $y = 2\log(x-2)$ を x について解くと　$x = e^{\frac{y}{2}} + 2$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y = e^{\frac{x}{2}} + 2}$

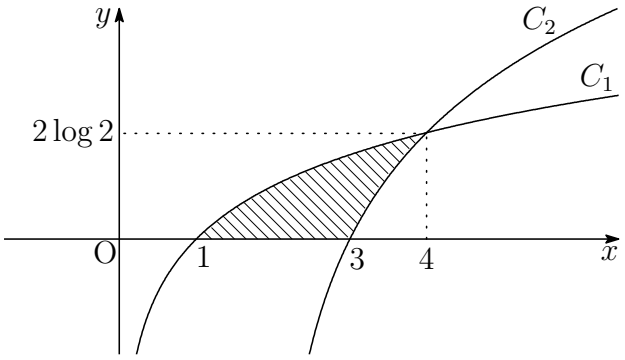
(2) C_1，C_2 の方程式から，y を消去すると　$\log x = 2\log(x-2)$　$\cdots$①

$$x = (x-2)^2 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x-4) = 0$$

① に注意して，これを解くと　$x = 4$

求める面積を S とすると，下の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \log x\,dx - \int_3^4 2\log(x-2)\,dx \\ &= \Big[\, x\log x - x \,\Big]_1^4 - 2\Big[\, (x-2)\log(x-2) - x \,\Big]_3^4 \\ &= \boldsymbol{4\log 2 - 1} \end{aligned}$$



別解

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\log 2} \{(e^{\frac{y}{2}} + 2) - e^y\}\,dy \\ &= \Big[\, 2e^{\frac{y}{2}} + 2y - e^y \,\Big]_0^{2\log 2} = \boldsymbol{4\log 2 - 1} \end{aligned}$$

71〈2 つの楕円で囲まれた部分の面積〉

2 つの楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，$x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．(山口大)

解答 $C_1:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ と $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ の第 1 象限における共有点の座標は

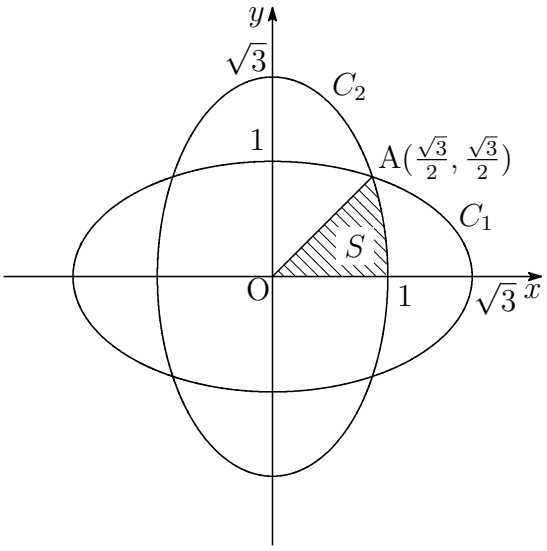
$$\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

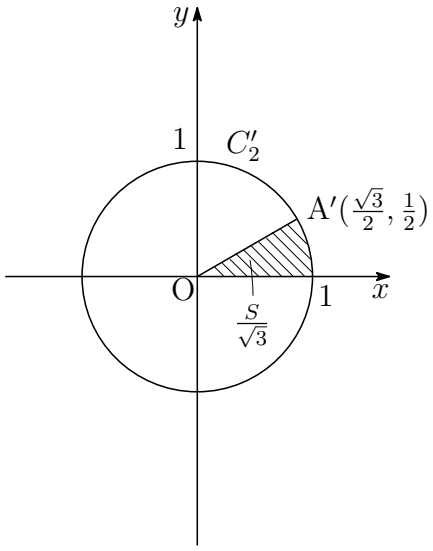
x 軸，線分 OA および C_2 で囲まれた部分の面積を S とする．C_2 を x 軸を元に y 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍だけ縮小したものを C_2' とすると，C_2 上の点 A は円 C_2' 上の点 A′ に対応する点で，OA′ の偏角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$\frac{S}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{6}\quad\text{よって}\quad S=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

図形の対称性により，求める面積は

$$8S=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$





別解 $C_1 : \dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1$ と $C_2 : x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1$ の第 1 象限における共有点の座標は

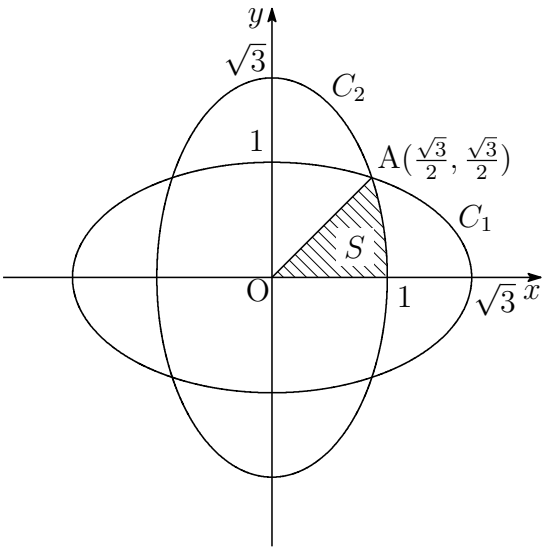
$$\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

C_2 は，$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$ と媒介変数ができ，点 $(1,\ 0)$，点 A はそれぞれ $\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{6}$ に対応する点である．x 軸，線分 OA および C_2 で囲まれた部分の面積を S とすると，ガウス・グリーンの定理により

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (xy' - x'y)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta)' - (\cos\theta)'\cdot\sqrt{3}\sin\theta\}\,d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi \end{aligned}$$

よって，求める面積は　　$8S = 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$

求める面積は　　$8S = 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$



大分大学 2022 年 6

$a > 0,\ b > 0,\ a \neq b$ とする．また，2 つの楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ の第 1 象限における交点を通り，y 軸に平行な直線の方程式を $x = c$ とする．領域 $D_1 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$，$0 \leqq x \leqq c$，$0 \leqq y$ の面積を S_1，領域 $D_2 : \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} \leqq 1$，$0 \leqq x \leqq c$，$0 \leqq y$ の面積を S_2 とする．以下の問に答えなさい．

(1) c を $a,\ b$ を用いて表しなさい．

(2) $S_1 + S_2$ を $a,\ b$ を用いて表しなさい．

解答　(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ より

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2, \quad \frac{a^2x^2}{b^2} + y^2 = a^2 \qquad (*)$$

上の 2 式の辺々の差をとると　$\left(\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{a^2}{b^2}\right)x^2 = b^2 - a^2$

$$\frac{(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)}{a^2b^2}x^2 = b^2 - a^2$$

$b^2 - a^2 \neq 0$ であるから　$x^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$　これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$\frac{b^4}{a^2 + b^2} + y^2 = b^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

第 1 象限における交点 $\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ から　$\boldsymbol{c = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

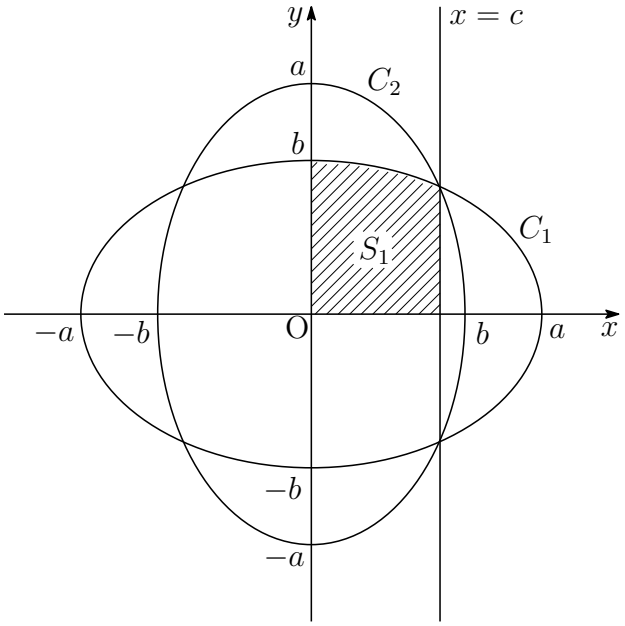
(2) 2 つの楕円を

$$C_1(\theta) = (a\cos\theta,\ b\sin\theta), \quad C_2(\theta) = (b\cos\theta,\ a\sin\theta)$$

とおく．(1) で求めた交点 $(c,\ c)$ が，$C_1(\alpha)$ および $C_2(\beta)$ であるとき

$$c = a\cos\alpha = b\sin\alpha = b\cos\beta = a\sin\beta \quad \left(0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

ゆえに　$\sin\alpha = \cos\beta$,　$\cos\alpha = \sin\beta$　すなわち　$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$　$\cdots$①



したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{a\cos\frac{\pi}{2}}^{a\cos\alpha} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} b\sin\theta(-a\sin\theta)\,d\theta = ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}ab\left[\ \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\ \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{4}ab\sin 2\alpha \end{aligned}$$

ここで　$\dfrac{1}{4}ab\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}(a\cos\alpha)(b\sin\alpha) = \dfrac{1}{2}c^2$

$$S_1 = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{2}c^2$$

同様にして

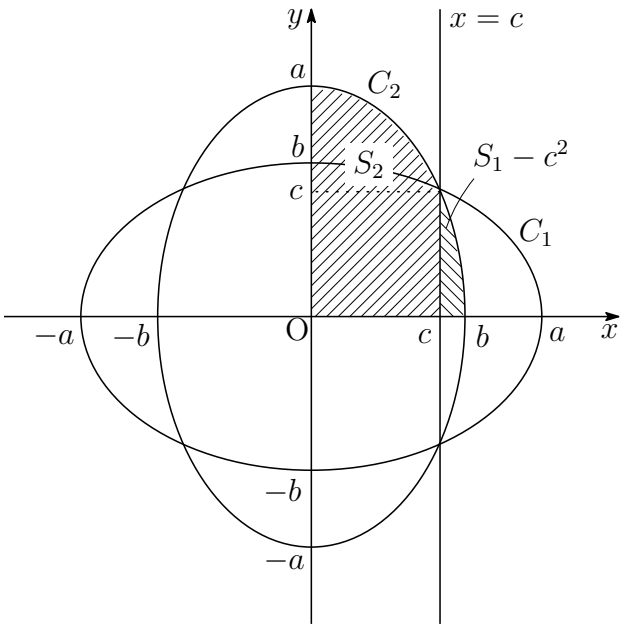
$$S_2 = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \frac{1}{2}c^2$$

① および (1) の結果により

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ab\{\pi - (\alpha + \beta)\} + c^2 = \boldsymbol{\frac{\pi ab}{4} + \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}}$$

補足 C_1 と C_2 は直線 $y = x$ に関して対称であるから，前頁の S_1 から下の図の面積 $S_1 - c^2$ と S_2 の面積の和を利用すると

$$(S_1 - c^2) + S_2 = \frac{\pi ab}{4} \quad \text{ゆえに} \quad S_1 + S_2 = \frac{\pi ab}{4} + c^2$$



別解 原点 O と交点 $(c,\ c)$ を結ぶ線分と y 軸および C_1 で囲まれた部分の面積を T_1 とすると，ガウス・グリーンの定理[20] により

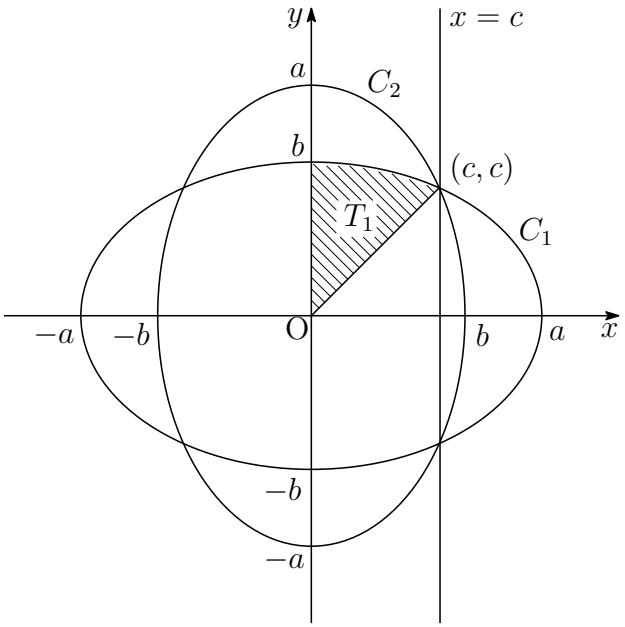
$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \{a\cos\theta(b\sin\theta)' - (a\cos\theta)'b\sin\theta\}d\theta \\ &= \frac{1}{2}ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \end{aligned}$$

同様に，原点 O と交点 $(c,\ c)$ を結ぶ線分と y 軸および C_2 で囲まれた部分の面積を T_2 とすると

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \{b\cos\theta(a\sin\theta)' - (b\cos\theta)'a\sin\theta\}d\theta \\ &= \frac{1}{2}ab\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \end{aligned}$$

$S_1 = T_1 + \dfrac{1}{2}c^2$，$S_2 = T_2 + \dfrac{1}{2}c^2$ であるから，① および (1) の結果により

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ab\{\pi - (\alpha+\beta)\} + c^2 = \boldsymbol{\frac{\pi ab}{4} + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$$



[20] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2021.pdf (p.11 を参照).

72〈媒介変数表示された曲線と面積〉

媒介変数 t を用いて $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ で表される曲線を C とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を t を用いて表せ．　(東京農工大)

(2) (1) で求めた t の式を用いて，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$ となる t の値を求めよ．

(3) 直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ が C と接するとき，実数 k の値を求めよ．

(4) 曲線 C，直線 $x=\sqrt{2}$，x 軸，y 軸のすべてで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答　(1) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}=\frac{\boldsymbol{e^t-e^{-t}}}{\boldsymbol{\sqrt{2}(e^t+e^{-t})}}$$

(2) (1) で求めた t の式により，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\frac{e^t-e^{-t}}{\sqrt{2}(e^t+e^{-t})}=\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

上の第 2 式から　$\sqrt{2}(e^{2t}-1)=e^{2t}+1$

$$(\sqrt{2}-1)e^{2t}=\sqrt{2}+1\quad\text{ゆえに}\quad e^{2t}=(\sqrt{2}+1)^2$$

$e^t>0$ より　$e^t=\sqrt{2}+1$　よって　$\boldsymbol{t=\log(\sqrt{2}+1)}$

(3) C の接線の傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるとき，(2) の結果から

$$e^t=\sqrt{2}+1,\quad e^{-t}=\frac{1}{e^t}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

このとき，接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

$$x_1=\frac{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\quad y_1=\frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2}=\sqrt{2}$$

この接線の方程式は　$y-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}(x-\sqrt{2})$　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって，求める k の値は　$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

補足 $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ より $(y>0)$

$$e^t-e^{-t}=\sqrt{2}x,\quad e^t+e^{-t}=2y$$

上の 2 式を $(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2=4$ に代入すると

$$(2y)^2-(\sqrt{2}x)^2=4 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{2}-y^2=-1 \ \ (y>0)$$

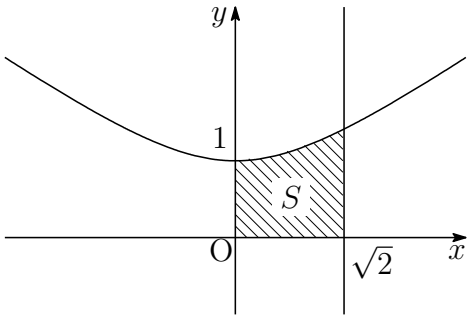
与えらた媒介変数曲線は，双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=-1$ の $y\geqq 1$ の部分である．

したがって　　$y=\sqrt{\dfrac{x^2}{2}+1}=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}>0$ および (3) の結果から

x	$0 \longrightarrow$	$\sqrt{2}$
t	$0 \longrightarrow$	$\log(\sqrt{2}+1)$

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^{\sqrt{2}} y\,dx=\int_0^{\log(\sqrt{2}+1)} \frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{2}}\,dt\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\log(\sqrt{2}+1)}(e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}+2t\ \right]_0^{\log(\sqrt{2}+1)}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}-1)^2}{2}+2\log(\sqrt{2}+1)\right\}\\
&=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\,\mathbf{\log(\sqrt{2}+1)}
\end{aligned}$$



解説 k を定数とすると，部分積分法により

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+k}\,dx &= x\sqrt{x^2+k} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k}\,dx + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\end{aligned}$$

ゆえに $\displaystyle\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$

また $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$

上の 2 式から，次の積分が得られる．

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\log|x+\sqrt{x^2+k}| + C$$

本題の $y = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}$ をこれに適用すると $(k=2)$

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2+2}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ \frac{x}{2}\sqrt{x^2+2} + \log(x+\sqrt{x^2+2})\ \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\mathbf{\log(\sqrt{2}+1)}\end{aligned}$$

九大理系 2002 年 1

平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている。ただし，e は自然対数の底である。原点を O，点 $(0,\ 1)$ を M とする。t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したとき点 P が描く曲線を C とする。時刻 t において，曲線 C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 x，y に対して y を x を用いて表せ。

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ。

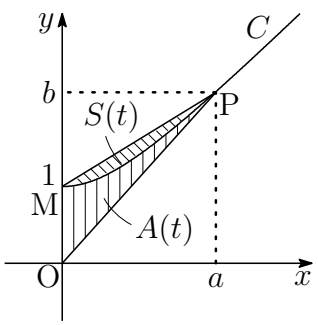
(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ。

解答 (1) $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$，$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ より　$y+x=e^t$，$y-x=e^{-t}$

ゆえに　　$(y+x)(y-x)=e^t\cdot e^{-t}$　したがって　$y^2-x^2=1$

$y>0$ であるから　　$\boldsymbol{y=\sqrt{x^2+1}}$

(2) P$(a,\ b)$ とすると，区間 $[0,\ a]$ における曲線 C および直線 OP : $y=\dfrac{b}{a}x$ について，(1) の結果から，$b=\sqrt{a^2+1}$ であるから



$$\sqrt{x^2+1}-\frac{b}{a}x=\frac{a\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{a^2+1}}{a}$$
$$=\frac{(a^2-x^2)}{a(a\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{a^2+1})}\geqq 0$$

したがって

$$A(t)=\int_0^a\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{b}{a}x\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{b}{a}x^2\ \right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}\left\{a\sqrt{a^2+1}+\log(a+\sqrt{a^2+1})-ab\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{ab+\log(a+b)-ab\right\}=\frac{1}{2}\log(a+b)$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{t}{2}}$$

$A(t)+S(t)=\dfrac{1}{2}a$ であるから　$S(t)=\dfrac{1}{2}a-A(t)=\boldsymbol{\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}-\dfrac{t}{2}}$

(3) $f(t)=A(t)-S(t)$ とおくと　$f(t)=t-\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}$

ゆえに　$f'(t)=1-\dfrac{e^t+e^{-t}}{4}=-\dfrac{e^{-t}}{4}(e^{2t}-4e^t+1)$

$f'(t)=0$ を解くと $(t\geqq 0)$

$t=\log(2+\sqrt{3})$

よって，右の増減表により

t	0	$\cdots$	$\log(2+\sqrt{3})$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	極大	↘

$\boldsymbol{t=\log(2+\sqrt{3})}$ **で最大**

別解 曲線 C の方程式を $x = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$，$y = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$ とおき，ガウス・グリーンの定理に適用すると

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{2}\int_t^0 (xy' - x'y)\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_t^0 \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\cdot\frac{e^u - e^{-u}}{2} - \frac{e^u + e^{-u}}{2}\cdot\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right) du \\ &= \frac{1}{2}\int_t^0 (-1)\,du = \boldsymbol{\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

注意 P，M はそれぞれ $u = t,\ 0$ に対応する点であり，動径の偏角が正の向きになる OP から OM に対応する積分区間をとる．

73〈面積を等分する直線〉

$y=e^x$ のグラフと，x 軸および 2 直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれる図形を D とする．点 $(a,\ 0)$ を通る傾きが e の直線で D を分割する．こうして得られた 2 つの図形の面積が等しくなるとき，a の値を求めよ．　(電気通信大)

解答 領域 D の面積を S とすると

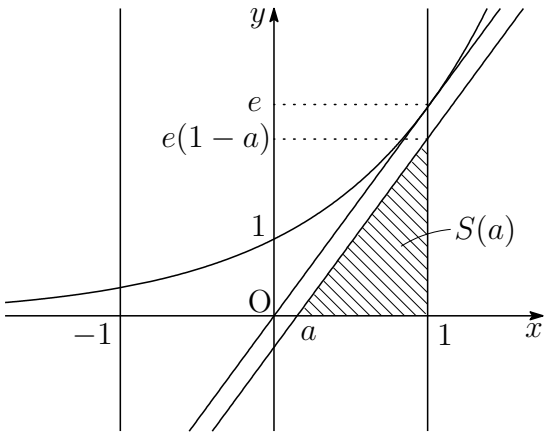
$$S=\int_{-1}^{1}e^x\,dx=\Big[\ e^x\ \Big]_{-1}^{1}=e-e^{-1}$$

点 $(a,\ 0)$ を通り傾き e の直線の方程式は $(0\leqq a\leqq 1)$

$$y=e(x-a) \qquad (*)$$

この直線と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると

$$S(a)=\frac{1}{2}(1-a)\cdot e(1-a)=\frac{1}{2}e(1-a)^2$$



$a=0$ のとき，直線 $(*)$ は点 $(1,\ e)$ で曲線 $y=e^x$ に接する．

$$S(0)=\frac{1}{2}e>\frac{1}{2}(e-e^{-1})=\frac{1}{2}S$$

$S(a)=\dfrac{1}{2}S$ を満たす a は $0<a<1$ であることに注意して

$$\frac{1}{2}e(1-a)^2=\frac{1}{2}(e-e^{-1})\quad\text{ゆえに}\quad(1-a)^2=1-e^{-2}$$

このとき，$1-a>0$ であるから

$$1-a=\sqrt{1-e^{-2}}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{a=1-\sqrt{1-e^{-2}}}$$

74〈面積と極限〉

n を自然数とし，正の実数全体で定義された関数 $f(x)=x^{\frac{1}{n}}\log x$ について考える．

(1) この関数の極値を求めよ． (高知女子大)

(2) $1 \leqq x \leqq e$ におけるこの関数のグラフ，x 軸および直線 $x=e$ とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) (2) で求めた面積を S_n とおくとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

解答 (1) $f(x)=x^{\frac{1}{n}}\log x$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}\log x+x^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}(\log x+n)$$

$f'(x)=0$ を解くと $(x>0)$ $\log x+n=0$ すなわち $x=e^{-n}$

x	(0)	$\cdots$	e^{-n}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

よって，極小値 $f(e^{-n})=\boldsymbol{-\frac{n}{e}}$

(2) $1 \leqq x \leqq e$ において，$f(x) \geqq 0$ であるから，求める面積を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\int_1^e x^{\frac{1}{n}}\log x\,dx=\frac{n}{n+1}\int_1^e (x^{\frac{n+1}{n}})'\log x\,dx\\&=\frac{n}{n+1}\left[x^{\frac{n+1}{n}}\log x-\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}\right]_1^e\\&=\boldsymbol{\frac{n}{n+1}e^{\frac{n+1}{n}}-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2(e^{\frac{n+1}{n}}-1)}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $\lim_{n\to\infty} S_n=e-(e-1)=\boldsymbol{1}$

75〈面積と最小値〉

関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$x>1$ とする．

(1) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．　(東京電機大)

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=a+1$ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ．ただし，$a>1$ とする．

(3) (2) で求めた S の最小値とそのときの a の値を求めよ．

解答　(1) $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	4	↗

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=2}$ で最小値 $\mathbf{4}$ をとる．

別解　$f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}=(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+2$

$x-1>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}=(x-1)+\frac{1}{x-1}+2$$
$$\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+2=4$$

等号が成立するとき　$x-1=\dfrac{1}{x-1}$　すなわち　$x=2$

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=2}$ で最小値 $\mathbf{4}$ をとる．

(2) (1) の結果から，$x>1$ のとき $f(x)$ であるから $(a>1)$

$$S=\int_a^{a+1} f(x)\,dx=\int_a^{a+1}\left\{(x-a)+a+1+\frac{1}{x-1}\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(x-a)^2+(a+1)x+\log|x-1|\right]_a^{a+1}$$
$$=\frac{1}{2}+(a+1)+\log a-\log(a-1)$$
$$=\boldsymbol{a+\frac{3}{2}+\log a-\log(a-1)}$$

(3) $g(a) = a + \dfrac{3}{2} + \log a - \log(a-1)$ とおくと $(a > 1)$

$$g'(a) = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a-1} = \frac{a^2 - a - 1}{a(a-1)}$$

$a > 1$ に注意して，$g'(a) = 0$ を解くと　$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

a	(1)	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		↘	極小	↗

したがって，$g(a)$ の最小値は

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} + \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \log\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ &= 2 + \frac{\sqrt{5}}{2} + \log\frac{1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} \\ &= 2 + \frac{\sqrt{5}}{2} + \log\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} \\ &= \mathbf{2 + \frac{\sqrt{5}}{2} + 2\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

76〈回転体の体積〉

xy 平面において，曲線 $y=\log x$ $(1 \leqq x \leqq e^2)$ と，x 軸，y 軸および直線 $y=2$ とで囲まれる図形 D を考える． (中央大)

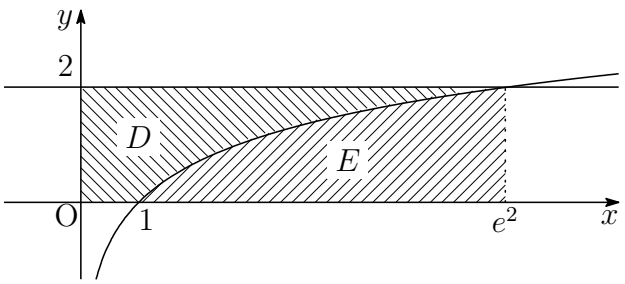
(1) 図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

(2) 図形 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

解答 (1) 求める回転体の体積を $V_y(D)$ とすると，$x=e^y$ より

$$\frac{V_y(D)}{\pi}=\int_0^2 x^2\,dy=\int_0^2 e^{2y}\,dy=\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2=\frac{e^4-1}{2}$$

よって $\quad V_y(D)=\boldsymbol{\dfrac{\pi(e^4-1)}{2}}$



補足 上の図の領域 E を y 軸の周りに回転させてできる回転体の体積を $V_y(E)$ とすると，バウムクーヘン型求積法により

$$\begin{aligned}\frac{V_y(E)}{2\pi}&=\int_1^{e^2} xy\,dx=\int_1^{e^2} x\log x\,dx\\&=\left[\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right]_1^{e^2}=\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

したがって $\quad V_y(E)=\dfrac{\pi(3e^4+1)}{2}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

(2) D を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積を $V_x(D)$ とすると，バウムクーヘン型求積法により

$$\frac{V_x(D)}{2\pi} = \int_0^2 yx\,dy = \int_0^2 ye^y\,dy = \Big[\,(y-1)e^y\,\Big]_0^2 = e^2+1$$

したがって　　$V_x(D) = \boldsymbol{2\pi(e^2+1)}$

補足 E を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積を $V_x(E)$ とする．

$x = e^y$ より　$\dfrac{dx}{dy} = e^y$

x	$1 \longrightarrow e^2$
y	$0 \longrightarrow 2$

$$\frac{V_x(E)}{\pi} = \int_1^{e^2} y^2\,dx = \int_0^2 y^2e^y\,dy$$
$$= \Big[\,e^y(y^2-2y+2)\,\Big]_0^2 = 2(e^2-1)$$

したがって　　$V_x(E) = \boldsymbol{2\pi(e^2-1)}$

確認 領域 $D+E$ は長方形であり，これを x 軸および y 軸に周りに回転された回転体の体積は

$$V_x(D)+V_x(E) = 4\pi e^2, \quad V_y(D)+V_y(E) = 2\pi e^4$$

77〈回転体の体積〉

曲線 $y=\sqrt{x}$，直線 $y=x-2$ および y 軸とで囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．　(防衛大)

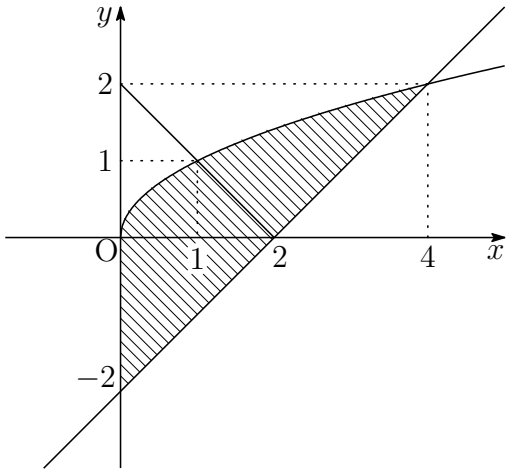
解答　$f(x)=\max\{\,|x-2|,\ \sqrt{x}\,\}$ とおくと $(0\leqq x\leqq 4)$ とおくと

$$f(x)=\begin{cases} |x-2| & (0\leqq x\leqq 1)\\ \sqrt{x} & (1\leqq x\leqq 4)\end{cases}$$

よって，求める回転体の体積を V とすると，下の図から

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^4 f(x)^2\,dx-\int_2^4 |x-2|^2\,dx\\ &=\int_0^1 (x-2)^2\,dx+\int_1^4 x\,dx-\int_2^4 (x-2)^2\,dx\\ &=\left[\ \frac{1}{3}(x-2)^3\ \right]_0^1+\left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_1^4-\left[\ \frac{1}{3}(x-2)^3\ \right]_2^4\\ &=\frac{7}{3}+\frac{15}{2}-\frac{8}{3}=\frac{43}{6}\end{aligned}$$

よって　　$V=\boldsymbol{\dfrac{43}{6}\pi}$



78 〈斜軸の周りの回転体の体積〉

a は $0 < a < 2$ を満たす実数とする．座標平面において，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ を通り，直線 $y = 2x$ に垂直な直線を ℓ とし，ℓ と直線 $y = 2x$ の交点を Q とする．また，曲線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq a)$，直線 ℓ，および直線 $y = 2x$ で囲まれた領域を D とする．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．　(東京理科大)

(2) 原点 O と点 Q の距離を求めよ．

(3) 線分 PQ の長さを求めよ．

(4) D の面積を求めよ．

(5) D を直線 $y = 2x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答　(1) ℓ は点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

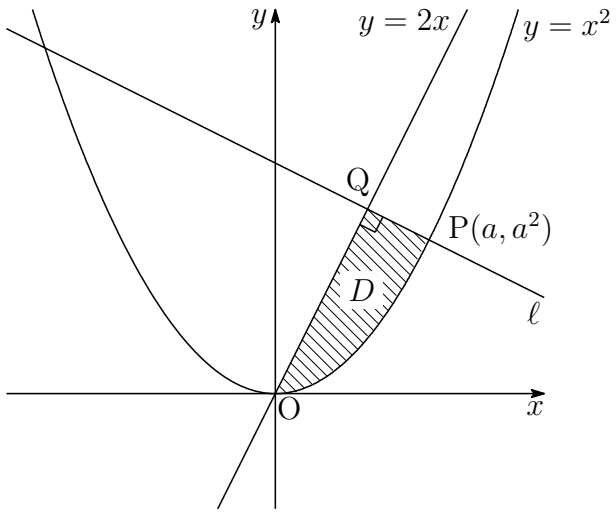
$$y - a^2 = -\frac{1}{2}(x - a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + a^2 + \frac{1}{2}a}$$

(2) 距離 OQ は，原点 O と直線 $\ell : x + 2y - 2a^2 - a = 0$ の距離であるから $(0 < a < 2)$

$$\mathrm{OQ} = \frac{|-2a^2 - a|}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{2a^2 + a}{\sqrt{5}}}$$

(3) 距離 PQ は，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ と直線 $\mathrm{OQ} : 2x - y = 0$ の距離であるから

$$\mathrm{PQ} = \frac{|2a - a^2|}{\sqrt{5}} = \frac{|a(2 - a)|}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{2a - a^2}{\sqrt{5}}}$$



(4) 直線 PQ の方程式が $y = ax$ であるから，領域 D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PQ} + \int_0^a (ax - x^2)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a(2a+1)}{\sqrt{5}}\cdot\frac{a(2-a)}{\sqrt{5}} + \frac{1}{6}a^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{a^2(-3a^2+7a+3)}{15}} \end{aligned}$$

(5) $s = \mathrm{OQ} = \dfrac{2t^2+t}{\sqrt{5}}$，$\mathrm{PQ} = \dfrac{2t-t^2}{\sqrt{5}}$ とおくと

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4t+1}{\sqrt{5}}$$

s	$0 \longrightarrow \frac{2a^2+a}{\sqrt{5}}$
t	$0 \longrightarrow a$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{2a^2+a}{\sqrt{5}}} \mathrm{PQ}^2\,ds = \int_0^a \left(\frac{2t-t^2}{\sqrt{5}}\right)^2 \frac{4t+1}{\sqrt{5}}\,dt \\ &= \frac{1}{5\sqrt{5}}\int_0^a (4t^5 - 15t^4 + 12t^3 + 4t^2)\,dt \\ &= \frac{1}{5\sqrt{5}}\left[\,\frac{2}{3}t^6 - 3t^5 + 3t^4 + \frac{4}{3}t^3\,\right]_0^a \\ &= \frac{\sqrt{5}}{75}(2a^6 - 9a^5 + 9a^4 + 4a^3) \end{aligned}$$

よって　　$V = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{75}(2a^6 - 9a^5 + 9a^4 + 4a^3)\pi}$

79〈断面積と体積〉

$V=\{(x,y,z)\,|\,(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2\leqq 1\}$ とする．　(東京女子大)

(1) V の平面 $z=t$ による切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．

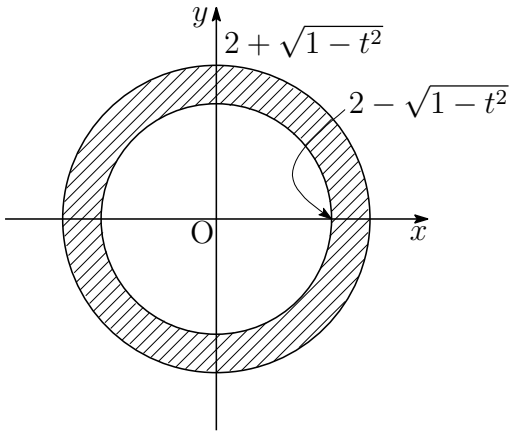
(2) V の体積を求めよ．

解答　(1) $z=t$ を $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2\leqq 1$ に代入すると

$$\begin{aligned}(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2&\leqq 1-t^2\\ -\sqrt{1-t^2}\leqq \sqrt{x^2+y^2}-2&\leqq \sqrt{1-t^2}\\ 2-\sqrt{1-t^2}\leqq \sqrt{x^2+y^2}&\leqq 2+\sqrt{1-t^2}\\ (2-\sqrt{1-t^2})^2\leqq x^2+y^2&\leqq (2+\sqrt{1-t^2})^2\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{S(t)}{\pi}=(2+\sqrt{1-t^2})^2-(2-\sqrt{1-t^2})^2=8\sqrt{1-t^2}$

よって　　$\boldsymbol{S(t)=8\pi\sqrt{1-t^2}}$



(2) (1) の結果から，求める体積 V は

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}=8\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{4\pi^2}$$

80〈回転体の体積〉

xy 平面上の曲線 $x=t^3$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{t^2}$ $(1 \leqq t \leqq 2)$，2 直線 $x=1$，$x=8$ と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．(関西大)

解答 $x=t^3$ より $\dfrac{dx}{dt}=3t^2$

x	$1 \longrightarrow 8$
t	$1 \longrightarrow 2$

求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi}=\int_1^8 y^2\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{t}}e^{t^2}\right)^2\cdot 3t^2\,dt=\int_1^2\frac{1}{t}e^{2t^2}\cdot 3t^2\,dt$$
$$=3\int_1^2 te^{2t^2}\,dt=\frac{3}{4}\Big[\,e^{2t^2}\,\Big]_1^2=\frac{3}{4}(e^8-e^2)$$

よって　　$\boldsymbol{V=\dfrac{3}{4}(e^8-e^2)\pi}$

81〈空間図形の体積の最大値〉

座標空間内の 3 点 A$(1,\ 0,\ 1)$，B$(0,\ 2,\ 3)$，C$(0,\ 0,\ 3)$ と原点を頂点とする四面体 OABC について考える．四面体 OABC を平面 $z = t$ $(0 < t < 3)$ で切ったときの切り口の面積を $f(t)$ とする．$0 \leqq t \leqq 1$ のとき $f(t) =$ [ア] である．また，$1 < t < 3$ のとき平面 $z = t$ と辺 AB の交点の座標は [イ] となり，$f(t) =$ [ウ] となる．

次に，四面体 OABC において，2 つの平面 $z = t$ と $z = t + 2$ $(0 < t < 1)$ にはさまれた部分の体積を $g(t)$ とすると，その導関数は $g'(t) =$ [エ] であり，$g(t)$ は $t =$ [オ] のとき最大値をとる．　(慶応大)

解答 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ 1)$ より，直線 OA 上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$(x,\ y,\ z) = t(1,\ 0,\ 1) = (t,\ 0,\ t) \tag{1}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ 2,\ 3)$ より，直線 OB 上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$(x,\ y,\ z) = \frac{t}{3}(0,\ 2,\ 3) = \left(0,\ \frac{2}{3}t,\ t\right) \tag{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 0,\ 3)$ より，直線 OB 上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると

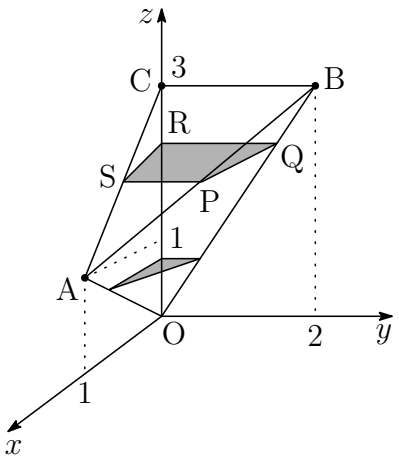
$$(x,\ y,\ z) = \frac{t}{3}(0,\ 0,\ 3) = (0,\ 0,\ t) \tag{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 2,\ 2)$ より，直線 AB 上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$(x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 1) + \frac{t-1}{2}(-1,\ 2,\ 2) = \left(\frac{3-t}{2},\ t-1,\ t\right) \tag{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 0,\ 2)$ より，直線 AC 上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$(x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 1) + \frac{t-1}{2}(-1,\ 0,\ 2) = \left(\frac{3-t}{2},\ 0,\ t\right) \tag{5}$$



(1)〜(3) より，$0 < t \leqq 1$ のとき，切り口は直角三角形であるから

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{2}{3} t = \boldsymbol{\frac{t^2}{3}}$$

$1 < t < 3$ のとき，$z = t$ と辺 AB の交点は，(4) より

$$\boldsymbol{\left(\frac{3-t}{2},\ t-1,\ t \right)}$$

4 直線 AB，OB，OC，AC と平面 $z = t$ との交点をそれぞれ P，Q，R，S とすると，(2)〜(5) より

$$\mathrm{P}\left(\frac{3-t}{2},\ t-1,\ t \right),\ \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{2}{3}t,\ t \right),\ \mathrm{R}(0,\ 0,\ t),\ \mathrm{S}\left(\frac{3-t}{2},\ 0,\ t \right)$$

これから　$\mathrm{SP} /\!/ \mathrm{RQ}$，$\angle \mathrm{QRS} = \dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{SP} = t-1$，$\mathrm{RQ} = \dfrac{2}{3}t$，$\mathrm{RS} = \dfrac{3-t}{2}$

したがって，$1 < t < 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}\mathrm{RS}(\mathrm{SP} + \mathrm{RQ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-t}{2} \left\{ (t-1) + \frac{2}{3}t \right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{12}(3-t)(5t-3)}, \\ g(t) &= \int_t^1 \frac{s^2}{3}\, ds + \int_1^{t+2} \frac{1}{12}(3-s)(5s-3)\, ds \end{aligned}$$

これを t で微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{t^2}{3} + \frac{1}{12}\{3-(t+2)\}\{5(t+2)-3\} \\ &= -\frac{1}{12}(9t^2 + 2t - 7) = \boldsymbol{-\frac{1}{12}(t+1)(9t-7)} \end{aligned}$$

$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{7}{9}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗	極大	↘	

よって，$g(t)$ は $\boldsymbol{t = \dfrac{7}{9}}$ で最大値をとる．

82〈数直線上の動点が動く道のり〉

数直線上を動く点Pの座標xが，時刻tの関数として，$x=t^3-9t^2+15t$として表されるとき，次の問いに答えよ．　(類 成蹊大)

(1) 点Pの速さが0になる時刻をすべて求めよ．

(2) $t=0$から$t=10$までに点Pが動く道のりを求めよ．

解答　(1) $f(t)=t^3-9t^2+15t$とおくと

$$f'(t)=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$$

$f'(t)=0$を解いて　$\boldsymbol{t=1,\ 5}$

(2) $0\leqq t\leqq 10$における$f(t)$の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$	10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	↗	7	↘	-25	↗	250

