高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説「数学編　理数編」に「質量とエネルギーの等価性にも触れること」とある (p.249)．これは特殊相対性理論に関するもので，高校生でも物理と数学 III の知識があれば，次の公式を導くことができる．

質量とエネルギーの等価性

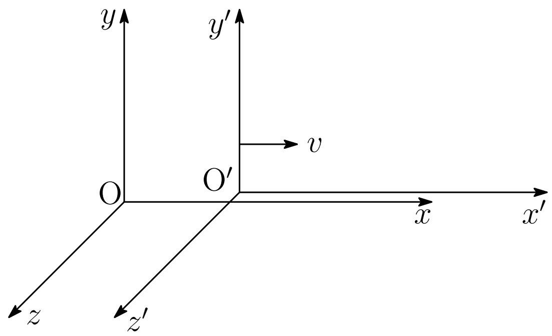
E : エネルギー，m : 質量，c : 光速度 とする．

$$E = mc^2$$

まず，ローレンツ変換に関する公式について証明する．ローレンツ変換を求めるには大きく分けて二通りの方法がある．ローレンツ流の「マクスウェル方程式を不変に保つ変換」を導く方法と，アインシュタイン流の「光速度が慣性系によらず一定」であることから導く簡単な方法である．アインシュタイン流の「光速度が慣性系によらず一定」であることから導く簡単な方法を用いる．

アインシュタイン以前の慣性系の変換式 (ガリレイ変換) について述べる．

図のように 2 つの直交座標系 S 系 O-xyz と S' 系 O$'$-$x'y'z'$ があり，S' 系は S 系に対して x 軸の正の方向に速度 v で等速直線運動しているものとする．



S と S' の原点にはそれぞれ観測者がいる．S の観測者が持つ時計と S' の観測者が持つ時計が共に時刻 0 を指しているとき，S の原点と S' の原点，S の x 軸と S' の x 軸，S の y 軸と S' の y 軸，S の z 軸と S' の z 軸が一致するものとする．S 系の観測者が時刻 t，空間 $(x,\ y,\ z)$ で観測した物理現象は，S' 系の観測者から観れば時刻 t'，空間 $(x',\ y',\ z')$ として観測されるものとすると，次の変換式 (ガリレイ変換) が成立する．

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{1}$$

速度 v が光速度 c に対して十分小さい場合，(1) は成立するが，光速不変の原理により，ガリレイ変換はローレンツ変換に修正される．

ローレンツ変換は，次の原理を前提にしている．

I 相対性原理
互いに等速度運動をしているすべての慣性系において，すべての基本的物理法則はまったく同じ形で表される．

II 光速不変の原理
いかなる慣性系からみても，光の速さは一定値 c である．

慣性系 S と S' の原点が一致する時刻を $t=t'=0$ とする．光速度を c とし，この瞬間に発光した光が全方向に広がる波面をそれぞれの慣性系おいて観測すると

$$\begin{cases} S: x^2+y^2+z^2=(ct)^2 \\ S': x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2 \end{cases} \tag{2}$$

が成立する．y と y' の変換式について

$$y'=\xi_1 y+\xi_2 t$$

であると仮定する．とくに O および O$'$ の y 座標および y' 座標は，時刻 t に関係なく $y=0$，$y'=0$ であるから，$\xi_2=0$ となり

$$y'=\xi_1 y$$

これは S から S' への変換式である．相対性により，S' から S への変換式は

$$y=\xi_1 y'$$

上の 2 式および (1) との整合性により，$\xi_1=1$ となる．すなわち　$y'=y$
同様にして，$z'=z$ も成立する．これらを $(*)$ に代入して整理すると

$$x'^2-x^2=c^2(t'^2-t^2) \tag{3}$$

x', t' は x と t の線形結合で表される (x', t' が y (または z) を含むと仮定すると，y が x', t' の線形結合で表され，$y=y'$ (または $z=z'$) に反する)．したがって，定数 p, q, r, s を用いて

