高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説「数学編　理数編」(p.248) にケプラーの法則を扱うこととあります．新課程の数学 C では行列が復活するため，これを利用した証明を与えます．また，外積を使う証明と使わないで済む証明法も与えます．

ケプラーの法則

- 第 1 法則：惑星は太陽を焦点の 1 つとする楕円軌道を描く．
- 第 2 法則：惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に描く面積 (面積速度) は一定である．
- 第 3 法則：各惑星の公転周期 T の 2 乗は，楕円軌道の半長軸 a の 3 乗に比例する．k を比例定数とすると，$T^2 = ka^3$ が成り立つ．

太陽の位置を O，惑星の位置を P とし，$\mathrm{X} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする．太陽と惑星の質量をそれぞれ $M,\ m$ とすると，万有引力の法則から

$$m\ddot{\mathrm{X}} = -G\frac{Mm}{|\mathrm{X}|^3}\mathrm{X} \qquad (G \text{ は万有引力定数}) \tag{1}$$

が成立する．このとき，X は時刻 t の関数とし，$\dot{\mathrm{X}} = \dfrac{d}{dt}\mathrm{X},\ \ddot{\mathrm{X}} = \dfrac{d}{dt}\dot{\mathrm{X}}$ とおく．

(1) より

$$\mathrm{X} \times \ddot{\mathrm{X}} = -G\frac{M}{|\mathrm{X}|^3}\mathrm{X} \times \mathrm{X} = \mathrm{O}$$

次に $\mathrm{X} \times \dot{\mathrm{X}}$ を微分すると

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{X} \times \dot{\mathrm{X}}) = \dot{\mathrm{X}} \times \dot{\mathrm{X}} + \mathrm{X} \times \ddot{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \times \ddot{\mathrm{X}} = \mathrm{O}$$

したがって，$\mathrm{X} \times \dot{\mathrm{X}}$ は定ベクトルであるから，これを N とすると面積速度

$$\frac{1}{2}|\mathrm{X} \times \dot{\mathrm{X}}| = \frac{1}{2}|\mathrm{N}|$$

は一定であり (第 2 法則)，P(X) は N を法ベクトルとする平面上を運動する．

したがって，P(X) を O を原点する座標平面上の点の運動として考えてもよい．

$r = |\mathrm{X}|$ とし，r，θ を t の関数とする．

$$\mathrm{X} = r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

とおいて，これを t について微分すると

$$\dot{\mathrm{X}} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

さらに，t について微分すると

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathrm{X}} &= \ddot{r}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + 2\dot{r}\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} + r\ddot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - r\dot{\theta}^2\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix} \qquad (2)
\end{aligned}$$

(1) を平面上の点とすると

$$\ddot{\mathrm{X}} = -\frac{GM}{r^2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad (3)$$

(2) と (3) より

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix} &= -\frac{GM}{r^2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix} &= -\frac{GM}{r^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix} &= -\frac{GM}{r^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \qquad (4)$$

(4) の第 2 式から

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \qquad (5)$$

面積速度 $\dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ が定数となるから，これからも第 2 法則が確認できる．

(5) から，$r^2\dot{\theta} = C$ (C は定数) とおくと

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \tag{6}$$

(6) を (4) の第 1 式に代入すると

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \tag{7}$$

ここで，$r = \dfrac{1}{s}$ とおいて，t で微分すると

$$\dot{r} = -\frac{1}{s^2}\frac{ds}{dt} = -r^2\frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -r^2\dot{\theta}\frac{ds}{d\theta} = -C\frac{ds}{d\theta}$$

上式をさらに t で微分すると

$$\ddot{r} = -C\frac{d^2s}{d\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -C\dot{\theta}\frac{d^2s}{d\theta^2} = -\frac{C^2}{r^2}\cdot\frac{d^2s}{d\theta^2} \tag{8}$$

(8) を (7) にすると

$$-\frac{C^2}{r^2}\cdot\frac{d^2s}{d\theta^2} - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2s}{d\theta^2} = -s + \frac{GM}{C^2}$$

したがって

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(s - \frac{GM}{C^2}\right) = -\left(s - \frac{GM}{C^2}\right)$$

これを解くと

$$s - \frac{GM}{C^2} = A\cos(\theta + B)$$

となる (A, B は定数で，初期条件により決定する)．上式から

$$r = \frac{1}{\frac{GM}{C^2} + A\cos(\theta + B)} = \frac{\frac{C^2}{GM}}{1 + \frac{AC^2}{GM}\cos(\theta + B)}$$

$A \geqq 0$ となるように，B をとり，$e = \dfrac{AC^2}{GM}$，$\lambda = \dfrac{C^2}{GM}$ とおくと

$$r = \frac{\lambda}{1 + e\cos(\theta + B)} \tag{9}$$

P(X) が楕円軌道を描くのは，$0 < e < 1$ のとき ($e = 0$ のとき円) である (第 1 法則)．なお，$e = 1$ のときは放物線，$e > 1$ のときは双曲線となる．

$0 < e < 1$ のとき，楕円の長軸の長さを $2a$，短軸の長さを $2b$ とすると，(9) より

$$2a = \frac{\lambda}{1+e} + \frac{\lambda}{1-e}, \quad b = a\sqrt{1-e^2}$$

これを解いて

$$a = \frac{\lambda}{1-e^2}, \qquad b = \frac{\lambda}{\sqrt{1-e^2}}$$

P(X) の面積速度 $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$ および楕円の面積 πab より，公転周期 T は

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{C}{2}} = \frac{2\pi ab}{C} = \frac{2\lambda^2}{C(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

両辺を平方すると

$$T^2 = \frac{4\lambda^4}{C^2(1-e^2)^3} = \frac{4\lambda}{C^2}\left(\frac{\lambda}{1-e^2}\right)^3 = \frac{4\lambda}{C^2}a^3$$

$k = \frac{4\lambda}{C^2}$ とおくと，次の第 3 法則が成立する．

$$T^2 = ka^3$$

補足

(1) において，$X = (x,\ y,\ z)$ とすると

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{r^3}x, \quad \ddot{y} = -\frac{GM}{r^3}y, \quad \ddot{z} = -\frac{GM}{r^3}z$$

であるから

$$y\ddot{z} - \ddot{y}z = 0, \quad z\ddot{x} - \ddot{z}x = 0, \quad x\ddot{y} - \ddot{x}y = 0$$

これから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y\dot{z} - \dot{y}z) = y\ddot{z} - \ddot{y}z = 0, \\ \frac{d}{dt}(z\dot{x} - \dot{z}x) = z\ddot{x} - \ddot{z}x = 0, \\ \frac{d}{dt}(x\dot{y} - \dot{x}y) = x\ddot{y} - \ddot{x}y = 0 \end{aligned}$$

$y\dot{z} - \dot{y}z$，$z\dot{x} - \dot{z}x$，$x\dot{y} - \dot{x}y$ は，定数となるから

$$a = y\dot{z} - \dot{y}z, \quad b = z\dot{x} - \dot{z}x, \quad c = x\dot{y} - \dot{x}y$$

とおくと

$$ax + by + cz = 0$$

が成立する．上式から点 P(X) は原点 O を通り，法ベクトルが $\mathrm{N} = (a,\ b,\ c)$ である平面上を運動する [1]．

---

[1] 昭和 59 年 3 月以前の高卒者は授業で学んでいた．