

令和6年度 佐賀大学2次試験前期日程(数学問題)

理工・医・農・教育学部 令和6年2月25日

• 理工学部 [1] [2] [3] (2)(3) [4] 数I・II・III・A・B (120分)

• 医学部 [1] [2] [3] [4] 数I・II・III・A・B (120分)

• 農学部 [1] [2] [5] [6] 数I・II・A・B (120分)

• 教育学部 [1] [2] [5] 数I・II・A・B (100分)

[1] 平面上に $OA = 4$, $OB = \sqrt{2}$ を満たす $\triangle OAB$ がある. 頂点 B から直線 OA に下ろした垂線を BC とする. また, 頂点 O から直線 AB に下ろした垂線を OD とする. このとき, 点 C は辺 OA を $1:3$ に内分しているとする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき, 次の問に答えよ.

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.

(2) 実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OD} = s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表すとき, s と t の値を求めよ. さらに, $|\overrightarrow{OD}|$ の値を求めよ.

(3) 直線 BC と直線 OD の交点を P とするとき, $|\overrightarrow{OP}|$ の値を求めよ.

[2] 座標平面上で, 点 P は原点 $(0, 0)$ を出発点とし, 1個のさいころを投げて出た目によって次の通りに動くものとする.

出た目が奇数のとき, x 軸の正の向きに 1 だけ動く

出た目が 2 または 4 のとき, x 軸の負の向きに 1 だけ動く

出た目が 6 のとき, y 軸の正の向きに 1 だけ動く

n を 2 以上の自然数とするとき, 次の問に答えよ.

(1) さいころを n 回投げるとき, 点 P の座標が $(1, n-1)$ となる場合は何通りあるか.

(2) さいころを n 回投げるとき, 点 P の座標が $(0, n-2)$ となる場合は何通りあるか.

(3) さいころを n 回投げるとき, 点 P の x 座標が 0 以上, かつ y 座標が $n-2$ 以上となる場合は何通りあるか.

3 k を定数とする．曲線 $y = e^{\sqrt{x}}$ と直線 $y = kx$ が 1 点 P で接しているとき，次の間に答えよ．

- (1) 曲線 $y = e^{\sqrt{x}}$ の凹凸，変曲点を調べ，その概形をかけ．
- (2) 定数 k の値と点 P の座標を求めよ．
- (3) 曲線 $y = e^{\sqrt{x}}$ と直線 $y = kx$ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

4 複素数平面上に $|\alpha| = 2$ を満たす点 $A(\alpha)$ がある．方程式

$$|z - 1| = \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|z - \alpha| = \sqrt{5} \quad \cdots \textcircled{2}$$

について，次の間に答えよ．

- (1) 複素数平面上で方程式 $\textcircled{1}$ を満たす点 z の全体が表す図形を描け．また，方程式 $\textcircled{1}$ および $\textcircled{2}$ を満たす複素数 z の個数が 2 個であることを示せ．
- (2) 方程式 $\textcircled{1}$ および $\textcircled{2}$ を満たす複素数 z について

$$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

が成り立つことを示せ．

- (3) 方程式 $\textcircled{1}$ および $\textcircled{2}$ を満たす異なる 2 つの複素数を β, γ とする．2 点 $B(\beta)$, $C(\gamma)$ と原点 O が一直線上にあることを示せ．また， $|\beta| = b$ とおくとき， $|\gamma|$ を b を用いて表せ．

5 t は $0 < t < 1$ を満たすとする.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2tx + 1, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - (t-2)x - 2t + 1$$

とおく. 次の問に答えよ.

- (1) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標をすべて求めよ.
- (2) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ および直線 $x = 2t$ で囲まれた2つの図形のうち, 左側の図形の面積 $S(t)$ を求めよ.
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき, (2) の $S(t)$ の増減を調べ, 極値を求めよ.

6 $f(x) = 4x^3 - 3x$ について, 次の問に答えよ.

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ, 方程式 $f(x) = a$ が異なる実数解を3個もつための, 定数 a についての条件を求めよ.
- (2) $\cos 3\theta = f(\cos \theta)$ を示せ.
- (3) 方程式 $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ の実数解をすべて求めよ.