$$x'=px+qct, \quad ct'=rct+sx \tag{4}$$

とおける．

(4) を (3) に代入すると

$$(px+qct)^2 - x^2 = (rct+sx)^2 - c^2t^2$$

x，t について整理すると

$$(p^2-s^2-1)x^2 + 2(pq-rs)xct + (q^2-r^2+1)c^2t^2 = 0$$

これは x, t に関する恒等式であるから

$$p^2-s^2-1=0, \quad pq-rs=0, \quad q^2-r^2+1=0 \tag{5}$$

(4) の第 1 式を t について微分すると

$$\frac{dx'}{dt'}\cdot\frac{dt'}{dt} = p\frac{dx}{dt} + qc \tag{6}$$

次に S' 系の原点 O$'$ を S 系から観測すると，速度 v の等速直線運動であるから

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dx'}{dt'} = 0$$

これらを (6) に代入すると

$$0 = pv + qc \tag{7}$$

(5) より

$$\begin{cases} p^2 = s^2+1 & \cdots ① \\ p^2q^2 = r^2s^2 & \cdots ② \\ q^2 = r^2-1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①，③ を ② に代入すると

$$(s^2+1)(r^2-1) = r^2s^2 \quad \text{ゆえに} \quad r^2 = s^2+1 \quad \cdots ④$$

(4) と (1) との整合性により，$p>0$, $r>0$ であるから，①，④ より，$p=r$．これを (5) の第 2 式に代入すると，$q=s$．また，③ より

$$q^2 = p^2 - 1 \quad \cdots ⑤$$

(7) より

$$p^2v^2 = q^2c^2 \quad \cdots ⑥$$

⑤，⑥ より，$p = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$　さらに (7) より　$q = -\dfrac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

以上の結果を (4) に代入すると，次のローレンツ変換

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{8}$$

を得る．上式から速度 v を光速度 c に対して十分小さくとると，ローレンツ変換はガリレイ変換に収斂することがわかる．また (8) より

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{9}$$

これを書き換えると

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \tag{10}$$

これから

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{11}$$

したがって，S 系は S' 系から観測すると，速度 $-v$ の慣性系である．

S' 系において静止している 2 点 $\mathrm{A}'(x'_1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}'(x'_2,\ 0,\ 0)$ をそれぞれ S 系から観測すると，$\mathrm{A}(x_1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(x_2,\ 0,\ 0)$，$t = t_0$ であるとき，(8) の第 1 式より

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{A'B'} = \frac{\mathrm{AB}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

したがって

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

これは，速度 v が大きくなると，観測値 AB が小さくなることを示している．

S' 系の原点 $\mathrm{O}'(x'=0)$ を S' 系および S 系から観測した時間の経過は，(11) より

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{ゆえに} \quad t' = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

これは，S' 系における時間の経過が S 系から観測すると遅くなることを示している．

(8) の第 1 式と第 4 式をそれぞれ t について微分すると

$$\frac{dx'}{dt'}\cdot\frac{dt'}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}-v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1-\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

上の 2 式から，$\frac{dt'}{dt}$ を消去して整理すると

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt}-v}{1-\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}$$

等速度で x 軸方向 (x' 軸方向) に運動する物体を S 系，S' 系から観測した速度をそれぞれ $u,\ u'$ とすると，$u'=\frac{dx'}{dt'}$，$u=\frac{dx}{dt}$ であるから，上式より

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} \quad \text{または} \quad u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} \tag{12}$$

(12) の第 2 式および第 1 式から，v_1，v_2 の速度の合成和 v_+，合成差 v_- は

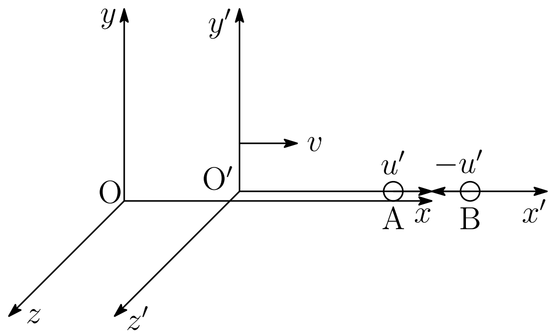
$$v_+ = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}, \qquad v_- = \frac{v_1-v_2}{1-\frac{v_1v_2}{c^2}}$$

たとえば，上の第 1 式に $v_2=c$ を代入すると，$v_+=c$ となり，合成和が c を超えることはないことがわかる．

静止質量が等しい 2 つの物体 A，B が S' 系において，それぞれ x 軸方向に $u', -u'$ の等速度で運動するとき $(u' > 0)$，A，B を S 系で観測した速度をそれぞれ v_1，v_2 とすると，(12) の第 2 式から

$$v_1 = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \qquad v_2 = \frac{-u' + v}{1 - \frac{u'v}{c^2}} \tag{13}$$

