次の線形の 2 階微分方程式 (α，β は定数) から説明します．

$$y'' - (\alpha+\beta)y'' + \alpha\beta y = 0$$

これから　$(y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) = 0$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(y' - \beta y)' e^{-\alpha x} + (y' - \beta y)(e^{-\alpha x})' = 0$$
$$\{(y' - \beta y)e^{-\alpha x}\}' = 0$$

両辺を x について積分すると

$$(y' - \beta y)e^{-\alpha x} = c_1 \quad \cdots (*) \quad (c_1\text{は定数})$$

ゆえに　$y' - \beta y = c_1 e^{\alpha x} \quad \cdots (1)$

同様に　$y' - \alpha y = c_2 e^{\beta x} \quad \cdots (2)$

$\alpha \neq \beta$ のとき，(1)，(2) より，改めて定数 C_1，C_2 を用いて

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}}$$

α，β が複素数 $p + qi$，$p - qi$ であるとき，オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

により，y は，定数 A，B を用いて

$$\boldsymbol{y = e^{pt}(A\sin qx + B\cos qx)}$$

$\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ から

$$y' e^{-\alpha x} - \alpha y e^{-\alpha x} = c_1$$

両辺を x について積分すると (c_3は定数)

$$ye^{-\alpha x} = c_1 x + c_3 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = (c_1 x + c_3)e^{\alpha x}}$$

例 1 抵抗 R，コイル L，コンデンサ C が直列に繋がれた RLC 回路に電圧 V の電池を接続すると，キルヒホッフの法則により

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\,dt = V \tag{$*$}$$

が成立する．このとき，電流 I を求めよ．

解答 $(*)$ の両辺を t で微分することにより

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = 0$$

特性方程式 $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{R}{L} < 0, \quad \alpha\beta = \frac{1}{LC} > 0$$

(i) 特性方程式が異なる 2 つの実数解をもつとき，$\alpha < 0,\ \beta < 0$ であるから

$$I = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$$

よって，I は単調に減衰する．

(ii) 特性方程式が異なる 2 つの虚数解 $p \pm qi$ をもつとき，$p = -\frac{R}{2L} < 0$ より

$$I = e^{pt}(C_3 \sin qt + C_4 \cos qt)$$

よって，I は振動しながら減衰する．

(iii) 特性方程式が重解 α をもつとき，$\alpha = -\frac{R}{2L} < 0$ であるから

$$I = (C_5 t + C_6)e^{\alpha t}$$

よって，I は単調に減衰し，(i)，(ii) よりも早く減衰する (臨界減衰)．

例 2 抵抗 R，コイル L，コンデンサ C が直列に繋がれた RLC 回路に電圧 $V_0 \sin wt$ を接続すると (V_0は定数)，キルヒホッフの法則により

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\,dt = V_0 \sin wt \tag{$**$}$$

が成立する．このとき，電流 I を求めよ．

解答 $(**)$ の両辺を t で微分することにより

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = \frac{wV_0}{L}\cos wt$$

特性方程式 $\lambda^2 + \dfrac{R}{L}\lambda + \dfrac{1}{LC} = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$I'' - (\alpha+\beta)I' + \alpha\beta I = \frac{wV_0}{L}\cos wt$$

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき，両辺に $e^{-\alpha t}$ を掛けると

$$(I' - \beta I)'e^{-\alpha t} - \alpha(I' - \beta I)e^{-\alpha t} = \frac{wV_0}{L}e^{-\alpha t}\cos wt$$

これを t について積分すると $\left(A,\ B \text{ は定数},\ E = \dfrac{wV_0}{L}\right)$

$$(I' - \beta I)e^{-\alpha t} = \frac{E}{w^2+\alpha^2}e^{-\alpha t}(w\sin wt - \alpha\cos wt) + A \tag{$***$}$$

$$I' - \beta I = \frac{E}{w^2+\alpha^2}(w\sin wt - \alpha\cos wt) + Ae^{\alpha t}$$