求める道のりをdとすると

$$\begin{aligned} d&=f(1)-f(0)-\{f(5)-f(1)\}+\{f(10)-f(5)\}\\ &=-f(0)+2f(1)-2f(5)+f(10)\\ &=-0+2\cdot 7-2\cdot(-25)+250=\mathbf{314}\end{aligned}$$

83〈水面の上昇速度と水深〉

曲線 $y=e^x$ の $0 \leqq x \leqq 3$ に対応する部分を y 軸の周りに回転してできる容器がある．これに毎秒 a の割合で上から水を注ぐ．　(東京都立大)

(1) この容器に水が一杯になるのは何秒後か．

(2) この水面の上昇速度が $\dfrac{a}{4\pi}$ になった瞬間の水深を求めよ．

解答　(1) $y=e^x$ より　$\dfrac{dy}{dx}=e^x$

y	$1 \longrightarrow e^3$
x	$0 \longrightarrow 3$

この容器の体積は

$$\pi\int_1^{e^3} x^2\,dy=\pi\int_0^3 x^2\frac{dy}{dx}\,dx=\pi\int_0^3 x^2e^x\,dx$$
$$=\pi\Big[\,e^x(x^2-2x+2)\,\Big]_0^3=\pi(5e^3-2)$$

よって，求める時間は　$\boldsymbol{\dfrac{\pi(5e^3-2)}{a}}$

(2) t 秒後の容積を V とし，そのときの水面の高さを $y\ (=e^x)$ とすると

$$\frac{dV}{dy}=\pi x^2$$

また，$\dfrac{dV}{dt}=a$ であるから，$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}$ より $(0 \leqq x \leqq 3)$

$$a=\pi x^2\cdot\frac{dy}{dt}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{dy}{dt}=\frac{a}{\pi x^2}$$

水面の上昇速度 $\dfrac{dy}{dt}$ が $\dfrac{a}{4\pi}$ になるとき

$$\frac{a}{\pi x^2}=\frac{a}{4\pi}\quad \text{これを解いて}\quad x=2$$

このとき，水面の高さ y は　$y=e^2$

よって，求める水深は　$\boldsymbol{e^2-1}$

84〈媒介変数で表された曲線の長さ〉

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，媒介変数 θ を用いて

$$x = \cos^3\theta, \quad y = \sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq t)$$

と表される曲線の長さを $l(t)$ とおく．

(1) $l(t)$ を求めよ．

(2) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{P}(\cos^3 t,\ \sin^3 t)$ の距離を $k(t)$ とおく．$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{k(t)}{l(t)}$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ．

解答 (1) $\dfrac{dx}{d\theta} = -3\cos^2\theta\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta$ より

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= (-3\cos^2\theta\sin\theta)^2 + (3\sin^2\theta\cos\theta)^2 \\ &= 9\sin^2\theta\cos^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= 9\sin^2\theta\cos^2\theta = (3\sin\theta\cos\theta)^2\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\quad l(t) = \displaystyle\int_0^t 3\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{3}{2}\Big[\ \sin^2\theta\ \Big]_0^t = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sin^2 t}$

(2) $k(t)^2 = (\cos^3 t)^2 + (\sin^3 t)^2 = (\sin^2 t)^3 + (\cos^2 t)^3$ より

$$\begin{aligned}k(t)^2 &= (\sin^2 t + \cos^2 t)^3 - 3\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= 1 - 3\sin^2 t\cos^2 t = 1 - 3\sin^2 t(1 - \sin^2 t) = 1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\left\{\frac{3k(t)}{2l(t)}\right\}^2 = \frac{1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t}{\sin^4 t} &= \left(\frac{1}{\sin^2 t}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{\sin^2 t} + 3 \\ &= \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

したがって $\quad \dfrac{k(t)}{l(t)} \geqq \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \left(\text{等号は } \sin t = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \text{ のとき}\right)$

このとき，$\cos t = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ より $\quad \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{3\sqrt{3}},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}\right)$

10.7　補充問題 (数学 III)

85〈等式を満たす複素数〉

α，β，γ を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0\cdots(*)$ を満たす複素数 z を考える．

(1) z は $(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ を満たすことを示せ．　(東北大)

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ と仮定し，また γ は負の実数であると仮定する．このとき，$(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ．

解答　(1) $(*)$ の両辺の共役複素数をとると　$\overline{z}z+\overline{\alpha}\,\overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0$

これと $(*)$ の辺々の差をとると

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$$

(2) γ が実数であるから　$\gamma-\overline{\gamma}=0$

これを (1) の結果に代入すると　$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0$

$$(\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$$

これから，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数である．

［1］$\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ のとき，実数 t を用いて

$$(\alpha-\overline{\beta})z=t\quad\text{ゆえに}\quad z=\frac{t}{\alpha-\overline{\beta}}\quad\cdots①$$

① を $(*)$ に代入すると

$$\frac{t}{\alpha-\overline{\beta}}\cdot\frac{t}{\overline{\alpha}-\beta}+\frac{\alpha t}{\alpha-\overline{\beta}}+\frac{\beta t}{\overline{\alpha}-\beta}+\gamma=0$$

整理すると　$t^2+(|\alpha|^2-|\beta|^2)t+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$

$|\alpha|^2-|\beta|^2=0$ であるから　$t^2=-\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2$

$\gamma<0$ であるから，上式を満たす実数 t が 2 個，すなわち，$(*)$ を満たす z がちょうど 2 個ある．

［2］$\alpha-\overline{\beta}=0$ のとき，$\alpha=\overline{\beta}$ を $(*)$ に代入すると $(\gamma<0)$

$$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0\quad\text{ゆえに}\quad|z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$$

z は中心 $-\beta$，半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円であるから，z は無数存在する．

［1］，［2］より，求める必要十分条件は　$\boldsymbol{\alpha-\overline{\beta}=0}$

86〈双曲線の接線と点列の極限〉

xy 平面において，$a_0 = 1$ とし，y 軸上の点 $\mathrm{P}_0(0,\ a_0)$ から曲線 $C : x^2 - \dfrac{1}{12}y^2 = 1$ の $x > 0$ の部分に引いた接線の接点を $\mathrm{T}_1(a_1,\ b_1)$ として，y 軸上に点 $\mathrm{P}_1(0,\ a_1)$ をとる．これを順次繰り返して，一般に n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，y 軸上の点 $\mathrm{P}_n(0,\ a_n)$ から曲線 C の $x > 0$ の部分に引いた接線の接点を $\mathrm{T}_{n+1}(a_{n+1},\ b_{n+1})$ として，y 軸上に点 $\mathrm{P}_{n+1}(0,\ a_{n+1})$ をとる．　(東京理科大)

(1) a_{n+1} を a_n で表せ．

(2) $\dfrac{1}{{a_n}^2 + 3} = c_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，c_{n+1} を c_n で表し，数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を求めよ．

(3) n が限りなく大きくなるとき，点 T_n は曲線 C 上のどの点に近づくか．

解答　(1) $C : x^2 - \dfrac{1}{12}y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{T}_{n+1}(a_{n+1},\ b_{n+1})$ 上の点における接線の方程式は

$$\ell_{n+1} : a_{n+1}x - \frac{1}{12}b_{n+1}y = 1$$

点 $\mathrm{P}_n(0,\ a_n)$ は ℓ_{n+1} 上の点であるから

$$-\frac{1}{12}b_{n+1}a_n = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = -\frac{12}{a_n} \quad \cdots ①$$

$\mathrm{T}_{n+1}(a_{n+1},\ b_{n+1})$ は C 上の点であるから

$${a_{n+1}}^2 - \frac{1}{12}{b_{n+1}}^2 = 1 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入すると

$${a_{n+1}}^2 - \frac{1}{12}\left(-\frac{12}{a_n}\right)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad {a_{n+1}}^2 = 1 + \frac{12}{{a_n}^2} \quad \cdots ③$$

$a_{n+1} > 0$ であるから　　$\boldsymbol{a_{n+1} = \sqrt{1 + \dfrac{12}{{a_n}^2}}}$

(2) $\dfrac{1}{{a_n}^2+3}=c_n$ より，${a_n}^2=\dfrac{1}{c_n}-3$ を ③ に代入すると $(n=1,2,3,\cdots)$

$$\frac{1}{c_{n+1}}-3=1+12\cdot\frac{c_n}{1-3c_n}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{c_{n+1}}=\frac{4}{1-3c_n}$$

したがって　$\boldsymbol{c_{n+1}=\dfrac{1-3c_n}{4}}$　これから　$c_{n+1}-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{3}{4}\left(c_n-\dfrac{1}{7}\right)$

数列 $\left\{c_n-\dfrac{1}{7}\right\}$ は初項 $c_0-\dfrac{1}{7}$，公比 $-\dfrac{3}{4}$ の等比数列であるから

$$c_n-\frac{1}{7}=\left(c_0-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^n$$

$c_0=\dfrac{1}{{a_0}^2+3}=\dfrac{1}{1^2+3}=\dfrac{1}{4}$ より

$$c_n-\frac{1}{7}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^n\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{c_n=\frac{3}{28}\left(-\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{7}}$$

(3) (2) の結果から，$a_n>0$ に注意して

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{{a_n}^2+3}=\frac{1}{7}\quad\text{ゆえに}\quad\lim_{n\to\infty}a_n=2$$

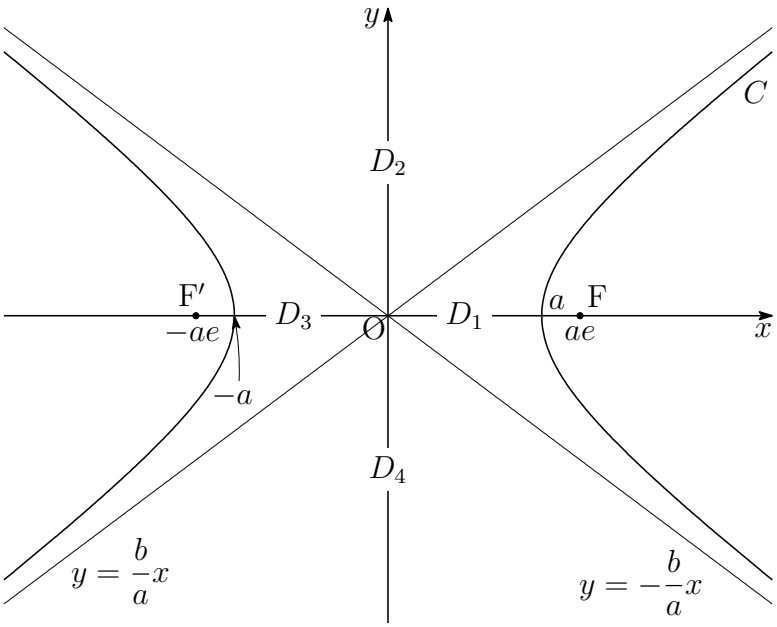
これを ① に適用すると

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{12}{a_{n-1}}\right)=-\frac{12}{2}=-6$$

よって，$\mathbf{T_n}$ は $\mathbf{(2,-6)}$ に近づく．

補足 双曲線 $C : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に対して，接線を引ける領域は，下の図の境界線 (C および C の漸近線) を含まない 4 つの領域 $D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4$ である．

- D_1 から C に引いた接線の接点は第 1 象限および第 4 象限にある．
- D_2 から C に引いた接線の接点は第 3 象限および第 4 象限にある．
- D_3 から C に引いた接線の接点は第 2 象限および第 3 象限にある．
- D_4 から C に引いた接線の接点は第 1 象限および第 2 象限にある．



87〈極大値の無限級数の和〉

関数 $f(x)=e^{-\sqrt{3}x}\sin x$ が $x \geqq 0$ の範囲で最大値をとる x の値を小さいものから順に $a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n,\cdots$ とする. (茨城大)

(1) a_1 を求めよ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ の和を求めよ.

解答 (1) $f(x)=e^{-\sqrt{3}x}\sin x$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\sqrt{3}x}(-\sqrt{3}\sin x+\cos x) \\ &= 2e^{-\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right) \end{aligned}$$

$f(x)$ が $x>0$ の範囲で極大値をとる x の値を小さいものから順に $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ とするから

$$a_n=\frac{\pi}{6}+2(n-1)\pi \qquad (*)$$

よって $\quad \boldsymbol{a_1=\dfrac{\pi}{6}}$

(2) $(*)$ から

$$\begin{aligned} f(a_n) &= e^{-\sqrt{3}\left\{\frac{\pi}{6}+2(n-1)\pi\right\}}\sin\left\{\frac{\pi}{6}+2(n-1)\pi\right\} \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}}\left(e^{-2\sqrt{3}\pi}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$0<e^{-2\sqrt{3}\pi}<1$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}}\cdot\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{3}\pi}}=\boldsymbol{\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}}}{2(e^{-2\sqrt{3}\pi})}}$$

88〈共通接線の本数〉

a を実数とし，xy 平面上において，2 つの放物線 $C : y = x^2$，$D : x = y^2 + a$ を考える．(新潟大)

(1) p，q を実数として，直線 $\ell : y = px + q$ が C に接するとき，q を p で表せ．

(2) (1) において，直線 ℓ がさらに D にも接するとき，a を p で表せ．

(3) C と D の両方に接する直線の本数を，a の値によって場合分けして求めよ．

解答 (1) C と ℓ の 2 式から y を消去して整理すると　$x^2 - px - q = 0$

このとき，係数について　$(-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-q)$　よって　$\boldsymbol{q = -\frac{1}{4}p^2}$

(2) (1) の結果から，$\ell : y = px - \frac{1}{4}p^2$ が $D : x = y^2 + a$ に接するとき，$p \neq 0$

であるから，$x = \frac{1}{p}y + \frac{1}{4}p$ と $D : x = y^2 + a$ の 2 式から x を消去すると

$$y^2 + a = \frac{1}{p}y + \frac{1}{4}p \quad \text{整理すると} \quad y^2 - \frac{1}{p}y + a - \frac{1}{4}p = 0$$

このとき，係数について　$\left(-\frac{1}{p}\right)^2 - 4 \cdot 1 \left(a - \frac{1}{4}p\right) = 0$

よって　　$\boldsymbol{a = \frac{1}{4}\left(p + \frac{1}{p^2}\right)}$

(3) a の値に対して，(2) の結果を満たす p の個数が，C と D の両方に接する直線の本数，すなわち，直線 $y=a$ と曲線 $y=\dfrac{1}{4}\left(p+\dfrac{1}{p^2}\right)$ の共有点の個数である．$f(p)=\dfrac{1}{4}\left(p+\dfrac{1}{p^2}\right)$ とおくと

$$f'(p)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{p^3}\right)=\frac{p^3-2}{2p^3}$$

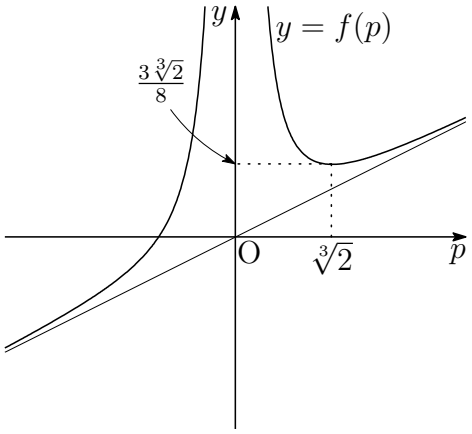
$f'(p)=0$ とすると　$p=\sqrt[3]{2}$

したがって，$f(p)$ の増減表は次のようになる．

p	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\sqrt[3]{2}$	$\cdots$
$f'(p)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(p)$	↗		↘	$\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{8}$	↗

また　$\lim\limits_{p\to-\infty}f(p)=-\infty$,　$\lim\limits_{p\to-0}f(p)=\infty$,
$\lim\limits_{p\to+0}f(p)=\infty$,　$\lim\limits_{p\to\infty}f(p)=\infty$

$y=f(p)$ のグラフは，次のようになる．



よって，グラフから，求める直線の本数は

$\boldsymbol{a<\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{8}}$ のとき　**1 本**

$\boldsymbol{a=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{8}}$ のとき　**2 本**

$\boldsymbol{a>\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{8}}$ のとき　**3 本**

89〈空間内の三角形の回転体の体積〉

xyz 空間に 3 点 P(1, 1, 0)，Q(−1, 1, 0)，R(−1, 1, 2) をとる．次の問に答えよ．
(神戸大 2006 年 4)

(1) t を $0 < t < 2$ を満たす実数とするとき，平面 $z = t$ と，△PQR の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ．

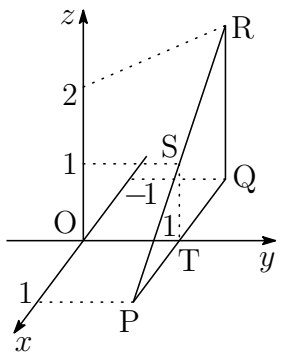
(2) △PQR を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ．

解答 (1) 直線 QR と平面 $z = t$ の交点は $(-1,\ 1,\ t)$
平面 $y = 1$ 上の直線 PR の方程式は

$$y = 1, \quad x + z = 1$$

これに $z = t$ を代入すると $x = 1 - t$
よって，求める 2 つの端点の座標は

$$\boldsymbol{(-1,\ 1,\ t),\ (1-t,\ 1,\ t)}$$



(2) S(0, 1, 1)，T(0, 1, 0) とし，△PQR と平面 $z = t$ との断面で z 軸からの距離を d とする．

(i) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，d は点 $(-1,\ 1,\ t)$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとり，点 $(0,\ 1,\ t)$ で最小値 1 をとる．

(ii) $1 \leqq t \leqq 2$ のとき，d は点 $(-1,\ 1.\ t)$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとり，点 $(1-t,\ 1,\ t)$ で最小値 $\sqrt{(1-t)^2+1^2} = \sqrt{t^2-2t+2}$ をとる．

(i)，(ii) より，求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^1 \{(\sqrt{2})^2 - 1^2\}\,dt + \int_1^2 \{(\sqrt{2})^2 - (t^2-2t+2)\}dt$$
$$= \left[\ t\ \right]_0^1 + \left[\ t^2 - \frac{t^3}{3}\ \right]_1^2 = \frac{5}{3}$$

よって $\quad \boldsymbol{V = \dfrac{5}{3}\pi}$

補足 最後の定積分の計算は，次のように計算することもできる．

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^1 \{(\sqrt{2})^2 - 1^2\}\,dt + \int_1^2 \{(\sqrt{2})^2 - 1 - (t-1)^2\}dt$$
$$= \int_0^2 dt - \int_1^2 (t-1)^2\,dt$$
$$= 2 - \frac{1}{3}\left[\ (t-1)^3\ \right]_1^2 = \frac{5}{3}$$

11　Z会

11.1　数学IA

11.1.1　第1回

第1問

〔1〕$\sqrt{3}$が無理数であることを利用して，次の問いに答えよ．

(1) 実数a，bに対し，命題A，命題Bをそれぞれ

命題A「a，bがともに有理数ならば，$(a+\sqrt{3}b)^2$は無理数である」

命題B「a，bがともに有理数ならば，$(a+\sqrt{3}b)^2$は無理数である」

とする．

(i) 命題Aの対偶は［ア］である．

［ア］の解答群

⓪ 「$(a+\sqrt{3}b)^2$が有理数ならば，a，bはともに有理数である」
① 「$(a+\sqrt{3}b)^2$が有理数ならば，a，bはともに無理数である」
② 「$(a+\sqrt{3}b)^2$が有理数ならば，a，bの少なくとも一方は有理数である」
③ 「$(a+\sqrt{3}b)^2$が有理数ならば，a，bの少なくとも一方は無理数である」
④ 「$(a+\sqrt{3}b)^2$が有理数ならば，a，bのうち一方は有理数，他方は無理数である」
⑤ 「$(a+\sqrt{3}b)^2$が無理数ならば，a，bはともに有理数である」
⑥ 「$(a+\sqrt{3}b)^2$が無理数ならば，a，bはともに無理数である」
⑦ 「$(a+\sqrt{3}b)^2$が無理数ならば，a，bの少なくとも一方は有理数である」
⑧ 「$(a+\sqrt{3}b)^2$が無理数ならば，a，bの少なくとも一方は無理数である」
⑨ 「$(a+\sqrt{3}b)^2$が無理数ならば，a，bのうち一方は有理数，他方は無理数である」

(ii) 命題A，命題Bの審議の組み合わせとして正しいものは［ イ ］である．

［ イ ］の解答群

	⓪	①	②	③
命題A	真	真	偽	偽
命題B	真	偽	真	偽

(2) a, b を実数とする．

- $a+\sqrt{3}b=0$ は，$a=0$ かつ $b=0$ であるための［ ウ ］．
- $(a+\sqrt{3}b)^2=0$ は，$a+\sqrt{3}b=0$ であるための［ エ ］．

［ ウ ］，［ エ ］の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない
① 十分条件であるが，必要条件ではない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

解答　(1)　(i) 命題 A

「a，b がともに有理数ならば，$(a+\sqrt{3}b)^2$ は無理数である」

の対偶は

「$(a+\sqrt{3}b)^2$ が有理数ならば，a，b の少なくとも一方は無理数である」

$\cdots$(ア) ③

(ii) 命題 A は偽 (反例:$a=b=0$)，命題 B は偽 (反例:$a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{3}-1$)

$\cdots$(イ) ③

(2)　• $a+\sqrt{3}b=0$ は，$a=0$ かつ $b=0$ であるための**必要条件であるが，十分条件ではない** $(a=\sqrt{3},\ b=-1)$.　$\cdots$(ウ) ⓪

• $(a+\sqrt{3}b)^2=0$ は，$a+\sqrt{3}b=0$ であるための**必要十分条件である**.

$\cdots$(エ) ②

〔2〕太郎さんと花子さんは，ある山Aの山頂Bの標高を測ることで，地球の半径を求めることにした．以下では次のことを仮定して計算するものとする．

(ア) ある地点の標高とは，平均海面を基準とした高さのことを指すものとする．

(イ) 仰角，俯角の測定の際は，太郎さんと花子さんの身長は考えないこととする．

(ウ) 平均海面を地表面とするとき，地球は完全な球体と考える．

ただし，山頂Bの標高の測定において，地表面は球面ではなく平面として考えるものとする．すなわち，水平面を考えることができ，標高が異なる2地点P，Qの水平距離とは，P，Qから水平面上に下ろした垂線PH，QMに対して，2点H，Mの距離を表す．また，$\tan 20^\circ = 0.3640$とする．

(1) 山Aの山頂Bと，標高1mの地点Cは水平距離で3500m離れている．花子さんが，地点Cで山頂Bを見上げて仰角を測ったところ，仰角は20°であった．山頂Bの標高hは

$$h = \boxed{\text{オカキク}}\ (\text{m})$$

である．

(2) 太郎さんは山頂Bに登頂し，そこから水平線上のある点Dまでの俯角θを測ることで，花子さんの測定結果と合わせて，地球の半径を計算できると考えた．なお，水平線は水面と空との境界をなす線とする．地球の中心をOとすると，$\angle \mathrm{BOD} = \boxed{\text{ケ}}$と表せる．

$\boxed{\text{ケ}}$の解答群

⓪ $90^\circ - \theta$　　① $45^\circ - \theta$　　② θ

③ $45^\circ + \theta$　　④ $90^\circ + \theta$

地球の半径をθと(1)の山頂Bの標高hmを用いて表すと，地球の半径は$\boxed{\text{コ}}$mである．あとは，俯角θを正しく計測することで，地球の半径の値を計算できる．

$\boxed{\text{コ}}$の解答群

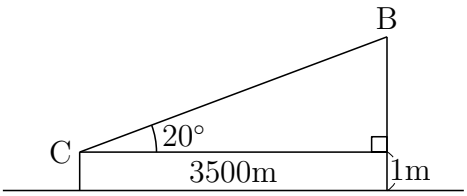
⓪ $\dfrac{h\sin\theta}{1-\sin\theta}$　　① $\dfrac{h+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

② $\dfrac{h\cos\theta}{1-\cos\theta}$　　③ $\dfrac{h+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

④ $\dfrac{h\tan\theta}{1-\tan\theta}$　　⑤ $\dfrac{h+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

解答　(1) 求める標高は

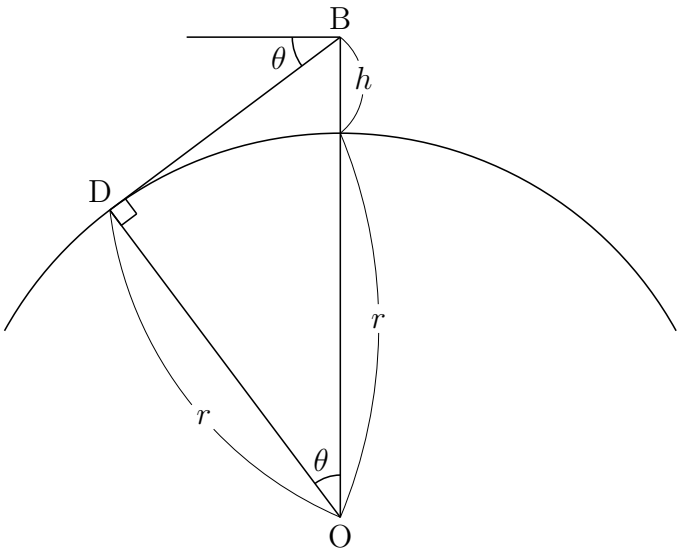
$$h = 3500\tan 30^\circ + 1 = 3500 \times 0.3640 + 1 = \mathbf{1275}\ (\mathrm{m})$$



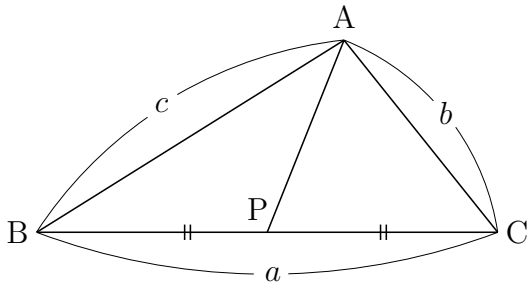
(2) 下の図から　$\angle\mathbf{BOD} = \boldsymbol{\theta}$　$\cdots$(ケ) ②

地球の半径を r とすると，△BOD について

$$\cos\theta = \frac{r}{r+h} \quad \text{よって} \quad r = \frac{\boldsymbol{h\cos\theta}}{\mathbf{1-\cos\theta}} \quad \cdots(\text{コ})\ ②$$



〔3〕 BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ である △ABC において，辺 BC の中点を P とする．線分 AP の長さを a，b，c で表すことについて考える．



(1) 点 P は辺 BC の中点より

$$\mathrm{BP} = \mathrm{CP} = \boxed{\text{サ}}$$

である．また，△ABC に着目すると

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \boxed{\text{シ}}$$

である．

サ の解答群

⓪ $2a$　① $3a$　② $4a$　③ b　④ c

⑤ $\dfrac{a}{2}$　⑥ $\dfrac{a}{3}$　⑦ $\dfrac{a}{4}$　⑧ $\dfrac{b}{2}$　⑨ $\dfrac{c}{2}$

シ の解答群

⓪ $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$　① $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2ab}$　② $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ab}$

③ $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2bc}$　④ $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　⑤ $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2bc}$

⑥ $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ca}$　⑦ $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2ca}$　⑧ $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

また，$\cos\angle \mathrm{ABP} = \dfrac{\boxed{\text{スセ}}\,\mathrm{AP}^2 + a^2 + \boxed{\text{ソ}}\,c^2}{\boxed{\text{タ}}\,ac}$ であるから

$$\mathrm{AP}^2 = -\frac{a^2}{\boxed{\text{チ}}} + \frac{b^2}{\boxed{\text{ツ}}} + \frac{c^2}{\boxed{\text{テ}}}$$

であり

$$\mathrm{AP} = \sqrt{-\frac{a^2}{\boxed{\text{チ}}} + \frac{b^2}{\boxed{\text{ツ}}} + \frac{c^2}{\boxed{\text{テ}}}}$$

と線分 AP の長さを a，b，c で表すことができる．

(2) $\cos\angle\mathrm{APB}$ と $\cos\angle\mathrm{APC}$ の間に成り立つ関係式として正しいものは［ト］である．

［ト］の解答群

⓪ $\cos\angle\mathrm{APB}+\cos\angle\mathrm{APC}=0$

① $\cos\angle\mathrm{APB}-\cos\angle\mathrm{APC}=0$

② $\cos\angle\mathrm{APB}+2\cos\angle\mathrm{APC}=0$

③ $\cos\angle\mathrm{APB}-2\cos\angle\mathrm{APC}=0$

④ $2\cos\angle\mathrm{APB}+\cos\angle\mathrm{APC}=0$

⑤ $2\cos\angle\mathrm{APB}-\cos\angle\mathrm{APC}=0$

$$\cos\angle\mathrm{APB}=\frac{\boxed{\text{ナ}}\,\mathrm{AP}^2+a^2-\boxed{\text{ニ}}\,c^2}{\boxed{\text{ヌ}}\,a\cdot\mathrm{AP}}$$

であり，同様に $\cos\angle\mathrm{APC}$ を求めて，［ト］に代入することで

$$\mathrm{AP}=\sqrt{-\frac{a^2}{\boxed{\text{チ}}}+\frac{b^2}{\boxed{\text{ツ}}}+\frac{c^2}{\boxed{\text{テ}}}}$$

と線分 AP の長さを a，b，c で表すことができる．

(3) △ABC の辺 BC 上に，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=1:2$ となる点 Q をとるとき，線分 AQ の長さを a，b，c で表すと

$$\mathrm{AQ}=\frac{\sqrt{-\boxed{\text{ネ}}\,a^2+\boxed{\text{ノ}}\,b^2+\boxed{\text{ハ}}\,c^2}}{3}$$

である．

解答　(1) 点 P は辺 BC の中点より

$$\mathrm{BP} = \mathrm{CP} = \boldsymbol{\frac{a}{2}} \quad \cdots (\text{サ})\ ⑤$$

△ABC に注目すると，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \boldsymbol{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}} \quad \cdots (\text{シ})\ ⑧$$

△ABP に注目すると，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{ABP} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BP}^2 - \mathrm{AP}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BP}} = \frac{c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \mathrm{AP}^2}{2\cdot c\cdot\frac{a}{2}}$$
$$= \frac{\boldsymbol{-4}\mathrm{AP}^2 + a^2 + \boldsymbol{4}c^2}{\boldsymbol{4}ac} \quad \cdots (\text{チ}) \sim (\text{テ})$$

$\cos\angle\mathrm{ABC} = \cos\angle\mathrm{ABP}$ より

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{-4\mathrm{AP}^2 + a^2 + 4c^2}{4ac}$$

これを AP^2 について解くと

$$\mathrm{AP}^2 = -\frac{a^2}{\boldsymbol{4}} + \frac{b^2}{\boldsymbol{2}} + \frac{c^2}{\boldsymbol{2}} \quad \cdots (\text{チ}) \sim (\text{テ})$$

であり

$$\mathrm{AP} = \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}}$$

と線分 AP の長さを a，b，c で表すことができる．

(2) $\angle\mathrm{APC} = 180^\circ - \angle\mathrm{APB}$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{APC} = \cos(180^\circ - \angle\mathrm{APB}) = -\cos\angle\mathrm{APB}$$

よって　　$\boldsymbol{\cos\angle\mathrm{APB} + \cos\angle\mathrm{APC} = 0}$　$\cdots$(ト) ⓪

$\cos\angle\mathrm{APB}$ を求めると

$$\cos\angle\mathrm{APB} = \frac{\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{AP}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - c^2}{2\mathrm{AP}\cdot\frac{a}{2}}$$
$$= \frac{\boldsymbol{4}\mathrm{AP}^2 + a^2 - \boldsymbol{4}c^2}{\boldsymbol{4}a\cdot\mathrm{AP}} \quad \cdots(\text{ナ}) \sim (\text{ヌ})$$

同様に，$\cos\angle\mathrm{APB}$ を求めると

$$\cos\angle\mathrm{APC} = \frac{\mathrm{CP}^2 + \mathrm{AP}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{CP}\cdot\mathrm{AP}} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \mathrm{AP}^2 - b^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\mathrm{AP}}$$
$$= \frac{4\mathrm{AP}^2 + a^2 - 4b^2}{4a\cdot\mathrm{AP}}$$

$\cos\angle\mathrm{APB} + \cos\angle\mathrm{APC} = 0$ であるから

$$\frac{4\mathrm{AP}^2 + a^2 - 4c^2}{4a\cdot\mathrm{AP}} + \frac{4\mathrm{AP}^2 + a^2 - 4b^2}{4a\cdot\mathrm{AP}} = 0$$

これを AP^2 について解くと

$$\mathrm{AP}^2 = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

であり

$$\mathrm{AP} = \sqrt{-\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}}$$

と線分 AP の長さを a，b，c で表すことができる．

別解 パップスの定理 (中線定理) $\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 = 2(\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2)$ により

$$b^2 + c^2 = 2\left\{\mathrm{AP}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}$$

これを AP^2 について解くと

$$\mathrm{AP}^2 = -\frac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{4}} + \frac{\boldsymbol{b^2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{c^2}}{\boldsymbol{2}}$$

(3) スチュワートの定理 $\mathrm{CA}^2\cdot\mathrm{BQ}+\mathrm{AB}^2\cdot\mathrm{QC}=\mathrm{BC}(\mathrm{AQ}^2+\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{QC})$ により

$$b^2\frac{a}{3}+c^2\cdot\frac{2a}{3}=a\left(\mathrm{AQ}^2+\frac{a}{3}\cdot\frac{2a}{3}\right)$$

これを AQ について解くと

$$\mathrm{AQ}^2=-\frac{2a^2}{9}+\frac{b^2}{3}+\frac{2c^2}{3}$$

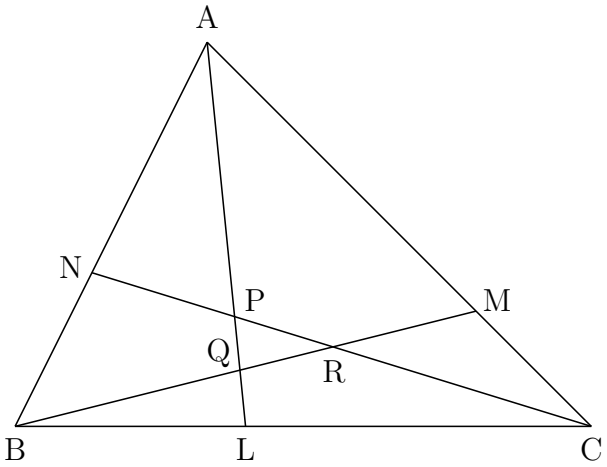
$$\mathrm{AQ}=\frac{\sqrt{\boldsymbol{-2}a^2+\boldsymbol{3}b^2+\boldsymbol{6}c^2}}{3}\quad\cdots(\text{ネ})\sim(\text{ハ})$$

参照 パップスの定理およびスチュワートの定理

関連 角の二等分線に関する公式

第 3 問 △ABC の辺 BC 上に点 L，辺 CA 上に点 M，辺 AB 上に点 N をとり，AL と CN の交点を P，AL と BM の交点を Q，BM と CN の交点を R とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 図のような△ABC において，四角形 APRM，四角形 BQPN，四角形 CRQL の 3 つの四角形がそれぞれ同時に円に内接する場合があるかどうか調べよう．



四角形 APRM が円に内接するならば

$$\angle \mathrm{PRQ} = \boxed{\text{ア}} \quad \cdots ①$$

が成り立ち，四角形 BQPN が円に内接するならば

$$\angle \mathrm{QPR} = \boxed{\text{イ}} \quad \cdots ②$$

が成り立ち，四角形 CRQL が円に内接するならば

$$\angle \mathrm{PQR} = \boxed{\text{ウ}} \quad \cdots ③$$

が成り立つ．

ア ～ ウ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ ∠MAP　① ∠RMA　② ∠NBQ　③ ∠PNB
④ ∠LCR　⑤ ∠QLC

四角形 APRM が円に内接するとき，四角形 BQPN と四角形 CRQL の二つの四角形が両方ともそれぞれ円に内接すると仮定すると，①〜③ と

$$\angle \mathrm{PRQ} + \angle \mathrm{QPR} + \angle \mathrm{PQR} = 180^\circ$$

より

$$\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}} = 180^\circ \quad \cdots ④$$

であるが

$$\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}} < \angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ACB} = 180^\circ$$

より

$$\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}} < 180^\circ \quad \cdots ⑤$$

となり，④ と ⑤ は矛盾する．

したがって，四角形 APRM が円に内接するとき，四角形 BQPN と四角形 CRQL の二つの四角形が両方ともそれぞれ円に内接する場合はないことがわかる．

また，四角形 APRM と四角形 BQPN がそれぞれ円に内接するとき，**エ** であることがわかる．

エ の解答群

⓪ AB = AC　① AB = BC　② AC = BC
③ AB = AM　④ AC = AN　⑤ AM = AN

解答 四角形 APRM が円に内接するならば

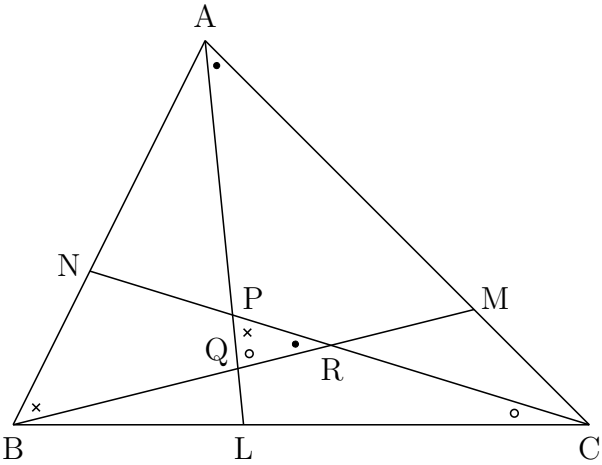
$$\angle \mathbf{PRQ} = \angle \mathbf{MAP} \quad \cdots ① \quad (ア)\ ⓪$$

四角形 BQPN が円に内接するならば

$$\angle \mathbf{QPR} = \angle \mathbf{NBQ} \quad \cdots ② \quad (イ)\ ②$$

四角形 CRQL が円に内接するならば

$$\angle \mathbf{PQR} = \angle \mathbf{LCR} \quad \cdots ③ \quad (ウ)\ ④$$



四角形 APRM が円に内接するとき，四角形 BQPN と四角形 CRQL の二つの四角形が両方ともそれぞれ円に内接すると仮定すると，①〜③ と

$$\angle \mathrm{PRQ} + \angle \mathrm{QPR} + \angle \mathrm{PQR} = 180^\circ$$

より

$$\angle \mathrm{MAP} + \angle \mathrm{NBQ} + \angle \mathrm{LCR} = 180^\circ \quad \cdots ④$$

であるが，$\mathrm{MAP} < \angle \mathrm{BAC}$, $\angle \mathrm{NBQ} < \angle \mathrm{ABC}$, $\angle \mathrm{LCR} < \angle \mathrm{ACB}$ より

$$\angle \mathrm{MAP} + \angle \mathrm{NBQ} + \angle \mathrm{LCR} < \angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ACB} = 180^\circ$$

より

$$\angle \mathrm{MAP} + \angle \mathrm{NBQ} + \angle \mathrm{LCR} < 180^\circ \quad \cdots ⑤$$

となり，④ と ⑤ は矛盾する．

したがって，四角形 APRM が円に内接するとき，四角形 BQPN と四角形 CRQL の二つの四角形が両方ともそれぞれ円に内接する場合はないことがわかる．

また，四角形 APRM と四角形 BQPN がそれぞれ円に内接するとき

$$\angle \mathrm{AMR} = \angle \mathrm{QPR}$$

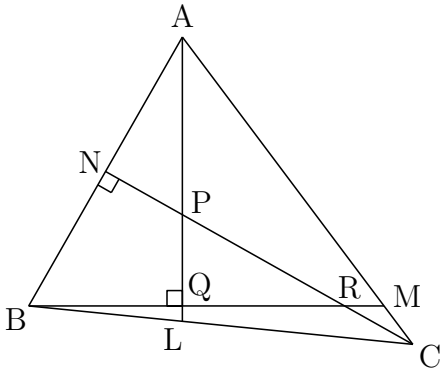
上式および ② から

$$\angle \mathrm{ABM} = \angle \mathrm{AMB} \quad \text{よって} \quad \mathbf{AB = AM} \quad \cdots (エ)\ ③$$

(2) 図において

$$\mathrm{BN}=\mathrm{BQ}=\sqrt{3},\quad \mathrm{PN}=\mathrm{PQ}=1,\quad \angle\mathrm{BNP}=\angle\mathrm{BQP}=90^\circ$$

とすると，$\mathrm{BP}=$ オ であり，四角形 BQPN は円に内接する．



このとき

$$\mathrm{AN}=\sqrt{\text{カ}},\quad \mathrm{AP}=\text{キ}$$

であり，m，n を正の数とし，$\mathrm{BL}:\mathrm{LC}=1:m$，$\mathrm{CM}:\mathrm{MA}=1:n$ とすると

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PL}=\left(m+\text{ク}\right):m$$
$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QL}=\left(m+\text{ケ}\right):\text{コ}$$

であるから，m と n について，次の等式

$$\left(m-\text{サ}\right)n=\text{シ}$$

が成り立つ．

さらに，$\mathrm{RC}=1$ とすると $\mathrm{PR}=$ ス より

$$m=\frac{\text{セ}}{\text{ソ}},\quad n=\text{タ}$$

である．

解答 △BPQ ≡ △BPN ≡ △RPQ ≡ △APN より

$$\mathbf{BP = 2,\quad AN = \sqrt{3},\quad AP = 2} \quad \cdots(\text{オ}),(\text{カ}),(\text{キ})$$

直線 RC は点 $\mathrm{R}(2\sqrt{3},\ 0)$ を傾き $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の直線であるから

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2\sqrt{3})$$

$\mathrm{OL} : \mathrm{LC} = 1 : m$ で，L の x 座標が $\sqrt{3}$ であるから，C，L の座標は

$$\mathrm{C}((1+m)\sqrt{3},\ 1-m),\quad \mathrm{L}\left(\sqrt{3},\ \frac{1-m}{1+m}\right)$$

3 点 A，P，L の y 座標から

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PL} = 2 : 1 - \frac{1-m}{1+m} = 2 : \frac{2m}{m+1} = \boldsymbol{m+1 : m} \quad \cdots(\text{ク})$$

$\mathrm{CM} : \mathrm{MA} = 1 : n$ で，A の y 座標 3 より，C の y 座標が $-\dfrac{3}{n}$ で，L の y 座標は $-\dfrac{3}{(m+1)n}$ となり，このとき，3 点 A，P，L の y 座標から

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QL} = 3 : \frac{3}{(m+1)n} = \boldsymbol{(m+1)n : 1} \quad \cdots(\text{ケ}),(\text{コ})$$

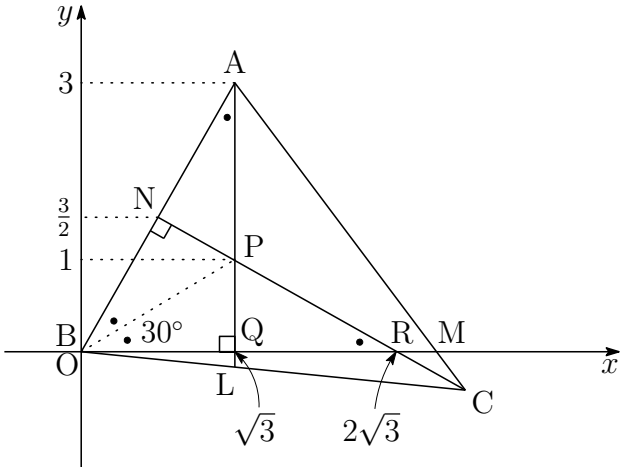
C の y 座標を比較して

$$1 - m = -\frac{3}{n} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n(m-1) = 3} \quad \cdots(\text{サ}),(\text{シ})$$

$\mathrm{RC} = 1$ とすると，$\mathbf{PR = 2}$ より　$\cdots(\text{ス})$

$\overrightarrow{\mathrm{RC}} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ であるから　$\mathrm{C}\left(\dfrac{5}{2}\sqrt{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$

$$\mathbf{BL : LC = 1 : \frac{3}{2},\quad CM : MC = 1 : 6} \quad \cdots(\text{セ}),(\text{ソ}),(\text{タ})$$



11.1.2　第 2 回

第 1 問

〔1〕a を定数とする．x についての二つの 2 次方程式

$$x^2-(2a-1)x-4a-2=0 \quad \cdots①$$
$$x^2-(4a+3)x+3a^2+3a=0 \quad \cdots②$$

について，次の問いに答えよ．

(1) ② の解を，a を用いて表すと

$$x=a,\ \ x=\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}$$

である．

(2) ①，② がただ一つの共通解をもつのは

$$a=\boxed{\text{ウエ}},\ \ \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

のときであり

$a=\boxed{\text{ウエ}}$ のとき，共通解は $x=\boxed{\text{ク}}$

$a=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のとき，共通解は $x=\boxed{\text{コサ}}$

である．

解答　(1) ② より　$(x-a)\{x-3(a+1)\}=0$

これを解いて　$x=a,\ \boldsymbol{3a+3}$

(2) ① より　$(x+2)\{x-(2a+1)\}=0$

これを解いて　$x=-2,\ 2a+1$

(i) $a=-2$ のとき

① の解は　$x=-2,-3$

② の解は　$x=-2,-3$

このとき，2 つの共有解をもつから，不適.