となる．



S から観測した物体 A，B の質量をそれぞれ m_1，m_2 とする．A，B を 1 つとした運動量は S' 系では 0 である．S 系では A，B を 1 つとした運動量は，速度が v であるから，運動量保存の法則により，次式が成立する．

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

これから

$$m_1(v_1 - v) = m_2(v - v_2) \quad \text{ゆえに} \quad m_1 : m_2 = \frac{1}{v_1 - v} : \frac{1}{v - v_2} \tag{14}$$

(13) の 2 式をそれぞれ u' について解くと

$$u' = \frac{v_1 - v}{1 - \frac{vv_1}{c^2}}, \quad u' = \frac{v - v_2}{1 - \frac{vv_2}{c^2}} \tag{15}$$

上の 2 式から u' を消去して，v について整理すると

$$(v_1 + v_2)v^2 - 2(c^2 + v_1 v_2)v + c^2(v_1 + v_2) = 0$$

v について解くと

$$v = \frac{c^2 + v_1 v_2 \pm \sqrt{(c^2 - {v_1}^2)(c^2 - {v_2}^2)}}{v_1 + v_2}$$

これから，次の 2 式を得る (複号同順).

$$v_1 - v = \frac{\mp\sqrt{(c^2 - {v_1}^2)(c^2 - {v_2}^2)} - (c^2 - {v_1}^2)}{v_1 + v_2}$$
$$v - v_2 = \frac{c^2 - {v_2}^2 \pm \sqrt{(c^2 - {v_1}^2)(c^2 - {v_2}^2)}}{v_1 + v_2}$$

このとき，(15) の第 1 式より，$v_1 - v > 0$ であるから

$$\begin{aligned}
v &= \frac{c^2 + v_1 v_2 - \sqrt{(c^2 - {v_1}^2)(c^2 - {v_2}^2)}}{v_1 + v_2}, \\
v_1 - v &= \frac{\sqrt{(c^2 - {v_1}^2)(c^2 - {v_2}^2)} - (c^2 - {v_1}^2)}{v_1 + v_2} \\
&= \sqrt{c^2 - {v_1}^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - {v_2}^2} - \sqrt{c^2 - {v_1}^2}}{v_1 + v_2}, \\
v - v_2 &= \frac{c^2 - {v_2}^2 - \sqrt{(c^2 - {v_1}^2)(c^2 - {v_2}^2)}}{v_1 + v_2} \\
&= \sqrt{c^2 - {v_2}^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - {v_2}^2} - \sqrt{c^2 - {v_1}^2}}{v_1 + v_2}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
v_1 - v : v - v_2 &= \sqrt{c^2 - {v_1}^2} : \sqrt{c^2 - {v_2}^2} \\
&= \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2} : \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}
\end{aligned} \tag{16}$$

(14) および (16) より

$$m_1 : m_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} : \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}$$

よって，S' 系に静止した物質の質量 M を S 系から観測すると，その質量 m は

$$m = \frac{M}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{17}$$

運動量 mv の変化率が力 F，エネルギー E の変化率が仕事率 Fv であるから

$$F = \frac{d}{dt}(mv), \quad Fv = \frac{d}{dt}E$$

$v = c\sin\theta$ とおくと $(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2})$

$$mv = \frac{Mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = Mc\tan\theta$$

これを t で微分すると

$$F = \frac{d}{dt}(Mc\tan\theta) = \frac{Mc}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

よって，A を積分定数とすると

$$E = \int Fv\,dt = Mc^2\int\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{Mc^2}{\cos\theta} + A = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = mc^2 + A \tag{18}$$

静止しているとき，(運動) エネルギー E を 0 とすると，$A = -Mc^2$ より

$$E = Mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right)$$

$h \fallingdotseq 0$ のとき，$(1+h)^n = 1 + nh$ であるから，v が c に対して十分に小さいとき

$$E = Mc^2\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right\} = Mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2}Mv^2$$

