

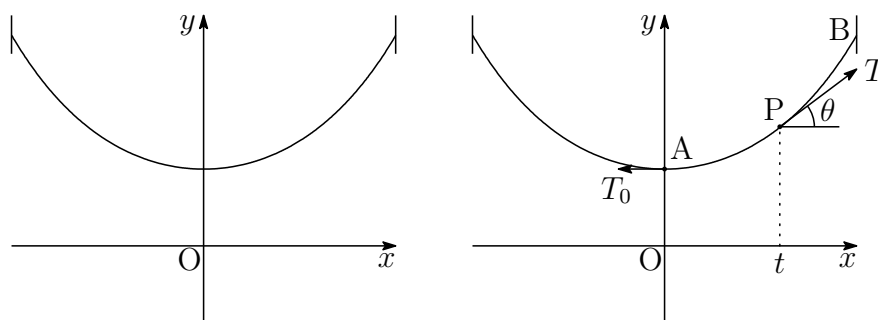
はじめに

SSH 事業は，理科と数学を中心とした研究事業であると考えられます．中でも物理科と数学科は教科としても扱う内容が近いと感じています．数学で扱うカテナリー (catenary curve)，サイクロイド (cycloid)，外サイクロイド (epicycloid) は，物理学では，それぞれ，懸垂曲線，最速降下曲線，焦線 (caustic) として扱われています．焦線は外サイクロイドのうち，動円の半径が基準円の半径の $\frac{1}{2}$ であるものをいいます．

1 懸垂曲線

懸垂曲線 (catenary curve) は，左下の図のように，両端を固定した 2 点に吊るした (均等な) ロープの曲線に関する問題です．最下点を A，端点の一方を B とする．物理的な知識として，ロープにかかる水平方向の張力は一定である．なぜなら，ロープ上の適当な 2 点 C, D を端点とする物体について，水平方向の釣り合いにより，C, D それぞれに働く張力は等しい．そこで A に働く張力を T_0 とする．ロープ上の点 P における x 座標を t とし，P における曲線の接線の水平方向となす角を θ とする．ロープの単位長あたりの質量を ρ ，重力加速度を g ，曲線の方程式を $y = f(x)$ とすると，次の 3 式が成立する．

$$T \cos \theta = T_0, \quad T \sin \theta = \rho g \int_0^t \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \quad \tan \theta = f'(t) \quad (*)$$



(*) の第 2 式の辺々を第 1 式の辺々で割ると

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\rho g}{T_0} \int_0^t \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$k = \frac{\rho g}{T_0}$ とおくと (k は定数)，上式および (*) の第 3 式から

$$f'(t) = k \int_0^t \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

この両辺を t について微分すると

$$f''(t) = k\sqrt{1 + f'(t)^2}$$

t を x に置き換えると、条件に注意して

$$f'(0) = 0, \quad f''(x) = k\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

初期条件に注意して

$$\int \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} dx = k \int dx$$

$$\log\{f'(x) + \sqrt{1 + f'(x)^2}\} = kx$$

$$f'(x) + \sqrt{1 + f'(x)^2} = e^{kx}$$

上式から

$$-f'(x) + \sqrt{1 + f'(x)^2} = e^{-kx}$$

上の2式から

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}) \quad \text{ゆえに} \quad f(x) = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) + C$$

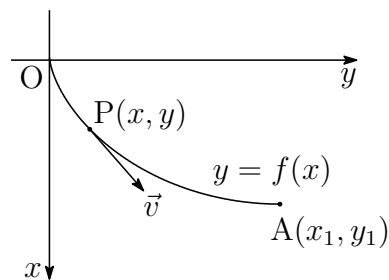
一般に、懸垂線の方程式は、 $C = 0$ として

$$y = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) \quad \text{または} \quad y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

と表記される。

2 最速降下曲線

最速降下曲線 (cycloid) について、数学扱う境界値 (極大値・極小値) 問題の手法を用いて、微分方程式を解いてみました。下の図では O と A を結ぶ経路に沿って質点が動くとき (初速度 0), O から A まで最短の時間で到着する経路に関する問題です。重力は x 軸方向にとります。



P の速さは $\sqrt{2gx}$, P における単位接ベクトルは $\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right)$
したがって, P における速度ベクトルは

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \sqrt{2gx} \left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right)$$

x 成分に注目すると

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gx}{1+y'^2}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}$$