(ii) $3a+3=-2$，すなわち，$a=-\dfrac{5}{3}$ のとき

① の解は　$x=-2,-\dfrac{7}{3}$

② の解は　$x=-2,-\dfrac{5}{3}$

(iii) $a=2a+1$，すなわち，$a=-1$ のとき

① の解は　$x=-2,-1$

② の解は　$x=-1,\ 0$

(iv) $3a+3=2a+1$，すなわち，$a=-2$ のとき，(i) と同様に不適.

① の解は　$x=-2,-1$

② の解は　$x=-1,\ 0$

(i)〜(iv) より，①，② がただ一つの共通解をもつのは

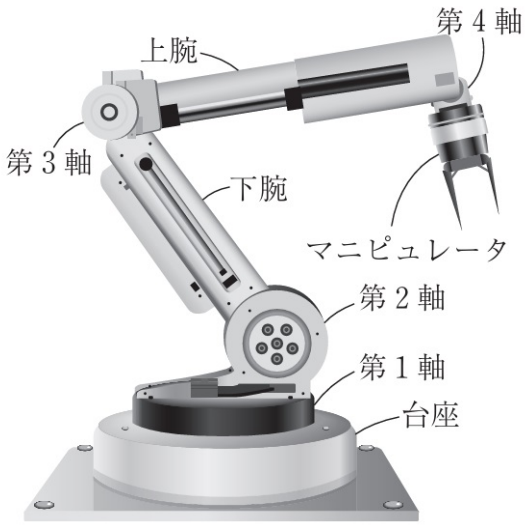
$$\boldsymbol{a=-1,\ \dfrac{-5}{3}}\quad\cdots(\text{ウ})\sim(\text{キ})$$

よって　$a=-1$ のとき　共通解は $x=\boldsymbol{-1}$　$\cdots(\text{ク})(\text{ケ})$

$a=-\dfrac{5}{3}$ のとき　共通解は $x=\boldsymbol{-2}$　$\cdots(\text{コ})(\text{サ})$

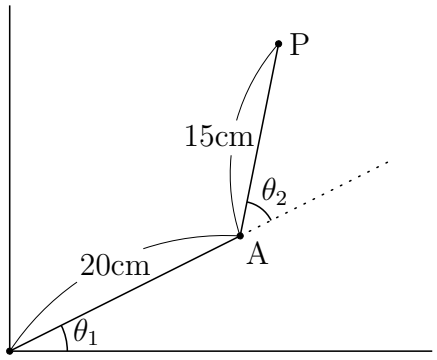
〔2〕以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 1312 ページの三角比の表を用いてもよい．

ロボットアームとは人間の腕の動きに似た動作をする工作機械である．下の図は，台座との接続部分に回転式の第 1 軸があり，下腕の角度を変える第 2 軸，上腕の角度を変える第 3 軸，部品をつまむマニピュレータを動かす第 4 軸で 4 軸構成のロボットアームである．



本問では，回転式の第 1 軸がなく，マニピュレータが上腕に直接接続された（第 4 軸がない）2 軸構成のロボットアーム，つまり，上の図で，第 2 軸と第 3 軸のみが動くロボットアームを考える．さらに，以下の設問では，下腕の長さを 20cm，上腕とマニピュレータを合わせた部分の長さを 15cm とし，第 2 軸を点 O，第 3 軸を点 A，マニピュレータの先端を点 P として，第 2 軸，第 3 軸の大きさは考えないものとする．また，点 P において部品をつまむものとする．

点 O の高さを基準 (0cm) とし，下の図のように 3 点 O，A，P を含む平面において水平方向から下腕 OA に向けて反時計回りに測った角を θ_1，下腕 OA の延長線から上腕 AP に向けて反時計回りに測った角を θ_2 とし，$0^\circ < \theta_1 < 90^\circ$，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲で動く場合を考える．



(1) $\theta_1 = 35^\circ$，$\theta_2 = 15^\circ$ のとき，点 A は点 O から水平方向に シス ，　セ cm 離れたところにあり，高さは ソタ ，　チ cm である．

また，3 点 O，A，P を含む平面において水平方向から上腕 AP に向けて反時計回りに測った角は トナ ，　ニ cm 離れところにあり，高さは ヌネ ，　ノ cm である．

(2) 点Oの真上で高さが30cmのところにある部品をマニピュレータでつまむには，θ_1，θ_2の大きさをそれぞれどのようにすればよいかを考えよう．

点Pが点Oの真上にくるようにしたとき

$$\angle \mathrm{AOP} = \boxed{\text{ハ}}, \quad \angle \mathrm{OAP} = \boxed{\text{ヒ}}$$

であることに着目すると

$$\theta_1 = \boxed{\text{フ}}, \quad \theta_2 = \boxed{\text{ヘ}}$$

とすればよい．

ハ，ヒの解答群

⓪ θ_1	① θ_2	② $90^\circ - \theta_1$	③ $90^\circ - \theta_2$
④ $90^\circ + \theta_1$	⑤ $90^\circ + \theta_2$	⑥ $180^\circ - \theta_1$	⑦ $180^\circ - \theta_2$
⑧ $\theta_1 + \theta_2$	⑨ $\lvert\theta_1 - \theta_2\rvert$		

フの解答群

⓪ 19°	① 26°	② 34°
③ 56°	④ 64°	⑤ 71°

ヘの解答群

⓪ 27°	① 45°	② 63°
③ 81°	④ 99°	⑤ 117°

三角比の表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	————

解答　(1) $\theta_1 = 35°$，$\theta_2 = 15°$ のとき，点 A は点 O から水平方向に

$$20\cos 35° = 20 \times 0.8192 = 16.384 \fallingdotseq \mathbf{16.4}\ (\mathrm{cm}) \quad \cdots (シ) \sim (セ)$$

離れたところにあり，高さは

$$20\sin 35° = 20 \times 0.5736 = 11.472 \fallingdotseq \mathbf{11.5}\ (\mathrm{cm}) \quad \cdots (ソ) \sim (タ)$$

また，3 点 O，A，P を含む平面において水平方向から上腕 AP に向けて反時計回りに測った角は

$$35° + 15° = \mathbf{50°} \quad \cdots (ツ)(テ)$$

であるから，点 P は点 A から水平方向，鉛直方向にそれぞれ

$$(\text{水平方向})\ \ 15\cos 50° = 15 \times 0.6428 = 9.6428 \fallingdotseq 9.6\ (cm)$$
$$(\text{鉛直方向})\ \ 15\sin 50° = 15 \times 0.7660 = 11.49 \fallingdotseq 11.5\ (cm)$$

したがって，点 P は点 O から水平方向に

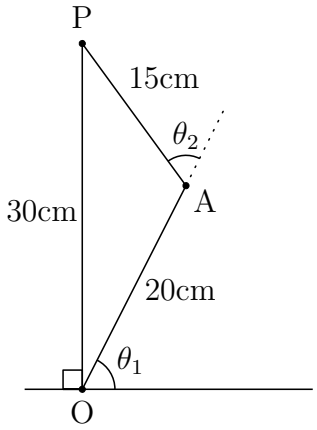
$$16.4 + 9.6 = \mathbf{26.0}\ \ (\mathrm{m}) \quad \cdots (ト) \sim (ニ)$$

離れたところにあり，高さは

$$11.5 + 11.5 = \mathbf{23.0}\ \ (\mathrm{cm}) \quad \cdots (ヌ) \sim (ネ)$$

(2) 下の図から

$$\angle \mathrm{AOP} = \boldsymbol{90^\circ - \theta_1} \quad \cdots(ハ)$$
$$\angle \mathrm{OAP} = \boldsymbol{180^\circ - \theta_2} \quad \cdots(ヒ)$$



余弦定理により

$$\cos\angle \mathrm{AOP} = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OP}^2 - \mathrm{AP}^2}{2\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{OP}} = \frac{30^2 + 20^2 - 15^2}{2\cdot 20\cdot 30}$$
$$= \frac{6^2 + 4^2 - 3^2}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{43}{48}$$
$$\cos\angle \mathrm{OAP} = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AP}^2 - \mathrm{OP}^2}{2\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{AP}} = \frac{20^2 + 15^2 - 30^2}{2\cdot 20\cdot 15}$$
$$= \frac{4^2 + 3^2 - 6^2}{2\cdot 4\cdot 3} = -\frac{11}{24}$$

したがって　$\cos(90^\circ - \theta_1) = \dfrac{43}{48}$, $\cos(180^\circ - \theta_2) = -\dfrac{11}{24}$

$$\sin\theta_1 = \frac{43}{48} = 0.8958\cdots, \quad \cos\theta_2 = \frac{11}{24} = 0.4583\cdots$$

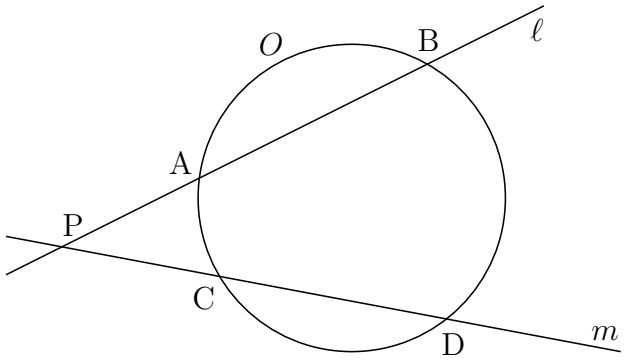
三角比の表から　$\boldsymbol{\theta_1 = 64^\circ,\ \theta_2 = 63^\circ}$　$\cdots(フ)$ ④　(ヘ) ②

11.1.3　第 3 回

第 3 問　(1) 下の図のように，点 P で交わる直線 ℓ，m があり，それぞれ円 O と異なる 2 点で交わっている．ℓ と円 O の交点を P に近い方から順に A，B とし，m と円 O の交点を P に近い方から順に C，D とする．このとき

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD} \quad \cdots ①$$

が成り立ち，これを方べきの定理という．この定理を証明しよう．



四角形 ACDB は円 O に内接するので

$$\angle\mathrm{ABD} = \boxed{\text{ア}}$$

である．よって

$$\triangle\mathrm{PAC} \backsim \boxed{\text{イ}}$$

となるので，この相似な二つの三角形の 2 辺の長さの比を比べれば ① が得られる．

ア の解答群

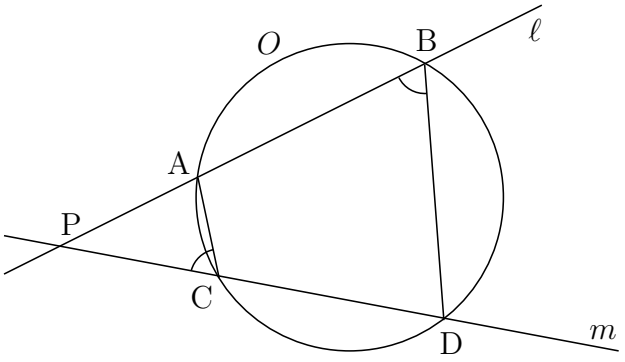
⓪ ∠ACD	① ∠ACP	② ∠APC
③ ∠BAC	④ ∠BDC	⑤ ∠CAP

イ の解答群

⓪ △ACB	① △ACD	② △ADB
③ △CDB	④ △PDB	

解答 四角形 ACDB は円 O に内接するから

$$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathbf{ACP} \quad \cdots (\text{ア})\ ①$$



△PCA と △PBD において，∠P は共通，∠PCA = ∠PBD より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle \mathrm{PCA} \backsim \mathbf{\triangle PBD} \quad \cdots (\text{イ})\ ④$$

(2) AB = 4，BC = 2，CD = 3，DA = 6，$\cos\angle\mathrm{BAD} = \dfrac{13}{20}$ の四角形 ABCD がある．ただし，四角形 ABCD の四つの内角はすべて 180° 未満とする．

(i) $\cos\angle\mathrm{BCD} = \dfrac{\boxed{ウエオ}}{\boxed{カキ}}$

(ii) 直線 AB と直線 CD の交点を E とすると

$$\mathrm{EB} = \frac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}},\quad \mathrm{EC} = \frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}$$

である．

(iii) 直線 AC と直線 BD の交点を F とすると

$$\mathrm{AF} : \mathrm{FC} = \boxed{セ} : 1$$

である．

(iv) 直線 AC の C の側の延長線上に AH : HC = $\boxed{セ}$: 1 を満たす点 H をとる．直線 AD と直線 BC の交点を G とするとき，H は $\boxed{ソ}$ の点である．

$\boxed{ソ}$ の解答群

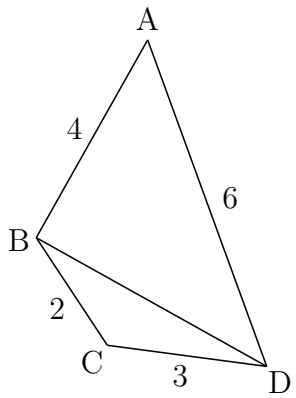
⓪ △AEG の内部　① 線分 EG 上　② △AEG の外部

解答　(i) △ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{BD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{BAD} \\ &= 4^2 + 6^2 - 2\cdot4\cdot6\cdot\frac{13}{20} = \frac{104}{5} \end{aligned}$$

△BCD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \cos\angle\mathrm{BCD} &= \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 - \mathrm{BD}^2}{2\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}} \\ &= \frac{2^2 + 3^2 - \frac{104}{5}}{2\cdot2\cdot3} = \boldsymbol{\frac{-13}{20}} \quad \cdots(\text{ウ}) \sim (\text{キ}) \end{aligned}$$



別解　11 ページの (1) より

$$\cos\angle\mathrm{BCD} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2 - 6^2}{2(2\cdot3 + 4\cdot6)} = \boldsymbol{-\frac{13}{20}}$$

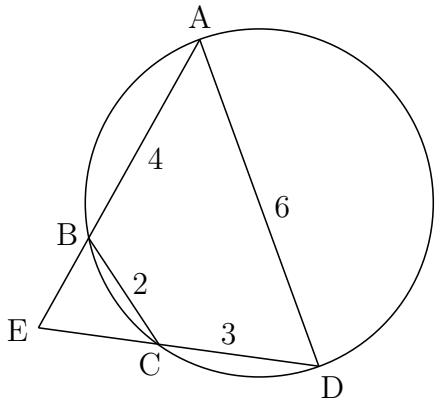
(ii) (i) の結論より，$\cos\angle\mathrm{BCD} = -\cos\angle\mathrm{BAD}$

$\triangle\mathrm{AED} \backsim \triangle\mathrm{CEB}$ であるから

$$4 + \mathrm{EB} : \mathrm{EC} + 3 : 6 = \mathrm{EC} : \mathrm{EB} : 2$$

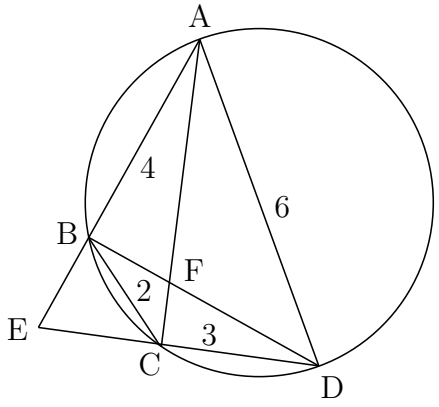
したがって　$4 + \mathrm{EB} = 3\mathrm{EC}$,　$\mathrm{EC} + 3 = 3\mathrm{EB}$

これを解いて　$\mathrm{EB} = \dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{8}}$,　$\mathrm{EC} = \dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}}$　$\cdots$(ク) ～ (ス)



(iii) 11 ページの公式 (5) より

$$\mathrm{AF} : \mathrm{FC} = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB} : \mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD} = 6\cdot 4 : 2\cdot 3 = \mathbf{4} : 1 \quad \cdots(\text{セ})$$



(iv) 直線 AC と辺 EG の交点を I とする．

四角形 ABCD が円に内接しているから，△GDC ∽ △GBA より

GD : DC : CG = GB : BA : AG　ゆえに　GD : 3 : CG = CG+2 : 4 : GD+6

したがって　$4\mathrm{GD} = 3(\mathrm{CG}+2),\ \ 4\mathrm{CG} = 3(\mathrm{GD}+6)$

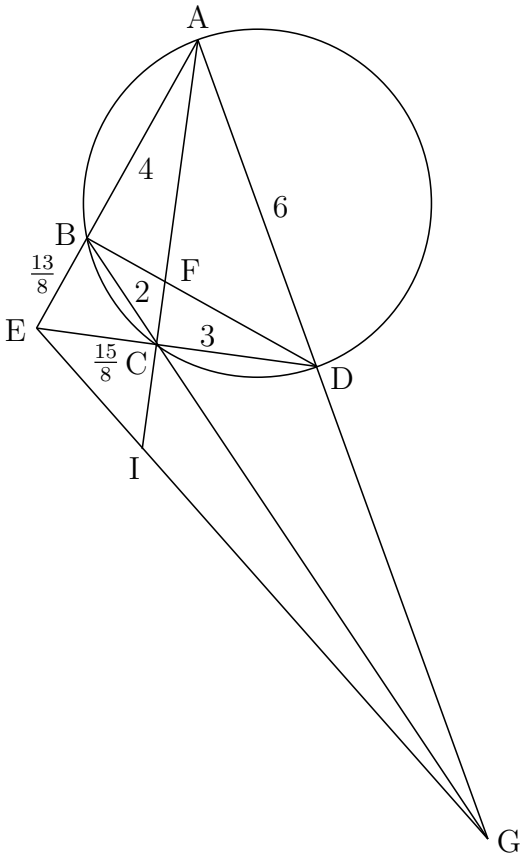
これを解いて　$\mathrm{CG} = \dfrac{90}{7},\ \mathrm{GD} = \dfrac{78}{7}$

△ABC と直線 EI について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IC}}\cdot\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IC}}\cdot\frac{\frac{90}{7}}{\frac{90}{7}+2}\cdot\frac{\frac{13}{8}}{\frac{13}{8}+4} = 1$$

したがって　AI : IC = 4 : 1　ゆえに　H と I は一致する．

よって，**H は EG 上**の点である．　…(ソ) ①



別解 (170 ページの**定理 8** を利用する解法)

2 直線 FG と AE の交点を J とし，△ABG にチェバの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AJ}}{\mathrm{JB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CG}}\cdot\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{DA}}= \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AJ}}{\mathrm{JB}}\cdot\frac{2}{\frac{90}{7}}\cdot\frac{\frac{78}{7}}{6}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\mathrm{AJ}}{\mathrm{JB}}=\frac{45}{13}$$

したがって，4 点 A，J，B，E の複比 $(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{J},\mathrm{E})$ は

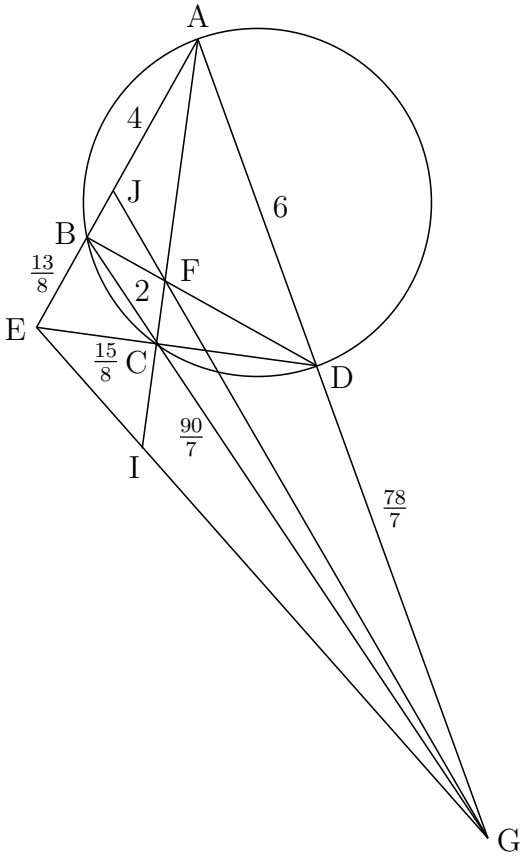
$$(\mathrm{A},\mathrm{B};\mathrm{A},\mathrm{E})=\frac{\mathrm{AJ}}{\mathrm{JB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AE}}=\frac{45}{13}\cdot\frac{\frac{13}{8}}{4+\frac{13}{8}}=1$$

であるから，4 点 A，F，C，I の複比 $(\mathrm{A},\mathrm{C};\mathrm{F},\mathrm{I})$ は

$$(\mathrm{A},\mathrm{C};\mathrm{F},\mathrm{I})=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{CF}}\cdot\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{AI}}=\frac{4}{1}\cdot\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{AI}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{CI}}=4$$

したがって　$\mathrm{AI}:\mathrm{IC}=4:1$　ゆえに　H と I は一致する．

よって，**H は EG 上の点である．**



補足　4 点 A，J，B，E および 4 点 A，F，C，I はともに調和点列である．

11.1.4　第 4 回

第 3 問 △ABC において，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とする．

(1) △ABC の外接円と直線 AD の交点のうち，点 A でない点を E とする．
△ABE ∽ △ADC より

$$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE} = \boxed{\text{ア}}$$

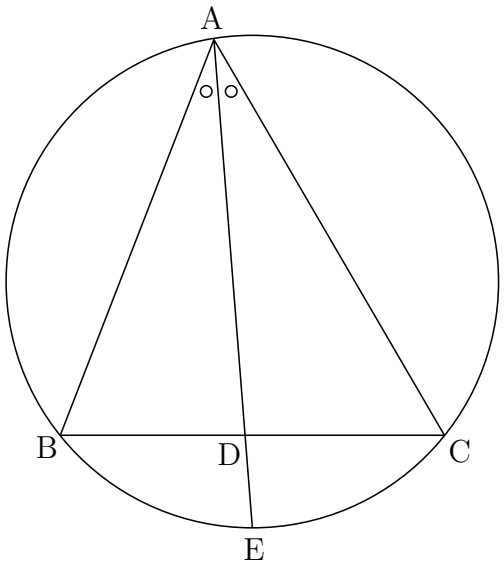
である．また，方べきの定理により

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE} = \boxed{\text{イ}}$$

であるから

$$\mathrm{AD}^2 = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}$$

である．



ア ，イ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ AB·AC	① AB·BC	② AB·BD	③ AB·CD
④ AC·BC	⑤ AC·BD	⑥ AC·CD	⑦ BC·BD
⑧ BC·CD	⑨ BD·CD		

(2) △ABC において，∠BAC の内角の二等分線と ∠ABC，∠BCA の外角の二等分線は 1 点で交わることが知られており，その交点を「△ABC の ∠BAC についての傍心」という．

△ABC の内心を I，∠BAC についての傍心を $\mathrm{I_A}$ とする．

(i) 直線 BI_A と直線 AC が交わらないのは，［ウ］のときである．

［ウ］の解答群

⓪ $\angle BAC = 90°$　① $\angle ABC = 90°$　② $\angle BCA = 90°$
③ $AB = BC$　④ $BC = CA$　⑤ $CA = AB$

(ii) $AB = 4$，$BC = 2$，$CA = 3$ のとき，$\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{［エ］}{［オ］}$ である．

このとき，［ウ］は成り立たないから，直線 BI_A と直線 AC は交わる．
その交点を F とする．
線分 AB の点 B の方の延長線上 (点 B を除く) に点 G をとると，$\angle GBF = \angle CBF$ より，$CF =$［カ］である．また，3 点 B，I，I_A は線分［キ］を直径とする円周上の点である．

［キ］の解答群

⓪ BI　① BI_A　② II_A

以上のことと $ID = \dfrac{［ク］\sqrt{［ケコ］}}{［サシ］}$ より，$\triangle BII_A$ の外心を O とすると

$$OD = \frac{［ス］\sqrt{［セソ］}}{［タチツ］}$$

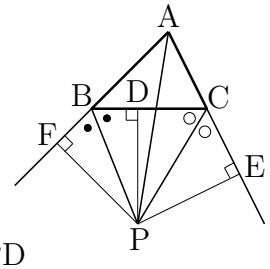
であり，点 O は △ABC の外接円の［テ］の点であることがわかる．

［テ］の解答群

⓪ 内部　① 外部　② 周上

解答　(1) (ア) ⓪　(イ) ⑨　(169 ページの三角形の角の二等分線に関する公式を参照)

補題　△ABC において，右の図のように ∠B の外角の二等分線と ∠C の外角の二等分線との交点 (傍心) を P とするとき，P は ∠A の二等分線上にある．このことを証明せよ．



証明　P は ∠B の外角の二等分線上にあるから　PF = PD

また，P は ∠C の外角の二等分線上にあるから　PE = PD

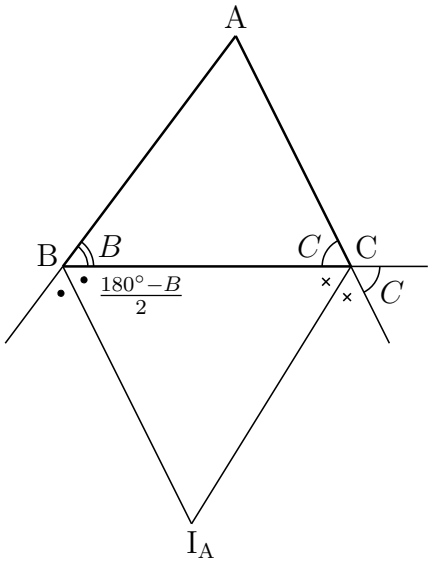
よって　PF = PE

したがって，P は ∠A の二等分線上にある．　**証終**

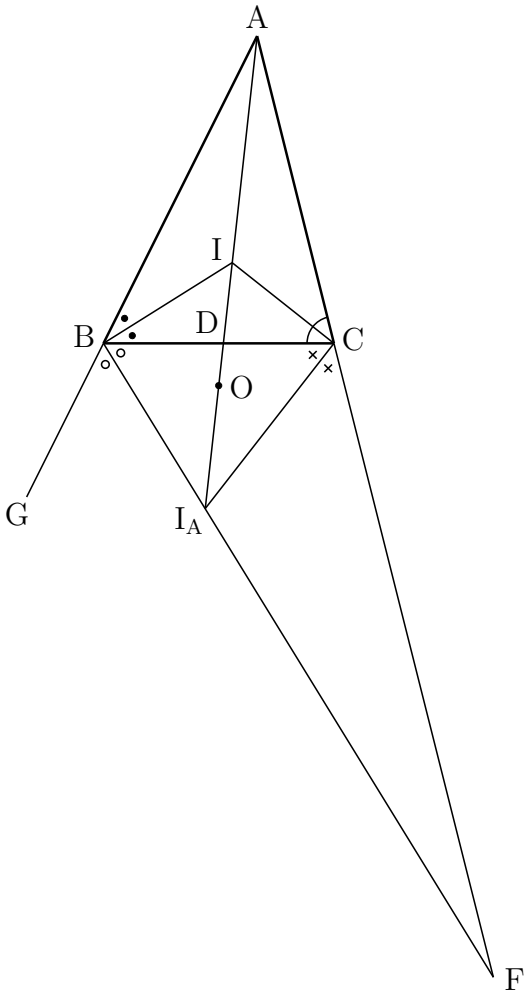
(2)　(i)　直線 BI_A と直線 AC が交わらないとき　$C = \dfrac{180^\circ - B}{2}$

$C = 180^\circ - (B + C)$　ゆえに　$C = A$

よって　　$\mathbf{AB = BC}$　$\cdots$(ウ) ③



(ii) $a = \mathrm{BC}$，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$，$d = \mathrm{AD}$ とおき，一般的に示す．
172 ページで確認した調和点列の性質 (1) により，4 点 A, I, D, $\mathrm{I_A}$ は調和点列である．



$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$ より

$$\mathrm{BD} = \frac{c}{b+c}\mathrm{BC} = \frac{ac}{b+c}, \quad \mathrm{DC} = \frac{b}{b+c}\mathrm{BC} = \frac{ab}{b+c}$$

$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{BA} : \mathrm{BD} = c : \dfrac{ac}{b+c} = b+c : a$ より

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}} = \frac{b+c}{a} = \frac{3+4}{2} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}} \quad \cdots(\text{エ})(\text{オ})$$

BF は $\angle\mathrm{ABC}$ の外角の二等分線であるから，$\mathrm{BA} : \mathrm{BC} = \mathrm{AF} : \mathrm{FC}$

$$c : a = b + \mathrm{CF} : \mathrm{CF} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CF} = \frac{ab}{c-a} = \frac{2\cdot 3}{4-2} = \mathbf{3} \quad \cdots(\text{カ})$$

$\angle \mathrm{IBI_A} = 90^\circ$ であるから，3 点 B，I，$\mathrm{I_A}$ は線分 $\mathbf{II_A}$ を直径とする円周上の点である．　$\cdots$(キ) ②

点 I は線分 AD を $b+c : a$ に内分する点であるから

$$\mathrm{AI} = \frac{b+c}{(b+c)+a}\mathrm{AD} = \frac{(b+c)d}{b+c+a},$$
$$\mathrm{ID} = \frac{a}{(b+c)+a}\mathrm{AD} = \frac{ad}{b+c+a}$$

点 $\mathrm{I_A}$ は線分 AD を $b+c : a$ に外分する点であるから

$$\mathrm{AI_A} = \frac{b+c}{(b+c)-a}\mathrm{AD} = \frac{(b+c)d}{b+c-a}$$

点 O は線分 $\mathrm{II_A}$ の中点であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AO} &= \frac{1}{2}(\mathrm{AI}+\mathrm{AI_A})\\ &= \frac{1}{2}(b+c)d\left(\frac{1}{b+c+a}+\frac{1}{b+c-a}\right)\\ &= \frac{(b+c)^2 d}{(b+c)^2-a^2},\\ \mathrm{OD} &= \mathrm{AO}-\mathrm{AD} = \frac{(b+c)^2 d}{(b+c)^2-a^2} - d = \frac{a^2 d}{(b+c)^2-a^2}\end{aligned}$$

ここで，(1) の結論を利用すると

$$\begin{aligned}d^2 &= \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} - \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}\\ &= c\cdot b - \frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c} = \frac{bc\{(b+c)^2-a^2\}}{(b+c)^2}\end{aligned}$$

上の諸式から

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DO} &= d\cdot\frac{a^2 d}{(b+c)^2-a^2} = \frac{a^2}{(b+c)^2-a^2}d^2\\ &= \frac{a^2}{(b+c)^2-a^2}\cdot\frac{bc\{(b+c)^2-a^2\}}{(b+c)^2}\\ &= \frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{bc+c} = \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}\end{aligned}$$

方べきの定理の逆により，4 点 A，B，O，C を同一円周上にある．
よって，点 O は $\triangle$ABC の外接円の**周上**の点である．　$\cdots$(テ) ②

$a=2,\ b=3,\ c=4$ より

$$d^2=\frac{bc\{(b+c)^2-a^2\}}{(b+c)^2}=\frac{3\cdot4\{(3+4)^2-2^2\}}{(3+4)^2}=\frac{12\cdot45}{49}$$

$d>0$ であるから　$d=\dfrac{6}{7}\sqrt{15}$

$$\begin{aligned}\mathrm{ID}&=\frac{ad}{b+c+a}=\frac{2}{3+4+2}\cdot\frac{6}{7}\sqrt{15}\\&=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{15}}{21}}\cdots(\text{ク})\sim(\text{シ}),\\\mathrm{OD}&=\frac{a^2d}{(b+c)^2-a^2}=\frac{2^2}{(3+4)^2-2^2}\cdot\frac{6}{7}\sqrt{15}\\&=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{15}}{105}}\quad\cdots(\text{ス})\sim(\text{ツ})\end{aligned}$$

11.1.5　第 5 回

第 3 問 O を中心とする円 C の外部に点 P がある．P から C に引いた接線と C の接点の一つを A とし，A から直線 OP に垂線 AS を引く．P の位置に関係なく成り立つ性質について考える．

(1) 直線 OP と C の交点のうち，P に近い方を Q，P から遠い方を R とおくと，方べきの定理より

$$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR} = \boxed{\text{ア}}$$

である．また，$\triangle\mathrm{OAP} \backsim \triangle\mathrm{ASP}$ より

$$\mathrm{PO}\cdot\mathrm{PS} = \boxed{\text{イ}}$$

である．

ア，イ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ PO	① PO^2	② PA
③ PA^2	④ PS	⑤ PS^2

さらに，O が線分 QR の中点であることから，$\mathrm{PO} = \boxed{\text{ウ}}$ であり

$$\frac{1}{\mathrm{PQ}} + \frac{1}{\mathrm{PR}} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\mathrm{PS}}$$

が成り立つ．

ウ の解答群

⓪ $\mathrm{PR} - \mathrm{PQ}$	① $\mathrm{PS} - \mathrm{QS}$	② $\mathrm{PS} - \mathrm{RS}$
③ $\dfrac{\mathrm{PQ} + \mathrm{PR}}{2}$	④ $\dfrac{\mathrm{PS} + \mathrm{QS}}{2}$	⑤ $\dfrac{\mathrm{PS} + \mathrm{RS}}{2}$

(2) P を通り直線 OP と一致しない直線 ℓ が，C と異なる 2 点 Q′，R′ で交わる場合を考える．ただし，P に近い方の点を Q′ とする．ℓ と直線 AS の交点を T とし，O から直線 ℓ に垂線 OH を引く．

(i) このとき

$$\mathrm{PO}\cdot\mathrm{PS} = \boxed{\text{オ}}$$

であるから，直線 ℓ 上の点について

$$\frac{1}{\mathrm{PQ'}} + \frac{1}{\mathrm{PR'}} = \boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ．

オ の解答群

⓪ PT　① PT^2　② PH
③ PH^2　④ $\mathrm{PT}\cdot\mathrm{PH}$

カ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{\mathrm{PT}}$　① $\dfrac{1}{\mathrm{PH}}$　② $\dfrac{1}{\mathrm{Q'R'}}$　③ $\dfrac{1}{\mathrm{TH}}$
④ $\dfrac{2}{\mathrm{PT}}$　⑤ $\dfrac{2}{\mathrm{PH}}$　⑥ $\dfrac{2}{\mathrm{Q'R'}}$　⑦ $\dfrac{2}{\mathrm{TH}}$

(ii) $\mathrm{PT} = \mathrm{PQ'} + \mathrm{Q'T},\ \mathrm{PR'} = \mathrm{PT} + \mathrm{TR'}$ に注意すると

$$\frac{\mathrm{Q'T}}{\mathrm{PQ'}} = \boxed{\text{キ}}$$

が成り立つ．

また，$\mathrm{OA} = 1,\ \mathrm{PO} = 5,\ \mathrm{PQ'} = \dfrac{9}{2}$ のとき，$\mathrm{HT} = \dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサシ}}}$ である．

キ の解答群

⓪ $\dfrac{\mathrm{R'T}}{\mathrm{PR'}}$　① $\dfrac{\mathrm{TR'}}{\mathrm{PT}}$　② $\dfrac{\mathrm{TH}}{\mathrm{PT}}$
③ $\dfrac{\mathrm{HR'}}{\mathrm{PH}}$　④ $\dfrac{\mathrm{TH}}{\mathrm{PH}}$　⑤ $\dfrac{\mathrm{R'H}}{\mathrm{PR'}}$

解答　(1) 方べきの定理により

$$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR} = \mathbf{PA^2} \quad \cdots(\text{ア})\ ③$$

また，△OAP ∽ △ASP より

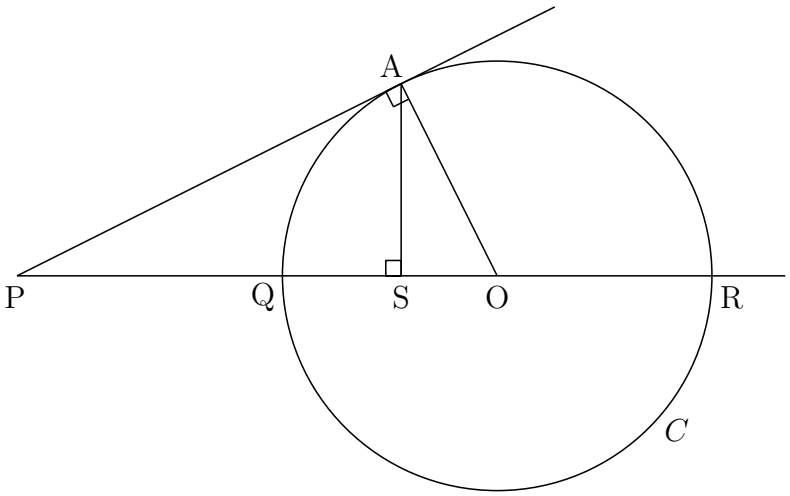
$$\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PO}} = \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PA}} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{PO}\cdot\mathrm{PS} = \mathbf{PA^2} \quad \cdots(\text{イ})\ ③$$

点 O は線分 QR の中点であるから

$$\mathrm{PO} = \frac{\mathbf{PQ + PR}}{\mathbf{2}} \quad \cdots(\text{ウ})\ ③$$

点 P は C の極で，直線 AS は極線であるから，172 ページの調和点列の性質 (2) により

$$\frac{1}{\mathrm{PQ}} + \frac{1}{\mathrm{PR}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathrm{PS}} \quad \cdots(\text{エ})$$

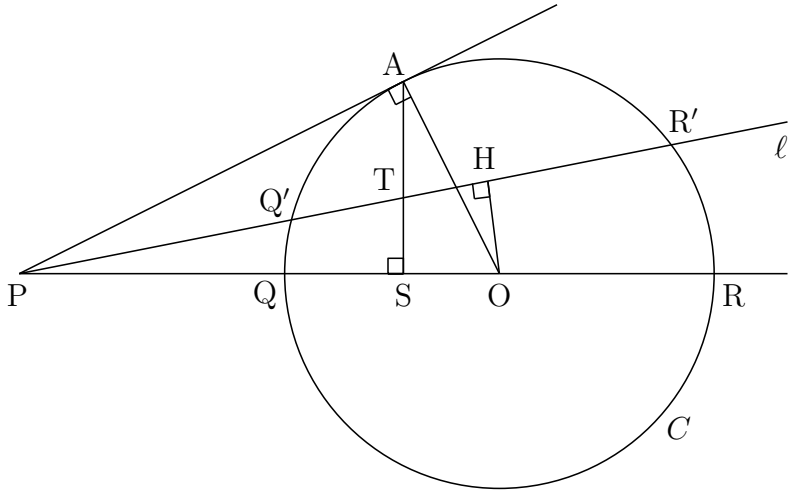


(2) (i) △POH ∽ △PTS であるから

$$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PO}}=\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PT}} \quad \text{よって} \quad \mathrm{PO}\cdot\mathrm{PS}=\mathbf{PT}\cdot\mathbf{PH} \quad \cdots(\text{オ})\ ④$$

4 点 P, Q′, T, R′ は調和点列であるから

$$\frac{1}{\mathrm{PQ'}}+\frac{1}{\mathrm{PR'}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{PT}} \quad \cdots(\text{カ})\ ④$$



(ii) 調和点列 P, Q′, T, R′ の複比は 1 であるから

$$(\mathrm{P},\mathrm{T};\mathrm{Q'},\mathrm{R'})=\frac{\mathrm{PQ'}}{\mathrm{TQ'}}\cdot\frac{\mathrm{TR'}}{\mathrm{PR'}}=1 \quad \text{よって} \quad \frac{\mathrm{Q'T}}{\mathrm{PQ'}}=\frac{\mathbf{R'T}}{\mathbf{PR'}} \quad \cdots(\text{キ})\ ⓪$$

$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{PO}=5$ より　$\mathrm{PA}^2=\mathrm{PO}^2-\mathrm{OA}^2=5^2-1^2=24$

方べきの定理により　$\mathrm{PQ'}\cdot\mathrm{PR'}=\mathrm{PA}^2=24$

これに $\mathrm{PQ'}=\dfrac{9}{2}$ を代入すると　$\mathrm{PR'}=\dfrac{16}{3}$

$$\frac{2}{\mathrm{PT}}=\frac{1}{\mathrm{PQ'}}+\frac{1}{\mathrm{PR'}}=\frac{2}{9}+\frac{3}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{PT}=\frac{288}{59}$$

H は線分 Q′R′ の中点であるから

$$\mathrm{PH}=\frac{\mathrm{PQ'}+\mathrm{PR'}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+\frac{16}{3}\right)=\frac{59}{12}$$

よって　$\mathrm{HT}=\mathrm{PH}-\mathrm{PT}=\dfrac{59}{12}-\dfrac{288}{59}=\dfrac{\mathbf{25}}{\mathbf{708}}$

11.1.6　第 6 回

第 3 問 次の**定理**と**問題**について考える.