解答例

- 1 (1) $OA = 4$, $OC = 1$, $OB = \sqrt{2}$, $\angle OCB = 90^\circ$ であるから $BC = 1$
 O を座標平面上の原点とし, $A(4, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, 0)$ とすると

$$\vec{a} = (4, 0), \vec{b} = (1, 1) \quad \text{よって} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4$$

- (2) 直線 AB の方程式は

$$y = \frac{0-1}{4-1}(x-4) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

直線 AB に垂直な直線 OD の方程式は $y = 3x$

2 直線 AB , OD の交点 D の座標は $\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$

$(1, 0) = \frac{1}{4}\vec{a}$, $(0, 1) = -\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$ であるから

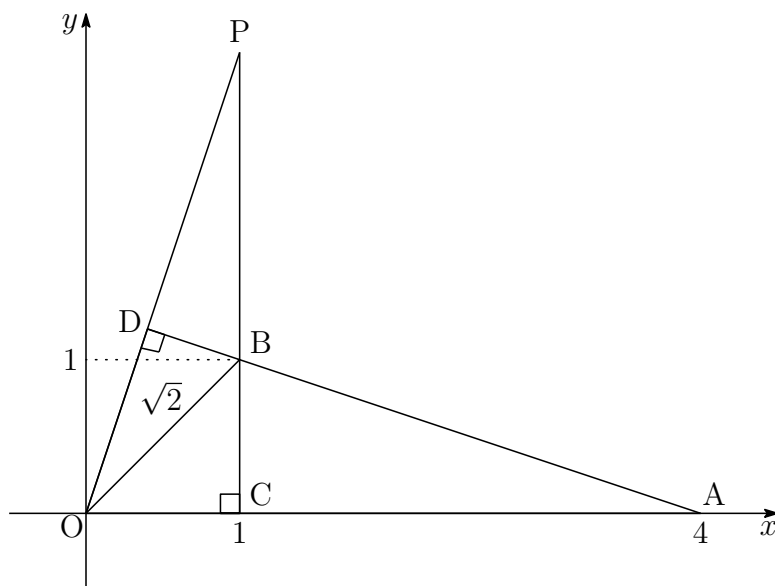
$$\vec{OD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{6}{5} \left(-\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}$$

よって $s = -\frac{1}{5}$, $t = \frac{6}{5}$

$$\vec{OD} = \frac{2}{5}(1, 3) \quad \text{より} \quad |\vec{OD}| = \frac{2}{5}\sqrt{1^2 + 3^2} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

- (3) 点 P の x 座標が 1 であり, P は直線 $y = 3x$ 上の点であるから $P(1, 3)$

よって $|\vec{OP}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$



- 2** (1) n 回投げて点 P の座標が $(1, n-1)$, すなわち, n 回投げて奇数が 1 回, 6 の目が $n-1$ 回出る場合の総数であるから

$$\frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot 3 \cdot 1^{n-1} = 3n \quad (\text{通り})$$

- (2) n 回投げて点 P の座標が $(0, n-2)$, すなわち, n 回投げて奇数が 1 回, 2 または 4 が 1 回, 6 の目が $n-2$ 回出る場合の総数であるから

$$\frac{n!}{1!1!(n-2)!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1^{n-2} = 6n(n-1) \quad (\text{通り})$$

- (3) (i) n 回投げて点 P の座標が $(2, n-2)$, すなわち, n 回投げて奇数が 2 回, 6 の目が $n-2$ 回出る場合の総数は

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot 3^2 \cdot 1^{n-2} = \frac{9}{2}n(n-1)$$

- (ii) n 回投げて点 P の座標が $(0, n)$, すなわち, n 回投げて 6 の目が n 回出る場合の総数は

$$1 \quad (\text{通り})$$

求める場合の総数は, (1), (2) および (i), (ii) の場合であるから

$$3n + 6n(n-1) + \frac{9}{2}n(n-1) + 1 = \frac{21}{2}n^2 - \frac{15}{2}n + 1 \quad (\text{通り})$$



3 (1) $y = e^{\sqrt{x}}$ より

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}},$$

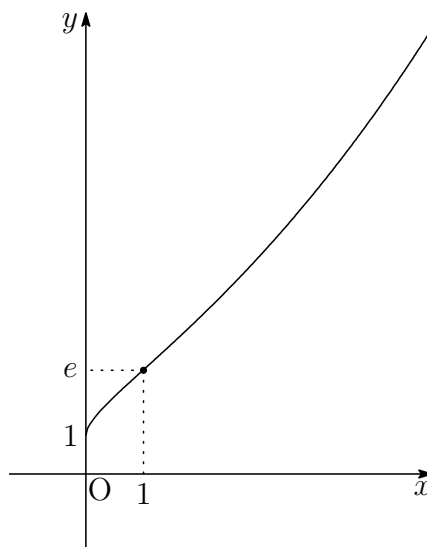
$$y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{4x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

