

令和6年度 山口大学2次試験前期日程(数学問題)
理・工・医(医)・農・教育・経済・国際総合科・共同獣医
令和6年2月25日

- 理(理数科以外)・工・教育理系 1 2 3 4 数I・II・III・A・B (120分)
- 理(理数科)・医(医)学部 3 5 6 7 数I・II・III・A・B (120分)
- 教育文系 2 8 9 10 数I・II・II・A・B (120分)

1 a, k を $a \neq 0, k \neq 1$ を満たす定数とし、座標平面上の曲線 $y = x^2$ を C とする。直線 l は点 $A(a, a^2)$ において曲線 C と接し、直線 m は点 $B(ka, k^2a^2)$ において曲線 C と接するものとする。また2直線 l と m の交点を D とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 点 D の座標を a, b を用いて表しなさい。
- (2) $AB = AD$ であるための必要十分条件を a, k を用いて表しなさい。
- (3) 直線 AB と直線 l が垂直であるための必要十分条件を a, k を用いて表しなさい。
- (4) $\triangle ABD$ が $AB = AD$ の直角二等辺三角形であるとき、 $\triangle ABD$ の面積を求めなさい。

2 点 $P(u, v)$ が連立不等式 $u \geq 1, v \geq 1, uv \leq 10^5, u^2v^3 \leq 10^{12}$ の表す領域 D 内を動くとき、次の問いに答えなさい。ただし、(1)の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

- (1) $a = \log_{10} 3, b = \log_{10} 2$ とする。 $u = 3, v = 2$ のとき $\log_{10}(u^5v^6)$ を a, b を用いて表しなさい。
- (2) $x = \log_{10} u, y = \log_{10} v$ とおく。点 $P(u, v)$ が領域 D 内を動くとき、点 $Q(x, y)$ が動く領域を座標平面内に図示しなさい。
- (3) u^5v^6 の最大値を求めなさい。

3 α を定数とする．実数全体を定義域とする関数 $f(x)$, $g(x)$ に対し

$$C = \int_0^1 f(x)g(a-x) dx$$

と定めたとき，次の $f(x)$, $g(x)$ について C をそれぞれ a を用いて表しなさい．

(1) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$

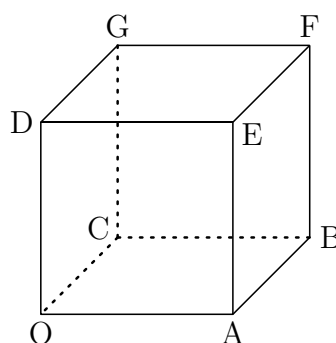
(2) $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = x$

(3) $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

- 4 動点 R と S が立方体 OABC-DEFG の辺上を独立に動く．時刻 $t = 0$ のとき R, S はともに点 O にある．その後，各動点は時刻が 1 進むごとに， x の確率で元の頂点にあるか，もしくは隣にある 3 つの頂点のいずれかにそれぞれ $\frac{1}{3}(1-x)$ の確率で移動している．ただし，ある頂点の隣にある頂点とは，辺の両端の頂点のうち他方の頂点のことである．また， $0 \leq x \leq 1$ とする．

例えば，時刻 t のとき動点 R が点 E にある場合，時刻 $t + 1$ において R は x の確率で点 E にあるか，もしくはそれぞれ $\frac{1}{3}(1-x)$ の確率で点 A, D, F のいずれかにある．動点 S についても同様である．

次の問いに答えなさい．(1) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい．



- (1) $x = \frac{1}{2}$ とする．
- (i) 時刻 $t = 2$ のとき，R が点 O にある確率を求めなさい．
 - (ii) 時刻 $t = 3$ のとき，R が点 A にある確率を求めなさい．
 - (iii) 時刻 $t = 3$ において R が点 A にあるとき，時刻 $t = 2$ のときに R が点 O にあった条件付き確率を求めなさい．
- (2) 時刻 $t = 3$ のとき，3 点 O, R, S が正三角形をなす確率を $p(x)$ とする．
- (i) 時刻 $t = 3$ のとき，R が点 B にある確率を x を用いて表しなさい．
 - (ii) $p(x)$ を求めなさい．
 - (iii) $p(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めなさい．

- 5 m を 0 以上の整数とし, k, r を自然数とする. k の正の約数の個数を $D(k)$ とおく. また, $\frac{k}{r^m}$ が整数となるような整数 m のうち最大のものを $M_r(k)$ とする. 例えば, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ なので $M_2(60) = 2$, $M_3(60) = 1$ である. このとき, 次の問いに答えなさい. ただし, (1), (2) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい.