定理

△ABC の辺 BC の中点を D とすると

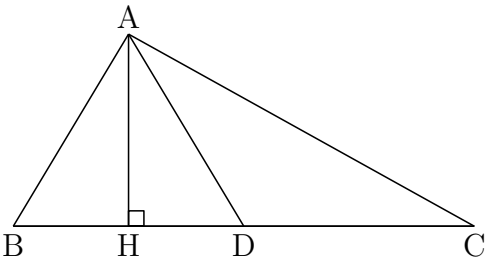
$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2) \quad \cdots (*)$$

が成り立つ.

(1) **定理**は次のように証明できる.

証明

点 A から直線 BC へ下した垂線と直線 BC の交点を H とおく.



点 H が線分 DH 上にあるとき，三平方の定理により

$$\mathrm{AH}^2 + \left(\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}} \right)^2 = \mathrm{AB}^2$$

$$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{DH}^2 = \mathrm{AD}^2$$

$$\mathrm{AH}^2 + \left(\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} \right)^2 = \mathrm{AC}^2$$

これらより AH と DH を消去すると，$(*)$ が得られる.
点 H が線分 BD 上にないときも同様である.

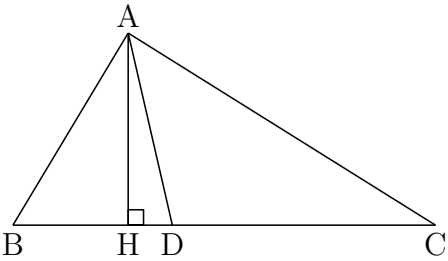
$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ④ のうちから一つずつ選べ．ただし，$\boxed{\text{ア}} > \boxed{\text{イ}}$とする.

⓪ BC　　① BD　　② BH　　③ CH　　④ DH

次の**問題**について，点 A から直線 BC へ下した垂線と直線 BC の交点を H とおくことで，**定理の証明**と同じ構想で考えることができる．

問題

△ABC の ∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とおくとき，AD^2 を AB，AC，BD，DC を用いて表せ．



［ウ］から，$\dfrac{AC}{AB} = r$ とおくと，点 H が線分 BD 上にあるとき，三平方の定理より

$$AH^2 + \left(\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\right)^2 = AB^2$$

$$AH^2 + DH^2 = AD^2$$

$$AH^2 + \left(r\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}\right)^2 = AC^2$$

これらより，AD^2 を AB，AC，BD，DC を用いて表すと

$$AD^2 = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}} \quad \cdots ①$$

となる．

点 H が線分 BD 上にないときも同様である．

ウ の解答群

⓪ 三角形の三つの内角の二等分線は 1 点で交わる.
① 三角形の三つの頂点から，向かい合う辺またはその延長へ下ろした垂線は 1 点で交わる.
② 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる.
③ △ABC の ∠BAC の二等分線と辺 BC の交点は，辺 BC を AB : AC に内分する.
④ AB $\neq$ AC である △ABC の頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点 Q は，辺 BC を AB : AC に外分する.

エ , オ の解答群

⓪ $(AB^2 + AC^2)$
① $\dfrac{AB^2 + AC^2}{2}$
② $(AB + AC)$
③ $\dfrac{AB + AC}{2}$
④ AB·AC
⑤ $(BD^2 + DC^2)$
⑥ $\dfrac{BD^2 + DC^2}{2}$
⑦ $(BD + DC)$
⑧ $\dfrac{BD + DC}{2}$
⑨ BD·DC

(2) 太郎と花子さんは，**問題**の解答について振り返っている．

花子： **問題**を解くことはできたけれど，計算が大変だったね．
太郎： 計算量の少ない方法はないかな．
花子： △ABC の外接円をかいてみたらどうかな．

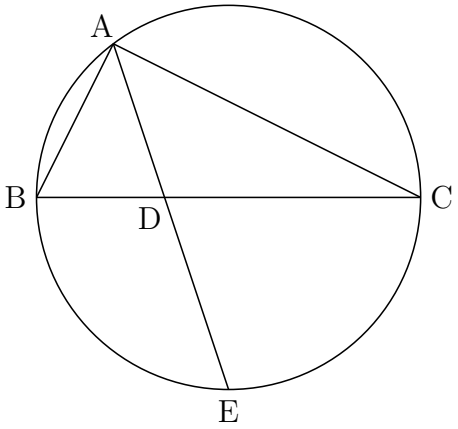
△ABC の外接円の直線 AD の交点を E とおくと，方べきの定理により

$$\mathrm{AD}\cdot\boxed{\text{カ}}=\boxed{\text{オ}} \quad \cdots ②$$

円周角の定理より

$$\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{AEC}$$

となる．



△DAB ∽ $\boxed{\text{キ}}$ より

$$\mathrm{AD}\cdot\boxed{\text{ク}}=\boxed{\text{エ}}$$

である．

この式と ② より，(1) の ① が得られる．

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ AC　① AE　② BC　③ CD　④ CE　⑤ DE

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ △ACB　① △ADC　② △CAE　③ △ECB

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ AC　① AE　② BC　③ CD　④ CE　⑤ DE

(3) AD が ∠BAC の二等分線でない場合について考える．点 D が直線 BC 上を動くとき (1) の ① がつねに成り立つための必要十分条件として正しいものは［ケ］である．

［ケ］の解答群

⓪ ∠BAC = 90° であること
① AB = AC であること
② △ABC が直角二等辺三角形であること
③ △ABC が正三角形であること

解答 (1) $\mathrm{BH} = \mathrm{BD} - \mathrm{DH}$, $\mathrm{HC} = \mathrm{DC} + \mathrm{DH} = \mathrm{BD} + \mathrm{DH}$ を

$$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2 = \mathrm{AB}^2, \quad \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HC}^2 = \mathrm{AC}^2$$

に代入すると

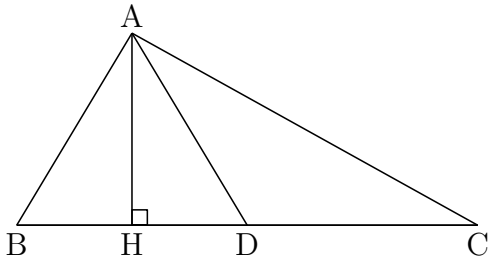
$$\mathrm{AH}^2 + (\mathbf{BD} - \mathbf{DH})^2 = \mathrm{AB}^2, \quad \cdots(\text{ア})(\text{イ})$$
$$\mathrm{AH}^2 + (\mathrm{BD} + \mathrm{DH})^2 = \mathrm{AC}^2$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$(\mathrm{AH}^2 + \mathrm{DH}^2 + \mathrm{BD}^2) = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$$

$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{DH}^2 = \mathrm{AD}^2$ であるから

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2)$$



△ABC の ∠BAC の二等分線と辺 BC の交点は，辺 BC を AB : AC に内分するから，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = r$ とおくと，点 H が線分 BD 上にあるとき，三平方の定理より

$$\begin{aligned}
\mathrm{AH}^2 + (\mathrm{BD} - \mathrm{DH})^2 &= \mathrm{AB}^2 \\
\mathrm{AH}^2 + \mathrm{DH}^2 &= \mathrm{AD}^2 \\
\mathrm{AH}^2 + (r\mathrm{BD} + \mathrm{DH})^2 &= \mathrm{AC}^2
\end{aligned}$$

第 1 式 $\times r +$ 第 3 式 より

$$\begin{aligned}
(r+1)(\mathrm{AH}^2 + \mathrm{DH}^2) + (r^2 + r)\mathrm{BD}^2 &= r\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 \\
(r+1)\mathrm{AD}^2 + (r^2 + r)\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} + \mathrm{AC}^2 \\
\mathrm{AD}^2 + r\mathrm{BD}^2 &= \frac{\mathrm{AC}(\mathrm{AB} + \mathrm{AC})}{r+1} \\
\mathrm{AD}^2 + \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\cdot\mathrm{BD}^2 &= \frac{\mathrm{AC}(\mathrm{AB} + \mathrm{AC})}{\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} + 1}
\end{aligned}$$

AB : AC = BD : DC より，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BD}}$ より

$$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$$

よって

$$\mathrm{AD}^2 = \mathbf{AB\cdot AC - BD\cdot DC} \quad \cdots ① \quad (\text{エ})(\text{オ})$$

となる．

点 H が線分 BD 上にないときも同様である．

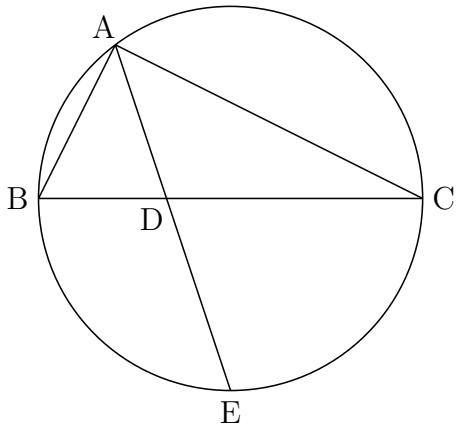
△ABC の外接円の直線 AD の交点を E とおくと，方べきの定理により

$$\mathrm{AD}\cdot\mathbf{DE} = \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC} \quad \cdots ② \quad (カ)⑤$$

円周角の定理より

$$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{AEC}$$

となる．



△DAB ∽ **△CAE** より　$\cdots$ (キ) ②

$$\mathrm{AD}\cdot\mathbf{AE} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} \quad \cdots (ク)\ ①$$

である．

この式と ② より，(1) の ① が得られる．

(2) ① から　　$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$

スチュワートの定理により

$$\mathrm{AB}^2\cdot\mathrm{DC} + \mathrm{AC}^2\cdot\mathrm{BD} = \mathrm{BC}\cdot(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC})$$

上の 2 式から　$\mathrm{AB}^2\cdot\mathrm{DC} + \mathrm{AC}^2\cdot\mathrm{BD} = \mathrm{BC}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$

$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = r > 0$ とおくと　$\mathrm{BD}r^2 - \mathrm{BC}r + \mathrm{DC} = 0$

D は BC 上の点であるから，$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} + \mathrm{DC}$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{BD}r^2 - (\mathrm{BD} + \mathrm{DC})r + \mathrm{DC} &= 0 \\
(r-1)(r\mathrm{BD} - \mathrm{DC}) &= 0 \\
\left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} - 1\right)\left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\cdot\mathrm{BD} - \mathrm{DC}\right) &= 0 \\
(\mathrm{AC} - \mathrm{AB})(\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} - \mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC}) &= 0
\end{aligned}$$

AD が ∠BAC の二等分線でないから，$\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} - \mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC} \neq 0$ に注意して

$$\mathbf{AB = AC} \quad \cdots (\text{ケ})\ ①$$

11.1.7　第 7 回

第 1 問

〔1〕 (1) 正の実数 x，y が

$$x+y=7$$

および

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{13}$$

を満たしている．このとき

$$xy=\boxed{\text{ア}}$$

である．

(2) 正の実数 x, y, z が

$$x+y+z=11,\quad xy+yz+zx=26,\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1+3\sqrt{2}$$

を満たしている．このとき

$$xyz=\boxed{\text{イウ}}$$

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}\sqrt{2}$$

解答　(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{13}$ の両辺を平方すると

$$x+y+2\sqrt{xy}=13$$

これに $x+y=7$ を代入して整理すると

$$\sqrt{xy}=3 \quad \text{よって} \quad xy=\mathbf{9} \quad \cdots(\text{ア})$$

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1+3\sqrt{2}$ の両辺を平方すると

$$x+y+z+2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})=19+6\sqrt{2}$$

これに $x+y+z=11$ を代入して整理すると

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\mathbf{4}+\mathbf{3}\sqrt{2} \quad \cdots(\text{エ})(\text{オ})$$

さらに，これを平方すると

$$xy+yz+zx+2\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})=34+24\sqrt{2}$$

$xy+yz+zx=26$ を代入して整理すると

$$\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})=4(1+3\sqrt{2})$$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1+3\sqrt{2}$ より

$$\sqrt{xyz}=4 \quad \text{よって} \quad xyz=\mathbf{16} \quad \cdots(\text{イ})(\text{ウ})$$

第 4 問 1 から 6 までの数字を用いて番号が設定されているカギがある．例えば，番号が 3 桁(けた)のときは 111〜666 の番号が設定されており，カギを一つ購入したとき，購入したカギにどの番号が設定されている事象も同様に確からしいものとする．

太郎さんは番号に【6】を含むものについて考えることにし，花子さんは番号に【12】の並びを含むものについて考えることにした．

(1) カギの番号が 3 桁の場合を考える．

(i) 番号に【6】を含まないものは $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある．したがって，カギを一つ購入したとき，番号に【6】を含む確率は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキク}}}$ であり，番号に【6】を含むときにそれが最初の 1 桁である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である．

(ii) 番号の最初の 2 桁が【12】，最後の 2 桁が【12】のものはどちらも $\boxed{\text{ス}}$ 通りずつある．したがって，カギを一つ購入したとき，番号に【12】の並びを含む確率は $\dfrac{1}{\boxed{\text{セソ}}}$ であり，番号に【12】の並びを含むときにそれが最初の 2 桁である条件付き確率は $\dfrac{1}{\boxed{\text{タ}}}$ である．

(2)

太郎：番号が4桁の場合はどうなるのかな．
花子：番号に【6】を含むものは，番号が3桁のときと同じように，番号に【6】を含まないものに着目して考えるとよさそうだね．番号が5桁以上の場合も同じように考えることができそうだね．
太郎：番号に【12】の並びを含むものは，「最初の2桁が【12】」，「真ん中の2桁が【12】」，「最後の2桁が【12】」の三つの場合について考えればよさそうだね．
花子：【1212】が「最初の2桁が【12】」，「最後の2桁が【12】」の両方に含まれることに注意しないといけないね．

カギの番号が4桁の場合を考える．

番号に【12】の並びを含むものは チツテ 通りである．したがって，カギを一つ購入したとき，番号に【12】の並びを含む確率は $\frac{\boxed{トナニ}}{1296}$ であり，【12】の並びを含むときにそれが最初の2桁である条件付き確率は $\frac{\boxed{ヌネ}}{\boxed{ノハヒ}}$ である．

(3)

太郎：番号が5桁の場合に，番号に【12】の並びを含む確率や，【12】の並びを含むときにそれが最初の2桁である条件付き確率はどうなるのかな．

花子：4桁の場合と同じように考えると，番号に【12】の並びを含む確率は $\frac{47}{432}$，【12】の並びを含むときにそれが最初の2桁である条件付き確率は $\frac{12}{47}$ だね．

太郎：番号が6桁の場合も，4桁や5桁のときと同じように考えればよさそうだね．

花子：6桁だと【1212】の並びを含むものだけでなく，【121212】の並びを含むものにも注意しないといけないから，番号に【12】の並びを含む確率や，【12】の並びを含むときにそれが最初の2桁である条件付き確率を計算するのは大変そうね．

太郎：でも，番号に【12】の並びを含む確率や，【12】の並びを含むときにそれが最初の2桁である条件付き確率のだいたいの大きさはわかるね．

カギの番号が6桁の場合を考える．

カギを一つ購入したとき，番号に【12】の並びを含む確率をPとし，番号に【12】の並びを含むときにそれが最初の2桁である条件付き確率をQとするとき，Pの値は［フ］の範囲にあり，Qの値は［ヘ］の範囲にある．

フ

⓪ $\frac{1}{12} < P < \frac{1}{9}$　　① $\frac{1}{9} < P < \frac{5}{36}$

② $\frac{5}{36} < P < \frac{1}{6}$　　③ $\frac{1}{6} < P < \frac{7}{36}$

ヘ

⓪ $\frac{1}{8} < P < \frac{1}{7}$　　① $\frac{1}{7} < P < \frac{1}{6}$

② $\frac{1}{6} < P < \frac{1}{5}$　　③ $\frac{1}{5} < P < \frac{1}{4}$

解答　(1) カギの番号が3桁の場合を考える.

(i) 番号に【6】を含まないものは

$$5^3 = \mathbf{125}\ (\text{通り}) \quad \cdots(\text{ア}) \sim (\text{ウ})$$

【6】を含まない確率は　$\dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{125}{216}$

番号に【6】を含む確率は，この余事象の確率は

$$1 - \frac{125}{216} = \frac{\mathbf{91}}{\mathbf{216}} \quad \cdots(\text{エ}) \sim (\text{ク})$$

1桁目に【6】を含む場合の数は

$$1 \times 6 \times 6 = 36\ (\text{通り})$$

番号に【6】を含むときにそれが最初の1桁である条件付き確率は

$$\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{91}} \quad \cdots(\text{ケ}) \sim (\text{シ})$$

(ii) 番号の最初の2桁が【12】，最後の2桁が【12】のものはどちらも **6** 通りずつある.　$\cdots(\text{ス})$

カギを一つ購入したとき，番号に【12】の並びを含む確率は

$$\frac{6+6}{216} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}} \quad \cdots(\text{セ})(\text{ソ})$$

であり，番号に【12】の並びを含むときにそれが最初の2桁である条件付き確率は

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \quad \cdots(\text{タ})$$

である.

(2) 番号に【12】の並びを含むものは，残りの数字を X（1〜6）とすると

(i)【12XX】，　(ii)【X12X】，　(iii)【XX12】

のいずれかであり，(i)〜(iii) はいずれも

$$6^2 = 36\,(\text{通り})$$

【1212】は (i)，(iii) の両方に含まれるので，番号に【12】の並びを含むものは

$$36 \times 3 - 1 = 107\,(\text{通り}) \quad \cdots (\text{チ}) \sim (\text{テ})$$

したがって，番号に【12】の並びを含む確率は

$$\frac{107}{6^4} = \frac{\mathbf{107}}{\mathbf{1296}} \quad \cdots (\text{ト}) \sim (\text{ニ})$$

【12】の並びを含むときにそれが最初の 2 桁である条件付き確率は

$$\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{107}} \quad \cdots (\text{ヌ}) \sim (\text{ヒ})$$

(3) 番号に【12】の並びを含むものは，残りの数字を X（1〜6）とすると

【12XXXX】,【X12XXX】,【XX12XX】,【XXX12X】,【XXXX12】

のいずれかであり，それぞれ

$$6^4 \text{ (通り)}$$

である．これらを合わせた 5×6^4(通り) の中には

【1212XX】,【12X12X】,【12XX12】,
【X1212X】,【X12X12】,【XX1212】,
【121212】

で重複であるが，これらの場合の数は

$$6 \times 6^2 + 1 \text{ (通り)}$$

より少なく，$6 \times 6^2 + 1 < 6^4$ であるから

$$\frac{5 \times 6^4 - 6^4}{6^6} < P < \frac{5 \times 6^4}{6^6}$$
$$\frac{4 \times 6^4}{6^6} < P < \frac{5 \times 6^4}{6^6}$$

すなわち

$$\boldsymbol{\frac{1}{9} < P < \frac{5}{36}} \quad \cdots(\text{フ})\ ①$$

また,【12】の並びを含むときにそれが最初の 2 桁である条件付き確率は

$$Q = \frac{\frac{6^4}{6^6}}{P}$$

したがって

$$\frac{1}{36} \Big/ \frac{5}{36} < Q < \frac{1}{36} \Big/ \frac{1}{9} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{1}{5} < Q < \frac{1}{4}} \quad \cdots(\text{ヘ})\ ③$$

補足 各位が1〜6の数からなる n 桁の整数で【12】の並びを含まない整数の個数を S_n とする．これらの整数の中で一の位がそれぞれ「1」「2」「1,2 以外」の個数をそれぞれ $a_n,\ b_n,\ c_n$ とすると，次の漸化式が成立する．

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1,\ b_1 = 1,\ c_1 = 4,\\
&a_{n+1} = a_n + b_n + c_n\\
&b_{n+1} = b_n + c_n\\
&c_{n+1} = 4(a_n + b_n + c_n)\\
&S_n = a_n + b_n + c_n
\end{aligned}$$

$c_n = 4a_n$ であるから

$$a_{n+1} = 5a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 4a_n + b_n$$

これから，順次

$$\begin{aligned}
&a_2 = 6,\ b_2 = 5,\ a_3 = 35,\ b_3 = 29,\ a_4 = 204,\ b_4 = 169,\\
&a_5 = 1189,\ b_5 = 985,\ a_6 = 6930,\ b_6 = 5741
\end{aligned}$$

また　$c_6 = 4a_5 + 4(b_5 + c_5) = 4a_5 + 4b_6 = 4{\cdot}1189 + 4{\cdot}5741 = 27720$

$$S_6 = a_6 + b_6 + c_6 = 6930 + 5741 + 27720 = 40391$$

よって

$$P = 1 - \frac{S_6}{6^6} = 1 - \frac{40391}{46656} = \frac{6245}{46656} = \frac{235}{1728} = 0.135\cdots$$

$\dfrac{1}{9} = 0.111\cdots$，$\dfrac{5}{36} = 0.138\cdots$ であるから

$$\frac{1}{9} < P < \frac{5}{36}$$

$Q = \dfrac{\frac{1}{36}}{P}$ より

$$Q = \frac{1}{36} \times \frac{1728}{235} = \frac{48}{235} = 0.204\cdots$$

$\dfrac{1}{5} = 0.2$，$\dfrac{1}{4} = 0.25$ より

$$\frac{1}{5} < Q < \frac{1}{4}$$

11.1.8　第 8 回

第 4 問 赤球 70 個と白球 30 個の合計 100 個の球が入っている箱がある．この箱から球を 2 個同時に取り出し，球の色を調べずに袋の中に入れる．そして，箱の中に残っている 98 個の球の中から k 個を机の上に同時に取り出し，赤球と白球の個数を調べる．その上で，袋の中に入っている 2 個の球の色を当てるというゲームを行う．このゲームの戦略を，条件付き確率を用いて考えよう．

事象 A，B，C をそれぞれ次のように定める．

A: 袋の中に赤球が 2 個入っている事象

B: 袋の中に赤球と白球が 1 個ずつ入っている事象

C: 袋の中に白球が 2 個入っている事象

(1) 赤球 70 個と白球 30 個が入っている箱から球を 2 個同時に取り出すとき

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}, \quad \frac{P(C)}{P(B)} = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キクケ}}}$$

である．

(2) まず，$k=1$ のときを調べよう．机の上に取り出した 1 個の球が赤球であった場合の戦略を考える．そのためには，机の上に取り出した 1 個の球が赤球である事象を R として，条件付き確率 $P_R(A)$，$P_R(B)$，$P_R(C)$ のうち，どれが最大であるかを調べればよい．

条件付き確率の性質より，$\dfrac{P_R(B)}{P_R(A)}$ は［コ］と表すことができる．

［コ］$=\dfrac{［サシ］}{［スセ］}$ であるから，$P_R(A) > P_R(B)$ である．

また，$\dfrac{P_R(C)}{P_R(B)}=\dfrac{［ソタ］}{［チツテ］}$ であるから，$P_R(B) > P_R(C)$ である．

よって，$P_R(A)$ が最大であるから，机の上に取り出した 1 個の球が赤球であった場合は，袋の中に赤球が 2 個入っていると答えるのが得策である．

［コ］の解答群

⓪ $\dfrac{1}{P(A)}$　① $\dfrac{1}{P(B)}$

② $\dfrac{1}{P(A)P(B)}$　③ $\dfrac{P(A)}{P(B)}$

④ $\dfrac{P(B)}{P(A)}$　⑤ $\dfrac{1}{P(A\cap B)}$

⑥ $\dfrac{1}{P(B\cap R)}$　⑦ $\dfrac{1}{P(A\cap R)P(B\cap R)}$

⑧ $\dfrac{P(A\cap R)}{P(B\cap R)}$　⑨ $\dfrac{P(B\cap R)}{P(A\cap R)}$

(3) 次に，机の上に取り出した球の個数によって，戦略が変わるかを調べよう．ここでは，机の上に取り出した k 個の球がすべて赤球であった場合について考える．ただし，$1 \leqq k \leqq 68$ とする．そのためには，机の上に取り出した k 個の球がすべて赤球である事象を R' として，条件つき確率 $P_{R'}(A)$，$P_{R'}(B)$，$P_{R'}(C)$ のうち，どれが最大であるかを調べればよい．

$\dfrac{P_{R'}(B)}{P_{R'}(A)}$ の値を k を用いて表すと $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}} - k}$ であるから，

$P_{R'}(A) \geqq P_{R'}(B)$ となる k の値の範囲は，$1 \leqq k \leqq \boxed{\text{ネ}}$ である．

また，$\dfrac{P_{R'}(C)}{P_{R'}(B)}$ の値についても考えると，どのように答えるのが得策かわかる．

解答　(1)　$P(A)=\dfrac{{}_{70}\mathrm{C}_2}{{}_{100}\mathrm{C}_2}$，$P(B)=\dfrac{{}_{70}\mathrm{C}_1\cdot{}_{30}\mathrm{C}_1}{{}_{100}\mathrm{C}_2}$，$P(C)=\dfrac{{}_{30}\mathrm{C}_2}{{}_{100}\mathrm{C}_2}$ であるから

$$\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{{}_{70}\mathrm{C}_1\cdot{}_{30}\mathrm{C}_1}{{}_{70}\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\frac{20}{23}}\quad\cdots(\text{ア})\sim(\text{エ})$$

$$\frac{P(C)}{P(B)}=\frac{{}_{30}\mathrm{C}_2}{{}_{70}\mathrm{C}_1\cdot{}_{30}\mathrm{C}_1}=\boldsymbol{\frac{29}{140}}\quad\cdots(\text{オ})\sim(\text{ケ})$$

(2)　条件付き確率 $P_R(A)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(R)}$，$P_R(B)=\dfrac{P(B\cap R)}{P(R)}$ より

$$\frac{P_R(B)}{P_R(A)}=\boldsymbol{\frac{P(B\cap R)}{P(A\cap R)}}\quad\cdots(\text{コ})\ ⑨$$

と表すことができる．

袋の中に赤球が 2 個入っている場合，箱の中には赤球 68 個，白球 30 個の合計 98 個の球が残っているから

$$P_A(R)=\frac{{}_{68}\mathrm{C}_1}{{}_{98}\mathrm{C}_1}=\frac{68}{98}$$

袋の中に赤球と白球が 1 個ずつ入っている場合，箱の中には赤球 69 個，白球 29 個の合計 98 個の球が残っているから

$$P_B(R)=\frac{{}_{69}\mathrm{C}_1}{{}_{98}\mathrm{C}_1}=\frac{69}{98}$$

これらと (1) の結果より

$$\frac{P(B\cap R)}{P(A\cap R)}=\frac{P(B)P_B(R)}{P(A)P_A(R)}=\frac{P(B)}{P(A)}\cdot\frac{P_B(R)}{P_A(R)}=\frac{20}{23}\cdot\frac{69}{68}=\boldsymbol{\frac{15}{17}}\quad(\text{サ})\sim(\text{セ})$$

同様に

$$\frac{P_R(C)}{P_R(B)}=\frac{P(C\cap R)}{P(B\cap R)}$$

と表すことができる．

袋の中に白球が 2 個入っている場合，箱の中には赤球 70 個，白球 28 個の合計 98 個の球が残っているから

$$P_C(R)=\frac{{}_{70}\mathrm{C}_1}{{}_{98}\mathrm{C}_1}=\frac{70}{98}$$

これらと (1) の結果より

$$\frac{P_R(C)}{P_R(B)}=\frac{P(C\cap R)}{P(B\cap R)}=\frac{P(C)}{P(B)}\cdot\frac{P_C(R)}{P_B(R)}=\frac{29}{140}\cdot\frac{70}{69}=\boldsymbol{\frac{29}{138}}\quad\cdots(\text{ソ})\sim(\text{タ})$$

(3) (2) と同様に

$$\frac{P_{R'}(B)}{P_{R'}(A)}=\frac{P(B\cap R')}{P(A\cap R')}=\frac{P(B)P_B(R')}{P(A)P_A(R')}$$

袋の中に赤球が 2 個入っている場合，箱の中には赤球 68 個，白球 30 個の合計 98 個の球が残っているから

$$P_A(R')=\frac{{}_{68}\mathrm{C}_k}{{}_{98}\mathrm{C}_k}$$

また，袋の中に赤球と白球が 1 個ずつ入っている場合，箱の中には赤球 69 個，白球 29 個の合計 98 個の球が残っているから

$$P_B(R')=\frac{{}_{69}\mathrm{C}_k}{{}_{98}\mathrm{C}_k}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{P_{R'}(B)}{P_{R'}(A)}&=\frac{P(B)}{P(A)}\cdot\frac{P_B(R')}{P_A(R')}=\frac{20}{23}\cdot\frac{{}_{69}\mathrm{C}_k}{{}_{68}\mathrm{C}_k}\\&=\frac{20}{23}\cdot\frac{69!}{k!(69-k)!}\cdot\frac{k!(68-k)!}{68!}=\frac{\boldsymbol{60}}{\boldsymbol{69-k}}\quad(\text{ト})\sim(\text{ヌ})\end{aligned}$$

$P_{R'}(A)\geqq P_{R'}(B)$ となるのは

$$1-\frac{P_{R'}(B)}{P_{R'}(A)}=1-\frac{60}{69-k}=\frac{9-k}{69-k}\geqq 0$$

すなわち　$1\leqq k\leqq \mathbf{9}$　$\cdots(\text{ネ})$

また，$\dfrac{P_{R'}(C)}{P_{R'}(B)}$ の値についても

$$\begin{aligned}\frac{P_{R'}(C)}{P_{R'}(B)}&=\frac{P(C\cap R')}{P(B\cap R')}=\frac{P(C)}{P(B)}\cdot\frac{P_C(R')}{P_B(R')}\\&=\frac{29}{140}\cdot\frac{{}_{70}\mathrm{C}_k}{{}_{98}\mathrm{C}_k}\Big/\frac{{}_{69}\mathrm{C}_k}{{}_{98}\mathrm{C}_k}=\frac{29}{140}\cdot\frac{{}_{70}\mathrm{C}_k}{{}_{69}\mathrm{C}_k}\\&=\frac{29}{140}\cdot\frac{70!}{k!(70-k)!}\cdot\frac{k!(69-k)!}{69!}=\frac{29}{2(70-k)},\end{aligned}$$

$$1-\frac{P_{R'}(C)}{P_{R'}(B)}=\frac{111-2k}{2(70-k)}$$

(i) $k=9$ のとき，$P_{R'}(A)=P_{R'}(B)>P_{R'}(C)$ より
A または B　$\cdots(\text{ノ})$ ③

(ii) $k=30$ のとき，$P_{R'}(A)<P_{R'}(B)>P_{R'}(C)$ より
B　$\cdots(\text{ハ})$ ①

(iii) $k=56$ のとき，$P_{R'}(A)<P_{R'}(B)<P_{R'}(C)$ より
C　$\cdots(\text{ヒ})$ ②

11.2　数学IIBC

11.2.1　第1回

第1問 座標平面上で，円 $x^2+y^2=4$ を C とする．円 C と直線や放物線が接するときについて考えよう．

(1) a を定数とし，直線 $y=-2x+a$ を ℓ とする．太郎さんと花子さんは，C と ℓ が接するときの a の値の求め方について話している．

太郎：C の中心から ℓ までの距離と，C の半径に着目すると求められそうだよ．
花子：C と ℓ の方程式を連立させると，x についての2次方程式が得られるね．判別式を使って求めることもできそうだよ．

(i) 太郎さんの求め方について考えてみよう．
C の半径 [ア] であるから，C と ℓ が接するとき，$a=$ [イ] である．

[イ] の解答群

⓪ $\sqrt{5}$	① $2\sqrt{5}$	② $4\sqrt{5}$	③ 10	④ 20
⑤ $\pm\sqrt{5}$	⑥ $\pm2\sqrt{5}$	⑦ $\pm4\sqrt{5}$	⑧ ±10	⑨ ±20

(ii) 花子さんの求め方について考えてみよう．
$y=-2x+a$ を $x^2+y^2=4$ に代入すると，x についての2次方程式

$$5x^2-4ax+a^2-4=0 \quad \cdots ①$$

が得られる．① の判別式を D として，D の条件を考えると，$a=$ [イ] を得る．

(2) b を定数とし，放物線 $y = x^2 + b$ を P とする．花子さんと太郎さんは，C と P が接するときの b の値の求め方について話している．

> 花子： 円と直線が接するときのように y を消去すると，x についての 4 次方程式が得られるね．C と P の接点の x 座標を c とすれば，$x = c$ はこの 4 次方程式の重解だね．
>
> 太郎： 接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ として，C と P の接線の方程式をそれぞれ立式すれば，接するときはこの二つの接線が一致するので，$(x_1,\ y_1)$ が求められるよ．

(i) 花子さんの求め方について考えよう．

$y = x^2 + b$ を $x^2 + y^2 = 4$ に代入すると，x についての 4 次方程式

$$x^4 + (2b+1)x^2 + b^2 - 4 = 0 \quad \cdots ②$$

が得られる．

まず，C と P が 1 点だけで接するとする．

P の軸上に C の中心があるので，② は $x =$ ウ を重解にもつから

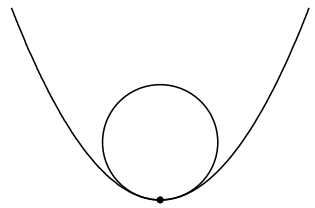
$$b = \boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オカ}}$$

である．

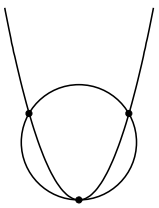
C と P は，$b =$ エ のとき キ，$b =$ オカ のとき ク のように接する．

キ，ク については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である．

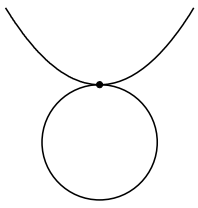
⓪



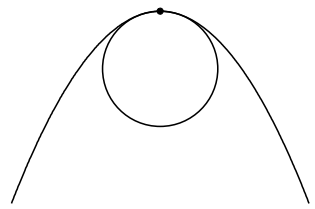
①



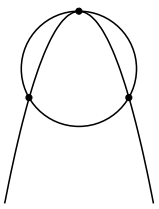
②



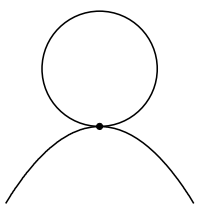
③



④



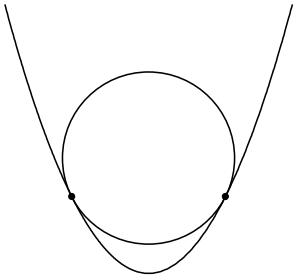
⑤



次に，C と P が異なる 2 点で接するとする．
② の重解の一つを $x = c\ (\neq 0)$ とすると，もう一つの重解は $-c$ である．よって

$$b = \frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

であり，下の図のように接していることがわかる．なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である．



② が異なる三つ以上の重解をもつことはないので，C と P が異なる 3 点以上で接することはない．よって，C と P が接するときの b の値は

$$b = \boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オカ}},\ \frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である．

(ii) 太郎さんの求め方について考えてみよう.

C と P の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，点 $(x_1,\ y_1)$ における C の接線の方程式は

$$\boxed{\text{ス}} \quad \cdots ③$$

である.

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪	$x_1x + y_1y = 2$	①	$x_1x + y_1y = 4$
②	$x_1x - y_1y = 2$	③	$x_1x - y_1y = 4$
④	$y_1x + x_1y = 2$	⑤	$y_1x + x_1y = 4$
⑥	$y_1x - x_1y = 2$	⑦	$y_1x - x_1y = 4$

点 $(x_1,\ y_1)$ における P の接線の方程式は

$$y = 2x_1(x - x_1) + y_1 \quad \cdots ④$$

である.

④ を ③ に代入して y を消去すると

$$x_1(2y_1 + 1)x - 2{x_1}^2y_1 + {y_1}^2 - 4 = 0 \quad \cdots ⑤$$

となる.

C と P が点 $(x_1,\ y_1)$ で接するとき，すべての x に対して ⑤ が成り立つので

$$x_1(2y_1 + 1) = \boxed{\text{セ}}, \quad -2{x_1}^2y_1 + {y_1}^2 - 4 = \boxed{\text{セ}}$$

これより $(x_1,\ y_1)$ が求められる.

よって，$b = y_1 - {x_1}^2$ より，C と P が接するとき

$$b = \boxed{\text{エ}}, \ \boxed{\text{オカ}}, \ \frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である.