O から A の移動に要する時間を T とすると

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} L_0(x, y') dx, \quad L_0(x, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}$$

最短経路の曲線を $y = f(x)$ とし, 必要な回数だけ微分可能な (試験) 関数 $\phi(x)$ を

$$\phi(0) = \phi(x_1) = 0$$

を満たすようにとる. また, 十分 0 に近い ε をとり,

$$L_\varepsilon(x, f'(x) + \varepsilon\phi'(x)) = \sqrt{\frac{1 + \{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)\}^2}{x}},$$

$$T_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} L_\varepsilon(x, f'(x) + \varepsilon\phi'(x)) dx$$

とすると

$$\begin{aligned} \frac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon} &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)\}\phi'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)\}^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[\frac{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)\}^2}} \phi(x) \right]_0^{x_1} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \left(\frac{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)\}^2}} \right)' \phi(x) dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \left(\frac{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \{f'(x) + \varepsilon\phi'(x)\}^2}} \right)' \phi(x) dx \end{aligned}$$

条件から, $\varepsilon = 0$ のとき, $\frac{dT_\varepsilon}{d\varepsilon} = 0$ であるから

$$\int_0^{x_1} \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right)' \phi(x) dx = 0 \quad (*)$$

が成立する.

$$F(x) = \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right)'$$

とおくと, (*) より

$$\int_0^{x_1} F(x)\phi(x) dx = 0 \quad (**)$$

$\phi(x)$ は $\phi(0) = \phi(x_1) = 0$ を満たす任意関数であるから、次式が成立する.

$$F(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq x_1)$$

実際、小区間 $\xi_1 < x < \xi_2$ において、 $F(x) > 0$ であると仮定すると、 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \xi_1) \\ (x - \xi_1)^2(\xi_2 - x)^2 & (\xi_1 \leq x \leq \xi_2) \\ 0 & (\xi_2 \leq x \leq x_1) \end{cases}$$

と選べば

$$\int_0^{x_1} F(x)\phi(x) dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(x)\phi(x) > 0$$

となり、(**) に反する.

注意 $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ で $\phi(x) = (x - \xi_1)(\xi_2 - x)$ とすると、 $\phi(x)$ は $x = \xi_1, \xi_2$ で連続ではあるが、微分可能ではない.

$F(x) = 0$ より、 $f'(x) > 0$ に注意して正の定数 a を用いて

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+f'(x)^2}} = \frac{1}{2a} \quad \text{すなわち} \quad f'(x) = \sqrt{\frac{x}{2a-x}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - (a-x)^2}}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - (a-x)^2}} dx \\ &= - \int \frac{a-x}{\sqrt{a^2 - (a-x)^2}} dx + a \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - (a-x)^2}} dx \\ &= -\sqrt{a^2 - (a-x)^2} + a \cos^{-1} \frac{a-x}{a} + C \end{aligned}$$

原点 O を通るから、 $C = 0$ である. ここで、 $\frac{a-x}{a} = \cos \theta$ とおくと¹、求める曲線は

$$x = a(1 - \cos \theta), \quad y = a(\theta - \sin \theta)$$

a は、点 $A(x_1, y_1)$ を通ることから定まる. これはサイクロイドであり、とくに力学ではこの曲線を最速降下曲線と呼んでいる.

¹工業高校の計算技術検定 1 級では、逆三角関数の微積が出題されている.

例1 2点を $O(0, 0)$, $A(2a, a\pi)$ とすると, 最速降下曲線 C は

$$x = a(1 - \cos \theta), \quad y = a(\theta - \sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

このとき, 降下時間 T は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{2a} \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{a(1 - \cos \theta)}} dx d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}{a(1 - \cos \theta)}} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \theta + a^2(1 - \cos \theta)^2}{a(1 - \cos \theta)}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{2a} d\theta = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \end{aligned}$$

例2 C 上の点 $B(a(1 - \cos \beta), a(\beta - \sin \beta))$ から初速度0で ($0 < \beta < \pi$), C に沿った $A(2a, \theta)$ までの降下時間 T' は, $x_B = a(1 - \cos \beta)$ とすると

