

令和6年度 佐賀大学2次試験後期日程(数学問題)

理工・農学部 令和6年3月12日

- 理工学部は, [1] ~ [4] 数I・II・III・A・B (120分)
- 農学部は, [1], [2] (1)(2)(3), [5], [6] 数I・II・A・B (120分)

[1] 3つのさいころを同時に投げるとき, 次の問に答えよ.

- (1) 出た目の合計が15以上になる確率を求めよ.
- (2) 出た目の合計が14以下であったとき, 1の目が出たさいころが少なくとも1つある条件つき確率を求めよ.
- (3) 出た目すべての積が4の倍数となる確率を求めよ.

[2] 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 100, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 次の問に答えよ.

- (1) $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ を満たす α の値を求めよ.
- (2) n を自然数とする. (1) の α について, 不等式

$$a_n > a_{n+1} > \alpha$$

を数学的帰納法によって証明せよ.

- (3) $a_n > 3$ を満たす自然数 n のうち, 最大のものを求めよ.
- (4) (1) の α について, 不等式

$$a_{n+1} - \alpha < \frac{1}{4}(a_n - \alpha)$$

が成り立つことを示せ. さらに, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ を示せ.

3 複素数平面上で、原点および $3+i$ を通る直線を ℓ とする。次の問に答えよ。

- (1) 点 z を原点のまわりに $3+i$ の偏角だけ回転した点を w とする。 w を z を用いて表せ。
- (2) 複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ とし、直線 ℓ に関して点 z と対称な点を z' とする。 z' を $\bar{z}$ を用いて表せ。
- (3) $A(1+i)$, $B(2+i)$ とする。点 P が直線 ℓ 上を動くとき、 $AP+BP$ の最小値と、最小値を与える点 P を表す複素数を求めよ。

4 関数

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

について、次の問に答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、凹凸、変曲点を調べる必要はないものとする。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

5 四面体 $OABC$ は

$$OA = OB = AC = 1, \quad \angle AOB = 60^\circ, \quad \angle AOC = \angle BOC = 45^\circ$$

を満たすとする．次の問に答えよ．

- (1) 辺 OC の長さを求めよ．
- (2) 3 点 O, A, B の定める平面に点 C から下した垂線の長さを求めよ．
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ．また，この四面体のすべての面に内接する球の半径を求めよ．

6 関数 $f(x) = x^3 - 9x$ について，次の問に答えよ．

- (1) 関数 $f(x)$ の極値を求め，そのグラフをかけ．
- (2) t を実数とし，区間 $t \leq x \leq t+3$ における $f(x)$ の最大値を $M(t)$ で表す．関数 $M(t)$ を求め，そのグラフをかけ．
- (3) (2) のグラフと t 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

- 1 (1) 目の出方の総数は 6^3 (通り)

出た目の和が 15 以上について、次の場合に分けて個数を求める.

$\{5, 5, 5\}, \{6, 6, 6\}$ のとき 2 (通り)

$\{6, 6, 5\}, \{6, 6, 4\}, \{6, 6, 3\}, \{6, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{3!}{2!1!} \times 4 = 12 \text{ (通り)}$$

$\{6, 5, 4\}$ のとき $3! = 6$ (通り)

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{2 + 12 + 6}{6^3} = \frac{5}{54}$$

- (2) 1 の目が少なくとも 1 回出る $\implies$ 出る目の和は 14 以下

$$1 \text{ の目が少なくとも 1 回出る確率は } 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

出る目の和が合計が 14 以下の確率は, (1) の余事象の確率であるから

$$1 - \frac{5}{54} = \frac{49}{54}$$

$$\text{よって, 求める条件付き確率は } \frac{91}{216} \bigg/ \frac{49}{54} = \frac{13}{28}$$

- (3) 出た目の積が奇数になる事象, すなわち, 出た目がすべて奇数である事象を A とし, その確率を $P(A)$ とすると

$$P(A) = \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

出た目の積が偶数で 4 の倍数でない事象, すなわち, 出た目の 2 つが奇数で残りの 1 つが 2 または 6 の事象を B とし, その確率を $P(B)$ とすると

$$\frac{{}_3C_1 \cdot 3^2 \cdot 2}{6^3} = \frac{1}{4}$$

A, B は互いに排反で, 求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

2 (1) $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ の両辺を平方すると

$$\alpha^2 = \alpha + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0$$

原方程式から $\alpha > 0$ に注意して、これを解くと $\alpha = 2$

(2) $(*) \quad a_n > a_{n+1} > \alpha$

[1] $a_1 = 100$ より, $a_2 = \sqrt{a_1 + 2} = \sqrt{102}$ であるから

$$a_1 > a_2 > 2$$

よって, $n = 1$ のとき, $(*)$ が成立する.