(1) $M_2(8!)$ および $D(8!)$ の値を求めなさい.

(2) $M_2(30!)$, $M_3(30!)$ および $M_{12}(30!)$ の値を求めなさい.

(3) $d = D(30!)$ とおく. (2) で求めた $M_{12}(30!)$ の値を n とするとき, $\sum_{i=1}^n D\left(\frac{30!}{12^i}\right)$ を d を用いて表しなさい.

- 6 動点 R が正四面体 $OABC$ の边上を動く. 動点 R は時刻 $t = 0$ のとき点 O にあり, 時刻が 1 進むごとに, 他の 3 つの頂点のいずれかにそれぞれ $\frac{1}{6}$ の確率で移動しているか, $\frac{1}{2}$ の確率で元の頂点にある. このとき, 次の問いに答えなさい. ただし, (1) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい.

(1) (i) 時刻 $t = 2$ のとき, R が点 O にある確率を求めなさい.

(ii) 時刻 $t = 2$ のとき, R が点 A にある確率を求めなさい.

(iii) 時刻 $t = 3$ のとき, R が点 A にある確率を求めなさい.

(iv) 時刻 $t = 3$ において R が A にあるとき, 時刻 $t = 2$ のときに R が点 O にあった条件付き確率を求めなさい.

(2) n を自然数とする. 時刻 $t = n$ のとき動点 R が O, A, B, C の各頂点にある確率をそれぞれ z_n, a_n, b_n, c_n とする.

(i) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明しなさい.

$$a_n = b_n = c_n$$

(ii) z_n を n の式で表しなさい.

(iii) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ を求めなさい.

7 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = (x - [x])^2 - (x - [x]) + \frac{1}{6} \quad (x \geq 0)$$

と定める. ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す. さらに, n を自然数とし,

$$S(x) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + x\right) \quad (x \geq 0)$$

とする. 次の問いに答えなさい.

(1) 次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$f(x+1) = f(x)$$

(2) 次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$S\left(x + \frac{1}{n}\right) = S(x)$$

(3) $0 \leq x < \frac{1}{n}$ のとき, 方程式 $S(x) = 0$ を解きなさい.

(4) $x \geq 0$ のとき, 方程式 $S(x) = 0$ を解きなさい.

8 次の問いに答えなさい. ただし, (1), (2) の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい.

(1) $8!$ の正の約数の個数を求めなさい.

(2) 17 で割ると 2 余り, 22 で割ると 4 余る自然数のうち, 4 桁で最小のものを求めなさい.

(3) a を定数とし, x の 2 次不等式

$$2x^2 - (2a - 3)x - 3a < 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を考える. 次の問いに答えなさい.

(i) 2 次不等式 $\textcircled{1}$ の解を求めなさい.

(ii) 2 次不等式 $\textcircled{1}$ を満たす整数 x が 4 個だけ存在するとき, a の値の範囲を求めなさい.

9 a を正の実数とする. O を原点とする座標平面において, 四角形 $OACB$ を考える. 3 点 A, B, C は曲線 $y = x^2 - 6x + 6$ 上にあり, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ を満たすとする. 点 A の x 座標を a とするとき, 次の問いに答えなさい. ただし, (1) の解答は答のみを解答用紙記入しなさい.

- (1) 点 B の x 座標を a を用いて表しなさい.
- (2) $a = 1$ とする.
 - (i) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を求めなさい.
 - (ii) 四角形 $OACB$ の面積を求めなさい.
 - (iii) $\triangle ABC$ の外接円の方程式を求めなさい.

10 次の問いに答えなさい.