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_B}^{2a} \sqrt{\frac{1+y'^2}{(x-x_B)}} dx = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_\beta^\pi \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{\cos \beta - \cos \theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_\beta^\pi \sqrt{\frac{2a \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_\beta^\pi \frac{\sqrt{a} \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta \end{aligned}$$

$$0 < \frac{\beta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2} \text{ であるから, } 0 \leq \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \leq 1 \text{ より } \cos \varphi = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad -\sin \varphi \frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\beta}{2}} \quad \begin{array}{c|c} \theta & \beta \rightarrow \pi \\ \hline \varphi & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_\beta^\pi \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}}} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{a} \sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{a} d\varphi = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \end{aligned}$$

例1と例2から, $T = T'$, すなわち, 等時性が成立する. これから, サイクロイド曲線上の運動は, 周期振動である (振動の幅に依らない). 上昇するときの時間は, 上の定積分の上端と下端を入れ替えることで T を得る.

サイクロイドは、直線上を円が転がるときに、円のある一点が描く曲線であるが、直線の上側を転がる時は上に凸の曲線(九大理系2010年)であり、直線の下側は転がる時は下に凸の曲線となる。最速降下曲線は下に凸のサイクロイドである。

2.1 上に凸のサイクロイド

円上の点 $P(x, y)$ について、円が角 t だけ回転したとき、円の中心を C 、 x 軸との接点を T とする。このとき、 $OT = \widehat{TP} = at$ であるから

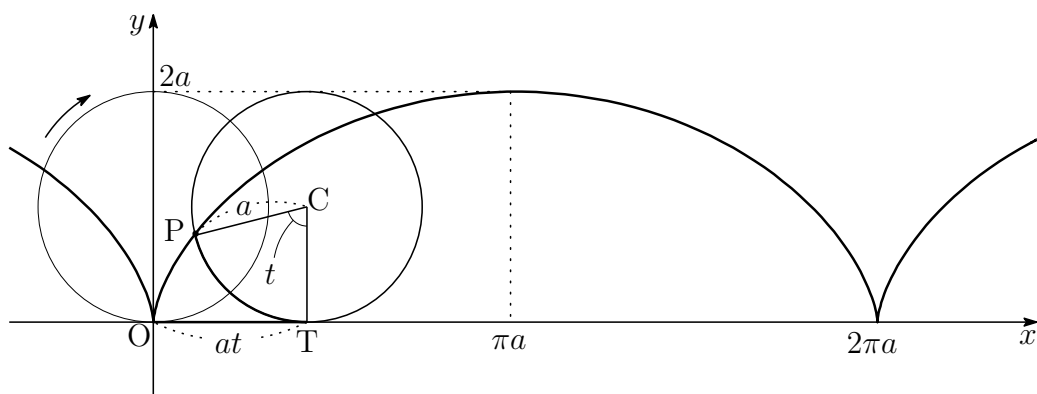
$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix}$$

また \vec{CP} は、 \vec{CT} を $-t$ だけ回転したものであるから

$$\begin{aligned} \vec{CP} &= \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix} \vec{CT} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ -a \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OC} + \vec{CP} \\ &= \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \sin t \\ -a \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

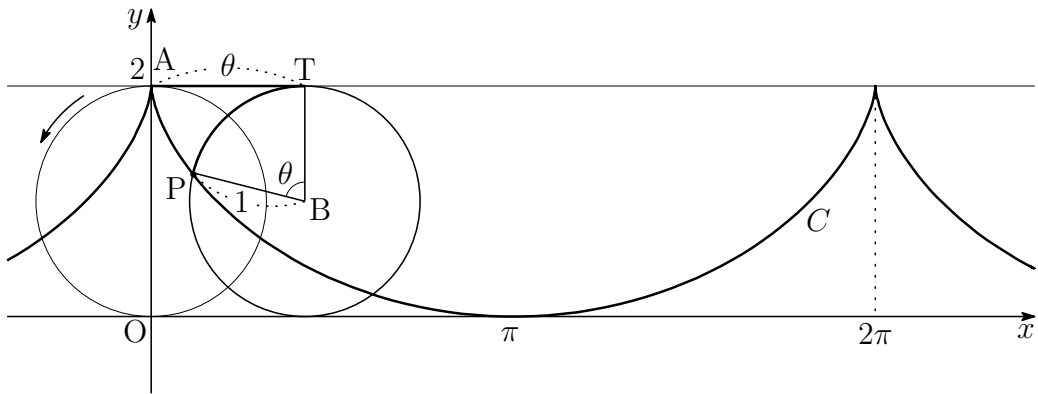


2.2 下に凸のサイクロイド

下の図の半径1の円上の点 $P(x, y)$ について、円が角 θ だけ回転したとき、円の中心を B 、直線 $y = 2$ との接点を T とする。このとき、 $AT = \widehat{PT} = \theta$ であり、 \vec{BP} は \vec{BT} を θ だけ回転させたものであるから

