

# 2 次曲線の準線・焦点・頂点・曲率中心 — 2 次曲線の中心は定義関数の特異点 —

2-S Haruta Maezaki

2024 年 2 月 10 日

## 1 平面曲線の曲率中心

座標平面上の曲線  $C$  が, 媒介変数  $s$  を用いて

$$x = f(s), \quad y = g(s)$$

で表されているとき,  $C$  上の 3 点  $(t < u < v)$

$$P(f(t), g(t)), Q(f(u), g(u)), R(f(v), g(v))$$

を通る円を  $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 - r^2 = 0$  とし,

$$h(s) = \{f(s) - c_1\}^2 + \{g(s) - c_2\}^2 - r^2$$

とおくと,  $h(t) = h(u) = h(v) = 0$  である.

$h(t) = h(u) = 0$  から, ロル (Rolle) の定理により

$$h'(t_1) = 0 \quad (t < t_1 < u)$$

を満たす  $t_1$  が存在し. 同様に  $h(u) = h(v) = 0$  から

$$h'(t_2) = 0 \quad (u < t_2 < v)$$

を満たす  $t_2$  が存在する.

さらに  $h'(t_1) = h'(t_2) = 0$  にロルの定理から

$$h''(t_3) = 0 \quad (t_1 < t_3 < t_2)$$

を満たす  $t_3$  が存在する.  $Q, R$  が  $P$  に限りなく近づくとき,  $u \rightarrow t, v \rightarrow t$  となり, 上の諸式から

$$h(t) = 0, \quad h'(t) = 0, \quad h''(t) = 0$$

が成立する.

$$h(s) = \{f(s) - c_1\}^2 + \{g(s) - c_2\}^2 - r^2 \text{ から}$$

$$h'(s) = 2\{f(s) - c_1\}f'(s) + 2\{g(s) - c_2\}g'(s),$$

$$h''(s) = 2f'(s)^2 + 2\{f(s) - c_1\}f''(s) + 2g'(s)^2 + 2\{g(s) - c_2\}g''(s)$$

$h'(t) = 0, h''(t) = 0$  であるから

$$f'(t)\{c_1 - f(t)\} + g'(t)\{c_2 - g(t)\} = 0$$

$$f''(t)\{c_1 - f(t)\} + g''(t)\{c_2 - g(t)\} = f'(t)^2 + g'(t)^2$$

$f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t) \neq 0$  のとき, 前の 2 式から

$$c_1 - f(t) = -\frac{g'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}$$

$$c_2 - g(t) = \frac{f'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}$$

上式を  $h(t) = 0$  に適用すると, 次式を得る.

$$r = \frac{\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)|}$$

これまでに求めた

$$c_1 = f(t) - \frac{g'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)} \quad (1)$$

$$c_2 = g(t) + \frac{f'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)} \quad (2)$$

$$r = \frac{\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)|} \quad (3)$$

について, 点  $(c_1, c_2)$  を  $C$  上の点  $P(f(t), g(t))$  における曲率中心といい,  $r$  は曲率円 (接触円) の半径という. また, 点  $(c_1, c_2)$  の表す軌跡を縮閉線という.

## 2 曲率

$C$  上の 2 点  $P(f(t), g(t)), Q(f(u), g(u))$  を結ぶ弧長を  $s$  とし,  $u \rightarrow t$  とすることにより, 次式が成立する

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}$$

$C$  上の点  $P$  における接ベクトル  $(f'(t), g'(t))$  の  $x$  軸の正の向きとなす角 (偏角) を  $\theta$  とすると

$$\tan \theta = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$t$  を変数とし,  $\tan \theta = \frac{g'(t)}{f'(t)}$  を  $t$  で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{f'(t)^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = \frac{f'(t)^2 + g'(t)^2}{f'(t)^2} \text{ より}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2}$$

曲率  $\kappa$  は弧長  $s$  に対する偏角  $\theta$  の変化率として定義される.

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}} \\ &= \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

また,  $\frac{1}{\kappa}$  を曲率半径といい, その絶対値は, 曲率円の半径と等しい.  $f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t) = 0$  のとき, 曲率半径は定義されない.

