例 1 微分方程式 $y' - \alpha y = 0$ を解け $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y'e^{-\alpha x} + y(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})' = 0$$

これを積分すると　$ye^{-\alpha x} = C$　よって　$y = Ce^{\alpha x}$　(C は定数)

例 2 $\alpha \neq \beta$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とするとき，次の微分方程式を解け.

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

解答 与式から　$(y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta y) = 0$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(y' - \beta y)'e^{-\alpha x} + (y' - \beta)(e^{-\alpha x})' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{(y' - \beta y)e^{-\alpha x}\}' = 0$$

これを積分すると

$$(y' - \beta y)e^{-\alpha x} = A_1 \quad \text{ゆえに} \quad y' - \beta y = A_1 e^{\alpha x} \quad (A_1\text{は定数})$$

となる．同様にして　$y' - \alpha y = A_2 e^{\beta x}$　(A_2は定数)

よって，上の 2 式から，y' を消去すると

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \quad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$

例 3 例 2 において，$\beta = \alpha$ とした，次の微分方程式を解け.

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

解答 両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha})'' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (ye^{-\alpha x})^{(2)} = 0$$

これを 2 回積分すると

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} \quad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$

例 4 $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\gamma \neq \alpha$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}$ とするとき，次の微分方程式を解け.

$$y''' - (\alpha+\beta+\gamma)y'' + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)y' - \alpha\beta\gamma y = 0$$

解答 与式から

$$\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}' - \alpha\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\} = 0$$

両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$\begin{aligned}\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}'e^{-\alpha x} + \{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}(e^{-\alpha x})' &= 0\\ [\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}e^{-\alpha x}]' &= 0\end{aligned}$$

これを積分すると

$$\begin{aligned}\{y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y\}e^{-\alpha x} &= A_1\\ y'' - (\beta+\gamma)y' + \beta\gamma y &= A_1e^{\alpha x} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}y'' - (\gamma+\alpha)y' + \gamma\alpha y &= A_2e^{\beta x} \qquad \cdots ②\\ y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y &= A_3e^{\gamma x} \qquad \cdots ③\end{aligned}$$

① − ② より　$(\alpha-\beta)(y' - \gamma y) = A_1e^{\alpha x} - A_2e^{\beta x}$

② − ③ より　$(\beta-\gamma)(y' - \alpha y) = A_2e^{\beta x} - A_2e^{\gamma x}$

上の 2 式から，y' を消去すると

$$y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x} + C_3e^{\gamma x} \quad (C_1,\ C_2,\ C_3\text{は定数})$$

例 5 例 4 において，$\gamma = \alpha$ とした，次の微分方程式を解け．

$$y''' - (2\alpha + \beta)y'' + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)y' - \alpha^2\beta y = 0$$

解答 与式から

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)' - \beta(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y) = 0$$

両辺に $e^{-\beta x}$ を掛けると

$$\begin{aligned}(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)'e^{-\beta x} + (y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)(e^{-\beta x})' = 0\\ \{(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\beta x}\}' = 0\end{aligned}$$

これを積分すると

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\beta x} = A_1$$

両辺に $e^{(\beta-\alpha)x}$ を掛けると

$$(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\alpha x} = A_1 e^{(\beta-\alpha)x}$$

ここで，上式の左辺は

$$\begin{aligned}(y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y)e^{-\alpha x} &= y''e^{-\alpha x} + 2y'(e^{-\alpha x})' + y(e^{-\alpha})''\\ &= (ye^{-\alpha x})^{(2)}\end{aligned}$$

となる．したがって

$$(ye^{-\alpha x})^{(2)} = A_1 e^{(\beta-\alpha)x}$$

これを，x について 2 回積分すると，改めて定数 C_1，C_2，C_3 を用いて

$$ye^{-\alpha x} = C_1 x + C_2 + C_3 e^{(\beta-\alpha)x} \quad \text{よって} \quad y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x} + C_3 e^{\beta x}$$

例 6 例 4 において，$\alpha = \beta = \gamma$ とした，次の微分方程式を解け．

$$y''' - 3\alpha y'' + 3\alpha^2 y' - \alpha^3 y = 0$$

解答 与式の両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$\begin{aligned}y'''e^{-\alpha x} + 3y''(e^{-\alpha x})' + 3y'(e^{-\alpha x})'' + y(e^{-\alpha x})''' = 0\\ (ye^{-\alpha x})^{(3)} = 0\end{aligned}$$