- (1) 関数 $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 5$ の増減を調べ, 極値を求めなさい. また, そのグラフの概形をかきなさい.
- (2) $a \geq 0$ とし, 関数 $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 5$ ($0 \leq x \leq a$) の最大値を $g(a)$, 最小値を $h(a)$ とする.
 - (i) $g(a)$ を求めなさい.
 - (ii) $h(a)$ を求めなさい.
 - (iii) 関数 $y = g(x)$ のグラフと関数 $y = h(x)$ のグラフおよび直線 $x = 4$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

解答例

- 1** (1) $b = ka$ とおく ($a \neq b$). $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$
 $C : y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad l : y = 2ax - a^2$$

同様に, C 上の点 $B(b, b^2)$ における接線 m の方程式は

$$m : y = 2bx - b^2$$

l と m の方程式を連立して解くと

$$ax - a^2 = bx - b^2 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a+b}{2}, \quad y = ab$$

$$b = ka \text{ より, 点 } D \text{ の座標は } D\left(\frac{(1+k)a}{2}, ka^2\right)$$

- (2) $A(a, a^2), B(b, b^2), D\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$ とすると

$$AB^2 = (b-a)^2 + (b^2-a^2) = (b-a)^2\{1+(a+b)^2\} \quad (*)$$

$$AD^2 = \frac{1}{4}(b-a)^2 + a^2(b-a)^2 = (b-a)^2\left(\frac{1}{4} + a^2\right)$$

$AB^2 = AD^2, b-a \neq 0$ であるから

$$1 + (a+b)^2 = \frac{1}{4} + a^2 \quad \text{ゆえに} \quad b(2a+b) + \frac{3}{4} = 0$$

$$b = ka \text{ を上の第2式に代入して} \quad k(k+2)a^2 + \frac{3}{4} = 0$$

- (3) 直線 AB の傾きは $\frac{b^2-a^2}{b-a} = a+b = a+ka = (1+k)a$

接線 l の傾きは $2a$ であるから, $AB \perp l$ であるための必要十分条件は

$$(1+k)a \cdot 2a = -1 \quad \text{ゆえに} \quad 2(1+k)a^2 + 1 = 0$$

(4) (*) に $b = ka$ を代入すると

$$AB^2 = (k-1)^2 a^2 \{1 + (1+k)^2 a^2\} \quad (**)$$

(2), (3) の結果の 2 式から定数項を消去して整理すると

$$\frac{4}{3}k(k+2)a^2 = 2(1+k)a^2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2(k-1)(2k+3) = 0$$

$a \neq 0$, $k \neq 1$ であるから $k = -\frac{3}{2}$ (3) の結論から $a^2 = 1$

これらを (**) に代入すると

$$AB^2 = \left(-\frac{3}{2} - 1\right)^2 \left\{1 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2\right\} = \frac{125}{16}$$

よって, $AB = AD$ の直角二等辺三角形の面積は

$$\frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{16} = \frac{125}{32}$$



- 2** (1) $u = 3, v = 2, a = \log_{10} 3, b = \log_{10} 2$ より

$$\begin{aligned}\log_{10}(u^5 v^6) &= 5 \log_{10} u + 6 \log_{10} v \\ &= 5 \log_{10} 3 + 6 \log_{10} 2 = \mathbf{5a + 6b}\end{aligned}$$

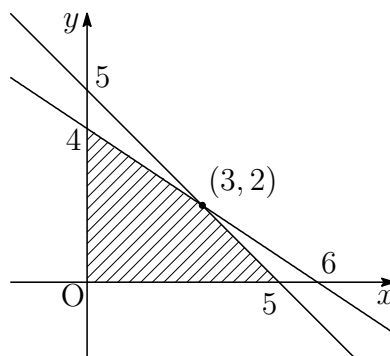
- (2) $uv \leq 10^5, u^2 v^3 \leq 10^{12}$ より $\log_{10} uv \leq 5, \log_{10} u^2 v^3 \leq 12$

$$\log_{10} u + \log_{10} v \leq 5, \quad 2 \log_{10} u + 3 \log_{10} v \leq 12$$

$$x = \log_{10} u, \quad y = \log_{10} v \text{ より } (u \geq 1, v \geq 1)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 5, \quad 2x + 3y \leq 12$$