### 3 法線群の包絡線

$C$  上の 2 点  $P(f(t), g(t))$ ,  $Q(f(u), g(u))$  における法線はそれぞれ

$$\begin{aligned} f'(t)\{x - f(t)\} + g'(t)\{y - g(t)\} &= 0 \\ f'(u)\{x - f(u)\} + g'(u)\{y - g(u)\} &= 0 \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$\begin{aligned} \{f'(u) - f'(t)\}x + \{g'(u) - g'(t)\}y \\ = \{f'(u)f(u) - f'(t)f(t)\} + \{g'(u)g(u) - g'(t)g(t)\} \end{aligned}$$

両辺を  $u - t$  で割って,  $u \rightarrow t$  とすると

$$f''(t)x + g''(t)y = f''(t)f(t) + f'(t)^2 + g''(t)g(t) + g'(t)^2$$

整理すると

$$f''(t)\{x - f(t)\} + g''(t)\{y - g(t)\} = f'(t)^2 + g'(t)^2$$

上式と  $P$  における接線

$$f'(t)\{x - f(t)\} + g'(t)\{y - g(t)\} = 0$$

を連立すると, 次の法線群の包絡線を得る.

$$\begin{aligned} x &= f(t) - \frac{g'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)} \\ y &= g(t) + \frac{f'(t)\{f'(t)^2 + g'(t)^2\}}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)} \end{aligned}$$

これは先に述べた縮閉線と一致する.

### 4 曲線 $y = g(x)$ の曲率と曲率中心

曲率  $\kappa$  および曲率中心  $(c_1, c_2)$  は

$$\kappa = \frac{g''(x)}{\{1 + g'(x)^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

$$c_1 = x - \frac{g'(x)\{1 + g'(x)^2\}}{g''(x)} \quad (5)$$

$$c_2 = g(x) + \frac{1 + g'(x)^2}{g''(x)} \quad (6)$$

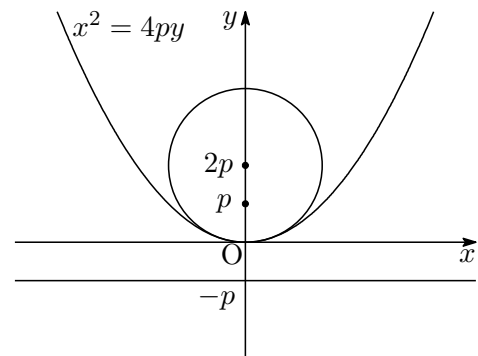
$\kappa$  が極値をとる点を頂点という. とくに,  $g(x)$  が 2 次関数のとき,  $g'(x) = 0$  となる点が頂点である.

### 5 放物線 $x^2 = 4py$ の曲率中心

放物線  $x^2 = 4py$  の頂点は,  $g(x) = \frac{x^2}{4p}$  より,  $g'(x) = 0$  を解いて,  $(0, 0)$  となる.  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 0$ ,  $g''(0) = \frac{1}{2p}$  より, この点における曲率  $\kappa$  および曲率中心  $(c_1, c_2)$  は

$$\kappa = \frac{1}{2p} \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 2p$$

放物線  $x^2 = 4py$  の頂点における曲率中心, 焦点, 頂点, 準線が等間隔に並んでいる.



### 6 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の曲率中心

$a > b$  のとき,  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$  とすると曲率  $\kappa$  および曲率中心  $(c_1, c_2)$  は

$$\kappa = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$c_1 = a \cos \theta - \frac{b \cos \theta \cdot (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)}{ab}$$

$$c_2 = b \sin \theta - \frac{a \sin \theta \cdot (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)}{ab}$$

すなわち

$$c_1 = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \theta, \quad c_2 = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \theta$$