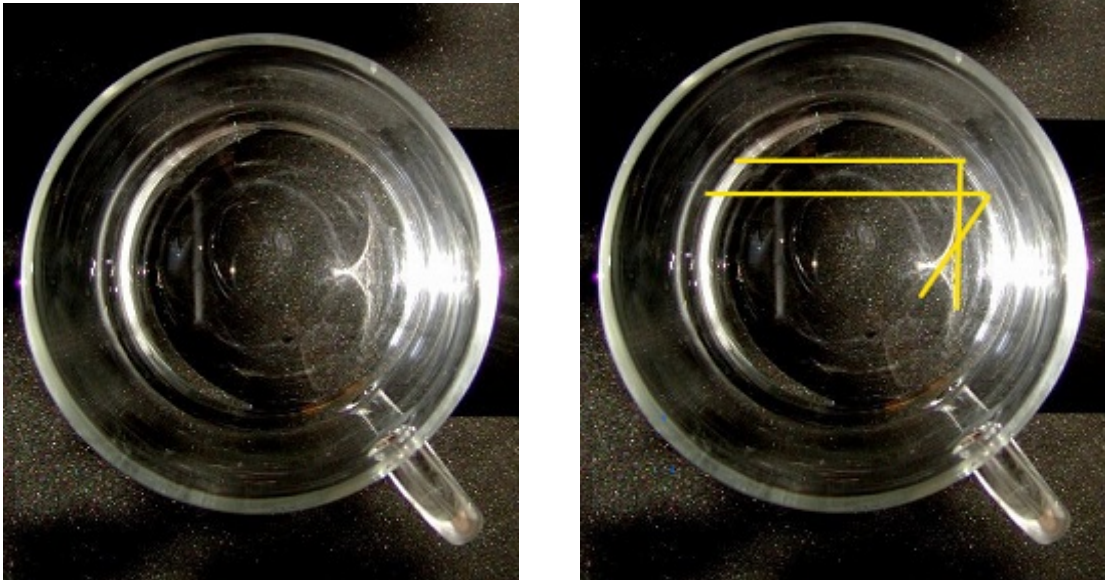
$$\vec{OB} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BP} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

よって $\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - \sin \theta \\ 1 + \cos \theta \end{pmatrix}$



3 焦線

円柱型のガラスコップを太陽光の当てると、写真のようにコップの内側に明るく光る曲線が現れます。この曲線を焦線 (caustic) といい、数学では外サイクロイド (epicycloid) の一つとして扱っています。

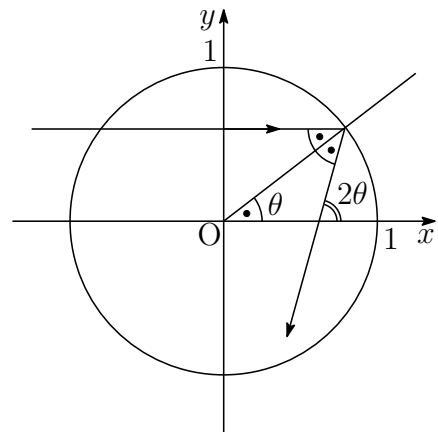


コップを原点を中心とする半径 1 の円とし、下の図のように、 x 軸に平行な光線が、点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ で反射した光線 (直線の方程式) は、点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を通り、傾き $\tan 2\theta$ の直線であるから

$$y - \sin \theta = (\tan 2\theta)(x - \cos \theta)$$

これを整理すると

$$(*) \quad x \sin 2\theta - y \cos 2\theta = \sin \theta$$



光線の包絡線上の点を $P(x(\theta), y(\theta))$ とすると、 P は $(*)$ 上の点であるから

$$x(\theta) \sin 2\theta - y(\theta) \cos 2\theta = \sin \theta \quad (1)$$

また、包絡線の接ベクトル $(x'(\theta), y'(\theta))$ は、 $(*)$ の法ベクトルと垂直であるから

$$x'(\theta) \sin 2\theta - y'(\theta) \cos 2\theta = 0 \quad (2)$$

(1) を θ で微分すると

$$x'(\theta) \sin 2\theta - y'(\theta) \cos 2\theta + 2x(\theta) \cos 2\theta + 2y(\theta) \sin 2\theta = \cos \theta \quad (3)$$