解答　(1)　(i)　$C : x^2+y^2=4$ の半径 r は　$r=\mathbf{2}$　$\cdots$(ア)

C の中心 $(0,\ 0)$ から直線 $\ell : 2x+y-a=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{5}}$$

C と ℓ が接するとき，$d=r$ より

$$\frac{|a|}{\sqrt{5}}=2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=\pm 2\sqrt{5}} \quad \cdots(\text{イ})\ ⑥$$

(ii)　$y=-2x+a$ を $x^2+y^2=4$ に代入して整理すると

$$5x^2-4ax+a^2-4=0 \quad \cdots①$$

このとき，① の判別式

$$D/4=(-2a)^2-5\cdot(a^2-4)=-a^2+20$$

について，$D=0$ であるから

$$-a^2+20 \quad \text{これを解いて} \quad a=\pm 2\sqrt{5} \quad \cdots(\text{イ})$$

(2)　(i)　$y=x^2+b$ を $x^2+y^2=4$ に代入して整理すると

$$x^4+(2b+1)x^2+b^2-4=0 \quad \cdots②$$

C と P が 1 点で接するとき，② は $x=\mathbf{0}$ を重解もつから　$\cdots$(ウ)

$$b^2-4=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{b=2,\ -2} \quad \cdots(\text{エ})\sim(\text{カ})$$

$b=2$ のとき　$x^4+5x^2=0$　ゆえに　$x^2(x^2+5)=0$
このとき，$x=0$ (重解) 以外に解はない (共有点なし)．　$\cdots$(キ) ②
$b=-2$ のとき　$x^4-3x^2=0$　ゆえに　$x^2(x^2-3)=0$
このとき，$x=0$ (重解) 以外に，$x=\pm\sqrt{3}$ をもつ．　$\cdots$(ク) ①
次に，C と P が 2 点で接するとき，② の重解の 1 つを $x=c$ とすると，y 軸に関する対称性から，もう一つの重解は $-c$ である．$x^2=X$ とおくと，② から

$$X^2+(2b+1)X+b^2-4=0$$

は重解 c^2 をもつから，係数について

$$(2b+1)^2-4\cdot 1\cdot(b^2-4)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b=-\frac{17}{4}} \quad \cdots(\text{ケ})\sim(\text{シ})$$

(ii) C と P の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，点 $(x_1,\ y_1)$ における C の接線の方程式は

$$\boldsymbol{x_1x + y_1y = 4} \quad \cdots ③(ス)$$

である．

点 $(x_1,\ y_1)$ における P の接線の方程式は

$$y = 2x_1(x - x_1) + y_1 \quad \cdots ④$$

である．

④ を ③ に代入して y を消去すると

$$x_1(2y_1 + 1)x - 2{x_1}^2y_1 + {y_1}^2 - 4 = 0 \quad \cdots ⑤$$

となる．

C と P が点 $(x_1,\ y_1)$ で接するとき，すべての x に対して ⑤ が成り立つので

$$x_1(2y_1 + 1) = \mathbf{0},\quad -2{x_1}^2y_1 + {y_1}^2 - 4 = 0 \quad \cdots (セ)$$

これより　$(x_1,\ y_1) = (0,\ \pm 2),\ \left(\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

よって，$b = y_1 - {x_1}^2$ より，C と P が接するとき

$$b = 2, -2, -\frac{17}{4} \quad \cdots (エ) \sim (シ)$$

である．

別解

信一：接点の x 座標が 0 であるとき，$b=\pm 2$ は自明です．接点の x 座標が $x\neq 0$ の場合については，円の中心から放物線までの最短距離が円の半径であることを利用しよう．そこで距離 2 乗関数を使ってみましょう．

M 君：放物線の頂点で接するとき接触円 (曲率円) の半径から，放物線の頂点で接する円の位置関係はわかります．

(信一さんの解答)

放物線 P と円 C が $x=0$ で接するとき，$b=\pm 2$ は明らか．

P と C の接点の x 座標が $x\neq 0$ の場合について考える．

円の中心 O から放物線上の点 $(x,\ x^2+b)$ までの距離 2 乗関数は

$$f(x)=x^2+(x^2+b)^2=x^4+(2b+1)x^2+b^2$$
$$=\left(x^2+b+\frac{1}{2}\right)^2-b-\frac{1}{4}$$

$b+\dfrac{1}{2}\geqq 0$ のとき，$f(x)$ は $x=0$ で最小となる．

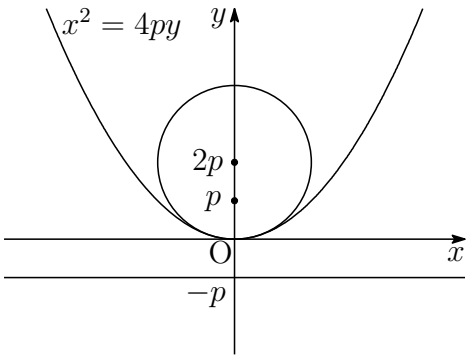
$b+\dfrac{1}{2}<0$ のとき，最小値 $-b-\dfrac{1}{4}$

この最小値が 2^2 であるから

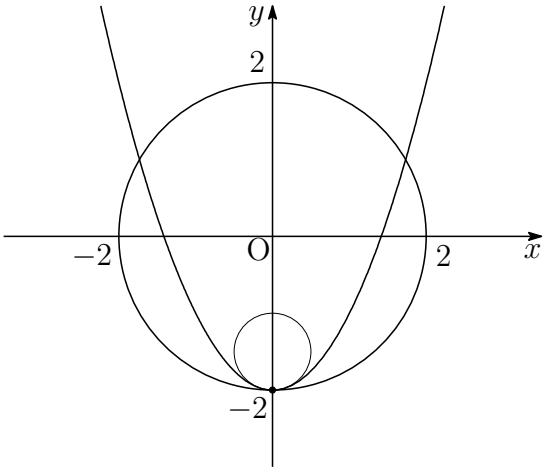
$$-b-\frac{1}{4}=4\quad \text{これを解いて}\quad b=-\frac{17}{4}$$

自明である $b=\pm 2$ を含めて，求める b の値は　$\boldsymbol{b=\pm 2,\ -\dfrac{17}{4}}$

(M 君の補足)
放物線 $y=x^2-2$ の頂点における曲率半径が分かります.
放物線 $x^2=4py$ の曲率半径が $2p$ です．また，放物線 $x^2=4py$ の頂点における曲率中心，焦点，頂点，準線が等間隔に並んでいます.



これから，$x^2=y$ の曲率半径は $\dfrac{1}{2}$ です．放物線 $y=x^2-2$ は $y=x^2$ を平行移動したものですから，放物線 $y=x^2-2$ の頂点における曲率半径は $\dfrac{1}{2}$ です．このことから，点 $(0,-2)$ でこの放物線に接する半径 2 の円との位置関係は，次のようになります．接触円よりも大きい円ですね.



参考 2 次曲線の準線・焦点・頂点・曲率中心

第 3 問 $a,\ b$ を実数の定数とする．$f(x) = x^3 + ax + b$ とし，D を

$$D = -4a^3 - 27b^2$$

と定める．方程式 $f(x) = 0$ の解と D の関係について考えよう．

(1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とすると

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}}\,x^2 + a$$

であるから，方程式 $f'(x) = 0$ について

異なる二つの実数解をもつための必要十分条件は　$\boxed{\text{イ}}$

重解を一つもつための必要十分条件は　$\boxed{\text{ウ}}$

実数解をもたないための必要十分条件は　$\boxed{\text{エ}}$

である．

$\boxed{\text{イ}}$〜$\boxed{\text{エ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ $a^2 - 4b > 0$	① $a^2 - 4b = 0$	② $a^2 - 4b < 0$
③ $a > 0$	④ $a = 0$	⑤ $a < 0$
⑥ $b > 0$	⑦ $b = 0$	⑧ $b < 0$

(i) $\boxed{\text{イ}}$ のとき，$f'(x) = 0$ の異なる二つの実数解を $p,\ q\ (p < q)$ とおくと，$f(x)$ は $x = p$ で $\boxed{\text{オ}}$ をとり，$x = q$ で $\boxed{\text{カ}}$ をとる．

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ 極小値	① 最小値	② 負の値
③ 極大値	④ 最大値	⑤ 正の値

このとき

$$p = -\sqrt{\frac{-a}{\boxed{\text{キ}}}},\quad q = \sqrt{\frac{-a}{\boxed{\text{キ}}}}$$

であるから，$f(p)f(q)$ を D を用いて表すと

$$f(p)f(q) = -\frac{D}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である．

(ii) ウ のとき，方程式 $f(x)=0$ の解について調べると，方程式 $f(x)=0$ が $x=0$ である重解のみをもつための必要十分条件は コ であり，方程式 $f(x)=0$ が一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつための必要十分条件は サ である．

コ，サ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ $b=0$　① $b\neq 0$　② $b>0$
③ $b<0$　④ $b\geqq 0$　⑤ $b\leqq 0$

(iii) エ のとき，方程式 $f(x)=0$ は シ．

シ については，最も適当なものを一つ選べ

⓪ 異なる三つの実数解をもつ
① $x=0$ である重解のみをもつ
② $x\neq 0$ である重解のみをもつ
③ 一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつ
④ 実数解をもたない

(2) これまでの考察から，方程式 $f(x)=0$ がどのような解をもつかは，D の値から調べることができる．

$D>0$ のとき，ス

$D<0$ のとき，セ

ス，セ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ 異なる三つの実数解をもつ
① 異なる二つの実数解 (ただし，一つは重解) をもつ
② 一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつ
③ 一つの実数解を重解としてもち，虚数解をもたない
④ 実数解をもたない

解答　(1)　$f(x) = x^3 + ax + b$ より

$$f'(x) = \mathbf{3}x^2 + a \quad \cdots(\text{ア})$$

であるから，$f'(x) = 0$ のとき

$$x^2 = -\frac{a}{3}$$

異なる二つの実数解をもつための必要十分条件は

$$-\frac{a}{3} > 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a < 0} \quad \cdots(\text{イ})\ ⑤$$

重解を一つもつための必要十分条件は

$$-\frac{a}{3} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a = 0} \quad \cdots(\text{ウ})\ ④$$

実数解をもたないための必要十分条件は

$$-\frac{a}{3} < 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a > 0} \quad \cdots(\text{エ})\ ③$$

(i) $a<0$ のとき，$f'(x)=0$ の異なる二つの実数解を $p,\ q$ とおくと

$$f'(x)=3(x-p)(x-q) \qquad (p<q)$$

$f(x)$ の増減表は増減表は

x	$\cdots$	p	$\cdots$	q	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$f(x)$ は $x=p$ で**極大値**をとり，$x=q$ で**極小値**をとる．

$\cdots$(オ) ③ (カ) ⓪

このとき

$$p=-\sqrt{\frac{-a}{\mathbf{3}}},\quad q=\sqrt{\frac{-a}{3}} \quad \cdots(キ)$$

$p^2=q^2=-\dfrac{a}{3},\ p+q=0,\ pq=\dfrac{a}{3}$ より ($p,\ q$ は $3x^2+a=0$ の解)

$$\begin{aligned} f(p)&=p^3+ap+b=(p^2+a)p+b\\ &=\left(-\frac{a}{3}+a\right)p+b=\frac{2}{3}ap+b \end{aligned}$$

同様にして　$f(q)=\dfrac{2}{3}aq+b$

$$\begin{aligned} f(p)f(q)&=\left(\frac{2}{3}ap+b\right)\left(\frac{2}{3}aq+b\right)=\frac{4}{9}a^2pq+\frac{2}{3}ab(p+q)+b^2\\ &=\frac{4}{9}a^2\cdot\frac{a}{3}+\frac{2}{3}ab\cdot0+b^2=\frac{4}{27}a^3+b^2=-\frac{-4a^3-27b^2}{27}\\ &=-\frac{D}{\mathbf{27}} \quad \cdots(ク)(ケ) \end{aligned}$$

(ii) $a=0$ のとき，方程式 $f(x)=0$，すなわち，$x^3+b=0$ について，重解 $x=0$ のみをもつための必要十分条件は $\boldsymbol{b=0}$ であり，方程式 $x^3+b=0$ が一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつための必要十分条件は $\boldsymbol{b\neq0}$ である．

$\cdots$(コ) ⓪ (サ) ①

(iii) $a>0$ のとき，$f'(x)=3x^2+a>0$

$f(x)$ は単調増加であるから，$f(x)=0$ は**一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつ**．

$\cdots$(シ) ③

(2) $D>0$ のとき，$f(p)f(q)<0$ であるから，極大値と極小値の符号が異なり，**異なる三つの実数解をもつ**　$\cdots$(ス) ⓪

$D<0$ のとき，$f(p)f(q)>0$ であるから，極大値と極小値の符号が同じで，**一つの実数解と異なる二つの虚数解をもつ**　$\cdots$(セ) ②

参照 定理 4

第 7 問

〔1〕放物線 $C : y^2 = 4x$ について考える．

C の焦点を F とおくと，座標平面上における F の座標は

$$\mathrm{F}\left(\boxed{\text{ア}},\ 0\right)$$

である．

以下の設問で極座標を扱う際は，F を極，x 軸の $x \geqq$ ア の部分を始線とする極座標を考えるものとし，$(r,\ \theta)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ の形で答えること．

(1) C 上の直交座標で表された点 $\mathrm{A}(3,\ 2\sqrt{3})$ を極座標で表すと

$$\mathrm{A}\left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$$

である．

ウ の解答群

⓪ $\dfrac{\pi}{6}$	① $\dfrac{\pi}{4}$	② $\dfrac{\pi}{3}$	③ $\dfrac{\pi}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}\pi$	⑤ $\dfrac{3}{4}\pi$	⑥ $\dfrac{5}{6}\pi$	⑦ π

(2) C 上の点 B の極座標が $(r,\ \theta)$ で表されるとき，C の極座標は

$$r = \boxed{\text{エ}}$$

である．

エ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{1-\cos\theta}$　① $\dfrac{1}{1+\cos\theta}$　② $\dfrac{1}{1-\cos\theta}$　③ $\dfrac{1}{1+\sin\theta}$

④ $\dfrac{2}{1-\cos\theta}$　⑤ $\dfrac{2}{1+\cos\theta}$　⑥ $\dfrac{2}{1-\sin\theta}$　⑦ $\dfrac{2}{1+\sin\theta}$

(3) 極座標が $(r,\ \theta)$ が $(r_1,\ \theta_1)$ $\left(0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される C 上の点 P を考える．直線 PF を ℓ とし，C と ℓ の共有点のうち P でないものを R とする．また，点 F を通り ℓ に垂直な直線を m とし，C と m の共有点を x 座標が小さいほうから順に Q，S とする．

このとき

$$a = \frac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{RF}} + \frac{1}{\mathrm{QF}\cdot\mathrm{SF}}$$

についての記述として，次の ⓪ ～ ③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{オ}}$ である．

オ の解答群

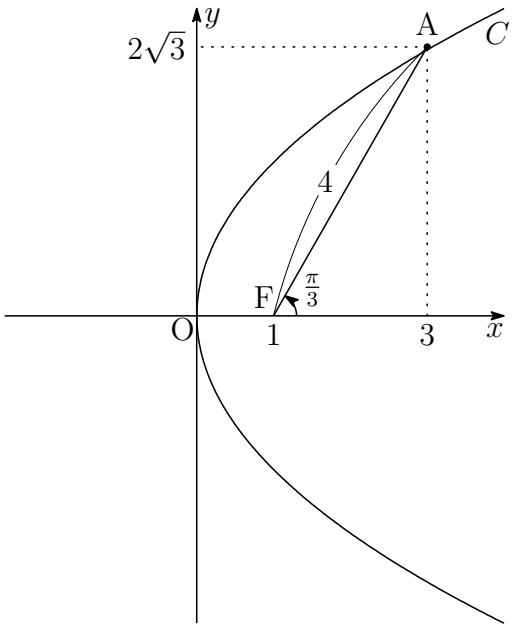
⓪ θ_1 の値が増加すると，a の値も増加する．
① θ_1 の値が増加すると，a の値は減少する．
② θ_1 の値が増加すると，a の値は増加したり減少したりする．
③ θ_1 の値が増加しても，a の値は変化しない．

解答 放物線 C は　$y^2 = 4 \cdot 1 \cdot x$

C の焦点は　$\mathrm{F}(\mathbf{1},\ 0)$　$\cdots$(ア)

(1) 下の図から，F を極とする点 A の極座標は

$$\mathrm{A}\left(\mathbf{4},\ \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) \quad \cdots(\text{イ})(\text{ウ})$$

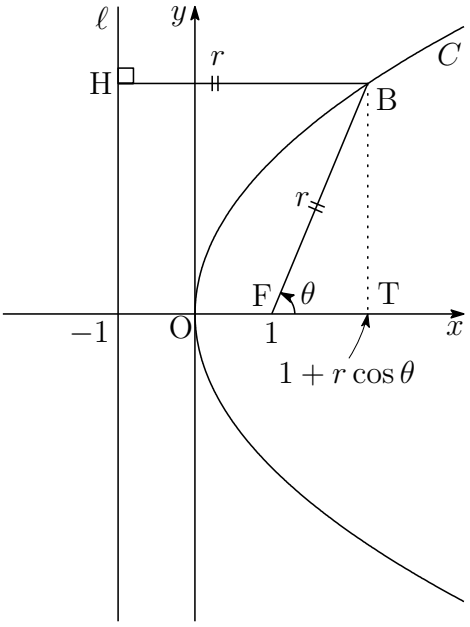


(2) $C : x^2 = 4y$ の極 (焦点) は F(1, 0)，準線は $\ell : x = -1$

B から ℓ に垂線 BH，x 軸に垂線 BT を引くと，FB = BH = r

T から準線 ℓ までの距離が r であるから

$$r = (1 + r\cos\theta) - (-1) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}} \quad \cdots (\text{エ})\ ④$$



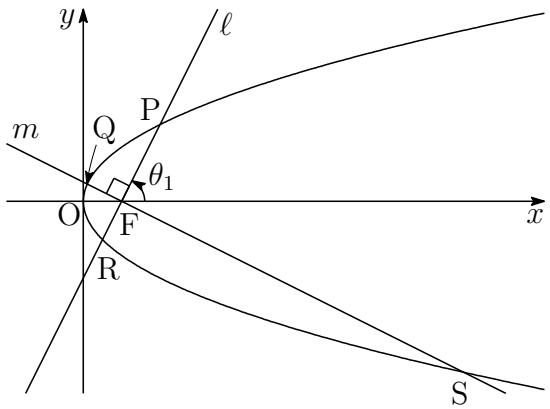
(3) P，Q，R，S の偏角はそれぞれ $\theta_1,\ \theta_1+\dfrac{\pi}{2},\ \theta_1+\pi,\ \theta_1+\dfrac{3\pi}{2}$ であるから，(2) の極方程式により

$$\begin{aligned}
\mathrm{PF} &= \frac{2}{1-\cos\theta_1},\\
\mathrm{QF} &= \frac{2}{1-\cos(\theta_1+\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{1+\sin\theta_1},\\
\mathrm{RF} &= \frac{2}{1-\cos(\theta_1+\pi)} = \frac{2}{1+\cos\theta_1},\\
\mathrm{SF} &= \frac{2}{1-\cos(\theta_1+\frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{1-\sin\theta_1}
\end{aligned}$$

したがって

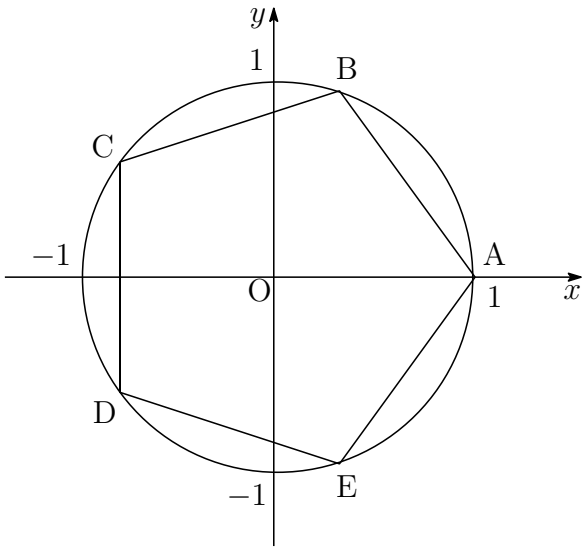
$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{RF}} + \frac{1}{\mathrm{QF}\cdot\mathrm{SF}}\\
&= \frac{1-\cos\theta_1}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta_1}{2} + \frac{1+\sin\theta_1}{2}\cdot\frac{1-\sin\theta_1}{2}\\
&= \frac{1-\cos^2\theta_1}{4} + \frac{1-\sin^2\theta_1}{4}\\
&= \frac{\sin^2\theta_1}{4} + \frac{\cos^2\theta_1}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\theta_1}$ の値が増加しても，$\boldsymbol{a}$ の値は変化しない．　… ③



参照 2 次曲線の性質

〔2〕図のように，原点Oを中心とする複素数平面上の単位円周上に，正五角形ABCDEの頂点をとる．ただし，A(1) とする．



点Bを表す複素数を z_1 とし，z_1 の偏角を θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

(1) $\theta = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

(2) 点Cを表す複素数を α，点Dを表す複素数を β とおくと，α の偏角は $\boxed{\text{ク}}$，β の偏角は $\boxed{\text{ケ}}$ である．ただし，偏角 θ' は $0 < \theta' < 2\pi$ とする．

$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ θ　　① 2θ　　② 3θ　　③ 4θ　　④ 5θ

α と β の実部に着目すると，z_1 の実部は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}} - \boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である．

(3) 方程式 $w^5 = i$ の解のうち，実部，虚部ともに負であるものを w_1 とする．
複素数 ${z_1}^2 w_1$ で表された点 F は，点 B と［ス］に関して対称である．

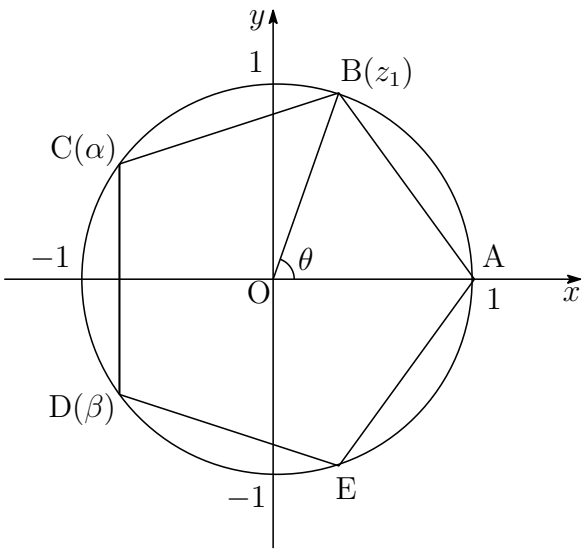
［ス］の解答群

⓪ 実軸
① 虚軸
② 原点 O
③ 原点 O と点 $1 + i$ を結ぶ直線
④ 原点 O と点 $1 - i$ を結ぶ直線

解答　(1) $\theta = \arg z_1 = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}\pi}$　$\cdots$(カ)(キ)

(2) $\arg\alpha = \arg {z_1}^2 = 2\arg z_1 = \boldsymbol{2\theta}$　$\cdots$(ク) ①

$\arg\beta = \arg {z_1}^3 = 3\arg z_1 = \boldsymbol{3\theta}$　$\cdots$(ケ) ②



α と β の実部が等しいから

$$\cos 2\theta = \cos 3\theta \quad \text{ゆえに} \quad 2\cos^2\theta - 1 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

したがって　　$(\cos\theta - 1)(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1) = 0$

$\theta = \dfrac{2}{5}\pi$ より，$\cos\theta > 0$ であることに注意して解くと

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{\sqrt{5}-1}}{\boldsymbol{4}} \quad \cdots(\text{コ}) \sim (\text{シ})$$

(3) ${w_1}^5 = i$ より　$\arg {w_1}^5 = \arg i$

$$5\arg w_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{ゆえに} \quad \arg w_1 = \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5}n\right)\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$\pi < \arg w_1 < \dfrac{3}{2}\pi$ であるから

$$1 < \frac{1}{10} + \frac{2}{5}n < \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{9}{4} < n < \frac{7}{2}$$

n は整数であるから　$n = 3$　すなわち　$\arg w_1 = \dfrac{13}{10}\pi$

これから　$\arg {z_1}^2 w_1 = 2\arg z_1 + \arg w_1 = 2\cdot\dfrac{2}{5}\pi + \dfrac{13}{10}\pi$

$$= \frac{21}{10}\pi = \frac{\pi}{10} + 2\pi$$

このとき　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\pi}{4}$，$\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$

よって，点 F は点 B と**原点 O と点 $1+i$ を結ぶ直線**に関して対称である．

$\cdots$(ス) ③

11.2.2　第 2 回

第 3 問 原点を O とする座標平面上に曲線 $C : y = x^4 - 6x^2 + 8x + 5$ がある．a を定数とする．曲線 C の接線で，点 $(0,\ a)$ を通るものの本数を求めよ．

解答 $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 5$ より

$$y' = 4x^3 - 12x + 8$$
$$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$$

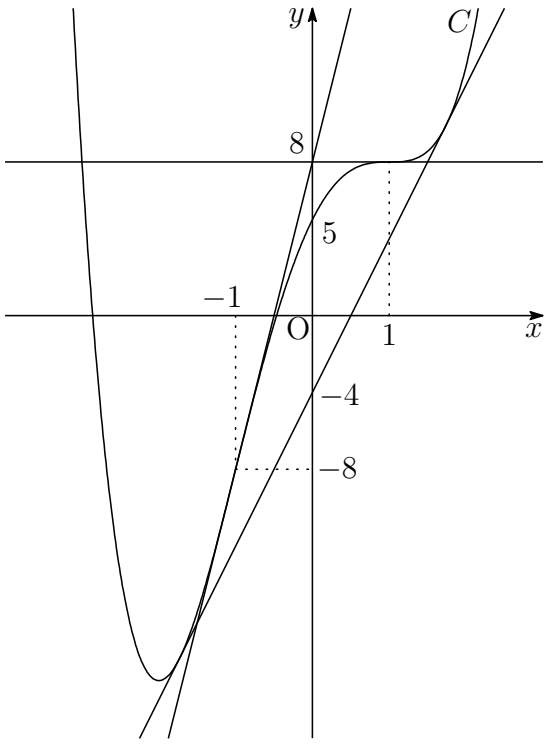
$x = -1$ のとき，$y = -8$，$y' = 16$　　$x = 1$ のとき，$y = 8$，$y' = 0$

C 上の変曲点 $(-1, -8)$，$(1,\ 8)$ における接線の方程式は，それぞれ

$$y = 16x + 8, \quad y = 8$$

$C : y = x^4 - 6x^2 + 8x + 5$ より $y = (x^2 - 3)^2 + 8x - 4$ であるから C と直線 $y = 8x - 4$ は 2 点で接する．よって，点 $(0,\ a)$ から C に引ける接線の本数は

$a = -4$ のとき	1 本	$5 < a < 8$ のとき	4 本
$a < 5$ のとき $(a \neq -4)$	2 本	$a = 8$ のとき	2 本
$a = 5$ のとき	3 本	$8 < a$ のとき	0 本



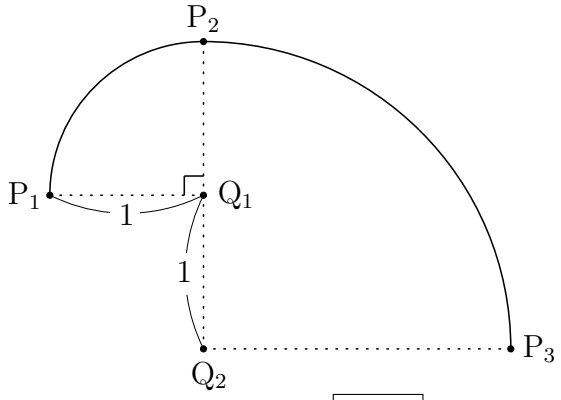
参照 New Global Top 341 番

第 4 問 自然界には，貝殻の模様，台風の渦巻き，ひまわりの種の並び方など螺旋(らせん)形をなすものが多くある．螺旋をつくって，その長さを考えよう．

(1) 次のように円弧をつないでいくと，螺旋をつくることができる．

(I) 平面上に 2 点 P_1, Q_1 を，$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = 1$ を満たすようにとる．

(II) k を自然数とする．2 点 P_k，Q_k に対して，下の図のように点 P_k から，点 Q_k を中心として時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させて半径 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の円弧をかき，その終点を P_{k+1} とする．そして，直線 $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ 上の点 Q_{k+1} を，点 Q_k に関して点 P_{k+1} の反対側に，$\mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k+1} = 1$ を満たすようにとる．



円弧 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の長さを a_k とすると，$a_3 = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$，$a_4 = \boxed{\text{ウ}}\pi$ であり，数列 $\{a_n\}$ は $\boxed{\text{エ}}$ であることがわかる．

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ すべての項が同じ値をとる数列である
① 公差が 0 でない等差数列である
② 公比が 1 より大きい等比数列である
③ 公比が 1 より小さい等比数列である
④ 等差数列でも等比数列でもない

点 P_1 から点 P_{n+1} までの螺旋の長さは $\dfrac{n\left(n+\boxed{\text{オ}}\right)}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ である．

解答 $r_k = \mathrm{Q}_k\mathrm{P}_k$ とおくと

$$r_1 = 1, \quad r_{k+1} = r_k + 1 \quad \text{ゆえに} \quad r_n = n$$

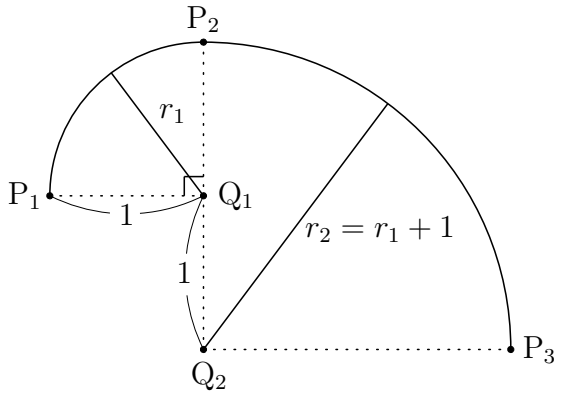
したがって　　$a_n = r_n \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{n}{2}\pi$

よって　$\boldsymbol{a_3 = \dfrac{3}{2}\pi,\ a_4 = 2\pi}$　$\cdots$(ア)$\sim$(ウ)

数列 $\{a_n\}$ は**等差数列**　$\cdots$(エ)

点 P_1 から点 P_{n+1} までの螺旋の長さは

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = \boldsymbol{\dfrac{n(n+1)}{4}} \quad \cdots(\text{オ})(\text{カ})$$



(2) 線分 $\mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k+1}$ の長さが変化するときの螺旋の長さを考えよう．次のように円弧をつないでいくと，螺旋をつくることができる．

(I) 平面上に 2 点 P_1，Q_1 を，$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = 1$ を満たすようにとる．

(II) k を自然数とする．2 点 P_k，Q_k に対して，点 P_k から，点 Q_k を中心として時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させて半径 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の円弧をかき，その終点を P_{k+1} とする．そして，直線 $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ 上の点 Q_{k+1} を，点 Q_k に関して点 P_{k+1} の反対側に，線分 $\mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k+1}$ の長さが次の**条件**を満たすようにとる．

条件

$k = 1$ のとき，$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 = 1$

$k \geqq 2$ のとき，$\mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k+1} = \mathrm{P}_{k-1}Q_{k-1}$

円弧 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の長さを b_k とすると，$b_3 = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$，$b_4 = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ であり，数列 $\{b_n\}$ は 3 項間の漸化式 $\boxed{\text{サ}}$ を満たすことがわかる．

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$　　① $b_{n+2} = b_{n+1} - b_n$

② $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$　　③ $b_{n+2} = b_{n+1} - 2b_n$

④ $2_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$　　⑤ $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$

⑥ $b_{n+2} = 2b_{n+1} + 2b_n$　　⑦ $b_{n+2} = 2b_{n+1} - 2b_n$

3 項間の漸化式 [サ] を

$$b_{n+2} - \beta b_{n+1} = \alpha(b_{n+1} - \beta b_n)$$

に変形して，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう．α，β は

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{シ}}, \quad \alpha\beta = \boxed{\text{スセ}}$$

を満たす実数である．

$c_n = b_{n+1} - \beta b_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は [ソ] ことから，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求める．

[ソ] の解答群

⓪ すべての項が同じ値をとる数列である
① 公差が 0 でない等差数列である
② 公比が 1 でない等比数列である
③ 等差数列でも等比数列でもない

したがって，$b_{n+1} - \beta b_n$ を，$\beta = \boxed{\text{シ}} - \alpha$ より，α だけ用いて表すと

$$b_{n+1} - \beta b_n = \frac{\left(\alpha + \boxed{\text{タ}}\right)\alpha^{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi \qquad \cdots ①$$

である．

[チ] の解答群

⓪ $n-2$　① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $n+2$

$b_{n+1}-\alpha b_n$ を，$\alpha=$ シ $-\beta$ より，β だけ用いて表すと

$$b_{n+1}-\alpha b_n=\frac{\left(\beta+\boxed{\text{タ}}\right)\beta^{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi \qquad \cdots ②$$

である．よって，①，② の辺々の差をとると，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることができる．

点 P_1 から点 P_{n+1} までの螺旋の長さを考えよう．

サ より

$$\sum_{k=1}^{n} b_n=\boxed{\text{テ}}-\pi$$

が成り立ち，これに着目して求めることができる．

テ の解答群

⓪ b_{n-2}　① b_{n-1}　② b_n　③ b_{n+1}　④ b_{n+2}
⑤ $2b_{n-2}$　⑥ $2b_{n-1}$　⑦ $2b_n$　⑧ $2b_{n+1}$　⑨ $2b_{n+2}$

解答 $r_k = \mathrm{Q}_k\mathrm{P}_k$ とおくと，条件から

$$r_1 = 1,\ r_2 = 2, \quad r_{k+2} = r_{k+1} + r_k$$

したがって

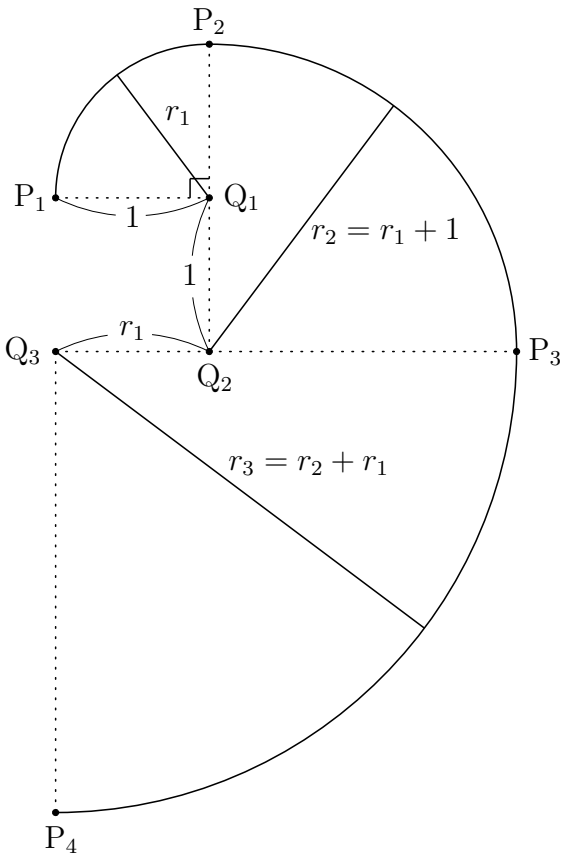
$$r_3 = r_2 + r_1 = 2 + 1 = 3,$$
$$r_4 = r_3 + r_2 = 3 + 2 = 5$$

$b_n = r_n \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{r_n}{2}\pi$ であるから

$$\boldsymbol{b_3 = \frac{3}{2}\pi, \quad b_4 = \frac{5}{2}\pi} \quad \cdots (\text{キ}) \sim (\text{コ})$$

$r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$ の辺々に $\dfrac{\pi}{2}$ を掛けると

$$\boldsymbol{b_{n+2} = b_{n+1} + b_n} \quad \cdots (\text{サ})$$



3 項間の漸化式 $b_{n+2}=b_{n+1}+b_n$ から

$$b_{n+2}-b_{n+1}-b_n=0 \qquad (*)$$

漸化式 $(*)$ の特性方程式 $x^2-x-1=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\alpha+\beta=\mathbf{1},\quad \alpha\beta=\mathbf{-1} \quad \cdots(シ)(ス)$$

とおくと，$(*)$ は　$b_{n+2}-(\alpha+\beta)b_{n+1}+\alpha\beta b_n=0$

$$b_{n+2}-\beta b_{n+1}=\alpha(b_{n+1}-\beta b_n)$$

であるから，$c_n=b_{n+1}-\beta b_n$ とおくと　$c_{n+1}=\alpha c_n$

数列 $\{c_n\}$ は**公比が $\boldsymbol{\alpha}$(1 でない) の等比数列**である．　$\cdots(ソ)$

$$c_n=c_1\alpha^{n-1}$$

$c_n=b_{n+1}-\beta b_n$ について，$r_1=1$，$r_2=2$ より　$b_1=\dfrac{\pi}{2}$，$b_2=\pi$

$$c_1=b_2-\beta b_1=\pi-(1-\alpha)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\alpha+1}{2}\pi$$

であるから

$$b_{n+1}-\beta b_n=\frac{\boldsymbol{(\alpha+1)\alpha^{n-1}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi} \quad \cdots① \quad \cdots(タ)\sim(ツ)$$

上式の α と β を交換すると

$$b_{n+1}-\alpha b_n=\frac{\boldsymbol{(\beta+1)\beta^{n-1}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi} \quad \cdots②$$

①，② の辺々の差をとると

$$b_n=\frac{(\alpha+1)\alpha^{n-1}-(\beta+1)\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$$

$\alpha,\ \beta$ は $x^2-x-1=0$ の解であるから　$\alpha+1=\alpha^2$,　$\beta+1=\beta^2$

$$b_n=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+2}-b_{k+1})=b_{n+2}-b_2=\boldsymbol{b_{n+2}}-\pi \quad \cdots(テ)$

参照 隣接 3 項間の漸化式

11.2.3　第 3 回

第 2 問 a を定数とする．x について方程式

$$4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 20 - a = 0$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

解答 $4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 20 - a = 0$ より

$$4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 20 = a$$

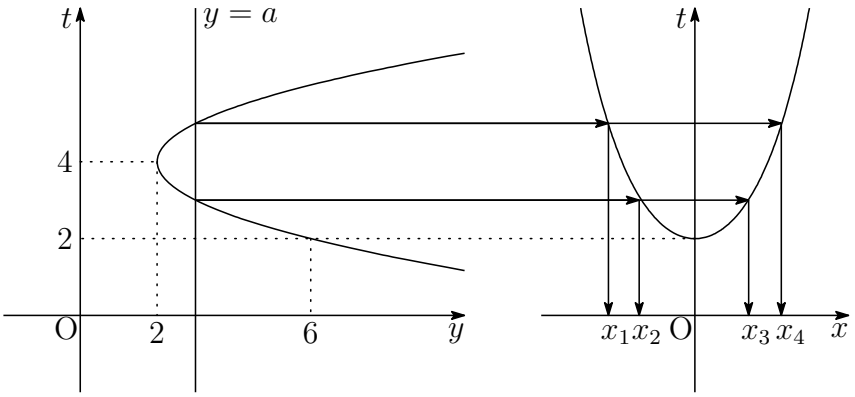
の実数解の個数は $y = 4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 20$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数である．$t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと

$$y = t^2 - 8t + 18 = (t-4)^2 + 2$$

これらのグラフの共有の個数により，求める実数解の個数は

$a < 2$ のとき	0 個
$a = 2$ のとき	2 個
$2 < a < 6$ のとき	4 個
$a = 6$ のとき	3 個
$6 < a$ のとき	2 個

(図は $2 < a < 6$ の場合)



参照 New Global Top 315

第 3 問 k を実数とする．O を原点とする座標平面上に曲線 $C : y = x^3 - 4x^2 + 3x$ と直線 $\ell : y = kx$ がある．曲線 C と直線 ℓ が異なる三つの点で交わるとき，曲線 C と直線 ℓ で囲まれている二つの面積について考えよう．

(1) 曲線 C と直線 ℓ が異なる三つの点で交わるときの k の値の範囲は

$$\boxed{\text{アイ}} < k < \boxed{\text{ウ}}, \quad k > \boxed{\text{エ}}$$

である．

(2) $\boxed{\text{アイ}} < k < \boxed{\text{ウ}}$ とする．曲線 C と直線 ℓ で囲まれてできる二つの図形の面積が等しいときの k の値を求めてみよう．

曲線 C と直線 ℓ の交点 x 座標のうち，0 でないものを α, β $(0 < \alpha < \beta)$ とすると

$$\int_0^{\beta} x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \boxed{\text{オ}}$$

より，$\beta = \boxed{\text{カ}}$ である．

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ 2α	① $2\alpha - 1$	② $2\alpha + 1$
③ 3α	④ $3\alpha - 1$	⑤ $3\alpha + 1$

また，$\alpha = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，$k = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり，曲線 C と直線 ℓ の交点について，x 座標が α である点を A，x 座標が β である点を B とすると，点 A は $\boxed{\text{シ}}$ である．

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ 線分 OB の中点
① 線分 OB を 1 : 2 に内分する点
② 線分 OB を 2 : 1 に内分する点
③ 線分 OB を 2 : 3 に内分する点
④ 線分 OB を 3 : 2 に内分する点

(3) $k<0$ とする．曲線 $C: y=x^3-4x^2+3x$ と直線 $m: y=kx+1$ が異なる三つの点で交わり，曲線 C と直線 m で囲まれてできる二つの図形の面積が等しいときの k の値を求めたい．

