

令和6年度 大分大学2次試験前期日程 (数学問題)

理工・経済・教育・医学部 令和6年2月25日

- 理工学部 [1] [2] [3] [4] 数I・II・III・A・B (100分)
- 経済学部 [1] [2] [3] 数I・II・A・B (80分)
- 教育学部 [2] [3] [5] 数I・II・A・B (80分)
- 医学部 [1] [3] [4] 数I・II・III・A・B (80分)

[1] 数列 $\{a_n\}$ は, $a_1 = 2$, $a_{n+1} - 2a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たし, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする.

- (1) 一般項 a_n を n を用いて表しなさい.
- (2) $S_n^2 + 4S_n + 4 = 2^{10}$ を満たす n の値を求めなさい.
- (3) $\sum_{k=1}^n S_k = 2S_n - 10$ を満たす n の値を求めなさい.

[2] n を2以上の自然数とする. 2つの曲線

$$C_1 : y = (x-1)^2, \quad C_2 : y = \frac{1}{n}x^2$$

について, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_n とする.

- (1) 実数 α, β について, $A = \beta - \alpha$ とおく. 次の定積分を A を用いて表しなさい.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx$$

- (2) S_n を n を用いて表しなさい.
- (3) 不等式 $\left| n\sqrt{n} S_n - \frac{4}{3} \right| < \frac{1}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めなさい.

3 サイコロが2個あり、ひとつは3面が赤く、3面が黒く塗られており、もうひとつは2面が赤く、4面が黒く塗られている．これら2個のサイコロを使って次のゲームを行う．なお、2個のサイコロを同時に1回投げることを「試行」と呼ぶことにする．

- 試行を最大3回繰り返す．ただし、1回目または2回目の試行で2個とも赤い面が出れば、以降の試行は行わずゲームを終了する．
- 各試行で出た赤い面の個数の合計をゲームの得点とする．

- (1) 1回の試行で赤い面がちょうど1個出る確率を求めなさい．
- (2) 2回以下の試行でゲームが終了する確率を求めなさい．
- (3) 起こり得るゲームの得点とその確率をすべて求めなさい．

4 xy 平面の曲線

$$C : x = 3 \cos^3 \theta, \quad y = 3 \sin^3 \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

上の点 P における接線と、 x 軸、 y 軸との交点をそれぞれ Q, R とする．

- (1) 点 P の座標を $(3 \cos^3 \theta, 3 \sin^3 \theta)$ とするとき、2点 Q, R の座標を θ を用いてそれぞれ表しなさい．
- (2) 点 P が C 上を動くとき、線分 QR を 1 : 2 に内分する点 S の軌跡を求め、図示しなさい．
- (3) (2) で得られた軌跡と x 軸、 y 軸で囲まれた図形を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めなさい．
- (4) 曲線 C の $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ に対応する部分の長さを求めなさい．

5 以下の各問いに答えなさい.

(1) $0 \leq x \leq 3$ における 2 次関数 $y = x^2 - 2x + c$ の最大値が 1 であるとき, 定数 c の値を求めなさい.

(2) $\triangle ABC$ において

$$\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{7} = \frac{\sin C}{8}$$

が成り立つとき, $\cos B$ の値を求めなさい.

(3) $x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2}$ のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ と $x^3 + \frac{1}{x^3}$ の値をそれぞれ求めなさい.

(4) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ のとき, 方程式

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

を解きなさい.

(5) $\log_{10} 2 = 0.3010$ とするとき, 5^{10} の桁数を求めなさい.