楕円の縮閉線は、アステロイド

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \right)^{\frac{2}{3}}$$

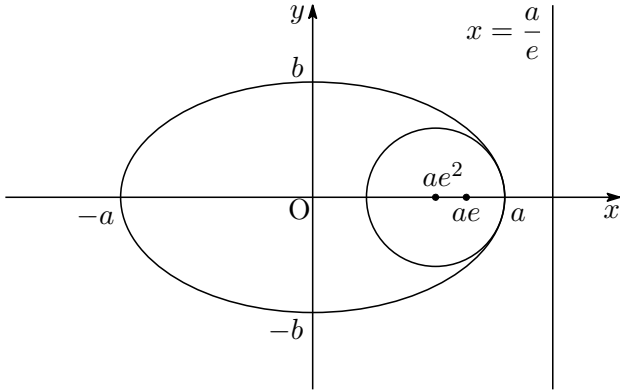
を  $x$  軸をもとに  $y$  軸方向に  $\frac{a}{b}$  だけ拡大したものである。

$a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta = (a^2 - b^2) \sin^2 \theta + b^2$  より、 $\kappa$  は点  $(\pm a, 0)$  で極大、点  $(0, \pm b)$  で極小となる。したがって、これらの 4 点が楕円の頂点である。

例えば、頂点  $(a, 0)$  における  $(\theta = 0)$  曲率  $\kappa$  および曲率中心  $(c_1, c_2)$  は、( $e$  は離心率)

$$\kappa = \frac{a}{b^2}, \quad c_1 = \frac{a^2 - b^2}{a} = ae^2, \quad c_2 = 0$$

楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  の頂点  $(a, 0)$  における曲率中心、焦点、頂点、準線が  $x$  軸上で等比点列をしている。



## 7 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の曲率中心

$$x = f(\theta) = \frac{a}{\cos \theta}, \quad y = g(\theta) = \frac{b}{\tan \theta} \quad \text{とおくと}$$

$$f'(\theta) = \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta}, \quad g'(\theta) = \frac{b}{\cos^2 \theta},$$

$$f''(\theta) = \frac{a(\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta)}{\cos^3 \theta}, \quad g''(\theta) = \frac{2b \sin \theta}{\cos^3 \theta},$$

$$f'(\theta)g''(\theta) - f''(\theta)g'(\theta) = -\frac{ab}{\cos^3 \theta},$$

$$\begin{aligned} f'(\theta)^2 + g'(\theta)^2 &= \left( \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right)^2 + \left( \frac{b}{\cos^2 \theta} \right)^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2}{\cos^4 \theta} - \frac{a^2}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$-\frac{ab}{\cos^3 \theta} = -\frac{\operatorname{sgn}(\cos \theta)ab}{(\cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{に注意すると}$$

$$\kappa = \frac{f'(\theta)g''(\theta) - f''(\theta)g'(\theta)}{\{f'(\theta)^2 + g'(\theta)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\operatorname{sgn}(\cos \theta)ab}{\left( \frac{a^2 + b^2}{\cos^2 \theta} - a^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$c_1 = \frac{a}{\cos \theta} - \frac{\frac{b}{\cos^2 \theta} \left( \frac{a^2 + b^2}{\cos^4 \theta} - \frac{a^2}{\cos^2 \theta} \right)}{-\frac{ab}{\cos^3 \theta}}$$

$$c_2 = b \tan \theta + \frac{\frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta} \left( \frac{a^2 + b^2}{\cos^4 \theta} - \frac{a^2}{\cos^2 \theta} \right)}{-\frac{ab}{\cos^3 \theta}}$$

すなわち

$$c_1 = \frac{a^2 + b^2}{a \cos^3 \theta}, \quad c_2 = -\frac{a^2 + b^2}{b} \tan^3 \theta$$

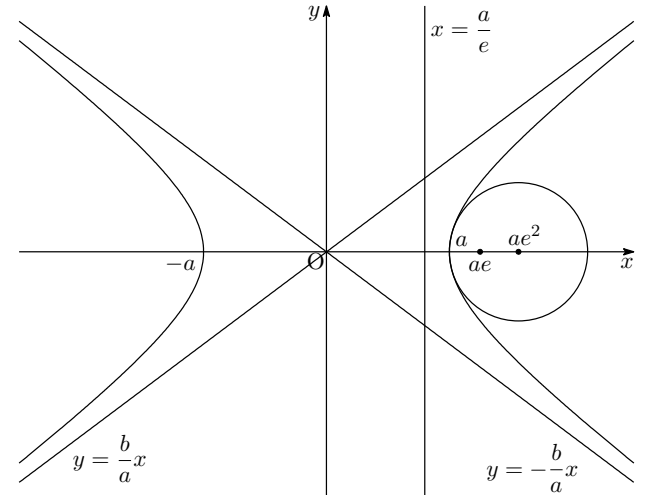
$$\kappa = -\frac{\operatorname{sgn}(\cos \theta)ab}{\left( \frac{a^2 + b^2}{\cos^2 \theta} - a^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{より、} \kappa \text{ は、点 } (\pm a, 0) \text{ で}$$