曲線 C と直線 m の交点の x 座標を $p,\ q,\ r\ (p<q<r)$ として

$$\int_p^r \{x^3-4x^2+3x-(kx+1)\}\,dx = \boxed{\text{オ}}$$

を整理することで k の値を求めようとしたが，計算が煩雑になったため，別の方法を考えることにした．

曲線 C の式を $y=f(x)$ とし，曲線 C を x 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$，$y$ 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ だけ平行移動したグラフの式を $y=g(x)$ とする．$y=g(x)$ は原点 O に関して対称なグラフであり，$g(x)=x^3-\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}x$ であることから，曲線 m で囲まれてできる二つの図形の面積が等しいときの曲線 C と直線 m の三つの交点のうち，一つの座標がわかる．

このことを利用すると，$k=-\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ と求められる．

解答　(1) $C : y = x^3 - 4x^2 + 3x$ と $\ell : y = kx$ が接する，すなわち，方程式

$$x^3 - 4x^2 + 3x = kx \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2 - 4x + 3 - k) = 0$$

が重解もつときの k の値を求める．$x^2 - 4x + 3 - k$ に注目すると，次の 2 つの場合がある．

(i) $x^2 - 4x + 3 - k = 0$ が $x = 0$ を解にもつとき

$$3 - k = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = 3$$

(ii) $x^2 - 4x + 3 - k = 0$ が重解をもつとき

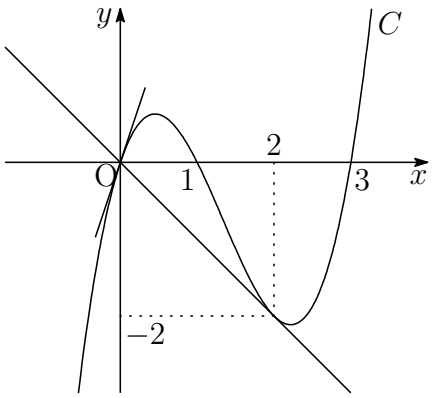
$$3 - k = 4 \quad \text{ゆえに} \quad k = 1$$

ℓ と C は接点の x 座標は

$$k = 3 \text{ のとき } x = 0,\ k = -1 \text{ のとき } x = 2$$

よって，C と ℓ が異なる三つの点で交わるときの k の値の範囲は

$$\boldsymbol{-1 < k < 3,\ k > 3} \quad \cdots (\text{ア}) \sim (\text{エ})$$

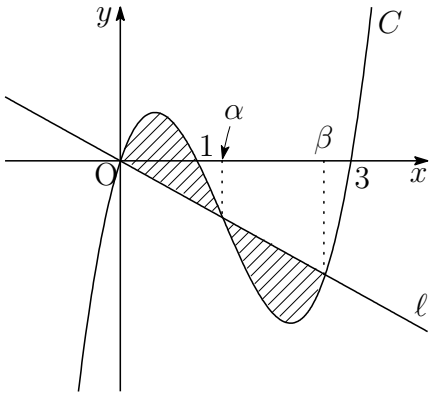


補足　$k = 3$ は，曲線 C の原点における接線の傾きとして求めることもできる．

(2) C 上の点 $(\alpha,\ \alpha^3-4\alpha^2+3\alpha)$ は変曲点であり，C は変曲点に関して対称であるから

$$\int_0^{\beta} x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\mathbf{0} \quad \cdots(\text{オ})$$

より，$\boldsymbol{\beta=2\alpha}$ $\cdots(\text{カ})$



3 次関数のグラフは変曲点に関して対称であり，3 次関数のグラフと直線で囲まれる二つの図形の面積が等しいとき，その交点の 1 つは 3 次関数のグラフの変曲点である．

$y=x^3-4x^2+3x$ より

$$y'=3x^2-8x+3$$
$$y''=6x-8$$

α は，$y''=0$ の解であるから

$$6\alpha-8=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha=\frac{4}{3}} \quad \cdots(\text{キ})(\text{ク})$$

ℓ は C の変曲点 $\left(\frac{4}{3},-\frac{20}{27}\right)$ を通るから

$$-\frac{20}{27}=k\cdot\frac{4}{3} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=-\frac{5}{9}} \quad \cdots(\text{ケ})\sim(\text{サ})$$

よって，点 A は **OB の中点**である． $\cdots(\text{シ})$

参照 定理 6

参考 積分公式

$$\int_0^\beta x(\beta-x)\,dx=\frac{1}{6}\beta^3,\quad \int_0^\beta x^2(\beta-x)\,dx=\frac{1}{12}\beta^4$$

を利用すると

$$\begin{aligned}\int_0^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx&=-\int_0^\beta x^2(\beta-x)\,dx+\alpha\int_0^\beta x(\beta-x)\,dx\\&=-\frac{1}{12}\beta^4+\alpha\cdot\frac{1}{6}\beta^3=\frac{1}{12}\beta^3(-\beta+2\alpha)\end{aligned}$$

したがって　$-\beta+2\alpha=0$　よって　$\beta=2\alpha$　$\cdots(カ)$

積分公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

参照 積分公式を利用

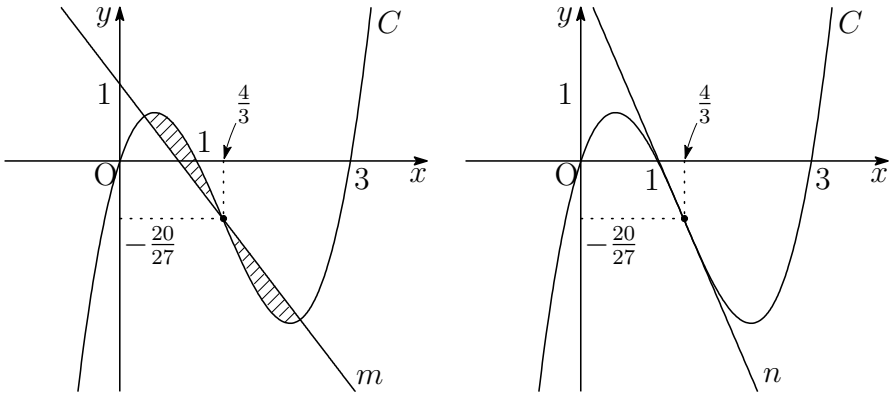
$$\int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} (\boldsymbol{x-\alpha})^{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\beta-x})^{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{m!n!}}{\boldsymbol{(m+n+1)!}}(\boldsymbol{\beta-\alpha})^{\boldsymbol{m+n+1}}$$

(3) $C : y = x^3 - 4x^2 + 3x$ と直線 $m : y = kx + 1$ が異なる三つの点で交わり，C と m で囲まれてできる二つに図形が等しいとき，m は C の変曲点 $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{20}{27}\right)$ を通るから

$$-\frac{20}{27} = k\cdot\frac{4}{3} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{k = -\frac{47}{36}} \quad \cdots(\text{ニ}) \sim (\text{ノ})$$

C の変曲点における接線 n の傾きは $x = \dfrac{4}{3}$ を $y' = 3x^2 - 8x + 3$ に代入して

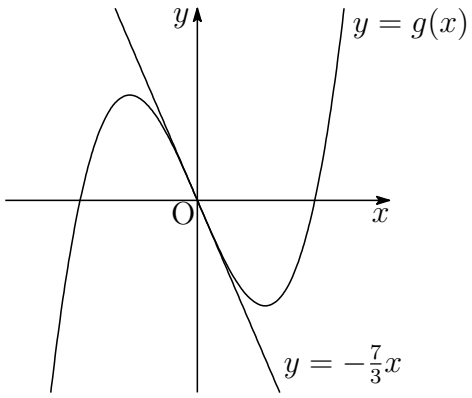
$$\text{接線 } n \text{ の傾き} = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8\cdot\frac{4}{3} + 3 = -\frac{7}{3}$$



C の変曲点を原点に平行移動させたグラフが $y = g(x)$ であり，このグラフが原点に関して対称であることから，$g(x)$ は奇関数であるから，その原点における接線の傾きが $-\dfrac{7}{3}$ であるから

$$\boldsymbol{g(x) = x^3 - \frac{7}{3}x} \quad \cdots(\text{ト})(\text{ナ})$$

C を x 軸方向に $\boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$，$y$ 軸方向に $\boldsymbol{\dfrac{20}{27}}$ だけ平行移動したものが $y = g(x)$ である．　$\cdots(\text{ス}) \sim (\text{テ})$



解説 31 ページの定理 2 により，x^3 の係数が a である 3 次関数 $f(x)$ を $x=k$ を極として展開すると

$$f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2}f''(k)(x-k)^2+a(x-k)^3$$

点 $(k,\ f(k))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点であるとき，$f''(k)=0$ であるから

$$y=f(k)+f'(k)(x-k)+a(x-k)^3$$

これを x 軸方向に $-k$，y 軸方向に $-f(k)$ だけ平行移動した曲線の方程式は

$$y=ax^3+f'(k)x$$

本題の $g(x)$ は，次式で与えられる．

$$g(x)=ax^3+f'(k)x$$

$g'(x)=3ax^2+f'(k)$ より，$af'(k)\geqq 0$ のとき，$g(x)$ は極値をもたない．
$af'(k)<0$ のとき

$$s=\sqrt{-\frac{f'(k)}{3a}}\quad\text{ゆえに}\quad f'(k)=-3as^2$$

とおくと，$g(x)=ax^3-3as^2x$ より

$$g'(x)=3a(x^2-s^2)=3a(x+s)(x-s)$$

$g(x)$ は $x=\pm s$ で極値をとり，次式が成立する

$$g(s)=g(-2s)=-2as^3,\quad g(-s)=g(2s)=2as^3,\quad g(\pm\sqrt{3}s)=0$$

また，$f(x)=f(k)-3as^2(x-k)+a(x-k)^3$ について

$$f(k+s)=f(k)-2as^3,\quad f(k-s)=f(k)+2as^3$$

となり，$f(x)$ の極値が a と変曲点における y 座標および接線の傾きによって与えられることが分かる．上の 2 式から

$$f(k+s)f(k-s)=f(k)^2-4a^2s^6=f(k)^2-4a^2\left\{-\frac{f'(k)}{3a}\right\}^3$$
$$=f(k)^2+\frac{4f'(k)^3}{27a}$$

これから 33 ページの定理 4 が成立する．

第 4 問 (1)

問題 A

n を正の整数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ を計算せよ．

(i) $k(k+1) = k^2 + k$ と展開して計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} n(n+1)(2n+1) + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} n(n+1) \\ &= \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

となる．

(ii) 恒等式

$$k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=\boxed{\text{キ}}k(k+1)$$

を用いて計算すると

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{\boxed{\text{キ}}}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$
$$=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}n(n+1)(n+2)$$

となる.

(iii) n を正の整数とするとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$ を恒等式

$$k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)=\boxed{\text{ク}}k(k+1)(k+2)$$

を用いて計算すると

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

となる.

(2)

問題 B

n を正の整数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+4)$ を計算せよ．

恒等式

$$k(k+1)(k+4) = k(k+1)(k+2) + \boxed{\text{サ}}k(k+1)$$

を用いて表すと

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+4) = \frac{n(n+1)\left(n+\boxed{\text{シ}}\right)\left(\boxed{\text{ス}}n+\boxed{\text{セソ}}\right)}{\boxed{\text{タチ}}}$$

(3) n を正の整数とし，$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ とおくとき

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}} n \left(n + \boxed{\text{ナ}}\right)^{\boxed{\text{ニ}}} \left(n + \boxed{\text{ヌ}}\right)$$

である．

解答　(1)　(i) $k(k+1)=k^2+k$ と展開して計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)&=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}n(n+1)(2n+1)+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}n(n+1)\quad\cdots(\text{ア})\sim(\text{エ})\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}\\&=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}n(n+1)(n+2)\quad\cdots(\text{オ})(\text{カ})\end{aligned}$$

となる.

(ii) 左辺を変形すると

$$\begin{aligned}k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)&=k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\}\\&=\mathbf{3}k(k+1)\quad\cdots(\text{キ})\end{aligned}$$

を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\&=\frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-0\cdot1\cdot2\}\\&=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}n(n+1)(n+2)\quad\cdots(\text{オ})(\text{カ})\end{aligned}$$

(iii) (i) と同様に

$$\begin{aligned}k(k+1)(k+2)(k+3)&-(k-1)k(k+1)(k+2)\\&=k(k+1)(k+2)\{(k+3)-(k-1)\}\\&=\mathbf{4}k(k+1)(k+2)\quad\cdots(\text{ク})\end{aligned}$$

を用いて計算すると

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\\&\quad=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\\&\quad=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}n(n+1)(n+2)(n+3)\quad\cdots(\text{ケ})(\text{コ})\end{aligned}$$

(2) 恒等式

$$k(k+1)(k+4) = k(k+1)(k+2) + \mathbf{2}k(k+1) \quad \cdots (\text{サ})$$

を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+4) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + 2\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) + 2\cdot\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)\{3(n+3)+8\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+\mathbf{2})(\mathbf{3}n+\mathbf{17})}{\mathbf{12}} \quad \cdots (\text{シ}) \sim (\text{チ})\end{aligned}$$

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ より

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1)\end{aligned}$$

(1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} S_k &= \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{1}{3}k(k+1)(k+2) - \frac{1}{2}k(k+1)\right\} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)\{(n+3)-2\} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}n(n+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}(n+\mathbf{2}) \quad \cdots (\text{ツ}) \sim (\text{ヌ})\end{aligned}$$

類題 New Global Top 383

第 7 問

〔1〕図 1 のような道具 (楕円コンパス) を考える．図 2 は楕円コンパスの動きを座標平面上に表したものであり，点 P は図 1 のハンドルを表している．ハンドルを回すと，図 1 の点 A，B はそれぞれ左右，上下に動き，これらが動く部分を図 2 ではそれぞれ x 軸，y 軸の一部としている．ここで，点 A は線分 BP 上にある．また，線分 AB の長さはつねに 1 であり，線分 BP の長さはつねに $a(>1)$ であるとする．

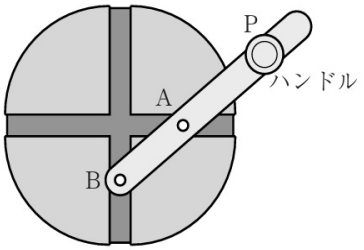


図 1　楕円コンパス

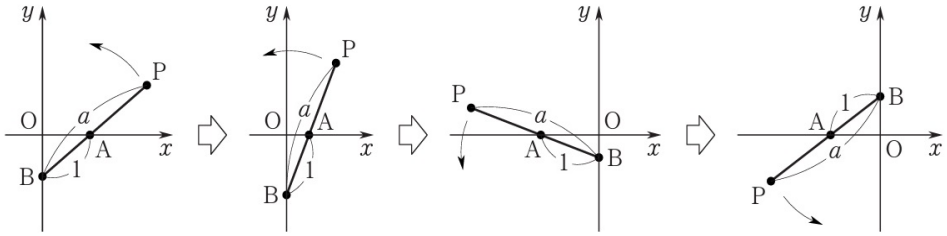


図 2　楕円コンパスの動き方

s，t を正の実数とすると，点 P の軌跡は $\dfrac{x^2}{s^2}+\dfrac{y^2}{t^2}=1$ で表される曲線となる．

(1) $a=2$ のとき，$s=$ ア ，$t=$ イ である．

(2) 線分 BP の長さ a に対して，$L_a = \dfrac{t}{s}$ とする．

(i) b，c を $1 < b < c$ を満たす実数とする．a の値の範囲で変化させたとき，L_a の変化に関する記述として，次の ⓪ ～ ⑤ のうち，正しいものは ウ である．

ウ の解答群

⓪ a の値を変化させても．L_a は変化しない．
① $L_b < L_c$ が成り立ち．$L_a > 1$ となる a の値は存在する．
② $L_b < L_c$ が成り立ち．$L_a > 1$ となる a の値は存在しない．
③ $L_b > L_c$ が成り立ち．$L_a > 1$ となる a の値は存在する．
④ $L_b > L_c$ が成り立ち．$L_a > 1$ となる a の値は存在しない．
⑤ つねに $L_b < L_c$ が成り立つとも．つねに $L_b > L_c$ が成り立つとも限らない．

(ii) この楕円コンパスで円をかくことができるか，すなわち，点 P の軌跡が円になるかに関する記述として，次の ⓪ ～ ④ のうち，正しいものは エ である．

エ の解答群

⓪ 円はかけない．
① 任意の半径の円がかける．
② ある円がかけ，その半径は 1 である．
③ ある円がかけ，その半径は 1 より大きい．
④ ある円がかけ，その半径は 1 より小さい．

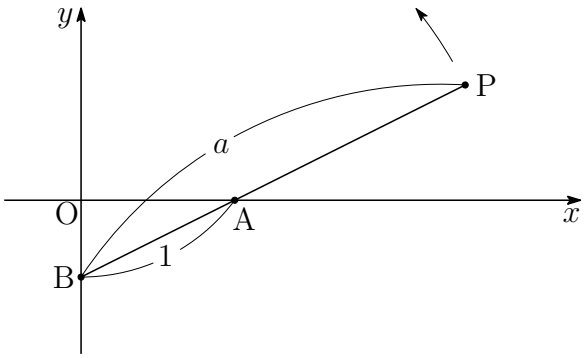
解答　(1)　$\mathrm{A}(\cos\theta,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + a\overrightarrow{\mathrm{BA}}\\ (x,\ y) &= (0,\ -\sin\theta) + a(\cos\theta,\ \sin\theta)\\ &= (a\cos\theta,\ (a-1)\sin\theta)\end{aligned}$$

$a > 1$ に注意して　$\dfrac{x}{a} = \cos\theta,\ \dfrac{y}{a-1} = \sin\theta$

$s = a$，$t = a - 1$ であるから，$a = 2$ のとき

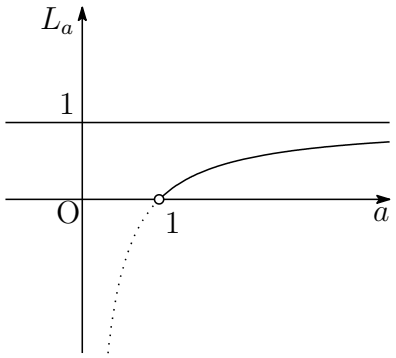
$$\boldsymbol{s = 2,\quad t = 1}\quad \cdots(\text{ア})(\text{イ})$$



(2) (i) $s=a$，$t=a-1$ より

$$L_a=\frac{t}{s}=\frac{a-1}{a}=-\frac{1}{a}+1$$

$L_a=-\dfrac{1}{a}+1$ のグラフは，次のようになる．



L_a は単調増加で，$0<L_a<1$.

$1<b<c$ であるから　ウ　$\cdots$②

$L_b<L_c$ が成り立ち，$L_a>1$ となる a の値は存在しない．

(ii) (1) の結果から，P の軌跡は　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{(a-1)^2}=1$

$a\neq a-1$ であるから，円はかけない　エ　$\cdots$⓪

〔2〕 (1)

問題

複素数 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$w = \boxed{}$ で表される点 w が描く図形は，点 $1+i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円になった．$\boxed{}$ に当てはまる式を求めよ．

太郎： 円の半径を $\sqrt{2}$ 倍してから，$1+i$ だけ平行移動すればよさそうだね．

花子： 円を実軸方向に 1 だけ平行移動して，原点を通る円にしたあとに，中心が $1+i$ になるように回転拡大させてもいいね．

太郎さんの考え得られる式は $\boxed{\text{オ}}$ であり，花子さんの考え方で得られる式は $\boxed{\text{カ}}$ である．

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $z+1+i$	① $2z+1+i$	② $\sqrt{2}(z+1+i)$
③ $\sqrt{2}z+1+i$	④ $z+\sqrt{2}(1+i)$	⑤ $(1+i)(z+1)$

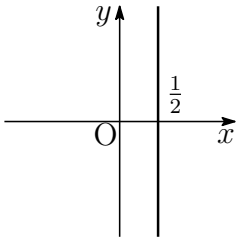
(2) a を複素数とする．点 a を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$w = \dfrac{1}{z}$ で表される点 w が描く図形について考える．ただし，$z \neq 0$ とする．

(i) $a = 2$ のとき，点 w が描く図形は中心 $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$，半径 $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ の円である．

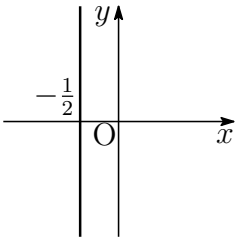
$a = i$ のとき，点 w が描く図形は，$\boxed{サ}$ の太線部のようになる．

$\boxed{サ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ．

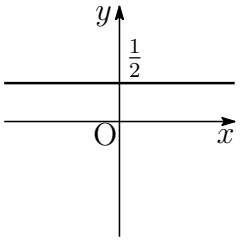
⓪



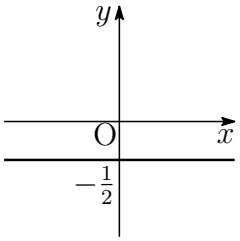
①



②



③



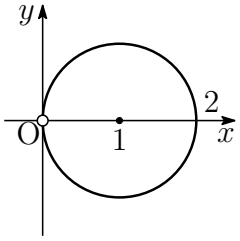
(ii) a を実数とする．点 w の描く図形と，点 z の描く図形が一致するとき，すなわち，点 w が点 a を中心とする半径 1 の円を描くとき，

$a = \boxed{シ}$，$\pm\sqrt{\boxed{ス}}$ である．

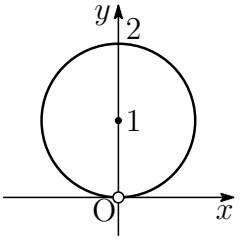
(3) 点 z が，原点を中心とする半径 1 の円周上で点 -1 を除く部分を動くとする．$w = \dfrac{1}{i(z+1)}$ で表される点 w が描く図形は，$\boxed{セ}$ の太線部のようになる．

$\boxed{セ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ．

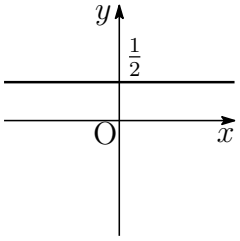
⓪



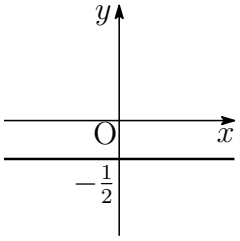
①



②

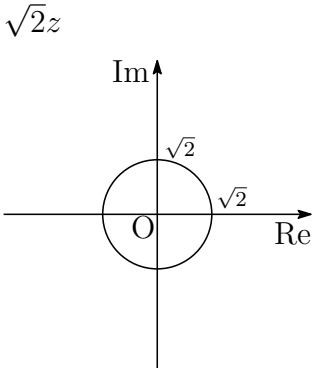


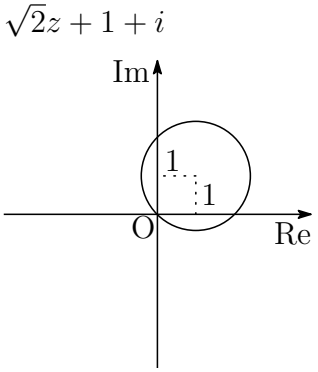
③



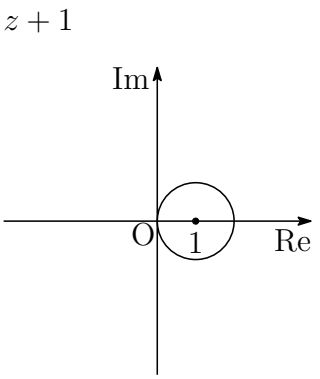
解答　(1)

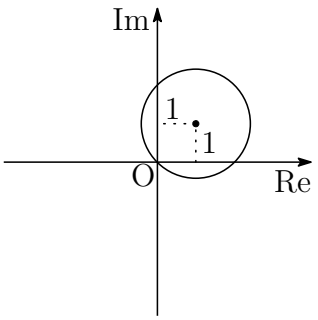
太郎　③





花子　⑤





(2)　(i)　**定理 9**(i) より，$a=2$ のとき　$\cdots$(キ) ～ (コ)

$$\text{中心}\ \frac{\overline{a}}{|a|^2-r^2}=\frac{2}{2^2-1^2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}},\quad \text{半径}\ \frac{r}{||a|^2-r^2|}=\frac{1}{|2^2-1^2|}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

定理 9(ii) より，$a=i$ のとき　$\cdots$(サ)

w の描く図形は，原点と点 $\dfrac{1}{i}=-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(ii)　点 a (a は実数) を中心とする半径 $r=1$ の円を反転してできた円が元の円と一致するから

$$\frac{a}{a^2-1^2}=a,\quad \frac{1}{|a^2-1^2|}=1$$

したがって　$a(a^2-2)=0,\quad a^2=1\pm 1$

よって　$\boldsymbol{a=0,\ \pm\sqrt{2}}$　$\cdots$(シ)(ス)

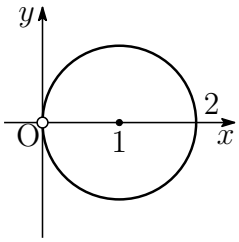
(3) 変換 $\dfrac{1}{i(z+1)}$ は①〜③の順に行ったものである.

① $z+1$ は z を 1 だけ平行移動したもの

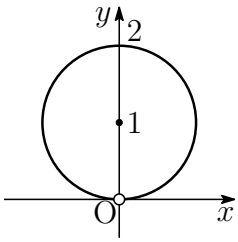
② $i(z+1)$ は $z+1$ を原点 O を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したもの

③ $\dfrac{1}{i(z+1)}$ は $i(z+1)$ を反転したもの

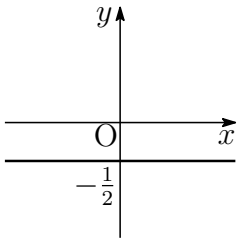
① $z+1$



② $i(z+1)$

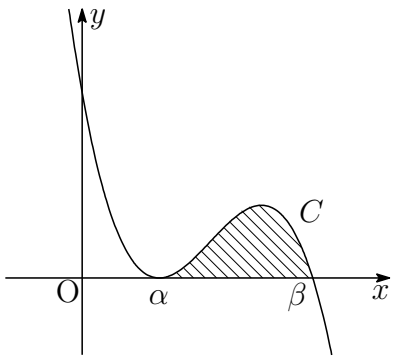


③ $\dfrac{1}{i(z+1)}$



11.2.4　第 4 回

第 3 問　(1) $\alpha < \beta$ とする．右の図のように，x 座標が α の点で x 軸と接し，x 座標が β の点で x 軸と交わる 3 次関数のグラフを C とする．C と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，S を α，β を用いた式で表そう．



$a > 0$ とし，C の方程式を $y = g(x)$ とする．このとき，a を用いて $f(x) =$ ア と表すことができる．

C を x 軸の正の方向に $-\alpha$ だけ平行移動させたグラフを C' とし，C' の方程式を $y = g(x)$ とする．このとき，a を用いて $g(x) =$ イ と表すことができる．

よって，C' と x 軸とで囲まれた図形の面積を S' とすると，$S = S'$ であるから

$$S' = \int_0^{\boxed{ウ}} g(x)\,dx$$

を計算することで

$$S = \frac{a(\beta-\alpha)^4}{12}$$

となる．

したがって

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{a(\beta-\alpha)^4}{12}$$

であり，この式は $\alpha \geqq \beta$ のときも成り立つことがわかる．

ア の解答群

⓪ $a(x-\alpha)^2(x-\beta)$　　① $a(x-\alpha)(x-\beta)^2$
② $-a(x-\alpha)^2(x-\beta)$　　③ $-a(x-\alpha)(x-\beta)^2$

イ の解答群

⓪ $a(x-2\alpha)^2(x-\alpha-\beta)$　　① $ax^2(x+\alpha-\beta)$
② $a(x-2\alpha)(x-\alpha-\beta)^2$　　③ $ax(x+\alpha-\beta)^2$
④ $-a(x-2\alpha)^2(x+\alpha-\beta)$　　⑤ $-ax^2(x+\alpha-\beta)$
⑥ $-a(x-2\alpha)(x-\alpha-\beta)^2$　　⑦ $-ax(x+\alpha-\beta)^2$

ウ の解答群

⓪ $\alpha+\beta$　　① $\alpha-\beta$　　② $\beta-\alpha$　　③ 2α　　④ 2β

(2) 3 次関数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ のグラフを C'' とし，C'' 上の x 座標が t である点 P における接線を ℓ_1 とする．このとき，次の問いに答えよ．

(i) ℓ_1 の方程式は

$$y = \boxed{\text{エ}}\left(t^2 - \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\right)x - \boxed{\text{キ}}t^3 + \boxed{\text{ク}}t^2 + \boxed{\text{ケコ}}$$

である．

また，ℓ_1 と C'' の共有点が P 以外に存在するとき，P でない方の共有点の x 座標は

$$x = \boxed{\text{サシ}}t + \boxed{\text{ス}}$$

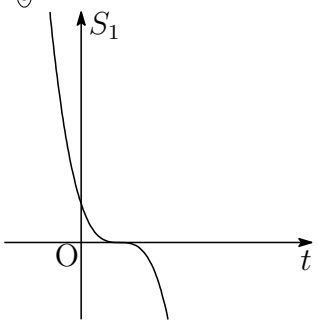
であるから，ℓ_1 と C'' とで囲まれた図形の面積を S_1 とすると

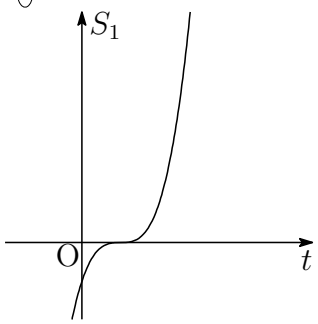
$$S_1 = \frac{\boxed{\text{セソ}}\left(\boxed{\text{タ}} - t\right)^{\boxed{\text{チ}}}}{\text{ツ}}$$

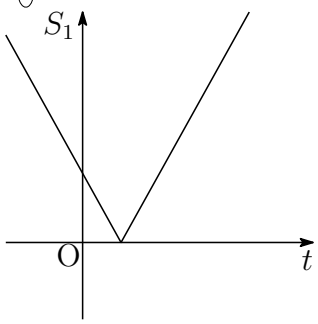
である．

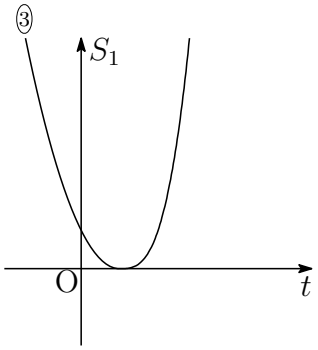
そして，ℓ_1 と C'' の共有点が P 以外に存在しないのは $t = \boxed{\text{テ}}$ のときであるから，$t = \boxed{\text{テ}}$ のときの S_1 の値を 0 としたときの t と S_1 の関係を表にしたグラフは $\boxed{\text{ト}}$ である．

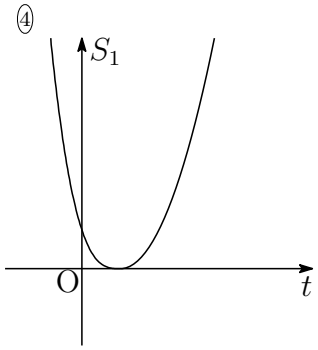
$\boxed{\text{ト}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ．

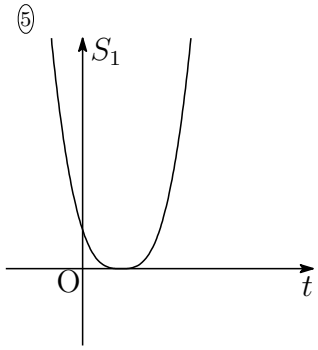
⓪


①


②


③


④


⑤


(ii) ℓ_1 と傾きが等しい C'' の接線が ℓ_1 以外に存在するとき，その接点の x 座標は $x = \boxed{\text{ナ}}t + \boxed{\text{ニ}}$ である．

そして，ℓ_1 と傾きが等しい C'' の接線が ℓ_1 以外に存在するのは $t \neq \boxed{\text{テ}}$ のときであり，このような接線は ℓ_1 以外に 1 本だけ存在することがわかる．

$t \neq \boxed{\text{テ}}$ のとき，ℓ_1 と傾きが等しい C'' の接線のうち，ℓ_1 でない方の接線を ℓ_2 とする．

ℓ_1 と C'' とで囲まれた図形の面積を S_1，ℓ_2 と C'' とで囲まれた図形の面積を S_2 とすると，$S_1 + S_2 = \dfrac{8}{3}$ のとき，ℓ_1 の傾きは $\dfrac{\boxed{\text{ヌネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である．

解答　(1) C の増減から，x^3 の係数は　$-a<0$

C は x 軸と $x=\alpha$ で接し，$x=\beta$ で交わるから

$$f(x)=\boldsymbol{-a(x-\alpha)^2(x-\beta)}\quad\cdots(\text{ア})\ ②$$

$y=f(x)$ を x 軸方向に $-\alpha$ だけ平行移動した $(x\to x+\alpha$に置き換える$)$

グラフの方程式が $y=g(x)$ であるから

$$g(x)=\boldsymbol{-ax^2(x+\alpha-\beta)}\quad\cdots(\text{イ})\ ⑤$$

よって，C' と x 軸で囲まれた図形の面積を S' とすると，$S=S'$ であるから

$$S'=\int_0^{\boldsymbol{\beta-\alpha}} g(x)\,dx\quad\cdots(\text{ウ})\ ②$$

を計算することで，**定理 7** より

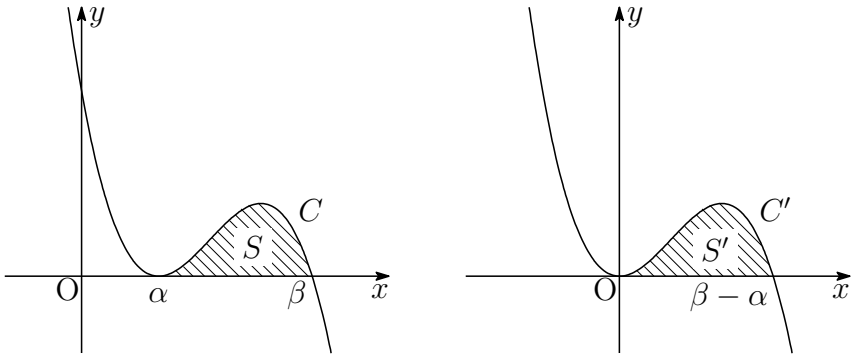
$$\begin{aligned}S&=-a\int_0^{\beta-\alpha}x^2\{x+\alpha-\beta\}\,dx\\&=a\int_0^{\beta-\alpha}x^2\{(\beta-\alpha)-x\}\,dx=\frac{a(\beta-\alpha)^4}{12}\end{aligned}$$

となる．

したがって

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{a(\beta-\alpha)^4}{12}$$

であり，この式は $\alpha\geqq\beta$ のときも成り立つことがわかる．



補足　**定理 7** を用いると

$$S=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4}$$

(2) (i) $C'' : y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ より　$y' = 3x^2 - 6x - 9$
C'' 上の x 座標が t である点 P における接線 ℓ_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 6t - 9)(x - t) + t^3 - 3t^2 - 9t + 11 \\ &= \boldsymbol{3(t^2 - 2t - 3)x - 2t^3 + 3t^2 + 11} \quad \cdots (\text{エ}) \sim (\text{コ}) \end{aligned}$$

$y'' = 6x - 6$ について，$y'' = 0$ とすると

$$x = 1$$

定理 6 より

$$t = 1 + s \quad \text{ゆえに} \quad s = t - 1$$

P でない方の共有点の x 座標は

$$x = 1 - 2s = 1 - 2(t - 1) = \boldsymbol{-2t + 3} \quad \cdots (\text{サ}) \sim (\text{ス})$$

ℓ_1 と C'' とで囲まれた図形の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{27}{4}s^4 = \frac{27}{4}(t - 1)^4 = \frac{\boldsymbol{27(1 - t)^4}}{\boldsymbol{4}} \quad \cdots (\text{セ}) \sim (\text{ツ})$$

そして，ℓ_1 と C'' の共有点が P 以外に存在しないのは t が変曲点の x 座標である，すなわち，$\boldsymbol{t = 1}$ のときである．$\cdots (\text{テ})$

別解 接点 P の x 座標 t ともう一方の共有点の x 座標 $-2t + 3$ が等しいとき

$$t = -2t + 3 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{t = 1}$$

t と S_1 の関係式を表したグラフは

$$y = \frac{27}{4}(t - 1)^4 \quad \cdots ⑤$$

(ii) ℓ_1 と傾きが等しい C'' の接線が ℓ_1 以外に存在するとき，その接点の x 座標は

$$x = 1 - s = 1 - (t-1) = \boldsymbol{-t+2} \quad \cdots (ナ) \sim (ニ)$$

である．
そして，ℓ_1 と傾きが等しい C'' の接線が ℓ_1 いがに存在するのは $t \neq 1$ のときであり，このような接線は ℓ_1 以外に 1 本だけ存在することがわかる．

$t \neq 1$ のとき，ℓ_1 と傾きが等しい C'' の接線のうち，ℓ_1 でない方の接線を ℓ_2 とする．

ℓ_1 と C'' とで囲まれた図形の面積を S_1，ℓ_2 と C'' とで囲まれた図形の面積を S_2 とすると，$S_1 + S_2 = \dfrac{8}{3}$ のとき，$S_1 = S_2 = \dfrac{4}{3}$ であるから，**定理 6** より

$$S_1 = S_2 = \frac{27}{4}s^4 = \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad s^2 = \frac{4}{9}$$

$h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ とおくと，$h'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ より

$$h'(1) = 3 - 6 - 9 = -12$$

よって，求める ℓ_1 の傾きは

$$h'(1) + 3 \cdot 1 \cdot s^2 = -12 + 3 \cdot \frac{4}{9} = \boldsymbol{-\frac{32}{3}}$$

第 4 問 太郎さんと花子さんは，次のように定められた数列 $\{a_n\}$ に関する【**問題**】について話している．

$$a_{n+1} = 5a_n - 5 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

二人の会話を読んで，下の問いに答えよ．

【**問題**】

$a_1 = 7$ のとき，任意の自然数 n について，a_{2n} は 4 の倍数であることを示せ．

太郎：数列 $\{a_n\}$ の漸化式は，前に授業で学習したタイプだから，一般項を求めることができるね．
花子：まず，m を定数として $a_{n+1} = 3a_n - 5$ を
$$a_{n+1} - m = 3(a_n - m)$$
の形に変形するといいんだよね．

(1) m の値，および $a_1 = 7$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$m = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad a_n = \frac{\boxed{\text{ウ}}^{n+1} + \boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

太郎：一般項が分かったから，それを用いて【**問題**】の証明ができるかな．
花子：$a_2,\ a_4,\ a_6, \cdots$ についてすべて成り立つことを示すんだよね．
太郎：自然数 n についての証明だから，数学的帰納法を利用できるんじゃないかな．

太郎さんの証明の構想

$A_n = a_{2n}$ とおくと

$$A_1 = \boxed{\text{カキ}}$$

である．また，A_n が 4 の倍数であると仮定して $A_n = 4p$ (p は整数) とおくと，$\boxed{\text{ウ}}^{2n+1} = \boxed{\text{ク}}p - \boxed{\text{ケ}}$ より

$$A_{n+1} = \boxed{\text{コサ}}p - \boxed{\text{シス}}$$

ゆえに，A_n が 4 の倍数ならば，A_{n+1} も 4 の倍数になることより，数学的帰納法によって【**問題**】は示される．

花子さんの証明の構想

$A_n = a_{2n}$ とおくと

$$A_1 = \boxed{\text{カキ}}$$

である．また

$$A_{n+1} = \boxed{\text{セ}} A_n - \boxed{\text{ソタ}}$$

ゆえに，A_n が 4 の倍数ならば，A_{n+1} も 4 の倍数になることより，数学的帰納法によって【**問題**】は示される．

(3) a_n が 13 の倍数ならば，a_{n+q} も 13 の倍数となるような自然数 q のうち，最小のものは $q = \boxed{\text{チ}}$ である．この q に対して，$a_1 = \boxed{\text{ツ}}$ のとき，任意の自然数 n について a_{qn} は 13 の倍数になる．

$\boxed{\text{ツ}}$ の選択肢

⓪ 2　　① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

解答

(1) 漸化式 $a_{n+1}=3a_n-5$ の特性方程式は

$$m=3m-5 \quad \text{これを解いて} \quad m=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} \quad \cdots(\text{ア})(\text{イ})$$

これと漸化式から　$a_{n+1}-m=3(a_n-m)$

$$a_{n+1}-\frac{5}{2}=3\left(a_n-\frac{5}{2}\right)$$

数列 $\left\{a_n-\frac{5}{2}\right\}$ は初項 $a_1-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}\cdot 3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n=\frac{\mathbf{3^{n+1}+5}}{\mathbf{2}} \quad \cdots(\text{ウ})\sim(\text{オ})$$

(2) 太郎さんの証明の構想

$A_n=a_{2n}$ とおくと

$$A_1=a_2=\frac{3^3+5}{2}=\mathbf{16} \quad \cdots(\text{オ})(\text{カ})$$

である．また，A_n が 4 の倍数であると仮定して $A_n=4p$ (p は整数) とおくと，

$$\frac{3^{2n+1}+5}{2}=4p \quad \text{ゆえに} \quad 3^{2n+1}=\mathbf{8}p-\mathbf{5} \quad \cdots(\text{ク})(\text{ケ})$$

