

令和5年度 琉球大学2次試験後期日程 (数学問題)  
理学部 (数理科学科) 令和5年3月12日

問題 1 2 3 4 数I・II・III・A・B (120分)

1 関数  $y = x\sqrt{9-x^2}$  に対して、次の問いに答えよ.

- (1) 増減を調べてこの関数のグラフをかけ.
- (2) この関数のグラフと  $x$  軸で囲まれてできる図形の面積を求めよ.

2  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$  とし、 $f(x) = F(3x) - F(x)$  とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $f'(x)$  を求めよ.
- (2)  $x \geq 0$  の範囲で、 $f(x)$  の最大値を求めよ.

3 自然数からなる2つの数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 次の問いに答えよ.

- (1) すべての自然数  $n$  に対して、 $a_n$  は奇数、 $b_n$  は偶数であることを示せ.
- (2) すべての自然数  $n$  に対して、

$$1 + 2 + 3 + \dots + \frac{a_n - 3}{2} + \frac{a_n - 1}{2} = 1 + 3 + 5 + \dots + (b_n - 3) + (b_n - 1)$$

が成立することを示せ.

4 赤球が1個、白球が2個入った球を1個取り出して、その色を見てから袋に戻すという試行を、白球が2回続けて出るまで行う.  $n$  回目に白球を取り出しまだ試行が終わらない確率を  $p_n$ ,  $n$  回目に赤球を取り出す確率を  $q_n$  とする. 次の問いに答えよ.

- (1)  $p_{n+1}$ ,  $q_{n+1}$  を  $p_n$ ,  $q_n$  を用いて表せ.
- (2)  $a_n = p_n - q_n$  とするとき、数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (3)  $b_n = (-3)^n p_n$  とするとき、数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ.
- (4)  $n + 1$  回目で試行が終わる確率を求めよ.

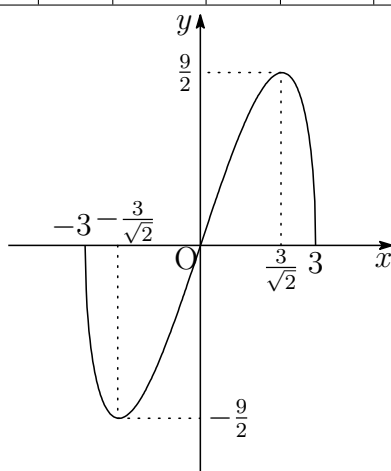
解答例

- 1** (1)  $y = x\sqrt{9-x^2}$  より, 定義域は,  $9-x^2 \geq 0$  を解いて  $-3 \leq x \leq 3$

$$y = \sqrt{9-x^2} + x \left( \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \right) = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

したがって, 増減およびグラフの概形は次のようになる.

|      |      |            |                       |            |                      |            |     |
|------|------|------------|-----------------------|------------|----------------------|------------|-----|
| $x$  | $-3$ | $\cdots$   | $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$   | $\frac{3}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$   | $3$ |
| $y'$ |      | $-$        | $0$                   | $+$        | $-$                  |            |     |
| $y$  |      | $\searrow$ | 極小                    | $\nearrow$ | 極大                   | $\searrow$ |     |



- (2) グラフは原点に関して対称であるから, 求める面積は

$$2 \int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx = 2 \left[ -\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 18$$

■

**2** (1)  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$  より,  $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  であるから

$$f'(x) = 3F'(3x) - F'(x) = \frac{3}{1+9x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)(1+9x^2)}$$

(2) (1) の結果から

$$f'(x) = \frac{-6}{(1+x^2)(1+9x^2)} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$x \geq 0$  で増減表をかくと

|         |   |            |                      |            |
|---------|---|------------|----------------------|------------|
| $x$     | 0 | $\dots$    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\dots$    |
| $f'(x)$ |   | +          | 0                    | -          |
| $f(x)$  | 0 | $\nearrow$ | 極大                   | $\searrow$ |

$x \geq 0$  における最大値は, 上の増減表および  $f(x) = F(3x) - F(x)$  により

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = F(\sqrt{3}) - F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$t = \tan \theta$  とおくと