したがって、 y の増減および凹凸は、次のようになる．

x	0	...	1	...
y'		+	+	+
y''		-	0	+
y	1	$\curvearrowright$	e	$\curvearrowleft$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$$

$y = e^{\sqrt{x}}$ のグラフの概形は、次のようになる．変曲点は $(1, e)$



(2) $y = e^{\sqrt{x}}$ 上の点 $(t, e^{\sqrt{t}})$ における接線の方程式は

$$y - e^{\sqrt{t}} = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}x + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)e^{\sqrt{t}}$$

これが原点 O を通るから

$$1 - \frac{\sqrt{t}}{2} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 4$$

$$\text{よって} \quad k = \frac{e^{\sqrt{4}}}{2\sqrt{4}} = \frac{e^2}{4}, \quad P(4, e^2)$$

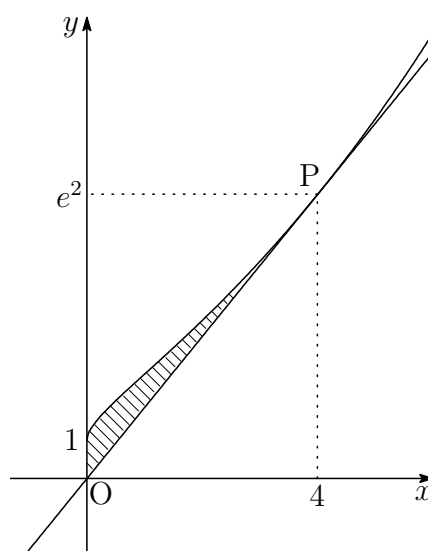
(3) 求める面積を S とすると, 下の図から

$$S = \int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot e^2$$

$$u = \sqrt{x} \text{ とおくと, } x = u^2 \text{ より } \frac{dx}{du} = 2u \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 4 \\ \hline u & 0 \rightarrow 2 \end{array}$$

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 e^u \cdot 2u du = \left[e^u(2u - 2) \right]_0^2 = 2e^2 + 2$$

$$\text{よって } S = (2e^2 + 2) - 2e^2 = 2$$



補足 次の積分公式 (第 1 式) を利用している¹.

$$\begin{aligned} \int e^x f(x) dx &= e^x \{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\} + C \\ \int e^{-x} f(x) dx &= -e^{-x} \{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\} + C \end{aligned}$$

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2023.pdf (p.10 の解説を参照)

4 (1) $|\alpha| = 2$, $|z - 1| = \sqrt{2} \cdots \textcircled{1}$, $|z - \alpha| = \sqrt{5} \cdots \textcircled{2}$

2円 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の中心間の距離 $|\alpha - 1|$ は

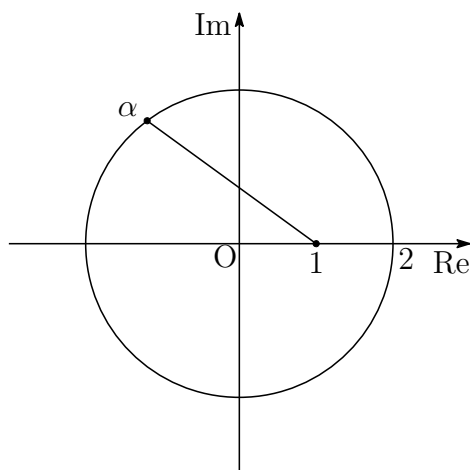
$$|\alpha| - 1 \leq |\alpha - 1| \leq |\alpha| + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leq |\alpha - 1| \leq 3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$|z - \alpha| - |z - 1| < |\alpha - 1| < |z - \alpha| + |z - 1|$, すなわち, 次式を示せばよい.

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} < |\alpha - 1| < \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$\sqrt{5} - \sqrt{2} < 1$, $3 < \sqrt{5} + \sqrt{2}$ であるから, $\textcircled{3}$ より上式が成立する. 2円 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の共有点の個数は2個であるから, $\textcircled{1}$ および $\textcircled{2}$ を満たす点 z の個数は2個である.

補足 $1 \leq |\alpha - 1| \leq 3$ は下の図からも分かる.