したがって

$$\begin{aligned} A_{n+1}&=\frac{3^{2n+3}+5}{2}=\frac{3^2\cdot 3^{2n+1}+3}{2} \\ &=\frac{9(8p-5)+5}{2}=\mathbf{36}\boldsymbol{p}-\mathbf{20} \quad \cdots(\text{コ})\sim(\text{ス}) \end{aligned}$$

花子さんの証明の構想

$A_n=a_{2n}$ とおくと

$$A_1=a_2=\frac{3^3+5}{2}=16 \quad \cdots(\text{オ})(\text{カ})$$

である．また

$$\begin{aligned} A_{n+1}&=a_{2n+2}=3a_{2n+1}-5=3(3a_{2n}-5)-5 \\ &=9a_{2n}-20=\mathbf{9}A_n-\mathbf{20} \quad \cdots(\text{セ})\sim(\text{タ}) \end{aligned}$$

ゆえに，A_n が 4 の倍数ならば，A_{n+1} も 4 の倍数になることより，数学的帰納法によって【問題】は示される．

(3) $a_{n+1} = 3a_n - 5$ より

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 5 = 3(3a_n - 5) - 5 = 9a_n - 20,$$
$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 5 = 3(9a_n - 20) - 5 = 27a_n - 65$$

$27 \equiv 1,\ 65 \equiv 0 \pmod{13}$ より

$$a_{n+3} \equiv a_n \pmod{13} \quad \text{ゆえに} \quad q = \mathbf{3} \quad \cdots(\text{チ})$$

$a_3 = 9a_1 - 20 \equiv 0 \pmod{13}$ であるから

$$9a_1 \equiv 7 \quad \text{ゆえに} \quad 27a_1 \equiv 21 \pmod{13}$$

したがって　$a_1 \equiv 8 \pmod{13}$　選択肢から　$a_1 = \mathbf{8}$　$\cdots(\text{ツ})$ ③

第 6 問 k を $2 < k < 8$ を満たす実数とし，OA $= 3$，OB $= 5$，AB $= k$ である．∠A の内角の二等分線と辺 OB の交点を P，∠O の内角の二等分線の交点を Q とする．

∠B の外角の二等分線と直線 OA の交点が存在しないのは，この 2 直線が平行のときで，$k =$ ア のときである．

$k \neq$ ア のとき，∠B の外角の二等分線と直線 OA の交点を R とする．

(1) $k = 4$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である．

また，∠B の外角の二等分線上の点を R′ とおくとき，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OR'}} = t\left(\boxed{\text{ス}}\right)$$

と表すことができるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{\text{セ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

である．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} =$ ソ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，タ．

ス の解答群

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{BA}} - \overrightarrow{\mathrm{BO}}$　① $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{4} - \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BO}}}{5}$　② $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{5} - \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BO}}}{4}$

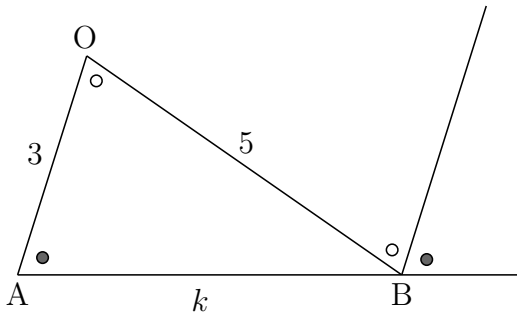
③ $\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}}$　④ $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{4} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BO}}}{5}$　⑤ $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{5} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BO}}}{4}$

タ の解答群

⓪ 3 点 P，Q，R は一直線上にあり，P は線分 QR 上の点である
① 3 点 P，Q，R は一直線上にあり，Q は線分 PR 上の点である
② 3 点 P，Q，R は一直線上にあり，R は線分 PQ 上の点である
③ 3 点 P，Q，R は一直線上にない

解答 ∠B の外角の二等分線と直線 OA が交点をもたない，すなわち，平行であるとき，下の図から

$$\angle \mathrm{BAO} = \angle \mathrm{BOA} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AB} = \mathrm{OB} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k = 5} \quad \cdots (\text{ア})$$



(1) $k = 4$ のとき，下の図から

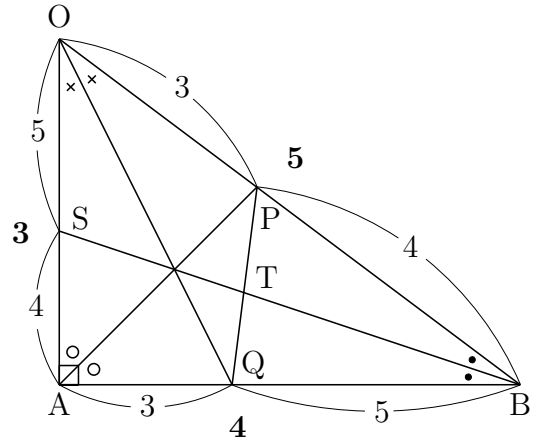
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{7}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{8}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{8}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots (\text{イ}) \sim (\text{キ})$$

であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - \frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{8}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{56}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots (\text{ク}) \sim (\text{シ})\end{aligned}$$

また，∠B の外角の二等分線上の点を R′ とおくとき，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{BR'}} = t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right) = t\left(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\mathrm{BA}}}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\mathrm{BO}}}}{\boldsymbol{5}}\right) \quad \cdots (\text{ス}) \ ①$$



これより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR'}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{4} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{BO}}}{5}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{BO}}}{5}\right)\\ &= \frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1 - \frac{t}{20}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

R′ は直線 OA 上の点であるから

$$1 - \frac{t}{20} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t = 20}$$

このとき，点 R′ は点 R と一致するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \mathbf{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots(\text{セ})$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 5\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= 8\left(\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{3}{56}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \mathbf{8}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \quad \cdots(\text{ソ})\end{aligned}$$

3 点 P，Q，R は一直線上にあり，Q は線分 PR 上の点である． $\cdots(\text{タ})$ ①

別解 172 ページの調和点列の性質 (1) により，4 点 O，S，A，R は調和点列であり，点 R は線分 OA を 5 : 4 に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 5\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$\mathrm{BP} : \mathrm{BQ} = \frac{4}{7}\cdot 5 : \frac{5}{8}\cdot 4 = 8 : 7$ より，直線 BS と直線 PQ の交点を T とすると

$$\mathrm{PT} : \mathrm{TQ} = 8 : 7$$

4 点 P，T，Q，R も調和点列である．点 R は線分 PQ を 8 : 7 に外分する点であるから (170 ページの定理 8 を参照)

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = 8\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

解説 △OAB について，$a=\mathrm{OA}$，$b=\mathrm{OB}$，$k=\mathrm{AB}$，∠OAB，∠ABO，∠BOA の内角の二等分線を AP，BS，OQ とし，PQ と BS の交点を T とする．∠ABC の外角の二等分線を ℓ とし，ℓ と 2 直線 OA，PQ の交点をそれぞれ R，R′ とする．4 点 O，S，A，R は調和点列であるから，定理 8 より，4 点 P，T，Q，R′ も調和点列である．$\mathrm{OS}:\mathrm{SA}=a:k$ であるから，R は線分 OA を $a:k$ に外分する点

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{b}{b-k}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

下の図から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{a}{k+a}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}$$

したがって

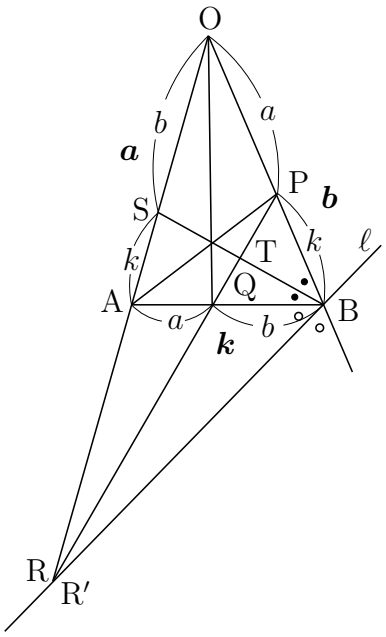
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{a(k-b)}{(a+b)(k+a)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\qquad(*)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{b}{b-k}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{a}{k+a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\qquad(**)$$

$\mathrm{BP}:\mathrm{BQ}=\dfrac{k}{k+a}a:\dfrac{b}{a+b}c=a+b:k+a$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CR'}}&=\frac{-(k+a)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(a+b)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{(a+b)-(a+k)}\\&=\frac{1}{b-k}\left\{-(k+a)\cdot\frac{a}{k+a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(a+b)\cdot\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}\right\}=\frac{b}{b-k}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\end{aligned}$$

よって，R と R′ は一致する．



(2) $k \neq$ ア のとき，(1) と同様に考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{\text{テ}\left(\text{ト} - k\right)}{\text{ナ}\left(k + \text{ニ}\right)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である．

次の ⓪ ～ ④ のうち，正しいものは ヒ と フ である．

ヒ ， フ の解答群 (解答の順序は問わない)

⓪ $k = \dfrac{7}{3}$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあり，P は線分 QR 上の点である．

① $k = \dfrac{9}{2}$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあり，Q は線分 PR 上の点である．

② $k = \dfrac{13}{2}$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあり，P は線分 QR 上の点である．

③ $k = \dfrac{22}{3}$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあり，Q は線分 PR 上の点である．

④ 3 点 P，Q，R が一直線上にない k の値が存在する．

解答 1420 ページの $(*)$，$(**)$ に $a=3$，$b=5$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{8}}\overrightarrow{\mathbf{OA}}-\frac{\boldsymbol{3(5-k)}}{\boldsymbol{8(k+3)}}\overrightarrow{\mathbf{OB}}\quad\cdots(\text{チ})\sim(\text{ニ})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{5-k}}\overrightarrow{\mathbf{OA}}-\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{k+3}}\overrightarrow{\mathbf{OB}}\quad\cdots(\text{ヌ})\sim(\text{ハ})$$

R は，OA を $5:k$ に外分する点で，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．$k<5$ のとき，R は PQ の延長上にあり，$k>5$ のとき，R は QP の延長上にある．

よって，正しい解答群は　①，②

11.2.5　第 5 回

第 4 問 太郎さんと花子さんは，数列の漸化式に関する**問題**について話している．

問題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n + 3^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1)

太郎： 授業では

$$A_{n+1} = xA_n + y \ (x,\ y \text{ は定数で}, x \neq 0,\ 1) \quad \cdots (*)$$

の形の漸化式を学習したけれど，**問題**の漸化式は右辺に 3^n があるから，そのままでは学習したことを使えないね．

花子： **問題**の $a_n,\ a_{n+1}$ の係数がともに 1 なら，階差数列を利用できるね．与えられた漸化式をうまく変形して階差数列の形にできないか，考えてみるよ．

太郎： その他にも，置き換えを利用して，与えられた漸化式を $(*)$ の形に変形できれば，数列の一般項を求められるよね．うまく置き換えることができないか，考えてみるよ．

花子さんの方針

与えられた漸化式の両辺を $\boxed{\text{ア}}^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{\boxed{\text{ア}}^{n+1}} = \frac{a_n}{\boxed{\text{ア}}^{n}} + \frac{3^n}{\boxed{\text{ア}}^{n+1}}$$

となるから，数列 $\left\{ \dfrac{a_n}{\boxed{\text{ア}}^{n}} \right\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{\boxed{\text{ア}}^{n+1}} - \frac{a_n}{\boxed{\text{ア}}^{n}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めると，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$，公比 $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ の等比数列になることを利用する．

花子さんの方針

与えられ漸化式の両辺を $\boxed{\text{キ}}^{n+1}$ で割り，数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = \frac{a_n}{\boxed{\text{キ}}^{n}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めると

$$c_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} c_n + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

となるから，まず数列 $\{c_n\}$ の一般項を求める．

(2)

花子： 置き換えを利用して，求めやすい数列の一般項をまず求めることで，元の数列の一般項 a_n が求められるね．

太郎： でも，$(*)$ を解いたときのように，与えられた漸化式を直接変形できないかな．

定数 s を用いて，与えられた漸化式は

$$\boxed{\text{シ}} = 5\left(\boxed{\text{ス}}\right)$$

のように変形することができる．$d_n = \boxed{\text{ス}}$ とおくと，数列 $\{d_n\}$ は公比が 5 の等比数列になる．

これより，定数 s の値を求めると

$$s = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる．

$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $a_n + s\cdot 3^n$　　① $a_n + s\cdot 3^n + 5$

② $a_n + s\cdot 3^{n+1}$　　③ $a_{n+1} + s\cdot 3^n$

④ $a_{n+1} + s\cdot 3^{n+1}$　　⑤ $a_{n+1} + (s+1)\cdot 3^{n+1}$

⑥ $a_{n+1} + s\cdot 3^{n+1} + 5$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\boxed{\text{タ}}^n - \boxed{\text{チ}}^n}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である.

(4) 次のように定められた数列 $\{p_n\}$ がある.

$$p_1 = 0, \quad p_{n+1} = 3p_n + 4^n + 4n$$

数列 $\{p_n\}$ の一般項を，置き換えを利用して求めてみよう.

$q_n = \boxed{\text{テ}}$ とおくと，与えられた漸化式は

$$q_{n+1} = 3q_n$$

のように変形することができる.

これより，数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めると

$$p_n = \boxed{\text{ト}}^n - \boxed{\text{ナ}}^{n-1} - \boxed{\text{ニ}}\,n - \boxed{\text{ヌ}}$$

となる.

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ $p_n + x\cdot 4^n$ (x は定数)
① $p_n + x\cdot 4^n + 3$ (x は定数)
② $p_n + x\cdot 4^n + yn$ ($x,\ y$ は定数)
③ $p_n + x\cdot 4^n + yn + z$ ($x,\ y,\ z$ は定数)

解答　(1) 花子さんの方針

与えられた漸化式の両辺を $\mathbf{5}^{n+1}$ で割ると　$\cdots$(ア)

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + \frac{3^n}{5^{n+1}}$$

となるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{5^n}\right\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{a_n}{5^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めると

$$b_n = \frac{3}{25} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

となり，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{25}}$，公比 $\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$ の等比数列になる．$\cdots$(イ) $\sim$ (カ)

太郎さんの方針

与えられた漸化式を $\mathbf{3}^{n+1}$ で割ると　$\cdots$(キ)

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{5a_n}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}$$

よって，$c_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定めると

$$c_{n+1} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} c_n + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \quad \cdots(\text{ク}) \sim (\text{サ})$$

となる．

(2) 定数 s を用いて

$$s \cdot 3^{n+1} = 5s \cdot 3^n - 3^n \tag{A}$$

とおき，これを $a_{n+1} = 5a_n + 3^n$ の辺々に加えると

$$\boldsymbol{a_{n+1} + s \cdot 3^{n+1}} = 5(\boldsymbol{a_n + s \cdot 3^n}) \quad \cdots(\text{シ})\ ④\ (\text{ス})\ ⓪$$

(A) より，定数 s の値を求めると

$$s \cdot 3 = 5s - 1 \quad \text{これを解いて} \quad s = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \quad \cdots(\text{セ})(\text{ソ})$$

(3) (2) の結果から，数列 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\cdot 3^n\right\}$ は，初項 $a_1+\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{5}{2}$，公比 5 の等比数列であるから

$$a_n+\frac{1}{2}\cdot 3^n=\frac{5}{2}\cdot 5^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n=\frac{5^n-3^n}{2}} \quad \cdots(\text{タ})\sim(\text{ツ})$$

(4) 定数 $x,\ y,\ z$ を用いて

$$x\cdot 4^{n+1}+y(n+1)+z=3(x\cdot 4^n+yn+z)-4^n-4n \qquad \text{(B)}$$

とおき，これを $p_{n+1}=3p_n+4^n+4n$ の辺々に加えると

$$p_{n+1}+x\cdot 4^{n+1}+y(n+1)+z=3(p_n+x\cdot 4^n+yn+z)$$

$q_n=\boldsymbol{p_n+x\cdot 4^n+yn+z}$ とおくと，与えらえた漸化式は $\cdots(\text{テ})$ ③

$$q_{n+1}=3q_n$$

のように変形することができる．

(B) を n について整理すると

$$(x+1)\cdot 4^n+(-2y+4)n+y-2z=0$$

上式は，n に関する恒等式であるから

$$x=-1,\ y=2,\ z=1$$

したがって，数列 $\{p_n-4^n+2n+1\}$ は初項 $p_1-4^1+2\cdot 1+1=-1$，公比 3 の等比数列であるから

$$p_n-4^n+2n+1=-1\cdot 3^{n-1}$$

これより，数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めると

$$\boldsymbol{p_n=4^n-3^{n-1}-2n-1} \quad \cdots(\text{ト})\sim(\text{ヌ})$$

11.2.6　第 6 回

第 3 問 太郎さんと花子さんは，面積に関する問題について話している．

問題

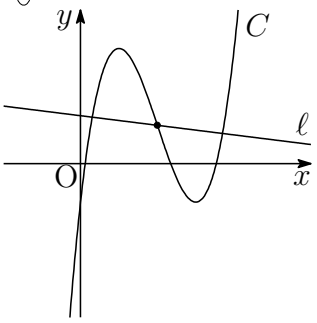
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ とし，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする．また，曲線 C 上の点 $(2,\ 1)$ を M とし，M を通る直線 ℓ と C が M 以外の 2 点 P，Q で交わっている．ただし，P の x 座標は Q の x 座標よりも小さいとする．C と線分 PM で囲まれた部分の面積を S_1，C と線分 QM で囲まれた部分の面積を S_2 とするとき，S_1 と S_2 の大小関係を求めよ．

花子：まずは，曲線 C と直線 ℓ を図に表してみるとよさそうだね．
太郎：関数 $f(x)$ の増減表をつくれば，曲線 C と直線 ℓ を図に表すことができるね．

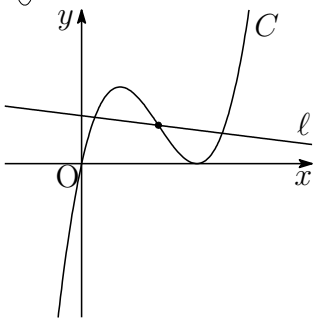
(1) 曲線 C と直線 ℓ を図に表したものは［ア］である．

［ア］については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ．

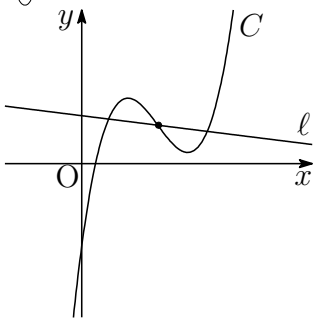
⓪



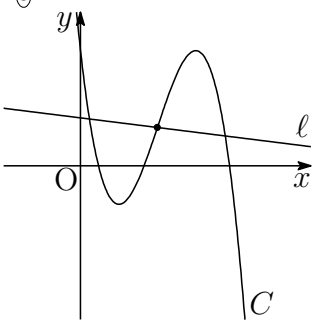
①



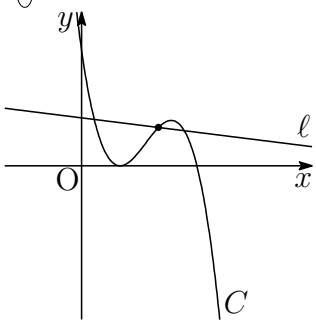
②



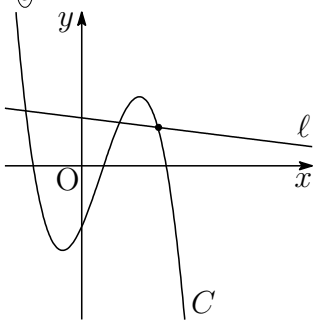
③



④



⑤



太郎：あとは．直線ℓの式を求め，点Pと点Qのx座標を求めれば，S_1，S_2も求めることができそうだね．直線ℓの傾きをmとすると，ℓは点Mを通るので，ℓの式は$y=m(x-2)+1$で表すことができるね．

花子：でも，$y=x^3-6x^2+9x-1$と$y=m(x-2)+1$を連立して解くことで点Pと点Qのx座標を求め，さらにS_1，S_2を求めようとすると計算が大変になるね．点Mを原点Oに移すような平行移動によって，曲線Cと直線ℓを平行移動させれば，計算量を減らせるんじゃないかな．

(2) まず，直線Cと直線ℓが点M以外の2点P，Qで交わるとき，mのとり得る値の範囲を求めよう．

$y=x^3-6x^2+9x-1$と$y=m(x-2)+1$からyを消去し，整理すると

$$\left(x-\boxed{\text{イ}}\right)\left(x^2-\boxed{\text{ウ}}x+\boxed{\text{エ}}-m\right)=0$$

となる．これより，mのとり得る値の範囲を求めると

$$m>\boxed{\text{オカ}}$$

である．

(3) そして，曲線Cを，点Mを原点Oに移すような平行移動によって移送させたあとの曲線の方程式を求めると

$$y=x^3-\boxed{\text{キ}}x$$

である．

太郎：直線 $y = x^3 - \boxed{\text{キ}}x$ と，直線 ℓ を平行移動させた直線の式を利用して，S_1 と S_2 をそれぞれ m を用いた式で表すことができたよ．
花子：これで S_1 と S_2 の関係もわかるね．

(4) 点 M を原点に移すような平行移動により，点 P，Q はそれぞれ P′, Q′ に移ったとする．点 P′ の x 座標は $-\sqrt{m+\boxed{\text{ク}}}$，点 Q の x 座標は $\sqrt{m+\boxed{\text{ケ}}}$ である．これより，S_1 を求めると

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\left(m+\boxed{\text{シ}}\right)^{\boxed{\text{ス}}}$$

であり，S_2 も同様に求めると，S_1 と S_2 の大小関係について，$\boxed{\text{セ}}$ ことがわかる．

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ m の値によらず，つねに $S_1 < S_2$ が成り立つ．
① m の値によらず，つねに $S_1 > S_2$ が成り立つ．
② m の値によらず，つねに $S_1 = S_2$ が成り立つ．
③ m の値によらず，S_1 と S_2 の大小関係は変化する．

(5) $g(x) = x^3 - \boxed{\text{キ}}x$ とおく．このとき

$$g(-x) = \boxed{\text{ソ}}$$

より，曲線 $y = g(x)$ は $\boxed{\text{タ}}$ であることがわかる．

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ $g(x)$　　① $-g(x)$　　② $-g(-x)$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ x 軸に関して対称　　① y 軸に関して対称　　② 原点に関して対称

(6) $m > \boxed{\text{オカ}}$ とする．曲線 C 上に，接線の傾きが直線 ℓ の傾きと等しくなるような 2 点 A，B をとり，点 A における接線 ℓ_1 と C との交点を C，点 B における接線 ℓ_2 と C との交点を D とする．ただし，A の x 座標は B の x 座標よりも小さいとする．また，ℓ_2 上の x 座標が 2 である点を E とする．このとき

$$\frac{\text{EB}}{\text{DE}} = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり，△ADE と四角形 ADBC の面積比 $\dfrac{\triangle\text{ADE}}{\text{四角形 ADBC}}$ を求めると，直線 ℓ の傾きによらず，つねに

$$\frac{\triangle\text{ADE}}{\text{四角形 ADBC}} = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である．

解答

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ より

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

(2) $f'(x)=3x^2-12x+9$ より　$f''(x)=6x-12$

変曲点の x 座標は，$f''(x)=0$ を解いて　$x=2$

$$f(2)=1,\quad f'(2)=-3,\quad f''(2)=0$$

$f(x)$ を $x=2$ を極として展開すると (31 ページの**定理 2** を参照)

$$\begin{aligned} f(x)&=f(2)+f'(2)(x-2)+(x-2)^3\\ &=1-3(x-2)+(x-2)^3 \end{aligned}$$

$y=f(x)$ と $y=m(x-2)+1$ から y を消去すると

$$1-3(x-2)+(x-2)^3=m(x-2)+1$$

したがって　$(x-2)\{(x-2)^2-3-m\}=0$

$$(x-\mathbf{2})(x^2-\mathbf{4}x+\mathbf{1}-m)=0\quad\cdots(\text{イ})\sim(\text{エ})$$

M 以外に 2 点 P，Q で交わるとき

$$-3-m<0\quad\text{すなわち}\quad m>\mathbf{-3}\quad\cdots(\text{オ})(\text{カ})$$

(3) $y=f(2)+f'(2)(x-2)+(x-2)^3$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に $-f(2)$ だけ平行移動した曲線の方程式は

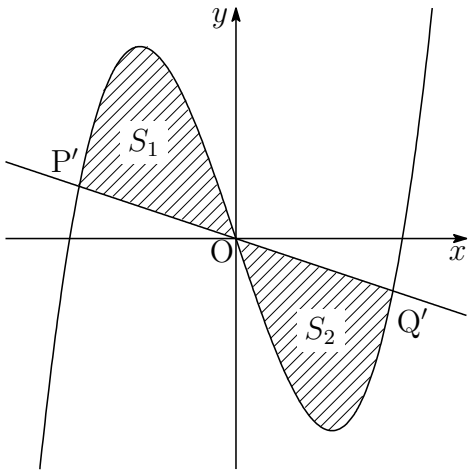
$$y=f'(2)x+x^3\quad\text{すなわち}\quad y=x^3-\mathbf{3}x\quad\cdots(\text{キ})$$

(4) $y = x^3 - 3x$ と $y = mx$ の 2 式から y を消去すると

$$x^3 - 3x = mx \quad \text{ゆえに} \quad x = 0,\ \pm\sqrt{m+3}$$

したがって

点 P′ の x 座標は $-\sqrt{m+\mathbf{3}}$，点 Q′ の x 座標は $\sqrt{m+\mathbf{3}}$ $\cdots$(ク)(ケ)



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\sqrt{m+3}}^{0} \{(x^3 - 3x) - mx\}\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(m+3)x^2 \right]_{-\sqrt{m+3}}^{0} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}(m+\mathbf{3})^{\mathbf{2}} \quad \cdots(\text{コ}) \sim (\text{シ}) \end{aligned}$$

曲線および直線が原点に関して対称であることから

m の値によらず，つねに $S_1 = S_2$が成り立つ $\cdots$(セ) ②

(5) $g(x) = x^3 - 3x$ とおくと

$$g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = \boldsymbol{-g(x)} \quad \cdots(\text{ソ})\ ①$$

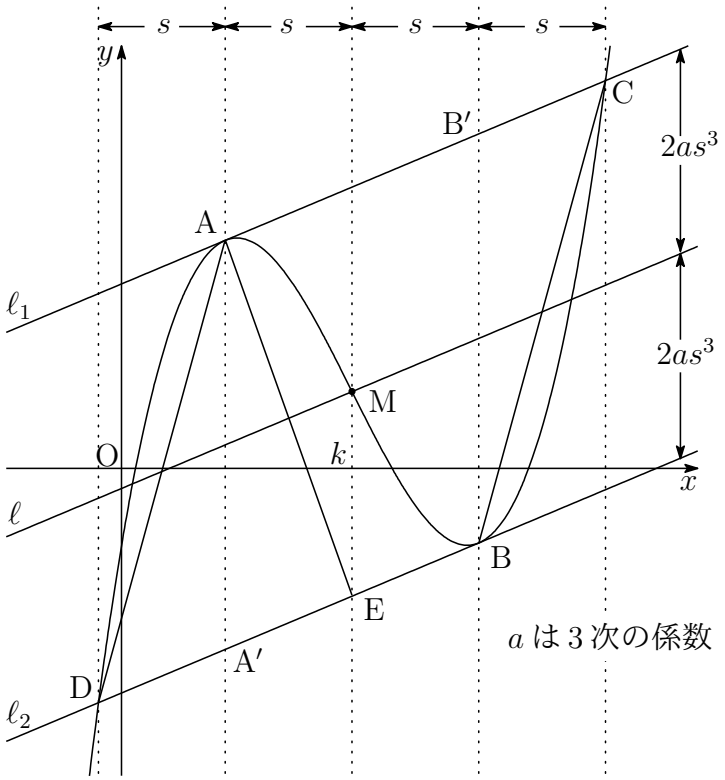
よって，曲線 $y = g(x)$ は**原点に関して対称**であることがわかる． $\cdots$(タ) ②

(6) (**3 次関数のグラフと接線**を参照)

$$\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \quad \cdots (\text{チ})(\text{ツ})$$

下の図から $(a=1,\ k=2)$

$$\frac{\triangle \mathrm{ADE}}{\text{四角形 ADBC}} = \frac{4as^4}{12as^4} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \quad \cdots (\text{テ})(\text{ト})$$



解説 3 次関数 $f(x)$ の 3 次の係数を a とし，変曲点の x 座標を k とし，$x=k$ を極として $f(x)$ を展開すると

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x-k) + a(x-k)^3, \quad f'(x) = f'(k) + 3a(x-k)^2$$

$\mathrm{A}(k-s,\ f(k-s))$，$\mathrm{B}(k+s,\ f(k+s))$ とすると

$$f'(k \pm s) = f'(k) + 3as^2,$$
$$f(k \pm s) = f(k) \pm \{f'(k)s + as^3\} \quad (\text{複号同順})$$

したがって

$$\ell_1 : y = \{f'(k) + 3a(x-k)^2\}(x-k) + f(k) + 2as^3$$
$$\ell : y = \{f'(k) + 3a(x-k)^2\}(x-k) + f(k)$$
$$\ell_2 : y = \{f'(k) + 3a(x-k)^2\}(x-k) + f(k) - 2as^3$$

第 4 問 太郎さんと花子さんは，数列の漸化式関する**問題 A**，**問題 B** について話している．

(1)

問題 A

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

太郎：授業では，等差数列，等比数列，階差数列や

$$A_{n+1} = xA_n + y \quad (x,\ y \text{ は定数で}, x \neq 0,\ 1) \quad \cdots (*)$$

の形をした漸化式を習ったけれど，右辺が分数式だから，そのままでは学習したことを使えないね．

花子：**問題 A** の右辺の分子は a_n の項だけだから，両辺の逆数をとったらどうだろう．

太郎：でも，$a_n = 0$ のときがあると逆数はとれないよ．

花子：$a_n = 0$ とならないことを証明できるよ．

任意の自然数 n について，$a_n \neq 0$ が成り立つことは，次のような**花子さんの証明の構想**により証明できる．

花子さんの証明の構想

$a_n > 0$ であることは，$a_n \neq 0$ であるための［ア］．

任意の自然数 n について $a_n > 0$ であることは，$n = k$ $(k \geqq 1)$ のときの成立を仮定して，$n = k + 1$ のときも成り立つことを示せば，［イ］により，証明できる．

［ア］の解答群

⓪ 必要条件であるが，十分ではない
① 十分条件であるが，必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要十分条件でも十分条件でもない

［イ］の解答群

⓪ 組立除法　　① 背理法
② 対偶証明法　　③ 数学的帰納法

数列 $\{p_n\}$ を $p_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定めると

$$p_{n+1} = \boxed{\text{ウ}}\, p_n + \boxed{\text{エ}}$$

であり，$(*)$ の形になる．このとき

$$p_{n+1} + \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}} \left(p_n + \boxed{\text{オ}} \right)$$

であるから，数列 $\left\{ p_n + \boxed{\text{オ}} \right\}$ は $\boxed{\text{キ}}$ ことがわかる．

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{コ}}}$$

である．

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ すべての項が同じ値をとる数列である
① 公差が 0 でない等差数列である
② 公比が 1 より大きい等比数列である
③ 公比が 1 より小さい等比数列である
④ 等差数列でも等比数列でもない

解答 (ア) ①　(イ) ③

花子さんの証明の構想

$a_n > 0$ であることは，$a_n \neq 0$ であるための**十分条件であるが，必要条件ではない**．

任意の自然数 n について $a_n > 0$ であることは，$n = k$ $(k \geqq 1)$ のときの成立を仮定して，$n = k+1$ のときも成り立つことを示せば，**数学的帰納法**により，証明できる．

証明　　$(*)$　$a_n > 0$

［1］$n = 1$ のとき，$a_1 = 1 > 0$ より，$(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{a_k + 2} > 0$$

よって，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．　　**証終**

数列 $\{p_n\}$ を $p_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定めると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{a_n} = 1 + \frac{2}{a_n} \quad \text{ゆえに } p_{n+1} = \mathbf{2}p_n + \mathbf{1} \quad \cdots(\text{ウ})(\text{エ})$$

であり，$(*)$ の形になる．このとき

$$p_{n+1} + \mathbf{1} = \mathbf{2}(p_n + 1) \quad \cdots(\text{オ})(\text{カ})$$

であるから，数列 $\{p_n + 1\}$ は**公比が 2 の等比数列であること**がわかる．(キ) ②

$p_1 = \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{1} = 1$ より

$$p_n + 1 = (p_1 + 1)\cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \text{ゆえに} \quad p_n = 2^n - 1$$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^n - \mathbf{1}} \quad \cdots(\text{ク}) \sim (\text{コ})$$

である．

別解 (分数漸化式を参照)

特性方程式 $x=\dfrac{x}{x+2}$ を解くと　$x=0,-1$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2},\quad a_{n+1}+1=\frac{2(a_n+1)}{a_n+2}$$

上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}}=\frac{2(a_n+1)}{a_n}$$

$\left\{\dfrac{a_n+1}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1+1}{a_1}=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{a_n+1}{a_n}=2\cdot 2^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{2^n-1}}$$

(2)

問題 B

次のように定められた数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = 3b_n + 10n - 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

太郎：これも $(*)$ の形ではないね.
花子：階差数列をとることで，$(*)$ の形にできないかな.
太郎：$(*)$ の式変形の考え方を応用できないか，考えてみるよ.

花子さんの方針

数列 $\{b_n\}$ の階差数列を，$q_n = b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定めると

$$q_{n+1} = \boxed{\text{サ}}\, q_n + \boxed{\text{シス}}$$

となり，数列 $\{q_n\}$ の一般項が

$$q_n = \boxed{\text{セソ}} \cdot \boxed{\text{タ}}^{n-1} - \boxed{\text{チ}}$$

となることを用いる.

太郎さんの方針

数列 $\{r_n\}$ を，$r_n = b_n + \boxed{\text{ツ}}\, n + \boxed{\text{テ}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定めると

$$r_{n+1} = 3r_n$$

となり，数列 $\{r_n\}$ は公比 3 の等比数列になることを用いる.

数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{ト}} \cdot \boxed{\text{ナ}}^{n-1} - \boxed{\text{ニ}}\, n - \boxed{\text{ヌ}}$$

である.

解答 花子さんの方針

数列 $\{b_n\}$ の階差数列を，$q_n = b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定めると

$$b_{n+1} = 3b_n + 10n - 3$$
$$b_{n+2} = 3b_{n+1} + 10(n+1) - 3$$

上の第 2 式から第 1 式の差をとると

$$b_{n+2} - b_{n+1} = 3(b_{n+1} - b_n) + 10$$
$$q_{n+1} = \mathbf{3}q_n + \mathbf{10} \quad \cdots (\text{サ}) \sim (\text{ス})$$
$$q_{n+1} + 5 = 3(q_n + 5)$$

$b_2 = 3b_1 + 10{\cdot}1 - 3 = 10$，$q_1 = b_2 - b_1 = 10 - 1 = 9$

$\{q_n + 5\}$ は初項 $q_1 + 5 = 14$，公比 3 の等比数列であるから

$$q_n + 5 = 14{\cdot}3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad q_n = \mathbf{14{\cdot}3}^{n-1} - \mathbf{5} \quad \cdots (\text{セ}) \sim (\text{チ})$$

$b_{n+1} - b_n = 14{\cdot}3^{n-1} - 5$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(14{\cdot}3^{k-1} - 5)$$
$$b_n - b_1 = \frac{14(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} - 5(n-1)$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$b_n = 7(3^{n-1} - 1) - 5(n-1) + 1 = 7{\cdot}3^{n-1} - 5n - 1$$

太郎さんの方針

漸化式

$$b_{n+1} = 3b_n + 10n - 3 \tag{A}$$

から，$f(n) = xn + y$ とおき ($x,\ y$ は定数)，

$$f(n+1) = 3f(n) + 10n - 3 \tag{B}$$

とすると

$$\begin{aligned} x(n+1) + y &= 3(xn + y) + 10n - 3 \\ xn + x + y &= (3x + 10)n + 3y - 3 \end{aligned}$$

上式は，n に関する恒等式であるから

$$x = 3x + 10, \quad x + y = 3y - 3 \quad \text{ゆえに} \quad x = -5,\ y = -1$$

したがって　$f(n) = -5n - 1$

(A)，(B) の辺々の差をとると

$$b_{n+1} - f(n+1) = 3\{b_n - f(n)\}$$

$r_n = b_n - f(n)$ とおくと　$r_n = b_n + \mathbf{5}n + \mathbf{1}$　$\cdots$(ツ)(テ)

$$r_{n+1} = 3r_n$$

となり，$\{r_n\}$ は初項 $r_1 = b_1 - f(1) = 7$，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n + 5n + 1 = 7 \cdot 3^{n-1}$$

よって　　$\boldsymbol{b_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 5n - 1}$　$\cdots$(ト) $\sim$ (ヌ)

(3) 次のように定められた数列 $\{c_n\}$ がある.

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{n^2 c_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めると

$$c_n = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}} \cdot \boxed{\text{ハ}}^{n-1} - n^{\boxed{\text{ヒ}}} - \boxed{\text{フ}}\, n - \boxed{\text{ヘ}}}$$

である.

解答 $c_1 > 0$，$c_k > 0$ のとき，漸化式より $c_{k+1} > 0$ となるから，数学的帰納法により，すべての自然数 n について，$c_n > 0$

与えられた漸化式より

$$\frac{1}{c_{n+1}} = \frac{2}{c_n} + n^2 \tag{A}$$

$f(n) = xn^2 + yn + z$ とおき ($x,\ y,\ z$ は定数)，

$$f(n+1) = 2f(n) + n^2 \tag{B}$$

とすると

$$x(n+1)^2 + y(n+1) + z = 2xn^2 + 2yn + 2z + n^2$$
$$xn^2 + (2x+y)n + x + y + z = (2x+1)n^2 + 2yn + 2z$$

上式は，n に関する恒等式であるから

$$x = 2x + 1, \quad 2x + y = 2y, \quad x + y + z = 2z$$

これを解いて　$x = -1,\ y = -2,\ z = -3$

したがって　$f(n) = -n^2 - 2n - 3$

(A)，(B) の辺々の差をとると

$$\frac{1}{c_{n+1}} - f(n+1) = 2\left\{\frac{1}{c_n} - f(n)\right\}$$

となり，$\left\{\dfrac{1}{c_n} - f(n)\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{c_1} - f(1) = 7$，公比 2 の等比数列であるから

$$\frac{1}{c_n} + n^2 + 2n + 3 = 7 \cdot 2^{n-1}$$

よって　　$\boldsymbol{c_n = \dfrac{1}{7 \cdot 2^{n-1} - n^2 - 2n - 3}}$　$\cdots$ (ネ) ～ (ヘ)

第 6 問 次の**定理**について考えよう.

定理

△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，辺 AB の中点を M とおくとき

$$\mathrm{OM}^2 - \mathrm{AM}^2 = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

が成り立つ.

(1) この**定理**は次のようにして証明できる.

証明の方針

M は辺 AB の中点であるので，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \boxed{\text{ア}}$$

と表せるから，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \boxed{\text{イ}}$$

と表せる.
$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2$ を計算すると，**定理**が成り立つことを証明できる.