よって、点 $Q(x, y)$ の表す領域は、下の図の斜線部分で境界線を含む。

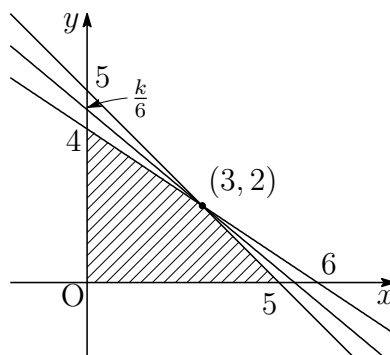


- (3) $k = \log_{10} u^5 v^6 = 5 \log_{10} u + 6 \log_{10} v = 5x + 6y$ とおくと

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{k}{6}$$

下の図から、 $x = 3, y = 2$ のとき、 k は最大値 27 をとる。

よって $u = 10^3, v = 10^2$ のとき、最大値 10^{27} をとる。



3 (1) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ より

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x) dx = \int_0^1 x(a-x)^2 dx \\ &= \int_0^1 (a^2x - 2ax^2 + x^3) dx \\ &= \left[\frac{a^2}{2}x^2 - \frac{2a}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{a^2}{2} - \frac{2a}{3} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = x$ より

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x) dx = \int_0^1 (a-x) \sin \pi x dx \\ &= \int_0^1 (x-a) \left(\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right)' dx \\ &= \left[(x-a) \left(\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right) - \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x \right]_0^1 = \frac{2a-1}{\pi} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = x$, $g(a-x) = \begin{cases} a-x & (a-x \geq 0) \\ 0 & (a-x < 0) \end{cases}$ より

$$f(x)g(a-x) = \begin{cases} x(a-x) & (x \leq a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$$

(i) $1 \leq a$ のとき

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x) dx = \int_0^1 x(a-x) dx \\ &= \int_0^1 (ax - x^2) dx = \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 f(x)g(a-x) dx \\ &= \int_0^a f(x)g(a-x) dx + \int_a^1 f(x)g(a-x) dx \\ &= \int_0^a x(a-x) dx = \frac{1}{6}a^3 \end{aligned}$$

(iii) $a \leq 0$ のとき $C = 0$

■

4 (1) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}(1-x) = \frac{1}{6}$ とおく.

(i) $t = 1$ のとき, R が点 O, A, C, D にある確率は, それぞれ

$$x, y, y, y$$

したがって, $t = 2$ のとき, R が点 O にある確率は

$$xx + (y + y + y)y = x^2 + 3y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

(ii) $t = 2$ のとき, R が点 A, O, B, E にある確率は, それぞれ

$$2xy, x^2 + 3y^2, 2y^2, 2y^2$$

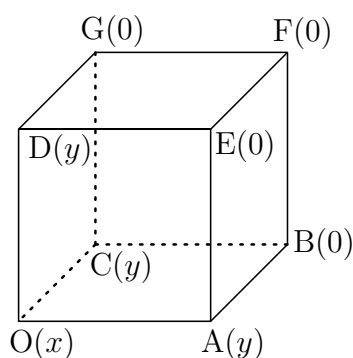
したがって, $t = 3$ のとき, R が点 A にある確率は

$$\begin{aligned} & 2xy \cdot x + \{(x^2 + 3y^2) + 2y^2 + 2y^2\}y \\ &= (3x^2 + 7y^2)y = \left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{108} \end{aligned}$$

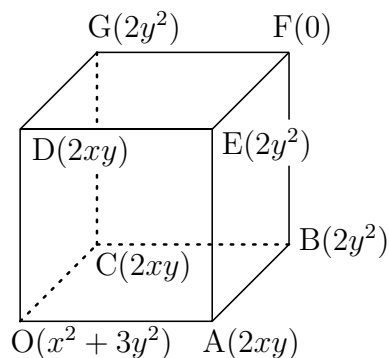
(iii) (i), (ii) の結果から, 求める条件付き確率は

$$\frac{(x^2 + 3y^2) \cdot y}{(3x^2 + 7y^2)y} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 7} = \frac{3^2 + 3}{3 \cdot 3^2 + 7} = \frac{6}{17}$$

$$(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{6})$$



[1 秒後]



[2 秒後]

(2) $y = \frac{1}{3}(1-x)$ とする.