これを x について 3 回積分すると　$ye^{-\alpha x} = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

よって　　$y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)e^{\alpha x}$　　(C_1，C_2，C_3 は定数)

例 7 放射性同位体の原子数は，時間の経過により (原子の崩壊)，その原子数は減少する．原子数 N は時刻 t の減少関数で，その変化率は $\dfrac{dN}{dt} < 0$ で，N に比例し

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad \cdots (*)$$

であることが分かっている (崩壊定数 λ は物質の種類による固有の定数)．

解答 $N' = \dfrac{dN}{dt}$ とおくと $\qquad N' + \lambda N = 0$

例 1 の結果を利用してこれを解くと $\qquad N = Ce^{-\lambda t}$

ここで，初期条件 $t = 0$ のとき $N = N_0$ とすると，$C = N_0$ より

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \cdots ①$$

さらに，$t = T$ (T は半減期) のとき $N = \dfrac{1}{2}N_0$ とすると

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T} \quad \text{ゆえに} \quad e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \qquad \cdots ②$$

①，② から $\qquad N = N_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

崩壊定数 λ は，$(*)$ により個体数 N と単位時間当たり (1 秒間) の崩壊数を観測することで求めることができる．したがって，半減期 T は ② から

$$T = \frac{\log 2}{\lambda}$$

例 8 ばね定数 k[N/m] のばねの一端が固定され，他端に質量 m[kg] のおもりが付けられ，なめらかな水平面を運動している．自然長の位置を原点 O とし，ばねが伸びる向きを変位 x[m] の正の向きとし，おもりの加速度を a[m/s^2] とすると，次式が成り立つ．

$$ma = -kx$$

解答 このとき，$a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ より，$a = x''$ とおくと

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

となる，このとき特性方程式の解が $\pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ であるから，例 2 の結果から

$$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

を得る．初期条件を $t = 0$ のとき，$x = A$，$v = \dfrac{dx}{dt} = 0$ とすると

$$C_1 + C_2 = A,\quad C_1 - C_2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

したがって　$x = \dfrac{A}{2}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)$

上式にオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を代入すると[1]

$$x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

この単振動の周期を T[s] とすると

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

を得る．

[1] 証明は http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf を参照．

例 9 動機的外力が定めたバネ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \sin\omega t \quad (F_0\text{と}\omega\text{は定数}) \quad (\text{強制振動})$$

の運動の様子を探求せよ．

解答 斉次式 $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -ky \ \ (m > 0,\ k > 0)$ について，α，β を求めると，$\pm\sqrt{\dfrac{k}{m}}i$ であるから

$$y = C_1 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

$x = y + C_3 \sin\omega t + C_4 \cos\omega t$ とおいて，原方程式に代入すると

$$C_3(m\omega^2 - k) = F_0,\quad C_4 = 0$$

を得る．

i) $\omega \neq \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ のとき

$$\boldsymbol{x = C_1 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{F_0}{m\omega^2 - k}\sin\omega t}$$

これは単振動の合成であり，複雑な振る舞いを見せるが，ω と $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ が簡単な整数比で表せるときに限り，周期性が現れる．

ii) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ のとき，原方程式は $\left(x' = \dfrac{dx}{dt},\quad x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)$

$$x'' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

これから

$$(x' - i\omega x)' + i\omega(x' - i\omega x) = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$
$$(x' + i\omega x)' - i\omega(x' + i\omega x) = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

第 1 式，第 2 式にそれぞれ $e^{i\omega t}$，$e^{-i\omega t}$ をかけて積分すると

$$(x' - i\omega x)e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}\left(-\frac{e^{2i\omega t}}{4\omega} - \frac{t}{2i} + c_1\right)$$
$$(x' + i\omega x)e^{-i\omega t} = \frac{F_0}{m}\left(\frac{e^{-2i\omega t}}{4\omega} + \frac{t}{2i} + c_2\right)$$

したがって

$$x' - i\omega x = \frac{F_0}{m}\left(-\frac{e^{i\omega t}}{4\omega} - \frac{te^{-i\omega t}}{2i} + c_1 e^{-i\omega t}\right)$$

$$x' + i\omega x = \frac{F_0}{m}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{4\omega} + \frac{te^{i\omega t}}{2i} + c_2 e^{i\omega t}\right)$$

上の 2 式から x' を消去すると (C_3，C_4 は定数)

$$\boldsymbol{x = \frac{F_0}{m}\left(-\frac{t\cos\omega t}{2\omega} + C_3\sin\omega t + C_4\cos\omega t\right)}$$

これは，$t\cos\omega t$ から分かるように発散する (振動子が破壊される).