(2) $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より ($|\alpha| = 2$) $|z - 1|^2 = 2$, $|z - \alpha|^2 = 5$

$$z\bar{z} - \bar{z} - z - 1 = 0, \quad z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z - 1 = 0$$

上の第1式から第2式の辺々の差をとると

$$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

- (3) ①, ② および $|\alpha| = 2$ から, $z \neq 0$, $\bar{\alpha} - 1 \neq 0$ に注意すると, (2) の結果から, $z(\bar{\alpha} - 1)$ は純虚数であるから, 実数 s, t を用いて ($s \neq 0, t \neq 0$)

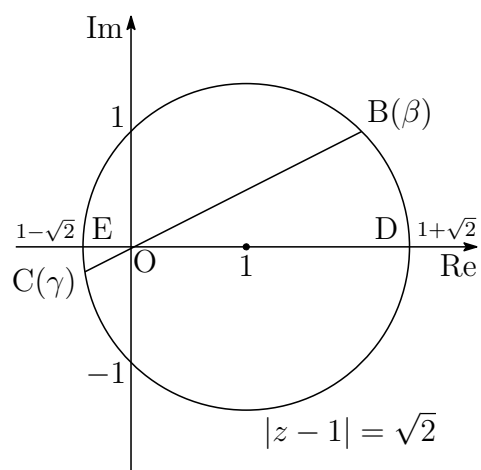
$$\beta(\bar{\alpha} - 1) = si, \quad \gamma(\bar{\alpha} - 1) = ti \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = \frac{t}{s}\beta$$

よって, 2 点 $B(\beta)$, $C(\gamma)$ と原点 O は一直線上にある.

円 ① 上の 2 点を $D(1 + \sqrt{2})$, $E(1 - \sqrt{2})$ とすると, 方べきの定理により

$$OB \cdot OC = OD \cdot OE \quad \text{ゆえに} \quad |\beta||\gamma| = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$$

$$|\beta| = b \text{ より } b|\gamma| = 1 \quad \text{よって} \quad |\gamma| = \frac{1}{b}$$



- 5** (1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2tx + 1$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - (t-2)x - 2t + 1$
 $f(x) - g(x) = 0$ とし, 整理すると

$$x^2 - (t+2)x + 2t = 0 \quad \forall \text{えに} \quad (x-t)(x-2) = 0$$

これを解いて $x = t, 2$

- (2) (1) の計算より, $g(x) - f(x) = -(x-t)(x-2)$ であるから

$$\begin{aligned} S(t) &= - \int_t^{2t} (x-t)(x-2) dx \\ &= - \int_t^{2t} (x-t)\{(x-2t) + 2(t-1)\} dx \\ &= - \int_t^{2t} (x-t)(x-2t) dt - (t-1) \left[(x-t)^2 \right]_t^{2t} \\ &= \frac{1}{6}t^3 - (t-1) \cdot t^2 = -\frac{5}{6}t^3 + t^2 \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から $S'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 2t = -\frac{5}{2}t \left(t - \frac{4}{5} \right)$

$0 < t < 1$ における $S(t)$ の増減は

t	(0)	$\dots$	$\frac{4}{5}$	$\dots$	(1)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{16}{75}$	$\searrow$	

したがって 極大値 $S\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{75}$



- 6 (1) $f(x) = 4x^3 - 3x$ より $f'(x) = 12x^2 - 3 = 12\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
 $f(x)$ の増減は、次のようになる.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって 極大値 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, 極小値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

$f(x) = a$ の解は, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の x 座標であるから, 上の増減表から, $f(x) = a$ が異なる 3 つの実数解をもつための条件は

$$-1 < a < 1$$

- (2) 加法定理により

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$$

$$\cos \theta = \cos(2\theta - \theta) = \cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta$$

上の 2 式の辺々を加えると, $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ より

$$\cos 3\theta + \cos \theta = 2\cos 2\theta \cos \theta = 2(2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta$$

$\cos 3\theta$ について解くと

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \quad \text{よって} \quad \cos 3\theta = f(\cos \theta)$$

- (3) $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ から, (1) の増減表より, $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ の解は, $-1 < x < 1$ に存在する. $x = \cos \theta$ とおくと ($0 < \theta < \pi$), (2) の結果から

$$\cos 3\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 < 3\theta < 3\pi$ であるから

$$3\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

求める解は $x = \cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{5}{12}\pi, \cos \frac{11}{12}\pi$

よって $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ■