

令和 5 年度

確率分布と統計的推測

電子教科書



2024 年 1 月 23 日

熊本県立第二高等学校数学科

目 次

1	確率変数と確率分布	1
2	確率変数の平均	5
3	確率変数の分散と標準偏差	9
4	確率変数の和の平均と分散	13
5	二項分布	17
6	節末問題 I	21
7	正規分布	23
8	統計的な推測	28
9	節末問題 II	35
10	数学 A「確率」の要項	40
	解答	42
	正規分布表	68

1 確率変数と確率分布

STEP 1

要点整理

- 確率変数：ある試行において、それぞれの根元事象に応じて値が決まる変数
- 確率分布：確率変数 X のとる値とその確率の対応関係

確率変数 X のとる値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ と、それぞれの値に対応する確率 $p_1, p_2, \dots, p_n$ の対応関係を表にまとめると次のようになる。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

このとき、次のことが成り立つ。

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

- 確率変数 X の値がとなる確率を $P(X = a)$ と表す。また、 X が a 以上 b 以下の値をとる確率を $P(a \leq X \leq b)$ と表す。

例 1 1 個のさいころを 2 回投げ、3 の倍数が出た回数 X の確率分布を求めよ。 K

解答 X のとりうる値は 0, 1, 2 である。

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9} \\ P(X = 1) &= \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{9} \\ P(X = 2) &= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

よって、 X の確率分布は、次のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

問 1 1 と書かれた玉が 1 個，3 と書かれた玉が 2 個，5 と書かれた玉が 3 個，7 と書かれた玉が 4 個入っている袋から，玉を 1 個取り出す．取り出した玉に書かれた数 X の確率分布を求めよ． 解 K

問 2 赤玉 3 個と白玉 2 個が入っている袋から，3 個の玉を同時に取り出すとき，出る赤玉の個数 X の確率分布を求めよ． 解 K

STEP 2

例題 1 2個のさいころを同時に投げるとき，出る目の差の絶対値 X の確率分布を求めよ. K

解答 2個のさいころを A, B とする. A の出る目を a , B の出る目を b とするとき, X の値は $|a - b|$ となり, このときの根源事象は 36 個となる.

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

X のとりうる値は 0, 1, 2, 3, 4, 5 となるので, X の確率分布は, 次の表のようになる.

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

問題 1 例題 1 において, 次の確率を求めよ. 解 K

(1) $P(1 \leq X \leq 3)$

(2) $P(X \geq 2)$

STEP 3

演習 1 白玉が3個，赤玉が3個入った袋がある．1枚のコインを投げ，表が出たら玉を3個，裏が出たら玉を2個取り出す．取り出した玉のうち，白玉の個数を X とする．このとき，次の問いに答えよ． 解 K

(1) $P(X = 0)$ を求めよ．

(2) X の確率分布を求めよ．

2 確率変数の平均

STEP 1

要点整理

- 確率変数の平均 (期待値) : 次の表のように確率変数 X の確率分布

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

が与えられたとき

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

を確率変数 X の平均または期待値といい, m または $E(X)$ で表す.

すなわち

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

- 確率変数の 1 次式の平均 : 確率変数 X について,

$$Y = aX + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

のように, 確率変数 Y が X の 1 次式のとき, 次のことがいえる.

$$E(Y) = aE(X) + b$$

例 2 次の表のように確率変数 X の確率分布

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

が与えられたとき, X の平均 $E(X)$ を求めると **K**

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{6}{12} + 2 \times \frac{3}{12} + 3 \times \frac{2}{12} + 4 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{12} (6 + 6 + 6 + 4) = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

問 3 例 2 において, $Y = 3X + 4$ で決まる確率変数 Y について, Y の平均 $E(Y)$ を求めよ. **解** **K**

問 4 赤玉 5 個と白玉 3 個が入っている袋の中から，玉を 1 個ずつもとに戻さずに 2 回続けて取り出す．赤玉の出る回数を X とするとき， X の平均を求めよ． 解 K

問 5 5 本中 2 本のあたりが入っているくじがある．このくじから 2 本を同時に引き，あたりくじ 1 本につき 100 円ずつもらえるゲームがある．50 円払ってこのゲームに参加するとき．次の問いに答えよ． 解 K

(1) あたりくじの出た本数を X 本，このゲームに参加するときの利益を Y 円とするとき． Y を X で表せ．

(2) X の平均を求めよ．

(3) Y の平均を求めよ．

STEP 2

例題 2 1 枚の硬貨を 5 回投げたとき表の出る回数を X 回とする．このとき， X の平均を求めよ． K

解答 X のとりうる値は，0, 1, 2, 3, 4, 5 である． $X=0$ となるのは，硬貨を 5 回投げ表が 1 回も出ない，すなわち裏が 5 回出る場合であるから，

$$P(X=0) = {}_5C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

以下，同じように考えて，

$$P(X=1) = {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32},$$

$$P(X=2) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32},$$

$$P(X=3) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32},$$

$$P(X=4) = {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{32},$$

$$P(X=5) = {}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

よって， X の平均は

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{32} + 1 \times \frac{5}{32} + 2 \times \frac{10}{32} + 3 \times \frac{10}{32} + 4 \times \frac{5}{32} + 5 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{2}$$

補足 二項分布に関する公式 $E(X) = np$ に $n=5$, $p=\frac{1}{2}$ を代入してもよい..

問題 2 1 個のさいころを投げ，2 以下の目が出たら 1 点 3 以上の目が出たら 2 点とする．これを 3 回繰り返したときの合計得点 1 点につき，100 円硬貨を 1 枚もらえるゲームがある．300 円払ってこのゲームに参加するときの利益 X 円の平均を求めよ．

解 K

STEP 3

演習 2 さいころを繰り返し投げ、出た目の数を加えていく．その合計が4以上になったところで投げることを終了する．終了するまでにさいころを投げる回数を X とする．このとき、次の問いに答えよ．(改 センター試験) 解 K

(1) X のとりうる値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた X のとりうる値の中で、最も小さい値を a 、最も大きい値を b とするとき、 $P(X = a)$ 、 $P(X = b)$ を求めよ．

(3) X の平均を求めよ．

3 確率変数の分散と標準偏差

STEP 1

要点整理

- 確率変数の分散：次の表のように確率変数 X の確率分布

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

が与えられたとき、 $(X - m)^2$ の平均

$$E((X - m)^2) = (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n$$

を X の分散といい、 $V(X)$ で表す。すなわち

$$V(X) = E((X - m)^2)$$

- 確率変数の標準偏差：分散 $V(X)$ の正の平方根を X の標準偏差といい、 $\sigma(X)$ で表す。すなわち、

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

また、分散と標準偏差については、次のことがいえる。

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

- 確率変数の 1 次式の分散、標準偏差：確率変数 X について、

$$Y = aX + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

のように、確率変数 Y が X の 1 次式のとき、次のことがいえる。

$$V(Y) = a^2 V(X), \quad \sigma(Y) = |a| \sigma(X)$$

例 3 さいころを 2 回投げて、偶数の目が出た回数を X とする．このとき、 X の分散と標準偏差を求めよ． K

解答 X の確率分布は次の表のようになる．

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

このとき X の平均は

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

よって、 X の分散と標準偏差は

$$V(X) = (0 - 1)^2 \times \frac{1}{4} + (1 - 1)^2 \times \frac{2}{4} + (2 - 1)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

問 6 袋の中に 1 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードが入っている．この袋から 1 枚のカードを取り出し、そのカードに書かれた数字を X とする． X の分散と標準偏差を求めよ． 解 K

問 7 p.2 の問 2 において、 X の分散と標準偏差を求めよ． 解 K

赤玉 3 個と白玉 2 個が入っている袋から、3 個の玉を同時に取り出すとき、出る赤玉の個数 X の分散と標準偏差を求めよ．

STEP 2

例題 3 白玉3個，赤玉2個が入っている袋から，1個の玉を取り出し，色を調べてもとに戻す．これを2回繰り返すとき，赤玉が出た回数を X とする．このとき， $Y = 5X + 3$ で決まる確率変数 Y の分散と標準偏差を求めよ． K

解答 X のとりうる値は 0, 1, 2 である．それぞれの確率を求めると

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= {}_2C_0 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}, \\P(X = 1) &= {}_2C_1 \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{25}, \\P(X = 2) &= {}_2C_2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\end{aligned}$$

よって， X の平均は

$$E(X) = 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{4}{5}$$

したがって， X の分散と標準偏差は

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\&= 0^2 \times \frac{9}{25} + 1^2 \times \frac{12}{25} + 2^2 \times \frac{4}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}, \\ \sigma(X) &= \sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}V(Y) &= V(5X + 3) = 25V(X) = 25 \times \frac{12}{25} = \mathbf{12}, \\ \sigma(Y) &= \sigma(5X + 3) = 5\sigma(X) = 5 \times \frac{2\sqrt{3}}{5} = \mathbf{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

問題 3 1 枚の硬貨を投げ，表が出たか裏が出たか記録する．これを繰り返して，表裏どちらかが3回記録されたところで終了する．終了までに硬貨を投げた回数を X とする．このとき， $Y = 4X - 1$ で決まる確率変数 Y の分散と標準偏差を求めよ．

解 K

STEP 3

演習 3 座標平面上に 9 個の点

$$\begin{array}{lll} P_1(0, 2) & P_2(1, 2) & P_3(2, 2) \\ P_4(0, 1) & P_5(1, 1) & P_6(2, 1) \\ P_7(0, 0) & P_8(1, 0) & P_9(2, 0) \end{array}$$

をとる．袋の中に $P_1, P_2, \dots, P_9$ と書かれた 9 個の玉が入っている．この袋から 2 個の玉を取り出すとき，取り出した 2 個の玉に書かれている 2 点に対して，その距離の 2 乗を X とする．このとき，次の問いに答えよ．(改 センター試験) 解 K

(1) X のとりうる値をすべて答えよ．

(2) (1) で求めた X のとりうる値を小さい順に左から， $a_1, a_2, \dots$ と並べる．このとき， $P(X = a_1)$ ， $P(X = a_2)$ を求めよ．

(3) X の平均と分散を求めよ．

4 確率変数の和の平均と分散

STEP 1

要点整理

- 確率変数の和の平均：2つの確率変数 X, Y に対して、次のことがいえる。

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- 確率変数の独立：2つの確率変数 X, Y に対して、 X のとる任意の x_i と Y のとる任意の値 y_j について、 $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ が成り立つとき、 X, Y は独立であるという。

- 積の平均と和の分散：確率変数 X, Y が独立であるとき、次のことがいえる。

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$$

例 4 大小2つのさいころを投げるとき、大きいさいころの出る目を X 、小さいさいころの出る目を Y とする。このとき $X + Y$ の平均と分散、 XY の平均を求める。

解答 $E(X) = \frac{7}{2}$, $E(Y) = \frac{7}{2}$ であるから

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

また、 $V(X) = \frac{35}{12}$, $V(Y) = \frac{35}{12}$ となり、 X, Y は独立であるから

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

補足 $E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}$,

$$E(X^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6},$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

問 8 赤玉 2 個と白玉 3 個が入っている袋 A と，赤玉 4 個と白玉 1 個が入っている袋 B から，2 個ずつ玉を取り出す．袋 A，B から取り出された赤玉の個数をそれぞれ X ， Y とする．このとき， $X + Y$ の平均と分散を求めよ． 解 K

問 9 1 から 6 までの数が 1 つずつ書かれたカード 6 枚が入っている箱 A と，4 から 8 までの数が 1 つずつ書かれたカード 5 枚が入っている箱 B がある．箱 A，B から 1 枚ずつカードを取り出し，箱 A，B から取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ X ， Y とする．このとき， $X + Y$ の平均と分散を求めよ． 解 K

STEP 2

例題 4 10 円硬貨 1 枚，50 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 1 枚を同時に投げたとき，表の出た硬貨の金額の和の平均を求めよ．

解答 10 円硬貨，50 円硬貨，100 円硬貨を同時に投げたとき，表の出る枚数をそれぞれ X ， Y ， Z とすると，表の出た硬貨の金額の和は

$$10X + 50Y + 100Z$$

と表せる．

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

上の確率分布から， X の平均は

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

Y ， Z についても同様の確率分布となるので

$$E(X) = E(Y) = E(Z)$$

よって，求める金額の和の平均は

$$\begin{aligned} E(10X + 50Y + 100Z) &= E(10X) + E(50Y) + E(100Z) \\ &= 10E(X) + 50E(Y) + 100E(Z) \\ &= (10 + 50 + 100) \times \frac{1}{2} = \mathbf{80} \end{aligned}$$

問題 4 3 枚の硬貨を同時に投げる操作を 3 回繰り返し， k 回目 ($k = 1, 2, 3$) に表の出た硬貨の枚数に対し，その k 倍の得点を得られる．このとき，得点合計の平均と分散を求めよ． 解 K

STEP 3

演習 4 袋の中に 1, 2, 3 の数字を書いたカードが, それぞれ 3 枚, 2 枚, 1 枚の計 6 枚入っている. この袋の中から, カードを 1 枚取り出す操作を 2 回行う. 1 回目に取り出したカードに書かれた数字を X , 2 回目に取り出したカードに書かれた数字を Y とする. このとき, 次の問いに答えよ. 解 K

(1) 1 回目に取り出したカードを袋に戻して 2 回目の操作を行う場合,
 $P(X = 1, Y = 2)$ を求めよ.

(2) (1) の場合, $E(XY)$, $V(X + Y)$ を求めよ.

(3) 1 回目に取り出したカードの袋に戻さずに 2 回目の操作を行う場合, $E(XY)$ を求めよ.

5 二項分布

STEP 1

要点整理

- 二項分布：1回の試行で事象 A の起こる確率が p で、起こらない確率が q のとき、 n 回の試行が独立ならば、 $X = r$ となる確率、すなわち、この反復試行で事象 A がちょうど r 回起こる確率は、

$$P(X = r) = {}_nC_r p^r q^{n-r} \quad (p + q = 1)$$

したがって、 X の確率分布は、次の表のようになる。

X	0	1	...	r	...	n	計
P	${}_nC_0 q^n$	${}_nC_1 p q^{n-1}$	...	${}_nC_r p^r q^{n-r}$	...	${}_nC_n p^n$	1

このような確率分布を二項分布といい、 $B(n, p)$ と表す。

- 二項分布の平均と標準偏差： X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき、 $p + q = 1$ とすると

$$E(X) = np, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

例 5 さいころを 5 回投げて、素数の目が出る回数 X の平均と標準偏差を求める。 K

解答 さいころを 1 回投げて、奇数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$ である。

よって、確率変数 X は、二項分布 $\left(5, \frac{1}{2}\right)$ に従う。

$$\text{このとき} \quad E(X) = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad \sigma(X) = \sqrt{5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

問 10 確率変数 X が次の二項分布に従うとき、 X の平均と標準偏差を求めよ。 解 K

$$(1) B\left(30, \frac{2}{5}\right) \qquad (2) B\left(100, \frac{2}{3}\right)$$

問 11 2 個のさいころを同時に投げる試行を 10 回繰り返す. 2 個とも同じ目が出る回数を X とする. X の平均と標準偏差を求めよ. 解 K

問 12 赤玉 6 個, 白玉 2 個が入っている袋から, 玉を 1 個取り出し, 玉の色を確認してもとに戻すという試行を 20 回繰り返す. ここで, 赤玉の出る回数を X とするとき, X の平均と標準偏差を求めよ. 解 K

STEP 2

例題 5 1 枚の硬貨を投げるとき，表が出れば 20 点を得られ，裏が出れば 10 点を失う．これを 20 回繰り返すとき，得点合計の平均と標準偏差を求めよ．K

解答 表の出る回数を X とすると，得点合計は

$$20X - 10(20 - X) = 30X - 200$$

1 枚の硬貨を投げて表が出る確率は $\frac{1}{2}$

確率変数 X は，二項分布 $B\left(20, \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$E(X) = 20 \times \frac{1}{2} = 10, \quad \sigma(X) = \sqrt{20 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

求める得点合計の平均と標準偏差は

$$\begin{aligned} E(30X - 200) &= 30E(X) - 200 = 30 \times 10 - 200 = 100, \\ \sigma(30X - 200) &= 30\sigma(X) = 30\sqrt{5} \end{aligned}$$

問題 5 1 個のさいころを投げて，4 以下の目が出たときは 5 点を得られ，5 以上の目が出たときは 10 点を失うゲームがある．これを 40 回繰り返すとき，得点合計の平均と標準偏差を求めよ．解 K

STEP 3

演習 5 袋の中に赤玉 4 個, 白玉 2 個が入っている. この袋から玉を 1 つ取り出し, 色を確認してから袋に戻すという試行を 4 回繰り返す. このとき, 白玉の出た回数を X とするとき, 次の問いに答えよ. 解 K

(1) X の平均 m , 標準偏差 σ を求めよ.

(2) $P(|X - m| < \sigma)$ を求めよ.

(3) $E(X^2 + 3X - 2)$ を求めよ.

6 節末問題 I

- 1 A の袋には 1, 3, 5, 7, 9 の数が書かれたカードが, B の袋には 2, 4, 6, 8 の数が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ入っている. A と B の袋からそれぞれ 1 枚ずつカードを引くとき, 次の問いに答えよ. K

(1) 取り出された 2 枚のカードに書かれた数の和の平均と標準偏差を求めよ.

(2) 取り出された 2 枚のカードに書かれた数の積の平均を求めよ.

- 2 赤玉, 白玉が合わせて 100 個入った袋がある. この袋から 1 個の玉を取り出し, 色を確認してからもとに戻す操作を n 回繰り返す. 白玉を取り出した回数の平均が $\frac{16}{5}$, 分散が $\frac{24}{25}$ のとき, 袋の中に入っている白玉の個数と n の値を求めよ. K

3 袋 A の中に赤玉と白玉がそれぞれ 2 つ入っていることと，袋 B の中に赤玉 3 つと白玉 2 つが入っていることが分かっている． **K** (名大文系 2008 年 4 番)

(1) 袋 B から 2 つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数の期待値 (平均) を求めよ．

(2) 袋 A から 1 つの玉を取り出し，そのあと袋 B から 2 つの玉を取り出す．その 3 つの玉のうち赤玉が 2 つである確率を求めよ．

(3) 袋 A から 1 つの玉を取り出したあとで，2 つの玉を袋 A から取り出すかあるいは 2 つの玉を袋 B から取り出すかのどちらかを選択できるとする．できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値 (平均) を求めよ．

7 正規分布

STEP 1

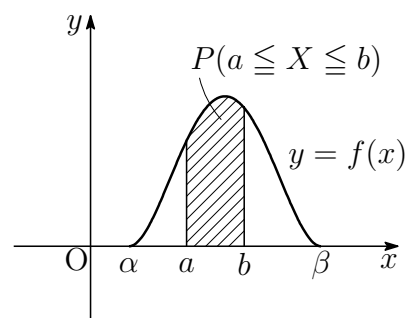
要点整理 1

- 連続的な確率変数：連続的な値をとる変数 X で、そのとる値の範囲の確率が定まっているとき、 X を確率変数といい、確率変数 X が a 以上 b 以下の値をとる確率を $P(a \leq X \leq b)$ と表す。

このような変数を連続型確率変数という。

また、これまでに扱ったとびとびの値をとる確率変数を離散型確率変数という。

- 連続型確率変数の確率：連続型確率変数 X の確率 $P(a \leq X \leq b)$ が右図のように、曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸、直線 $x = a$ 、 $x = b$ で囲まれた図形の面積で表されているとき、関数 $f(x)$ を X の確率密度関数といい、曲線 $y = f(x)$ を分布曲線という。このとき、



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{また} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$$

- 連続型確率変数の平均 $m = E(X)$ ，分散 $V(X)$ ，標準偏差 $\sigma(X)$ ：

確率変数 X のとる値の範囲が $a \leq X \leq b$ で、確率密度関数が $f(x)$ のとき、平均 $m = E(X)$ と分散 $V(X)$ ，標準偏差 $\sigma(X)$ は次の式で与えられる。

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx, \quad V(X) = \int_a^b (x - m)^2 f(x) dx, \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

また、上の第2式について、次が成立する。

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_a^b x^2 f(x) dx - 2m \int_a^b x f(x) dx + m^2 \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_a^b x^2 f(x) dx - 2m \cdot m + m^2 \cdot 1 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

要点整理 2

- 正規分布：確率変数 X のとり得る値が実数全体で， X の確率密度関数が，

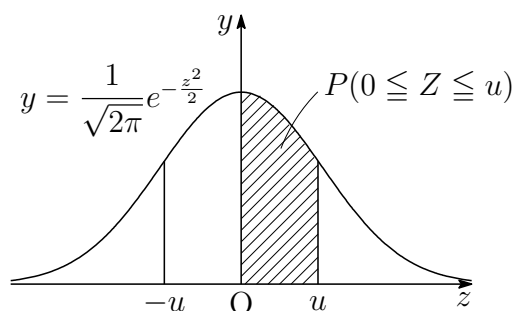
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

であるとき，この X の確率分布を平均 m ，標準偏差 σ の正規分布といい， $N(m, \sigma^2)$ で表す．このとき，確率変数 X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うという (e は無理数で， $e = 2.71828\cdots$ である)．

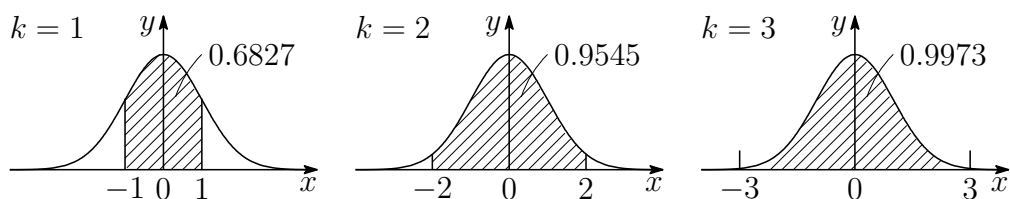
- 標準正規分布：確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき， $Z = \frac{X - m}{\sigma}$ とおくと， Z の確率分布は平均 0，標準偏差 1 の正規分布 $N(0, 1)$ となる．正規分布 $N(0, 1)$ を標準正規分布といい，その確率密度関数は

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

- ① $y = f(z)$ のグラフは， y 軸に関して対称な曲線である．
2 点 $(\pm 1, f(\pm 1))$ は変曲点である (複号同順)．



- ② Z の値が $-k \leq Z \leq k$ の範囲にある確率は，次の図のような斜線部分の面積となり k が大きくなると 1 に近づく．



- ③ 確率 $P(0 \leq Z \leq u)$ を， u のいろいろな値に対して計算して表にしたものを **正規分布表** という．確率を計算するには巻末の **正規分布表** を利用してよい．

- 正規分布による二項分布の近似：確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき， n が大きければ， $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ ($p + q = 1$) は，ほぼ標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う (**電子教科書数学 B** の p.173(物理頁 178) に証明掲載)．

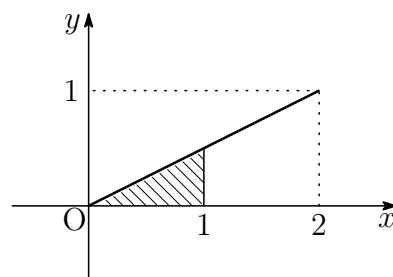
例 6 確率変数 X のとりうる値の範囲が $0 \leq X \leq 2$ で、確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad (0 \leq x \leq 2)$$

のとき、 $P(0 \leq X \leq 1)$ を求めよ。 **K**

解答 求める確率は

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 1) &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



補足 X の平均 $E(X)$ および分散 $V(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3}, \\ E(X^2) &= \int_0^2 x^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^2 = 2, \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

問 13 確率変数 X のとりうる値の範囲が $0 \leq X \leq 2$ で、確率密度関数が

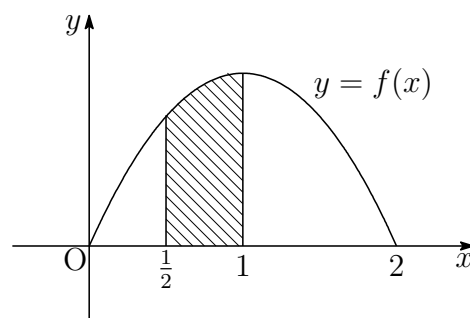
$$f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2) \quad (0 \leq x \leq 2)$$

のとき、次の値を求めよ。 **解 K**

(1) $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right)$

(2) X の平均 $E(X)$

(3) X の分散 $V(X)$



公式 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$

を利用できる (**電子教科書数学 B** の p.167(物理頁 172) に証明掲載).

STEP 2

例題 6 K

- (1) Z が標準正規分布に従うとき、確率 $P(-1.33 \leq Z \leq 1.76)$ を求めよ.
- (2) X が正規分布 $N(2, 16)$ に従うとき、確率 $P(X \leq 5)$ を求めよ.

解答 (1) Z は標準正規分布であるから

$$\begin{aligned} P(-1.33 \leq Z \leq 1.76) &= P(-1.33 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.76) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.33) + P(0 \leq Z \leq 1.76) \\ &= 0.4082 + 0.4608 = \mathbf{0.8690} \end{aligned}$$

補足 $y = f(z)$ は y 軸に関して対称であるから

$$P(-u \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq u)$$

(2) X の分布は、平均 2、標準偏差 4 の正規分布であるから

$$Z = \frac{X - 2}{4}$$

の分布は $N(0, 1)$ である.

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= P(Z \leq 0.75) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.75) \\ &= 0.5 + 0.2734 = \mathbf{0.7734} \end{aligned}$$

補足 $P(Z \leq u) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq u)$

問題 6 ある試験で、受験者の平均点は 52 点、標準偏差は 15 点であった。受験者の得点が正規分布に従うとして、上位 8%の中に入るには何点以上あればよいか。 解 K

STEP 3

二項分布に関する確率を，正規分布を利用して求めてみましょう．

演習 6 さいころを 500 回投げて，1 の目が出る回数を X とするとき，次の問いに答えよ． 解 K

(1) $X \leq 100$ となる確率を求めよ．

(2) $|6X - 500| \leq \alpha$ の範囲にある確率が 0.4 くらいとなるような整数 α の値を求めよ．

8 統計的な推測

STEP 1

要点整理 1-1

- 標本調査：統計調査には，調査の対象全体をもれなく調べる全数調査と，その一部を抜き出して調べ，それから全体を推測しようとする標本調査があり，多くの場合，標本調査が用いられる．
- 母集団：調べようとする調査の対象全体をいう．
- 標本：調査の為に母集団から抜き出された要素の全体をいう．標本を抜き出すことを抽出といい，標本に含まれる要素の個数を標本の大きさという．
- 抽出：標本を抜き出すことをいう．とくに，標本に偏りがないように，確率的にみて公平な抽出を無作為抽出，または，任意抽出という．
- 母平均と標本平均：母集団についての平均，標準偏差を，それぞれ，母平均，母標準偏差という．また，母平均 m ，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ を抽出するとき， $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ を標本平均といい， $\bar{X}$ で表す．
標本平均 $\bar{X}$ について，平均 $E(\bar{X}) = m$ ，標準偏差 $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- 標本平均の標準化：母平均 m ，母標準偏差 σ の母集団から抽出された大きさ n の標本平均 $\bar{X}$ について， n が大きいとき， $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ の確率分布は，ほぼ標準正規分布 $N(0, 1)$ とみなすことができる (中心極限定理)．

要点整理 1-2

- 推定：母集団の分布がもっている定数の値が未知のときに，与えられた標本からその値を推測する方法をいう．
- 母平均の推定：母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は，標本の大きさが大きいとき，標本平均の値を $\bar{x}$ ，母標準偏差の値をとすると，

$$\left[\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$
$$\left(\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ とも表す.} \right)$$

また，信頼度 99% の信頼区間は

$$\left[\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

※母標準偏差 σ がわからない場合は，標本の標準偏差の値 s でおき換えてよい．すなわち

$$\left[\bar{x} - 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

- 母比率の推定：ある性質について，母集団を構成する要素が，それをもつかもたないかのどちらかのとき，その性質をもつ要素の割合をその母比率という．また，抽出された標本の中で，その性質をもつ要素の割合をその標本比率という．母比率に対する信頼度 95% の信頼区間は，標本の大きさが大きいとき，標本比率を R とすると，

$$\left[\bar{x} - 1.96 \times \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}, \bar{x} + 1.96 \times \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \right]$$

要点整理 2

- 仮説：母集団に関する主張を数学的に記述したものを仮説という。はじめに仮定した仮説を帰無仮説といい、 H_0 で表す。反対に、それを否定したものを対立仮説といい、 H_1 で表す。

- 仮説検定：帰無仮説が否定できるかどうかを調べて、対立仮説を受け入れるかどうかを判断する統計的な手法を仮説検定という。

その際に、標本平均や標本比率について、帰無仮説を否定してもよいと考えられる値の範囲のことを棄却域という。棄却域は、基準となる数値をもとにして、標本平均や標本比率が棄却域に入る確率が α となるように定める。この α を有意水準または危険率といい、0.05 や 0.01 のような小さい値にとる。例えば、 $\alpha = 0.05$ のとき、その仮説検定を有意水準 5% の仮説検定という。

仮説検定においては、母集団から抽出した標本の標本平均や標本比率の値が棄却域にあれば、帰無仮説は否定できると判断し、これを帰無仮説を棄却するという。このとき、対立仮説を受け入れる。

反対に、標本平均や標本比率の値が棄却域になければ、帰無仮説は否定できないと判断する。これを帰無仮説を棄却しないという。ただし、「帰無仮説を棄却しない」とは、帰無仮説を否定するだけの根拠が得られなかったという意味であり、帰無仮説が肯定されるということではない。

- 両側検定：帰無仮説として母平均が m であると仮定したとき、標本平均 $\bar{X}$ についての有意水準 5% の棄却域は、

$$|\bar{X} - m| > 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

このように、棄却域を分布の両側に設定するような検定を両側検定という。

※ 母標準偏差 σ を標本の標準偏差 s でおき換えても大きな違いは生じないため、棄却域は、

$$|\bar{X} - m| > 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

を満たす範囲と考えることもできる。

例 7 母平均 50, 母標準偏差 4 をもつ母集団から, 大きさ 100 の標本を無作為抽出する. このとき標本平均 $\bar{X}$ の平均 $E(\bar{X})$ と標準偏差 $\sigma(\bar{X})$ を求めよ. K

解答 平均 $E(\bar{X})$ は母平均に等しいから

$$E(\bar{X}) = 50$$

また, 標準偏差 $\sigma(\bar{X})$ は

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{4}{\sqrt{100}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

問 14 母平均 60, 母標準偏差 16 をもつ母集団から, 大きさ 400 の標本を無作為抽出するとき, その標本平均を $\bar{X}$ とする. 解 K

(1) 平均 $E(\bar{X})$ と標準偏差 $\sigma(\bar{X})$ を求めよ.

(2) $\bar{X}$ が 60 以上 61 以下の値をとる確率を求めよ.

STEP 2

例題 7 ある母集団から大きさ 100 の標本を無作為抽出したとき，標本の平均は 31.5，標準偏差は 2.5 であった．母平均を信頼度 95% で推定せよ．ただし，四捨五入して，小数第 1 位まで求めよ． K

解答 $\left[31.5 - 1.96 \times \frac{2.5}{\sqrt{100}}, 31.5 + 1.96 \times \frac{2.5}{\sqrt{100}} \right]$ より **[31.0, 3.0]**

問題 7 解 K

- (1) ある試験を受けた受験者から 100 人を無作為抽出したところ，平均は 52.3，標準偏差は 15 であった．受験者全体の平均を信頼度 95% で推定せよ．四捨五入して，小数第 1 位まで求めよ．

- (2) ある製品を 400 個無作為抽出したところ，100 個の不良品があった．不良品率 p を信頼度 95% で推定せよ．ただし， $\sqrt{3} = 1.73$ とし，四捨五入して，小数第 2 位まで求めよ．

例題 8 ある工場で作ったサッカーボール 100 個を無作為抽出し、直径を測ったところ、平均は 20.2cm、標準偏差は 2.0cm であった。この工場で作ったサッカーボール全体の 1 個あたりの直径は平均 20.0cm といえるか。帰無仮説 H_0 を「平均は 20.0cm である」、対立仮説 H_1 を「平均は 20.0cm でない」として、有意水準 5% で検定せよ。

解答 標本平均を $\bar{X}$ とすると、 $\bar{X}$ の棄却域は **K**

$$|\bar{X} - m| > 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad s = 2.0, \quad n = 100$$

帰無仮説より、 $m = 20.0$ を代入すると、棄却域は

$$|\bar{X} - 20.0| > 1.96 \times \frac{2.0}{\sqrt{100}} = 0.392$$

を満たす範囲である。ここで、 $\bar{X}$ に 20.2 を代入すると

$$|20.2 - 20.0| = 0.2 < 0.392$$

となり、帰無仮説は棄却されない。

すなわち、ある工場で作ったサッカーボール全体の 1 個あたりの直径は平均 20.2cm でないとは判断できない。

問題 8 A 県在住の高校生 200 人を無作為抽出し、数学の学力調査を行ったところ、平均は 54.3 点。標準偏差は 2.1 点であった。日本全体の高校生の同調査の平均は、56.7 点といえるか。帰無仮説 H_0 を「平均は 56.7 点である」、対立仮説 H_1 を「平均は 56.7 点でない」として、有意水準 5% で検定せよ。 **解** **K**

STEP 3

演習 7 ある学校で試験を実施し，受験者の中から 20 人を抽出したところ，得点は次のような値であった．解 K

64	60	64	61	66	61	60	64	67	57
58	62	60	71	53	70	54	69	55	64

- (1) 上の 20 人の得点の平均と標準偏差 s を求めよ．
- (2) この試験について，学校全体の平均を信頼度 95% で推定せよ．ただし， $\sqrt{5} = 2.23$ とし，四捨五入して，小数第 1 位まで求めよ．

演習 8 ある植物の種子は，発芽率が 40% であるといわれている．この種子を 256 個まいたところ 90 個発芽した．この種子の発芽率は 40% であるといえるか．次の問いに答えよ．解 K

- (1) 帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 をそれぞれ述べよ．
- (2) (1) について，有意水準 5% で検定せよ．

9 節末問題 II

1 次の問いに答えよ．正規分布を用いてもよい． K

(1) 確率変数 Z が標準正規分布に従うとき

$$P(-\boxed{\text{ア}} \leq Z \leq \boxed{\text{ア}}) = 0.99$$

が成り立つ． $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる最も適切なものを，次の ㉠ ～ ㉢ のうちから 1 つ選べ．

㉠ 1.64 ㉡ 1.96 ㉢ 2.33 ㉣ 2.58

(2) 母標準偏差の母集団から，大きさの無作為標本を抽出する．ただし，は十分に大きいとする．この標本から得られる母平均 m の信頼度 (信頼係数) 95% の信頼区間を $A \leq m \leq B$ とし，この信頼区間の幅 L_1 を $L_1 = B - A$ で定める．この標本から得られる信頼度 99% の信頼区間を $C \leq m \leq D$ とし，この信頼区間の幅 L_2 を $L_2 = D - C$ で定めると

$$\frac{L_2}{L_1} = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ．また，同じ母集団から，大きさ $4n$ の無作為標本を抽出して得られる母平均 m の信頼度 95% の信頼区間を $E \leq m \leq F$ とし，この信頼区間の幅 L_3 を $L_3 = F - E$ で定める．このとき

$$\frac{L_3}{L_1} = \boxed{\text{ウ}}$$

が成り立つ．いずれも四捨五入して，小数第 1 位まで求めよ．

(センター試験)

- 2 14000 人の生徒に対して，科目 A と科目 B の試験を実施した．試験の点数は正規分布に従うと考え，正規分布表を用いてもよい．

科目 A の平均点は 66.2 点，標準偏差は 15.0 点であった．点数の高い順に順位をつけたとき，この試験で 80 点であった生徒の順位は ア までにあり，59 点であった生徒の順位は イ までにある． ア ， イ に当てはまるものを，次の ㊸ ～ ㊼ のうちから 1 つずつ選べ．ただし，同じものを選んでもよい． K

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| ㊸ 1 から 1000 | ㊹ 1001 から 2000 | ㊺ 2001 から 3000 |
| ㊻ 3001 から 4000 | ㊼ 4001 から 5000 | ㊽ 5001 から 6000 |
| ㊾ 6001 から 7000 | ㊿ 7001 から 8000 | ㋀ 8001 から 9000 |
| ㋁ 9001 から 10000 | ㋂ 10001 から 11000 | ㋃ 11001 から 12000 |
| ㋄ 12001 から 13000 | ㋅ 13001 から 14000 | |

科目 B の標準偏差は 16.0 点であったが，平均点が発表されなかったので，無作為に選ばれた 196 人の試験の点数をもとに平均点を推定することにした．196 人の平均点が 63.5 点であったとき，196 人の点数を十分に大きな標本と考えて m に対する信頼度 (信頼係数)95% の信頼区間を求めると，

$$\boxed{\text{ウ}} \leq m \leq \boxed{\text{エ}}$$

となる．ただし，四捨五入して，小数第 1 位まで求めよ． (センター試験追試)

- 3 ある病気に対して投与する薬の効果の有無を調べたい．薬を投与し，効果有と判断される比率は p であるとする．この病気を持った患者から無作為に n 人を選び，薬を投与したとき， i 番目の患者に薬の効果が認められれば 1 とし，認められなければ 0 とする確率変数を X_i とする．このとき，次の各問いに答えよ． **K** (鹿大 [旧課程受験者用]2015 年 9 番)

(1) 標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ の平均，および分散を求めよ．

- (2) この病気を持った患者から無作為に 400 人を選び，薬を投与したところ 320 人に薬の効果が認められた．このとき，母比率 p の信頼度 95% の区間を，小数第 3 位を四捨五入して求めよ．ただし，標本の大きさ 400 は十分大きい数とみなせるとし，また確率変数 Z が標準正規分布に従うとき， $P(Z < -1.96) = 0.025$ が成り立つとする．

- 4 X社が販売しているアイスは、「当たり1本無料」と書かれた券の封入率が30%であると言われている。このアイスを2000本買ったところ、580本に当たり券が入っていた。このアイスの当たり券の封入率は30%だといえるか。次の問いに答えよ。 K

(1) 帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 をそれぞれ述べよ。

(2) (1) について、有意水準5%で検定せよ。

5 A 君は学校の課外授業で、学校近くの海岸に産卵にくるウミガメについて調べることにした。調べていくにつれ、A 君は以下のことを知った。

- 学校近くの海岸に今年産卵されていた卵は 240 個で、そのうち孵化した卵は 150 個。
- 今年の日本全国のウミガメの産卵地全体の平均孵化率は、55%だといわれている。

このことから、学校近くの海岸に産卵にくるウミガメの孵化率は 55%だといえるか。次の問いに答えよ。 **K**

- (1) 帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 をそれぞれ述べよ。
- (2) (1) について、有意水準 5%で検定せよ。

10 数学 A「確率」の要項

要点整理 1

- **試行と事象**：同じ条件のもとで繰り返すことができる実験や観測を試行といい，試行の結果起こる事柄を**事象**という．また，それ以上分けることのできない事象を**根元事象**という．

1つの試行において，元事象の全体からなる事象を，その試行の**全事象**といい， U で表す．また，空集合ので表される事象を**空事象**という．

1つの試行において，全事象に含まれる根元事象のどれが起こることも同じ程度に期待できるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**という．

- **確率の定義**：根元事象がすべて同様に確からしい試行において，全事象 U に含まれる根元事象の個数を $n(U)$ ，事象 A に含まれる根元事象の個数を $n(A)$ とするとき， $\frac{n(A)}{n(U)}$ を事象の**確率**といい， $P(A)$ で表す．すなわち，

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

- **確率の基本性質**：どのような事象 A に対しても

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

全事象 U ，空事象 ϕ について

$$P(U) = 1, \quad P(\phi) = 0$$

2つの事象 A, B について

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

とくに， A, B が非反事象であるとき

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\text{確率の加法定理})$$

要点整理 2

- 余事象の確率：全事象の中で，事象 A に対して「 A が起こらない」という事象を A の余事象といい， $\bar{A}$ で表す．このとき，次のことがいえる．

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- 独立な試行と確率：試行 T_1, T_2 について．試行の結果が互いに他方に影響されないとき，試行 T_1, T_2 は独立である，または， T_1, T_2 は独立な試行であるという．

このとき， T_1 によって決まる事象 A と， T_2 によって決まる事象 B が同時に起こる確率は， A が起こる確率 $P(A)$ と B が起こる確率 $P(B)$ の積で表される．すなわち，

$$p = P(A) \times P(B)$$

- 反復試行の確率：同じ条件のもとで独立なある試行を繰り返すとき，その一連の試行を反復試行という．1 回の試行で事象 A の起こる確率をとすると，この試行を回繰り返すとき， A がちょうど回起こる確率は，

$${}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}$$

解答

問 1 X のとりうる値は 1, 3, 5, 7 である. 袋の中の玉は全部で

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ (個)}$$

で, その中から 1 個の玉を取り出すから

$$P(X = 1) = \frac{1}{10}, \quad P(X = 3) = \frac{2}{10}, \quad P(X = 5) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 7) = \frac{4}{10}$$

よって, X の確率分布は次の表のようになる.

X	1	3	5	7	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

問 2 X のとりうる値は 1, 2, 3 である.

袋の中の 5 個の玉から 3 個の玉の取り出し方は ${}_5C_3$ 通り.

$$P(X = 1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X = 2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_2C_1}{{}_5C_3} = \frac{6}{10},$$

$$P(X = 3) = \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{10}$$

よって, X の確率分布は次の表のようになる.

X	1	2	3	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

問題 1 (1) $P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

(2) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$

$$= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}$$

$$= 1 - \left(\frac{6}{36} + \frac{10}{36} \right) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

演習 1 (1) $X = 0$ となるのは、コインの表が出て、取り出した 3 個の玉がすべて赤玉の場合と、コインの裏が出て、取り出した 2 個の玉がすべて赤玉の場合である。よって、

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{5} \right) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

(2) X のとりうる値は 0, 1, 2, 3 となる。

$X = 1$ となるのは、コインの表が出て、取り出した 3 個の玉が白玉 1 個、赤玉 2 個の場合と、コインの裏が出て、取り出した 2 個の玉が白玉 1 個、赤玉 1 個の場合である。よって、

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_2}{{}_6C_3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{9}{20} + \frac{3}{5} \right) = \frac{21}{40} \end{aligned}$$

$X = 2$ となるのは、コインの表が出て、取り出した 3 個の玉が白玉 2 個、赤玉 1 個の場合と、コインの裏が出て、取り出した 2 個の玉が白玉 2 個の場合である。よって、

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_3C_2 \times {}_3C_1}{{}_6C_3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{9}{20} + \frac{1}{5} \right) = \frac{13}{40} \end{aligned}$$

$X = 3$ となるのは、コインの表が出て、取り出した 3 個の玉がすべて白玉の場合である。よって、

$$P(X = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40}$$

以上より、 X の確率分布は次のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{5}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{1}{40}$	1

参考 X のとりうる値が 4 つなので、そのうちの 3 つの値に対する確率を出し、残りの 1 つの値に対する 確率は余事象の確率を利用してもよい。例えば

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{21}{40} + \frac{13}{40} \right) = \frac{1}{40} \end{aligned}$$

問3 $E(Y) = E(3X + 4) = 3E(X) + 4 = 3 \cdot \frac{11}{6} + 4 = \frac{19}{2}$

問4 X のとりうる値は 0, 1, 2 である.

$X = 0$ となるのは, 1 回目, 2 回目ともに白玉が出る場合であるから

$$P(X = 0) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

$X = 1$ となるのは, 1 回目に赤玉が出て 2 回目に白玉が出る場合か, 1 回目に白玉が出て 2 回目に赤玉が出る場合であり, これら 2 つのケースは互いに排反であるから

$$P(X = 1) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

$X = 2$ となるのは, 1 回目, 2 回目ともに赤玉が出る場合であるから

$$P(X = 2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

したがって, X の平均は

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{5}{14} = \frac{5}{4}$$

問5 (1) $Y = 100X - 50$

(2) くじを 2 本引いたとき, あたりくじの出た本数 X のとりうる値は 0, 1, 2 であるから

$$P(X = 0) = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10},$$

$$P(X = 1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10},$$

$$P(X = 2) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

よって, X の平均は

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

(3) (1), (2) の平均は

$$E(Y) = E(100X - 50) = 100E(X) - 50 = 100 \cdot \frac{4}{5} - 50 = \mathbf{30}$$

問題 2 合計得点を Y とする. X を Y で表すと

$$X = 100Y - 300$$

Y のとりうる値は

$$1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 2, 2 + 2 + 2 \quad \text{すなわち} \quad 3, 4, 5, 6$$

$Y = 3$ となるのは, さいころを 3 回投げ 2 以下の目が 3 回出る場合であるから,

$$P(Y = 3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

以下, 同じように考えて,

$$P(Y = 4) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{27},$$

$$P(Y = 5) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6}{27},$$

$$P(Y = 6) = {}_3C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

よって, Y の平均は

$$E(Y) = 3 \times \frac{1}{27} + 4 \times \frac{6}{27} + 5 \times \frac{12}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = 5$$

$X = 100Y - 300$ より, X の平均は

$$\begin{aligned} E(X) &= E(100Y - 300) \\ &= 100E(Y) - 300 \\ &= 100 \cdot 5 - 300 = \mathbf{200} \end{aligned}$$

参考 $Y = Z + 3$ とすると, 確率変数 Z は, 二項分布 $B\left(3, \frac{2}{3}\right)$ に従う.

$$X = 100Z, \quad E(Z) = 3 \times \frac{2}{3} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad E(X) = 100E(Z) = 200$$

演習 2 (1) X のとり得る値は **1, 2, 3, 4**

(2) (1) より $a = 1, b = 4$

$X = 1$ となるのは、さいころを 1 回投げて 4 以上の目が出る場合であるから

$$P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$X = 4$ となるのは、さいころを投げて 1 回目から 3 回目まですべて 1 の目が出て、4 回目に出る目が 1~6 となる場合であるから

$$P(X = 4) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{6}{6} = \frac{1}{216}$$

(3) $X = 2$ となるのは、次の表のような場合である.

1 回目に出る目	2 回目に出る目
1	3~6
2	2~6
3	1~6

$$P(X = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{6}{6} = \frac{5}{12}$$

これと (1) の結果から

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= 1 - \{P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{12} + \frac{1}{216} \right) = \frac{216 - (108 + 90 + 1)}{216} = \frac{17}{216} \end{aligned}$$

したがって、 X の平均は

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{108}{216} + 2 \times \frac{90}{216} + 3 \times \frac{17}{216} + 4 \times \frac{1}{216} \\ &= \frac{1}{216} (108 + 180 + 51 + 4) = \frac{343}{216} \end{aligned}$$

問 6 X の確率分布は次のようになる.

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

このとき X の平均は

$$E(X) = \frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3$$

よって, X の分散と標準偏差は

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{5}\{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2\} \\ &= \frac{1}{5}(4 + 1 + 0 + 1 + 4) = \mathbf{2} \\ \sigma(X) &= \sqrt{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

問 7 X の確率分布は次の表のようになる.

X	1	2	3	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

このとき, X の平均は

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{6}{10} + 3 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10}(3 + 12 + 3) = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

よって, X の分散と標準偏差は

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{6}{10} + 3^2 \times \frac{1}{10} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 \\ &= \frac{1}{10}(3 + 24 + 9) - \frac{81}{25} = \frac{18}{5} - \frac{81}{25} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{25}} \\ \sigma(X) &= \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \end{aligned}$$

問題 3 X のとりうる値は 3, 4, 5

$X = 3$ となるのは「表, 表, 表」または「裏, 裏, 裏」と出た場合であるから

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{8}$$

$X = 4$ となるのは「3 回投げ終えた時点で, 表が 2 回, 裏が 1 回出て, 最後に表が出る」場合と「3 回投げ終えた時点で, 表が 1 回, 裏が 2 回出て, 最後に裏が出る」場合があるから

$$P(X = 4) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$X = 5$ となるのは「4 回投げ終えた時点で, 表が 2 回, 裏が 2 回出る」場合である (最後は表または裏が出る).

$$P(X = 5) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

よって, X の平均は

$$E(X) = 3 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{8} = \frac{33}{8}$$

したがって, X の分散と標準偏差は

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 3^2 \times \frac{2}{8} + 4^2 \times \frac{3}{8} + 5^2 \times \frac{3}{8} - \left(\frac{33}{8}\right)^2 \\ &= \frac{141}{8} - \left(\frac{33}{8}\right)^2 = \frac{13}{8} + 4^2 - \left(\frac{33}{8}\right)^2 \\ &= \frac{13}{8} + \left(4 + \frac{33}{8}\right) \left(4 - \frac{33}{8}\right) \\ &= \frac{13}{8} + \frac{65}{8} \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{104 - 65}{64} = \frac{39}{64}, \\ \sigma(X) &= \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \end{aligned}$$

$Y = 4X - 1$ より, Y の分散と標準偏差は

$$\begin{aligned} V(Y) &= 16V(X) = 16 \times \frac{39}{64} = \frac{39}{4}, \\ \sigma(Y) &= 4\sigma(X) = 4 \times \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{\sqrt{39}}{2} \end{aligned}$$

演習 3 (1) X のとり得る値は **1, 2, 4, 5, 8**

補足 $X = 1$ となるのは, 次の 12 通り

$$P_1P_2, P_2P_3, P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6, P_4P_5, P_5P_6, P_4P_7, P_5P_8, P_6P_9, P_7P_8, P_8P_9$$

$X = 2$ となるのは, 次の 8 通り

$$P_1P_5, P_2P_4, P_2P_6, P_3P_5, P_4P_8, P_5P_7, P_5P_9, P_6P_8$$

$X = 4$ となるのは, 次の 6 通り

$$P_1P_3, P_4P_6, P_7P_9, P_1P_7, P_2P_8, P_3P_9$$

$X = 5$ となるのは, 次の 8 通り

$$P_1P_6, P_1P_8, P_2P_7, P_2P_9, P_3P_4, P_3P_8, P_4P_9, P_6P_7$$

$X = 8$ となるのは, P_1P_9, P_3P_7 の 2 通り

(2) (1) の結果より, $a_1 = 1, a_2 = 2$ であるから

$$P(X = 1) = \frac{12}{9C_2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, \quad P(X = 2) = \frac{8}{9C_2} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

(3) (2) と同様にして

$$P(X = 4) = \frac{6}{9C_2} = \frac{6}{36}, \quad P(X = 5) = \frac{8}{9C_2} = \frac{8}{36}, \quad P(X = 8) = \frac{2}{9C_2} = \frac{2}{36}$$

よって, X の平均および分散は

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{12}{36} + 2 \times \frac{8}{36} + 4 \times \frac{6}{36} + 5 \times \frac{8}{36} + 8 \times \frac{2}{36} \\ &= \frac{1}{36}(12 + 16 + 24 + 40 + 16) = 3, \\ V(X) &= (1 - 3)^2 \times \frac{12}{36} + (2 - 3)^2 \times \frac{8}{36} + (4 - 3)^2 \times \frac{6}{36} \\ &\quad + (5 - 3)^2 \times \frac{8}{36} + (8 - 3)^2 \times \frac{2}{36} \\ &= \frac{1}{36}(48 + 8 + 6 + 32 + 50) = 4 \end{aligned}$$

問 8 X と Y の確率分布は、それぞれ次の表のようになる。

X	0	1	2	計	Y	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	P	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

上の確率分布から、 X と Y の平均は

$$E(X) = \frac{1}{10}(0 \times 3 + 1 \times 6 + 2 \times 1) = \frac{4}{5}$$

$$E(Y) = \frac{1}{5}(0 \times 0 + 1 \times 2 + 2 \times 3) = \frac{8}{5}$$

よって、 $X + Y$ の平均は

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{4}{5} + \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$$

また

$$E(X^2) = \frac{1}{10}(0^2 \times 3 + 1^2 \times 6 + 2^2 \times 1) = 1$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{5}(0^2 \times 0 + 1^2 \times 2 + 2^2 \times 3) = \frac{14}{5}$$

よって、 X と Y の分散は

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{14}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$$

X , Y は独立であるから、 $X + Y$ の分散は

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

問 9 X と Y の確率分布は、それぞれ次の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Y	4	5	6	7	8	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

上の確率分布から、 X と Y の平均は

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E(Y) = \frac{1}{5}(4 + 5 + 6 + 7 + 8) = \frac{30}{5} = 6$$

よって、 $X + Y$ の平均は

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{2} + 6 = \frac{19}{2}$$

また

$$E(X^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{5}(4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2) = 38$$

よって、 X と Y の分散は

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 38 - 6^2 = 2$$

X , Y は独立であるから、 $X + Y$ の分散は

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + 2 = \frac{59}{12}$$

問題 4 3 枚の硬貨を同時に投げ、1 回目に表の出た枚数を X ，2 回目に表の出た枚数を Y ，3 回目に表の出た枚数を Z とすると、得点の合計は

$$X + 2Y + 3Z$$

と表せる．

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

上の確率分布から、 X の平均は

$$E(X) = \frac{1}{8}(0 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 1) = \frac{3}{2}$$

また

$$E(X^2) = \frac{1}{8}(0^2 \times 1 + 1^2 \times 3 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 1) = 3$$

よって

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Y ， Z についても同様の確率分布となるから

$$E(X) = E(Y) = E(Z), \quad V(X) = V(Y) = V(Z)$$

よって、得点合計の平均は

$$\begin{aligned} E(X + 2Y + 3Z) &= E(X) + E(2Y) + E(3Z) \\ &= E(X) + 2E(Y) + 3E(Z) \\ &= (1 + 2 + 3) \times \frac{3}{2} = \mathbf{9} \end{aligned}$$

X ， Y ， Z は独立であるから

$$\begin{aligned} V(X + 2Y + 3Z) &= V(X) + V(2Y) + V(3Z) \\ &= V(X) + 2^2V(Y) + 3^2V(Z) \\ &= (1 + 4 + 9) \times \frac{3}{4} = \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

演習 4 (1) X, Y は独立であるから

$$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1)P(Y = 2) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

(2) X の確率分布は次の表のようになる.

X	1	2	3	計
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

上の確率分布から, X および X^2 の平均は

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1) = \frac{5}{3}$$
$$E(X^2) = \frac{1}{6}(1^2 \times 3 + 2^2 \times 2 + 3^2 \times 1) = \frac{10}{3}$$

したがって, X の分散は

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

Y についても, 同様の確率分布となるから

$$E(X) = E(Y), \quad V(X) = V(Y)$$

X, Y は独立であるから

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$$
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{10}{9}$$

(3) 次に示すように, XY のとり得る値は, 1, 2, 3, 4, 6 の 5通りである.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \times 1, \quad 2 = 1 \times 2 = 2 \times 1, \quad 3 = 1 \times 3 = 3 \times 1, \\ 4 &= 2 \times 2, \quad 6 = 2 \times 3 = 3 \times 2 \end{aligned}$$

カード 1, 2, 3 の枚数はそれぞれ 3 枚, 2 枚, 1 枚であるから

$$\begin{aligned} P(XY = 1) &= P(X = 1, Y = 1) \\ &= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}, \\ P(XY = 2) &= P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) \\ &= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}, \\ P(XY = 3) &= P(X = 1, Y = 3) + P(X = 3, Y = 1) \\ &= \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}, \\ P(XY = 4) &= P(X = 2, Y = 2) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}, \\ P(XY = 6) &= P(X = 2, Y = 3) + P(X = 3, Y = 2) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

よって

$$E(XY) = \frac{1}{15}(1 \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times 3 + 4 \times 1 + 6 \times 2) = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

問 10 (1) $B\left(30, \frac{2}{5}\right)$ より

$$E(X) = 30 \times \frac{2}{5} = \mathbf{12}, \quad V(X) = \sqrt{30 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}} = \frac{\mathbf{6\sqrt{5}}}{5}$$

(2) $B\left(100, \frac{2}{3}\right)$ より

$$E(X) = 100 \times \frac{2}{3} = \frac{\mathbf{200}}{\mathbf{3}}, \quad V(X) = \sqrt{100 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{\mathbf{10\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$$

問 11 2 個のさいころを同時に投げて、2 個とも同じ目が出る確率は

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

確率変数 X は、二項分布 $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}, \quad \sigma(X) = \sqrt{10 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

問 12 袋から玉を 1 個取り出したとき、赤玉の出る確率は

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

確率変数 X は、二項分布 $B\left(20, \frac{3}{4}\right)$ に従うから

$$E(X) = 20 \times \frac{3}{4} = 15, \quad \sigma(X) = \sqrt{20 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

問題 5 4 以下の目が出る回数を X とすると、得点合計は

$$5X - 10(40 - X) = 15X - 400$$

1 個のサイコロを投げて 4 以下の目が出る確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

確率変数 X は、二項分布 $B\left(40, \frac{2}{3}\right)$ に従うから

$$E(X) = 40 \times \frac{2}{3} = \frac{80}{3}, \quad \sigma(X) = \sqrt{40 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

求める得点合計の平均と標準偏差は

$$E(15X - 400) = 15E(X) - 400 = 15 \times \frac{80}{3} - 400 = 0,$$

$$\sigma(15X - 400) = 15\sigma(X) = 15 \times \frac{4\sqrt{5}}{3} = 20\sqrt{5}$$

演習 5 (1) 袋の中から玉を 1 つ取り出し、それが白玉である確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

確率変数 X は、二項分布 $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ に従うから

$$m = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \quad \sigma = \sqrt{4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(2) (1) の結果を $|X - m| < \sigma$ に適用すると

$$\left|X - \frac{4}{3}\right| < \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3} < X < \frac{4 + 2\sqrt{2}}{3}$$

これを満たす X は、 $X = 1, 2$ であるから

$$\begin{aligned} P(|X - m| < \sigma) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= {}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3 + {}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{32}{81} + \frac{24}{81} = \frac{56}{81} \end{aligned}$$

(3) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ より

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + E(X)^2 \\ &= \sigma^2 + m^2 = \frac{8}{9} + \frac{16}{9} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} E(X^2 + 3X - 2) &= E(X^2) + 3E(X) - 2 \\ &= \frac{8}{3} + 3 \times \frac{4}{3} - 2 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

節末問題 I

- 1** (1) 袋 A, B から取り出したカードに書かれている数をそれぞれ X, Y とする.

$$E(X) = \frac{1}{5}(1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 5,$$

$$E(Y) = \frac{1}{4}(2 + 4 + 6 + 8) = 5,$$

$$V(X) = \frac{1}{5}\{(1 - 5)^2 + (3 - 5)^2 + (5 - 5)^2 + (7 - 5)^2 + (9 - 5)^2\} = 8,$$

$$V(Y) = \frac{1}{4}\{(2 - 5)^2 + (4 - 5)^2 + (6 - 5)^2 + (8 - 5)^2\} = 5$$

$$\text{したがって} \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5 + 5 = \mathbf{10}$$

X, Y は独立であるから

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 8 + 5 = 13$$

$$\text{よって} \quad \sigma(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)} = \sqrt{\mathbf{13}}$$

- (2) X, Y は独立であるから

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 5 \times 5 = \mathbf{25}$$

参考 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 2\sqrt{2}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{5}$

X, Y は独立であるから

$$\begin{aligned} \sigma(X + Y) &= \sqrt{V(X + Y)} = \sqrt{V(X) + V(Y)} \\ &= \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2} = \sqrt{8 + 5} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

注意 $\sigma(X + Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$ でないことに注意する.

2 白玉の個数を x とし、白玉の出る回数を X とする.

袋から 1 個の玉を取り出したとき、白玉が出る確率は $\frac{x}{100}$

確率変数 X は二項分布 $B\left(n, \frac{x}{100}\right)$ に従う.

X の平均が $\frac{16}{5}$, 分散が $\frac{64}{25}$ であるから

$$n \cdot \frac{x}{100} = \frac{16}{5}, \quad n \cdot \frac{x}{100} \left(1 - \frac{x}{100}\right) = \frac{64}{25} \quad (*)$$

(*) の第 1 式を第 2 式に代入すると

$$\frac{16}{5} \left(1 - \frac{x}{100}\right) = \frac{64}{25} \quad \text{ゆえに} \quad x = 20$$

これを (*) の第 1 式に代入すると

$$n \cdot \frac{20}{100} = \frac{16}{5} \quad \text{ゆえに} \quad n = 16$$

よって、袋の中の白玉の個数は **20 個**, $n = 16$

- 3 (1) 袋 B から 2 個の玉を取り出すとき、赤玉が k 個取り出される確率を $P_B(k)$ とすると ($k = 0, 1, 2$)

$$P_B(0) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}, \quad P_B(1) = \frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}, \quad P_B(2) = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

よって、求める期待値は

$$E(X) = 0 \cdot P_B(0) + 1 \cdot P_B(1) + 2 \cdot P_B(2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

- (2) 袋 A から 1 個の玉を取り出すとき、赤玉が k 個取り出される確率を $P_A(k)$ とすると ($k = 0, 1$)、求める確率は

$$P_A(0)P_B(2) + P_A(1)P_B(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{20}$$

- (3) 袋 A から赤玉が 1 個取り出されたとき、袋 A に残った 3 個の玉 (赤玉 1 個、白玉 2) から 2 個取り出すとき、赤玉を取り出す個数の期待値は

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_3C_2} = \frac{2}{3}$$

袋 A から白玉が 1 個取り出されたとき、袋 A に残った 3 個の玉 (赤玉 2 個、白玉 1) から 2 個取り出すとき、赤玉を取り出す個数の期待値は

$$E(Z) = 1 \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_3C_2} + 2 \cdot \frac{{}_2C_2}{{}_3C_2} = \frac{4}{3}$$

$E(Y) < E(X) < E(Z)$ であるから、最初に袋 A から取り出した玉が赤玉であるとき、次に取り出す袋は B であり、最初に袋 A から取り出した玉が白玉であるとき、次に取り出す袋は A である。

したがって、最終的に取り出される赤玉の個数を X とすると

$$P(X = 1) = P_A(0) \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_3C_2} + P_A(1) \cdot P_B(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{23}{60},$$

$$P(X = 2) = P_A(0) \cdot \frac{{}_2C_2}{{}_3C_2} + P_A(1) \cdot P_B(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{15},$$

$$P(X = 3) = P_A(1) \cdot P_B(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

よって、求める期待値は $1 \cdot \frac{23}{60} + 2 \cdot \frac{7}{15} + 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{53}{30}$

別解 $P_A(0)E(Y) + P_A(1)\{1 + E(X)\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{6}{5}\right) = \frac{53}{30}$

問 13 (1) $f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2)$ より

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \frac{3}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - x^2) dx \\ &= \frac{3}{4} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{11}{32} \end{aligned}$$

(2) $E(X) = \int_0^2 xf(x) dx$ より

$$E(X) = \frac{3}{4} \int_0^2 x^2(2-x) dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{2!1!}{4!} (2-0)^4 = 1$$

補足 確率密度関数 (2 次関数) は $x = 1$ に関して対称である.

(3) $E(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x) dx$ より

$$E(X^2) = \frac{3}{4} \int_0^2 x^3(2-x) dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{3!1!}{5!} (2-0)^5 = \frac{6}{5}$$

$$\text{よって} \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{6}{5} - 1^2 = \frac{1}{5}$$

問題 6 得点を X とすると, X は $N(52, 15^2)$ と考えられるから

$$Z = \frac{X - 52}{15}$$

の分布は $N(0, 1)$ である.

$$P(Z \geq u) = 0.08 \text{ より} \quad P(0 \leq Z \leq u) = 0.5 - 0.08 = 0.42$$

正規分布表より $P(0 \leq Z \leq 1.41) = 0.4207$ ゆえに $u = 1.41$

$$Z = 1.41 \text{ のとき} \quad X = 15 \times 1.41 + 52 = 73.15$$

よって, 74 点以上あればよい.

演習 6 (1) X の分布は $B\left(500, \frac{1}{6}\right)$ であるから

$$Z = \frac{X - 500 \times \frac{1}{6}}{\sqrt{500 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}} = \frac{6X - 500}{50}$$

とおくと, Z の分布は $N(0, 1)$ となる. $X = 100$ のとき

$$P(X \leq 100) = \frac{6 \times 100 - 500}{50} = 2$$

よって, 求める確率は, 正規分布表より

$$\begin{aligned} P(X \leq 100) &= P(Z \leq 2) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 = \mathbf{0.9772} \end{aligned}$$

(2) $|6X - 500| \leq \alpha$ より

$$|Z| = \frac{|6X - 500|}{50} \leq \frac{\alpha}{50}$$

正規分布表より

$$P(|Z| \leq 0.52) = 0.1985 \times 2 = 0.397$$

よって, $\frac{\alpha}{50} = 0.52$ より $\alpha = 50 \times 0.52 = \mathbf{26}$

問 14 (1) $E(\bar{X}) = \mathbf{60}$, $\sigma(\bar{X}) = \frac{16}{\sqrt{400}} = \frac{16}{20} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$

(2) (1) の結果から, $Z = \frac{\bar{X} - 60}{\frac{4}{5}}$ とおくと, Z の分布は $N(0, 1)$ とみなせる.

$$\bar{X} = 60 \text{ のとき } \frac{60 - 60}{\frac{4}{5}} = 0$$

$$\bar{X} = 61 \text{ のとき } \frac{61 - 60}{\frac{4}{5}} = 1.25$$

よって, $\bar{X}$ が 60 以上 61 以下の値をとる確率は

$$P(60 \leq \bar{X} \leq 61) = P(0 \leq Z \leq 1.25) = \mathbf{0.3944}$$

問題 7 (1) $\left[52.3 - 1.96 \times \frac{15}{100}, 52.3 + 1.96 \times \frac{15}{\sqrt{100}} \right]$ より **[49.4, 55.2]**

(2) 標本比率 R は $R = \frac{100}{400} = 0.25$

$$\left[0.25 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.25 \times (1 - 0.25)}{400}}, 0.25 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.25 \times (1 - 0.25)}{400}} \right]$$

よって **[0.21, 0.29]**

問題 8 標本平均を $\bar{X}$ とすると, $\bar{X}$ の棄却域は

$$|\bar{X} - m| > 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad s = 2.1, \quad n = 200$$

帰無仮説より, $m = 56.7$ を代入すると, 棄却域は

$$|\bar{X} - 56.7| > 1.96 \times \frac{2.1}{\sqrt{200}} \doteq 0.29$$

を満たす範囲である. 上式に $\bar{X} = 54.3$ を代入すると

$$|54.3 - 56.7| = 2.4 > 0.29$$

となり, 帰無仮説は棄却されるから, 対立仮説を受け入れる. すなわち, 日本全体の高校生のこの学力調査の平均点は 56.7 点でないと判断できる.

演習 7 (1) 仮平均を 60 として

$$\begin{aligned} x = & 60 + (4 + 0 + 4 + 1 + 6 + 1 + 0 + 4 + 7 - 3 \\ & - 2 + 2 + 0 + 11 - 7 + 10 - 6 + 9 - 5 + 4) \div 20 = 62.0 \end{aligned}$$

平均と各人との得点差の 2 乗の和は,

$$\begin{aligned} & 4 + 4 + 4 + 1 + 16 + 1 + 4 + 4 + 25 + 25 \\ & + 16 + 0 + 4 + 81 + 81 + 64 + 64 + 49 + 49 + 4 = 500 \end{aligned}$$

したがって $s = \sqrt{\frac{500}{20}} = 5.0$

(2) $\left[62.0 - 1.96 \times \frac{5.0}{\sqrt{20}}, 62.0 + 1.96 \times \frac{5.0}{\sqrt{20}} \right]$ より, **[59.8, 64.2]**

演習 8 (1) 帰無仮説 H_0 「この種子の発芽率は 40%である」

対立仮説 H_1 「この種子の発芽率は 40%でない」

(2) 標本比率を R とすると, R の棄却域は,

$$|R - p| > 1.96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \quad n = 256$$

(1) の帰無仮説より $p = 0.4$ を代入すると, 棄却域は

$$|R - 0.4| > 1.96 \times \sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{256}} \doteq 0.06$$

を満たす範囲である. ここで, $R = \frac{90}{256} = 0.35$ を代入すると

$$|0.35 - 0.40| = 0.05 < 0.06$$

となり, 帰無仮説は棄却されない. すなわち, この種子の発芽率は 40%でないとは判断できない.

節末問題 II

- 1 (1) 確率変数 Z が標準正規分布に従うので、正規分布表より

$$\begin{aligned} P(-2.58Z \leq Z \leq 2.58) &= 2P(0 \leq Z \leq 2.58) \\ &= 2 \times 0.4951 = 0.9902 \end{aligned}$$

よって、当てはまる最も適切な値は (ア) ㉔ **2.58**

- (2) 母標準偏差の母集団から、大きさの標本を 無作為抽出するとき、その標本平均を $\bar{X}$ とする. このとき、母平均の信頼度 95% の信頼区間は

$$\bar{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって

$$L_1 = \bar{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

また、母平均の信頼度 99% の信頼区間は (1) より

$$\bar{X} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって

$$L_2 = \bar{X} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

したがって

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{2.58}{1.96} = 1.31 \dots \quad (\text{イ}) \text{ } \mathbf{1.3}$$

また、同じ母集団から、大きさ $4n$ の標本を無作為抽出するとき、その標本平均をとる. このとき、母平均 m の信頼度 95% の信頼区間は

$$\bar{Y} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} \leq m \leq \bar{Y} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$$

よって

$$L_3 = \bar{Y} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} - \left(\bar{Y} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} \right) = 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

したがって

$$\frac{L_3}{L_1} = \frac{1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (\text{ウ}) \text{ } \mathbf{0.5}$$

- 2 科目 A の得点を X とすると、 X は正規分布 $N(66.2, 15.0^2)$ に従う.

$$Z = \frac{X - 66.2}{15.0}$$

とおくと、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$X = 80 \text{ のとき } Z = \frac{80 - 66.2}{15.0} = 0.92$$

正規分布表より

$$\begin{aligned} P(X \geq 80) &= P(Z \geq 0.92) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.92) \\ &= 0.5 - 0.312 = 0.1788 \end{aligned}$$

$14000 \times 0.1788 = 2503.2$ であるから、80 点であった生徒の順位は、2001 から 3000 までにある (ア ㊷).

$$X = 59 \text{ のとき } Z = \frac{59 - 66.2}{15.0} = -0.48$$

正規分布表より

$$\begin{aligned} P(X \geq 59) &= P(Z \geq -0.48) \\ &= 0.5 + P(-0.48 \leq Z \leq 0) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.48) \\ &= 0.5 + 0.1844 = 0.6844 \end{aligned}$$

$14000 \times 0.6844 = 9581.6$ であるから、59 点であった生徒の順位は、9001 から 10000 までにある (イ ㊸).

科目 B の得点について、標本平均 63.5、母標準偏差 16.0 の母集団から、大きさ 196 の標本を無作為抽出したときの母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$63.5 - 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{196}} \leq m \leq 63.5 + 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{196}}$$

すなわち $61.28 \leq m \leq 65.74$ よって **61.3** $\leq$ **65.7** (ウ 61.3, エ 65.7)

3 (1) 母平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \cdot p = p$

母分散 $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1^2 \cdot p - p^2 = p(1-p)$

したがって、標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ の平均および分散は、それぞれ

$$\bar{X} = p, \quad \frac{\sigma^2}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

(2) (1) の結果から

$$\bar{X} = \frac{320}{400} = \frac{4}{5}, \quad \sigma^2 = \bar{X}(1-\bar{X}) = \frac{4}{5} \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{25}$$

母比率 p は、400 を十分大きい数とみなせるので、近似的に次の標準正規分布に従う。

$$N\left(\bar{X}, \frac{\sigma^2}{400}\right) \quad \text{すなわち} \quad N\left(\frac{4}{5}, \left(\frac{1}{50}\right)^2\right)$$

ゆえに、 $Z = \frac{\bar{X} - \frac{4}{5}}{\frac{1}{50}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$P(Z < -1.96) = 0.025$ から

$$P(|Z| \leq 1.96) = 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$$

ゆえに
$$P\left(\left|\bar{X} - \frac{4}{5}\right| \leq 1.96 \times \frac{1}{50}\right) = 0.95$$

したがって、信頼区間は

$$\left[\frac{4}{5} - 1.96 \times \frac{1}{50}, \frac{4}{5} + 1.96 \times \frac{1}{50}\right]$$

ここで $\frac{4}{5} - 1.96 \times \frac{1}{50} = 0.7608, \quad \frac{4}{5} + 1.96 \times \frac{1}{50} = 0.8392$

よって、求める信頼区間は **[0.76, 0.84]**

- 4 (1) 帰無仮説 H_0 「当たり券の封入率は 30%である」
 対立仮説 H_1 「当たり券の封入率は 30%でない」
 (2) 標本比率を R とすると, R の棄却域は

$$|R - p| > 1.96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \quad n = 2000$$

(1) の帰無仮説より $p = 0.3$ を代入すると, 棄却域は

$$|R - 0.3| > 1.96 \times 0.3 \times \sqrt{\frac{0.3 \times (1 - 0.3)}{2000}} \doteq 0.02$$

を満たす範囲である. $R = 0.29$ を代入すると

$$|0.29 - 0.30| = 0.01 < 0.02$$

となり, 帰無仮説は棄却されない.

よって, このアイスの当たり券の封入率は 30%でないとは判断できない.

- 5 (1) 帰無仮説 H_0 「孵化率は 55%である」
 対立仮説 H_1 「孵化率は 55%でない」
 (2) 標本比率を R とすると, R の棄却域は

$$|R - p| > 1.96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 240$$

(1) の帰無仮説より $p = 0.55$ を代入すると, 棄却域は

$$|R - 0.55| > 1.96 \times \sqrt{\frac{0.55(1 - 0.55)}{240}} \doteq 0.063$$

を満たす範囲である.

$R = \frac{150}{240} = 0.625$ を代入すると

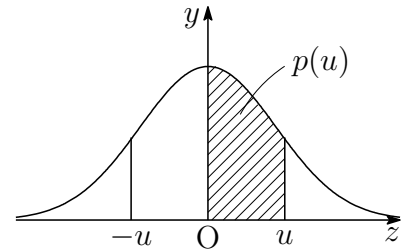
$$|0.625 - 0.55| = 0.075 > 0.063$$

となり, 帰無仮説は棄却されるから対立仮説を受け入れる.

よって, 学校近くの海岸に産卵にくるウミガメの孵化率は 55%でないとは判断できる.

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における
右図の斜線部分の面積をまとめたものである。
正規分布，節末問題 II [1](#)，節末問題 II [2](#)，
問題 6，演習 6



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990