補題 $|\theta - \sin\theta| \leqq \dfrac{1}{6}|\theta|^3$ を証明せよ.

証明 $\theta \geqq 0$ のとき

$$\int_0^\theta (1 - \cos x)\,dx = \Big[\ x - \sin x\ \Big]_0^\theta = \theta - \sin\theta \geqq 0$$

これから

$$\int_0^\theta (x - \sin x)\,dx = \left[\ \frac{x^2}{2} + \cos x\ \right]_0^\theta = \frac{\theta^2}{2} + \cos\theta - 1 \geqq 0$$

したがって

$$\int_0^\theta \left(\frac{x^2}{2} + \cos x - 1\right)\,dx = \left[\ \frac{x^3}{6} + \sin x - x\ \right]_0 \theta = \frac{\theta^3}{6} + \sin\theta - \theta \geqq 0$$

上の第 1 式と第 3 式から

$$0 \leqq \theta - \sin\theta \leqq \frac{\theta^3}{6} \quad ゆえに \quad |\theta - \sin\theta| \leqq \frac{|\theta|^3}{6} \tag{$*$}$$

$\theta \leqq 0$，すなわち，$-\theta \geqq 0$ のとき，($*$) より

$$|-\theta - \sin(-\theta)| \leqq \frac{|-\theta|^3}{6} \quad ゆえに \quad |\theta - \sin\theta| \leqq \frac{|\theta|^3}{6}$$

証終

例えば，$|\theta| \leqq \dfrac{\pi}{20}$ (9°) のとき

$$|\theta - \sin\theta| \leqq \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3 = \frac{\pi^3}{48} \times \frac{1}{1000} < \frac{1}{1000}$$

例 10 糸の一端を固定し，他点に質量 m[kg] のおもりを付けて吊るす．下の図のように最下点 O から反時計周りを正とし，$x = \overset{\frown}{\mathrm{OP}} = l\theta$ [m] とする．おもりの加速度を a[m/s^2] とすると，次式が成り立つ．

$$ma = -mg\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad a = -g\sin\theta$$

このとき，$a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ より　$a = \dfrac{d^2}{dt^2}(l\theta) = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$\theta'' = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ とおくと　　$l\theta'' = -g\sin\theta$

$|\theta| \leqq \dfrac{\pi}{20}$ のとき，$|\theta - \sin\theta| < \dfrac{1}{1000}$ であるから，このとき，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ より

$$l\theta'' = -g\theta \quad \text{ゆえに} \quad \theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$$

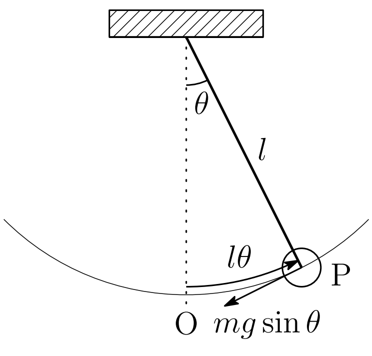
初期条件を $t = 0$ のとき，$\theta = A$ $(|A| \leqq \frac{\pi}{20})$，$\dfrac{d\theta}{dt} = 0$ とすると，例 8 と同様に

$$\theta = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

この単振動の周期を T[s] とすると

$$\sqrt{\frac{g}{l}}T = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

を得る．



次の問題が，線形微分方程式に関する出題です．

2010 年 大分大学医学部

微分可能な関数 $y = f(x)$ が次の方程式を満たすとする．

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 f(x) = 0 \qquad \text{(A)}$$

ここに n は自然数，a_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ は実数の定数で，$a_n \neq 0$ である．また，$y^{(k)} = f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の k 次導関数で $y^{(0)} = f^{(0)}(x) = f(x)$ とする．(A) のような方程式を第 n 階微分方程式といい，(A) に対して t の n 次方程式