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \cos^2 \theta, \quad dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

|          |                                           |
|----------|-------------------------------------------|
| $t$      | $\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \sqrt{3}$ |
| $\theta$ | $\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3}$ |

したがって

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{6}$$



**3** (1)  $(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) より

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (3 + 2\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\ &= 3a_n + 4b_n + (2a_n + 3b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$a_n, b_n$  は自然数で,  $\sqrt{2}$  は無理数であるから, 次の漸化式が成立する.

$$a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \quad (*)$$

$a_n, b_n$  は自然数であるから, 法 2 について

$$a_{n+1} \equiv a_n, \quad b_{n+1} \equiv b_n \pmod{2}$$

$a_1 = 3, b_1 = 2$  であるから, すべての自然数  $n$  について

$$a_n \equiv 1, \quad b_n \equiv 0 \pmod{2}$$

よって, すべての自然数  $n$  について,  $a_n$  は奇数,  $b_n$  は偶数.

(2)  $l, m$  を自然数とすると

$$1 + 2 + 3 + \dots + l = \frac{1}{2}l(l+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2m-1) = m^2$$

これに  $l = \frac{a_n - 1}{2}, m = \frac{b_n}{2}$  を代入すると

$$1 + 2 + 3 + \dots + \frac{a_n - 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n - 1}{2} \left( \frac{a_n - 1}{2} + 1 \right) = \frac{a_n^2 - 1}{8}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (b_n - 1) = \left( \frac{b_n}{2} \right)^2 = \frac{b_n^2}{4}$$

したがって, すべての自然数  $n$  について

$$a_n^2 - 2b_n^2 = 1$$

が成立することを示せばよい. (\*) より

$$a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (3a_n + 4b_n)^2 - 2(2a_n + 3b_n)^2 = a_n^2 - b_n^2$$

したがって  $a_n^2 - 2b_n^2 = a_1^2 - 2b_1^2 = 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$

よって, すべての自然数  $n$  に対して, 次式が成立する.

$$1 + 2 + 3 + \dots + \frac{a_n - 3}{2} + \frac{a_n - 1}{2} = 1 + 3 + 5 + \dots + (b_n - 3) + (b_n - 1)$$

■

- 4 (1) 試合が継続している状態で  $n+1$  回目が白玉であるとき,  $n$  回目は赤玉であるから

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n$$

試合が継続している状態で  $n+1$  回目が赤玉であるとき,  $n$  回目は白玉または赤玉であるから

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}(p_n + q_n)$$

- (2)  $a_n = p_n - q_n$  とすると, (1) の結果から

$$a_{n+1} = p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{2}{3}q_n - \frac{1}{3}(p_n + q_n) = -\frac{1}{3}(p_n - q_n) = -\frac{1}{3}a_n$$

$a_1 = p_1 - q_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$  より,  $\{a_n\}$  は初項  $\frac{1}{3}$ , 公比  $-\frac{1}{3}$  の等比数列であるから

$$a_n = \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1} = - \left( -\frac{1}{3} \right)^n$$

- (3) (1) の結果から

$$p_{n+1} + 2q_{n+1} = \frac{2}{3}q_n + 2 \cdot \frac{1}{3}(p_n + q_n) = \frac{2}{3}(p_n + 2q_n)$$

$p_1 + 2q_1 = \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$  であるから,  $\{p_n + 2q_n\}$  は初項  $\frac{4}{3}$ , 公比  $\frac{2}{3}$  の等比数列であるから

$$p_n + 2q_n = \frac{4}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} = 2 \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

(2) の結果から  $p_n - q_n = - \left( -\frac{1}{3} \right)^n$

上の 2 式から  $q_n$  を消去すると

$$p_n = \frac{2}{3} \left\{ \left( \frac{2}{3} \right)^n - \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right\} \quad (*)$$

$$b_n = (-3)^n p_n \text{ より } b_n = \frac{2}{3} \{ (-2)^n - 1 \}$$

- (4) 求める確率は, 終了することなく  $n$  回目に白球が出て,  $n+1$  回目に白球が出る確率であるから, (\*) より

$$\frac{2}{3}p_n = \frac{4}{9} \left\{ \left( \frac{2}{3} \right)^n - \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