同様に $$I' - \alpha I = \frac{E}{w^2+\beta^2}(w\sin wt - \beta\cos wt) + Be^{\beta t}$$

上の 2 式の辺々の差をとると ($\phi(t) = Ae^{\alpha t} - Be^{\beta t}$ とおく)

$$(\alpha-\beta)I = \frac{Ew(\beta^2-\alpha^2)\sin wt + E\{w^2(\beta-\alpha) + \alpha\beta(\alpha-\beta)\cos wt\}}{(w^2+\alpha^2)(w^2+\beta^2)} + \phi(t)$$

$$\begin{aligned}
(w^2+\alpha^2)(w^2+\beta^2)I &= -Ew(\alpha+\beta)\sin wt + E(-w^2+\alpha\beta)\cos wt + \phi(t) \\
&= \frac{w^2V_0R}{L^2}\sin wt - \frac{w^2V_0}{L^2}\left(wL - \frac{1}{wC}\right)\cos wt + \phi(t) \\
&= \frac{w^2V_0}{L^2}\left\{R\sin wt - \left(wL - \frac{1}{wC}\right)\cos wt\right\} + \phi(t)
\end{aligned}$$

$\alpha+\beta=-\dfrac{R}{L}$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{LC}$ より

$$
\begin{aligned}
(w^2+\alpha^2)(w^2+\beta^2) &= w^4+(\alpha^2+\beta^2)w^2+(\alpha\beta)^2 \\
&= w^4+\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}w^2+(\alpha\beta)^2 \\
&= w^4+\left(\frac{R^2}{L^2}-\frac{2}{LC}\right)w^2+\frac{1}{L^2C^2} \\
&= \frac{w^2R^2}{L^2}+\left(w^2-\frac{1}{LC}\right)^2 \\
&= \frac{w^2}{L^2}\left\{R^2+\left(wL-\frac{1}{wC}\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

$Z=\sqrt{R^2+\left(wL-\dfrac{1}{wC}\right)^2}$，$\cos\varphi=\dfrac{R}{Z}$，$\sin\varphi=\dfrac{wL-\dfrac{1}{wC}}{Z}$ とおくと

$$
\frac{w^2Z^2}{L^2}I=\frac{w^2V_0Z}{L^2}(\sin wt\cos\varphi-\cos wt\sin\varphi)+\phi(t)
$$

特性方程式が異なる 2 つの実数解をもつとき，$\alpha<0$, $\beta<0$ であるから，$\phi(t)$ は減衰する．特性方程式が異なる 2 つの虚数解をもつときも $\mathrm{Re}(\alpha)=\mathrm{Re}(\beta)<0$ であるから，$\phi(t)$ は減衰する．よって，スイッチを入れた初期動作 (ごく一瞬) は，正弦波ではないが，次式に収斂する．

$$
(☆)\quad I=\frac{V_0}{Z}\sin(wt-\varphi)
$$

(ii) $\alpha=\beta$，すなわち，$R^2=\dfrac{4L}{C}$ のとき，$(***)$ より (p, q は定数)

$$
(I-\alpha I)e^{-\alpha t}=\frac{E}{w^2+\alpha^2}e^{-\alpha t}(w\sin wt-\alpha\cos wt)+p
$$

これを積分すると，$\alpha=-\dfrac{R}{2L}$，$(w^2+\alpha)^2=(w^2+\alpha^2)(w^2+\beta^2)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
Ie^{-\alpha t} &= \frac{Ee^{-\alpha t}}{(w^2+\alpha^2)^2}\left\{-2w\alpha\sin wt+(\alpha^2-w^2)\cos wt\right\}+pt+q \\
I &= \frac{V_0}{Z^2}\left\{R\sin wt-\left(wL-\frac{1}{wC}\right)\cos wt\right\}+(pt+q)e^{-\frac{Rt}{2L}} \\
&= \frac{V_0}{Z}\sin(wt-\varphi)+(pt+q)e^{-\frac{Rt}{2L}}
\end{aligned}
$$

このときも，I は (☆) に収斂する．