[2] $n = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 2 &= \sqrt{a_k + 2} - 2 \\ &= \frac{a_k - 2}{\sqrt{a_k + 2} + 2} > 0 \\ a_{k+1} - a_{k+2} &= \sqrt{a_k + 2} - \sqrt{a_{k+1} + 2} \\ &= \frac{a_k - a_{k+1}}{\sqrt{a_k + 2} + \sqrt{a_{k+1} + 2}} > 0 \end{aligned} \tag{A}$$

よって, $n = k + 1$ のときも $(*)$ が成立する.

(3) $a_1 = 100$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ より

$$\begin{aligned} a_2 &= \sqrt{102} \quad \text{ゆえに} \quad 10 < a_2 < 11 \\ \sqrt{12} < a_3 < \sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad 3 < a_3 < 4 \\ \sqrt{5} < a_4 < \sqrt{6} \quad \text{ゆえに} \quad 2 < a_4 < 3 \end{aligned}$$

さらに, (2) の結論から, $n \geq 5$ のとき $a_n < a_4 < 3$

よって, $a_n > 3$ となる最大の自然数 n は $\mathbf{n = 3}$

(4) $a_n > 2$ および (A) を利用すると

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n - 2}{\sqrt{a_n + 2} + 2} < \frac{1}{4}(a_n - 2)$$

$$\text{したがって} \quad 0 < a_{n+1} - 2 < \frac{1}{4}(a_n - 2)$$

$$0 < a_n - 2 < (a_1 - 2) \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - 2) \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = 0$ であるから, はさみうちの原理により

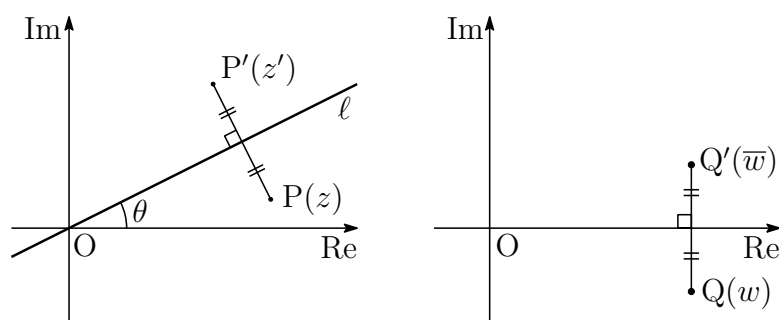
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

3 (1) $w = \frac{3+i}{|3+i|}z = \frac{3+i}{\sqrt{10}}z$

- (2) 複素数平面上において、原点 O を通る直線を ℓ の偏角を θ とする．点 $P(z)$ を ℓ に関して対称移動した点を $P'(z')$ とし、2 点 P, P' を O を中心に $-\theta$ だけ回転させた点をそれぞれ Q, Q' とする．このとき、 $Q(w)$ とすると、 Q' は実軸に関して Q と対称であるから、 $Q'(\bar{w})$ である． P' は Q' を O を中心に θ だけ回転させたものである．以上から

$$w = z\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}, \quad \bar{w} = \bar{z}(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$z' = \bar{w}(\cos\theta + i\sin\theta) = \bar{z}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$



また、 ℓ の傾きが m であるとき、 $m = \tan\theta$ とおくと

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

したがって、次式が成立する．

$$z' = \frac{\bar{z}\{(1 - m^2) + 2mi\}}{1 + m^2}$$

直線 ℓ の傾きは $\frac{1}{3}$ であるから、 $m = \frac{1}{3}$ を上式に代入すると

$$z' = \frac{\bar{z}(4 + 3i)}{5}$$

別解 点 $3+i$ は ℓ 上の点であるから $\cos\theta + i\sin\theta = \frac{3+i}{|3+i|}$

$$z' = \bar{z}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \frac{\bar{z}(3+i)^2}{|3+i|^2} = \frac{\bar{z}(4 + 3i)}{5}$$

(3) ℓ に関して点 $A(1+i)$ と対称な点を $A'(\alpha)$ とすると, (2) の結果を利用して

$$\alpha = \frac{(\overline{1+i})(4+3i)}{5} = \frac{(1-i)(4+3i)}{5} = \frac{7-i}{5}$$