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0 \qquad \text{(B)}$$

を (A) の特性方程式という．このとき次の問いに答えよ．

(1) 特性方程式 (B) の解が実数 r であるとき，関数 $y = e^{rx}$ が方程式 (A) を満たすことを証明せよ．

(2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解(注) にもつとき，次の t に関する方程式は r を $k-1$ 重解にもつことを証明せよ．ただし，$k = 2, 3, \cdots$ とする．

$$n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2 a_2 t + a_1 = 0$$

(注) t の m 次方程式が適当な多項式 $Q(t)$ を用いて $(t-r)^k Q(t) = 0$ となるとき，$t = r$ をこの方程式の k 重解と定義する．ただし，$k = 1, 2, \cdots$ とする．

(3) 実数の定数 r に対して x の関数を $y_i = x^i e^{rx}$ $(i = 0, 1, 2 \cdots)$ とする．
このとき，${y_j}^{(n)}$ を x，${y_{j-1}}^{(n-1)}$ および ${y_{j-1}}^{(n)}$ を用いて表せ．ただし，
$j = 1, 2, 3, \cdots$ とする．

(4) 実数 r が n 次方程式 (B) の k 重解であるとき $y_i = x^i e^{rx}$
$(i = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$ が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ．ただし，
k は自然数である．

解答 (1) 実数 r は特性方程式 (B) の解であるから

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

両辺に e^{rx} を掛けると

$$a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$$
$$a_n (e^{rx})^{(n)} + a_{n-1} (e^{rx})^{(n-1)} + \cdots + a_1 (e^{rx})^{(1)} + a_0 e^{rx} = 0$$

よって，関数 $y = e^{rx}$ は方程式 (A) を満たす．

(2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解にもつから，$n-k$ 次多項式 $Q(t)$ を用いて

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = (t-r)^k Q(t) \quad \cdots (*)$$

とおける．この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 & \\ = k(t-r)^{k-1}Q(t) + (t-r)^k Q'(t) & \\ = (t-r)^{k-1}\{kQ(t) + (t-r)Q'(t)\} & \end{aligned}$$

よって，次の方程式は，r を $k-1$ 重解にもつ．

$$na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(3) $y_j = x^j e^{rx}$ より，$y_j = xy_{j-1}$ であるから，ライプニッツの公式を用いて微分すると

$$y_j^{(n)} = (xy_j)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{(n-k)} {y_{j-1}}^{(k)}$$
$$= \sum_{k=n-1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{(n-k)} {y_{j-1}}^{(k)} = \boldsymbol{n{y_{j-1}}^{(n-1)} + x{y_{j-1}}^{(n)}}$$

解説 ライプニッツの公式

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

証明は，数学的帰納法により示すことができる．

(4) $(*)$ の $Q(t)$ を，定数 $b_i(i=0,1,2,\cdots,n-k)$ を用いて $(b_{n-k}=a_n)$

$$Q(t)=\sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i$$

とおくと，$(*)$ から

$$\begin{aligned} a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 =& (t-r)^k Q(t) \\ =& \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j t^{k-j}(-r)^j \sum_{i=0}^{n-k} b_i t^i \\ =& \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j t^{k+i-j} \end{aligned}$$

上式から

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k+i-j)}$$

ここで $z=\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k-j)}$ とおくと

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \sum_{i=0}^{n-k} b_i z^{(i)}$$

このとき，微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \cdots (**)$$

は，次のようになる．

$$b_0 z + b_1 z' + b_2 z'' + \cdots + b_{n-k} z^{(n-k)} = 0$$

したがって，$z=0$ は微分方程式 $(**)$ の解の 1 つであるから

$$\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k-j)} = 0$$

$$e^{-rx}\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j (-r)^j y^{(k-j)} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j y^{(k-j)} (e^{-rx})^{(j)} = 0$$

ゆえに，ライプニッツの公式により

$$(ye^{-rx})^{(k)} = 0$$

上式の両辺を k 回積分すると，右辺は x の $k-1$ 次式になるので

$$ye^{-rx} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{k-1} x^{k-1}$$

となる (c_jは定数 $(j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$).
したがって，次式は微分方程式 $(**)$ の解の 1 つである.

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$$

よって，$x^j e^{rx}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$ は，$(**)$ をみたす.