解答例

1 (1) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$ より $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

(2) (1) の結果から

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2 \quad (*)$$

$$S_n^2 + 4S_n + 4 = 2^{10} \text{ より } (S_n + 2)^2 = 2^{10}$$

$$S_n + 2 = 2^{n+1} > 0 \text{ に注意して } 2^{n+1} = 2^5 \text{ よって } n = 4$$

(3) (*) を $\sum_{k=1}^n S_k = 2S_n - 10$ に代入すると

$$\sum_{k=1}^n (2^{k+1} - 2) = 2(2^{n+1} - 2) - 10$$

$$\text{したがって } \frac{2^2(2^n - 1)}{2 - 1} - 2n = 2^2(2^n - 1) - 10$$

$$\text{整理すると } -2n = -10 \text{ よって } n = 5$$



2 (1) $A = \beta - \alpha$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)\{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(x - \alpha)\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(x - \alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \\
 &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = -\frac{1}{6}A^3
 \end{aligned}$$

(2) C_1, C_2 の方程式から

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n}x^2 - (x - 1)^2 &= -\frac{1}{n}\{n(x - 1)^2 - x^2\} \\
 &= -\frac{1}{n}\{(n - 1)x^2 - 2nx + n\}
 \end{aligned}$$

2 次方程式 $(n - 1)x^2 - 2nx + n = 0$ の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\alpha = \frac{n - \sqrt{n}}{n - 1}, \quad \beta = \frac{n + \sqrt{n}}{n - 1} \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = \frac{2\sqrt{n}}{n - 1}$$

$(n - 1)x^2 - 2nx + n = (n - 1)(x - \alpha)(x - \beta)$ であるから

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n}x^2 - (x - 1)^2 &= -\frac{1}{n}\{n(x - 1)^2 - x^2\} \\
 &= -\frac{n - 1}{n}(x - \alpha)(x - \beta)
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 S_n &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{1}{n}x^2 - (x - 1)^2 \right\} dx \\
 &= -\frac{n - 1}{n} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\
 &= \frac{n - 1}{6n}(\beta - \alpha)^3 = \frac{n - 1}{6n} \left(\frac{2\sqrt{n}}{n - 1} \right)^3 = \frac{4\sqrt{n}}{3(n - 1)^2}
 \end{aligned}$$

(3) (2) の結果を $\left| n\sqrt{n} S_n - \frac{4}{3} \right| < \frac{1}{3}$ に代入すると

$$\left| \frac{4n^2}{3(n-1)^2} - \frac{4}{3} \right| < \frac{1}{3}$$

$$\frac{n}{n-1} > 1 \text{ であるから} \quad \frac{4n^2}{3(n-1)^2} - \frac{4}{3} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{n^2}{(n-1)^2} < \frac{5}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{n-1} < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$n \geq 2 \text{ であるから} \quad 2n < \sqrt{5}(n-1)$$

$$(\sqrt{5}-2)n > \sqrt{5} \quad \text{ゆえに} \quad n > 5 + 2\sqrt{5} = 5 + \sqrt{20}$$

上式を満たす最小の自然数 n は $n = 5 + 5 = \mathbf{10}$



- 3** (1) 3面が赤, 3面が黒く塗られているサイコロをP, 1面が赤, 4面が黒く塗られているサイコロをQとし, P, Qの赤い面が出る確率をそれぞれ p, q とすると

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

1回の試行で赤い面がちょうど1回出る確率は

$$p(1-q) + (1-p)q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

- (2) 1回目で終了する確率は pq

2回目で終了する確率は $(1-pq) \cdot pq$

2回以下の試行で終了する確率は, $pq = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ より

$$pq + (1-pq)pq = pq(2-pq) = \frac{1}{6} \left(2 - \frac{1}{6} \right) = \frac{11}{36}$$

- (3) 1回の試行で得点が0, 1, 2である確率をそれぞれ α, β, γ とすると

$$\alpha = (1-p)(1-q) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad \gamma = pq = \frac{1}{6},$$

$$\beta = 1 - (\alpha + \gamma) = \frac{1}{2}$$

ゲームの得点が0点となる確率は $\alpha^3 = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$

ゲームの得点が1点となる確率は

$$\alpha\alpha\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha\alpha = 3\alpha^2\beta = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

ゲームの得点が2点となる確率は

$$\begin{aligned} & \gamma + \alpha\gamma + \alpha\alpha\gamma + \alpha\beta\beta + \beta\alpha\beta + \beta\beta\alpha \\ &= \gamma(1 + \alpha + \alpha^2) + 3\alpha\beta^2 \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{53}{108} \end{aligned}$$