AP + BP の最小値は, $A' \left(\frac{7-i}{5} \right)$, $B(2+i)$ の間の距離

$$A'B = \left| 2+i - \frac{7-i}{5} \right| = \frac{3}{5} |1+2i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

直線 $A'B$ 上の点は, 媒介変数 t を用いて

$$(1-t) \cdot \frac{7-i}{5} + t(1+i) = \frac{3t+7}{5} + \frac{6t-1}{5}i$$

これと ℓ の交点が P であるから

$$3 \cdot \frac{6t-1}{5} = \frac{3t+7}{5} \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3} \quad \text{よって} \quad P \left(\frac{9+3i}{5} \right)$$

4 (1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 1 \pm \sqrt{2}$

$f(x)$ の増減は, 次のようになる.

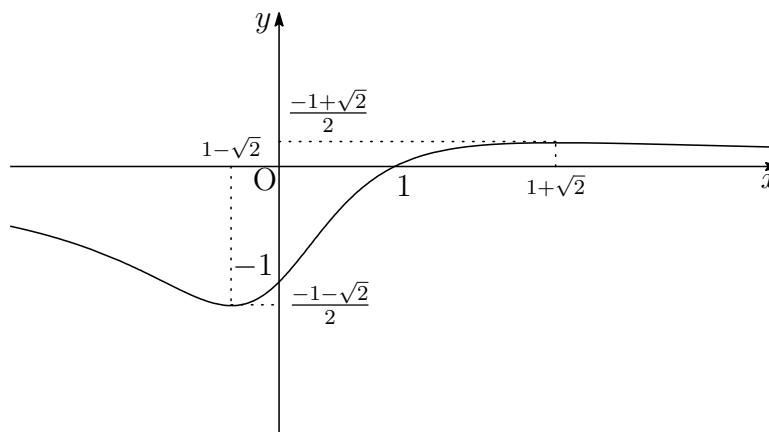
x	$\cdots$	$1 - \sqrt{2}$	$\cdots$	$1 + \sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって 極小値 $f(-1-\sqrt{2}) = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$

極大値 $f(1+\sqrt{2}) = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = 0$$

漸近線は x 軸でグラフの概形は、次のようになる。



(3) $0 \leq x \leq 1$ で $f(x) \leq 0$ であるから、求める面積を S とすると

$$S = - \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

ここで、 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ について、 $x = \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

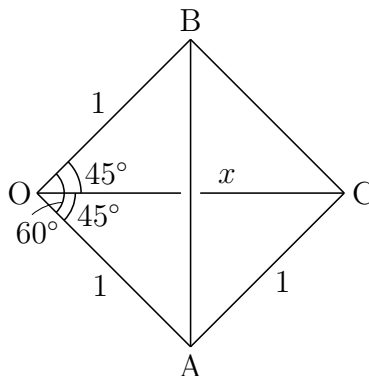
$$\text{また} \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[\log(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$$

- 5 (1) $x = OC$ とし, $\triangle OAC$ に余弦定理を適用すると

$$1^2 = 1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cos 45^\circ \quad \text{ゆえに} \quad x(x - \sqrt{2}) = 0$$

$$x > 0 \text{ であるから} \quad \mathbf{OC = \sqrt{2}}$$



- (2) (1) の結果から $BC = 1$, $\triangle OAB$ は正三角形であるから $AB = 1$
 A から平面 OBC に垂線 AM を引くと, $\triangle AMO \equiv \triangle AMB \equiv \triangle AMC$ であるから, $OM = BM = CM$. すなわち, M は $\triangle OBC$ の外心である.
 $\angle OBC = 90^\circ$ より, M は OC の中点であるから

$$OM = AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ であるから, 四面体 $OABC$ の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \triangle OBC \cdot AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$ より, 点 C から平面 OAB に下した垂線の長さを h とすると, $\frac{1}{3} \triangle OAB \cdot h = V$ より

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} h = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{h = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

- (3) 四面体 $OABC$ の体積 V は (2) の結果から $\mathbf{V = \frac{\sqrt{2}}{12}}$
 四面体の側面積を S , 内接球の半径を r とすると