(i) $t = 2$ のとき, R が点 B, A, C, F にある確率は, それぞれ

$$2y^2, 2xy, 2xy, 0$$

したがって, $t = 3$ のとき, R が点 B にある確率は

$$\begin{aligned} 2y^2 \cdot x + (2xy + 2xy + 0)y &= 6xy^2 = 6x \left\{ \frac{1}{3}(1-x) \right\}^2 \\ &= \frac{2}{3}x(1-x)^2 \end{aligned}$$

(ii) 対称性から, 3秒後に R が3点 B, E, G にある確率は等しい.

3点 O, R, S が正三角形をなすのは, $\triangle OBE$, $\triangle OBG$, $\triangle OEG$ である. このとき, R, S は3点 B, E, G のいずれかにあるから, (i) の結果を利用して

$$p(x) = {}_3P_2 \left\{ \frac{2}{3}x(1-x)^2 \right\}^2 = \frac{8}{3}x^2(1-x)^4$$

(iii) 3正数 $2x, 1-x, 1-x$ の相加平均・相乗平均の大小関係から

$$2x + (1-x) + (1-x) \geq 3\sqrt[3]{2x \cdot (1-x) \cdot (1-x)}$$

$$\text{整理すると } 2 \geq 3\sqrt[3]{2x(1-x)^2} \quad \text{ゆえに} \quad x(1-x)^2 \leq \frac{4}{27}$$

$$\text{等号が成立するとき } 2x = 1-x \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\text{このとき, 最大値 } \frac{8}{3} \left(\frac{4}{27} \right)^2 = \frac{128}{2187}$$



5 (1) $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ より $M_2(8!) = 7$

$$D(8!) = (7+1)(2+1)(1+1)(1+1) = \mathbf{96}$$

(2) 1 から 30 までの自然数で 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 で割り切れる個数に注目すると

$$M_2(30!) = 15 + 7 + 3 + 1 = \mathbf{26}$$

1 から 30 までの自然数で 3, 3^2 , 3^3 で割り切れる個数に注目すると

$$M_3(30!) = 10 + 3 + 1 = \mathbf{14}$$

したがって, $30! = 2^{26} \cdot 3^{14} A$ とおくと (A は 2, 3 と互いに素)

$$30! = 3(2^2 \cdot 3)^{13} A = 3 \cdot 12^{13} A \quad \text{よって} \quad M_{12}(30!) = \mathbf{13}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad d = D(30!) &= D(2^{26} \cdot 3^{14} A) = D(2^{26})D(3^{14})D(A) \\ &= (26+1)(14+1)D(A) = 27 \cdot 15 D(A) \end{aligned}$$

(2) の結果から $n = M_{12}(30!) = 13$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{30!}{12^i} \right) &= \sum_{i=1}^{13} D \left(\frac{2^{26} \cdot 3^{14} A}{2^{2i} 3^i} \right) \\ &= D(A) \sum_{i=1}^{13} D(2^{26-2i}) D(3^{14-i}) \\ &= D(A) \sum_{i=1}^{13} (27-2i)(15-i) \\ &= D(A) \sum_{i=1}^{13} \{2(14-i)-1\} \{(14-i)+1\} \\ &= D(A) \sum_{i=1}^{13} (2i-1)(i+1) = D(A) \sum_{i=1}^{13} (2i^2 + i - 1) \\ &= D(A) \left(2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 27 + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 - 13 \right) \\ &= 13 \cdot 132 D(A) \\ &= 13 \cdot 132 \cdot \frac{d}{27 \cdot 15} = \frac{13 \cdot 44}{9 \cdot 15} d = \frac{\mathbf{572}}{\mathbf{135}} d \end{aligned}$$

■

6 (2) で設定された数列 z_n, a_n, b_n, c_n について, 次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 1, \quad a_0 = b_0 = c_0 = 0 \\
 z_{n+1} &= \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{6}(a_n + b_n + c_n) \\
 a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}(z_n + b_n + c_n) \\
 b_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{6}(a_n + z_n + c_n) \\
 c_{n+1} &= \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{6}(a_n + b_n + z_n)
 \end{aligned} \tag{*}$$