極値をとり、これらの 2 点が双曲線の頂点である。

例えば、頂点  $(a, 0)$  における  $(\theta = 0)$  曲率  $\kappa$  および曲率中心  $(c_1, c_2)$  は ( $e$  は離心率)

$$\kappa = -\frac{a}{b^2}, \quad c_1 = \frac{a^2 + b^2}{a} = ae^2, \quad c_2 = 0$$

双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  の頂点  $(a, 0)$  における曲率中心、焦点、頂点、準線が  $x$  軸上で等比点列をしている。



## 8 曲線 $f(x, y) = 0$ の曲率

$f(x, y)$  の偏微分を

$$f_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y), \quad f_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} f(x, y)$$

と表記する ( $\alpha, \beta = x, y$ ).

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

とし,  $f(x, y) = 0$  を  $x$  で微分すると

$$f_x + f_y y' = 0 \quad (7)$$

これを  $x$  で微分すると

$$f_{xx} + f_{xy} y' + (f_{yx} + f_{yy} y') y' + f_y y'' = 0$$

整理すると

$$f_{xx} + 2f_{xy} y' + f_{yy} (y')^2 + f_y y'' = 0 \quad (8)$$

(7), (8) から

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} \quad (9)$$

$$y'' = \frac{-f_{yy} f_x^2 + 2f_{xy} f_x f_y - f_{xx} f_y^2}{f_y^3} \quad (10)$$

(9), (10) を (4), (5), (6) に代入して整理すると

$$\kappa = \operatorname{sgn}(f_y) \frac{-f_{yy} f_x^2 + 2f_{xy} f_x f_y - f_{xx} f_y^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (11)$$

$$c_1 = x - \frac{f_x (f_x^2 + f_y^2)}{-f_{yy} f_x^2 + 2f_{xy} f_x f_y - f_{xx} f_y^2}$$

$$c_2 = y - \frac{f_y (f_x^2 + f_y^2)}{-f_{yy} f_x^2 + 2f_{xy} f_x f_y - f_{xx} f_y^2}$$

$f(x, y) = 0$  と  $-f(x, y) = 0$  は一致するから, (11) の  $\operatorname{sgn}(f_y)$  の符号には本質的な違いはない.

$$\begin{aligned} D &= -f_{yy} f_x^2 + 2f_{xy} f_x f_y - f_{xx} f_y^2 \\ &= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

とおくと

$$\kappa = \frac{\operatorname{sgn}(f_y) D}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (13)$$

とくに, 2次曲線  $f(x, y) = 0$  について

$$f(x, y) = \frac{1}{2} a x^2 + b x y + \frac{1}{2} c y^2 + p x + q y + \frac{r}{2} \quad (14)$$

とすると

$$2f(x, y) = x f_x + y f_y + p x + q y + r = 0$$

に注意して

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a & b & f_x \\ b & c & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & f_x - a x - b y \\ b & c & f_y - b x - c y \\ f_x & f_y & -x f_x - y f_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ f_x & f_y & p x + q y + r \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

(13), (15) から, 2次曲線  $f(x, y) = 0$  の頂点は, 曲線上で  $f_x^2 + f_y^2$  が極値をとる点である.

## 9 補題

**補題 1** 対称行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  の固有ベクトルは直交する. ただし,  $A \neq kE$  とする.

**証明**  $A$  の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0 \quad (16)$$

この方程式の判別式は

$$\begin{aligned} &\{-(a + c)\}^2 - 4 \cdot 1 (ac - b^2) \\ &= (a - c)^2 + 4b^2 > 0 \end{aligned}$$

ゆえに、異なる2つの固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  に対する固有ベクトルをそれぞれ  $u_1, u_2$  とする。ここで、内積  $u_1 \cdot u_2$  は行列の積  ${}^t u_1 u_2$  であることに留意する。

$$\begin{aligned}(Au_1) \cdot u_2 &= {}^t(Au_1)u_2 = {}^t u_1 {}^t A u_2 \\ &= {}^t u_1 A u_2 = u_1 \cdot (A u_2)\end{aligned}$$

$Au_1 = \lambda_1 u_1, Au_2 = \lambda_2 u_2$  であるから

$$(\lambda_1 u_1) \cdot u_2 = u_1 \cdot (\lambda_2 u_2)$$

すなわち  $(\lambda_1 - \lambda_2)u_1 \cdot u_2 = 0$

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$  であるから

$$u_1 \cdot u_2 = 0 \quad \text{よって} \quad u_1 \perp u_2 \quad \text{証終}$$

対称行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  の単位固有ベクトル  $u_1, u_2$  は直交するから、これらを基底とする座標変換を用いることで、 $ax^2 + 2bxy + cy^2$  について次の補題2が成り立つ。

**補題2**  $u_1, u_2$  を  $A$  の単位固有ベクトルとすると、基底の変換  $(x, y, x', y')$  は実数)

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x' u_1 + y' u_2$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

により次が成り立つ。

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

$$\begin{aligned}\text{証明} \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{から}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned}ax^2 + 2bxy + cy^2 &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A u_1 & A u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2\end{aligned}$$

証終

## 10 2次曲線 $f(x, y) = 0$ の極展開

(14) について、 $(\alpha, \beta) \in R^2$  を極として展開すると

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{1}{2}a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)(y - \beta) + \frac{1}{2}c(y - \beta)^2 \\ &\quad + f_x(\alpha, \beta)(x - \alpha) + f_y(\alpha, \beta)(y - \beta) \\ &\quad + f(\alpha, \beta)\end{aligned} \quad (17)$$

であるから、 $f_x(\alpha, \beta) = f_y(\alpha, \beta) = 0$  のとき

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{1}{2}a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)(y - \beta) \\ &\quad + \frac{1}{2}c(y - \beta)^2 + f(\alpha, \beta)\end{aligned}$$

上式から、 $f^{-1}(0)$  上の任意の点  $(x_1, y_1)$  に対し

$$(2\alpha - x_1, 2\beta - y_1) \in f^{-1}(0)$$

であるから、 $(\alpha, \beta) \in R^2$  は  $f^{-1}(0)$  の中心である。

このように、中心  $(\alpha, \beta) \in R^2$

$$f_x(\alpha, \beta) = f_y(\alpha, \beta) = 0$$

をもつ2次曲線を有心2次曲線という。

このとき、 $f(x, y) = 0$  を中心  $(\alpha, \beta)$  を極として展開すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)(y - \beta) + \frac{1}{2}c(y - \beta)^2 \\ + f(\alpha, \beta) = 0\end{aligned}$$

等長変換

$$\begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (18)$$

に補題 2 の結論を適用すると

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2f(\alpha, \beta) = 0 \quad (19)$$

(14) が中心をもたない 2 次曲線, すなわち, 無心 2 次曲線のとき, 次式から,  $ac - b^2 = 0$  が成立する.

$$\begin{cases} f_x = f_x(x, y) = ax + by + p \\ f_y = f_y(x, y) = bx + cy + q \end{cases} \quad (20)$$

このとき,  $A$  の固有方程式 (16) より, 固有値

$$\lambda_1 = a + c, \quad \lambda_2 = 0$$

に対する単位固有ベクトルをそれぞれ

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

とおき, 法ベクトル  $(f_x, f_y)$  が  $u_2$  と平行となる曲線上の点  $(\alpha, \beta)$  をとると

$$\begin{pmatrix} f_x(\alpha, \beta) \\ f_y(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = \mu u_2 \quad (21)$$

を満たす定数  $\mu$  が存在する. 等長変換

$$\begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (22)$$

を行うとき, (17) を  $(\alpha, \beta)$  を極として展開すると

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - \alpha & y - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} x - \alpha & y - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x(\alpha, \beta) \\ f_y(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \lambda_1 X^2 + \mu Y \end{aligned}$$

したがって, 2 次曲線  $f(x, y) = 0$  は, 放物線

$$\frac{1}{2} \lambda_1 X^2 + \mu Y = 0 \quad (23)$$

である.

4 ページで示したように,  $f(x, y) = 0$  の頂点は,  $f_x^2 + f_y^2$  が極値をとる点である. このとき

$$\begin{aligned} af_y - bf_x &= a(bx + cy + q) - b(ax + by + p) \\ &= aq - bp \end{aligned}$$

に注意すると

$$(a^2 + b^2)(f_x^2 + f_y^2) = (af_x + bf_y)^2 + (aq - bp)^2$$

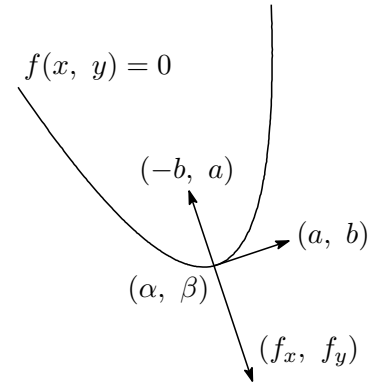
よって, 放物線  $f(x, y) = 0$  と直線

$$af_x + bf_y = 0 \quad (24)$$

の交点が頂点である. 直線 (24) は (20) より, ベクトル  $(a, b)$  に垂直である. また, (21) より

$$af_x(\alpha, \beta) + bf_y(\alpha, \beta) = 0$$

を満たすから, 直線 (24) は, 放物線  $f(x, y) = 0$  の軸である.



(19), (23) は標準形  $g(X, Y) = 0$  に分類される.

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad & \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0 \\ \text{(II)} \quad & \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + C = 0 \quad (C \neq 0) \\ \text{(III)} \quad & \lambda_1 X^2 + 2\mu Y = 0 \quad (\mu \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

## 11 2 次曲線 $f(x, y) = 0$ の中心

2 次曲線の頂点は曲線上の点であるが, 2 次曲線の中心は  $R^2$  の点として考える必要があるから, 中心について次のように定義する.

定義 (中心)

$K \subset R^2$  とする. 点  $p \in R^2$  に対し, 任意の点  $q \in K$  の  $p$  に対する対称な点  $q'$  が,  $q' \in K$  であるとき,  $p$  は  $K$  の中心という.

定理 (中心は定義関数の特異点)

2次曲線  $f^{-1}(0) \neq \phi$  に対し,  $(\alpha, \beta) \in R^2$  が

$$f_x(\alpha, \beta) = f_y(\alpha, \beta) = 0 \quad (\text{特異点})$$

であることは,  $(\alpha, \beta) \in R^2$  が  $f^{-1}(0)$  の中心であるための必要十分条件である.

[証明]

- (I)  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$  のとき,  $g^{-1}(0)$  の中心を  $P(p_1, p_2)$  とすると,  $O(0, 0) \in g^{-1}(0)$  であるから,  $O$  と  $P$  に関して対称な点  $(2p_1, 2p_2)$  は  $g^{-1}(0)$  上にあるから

$$\lambda_1(2p_1)^2 + \lambda_2(2p_2)^2 = 0$$

$$\lambda_1(-2p_1)^2 + \lambda_2(2p_2)^2 = 0$$

これから,  $(-2p_1, 2p_2) \in g^{-1}(0)$  であり, これと  $P$  に関して対称な点  $(4p_1, 0)$  は  $g^{-1}(0)$  上にあるから

$$\lambda_1(4p_1)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_1 = 0$$

$(0, 2p_2) \in g^{-1}(0)$  となるから  $p_2 = 0$

したがって,  $g^{-1}(0)$  の中心  $P(0, 0)$  について

$$g_X(0, 0) = g_Y(0, 0) = 0$$

$P(0, 0)$  は  $g^{-1}(0)$  の孤立特異点である.

$\lambda_1 = 0$  のとき,  $g^{-1}(0)$  の中心を  $P(p_1, p_2)$  とすると,  $O(0, 0) \in g^{-1}(0)$  であるから,  $O$  と  $P$  に関して対称な点  $(2p_1, 2p_2)$  は  $g^{-1}(0)$  上にあるから

$$\lambda_2(2p_2)^2 = 0$$

$$\lambda_2(-2p_2)^2 = 0$$

これから,  $(2p_1, -2p_2) \in g^{-1}(0)$  であり, これと  $P$  に関して対称な点  $(0, 4p_2)$  は  $g^{-1}(0)$  上にあるから

$$\lambda_2(4p_2)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_2 = 0$$

したがって,  $g^{-1}(0)$  の中心  $P(p_1, 0)$  について  $(p_1$  はすべての実数)

$$g_X(p_1, 0) = g_Y(p_1, 0) = 0$$

$\lambda_2 = 0$  のとき, 同様にして,  $g^{-1}(0)$  の中心  $P(0, p_2)$  について ( $p_2$  はすべての実数)

$$g_X(0, p_2) = g_Y(0, p_2) = 0$$

が成立する.

$(p_1, 0), (0, p_2)$  は  $g^{-1}(0)$  の非孤立特異点である.

- (II)  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$  のとき,  $g^{-1}(0) \neq \phi$  であるから,  $\lambda_1, \lambda_2$  の少なくとも一方は  $C$  と異符号で  $\lambda_1 C < 0$  のとき,  $(\pm\sqrt{-C/\lambda_1}, 0) \in g^{-1}(0)$  であり,  $g^{-1}(0)$  の中心  $P(p_1, p_2)$  に対してこれと対称な点

$$(2p_1 \mp \sqrt{-C/\lambda_1}, 2p_2)$$

が  $g^{-1}(0)$  上にあるから

$$\lambda_1(2p_1 \mp \sqrt{-C/\lambda_1})^2 + \lambda_2(2p_2)^2 + C = 0 \quad (26)$$

となるが

$$\lambda_1(-2p_1 \pm \sqrt{-C/\lambda_1})^2 + \lambda_2(2p_2)^2 + C = 0$$

とも書けるので, 点

$$(-2p_1 \pm \sqrt{-C/\lambda_1}, 2p_2)$$

は  $g^{-1}(0)$  上にある. これと  $P$  に関して対称な点

$$(4p_1 \mp \sqrt{-C/\lambda_1}, 0)$$

は  $g^{-1}(0)$  上にあるから

$$\lambda_1(4p_1 \mp \sqrt{-C/\lambda_1})^2 + C = 0$$

整理すると

$$\lambda_1(16p_1^2 \mp 8p_1\sqrt{-C/\lambda_1}) = 0$$

$\lambda_1 \neq 0$  より,  $p_1 = 0$  となる. これを (26) に代入すると,  $p_2 = 0$  を得る. このとき, 点  $P(0, 0)$  は孤立特異点である.  $\lambda_2$  が  $C$  と異符号のときも同様の議論により, 同一の結論を得る.

$\lambda_1 = 0$  のとき,  $g^{-1}(0) \neq \phi$  であるから,  $\lambda_2 C < 0$  より, 点  $(0, \pm\sqrt{-C/\lambda_2})$  は  $g^{-1}(0)$  上の点であり,  $g^{-1}(0)$  の中心  $P(p_1, p_2)$  に対してこれと対称な点

$$(2p_1, 2p_2 \mp \sqrt{-C/\lambda_2})$$

が  $g^{-1}(0)$  上にあるから

$$\lambda_2(2p_2 \mp \sqrt{-C/\lambda_2})^2 + C = 0$$

整理すると

$$\lambda_2(4p_2^2 \mp 4p_2\sqrt{-C/\lambda_2}) = 0$$

$\lambda_2 \neq 0$  より,  $p_2 = 0$  となる.

したがって,  $g^{-1}(0)$  の中心  $P(p_1, 0)$  について  $(p_1$  はすべての実数)

$$g_X(p_1, 0) = g_Y(p_1, 0) = 0$$

$\lambda_2 = 0$  のとき, 同様にして,  $g^{-1}(0)$  の中心  $P(0, p_2)$  について  $(p_2$  はすべての実数)

$$g_X(0, p_2) = g_Y(0, p_2) = 0$$

が成立する.

$(p_1, 0), (0, p_2)$  は  $g^{-1}(0)$  の非孤立特異点である.