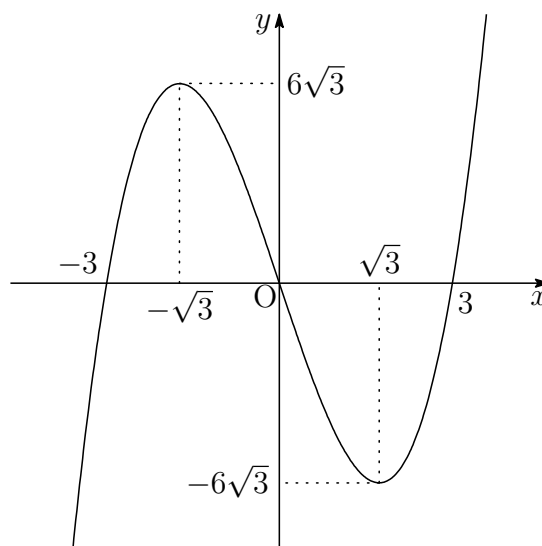
$$S = 2(\triangle OBC + \triangle OAB) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} S r \text{ より} \quad r = \frac{3V}{S} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{2}$$

6 (1) $f(x) = x^3 - 9x$ より $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$	$\nearrow$

よって 極大値 $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$ 極小値 $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$



$$(2) \quad f(t+3) - f(t) = (t+3)^3 - 9(t+3) - (t^3 - 9t) \\ = 9t^2 + 27t = 9t(t+3)$$

- (i) $t \leq -\sqrt{3} \leq t+3$, すなわち, $-3-\sqrt{3} \leq t \leq -\sqrt{3}$ のとき
 $f(-\sqrt{3}) = f(2\sqrt{3})$, $t+3 < 2\sqrt{3}$ であるから

$$M(t) = f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$$

- (ii) $t \leq -3-\sqrt{3}$ のとき, $f(t+3) > f(t)$ より $M(t) = f(t+3)$

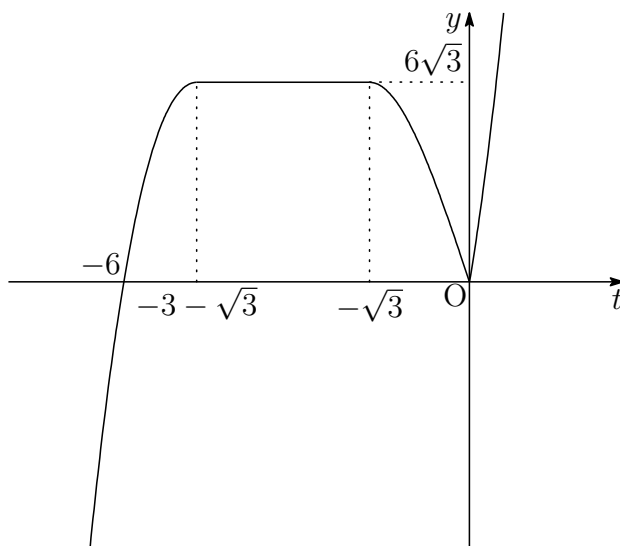
- (iii) $-\sqrt{3} \leq t \leq 0$ のとき, $f(t) \geq f(t+3)$ より $M(t) = f(t)$

- (iv) $0 \leq t$ のとき, $f(t+3) \geq f(t)$ より $M(t) = f(t+3)$

(i)~(iv) より

$$M(t) = \begin{cases} t^3 + 9t^2 + 18t & (t \leq -3\sqrt{3}, 0 \leq t) \\ 6\sqrt{3} & (-3-\sqrt{3} \leq t \leq -\sqrt{3}) \\ t^3 - 9t & (-\sqrt{3} \leq t \leq 0) \end{cases}$$

$y = M(t)$ のグラフの概形は, 次のようになる.



- (3) (2) で示したグラフの概形から, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \{-\sqrt{3} - (-3-\sqrt{3})\} \cdot 6\sqrt{3} + \int_{-6}^{-3-\sqrt{3}} f(t+3) dt + \int_{-\sqrt{3}}^0 f(t) dt \\ &= 18\sqrt{3} + \int_{-3}^{-\sqrt{3}} f(t) dt + \int_{-\sqrt{3}}^0 f(t) dt \\ &= 18\sqrt{3} + \int_{-3}^0 f(t) dt = 18\sqrt{3} + \int_{-3}^0 (t^3 - 9t) dt \\ &= 18\sqrt{3} + \left[\frac{t^4}{4} - \frac{9}{2}t^2 \right]_{-3}^0 = 18\sqrt{3} + \frac{81}{4} \end{aligned}$$