$z_n + a_n + b_n + c_n = 1$ であるから, $\{z_n\}, \{a_n\}$ について

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 1, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{6}(1 - z_n) = \frac{1}{3}z_n + \frac{1}{6} \\
 a_0 &= 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}(1 - a_n) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\text{これから} \quad z_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \left(z_n - \frac{1}{4} \right), \quad a_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \left(a_n - \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{したがって} \quad z_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n, \quad a_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} \tag{**}$$

$$(1) \quad (i) \quad z_2 = \frac{1}{3} \quad (ii) \quad a_2 = \frac{2}{9} \quad (iii) \quad a_3 = \frac{13}{54} \quad (iv) \quad \frac{z_2 \cdot \frac{1}{6}}{a_3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \bigg/ \frac{13}{54} = \frac{3}{13}$$

(2) (i) (P) $a_n = b_n = c_n$ とすると, (*) より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - b_n), \quad b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - c_n), \quad c_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(c_n - b_n)$$

$a_0 = b_0 = c_0$ より, $n = 0$ のとき, (P) は成立する.

$n = k$ のとき, (P) が成立すると仮定すると, 上の漸化式から

$$a_{k+1} - b_{k+1} = 0, \quad b_{k+1} - c_{k+1} = 0, \quad c_{k+1} - a_{k+1} = 0$$

よって, $n = k + 1$ のときも, (P) が成立する.

したがって, すべての自然数 n について, (P) は成立する.

$$(ii) \quad (**) \text{ より } \quad z_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$(iii) \quad (ii) \text{ の結果から } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{4} \quad \blacksquare$$

7 (1) $[x+1] = [x] + 1$ であるから, $f(x) = (x - [x])^2 - (x - [x]) + \frac{1}{6}$ について

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1 - [x+1])^2 - (x+1 - [x+1]) + \frac{1}{6} \\ &= (x - [x])^2 - (x - [x]) + \frac{1}{6} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用する.

$$S(x) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + x\right) \quad (\text{A})$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x\right) + f(1+x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x\right) + f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x\right) \quad (\text{B})$$

(B) の x を $x + \frac{1}{n}$ に置き換えると

$$\begin{aligned} S\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x + \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n} + x\right) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + x\right) = S(x) \end{aligned}$$

(3) (B) を利用すると, $0 \leq x < \frac{1}{n}$ のとき,

$$0 \leq \frac{k}{n} + x < 1 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

このとき

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(\frac{k}{n} + x\right)^2 - \left(\frac{k}{n} + x\right) + \frac{1}{6} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{2x-1}{n}k + x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{2x-1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \\ &= nx^2 - x + \frac{1}{6n} \end{aligned}$$

$S(0) = S\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6n} > 0$, $S\left(\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{12n} < 0$ に注意して, $S(x) = 0$ を解くと

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot n \cdot \frac{1}{6n}}}{2n} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{2n} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6n}$$

(4) (2), (3) の結論から, $S(x) = 0$ の解は $(x \geq 0)$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6n} + \frac{j}{n} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$



- 8** (1) $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ より, $8!$ の約数の個数は

$$(7+1)(2+1)(1+1)(1+1) = \mathbf{96}$$

- (2) $17x + 2 = 22y + 4$ とし (x, y は整数), 法 17 に関する合同式を考えると

$$\begin{aligned} 2 \equiv 5y + 4 &\iff 5y \equiv -2 &\iff 15y \equiv -6 \\ &\iff -2y \equiv -6 &\iff y \equiv 3 \pmod{17} \end{aligned}$$

$y = 17k + 3$ とおくと (k は整数)