ニュートン力学の運動エネルギーは，v が c に対して十分に小さいときに成立する．

(18) から，質量・エネルギー等価性原理が成立する．

$$E = mc^2 \tag{$*$}$$

太陽で起きている核融合反応は，水素原子 4 個から途中，重水素に変化し最終的にヘリウム原子 1 個に変化する際，エネルギーの発生と質量の欠損が起きている．太陽では核融合反応が活発に起きているイメージがあるが，国立研究開発法人量子科学技術研究開発機構によると，地球中心部 (温度 1600 万度，圧力 2400 億気圧) でも，水素 (軽水素)1 つあたり 100 億年に 1 回程度の割合でしか反応しないので，非常に不活発な反応である．しかし，それでも太陽は非常に大きく，軽水素の数も莫大であるため，個々の反応の割合は小さくても太陽全体では多くの反応が起きている．太陽活動 (核融合反応) が起きている間 (太陽の寿命)，最終的に太陽全体の軽水素の $\frac{1}{10}$ 程度が核融合反応を起こすという報告がある．

水素の原子量 1.0078，ヘリウムの原子量 4.0026 から，核融合反応による欠損率は

$$1 - \frac{4.0026}{1.0078 \times 4} \fallingdotseq 0.007$$

太陽を回る地球の軌道離心率 (離心率)e は，およそ $e = 0.0167$ であり (観測値)，楕円軌道の長軸 $2a$ に対する短軸 $2b$ の割合は

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = 0.99986 \cdots$$

これから，地球の軌道を等速円運動とみなして，太陽の質量 M を求める．地球の質量を m，軌道半径を R，地球の速度を v，周期を T，重力定数を G とすると

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{Mm}{R^2}, \qquad vT = 2\pi R$$

上の 2 式から v を消去して，M について解くと

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \tag{19}$$

を得る．なお，ケプラーの第 3 法則から，地球以外の太陽系の惑星についても上式が成立することがわかる．$c = 3.0 \times 10^8$，$R = 500c$，$G = 6.67 \times 10^{-11}$，$T = 365 \times 24 \times 3600$ を代入する．実際の計算には，WolframAlpha を使った指導でもよい．これを用いた計算結果は，2.01×10^{30}(kg) となるが，研究機関による正確な値

$$M = 1.989 \times 10^{30} \quad \text{(kg)}$$

との誤差も小さい．

地球が太陽からの平均距離にあるときに毎分 1 平方センチメートルあたり約 1.96cal である (地上では大気に吸収されて約半分となる)．これから太陽定数 W を求めることができる．太陽定数とは，地球が太陽からの平均距離にあり，かつ地球大気の吸収がないとき，太陽光線に垂直な地表の単位面積に単位時間あたり入射する太陽放射エネルギー量であるから (1cal = 4.19J)

$$W = \frac{1.96 \times 4.19 \times 10^4}{60} \fallingdotseq 1370 \quad \text{(ワット)}$$

これから，太陽が単位時間あたりに放射するエネルギー量 (仕事率)K は

$$K = 4\pi R^2 W \tag{20}$$

太陽の軽水素の $\frac{1}{10}$ が核融合反応を起こし，核融合反応による質量欠損率が 0.007 であるから，(∗) より太陽が放射する全エネルギー E は

$$E = Mc^2 \times \frac{1}{10} \times 0.007 = 7 \times 10^{-4} Mc^2 = \rho Mc^2 \quad (\rho = 7 \times 10^{-4})$$

上式および (19)，(20) から，太陽の寿命は

$$\frac{E}{K} = \frac{\rho Mc^2}{K} = \frac{\rho \cdot 4\pi^2 R^3 c^2}{GT^2} \cdot \frac{1}{4\pi R^2 W} = \frac{\rho \pi R c^2}{GT^2 W} \quad (\text{秒})$$

したがって，太陽の寿命年は $(R = 500c)$

$$\frac{E}{KT} = \frac{500\rho\pi}{GW}\left(\frac{c}{T}\right)^3 \quad (\text{年})$$

上式の右辺に $\rho = 7 \times 10^{-4}$，$G = 6.67 \times 10^{-11}$，$W = 1370$，$c = 3 \times 10^8$，$T = 365 \times 24 \times 3600$ を代入すると，太陽の寿命年は約 104 億年となる．現在の太陽の年齢が 45 億年といわれている．今の太陽を人の年齢で考えると，正に働き盛りである．

最小の元素である水素の化学的な振る舞いが太陽系 (宇宙) の運命を定めており，非常に興味深い．