(III) 点  $(0, 0) \in g^{-1}(0)$  であり, 点  $(0, 0)$  の中心  $P(p_1, p_2)$  に関して対称な点  $(2p_1, 2p_2)$  は  $g^{-1}(0)$  上にあるから

$$\lambda_1(2p_1)^2 + 2\mu(2p_2) = 0$$

これから

$$\lambda_1(-2p_1)^2 + 2\mu(2p_2) = 0$$

と書けるから, 点  $(-2p_1, 2p_2) \in g^{-1}(0)$ . これと点  $P$  に関して対称な点  $(4p_1, 0)$  も  $g^{-1}(0)$  上にあるから

$$\lambda_2(4p_1)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p_1 = 0$$

$P(0, 0)$  となり,  $(1, -\lambda_1/2u) \in g^{-1}(0)$  と  $P$  に関して対称な点  $(-1, \lambda_1/2u)$  について

$$g(-1, \lambda_1/2u) = 2\lambda_1 \neq 0$$

したがって, 中心は存在しない

(18), (22) の変換による

$$f(x, y) = g(X, Y)$$

について,  $x, y$  でそれぞれ偏微分を行うと

$$\begin{aligned} f_x &= g_X \frac{\partial X}{\partial x} + g_Y \frac{\partial Y}{\partial x} \\ f_y &= g_X \frac{\partial X}{\partial y} + g_Y \frac{\partial Y}{\partial y} \end{aligned}$$

よって, (I), (II) で求めた  $f^{-1}(0)$  の中心  $(x_0, y_0)$  であることと

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{特異点})$$

が成立することは同値である.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

なお,  $(p_1, p_2)$  は  $g^{-1}(0)$  の中心.

証終

## 12 2次曲線の分類

退化しない2次曲線, すなわち, 楕円, 双曲線, 放物線となる時, 曲率  $\kappa \neq 0$  である. (13) および (15) から,  $D = 0$  のとき  $\kappa = 0$  となり, 2次曲線  $f(x, y) = 0$  は退化する.

2次曲線の中心と定義関数の特異点と同値であるから, (25) において, (I), (II) は中心が存在する有心2次曲線であり, (III) は中心が存在しない無心2次曲線である.

(19) および次式から, 中心  $(\alpha, \beta)$  が  $f^{-1}(0)$  上にあるとき,  $D = 0$  となる.

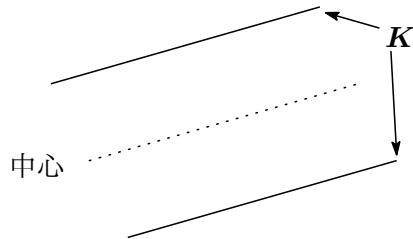
$$D = \begin{vmatrix} a & b & f_x \\ b & c & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

(I) は  $D = 0$  および (13) より,  $\kappa = 0$  であり, 次のように分類される.

- $ac - b^2 > 0$  のとき, 1 点 (中心は 1 点)
- $ac - b^2 = 0$  のとき, 1 つの実直線 (中心は実直線上の点 [非孤立特異点])
- $ac - b^2 < 0$  のとき, 相交わる 2 直線 (中心は 2 直線の交点)

(II) は,  $\lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2$  より分類される.

- $ac - b^2 > 0$  のとき, 楕円型
- $ac - b^2 < 0$  のとき, 双曲線
- $ac - b^2 = 0$  のとき, 平行 2 直線



( $K$  は平行 2 直線, 中心は非孤立特異点)

(III) は放物線で, 定義関数の特異点が存在しない, 無心 2 次曲線である.

## 13 考察

2 次曲線は, 準線, 焦点など大域的な性質を扱うことが多いが, 局所的な視点から, 放物線・楕円・双曲線の曲率中心と焦点, 頂点, 準線との位置関係を離心率を介した考察を行った.

2 次曲線  $f(x, y) = 0$  の頂点は,  $|\text{grad} f(x, y)|$  が極値をとる点であることを証明した.

また, 2 次曲線  $f(x, y) = 0$  の中心は, 定義関数の特異点と同値であることを証明し, 中心の定義を与えた.