$$22y + 4 = 22(17k + 3) + 4 = 374k + 70$$

求める 4 桁の最小の整数は, $k = 3$ のとき $374 \times 3 + 70 = \mathbf{1192}$

- (3) 2 次不等式 $2x^2 - (2a - 3)x - 3a < 0 \quad \cdots \textcircled{1}$

(i) $\textcircled{1}$ より $(2x + 3)(x - a) < 0$

よって $a > -\frac{3}{2}$ のとき $-\frac{3}{2} < x < a$,

$a = -\frac{3}{2}$ のとき 解なし,

$a < -\frac{3}{2}$ のとき $a < x < -\frac{3}{2}$

(ii) (i) の結果から

$a > -\frac{3}{2}$ のとき, $\textcircled{1}$ を満たす整数 4 個は $-1, 0, 1, 2$ であるから

$$2 < a \leq 3$$

$a < -\frac{3}{2}$ のとき, $\textcircled{1}$ を満たす整数 4 個は $-5, -4, -3, -2$ であるから

$$-6 \leq a < -5$$

よって $2 < a \leq 3, -6 \leq a < -5$ ■

- 9 (1) 2点 B, C の x 座標をそれぞれ b, c とすると

$$\overrightarrow{OA} = (a, a^2 - 6a + 6), \quad \overrightarrow{BC} = (c - b, (c - b)(c + b - 6))$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \text{ より}$$

$$a = c - b \cdots \textcircled{1}, \quad a^2 - 6a + 6 = (c - b)(c + b - 6) = a(c + b - 6)$$

上の第2式の両辺を a で割ると

$$a - 6 + \frac{6}{a} = c + b - 6 \quad \text{ゆえに} \quad c + b = a + \frac{6}{a} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } b = \frac{3}{a}, c = a + \frac{3}{a} \cdots (*)$$

よって, 点 B の x 座標は $\frac{3}{a}$

- (2) (i) (*) より, $a = 1$ のとき, $b = 3, c = 4$ であるから

$$A(1, 1), \quad B(3, -3), \quad C(4, -2)$$

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1), \quad \overrightarrow{OB} = (3, -3) \text{ より } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

よって, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角は $\frac{\pi}{2}$

- (ii) 四角形 OACB は平行四辺形であるから, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ より

$$|1 \cdot (-3) - 1 \cdot 3| = 6$$

- (iii) (i) の結果から, $\triangle ABC$ の外接円は, AB を直径とする円である.
円周上の点を $P(x, y)$ とすると, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ であるから

$$(x - 1)(x - 3) + (y - 1)(y + 3) = 0$$

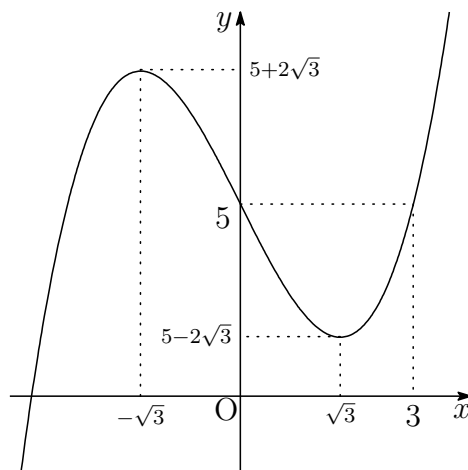
が成立する (P が A, B と一致するときも上式は成立する).

よって, 求める方程式は $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$ ■

- 10** (1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 5$ を微分すると $y' = x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x = -\sqrt{3}$ のとき極大値 $5 + 2\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ のとき極小値 $5 - 2\sqrt{3}$



- (2) (i) (1) で示したグラフから
 $0 \leq a < 3$ のとき $g(a) = 5$,
 $a \geq 3$ のとき $g(a) = \frac{1}{3}a^3 - 3a + 5$
- (ii) (1) で示したグラフから
 $0 \leq a < \sqrt{3}$ のとき $h(a) = \frac{1}{3}a^3 - 3a + 5$,
 $a \geq \sqrt{3}$ のとき $h(a) = 5 - 2\sqrt{3}$

(iii) (ii) の結果から

$$g(x) - h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + 3x & (0 \leq x < \sqrt{3}) \\ 2\sqrt{3} & (\sqrt{3} \leq x < 3) \\ \frac{1}{3}x^3 - 3x + 2\sqrt{3} & (3 \leq x) \end{cases}$$

よって、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{g(x) - h(x)\} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x\right) dx + \int_{\sqrt{3}}^3 2\sqrt{3} dx \\ &\quad + \int_3^4 \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x + 2\sqrt{3}\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\left[x\right]_{\sqrt{3}}^3 \\ &\quad + \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x\right]_3^4 \\ &= \frac{11}{6} + 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

■