ア ，イ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ $\vec{a}+\vec{b}$	① $\vec{a}-\vec{b}$	② $\vec{b}-\vec{a}$
③ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$	④ $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$	⑤ $\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$
⑥ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$	⑦ $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{3}$	⑧ $\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{3}$

解答 M は辺 AB の中点であるので，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2} = \frac{\boldsymbol{\vec{a} + \vec{b}}}{\boldsymbol{2}} \quad \cdots(\text{ア})\ ③$$

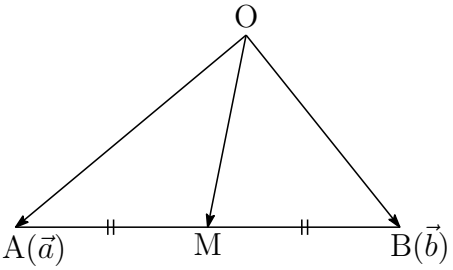
と表せるから，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2} = \frac{\boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}}}{\boldsymbol{2}} \quad \cdots(\text{イ})\ ⑤$$

と表せる．

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2$ を計算すると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2 &= \left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2 - \left|\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2) - \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{b} \end{aligned}$$



別解 M は辺 AB の中点であるから

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ \vec{b} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= (\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{AM}^2 \end{aligned}$$

(2) △OAB が鋭角三角形の場合に，**定理**の図形的な意味について考えてみよう．

点 B から直線 OA に垂線 BH を下すと，OH = ［ウ］であるから，内積の定義より

(a) $\vec{a}\cdot\vec{b} =$ ［エ］

$\angle \mathrm{BHA} = \dfrac{\pi}{2}$ より，AB を直径とする △ABH の外接円を C とすると，辺 AB の中点 M は円 C の中心になり

$$\mathrm{OM}^2 - \mathrm{AM}^2 = (\mathrm{OM} - \mathrm{AM})(\mathrm{OM} + \mathrm{AM})$$

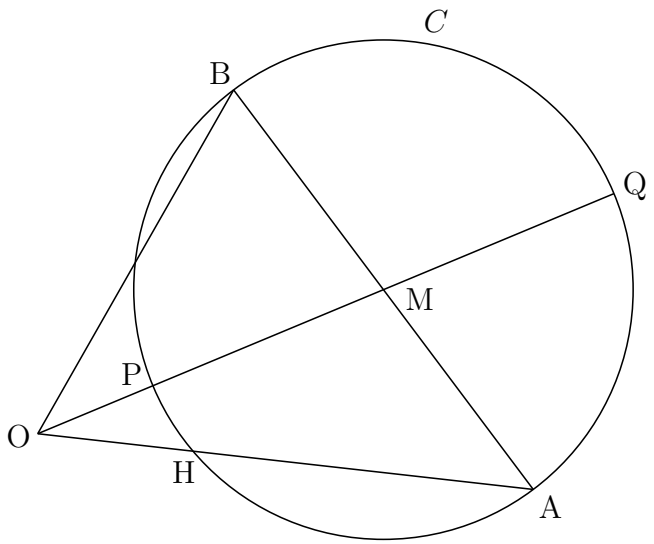
より，直線 OM と円 C の交点のうち，右の図のように O に近い方を P，遠い方を Q とおくと

(b) $\mathrm{OM}^2 - \mathrm{AM}^2 =$ ［オ］

よって，**定理**より

(c) $\triangle \mathrm{OQA} \backsim$ ［カ］

が成り立つ．



ウ の解答群

⓪ $|\vec{a}|\cos\angle\mathrm{OAB}$　① $|\vec{a}|\cos\angle\mathrm{OBA}$　② $|\vec{a}|\cos\angle\mathrm{AOB}$

③ $|\vec{b}|\cos\angle\mathrm{OAB}$　④ $|\vec{b}|\cos\angle\mathrm{OBA}$　⑤ $|\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$

エ の解答群

⓪ OB·OH　① OB·BH　② OA·OH

③ OA·BH　④ OH·BH　⑤ BH·HA

オ の解答群

⓪ OP·OM　① OP·PM　② OM·OQ

③ OP·OQ　④ OQ·QM　⑤ PM·QM

カ の解答群

⓪ △OQB　① △OMH　② △OHP

③ △PQA　④ △PQB　⑤ △HBM

解答 下の図から

$$\mathrm{OH} = \mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB} = \boldsymbol{|\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}} \quad \cdots(\text{ウ})\ ⑤$$

内積の定義から

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH} \quad \cdots(\text{エ})\ ②$$

$\angle\mathrm{BHA} = \dfrac{\pi}{2}$ より，AB を直径とする △ABH の外接円を C とすると，辺 AB の中点 M は円 C の中心になり

$$\mathrm{OM}^2 - \mathrm{AM}^2 = (\mathrm{OM} - \mathrm{AM})(\mathrm{OM} + \mathrm{AM})$$

より，直線 OM と円 C の交点のうち，右の図のように O に近い方を P，遠い方を Q とおくと，$\mathrm{AM} = \mathrm{PM} = \mathrm{MQ}$ より

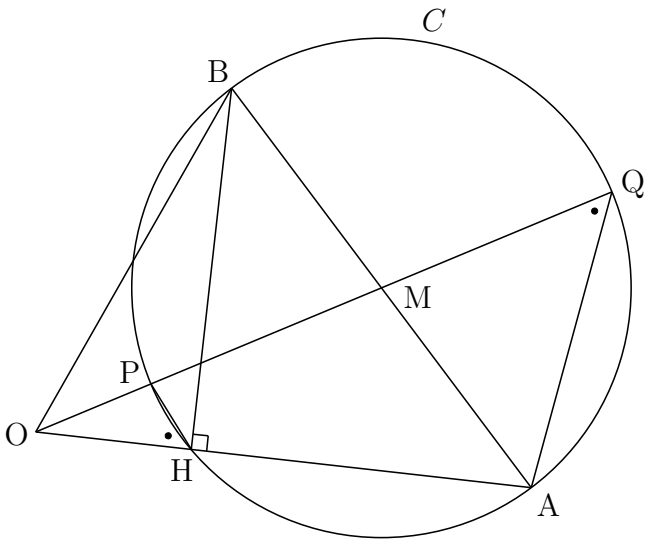
$$\mathrm{OM}^2 - \mathrm{AM}^2 = (\mathrm{OM} - \mathrm{PM})(\mathrm{OM} + \mathrm{MQ}) = \boldsymbol{\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}} \quad \cdots(\text{オ})\ ③$$

よって，**定理**より

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = \mathrm{OH}\cdot\mathrm{OA} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OQ} : \mathrm{OA} = \mathrm{OH} : \mathrm{OP}$$

また，$\angle\mathrm{QOA} = \angle\mathrm{HOP}$ であるから

$$\triangle\mathrm{OQA} \backsim \triangle\mathrm{OHP} \quad \cdots(\text{カ})\ ②$$



別解 四角形 PHAQ は円に内接するから　$\angle\mathrm{OHP} = \angle\mathrm{OQA}$

また，$\angle\mathrm{QOA} = \angle\mathrm{HOP}$ であるから　$\triangle\mathrm{OQA} \backsim \triangle\mathrm{OHP}$

(3) △OAB が $\dfrac{\pi}{2} < \angle \mathrm{AOB} < \pi$ の鈍角三角形の場合に，(2) の下線部 (a)〜(c) について考察すると

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\text{キ}}, \quad \mathrm{OM}^2 - \mathrm{AM}^2 = \boxed{\text{ク}}$$

であるから

$$\triangle \mathrm{OQA} \backsim \boxed{\text{ケ}}$$

が成り立つ．

キ

⓪ OB·OH	① OB·BH	② OA·OH
③ OA·BH	④ OH·BH	⑤ BH·HA
⑥ −OB·OH	⑦ −OB·BH	⑧ −OA·OH
⑨ −OA·BH	ⓐ −OH·BH	ⓑ −BH·HA

ク

⓪ OP·OM	① OP·PM	② OM·OQ
③ OP·OQ	④ OQ·QM	⑤ PM·QM
⑥ −OP·OM	⑦ −OP·PM	⑧ −OM·OQ
⑨ −OP·OQ	ⓐ −OQ·QM	ⓑ −PM·QM

ケ

⓪ △OQB	① △OMH	② △OHP
③ △PQA	④ △PQB	⑤ △HBM

解答 $\dfrac{\pi}{2} < \angle\mathrm{AOB} < \pi$ のとき，$\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB} = -\mathrm{OH}$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB} = \mathrm{OA}\cdot(-\mathrm{OH}) = \mathbf{-OA\cdot OH} \quad \cdots(\text{キ})\ ⑧$$

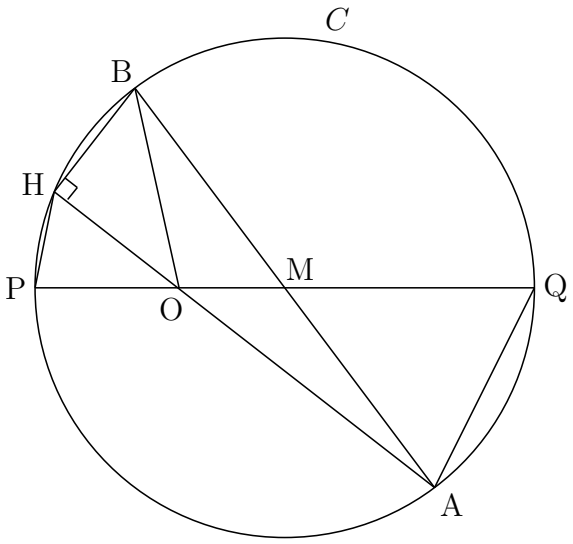
定理から

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \mathrm{OM}^2 - \mathrm{AM}^2\\ &= (\mathrm{OM}+\mathrm{AM})(\mathrm{OM}-\mathrm{AM})\\ &= (\mathrm{OM}+\mathrm{MQ})(\mathrm{OM}-\mathrm{PM})\\ &= \mathrm{OQ}\cdot(-\mathrm{OP}) = \mathbf{-OP\cdot OQ} \quad \cdots(\text{ク})\ ⑨\end{aligned}$$

$-\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH} = -\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$ より

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH} = \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{OQ} : \mathrm{OA} = \mathrm{OH} : \mathrm{OP}$$

また，$\angle\mathrm{AOQ} = \angle\mathrm{HOP}$ であるから　$\mathbf{\triangle OQA \backsim \triangle OHP}$　$\cdots(\text{ケ})$ ②



別解 $\angle\mathrm{HPQ} = \angle\mathrm{HAQ}$，$\angle\mathrm{AOQ} = \angle\mathrm{HOP}$ であるから　$\triangle\mathrm{OQA} \backsim \triangle\mathrm{OHP}$

第 7 問 楕円 $E : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ の焦点を F，F′ とする．F，F′ の座標は

$$\mathrm{F}\left(\boxed{\text{ア}},\ 0\right),\quad \mathrm{F}'\left(\boxed{\text{イウ}},\ 0\right)$$

である．

また，楕円 E 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における E の接線の方程式は

$$\frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{3} = 1$$

である．

(1) 楕円 E 上の点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ に対して

$$\mathrm{FP} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\quad \mathrm{PF}' = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である．

点 P における E の接線に垂直で，点 P を通る直線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ク}}\,x - \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

であり，この直線と x 軸の交点を A とすると

$$\mathrm{AF} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}},\quad \mathrm{AF}' = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．よって，直線 PA は $\angle \mathrm{F'PF}$ の二等分線であることがわかる．

(2) 点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$ $(0 < x_1 < 2,\ 0 < y_1 < \sqrt{3})$ を楕円 E 上の点とする．QF，QF′ の長さを x_1 を用いて表すと

$$\mathrm{QF} = \frac{\boxed{\text{ソ}} - x_1}{\boxed{\text{タ}}}, \quad \mathrm{QF'} = \frac{\boxed{\text{チ}} + x_1}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である．

ここで，点 Q における E の接線を ℓ とする．ℓ に垂直な点 Q を通る直線と，x 軸との交点を B とする．点 B の座標は $\left(\dfrac{x_1}{\boxed{\text{テ}}}\right)$ であるから，直線 QB は $\angle \mathrm{F'QF}$ の二等分線であることがわかる．

また，ℓ と x 軸が楕円 E 上にない交点 C をもつとき，$\dfrac{\mathrm{FC}}{\mathrm{FC'}} = \boxed{\text{ト}}$ が成り立つ．

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{3-x_1}{3+x_1}$	① $\dfrac{3+x_1}{3-x_1}$	② $\dfrac{4-x_1}{4+x_1}$	③ $\dfrac{4+x_1}{4-x_1}$
④ $\dfrac{12-x_1}{12+x_1}$	⑤ $\dfrac{12+x_1}{12-x_1}$	⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{4}$

(3) 点 $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$ $(-2 < x_2 < 0, -\sqrt{3}, -\sqrt{3} < y_2 < 0)$ を楕円 E 上の点とする．点 R における E の接線を m とする．m と x 軸が楕円 E 上になり交点 D をもつとき，$\dfrac{\mathrm{FD}}{\mathrm{F'D}} = \boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ．

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{3-x_2}{3+x_2}$	① $\dfrac{3+x_2}{3-x_2}$	② $\dfrac{4-x_2}{4+x_2}$	③ $\dfrac{4+x_2}{4-x_2}$
④ $\dfrac{12-x_2}{12+x_2}$	⑤ $\dfrac{12+x_2}{12-x_2}$	⑥ 2	⑦ 4

解答 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ の焦点 F, F′ の x 座標は

$$x=\pm\sqrt{4-3}=\pm1 \quad \text{よって} \quad \mathbf{F(1,\ 0),\ F'(-1,\ 0)} \quad \cdots(\text{ア})\sim(\text{ウ})$$

(1) $\mathbf{PF=\dfrac{3}{2}}$ であるから，PF + PF′ = 2·2 より

$$\mathrm{PF'}=4-\mathrm{PF}=4-\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{5}{2}} \quad \cdots(\text{エ})\sim(\text{キ})$$

E 上の点 P における接線の方程式は

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad y=-\frac{1}{2}x+2$$

これと垂直で点 P を通る直線は

$$y=2(x-1)+\frac{3}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2x-\frac{1}{2}} \quad \cdots(\text{ク})\sim(\text{コ})$$

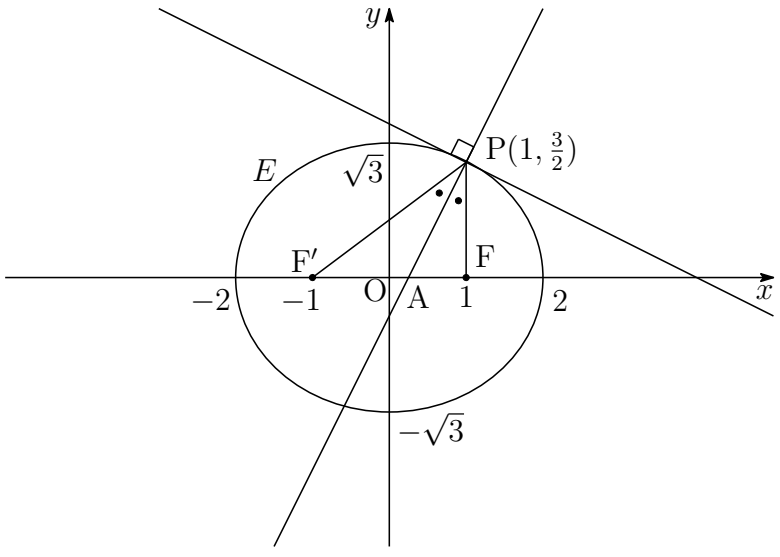
この直線の x 軸との交点 A の x 座標は

$$2x-\frac{1}{2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{1}{4}$$

したがって

$$\mathrm{AF}=1-\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{3}{4}},\quad \mathrm{AF'}=\frac{1}{4}-(-1)=\mathbf{\frac{5}{4}} \quad \cdots(\text{サ})\sim(\text{セ})$$

PF : PF′ = AF : AF′ であるから，直線 PA は ∠F′PF の二等分である．



(2) $a=2$，$b=\sqrt{3}$ より，離心率 e は　$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{1}{2}$

準線の方程式は　$x=\pm\dfrac{a}{e}=\pm 4$

Q から準線 $x=4$，$x=-4$ にそれぞれ垂線 QH，QH′ を引くと

$$\mathrm{QF}=e\mathrm{QH}=\frac{1}{2}(4-x_1)=\frac{\boldsymbol{4-x_1}}{\boldsymbol{2}}\quad\cdots(\text{ソ})\sim(\text{タ})$$

$$\mathrm{QF'}=e\mathrm{QH'}=\frac{1}{2}\{x_1-(-4)\}=\frac{\boldsymbol{4+x_1}}{\boldsymbol{2}}\quad\cdots(\text{チ})\sim(\text{ツ})$$

$\ell:\dfrac{x_1x}{4}+\dfrac{y_1y}{3}=1$ に垂直で点 Q を通る直線の方程式は

$$-\frac{y_1}{3}(x-x_1)+\frac{x_1}{4}(y-y_1)=0$$

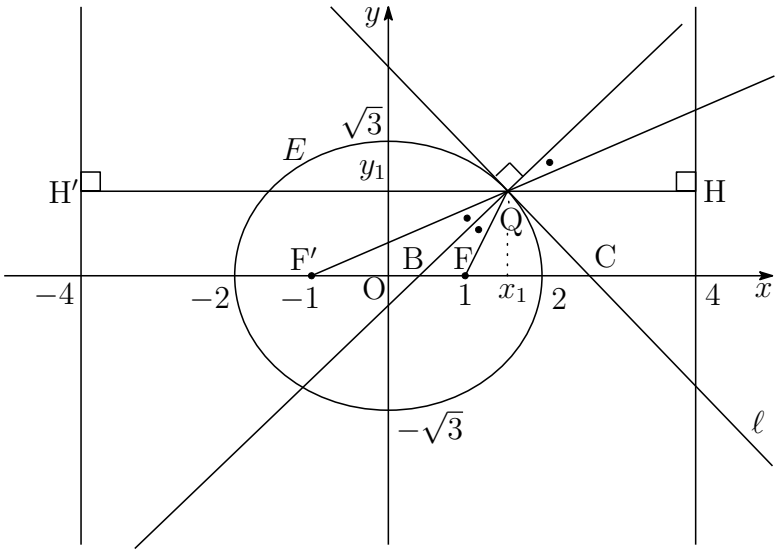
点 B の x 座標は，上式に $y=0$ を代入して

$$-\frac{y_1}{3}(x-x_1)-\frac{x_1y_1}{4}=0\quad\text{ゆえに}\quad x=\frac{x_1}{4}$$

よって　$\mathrm{B}\left(\dfrac{\boldsymbol{x_1}}{\boldsymbol{4}},\ \boldsymbol{0}\right)$　$\cdots(\text{テ})$

点 C は線分 FF′ を QF : QF′ の比に外分する点であるから

$$\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{F'C}}=\frac{\mathrm{QF}}{\mathrm{QF'}}=\frac{\boldsymbol{4-x_1}}{\boldsymbol{4+x_1}}\quad\cdots(\text{ト})②$$



(3) D から準線 $x=4$，$x=-4$ にそれぞれ垂線 DT，DT′ を引くと

$$\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{F'D}}=\frac{e\mathrm{DT}}{e\mathrm{DT'}}=\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{DT'}}=\frac{4-x_2}{x_2-(-4)}=\frac{\boldsymbol{4-x_2}}{\boldsymbol{4+x_2}}\quad\cdots(\text{ナ})②$$

参照 233 ページを参照.

11.2.7　第 7 回

第 7 問

〔1〕座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について考える．

(1) 点 P と点 $(1,\ 0)$ との距離と，点 P と y 軸との距離が等しいとき，点 P の軌跡は［ア］である．

［ア］の解答欄

⓪　直線　　①　放物線　　②　双曲線　　③　楕円

(2) 点 P と点 $(1,\ 0)$ との距離を a，点 P と y 軸との距離を b とする．a と b の距離の比が一定，つまり，定数 k を用いて

$$a = kb \qquad (*)$$

と表されるような点 P の軌跡を C とする．ただし，$k > 0$ とする．

(i) $(*)$ を，x，y を用いて表すと，［イ］となる．

［イ］の解答群

⓪　$(1-k^2)x^2 - x + y^2 - 1 = 0$
①　$(1-k^2)x^2 - x + y^2 + 1 = 0$
②　$(1-k^2)x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0$
③　$(1-k^2)x^2 - 2x + y^2 + 1 = 0$
④　$(k^2-1)x^2 - x + y^2 - 1 = 0$
⑤　$(k^2-1)x^2 - x + y^2 + 1 = 0$
⑥　$(k^2-1)x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0$
⑦　$(k^2-1)x^2 - 2x + y^2 + 1 = 0$

(ii) $k = \dfrac{1}{2}$ のとき，C は頂点が

$$\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right),\quad \left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$$

(iii) C は，$k > 1$ のとき $\boxed{\text{ク}}$，$k = 1$ のとき $\boxed{\text{ケ}}$，$0 < k < 1$ のとき $\boxed{\text{コ}}$ を表す.

$\boxed{\text{ケ}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ 二つの焦点の x 座標が等しい楕円
① 二つの焦点の y 座標が等しい楕円
② 準線が x 軸または x 軸に平行な直線の放物線
③ 準線が y 軸または y 軸に平行な直線の放物線
④ 二つの焦点の x 座標が等しい双曲線
⑤ 二つの焦点の y 座標が等しい双曲線
⑥ 直線

解答　(1) 定義から　**放物線**　$\cdots$(ア)

なお，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と焦点 $(1,\ 0)$ の距離は　$\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から y 軸までの距離は　$|x|$

これらの距離が等しいから

$$(x-1)^2+y^2=|x|^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

別解　焦点 $(1,\ 0)$，準線 y 軸，頂点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ の**放物線**

焦点は頂点を x 軸方向に $p\left(=\frac{1}{2}\right)$ だけ平行移動した位置にあるから

$$y^2=4\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y^2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

参照　2 次曲線の性質

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と焦点 $(1,\ 0)$ 距離 a は　$a=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から y 軸までの距離 b は　$b=|x|$

a と b の比が一定，つまり，定数 k を用いて

$$a=kb \quad (k \text{ は離心率}) \qquad (*)$$

と表されるような点 P の軌跡 C とする．$(k>0)$

(i) $a^2=k^2b^2$ より，$(*)$ を，x，y を用いて表すと

$$(x-1)^2+y^2=k^2|x|^2$$

すなわち　$\boldsymbol{(1-k^2)x^2-2x+y^2+1=0}$　$\cdots$(イ) ③

(ii) $k=\dfrac{1}{2}$ のとき，C 上の点 P から，y 軸 (準線) に垂線 PH を引くと

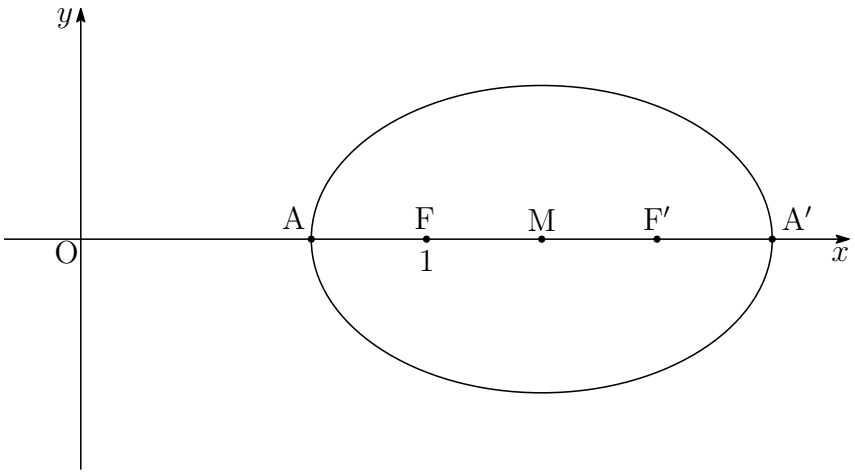
$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\quad (\text{楕円})$$

C と x 軸との交点が C の頂点であるから，OF を 2 : 1 に内分，外分する点をそれぞれ A, A′ とすると

$$\mathrm{A}\left(\frac{2}{3},\ 0\right),\ \mathrm{A}'(2,\ 0)$$

C の中心 M は直軸 AA′ の中点であるから　$\mathrm{M}\left(\dfrac{4}{3}\right)$

F′ は F と M に関して対称であるから　$\mathrm{F}'\left(\dfrac{5}{3},\ 0\right)$



(iii) C は，2 焦点の y 座標は等しく ($k\neq 1$)，準線は y 軸に平行である．
$k>1$ のとき双曲線，$k=1$ のとき放物線，$0<k<1$ のとき楕円．
よって　(ク) ⑤　(ケ) ③　(コ) ①

〔2〕 0 でない複素数 z，w は，$w=\dfrac{1}{z}$ を満たすとする．

(1) $z=1+i$ のとき

$$w=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}-\frac{i}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

(2) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ と表すとき，w は r，θ を用いて表すと，$w=$ $\boxed{\text{セ}}$ となる．

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$　　① $r(-\cos\theta+i\sin\theta)$

② $r(\cos\theta-i\sin\theta)$　　③ $-r(\cos\theta+i\sin\theta)$

④ $\dfrac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)$　　⑤ $\dfrac{1}{r}(-\cos\theta+i\sin\theta)$

⑥ $\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$　　⑦ $-\dfrac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)$

(3) s，t を異なる正の実数とする．$z=si$ のとき，$w=$ $\boxed{\text{ソ}}$ であるから，点 z が虚軸上を si から点 ti まで動くとき，点 w は点 $\boxed{\text{ソ}}$ から $\boxed{\text{タ}}$ まで動く．

$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ $\dfrac{1}{s}$　　① $\dfrac{1}{t}$　　② $-\dfrac{1}{s}$　　③ $-\dfrac{1}{t}$

④ $\dfrac{i}{s}$　　⑤ $\dfrac{i}{t}$　　⑥ $-\dfrac{i}{s}$　　⑦ $-\dfrac{i}{t}$

(4) α を 0 でない複素数とする．点 z が点 0 と α を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるとき，点 w は点 $\boxed{\text{チ}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ツ}}$ の円周上にある．

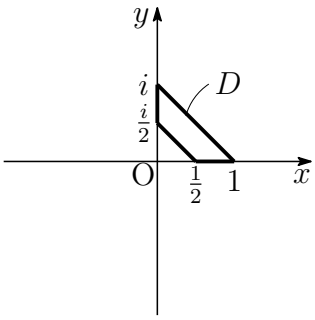
$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ α　　① $-\alpha$　　② $\dfrac{1}{\alpha}$　　③ $-\dfrac{1}{\alpha}$

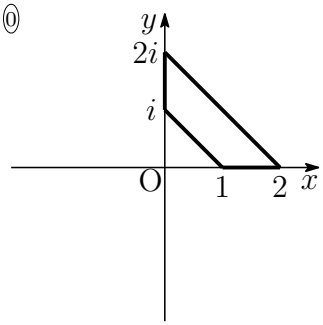
④ $\overline{\alpha}$　　⑤ $-\overline{\alpha}$　　⑥ $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$　　⑦ $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$

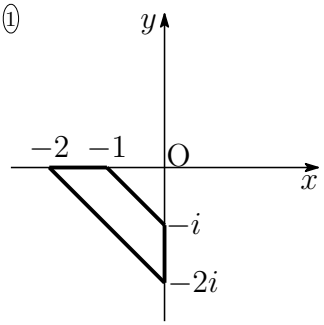
⑧ $|\alpha|$　　⑨ $\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|$

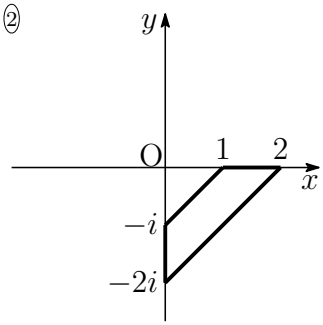
(5) 点 z が次のような台形 D の周上をうごくとき，点 w の軌跡は［テ］の太線部のようになる．

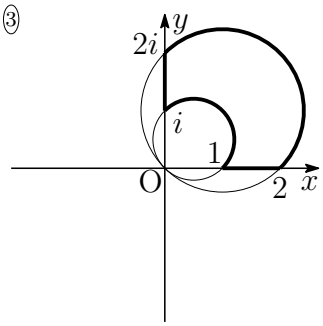


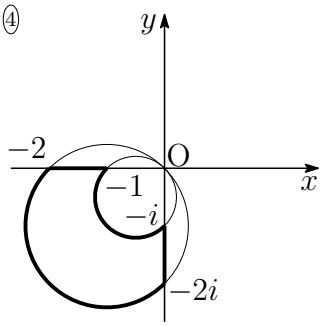
［テ］については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑧ のうちから一つ選べ．

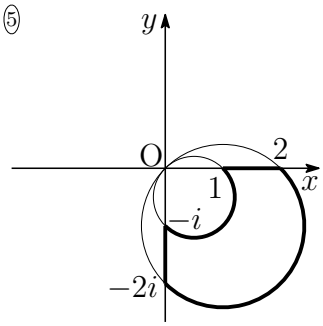
⓪


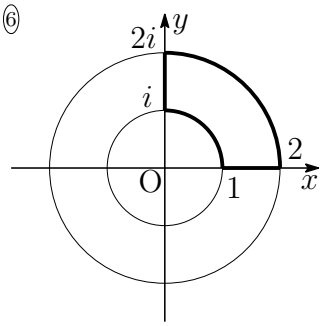
①


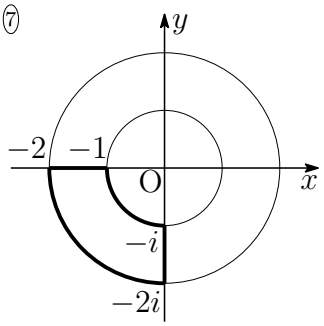
②


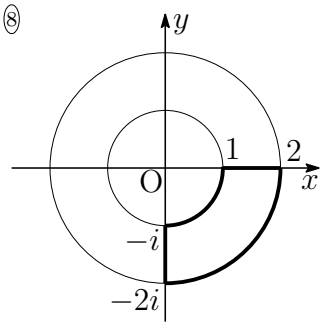
③


④


⑤


⑥


⑦


⑧


解答　(1)　$z=1+i$ のとき

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}\quad\cdots(\text{サ})\sim(\text{ス})$$

(2)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\boldsymbol{\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)}\quad\cdots(\text{セ})\ ⑥$$

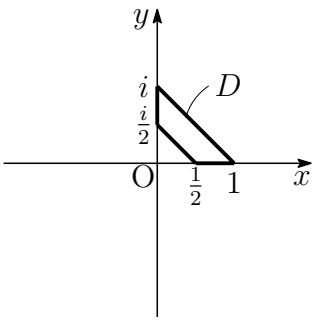
(3)　点 z が si から ti まで動くとき，点 w は

$$\frac{1}{si}\text{から}\frac{1}{ti}\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{-\frac{i}{s}\ \text{から}-\frac{i}{t}}\quad\cdots(\text{ソ})(\text{タ})$$

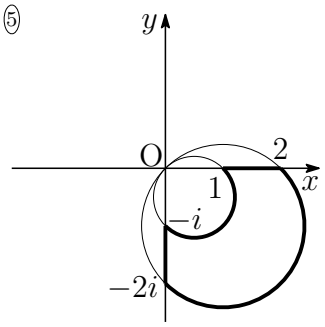
まで動く．

(4)　**定理 9** から，点 z が点 0 と α を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるとき，点 w は点 $\boldsymbol{\frac{1}{\alpha}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\left|\frac{1}{\alpha}\right|}$ の円周上にある．

(5)　(3),(4) の結論に注意すると，点 w の軌跡は



⑤



11.2.8　第 8 回

第 6 問 △ABC の面積 S について，ベクトルの成分表示との対応を考えよう．

(1) S は $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ と表される．

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　① $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

② $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　③ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

④ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2$　　⑤ $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

⑥ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2$　　⑦ $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ b),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x,\ y)$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{イ}}x+\boxed{\text{ウ}}y$$

であるから，S は $a,\ b,\ x,\ y$ を用いて

$$S=\frac{1}{2}\left|\boxed{\text{エ}}x-\boxed{\text{オ}}y\right|$$

と表される．

$\boxed{\text{イ}}$〜$\boxed{\text{オ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ a　　① b

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (a,\ b,\ c)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x,\ y,\ z)$ のとき，S は $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ を用いて

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\boxed{\text{カ}}z - \boxed{\text{キ}}y\right)^2 + \left(\boxed{\text{ク}}x - \boxed{\text{ケ}}z\right)^2 + \left(\boxed{\text{コ}}y - \boxed{\text{サ}}x\right)^2}$$

と表される．

$\boxed{\text{カ}}$〜$\boxed{\text{サ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ a　　① b　　② c

また

$$\overrightarrow{m} = \left(\boxed{\text{カ}}z - \boxed{\text{キ}}y,\ \boxed{\text{ク}}x - \boxed{\text{ケ}}z,\ \boxed{\text{コ}}y - \boxed{\text{サ}}x\right)$$

とおくと

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boxed{\text{シ}}, \quad \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{\text{ス}}$$

が成り立つ．

(4) O を原点とする座標空間内の四面体 OABC について，A(1, 1, 1)，B(3, 0, 1)，C(2, 2, 0) とする．このとき，四面体 OABC の体積を求めよう．

△ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{セソ}}}{\boxed{タ}}$ であるから，O から 3 点 A，B，C を通る平面に下した垂線 OH の長さを考える．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトル $\vec{n}$ として

$$\vec{n} = \left(1,\ \boxed{チ},\ \boxed{ツ}\right)$$

が求められる．また，H は 3 点 A，B，C を通る平面上の点であるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left(\boxed{テ} - s - t\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表される．

この $\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を用いて，垂線 OH の長さを求めると

$$\mathrm{OH} = \frac{\boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナニ}}}{\boxed{ヌ}}$$

となる．よって，四面体 OABC の体積は $\boxed{ネ}$ である．

解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を θ とすると

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta$$

$0 < \theta < \pi$ より，$\sin\theta > 0$ であるから，$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}} \quad \cdots(\text{ア})\ ⑥ \end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (a,\ b)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x,\ y)$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y \quad \cdots(\text{イ})(\text{ウ})$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(bx-ay)^2} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{b}x - \boldsymbol{a}y| \quad \cdots(\text{エ})(\text{オ}) \end{aligned}$$

(3) (外積を参照)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (a,\ b,\ c)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x,\ y,\ z)$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (bz - cy,\ cx - az,\ ay - bx)$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(\boldsymbol{b}z - \boldsymbol{c}y)^2 + (\boldsymbol{c}x - \boldsymbol{a}z)^2 + (\boldsymbol{a}y - \boldsymbol{b}x)^2} \quad \cdots(\text{カ}) \sim (\text{サ}) \end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{0}, \quad \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{0} \quad \cdots(\text{シ})(\text{ス})$$

(4) A(1, 1, 1)，B(3, 0, 1)，C(2, 2, 0) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, -1, 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1, 1, -1)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1, \mathbf{2}, \mathbf{3}) = \vec{n}$　$\cdots$(チ)(ツ)

△ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{14}}}{\mathbf{2}} \quad \cdots (\text{セ}) \sim (\text{タ})$$

H は 3 点 A，B，C を通る平面上の点であるから，実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (\mathbf{1} - s - t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots (\text{テ})$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1, 1, 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (3, 0, 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1, 2, -3)$$

四面体の体積を V とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (2, 2, 0)$ より

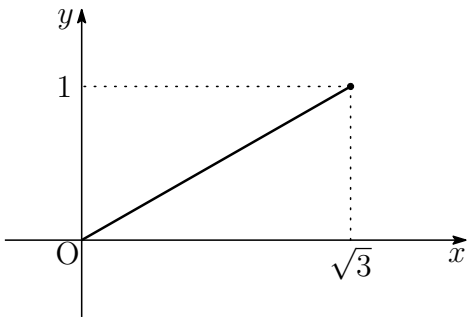
$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \mathbf{1} \quad \cdots (\text{ネ})$$

$V = \dfrac{1}{3}S \cdot \mathrm{OH}$ より

$$\mathrm{OH} = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 1}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \frac{\boldsymbol{3\sqrt{14}}}{\mathbf{7}} \quad \cdots (\text{ト}) \sim (\text{ヌ})$$

第 7 問 xy 平面上の図形を，原点を中心に回転した図形を表す方程式の求め方について考えてみよう．

(1) 点 $(\sqrt{3},\ 1)$ を，原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転移動した点の座標は［ア］である．



［ア］の解答群

⓪ $\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right),\ \cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$　① $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right),\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

② $\left(\sin\dfrac{5}{12}\pi,\ \cos\dfrac{5}{12}\pi\right)$　③ $\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi,\ \sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$

④ $\left(2\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right),\ 2\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$　⑤ $\left(2\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right),\ 2\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

⑥ $\left(2\sin\dfrac{5}{12}\pi,\ 2\cos\dfrac{5}{12}\pi\right)$　⑦ $\left(2\cos\dfrac{5}{12}\pi,\ 2\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$

(2) x，y，X，Y を実数とする．点 $(x,\ y)$ を，原点を中心に θ だけ回転移動した点を $(X,\ Y)$ とする．

座標平面上の点 $(x,\ y)$，$(X,\ Y)$ を，それぞれ複素数平面上で $x+yi$，$X+Yi$ が表す点に対応させることで

$$X+Yi=\boxed{\text{イ}}\times(x+yi)$$

が成り立つ．

このことから，X，Y をそれぞれ x，y，θ を用いて表すと

$$X=\boxed{\text{ウ}},\quad Y=\boxed{\text{エ}}$$

となる．

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ $\sin\theta+i\cos\theta$	① $\sin\theta-i\cos\theta$
② $\cos\theta+i\sin\theta$	③ $\cos\theta-i\sin\theta$
④ $-\sin\theta+i\cos\theta$	⑤ $-\sin\theta-i\cos\theta$
⑥ $-\cos\theta+i\sin\theta$	⑦ $-\cos\theta-i\sin\theta$

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $x\sin\theta+y\cos\theta$	① $x\sin\theta-y\cos\theta$
② $x\cos\theta+y\sin\theta$	③ $x\cos\theta-y\sin\theta$
④ $-x\sin\theta+y\cos\theta$	⑤ $-x\sin\theta-y\cos\theta$
⑥ $-x\cos\theta+y\sin\theta$	⑦ $-x\cos\theta-y\sin\theta$

(3) (2) の結果を用いると，xy 平面上にある図形を，原点を中心に θ だけ回転移動した図形を表す方程式を求めるには，移動後の図形の方程式において，x を［オ］，y を［カ］にそれぞれ置き換えればよいことがわかる．

［オ］，［カ］の解答群

⓪ $x\sin\theta + y\cos\theta$　　① $x\sin\theta - y\cos\theta$
② $x\cos\theta + y\sin\theta$　　③ $x\cos\theta - y\sin\theta$
④ $-x\sin\theta + y\cos\theta$　　⑤ $-x\sin\theta - y\cos\theta$
⑥ $-x\cos\theta + y\sin\theta$　　⑦ $-x\cos\theta - y\sin\theta$

よって，楕円 $x^2 + 2y^2 = 1$ を，原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転移動した楕円の方程式は

$$\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}x^2 - \frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}xy + \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}y^2 = 1$$

である．

(4) 長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にある楕円を，原点を中心に $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ だけ回転移動した楕円の方程式が $4x^2 - 2\sqrt{6}xy + 5y^2 = 1$ であるとき

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{\boxed{スセ}}}{\boxed{ソ}}$$

であり，楕円 F の方程式は

$$\boxed{タ}x^2 + \boxed{チ}y^2 = 1$$

である．

解答　(1) 点 $(\sqrt{3},\ 1)$ を複素数平面上にとると

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

これを原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転移動させると

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

よって，求める点の座標は

$$\left(\mathbf{2\cos\frac{5}{12}\pi,\ 2\sin\frac{5}{12}\pi}\right)\quad\cdots(\text{ア})\ ⑦$$

(2) 点 $x+yi$ を原点を中心に θ だけ回転移動した点が $X+Yi$ であるから

$$\begin{aligned}X+Yi&=\mathbf{(\cos\theta+i\sin\theta)}(x+yi)\quad\cdots(\text{イ})\ ②\\&=(x\cos\theta-y\sin\theta)+i(x\sin\theta+y\cos\theta)\end{aligned}$$

よって　$X=x\cos\theta-y\sin\theta,\quad Y=x\sin\theta+y\cos\theta$　$\cdots(\text{ウ})$ ③ , (エ) ⓪

(3) (2) の結果から，点 $(x,\ y)$ を原点を中心に $-\theta$ だけ回転移動した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$(*)\begin{cases} X = x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ Y = x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta) = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

例えば，移動前の方程式が $f(x,\ y) = 0$ であるとき，点 $(X,\ Y)$ がこの方程式を満たすから

$$f(X,\ Y) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta) = 0$$

移動前の図形の方程式において，x を $\boldsymbol{x\cos\theta + y\sin\theta}$，$y$ を $\boldsymbol{-x\sin\theta + y\cos\theta}$ にそれぞれ置き換えればよい．　$\cdots$(オ) ② (カ) ④

楕円 $x^2 + 2y^2 = 1$ を，原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転移動した楕円の方程式は，x を $x\cos\dfrac{\pi}{3} + y\sin\dfrac{\pi}{3}$，$y$ を $-x\sin\dfrac{\pi}{3} + y\cos\dfrac{\pi}{3}$ に置き換えればよい．

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 = 1$$

整理すると　$\boldsymbol{\dfrac{7}{4}x^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}xy + \dfrac{5}{4}y^2 = 1}$　$\cdots$(キ) $\sim$ (シ)

(4) $4x^2 - 2\sqrt{6}xy + 5y^2 = 1$ を**定理 10** に適用すると，

$$a = 4,\ 2b = -2\sqrt{6},\ c = 5$$

2 次方程式 $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$ を解いて　$\lambda = 2,\ 7$

$\tan 2\theta = \dfrac{-2\sqrt{6}}{4-5} = 2\sqrt{6}$ より　$\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = 2\sqrt{6}$

$$\sqrt{6}\tan^2\theta + \tan\theta - \sqrt{6} = 0$$
$$(\sqrt{3}\tan\theta - \sqrt{2})(\sqrt{2}\tan\theta + \sqrt{3}) = 0$$

θ の値の範囲に注意して

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{5}} \quad \cdots(\text{ス}) \sim (\text{ソ})$$

$a - c = 4 - 5 < 0$ より $\alpha - \beta < 0$ であるから　$\alpha = 2,\ \beta = 7$

よって，F の方程式は　$\boldsymbol{2x^2 + 7y^2 = 1}$　$\cdots$(タ)(チ)