ゲームの得点が3点となる確率は

$$\begin{aligned} \beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma + \beta\beta\beta &= \beta\gamma(1 + 2\alpha) + \beta^3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{8} = \frac{19}{72} \end{aligned}$$

ゲームの得点が4点となる確率は $\beta\beta\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$



- 4 (1) $x = 3 \cos^3 \theta$, $y = 3 \sin^3 \theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = -9 \cos^2 \theta \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 9 \sin^2 \theta \cos \theta \quad (*)$$

したがって $\left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta} \right) = 9 \sin \theta \cos \theta (-\sin \theta, \cos \theta)$

$\vec{v} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ とし, C 上の $P(3 \cos^3 \theta, 3 \sin^3 \theta)$ における接線を ℓ とする. ℓ 上の $T(x, y)$ について, $\vec{v} // \vec{PT}$ であるから

$$(x - \cos^3 \theta) \sin \theta + (y - \sin^3 \theta) \cos \theta = 0$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\sin \theta \neq 0$, $\cos \theta \neq 0$ に注意して整理すると

$$x \sin \theta + y \cos \theta = 3 \sin \theta \cos \theta \quad \text{ゆえに} \quad \ell: \frac{x}{3 \cos \theta} + \frac{y}{3 \sin \theta} = 1$$

よって $Q(3 \cos \theta, 0)$, $R(0, 3 \sin \theta)$

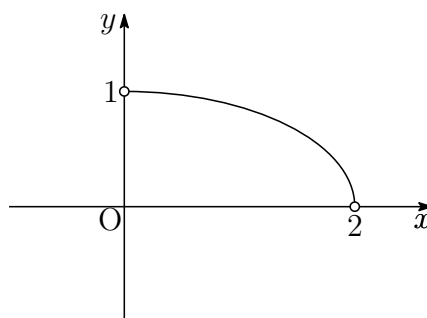
- (2) 線分 QR を $1:2$ 内分する点 S は

$$\vec{OS} = \frac{2\vec{OQ} + \vec{OR}}{3} = (2 \cos \theta, \sin \theta)$$

$x = 2 \cos \theta$, $y = \sin \theta$ とすると $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0)$$

よって, 点 S の軌跡は楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の第 1 象限の部分を表す.



(2) で求めた方程式から $x^2 = 4(1 - y^2)$ ($0 \leq y \leq 1$)

よって、求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = 4 \int_0^1 (1 - y^2) dy = 4 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

よって $V = \frac{8}{3}\pi$

(3) (*) から $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} &= 9\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ &= 9 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

よって、求める曲線の部分の長さは

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{9}{2} \sin 2\theta d\theta \\ &= -\frac{9}{4} \left[\cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

■

- 5** (1) $y = (x - 1)^2 + c - 1$ より $(0 \leq x \leq 3)$, $x = 3$ で最大値 1 をとるから

$$c + 3 = 1 \quad \text{よって} \quad c = -2$$

- (2) $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ とすると, 正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\text{等式} \frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{7} = \frac{\sin C}{8} \text{ より } a : b : c = 5 : 7 : 8$$

定数 k を用いて, $a = 5k$, $b = 7k$, $c = 8k$ を余弦定理に代入すると

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(8k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 5k} = \frac{1}{2}$$

- (3) $x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2}$ より

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\ &= (1 + \sqrt{2})^2 - 2 = 1 + 2\sqrt{2}, \\ x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) \\ &= (1 + \sqrt{2}) \left\{(1 + 2\sqrt{2}) - 1\right\} \\ &= (1 + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

- (4) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$ より $(0 \leq x < \frac{\pi}{2})$

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{2}{3}\pi \text{ より } x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \text{よって} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

- (5) $\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$ より

$$\log_{10} 5^{10} = 10 \log_{10} 5 = 10 \times 0.6990 = 6.990$$

$$6 < \log_{10} 5^{10} < 7 \text{ であるから } 10^6 < 5^{10} < 10^7 \quad \text{よって } 5^{10} \text{ は } 7 \text{ 桁} \quad \blacksquare$$