(2) を (3) に代入すると

$$2x(\theta) \cos 2\theta + 2y(\theta) \sin 2\theta = \cos \theta \quad (4)$$

(1), (4) から

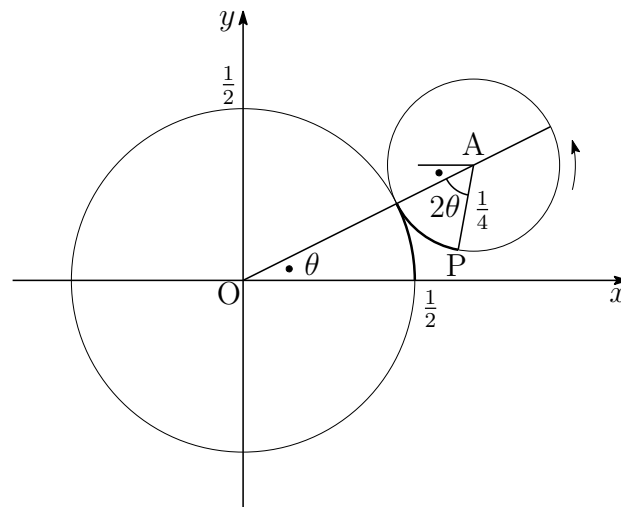
$$\begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ 2 \cos \theta & 2 \sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -2 \cos \theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta + \sin 2\theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ \sin 3\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

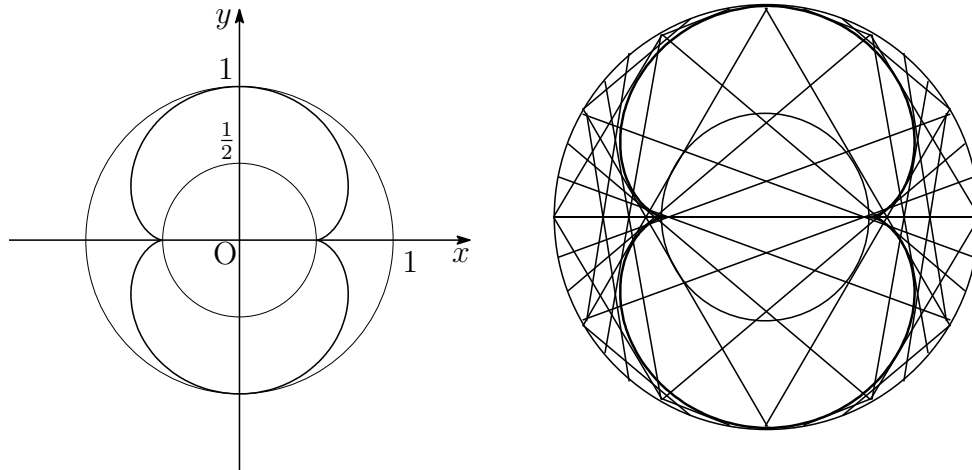
$P(x(\theta), y(\theta))$ の描く図形は、半径 $\frac{1}{2}$ の基準円と半径 $\frac{1}{4}$ の動円の外サイクロイド曲線 (epicycloid) である。特に、動円の半径が基準円の半径の $\frac{1}{2}$ である曲線のことを焦線 (caustic) という。

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos(\pi + 3\theta) \\ \sin(\pi + 3\theta) \end{pmatrix}$$



$P(x(\theta), y(\theta))$ の表す軌跡を $-\pi \leq \theta \leq \pi$ で描くと次の様になります (円は補助線).
 焦線 (caustic) は $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で, y 軸の右側になります.

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ \sin 3\theta \end{pmatrix}$$



おわりに

SSH 事業においてこれらの研究テーマは, 理論値と実験値のデータに基づいた検証可能なものであると考えられます. 懸垂曲線や焦線については, 写真で記録した実測値と数式で得られた理論値との検証が可能であると考えられます.

また, 最速降下曲線における等時性 (例 1, 例 2) の実験においても初期条件を変えながらデータを積み上げ, データサイエンスに基づいた分析を行うことも可能です.

2023 年 3 月 9 日
 数学科 西村信一